Н.Воробьев
1947 г.
ЛГУ.

Блок-нот

Наивная
Теория Множеств.
vol. II.
читает проф. Марков.

ДЗЕРЖИНСКИЙ ПРОМКОМБИНАТ

Лекция XXIII.

Порядковый тип числовой прямой λ.

Охарактеризуем этот тип.

1. Неограниченный
2. Непрерывный
3. Содержит счетное подмножество, плотное в нем.

Докажем подобие 2^x множеств, обладающих этими $3^{\text{мя}}$ свойствами.

Возьмем A; отнош. R.

$B \subset A$; B - счетное и плотное в A.

Что за B? Оно плотно в себе. B неограниченно.

Значит, B упорядочено отношением R по типу η.

A есть пополнение B; значит, $A \cong \lambda$.

Интервал.

Пусть A - упорядочено R $a, b \in A$. (aRb).

$$\mathcal{E}_x \left(aRx \;\&\; xRb \right) \& \; x \in A) \text{ - интервал } (a,b)$$

Всякое семейство попарно непересекающихся интервалов не более чем счетно. (Если A упорядочено по типу λ).

Возьмем B счетное $\subset A$. Всякий интервал содержит элемент из B. В 2 ~~интервала~~ по условию элемент входить не может! Этим отношением множество интервалов отображается в B, т.е. не более, чем счетно.

Суслин поставил проблему о возможности обратимости этой теоремы.

Операции над порядковыми типами

Известно, что если R уп. A, то и R^{-1} уп. A.

Пусть дан порядковый тип α.

Возьмем $\langle A, R \rangle$ типа α.

$$\langle A, R^{-1} \rangle \text{ типа } \alpha^*$$

Нужно показать независимость α^* от A и R в отдельности, т.е.

$$\langle B, S \rangle \cong \langle A, R \rangle \rightarrow \langle B, S^{-1} \rangle \cong \langle A, R^{-1} \rangle$$

Но это следует из изоморфизма.

Обратный ω ω^* — множество отриц.-ных.

$\eta^* \cong \eta$; $\lambda^* \cong \lambda$.

Изоморфизм пар ⟨множество, отношение⟩ означает равенство их типов.

Операции над порядковыми типами.

α ; β. $\langle A, R\rangle \cong \alpha$.   ] Возьмем B так,
$\langle B, S\rangle \cong \beta$] чтобы $A \cap B = 0$.

Возьмем $A \cup B$. Определим отношение T.

1) $xTy \leftrightarrow (x, y \in A \ \& \ xRy) \vee (x, y \in B \ \& \ xSy) \vee$

2) $\vee \ (x \in A \ \& \ y \in B)$

Построим $(A \cup B, T)$ этот тип обозначим через $\alpha + \beta$.

Эта операция некоммутативна.

$\underset{\overset{\|}{\omega}}{1+\omega} \neq \underset{\overset{\nparallel}{\omega}}{\omega+1}$. $\omega^* + \omega \neq \omega + \omega^*$

$\eta + \eta = \eta$. $\lambda + 1 + \lambda = \lambda$.

$2 \cdot \lambda = \lambda + \lambda \neq \lambda$

Ассоциативный закон справедлив.

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$.

$\langle A, R\rangle$ $\langle B, S\rangle$ $\langle C, U\rangle$ $\tau(A)$ — тип A.

$\langle A \cup B, T\rangle$

$\langle A \cup B \cup C, V\rangle$

$xVy \leftrightarrow ((x, y \in A \cup B \ \& \ xTy) \vee (x, y \in C \ \& \ xUy) \vee (x \in A \cup B \ \& \ y \in C)) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow ((x, y \in A \ \& \ xRy) \vee (x, y \in B \ \& \ xSy) \vee (x, y \in C \ \& \ xUy) \vee$

$\vee \ (x \in A \ \& \ y \in B) \vee (x \in A \vee \cancel{x \in B} \ \& \ y \in C)$

$\vee (x \in B \,\&\, y \in C)$. Используя коммутативность символа „$\vee$" и ассоциативность получим выражение.

$$\eta + 1 + \eta = \eta$$

$$1 + \lambda + 1 = \theta \quad \text{(отрезок с концами)}$$

θ непрерывны, имеют плотные, но... имеют первый и последний элемент.

$$(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$$

Упорядоченная система порядковых типов.

$\langle \Xi, R \rangle$ $\quad \Xi = \mathfrak{D}(\mathfrak{F})$, где $W(\mathfrak{F})$ — есть множество порядковых типов.

$\mathfrak{F}'\xi$ при $\xi \in \Xi$ есть порядковый тип.

1. Строим систему S упорядоченных множеств с областью Ξ, так, чтобы $t(S'\xi) = \mathfrak{F}'\xi$ для всякого $\xi \in \Xi$. $T'\xi$ — отношение, к-рое упорядочивает $S'\xi$. (Так, чтобы $S'\xi \cap S'\eta = 0$ при $\xi \neq \eta$).
2. Строим

$$A = \bigcup_{\xi \in \Xi} S'\xi$$

Как определить его тип?

$x, y \in A$ могут принадл. одному элементу.

$$x V y \leftrightarrow ((\exists \xi)(x, y \in S'\xi \,\&\, x (T'\xi) y)) \vee$$
$$\vee (x \in S'\xi \,\&\, y \in S'\eta \,\&\, \xi R \eta)$$

3. Установим, что тип $\langle A, V \rangle$ не зависит от Ξ и R отдельно, а только от $\mathfrak{F}$.

$$t\langle A, V \rangle = \sum_{\Xi} \mathfrak{F}'\xi = \sum \mathfrak{F}.$$

Лекция XXIV

Сумма последовательности порядковых типов. В этом случае Ξ есть множество нат. чисел. Каждому ξ сопоставляется порядковый тип. они суть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$

$\mathfrak{F}^6 \xi = \alpha_\xi \qquad \xi = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$\sum \mathfrak{F} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$ Пусть теперь $n_0, n_1, n_2 \ldots\ldots$ последовательность натур. чисел. Возьмем

! $\sum_{\xi=0}^{\infty} (\omega^* + \omega + n_\xi)$ это — счетный порядковый тип.

Взяв другую послед. $m_0, m_1, m_2, \ldots\ldots$ (отличную от первой хотя бы одним членом) Получим

!! $\sum_{\xi=0}^{\infty} (\omega^* + \omega + m_\xi)$, порядковый тип, отличный от ранее построенного.

Из равенства типов ! и !! следует $(\xi)(\xi \in \Xi \to m_\xi = n_\xi)$. Это доказывается индукцией по ξ.

В процессе доказательства мы смотрим на элементы и думаем: сначала они или нет. Так n_0 будут элементами, заключенными между 2-мя не-сначала. То же будет и с m_0 значит $n_0 = m_0$ и т.д.

Значит, этих типов будет столько же, сколько и последовательностей натуральных чисел, т. е. ~~не меньше~~ $2^{\aleph_0}$. Но ранее было получено что счетных порядковых типов не более $2^{\aleph_0}$. Значит, счетных порядковых типов равно $2^{\aleph_0}$.

Суммирование одинаковых порядковых типов (повторение порядковых типов).

$\mathfrak{F}^6 \xi$ — порядковый тип, не зависящий от ξ.

$\sum \mathfrak{F}$ зависит от Ξ и $t(\mathfrak{F}^6 \xi) = \alpha$. $t(\Xi) = \beta$.

$t(\sum \mathfrak{F})$ зависит лишь от α и β. определение!

Назовем его произведением типов α и β. $\alpha\beta$.

Следует доказать независимость $\alpha\beta$ от выбора индивидуальных представителей типов α и β.

Пусть α - тип и β - тип.

Пусть S $t(B) = \beta$. $\quad t(\underbrace{\Sigma \langle a, b \rangle,\ a \in A \,\&\, b \in B}_{C}) = \alpha\beta$.

R $t(A) = \alpha$. причём в C упорядочивающим отношением считаем T, к-рое определим так.

$\langle a, b \rangle T \langle a_1, b_1 \rangle \leftrightarrow bSb_1 \vee b = b_1 \,\&\, aRa_1$

этим C действительно упорядочивается. Его порядковый тип зависит только от α и β, откуда и ~~определение~~ II произведения.

определения I и II эквивалентны. Положим $\Xi = B$. Построим систему множеств ~~$\mathfrak{F}_\xi$ с областью B, такую, что тип $\mathfrak{F}^{\xi}_{\xi} = \alpha$~~. $S^{\xi}F$.

