

Inhaltsverzeichnis

1	Prolog: 3000 Jahre Analysis	1
1.1	Was ist Analysis?	3
1.2	Vorläufer von π	4
1.3	Das π der Bibel	7
1.4	Volumen eines Pyramidenstumpfes	8
1.5	Babylonische Näherung an $\sqrt{2}$	13
2	Das Kontinuum in der griechisch-hellenistischen Antike ...	15
2.1	Die Griechen formen die Mathematik	18
2.1.1	Der Beginn: Thales von Milet und seine Schüler	19
2.1.2	Die Pythagoreer	21
2.1.3	Die Proportionenlehre des Eudoxos in Euklids Elementen	27
2.1.4	Die Methode der Exhaustion – Integration auf griechisch	33
2.1.5	Das Problem der Kontingenzwinkel	37
2.1.6	Die drei großen klassischen Probleme	38
2.2	Kontinuum versus Atome – Infinitesimale versus Indivisible ..	47
2.2.1	Die Eleaten	48
2.2.2	Atomismus und Kontinuum	49
2.2.3	Indivisible und Infinitesimale	51
2.2.4	Die Zenonschen Paradoxien	54
2.3	Archimedes	59
2.3.1	Leben, Tod und Anekdoten	59
2.3.2	Das Schicksal der archimedischen Schriften	67
2.3.3	Die Methodenschrift: Zugang hinsichtlich der mechanischen Sätze	71
2.3.4	Die Quadratur der Parabel durch Exhaustion	76
2.3.5	Über Spiralen	80
2.3.6	Archimedes fängt π	84
2.4	Die Beiträge der Römer zur Analysis	86
2.5	Aufgaben zu Kapitel 2	89

3	Wie Wissen wanderte – Vom Orient zum Okzident	91
3.1	Der Niedergang der Mathematik und die Rettung durch die Araber	93
3.2	Die Beiträge der Araber zur Analysis	98
3.2.1	Avicenna (Ibn Sīnā): Universalgelehrter im Orient	98
3.2.2	Alhazen (Al-Haiṭam): Physiker und Mathematiker	99
3.2.3	Averroës (Ibn Rušd): Aristoteliker im Islam	106
3.3	Aufgaben zu Kapitel 3	108
4	Kontinuum und Atomistik in der Scholastik	109
4.1	Der Wiederbeginn in Europa	111
4.2	Die große Zeit der Übersetzer	120
4.3	Das Kontinuum in der Scholastik	127
4.3.1	Robert Grosseteste	130
4.3.2	Roger Bacon	131
4.3.3	Albertus Magnus	133
4.3.4	Thomas Bradwardine	136
4.3.5	Nicole Oresme	142
4.4	Scholastische „Abweichler“	148
4.5	Nicolaus von Kues	150
4.5.1	Die mathematischen Werke	152
4.6	Aufgaben zu Kapitel 4	156
5	Indivisible und Infinitesimale in der Renaissance	157
5.1	Renaissance: Die Wiedergeburt der Antike	159
5.2	Die Schwerpunktrechner	162
5.3	Johannes Kepler	170
5.3.1	Neue Stereometrie der Fässer	190
5.4	Galileo Galilei	195
5.4.1	Der Umgang Galileis mit dem Unendlichen	203
5.5	Cavalieri, Guldin, Torricelli und die hohe Kunst der Indivisiblen	208
5.5.1	Die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri	212
5.5.2	Die Kritik durch Guldin	220
5.5.3	Die Kritik durch Galilei	221
5.5.4	Torricellis scheinbares Paradoxon	222
5.5.5	De Saint-Vincent und die Fläche unter der Hyperbel	224
5.6	Aufgaben zu Kapitel 5	233

6	An der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert	235
6.1	Analysis vor Leibniz in Frankreich	237
6.1.1	Frankreich an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert	237
6.1.2	René Descartes	240
6.1.3	Pierre de Fermat	250
6.1.4	Blaise Pascal	260
6.1.5	Gilles Personne de Roberval	273
6.2	Analysis vor Leibniz in den Niederlanden	279
6.2.1	Frans van Schooten jr.	281
6.2.2	René François Walther de Sluse	281
6.2.3	Johann van Waveren Hudde	283
6.2.4	Christiaan Huygens	286
6.3	Analysis vor Newton in England	289
6.3.1	Die Entdeckung der Logarithmen	289
6.3.2	England an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert .	290
6.3.3	John Napier und die Napierschen Logarithmen	294
6.3.4	Henry Briggs und seine Logarithmen	301
6.3.5	England im 17. Jahrhundert	312
6.3.6	John Wallis und die Arithmetik des Unendlichen	315
6.3.7	Isaac Barrow und die Liebe zur Geometrie	325
6.3.8	Die Entdeckung der Reihendarstellung des Logarithmus durch Nicolaus Mercator	332
6.3.9	Die ersten Rektifizierungen: Harriot und Neile	337
6.3.10	James Gregory	346
6.4	Analysis in Indien	347
6.5	Aufgaben zu Kapitel 6	351
7	Newton und Leibniz – Giganten und Widersacher	353
7.1	Isaac Newton	355
7.1.1	Kindheit und Jugend	355
7.1.2	Der Student in Cambridge	358
7.1.3	Der Lucasische Professor	366
7.1.4	Alchemie, Religion und die große Krise	370
7.1.5	Newton als Präsident der Royal Society	375
7.1.6	Das Binomialtheorem	377

