Тетрадь

ЛОГИКА

лекции Н. А. Шанина

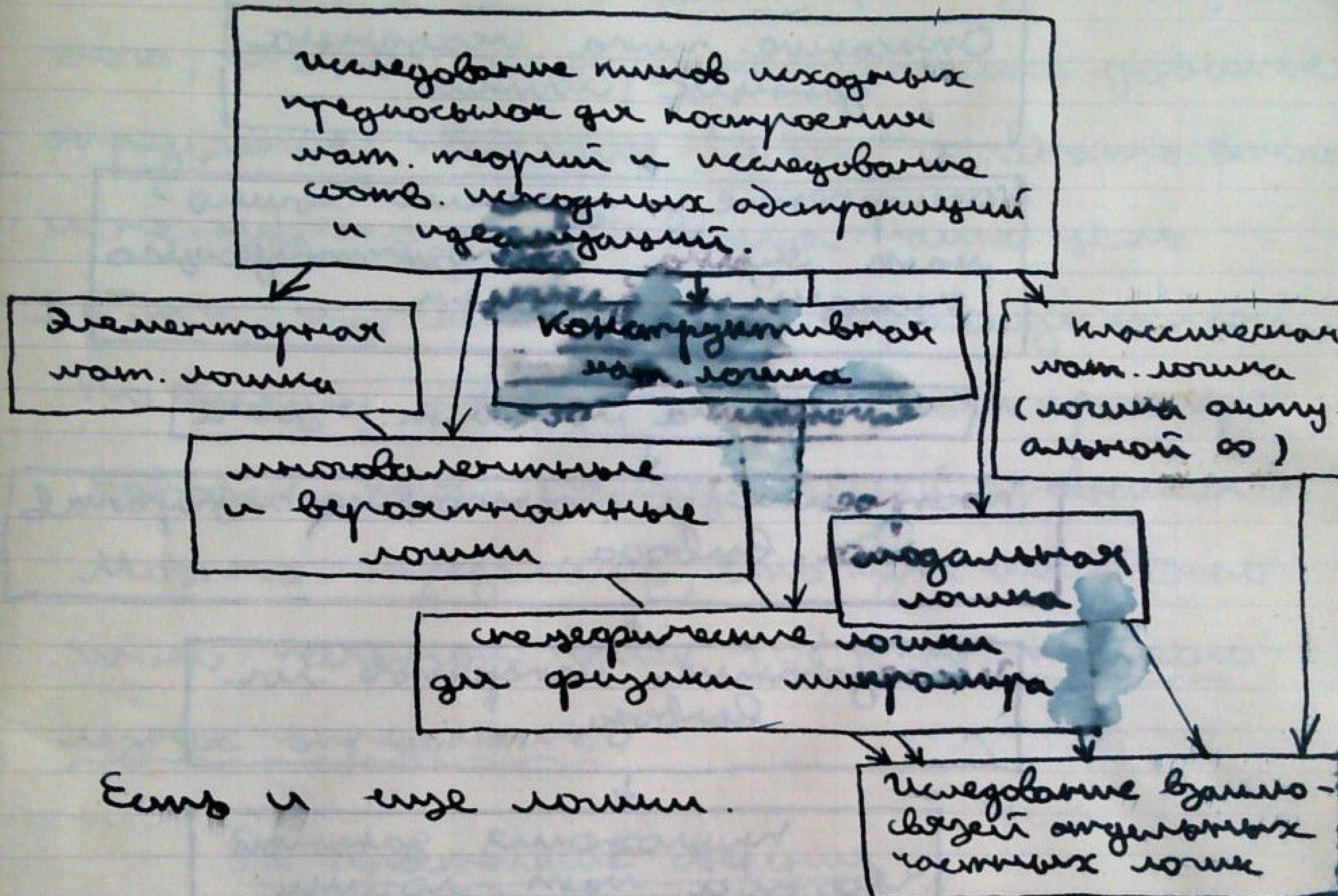
Н. Воробьев

Введение

Логика занимается исследованием устройства математических теорий. Этот раздел математики возник еще в древности. Большой вклад в развитие логики внесли Аристотель, Дж. Буль, Д. Гильберт, Б. Больц, Л. Э. Я. Брауэр, К. Гёдель (ныне здравствующий), Г. Генцен.

Логика – очень большая наука. Ее строение (неполное) представлено на следующей схеме.

Схема мат. логики



Есть и еще логики.

У всех разделов имеются приложения внутри математики, техники, физики, биологии, лингвистики и др.

В этом курсе в центре внимания будет находиться <u>элементарная</u> мат. логика и, частично, конструктивная логика.

Схема строения частной логики:

Описание типа исходных данных логики

↓

Построение и изучение логико-мат. языка, соответствующего исходным данным.

↓

Семантика лог.-мат. языка

↓

Построение и обоснование аппаратов лог. вывода.

↓

Исследование аппаратов лог. вывода

↓

Приложения данной частной мат. логики

Это, по сути дела, и программа данного курса, по отношению к элементарной мат. логике.

Понятия формулируются путем определений, но т.к. все их определить невозможно, то гораздо чаще они формулируются путем предыдущего использования термина. [В процессе обучения понятия усваиваются в порядке их важности, ср. „мама" и „прекрасное".]

Весь разговор об определениях ведется для того, чтобы у лектора не пытались добиться определения понятия „буква". Знать этого и не нужно, т.к. вообще наша цель (в т.ч. изучение логики) приблизительна.

По этому поводу, знаменитый пример: парадокс кучи (придуманный древними).

Можно определить, что куча песка это число песчинок более 10^4. Но это бесполезное определение.

§ 1 Простейшие сведения о знакосочетаниях.

Описание ∀ языка начинается с предъявления нек. знаков (эталонных букв) языка. Буквами считаются любые вещи „одинаковые" (с точностью до нек. деталей) с предъявленными. Предъявленные знаки назыв. алфавитом. Т.о. ∀ буква рассматривается как некоторое надёжное образование.

В качестве математических значков рассматривается небольшое число объектов, как правило, плоских, небольших и т.д. Мы вообще можем б их, как нек. физические объекты (т.о. можно говорить о правой части буквы и т.п.).

В связи с этим будем мыслить вокруг каждой буквы некоторый прямоугольник. т.о. $\forall$ эталонная буква имеет вид (например): $\boxed{a=}$. Пр. ч. отмечена „=", нижняя „'". Понятно, что в рассматриваемом алфавите буквы должны быть хорошо различимы.

Итак, $\exists$ задан нек. алфавит A

$\exists$ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - обозначения (не сами) буквы алфавита A. Сам алфавит мы мыслим в виде такой фигуры

$$\boxed{\xi_1 =}\boxed{\xi_2 =}\ldots\boxed{\xi_n =}.$$

Нас интересуют, однако, не столько буквы алфавита, сколько знакосочетания.

В математике в самые различные знако-соч. Чаще всего это линейные знакосоч.

(напр., $\int_a^b \sin x \, dx$ н.в.), но бывают и нелинейные (напр., матрицы, графы и т.п.)

Однако, в теоретических целях достаточно в линейных.

Вообще говоря, слова — это цепочки букв. В т.ч. в Λ — „пустое" слово.

Но это лишь предварительное определение, ниже дано более точное опр.

Все наши познават. процессы связаны с деятельностью. Если бы мы только наблюдали, то бы мы ничего и не умели.

Поэтому физика говорит, в основном, на языке процессов, действий („пойдем туда-то, измерим то-то...") Сам язык это тоже явление являющееся результатом деятельности. Поэтому в математике многие вещи определяются на языке действий, а не созерцательно.

так мы и будем опр. слово.

Сначала введем понятие „<u>стандартного порождающего процесса</u>".

СПП в алфавите A будем назыв. ∀ дискретный и прекращающийся после кон. шага процесс, 1ый шаг которого состоит в построении кон. буквы алф. A и каждый новый шаг состоит в построении слова от последней буквы результата непосредственно предшествующего шага, кон. буквы алфавита A.

Это т. н. „генетическое" определение.

Пример.

A

a	b	c

1 шаг	2 шаг	3 шаг	4 шаг	5 шаг
b	b	a	b	a

— это стандартный порождающий процесс (вернее он был продемонстрирован и завершился).

Результатом конкретного СПП назыв. результат последнего шага.

Словом в алфавите А назыв.

1) знак Λ (пустое слово)

2) результат ∀ потенциально осуществимого СПП в алфавите А.

Здесь нуждаются в пояснении „потенциальная осуществимость". При фактическом выполнении таких процессов неизбежны разные материальные препятствия, но в теории мы от этих препятствий абстрагируемся. Это и означает потенциальную осуществимость. т.о. мы допускаем т.н. идеализацию т.е. абстракцию потенциальной осуществимости.

В математике применяется еще и абстракция актуальной бесконечности. В этом случае все слова представляются уже существующими. Это более сильная абстракция. Но мы ее применять не будем, а ограничимся первой идеализацией.

Введем отношение „графического равенства" и „граф. различия" слов.

Пусть P, Q — слова в алф. A. Говоря описательно, P граф. равно Q, если они состоят из одинаковых букв, одинаково расположенных.

Более точное опр.:

Процессом побуквенного сравнения назыв. след. 1) сравниваем 1ую слева букву P и 1ую слева букву Q, если они различны, то процесс прекращается и его результат отрицательный, если они одинаковы, то 2) рассматриваем след. буквы. Здесь возможны 2 случая: 1. нет ни какой буквы в каждом из слов 2. в одном из них нет буквы, а в другом есть. 3. В каждом из слов есть буква, но они различны, 4. то же, что и 3., но они одинаковы. В 1ом сл. результат (+) и процесс обрываем, 2. результат (–) и проц. обрыв.

3. тоже 4. идем дальше, пока во 2ом шаге.

Будем говорить, что $P \overset{\text{граф}}{=} Q$ если процесс заканч. положительно и $P \overset{\text{граф}}{\neq} Q$ в противном случае.

Значки $\doteq$ и $\not\doteq$.

$P \doteq Q$ – P граф. равно Q

$P \not\doteq Q$ – P граф. отлично от Q.

По опред., $\Lambda \doteq \Lambda$; для $\forall P$ имеющего хотя бы одну букву, $P \not\doteq \Lambda$

Операция соединения слов (конкатенация)

] P и Q – слова в алф. A. Это приписывание к слову граф. равному слову P слова, граф равного слову Q. (мы говорим граф. равному, потому, что P м.б. написано в таком месте, что к нему ничего не припишешь, напр. в конце доски).

Результат соединения $\doteq PQ$.

легко видеть, что операция соедин. ассоциативна, т.е. нет нужды в скобках.

Ясно, что эта операция вообще говоря некоммутативна.

Дополн. определяем: $\Lambda P \equiv P$

$$P \Lambda \equiv P$$

Говорим, что слово P является началом слова Q, если можно построить такое слово R, что $Q \equiv PR$

Говорим, что слово P явл. собств. началом слова Q, если 1) P есть начало Q; 2) $P \not\equiv \Lambda$; 3) $P \not\equiv Q$.

Пример.

$Q \equiv abaccdb$

Список всех начал

$\underline{\Lambda}$, a, ab, aba, $abac$, $abacc$, $abaccd$, $\underline{abaccdb}$. Все начала, кроме 2х подчеркнутых — собственные.

Можно говорить о 1ом начале слова, 2ом и т.п.

$\exists$ A a, b, c, d

P $\equiv$ aca

Q $\equiv$ dc<u>aca</u>db<u>aca</u>

видно, что P входит в Q

Говорят, что P входит в Q, ~~если можно построить~~, если можно построить

R и S : Q $\equiv$ RPS

В нашем примере, R $\equiv$ dc ; S $\equiv$ dbaca.

Возможен, в примере, и другой вариант

R $\equiv$ dcacadb ; S $\equiv$ Λ

Чтобы определить понятие „конкретное вхождение", в букву *, не являющуюся буквой алфавита A. Тогда, в нашем примере, рассмотрим расширенный алфавит, включающий *. Тогда

dc*aca*dbaca или dcacad*aca*.

Вхождением слова P в слово Q будем назыв. слово R*P*S в расширенном алфавите, такое, что 1) R и S – слова в алф.

2) RPS $\equiv$ Q.

при этом R называется левым крылом данного вхождения, а S — правым крылом.

В изложении для краткости, пользуются другими обозначениями, напр., подчеркиванием.

Операция подстановки слова H вместо вхождения $R * P * S$ в слово Q. так называется слово RHS. Результат ⇌

$\llcorner Q \downarrow^{R*P*S}_{H} \lrcorner$

В нашем примере,

$\llcorner dcacadbacd \downarrow^{dc*aca*dbaca}_{ddbd} \lrcorner$ ⇌

dcddbddbacd.

Какой смысл имеет высказывание: ∃ слово обладающее такими-то св-вами?

Слова у нас — потенциально осуществимые объекты. Искать уже готовое слово м.б. безнадежным делом.

Итак, высказывание: „Существует слово X удовл. усл. U" мы понимаем, как возмож-

ность построить слово со св-вом U
Поэтому чаще всего мы будем говорить „осуществимо слово X удовл. усл. U."
Однако часто применяют первую формулировку, имея в виду вторую.

§ 2 Порождающие грамматики.

Пусть у нас имеется алфавит A, состоящий из букв, обозначенных $\xi_1, \ldots, \xi_N$.
Пусть, напр., нас интересуют „симметричные" слова. Мы, тогда, можем указать характерист. св-во этих слов.
Такой способ применяется, но редко.
Чаще всего просто налагаются ограничения на станд. порождающий процесс.

Исходим из данного алфавита A.
Добавим к A нек. новые буквы, которые будем называть „основными переменными" и $\div$ $p_1, \ldots, p_M$.
Через $\bar{A}$ - объединенный алфавит.

Слова в $\bar{A}$ будем называть словоформами в алфавите A.

Словоформа имеет вид

$G_0 p_{i_1} G_1 p_{i_2} \dots p_{i_n} G_n$, где

$G_0, G_1, \dots, G_n$ – слова в алф. A

p_{i_1} – буквы из доп. $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq M$

$\exists\ p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_k}$ – попарно различные схемные переменные, а

$S_1, \dots, S_k$ – любые слова в алф. A.

Таблицу

$\begin{pmatrix} p_{j_1}, \dots, p_{j_k} \\ S_1, \dots, S_k \end{pmatrix}$ назовем реализующим

набором (он характеризует выбранную подстановку.).

Теперь можно определить какие слова характеризуются данной словоформой.

Их можно описать так:

$\exists\ p_{j_1}, \dots, p_{j_k}$ – список без повторений схемных перем., входящих в $G_0 p_{i_1} \dots G_n$ и будем в всевозможные реализующие наборы и будем выполнять подстановку, вместо p_{j_1} — S_1, …, p_{j_k} — S_k. Так мы получим слово в алфавите A. Полученное слово назыв реализацией словоформы при помощи данного реализующего набора.

Но словоформы - это еще бедное средство. Совсем иначе обстоит дело, если мы будем использовать словоформы для правил преобразования.

] имеем словоформы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ и еще одну - Γ_0.] знаки , и $\vdash$ не входят в $\bar{A}$. Тогда знак

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \vdash \Gamma_0$ называется канонически порождающим правилом. Используется для порождения новых слов из уже порожденных.

Пример.

A $\boxed{a \mid b \mid c}$

$p_1 bc p_2, a p_2 c p_1 \vdash b a p_1 c p_2$

Например, разрешается переход от

aba bca и acacaba

к $\vdash$ bacacaba, здесь реализующий

набор $\begin{pmatrix} p_1, & p_2 \\ aba, & ca \end{pmatrix}$

Более точное опред.:

] $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Gamma_0$ — канонич. порожд. правило, $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_k}$ — список всех различных перем, встречающихся в канон. порожд. правиле.

] $S_1, \ldots, S_k$ — произв. список слов в A.

Реализ. данного правила посредством реализ. набора $\begin{pmatrix} p_{j_1}, \ldots, p_{j_k} \\ S_1, \ldots, S_k \end{pmatrix}$ называв. результат одновремен. подстановки S_1 вместо всех вхождений p_{j_1} и ... S_k вместо всех вхождений p_{j_k}.

Как это работает?

] $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Gamma_0$ — порожд. правило.

] $H_1, \ldots, H_k, H_0$ — нек. слова A.

Говорят, что H_0 непосредственно порождаемо из слов $H_1, \ldots, H_k$ посредством данного правила, если можно построить такой реализ. набор для данного правила, что реализация имеет вид $H_1, \ldots, H_k \vdash H_0$.

Посылки и заключения ($H_1, \ldots, H_n$ и H_0)

Правило назыв. начальным порожд. правилом назыв. такое, когда $n = 0$, а не нач. назыв. индуктивными.

Начальное правило обознач. $\vdash \Gamma_0$ и является правилом выделения слов в

(т. е. при помощи словосхемы)

первонач. списке (см нач. S).

В частности, м. б. такое правило $\vdash S$.

Теперь можно ввести понятие порождающей грамматики Поста. (Э. Пост.)

$\exists\ A_0, A_1$ – нек. алфавиты, не имеющие общих букв.

При этом A_1 м.б. пустым.

Порожд. грамм. Поста с основным алфавитом A_0 и доп. алф. A_1 назыв. любой конечный набор канонических порожд. правил составленных для объединения алфавитов A_0 и A_1 и такой, что в нем имеется хотя бы одно начальное порождающее правило. (Объедин. алфавитов $\rightleftharpoons A_0 \cup A_1$).

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_1^1, \ldots, \Gamma_{n_1}^1 \vdash \Gamma_0^1 \\ - - - - - - - \\ \Gamma_1^\lambda, \ldots, \Gamma_{n_\lambda}^\lambda \vdash \Gamma_0^\lambda \end{array}\right\} \text{такой вид имеет п.г.п.}$$

Порожд. процесс в этой грамматике шагов: на 1ом шаге применяется одно из начальных порожд. правил в этой грам., а каждый дальнейший шаг состоит в применении нек. порожд. правила к построенным на предыд. шагах словам.

порожд. процесс назыв. значащим, если результат последнего шага является словом в основном алфавите А.

Словами, порожд. данной грам. назыв. результаты, потенциально осуществимых, значащих порожд. процессов в данной грамматике.

Замеч.: ПГП назыв. также логическим исчислением.

То что здесь происходит обобщает то, что происходит в аксиоматических теориях. Поэтому здесь часто здесь используется „аксиоматическая" терминология: „аксиомы", „правила вывода", „выводимые слова" и т.д.

Пример:

1) A $\boxed{a \mid b}$ мы хотим выделить

слова: ab
aabb
aaabbb
.....

$\vdash ab \quad ; \quad p_1 \vdash ap_1b$

2) A a, b, c. Мы хотим определить слова, которые читаются одинаково с начала и с конца.

$\vdash a, \vdash b, \vdash c, \vdash aa, \vdash bb, \vdash cc$

$p_1 \vdash ap_1a, \quad p_1 \vdash bp_1b, \quad p_1 \vdash cp_1c$

3) Вернемся к примеру 1). Мы будем порождать нужные слова более сложным образом. — потом, см ↓

3') Лучше всего отказаться от общего понятия натурального числа. Лучше определить нат. числа для определенной числовой системы.

Понятие н. ч. введем следующей грамматикой: A 0, 1

$\vdash 0 \qquad p_1 \vdash p_1 1$

0
01
011

4) Построим грамматику, которая порождает целые степени числа 3: $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$

основной алфавит $\boxed{0 \mid 1}$ начальное прабыло: $\vdash 01$.

Введем букву + из вспомогательного алфавита.

$p_1 \vdash p_1 + p_1 + p_1$. Получается слово вида

$01+01+01$. Надо убрать $+0$

$p_1 + 0p_2 \vdash p_1 p_2$

01

$01+01+01$

След. шаг: $011+01$ след шаг 0111

$0111+0111+0111$

$0111+0111\,111$

$0111\,111\,111$

5) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

Найдем уамматику порождающую это множество.

$\exists$ уже построено n^2, как построить $(n+1)^2$?

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + n + (n+1)$

Будем порождать пары $n * n^2$

$\vdash 01 * 01$

$\underset{n^2}{p_1 1 * p_2} + \underset{n}{p_1} + \underset{n+1}{p_1 1}$

$p_1 * p_2 \vdash p_1 1 * p_2 + p_1 + p_1 1$

$p_1 + 0p_2 \vdash p_1 p_2$

$p_1 * p_2 \vdash p_2$

6) Перевод единичных чисел в двоичные

$\boxed{0 \mid 1 \mid 1 \mid *}$ — атомный алфавит

$\leq M$ — натуральное число

N — перевод числа M в двоичн. счет.

$\vdash 0 * 0$

$\exists$ построена пара $M * N$

Надо построить пару на ед. больше

$M1 * N'$

$p_1 * p_2 \vdash p_1 1 * p_2 \oplus 1$

$1011 \oplus 1$; $101 + 10$; $10 + 100$; 1100

$p_1 0 \oplus 1 p_2 \vdash p_1 1 p_2$

$p_1 1 \oplus 1 p_2 \vdash p_1 \oplus p 0 p_2$

$p_1 * \oplus 1 p_2 \vdash p_1 1 p_2$

<u>Упражнение</u>

1. Построить пары $S_1 * S_2$, S_2 обращение слова S_1

2. Построить грамматику, порождающую все простые числа

7) построить грамм., порождающую рац. числа в ед. числовой системе

M / N   M – целое

N – положит. целое

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \vdash 01 \\ 2)\ p_1 \vdash p_1 1 \end{array}\right\} \text{порождающая грамматика для положит. целых чисел}$$

Надо ввести отриц. целые числа – N

Введем β, γ, δ

β – метка, помечающая положит. целые числа

γ – метка для целых чисел

δ – метка для рац. чисел

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ p_1\beta \vdash p_1\gamma \\ 4)\ p_1\beta \vdash -p_1\gamma \\ 5)\ \vdash 0\gamma \end{array}\right\} \text{порожд. все целые числа}$$

6) $p_1\gamma \vdash p_1\delta$

7) $p_1\gamma,\ p_2\beta \vdash p_1/p_2\delta$

0	1	−	/

– основн.

β	γ	δ

– вспомог. алф.

8) $p_1\delta \vdash p_1$

можно не вводить δ =>

1)

⋮

5)

6) $p_1 \gamma \vdash p_1$

7) $p_1 \gamma,\ p_2 \beta \vdash p_1 / p_2$

Перепишем эту грамматику след. обр.:

$\vdash 0\,1\ \underbrace{\text{есть полож. целое число}}_{\beta}$

$p_1\ \underbrace{\text{есть пол. целое число}}_{\beta} \vdash p_1\,1\ \text{есть пол.}\ \underbrace{\text{целое число}}_{\beta}$

p_1 есть пол. цел. ч. $\vdash$ p_1 есть целое число

p_1 есть пол. цел. ч. $\vdash$ $-p_1$ есть целое число

⋮

В этой форме грамм. порождает тек. высказывание, которое по опред. считается истинным

Напоминается, что н.нн опред. 3 объектами 1. основным алф. A_0 2. доп. алф A_1 3. набор пороржд. правил.

Т мы хотим увеличивать набор определимых слов. Тогда нам придется изобретать новые буквы алф. A_1 и новые схемные переменные.

Эти трудности можно преодолеть

1) Можно ввести схемные перем. для всех грамматик единым образом.

Будем считать, что p, (,) не принадлежат $A_0 \cup A_1$. Схемными перем будем считать слова в алфавите $\boxed{p\,|\,(\,|\,)}$ вида

(p), (pp), (ppp), ...

В качестве их обозначений можно ввести

$p_1, p_2, p_3, \ldots$

2) На самом деле для каждой формальн. грамм. с алф A_0, A_1, можно построить эквивалентную грамматику, в которой A_1 состоит из 2х букв (даже из 1ой буквы, но это доказывается сложнее). Эквив. понимается в том смысле, что всякое значащее слово, порождаемое 1ой грамматикой порождается и 2ой.

Это конструктивная теорема здесь доказыв ваться и использоваться не будет.

На этом заканчиваем изучение порождающих грамматик. Мы будем систематически пользоваться ими.

В матем. важную роль играют процессы преобразов. слов. Из них особо важны алгорифмические процессы.

§ 3. О понятии алгорифма.

С порожд. грамматиками мы связываем процессы порождения. Эти процессы можно, по желанию, ветвить, во всяком случае иногда.

Однако, в математике б и такие процессы, протекание которых навсегда обусловлено некоторыми правилами. Эти процессы настолько разнообразны, что их, казалось бы трудно охватить единым понятием.

Однако в 1936 г., А. Тьюринг и Э. Пост построили независимо, теоретические модели выполняющие расчленение сложного выч. процесса на элементарные шаги.

Они ввели понятие „машины Тьюринга-Поста" или „алгоритмов Т.-П."

Здесь будет описана не первонач. вид машины, а ее нек. модификация. (Другую модификацию см. в курсе „Введение в вычислит. математику").

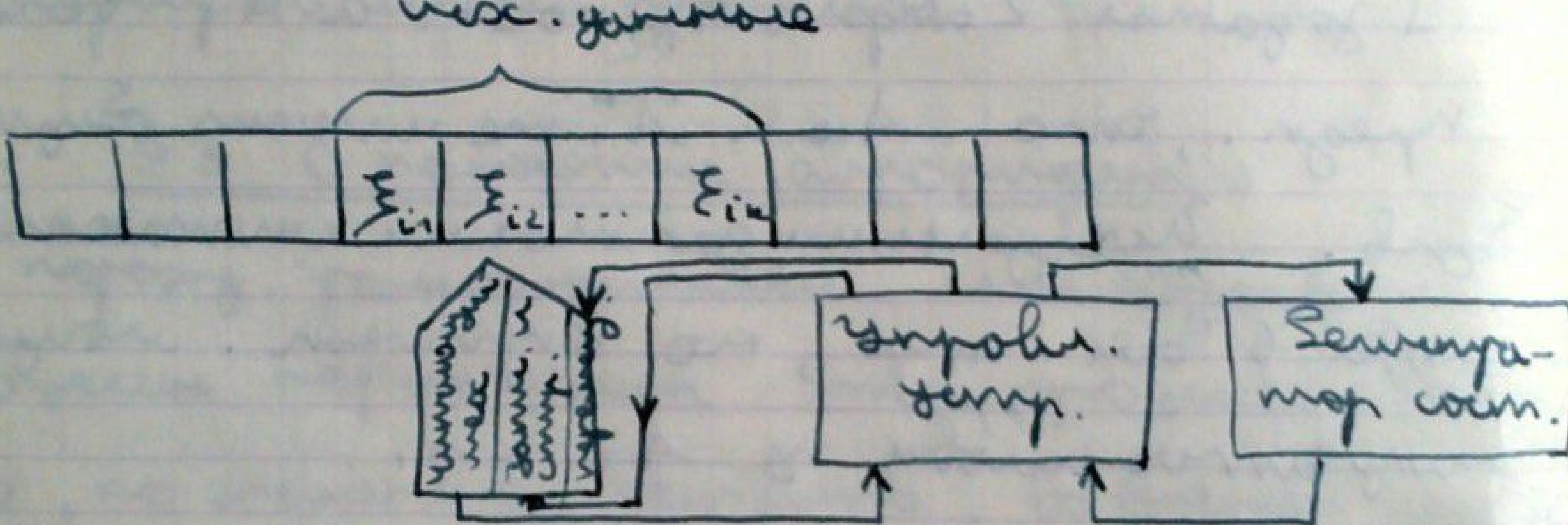
∃ заданы 2 алф. A_0 - осн. и A_1 - вспомог.

