

INIS-AR--130

Comisión Nacional de Energía Atómica  
Universidad Nacional de Cuyo



AR9600013



Instituto  
Balseiro

29 - 39

R

TESIS  
CARRERA DE DOCTORADO EN INGENIERÍA NUCLEAR

**IDENTIFICACIÓN DE CUENCAS DINÁMICAS  
EN FLUJOS CON EBULLICIÓN**

**Luis E. Juanicó**



**Luis E. Juanicó  
DOCTORANDO**



**Dr. Darío F. Delmastro  
CODIRECTOR**



**Dr. Alejandro Clausse  
CODIRECTOR**

Noviembre de 1997

## Resumen

En esta tesis se presenta un estudio teórico y experimental sobre el comportamiento dinámico de un canal en ebullición, particularmente enfocado a la identificación de las distintas fases dinámicas que pueden presentarse en situaciones inestables.

En el estudio teórico se desarrollaron modelos para analizar las características esencialmente no lineales que presentan las distintas fases dinámicas. Utilizando un modelo algebraico en demoras se llevó a cabo un tratamiento analítico de las inestabilidades de ondas de densidad, pudiéndose estudiar la estabilidad del sistema tanto ante perturbaciones infinitesimales (*i.e.* análisis lineal), como de amplitud finita.

Se desarrolló un modelo nodal que permite representar no linealidades especiales, como las inversiones de caudal. Con el mismo se estudió la dinámica del sistema bajo oscilaciones de grandes amplitudes fuera del dominio de las bifurcaciones de Hopf. Se identificaron nuevas fases dinámicas en las cuales es posible encontrar al sistema, y se pronosticaron efectos de histéresis asociados con estas transiciones de fases.

Finalmente, se realizó un estudio experimental en un circuito de agua a presión atmosférica bajo condiciones de circulación forzada diseñado para reproducir las condiciones analizadas teóricamente. Se identificaron distintas cuencas dinámicas tratadas en el desarrollo teórico, estudiándose sus características no lineales. En especial se pudo realizar una taxonomía de las bifurcaciones de Hopf supercríticas y subcríticas, como además nuevos comportamientos dinámicos que aparecen en oscilaciones de grandes amplitudes.

## **Abstract**

A theoretical and experimental study of the dynamic behavior of a boiling channel is presented. In particular, the existence of different basins of attraction during instabilities was established.

A fully analytical treatment of boiling channel dynamics were performed using a algebraic delay model. Subcritical and supercritical Hopf bifurcations could be identified and analized using perturbation methods. The derivation of a fully analytical criterion for Hopf bifurcation transcription was applied to determine the amplitude of the limit cycles and the maximum allowed perturbations necessary to break the system stability.

A lumped parameters model which allows the representation of flow reversal is presented. The dynamic of very large amplitude oscillations, out of the Hopf bifurcation domain, was studied. The analysis revealed the existence of new dynamical basins of attraction, where the system may evolve to and return from with hysteresis.

Finally, an experimental study was conducted, in a water loop at atmospheric pressure, designed to reproduce the operating conditions analyzed in the theory. Different dynamic phase previously predicted in the theory were found and their nonlinear characteristics were studied. In particular, subcritical and supercritical Hopf bifurcations and very large amplitude oscillations with flow reversal were identified.

## **Agradecimientos**

Quiero primero agradecer a Dios y a la Virgen.

Quiero también agradecer a mi esposa Adriana, por su amor y comprensión, a mis hijos, y toda mi familia, a quienes dedico este trabajo.

Quiero agradecer al Dr. Darío F. Delmastro por todas las ideas y el empuje que me brindó, tanto intelectual como espiritualmente.

Quiero agradecer al Dr. Alejandro Clause por todas las ideas y la confianza que me dispensó.

Quiero agradecer a la División Termohidráulica del Centro Atómico Bariloche por todo el apoyo y ayuda recibidos. Quiero especialmente agradecer a su jefe, el Dr. José Converte, por su generosidad en brindarme todas las posibilidades a su alcance, y a su técnico Daniel Mateos por sus delicados trabajos de torneado y soldadura, condiciones todas estas sin las cuales no hubiese sido posible llevar a cabo este trabajo.

Quiero agradecer a la gente del taller de vidrios y de tornería por su amplia colaboración.

Quiero agradecer a la Comisión Nacional de Energía Atómica, al Instituto Balseiro y a la Universidad Nacional de Cuyo.

Quiero agradecer a la Cooperativa de Electricidad Bariloche quien apoyó parcialmente este trabajo a través de los de incentivos a la investigación, proyectos N° 9/96 y N° 10/97 *Dinámica de flujos en ebullición*.

Quiero agradecer a todo el personal del Centro Atómico Bariloche, sin cuyo trabajo el mío hubiera sido imposible.

No me olvido de Don Helmut Mangold, a quién dedico póstumamente este trabajo.

# Índice

Resumen.....	2
Abstract.....	3
Agradecimiento.....	4
Índice.....	5
Nomenclatura.....	8
<b>1 Introducción</b> .....	<b>10</b>
1.1 Inestabilidades termohidráulicas.....	11
1.2 Modelos de flujos de dos fases.....	12
1.3 Dinámica no lineal.....	12
1.4 Bifurcación de Hopf.....	13
<b>2 Estudio teórico: Modelo algebraico en demoras</b> .....	<b>17</b>
2.1 Modelo algebraico en demoras.....	17
2.1.1 Análisis de puntos fijos.....	20
2.1.2 Análisis de estabilidad lineal.....	21
2.1.3 Resultados.....	24
2.2 Análisis de la influencia de las fricciones concentradas en la entrada sobre la estabilidad del flujo.....	25
2.2.1 Caso de salto de presión externo constante.....	25
2.2.2 Caso de salto de presión externo variable.....	29
2.3 Estudio analítico de la dinámica lineal y no lineal.....	32

2.3.1	Dinámica lineal.....	32
2.3.2	Dinámica no lineal.....	34
2.4	Estudio numérico de las bifurcaciones de Hopf.....	50
2.5	Modelado del término gravitatorio.....	56
2.5.1	Análisis de estabilidad lineal.....	57
2.5.2	Influencia del término gravitatorio sobre las ondas de densidad.....	59
2.5.3	Modelo algebraico en demoras con $\lambda$ calculado por trapecios.....	64
2.6	Modelado del término de fricción distribuida.....	67
2.6.1	Análisis de puntos fijos.....	68
2.6.2	Análisis de estabilidad lineal.....	71
2.6.3	Análisis numérico.....	72
2.7	Conclusiones.....	73
<b>3</b>	<b>Modelado de oscilaciones de grandes amplitudes</b>	<b>75</b>
3.1	Zona adiabática.....	78
3.2	Zona calefaccionada en una fase.....	79
3.3	Zona de dos fases.....	79
3.4	Ecuaciones de impulso y condiciones de cierre.....	80
3.5	Estudio de bifurcaciones subcríticas.....	81
3.6	Estudio de bifurcaciones supercríticas.....	85
3.7	Conclusiones.....	88
<b>4</b>	<b>Estudio experimental</b>	<b>89</b>
4.1	Objetivos.....	89
4.2	Aparato experimental.....	90
4.3	Instrumentación y sistema de adquisición.....	92
4.4	Método experimental.....	93
4.5	Resultados experimentales.....	94
4.5.1	Verificación de las hipótesis del modelo algebraico en demoras.....	94
4.5.2	Estudio de cuencas dinámicas en flujos dominados por fricciones.....	100
4.5.2.1	Histéresis con inversión de caudal.....	104

4.5.3 Estudio de cuencas dinámicas en flujos gravitatorios.....	109
<b>5 Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>113</b>
<b>A Relación armónica entre el caudal ingresante y la frontera de ebullición.....</b>	<b>115</b>
<b>B Primera serie experimental.....</b>	<b>117</b>
<b>C Segunda serie experimental.....</b>	<b>126</b>
<b>D Tercera serie experimental.....</b>	<b>135</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>145</b>

## Nomenclatura

$A$	Área de pasaje de sección transversal, $m^2$
$c_{pf}$	Calor específico
$g$	Aceleración de la gravedad
$h$	Entalpía específica
$k$	Coefficiente de pérdidas concentradas, factor de fricción
$L$	Longitud
$M$	Masa
$N_s$	Número de nodos de la zona subenfriada
$p$	Presión
$Q$	Potencia
$q$	Potencia volumétrica
$t$	Tiempo
$T$	Temperatura
$u$	Velocidad
$v$	Volúmen específico
$z$	Variable espacial

### Letras griegas

$\Delta$	diferencia
$\lambda$	frontera de ebullición
$\nu$	tiempo de residencia en una fase
$\rho$	densidad
$\Omega$	parámetro de flujo de calor
$\tau$	demora temporal

### Subíndices

$a$	aceleración
$ch$	canal
$e$	salida del canal, salida
$f$	líquido
$fg$	cambio de fase
$fr$	fricción

$g$	vapor
$i$	entrada al canal, entrada
$ref$	referencia
$0$	estado estacionario

### Supraíndices

$\wedge$	adimensional
$-$	transformada de Laplace

### Números adimensionales

$Eu$	Número de Euler
$Fr$	Número de Froude
$k$	factor de fricción, definido en la ecuación (18)
$Ng$	Número gravitatorio, definido en la ecuación (92)
$N_{pch}$	Número de cambio de fase
$N_{sub}$	Número de subenfriamiento
$\Lambda$	Número de fricción

## Capítulo 1

### Introducción

Los flujos bifásicos en ebullición tienen importantes aplicaciones en distintas ramas de la ingeniería. Pueden encontrarse entre otros, en reactores de agua en ebullición, generadores de vapor, equipos criogénicos y procesos químicos. Sin embargo, el diseño termohidráulico de éstos demanda un análisis más profundo que los sistemas sin cambio de fase, debido a la existencia de distintos tipos de inestabilidades. Por este motivo, el conocimiento de su comportamiento dinámico permite optimizar los diseños o establecer los límites de operación y seguridad. Las inestabilidades en los parámetros termohidráulicos pueden acarrear serios problemas operacionales [1], entre los que pueden mencionarse la aparición de flujo crítico de calor [2], inducción de vibraciones mecánicas de los componentes [3], y problemas de controlabilidad.

Durante los últimos 30 años el tema de inestabilidades de flujos bifásicos ha sido objeto de considerable interés [4]. Estas oscilaciones pueden presentarse bajo condiciones de operación debido a demoras en las realimentaciones que vuelven inestables los sistemas en ebullición [5].

Recientemente varias organizaciones internacionales han propuesto la circulación natural como el modo de operación -normal y en accidentes- de reactores tipo BWR de última generación. Ejemplos de estos reactores incluyen el simplified boiling water reactor (SBWR) diseñado por General Electric Company [6] y el TOSBWR-900 reactor en Japón [7]. La propuesta de usar convección natural en estos reactores ha fortalecido el interés de los investigadores en el tema de inestabilidades en flujos bifásicos, ya que las pruebas de diseño han demostrado que los BWR pueden presentar inestabilidades en el flujo y la potencia durante convección natural con potencias moderadas y caudales bajos. Varios eventos han sido recientemente reportados de este tipo de inestabilidades [5,8].

Los métodos utilizados para predecir las inestabilidades pueden clasificarse en dos categorías: lineales y no lineales. La herramienta clásica utilizada ha sido el análisis lineal en el dominio frecuencial, orientada a la determinación de los límites de estabilidad para perturbaciones infinitesimales. Esta herramienta no permite en cambio predecir la respuesta del sistema ni las características de los comportamientos oscilatorios. Se han desarrollado así modelos de gran exactitud y alcance para el análisis de sistemas de flujos bifásicos bastante complejos, como los reactores nucleares refrigerados en ebullición (BWR) [9-12].