~~$(\xi)(\xi \in B) \to \varepsilon$~~ $b_0 \in B$ рассмотрим $\langle a, b_0 \rangle$ $a \in A$.

множество пар A_{b_0} упорядочивается отношением R_{b_0} и $A_{b_0} \cong A$. Эти множества для разных b не пересекаются попарно. Просуммируем A_b для всех $b \in B$. Получим

$\bigcup\limits_{b \in B} A_b$ — это равно C с упорядочивающим отношением T.

т.е. определения совпадают.

α - множимое $\}$ они играют различную роль.
β - множитель $\}$

Умножение некоммутативно. В этом убедимся на примере

$\alpha = 2 \qquad 2\omega$ - множество пар

$\beta = \omega. \qquad \langle a\ b \rangle \qquad a = 0, 1$
$\qquad b = 0, 1, 2 \ldots$

2ω имеет первый элемент $\langle 0, 0 \rangle$.

~~за 2 перв~~ далее идут $\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle \ldots$

$2\omega = \omega$.

$\omega 2$ имеет один не-скачок, к-рого $2\omega = \omega$ не имеет. $\omega 2 = \omega + \omega$.

Ассоциативный закон справедлив.

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

$(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$

$t(A) = \alpha \quad R.$

$t(B) = \beta \quad S$

$$\alpha\beta = t(\overbrace{\mathcal{E}\langle a, b\rangle}^{C \quad T}).$$

$$\langle a, b\rangle T^{-1} \langle a_1, b_1\rangle \leftrightarrow \langle a_1, b_1\rangle T \langle a b\rangle.$$

$$\leftrightarrow b_1 S^{-1} b \vee b = b_1 \,\&\, a_1 R^{-1} a.$$

$\langle A, R^{-1}\rangle = \alpha^*$

$\langle B, S^{-1}\rangle = \beta^*$ $\quad U$

$$\langle a b\rangle U \langle a_1 b_1\rangle \leftrightarrow b S^{-1} b_1 \vee b = b_1 \,\&\, a R^{-1} a_1,$$

$$U = T^{-1}$$

<u>Возведение</u> в квадрат. и другие степени

$$\omega^2 \neq \omega$$

$\alpha^0 = 1$

$\alpha^1 = \alpha$

$\dots\dots$

$\alpha^{n+1} = \alpha^n \alpha$

η^2 — счетно, плотно и неограниченно.

$$\eta^2 = \eta. \qquad \eta^n = \eta. \qquad \eta^\omega = \eta.$$

λ^2 — не непрерывный он будет иметь пробелы.

θ^2 — непрерывный тип но $\theta^2 \neq \theta$.

Вполне упорядоченные множества.

Если всякое непустое подмножество упорядочен-ного множества имеет первый элемент.

Всякое конечное упорядоченное множество вполне упорядочено.

Конечные множества и только они обладают тем свойством, что всякое их подмножество обладает первым и последним элементом.

Пусть A бесконечно.

$a_0 \in A$. Пусть за a_0 следует бесконечно-много элементов. Либо за a_0 следует элемент a_1 первый, если множество следующих за a_0 либо нет. Если нет, то доказано, если есть рассуждаем аналогично и т. д. Множество всех выбранных a_i последнего не имеет. Оно есть подмножество A. Это и требовалось.

ω — вполне упорядочено.

ω^* — нет. Теорема. (о трансфинитной индукции). Пусть A — вполне упорядоченное с отноше-нием R. Элементы a могут обладать свойством $\mathfrak{B}$. Это $\mathfrak{B}$ таково, что, (если ~~(a)(a~~ все пред-шествующие a обладают $\mathfrak{B}$, то и a им обладает) тогда все элементы из A этим свойством $\mathfrak{B}$ обладают.

Лекция XXV.

Пусть нет! Пусть есть элементы из A, не обладающие $\mathfrak{B}$. Они образуют непустое $B \subset A$. B имеет первый элемент a. $a \in A$, и все предшествующие ему обладают свойством $\mathfrak{B}$. Это противоречит условию. т. е. B — пусто. $A \setminus B = A$.

$\mathfrak{B}(x)$ значит „x обладает $\mathfrak{B}$".

$$(x)((x\,R\,a \to \mathfrak{B}(x)) \to \mathfrak{B}(a))$$

Такие свойства наз. индуктивными.

Приложение этой теоремы.

Рассматриваем изоморфизм вп-ул A на его вп.уп подмножества. B. Пусть $\mathfrak{F}$ - такой изоморфизм.

$\mathfrak{F}$ - ф-ция монотонная.

$$x, y \in A \ \& \ x R y \to (\mathfrak{F}`x) R (\mathfrak{F}`y)$$

$\underbrace{x = \mathfrak{F}`x \vee x R (\mathfrak{F}`x)}$, (не может быть, чтобы $\mathfrak{F}`(x) R x$).

рассмотрим это свойство $\mathfrak{D}(x)$.

Пусть оно соблюдается для всех $x R a$.

Если бы для a не получилось, т.е.

$\mathfrak{F}`a R a \to \mathfrak{F}`(\mathfrak{F}`a) R \mathfrak{F}`a$, что противоречит предположению $\mathfrak{F}`(a R a \to \mathfrak{F}`(a) R \mathfrak{F}`(\mathfrak{F}`a)$.

A - вп.уп. $a \in A$;

$\underset{x\,a\,a}{\mathcal{E}}(x R a)$ $A \cap R``\{a\}$ - отрезок A, опред. a.

отрезком натурального ряда будет натуральное число. $A \cap R``a = [A, a]$.

Вп.уп. множество неизоморфно подмножеству своего отрезка. Ибо тогда образ a будет предшествовать a, чего быть не может. В частности, оно неизоморфно отрезку самому. это невозможно, т.к. тогда

$A \cong [B, b]$.	R	A изоморфно подмножеству своего отрезка.
$B \cong [A, a]$	S.	

Вп.у. A меньше B, если оно $\cong$ отрезку B. $(A < B)$.

Невозможно, чтобы $A < B \ \& \ B < A$.

$$A < B \ \& \ A \cong C \ \& \ B \cong D \to C < D.$$

ибо, при изоморфизмах отрезки переходят в отрезки.

$A < B \ \& \ B < C \rightarrow A < C.$ $\quad \frac{7+2+2}{11}$

$A \cong [B, b] \ \& \ B \cong [C, c] \longrightarrow A \cong [C, c_1]$

Докажем отрезков вполне упорядоченных множеств.

$[A, a]$.

Лемма

1. каждому $a \in A$ соответствует ~~[a, A]~~ $[A, a]$. Это отношение в-одн.
2. $a R b \longrightarrow [A, a] < [A, b]$. (ибо $a \in [A, b]$).

Вп. упорядоченное множество изоморфно множеству своих отрезков. B

3. Пусть всякий отрезок A изоморфен нек.-тому отрезку B(S) и обратно. Тогда $A \cong B$.

Доказ.

$a \in A. \rightarrow (\exists b)(b \in B \ \& \ [A, a] \cong [B, b])$ такой отрезок найдется точно один.

И обратно по каждому b найдется одно и только одно A. Это дает в-одн. отобр. A на B. Это отображение есть изоморфизм.

Пусть $a R a_1$, $\quad [A, a] < [A, a_1]. \rightarrow [A, a] < [B, b_1]$

$b = F^{\iota} a.$ $\quad [A, a_1] \cong [B, b_1].$

$b_1 = F^{\iota} b$

$[A, a] \cong [B, b] \rightarrow [B, b] < [B, b_1]$

Изоморфизм доказан. $\quad b S b_1$.

4. Если A и B вп. уп. то либо всякий отрезок B изоморфен отрезку A, либо наоборот.

Пусть, вопреки, $(\exists x)(x \in A \ \& \ [A, x]$ неизоморфно отрезку B)

Возьмем первый из всех таких x-ов. Его обозначим через a.

Всякий $x . R a$ $[A, x]$ изоморфен к-л. отрезку B.

По симметрии найдется $b \in B$, неизоморфный отрезку A, а $[B, y]$, где $y S b$ изоморфны отрезкам A.

$[A, a] \cong [B, b]$, ибо. всякий отрезок $[A, a]$ изоморфен как-нибудь отрезку $[B, b]$ и обратно. Остается применить 3.