предп., что A_0 и A_1 не имеют общих букв. Исходными данными считаются слова в осн. алф., но в процесс. могут получаться слова из A_0 и A_1.

Процесс состоит в переходе от одного слова к другому, причем на каждом шаге меняется только одна буква и можем продвинуться по слову на одну букву влево или вправо. У наблюдателя, вычисл. процесс есть возможность реагировать на букву, которую он видит.

Более точно: предполаг., что процесс алфавитов имеется набор состояний $q_0, \dots, q_r$ т. е. дана таблица, в которой указано, как реагирует машина на ту букву, которую он видит.

∃ дана лента (конечная), разбитая на ячейки, в некоторых из них записаны исх. данные.



	ξ_1	ξ_2	ξ_3	…	ξ_r	□
q_0						
q_1						
⋮				$\xi_j q_k^{\varepsilon}$		
q_r						

□ - знак пустой клетки

ξ_j - новая буква

q_k - новое сост.

ε - команда сдвига

$$\varepsilon = \begin{cases} L - \text{вправо}, \\ C - \text{на месте}, \\ R - \text{влево}. \end{cases}$$

Возникает вопрос: насколько силен этот аппарат? Что можно сделать этими средствами?

Предполагается, что перед началом работы движок находится у крайнего левого конца ленты и машина приведена в состояние q_1. Первый шаг: машина читает 1ую букву и состояние q_1. Упр. уст.-во выраб. команду, которая в таблице на пересечении ξ_{i_1} и q_1.

] команда имеет вид $\xi_j q_h E$. Обозреваемая буква ξ_{i_1} замен. на ξ_j (а если в качестве ξ_j – пустая клетка, то эта клетка вырезается, а лента склеивается). Далее, в регистр состояний посылается q_h и выполняется E.

Возможен случай, когда движок выйдет за рамки написанного слова.

В этом случае считаем, что он видит $\square$.

На каждом шаге ленту можно нарастить. Мы ее считаем т.о. потенциально неогран.

маш. прекращает работу в 2х случаях:

1) выраб. команда q_0

2) в соотв. ячейке упр. уст-ва отсутствует команда.

Слово полученное на ленте и считается результатом применения машины к исх. данному. Оно считается значащим, если все буквы принадлежат A_0.

~~□ ...~~

Примеры маш. Тьюринга:

1) машина, переворачивающая ∀ слово в ~~на-нном~~ алфавите |a|b|c|

Напишем ∀ слово в алфавите

... bacсbc

$\wedge$

q_1

	a	b	c	*	□
q_1	$a q_2 L$	$b q_2 L$	$c q_2 L$		
q_2	~~$* q_3 R$~~	~~$* q_3 R$~~	~~$* q_3 R$~~		$* q_3 R$
q_3	выте-рать (□) $q_4 L$	□ q_5 L	□ q_4 L		□ $q_8 L$

⇓

q_4	$a q_4 L$	$b q_4 L$	$c q_4 L$	$* q_4 L$	$a q_7 R$
q_5	$a q_5 L$	$b q_5 L$	$c q_5 L$	$* q_5 L$	$b q_7 R$
q_6	$a q_6 L$	$b q_6 L$	$c q_6 L$	$* q_6 L$	$c q_7 R$
q_7	$a q_7 R$	$b q_7 R$	$c q_7 R$	$* q_3 R$	[illegible]
q_8				□ q_0 C	

```
0 шаг        b a c c b c
             ^
             q1

1 шаг      ^ b a c c b c
           q2

2 шаг      * b a c c b c
             ^
             q3

3 шаг      * a c c b c
           ^
           q5

4 шаг      * a c c b c
         ^
         q5

5 шаг    b * a c c b c
           ^
           q7
         - - - - - - -
```

Понятие машины Тьюринга-Поста является фундаментальным мат. понятием. В мат. есть понятия не существенные, вспомогательные. Есть понятия значительно более важные. Однако есть понятия фундаментальные. (В анализе - производная и т.п.). Понятие машины Т.-П. относится к этим последним, т.к. связано с фундаментальным открытием, именно, с расчленением сколь угодно сложных процессов на элементарные части.

Пример 2.

Машина Т.-П. складывающая числа в позиционной двоичной системе.

Осн. алф. | 0 | 1 | * | * - играет роль разде- знака для образов. по

∃ требуется сложить:

11001 * 1010
^
q_1

Вспомог. алфавит | a | b |

„a" будет играть роль „двойника" нуля

„b" ——— " ——— единицы

	0	1	*	a	b	□
q_1	$0q_1$ R	$1q_1$ R	$*q_1$ R	aq_1 R	bq_1 R	$□q_2$ L
q_2	$□q_3$ L	$□q_4$ L	$□q_6$ L			
q_3	$0q_3$ L	$1q_3$ L	$*q_5$ L			
q_4	$0q_4$ L	$1q_4$ L	$*q_6$ L			

11001 * 1010
$\hat{q}_1$

11001 * 1010
$\hat{q}_2$

q_3 – помним „0"
q_4 – —"— „1"

q_5 – помним „0"
q_6 – —"— „1"

11001 * 101
$\hat{q}_3$

– – – – – – – –

11001 * 101
$\hat{q}_5$

	0	1	a	b	*	□
q_5	$a q_1$ R	$b q_1$ R	$a q_5$ L	$b q_5$ L		$a q_1$ R
q_6	$b q_1$ R	$a q_7$ L	$a q_6$ L	$b q_6$ L		$b q_1$ R
q_7	$1 q_1$ R	$0 q_7$ L				$1 q_1$ R
q_8	$0 q_5$	$1 q_6$	$0 q_6$ L	$1 q_6$ L		$□ q_0$

q_7 – помним 1"
(„по своему")

... 1 *
$\hat{q}_6$

... a* ...
$\hat{q}_7$

$\Rightarrow P$

В итоге: ab ... bab *
$\hat{q}_1$

P *
$\hat{q}_2$

Что представляет собой понятие алгорифма Т.-П? Это описание определенного типа процессов построения знакосоч. Описание, удовлетвор. след. усл.:

1) Заданы 2 алфавита: основн и вспомог. и описанием предусматривается, что любое слово из $A_0 \cup A_1$ может быть исходными данными для осуществления конкретного процесса рассматриваемого типа.

2) Всякий раз, когда выбраны исх. данные процесс, характеризуемый данными описаниями, развертывается отдельными дискретными шагами, причем $\forall$ шаг детерминирован, т. е. однозначно определяется данным описанием и есть пок. сравн. простое и выполнимое без каких-либо актов угадывания (т. е. (вообще говоря) автоматическое) действие и непосредств. В качестве исх. данных ранее построен-

при знакосоч. и приводящее в свою очередь к построению нек. знакосоч.
3) Описание включает в себя нек. простое и легко провер. условие, характериз. заключительные шаги процессов данного типа.
Эти 3 пункта присущи не только машинам Т.-П., но и многим разнообр. описаниям конкретных типов процессов послед. постр. знакосоч.
Поэтому, когда математик применяет слово алгорифм (алгоритм) он понимает по этим конкр. тип процесса удовл. усл 1–3.
Алгорифмы, по своим воплощениям весьма разнообразны. Но фундаментальность достижения Т. и П. в том, что они догадались, что ∀ самый сложный вычисл. процесс можно заменить эквивалентным алгорифмом с предельно расчлененными шагами в виде маш. Т.-П.

Правда, в описании маш. Т.-П. есть и расплывчатые понятия.

⊐ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – 2 алгорифма с одним и тем же осн. алф. A_0 и быть может различными вспомог. алф. Говорят, что они эквив. относительно A_0, если выполн. усл.

1) Всякий раз, когда алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к какому-либо слову P в A_0 (т.е. кончает работу) и имеет своим результ. так же слово в A_0, алгорифм $\mathfrak{B}$ применим к тому же слову и имеет тот же результат;

2) то же с заменой местами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Алонсо Чёрч выдвинул след. тезис. (тезис Чёрча – Тьюринга):

Каждый ~~алф~~ алгорифм с осн. алф. A_0 эквив. некоторой маш. Тьюринга с тем же алфавитом (осн.) A_0.

Сейчас нет ни малейших намеков, что этот тезис м. б. опровергнут.

У каждой нам. т.-п. с осн. алф A_0 свой вспомог. алф. A_1. Возникает вопрос: можно ли говорить о нам. Т. с данным алф.?

Теорема.

Любой алгоритм. Т.-П. с осн. алф. A_0 и каким-то доп. алф. A_1 эквив. отн-нос. A_0 некоторому алгор. Т.-П. с однобуквенным вспомог. алф.

Можно так же заменить символы состояний $q_0, q_1, \ldots$ на $(q), (qq), \ldots$

Все, о чем говорилось до этого момента не относится к строению математической логики, показанному на схеме в начале. Введенные выше понятия необходимы для введения логико-мат. языка. Знания по теории алгоритмов можно получить в курсе конструктивной математики.

Элементарная мат. логика — это такая логика которая возникает на базе элементарных ситуаций.

§4. Абсолютно элементарные ситуации и их знаковые модели.

Начнем с ~~такого~~ тривиального замечания о том, что процесс познав. деятельности человека может быть весьма сложным. Часто сложные понятия разбиваются на значительно более простые

Некоторые простые мысл. акты, встречающиеся в познав. деятельности человека:

1) Мысленное выделение конкретного предмета из окруж. среды и мысленная фиксация некоторого представления о нем. (Речь идет о „приблизительном" выделении)

Об этом очень образно говорит Б. Рассел

в книге „Человеческое познание" (о м-ре Джонсе)).

2) Присвоение наименования мысленно выделенному конкретному предмету.

Иногда это индивидуальные названия („Медный всадник", „Нева"), в других случаях это описание местоположения предмета в пространстве-времени и т.п.

3) Мысленное выделение конкр. предмета с присвоением ему наимен-ов.

4) Иногда нас интересует не один предмет, а несколько (например: знакомство с группой людей). Итак, чистый акт: завершаемый во времени и упорядоченный процесс мысленного выделения конкретных предметов с присвоением каждому из них пер. наименования (имеется в виду, что выдел. объекты отчетливо различимы и названия им присваиваемые различны для различных объектов).

Этот процесс мы будем называть процессом выделения конечной области предметов.

Будем считать, что для построения названий предметов у нас есть тек. алфавит А (назыв. алф. специфич. терминов). т.о. назв. предметов – тек. слова алф. А. Список имен предметов и будет играть роль знаковой модели конечной обл. предметов.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – обозначения имен выдел. предметов.

Слова $a_1, \ldots, a_m$ – назыв. также терминами единичных понятий.

5) фиксация термина ~~понятия~~ предмета, объединяющего ~~понятия~~ предметы $a_1, \ldots, a_m$ в единичный ~~понятие~~ предмет и только их. Будем считать, что этот термин – тоже слово в алф. А. ($\doteq t$). [точн. сказать – „текущий предмет" – Н.В.]

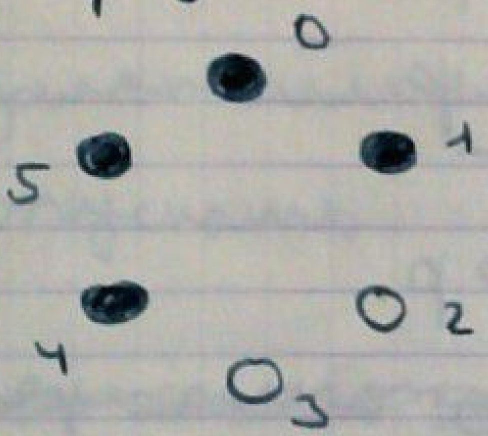
Теперь будем считать, что у нас выполнены действия 4) и 5).

6) Выделение применительно к данной области объектов некоторого понятия. (пока одного).

Что это такое?. У нас уже был разговор о понятиях, расширим его. Но сначала – пример.

Пример:

∃ предметы – кружки в верш. правильного шестиуг.



Мы хотим, чтоб нек. кружки были светлыми, а нек. – темными. Присваиваем предметам имена 0, 1, ..., 5. В качестве общего имени – термин „круг". т. о. выполнены п. 4), 5).

Вернемся к разговору о понятиях.

Что такое „понятия" вообще лектор не берется объяснить. На эту тему философы пишут целые книги недоступные для него книги. Однако можно попытаться сделать это для строго очерченного круга вещей.

Пусть p – термин понятия.

~~Составим~~ {Формулируем след. языковые конструкции}:

a_1 есть p

a_2 есть p

— — — —

a_n есть p

Если наше сознание реагирует на эти языков. конструкции реакцией „да" или „нет" мы считаем что t есть понятие.

В нашем примере:

o есть светлый круг. (нет)

1 есть темный круг (да)

— и т.д.

Если в каждом случае сознанием вы-раб. однозначная реакция „да" или „нет", то р называется „абсолютно определенным понятием".

В принципе реакция у разных людей м.б. различной. Поэтому р называется об. опр. п., если соотв реакция выраб. у определенного человека в опр. мом. времени. В дальнейшем последнюю ого-ворку будем опускать.

~~[illegible]~~

~~„[illegible]~~

В элемент. логике у нас будут фигури-ровать только абс. опр. понятия.

Пример абс. опр. п.: „светлый круг" „темный круг". (Во всяком случае область понимания м.б. согласована).

„чётный груз", т.е. такой у которого номер чётный; „верхний груз".

Рассмотрим таблицу реакций сознания на нулевую конструкцию

a: есть p

имена об-ов	реакция созн.
a_1	ε_1
a_2	ε_2
$\vdots$	$\vdots$
a_M	ε_M

$\varepsilon_i \equiv \begin{cases} \text{да} & \text{истина (И)} \\ \text{нет} & \text{ложь (Л)} \end{cases}$

Для абс. опр. понятия характерно, что все строчки таблицы будут заполнены.

Будем считать, что с выделенным понятием связан термин, являющийся словом в А, отличным от ранее выбранных.

7) Завершающийся во времени и дискретный процесс выдел. мн. понятий, оказывающихся абс. опред. для рассматриваемой

понятной области объектов.

Термины выдел. абс. опр. понятий обозначаем $p_1^1, p_2^1, \ldots, p_{l_1}^1$ и [illegible] ~~попарно~~ их считаем попарно различными (впоследствии станет ясен смысл индекса 1 повсюду):

8) Выделение, применит. к данной обл. объектов нек. <u>отношения</u>.

Что такое отношение?

∃ φ – слово нек. языка (напр. разговорного) мы говорим, что φ – термин нек. отношения, формируя конструкции:

a_i, a_j находятся в отношении φ

и изучаем реакцию нашего сознания.

Если наше сознание воспринимает эту фразу, как осмысленную и реагирует „да" или „нет" то мы говорим, что φ – термин нек. отношения. Как и в случаях „понятия" реакция вырожд. не каждый раз.

Если этого не происходит, то мы говорим, что у данного человека в данный понятия с термином f связано

обс.-опред. 2-х местное отношение

Аналог. определяются 3-х местные,

4-х, 5- и т.д. отношения.

Обс.-опр. отнош. допускают знаковые

модели в виде таблиц такого же типа,

как и для понятий.

Например, для 3х местного отношения.

Имя об.	Имя об.	Имя об	Реакция суждения
a_i	a_j	a_k	ε_{ijk}
— — —	— — —	— —	— — —

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} \text{да (И)} \\ \text{нет (Л)} \end{cases}$$

В повседневной жизни мы далеко не

всегда сталкиваемся с обс. определенными

отношениями. В элементарной логике

мы будем иметь дело с обс. опр. отно-

шениями.

Маленький эксперимент:

„Война и Мир" Л.Н. Толстого — интересная книга — языковая конструкция.

Различные реакции объясняются, как указывалось выше, отчасти тем, что понятие „интересное" вырабатывалось у разных людей на различных прецедентах. Но не только этим, т.к. эта фраза не обладает существенными данными для проверки ее осмысленности. Законно спросить: интересная для кого?

Т.о. „интересная книга" — не термин понятия, а термин отношения. Еще вопрос: интересная в какой мом. времени.

Т.о. мы видим, что люди привыкли некоторые данные не указывать, а подразумевать. Это один из основных источников взаимного непонимания людей.

Еще пример: изобретение теории относительности. Помимо чисто физ. экспериментов здесь был момент логического характера. В классической механике использовалась фраза: события X и Y одновременны. Эйнштейн показал, что на самом деле имеет смысл лишь фраза: события X и Y в коорд. системе Z.

Прежде т.о., термин ~~трехместного~~ двуместного отношения использовался для названия трехместного отношения.

Теория отношений — довольно поздний раздел логики (нач. XX в.).

Кол-во имен объектов $a_i, a_j, \ldots$ которые необходимо предъявить, чтоб сделать осмысленным конструкцию:
„$a_i, a_j, \ldots$ находится в отнош. φ" назыв **местностью** отношения.

Понятия и отношения объединяются названием „**предикаты**". Понятия — одноместные предикаты, отношения — многоместные предикаты.

часто в процессах познавательной деятельности приходится иметь дело с целым набором отношений.

9) Завершающийся в времени, дискр. процесс мысленного выделения обс. опред., применительно к данной обл. объектов, отношений.

10) Мысленное выделение применительно к данной обл. объектов так. функционального соответствия.

Что такое функц. соотв. применительно к конечной области? Они делятся на одноместные, двухместные и т.д.

$\exists f$ – так. термин. Мы называем его термином функц. соответствия для данной обл. в след. случае. Будем формировать след. языковые конструкции:

$f(a_1)$

$f(a_2)$

$\vdots$

$f(a_n)$

Возникает стремление ответить на вопросы:

Что представляет собой $f(a_1)$?

——— " ——— $f(a_2)$?

— — — — — — — — — — — — ?

——— " ——— $f(a_m)$?

Стремясь ответить на эти вопросы сознание находит некоторые объекты (имена

Если оно (созн.) так реагирует каждый раз, то мы говорим, что f - термин абс. опр. одноместной функции.

Абс. опр. одном. ф-я моделируется с помощью таблицы (назыв. определяющей таблицей):

Имена объектов	Реакция сознания на вопрос: что представляет собой $f(a_i)$?
a_1	η_1
a_2	η_2
$\vdots$	$\vdots$
a_m	η_m

$$, \eta_i \in \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{cases} \text{- один из..}$$

Аналог. интерпретируются 2х местные,
3х местные и т.д. функции.

Например, h – термин трехместной ф-ции если в качестве реакции на вопрос: Что представляет собой $h(a_i, a_j, a_k)$? сознание ищет (и находит) тек. имя.

Трехместные ф-ции моделируются с помощью аналогичных таблиц.

(Заметим, что в математике ф-я понимается более широко т.е. аргументы м.б. из одной обл., а значения из другой) понятен термин „вместимости" ф-ций

Было бы ошибкой думать, что ф-ции встречаются только в математике. Они встречаются и в повседневной жизни, правда обычная грамматика этого почти не замечает.

По поводу вместимости ф-й можно сказать то же, что и по поводу вместимости предикатов. В разговорном языке мы часто уменьшаем требуемое число мест.

11) Завершим. во времени дискретный процесс мысленного выделения ник. функц. соответствий обс. определенных для рассматриваемой области предметов.

12) Анализ стабильности выделенной области объектов с точки зрения стабильности выделенных предикатов и функций.

Мы должны убедиться в том, что за промежуток времени Δ объекты меняются не настолько сильно, чтобы изменились характеристические таблицы предикатов и функций.

Теперь мы можем описать то, что назыв. обс. элементарной ситуацией.

Предпол., что нами осуществлены

след. действия

1) выделена пом. обл. объектов (п 4)).

2) п. 7), 8) - понятия и отношения

3) п. 11) - ф-ции.

4) проведено обоснование относит. стабильности обл. объектов

При вып. этих условий будем говорить, что мы находимся в абс. элементарной ситуации.

Абс. эл. сит. допускает знаковую модель след. типа:

1) Список наименований выдел. объектов $a_1, \ldots, a_n$ и термин понятия обобщающего эти единичные понятия ($\div t$)

2) список терминов выделенных предикатов $p_1, p_2, \ldots, p_r$ и таблица, указывающая для каждого термина предиката его вместимость:

p_1	p_2	$\ldots$	p_r
n_1	n_2	$\ldots$	n_r

$n_1, \ldots, n_r$ - нат. числа.

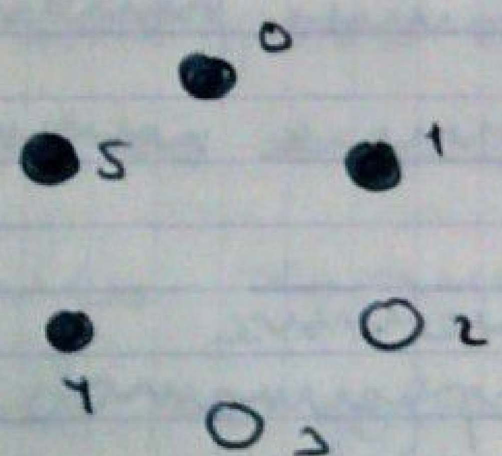
3) Список характеристических таблиц выделенных предикатов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ (считаем, что Φ_i - хар. табл. для предиката p_i)

4) Список термов выделенных ф-й $f_1, f_2, \ldots, f_s$ и табл. вместимости

5) Список определяющих таблиц выделенных ф-й: $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_s$ (счит., что Ψ_i - таблица для f_i).

Пример.

В качестве объектов фигурируют уже упомянувшиеся 6 кругов:



Имена об.: 1, 2, 3, 4, 5, 0.

Алф.:

0	1	2	3	4	5	все буквы русского алф	#

где # - знак пробела

Введем нек. обх. опр. предикаты.

понятия:

светлый # круг — p_1^1 (обозначение)

темный # круг — p_2^1

четный # круг — p_3^1

верхний # круг — p_4^1 (далее #-опускаем)

Имена об-тов	p_1^1	p_2^1	p_3^1	p_4^1
0	л	и	и	и
1	л	и	л	л
2	и	л	и	л
3	и	л	л	л
4	л	и	и	л
5	л	и	л	л

2х-местные отношения

Для грамм. русского языка характерна такая запись 2х местного отнош.: $a_i R a_j$.

„совпадает с" — p_1^2

„непосредственно следует за" — p_2^2

смежен с — p_3^2

центрально симметричен с — p_4^2

Вместо хранить. таблицы будем выпи-
сывать лишь те пары для которых
— значение „истина" (для краткости):

p_1^2 : $(0,0), (1,1), \ldots, (5,5)$

p_2^2 : $(1,0), (2,1), (3,2), \ldots, (5,4), (0,5)$

p_3^2 : $\underleftrightarrow{(1,0)}, \underleftrightarrow{(2,1)}, \ldots, \underleftrightarrow{(0,5)}$

($\leftrightarrow$ означает, что истинна также переставленная пара)

p_4^2 : $\underleftrightarrow{(0,3)}, \underleftrightarrow{(1,4)}, \underleftrightarrow{(2,5)}$

3х местные отношения:

a_i, a_j, a_k определяют прямоуг. треуг.

определить прямоуг. треугольник — p_1^3

a_i, a_j, a_k расположены по часовой стрелке

располож. по часовой стрелке — p_2^3

p_1^3 : $\underleftrightarrow{(0,3,1)}, \underleftrightarrow{(0,3,2)}, \underleftrightarrow{(0,3,4)}, \underleftrightarrow{(0,3,5)},$

$\underleftrightarrow{(1,4,2)}, \underleftrightarrow{(1,4,3)}, \underleftrightarrow{(1,4,5)}, \underleftrightarrow{(1,4,0)}, \underleftrightarrow{(2,5,0)},$

$\underleftrightarrow{(2,5,1)}, \underleftrightarrow{(2,5,3)}, \underleftrightarrow{(2,5,4)}$

p_2^3 : предоставляется читателю

4х местные отношения:

a_i, a_j разделяют a_k, a_l

разделять — p^4_1

[например (2, 5) разделяет (1, 4) и (0, 3)]

примеры абс. опр. ф-й.

1-местные:

зеркальный образ относительно главной вертикали — f^1_1

центрально-симметр. образ — f^1_2

Имена об-ов	f^1_1	f^1_2
0	0	3
1	5	4
2	4	5
3	3	0
4	2	1
5	1	2

2х местные ф-ции:

сумма (по mod 6) $- f_1^2$

В таблице 36 входных строчек, позвольте ее опустить.

произведение (по mod 6) $- f_2^2$

3х местные ф-ции:

характеристическая ф-я $- f_1^3$

прямоуг. треуг.

Итак, описана абсолютно элементарная ситуация.

В примере построена мат. модель. Но математики построение моделей обычно перекладывают на чужие плечи. Поэтому мы будем заниматься уже готовыми моделями.

§5. Синтаксические и семантические базисы абс. элем. логико-предметных языков.

Будем заниматься языками пригодными для опис. ал. ситуаций. Мы их будем обозначать АЭЯ (- опис. элем. [логико-предметный] язык).

Будем говорить, что задан синтаксич. базис нек. опис. элем языка, если заданы объекты:

1) нек. алф. А, называемый алф. специфич. терминов (причем А - непустой алф.)

2) нек. непустой список попарно различных слов в алф. А, назыв. <u>предметными константами</u> ($\doteqdot a_1, a_2, \dots, a_m$). Кроме того, задано слово t в алф. А, назыв. термина понятия обобщающего $a_1, \dots, a_m$.

3) нек. непуст. список попарно различных слов в А отличных от $a_1, \dots, a_m$, назыв. <u>предикатными константами</u>. ($\doteqdot p_1, \dots, p_l$)

4) Нек. таблица, ставящая в соотв. каждой предик. константе нек. полож. целое число, назыв. <u>валентностью</u> данной предик. константы

5) Нек. список слов в алф. А, различных попарно,

отличных от $a_1, \dots, p_\lambda$, называемых функциональными константами ($= f_1, \dots, f_\mu$)

Этот список м.б. и пустым, т.е. $\mu \geqq 0$ (хотя $\lambda \geqq 1$)

6) нек. таблица, ставящая в соотв. каждой функц. константе нек. полож. целое число, называемое вместимостью данной функциональной константы.

Будем говорить, что задан семантический базис АЭЯ, если задан нек. синтакс. базис АЭЯ и, кроме того:

7) для каждой предикатной константы p_i задана таблица Φ_i, имеющая вид характеристич. таблицы предиката, вместимость которого равна вместимости p_i.

8) для кажд. функц. конст. f_j задана табл. Ψ_j, имеющая вид определяющей таблицы функции, вместимость которой равна вместимости константы f_j.

в предыд. примере были продемонстрированы как синтакс., так и семант. базисы.

Отметим, что также языки могут моделировать не только абс. элем. ситуации. Пример: хим. элементы, известные на сегодняшний день. Например Cl. Он реализуется в самых разных веществах, но набор элементов один и тот же. [аналогия несколько туманна — Н.К.]
Часто приходится рассматривать несколько областей объектов. Оказывается, существуют приемы сводящие этот случай к одному.