Para estudiar el comportamiento del sistema ante perturbaciones finitas es necesario considerar efectos esencialmente no lineales relacionados con las

realimentaciones en las caídas de presión en el sistema. En un entorno del umbral de estabilidad lineal, la dinámica del sistema puede caracterizarse por una bifurcación normal de Hopf [13]. Fuera del mismo, donde la amplitud de las oscilaciones crece por encima de un determinado valor, se torna necesario considerar nuevas no linealidades.

El estudio del comportamiento no lineal de estas oscilaciones, conocidas en la literatura como “ondas de densidad” ha despertado considerable interés recientemente. Se han utilizado técnicas especiales de bifurcaciones de Hopf para estudiar analítica y numéricamente su amplitud, frecuencia y carácter (subcrítico o supercrítico) [13].

Varios modelos numéricos han sido desarrollados para estudiar el comportamiento del sistema en el entorno de las bifurcaciones de Hopf [4,14], habiéndose encontrado atractores caóticos en flujos con convección forzada [15] y en flujos con convección natural [12].

Por otra parte, algunos códigos no lineales de simulación temporal, tales como RETRAN [16] y TRAC [17], han demostrado una capacidad razonable para reproducir los resultados de los test de estabilidad en sistemas bifásicos. Desafortunadamente, dada su complejidad es relativamente difícil y costosa su implementación.

En este trabajo se realizó un estudio teórico y experimental tendiente a la identificación y caracterización de las distintas cuencas dinámicas que pueden encontrarse en un canal en ebullición bajo convección forzada. Para ello se desarrollaron modelos de simulación capaces de representar las distintas fases dinámicas, con los cuales se llevó a cabo un estudio de las características de las mismas. Se realizaron también experimentos en un circuito con agua a presión atmosférica, lográndose identificar tanto cuencas de atracción como procesos de transición entre las mismas.

## 1.1 Inestabilidades termohidráulicas

Las inestabilidades se pueden clasificar en estáticas o dinámicas. Las primeras pueden ser explicadas analizando el estado estacionario del flujo, mientras que las segundas necesitan del uso de las ecuaciones de conservación dinámicas conjuntamente con el análisis de las realimentaciones para poder ser explicadas.

De las inestabilidades estáticas las más conocidas son las excursiones de caudal. Éstas fueron estudiadas por Ledinegg [18] y tienen su origen en la interacción entre la curva característica de la bomba y la del canal en ebullición [19]. Se caracterizan por un cambio brusco del caudal refrigerante como consecuencia del cual se produce una variación del título de salida del mismo (excursiones), lo cual puede comprometer la integridad del sistema (flujo crítico).

De las inestabilidades dinámicas se destaca el fenómeno conocido como ondas de densidad, el cual ha recibido gran atención en los últimos años [20-23]. En esta situación el estado estacionario del flujo no puede ser mantenido, y el sistema evoluciona hacia un estado de oscilación autosostenido de baja frecuencia. El origen de este fenómeno se debe a cambios espaciales y temporales de la densidad (de allí su nombre), y de las realimentaciones entre el caudal, la fracción de vacío y las pérdidas de carga [24]. Las amplitudes de estas oscilaciones pueden ser considerables, llegando incluso a causar inversiones del caudal refrigerante (flujo reverso) o que el punto donde comienza la ebullición, conocido como frontera de ebullición, abandone el canal calefaccionado.

## 1.2 Modelos de flujos de dos fases

El análisis del fenómeno de ondas de densidad se basa en los principios de conservación de la masa, de la energía y del impulso, y el segundo principio de la termodinámica. Es necesario también describir las propiedades del fluido agregando relaciones apropiadas, comunmente llamadas *relaciones constitutivas*. El modelo es consistente cuando éstas permiten cerrar el sistema de ecuaciones.

Existen dos formas básicas de abordar el problema: los modelos de mezcla y los de dos fluidos. En los primeros se promedian las interfases y se considera a la mezcla como un fluido con propiedades medias, las cuales son solución del problema. En su versión más simplificada, el *modelo homogéneo*, el fluido es una mezcla homogénea de vapor y líquido desplazándose a la misma velocidad. Su principal ventaja es su simplicidad, pero resulta inadecuado para representar algunas situaciones tales como los flujos en contracorriente.

En los segundos se considera cada fase por separado. Esta representación es más general pero requiere más detalles en cuanto a las ecuaciones constitutivas; viéndose perjudicada por el limitado conocimiento existente de las mismas. Se expresa en términos de seis ecuaciones de conservación y tres leyes de transferencia entre fases. Puede tener en cuenta interacciones dinámicas entre fases y tratar estados de no equilibrio mecánico y térmico.

## 1.3 Dinámica no lineal

El estudio de los flujos en ebullición nos presentan ejemplos muy interesantes de fenómenos inherentemente no lineales. Consideremos por ejemplo los puntos de equilibrio (puntos fijos) de un canal en ebullición uniformemente calefaccionado sujeto a un salto de presión externo constante. Estos suelen poseer nodos inestables o puntos de retorno (*saddle-node bifurcation point*) [25]. Es por este motivo que los diagramas de bifurcación de las variables en función de un parámetro presentan forma de S o efectos de histéresis, como se puede observar en la Fig. 1.1, correspondiendo la rama intermedia inestable a la inestabilidad de Ledinegg.

En muchos casos el punto fijo de la rama inferior (ver Fig. 1.1) pierde su estabilidad a través de una bifurcación de Hopf supercrítica [25] conduciendo a las conocidas ondas de densidad, proyectando un ciclo límite en el espacio de las fases. De este modo este punto fijo se convierte en un foco inestable que da origen a un atractor periódico en este sistema disipativo dinámico.

Es posible también que el punto fijo anterior pierda su estabilidad a través de una bifurcación subcrítica, teniendo entonces las oscilaciones características divergentes y siendo de esperar que otras no linealidades entren posteriormente en juego.

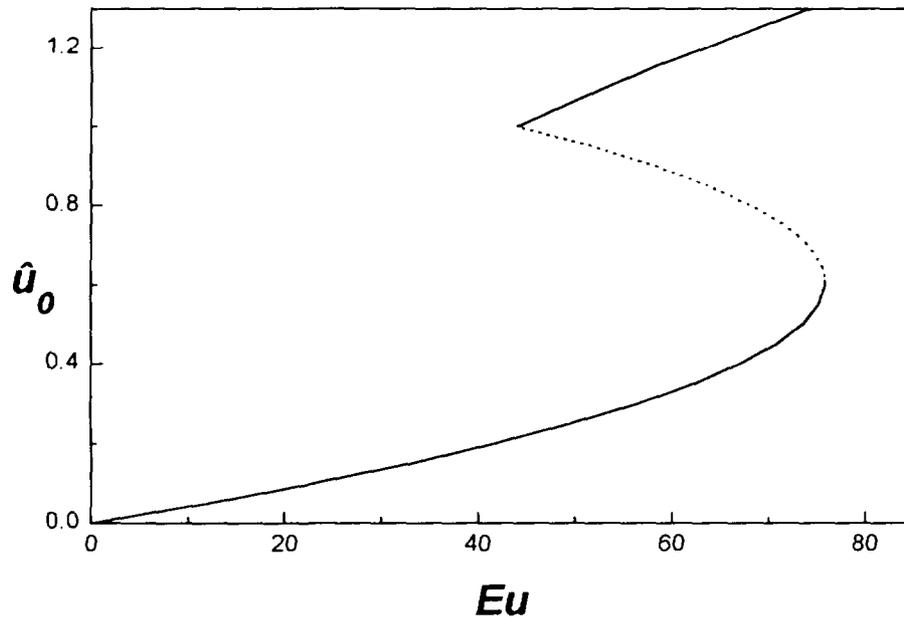


Figura 1.1: Diagrama de bifurcación de un canal en ebullición

#### 1.4. Bifurcación de Hopf

Diferentes tipos de bifurcaciones conocidas (saddlenode, transcritical, pitchfork, etc.) involucran el movimiento sobre una variedad central unidimensional en la cual pueden aparecer (o desaparecer) algunos puntos estacionarios al variar los parámetros. La bifurcación de Hopf resulta más difícil de analizar ya que involucra un punto estacionario no hiperbólico con autovalores imaginarios, y por lo tanto, a una variedad central bidimensional, siendo las soluciones periódicas en lugar de estacionarias[26].

Ilustremos con un ejemplo simple las características principales de la bifurcación de Hopf, conocida también como bifurcación oscilatoria. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - (x^2 + y^2)x$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu y - (x^2 + y^2)y$$

Una pequeña linealización alrededor del origen  $(x,y) = (0,0)$  muestra que éste es un foco estable si  $\mu < 0$  o inestable si  $\mu > 0$ , siendo los autovalores de la matriz Jacobiana  $\mu \pm i\omega$ . De aquí el origen es un punto no hiperbólico, con autovalores linealizados  $\pm i\omega$ , cuando  $\mu = 0$ . Para estudiar la existencia de bifurcaciones en este último caso ( $\mu = 0$ ) es conveniente realizar el cambio a coordenadas polares, con lo cual el sistema se reduce a

$$\dot{r} = \mu r - r^3$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

De la ecuación anterior es evidente que para  $\omega \neq 0$  el único punto estacionario se encuentra en el origen,  $r = 0$ , por lo que no es posible que existan otras soluciones estacionarias que se bifurquen de ésta. Sin embargo,  $\dot{r} = 0$  si  $r = 0$  o si  $\mu = r^2$  por lo que si  $\mu > 0$  existe una órbita periódica con radio  $r = \sqrt{\mu}$ . En las Figs. 1.2 se muestran los gráficos de  $\dot{r}$  en función de  $r$ , pudiéndose observar que la órbita periódica es estable mientras que la solución estacionaria ( $r = 0$ ) es estable para  $\mu < 0$  e inestable para  $\mu > 0$ . En la Fig. 1.3 se ilustra este resultado: una órbita periódica estable con radio  $\sqrt{\mu}$  bifurcándose desde  $\mu = 0$  hacia  $\mu > 0$ . Este comportamiento es conocido con el nombre de bifurcación de Hopf supercrítica, dado que las orbitas periódicas son estables.