Как следствие отсюда мы получим либо $A \cong B$ (по 3).

Пусть $A \not\cong B$. ~~тогда~~ но всякий отрезок A изоморфен отрезку. (Но не обратно!).

$[B, b]$ неизоморфен никакому отрезку A, а при $y \, S \, b$ $[B, y] \cong$ отрезку A.

Рассмотрим $[A, x]$ $\overline{\text{он}}$ изоморфен $[B, y]$ это $y \neq B$ и $b \, S y$, в силу выбора b.

Значит $y \, S \, b$. Т. е. $[B, y]$ есть отрезок $[B, b]$.

Всякий отрезок $A \cong$ отрезку $[B, b]$ и обратно

Значит, $A \cong [B, b]$. Т. е. $A < B$.

В противном случае $B < A$.

Порядковые типы вп. уп. множеств. наз ~~порядковыми~~ числами.

ω есть порядковое число.

$\omega + 1$ — " — — " —

$\omega + \omega = \omega 2$ — " —

2ω, ω^*, $1+\omega^*$, η и λ не суть порядковые ~~...~~ числа.

Порядковые ~~числа~~ сравнимы по величине.

α, β порядковые типы. Возьмем A и B

$t(A) = \alpha$ & $t(B) = \beta$ Итак, либо $\alpha < \beta$

$\beta < \alpha$

$\alpha = \beta$.

Эти случаи дизъюнктны.

Пусть A – вп. уп. $t(A) = \alpha$.
α – порядковое число. Рассмотрим отрезки A. Это – тоже вп. уп. множества и типы их – меньше α. $t([A,a]) = \xi < \alpha$.

Каждому отрезку соотв. $\xi_a < \alpha$. Разным и отвечают разные ξ_a. Также $aRb \to \xi_a < \xi_b$ и обратно.

Всякое порядковое число меньшее α будет порядковым типом к.-л. отрезка A и притом только одного.

Множество A изоморфно (вп. уп.) множеству порядковых чисел, меньших α. $(W(\alpha))$.

$A \cong W(\alpha)$

Лекция XXVI

Для порядковых типов имеет место дистрибутивный закон, но только в одну сторону.

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Равенство $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, вообще говоря, места не имеет (напр; $\alpha=\beta=1$; $\gamma=\omega$).

Возьмем A $t(A)=\alpha$ $\underbrace{R \quad B;\ t(B)=\beta;\ S}_{V}$ C, $t(C)=\gamma$. T.

$B \cap C = 0$.

$t(B \cup C) = \beta + \gamma$;

Рассмотрим пары $\langle a, d\rangle$; $a \in A$ & $d \in B \cup C$.

Совокупность таких пар – E.; $\langle a\, d\rangle \in E$ & $\langle a_1, d_1\rangle \in E$ отнош. U

$$\langle a d\rangle\, U \langle a_1 d_1\rangle \leftrightarrow dVd_1 \vee d=d_1 \,\&\, aRa_1.$$

Но $dVd_1 \leftrightarrow (d, d_1 \in B \to dSd_1) \vee (d, d_1 \in C \to dTd_1) \vee$
$\vee (d \in B \,\&\, d_1 \in C)$.

Аналогично строим F, $t(F) = \alpha\beta$; G, $t(G) = \alpha\gamma$

сумма $F \cup G = E$.

Упорядочивая сумму F и G мы получим E, упорядоченное отношением U.

Изоморфизм упорядоченного множества на себя (автоморфизмы).

Автоморфизм вполне упорядоченного множ. есть тождественный.

Отображение, обратное автоморфизму, есть автоморфизм.

$A \quad \mathfrak{F} \qquad x \in A$

$$(x)(x \in A \rightarrow x = \mathfrak{F}'x) \leftarrow \begin{cases} x\,A(\mathfrak{F}'x) \vee (x = \mathfrak{F}'x) \\ x\,A(\mathfrak{F}^{-1}{}'x) \vee (x = \mathfrak{F}^{-1}{}'x) \\ \mathfrak{F}'x\,A\,x \vee \mathfrak{F}'x = x. \end{cases}$$

<u>Следствие</u>. Если 2 вп. уп. множества изоморфны, то найдется лишь один изоморфизм, переводящий одно в другое.

<u>Теорема.</u>

Во всяком непустом множестве порядковых чисел есть первый элемент.

Пусть $\alpha \in A \neq 0$. Если α – первый – то хорошо. Если α – не первый, то множество чисел, меньших α не пусто. Оно будет подмножеством $W(\alpha)$ и потому имеет первый. Пусть первым будет α_0. Тогда α_0 первый и в A. В самом деле

$$\xi \in A; \qquad \xi < \alpha \vee \xi \geq \alpha;$$

$$\alpha_0 \leq \xi \qquad\qquad \alpha_0 < \xi$$

В обоих случаях α_0 меньше всякого $\xi \in A$.

<u>Теорема.</u> Всякое множество порядковых чисел вполне упорядочено

<u>Следует из предыдущего</u>

A – вполне-уп. множ.
$B \subset A$. Либо $B \cong A$, либо $B \cong$ отрезку A.
Пусть нет.

Тогда $A < B$ и A изоморфно отрезку B.

$A \cong [B, b]$, $b \in B$. но $[B, b] \subset [A, b]$, ибо $b \in A$.

Т.о. A изоморфно своему отрезку, чего быть не может.

Над порядковыми числами, очевидно, можно производить те же действия, что и над порядковыми типами. В результате получаются порядковые числа.

Будем рассматривать упорядоченные суммы порядковых типов.

Итак,

<u>Теорема</u>. Сумма вп.-уп. системы порядковых чисел есть порядковое число.

<u>Доказ</u>. Ξ вп.-уп. множ. S — система порядковых чисел с $\mathfrak{D}(S) = \Xi$. $\sum S = \sum_{\xi \in \Xi} S'\xi$.

Построим систему упоряд. множеств T $\mathfrak{D}(T) = \Xi$ чтобы $t(T'\xi) = S'\xi$, чтобы $T'\xi \cap T'\eta = 0$ при $\xi \neq \eta$.

Тогда $\sum S = t(\bigcup_{\xi \in \Xi} T'\xi)$, причем упорядочение: сначала по слагаемым — потом — внутри каждого слагаемого.

$U'\xi$ упорядочивает $T'\xi$.

R упорядочивает Ξ.

Возьмем $0 \neq A \subset \bigcup T'\xi$.

$A \cap \bigcup T'\xi = \bigcup A \cap T'\xi$; $(\exists \xi)(\xi \in \Xi \ \& \ A \cap T'\xi \neq 0)$

рассмотрим $\mathcal{E}\,\xi\,(A \cap T'\xi \neq 0)$. Среди этих ξ есть первый элемент. Обозначим его через η. Рассмотрим $A \cap T'\eta$. Это — непустое подмножество $T'\eta$. по отношению к $U'\eta$, $A \cap T'\eta$ имеет первый элемент. Назовем его a. a будет первым элементом A. Это ясно, ибо он предшествует всякому другому элементу из A.

Порядковый тип $\sum S$ есть порядковое число.

В частности, сумма двух порядковых чисел есть порядковое число.
То же справедливо и для произведения (представляя его как повторение)

1) Всякое слагаемое меньше или равно суммы.
2) $\beta > 0 \rightarrow \alpha+\beta > \alpha$. В частности, $\alpha < \alpha+1$.

<u>Следствие</u> Наибольшего порядкового числа не существует.

Для любого множества пор. чисел найдется такое, к-рое больше всякого из них.

Ξ. J_{Ξ} - система порядковых чисел (тождественные отображения).

$$\cancel{\alpha J_{\Xi}}\ \alpha = \sum J_{\Xi} \geq J_{\Xi}{}^{6}\,\xi. = \xi.$$

$$\alpha+1 > J_{\Xi}^{6}\,\xi = \xi.$$

4. Между α и $\alpha+1$ порядковых чисел нет!

<u>Лекция XXVII.</u>

Есть ли у α предш.?
Числа $1^{го}$ рода имеют предш. $2^{го}$ – нет. они наз. предельными.
$\alpha+1$ первого рода. И обратно. Числа 1го рода имеют вид $\alpha+1$.

$\alpha + \beta \geq \beta$!

<u>Теорема</u> $\alpha > \beta \rightarrow (\exists_1 \gamma)(\gamma > 0 \;\&\; \alpha = \beta+\gamma)$.