Пусть фиксирован синтакс. базис языка и будем строить язык (когда речь будет идти о смысле выражений считаем, что функц. и семантич. базис АЭЯ).

§ 6. Языковые средства введения новых функций.

Переменными в математике мы считаем

нен. символы, выполняющие определенную роль.

Переменными (предметными) будем назыв. след. выражения:

$[t]$, $[t|]$, $[t||]$, ...

Более точно, мы напишем порожд. грамматику Поста для определения:

$\vdash [t]$ есть предм. перем

$p_1]$ есть пр. перем. $\vdash p_1|]$ есть пр. перем.

Сокращенные обозначения:

$t_0 \leftrightharpoons [t]$

$t_1 \leftrightharpoons [t|]$

$t_2 \leftrightharpoons [t||]$

— — — — — — — .

(Мы предполагаем, что $[$, $]$, $|$ - не являются буквами алф. A).

Введем (при помощи ПГП) понятия: предм. терм и n-членная система предметных термов (n-членный кортеж предметных термов).

a_i есть предметная константа $\vdash a_i$ есть предметный атомарный терм.

x есть предметная перем $\vdash$ x есть атомарный предметный терм.

Итак, ввели понятие <u>атомарный предметный терм</u>.

Понятие терма — это далеко идущее обобщение понятия „алгебраическое выражение".

1) X есть атомарный пр. тм $\vdash$ X есть пр. тм

2) T есть пр. тм $\vdash$ T есть 01-членный кортеж пр. тм

~~4) [illegible]~~

3) n есть нат. число, C есть n-членный кортеж пр. тм, T есть пр. тм $\vdash$ C, T есть $n1$-членный кортеж пр. тм

4) n есть нат. число, C есть n-членный кортеж пр. тм, f есть n-местная функц. константа $\vdash$ $f(C)$ есть пр. тм

(предполаг., что к этим правилам добавлены правила определяющие нат. числа и атомарные предметные термы, см. ↑).

X, T, c, n являются здесь схемными переменными порождающей грамматики пост.

Пример.

Используем обозначения примера с 6-ю программ.

t_1 есть пр. перем

t_1 есть атомарный пр. тe

t_1 есть пр тe

3 есть предм. постоянна

3 есть атом. пр тe

3 есть пр тe

t_1 есть 1 ($\leftrightharpoons 01$) - членный пр. кортеж термов

$t_1, 3$ есть 2-членный кортеж пр тe

$f_2^2(t_1, 3)$ есть пр тe

$\qquad$ ----- $[t_3]$

t_3 есть пр тe

$\qquad$ ----- $[2]$

2 есть пр тe

$f_2^2(t_1, 3), t_3$ - есть 2-членный кортеж пр тe

$f_2^2(t_1, 3), t_3, 2$ есть 3-членный кортеж пр те

$f_1^3(f_2^2(t_1, 3), t_3, 2)$ есть пр те

- - - - - -

- - - - - $[f_1^2, t_4]$

$f_1^2(t_4, 2)$ есть пр те

$f_1^3(f_2^2(t_1, 3), t_3, 2), 3, f_1^2(t_4, 2)$ есть 3 - членный кортеж пр те

- - - -

- - - - -

$f_2^3(f_1^3(f_2^2(t_1, 3), t_3, 2), 3, f_1^2(t_4, 2))$ есть пр те

На этом оборвем процесс.

Формулируя определения, мы считаем, что алф. A не содержит букв (,), , .
т.о. пр те и кортежи термов строятся в алфавите $A \cup \{[,], (,), ,, 0, 1\} \leftrightharpoons A^+$

Пусть P - нек. слово в алф. A^+. Возникает вопрос: является ли P - пр те или кортежом термов и т.п.?
В принципе нужно построить порожд. процесс в этой цепочке данный в

результате P.

Ясно, что это не практично. Возникает вопрос о эффективном критерии проверки является ли P пр. т-е или n-членным кортежем пр. т-е.

Оказывается, существует алгоритм распознающий пр. т-е и n-членные кортежи термов среди различных наборов знаков.

Теоремы о структуре термов и кортежей пр. т-е

Теорема 1.

Если T – пр. т-е, C – n-чл. кортеж пр. т-е, $n \geqq 2$, то $T \not\equiv C$ (иначе говоря, никакой терм не является более чем 1-членным кортежем термов и наоборот).

Лемма 1.

Каждый более чем 1-чл. кортеж пр. т-е C представим в виде:

$C \equiv T', C'$, где T' – пр. т-е., C' – кортеж пр. т

(Заметим, что представление $C \equiv C^{\circ}, T^{\circ}$ вытекает прямо из определения.).

Д-ство 1 индукцией по кол-ву членов кортежа

1)] C - 2-чл. кортеж пр. те. В порожд. упомянутые лишь правило N3 может породить предыдущее высказывание из след. 2х высказываний:

C_0 есть 1-чл. кортеж пр. те, T есть пр. те.

1ое из этих высказываний м. б. порождено лишь по правилу N2 из высказывания:

C_0 есть пр. те

Итак, $C \equiv C_0, T$ C_0 - пр. те, T - пр. те.

В этом случае полагаем $T' \equiv C_0$, $C' \equiv T$ и в этом случае утв. доказано

2) пусть утв. доказано для n-членных кортежей пр. те. Пусть

C есть n1 - членный кортеж пр. те.

Последнее высказ. можно породить лишь по 3-ему правилу и

$C \equiv C^{*}, T$

где C^* — н.-ш. нормал. ф-ла

T — ф-ла

Для C^* можно построить ф-лу T' и нормал. ф-лу C^0 такой, что

$C^* \overset{\circ}{=} T'; C^0$, а тогда

$C \overset{\circ}{=} T', C^0, T$

т.к. по соотв. правилу $C^0; T \overset{\circ}{=} C'$ — нормал. ф-ла, то $C \overset{\circ}{=} T', C'$ и лемма доказана.

Введем определение.

Пусть A^+ — алф. в котором строятся нормаль ф-лы термов. Пусть P — нек слово в A^+. Будем говорить, что P — уравновешенное слово, если число вхождений ("равно числу вхождений"). P — левосвоб. слово, если число больше ("больше числа вх.")", и правосвоб — в противном случае.

Лемма 2.

Всякий нормал. ф-ла является уравновешенным словом (в частности, всякий ф-ла

D - слово:

1) атомарный пр-те. т.к. A не содержит (,) и число вхождений в атом. пр-те любой равно нулю.

2) предп. мы доказали лемму для пр-те, тогда по правилу 2 лемма доказана для 1-чл. нормальной пр-те.

3) по правилу 3 перейдем от n-чл. нормального пр-те к C, T - n1-членному нормальному пр-те

4) аналогичное положение при применении правила 4, т. е. во всех переходах уравновешенность сохраняется и лемма доказана.

Лемма 3.

Пусть C есть n-членный нормал. пр-те и И - какое-либо начало слова C тогда возможен один из 2х случаев:

1) И - уравновеш. слово

2) И - левоизбыточное слово

Д-ство:

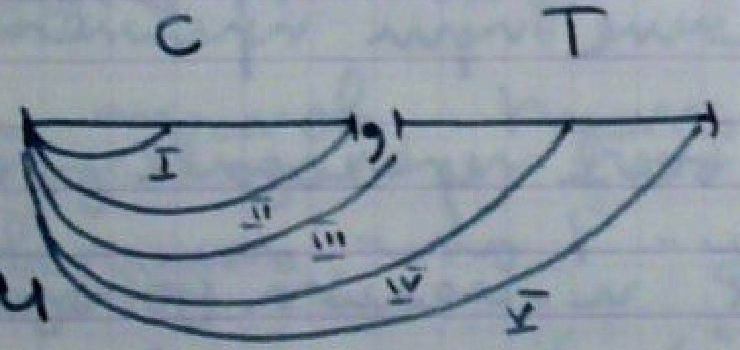
1) пусть C – элементарный пр-те

1а) C – предл. константа a_i:

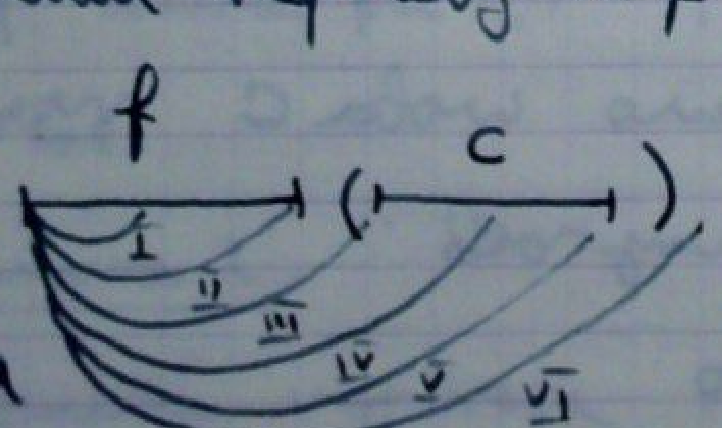
a_i – нач. слово A, то в A нет скобок и любое начало слова a_i – уравновешенное

1б) C – предл. перем [t|...|], то здесь нет круглых скобок и любое начало уравнов.

2) пусть C – п-ш. формул пр-те и T – пр. перем и для C и T утв. верно. Легко проверить, что для C, T утв. верно:



3) пусть C – п-ш. формул пр-те и рассмотрим переход к f(C):



Лемма доказана.

Лемма 4.

Пусть T – пр. те, а u и v – тек. слова, такие, что

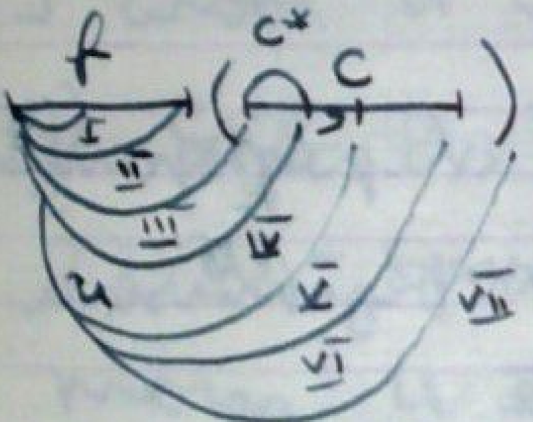
$T \equiv u, v$ => u – левоскобочное слово.

Д-ство (индукцией по процессу построения пр. те и кортежей пр. те):

а) пусть T – атомарный пр. те – очев. выполняется

б) пусть C – тек. n-членный кортеж пр. те, f – n-местная функц. констант., пусть

$T \equiv f(C)$



применяем л.3 к C^* => => C^* или уровнов. или левоскоб. => u – левоскоб.

Остальные случаи выпадают из рассмотрения.

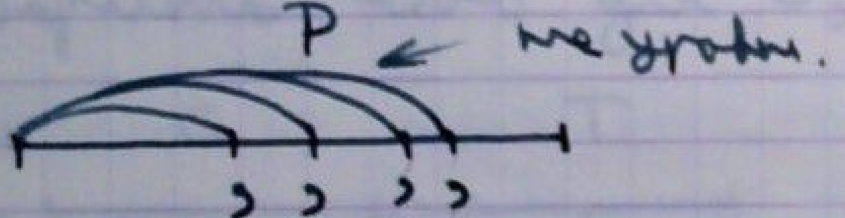
Д-ство Т. 1:

В самом деле C (по л. 1) представимо в виде $C \equiv T', C'$, где T' – пр. те, C' – кортеж пр. те

] $T \equiv C$ => $T \equiv T', C'$

по лемме 4 T' — левоскоб. слово, с др. стороны T' — терм и по л. 2 уравнов.-слово. Получили противоречие.

∃ P — слово в алф. A^+. Оно назыв. приведенным уравновешенным, если 1) P непустое уравнов. слово; 2) всякое начало слова P, непосредственно за которым стоит $\boxed{2}$ не явл. уравновешенным. (см. рис.)



Т.о. лемму 4 и 2 можно переформулир.: всякий пр. те является приведенным уравн. словом.

Теорема 2.

Пусть C — n-эл. кортеж пр. те и $n \geq 2$ ⇒ C — единственным способом представим в виде $C \doteq T', C'$, где T' — пр. те, C' — кортеж пр. те. При этом T' предстов.

собой то единств. начало сл. C, которое явл-
ется приведенным уровн. сл. и за кото-
рым непосредственно следует $\supset$.

<u>Замеч.</u>: в любом слове P из A^{+} ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ м. б. точно одно привед. уровнов. начало за
которым следует $\boxed{\supset}$ (это следует из опр.
прив. уровн. слова).

Д-тво T2.

то, что C представим в таком виде пред-
ставляет собой содерж. л. 1.

$\exists$ слова u и v таковы, что:

1) $C \equiv u, v$

2) u - привед. уров. слово

тогда$^?$ $u \equiv T'$. ← очевидно следует из замечания.

~~Докажем~~ последнее утв., именно ~~докажем~~ рассмотрим равенство:

$$T', C' \equiv u, v \qquad (*)$$

пусть $T' \not\equiv u$ $\Rightarrow$ 1) T' явл. собств.
нач. u $\vee$ 2) u явл. собств. нач. T'

В первом случае можно указать такое непустое слово W : $U \overset{*}{\Rightarrow} T'W$, получим $T', c' \overset{*}{\Rightarrow} T'W, v$ теперь совершим действие, которое никогда в эмуляции не совершали — сокращение на общее нач. слова:

$, c' \overset{*}{\Rightarrow} W, v$

т.к. W — непустое слово $\Rightarrow W \overset{*}{\Rightarrow} , W'$

$\Rightarrow U \overset{*}{\Rightarrow} T', W'$, то T' пр. не т.е. уравн. слово т.е. у U обнаружилось уровнов. начала за которым идет $,$ $\Rightarrow$ U не есть привед. уравн. слово и мы пришли к противоречию.

Случай 2) рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Сравним 2 понятия: понятие пр. не и понятие привед. уравн. слова.

пр. не опред. индуктивно, привед. ур. сл. — определяется алгоритмически. Поэтому

Т. 2 дает нам весьма простой способ нахождения первого члена кортежа термов (при $n \geq 2$).

Применяя это правило несколько раз, мы найдем все члены кортежа ~~и найдем все его члены~~.

Итак, кортеж пр. ф-е $\underbrace{\text{представим}}^{\text{однозначно}}$ в виде:

$C \equiv T_1, T_2, \ldots, T_n$. Здесь вхождения , назыв. <u>расчленяющими вхождениями ,</u>.

Кроме расчленяющих вхождений м.б. очень много не расчлен. вх.

1) Очевиден алгоритм, который распознает предм. конст. и предм. перем. (и следов. атомарные пр. ф-е) среди слов алф. A^+.

Атомарные пр. ф-е не содержат $\boxed{,\ |\ (\ |\ )}$.

$\exists$ P – слово не являющееся ат. пр. ф-е. Оно может оказаться кортежем пр. ф-е (быть может атомарных). Если P действ. кортеж пр. ф-е (более чем 1-чл.), то в него входит , и имеется привед. уровн. начало, за которым следует , . ~~Если ИИ~~ Допустим, что такое начало имеется, т.е. $P \overset{\circ}{=} H_1, P_1$

Далее анализируем начальное обр. P_1.

Если P_1 – годится, то получаем такое представление $P \overset{\circ}{=} H_1, H_2, P_2$ и т.д.

В результате можем получить

$P \overset{\circ}{=} H_1, H_2, \dots, H_{n-1}, H_n$.

H_1 – привед. уравн. начало сл. $P \overset{\circ}{=}$ $H_1, H_2, \dots, H_n$

H_2 – привед. уравн. нач. сл. $H_2, H_3, \dots, H_n$

и т.д. .....

H_n не имеет привед. уравн. начала за которым след. у.

теперь мы проверим не являются ли нек. из слов $H_1, \dots, H_n$ – ат. пр-те.

$\exists$ H_i – не атом. пр-те, а пустое слово.

Если оно – кандидат на неатом. пр-те, то H_i имеет вид $f(C)$, где f – к-местная функц. постоянная, а C – мн. слово в A^+. теперь нужно провести анализ слова c, как уже делалось.

$\exists\, C \equiv H_1', \ldots, H_\ell'$, если С не совп. с вычислимостью функц. пометками f (которая записана в таблице) то процесс заканчивается и ответ отриц., если нет, то атомизируем $H_1', \ldots, H_\ell'$ и так дальше (в случае перехода до атомарных пр. те).

Замеч.: Если f – 2х местная функц. помет. а T_1 и T_2 – пол. пр. те $\Rightarrow$ терм $f(T_1, T_2')$ часто записывают в виде $(T_1 f T_2)$, напр. $(T_1 + T_2)$, при условии отсутствия неоднозначности в прочтении.

Переходим к семантике языка пр. те.

Семантика языка пр. те.

Терм T называв. пост. пр. те, если ни одна предметная перем. не входит в T и параметрическим, если это не выполн. Пр. перем., входящие в T называв. параметрами.

каждому пост. пр-ме став. в соотв. ген. пр. констант. назыв. значением пр-ме.
($\leftrightarrows$ з ⌞T⌟):

1) з ⌞a_i⌟ $\stackrel{\circ}{=}$ a_i (a_i - предм. констант.)

пост. пр. Те T назыв. „почти атомарным", если он имеет вид T $\stackrel{\circ}{=}$ f(a_{i_1}, ..., a_{i_k})

f - k-местн. функц. констант.

2) з ⌞f(a_{i_1}, ..., a_{i_k})⌟ $\stackrel{\circ}{=}$ a_j, где a_j - пр. констант записанная в опред. таблице ф-ции f напротив a_{i_1}, ..., a_{i_k}

3) пусть T - не атомарный и не почти атом. пр. те. Элементарн. преобр. те T назыв. след процесс. Выдел. в T все вхождения почти атом. пр те и все вхождения заменяем на их значения. Результат элем. преобр. $\leftrightarrows$ эл ⌞T⌟ (легко показать, что почти атом те не могут друг на друга „налегать" и после замены на их значения получаем пр те)

Значением терма T назыв результат

след. процесса:

$T_1 \equiv$ эл $\llcorner T \lrcorner$, $T_2 \equiv$ эл $\llcorner T_1 \lrcorner$, ..., $T_{n+1} \equiv$ эл $\llcorner T_n \lrcorner$.

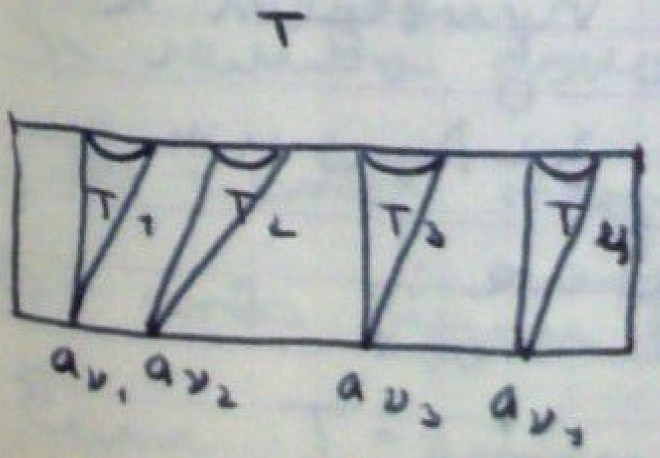
Легко понять, что процесс когда-нибудь закончится и что его результатом будет некоторая пр. константа, которая и называется <u>значением</u>.

(Чёрча-Россера)

<u>Теорема</u>. Пусть T - постоянный пр-те, $M_1, M_2, \ldots, M_e$ - некоторое попарно не налегающие вхождения нек. термов в T. Эти термы ⇆ $T_1, T_2, \ldots, T_e$.

Тогда, $з \llcorner T \lrcorner \equiv з \llcorner T^* \lrcorner$, где T^* обозначает результат одновр. подстановки в T вместо вхожд. M_1 зн. пр-те T_1: $з \llcorner T_1 \lrcorner$, вместо вх. M_2 $з \llcorner T_2 \lrcorner$ и т.д.

T



T^*

Лемма

Пусть A - пост. пр-те вида $f(A_1, \ldots, A_n)$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - пр-те, а f - n-местная функц. конст. Тогда $з\llcorner A \lrcorner \doteq з\llcorner f(з\llcorner A_1 \lrcorner, \ldots, з\llcorner A_n \lrcorner)\lrcorner$. $n \geqq 1$
(Ясно, что лемма есть частный сл. Теор.)

Д-ство:

Имеет место след. уодр. равенство:

$(*)$ $эл\llcorner f(A_1, \ldots, A_n)\lrcorner \doteq f(эл\llcorner A_1\lrcorner, эл\llcorner A_2\lrcorner, \ldots, эл\llcorner A_n\lrcorner)$ (причем, $эл\llcorner a_i\lrcorner \doteq a_i$)

процесс вычисления развертывается по схеме

A	то $эл\llcorner эл\llcorner A\lrcorner\lrcorner \doteq f(эл\llcorner эл\llcorner A_1\lrcorner\lrcorner,$
$эл\llcorner A\lrcorner$	$эл\llcorner эл\llcorner A_2\lrcorner\lrcorner, \ldots, эл\llcorner эл\llcorner A_n\lrcorner\lrcorner)$
$эл\llcorner эл\, A\lrcorner$	
— — — — —	

процесс $эл\llcorner A_1\lrcorner$

$эл\llcorner эл\llcorner A_1\lrcorner\lrcorner$ приведет к

$з\llcorner A_1\lrcorner$, аналог. получим $з\llcorner A_2\lrcorner$ и т.д.

Более аккуратное рассуждение:

Введем обозначения:

$A^1_j \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \varkappa \llcorner A_j \lrcorner$

$A^{i+1}_j \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \varkappa \llcorner A^i_j \lrcorner \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$

Ясно, что

$A^1 \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} f(A^1_1, A^1_2, \dots, A^1_n)$

Пусть мы доказали, что

$A^i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} f(A^i_1, A^i_2, \dots, A^i_n)$, переходим к $i+1$

1) $A^i_1, A^i_2, \dots, A^i_n$ — атомарные

$A^i_j \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \zeta \llcorner A_j \lrcorner \Rightarrow \zeta \llcorner A \lrcorner$.

2) Пусть хотя бы один из $A^i_1, A^i_2, \dots, A^i_n$ не атом. , по опред. $A^{i+1} \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \varkappa \llcorner A^i \lrcorner$, но по рав. (*) имеем

$A^{i+1} \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} f(A^{i+1}_1, A^{i+1}_2, \dots, A^{i+1}_n)$.

Итак, для любого i для которого процесс вычисления терма A еще не закончился был.

$A^i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} f(A^i_1, \dots, A^i_n)$, в противном случае $A^i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \varkappa \llcorner f(\zeta\llcorner A_1 \lrcorner, \zeta\llcorner A_2 \lrcorner, \dots, \zeta\llcorner A_n \lrcorner)$

и лемма доказана.

Д-тво теоремы:

Д-тво будем вести индукцией.

Если T - атом или почти атомарный, то

теорема тривиальна.

Предположим, что термы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таковы, что для них верно утв. теоремы для любого набора попарно не налегающих вхождений. $\rceil f$ - n-местный функц. метасимвол и $A \doteq f(A_1, A_2, \ldots, A_n) \doteq T$.

Покажем, что утв. верно и для T.

Пусть $M_1, \ldots, M_e$ - удовл. условию теоремы

Будем доказывать равенство

$$\zeta \llcorner T \lrcorner \doteq \zeta \llcorner T^* \lrcorner$$

$\forall$ вхождение M_i терма T_i в T.

1) $T_i \doteq T$, M_i - единств. вхождение T в себя

2) M_i - собственное вхождение T_i в T.

Для каждого j можно составить набор $M_1^j, M_2^j, \ldots, M_{s_j}^j$ попарно не налегающих вхождений в A_j

Обозначим посредством A_j^* результат одновр. подст. в A_j вместо каждого из вхождений $M_1^j, \ldots, M_{s_j}^j$ значения соотв.

пр-ме. По индукц. предп., $\zeta\llcorner A_j^*\lrcorner \stackrel{\circ}{=} \zeta\llcorner A_j\lrcorner$.

По усл., $T^* \leftrightharpoons \llcorner T\downarrow^{M_1,\dots,M_\ell}_{\zeta\llcorner T_1\lrcorner,\dots,\zeta\llcorner T_\ell\lrcorner}\lrcorner$. Очевидно, что $T^* \stackrel{\circ}{=} f(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$. Теперь применим лемму. По лемме, $\zeta\llcorner T^*\lrcorner \stackrel{\circ}{=} \zeta\llcorner f(\zeta\llcorner A_1^*\lrcorner, \dots, \zeta\llcorner A_n^*\lrcorner)\lrcorner$, то по инд. предп., $\zeta\llcorner A_j^*\lrcorner \stackrel{\circ}{=} \zeta\llcorner A_j\lrcorner$, следовательно $\zeta\llcorner T^*\lrcorner \stackrel{\circ}{=} \zeta\llcorner f(\zeta\llcorner A_1\lrcorner, \dots, \zeta\llcorner A_n\lrcorner)\lrcorner \stackrel{\circ}{=}$ на осн. леммы $\stackrel{\circ}{=} \zeta\llcorner T\lrcorner$. Теорема доказана.

Доказанная теорема иногда называется теоремой Чёрча-Россера.

Пример (из школьной алгебры):
$1\cdot s + 2\cdot z\cdot t + x\cdot y$. Каково значение этого терма на кортеже $0, 1, 3, 0, 4$? Непонятно что подставлять в s, z и т.д.

Мораль: сам по себе терм никакой функции не определяет. Итак, нужно задать порядок. Это, также, что мы можем зафиксировать сп. угодно большой список переменных.

Строго:

Пусть T — терм; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — произвольный список различных пр. перем., включающий в себя все параметры терма T.

Каждому r-членному кортежу пр. понятий $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ сопост. в соотв. пр. понят., являющееся значением пост. терма $z \llcorner T^{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}} \lrcorner$. По этому пр-му можно составить таблицу определяющую r-местную функцию.

Пусть некоторая ф-я почему-либо важна для дальнейшего. Имеем терм T и список $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Тогда обозначение ф-ции записывают так:

$\varphi \rightleftharpoons \lambda \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r T$ (обозначение Чёрча).

Не нужно думать, что язык термов — единственное ср-во введения новых функций. Это наиболее распространенный, но и самый бедный способ.

Укажем пример другого введения нов. ф-й.

f_1, f_2, f_3 – три одноместные ф-ции

$$f_4(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{если } f_3(t) = 0 \\ f_2(t), & \text{если } f_3(t) \neq 0 \end{cases}$$

(правда здесь мы вышли за пределы нашего языка).

[Далее вводится понятие атомарной логико-предметной формулы. Есть подозрение, что АЛПФ вводится грамматикой:

1) n есть натуральное число, C есть n-членный кортеж пр.те, P есть n-местная предикатная константа ⊢ P(C) есть АЛПФ.