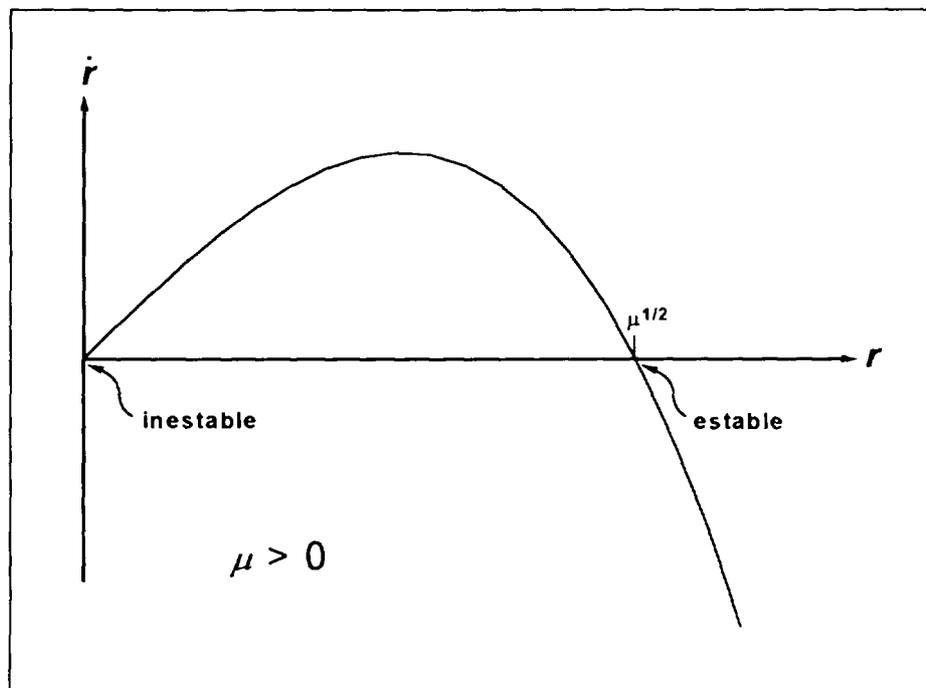


Fig. 1.2a: Gráfico de  $\dot{r}$  vs.  $r$  para  $\mu > 0$

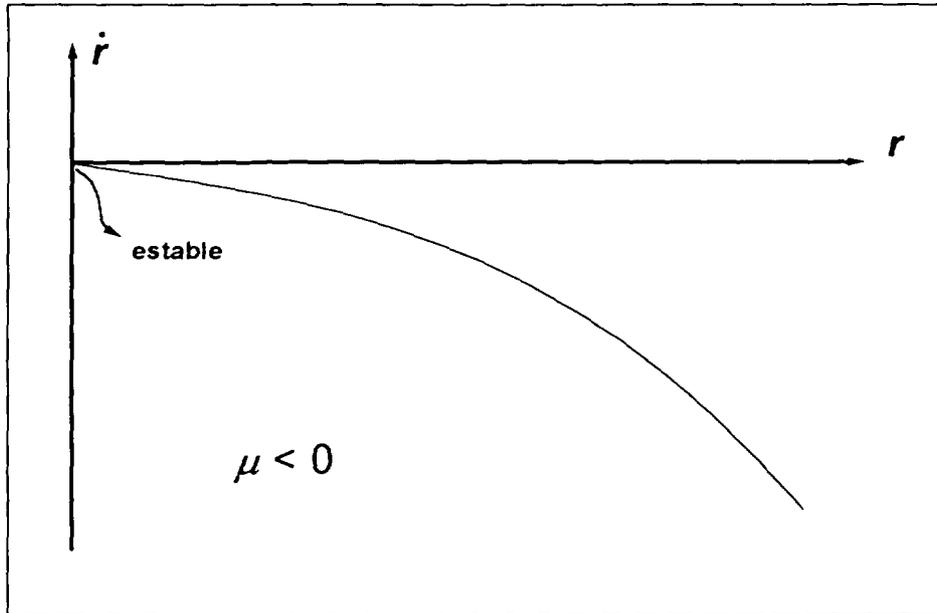


Fig. 1.2b: Gráfico de  $\dot{r}$  vs.  $r$  para  $\mu < 0$

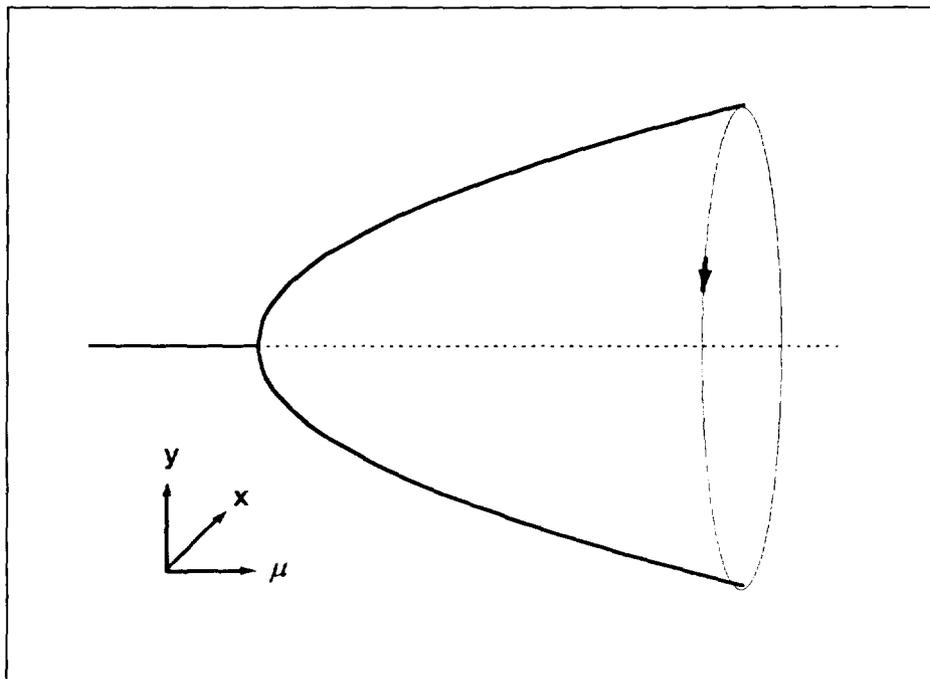


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación

Además de las bifurcaciones de Hopf supercríticas, como la estudiada en el ejemplo anterior, es posible encontrar otras conocidas como bifurcaciones subcríticas. En éstas existen soluciones periódicas inestables en la región donde la solución estacionaria es estable, mientras que en la región donde esta última es inestable no se encuentran soluciones periódicas en un entorno cercano al foco. La Fig. 1.4 esquematiza ambos tipos de bifurcaciones de Hopf posibles.

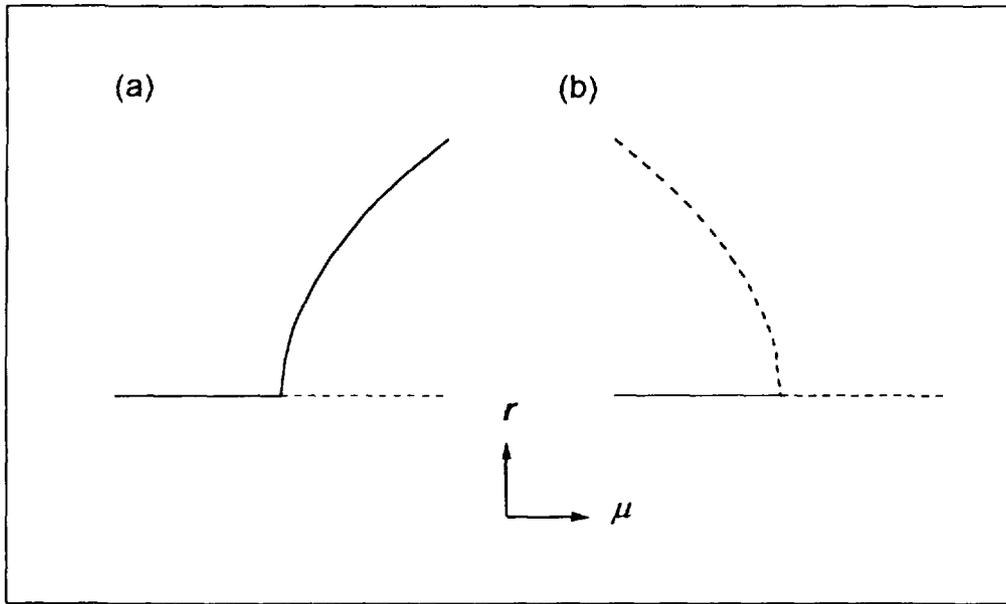


Figura 1.4: Bifurcación de Hopf: (a) supercrítica y (b) subcrítica

## Capítulo 2

### Estudio teórico : Modelo algebraico en demoras

#### 2.1 Modelo algebraico en demoras

Consideremos un canal con ebullición como el mostrado en la Fig. 2.1. El líquido entra subenfriado a una temperatura constante y es calentado uniformemente mientras recorre el canal. En una cierta posición el fluido alcanza la temperatura de saturación y comienza a hervir, dejando finalmente el canal como una mezcla bifásica de líquido y vapor.

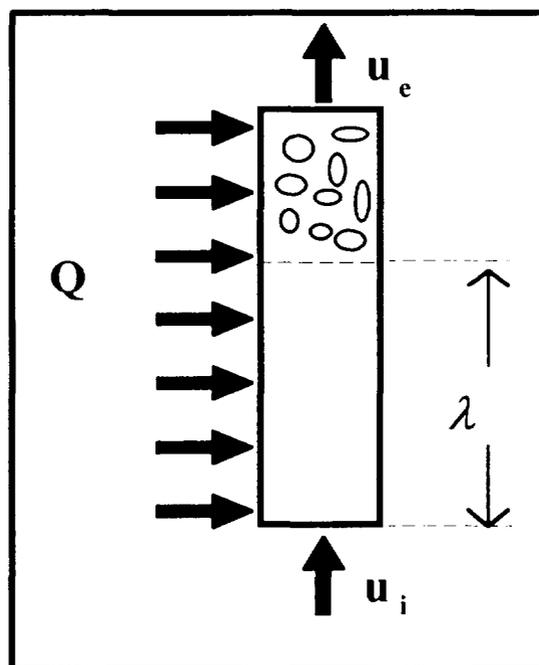


Figura 2.1: Canal en ebullición.

Por simplicidad, supongamos las siguientes hipótesis respecto del flujo [27]:

- flujo homogéneo (deslizamiento nulo entre las fases) en equilibrio termodinámico,
- las variaciones de presión son pequeñas frente a la presión total del sistema,
- ambas fases se consideran incompresibles,
- flujo de calor uniforme y constante en el tiempo,
- área de pasaje uniforme,
- la disipación viscosa, las energías cinética y potencial y el trabajo de flujo, son despreciables frente a los demás términos de energía.
- las fricciones están concentradas en ambos extremos del canal.

Bajo estas suposiciones las ecuaciones de conservación de masa y energía para un flujo unidimensional bifásico se pueden escribir como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

y

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho h u)}{\partial z} = q \quad (1b)$$

La entalpía y la densidad se relacionan a través de las ecuaciones de estado:

$$\rho = \rho_f \quad \text{si } h \leq h_f \quad (2a)$$

$$\rho = \left[ v_f + \frac{(h - h_f)}{h_{fg}} v_{fg} \right]^{-1} \quad \text{si } h > h_f \quad (2b)$$

Combinando las Ecs.(1b) y (2b) para la región en ebullición obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = q \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \equiv \Omega \quad (3a)$$

Análogamente para la región de una fase líquida:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3b)$$

Integrando las Ecs.(3) a lo largo del canal se obtiene:

$$u_e = u_i + \Omega (L - \lambda) \quad (4)$$

La frontera de ebullición en un instante  $t$  dado,  $\lambda(t)$ , señala la posición de la partícula que alcanza la temperatura de saturación en ese momento. Puede calcularse a partir de la evolución temporal de la velocidad de entrada al canal como:

$$\lambda(t) = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt' \quad (5)$$

donde  $\nu$  es el tiempo que necesita una partícula desde su ingreso al canal para alcanzar la temperatura de saturación (tiempo de residencia en una fase), es decir que:

$$\nu = \frac{\Delta h_{sub} \rho_f}{q} \quad (6)$$

Para oscilaciones de baja frecuencias (donde el período de las mismas sea mayor que  $\nu$ ), vale entonces:

$$\lambda(t) = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt' = \nu u_i(t-t_1) \quad (7)$$

donde  $t_1$  es un cierto tiempo de demora tal que  $0 < t_1 < \nu$ .