β есть тип отрезка A $(t(A)=\alpha)$. $t([A,b]) = \beta$.
$C = \underset{x}{E}\,(x \in A \setminus [A,b])$. $C \neq 0.$, ибо $b \in C$.
$t(C) = \gamma$; тогда $\beta+\gamma=\alpha$. Остается доказать единств.
Пусть найдется еще $\gamma' \neq \gamma$ (γ' удовл. треб.).
1) Пусть $\gamma' > \gamma \rightarrow \gamma' = \gamma+\delta \rightarrow \alpha = \beta+\gamma+\delta < \beta+\gamma = \alpha$
2) Аналогично $\gamma' < \gamma$.

Если в условии $\alpha \geq \beta$, то все остается в силе, кроме $\gamma = 0$.

Монотонность суммы.

$(\alpha \geqslant \alpha'$ & $\beta \geqslant \beta') \longrightarrow (\alpha+\beta \geqslant \alpha'+\beta')$.

1) $\beta \geqslant \beta' \longrightarrow \alpha+\beta \geqslant \alpha+\beta'$.

$\downarrow$

$(\exists\gamma)(\beta = \beta'+\gamma) \longrightarrow \alpha+\beta = \alpha+\beta'+\gamma \longrightarrow \alpha+\beta \geqslant \alpha+\beta'$.

Если при этом $\beta > \beta'$, то $(\exists\gamma)\ \gamma \neq 0$ и все так же.

2) $\alpha \geqslant \alpha' \longrightarrow \alpha+\beta \geqslant \alpha'+\beta$.

$\gamma+\beta \geqslant \beta$ по 1)

$\downarrow$

$(\exists\gamma)(\alpha = \alpha'+\beta) \longrightarrow \alpha+\beta = \alpha'+\gamma+\beta \longrightarrow \alpha'+\beta \geqslant \alpha'+\beta$.

Если $\alpha \geqslant \alpha'$ & $\beta \geqslant \beta' \longrightarrow \alpha+\beta \geqslant \alpha'+\beta \geqslant \alpha'+\beta'$.

$\beta \leqslant \alpha$. $\alpha = \xi+\beta$. (что можно вычесть справа?)

Такие числа $\beta \neq 0$ наз. остатками α. Их всегда конечное число. Пусть ρ — остаток α. $\alpha = \xi+\rho$.

Это — отрезок α, соответствующий остатку ρ.

(напр., $\omega = n+\omega$ при любом конечном n).

1) Пусть ρ_1 и ρ_2 — остатки одного числа. Им соотв. отрезки ξ_1 и ξ_2; $\rho_1 > \rho_2 \longrightarrow \xi_1 < \xi_2$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \xi_1+\rho_1\\ \alpha = \xi_2+\rho_2\end{array}\right\}$$ не м. б. $\xi_1 \geqslant \xi_2$ по свойству монотонии.

2) Среди всех остатков есть наименьший. ρ_1. Из оставшихся есть наим. и т. д. $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots$

Берем соотв. отрезки $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \dots$

и среди ξ не окажется наименьшего, чего быть не может по вп.-уп. α.

α. ; ϱ — его наименьший остаток.

1) $\varrho = \mu + \nu$, где $\mu < \varrho$ и $\nu < \varrho$ $(\nu > 0)$.

Пусть так. $\alpha = \xi + \varrho = \xi + \mu + \nu$; ν есть остаток.
Такие числа неразложимы.
Неразложимыми будут $1, \omega, \omega 2, \omega^3, \ldots \omega^\omega \ldots$

2) Из двух остатков α меньший остаток есть остаток большего.

ϱ ; ϱ' $\qquad \varrho < \varrho'$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \xi + \varrho. \\ \alpha = \xi' + \varrho'\end{array}\right\} \xi > \xi' \to (\exists \gamma)(\xi = \xi' + \gamma)$$

$$\alpha = \xi' + \gamma + \varrho \longrightarrow \varrho' = \gamma + \varrho.$$

это и требовалось.

3) Наименьший остаток есть остаток всякого другого остатка.

4) Он неразложим, т. е. не имеет остатков, отличных от него самого. Справедливо и обратное. (по определению).

5) Если ϱ неразложимо, то для всякого $\xi < \varrho$,
$\xi + \varrho = \varrho$.

6) обратное. Если ϱ поглощает все меньшие слева, то оно неразложимо.

Пусть $\varrho = \mu + \nu$ Возьмем $\varrho + \varrho = \mu + \nu + \varrho = \mu + \varrho = \varrho$
чего при $\varrho > 0$ не бывает.

7) Разложение порядкового числа на сумму неразложимых.

$\alpha \neq 0$. Его наим. остаток ϱ_1'. Пусть α_1 — наим. отрезок соотв. остатку ϱ_1'. Если $\alpha_1 = 0$, то all right.

$\alpha_1 \neq 0$; его наим. остаток ϱ_2' ; Его наим отрезок α_2 и т. д.

$\varrho_2' \geq \varrho_1'$; Предп. $\varrho_2' < \varrho_1' \longrightarrow \alpha = \alpha_2 + \varrho_2' + \varrho_1' = \alpha_2 + \varrho_1'$

но $\alpha_2 < \alpha_1$ и α_2 есть отрезок α, меньший α_1, что противоречит построению.

Получим $\rho_1' \le \rho_2' \le \rho_3' \le \ldots\ldots$

(До тех пор, когда $\alpha_n = 0$. (Такое будет, ибо α идут убывая и последнее должно найтись).

$\alpha_{i-1} = \alpha_i + \rho_i'$ $\quad (\alpha_0 = \alpha)$

$$\alpha = \alpha_1 + \rho_1' = \alpha_2 + \rho_2' + \rho_1' = \ldots = \rho_n' + \rho_{n-1}' + \ldots + \rho_2' + \rho_1'$$

~~Такое представление единственно по построению.~~

обозначим $\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n$ $\quad (\rho_1 = \rho_n'; \ \rho_2 = \rho_{n-1}'; \ldots)$.

пусть еще $\alpha = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m$

Покажем, что $\rho_1 = \sigma_1$.

ρ_1 — наибольшее из неразложимых чисел, не превосх. α. (что $\rho_1 < \alpha$ — очевидно).

Пусть $\alpha \geq \rho_0 > \rho_1$; $\quad \alpha + \rho_0 = \rho_1 + \ldots + \rho_n + \rho_0 = \rho_0$, $\quad \rho_0 > 0$!

чего быть не может, т.к. $\alpha \geq \rho_0$.

Значит, ρ_1 определяется по α единственным образом. $\rho_1 = \sigma_1$. Значит

$$\rho_2 + \ldots + \rho_n = \sigma_2 + \ldots + \sigma_m.$$

и т.д. сумма исчерпается одновременно.

Среди неразложимых чисел, не превосходящих α, есть наибольшее.

12.4.47.

Лекция XXVIII.

$\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots\ldots + \rho_n$.

$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots\ldots \geq \rho_n$ $\qquad \underbrace{\rho_k + \rho_{k+1} + \ldots\ldots + \rho_n}_{\text{остаток } \alpha}$

Этими остатками исчерпываются все остатки α. В самом деле, пусть β — остаток α. Разложим β

$\beta = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_m$ $\qquad$ найдется ξ такое, что $\alpha = \xi + \beta$.

ξ тоже допускает разложение (м.б., правда, на нулевое число слагаемых).

$$\xi = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_q \qquad \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_q \qquad q \geq 0.$$

$$\alpha = \xi + \beta = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_q + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$$

нужно сократить (если нужно)

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n.$$

Значит, $p \leq q$

$$\tau_1 = \rho_1; \dots ; \sigma_m = \rho_n.$$

$$\beta = \rho_{n-m+1} + \rho_{n-m+2} + \dots + \rho_n.$$ что и требовалось.

Пусть A — множество порядковых чисел. ~~Существует~~ Порядк. числа, больше или равных всякого числа A имеют наименьшее.

пусть $\alpha = t(\cup A) + 1$

Рассмотрим порядковые числа, меньшие или равные α и большие всякого из A.

$$\mathcal{E}_{\xi}(A \leq \xi \leq \alpha.) \neq 0.$$

Там есть наименьшее. Пусть β. Тогда при всяком ξ.., $\xi \geq \beta$.

Это число наз. $\sup A$ (верхняя грань).

Это β единственно.

$\alpha = \sup W(\alpha)$, если α — второго рода.

