2

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Nombres algébriques et nombres transcendants

par Gilbert ARSAC, IREM de Lyon

1) HISTORIQUE

La notion de nombre **algébrique réel** et celle, corrélative, de nombre **transcendant**, ont leur origine dans le problème de la *quadrature du cercle*. En effet, ce problème est à l'origine de recherches sur le nombre π. En 1737, Lambert montrait que π est *irrationnel* en démontrant que, si x était rationnel, tgx était irrationnel (1) : comme $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{\pi}{4}$ n'est pas rationnel, donc π ne l'est pas. Legendre conjecture alors que π n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. Ceci conduit les mathématiciens à poser les définitions suivantes :

Définitions :

1) On dit qu'un nombre réel ou complexe α est algébrique s'il existe un polynome $P(x)$ à coefficients entiers non tous nuls (de signe quelconque) tel que $P(\alpha) = 0$.

2) On dit qu'un nombre réel ou complexe est transcendant s'il n'est pas algébrique.

---

(1) La démonstration de Lambert repose sur le développement en *fraction continue* de tgx.

Dans la définition qui précède, on peut évidemment remplacer la condition "à coefficients entiers" par la condition "à coefficients rationnels". Ainsi, tout nombre rationnel α, étant solution de $x - \alpha = 0$, est algébrique. Si a est rationnel positif, $\sqrt{a}$ est algébrique car il est racine de $x^2 - a = 0$; en fait, jusqu'en 1844, personne ne fut en mesure de prouver l'existence de nombres transcendants, et la conjecture de Legendre ne fut démontrée qu'en 1882 par Lindemann.

Notons, toujours à propos de la définition des nombres algébriques, que Dedekind montra, vers 1870, que l'ensemble de ces nombres forme un corps.

Nous allons étudier maintenant les deux découvertes clés sur cette question : la démonstration de l'existence de ces nombres transcendants par Liouville en 1844, démonstration qui consiste à exhiber explicitement une famille de nombres transcendants, et l'autre démonstration d'existence de ces nombres transcendants par Dedekind et Cantor (1873), qui ne donne pas, elle, d'exemple de tels nombres, mais qui est la première application à l'analyse de la notion de puissance d'un ensemble de nombres.

Notons, pour terminer ces remarques historiques, que la transcendance de e fut prouvée par Hermite en 1873 et que la démonstration par Lindemann de la transcendance de π mettait le point final au problème de la quadrature du cercle, car on savait démontrer que tout nombre "constructible" (par la règle et le compas) est algébrique.

2) LES NOMBRES DE LIOUVILLE

L'idée de base de la construction de Liouville est de montrer que la suite des valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut d'un nombre algébrique non décimal possède une certaine propriété (proposition ci-dessous), puis d'exhiber des nombres réels (les nombres de Liouville) dont le développement décimal ne possède pas cette propriété : ce seront donc des nombres transcendants.

Soit donc α un nombre algébrique *non décimal* racine de l'équation $P(x) = 0$ où :

$$P(x) = a_0\, x^m + a_1\, x^{m-1} + \dots + a_{m-1}\, x + a_m \qquad (a_i \in \mathbf{Z},\ a_0 \neq 0)$$

Soit, d'autre part, $u_n = \frac{k_n}{10^n}$ $(k_n \in \mathbf{Z})$ la suite des valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut de α. Comme α n'est pas décimal, la suite (u_n) prend une infinité de valeurs ; on peut donc assurer que, à partir d'un certain rang, u_n est distinct de toutes les racines de $P(x) = 0$ (car ces racines sont en nombre fini) ; soit N_0 ce rang :

$$n > N_0 \longmapsto P(u_n) \neq 0.$$

Remarquons que, par réduction au même dénominateur, on voit que $P(u_n) = \frac{A}{10^{nm}}$ avec $A \in Z_*$ si $n > N_0$. On va majorer $P(u_n)$ en utilisant la formule des accroissements finis sur $]u_n, \alpha[$:

$$P(u_n) = P(u_n) - P(\alpha) = (u_n - \alpha)\, P'(c) \text{ avec } c \in \,]\,u_n, \alpha\,[.$$

Pour majorer $P'(c)$, on majore d'abord c :

$$|c| = |(c-\alpha) + \alpha| \leqslant |c-\alpha| + |\alpha| < \alpha - u_n + |\alpha| < 1 + |\alpha|.$$

D'où

$$|P'(c)| = |m\, a_0\, c^{m-1} + \dots + a_{m-1}|$$
$$|P'(c)| \leqslant m|a_0|\,(|\alpha|+1)^{m-1} + \dots + 2|a_{m-2}|\,(|\alpha|+1) + |a_{m-1}|.$$