Estudiemos primero casos donde el término gravitatorio pueda despreciarse en la ecuación de momento (tal como sucede en canales horizontales o verticales con alto número de Froude). Considerando un balance cuasiestático de fuerzas en la ecuación de conservación de momento [28], el salto de presión impuesto externamente al canal es balanceado por las fuerzas de arrastre, es decir:

$$(k_i - 1) \rho_f u_i^2 + (k_e + 1) \rho_e u_e^2 = \Delta p \quad (8)$$

Siguiendo con la aproximación cuasiestática asumiremos que el flujo de salida sigue la historia del de entrada al canal con una cierta demora [29]:

$$\rho_e(t) u_e(t) = \rho_f u_i(t-t_2) \quad (9)$$

donde  $t_2$  es una demora que, al igual que  $t_1$ , supondremos constante en nuestro modelo [30].

Combinando las ecuaciones (4),(7),(8) y (9), el problema se reduce a una única ecuación algebraica en demoras que representa la dinámica simplificada del sistema:

$$(k_i - 1) \rho_f u_i^2(t) + (k_e + 1) \rho_f u_i(t-t_2) [u_i(t) - \Omega \nu u_i(t-t_1) + \Omega L] = \Delta p \quad (10)$$

Es conveniente adimensionalizar esta ecuación tomando los valores de referencia:

$$\begin{aligned} L_{ref} &= L_{ch}, \\ u_{ref} &= L_{ref} / \nu, \\ \rho_{ref} &= \rho_f, \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación (10) puede reescribirse en forma adimensional ( $\hat{\cdot}$ ) como:

$$(k_i - 1)\hat{u}^2(t) + (k_e + 1)\hat{u}(t - t_2)[\hat{u}_i(t) - N_{sub} \hat{u}_i(t - t_1) + N_{sub}] = Eu \quad (11)$$

donde los números adimensionales de subenfriamiento y de Euler son respectivamente:

$$N_{sub} = \Omega \nu = \frac{\Delta h_{sub} \nu_{fg}}{h_{fg} \nu_f}, \quad \text{y} \quad Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_r^2}.$$

Consideremos el caso particular  $t_j = t_2/2 = \tau$  en nuestra ecuación en demoras. Esta nueva (tercera) hipótesis propia del modelo será razonable cuando el tiempo de residencia en dos fases (tiempo que necesita una partícula para atravesar la región en ebullición) sea pequeño frente a  $\nu$ . Bajo esta suposición la ecuación en demoras (11) puede reescribirse entonces como:

$$(k_i - 1)\hat{u}_n^2 + (k_e + 1)\hat{u}_{n-2} (\hat{u}_n - N_{sub} \hat{u}_{n-1} + N_{sub}) = Eu \quad (12)$$

donde  $\hat{u}_n = \hat{u}_i(t)$ ,  $\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_i(t - \tau)$ ,  $\hat{u}_{n-2} = \hat{u}_i(t - 2\tau)$

### 2.1.1. Análisis de puntos fijos

El mapeo bidimensional dado por la ecuación (12) presenta dos puntos fijos a saber:

$$\hat{u}_0 = \frac{N_{sub}}{N_{pch}} = \frac{-(k_e + 1) N_{sub} \pm \sqrt{(k_e + 1)^2 + 4 Eu (k_i - 1 + (k_e + 1)(1 - N_{sub}))}}{2 (k_i - 1 + (k_e - 1)(1 - N_{sub}))} \quad (13)$$

donde  $N_{pch} = \frac{\nu_{fg} q L}{h_{fg} \hat{u}_0}$ , es conocido en la literatura de flujos bifásicos como "número de cambio de fase".

La naturaleza de los puntos fijos puede discutirse en función del número de subenfriamiento. Si

$$N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} \quad (14)$$

ambos puntos fijos son reales, uno de ellos positivo y el otro negativo.

Si

$$\frac{k_i + k_e}{k_e + 1} < N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (15)$$

hay dos soluciones reales positivas.

Si

$$N_{sub} > \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (16)$$

no hay soluciones reales.

### 2.1.2 Análisis de estabilidad lineal

Linealizando la ecuación (12) alrededor de un punto fijo  $\hat{u}_0$ , obtenemos la ecuación característica:

$$\left( \frac{2k_i + k_e - 1}{k_e + 1} \right) \xi^2 - N_{sub} \xi + (1 + N_{pch} - N_{sub}) = 0 \quad (17)$$

Si ambos autovalores caen dentro del círculo unitario en el plano complejo el sistema es estable. Si en cambio uno de ellos es real y mayor que la unidad, el punto fijo en cuestión es un punto ensilladura, para el cual la solución es repelida en la dirección de uno de los autovectores y atraída en la del otro. Si los autovalores son complejos conjugados, pueden cruzar el círculo unitario con un dado ángulo  $\vartheta$  (diferente de 0 o  $\pi$ ), estando entonces en presencia de una inestabilidad de Niemark o bifurcación de Hopf [31].

Definiendo el parámetro:

$$k = \frac{k_i - 1}{k_e + 1}, \quad (18)$$

el cual permite comparar la importancia relativa de las fricciones en la entrada contra las fricciones en la salida del canal, podemos expresar las soluciones de la ecuación (17) en función de  $k$ ,  $N_{sub}$  y  $N_{pch}$  como:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2(2k+1)} \left[ N_{sub} \pm \sqrt{N_{sub}^2 - 4(2k+1)(1 + N_{pch} - N_{sub})} \right] \quad (19)$$

Los autovalores serán complejos cuando:

$$N_{pch} > \frac{N_{sub}^2}{4(2k+1)} + N_{sub} - 1 \tag{20}$$

en cuyo caso estaremos en presencia de una inestabilidad de Niemark si el módulo de los autovalores excede la unidad, es decir si:

$$N_{pch} > N_{sub} + 2k \tag{21}$$

Por otra parte, existirá un punto ensilladura cuando ambos autovalores sean reales y el módulo del mayor exceda la unidad, es decir si:

$$N_{pch} < 2(N_{sub} - k - 1) \tag{22}$$

Los criterios de estabilidad dados por las ecuaciones (20), (21) y (22) se ilustran en el plano biparamétrico  $(N_{sub}, N_{sub} - N_{pch})$  en la Fig. 2.2. Podemos notar en él, regiones estables con autovalores reales (a) o complejos (b), con inestabilidad de Niemark (c) o excursiva del tipo ensilladura (d).

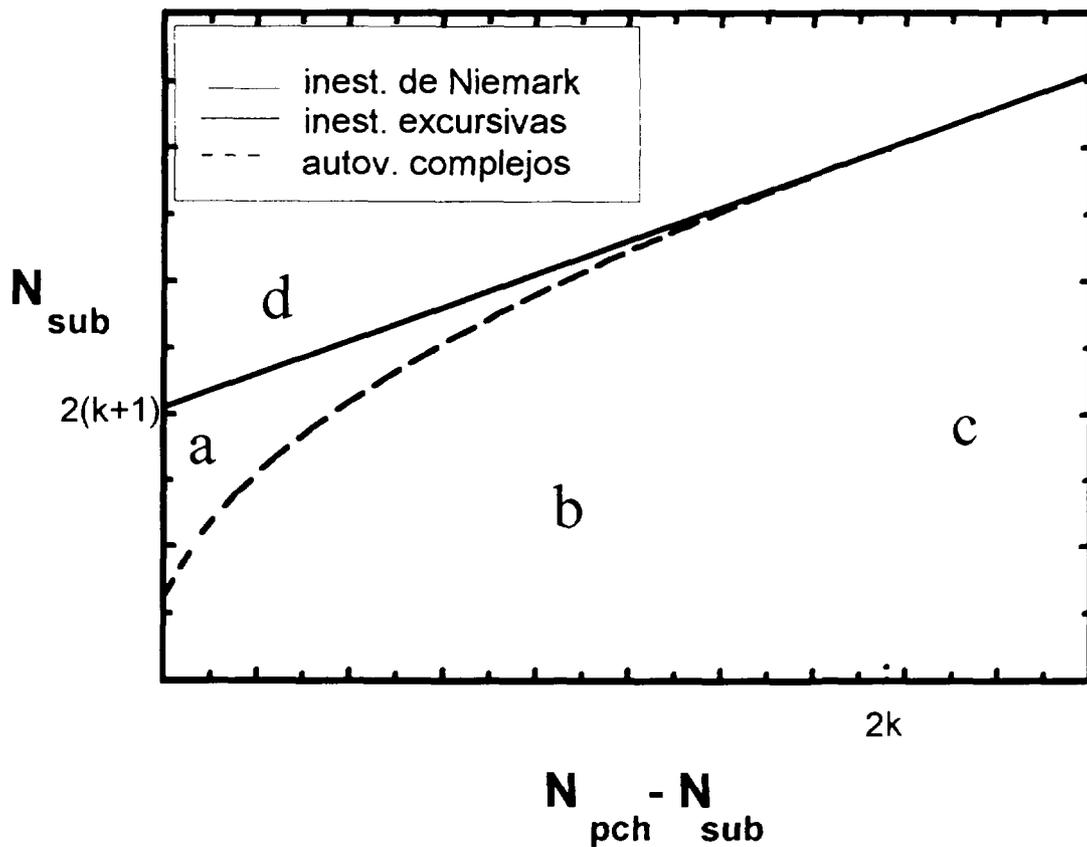


Figura 2.2: Mapa de estabilidad lineal.

### 2.1.2.1 Inestabilidad de Ledinegg

Estudiaremos ahora la estabilidad de la solución negativa del problema de puntos fijos,  $\hat{u}_0^-$ . Reemplazando la ecuación (15) en la (13) se demuestra que existen soluciones válidas de  $\hat{u}_0^-$ , en el rango:

$$0 < N_{pch} < 2(N_{sub} - k - 1) \quad (23)$$

Nótese que el límite superior de esta ecuación es el mismo que la condición de punto ensilladura, dada por la ecuación (22). De aquí podemos deducir que la solución  $\hat{u}_0^-$  es siempre inestable y de características excursivas, usualmente reconocida en la literatura como inestabilidad de Ledinegg [32].

### 2.1.2.2 Inestabilidad de ondas de densidad

Analicemos la estabilidad de la solución de signo positivo del problema anterior,  $\hat{u}_0^+$  cuando ésta existe. Estamos entonces en el caso:

$$N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (24)$$

Por lo tanto, junto con las ecuaciones (13) y (18) podemos expresar la condición de existencia de soluciones positivas como:

$$N_{pch} > 2(N_{sub} - k - 1) \quad (25)$$

Comparando ésta con la ecuación (22) surge evidente que  $\hat{u}_0^+$  no puede ser nunca un punto ensilladura. El rango de valores de  $\hat{u}_0^+$  para los cuales el sistema es estable está limitado por la inecuación

$$N_{sub} - N_{pch} \leq 2k \quad (26)$$

como se observa en la Fig. 2.2. El sistema va hacia una bifurcación de Niemark cuando  $N_{pch} - N_{sub}$  excede  $2k$ . Esta inestabilidad presenta un comportamiento oscilatorio evidenciado por la aparición de "ondas de densidad".

Las ecuaciones (20) y (21) indican que la estabilidad del sistema depende de las fricciones concentradas a la entrada y la salida del canal, únicamente a través del factor  $k$ . Por ello podemos determinar la estabilidad del canal bajo las condiciones de contorno impuestas, según sus coordenadas en el espacio tripamétrico  $(N_{sub}, \hat{u}_0, k)$  como se ilustra en la Fig. 2.3.