Всякое $\xi < \alpha$, то между ξ и α найдётся еще η какое-то число (напр., $\xi + 1$).

$\eta \in W(\alpha)$. $\longrightarrow$ $\overline{\xi \geq W(\alpha)}$.

Если α — первого рода, то $\sup W(\alpha) = \alpha - 1$.

Вид супр. зависит от существования наибольшего числа множества.

Если sup — первого рода, то он достигается.
Если второго — нет.
Справедливо и обратное.

Sup. множества неразложимых чисел есть

иррациональное число.

$\alpha = \sup A$. Среди всех ирр. чисел, меньших или равных α есть наибольшее (напр., β).

Докажем, что $\beta = \alpha$.

Что $\beta \leq \alpha$ – очевидно. Если $\beta < \alpha$, то $\beta < \sup A \to$

$\to (\exists \gamma)(\gamma \in A \;\&\; \gamma > \beta)$ γ д.б. ирр.; $\gamma \leq \alpha$, и оно больше β, что противоречит выбору β.

Значит, $\beta \nless \alpha \to \beta = \alpha$.

ч.
т.
д.

$\sup 0 = 0$.

Обозначения A - множество чисел.
α - число

$$A + \alpha = \mathcal{E}(\xi + \alpha,\ \xi \in A).$$
$$\alpha + A = \mathcal{E}(\alpha + \xi,\ \xi \in A).$$

$\mathcal{D}f.$

Если A – пусто, то двойственность.

Сначала напишем - потом подумаем.

A - не пусто. Вывести $\sup(\alpha + A) = \alpha + \sup A$. И.

$\alpha + A$ не пусто ли. $\boxed{\sup}(A + \alpha) = \sup A + \alpha$. Л.

не именно.

Если A - множество натур. чисел.
$\alpha = \omega$. $\sup(\alpha + A) = \omega 2. = \alpha + \sup A$.
$\sup(A + \alpha) = \omega \neq \sup A + \alpha = \omega 2$.

Итак, $\sup(\alpha + A) = \alpha + \sup A$. ($A$ не пусто!).

$\alpha + \sup A \geq \alpha + \xi$, $\xi \in A$. $\xi \leq \sup A$.

$\alpha + A \leq \alpha + \sup A$.

$\sup(\alpha + A) \leq \alpha + \sup A$.

Наоборот! $\underline{\alpha + \sup A > \eta}$.

$\beta \in A \to \alpha + \beta \in \alpha + A$. 1) $\eta < \alpha \to \eta < \alpha + \beta \to$
$\to \eta < \delta \in \alpha + A$.

2) $\eta \geq \alpha \to \eta = \alpha + \delta \to \alpha + \delta < \alpha + \sup A \to \delta < \sup A \to$
$\to (\exists \xi)(\xi \in A \;\&\; \delta < \xi)$

Лемма II. $\alpha \neq 0 \to \beta = \alpha\xi + \rho$, где $\rho < \alpha$.

Доказательство

$\beta \leq \alpha\beta$; Если $\beta = \alpha\beta \to \xi = \beta$ & $\rho = 0$.

Если $\beta < \alpha\beta$; тогда применима лемма I.

$\beta = \alpha\beta_1 + \alpha_1$. Положим $\xi = \beta_1$ & $\rho = \alpha_1$

Существование доказано; осталась единственность.

Пусть $\beta = \alpha\xi + \rho = \alpha\xi' + \rho'$. $(\rho' < \alpha)$

Докажем, что $\xi = \xi'$ & $\rho = \rho'$.

1) $\xi = \xi' \to \rho = \rho'$. (ибо равны левые слагаемые отображающие).

2) Остается $\xi \neq \xi'$; пусть $\xi > \xi' \to \xi = \xi' + \delta$

$$\beta = \alpha(\xi' + \delta) + \rho = \alpha\xi' + \rho'.$$

$$\alpha\xi' + \alpha\delta + \rho = \alpha\xi' + \rho'$$

$$\alpha\delta + \rho = \rho'$$

Но $\delta \neq 0 \to \alpha\delta \geq \alpha \to \alpha\delta + \rho \geq \alpha \to \rho' \geq \alpha$, что противоречит предположению.

3) Аналогично приводит к противоречию $\xi' > \xi$.

След. $\xi = \xi'$.

Следствие I $\alpha = 2$ $\beta = 2\xi + \rho$, где $\rho = 0 \vee 1$.

Значит, либо $\beta = 2\xi$ либо $\beta = 2\xi + 1$.

Следствие II $\alpha = \omega$ — четные и нечетные

$\beta = \omega\xi + \rho$ (ρ — натуральное число).

Если $\rho \neq 0$, то число первого рода, и наоборот.

Если $\rho = 0$, то число второго рода.

Приведем 'левый' делимости на ω и т. д.

Следствие III. Алгоритм Евклида действует.

$\alpha_0 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2$. Алгоритм Евклида кончается по вп-уп.

$\alpha_1 = \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3$ $\quad \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots\dots$

$\dots\dots$

Он даёт общий наибольший левый делитель α_0 и α_1.

Теорема. Если ρ неразложимо (и $\rho \neq 1$, то) при всяком $\alpha \neq 0$, $\alpha\rho$ тоже неразложимо.

Возьмём $\xi < \alpha\rho$ и покажем $\xi + \alpha\rho = \alpha\rho$.

$\xi = \alpha\mu + \nu$, где $\mu < \rho$ & $\nu < \alpha$.

$\xi + \alpha\rho = \alpha\mu + \nu + \alpha\rho \leq \cancel{\alpha\mu + \alpha\rho = \alpha(\mu+\rho) = \alpha\rho.}$

$\leq \alpha\mu + \alpha + \alpha\rho = \alpha(\mu + 1 + \rho) = \alpha\rho$.

Следствие $\rho = \omega$.

$\alpha\omega$ неразложимо. при $\alpha \neq 0$.

Теорема. Если $\alpha < \rho < \alpha\omega$, то ρ разложимо.

$\rho = \alpha\xi + \nu$ $\quad \xi < \omega$, а $\nu < \alpha$.

1) $\nu \neq 0$ $\quad \nu < \alpha$ & $\alpha < \rho \rightarrow \nu < \rho$ $\quad \nu \neq 0 \rightarrow \alpha\xi < \rho$.
и требуемое разложение ρ получено.

2) $\nu = 0$ $\quad \rho = \alpha\xi$, где ξ – натуральное число, отличное от 0.
значит, есть $\xi - 1$.

$\rho = \alpha(\xi - 1 + 1) = \alpha(\xi - 1) + \alpha$.
и опять разложимо.

$\alpha\omega > \alpha$ и т. о. является наименьшим неразложимым, большим α.

Перечисляем неразложимые числа

ω_1, ω^2, ω^3, ...

Теорема. Всякое неразложимое делится слева на всякое, меньшее его отличное от 0 и любое неразложим

Док. ρ неразл. $0<\alpha<\rho$.

Докажем, что $\rho = \alpha\xi$.

$\rho = \alpha\xi + \nu$ $\quad \nu<\alpha$; $\nu = 0$ ибо иначе ρ разложилось. Значит, ρ делится на α слева.

Пусть ξ разложимо.

т. е., $\xi = \mu + \sigma$. $\quad 0<\mu<\xi$ & $0<\sigma<\xi$.

$\alpha\xi = \rho = \alpha\mu + \alpha\sigma$ и ρ оказывается разложимым, поскольку, $0<\alpha\mu<\rho$ & $0<\alpha\sigma<\rho$. Пришли в противоречие.

Теорема о Sup без предп. о непустоте A.

$$\sup(\alpha A) = \alpha \sup A.$$

1) при $A=0$ ф-ла очевидна.

2) Итак, $A\neq 0$.

$\xi\in A \longrightarrow \xi\le \sup A. \to \alpha\xi \le \alpha\sup A.$

$\alpha\xi$ пробегает αA; всякое число из αA

и $\quad \alpha A \le \alpha \sup A$

Рассмотрим $\quad \beta < \alpha\sup A$.

$\beta = \alpha\xi + \rho$, где $\rho<\alpha$ & $\xi < \sup A$.

~~при $\alpha=0$ теорема тривиальна~~ Поэтому $\alpha\neq0$ и написанное представление имеет место.