Пример: $P_3^2(f_1^2(4,2), f_1^1(t_3))$

Затем вводится понятие пропозициональной булевой функции, на основе 2х пропозиц. констант И и Л и подобно, совершенно аналогично уже введенным функциональным константам]

ЛОГИКА

лекции Н.А. Шанина

том II

конспект

Н.Н. Воробьева, 44 гр.

Итак, мы ввели понятие пропозициональной булевой ф-ции, и выписали 4 одноместных булевых ф-й и 16 двуместных.

Они обознач. (одноместные): $\neg$ - отрицание

$\&$ - конъюнкция

$\vee$ - простая дизъюнкция

$\to$ - импликация

$\leftrightarrow$ - эквивалентность

$\leftarrow$ - обр. импликации.

$|$ - ф-я Шеффера

$\downarrow$ - ф-я Пирса

$\nrightarrow$ - отрицание импликации.

$\nleftarrow$ - отриц. обр. импл.

$\nleftrightarrow$ - разделительная дизъюнкция (отрицание эквивалентности).

Мы помним, что в случае предметных термов $f(T_1, T_2)$ записываем в виде $T_1 f T_2$.

Наша ближайш. цель состоит в след.

Пусть имеется набор булевых ф-й с

их вместимостями:

$B_1, B_2, \ldots, B_k$

$n_1, n_2, \ldots, n_k$

Введем понятие пропозиционального терма (или пропозиц. ф-лы). Это даст нам возможность построения новых ф-й на основе заданных.

$\vee, \wedge$ – пропозиц. константы

пропозиц. (булевы) переменные:

[δ], [δ|], [δ||], ...

$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ – обозначения для булевых перем. Несложно ввести пороэк. грамматику.

Введем теперь с пом. грамматики понятия: пропозициональный терм (Пузте)

1-членный порткон Пузте

2- — " —

над списком булевых ф-й $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Порожд. грамм. выглядит так:

1) $\vdash$ И есть атомарный пропозиц. терм

2) $\vdash \Lambda$ есть атом. путь

3) α есть пропоз. перем. $\vdash \alpha$ есть атом. путь

4) X есть атом. путь $\vdash X$ есть путь

5) X есть путь $\vdash X$ есть одночленный кортеж путь

6) n есть полож. целое число, $\mathfrak{U}$ есть n-член-ный кортеж путь, $\mathfrak{W}$ есть путь $\vdash \mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ есть $n1$-членный кортеж путь

7) n есть нат. число, $\mathfrak{U}$ есть n-ч. кортеж пропозиц. термов, $\mathfrak{B}$ есть знак n-мест-ной булевой ф-ции из исходного списка ф-й $\vdash \mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ есть пропозициональный терм.

Как и в случае предметных термов, если $\mathfrak{B}$ - двузначная бул. ф., вместо $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ будем писать $(\mathfrak{U}_1\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{U}_2)$.

Чтение: $(\mathfrak{U}_1 \& \mathfrak{U}_2)$ читается $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$

$(\mathfrak{U}_1 \vee \mathfrak{U}_2)$ — " — $\mathfrak{U}_1$ или $\mathfrak{U}_2$

$(\mathfrak{U}_1 \rightarrow \mathfrak{U}_2)$ — " — если $\mathfrak{U}_1$ то $\mathfrak{U}_2$

$(u_1 \leftarrow u_2)$ —"— u_1 если u_2

$(u_1 \leftrightarrow u_2)$ —"— u_1 тогда и только тогда, когда u_2

$(u_1 \not\leftrightarrow u_2)$ —"— или u_1, или u_2

Насколько согласуются наши интуитивные представления со значениями булевых ф-й и их чтением? В свое время мы рассмотрим этот вопрос.

Пример пропозиц. ф-лы:

$\leftarrow(\rightarrow(\&(\delta_3, \delta_1), \neg(\vee(\Lambda, \delta_3))), и)$

или, в более привычном виде:

$(((\delta_3 \& \delta_1) \rightarrow \neg(\Lambda \vee \delta_3)) \leftarrow и)$

На пропозиц. термы дословно переносятся определ. таких понятий, как постоянный терм, параметрич. те, параметры те, почти атомарный те, значения (здесь: валентность) пф те $\subseteq$ в $\lfloor u \rfloor$.

Далее, структурные теоремы для предментных термов дословно переносится на пуфы (в т.ч. теорема Чёрча–Россера).

Пусть $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ – пуфы. Говорят, что они равнозначны и пишут, что $\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2$ если при всех допуст. знач. булевых перем., значение пост. фы (валентность) равна валентности пост. фы, получаемого из $\mathcal{U}_2$, иначе говоря ф-ции совпадают только если мы фиксируем один и тот же список переменных.

Заметим, что знак $\sim$ – метаязыковой (как и все (почти) слова русского языка, которые на этих лекциях используются). Он аналогичен знаку тождественного равенства $\equiv$ из элем. алгебры.

Перечисляя те определения, которые аналогичны опр. из теории пуфа мы забыли самое главное: если $\mathcal{U}$ – пуфы и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – произв. список различных булевых перем., охватывающий все параметры терма и, то и, $\xi_1, \dots, \xi_n$ определяют

тек. n-местную булеву ф-цию ($\doteq \lambda \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ и).

Пусть B – n-местная булева ф-я (зад. таблицей). Говорим, что она задо выразима через ф-ции $B_1, \dots, B_k$, если можно построить пу те над списком и и список булев. перем. $\xi_1, \dots, \xi_n$ такой, что $\lambda \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ и совпадает с ф-ей B.

Ближайшая цель – показать, что все булевы ф-ции, любой вместимости выразимы через небольшое число базисных ф-й.

Пусть и – пу те. Говорим, что он тождественно истинен, если и ~ И и тождеств. ложно, если и ~ Λ.

Примеры: И – тожд. ист.

Λ – тожд. ложно.

$(\delta_1 \vee \neg \delta_1)$

$\left.\begin{array}{l}(\delta_1 \to \delta_1) \\ ((\delta_1 \& \delta_2) \to \delta_1)\end{array}\right\}$ тожд. истинно.

Проверим это для 1ой ф-лы $(\delta_1 \vee \neg \delta_1)$

δ_1	$\neg \delta_1$	$(\delta_1 \vee \neg \delta_1)$
И	Л	И
Л	И	И

$(\delta_1 \& \neg \delta_1)$ — тожд. ложно.

<u>Лемма 1</u>. Верны след. равнозначности:

$(\delta_1 \leftarrow \delta_2) \sim (\delta_2 \to \delta_1)$

$(\delta_1 \leftrightarrow \delta_2) \sim ((\delta_1 \to \delta_2) \& (\delta_2 \to \delta_1))$

$(\delta_1 \mid \delta_2) \sim \neg(\delta_1 \& \delta_2)$

$(\delta_1 \downarrow \delta_2) \sim \neg(\delta_1 \vee \delta_2)$

$(\delta_1 \nrightarrow \delta_2) \sim \neg(\delta_1 \to \delta_2)$

$(\delta_1 \nleftarrow \delta_2) \sim \neg(\delta_2 \to \delta_1)$

$(\delta_1 \nleftrightarrow \delta_2) \sim \neg((\delta_1 \to \delta_2) \& (\delta_2 \to \delta_1))$

Д-во проводится путем прямой проверки по таблицам.

<u>Следствие</u>. Булевы ф-ции: $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, $\mid$, $\downarrow$, $\nrightarrow$, $\nleftarrow$, $\nleftrightarrow$ выразимы через $\neg$, $\&$, $\vee$, $\to$.

<u>Лемма 2</u>. Все одноместные и 2-местные булевы ф-ции выразимы через $\neg, \&, \vee, \rightarrow$.

Д-ство:

Возьмем все одноместные ф-ции:

	I	II	III	IV
И	И	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	И

1ую ф-ю можно представить в виде И (или, например, $(\delta_1 \vee \neg\delta_1)$

Для ф-ции II: Л (или, например, $(\delta_1 \& \neg\delta_1)$

Для ф-ции III: δ_1, IV: $\neg\delta_1$

Рассмотрим теперь 2хместные ф-ции:

		I	II	III	IV	V	VI
И	И	И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И	Л
И	Л	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И

I И (или, $((\delta_1 \vee \neg\delta_1) \& (\delta_2 \vee \neg\delta_2))$)

II Л (или, $((\delta_1 \& \neg\delta_1) \vee (\delta_2 \& \neg\delta_2))$)

III δ_1 (список перем. δ_1, δ_2)

IV δ_2 (список перем. δ_1, δ_2)

V $\neg\delta_1$ —— " ——

VI $\neg\delta_2$ —— " ——

Об остальных ф-ях говорит лемма 1.

<u>Лемма 3</u> Верны следующие равнозначности

1а) $(\delta_1 \to \delta_2) \sim (\neg\delta_1 \vee \delta_2)$

1б) $(\delta_1 \& \delta_2) \sim \neg(\neg\delta_1 \vee \neg\delta_2)$

2а) $(\delta_1 \vee \delta_2) \sim (\neg\delta_1 \to \delta_2)$

2б) $(\delta_1 \& \delta_2) \sim \neg(\delta_1 \to \neg\delta_2)$

3а) $(\delta_1 \to \delta_2) \sim \neg(\delta_1 \& \neg\delta_2)$

3б) $(\delta_1 \vee \delta_2) \sim \neg(\neg\delta_1 \& \neg\delta_2)$

Д-ство путем прямой проверки на таблицах.

Ф-лы леммы 3 достойны непосредственного <u>запоминания</u>.

<u>Следствие</u>. Все одноместные и 2-местные ф-ции выразимы через каждую из пар ф-й: а) $\neg, \vee$ б) $\neg, \to$ в) $\neg, \&$

Д-ство следствия – методом древних: „смотри!"

<u>Лемма 4</u> 1)а $\neg\delta_1 \sim (\delta_1 | \delta_1)$

Верны равнозн: 1б) $(\delta_1 \vee \delta_2) \sim ((\delta_1 | \delta_1) | (\delta_2 | \delta_2))$

2а) $\neg\delta_1 \sim (\delta_1 \downarrow \delta_1)$

2б) $(\delta_1 \& \delta_2) \sim ((\delta_1 \downarrow \delta_1) \downarrow (\delta_2 \downarrow \delta_2))$

3) $\neg\delta_1 \sim (\delta_1 \to Л)$

Д-тво по таблицам.

Докажем, например, 2б).

δ_1	δ_2	$(\delta_1 \& \delta_2)$	$(\delta_1 \downarrow \delta_1)$	$(\delta_2 \downarrow \delta_2)$	$((\delta_1 \downarrow \delta_1) \downarrow (\delta_2 \downarrow \delta_2))$
И	И	И	Л	Л	И
Л	И	Л	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	И	И	Л

столбцы одинаковы.

<u>Следствие</u>. Все одноместные и 2-местные булевы ф-ции выразимы через следующие:
1) $|$ или 2) $\downarrow$ или 3) $\to$, Л.

Часто, однако сводить все к подобным базисам неудобно, поэтому, иногда выбирают избыточный базис $\neg$, $\&$, $\vee$.

Сейчас мы докажем, что всякая булева ф-я представима через базис $\neg$, $\&$, $\vee$.

Пусть $u_1, \ldots, u_r$ — пропозициональные ф-лы. Тогда $(u_1 \& u_2 \& \ldots \& u_r) \leftrightharpoons$

$(\dots((\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2) \& \mathfrak{A}_3) \& \dots) \& \mathfrak{A}_r)$, аналогично:

$(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_r) \rightleftharpoons (\dots((\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2) \vee \mathfrak{A}_3) \vee \dots) \vee \mathfrak{A}_r)$

Или, иначе, соответственно:

$\underset{i=1}{\overset{r}{\&}} \mathfrak{A}_i$ и $\bigvee\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i$. (Обозн. сохран. смысл и при $r = 1$ — и в этом сл. имеют знач. $\mathfrak{A}_1$).

Пусть $\mathfrak{A}$ - пропозиц. ф-е, а ε - пропозиц. константа. Тогда $\overset{\varepsilon}{\Psi}\mathfrak{A} \rightleftharpoons \begin{cases} \mathfrak{A}, \text{ если } \varepsilon \equiv И \\ \neg\mathfrak{A}, \text{ если } \varepsilon \equiv Л \end{cases}$

т.е. $\overset{И}{\Psi}\mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathfrak{A}$, $\overset{Л}{\Psi}\mathfrak{A} \rightleftharpoons \neg\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}$ называется *элементарной*, если $\mathfrak{A}$ является пропозициональной перем. или является отрицанием пропозиц. перем. т.е. (в послед. случае) имеет вид $\neg\delta_i$, где δ_i пропозиц. перем. Т.о. $\mathfrak{A} = \overset{\varepsilon}{\Psi}\delta_i$.

Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ суть пф-е. Говорят, что они *контрарны*, если $\mathfrak{A}_1 \equiv \neg\mathfrak{A}_2$ или $\mathfrak{A}_2 \equiv \neg\mathfrak{A}_1$.

Если ε - пропозиц. конст, то $\bar{\varepsilon}$ - контрарная к ней т. е. $\bar{И} \equiv Л$, $\bar{Л} \equiv И$. ε и $\bar{\varepsilon}$ назыв. сопряж.

Если $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ — контрарные постоянные пр. ф-лы, то $в\llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$ и $в\llcorner \mathfrak{A}_2 \lrcorner$ — сопряженные постоянные, т. е. $\overline{в\llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner} \equiv в\llcorner \mathfrak{A}_2 \lrcorner$

<u>Лемма 5</u>. Пусть $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r$ — постоянные пропозиц. ф-лы. Пусть $\mathfrak{V} \leftrightharpoons \mathop{\&}\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{W} \leftrightharpoons \bigvee\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i$.

1) Если $в\llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \equiv в\llcorner \mathfrak{A}_2 \lrcorner \equiv \dots \equiv в\llcorner \mathfrak{A}_r \lrcorner = И$, то $в\llcorner \mathfrak{V} \lrcorner \equiv И$; если же среди $в\llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner, \dots, в\llcorner \mathfrak{A}_r \lrcorner$ имеется хотя бы одна постоянная Л, то и $в\llcorner \mathfrak{V} \lrcorner \equiv Л$.

2) Двойственная формулировка:
Если $в\llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \equiv \dots \equiv в\llcorner \mathfrak{A}_r \lrcorner \equiv Л$, то $в\llcorner \mathfrak{W} \lrcorner \equiv Л$, если же среди $в\llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner, в\llcorner \mathfrak{A}_2 \lrcorner, \dots, в\llcorner \mathfrak{A}_r \lrcorner$ встречается хотя бы одна постоянная И, то $в\llcorner \mathfrak{W} \lrcorner \equiv И$.

Д-ство:

1) по индукции:
пусть $r = 1$ — очевидно
для $r = 2$ — из таблицы.

Пусть доказано для тек. r. Рассмотрим $(r+1)$-членную конъюнкцию:

$\&_{i=1}^{r+1} u_i$. Ясно, что $\&_{i=1}^{r+1} u_i \circeq (v \,\&\, u_{r+1})$,

$v \leftrightharpoons \&_{i=1}^{r} u_i$.

Пусть, теперь, $b\llcorner u_1 \lrcorner \circeq \dots \circeq b\llcorner u_r \lrcorner \circeq b\llcorner u_{r+1} \lrcorner \circeq$ И, по инд. предп., $b\llcorner v \lrcorner \circeq$ И. Далее, $b\llcorner \&_{i=1}^{r+1} u_i \lrcorner \circeq b\llcorner (v \,\&\, u_{r+1}) \lrcorner \circeq$ И

Пусть, теперь, среди $b\llcorner u_1 \lrcorner, \dots, b\llcorner u_r \lrcorner, b\llcorner u_{r+1} \lrcorner$ встречается Л

а) Л встречается среди 1ых r членов списка. Тогда, по инд. предп., $b\llcorner v \lrcorner \circeq$ Л, значит, $b\llcorner (v \,\&\, u_{r+1}) \lrcorner \circeq$ Л

б) $b\llcorner u_{r+1} \lrcorner \circeq$ Л. Ясно, что в этом случае, $b\llcorner (v \,\&\, u_{r+1}) \lrcorner \circeq$ Л

2) Доказывается аналогично.

Заметим, что при д-стве мы пользовались теоремой Чёрча-Россера (например, при подсчете $b\llcorner (v \,\&\, u_{r+1}) \lrcorner$). В дальнейшем мы этого оговаривать не будем.

Ф-ла K назыв. простой конъюнкцией, если она представима в виде:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{r} K_i \text{ , где } K_i \text{ — элем. пропозиц. ф-ла}$$

т.е. $K \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{r} \psi^{\varepsilon_i} \delta_{k_i}$ (*)

K назыв. правильной простой конъюнкцией, если ни какие два члена (*) не противоречат.

Это м.б. во-первых, когда $i \neq j \to k_i \neq k_j$; или во-вторых $k_i \equiv k_j \Rightarrow \varepsilon_i \equiv \varepsilon_j$.

Ф-ла K назыв. простой дизъюнкцией, если $K \equiv \bigvee_{i=1}^{r} K_i$, где K_i — элем. пропозиц. ф-ла, т.е. $K \equiv \bigvee_{i=1}^{r} \psi^{\varepsilon_i} \delta_{k_i}$. Аналогично вводится понятие прав. простой дизъюнкции.

<u>Лемма 6</u>. 1) Пусть K — простая конъюнкция, $K \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{r} \psi^{\varepsilon_i} \delta_{k_i}$. Если K — правильная пр.к., то она имеет валентность 1 и только на одном наборе значений перем. δ_{k_i}, а именно, на наборе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$.

Если же K — вырожденная пр. конъюнкция, то в ней имеется контрарная пара членов, то при всех значениях буквенных перем. И имеет валентность $\wedge$.

2) пусть $\mathfrak{V}$ – простая дизъюнкция т.е.
$\mathfrak{V} = \bigvee_{i=1}^{r} \overset{\varepsilon_i}{\Psi} \delta_{\kappa_i}$. Если $\mathfrak{V}$ – правильная простая дизъюнкция, то она имеет валентность $\wedge$ только на одном наборе перем., а именно $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_r$.

Если же $\mathfrak{V}$ – вырожденная пр. дизъюнкция (в ней есть контр. пара), то $\mathfrak{B}\llcorner \mathfrak{V} \lrcorner \equiv \mathfrak{V}$.

Д-ство:

Докажем лишь п. 2.

Итак, пусть $\mathfrak{V} \doteq \bigvee_{i=1}^{r} \overset{\varepsilon_i}{\Psi} \delta_{\kappa_i}$.

a) $\mathfrak{V}$ – прав. простая диз.

Подсчитаем $\mathfrak{B}\llcorner \bigvee_{i=1}^{r} \overset{\varepsilon_i}{\Psi} \bar{\varepsilon}_i \lrcorner$ 1. $\varepsilon_i \doteq \mathfrak{V}$ и

$\mathfrak{B}\llcorner \bar{\mathfrak{V}} \lrcorner \doteq \wedge$

2. $\varepsilon_i \doteq \wedge$

$\mathfrak{B}\llcorner \neg \bar{\wedge} \lrcorner \doteq \wedge$, по предыд. лемме;

$\mathfrak{B}\llcorner \bigvee_{i=1}^{r} \overset{\varepsilon_i}{\Psi} \bar{\varepsilon}_i \lrcorner \equiv \wedge$. Надо д-ть, что валентность $\wedge$ имеет место только на этом наборе.

Рассмотрим набор $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

$\eta_{i_0} \overset{\circ}{=} \varepsilon_{i_0}$ $в \llcorner \varepsilon_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}} \lrcorner \overset{\circ}{=}$ и

A) $\varepsilon_{i_0} \overset{\circ}{=}$ и $в \llcorner и \lrcorner \overset{\circ}{=}$ и

B) $\varepsilon_{i_0} \overset{\circ}{=}$ л $в \llcorner \neg л \lrcorner \overset{\circ}{=}$ и

по предыд. лемме $в \llcorner \bigvee_{i=1}^{n} \delta_{k_i}^{\varepsilon_i} \lrcorner \overset{\circ}{=}$ и.

б) пусть $\mathfrak{V}$ – вырожденная простая диз. Пусть тогда i_1, i_2 таковы, что $k_{i_1} \overset{\circ}{=} k_{i_2}$ и $\varepsilon_{i_1} \overset{\circ}{=} \bar{\varepsilon}_{i_2}$. Валентности членов $\delta_{k_1}^{\varepsilon_{i_1}}$, $\delta_{k_2}^{\varepsilon_{i_2}}$ будут сопряж., и след., в дизъюнкции имеется член с валентностью и, по предыд. лемме вся диз. имеет валентность и. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> (о представимости любой булевой ф-ции через $\neg, \&, \vee$). Пусть B – любая, подчи- но зад булева ф-я. Ее валентность $n \geq 1$. Тогда она представима через $\neg, \&, \vee$. Д-во: Рассмотрим 2 случая: 1) B – ф-я, принимающая на всех n-членных кортежах пр. значение и. Например $(\delta_1 \vee \neg \delta_1)$.

2) В – не тождеств. ист. ф-ла. Выберем в таблице те кортежи, на которых В приним. знач. л. Выпишем их:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \ldots, \varepsilon_n^1 \\ \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \ldots, \varepsilon_n^2 \\ \text{— — — — — —} \\ \varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m, \ldots, \varepsilon_n^m \end{array}\right\} \text{ полный список толь кортежей.}$$

Есть ли у нас ф-я, которая приним знач и на 1ом кортеже и л на остальных? Это кр. прост. дизъ. Она выписывается так: $\bigvee_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i^1 \, \delta_i$.

конъюнкция

Построим ф-лу

$$W \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i^1 \, \delta_i \;\&\; \bigvee_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i^2 \, \delta_i \;\&\; \ldots \;\&\; \bigvee_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i^m \, \delta_i$$

Эта ф-ла и будет искомой, как легко проверить теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Всякая булева ф-я представима через каждый из след наборов: 1) ¬, &; 2) ¬, v; 3) ¬, →; 4) →, л; 5) ↓, 6) ↓.

Возьмем в качестве базиса ¬, &.

Встаёт вопрос ~~опреде~~ о единственности представления булевой ф-ции в виде конъюнкции прав. простых дизъюнкций. Вообще говоря, он решается отрицательно. В самом деле, рассмотрим пример.

δ_1	δ_2	δ_3			
И	И	И	Л		
И	И	Л	И	$* \ (\delta_1^{И} \& \delta_2^{И} \& \delta_3^{Л})$	$(\delta_1 \& \delta_2 \& \neg\delta_3)$
И	Л	И	И	$* \ (\delta_1^{И} \& \delta_2^{Л} \& \delta_3^{И})$	$(\delta_1 \& \neg\delta_2 \& \delta_3)$
И	Л	Л	Л		
Л	И	И	Л		
Л	И	Л	Л		
Л	Л	И	И	$* \ (\delta_1^{Л} \& \delta_2^{Л} \& \delta_3^{И})$	$(\neg\delta_1 \& \neg\delta_2 \& \delta_3)$
Л	Л	Л	Л		

итак $F \leftrightharpoons ((\delta_1 \& \delta_2 \& \neg\delta_3) \vee (\delta_1 \& \neg\delta_2 \& \delta_3) \vee (\neg\delta_1 \& \neg\delta_2 \& \delta_3))$

Напишем ещё такую ф-лу:

$F_0 \leftrightharpoons ((\delta_1 \& \delta_2 \& \neg\delta_3) \vee (\neg\delta_2 \& \delta_3))$

легко понять, что F_0 представляет ту же булеву функцию только более простым образом.

Однако, если мы наложим на представление доп. условия, что представление уже будет единственным. Именно, ограничимся такими представлениями, в которых каждый член дизъюнкции содержит весь набор перем., а их порядок фиксирован.

Фиксируем список перем. $\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}$, которые обозначим соотв. $\eta_1, \dots, \eta_k$ и будем в пров. прост. конъюнкции вида:
$(\overset{\varepsilon_1}{\neg}\eta_1 \& \overset{\varepsilon_2}{\neg}\eta_2 \& \dots \& \overset{\varepsilon_k}{\neg}\eta_k)$.] имеется еще одна:
$(\overset{\varepsilon'_1}{\neg}\eta_1 \& \dots \& \overset{\varepsilon'_k}{\neg}\eta_k)$.

Будем говорить, что 1ая простая конъюнкция „предшествует" второй, если кортежи $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ лексикографически предшествует второму $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k$. Последнее означает след.: ищем наим. ℓ: $\varepsilon'_\ell \neq \varepsilon_\ell$ и обозначим его ℓ_0 и говорим, что 1ый кортеж предшествует лекс. 2ому, если $\varepsilon_{\ell_0} \doteq$ И, $\varepsilon'_{\ell_0} \doteq$ Л (т.е. как в телефонной книге или словарях).

Будем говорить, что F имеет ~~дизъюнктивную~~ совершенную нормальную форму относительно списка пер. перем $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$, если она имеет вид: $(F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_m)$ причем $F_i \equiv (\overset{\varepsilon_1^i}{\Upsilon}\eta_1 \,\&\, \dots \,\&\, \overset{\varepsilon_k^i}{\Upsilon}\eta_k)$ и F_j ~~лексикографически~~ предшествует F_{j+1} $(j = 1, \dots, m-1)$ (правее тождественно ложной)

Теорема Всякая k-местная булева функция единственным способом представима посредством ф-лы, имеющей совершенную дизъюнктивную норм. форму относит. заданного списка пропозиц. перем. $\eta_1, \dots, \eta_k$.

Д-ство:

Возможность доказана выше.

Теперь - единственность.

Пусть B - k-местная булева ф-я, а F формула в св. дизъюнкт. норм. ф. относ. списка $\eta_1, \dots, \eta_k$, представляющая ф-ю B.

Пусть $F \equiv (F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_m)$ $(m \geq 1)$

$F_i \equiv (\overset{\varepsilon_1^i}{\Upsilon}\eta_1 \,\&\, \dots \,\&\, \overset{\varepsilon_k^i}{\Upsilon}\eta_k)$

в произв. пров. пр. конъюнкцию вида: $(\overset{\theta_1}{\eta_1}$ & ... & $\overset{\theta_k}{\eta_k})$, где $\theta_1, \dots, \theta_k$ – произв. константы.

При каких усл. эта пр. пр. кон. явл. дизъюнктивным членом ф-лы F? Это имеет место т. и т. т. когда F на кортеже $\theta_1, \dots, \theta_k$ принимает значение И. Действительно, если написанная пр. конъюнкц. явл. F_{i_0} => на указ. кортеже F_{i_0} – И => F приним. знач. И. С др. стороны, если она не явл. дизъюнкт. членом F, то F на $\theta_1, \dots, \theta_k$ F приним. знач. Л (см. лемму 1). Единств. доказана.

Точно также вводится понятие совершенной конъюнктивной н. ф. относ. списка $\eta_1, \dots, \eta_k$ и доказывается теорема о том, что всякая не тождественно истинная k-местная б. ф-я В единств. обр. представима посредством тех. пропозиц.

ф-ии G, имеющей соверш. конъюнкт.

т. ф. относ. заданного списка пр. перем $q_1, \dots, q_k$.