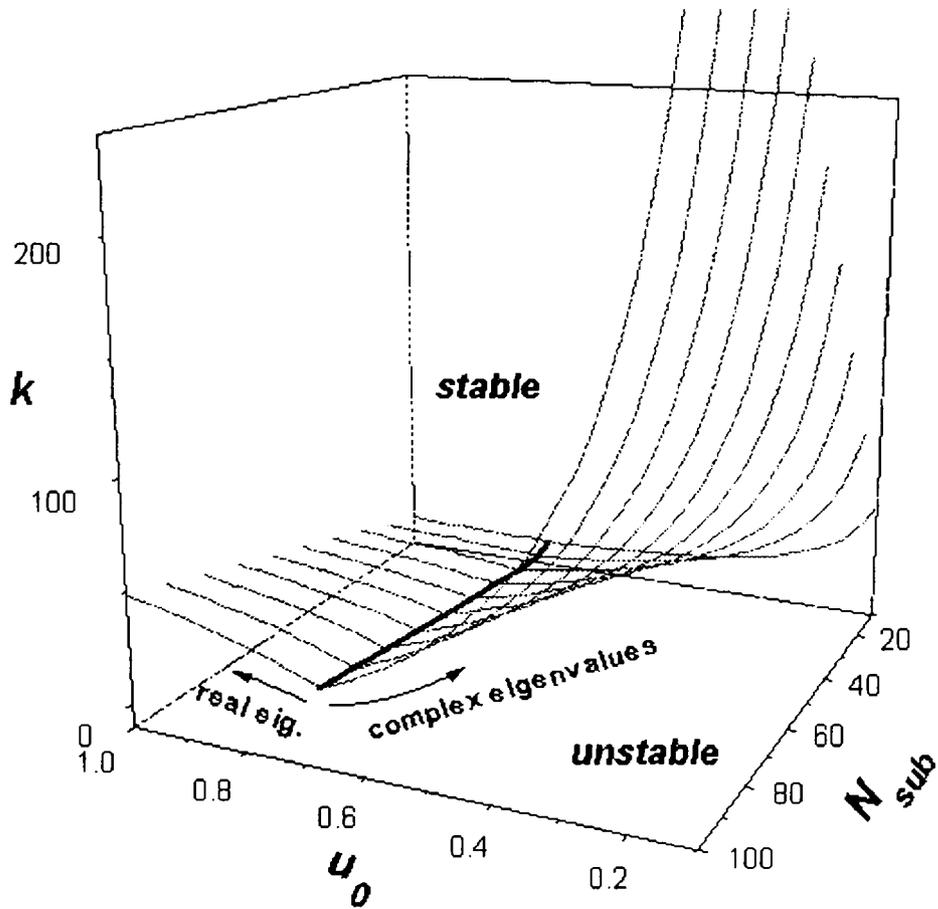


Figura 2.3: Mapa de estabilidad lineal en el espacio triparamétrico  $(N_{sub}, \hat{u}_0, k)$ .

### 2.1.3 Resultados

Los criterios de estabilidad del modelo algebraico en demoras, dados por las ecuaciones (21) y (22), son ilustrados en la Fig. 2.4 conjuntamente con los márgenes de estabilidad obtenidos a partir del tratamiento completamente diferencial de las ecuaciones [33]. Como puede apreciarse de la comparación entre ambos modelos existe un buen acuerdo para un amplio rango de números de subenfriamiento, resultando ser en general el modelo algebraico más conservativo.

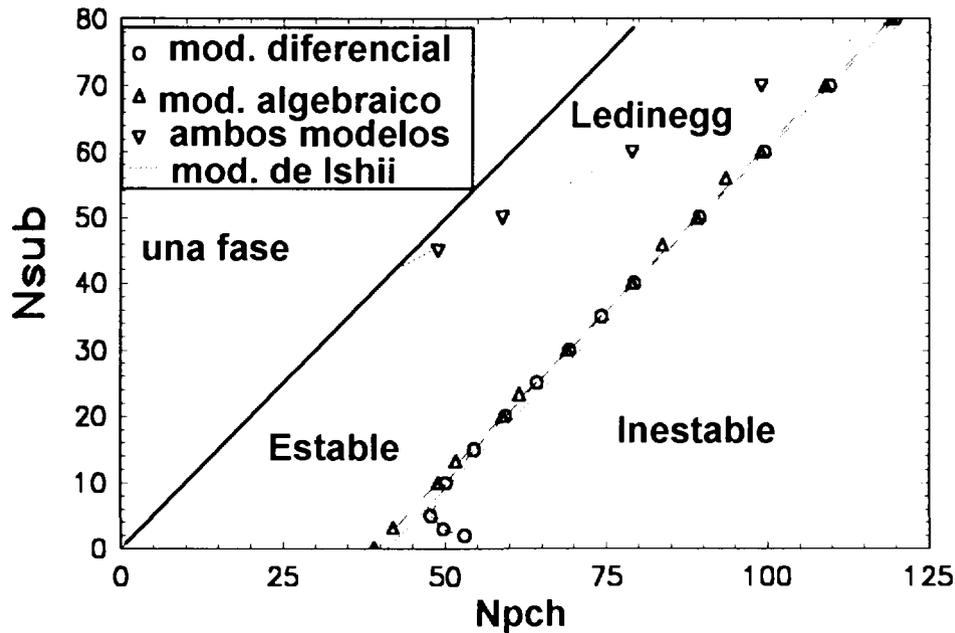


Figura 2.4: Mapa de estabilidad lineal en el plano paramétrico ( $N_{sub}$ ,  $N_{pch}$ ).

Nótese que para bajos números de subenfriamiento, este modelo algebraico es demasiado conservativo. No obstante, debemos recordar que bajo estas condiciones  $t_2$  será mucho mayor que  $t_1$ , lo cual invalida la tercera hipótesis ( $t_2 = 2t_1$ ). En la Fig. 2.4 se comparan también los márgenes de estabilidad del modelo algebraico en demoras con el criterio de Ishii [34], pudiendo observarse que el primero resulta ser más conservativo.

## 2.2 Análisis de la influencia de la fricción concentrada en la entrada sobre la estabilidad del flujo.

Es reconocida dentro de la literatura de flujos bifásicos una regla del arte que establece que incrementando las fricciones a la entrada del canal en ebullición se tiende a estabilizar fenómenos del tipo de ondas de densidad [35]. Esta regla es deducida a partir del estudio de una familia de condiciones de diseño con caudal constante. Sin embargo, en condiciones operacionales las variaciones de las fricciones a la entrada están generalmente acopladas con las de otros parámetros, y consecuentemente son de esperar efectos diferentes dependiendo de cada situación en particular.

### 2.2.1 Caso de salto de presión externo constante

Utilizando nuestro modelo algebraico en demoras presentado en la sección anterior, estudiaremos la relación entre la fricción a la entrada del canal y el margen de estabilidad para sistemas termohidráulicos basados en muchos canales paralelos en ebullición. En

dichos sistemas, un cambio en un canal en particular no afecta mayormente a las condiciones externas generales, por lo que podemos suponer salto de presión contante, en otras palabras, que el caudal se acomoda para satisfacer esta condición.

Es conveniente volver a reescribir las ecuaciones del modelo en términos de la velocidad de entrada  $\hat{u}_0$ . Adimensionalizando de manera similar a la sección previa, el límite de estabilidad lineal para las inestabilidades de ondas de densidad puede reescribirse como:

$$\hat{u}_0^{dw} = \frac{N_{sub}}{N_{sub} + 2k} \quad (27)$$

Análogamente para el límite de Ledinegg:

$$\hat{u}_0^{Led} = -\frac{N_{sub}}{2(k+1-N_{sub})} \quad (28)$$

Combinando las ecuaciones (27) y (28), el punto de transición del primer al segundo tipo de inestabilidades puede escribirse:

$$\hat{u}_0^{dw-Led} = \frac{2N_{sub}}{3N_{sub}-2} \quad (29)$$

La ecuación en demoras de nuestro modelo (12) vale para título de salida comprendido entre 0 y 1, es decir:

$$\geq \rho_e \geq \frac{1}{1 + v_{fg}/v_f} \quad (30)$$

La densidad de la mezcla que sale del canal se puede relacionar con la velocidad de entrada al mismo por:

$$\rho_e = \frac{\hat{u}_0}{\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)} \quad (31)$$

Combinando ecuaciones (30) y (31), el rango de  $\hat{u}_0$  posibles para tener una mezcla bifásica de salida resulta:

$$\frac{N_{sub}}{N_{sub} + v_{fg}/v_f} \leq \hat{u}_0 \leq 1 \quad (32)$$

donde el límite inferior y superior corresponden a gas y líquido respectivamente a la salida del canal.

Los criterios de estabilidad dado por las ecuaciones (27) y (28), son ilustrados en el plano  $(\hat{u}_0, N_{sub})$  en la Fig. 2.5.

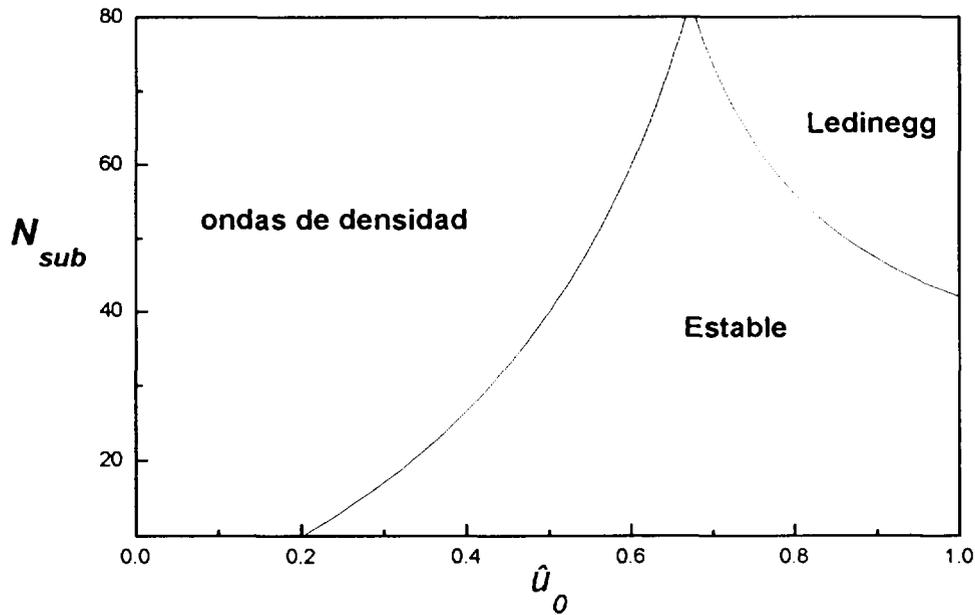


Figura 2.5: Mapa de estabilidad lineal en el plano  $(N_{sub}, \hat{u}_0)$  para  $k = 20$ .

En un canal sujeto a una caída de presión externa constante, el número de Euler permanece constante. Por lo tanto, cualquier variación de  $k_i$  produce cambios en la velocidad estacionaria de entrada al canal,  $\hat{u}_0^s$ , la cual está definida por la siguiente ecuación:

$$\hat{u}_0^s = \frac{-N_{sub} + \sqrt{N_{sub}^2 + 4 \frac{Eu}{(k_e + 1)} (k + 1 - N_{sub})}}{2(k + 1 - N_{sub})} \quad (33)$$

El efecto neto de un aumento en la fricción de entrada será estabilizante si y sólo si en el límite de estabilidad lineal definido por la ecuación (27),  $\hat{u}_0^{dw}$ , las disminuciones en el caudal estacionario son menores que las disminuciones en el caudal crítico. Si las fricciones a la salida permanecen constantes las variaciones de la fricción de entrada son proporcionales a las del parámetro  $k$ , pudiendo establecer que el efecto será estabilizante si:

$$\frac{d\hat{u}_0^s}{dk} > \frac{d\hat{u}_0^{dw}}{dk} \quad (34)$$

Diferenciando la ecuación (33) podemos calcular:

$$\frac{d \hat{u}_0^s}{d k} = - \frac{\hat{u}_0^2}{N_{sub}(2 - 3\hat{u}_0) + 2\hat{u}_0} \quad (35)$$

y operando similarmente sobre la ecuación (27):

$$\frac{d \hat{u}_0^{dw}}{d k} = - \frac{2\hat{u}_0^2}{N_{sub}} \quad (36)$$

Combinando las ecuaciones (34-36), encontramos un efecto estabilizante de  $k_i$  cuando:

$$N_{sub} < \frac{4\hat{u}_0}{3(2\hat{u}_0 - 1)} \quad (37)$$

En las Figs. 2.6 se muestra este criterio en el plano biparamétrico ( $\hat{u}_0$ ,  $N_{sub}$ ). Ambas regiones (de efecto estabilizante una e inestabilizante la otra) están acotadas por las condiciones de flujo bifásico a la salida del canal y de inestabilidad excursiva dadas por las ecuaciones (32) y (29) respectivamente. Es interesante notar que si  $\hat{u}_0 < 1/2$  el efecto de incrementar  $k_i$  es siempre estabilizante.