найдется η такое, что $\xi < \eta$ & $\eta \in A$

Тогда $\xi < \eta \rightarrow \xi + 1 \leq \eta$. Но $\beta = \alpha\xi + \varsigma$ & $\varsigma < \alpha$

Значит, $\alpha\xi + \varsigma < \alpha\xi + \alpha = \alpha(\xi + 1) \leq \alpha\eta$

$\beta < \alpha\eta \in \alpha A$.

$\alpha \sup A$ есть наименьшее из чисел, больших или равных αA.

Замечание.

Для умножения справа аналогичное равенство места не имеет.

Найти пример. $A = W(\omega)$ $\alpha = 2$.

Возвышение в степень.

Пусть μ и α – порядковые числа и M и A.

$$\left.\begin{array}{l} t(M) = \mu \\ t(A) = \alpha. \end{array}\right\}$$

Отображения A в M; те, к-рые . . . .

$M \neq 0$; M имеет первый элемент m_0.

$\mu \neq 0$ Рассматривать будем те отображения A в M, при к-рых почти все (т.е. кроме м.б. конечного числа) элементы A отображаются в m_0.

$$F'x = m_0 \text{ (почти для всех } x \in A)$$

Пусть E – множество таких отображений.

$F \in E$ & $G \in E \rightarrow F'x = m_0$ почти для всех.

$G'x = m_0$ — " — — " —

$\mathcal{E}(F'x \neq G'x)$ их почти нет, и среди них найдется последний (в упорядочении множества A).

Выберем этот последний a.

Если $F'a$ предш. $G'a$, то F предш G
и наоборот. (Равнение на последнего!)
Т.о. E упорядочивается.
Доказать нужно транзитивность.

$$\underbrace{F \text{ пр } G}_{a} \ \underbrace{\text{пр } H}_{b} \longrightarrow F \text{ пр } H.$$

Тогда
а) $a = b$ б) a пр b в) b пр a.

а). при всех x сл. a $F'x = G'x = H'x$.

$F'a$ пр $G'a$ пр $H'a \longrightarrow F'(a)$ пр $H'a$.
и a — их последняя точка различия.

б). a пр b.

$F'b = G'b$ пр $H'b \longrightarrow F'b$ пр $H'b$.
все x сл за b имеют одинаковые образы.
b — последняя точка различия F и H и
F пр H.

в) подобно б)

Осталось доказать полную упорядоченность.

Лекция XXX.

упорядочивается отношением Q.
Итак, E упорядочено полностью.
Докажем, что это упорядочение полное.
$E_0 \subset E$ & $E_0 \neq 0$. Докажем, что E_0 имеет первый элемент. Если E_0 содержит отображение, переводящее все элементы в m_0, то это отобр будет первым в E → первым в E_0. Иначе E_0 такого не содержит. Т.е. при всяком F

найдутся такие x, что $F'x \neq m_0$. Их может нет и найдется последнее. a_F. Совокупность этих a_F образует $A_F \subset A$. Значит, среди A_F есть первый (ибо A вп-уп). Пусть он a'_F. Среди $F \in E_0$ найдутся такие, что $a_F = a'$. Рассмотрим все такие a_F. Их множество не пусто $E_0' \subset E_0$. Каждый элемент E_0' предш. в E_0 всякому элементу из $E_0 \setminus E_0'$.

Пусть, действительно $F \in E_0$ & $G \in E_0 \setminus E_0'$.

<u>Докажем $F \, Q \, G$.</u> $a_F = a'$ & $a_G \neq a'$

Но a' есть a_H из $\mathfrak{E}$ где $H \in E$. $a_F \, R \, a_G$

a_G есть последняя точка различия F и G.

$F'x = G'x = m_0$, если $a_G \, R \, x$.

~~$F' \ldots$~~ Но

Значит, достаточно показать, что E_0' имеет первый элемент. $F \in E_0'$; $F'a' \in M$ какой именно элемент — зависит от F. Так мы получили какое-то множество из M. M вп-уп; значит, среди найденных есть первый m_1.

$F'a' = m_1$ — выделим все такие отображения E_1

$E_1 \neq 0$. $E_1 \subset E_0'$. E_1 лежит „в начале" E_0'

$F \in E_1$ & $G \in E_0' \setminus E_1$. $F'a_1 = m_1$, $G'a_1 = m_1' \neq m_1$ $\to$ $m_1 \, T \, m_1'$

Но a_1 — последняя их точка различия.
Значит, $F^{\circ} Q G$. (по определению).
Нужно показать, что в E_1 есть первый элемент
Но может оказаться, что $F^{\text{'}} a' = m'$ $F^{\text{'}} x = m_1$ $a' R x$

Предположим, что высшее ~~[illegible]~~ отобр. имеет то различие от нулевого, предш. a_1
$F \in E_1$ имеет точки различия от нулевого отобр., предш. m_1. Возьмем последнюю из них.
Множество a'_F имеет первый элемент a^2, к-рый предшествует a_1 в смысле R.

Порядковый тип этого множества отображений наз. степенью μ^{α} $t(\varepsilon) = \mu^{\alpha}$. По доказанной теореме μ^{α} есть порядковое число. От выбора самих множеств M и A $t(M^A)$ не зависит.
Мы считали $\mu \neq 0$.
При $\mu = 0$ считаем $0^{\alpha} = 0$ при $\alpha \neq 0$ & $0^0 = 1$
$\mu^0 = 1$. $1^{\alpha} = 1$.

Теорема.

$$\mu^{\alpha+\beta} = \mu^{\alpha} \cdot \mu^{\beta}$$

Для $\mu = 0$ это тривиально
~~[illegible]~~

Лекция XXXI.

$\mu^1 = \mu$.	$t(A) = 1$	$F^{\text{'}} A \in M$.
$t(M) = \mu$.	$A = \{a\}$.	G

Возьмем уп. множ. $t(M) = \mu$, $t(A) = \alpha$, $t(B) = \beta$ | $A \cap B = 0$.

=

Множества отображений A в M — доп. отобр. P

B в M. — Q

$A \cup B$ в M. — R

почти все A отображаются в т. : эти отображения допустимые. почти все B в т. Аналогично определяются отображения $A \cup B$.

$F, G \in P$ $\quad F > G$, если $F'a > G'a$

(a — последняя точка различия).

Аналогично упорядочивается B.

$A > B$ даёт упорядочение $A \cup B$; $t(A \cup B) = \alpha + \beta$.

$F, G \in R$; предшествует то, к-рое имеет предшествующую последнюю точку различия.

$t(R) = \mu^{\alpha+\beta}$.

Пусть $F \in P$ & $G \in Q$ $\quad F$ и G согласованы. ~~Тогда~~ $F \cup G$ есть отображение $A \cup B$ в M. оно будет допустимым, т.е. $F \cup G \in R$.

обратно, $H \in R$; $\left| \begin{array}{l} F = H \restriction A \in P \\ G = H \restriction B \in Q \end{array} \right|$ $\begin{array}{l} H \restriction A \\ H \restriction B \end{array}$ допустимы.

Это даёт 1-однозн. соотв. пар $\langle F, G \rangle$ и элементами из R. (Играем на том, что $A \cap B = 0$). R упорядочивается так же как и S (пары) (т. е. сначала по последней, потом по первой).

но $t(S) = \mu^\alpha \mu^\beta$ & $t(S) = t(R) \rightarrow t(R) = \mu^\alpha \mu^\beta$

$\rightarrow \mu^\alpha \mu^\beta = \mu^{\alpha+\beta}$

1) Отсюда следует $\beta = 1$.

$\mu^{\alpha+1} = \mu^\alpha \mu$

2) Монотонная степень относительно показателя ($\mu > 1$).

$\mu^\alpha > \mu^\beta \leftarrow \alpha > \beta$.

$\alpha > \beta \to \alpha = \beta + \gamma \qquad \gamma \neq 0.$

$\mu^\alpha = \mu^{\beta+\gamma} = \mu^\beta \mu^\gamma > \mu^\beta$, ибо $\mu^\gamma > 0$.

3) Аналогично, $\mu \neq 0$ и $\alpha \geq \beta \to \mu^\alpha \geq \mu^\beta$.
Имеет место монотонность относительно основания степени.

4) $\mu > 1$; α — $2^{го}$ рода; $\beta < \mu^\alpha$. найдется γ

$\gamma < \alpha \quad \beta < \mu^\gamma$

$t(A) = \alpha$, $t(M) = \mu$] отображения A в M суть элем. P. т.-е. почти все образы суть m_0.