Теория булевых ф-й является самостоятельным разделом прикладной мат.-логики и здесь (в данном курсе) носит лишь вспомогательный характер.

Что мы уже имеем?

1) Язык ПрТе и нормальный ПрТе
2) Язык атомарных лог.-предм. формул

Имея в распоряжении булевы ф-ции мы можем продолжить процесс усложнения наших языковых средств.

§ 9. Язык бескванторных логико-предметных формул.

В этом языке мы объединим языки предметных и пропозиц. перем.

Расширим язык атомарных ф-л знаками:

$\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \downarrow, \mid, \nrightarrow, \nleftarrow, \nleftrightarrow$ и введем

бескванторные лог.-предик. ф-лы (БЛП ф).
Соотв. порождающая грамматика:

1) F есть атомарная лог-пр. ф-ла ⊢ F есть БЛП ф
2) F есть БЛП ф ⊢ ¬F есть БЛП ф
3) F есть БЛП ф, G есть БЛП ф ⊢ (F & G) есть БЛП ф
4) ... ∨ ...
5) ... → ...

— — — — — — —

11) ... ↔ ...

! В дальнейшем через (i) будем обозначать i-ую бескванторную булеву ф-ю из списка ↑. (например (11) ⇋ ↔.

пример. $\big((\overbrace{p_3^2(\overbrace{f_1^2(4,2)}, \overbrace{f_1^1(t_3)})}^{\text{атом. ЛПф}} \,\&\, \neg p_1^2(0, f_2^1(t_1))) \to (p_1^1(2) \vee p_4^2(t_1, 0))\big)$

Как д-ть, что это выраж. действ. является бескванторной ф-лой?

Можно д-ть, что всякая беск. ф.-ла (атом.) F единств. образом представима в одном из след. видов:

1) $\neg G$ – где G – нек БЛПФ

2) $(G \& H)$, где G и H – нек БЛПФ

- - - - - - - -

10) $(G \leftrightarrow H)$ — " —

Д-ство проводится по той же схеме, (только роль имени и запятой) что и соотв. теорема о структуре термов.

$\neg, \&, \ldots, \leftrightarrow$ будем назыв. логическими знаками (или константами) языка.

Тот знак, который выделяется в предыд. теореме назыв. гл. логич. знаком этой ф-лы, а его вхождение гл. вхождением лог. знака. В случаях 2) – 10) ф-лы G и H назыв. логич. звеньями ф-лы F.

Для поиска лог. звеньев действуем по похожему правилу, как и в термах, только здесь в роли запятой выступают логические знаки. (В примере ↑ 1ое гл. вхожд. идет до знака →).

∃ F – БЛПФ. Говорят, что F – пост. БЛПФ, если в нее не входит ни одной логических перем. и F — параметрическая в противном случае.

] F — постоянная бескванторная лог-ур. ф-ла. Для таких опр. лог. валентность. $\rightleftharpoons в\llcorner F \lrcorner$

Как это делается?

~~[illegible]~~ 1) Если F атомарн. бескв. ф-ла то $в\llcorner F \lrcorner$ опред. ранее (пользуясь характеристическими таблицами).

2) Если F неатом. ф-ла, то $в\llcorner F \lrcorner$ есть результат след. процесса.

В F выделяем все вхождения постоянных атом. формул. Для каждой из ф-л вычисляем валентность и подставляем в F и процесс сводится к вычисл. валентности постоянной пропозициональной формулы. Пример.

$$((\underbrace{p_1^2(1,4)}_{\Lambda} \& \neg \underbrace{p_1^1(0)}_{\Lambda}) \to \underbrace{p_2^2(3,0)}_{\Lambda}) \; ;$$

$$(\Lambda \& \neg\Lambda \to \Lambda) \; ; \; (\Lambda \to \Lambda) \; ; \; И \text{ след.}$$

$в\llcorner F\lambda \lrcorner = И$. [Этот процесс вычисл. валентности имеет смысл, когда знаки ¬, &, ∨, ..., ↔ суть знаки булев. ф-й. Иногда, впрочем, мы будем ограничив. базисом.

§ 10. Дальнейшее расширение логико-предм. языка посредством введения кванторов.

~~Ал~~ введенного ранее языка дополняем след. знаками:

∀ – квантор общности

∃ – кв. существования

Вводим понятие: „логико-предметная ф-ла (ЛПФ)".

1) F есть атом. ЛПФ ⊢ F есть ЛПФ

2) G есть ЛПФ ⊢ ⌉G есть ЛПФ

2+i) G есть ЛПФ, H есть ЛПФ ⊢ (G ⊙ H) есть ЛПФ

13) G есть ЛПФ, α есть предм. перем. ⊢ ∀αG есть ЛПФ.

14) G есть ЛПФ, α есть предм. перем ⊢ ∃αG есть ЛПФ

Формула вида ∀αG читается, напр. так: „каково бы ни было α вып. условие G" или „Для любого α ——— " ——— "

или иначе.

Ф-ла вида $\exists \alpha\, G$ читается:

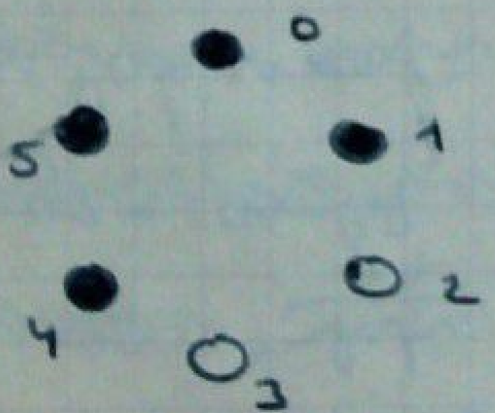
„существует α такое, что выполн. усл. G".

На этом описание языка закончено.

Этот язык бедноват по сравн. с „обычной математикой". Так у нас нет конструкций вида $\forall \alpha\, G$, где α – функция или множества. Но для нас его будет достаточно.

Примеры перевода высказываний с разговорного языка на логико предметный.

Все примеры будут касаться известных шести кругов:



1) круги 0, 4, 1 определяют прямоуг. треугольник.

2) круги 0, 4, 1 светлые

перевод: 1) $P^3_1(0,4,1)$; 2) $P^1_1(0)\,\&\,P^1_1(4)\,\&\,P^1_1(1)$. Как мы видим разговорно-грамматически одинаковые ~~формулы~~ высказывания на лог.-предм. языке записываются совершенно-то различным образом. Мы видим, что в примере 1) запятые означают разделение членов перечня, а в прим. 2) они символизируют конъюнкцию.

3) „Зеркальный образ любого круга смежного с единицей является темным кругом".

Перевод. Как его осуществить? Понимание фраз русского языка очень сложно и для компьютера их анализ недоступен. В лог.-предм. языке все четко. Здесь имеется главная лог. связка и ее главное вхождение. Ничего похожего для русского языка нет. Однако попытаемся это сделать. Какова здесь гл. лог. связка? Лектору кажется, что квантор общности здесь главная связка. 3') „$\overbrace{\text{Каков бы ни был}}^{\forall}$ $\overbrace{\text{круг}}^{t_1}$ смежный с 1 то зеркальный образ является темным кругом." Но все предм. перем. пробегают <u>всех</u> кругов.

3'') $\forall t_1$ (если t_1 $\overbrace{\text{смежн. с } 1}^{P_3^2}$, то его зерк.

образ t, явл. тёмным кругом).

f_1^1 $\qquad\qquad$ p_1^2

Итак, перевод: $\forall t_1 (p_3^2(t_1, 1) \to p_2^1(f_1^1(t_1)))$

4) „Если некоторый круг смежен с 2, то сумма его зеркального образа и 3 непосредственно следует за некоторым тёмным кругом".

$\exists$

Интуитивно легко согласиться, что импликация, которая на 1ый взгляд является главной связкой, таковой не является. Более того представляется правдоподобным, что последней связкой будет квантор общности, причем „некоторый" в заключении импликации будет интерпретироваться, как существование.

Итак,

$\forall t_1 (p_3^2(t_1, 2) \to \exists t_2 (p_2^1(t_2) \& p_2^2(f_1^2(f_1^1(t_1), 3), t_2)))$.

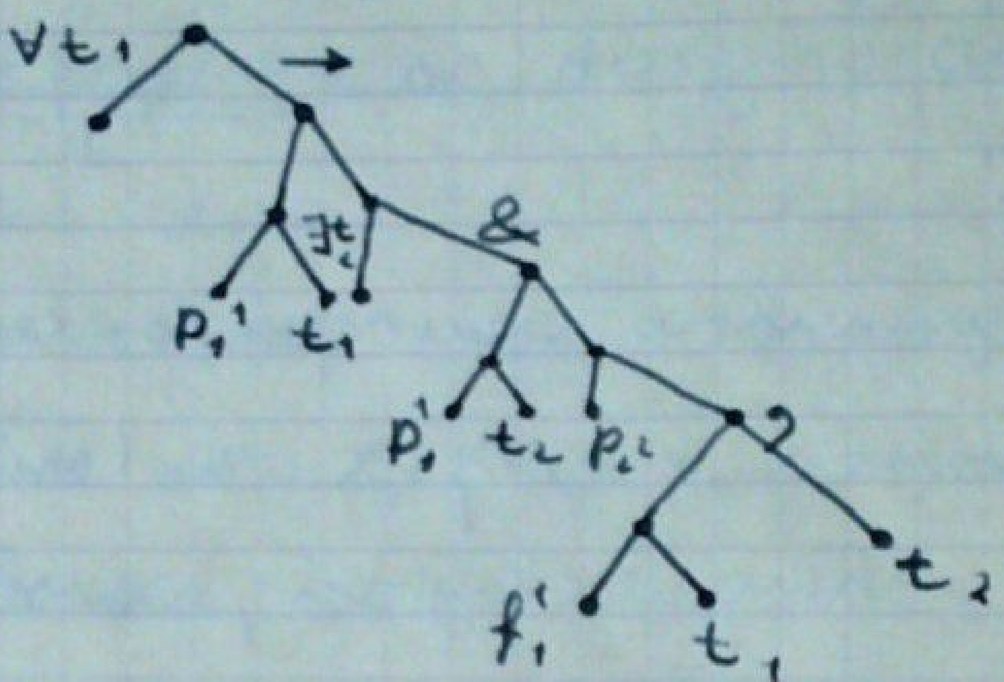
p_1^1

5) „Зеркальный образ любого светлого круга смежен с некоторым тёмным кругом".

p_3^2 $\qquad\qquad$ p_1^2

перевод: $\forall t_1 (p_1^1(t_1) \to \exists t_2 (p_1^1(t_2) \& p_2^2 (f_1^1(t_1), t_2)))$

Изобразим структурное дерево полученной ф-лы:



Точным образом понятие структурного дерева определять не будем.

б) Говорят, что элемент t_1 является делителем нуля, если ~~справедливо~~ $t_1 \neq 0$ и существ. эл. t_2 такой, что $t_2 \neq 0$ и $t_1 \cdot t_2 = 0$

перевод:

$\neg p_1^2(t_1, 0) \& \exists t_2 (\neg p_1^2 (t_2, 0) \& p_1^2 (f_2^2(t_1, t_2), 0)))$

Создание, построенной выше, модели языка является, по мнению лектора, одним из величайших общенаучных достижений.
Эта модель показывает (и по-настоящему объясняет) ~~??~~, что подлежащие, сказуемые и прочие главные понятия грамматики играют на самом деле третьестепенную роль, а связки „и", „или", частицы „не" и пр., почти не рассматриваемые в грамматике играют на самом деле определяющую роль.

Рассмотрим уже упоминавшийся пример:
$$\forall t_1 (p_1^1(t_1) \rightarrow \exists t_2 (p_2^1(t_2) \& p_3^2(t_1, t_2))).$$
Для этой формулы валентность не определена, т.к. она содержит переменные.
Однако, интуитивно ясно, что она „истинна".
То же можно сказать относительно примера 6). Здесь участвуют 2 параметра,

то по существу св-во определяется лишь для t_1.

Интуитивно ясно, что в 1ой формуле квантор общности „связывает" вхождение переменной t_1, а кв. существования „связывает" вхождение перем. t_2.

Аналогично, для примера 6).

Обратимся к точным определениям.

Пусть F – произв. ЛПФ. Имеет место лемма. Каково бы ни было вхождение квантора (или ∀ или ∃) в ф-лу F, существует единств. подформула ф-лы F, 1ым знаком которой служит рассматриваемое вхождение квантора.

Лемму доказывать не будем (Доказывается индукцией по процессу построения ф-лы).

Та единств. подформула формулы F, 1ым знаком которой является данное вхождения кв. называется областью действия рассматриваемого вх. кв.

та пр. перем., которая примыкает справа к вхожд. квантора назыв. собственной переменной данного вхождения квантора.

Пусть F — ЛПФ, а W — нек. ~~вхожд.~~ предм. ~~квантора~~ перем. α ~~тора (∀ или ∃~~) в F. ~~Пусть К — некоторое вхождение предм. переменной в F. Говорят, что оно (вх. перем. К)~~

Вхожд. W назыв. связанным, если оно находится в обл. действия некоторого вхождения квантора, собств. перем. которого графич. одинаково с α. Вхожд. W назыв. свободным, если оно не является связанным.

~~Предм.~~ перем. α назыв. параметром ф-лы F, ~~если~~ имеется хотя бы одно свободное вхождение α в F.

пример. $\forall \underset{+}{t_2} \neg(\forall \underset{+}{t_1} (p_3^2(1, f_1^2(\underset{+}{t_1}, \underset{+}{t_2})) \to \exists$

$t_2\ P_2^2(t_3,t_4))\ \vee\ \neg(\forall t_3\ P_2^2(f_1^3(2,t_1,t_4),0)))$

$+ \quad + \quad - \quad +$

изобразим для каждого вхождения квантора области действия. (+) – обозначены связанные вхождения, (–) – своб. вх. Мы видим, что здесь t_1 и t_4 – параметры формулы.

Заметим, что в одной и той же формуле одна и та же перем. м.б. и св. и связанной (в данном примере – t_1).

Аналогия из алгебры:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \varphi(n,m)\right)\cdot \psi(n,k)$$

связанное вхождение

свободное вхождение.

Формула F назыв. <u>постоянной</u> или <u>суждением</u>, если она не имеет параметров (т.е. ни одна перем. не входит в нее свободно). F назыв. <u>параметрической</u> или <u>условием</u>, если она имеет хотя бы один параметр.

Мы хотим распространить понятие валентности на пост. ф-лы, содержащие кванторы. Для этого мы осуществим „перевод" кв. ф-л на бескв. ф-л.

Определим операцию ρ — операцию „развертки" ф-лы. Эта опер., любой ЛПФ F ставит в соотв БЛПФ $\rho \llcorner F \lrcorner$, причем эта опер. бескв. ф-лы оставляет неизм., постоянные переводит в пост., а параметр. — в ф-лы с тем же самым набором параметров.

Интуит. смысл опер. прост. Для конечной области $\forall \alpha F$ означает конъюнкцию, а $\exists \alpha F$ дизъюнкцию.

Определение опер. ρ:

1) Если F — бескв. ф-ла, то полагаем, что $\rho \llcorner F \lrcorner \equiv F$

2) F почти БЛПФ (т. е. $F \stackrel{\circ}{=} \forall \alpha G$, где G — бескв, $F \stackrel{\circ}{=} \exists \alpha G$, где G БЛПФ), то полагаем, что $\rho \llcorner \forall \alpha G \lrcorner \stackrel{\circ}{=} (\llcorner G \downarrow^{\alpha}_{a_1} \lrcorner \mathbin{\&} \llcorner G \downarrow^{\alpha}_{a_2} \lrcorner \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \llcorner G \downarrow^{\alpha}_{a_n} \lrcorner)$ (по поводу обозн. $\llcorner P \downarrow^{u}_{s} \lrcorner$ — см. начало курса). Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — обозначения предметных констант, перечисленных в

более худшим). Далее, полагаем

$$\mathfrak{g}\llcorner \exists \alpha\, G \lrcorner \ \overset{\circ}{=}\ (\llcorner G\downarrow^{\alpha}_{a_1} \lrcorner \vee \llcorner G\downarrow^{\alpha}_{a_2} \lrcorner \vee \ldots \vee \llcorner G\downarrow^{\alpha}_{a_n} \lrcorner)$$

3) пусть F – не бескв. и не почти бескв. т.е. более сложного типа, чем 1), 2). Введем операцию „элементарного шага построения развертки" $\overline{\text{Эл}}$. Операция $\overline{\text{Эл}}$. оставляет неизм. бескв. ф-лы, а если F – не бескв. ф-лы, то $\overline{\text{Эл}}\llcorner F \lrcorner$ есть результат подстановки в F вместо почти бескв. подформул их развертки.

Разверткой ф-лы F в этом случае назыв. результат след. процесса:

строим $\overline{\text{Эл}}\llcorner F \lrcorner$, затем $\overline{\text{Эл}}\llcorner \overline{\text{Эл}}\llcorner F \lrcorner \lrcorner$ и т.д. Этот процесс обязательно заканчивается, т.к. кол-во вхождений кванторов на каждом шаге процесса кол-во кванторов уменьшается хотя бы на 1.

Пусть F – произв. ЛП ф. <u>Нормальным списком параметров</u> формулы F назыв. список всех парам. ф-лы F, выписанных без повторений в том порядке, который определяется первыми свободными вхождениями параметров ф-лы F.

<u>Теорема</u>. ~~Для любой~~ Какова бы ни была ЛП ф F, нормальный список параметров ф-лы $\rho\llcorner F\lrcorner$ совпадает с нормальным списком параметров ф-лы F. В частности, если F — пост. ф-ла (ф-ла с пустым списком параметров, то и $\rho\llcorner F\lrcorner$ постоянная формула.

~~Доказательство~~

Будем использ. след. обознач. Если F — ЛП ф, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произв. список предм. переменных, а $T_1, T_2, \dots, T_n$ — произв. список пр. термов, то выражение

$\llcorner F \Downarrow^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{T_1, \dots, T_n} \lrcorner$ будет обозначать результат одновременной подстановки в ф-лу F, T_1 вместо всех <u>свободн</u>. вхождений α_1 в F, …, T_n вместо всех <u>св</u>. вх. α_n в F.

Лемма 1. Каковы бы ни были формулы P и Q верны следующие графические равенства:

1) $\rho\llcorner \neg P \lrcorner \equiv \neg \rho \llcorner P \lrcorner$

1+i) $\rho\llcorner (P \; ⓘ \; Q)\lrcorner \equiv (\rho\llcorner P\lrcorner \; ⓘ \; \rho\llcorner Q\lrcorner)$ $(i=1,\dots,10)$

12) $\rho\llcorner \forall\alpha P\lrcorner \equiv (\llcorner\rho\llcorner P\lrcorner \ddagger^{\alpha}_{a_1}\lrcorner \,\&\, \dots \,\&\, \llcorner\rho\llcorner P\lrcorner \ddagger^{\alpha}_{a_n}\lrcorner)$

13) $\rho\llcorner \exists\alpha P\lrcorner \equiv (\llcorner\rho\llcorner P\lrcorner \ddagger^{\alpha}_{a_1}\lrcorner \vee \dots \vee \llcorner\rho\llcorner P\lrcorner \ddagger^{\alpha}_{a_n}\lrcorner)$

Д-ство проводится индукцией по шагам применения подряд правил грамматики.

Докажем, напр., что

$\rho\llcorner (P \to Q)\lrcorner \equiv \rho\llcorner P\lrcorner \to \rho\llcorner Q\lrcorner$

Рассмотрим ф-лу $P \to Q$. Строим развертку:

$\widetilde{\Sigma}\llcorner (P\to Q)\lrcorner$, $\widetilde{\Sigma}\llcorner \widetilde{\Sigma}\llcorner (P\to Q)\lrcorner\lrcorner$ и т.д.

Заметим, что всякое вх. ПБЛПф в импликацию $(P \to Q)$ попадет целиком либо в P, либо в Q. А поэтому, $\widetilde{\Sigma}\llcorner (P\to Q)\lrcorner \equiv$ $(\widetilde{\Sigma}\llcorner P\lrcorner \to \widetilde{\Sigma}\llcorner Q\lrcorner)$. Поэтому, процесс вычисления развертки $(P \to Q)$ совп. с вып. послед ф-л: $(P_1 \to Q_1), (P_2 \to Q_2), \dots$, где

$P_1 \equiv \widetilde{\Sigma}\llcorner P\lrcorner$, $Q_1 \equiv \widetilde{\Sigma}\llcorner Q\lrcorner$, $\dots$; $Q_{n+1} \equiv \widetilde{\Sigma}\llcorner Q_n\lrcorner$

и поэтому $\rho\llcorner P\lrcorner \to \rho\llcorner Q\lrcorner$.

Докажем теперь ф-лу 12).

а) P - бескв. ф-ла, тогда получим 12) по опр. развертки т.к. $\forall\alpha P$ - почти бескв. и $\varrho\llcorner P\lrcorner \equiv P$.

б) P - ф-ла, содерж. кванторы. Выделим в ф-ле $\forall\alpha P$ все входящие ф-л $\exists J M$ и $\forall J M$.

По $\widetilde{\text{Эr}}\llcorner\forall\alpha P\lrcorner \equiv \forall\alpha\,\widetilde{\text{Эr}}\llcorner P\lrcorner$

$\widetilde{\text{Эr}}\llcorner\widetilde{\text{Эr}}\llcorner\forall\alpha P\lrcorner\lrcorner \equiv \forall\alpha\,\widetilde{\text{Эr}}\llcorner\widetilde{\text{Эr}}\llcorner P\lrcorner\lrcorner$. На некот. шаге получим $\forall\alpha\varrho\llcorner P\lrcorner$. Далее строим $\widetilde{\text{Эr}}\llcorner\forall\alpha\,\varrho\llcorner P\lrcorner\lrcorner$ и в конце получим $(\llcorner\varrho\llcorner P\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{a_1}\,\&\ldots\&\llcorner\varrho\llcorner P\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{a_n}\lrcorner)$.

Суть всех ф-в закл. в том, что опер. $\widetilde{\text{Эr}}$ „проталкивается внутрь формулы".

Теперь можем д-ть теорему↑.

Д-тво (индукцией по процессу порожд. ф-л)

Если F - бескв. ф-ла, то $\varrho\llcorner F\lrcorner \equiv F$ и утв. очевидно.

Для ф-л P и Q утв. верно. Докажем что для формулы $(P \to Q)$.

На ат. лемма 1, $\rho\llcorner(P \to Q)\lrcorner \equiv (\rho\llcorner P\lrcorner \to \rho\llcorner Q\lrcorner)$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – норм. сп. пер. P, а

$\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}$ – н.с.п Q

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \underbrace{\alpha_{r+k_1}, \dots, \alpha_{r+k_m}}_{} \text{ – для } P \to Q$$

у списка для Q, не вошедшие в ранее написанные.

С др. стор.:

$\rho\llcorner P\lrcorner \quad \alpha_1, \dots, \alpha_r$

$\rho\llcorner Q\lrcorner \quad \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s}$

$\Rightarrow$ для $(\rho\llcorner P\lrcorner \to \rho\llcorner Q\lrcorner)$ – н.с.п. такой же, а именно $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+k_1}, \dots, \alpha_{r+k_m}$.

Пусть теперь н.с.п. $\rho\llcorner P\lrcorner$ совп. с н.с.п P. Надо д-ть, что н.с.п. $\rho\llcorner\forall\alpha P\lrcorner$ совп. с н.с.п. $\forall\alpha P$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – норм. список перем. P

1) Пусть α не вх. свободно в P т.е. в список $\alpha_1, \dots, \alpha_r \Rightarrow \forall\alpha P$ имеет н.с.п $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

2) пусть α входит своб. в P и $\alpha \equiv \alpha_1$.

тогда $\forall\alpha P$ имеет н.с.н. $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$

$\rho\llcorner\forall\alpha P\lrcorner \equiv (\llcorner\rho\llcorner P\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{a_1} \& \dots \& \llcorner\rho\llcorner P\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{a_n}\lrcorner)$

1. Если α не вх. своб. в $\rho\llcorner P\lrcorner$, то

$\rho\llcorner\forall\alpha P\lrcorner \equiv (\underbrace{\rho\llcorner P\lrcorner \& \dots \& \rho\llcorner P\lrcorner}_{n\ \text{раз}})$

След. н.с.н. $\rho\llcorner\forall\alpha P\lrcorner$ имеет вид $\alpha_1 \dots \alpha_r$

2. В этом сл. н.с.н. $\forall\alpha P$ имеет вид $\alpha_2, \dots, \alpha_r$. и здесь все получили.

пример (с кругами).

$\neg p_1^2(t_1, 0) \& \exists t_2(\neg p_1^2(t_2, 0) \& p_1^2(f_2^2(t_1, t_2), 0$

т.е. „t_1 есть делитель нуля".

Обозначим эту ф-лу A.

$\rho\llcorner A\lrcorner \equiv (\neg p_1^2(t_1, 0) \& \bigvee_{i=0}^{s}(\neg p_1^2(i, 0) \& p_1^2(f_2^2(t_1, i)$

$0)))$.

мы можем теперь распростр. на ПФ. понятие выполнимость. именно:

$в\llcorner F\lrcorner \equiv в\llcorner\rho\llcorner F\lrcorner\lrcorner$

пример. „Зерк. обр. любого светлого круга совпадает с нек. темным кругом".

$$\forall t_1 (p_1^1(t_1) \to \exists t_2 (p_2^1(t_2) \& p_2^2(t_1, t_2))) \leftrightharpoons B$$

Это пост. ЛПФ. Строим ее развертку.

$$\tilde{\mathfrak{A}}\llcorner B \lrcorner \stackrel{\circ}{=} \forall t_1 (p_1^1(t_1) \to \bigvee_{i=0}^{5} (p_2^1(i) \& p_2^2(t_1, i)))$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}\llcorner \tilde{\mathfrak{A}}\llcorner B \lrcorner\lrcorner \stackrel{\circ}{=} \mathop{\&}_{j=0}^{5} (p_1^1(j) \to \bigvee_{i=0}^{5} (p_2^1(i) \& p_2^2(j, i)))$$

Здесь i, j — метаязык. знаки для сокращ. записи. Вместо того, чтоб пользоваться всем процессом вычисл., мы вспомним теорему Чёрча-Россера. т.к. импликац. ист. при ложной посылке, то при $j = 1, 0, 4, 5$ импликац.

$$p_1^1(j) \to \bigvee_{i=0}^{5} (p_2^1(i) \& p_2^2(j, i))$$ имеет знач. „истина". и т.д.

Поэтому получаем: $\mathfrak{B}\llcorner B \lrcorner \stackrel{\circ}{=} И$

Извлечем из сказанного некоторые морали. Алгорифм вычисл. знач. таков, что на каждой пост. ЛПФ он заканчивается и имеет своим рез-том либо конст. И либо конст. Л.

Это и называется в логике законом исключённого третьего. В традиционной логике всё о чем мы говорим считалось либо истинно, либо ложно. Мы тоже получим этот закон, но на осн. предпосылок:

1) область объектов (пр. переменных) конечна;

2) все рех. предикаты и ф-ции определены при всех допуст. знач. перем.