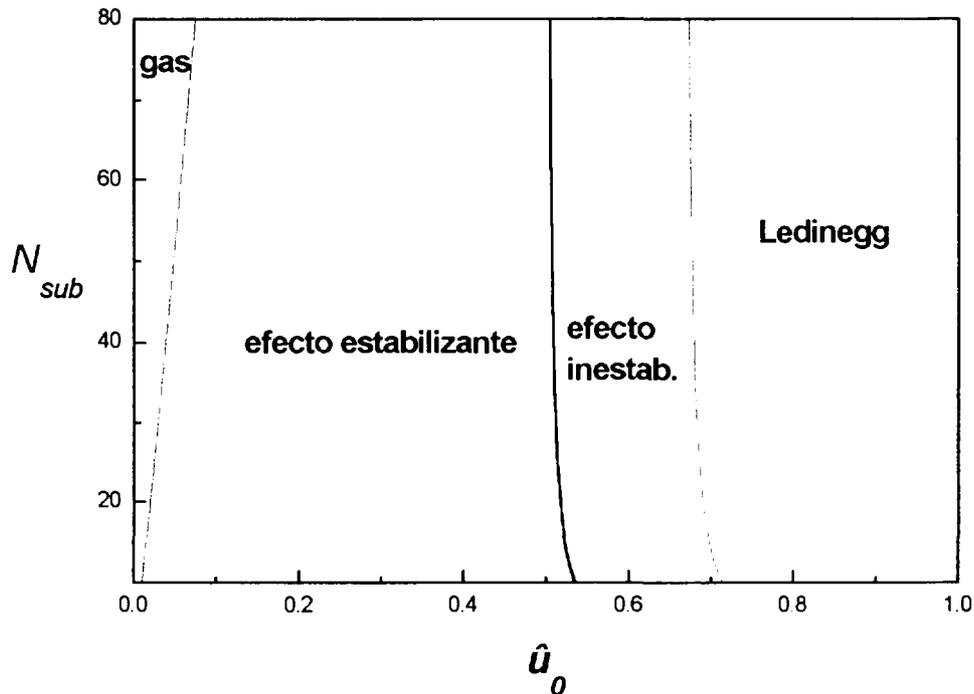


Figura 2.6a: Influencia de la fricción a la entrada sobre la estabilidad del canal (presión atmosférica).

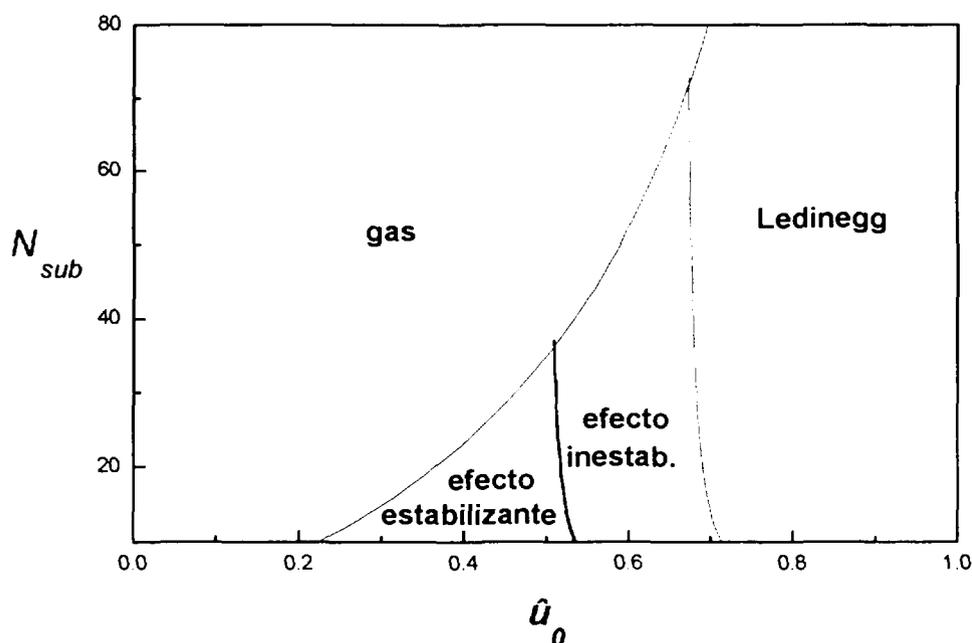


Figura 2.6b: Influencia de la fricción a la entrada sobre la estabilidad del canal (presión 45 atmósferas).

### 2.2.2 Caso de salto de presión externo variable

Resulta de interés estudiar otras configuraciones de sistemas basados en canales en ebullición de aplicación en ingeniería, además de canales paralelos. En un caso más genérico, la caída de presión total en el sistema está relacionada con el caudal. Estudiaremos esta dependencia de la curva de  $Eu$  vs.  $\hat{u}_0$  dentro de las aproximaciones del análisis de estabilidad lineal.

Consideremos una pequeña perturbación a partir del estado estacionario,  $\hat{u}_0$  :

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_0 + \delta \hat{u} e^{\alpha t}$$

Usando esta relación en la ecuación (12), obtenemos la ecuación característica del sistema linealizado:

$$\left[ \hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0) \right] x^2 - N_{sub} \hat{u}_0 x + [(2k + 1)\hat{u}_0 - DEu'] = 0 \tag{38}$$

donde

$$x = e^{-\alpha t}$$

y

$$DEu' = \frac{1}{(k_e + 1)} \left. \frac{dEu}{d\hat{u}_i} \right|_{\hat{u}_0}$$

Razonando análogamente al caso de canales paralelos, el límite de estabilidad lineal para el caso general puede escribirse como:

$$\hat{u}_0^{dw} = \frac{N_{sub} + DEu'}{N_{sub} + 2k} \quad (39)$$

y el límite de las inestabilidades excursivas viene dado por:

$$\hat{u}_0^{Led} = -\frac{N_{sub} - DEu'}{2(k + 1 - N_{sub})} \quad (40)$$

Combinando las ecuaciones (39) y (40), el punto de transición de autovalores complejos a reales puede ser calculado:

$$\hat{u}_0^{dw-Led} = \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2} \quad (41)$$

Obsérvese que esta condición es idéntica a la obtenida para canales paralelos.

La ecuación estacionaria de momento del canal en ebullición se reduce a

$$[k_i - 1 + (k_e + 1)(1 - N_{sub})]\hat{u}_0^2 + N_{sub}(k_e + 1)\hat{u}_0 = Eu(\hat{u}_0) \quad (42)$$

Derivando las ecuaciones (39) y (42) respecto de  $k$  se obtiene respectivamente

$$\frac{d\hat{u}_0^{dw}}{dk} = -\frac{2\hat{u}_0^2}{N_{sub} + \frac{\partial Eu'}{\partial \hat{u}_0}} \quad (43)$$

y

$$\frac{d\hat{u}_0^s}{dk} = -\frac{\hat{u}_0^2}{N_{sub}(2 - 3\hat{u}_0) + 2\hat{u}_0 - DEu'} \quad (44)$$

Sustituyendo ambas ecuaciones, (43) y (44), en la ecuación (34), podemos recalcular la condición de efecto estabilizante para el caso general como:

$$N_{sub} < \frac{4\hat{u}_0 - 3DEu'}{3(2\hat{u}_0 - 1)} \quad (45)$$

Nótese en el caso de derivada negativa  $DEu'$ , característico de una bomba centrífuga, que ésta tiene un efecto estabilizante sobre el margen de estabilidad.

Las Figs. 2.7 ilustran el efecto de la derivada de  $DEu'$  con respecto a  $\hat{u}_0$  sobre la influencia de  $k_i$ , en la estabilidad, explicitada por la ecuación (45). Como el valor de transición de  $\hat{u}_0$  tiende a 1/2 cuando  $N_{sub}$  tiende a infinito, al igual que en el caso de

canales paralelos, encontramos comportamientos similares en ambos casos para  $N_{sub}$  grandes.

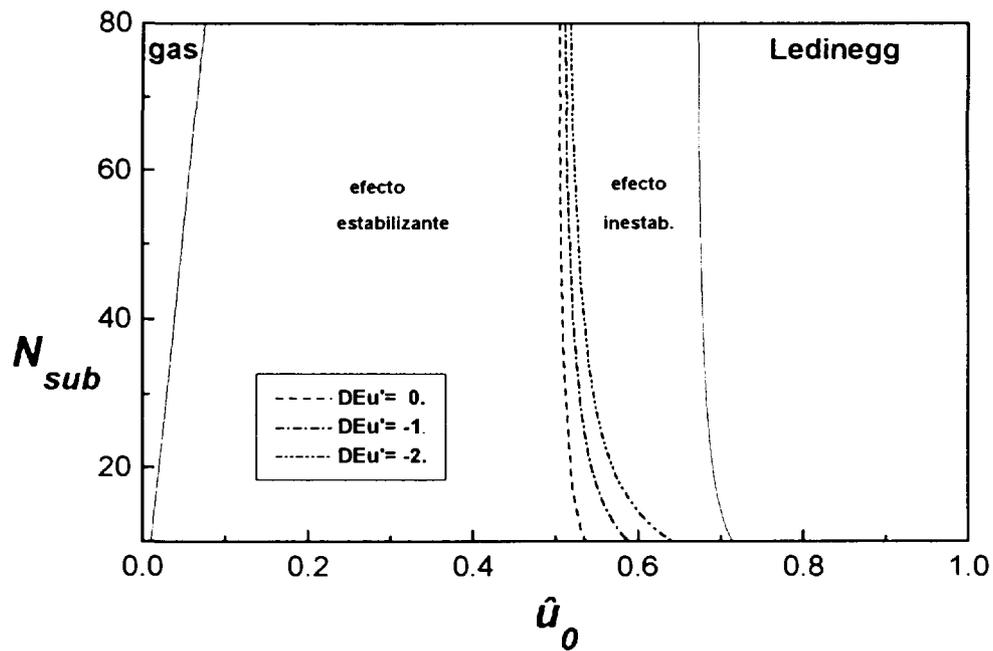


Figura 2.7a. Influencia de la fricción a la entrada sobre la estabilidad del canal (presión atmosférica).