$\beta < \mu^\alpha \to \beta$ есть отрезок множества P.

$\beta = t([P, F_0])$ $(F_0 \in P)$ если F_0-нулевое $\beta = 0 \quad \gamma = 1$.

Значит, $F_0^{\,x=a} = m_0$ — последняя точка разрыва.
$F_0^{\,y} \neq m_0$ (~~при всех~~ при всех y следующих за a).
a не является последним в A; значит, найдется $c \in A$ такой, что $a > c$. Положим
Это γ искомое.

$t([A, c]) = \gamma$; $\gamma < \alpha$.

$[A, c] = G$. Рассмотрим сужение отображения $F \upharpoonright G$. Получим допустимые отображения G в M. Это — из R.

$F \upharpoonright C \in R$; итак P отображается в R.

$t(R) = \mu^\gamma$.

Пусть теперь $F \in [P, F_0]$ $\quad F < F_0$.
Все его точки разрыва ~~предшествуют~~ ~~не следующие~~ предшествуют a_0 или совпадают, т. е. предшествовать $c \in G$ и поэтому сами будут принадлежать G.

Значит также ξ после C-сокращений переходят в нулевые в нулевые же. Порядок при этом сохраняется. Значит, никак не изменяется и ~~...~~. Но получился отрезок $[R, \xi_0 \restriction C]$; значит, его тип, β, меньше типа R, т.е. $\beta < \mu^\gamma$.

Лекция XXXII. 26 апр 47 г.

Теорема.

$\mu \neq 0 \ \& \ A \neq 0 \to \sup(\mu^A) = \mu^{\sup A}$.

$\mu^A = \mathcal{E}(\mu^\xi, \xi \in A)$.

1) $\mu = 1$ тривиально.

2) Итак, $\mu > 1$. Возьмем число из μ^A; оно имеет вид μ^ξ. $\xi \le \sup A \to \mu^\xi \le \mu^{\sup A}$; это справедливо для всех ξ; значит, $\mu^A \le \mu^{\sup A}$.

а) $\sup A = 0 \to A = \{0\}$. $\mu^0 = \mu^{\sup A} = 1$.

б) $\sup A$ первого рода. Тогда ~~этот~~ sup достигается, т.е. найдется $(\exists \xi)(\xi \in A \ \& \ \xi = \sup A)$. Значит, $\mu^{\sup A} \in \mu^A$. Значит, $\mu^{\sup A} = \sup \mu^A$

в) $\sup A$ второго рода.

Пусть $\beta < \mu^{\sup A}$ тогда по предпол. найдется $\gamma < \sup A$ и ~~$\beta < \gamma$~~ $\beta < \mu^\gamma$. ~~γ ...~~

$(\exists \xi)(\xi \in A \ \& \ \gamma < \xi)$. Тогда, т.к. $\mu^\gamma < \mu^\xi \to$

$\to \beta < \mu^\xi \in \mu^A$; ~~$\beta \le \mu^A$~~

$(\exists \xi)(\beta < \mu^\xi \ \& \ \xi < \sup A)$. это справедливо для всех $\beta < \mu^{\sup A}$.

Т.о. $\mu^{\sup A} = \sup \mu^A$.

Теорема.

$(\mu^\alpha)^\beta = \mu^{\alpha\beta}$.

1) $\mu = 0$ тривиальный случай.

2) $\mu \neq 0$. Доказываем трансфинитной индукцией по β.

Именно, мы предположим, что найдется β такое, что $(\mu^\alpha)^\beta \neq \mu^{\alpha\beta}$, но при всяком $\xi < \beta$ $(\mu^\alpha)^\xi = \mu^{\alpha\xi}$.

а) $\beta = 0$ — случай тривиальный.

б) β — первого рода, т.е. $\beta = \gamma + 1$ & $\gamma < \beta$

т.е. $(\mu^\alpha)^\gamma = \mu^{\alpha\gamma}$

Тогда $(\mu^\alpha)^\beta = (\mu^\alpha)^{\gamma+1} = (\mu^\alpha)^\gamma \mu^\alpha = \mu^{\alpha\gamma}\mu^{\alpha\cdot 1} = \mu^{\alpha\gamma+\alpha\cdot 1} =$

$= \mu^{\alpha(\gamma+1)} = \mu^{\alpha\beta}$.

в) β — второго рода.

$\beta = \sup W(\beta)$. $(\mu^\alpha)^\beta = (\mu^\alpha)^{\sup W(\beta)} =$

(мы находимся в условиях предыдущей оценки.)

$= \sup\left[(\mu^\alpha)^{W(\beta)}\right] = \sup\left[\mu^{\alpha W(\beta)}\right] = \mu^{\sup \alpha W(\beta)} =$

$= \mu^{\alpha \sup W(\beta)} = \mu^{\alpha\beta}$

Но $(\mu^\alpha)^{W(\beta)} \geq \mu^{\alpha\xi}$ — $=$ ~~Sup~~ [

ибо когда $\xi \in W(\xi) \to \alpha\xi \in \alpha W(\beta)$.

$n^\omega = \omega$ $n \neq 1$.

Теорема: ω^α неразложимы. Трансфинитной индукцией.

ω^ξ $(\xi < \alpha)$.

~~$\omega^\alpha = \omega^\beta \xi + \gamma = \omega$~~

а) α первого рода $\alpha = \beta + 1$.

$\omega^\alpha = \omega^{\beta+1} = \omega^\beta \omega$ неразложимо.

б) α второго рода

$\alpha = \sup W(\alpha)$

$\omega^\alpha = \omega^{\sup W(\alpha)} = \sup \omega^{W(\alpha)} = \sup \mathcal{E}(\omega^\xi, \xi < \alpha)$

Sup множества неразложимых неразложим.

<u>Лемма</u> $\beta \leq \mu^\beta$ следует из монотонности по показателю.

Какие неразложимые есть еще кроме степеней ω?

Лемма I

$\mu > 1$; $\beta \to$ найдется α; $\mu^{\alpha} \leq \beta < \mu^{\alpha+1}$. $(\beta \neq 0)$.

Найдутся ξ такие, что $\beta < \mu^{\xi}$

Среди них найдется наименьшее, δ. $\delta \neq 0$

иначе $\mu^{\delta} = 1$. δ - первого рода.

Предположим, что δ - второго рода $\beta < \mu^{\delta}$

то найдется по известной теореме $\gamma < \delta$ такое,

что $\beta < \mu^{\gamma}$; это противоречит выбору δ. Значит, есть $\delta - 1$.

За искомое α и возьмем $\delta - 1$.

Теорема.

Всякое неразложимое есть степень ω.

Итак, дано нераз. $\rho \neq 0$; найдется α: $\omega^{\alpha} \leq \rho < \omega^{\alpha+1} = \omega^{\alpha}\omega$

и $\omega^{\alpha}\omega$ есть ближайшее неразложимое к ω^{α}

число. Значит, $\rho = \omega^{\alpha}$, что и требовалось.

Итак, ряд неразложимых.

$$1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{\omega}, \omega^{\omega+1}, \ldots, \omega^{\omega 2}, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots \omega^{\omega^3}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \ldots, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}, \ldots$$

$$\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n$$

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_n; \quad \text{все } \rho \text{ суть степени } \omega.$$

$$\alpha = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \ldots + \omega^{\beta_n}$$

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$$

слагаемых конечное число.

$K_m \neq 0$.

$\alpha = \omega^{\gamma_1}k_1 + \omega^{\gamma_2}k_2 + \ldots + \omega^{\gamma_m}K_m$ - это - нормальное представление порядкового числа. Оно единственно.

Вместе с тем любое α можно разложить по степеням любого $\mu > 1$. (из прошлой леммы) коэффициенты будут меньше μ.

можно положить $\mu = 2$. Тогда все коэффициенты суть единицы.

Это показывает $\gamma \leq \alpha$. Но может оказаться $\gamma_1 = \alpha$.

$\mu_1 \leq \omega^{\gamma_1} \leq \omega^{\gamma_1} k \leq \alpha \longrightarrow \mu_1 \leq \alpha$.

$\mu_1 = \alpha$ ~~тогда и~~ только тогда, если $k = 1$, и $n = 1$.

Одним из таких чисел является $\varepsilon = \sup (\omega^{\omega^{\cdots}})$.