~~Если же~~ Пусть теперь объекты у нас — нат. числа, а предикаты — отношения порядка. Соотв. таблицы можно заменить алгоритмами, т. о. будет у нас аналогичен. Но как здесь быть с кванторами? Как быть с бесконечностями? Здесь возникает пауза.

Шаг от конечной обл. к бесконечной — — тончайшая вещь и здесь наука еще не до конца разобралась. В конце курса все же будут даны некоторые пояснения.

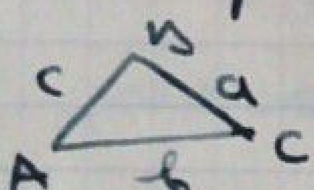
пришло время вернуть один долг. Он касает-ся понимания импликации.

		&	V	→	←	↔	↮
И	И	И	И	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	Л

Все эти связки мы читали с пом. обычно-го разговорного языка.

В разговорном языке огромное кол-во омонимов. И вот, эта комбинация „если ..., то" есть омоним. Эта таблица выделяет один из смыслов, особенно важ-ный для математики.

Некоторые примеры:

1) 

Если $\angle A = \angle B$, то $a = b$

2) Если я поверну выключатель эл. осв., то загорится лампа.

3) Если можно построить дом в n этажей, то можно построить дом и в $n+1$ этаж.

4) Если в 1977 г. Иванов учился на одни пятерки, то в 1978 г. он учится на тройки.

Во втором примере мы хотим показать причинную зависимость.

В третьем импликация не причинная. Просто мы владеем методом, позволяющим по способу построения одной конструкции построить другую.

В 4-ом примере – просто конъюнкция.

Эти примеры – грубо нематематического характера. А что же в 1 ом примере?

Здесь фактически сказано: давайте ограничимся только такими Δ, в которых $\angle A = \angle B$. Здесь импликация играет роль выделителя. Мы видим, что здесь импликация связана с квантором общности. И это всегда так в математике.

Вот еще такой пример:

1) Каждое число x делящееся на 6 делится и на 3.

Здесь нет ни какой индукции. Но здесь есть предм. перем., значения которой — <u>не</u> все возможные числа.

2) Каково бы ни было число X, если X ⋮ 6, то X ⋮ 3.

Здесь уже X пробегает все нат. числа. Однако высказывания 1) и 2) мы отождествили. И вот переход от пр. перем. с более узкой обл. знач. к пр. перем. с более широкой обл. знач. и осуществл. с помощью индукции. В этом и состоит осн. роль инд. в мат-ке.

Теперь становится прозрачным смысл надобности для индукции. (см. предыд. стр.)

Тезис а) в мат-ке отожд. по смыслу выск. 1) и 2).

Тезис б) высказ. 1) истинно; след. и высказ. 2) истинно.

в) признавая истинным 2) и получив

его частн. случаи мы придум. истинными, например:

А) „Если $\overbrace{\text{12 делится на 6}}^{\text{и}}$, то $\underbrace{\text{12 делится на 3}}_{\text{и}}$" — именно так устроена 1 строчка таблицы для имп.

Б) „$\underbrace{\text{Если 3 делится на 6}}_{\wedge}$, то $\underbrace{\text{3 делится на 3}}_{\text{и}}$"

— это все высказ. уже придумано и. Деваться некуда. Так устроена 3-я строчка. Нельзя только говорить „из лжи вытекает истина": это не „придумали" и не таинственное.

В) „Если $\overbrace{\text{5 делится на 6}}^{\wedge}$, то $\overbrace{\text{5 делится на 3}}^{\wedge}$", то все высказ. и. — 4ая строка

3) Каково бы ни было число x, если ~~x~~ $\vdots\, 3$, то $x \vdots 6$.

Это высказ. ложно (именно, при $x = 3$)

3*) Если $\underbrace{\text{3 делится на 3}}_{\text{и}}$, то $\underbrace{3 \vdots 6}_{\wedge}$, — ложно.

Так устроена 2ая строка.

Заметим, что „следование" совсем другая вещь. О ней будет иначе, в аппарате лог. вывода.

Переходя от бесств. ф-л. к кванторным, мы можем повт. многие вещи.
Пусть F - произв АПф., и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ - произв. список пр. перем, включ. все параметры ф-лы F, тогда пара
$F, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ - опред. k-местный предикат, а именно, выбрав произв. кортеж пр. констант $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ и построив ф-лу $\ulcorner F\, {}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}_{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}} \urcorner$ мы получим зам. пост. ф-лу
Вычислим для этой пост. ф-лы ее значимость, мы получим ту пропозиц. константу, которую мы ставим в соотв. кортежу $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$. Варьируя всевозм. способами этот кортеж мы и получим табл. некоторого k-местного предиката, опреде-

лементо горой. Его обозн. иногда:

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k F$.

Пример:

„t_1 есть делитель нуля."

$F \leftrightharpoons (\neg p_1^2(t_1, 0) \& \exists t_2(\neg p_1^2(t_2, 0) \& p_1^2(f_2^2(t_1, t_2), 0)))$. t_1 - единств. перем, имеющая св. вхождение.

Предикат: $\exists t_1 F$. Действуем по пр-лу

$(\neg p_1^2(2, 0) \& \exists t_2(\neg p_1^2(t_2, 0) \& p_1^2(f_2^2(2, t_2), 0)))$ - это уже пост. ф-ла. Можно найти ее валентность, для чего нужно построить разверстку и т.д. (см. 1). Для 2 это и. Точно так же действуем для всех ост. случаев.

§11. Введение в ЛП языки сокращений и избыточности.

Построенный выше язык обладает огранными достоинствами. Недостатки в том, что мы получаем огромные выражения с большими кол-вом скобок.

Поговорим о сокращениях.

1) (уже было) Запись $(F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_n) \leftrightharpoons$ $((\ldots(F_1 \& F_2) \& F_3) \& \ldots) \& F_n)$

2) Аналог. с $\vee$

3) $\forall \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k F \leftrightharpoons \forall \alpha_1 \forall \alpha_2 \ldots \forall \alpha_k F$

4) Аналог. с $\exists$

5) $\forall \alpha \{\in p_k^1\} F \leftrightharpoons \forall \alpha (p_k^1(\alpha) \to F)$

здесь p_k^1 – одноместная предикатная константа. (Возможен вариант $\forall \alpha \in \{p_k^1\} F$).

6) $\exists \alpha \{\in p_k^1\} F \leftrightharpoons \exists \alpha (p_k^1(\alpha) \& F)$

7) При упрощенной записи формул, начинающихся (и не явл. подформулами др. ф-л, внешние скобки опускаем, напр. $(P \to Q)$ пишем $P \to Q$.

8) Чтоб экономить скобки внутри ф-л установим иерархию знаков:

$\&$, $\vee$ „связывают сильнее", чем $\to$, $\leftrightarrow$, например:

$P \& Q \to R \vee \neg S \vee T$ – сокр. запись ф-лы

$((P \& Q) \to ((R \vee \neg S) \vee T))$.

Поговорим об избыточностях.
Уже то, что мы ввели 10 связок, а не 2 говорит об избыточности нашего ЛП языка.

Еще один тип избыт.: когда мы пишем содержательно: Если P, то Q то мы <u>сначала</u> знаем, что имеем дело с импликацией. Можно ввести избыт. для имп. $\{P \to Q\}$, т. е. новые скобки $\{ \}$.

Заметим, что этот язык близок к языку алгебры, кибернетики (возможно). Однако он весьма далек от языка мат. анализа, диф. уров и т. п. Дело в том, что язык анализа складывался стихийно, на основе интуитивного понятия переменной величины. В чем отличие наших пр. перем. и „переменных величин"?

Примеры перем. величин:

масса, расст., сила, эл. заряд и т.д.

Имеет ли смысл грамм. конструкт.:

„а есть масса" – нет конечно! Имеет

смысл: „масса предмета P". т.е.

масса есть термин функции.

то же расстояние (2х местн. ф-я).

Закон Ньютона: M_1, M_2 – точки

$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$. В подтексте ф-лы указано,

что m_1 есть масса 1ой точки, $\mathfrak{M}(M_1)$

m_2 —,,— 2ой —,,— $\mathfrak{M}(M_2$

r расст. между (M_1, M_2) $\mathcal{R}(M_1, M_2)$

т.е. m_1, m_2, r – обозначения пр. не.

Итак:

$$\forall M_1 M_2 \left(\Phi(M_1, M_2) = \gamma \frac{\mathfrak{M}(M_1)\,\mathfrak{M}(M_2)}{\mathcal{R}(M_1, M_2)^2} \right)$$

Тогда отучится говорить: ф-я зависит от перем. Переменные тут не причем.

Однако есть псих. мотивы считать

m_1 и m_2 незав. перем., а не пр. не, то об этом позже.

Язык математики создал много поводов для самозапутывания.

Часто пишут $u = u(x, y)$. Во-первых „u" употребляется в 2х разных смыслах.

Аккуратнее делать так $u = f(x, y)$.

Что здесь теперь написано? Задание ф-ции?

Нет ф-я задается таблицей и т.п.

Здесь написано уравнение графика ф-ции.

Дополнительное самозапутывание возникает в теории дифференц. ур-й.

Полный дифференциал:

$$d f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

имеет ли 1ый x
отношение ко 2ому?
не имеет.

полн. дифференц. ставит в соотв. ф-ции 2х перем. ф-цию 4х перем.

$$d\boxed{f}(x, y, h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2$$

Хорошие обозначения употреблял Л. Шварц.

$D^{n_1 n_2 \ldots n_k}[f]$, в соотв. с ними:

$d[f](x, y, h_1, h_2) = D^{1,0}[f](x, y)\, h_1 +$

$+ D^{0,1}[f](x, y) \cdot h_2$.

В выражение:

$\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$. Какой смысл имеет здесь x? Если это знак ф-ции, то в $f(t, x)$ знак ф-ции подставить нельзя (нужно подставить значение ф-ции). Надо писать так

$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + f(t, x(t))$.

Но если автор напишет так, то он тоже попадет в неудобное положение. Если ему придется брать частную производную ф-ции f. Но при последней записи 2-ой перем. просто нет. Запись Л. Шварца $D^{0,1}[f]$ и здесь спасает дело.

Аналогичный пример (из вариац. исчисл.): пусть ищется минимум ф-ла

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx \rightsquigarrow \int_a^b \lambda x\, F(x, f(x), D[f](x)).$$

§12. О параметрических формулах, истинных при всех значениях параметров.

Пусть F − парам. ф-ла, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ − нормальный список параметров ф-лы F. Замыканием ф-лы F называется ф-ла $\forall \alpha_1 \forall \alpha_2 \ldots \forall \alpha_r F$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ − норм. спис. параметров. Если F − пост. ф-ла, то замык. назыв. она сама. Обозначение: $\tilde{\forall} F$ − замыкание ф-лы F.

Например:

$\tilde{\forall}((t_1 = t_2) \& (t_2 = t_3)) \to (t_1 = t_3) \doteq$

$\forall t_1 \forall t_2 \forall t_3 (\ldots)$

О ф-ле F говорят, что она выраж. условие, выполняющееся при всех знач. параметров (или, что F явл. <u>тождественно истинной</u> ф-лой), если $в \llcorner \tilde{\forall} F \lrcorner \doteq И$.

Пример.

Какова бы ни была ф-ла F, ф-ла (F → F)

т. истинна, т.е. $в\llcorner\tilde{\forall}(F\to F)\lrcorner \overset{o}{=} И$.

Это интуитивно ясно, но все же докажем.

Выпишем форм. спис. парам. ф-лы $(F\to F)$ $\alpha_1,\dots,\alpha_r$. Заметим, что он совп. со спис. парам. ф-лы F.

$$в\llcorner\tilde{\forall}(F\to F)\lrcorner \overset{o}{=} в\llcorner\forall\alpha_1\forall\alpha_2\dots\forall\alpha_r(F\to F)\lrcorner$$

$$\overset{\text{опр.}}{\overset{o}{=}} в\llcorner\rho\llcorner\forall\alpha_1\dots\forall\alpha_r(F\to F)\lrcorner\lrcorner \overset{\wedge}{\overset{o}{=}}$$

$$в\llcorner\mathop{\&}_{i_1=1}^{M}\mathop{\&}_{i_2=1}^{M}\dots\mathop{\&}_{i_r=1}^{M}\left(\llcorner\rho\llcorner F\lrcorner\downarrow^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{a_{i_1}\dots a_{i_r}}\lrcorner\to\llcorner\rho\llcorner F\lrcorner\downarrow^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{a_{i_1}\dots a_{i_r}}\lrcorner\right)$$

Заметим, что значение каждого конъюнктивного члена И, т.к. $в\llcorner(G\to G)\lrcorner \overset{o}{=} И$, если G – пост. Следов. з. всей ф-лы И.

Другой пример.

Какова бы ни была F $\quad в\llcorner\tilde{\forall}(F\vee\neg F)\lrcorner \overset{o}{=} И$

Тожд. истинные ф-лы похожи на алгебраические тождества типа:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

У этих выраж. есть интер. св-во: оно истинно при подстановке вместо x и y

любых термов.

Хотелось бы, чтоб для тожд. ист. ф-л это св-во сохранялось.

<u>Лемма 1</u>. Если F - тожд. ист. <u>бескванторная</u> ф-ла, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ - произв. список различных пр. перем., и $T_1, \dots, T_k$ - произв. список термов, то ф-ла $\llcorner F \downarrow^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{T_1 \dots T_k} \lrcorner$ тождественно истинна.

Д-ство:

$G \rightleftharpoons \llcorner F \downarrow^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{T_1 \dots T_k} \lrcorner$. Выпишем полн. список парам. ф-лы G: $\beta_1, \dots, \beta_e$ (часть парам. - старые, независимы, др. часть пришла через $T_1, \dots, T_k$).

σ произв e-к. корректн. пр. комп.: $a_{i_1}, \dots, a_{i_e}$ и построим

$$G^* \,\overline{\overline{o}}\, \llcorner G \downarrow^{\beta_1, \dots, \beta_e}_{a_{i_1}, \dots, a_{i_e}} \lrcorner, \quad \text{в} \llcorner G^* \lrcorner \,\overline{\overline{o}}\, ?$$

не огранич. общности, будем считать, что список $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ включает все парам. ф-лы F.

Пусть $T_i^* \rightleftharpoons \llcorner T_i \downarrow^{\beta_1, \dots \beta_e}_{a_{i_1} \dots a_{i_e}} \lrcorner$.

Теперь все св. перем. $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ в G^* происходят от св в G^* термов $T_1, \dots, T_k$, а поэтому, $G^* \equiv \llcorner F \downarrow^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{T_1^* \dots T_k^*} \lrcorner$.

Как найти теперь $\mathfrak{b} \llcorner G^* \lrcorner$. Можно, см. Т. ↗ найти в.кр. термов, а затем подставить в G^*. т.е.

$\mathfrak{b} \llcorner G^* \lrcorner \equiv \mathfrak{b} \llcorner F^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{a_{j_1} \dots a_{j_k}} \lrcorner$, где $a_{j_s} \equiv \mathfrak{z} \llcorner T_s^* \lrcorner$, $(s = 1, \dots, k)$.

По усл., F - бескв. и тожд. и $\Rightarrow$ в пр. г. И, т.е. $\mathfrak{b} \llcorner G^* \lrcorner \equiv$ И. И это верно для любого кортежа $a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}$. Тем самым лемма доказана.

Мы увидим, что лемма 1 <u>не</u> распространяется в буквальной формулировке на ф-лы с кванторами.

Пример.

$F \leftrightharpoons \exists t_2 (p_2^1 (t_2) \,\&\, p_3^2 (t_1, t_2))$

F - параметрич. с одним парам. t_1.

(„t_1 отмечен с темным кругом").

Легко проверить (непосредств. глядя на рис.), что $\mathfrak{b} \llcorner \widetilde{\forall} F \lrcorner \equiv$ И

Пусть теперь

$F_1 \leftrightharpoons \llcorner F \downarrow {t_1 \atop t_2} \lrcorner$ т.е.

$F_1 \overline{\overline{o}}\ \exists t_2 (p^1_2(t_2) \& p^2_3(t_2, t_2))$ т.о.

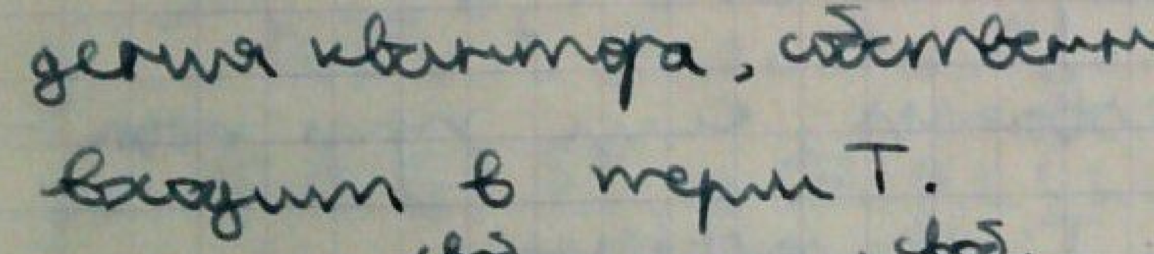
F_1 - тожд. ф-ла и $в \llcorner F_1 \lrcorner \overline{\overline{o}}\ \Lambda$

Наша ближайшая цель — понять, когда в нв. ф-лы можно подставить термы вместо параметров без нарушения св-ва ф-лы быть тожд. истинной.

Введем ряд определений.

Пусть F - ф-ла, α - пр. перем, T - пр. те.

говорят, что F, α, T - согласованы, если ни одно свободное вхождение перем. α в F не находится в обл. действия такого вхождения квантора, собственная перем. которого входит в терм T.



F

- разрешается, если β, γ, δ не входят в T.

Допустим, что β вх. в T. тогда согласов. нет, т.к. 1-ое вх. α вх. в обл. действия квантора.

т.к. понятие сложное и трудно усваивает-ся додим эквив. опр.

Будем говорить, что перем. α подчинена перем. ~~ф-ле~~ β в ф-ле F, если существ. такое свобод. вхожд. α в F, которое находится в обл. действия квантора с перем β.
Говорят, что F, α, T, если ни одна у тех пр. перем., которым подчинена перем. α в ф-ле F, не входит в терм T.

Еще одно определение.

Пусть F - ф-ла, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ - произв. список различных пр. перем. и $T_1, \dots, T_k$ - произв. список пр. те. Говорят, что $F, \alpha_1, \dots, \alpha_k, T_1, \dots, T_k$ согласованы, если при каждом $i \leq k$ F, α_i, T_i согласованы.

Лемма 2.] F - произв. ф-ла, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ - произв. список различных пр. перем, $T_1, \dots, T_k$ - произв. список пр. те. Если $F, \alpha_1, \dots, \alpha_k, T_1, \dots, T_k$ согласованы, то

$\rho\llcorner\llcorner F \overset{\alpha_1,\dots,\alpha_k}{\underset{T_1,\dots,T_k}{\Downarrow}}\lrcorner\lrcorner \;\bar{\bar{\circ}}\; \llcorner\rho\llcorner F\lrcorner \downarrow^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1,\dots,T_k}\lrcorner$

Д-тво:

Для простоты положим, что $k=1$, т.е. докажем, что если F, α, T — согласованы, что $\rho\llcorner\llcorner F^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \;\bar{\bar{\circ}}\; \llcorner\rho\llcorner F\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner$.

Индукция по процессу порождения формулы.

1) F атом. ф-ла — очевидно

2) $F \qquad \neg F$ — очев.

3) $F, G \qquad (F \odot G) \qquad i=1,\dots,10$

пусть $(F \odot G)$, α, T — согласованы. Тогда согласованы F,α,T и G,α,T (это очевидно), и по инд. предп. имеем:

$\rho\llcorner\llcorner F \Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \;\bar{\bar{\circ}}\; \llcorner\rho\llcorner F\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner \qquad (*)$

$\rho\llcorner\llcorner G \Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \;\bar{\bar{\circ}}\; \llcorner\rho\llcorner G\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner$ и значит

$\rho\llcorner\llcorner (F \odot G)\Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \;\bar{\bar{\circ}}\; \rho\llcorner(\llcorner F\Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner \odot \llcorner G\Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner)\lrcorner \;\bar{\bar{\circ}}$

$(\rho\llcorner\llcorner F\Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \odot \rho\llcorner\llcorner G\Downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner) \;\bar{\bar{\circ}}$, применяя $(*)$,

$\overset{\text{соотв. т.}}{\;\bar{\bar{\circ}}\;} (\llcorner\rho\llcorner F\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner \odot \llcorner\rho\llcorner G\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner) \;\bar{\bar{\circ}}$

$\bar{\bar{\circ}}\; \llcorner(\rho\llcorner F\lrcorner \odot \rho\llcorner G\lrcorner)\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner \overset{\text{соотв. т.}}{\;\bar{\bar{\circ}}\;} \llcorner\rho\llcorner(F\odot G)\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner$

$\bar{\bar{\circ}}\; \llcorner\underbrace{\rho\llcorner(F\odot G)}_{\text{бесив. ф-ла}}\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner$

4) F $\quad \forall\beta F$ $\quad \exists\beta F$. Ограничимся случаем $\forall\beta F$

] ф-ла $\forall\beta F, \alpha, T$ согласованы.

4а) $\alpha \overset{\circ}{\not\equiv} \beta$, 4б) $\alpha \overset{\circ}{\equiv} \beta$

Начнем с 4б), т.е. $\forall\alpha F, \alpha, T$ – согласованы

(это будет всегда)

Вообще, в п.4 мы хотим д-ть, что

$$\rho\llcorner\llcorner\forall\beta F \downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \overset{\circ}{=} \llcorner\rho\llcorner\forall\beta F\lrcorner \downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner .$$

В нашем сл.,

$$\rho\llcorner\llcorner\forall\alpha F \downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner\lrcorner \overset{\circ}{=} \llcorner\rho\llcorner\forall\alpha F\lrcorner \downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner \quad (**),$$ то

α не является параметром ф-лы $\rho\llcorner\forall\alpha F\lrcorner$

и значит

$\llcorner\rho\llcorner\forall\alpha F\lrcorner\downarrow^{\alpha}_{T}\lrcorner \overset{\circ}{=} \rho\llcorner\forall\alpha F\lrcorner$, поэтому в ф-ле (**) и л.ч. и п.ч. равны $\rho\llcorner\forall\alpha F\lrcorner$ и 4б) доказано.

4а). $\beta \not\equiv \alpha$ Если α не вх. св. в $\forall\beta F$, то рассуждение, годится, такое же как и в 4б). Пусть α вх. своб. в $\forall\beta F$. Поэтому β не вх. в терм T (т.к. $\forall\beta F, \alpha, T$ – согласованы). Кроме того, F, α, T – согласованы.

по индукц. предп., $\lfloor \rho \lfloor F \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor\rfloor \equiv \lfloor \rho \lfloor F \rfloor \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor$.

теперь вычислим:

$$\lfloor \rho \lfloor \forall \beta F \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor\rfloor \equiv \cancel{\&_{i=1}^{M} \ldots} \ \rho \lfloor \forall \beta \lfloor F \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor\rfloor$$

$$\equiv \&_{i=1}^{M} \lfloor \rho \lfloor F \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor \downarrow^{\beta}_{a_i} \rfloor \equiv \&_{i=1}^{M} \lfloor\lfloor \rho \lfloor F \rfloor \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor \downarrow^{\beta}_{a_i} \rfloor$$

$$\equiv \&_{i=1}^{M} \rho \lfloor F \rfloor \downarrow^{\alpha,\beta}_{T,a_i} \rfloor \quad (\text{т.к. } \beta \text{ не вх. в } T, \alpha \neq \beta) \equiv$$

$$\equiv \lfloor \&_{i=1}^{M} \lfloor \rho \lfloor F \rfloor \downarrow^{\beta}_{a_i} \rfloor \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor \equiv \lfloor \rho \lfloor \forall \beta F \rfloor \downarrow^{\alpha}_{T} \rfloor.$$

лемма доказана.

__Теорема__ Если F — тожд. ист. ф-ла, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произв. сп. разл. пр. перем., $T_1, \ldots, T_k$ — произв. список пр. те и $F, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, T_1, \ldots, T_k$ — согласованный список, то ф-ла $\lfloor F \downarrow^{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}_{T_1, \ldots, T_k} \rfloor$ тождеств. истинна.

Д-ство:

] вып. усл. теоремы, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — полн. список парам. ф-лы F^*, где $F^* \rightleftharpoons \lfloor F \downarrow^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{T_1 \ldots T_k} \rfloor$. Пусть $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ — произв. нормальн. пр. константы. Надо установить, что

в $\lfloor F^* \downarrow^{\gamma_1, \ldots, \gamma_r}_{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}} \rfloor \equiv$ И

На осн. Л2. $\rho\llcorner F\lrcorner \;\overline{\underline{\circ}}\; \llcorner\{\rho\llcorner F\lrcorner\}\downarrow^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1,\dots,T_k}\lrcorner$. По усл.,

ф-ла F – тожд. ист. ф-ла, следов. и ее развертка тожд. ист. ф-ла.

~~Не огранич. общности м. считать, что список $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ включает в себя все перем. ф-лы F.~~

$$\llcorner F^* \overset{\circ}{\downarrow}{}^{\vartheta_1,\dots,\vartheta_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner \;\overline{\underline{\circ}}\; \llcorner F \overset{\circ}{\downarrow}{}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1^*,\dots,T_k^*} \lrcorner,$$ ~~где~~

$$T_i^* \leftrightharpoons \llcorner T_i \downarrow^{\vartheta_1,\dots,\vartheta_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner$$

$$в\llcorner F^* \overset{\circ}{\downarrow}{}^{\vartheta_1,\dots,\vartheta_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner \;\overline{\underline{\circ}}\; в\llcorner F \overset{\circ}{\downarrow}{}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1^*,\dots,T_k^*} \lrcorner \;\overline{\underline{\circ}}$$

$$\overline{\underline{\circ}}\; в\llcorner \rho\llcorner F \overset{\circ}{\downarrow}{}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1^*,\dots,T_k^*} \lrcorner\lrcorner \;\overline{\underline{\circ}}\; в\llcorner\{\rho\llcorner F\lrcorner\}\downarrow^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1^*,\dots,T_k^*}\lrcorner\lrcorner$$

Прервем д-ство и докажем след. лемму.

<u>Лемма 3</u>. Если F тожд. ист. ф-ла, то и $\rho\llcorner F\lrcorner$ – тожд. ист. ф-ла.

Д-ство:

Выпишем норм. список перем. ф-лы F. Пусть он имеет вид $\vartheta_1,\dots,\vartheta_r$. Пусть $a_{i_1},\dots,a_{i_r}$ – r-ка нормал. пр. констант.