Soit $K = m\,|a_0|\,(|\alpha|+1)^{m-1} + \dots + |a_{m-1}|$, constante qui dépend de P et de α mais non de n. Comme, d'autre part, $|A| \geqslant 1$, on obtient :

$$\frac{1}{10^{mn}} \leqslant |\,P(u_n)\,| < K\,(\alpha - u_n)$$

et finalement : $\alpha - u_n > \frac{1}{K.10^{mn}}$ pour tout $n > N_0$. On peut rendre le résultat plus joli (sans que ce soit indispensable pour la suite) en remarquant que l'on peut trouver un naturel N_1 plus grand que N_0 tel que, pour tout n plus grand que N_1, on ait $10^n > K$, donc $\alpha - u_n > \frac{1}{10^{(m+1)n}}$. On a donc établi la proposition suivante :

Proposition : Soit α un nombre algébrique non décimal. Si α est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré m, la suite (u_n) de ses valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut vérifie, à partir d'un certain rang, l'inégalité :

$$\alpha - u_n > \frac{1}{10^{(m+1)n}}$$

Considérons alors un nombre réel : $\alpha = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{a_h}{10^{h!}}$ où les a_h sont naturels, compris entre 0 et 9, non tous nuls à partir d'un certain rang ; autrement dit, α est donné par un développement décimal où seules les décimales dont le rang est une factorielle peuvent être non nulles :

$$\alpha = 0, a_1\ a_2\ 000\ a_3\ 00000000000000000\ a_4\ 0\ldots.$$

rangs : 1! 2! 3! 4! ....

La valeur approchée par défaut $u_{n!}$ de α à $\frac{1}{10^{n!}}$ près est, par définition :

$$u_{n!} = 0, a_1\ a_2\ 000\ a_3\ 0\ldots\ldots\ldots\ a_n$$

et

$$\alpha - u_{n!} = 0,000\ldots\ldots\ldots 00\ldots a_{n+1}\ 0\ldots\ldots a_{n+2}\ldots$$

où a_{n+1} qui figure au rang "(n+1)! " est la première décimale éventuellement non nulle du développement. On a donc :

$$\alpha - u_{n!} < \frac{1}{10^{(n+1)!-1}}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si α était algébrique, on aurait, d'après la proposition, pour tout n supérieur à un certain naturel :

$$\frac{1}{10^{(m+1)\,n!}} < \alpha - u_{n!} < \frac{1}{10^{(n+1)!-1}}$$

(où m est le degré d'une équation dont α est racine)

D'où

$$(m+1)\,n! > (n+1)! - 1,$$

et

$$m > n - \frac{1}{n!} > n - 1$$

ce qui est absurde puisque m est fixé alors que n peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on le veut. Ainsi α est nécessairement transcendant. Les nombres transcendants de ce type sont appelés nombres de Liouville.

Remarquons que, si au nombre de Liouville $\alpha = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{a_h}{10^{h!}}$, on associe le nombre $F(\alpha) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{a_h}{10^{h}}$, on obtient une bijection de l'ensemble des nombres de Liouville sur l'intervalle $]0,1]$.

Cet ensemble de nombres transcendants a donc *la puissance du continu.*

3) LA DEMONSTRATION DE CANTOR ET DEDEKIND

Nous avons vu plus haut que Dedekind s'était intéressé à la structure de l'ensemble des nombres algébriques. Cantor lui ayant communiqué ses recherches sur la puissance de l'ensemble des nombres réels, Dedekind songe aussitôt à résoudre, pour les nombres algébriques, le problème analogue au problème soulevé par Cantor pour les nombres réels : L'ensemble des nombres algébriques peut-il, comme celui des nombres rationnels, être mis en bijection avec N ? Il découvre très rapidement que la réponse est affirmative, grâce à la remarque suivante :

Pour tout $p \in N$, $p \geqslant 2$, soit E_p l'ensemble des nombres algébriques racines d'une équation à coefficients entiers $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$ dont les coefficients vérifient de plus :

$$m + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_m| = p$$

Comme m, $|a_0|, \ldots, |a_m|$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, l'ensemble d'équations considéré est fini, donc E_p est fini. L'ensemble des nombres algébriques, étant évidemment réunion (non disjointe) des E_p, apparaît comme une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc *est dénombrable*.

Comme Cantor démontre dans le même temps que l'ensemble des nombres réels ne peut pas être mis en bijection avec N, il en résulte nécessairement qu'il existe des nombres transcendants réels. C'est la première application, brillante, de la notion de puissance d'un ensemble.

Bibliographie

Georges VALIRON : *Théorie des fonctions* (Masson et Cie, 1955).

Morris KLINE : *Mathematical thought from ancient to modern times* (New-York, Oxford University Press, 1972).