Докажем это.

$$\omega^{\sup A} = \sup \omega^{A} = \sup \omega^{(n+1)} = \sup A = \varepsilon$$

$\underline{\omega^{\varepsilon} = \varepsilon}$.

Значит, нормальное представление $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$.

Связь порядковых чисел с кардиналами

Лекция XXXIII.

$t(A) = \alpha$
$c(A) = \mathfrak{m}$ | $\mathfrak{m}$ наз мощностью порядкового типа α. ~~типа~~ ~~α~~.

$\overline{n} = n$. $\overline{\omega} = \aleph_0$

$\overline{\omega^2} = \aleph_0$.

$\mathfrak{m} = \overline{\alpha}$

$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

$\alpha \leq \beta \longrightarrow \overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ но не обязательно

$\alpha < \beta \longrightarrow \overline{\alpha} < \overline{\beta}$.

Лекция XXXIV.

$Z(\aleph_\alpha)$

Было доказано, что $W(\omega_{\alpha+1}) = W(\omega_\alpha) \cup Z(\aleph_\alpha)$. Это – сечение $W(\omega_\alpha) < Z(\aleph_\alpha)$. Значит, (помня, что $tW(\xi) = \xi$),

$\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha + tZ(\aleph_\alpha)$ $\qquad tZ(\aleph_\alpha) = \omega_{\alpha+1}$ (иначе быть не может).

Найдем теперь мощность его. $cZ(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1}$. Чисел мощности $\aleph_\alpha$ всего $\aleph_{\alpha+1}$ штук.

Так, счетных чисел $\aleph_1$ штук. Они образуют множество, упорядоченное по типу ω_1.

<u>Теорема.</u> $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$ для любого α. Доказывается трансфинитной индукцией по α.

Предположим $\aleph_\xi^2 = \aleph_\xi$ для всех $\xi < \alpha$. Докажем, что это равенство выполняется и для $\xi = \alpha$.

$cW(\omega_\alpha) = \aleph_\alpha$. Рассмотрим множество $\langle \mu, \nu \rangle$, где $\mu, \nu \in W(\omega_\alpha)$. Множество пар обозначим через P.

Вычислим cP.

а) $cP = \aleph_\alpha^2$

б) с другой стороны, докажем, что $cP = \aleph_\alpha$. Для сего упорядочим вполне это P. Определим P_λ для любого поряд. числа λ как совокупность пар $\langle \mu, \nu \rangle$, где $\mu + \nu = \lambda$.

$$P = \bigcup_{\lambda \in W(\omega_\alpha)} P_\lambda$$

это так. (можно последовательно доказать два включения).

Слагаемые справа дизъюнктны (ибо сумма порядковых чисел определяется однозначно).

Упорядочим вполне каждое P_λ

Но. $P_\lambda = \mathcal{E}(\langle \mu, \nu \rangle, \mu + \nu = \lambda)$ предшествующей парой будем считать ту, у к-рой μ меньше. Это отношение обозначим через R_λ. Оно упорядочивает P_λ как это легко проверить. $P_\lambda \cong W(\lambda)$; значит, R_λ ~~вполне~~ упорядочивает P_λ вполне. Поэтому P_λ в сумме вполне упорядочены, и каждой в отдельности вп-уп но и P вп-уп.

Пусть теперь $\langle \mu, \nu \rangle \in P$.

$$\langle \mu, \nu \rangle R \langle \mu', \nu' \rangle \longleftrightarrow \mu+\nu < \mu'+\nu' . \lor \ \mu+\nu = \mu'+\nu' \ \& \ \& \ \mu < \mu'.$$

Пусть, далее, $t(P) = \xi$; ξ это порядковое число. Покажем, что оно не больше ω_α.

Предположим, $\xi > \omega_\alpha$. Если так, то P имеет отрезок, упорядоченный по типу ω_α. Т.е. найдется пара $\langle \beta, \gamma \rangle$, что $t[P, \langle \beta, \gamma \rangle] = \omega_\alpha$.

Сей отрезок состоит из пар $\langle \mu, \nu \rangle$ у к-рых либо a) $\mu+\nu < \beta+\gamma$

β) $\mu+\nu = \beta+\gamma \ \& \ \mu < \beta$.

Во всяком случае, $\mu+\nu < \beta+\gamma+1$.

Но $\underbrace{\beta+\gamma+1}_{\text{это число бесконечно}} < \omega_\alpha$ $\qquad \beta+\gamma+1 = \delta.$

$c(\delta) < \aleph_\alpha$.

Но будучи $\geq$ начального вп-уп. множ., $c\delta$ сущ. алефом. $c\delta = \aleph_\xi$. $\mu < \delta$ и $\nu < \delta$.

Пусть $Q = \mathcal{E}(\langle \mu, \nu \rangle, \mu < \delta \ \& \ \nu < \delta)$ Покажем, что $[P, \langle \beta, \gamma \rangle] \subset Q$.

Но это так, ибо $\beta < \delta$ и $\gamma < \delta$. $\mu, \nu \in W(\delta)$. $cQ = c(W(\delta))^2 = c\delta^2 = \aleph_\xi^2 = \aleph_\xi$. по предпол.

т.е. $c[P, \langle \beta, \gamma \rangle] \leq \aleph_\xi$.

$cP \leq c\omega_\alpha = \aleph_\alpha$.

$\aleph_\alpha^2 \leq \aleph_\alpha$. Но $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^2$ очевидно. Значит, $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

Теорема.

$A \subset W(\omega_{\alpha+1})$ & $c(A) < \aleph_{\alpha+1}$. $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ $\sup A \le \omega_{\alpha+1}$.

Доказательство.

$B = \bigcup\limits_{\xi\in A} W(\xi)$ есть множество порядковых чисел.

$\xi\in A \to \xi\in W(\omega_{\alpha+1}) \to \xi<\omega_{\alpha+1} \to W(\xi)\subset W(\omega_{\alpha+1})$.

$\to B\subset W(\omega_{\alpha+1})$ $\quad cW(\xi)=\bar{\xi}\le\aleph_\alpha$.

но $cA\le\aleph_\alpha$. значит, $cB\le\aleph_\alpha^2=\aleph_\alpha$.

$W(\omega_{\alpha+1})\setminus B\ne 0$.

Пусть $\beta\in W(\omega_{\alpha+1})\setminus B$. $\beta\ge\xi$, где $\xi\in A$.

т.е. ни при каком ξ не м.б., что $\beta\in W(\xi)$, а это и значит, что β больше всех ξ.

Т.о. $A\le\beta$. $\sup A\le\beta\le\omega_{\alpha+1}$, а это и требовалось.

В частности, при $\alpha=0$.

$A\subset W(\omega_1)$ & $c(A)\le\aleph_0 \longrightarrow \sup A<\omega_1$.

Трансфинитная индукция.

Предположим ф-ию определенной на $W(\alpha)$. Нужно распространить определение ее и на α. $F'\alpha$ определяем через $F\restriction W(\alpha)$.

Φ имеет

$W(\xi)$ $\quad \alpha\in W(\xi)$ $\quad D(F)=M$.

ξ фиксировано $\quad$ аргументами Φ будут отображения $W(\alpha)$ в M.

S - множество отображений отрезков $W(\alpha)$ в M.

$\mathcal{D}(\Phi) = S$. $W\Phi \subset M$.

$F'\alpha = \Phi'(F \upharpoonright W(\alpha))$ ← Определим теперь

Это требование имеет смысл. Строится F т.о. чтобы последнее равенство соблюдалось всегда.

Следует, вообще говоря, доказать, что это функциональное ур-ие имеет решение.

Итак,

Теорема об индуктивном определении.

Пусть ξ порядковое число M - множ.

S - отобр отрезков $W(\xi)$ в M. Φ - ф-ия с областью S и областью значений с M.

Тогда существует одна и только одна ф-ия F с областью $W(\xi)$, такая, что

$$F'\alpha = \Phi'(F \upharpoonright W(\alpha)) \qquad (*)$$

Доказательство.

Частичным решением $(*)$ назовем такую ф-ию, к-рая определена на любом отрезке $W(\xi)$ (хотя бы пустом) и удовлетворяет всем прочим условиям теоремы.

Частичные решения попарно согласованы.

$$\alpha \in W(\beta) \cap W(\gamma) \rightarrow f'\alpha = g'\alpha.$$

ф-ия f ф-ия g положим $\beta \leq \gamma$.

Тогда $W(\beta) \cap W(\gamma) = W(\beta)$.