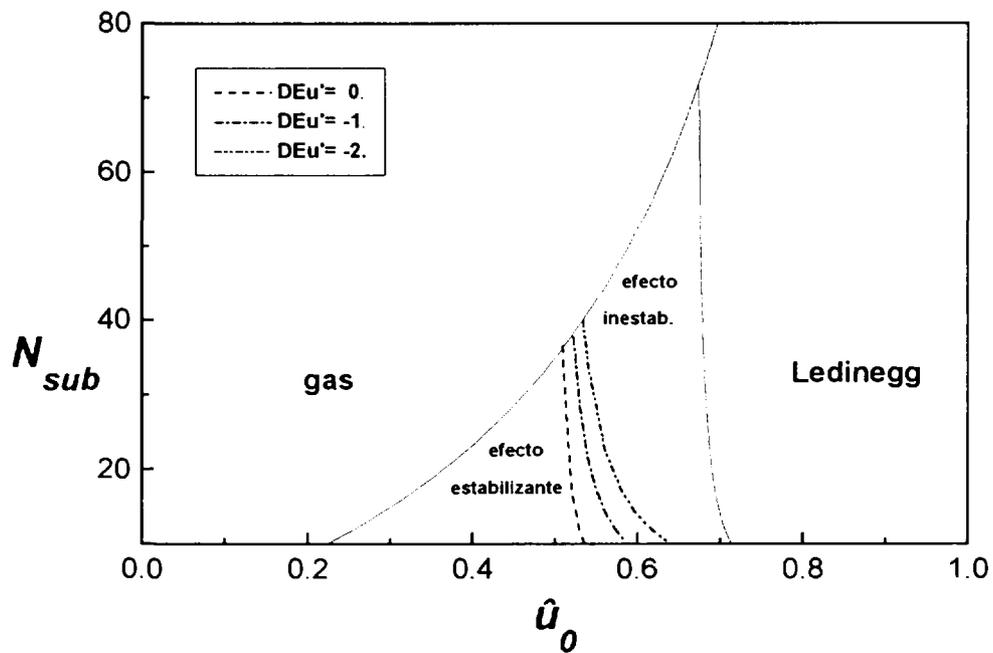


Figura 2.7b: Influencia de la fricción a la entrada sobre la estabilidad del canal (presión 45 atmósferas).

## 2.3 Estudio analítico de la dinámica lineal y no lineal

### 2.3.1 Dinámica lineal

Cuando las oscilaciones tienen amplitudes relativamente grandes, el análisis lineal pierde su validez, ya que los términos no lineales de las ecuaciones de conservación no son despreciables. En estos rangos, es importante el conocimiento de los parámetros principales de las oscilaciones, como ser la amplitud y la frecuencia. Las técnicas de Hopf fueron aplicadas por primera vez al análisis de canales de ebullición por Achard y otros [36] utilizando un modelo completamente diferencial. Debido a la complejidad de las ecuaciones resultantes, este análisis sólo permite obtener resultados numéricos. En esta sección se presentan los resultados de la aplicación de las técnicas de Hopf al modelo de demoras de un canal en ebullición.

La ecuación (12) de nuestro modelo en demoras expresada con el factor de fricción  $k$  definido en la ecuación (18) puede reescribirse como:

$$k \hat{u}_n^2 + \hat{u}_{n-2} [\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})] = \frac{Eu}{k_e + 1} \quad (45)$$

El estado estacionario:  $\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0$ , satisface ahora la siguiente relación:

$$k \hat{u}_0^2 + \hat{u}_0 [\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)] = \frac{Eu}{k_e + 1} \quad (46)$$

donde el parámetro  $\hat{u}_0$  representa la fracción subenfriada de la longitud total del canal;

$$\hat{u}_0 = \frac{\lambda_0}{L_{ch}} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}}$$

Consideraremos una pequeña perturbación en la velocidad de entrada alrededor del estado estacionario,  $\hat{u}_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \hat{u}_0 + \exp(\alpha t) \\ \hat{u}(t - \tau) &= \hat{u}_0 + \exp[\alpha(t - \tau)] \\ \hat{u}(t - 2\tau) &= \hat{u}_0 + \exp[\alpha(t - 2\tau)] \end{aligned}$$

Reemplazando éstas en la ecuación (45), obtenemos nuevamente la ecuación característica del sistema linealizado:

$$[\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)] x^2 - N_{sub} \hat{u}_0 x + (2k + 1) \hat{u}_0 = 0 \quad (47)$$

donde:  $x = \exp(\alpha\tau)$

Despejando  $x$  se tiene que

$$x = \frac{N_{sub} \hat{u}_0 \pm j \sqrt{4 \hat{u}_0 (2k+1) [\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)] - N_{sub}^2 \hat{u}_0^2}}{2 [\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)]} \quad (48)$$

El sistema es marginalmente estable para un cierto  $\hat{u}_0$  si  $x$  es un punto dentro del círculo unitario en el plano complejo, es decir si:

$$2k = \frac{N_{sub} (1 - \hat{u}_0)}{\hat{u}_0} \quad (49)$$

Si los autovalores  $x$  son reales y el mayor autovalor es menor que 1 el punto fijo es un punto ensilladura. En este caso el sistema alcanza la inestabilidad excursiva o de Ledinegg. De la ecuación (48) esto implica:

$$\hat{u}_0 = \frac{N_{sub}}{2(N_{sub} - k - 1)}, \text{ para } \hat{u}_0 < \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2} \quad (50a)$$

$$\hat{u}_0 = \frac{N_{sub}}{\frac{N_{sub}^2}{4(2k+1)} + N_{sub} - 1}, \text{ para } \hat{u}_0 > \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2} \quad (50b)$$

El punto de intersección de las ecuaciones (49) y (50) corresponde a la transición de autovalores complejos a reales, esto es para:

$$\hat{u}_0 = \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2} \quad (51)$$

Los valores mínimos de  $N_{sub}$  y  $\hat{u}_0$  para los cuales existe esta transición son respectivamente 2 y 2/3.

Dependiendo de la naturaleza de los autovalores,  $x$ , (*i.e.*, real o complejas) el sistema pierde su estabilidad siguiendo un comportamiento oscilatorio (autovalores complejos) o excursivo (autovalores reales).

Analizando la ecuación (12) de nuestro modelo algebraico en demoras, observamos que la misma es una ecuación autónoma por cuanto la variable temporal no aparece explícitamente. Así, las demoras  $t_1$  y  $t_2$  (si bien cumplen la relación  $t_2 = 2 t_1$ ) no fueron adimensionalizadas con el tiempo de referencia en ningún momento. Para el análisis no lineal es necesario tener un tiempo de referencia, ya que el período de las oscilaciones se modifica. Si resolvemos la ecuación (5) para una dada velocidad de entrada periódica se puede demostrar que la frontera de ebullición, en todos los casos está demorada en  $v/2$  (ver Apéndice A), por lo tanto podemos considerar nuestra demora  $t_1 = v/2$  y  $t_2 = v$ . Por esto, la frecuencia de las oscilaciones sobre el margen de

estabilidad,  $\omega = \text{Im}(\alpha)$ , puede obtenerse de la ecuación (48). Este resultado se muestra comparado contra el modelo diferencial en la Fig. 2.8. Se observa un buen acuerdo entre ambos modelos nuevamente, en un amplio rango de subenfriamientos.

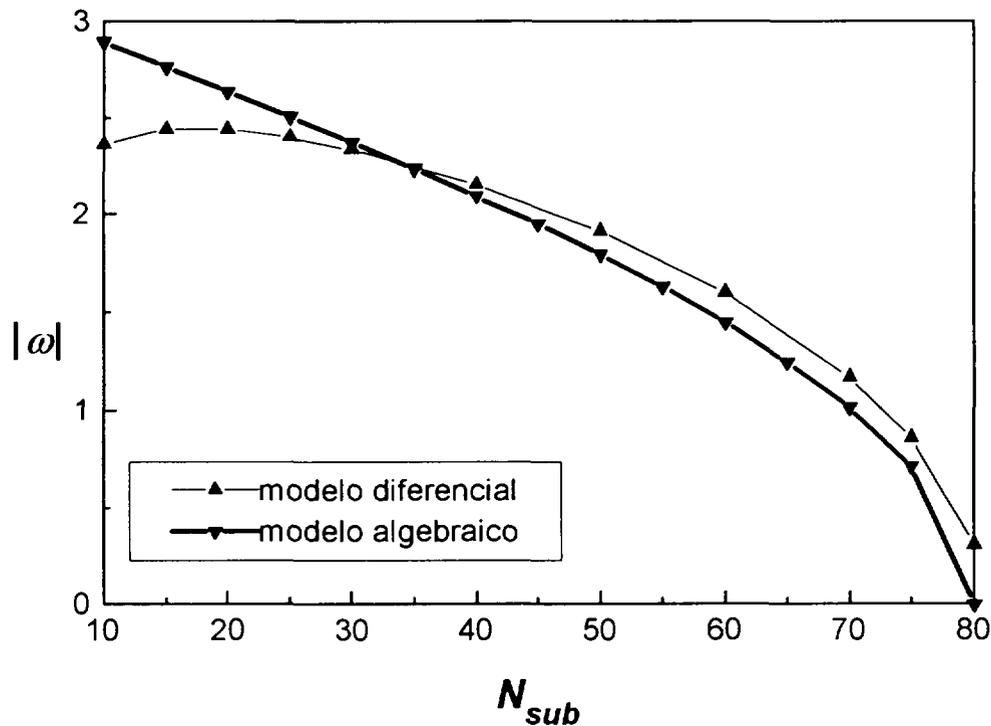


Figura 2.8: Frecuencia de las oscilaciones en el margen de estabilidad ( $k_r=40$  y  $k_e=1$  en modelo diferencial).

Cabe notar que la frecuencia de las oscilaciones en el margen de estabilidad en nuestro modelo algebraico en demoras depende del coeficiente  $k$  y no de  $k_r$  y  $k_e$ , en forma independiente, como surge de la ecuación (47). Esta característica presenta un buen acuerdo con el modelo diferencial en demoras [4] en aquellos casos en los cuales los términos de inercia y de gravedad son despreciables.

Es de destacar también que la frecuencia de las oscilaciones sobre el límite de estabilidad lineal disminuye conforme aumentamos  $N_{sub}$ . Si observamos el mapa de estabilidad lineal (ver Fig. 2.4) notamos que al movernos sobre el margen de estabilidad hacia los subenfriamientos mayores, nos aproximamos al límite de las inestabilidades estáticas (Ledinegg), donde la frecuencia de las oscilaciones tiende a cero.

### 2.3.2 Dinámica no lineal

Consideremos ahora el caso en que el sistema se encuentra inicialmente bajo condiciones de estabilidad marginal (con autovalores complejos). Entonces  $k$  viene determinado por la ecuación (49):

$$k_0 = \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0)}{2\hat{u}_0} \quad (52)$$

Cuando el valor de  $k$  disminuya por debajo de  $k_0$ , (variando para ello  $k$ , y manteniendo siempre fijo  $k_*$ ) la solución estacionaria pierde estabilidad. El teorema de Hopf [13,26,37] relativo a las bifurcaciones de igual nombre establece dos condiciones necesarias para la existencia de soluciones periódicas que se bifurcan desde  $\hat{u}_0$ :

$$\alpha|_{\mu=0} = -\bar{\alpha}|_{\mu=0} \neq 0, \quad (53a)$$

y

$$\text{Re} \left[ \frac{d\alpha}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \right] \neq 0, \quad (53b)$$

donde  $\alpha$  viene dado por la solución de la ecuación (47),  $x$ , como:

$$\alpha = -\frac{1}{\tau} \log x \quad (54a)$$

y

$$\mu = k - k_0 \quad (54b)$$

Combinando las ecuaciones (53) y (54), podemos reescribir las condiciones anteriores como:

$$|_{\mu=0} = -\bar{\alpha}|_{\mu=0} = \frac{j \arctan \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \Big|_{\mu=0} \right)}{\tau} \neq 0, \quad (55a)$$

y

$$\text{Re} \left[ \frac{d\alpha}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \right] < 0 \quad (55b)$$

donde llamamos  $Re$  e  $Im$  a las partes real e imaginaria de  $x$  evaluadas sobre el límite de estabilidad lineal:

$$\text{Re} = \frac{N_{sub} \hat{u}_0}{2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)]} \quad (56a)$$

$$Im = \sqrt{1 - \left\{ \frac{N_{sub} \hat{u}_0}{[\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)]} \right\}^2} \quad (56b)$$

Por lo tanto la existencia de bifurcaciones de Hopf en nuestra ecuación en demoras es factible.