Построим ф-лу:

$\llcorner F \downarrow^{\gamma_1,\dots,\gamma_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner$ и значит

$$в \llcorner\llcorner F \downarrow^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner\lrcorner \stackrel{\circ}{=} И \qquad (\Delta)$$

Теперь заметим, что $F, \gamma_1,\dots,\gamma_r, a_{i_1},\dots,a_{i_r}$ — согласованы. По лемме 2,

$$\rho \llcorner F \downarrow^{\gamma_1,\dots,\gamma_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner \stackrel{\circ}{=} \llcorner \rho \llcorner F \lrcorner \downarrow^{\gamma_1,\dots,\gamma_r}_{a_{i_1},\dots,a_{i_r}} \lrcorner \qquad (\Delta\Delta)$$

По ф-ле (Δ), валентность л.ч. рав-ва $(\Delta\Delta)$ И, поэтому и вал. пр.ч. тоже есть И. Т.к. кортеж $a_{i_1},\dots,a_{i_r}$ — произв., то $\rho \llcorner F \lrcorner$ — тождественно истинна.

Лемма доказана. Закончим д-ство теоремы.

Т.к. F — тож. ист., след., по лемме 3 $\rho \llcorner F \lrcorner$ — тожд. ист. ф-ла. Воспользуемся леммой 1. Из нее след., что

$\llcorner \rho \llcorner F \lrcorner \downarrow^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1,\dots,T_k} \lrcorner$ тожд. ист. и,

значит

$\rho \llcorner F \downarrow^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1,\dots,T_k} \lrcorner$ — тожд. ист. ф-ла,

значит и $F \downarrow^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}_{T_1,\dots,T_k}$ — тожд. ист. ф-ла. Теорема доказана.

§ 13. Исчисление натуральных выводов.

математики выражает знание о предметной области с помощью теорем (истинных высказываний). Но, как можно заметить, вычисление валентности на практике весьма чрезвычайно редкая. Как пр-ло мы пользуемся правилами лог. вывода, переводящие истинные высказывания в истинные.

Пусть $F_1, \dots, F_r$ - список ф-л, принимаемых в качестве исходных, которые являются пост. ист. ф-лами или же парам. ф-лами, истинными при всех знач. парам., т.е. $\mathcal{B} L \tilde{\forall} F_i \rfloor \equiv И$, $i = 1, \dots, r$.

Пример.

$P_1^2(t_1, t_2)$ т.е. $(t_1 = t_2)$

$(t_1 = t_2) \to (t_2 = t_1)$

$(t_1 = t_2) \& (t_2 = t_3) \to (t_1 = t_3)$

$(t_1 + 0) = t_1$

$\forall t_1 \exists t_2 ((t_1 + t_2) = 0)$

(это аксиоматика рав-ва и коммутат. группы, без аксиом.).

В логике разработано большое кол-во теорий вывода. Мы изберем вариант, называемый <u>исчисл. натур. выводов</u>. Это не самая экономная аксиоматика, однако весьма близкая к постоянной работе математика. Она была предложена Г. Генценом в 1935 г.

Мы строим вывод (всевозможные начала):

1) упоминание какой-либо ф-лы F_s,

2) $(P \vee \neg P)$,

3) введение допущения 3а) пусть имеет место пост. ф-ла Q. 3б) пусть Q — парам. ф-ла: „пусть $a_1, \ldots, a_k$ таковы, что имеет место Q".

Это были типы начального шага.
Типы дальнейших шагов лог. вывода.
а) шаги, такие же, как нач. шаг.
б) формирование нового утв. из ранее полученных с пом. того или иного пр-ла вывода.
в) констатирование противоречия.
Мы строим лог. вывод.
Пусть на n-ом шаге получена ф-ла G. Ясно, что она получена при некоторых допущениях. Так что рез-т n-ого шага - это не просто ф-ла G, а более сложный объект. Так что пр-ло лог. вывода это не только преобразов G, но и преобразов допущений $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
Введем знак секвенции $\Rightarrow$. Итак, рез-т n-ого шага имеет вид:
$P_1, P_2, \ldots, P_n \Rightarrow G$. Ясно, что тек. ф-ла м.б. получена без всяких допущ.

Это запис. так: $\Rightarrow$ Б.

Констатирование на n-ом шаге

противоречия записыв. так:

$P_1, \ldots, P_n \Rightarrow$.

Итак, расширяем алф. нашего языка знаком секвенции $\Rightarrow$, и вводим понятие

формульной цепи.

1) $\vdash \Delta$ есть формульная цепь (Δ - пустое слово)

2) Γ есть формульная цепь, P есть ф-ла $\vdash \Gamma P$ есть формульная цепь

(т. е. запятыми не разделяются).

Очевидно, что всякая форм. цепь единств. обр. разбив. на сост. ее ф-ла.

слово $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ - произв. форм. цепь,

а Δ - одноэл. или пустая ф. ц. называв.

секвенцией.

Γ называв. антецедентом секвенции,

Δ называв. консеквентом (сукцедентом)

секвенции.

как было отмечено в гл. 3

Мы полаг., что задан нек. набор нелог. ф-л, о которых известно, что в $L\hat{\forall}F_i \perp \overline{\underline{\circ}}$ и $(i=1,\dots,r)$

1) каждой нел ф-ле F_i поставим в соотв. секвенцию $\Rightarrow F_i$ (читается „имеет место F_i") такие секв. назыв. специфическими нел. секвенциями. (СНС)

2) логич. нел секв. 2х видов: $\Rightarrow (P \vee \neg P)$, где P произв ф-ла (секвенции типа закона искл. третьего) (ЗИС)

3) $P \Rightarrow P$ (тривиальные нел. секв.) (ТНС)

Надо заметить, что тривиальные секвенции используются весьма часто. Условимся, что в языке, в кач. нел. лог. знаков выбраны $\neg, \&, \vee, \to, \forall, \exists$.

Правила вывода:

$$\Pi_{\&}1: \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P \qquad \Sigma \Rightarrow Q}{\Gamma\Sigma \Rightarrow (P \& Q)}$$

пр-ло введения конъюнкции.

$\Pi_{\&}2$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow (P \& Q)}{\Gamma \Rightarrow P}$$

$\Pi_{\&}3$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow (P \& Q)}{\Gamma \Rightarrow Q}$$

пр-ла исключ. конъюнкции.

$\Pi_{\vee}1.$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow P}{\Gamma \Rightarrow (P \vee Q)}$$

$\Pi_{\vee}2$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow (P \vee Q)}$$

введение $\vee$

$\Pi_{\vee}3$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow (P \vee Q) \quad P\Sigma \Rightarrow R \quad Q\Pi \Rightarrow R}{\Gamma\Sigma\Pi \Rightarrow R}$$

пр-ло обоснования разбором возможн. случаев.

$\Pi_{\to}1$: $$\frac{P\Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow (P \to Q)}$$

введение $\to$

$\Pi_{\to}2$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Sigma \Rightarrow (P \to Q)}{\Gamma\Sigma \Rightarrow Q}$$

исключение $\to$

$\Pi_{\neg}1$: $$\frac{P\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg P}$$

введение $\neg$

$\Pi_{\neg}2$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Sigma \Rightarrow \neg P}{\Gamma\Sigma \Rightarrow}$$

исключение $\neg$

Структурные правила:

П ст 1 : $$\frac{\Gamma P \Sigma Q \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma Q \Sigma P \Pi \Rightarrow \Delta}$$

Здесь $\Gamma, \Sigma, \Pi, \Delta$ – формульные цепи, P, Q – ф-лы

П ст 2 : $$\frac{\Gamma P \Sigma P \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma P \Sigma \Pi \Rightarrow \Delta}$$

П ст 3 : $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{P \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

П ст 4 : $$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow P}$$

Правила обращения с кванторами:

П$\forall$1 : $$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \alpha \text{ не вх. св. в } \Gamma}{\Gamma \Rightarrow \forall \alpha P}$$ введение $\forall$

П$\forall$2 : $$\frac{\Gamma \Rightarrow \forall \alpha P \quad P, \alpha, T \text{ – согласованы}}{\Gamma \Rightarrow \llcorner P \{\tfrac{\alpha}{T}\} \lrcorner}$$ исключение $\forall$

П∃1: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \llcorner P\,{}^{\alpha}_{T} \lrcorner \quad P,\ \alpha,\ T \text{ - согласованы}}{\Gamma \Rightarrow \exists \alpha P}$ введение ∃.

П∃2: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \exists \alpha P \quad P\Sigma \Rightarrow R \quad \alpha \text{ не вх. св. в } \Sigma \text{ и } R}{\Gamma\Sigma \Rightarrow R}$ исключ. ∃.

Эта система и назыв. исчислением нат. выводов под списком $C: F_1, \dots, F_r$ ($ИНВ_C$).

Некоторые частные случаи пр. вывода:

1) Правила введения и иск. для эквивалентности:

$$П_{\leftrightarrow}1: \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow (P \to Q) \quad \Sigma \Rightarrow (Q \to P)}{\Gamma\Sigma \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)}$$

– следует из $П_{\&}1$, т.к. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightharpoons ((P \to Q) \& (Q \to P))$.

$$П_{\leftrightarrow}2: \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)}{\Gamma \Rightarrow (P \to Q)}$$

$\Pi_{\leftrightarrow}3$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)}{\Gamma \Rightarrow (Q \to P)}$$

– следует из $\Pi_{\&}2$ и $\Pi_{\&}3$.

2) В $\Pi_{\forall}2$ положим $T \stackrel{\circ}{\equiv} \alpha$, тогда совместимость P, α, T имеет место автоматически и мы имеем:

$\Pi_{\forall}2^{-}$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow \forall \alpha P}{\Gamma \Rightarrow P}$$ („сбрасывание квантора")

3) В $\Pi_{\exists}1$ положим $T \stackrel{\circ}{\equiv} \alpha$, тогда, аналог. 2) имеем:

$\Pi_{\exists}1^{-}$: $$\frac{\Gamma \Rightarrow P}{\Gamma \Rightarrow \exists \alpha P}$$

Понятие вывода в ИНК$_с$.

Выводом в ИНК$_с$ называется любой список секвенций $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta, \dots, \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k$, удовлетворяющий условию: при каждом i $(1 \leqq i \leqq k)$ секв. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta$: или является исходной секвенцией исчисления или получается из одной или нескольких предшеств. ей секвенций, в точно по одному из правил вывода.

~~[illegible] вывод~~

Список посл. ф-л с м.б. пустым. Если это так, то соотв. $ИНВ_c$ будем называть „чистым ИНВ" и обозначать ИНВ (без „с").

Исчисление, получаемое из ИНВ вычеркиванием кванторов $\forall$ и $\exists$ будем называть урезанным ИНВ и обозн $ИНВ^-$.

Итак, ИНВ является расширением $ИНВ^-$, а $ИНВ_c$ явл. расш. ИНВ.

Ясно, что всякий вывод в $ИНВ^-$ явл. выводом в ИНВ, а вс. выв. в ИНВ будет выводом в $ИНВ_c$.

Ф-ла P назыв. выводимой в данном исчислении, если в этом исчисл. выводима секвенция $\Rightarrow P$.

Примеры выводов:

А. Вывести формулу:

$(P \vee (Q \& R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$.

1. Допустим $(P \vee (Q \& R))$ тогда

1. $\underbrace{(P \vee (Q \& R))}_{\mathcal{D}_1} \Rightarrow (P \vee (Q \& R))$ (ТИС)

2. $P \Rightarrow P$ (ТИС)

3. $P \Rightarrow (P \vee Q)$ $(2, \Pi_{\vee}1)$

4. $P \Rightarrow (P \vee R)$ $(2, \Pi_{\vee}1)$

5. $P\,P \Rightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$ $(3, 4, \Pi_{\&}1)$

6. $P \Rightarrow$ ——— " ——— $(5, \Pi_{ст}2)$

7. $\underbrace{(Q \& R)}_{\mathcal{D}_2} \Rightarrow (Q \& R)$ (ТИС)

8. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow Q$ $(7, \Pi_{\&}2)$

9. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow R$ $(7, \Pi_{\&}3)$

10. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow (P \vee Q)$ $(8, \Pi_{\vee}3)$

11. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow (P \vee R)$ $(9, \Pi_{\vee}3)$

12. $\mathcal{D}_2\,\mathcal{D}_2 \Rightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$ $(10, 11, \Pi_{\&}1)$

13. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$ $(12, \Pi_{ст}2)$

14. $\mathcal{D}_1 \Rightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$ $(1, 6, 13, \Pi_{\vee}3)$

15. $\Rightarrow (\mathcal{D}_1 \rightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$ $(14, \Pi_{\rightarrow}1)$

Обратная импликац. предост. слушателям в кач. домашнего задания.

Б. Вывести формулу

$((P \& Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

1. $\underbrace{((P \& Q) \rightarrow R)}_{\mathcal{D}_1} \Rightarrow ((P \& Q) \rightarrow R)$ (ТИС)

2. $(P \Rightarrow P)$ (ТИС)

3. $(Q \Rightarrow Q)$ (ТИС)

4. $P Q \Rightarrow (P \& Q)$ $(2, 3, \Pi_{\&} 1)$

5. $P Q \mathcal{D}_1 \Rightarrow R$ $(4, 1, \Pi_{\rightarrow} 2)$

~~6.~~ $\cancel{Q \mathcal{D}_1 \Rightarrow (P \rightarrow R)}$ $\cancel{(5, \Pi_{\rightarrow} 1)}$

~~7.~~ $\cancel{\mathcal{D}_1 \Rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))}$ $\cancel{(6, \Pi_{\rightarrow}}$

6. $Q P \mathcal{D}_1 \Rightarrow R$ $(5, \Pi_{ст.} 1)$

7. $P \mathcal{D}_1 \Rightarrow (Q \rightarrow R)$ $(6, \Pi_{\rightarrow} 1)$

8. $\mathcal{D}_1 \Rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ $(7, \Pi_{\rightarrow} 1)$

9. $\Rightarrow (\mathcal{D}_1 \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)))$ $(8, \Pi_{\rightarrow} 1)$

10. $\underbrace{(P \rightarrow (Q \rightarrow R))}_{\mathcal{D}_2} \Rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ (ТИС)

11. $\underbrace{(P \& Q)}_{\mathcal{D}_3} \Rightarrow (P \& Q)$ (ТИС)

12. $\mathcal{D}_3 \Rightarrow P$ $(11, \Pi_{\&} 2)$

13. $\mathcal{D}_3 \Rightarrow Q$ $(11, \Pi_{\&} 3)$

14. $\mathcal{D}_3 \mathcal{D}_2 \Rightarrow (Q \rightarrow R)$ $(12, 10, \Pi_{\rightarrow} 2)$

15. $\mathcal{D}_3 \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_2 \Rightarrow R$ $(13, 14, \Pi_{\rightarrow} 2)$

16. $\mathcal{D}_3 \mathcal{D}_3 \Rightarrow R$ $(15, \Pi_{ст.} 2)$

17. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow (\mathcal{D}_3 \to R)$ (16, $\Pi_{\to} 1$)

18. $\Rightarrow (\mathcal{D}_2 \to (\mathcal{D}_3 \to R))$ (17, $\Pi_{\to} 1$)

19. $\Rightarrow ((P \& Q) \to R) \leftrightarrow (P \to (Q \to R))$ (9, 18, $\Pi_{\leftrightarrow} 1$)

В. Вывести формулу: $(\neg\neg p \leftrightarrow p)$

1. $\neg\neg p \Rightarrow \neg\neg p$ (ТИС)
2. $\Rightarrow (p \vee \neg p)$ (ЗИТ)
3. $p \Rightarrow p$ (ТИС)
4. $\neg p \Rightarrow \neg p$ (ТИС)
5. $\neg p, \neg\neg p \Rightarrow$ (4, 1, $\Pi_{\neg} 2$)
6. $\neg p, \neg\neg p \Rightarrow p$ (5, $\Pi_{ст} 4$)
7. $\neg\neg p \Rightarrow p$ (2, 3, 6, $\Pi_{\vee} 3$)
8. $\Rightarrow (\neg\neg p \to p)$ (7, $\Pi_{\to} 1$)
9. $p, \neg p \Rightarrow$ (3, 4, $\Pi_{\neg} 2$)
10. $\neg p, p \Rightarrow$ (9, $\Pi_{ст} 1$)
11. $p \Rightarrow \neg\neg p$ (10, $\Pi_{\neg} 1$)
12. $\Rightarrow (p \to \neg\neg p)$ (11, $\Pi_{\leftrightarrow} 1$)
13. $\Rightarrow (\neg\neg p \leftrightarrow p)$ (8, 12, $\Pi_{\leftrightarrow} 1$)

Заметим, что во всех 3х примерах вывод был в ИНВ$^-$.

Г. Вывести формулу:

$$\neg\exists\alpha P \leftrightarrow \forall\alpha\neg P \;.$$

1. $\underbrace{\neg\exists\alpha P}_{D_1} \Rightarrow \neg\exists\alpha P$ [ТИС
2. $P \Rightarrow P$ [ТИС
3. $P \Rightarrow \exists\alpha P$ [2, $П_\exists 1$
4. $P D_1, \Rightarrow$ [3, 1, $П_\neg 2$
5. $D_1 \Rightarrow \neg P$ [4, $П_\neg 1$
6. $D_1 \Rightarrow \cancel{2}\forall\alpha\neg P$ [5, $П_\forall 1$
7. $\Rightarrow (D_1 \to \forall\alpha\neg P)$ [6., $П_\to 1$
8. $\overbrace{\forall\alpha\neg P}^{D_2} \Rightarrow \forall\alpha\neg P$ [ТИС
9. $\underbrace{\exists\alpha P}_{D_3} \Rightarrow \exists\alpha P$ [ТИС
10. $D_2 \Rightarrow \neg P$ [8, $П_\forall 2$
11. $P \Rightarrow P$ [ТИС
12. $P, D_2 \Rightarrow$ [11, 10, $П_\neg 2$
13. $P \Rightarrow \neg D_2$ [12, $П_\neg 1$
14. $D_3 \Rightarrow \neg D_2$ [9, 13, $П_\exists 2$
15. $D_2 D_3 \Rightarrow$
16. $D_2 \Rightarrow \neg D_3$
17. $\Rightarrow D_2 \to \neg D_3$
18. $\Rightarrow \neg\exists\alpha P \leftrightarrow \forall\alpha\neg P$

Д. Вывести формулу:

$\neg(P \& Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$

1. $\underbrace{\neg(P \& Q)}_{\mathcal{D}_1} \Rightarrow \neg(P \& Q)$ [ТИС
2. $P \Rightarrow P$ [ТИС
3. $Q \Rightarrow Q$ [ТИС
4. $PQ \Rightarrow (P \& Q)$ [2, 3, $\Pi_{\&}1$
5. $PQ\mathcal{D}_1 \Rightarrow$ [4, 1, $\Pi_{\neg}2$
6. $P\mathcal{D}_1 \Rightarrow \neg Q$ [5, $\Pi_{cm}1$, $\Pi_{\neg}1$
7. $\mathcal{D}_1 \Rightarrow (P \to \neg Q)$ [6, $\Pi_{\to}1$
8. $\Rightarrow (\mathcal{D}_1 \to (P \to \neg Q))$ [7, $\Pi_{\to}1$.
9. $\underbrace{(P \to \neg Q)}_{\mathcal{D}_0} \Rightarrow (P \to \neg Q)$ [ТИС
10. $\underbrace{(P \& Q)}_{\mathcal{D}_2} \Rightarrow (P \& Q)$ [ТИС
11. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow P$ [10, $\Pi_{\&}2$
12. $\mathcal{D}_2 \Rightarrow Q$ [10, $\Pi_{\&}3$
13. $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_0 \Rightarrow \neg Q$ [11, 9, $\Pi_{\to}2$
14. $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_0 \Rightarrow$ [12, 13, $\Pi_{\neg}2$, Π
15. $\mathcal{D}_0 \Rightarrow \neg\mathcal{D}_2$ [14, $\Pi_{\neg}1$
16. $\Rightarrow (\mathcal{D}_0 \Rightarrow \neg\mathcal{D}_2)$ [15, $\Pi_{\to}1$.
17. $\Rightarrow (\neg\mathcal{D}_2 \leftrightarrow \mathcal{D}_0)$ [8, 16, $\Pi_{\leftrightarrow}1$

так эта игрушка играет...

Замечание о понятии вывода в исчислении. Мы рассматривали понятие: „секвенция, выводимая в ИНК$_c$". Ясно, что это понятие можно ввести порождающей грамматикой:

1) $\vdash \Rightarrow F$ есть выводимая секв.

2) P есть формула $\vdash \Rightarrow (P \vee \neg P)$ есть выв. секв.

3) P есть ф-ла $\vdash P \Rightarrow P$ есть выв. секв.

4) P есть ф-ла, Q есть ф-ла, Γ есть форм. цепь, Σ есть форм. цепь, $\Gamma \Rightarrow P$ есть выв. секв., $\Sigma \Rightarrow Q$ есть выв. секв.
$\vdash \Gamma\Sigma \Rightarrow (P \& Q)$ есть выв. секв.

5) . . . . . .

. . . .

§14. Семантическая правильность (семантическая корректность) исчисления натуральных выводов.

Сначала мы расширим понятие вывода. В дальнейшем будем обозначать любое из трех исчисл.: ИНВ$_c$, ИНВ, ИНВ$^-$

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_l$ – произв. список секвенций. Определим понятие <u>вывода из данного списка секвенций</u>.

Список секвенций $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ называется выводом в исчисл. И из списка секв. $S_1, \ldots, S_l$, если для каждого i $(1 \leq i \leq n)$ $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ представляет собой или акс. секв. исчисл. И или одну из секв. $S_1, \ldots, S_l$ или же получается из одной или нескольких секвенций, предшествующих ей в списке $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ по одному из правил вывода в исчисл. И.

Говорят, что секв $\Gamma \Rightarrow \Delta$ выводима в И из списка $S_1, \ldots, S_l$, если можно построить вывод секв. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ из списка $S_1, \ldots, S_l$, последней секв. которого является $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Пример. P, Q – форм., Γ, Σ – форм. цепи. Секвенция $\Gamma P \Sigma \Rightarrow Q$ выводима в И секв. $\Gamma\Sigma \Rightarrow (P \to Q)$ и наоборот.

В самом деле,

1. $\Gamma P \Sigma \Rightarrow Q$ [данная секв.
2. $P \Gamma \Sigma \Rightarrow Q$ [1, П ст 1
3. $\Gamma \Sigma \Rightarrow (P \to Q)$ [2, $П\to 1$

---

1. $\Gamma \Sigma \Rightarrow (P \to Q)$ [данная секв.
2. $P \Rightarrow P$ [ТИС
3. $P \Gamma \Sigma \Rightarrow Q$ [2, 1, $П\to 2$
4. $\Gamma P \Sigma \Rightarrow Q$ [3, П ст 1

<u>Лемма</u>. Если секвенция S_0 выводима в исчислении И из секвенций $S_1, \dots, S_m, \dots, S_e$ и секв. S_m выводима в исчисл. И, то S_0 выводима в И из списка $S_1, \dots, S_{m-1}, S_{m+1}, \dots, S_e$.

Доказательство.

Пусть $H_1, \dots, H_n$ – список секв., представляющий собой вывод секв. S_0 из $S_1, \dots, S_e$.

ясно, что в этом случае $M_n \equiv S$.

Если S_m встречается в списке $M_1, \ldots, M_n$, то каждое ее вхождение в этот список заменим на вывод S_m в исчислении И. Лемма доказана.

<u>Следствие</u>. Если секв. S_0 вывод. в исч. И из списка $S_1, \ldots, S_l$ и при каждом j $(1 \le j \le l)$ секв. S_j выводима в И, то и секв. S_0 выводима в И.

Следствие получается l-кратным применением леммы.

<u>Теорема</u>. 1. Из секв. $P_1, \ldots P_n \Rightarrow Q$ выводима секвенция $\Rightarrow (\overset{n}{\underset{i=1}{\&}} P_i \to Q)$ и обратно.

2. Из секвенции $P_1 \ldots P_n \Rightarrow$ выводима секв. $\Rightarrow \neg \overset{n}{\underset{i=1}{\&}} P_i$ и обратно,

(в т. подразум. выводимость в исч. И).

Будем считать так же, что

$\underset{i=1}{\overset{1}{\&}} P_i \leftrightharpoons P_1$, $\underset{i=1}{\overset{n+1}{\&}} P_i \leftrightharpoons (\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P_i \,\&\, P_{n+1})$.

Д-ство:

Индукция по n.

1. $n=1$ из $P_1 \Rightarrow Q$ вывод $\Rightarrow (P_1 \to Q)$ то это частный случай примера $\Pi_{\to}1$.

Индукц. шаг. n, $n+1$.

В секв. $P_1 \ldots P_n P_{n+1} \Rightarrow Q$ нам нужно вывести $\Rightarrow \underset{i=1}{\overset{n+1}{\&}} P_i \to Q$

строим вывод:

1) $P_1 \ldots P_n P_{n+1} \Rightarrow Q$ [данная сек.

2) $P_1 \ldots P_n \Rightarrow (P_{n+1} \to Q)$ [пример 1.

3) $\Rightarrow (\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P_i \to (P_{n+1} \to Q))$ [из 2) по инд. пр.

4) $\Rightarrow (\underset{i=1}{\overset{n+1}{\&}} P_i \to Q)$ [3, пример 5

~~Аналогично~~ проводится обр. вывод:

Имеем секв. $\Rightarrow \underset{i=1}{\overset{n+1}{\&}} P_i \to Q$ и след.,

$\Rightarrow (\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P_i \to (P_{n+1} \to Q))$ и поэтому,

$P_1 \ldots P_n P_{n+1} \Rightarrow Q$.

2. 1) $\Rightarrow \neg P_1$ [данная сеть.

$n=1$ 2) $P_1 \Rightarrow P_1$ [ТИС

3) $P_1 \Rightarrow$

инд. переход:

1) $P_1 \ldots P_n\, P_{n+1} \Rightarrow$

2) $P_{n+1}\, P_1 \ldots P_n \Rightarrow$

3) $P_1 \ldots P_n \Rightarrow \neg P_{n+1}$

4) $\Rightarrow (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} P_i \to \neg P_{n+1})$

5) $\Rightarrow \neg \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n+1} P_i$

Аналогично доказывается обратное утв.

введем понятие формульного образа секвенции. $\Gamma \Rightarrow \Delta$. формульный образ: $\varphi \llcorner \Gamma \Rightarrow \Delta \lrcorner$. Определяется так:

$\varphi \llcorner \Rightarrow Q \lrcorner \equiv Q$

$\varphi \llcorner P_1 \ldots P_n \Rightarrow Q \lrcorner \equiv (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} P_i \to Q)$

$\varphi \llcorner P_1 \ldots P_n \Rightarrow \lrcorner \equiv \neg \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} P_i$

теперь доказанная Т. может быть переформулир. след. обр.:

которая бы не была секв. S в исч. И, из секв. S выводима ф-ла $\varphi\llcorner S \lrcorner$ и из ф-лы $\varphi\llcorner S\lrcorner$ выводима секв. S.

<u>Лемма.</u> В исчисл. И из секв. $\Rightarrow$ P выводи-ма формула секв. $\Rightarrow \forall_\alpha P$ и наоборот. Следов. из секв. $\Rightarrow$ P выводима секв. $\Rightarrow \hat{\forall} P$ и наоборот.