7.1.7	Die Fluxionsrechnung	378
7.1.8	Der Hauptsatz	381
7.1.9	Kettenregel und Substitutionen	383
7.1.10	Das Rechnen mit Reihen	383
7.1.11	Integration durch Substitution	385
7.1.12	Newtons letzte Arbeiten zur Analysis	387
7.1.13	Differentialgleichungen bei Newton	387
7.2	Gottfried Wilhelm Leibniz	389
7.2.1	Kindheit, Jugend und Studium	389
7.2.2	Leibniz in Mainzer Diensten	392
7.2.3	Leibniz in Hannover	395
7.2.4	Der Prioritätsstreit	401
7.2.5	Erste Erfolge mit Differenzenfolgen	405
7.2.6	Die Leibnizsche Notation	407
7.2.7	Das charakteristische Dreieck	411
7.2.8	Die unendlich kleinen Größen	414
7.2.9	Das Transmutationstheorem	418
7.2.10	Das Kontinuitätsprinzip	421
7.2.11	Differentialgleichungen bei Leibniz	423
7.3	Erste Kritik: George Berkeley	424
7.4	Aufgaben zu Kapitel 7	427
8	Absolutismus, Aufklärung, Aufbruch zu neuen Ufern	429
8.1	Historische Einführung	431
8.2	Jakob und Johann Bernoulli	439
8.2.1	Die Variationsrechnung	444
8.3	Leonhard Euler	448
8.3.1	Der Funktionsbegriff bei Euler	460
8.3.2	Das unendlich Kleine bei Euler	462
8.3.3	Die trigonometrischen Funktionen	465
8.4	Brook Taylor	467
8.4.1	Die Taylor-Reihe	469
8.4.2	Bemerkungen zur Differenzenrechnung	470
8.5	Colin Maclaurin	471
8.6	Die Algebraisierung beginnt: Joseph-Louis Lagrange	471

8.6.1	Lagranges algebraische Analysis	472
8.7	Fourier Reihen und mehrdimensionale Analysis	475
8.7.1	Joseph Fourier	475
8.7.2	Frühe Diskussionen um die Schwingungsgleichung	477
8.7.3	Partielle Differentialgleichungen und mehrdimensionale Analysis	478
8.7.4	Eine Vorausschau: Die Bedeutung der Fourier-Reihen für die Analysis	479
8.8	Aufgaben zu Kapitel 8	484
9	Auf dem Weg zu begrifflicher Strenge im 19. Jahrhundert	485
9.1	Vom Wiener Kongress zum Deutschen Kaiserreich	489
9.2	Die Entwicklungslinien der Analysis im 19. Jahrhundert	497
9.3	Bernhard Bolzano und die Paradoxien des Unendlichen	497
9.3.1	Bolzanos Beiträge zur Analysis	500
9.4	Die Arithmetisierung der Analysis: Cauchy	503
9.4.1	Grenzwert und Stetigkeit	508
9.4.2	Die Konvergenz von Folgen und Reihen	509
9.4.3	Ableitung und Integral	512
9.5	Die Entwicklung des Integralbegriffs	514
9.6	Die finale Arithmetisierung der Analysis: Weierstraß	521
9.6.1	Die reellen Zahlen	524
9.6.2	Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Konvergenz	525
9.6.3	Gleichmäßigkeit	527
9.7	Richard Dedekind und seine Wegbegleiter	529
9.7.1	Die Dedekindschen Schnitte	536
9.8	Aufgaben zu Kapitel 9	542
10	An der Wende zum 20. Jahrhundert: Mengenlehre und die Suche nach dem wahren Kontinuum	543
10.1	Von der Gründung des Deutschen Kaiserreiches zu den Weltkatastrophen	546
10.2	Der heilige Georg erlegt den Drachen: Cantor und die Mengenlehre	551
10.2.1	Cantors Konstruktion der reellen Zahlen	561
10.2.2	Cantor und Dedekind	562
10.2.3	Die transfiniten Zahlen	570

10.2.4 Die Rezeption der Mengenlehre	573
10.2.5 Cantor und das unendlich Kleine	574
10.3 Auf der Suche nach dem wahren Kontinuum: Paul Du Bois-Reymond	575
10.4 Auf der Suche nach dem wahren Kontinuum: Die Intuitionisten	577
10.5 Vektoranalysis	582
10.6 Differentialgeometrie	585
10.7 Gewöhnliche Differentialgleichungen	587
10.8 Partielle Differentialgleichungen	590
10.9 Die Analysis wird noch mächtiger: Funktionalanalysis	592
10.9.1 Grundbegriffe der Funktionalanalysis	592
10.9.2 Ein geschichtlicher Abriss der Funktionalanalysis	596
10.10 Aufgaben zu Kapitel 10	605
11 Ein Kreis schließt sich: Infinitesimale in der Nichtstandardanalysis	607
11.1 Vom Kalten Krieg bis heute	611
11.1.1 Computer und Sputnikschock	613
11.1.2 Der „Kalte Krieg“ und sein Ende	615
11.1.3 Bologna-Reform, Krisen, Terrorismus	616
11.2 Die Wiedergeburt der unendlich kleinen Zahlen	618
11.2.1 Die Infinitesimalmathematik im „schwarzen Buch“	620
11.2.2 Die Nichtstandardanalysis von Laugwitz und Schmieden	623
11.3 Robinson und die Nichtstandardanalysis	625
11.4 Nichtstandardanalysis durch Axiomatisierung: Der Ansatz von Nelson	627
11.5 Nichtstandardanalysis und glatte Welten	628
11.6 Aufgaben zu Kapitel 11	634
12 Analysis auf Schritt und Tritt	635
Literatur	647
Abbildungsverzeichnis	663
Personenverzeichnis mit Lebensdaten	683
Sachverzeichnis	693