Д-ство:

Вспомним правила $\Pi\forall 1$ и $\Pi\forall 2$. Отсюда лемма очевидна.

Какую пост. ф-лу естественно поставить в соотв. секв. S? Ясно, что это ф-ла $\hat{\forall}\varphi\llcorner S\lrcorner$

<u>Теорема о семантической корректности (правильности) ИНВ.</u>

Если секв. S выводима в исчисл. И, то $\hat{\forall}\varphi\llcorner S\lrcorner$ истинна, т. е. $\mathrm{B}\llcorner\hat{\forall}\varphi\llcorner S\lrcorner\lrcorner \overset{\circ}{=} \mathrm{И}$.

В частности, если ф-ла P выв. в И, то $\mathrm{B}\llcorner\hat{\forall}P\lrcorner \overset{\circ}{=} \mathrm{И}$.

О д-стве: относит. ф-л $F_1, \dots, F_r$ мы сначала предположим, что $\text{в}\llcorner\widehat{\forall} F_i\lrcorner \equiv \text{И}$.

Для секвенций $\Rightarrow (Q \vee \neg Q)$ и $P \Rightarrow P$ имеем $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}(P \to P)\lrcorner \equiv \text{И}$ и значит $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}\,\varphi\llcorner P \Rightarrow P\lrcorner\lrcorner \equiv \text{И}$.

Так же доказывается, что $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}(Q \vee \neg Q)\lrcorner \equiv \text{И}$. А дальше нужно перебирать все правила вывода и убеждаться в том, что если $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}\,\varphi\llcorner \dots \lrcorner\lrcorner \equiv \text{И}$, то и $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}\,\varphi\llcorner —"— \lrcorner\lrcorner \equiv \text{И}$.

<u>Следствие</u>. Исчисление И непротиворечиво. т.е. не существ. ф-лы P такой, что P – вывод. и $\neg P$ – выводимо.

Д – тво:

Пусть P такова, что $\Rightarrow P$ и $\Rightarrow \neg P$. По $\Pi_{\&}1$ $\Rightarrow (P \& \neg P)$, по теореме о семантич. кор. $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}(P \& \neg P)\lrcorner \equiv \text{И}$, а непоср. подсчет значимости показывает, что $\text{в}\llcorner\widehat{\forall}(P \& \neg P)\lrcorner \equiv \text{Л}$.

Пусть мы имеем дело не с конечной областью предметов, а, напр., с нат. числами. Функции придется задавать алгорифмически (напр. с пом. машин Тьюринга) и т. д. построим вполне аналогичный язык. Так же задаем предикаты. Но как здесь будет обстоять дело с понятием логич. валентности? Для бескванторных формул все остается как было. Но уже для почти бескв. ф-л уже возникает вопрос: как здесь опр. валентность? Ведь по опр. развертки $\rho\ulcorner\forall\alpha F\urcorner \overset{\circ}{=} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} \ulcorner F^{\alpha}_{a_i}\urcorner$. Но в арифметике мы никогда не сможем закончить процесс выписывания конъюнкции. Поэтому между конечным и бесконечным здесь существует пропасть. Человечество стихийно пошло по очень простому пути. Считается, что будто в мире сама собой валентность определена. Здесь возникает новая идеализация – абстракция актуальной бесконечности. Такая точка зрения многих выдающихся математиков не удовлетворила и возникло новое напр. в математике – конструктивная математика. Практически идеализация акт. беск. состоит в экстраполяции алгоритма вывода на беск. случай, тогда как его обоснование возможно лишь в конечном случае. Проведена огромная работа в конструктивном направлении.

§15. Важнейшие эквивалентности, выводимые в исчислении натур. выводов.

А. Эквивалентности, выводимые в ИНВ$^-$

1) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (ср. с $(P \to Q) \sim (\neg P \vee Q)$ в теории булевых ф-й)

2) $\neg\neg P \leftrightarrow P$

3') $(P \& Q) \leftrightarrow (Q \& P)$

3'') $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

4') $((P \& Q) \& R) \leftrightarrow (P \& (Q \& R))$

4'') $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

5') $(P \& (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \& Q) \vee (P \& R))$

5'') $(P \vee (Q \& R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \& (P \vee R))$

6') $(P \& P) \leftrightarrow P$

6'') $(P \vee P) \leftrightarrow P$

7') $(P \& (Q \vee \neg Q)) \leftrightarrow P$

7'') $(P \vee (Q \& \neg Q)) \leftrightarrow P$

8') $(P \vee (Q \vee \neg Q)) \leftrightarrow (Q \vee \neg Q)$

8'') $(P \& (Q \& \neg Q)) \leftrightarrow (Q \& \neg Q)$

т.н. ф-лы сокращения

9') $\neg (P \& Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

9'') $\neg (P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \& \neg Q)$

В. Эквивалентности выводимые в ИНВ

10') $\forall \alpha R \leftrightarrow \forall \beta \llcorner R \Downarrow^{\alpha}_{\beta} \lrcorner$

10'') $\exists \alpha R \leftrightarrow \exists \beta \llcorner R \Downarrow^{\alpha}_{\beta} \lrcorner$

где R, α, β – согласованы

11') $\forall \alpha R \leftrightarrow R$ 11'') $\exists \alpha R \leftrightarrow R$

где α не входит свободно в R.

12') $\forall\alpha\forall\beta R \leftrightarrow \forall\beta\forall\alpha R$

12'') $\exists\alpha\exists\beta R \leftrightarrow \exists\beta\exists\alpha R$

13') $\forall\alpha(P \& Q) \leftrightarrow (\forall\alpha P \& \forall\alpha Q)$

13'') $\exists\alpha(P \vee Q) \leftrightarrow (\exists\alpha P \vee \exists\alpha Q)$

$$\left.\begin{array}{l} 14')\ \forall\alpha(P \vee Q) \leftrightarrow (P \vee \forall\alpha Q) \\ 14'')\ \exists\alpha(P \& Q) \leftrightarrow (P \& \exists\alpha Q) \end{array}\right\} \alpha \text{ не вх. св. в } P.$$

15') $\neg\forall\alpha P \leftrightarrow \exists\alpha\neg P$

15'') $\neg\exists\alpha P \leftrightarrow \forall\alpha\neg P$

§16. Производные правила вывода.

В целом, сх. секвенций таковы, во первых всякая конкретная секвенция и во-вторых, всякое символическое выражение, содержащее сх. перем. тех или иных типов и, быть может, знаки лог. операций и превращающееся в конкретную секвенцию всякий раз, когда мы вместо сх. перем. подставляем какие-либо конкрет. знач. сх. перем.

Пусть $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_k$ и $\mathfrak{S}_0$ – так. схемы секвенций. Говорят, что $\mathfrak{S}_0$ выводима из $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_k$ в исчисл. И, если всякий раз, когда мы во все эти секвенции вместо сх. перем. подставим какие-либо допуст. значения (одни и те же во все схемы) в исчислении И из $\mathfrak{S}_1^*, \ldots, \mathfrak{S}_k^*$ выводима $\mathfrak{S}_0^*$, где * обозн. соотв. секв. после подстановки.

Фигура
$$\begin{array}{c} \mathfrak{S}_1 \\ \mathfrak{S}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{S}_k \\ \hline \mathfrak{S}_0 \end{array}$$
называется произв. правилом вывода, если из верхних схем секвенций выводима нижняя.

Производными схемами секв. мы можем пользоваться наравне с исходными (на основе недавней леммы).

Примеры производных правил вывода.

1) $P_1, \dots, P_n \Rightarrow Q$

$\Rightarrow \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\&}} P_i \to Q\right)$

$$\frac{P_1 \dots P_n \Rightarrow Q}{\Rightarrow \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\&}} P_i \to Q\right)}$$

2) $$\frac{\Rightarrow \neg \overset{n}{\underset{i=1}{\&}} P_i}{P_1 \dots P_n \Rightarrow}$$

$\Pi_{\&} 1^+$ $$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \Rightarrow P_1 \\ - - - - \\ \Gamma_n \Rightarrow P_n \end{array}}{\Gamma_1 \dots \Gamma_n \Rightarrow (P_1 \& \dots \& P_n)}$$

$\Pi_{\&} 2^+$ $$\frac{\Gamma \Rightarrow (P_1 \& \dots \& P_n)}{\Gamma \Rightarrow P_i} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$\Pi_{\vee} 1^+$ $$\frac{\Gamma \Rightarrow P_i}{\Gamma \Rightarrow (P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n)} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$\Pi_{\vee} 2^+$ $$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \Rightarrow (P_1 \vee \dots \vee P_n) \\ P_1\, \Sigma_1 \Rightarrow R \\ - - - - - - - - - \\ P_n\, \Sigma_n \Rightarrow R \end{array}}{\Gamma\, \Sigma_1 \dots \Sigma_n \Rightarrow R}$$

$$\frac{\neg P\,\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow P}$$

Вывод:

1. $\neg P\,\Gamma \Rightarrow$ [допуст. секв
2. $\Gamma \Rightarrow \neg\neg P$ [1, $\Pi_\neg 1$.
3. $\Rightarrow (\neg\neg P \leftrightarrow P)$ [ранее выв.
4. $\Rightarrow (\neg\neg P \to P)$ [3, $\Pi_\leftrightarrow 2$
5. $\Gamma \Rightarrow P$ [2, 4

правило сечения:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P \qquad P\,\Sigma \Rightarrow Q}{\Gamma\,\Sigma \Rightarrow Q}$$

Вывод:

1. $\Gamma \Rightarrow P$ [доп. секв.
2. $P\,\Sigma \Rightarrow Q$ [доп. секв.
3. $\Sigma \Rightarrow (P \to Q)$ [$\Pi_\leftrightarrow 1$, 1, 2
4. $\Gamma\,\Sigma \Rightarrow Q$ [3, $\Pi_\leftrightarrow 2$

Обобщ. пр-ло сечения:

$\Gamma_1 \Rightarrow P_1$

$\Gamma_2 \Rightarrow P_2$

$- - - -$

$\Gamma_n \Rightarrow P_n$

2) $$\frac{P_1, \dots, P_n\ \Sigma \Rightarrow Q}{\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_n\ \Sigma \Rightarrow Q}$$

получается из предыдущего многокр. применения.

<u>Лемма.</u> В исчислении ИНВ⁻ выводима формула: $((P_1 \& P_2 \& \dots \& P_n) \to Q) \leftrightarrow (P_1 \to (P_2 \to \dots (P_n \to Q) \dots))$.

Д-ство (по индукции):

пусть доказано при n. Докажем при $n+1$.

Имеем:

$((P_1 \& \dots \& P_{n+1}) \to Q)$ или, что тоже $(((P_1 \& \dots \& P_n) \& P_{n+1} \to Q$. Для $n = 2$ было выведено ранее. Остается обозначить

$(P_1 \& \dots \& P_n) \leftrightharpoons P_1$

$P_{n+1} \leftrightharpoons P_2$.

<u>Следствие</u>. Рассмотрим три секвенции

1) $P_1 \dots P_n \Rightarrow Q$

2) $\Rightarrow (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} P_i \to Q)$

3) $\Rightarrow (P_1 \to (P_2 \to \dots (P_n \to Q))\dots)$

каждая из этих секв. выводима из любой другой секв. этого списка.

Теорема. Если в исчислении И выводима секвенция $P_1 \ldots P_n \Rightarrow Q$ или формула $(\overset{n}{\underset{i=1}{\&}} P_i \to Q)$ или ф-ла $(P_1 \to (P_2 \to \ldots (P_n \to Q)\ldots)$ то фигура

$$\frac{\begin{matrix} \Gamma_1 \Rightarrow P_1 \\ \text{------} \\ \Gamma_n \Rightarrow P_n \end{matrix}}{\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n \Rightarrow Q}$$

представляет собой производное пр-ло вывода исчисления И.

Д-ство:

пусть в И вывод. секв. $P_1 \ldots P_n \Rightarrow Q$.

Вывод:

1. $\Gamma_1 \Rightarrow P_1$ [доп. секв.

– – – – –

n. $\Gamma_n \Rightarrow P_n$ [доп. секв.

n+1. Вывод секв $P_1 \ldots P_n \Rightarrow Q$

--- По обобщ. пр-лу сечения получаем секв.

$\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n \Rightarrow Q$.

Примеры применения теоремы:

1) выводима формула: $\neg\exists\alpha P \leftrightarrow \forall\alpha\neg P$.

$\neg\exists\alpha P \to \forall\alpha\neg P$

$\forall\alpha\neg P \to \neg\exists\alpha P$, по теореме

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\exists\alpha P}{\Gamma \Rightarrow \forall\alpha\neg P} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \forall\alpha\neg P}{\Gamma \Rightarrow \neg\exists\alpha P}$$

2) В ИНВ выводима эквивалентность:

$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q \leftrightarrow \neg P)$

Вывод: 1. $\underbrace{(P\to Q)}_{\mathfrak{D}} \Rightarrow (P\to Q)$ [ТИС

2. $\neg Q \Rightarrow \neg Q$ [ТИС

3. $P \Rightarrow P$ [ТИС

4. $P\mathfrak{D} \Rightarrow Q$ [1, 3, $\Pi_{\to}2$

5. $P\mathfrak{D}\neg Q \Rightarrow$ [2, 4, $\Pi_{\neg}2$

6. $\mathfrak{D}\neg Q \Rightarrow \neg P$ [5, $\Pi_{\neg}1$

7. $\mathfrak{D} \Rightarrow (\neg Q\to\neg P)$ [6, $\Pi_{\to}1$

8. $\Rightarrow (\mathfrak{D}\to(\neg Q\to\neg P))$

Из теоремы след., что:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow (P\to Q)}{\Gamma \Rightarrow (\neg Q\to\neg P)}$$

а так же

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow (P \to Q) \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \neg Q}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Rightarrow \neg P}$$

3) $(P \& (Q \vee R)) \leftrightarrow (P \& Q) \vee (P \& R))$ [5!

$(P \& (Q \vee R)) \to (P \& Q) \vee (P \& R))$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P \& (Q \vee R)}{\Gamma \Rightarrow (P \& Q) \vee (P \& R)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow P \qquad \Gamma_2 \Rightarrow Q \vee R}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Rightarrow (P \& Q) \vee (P \& R)}.$$

§ 17. Теорема об эквивалентной замене.

Теорема. Пусть P, Q, R – произв. формулы, пусть R^* – ф-ла, получаемая из R в рез-те подстановки ~~в~~ ф-лы Q вместо некоторых вхождений ф-лы P в R. (Количество заменяемых вхожд. м.б. равным нулю). Тогда в ИНВ из ф-лы $(P \leftrightarrow Q)$ выводима $(R^* \leftrightarrow R)$. При этом, если ф-ла R – бескванторная, возможен вывод в ИНВ⁻.

Д-ство:

а) количество заменяемых вхождений ф-лы P равно нулю. В этом сл. $R^* \equiv R$ и нам нужно вывести ф-лу $(R \leftrightarrow R)$, то она просто выводима в исчислении.

б) $P \equiv R$ и при переходе от R к R^* единств. вх. P в R действ. заменяется. В этом случае $R^* \equiv Q$ и потому,

$$(R^* \leftrightarrow R) \equiv (Q \leftrightarrow P),$$

т. е. мы должны вывести из $(P \leftrightarrow Q)$ ф-лу $(Q \leftrightarrow P)$.

в) общий случай. Действуем по индукции P, Q.

1) R - атомарная ф-ла. В этом сл. реализуется либо сл. а) либо сл. б).

2) индукционный шаг. Пусть мы доказали утв. для ф-л $(R_1 \& R_2), \ldots, \exists \alpha R_1$. Для примера рассмотрим 2 случая. Итак, пусть $R \equiv (R_1 \to R_2)$

Выбираем R^*. Может оказаться так, что $P \equiv R$ или, что мы ничего не заметили.

Этот случай уже разобрали. Поэтому будем считать $P \not\equiv R$.

$R^* \equiv (R_1^* \to R_2^*)$

По индукц. предп., из ф-лы $(P \leftrightarrow Q)$ выводимы ф-лы $(R_1^* \leftrightarrow R_1)$ и $(R_2^* \leftrightarrow R_2)$

Значит можно построить список секвенций

$S_1, \ldots, S_n$ вывод $(R_1^* \leftrightarrow R_1)$ из $(P \leftrightarrow Q)$

$T_1, \ldots, T_e$ вывод $(R_2^* \leftrightarrow R_2)$ из $(P \leftrightarrow Q)$.

Тогда нужно построить вывод

$(R^* \leftrightarrow R)$ из $(P \leftrightarrow Q)$ или

$(R_1^* \leftrightarrow R_1) \leftrightarrow (R_2^* \to R_2)$ из $(P \leftrightarrow Q)$.

Вывод:

1. S_1

— — —

k. $S_k \equiv \Rightarrow (R_1^* \leftrightarrow R_1)$

$k+1$. T_1

— — — —

$k+e$. $T_e \equiv \Rightarrow (R_2^* \leftrightarrow R_2)$

$k+e+1$. $\underbrace{(R_1^* \to R_2^*)}_{\mathcal{D}_1} \Rightarrow (R_1^* \to R_2^*)$ [ТИС

$k+l+2)$. $R_1 \Rightarrow R_1$ [ТИС

$k+l+3$. $\Rightarrow (R_2^* \to R_2)$ [$k+l$, $П_{\leftrightarrow}2$

$k+l+4$. $\Rightarrow R_1 \to R_1^*$ [k, $П_{\leftrightarrow}3$

$k+l+5$. ~~$\Rightarrow$~~ $R_1 \Rightarrow R_1^*$ [$k+l+2$, $+4$, $П_{\to}2$

$k+l+6$. $R_1 \mathfrak{D}_1 \Rightarrow R_2^*$ [$k+l+5$, $k+l+1$, $П_{\to}2$

$k+l+7$. $R_1 \mathfrak{D}_1 \Rightarrow R_2$ [$k+l+6$, $k+l+3$, $П_{\to}2$

$k+l+8$. $\mathfrak{D}_1 \Rightarrow R_1 \to R_2$

$k+l+9$. $\Rightarrow (\mathfrak{D}_1 \to (R_1 \to R_2))$

Обратная импликация предоставл. в качест-ве доп. задания.

Пусть $R \equiv \forall \alpha R_1$, а $R^* \equiv \forall \alpha R_1^*$

из $(P \leftrightarrow Q)$ вывод. $(R_1^* \leftrightarrow R_1)$

Пусть $J_1, \dots, J_k$ вывод $(R_1^* \leftrightarrow R_1)$ из $(P \leftrightarrow Q)$.

1. J_1

— — —

k. $J_k \equiv \Rightarrow (R_1^* \leftrightarrow R_1)$

$k+1$. $\underbrace{\forall \alpha R_1^*}_{\mathfrak{D}} \Rightarrow \forall \alpha R_1^*$ [ТИС

$k+2$. $\mathfrak{D} \Rightarrow R_1^*$ [$k+1$, $П_{\forall}2$

$k+3$. $\Rightarrow (R_1^* \to R_1)$ [k, $П_{\leftrightarrow}2$

$k+4.\ \mathfrak{D} \Rightarrow R_1 \quad [k+2, k+3, \Pi \to 2$

$k+5.\ \mathfrak{D} \Rightarrow \forall \alpha R_1 \quad [k+4, \Pi \forall 1$

$k+6.\ \Rightarrow (\mathfrak{D} \to \forall \alpha R_1) \quad [k+5, \Pi \to 1$

Аналогично – в др. сторону.

Заметим, что использование пв. ~~формула~~ правил связано с наличием пв. в исх. ф-лах. Поэтому вывод сохраняется и в ИНВ⁻.

<u>Следствие</u>.

Если ф-ла $(P \leftrightarrow Q)$ выводима в исчисл. И и R^* получается из R так как указано в теореме, то и ф-ла $R^* \leftrightarrow R$ выводима в И.

Пусть P, Q, R – произв. ф-лы. Предп., что ф-ла $P \leftrightarrow Q$ выводима. Будем говорить, что R^* получ. из R непоср. переводом с пом. эквивалентности $(P \leftrightarrow Q)$, если R^* есть рез-т подстановки ф-лы Q вместо нек. вх. P в R или ф-лы P вместо нек. вх. Q в R.

Пусть J – кон. список ф-л вида $(P \leftrightarrow Q)$, каждая из которых выводима в исчисл. И. Пусть R_1 и R_2 – произв. ф-лы. Переводом ф-лы R_1 в R_2 с пом. списка J назыв. конечный список ф-л $F_1, \ldots, F_m$, такой, что 1) $F_1 \equiv R_1$, $F_m \equiv R_2$, 2) $1 < i < m$ ф-ла F_{i+1} получ. из ф-лы F_i непоср. переводом с пом. одной из эквив. списка J.

Ф-ла R_1 <u>переводима</u> в R_2 с пом. списка J, если можно построить перевод R_1 в R_2 с пом. списка J.

<u>Теорема</u>. Пусть J некоторый список экв., каждая ф-ла которого выводима в ИНВ. Пусть R_1 и R_2 – пр. ф-лы. Если R_1 переводимо в R_2 с пом. J то в ИНВ выводима формула $(R_1 \leftrightarrow R_2)$. При этом, если все формулы списка J выводимы в урезанном исчисл ИНВ$^-$ и ф-лы R_1 и R_2 – бескв., то

ф-ла $(R_1 \leftrightarrow R_2)$ выводима в ИНВ$^-$.
Д-ство получ. послед. применением теоремы об экв. зам
примеры: посредством J_1 обозначим
список эквив. от 1 по 9" вкл. и J_2 с
1 по 15" включительно.

1) Д-ть выводимость в ИНВ$^-$ ф-лы
$((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow ((P \to R) \& (Q \to R))$

Перевод:

1. $((P \vee Q) \to R)$
2. $(\neg(P \vee Q) \vee R)$ (1)
3. $((\neg P \& \neg Q) \vee R)$ (9")
4. $(R \vee (\neg P \& \neg Q))$ (3")
5. $((R \vee \neg P) \& (R \vee \neg Q))$ (5")

6,7. $((\neg P \vee R) \& (\neg Q \vee R))$ (3")

8,9. $((P \to R) \& (Q \to R))$ (1*)

теперь применяем теорему.

2) Д-ть выводимость в ИНВ ф-лы
$\exists \alpha (P \to Q) \leftrightarrow (\neg \forall \alpha P \vee \exists \alpha Q)$

перевод.

1) $(\neg \forall \alpha P \vee \exists \alpha Q)$
2. $(\exists \alpha \neg P \vee \exists \alpha Q)$ (15')

3. $\exists\alpha(\neg P \vee Q)$ (13'')

4. $\exists\alpha(P \to Q)$ (1)

В др. сторону – аналогично.

<u>Следствие</u>.

Если все эквив. схема J выводимы в ИНВ, ф-ла R_1 переводима в R_2 посредством J и R_1 выводима в ИНВ$^{(-)}$, то R_2 выв. в ИНВ$^{(-)}$.

Пример. Д-ть выводимость в ИНВ$^{-}$ ф-лы $(\neg(P \& \neg P))$ (закон противоречия).

1. $\neg(P \& \neg P)$

2. $\neg P \vee \neg\neg P$ (9')

3. $\neg P \vee P$ (2)

4. $P \vee \neg P$ (3'')

Нижняя ф-ла выводима, значит выводима и верхняя ф-ла.

<u>§ 18. Нормальная форма бескванторных формул.</u>

простыми конъюнкциями будем называть ф-лы вида: $\&_{i=1}^{n} Y^{\varepsilon_i} H_i \qquad n \geq 1$.,

а простыми дизъюнкциями, ф-лы вида: $\bigvee_{i=1}^{n} Y^{\varepsilon_i} H_i \qquad n \geq 1$.

говорят, что бескв. ф-ла F имеет дизъюнктивную норм. форму, если она имеет вид дизъюнкции простых конъюнкций.

Аналог. — конъюнктивная н.ф.

<u>Теорема</u>. Всякая бескванторная формула R посредством списка эквивалентностей J_1 переводима в кон. ф-лу F, имеющую конъюнктивную н.ф. и ф-лу G, имеющую д. н. ф.

Т.о. в ИНВ выводимы эквивалентности $(R \leftrightarrow F)$ и $(R \leftrightarrow G)$.

Д-ство:

Пусть R — произв. БЛПф. В этой ф-ле м.б. знаки импликаций. Мы можем их исключ. в списке J_1 при пом. пр-ла 1. В итоге, получим ф-лу R_1, не содерж. знаков импл. и такую, что R переводимо в R_1.

Рассматриваем теперь ф-лы без имп.

С пом. 2, 9', 9'' мы перейдём теперь к R_2, не содерж. знаки отриц., иначе как перед атом. ф-лами.

Выполним теперь правила дистрибутивности и ассоциативности.

§ 19. Теорема о н. ф. для произвольных ЛП ф.

Пусть R – произв. ф-ла. Говорят, что R имеет предварённую н. ф., если R имеет вид:

$R \equiv K_1\alpha_1 K_2\alpha_2 \ldots K_r\alpha_r F$, где

$K_1, \ldots, K_r$ – кванторы т. е. K_i или $\forall$ или $\exists$.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – пр. перем., F бЛПф.

<u>Лемма</u>. Всякую ф-лу R посредством списка эквив. J_2 можно перевести в ф-лу, имеющую предварённую н. ф.

Д-ство:

Пусть дана ф-ла R. Применяю исклю-
чение так же как и в предыд. теореме.
С пом. эквив. об отрицаниях, отрицания
можно „пронести" до атомарных формул.
Теперь нужно все кванторы вынести
наружу. Для этого есть соотв. эквива-
лентности. Пусть имеем
$(\mathfrak{A} \,\&\, \forall\alpha\mathfrak{B})$, если α не вх. св. в $\mathfrak{A}$, то
эту ф. можно перевести в $(\forall\alpha\mathfrak{A} \,\&\, \forall\alpha\mathfrak{B})$.
Если же α вх. св. в $\mathfrak{A}$, то воспользуемся
возможностью переименовывать св. перем.,
т.е. выбир. перем. β, такую, что $\alpha, \beta, \mathfrak{B}$
— согласованы и β не вх. св. в $\mathfrak{A}$. и
исх. ф-лу переводим в ф. $(\forall\beta\mathfrak{A} \,\&\, \forall\beta\llcorner\mathfrak{B}\frac{\alpha}{\beta}\lrcorner)$.
От полученной ф. перех. к ф.
$\forall\beta(\mathfrak{A} \,\&\, \llcorner\mathfrak{B}\frac{\alpha}{\beta}\lrcorner)$. Аналог. применяя
мы можем вынести кв. $\exists$ из дизъюнкции.

<u>Теорема</u>. По любой формуле R можно
построить ф-лу $\overline{R}$, такую, что

$\overline{R} \simeq k_1 \alpha_1 \ldots k_r \alpha_r F$, где

F – формула (бескв.) в конъюнктивной (или дизъюнктивной) н. ф.

Ф-ла R переводима в $\overline{R}$ с пом. списка эквивалентностей J_r и, следов. в ИНВ выводима экв. $(R \leftrightarrow \overline{R})$.

Д-ство очевидно следует из леммы и теоремы предыд. §.