Para analizar esta bifurcación consideremos la forma perturbada de la ecuación (45) sin despreciar los términos no lineales:

$$(k_0 + \mu)(2\hat{u}_0 \delta_0 + \delta_0^2) + \hat{u}_0(\delta_0 + \delta_2) + \delta_0 \delta_2 - N_{sub} [\hat{u}_0(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1 \delta_2 - \delta_2] = 0 \quad (57)$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \hat{u}_0 + \delta_0, \\ \hat{u}_{n-1} &= \hat{u}_0 + \delta_1, \\ \hat{u}_{n-2} &= \hat{u}_0 + \delta_2. \end{aligned}$$

La perturbación puede escribirse como  $\delta_n = \varepsilon y_n$  (donde  $\varepsilon$  es un pequeño parámetro), con lo cual:

$$(k_0 + \mu)(2\hat{u}_0 y_0 + \varepsilon y_0^2) + \hat{u}_0(y_0 + y_2) + \varepsilon y_0 y_2 - N_{sub} [\hat{u}_0(y_1 + y_2) + \varepsilon y_1 y_2 - y_2] = 0 \quad (58)$$

Las variables cambian a medida que  $\varepsilon$  crece. Este cambio puede expresarse como un desarrollo de Taylor de la siguiente manera:

$$\mu = \mu_{(1)} \varepsilon + \mu_{(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (59a)$$

$$t = \theta \left( \frac{1}{\omega_c} + \tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2 + \dots \right) \quad (59b)$$

$$y_0 = y_{0(0)} + y_{0(1)} \varepsilon + y_{0(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (59c)$$

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(1)} \varepsilon + y_{1(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (59d)$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(1)} \varepsilon + y_{2(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (59e)$$

donde  $\omega_c = Im(\alpha)$ .

El desarrollo de la variable temporal introducido en la ecuación (59b) implica sobre las demoras de nuestra ecuación que:

$$y_{1,0} = y_{0,0} \left( \theta - \frac{\tau}{\omega_c^{-1} + \chi} \right) = y_{0,0} (\theta - \tau \omega_c) + \frac{dy_{0,0}(\theta - \tau \omega_c)}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \chi + \frac{d^2 y_{0,0}(\theta - \tau \omega_c)}{d\chi^2} \Big|_{\chi=0} \chi^2 + \dots \quad (60a)$$

$$y_{2\tau_0} = y_{0\tau_0} \left( \theta - \frac{2\tau}{\omega_c^{-1} + \chi} \right) = y_{0\tau_0} (\theta - 2\tau\omega_c) + \left. \frac{dy_{0\tau_0}(\theta - 2\tau\omega_c)}{d\chi} \right|_{\chi=0} \chi + \left. \frac{d^2 y_{0\tau_0}(\theta - 2\tau\omega_c)}{d\chi^2} \right|_{\chi=0} \chi^2 + \dots \quad (60b)$$

donde  $\chi = \tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2 \dots$

En adelante redefiniremos

$$y_{1\tau_0} = y_{0\tau_0} (\theta - \tau\omega_c) \quad (61a)$$

$$y_{2\tau_0} = y_{0\tau_0} (\theta - 2\tau\omega_c) \quad (61b)$$

Combinando todas las ecuaciones desde (58) a (60) obtenemos:

$$\begin{aligned} & (k_0 + \mu_{(1)} \varepsilon + \mu_{(2)} \varepsilon^2 + \dots) \left[ 2\hat{u}_0 (y_{0\tau_0} + y_{0\tau_1} \varepsilon + y_{0\tau_2} \varepsilon^2 + \dots) + \varepsilon (y_{0\tau_0}^2 + 2\varepsilon y_{0\tau_1} y_{0\tau_1} + \dots) \right] + \hat{u}_0 (y_{0\tau_0} + y_{0\tau_1} \varepsilon + y_{0\tau_2} \varepsilon^2 + \dots) \\ & + \hat{u}_0 \left[ y_{2\tau_0} + \frac{dy_{2\tau_0}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2) + \frac{d^2 y_{2\tau_0}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \varepsilon^2 + y_{2\tau_1} \varepsilon + \frac{dy_{2\tau_1}}{d\chi} \tau_{(1)} \varepsilon^2 + y_{2\tau_2} \varepsilon^2 + \dots \right] \\ & + \varepsilon (y_{0\tau_0} + y_{0\tau_1} \varepsilon + y_{0\tau_2} \varepsilon^2 + \dots) \left[ y_{2\tau_0} + \frac{dy_{2\tau_0}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \dots) + y_{2\tau_1} \varepsilon + \dots \right] \\ & - N_{sub} \hat{u}_0 \left[ y_{1\tau_0} + \frac{dy_{1\tau_0}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2) + \frac{d^2 y_{1\tau_0}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \varepsilon^2 + y_{1\tau_1} \varepsilon + \frac{dy_{1\tau_1}}{d\chi} \tau_{(1)} \varepsilon^2 + y_{1\tau_2} \varepsilon^2 + \dots \right] \\ & + N_{sub} \left[ y_{2\tau_0} + \frac{dy_{2\tau_0}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2) + \frac{d^2 y_{2\tau_0}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \varepsilon^2 + y_{2\tau_1} \varepsilon + \frac{dy_{2\tau_1}}{d\chi} \tau_{(1)} \varepsilon^2 + y_{2\tau_2} \varepsilon^2 + \dots \right] (1 - \hat{u}_0) \\ & - N_{sub} \varepsilon \left[ y_{1\tau_0} + \frac{dy_{1\tau_0}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \dots) + y_{1\tau_1} \varepsilon + \dots \right] \left[ y_{2\tau_0} + \frac{dy_{2\tau_0}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \dots) + y_{2\tau_1} \varepsilon + \dots \right] = 0 \quad (62) \end{aligned}$$

Agrupando en potencias de  $\varepsilon$ , obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$(\varepsilon^0)$ :

$$(2k_0 + 1)\hat{u}_0 y_{0\tau_0} + \hat{u}_0 y_{2\tau_0} + N_{sub} [(1 - \hat{u}_0) y_{2\tau_0} - \hat{u}_0 y_{1\tau_0}] = 0 \quad (63a)$$

o,  $L_0(y_n(0)) = 0$ .

$(\varepsilon^1)$ :

$$\begin{aligned}
 & (2k_0 + 1)\hat{u}_0 y_{0(1)} - N_{sub} \hat{u}_0 y_{1(1)} + [\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)]y_{2(1)} = \\
 & -k_0 y_{0(0)}^2 - 2\hat{u}_0 \mu_{(1)} y_{0(0)} + \hat{u}_0 \left( N_{sub} \frac{d y_{1(0)}}{d \chi} - \frac{d y_{2(0)}}{d \chi} \right) \tau_{(1)} - y_{0(0)} y_{2(0)} + N_{sub} y_{1(0)} y_{2(0)} \quad (63b)
 \end{aligned}$$

o,  $L_0(v_n(1)) = S_{(1)}$ .

( $\varepsilon^2$ ):

$$\begin{aligned}
 & (2k_0 + 1)\hat{u}_0 y_{0(2)} + [\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)]y_{(2)}^2 - N_{sub} \hat{u}_0 y_{1(2)} = -2k_0 y_{0(0)} y_{0(1)} - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} y_{0(0)} \\
 & - \mu_{(1)} (2\hat{u}_0 y_{0(1)} + y_{0(0)}^2) - \hat{u}_0 \left( \frac{d y_{2(0)}}{d \chi} \tau_{(2)} + \frac{d^2 y_{2(0)}}{d \chi^2} \tau_{(1)}^2 + \frac{d y_{2(1)}}{d \chi} \tau_{(1)} \right) - y_{2(0)} y_{0(1)} \\
 & - y_{0(0)} \left( \frac{d y_{2(0)}}{d \chi} \tau_{(1)} + y_{2(1)} \right) + N_{sub} \hat{u}_0 \left( \frac{d y_{1(0)}}{d \chi} \tau_{(2)} + \frac{d y_{1(1)}}{d \chi} \tau_{(1)} + \frac{d^2 y_{1(0)}}{d \chi^2} \tau_{(1)}^2 \right) \\
 & + N_{sub} y_{2(0)} \left( \frac{d y_{1(0)}}{d \chi} \tau_{(1)} + y_{1(1)} \right) + N_{sub} y_{1(0)} \left( \frac{d y_{2(0)}}{d \chi} \tau_{(1)} + y_{2(1)} \right) \\
 & - N_{sub} (1 - \hat{u}_0) \left( \frac{d y_{2(0)}}{d \chi} \tau_{(2)} + \frac{d^2 y_{2(0)}}{d \chi^2} \tau_{(1)}^2 + \frac{d y_{2(1)}}{d \chi} \tau_{(1)} \right) \quad (63c)
 \end{aligned}$$

o  $L_0(v_n(2)) = S_{(2)}$

En general,  $L_0(v_n(l)) = S_{(l)}$ . Nótese que mientras que la forma de  $L_0(v_n(l))$  permanece igual,  $S_{(l)}$  incrementa su complejidad significativamente para  $l \geq 2$ .

El hecho de buscar una solución periódica (de período igual a  $2\pi$ ), impone la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_{n(l)} e^{-j\theta} d\theta = 1 \quad (64)$$

Recordando que

$$\delta_n = \varepsilon y_n = \varepsilon (y_{n(0)} + y_{n(1)} \varepsilon + y_{n(2)} \varepsilon^2 + \dots)$$

entonces la ecuación (64) implica,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_n e^{-j\theta} d\theta = 1 \quad (65)$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones (63) tengan una solución periódica es conocida como la alternativa de Fredholm [38]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_{(l)} e^{-j\theta} d\theta = 1 \quad (66)$$

Una solución (real) que satisface las ecuaciones (63) y (64) es

$$y_{0,(0)} = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (67)$$

la cual, junto con las ecuaciones (60) determinan las soluciones demoradas  $y_{1,(0)}$  y  $y_{2,(0)}$ .

Para  $l = 0$ , como  $S_{(0)} = 0$ , la ecuación (66) se satisface trivialmente. Para  $l = 1$ , la condición anterior implica,

$$\begin{aligned} & -k_0 \int_0^{2\pi} y_{0,(0)}^2 e^{-j\theta} d\theta - 2\hat{u}_0 \mu_{(1)} \int_0^{2\pi} y_{0,(0)} e^{-j\theta} d\theta + \hat{u}_0 \tau_{(1)} \left( N_{sub} \int_0^{2\pi} \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta \right) \\ & - \int_0^{2\pi} y_{0,(0)} y_{2,(0)} e^{-j\theta} d\theta + N_{sub} \int_0^{2\pi} y_{1,(0)} y_{2,(0)} e^{-j\theta} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Combinando las ecuaciones (60-61), conjuntamente con (67), obtenemos,

$$\int_0^{2\pi} y_{0,(0)}^2 e^{-j\theta} d\theta = 0, \quad (69a)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0,(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi, \quad (69b)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = -\pi \tau \omega_c^2 j, \quad (69c)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = -2\pi \tau \omega_c^2 j, \quad (69d)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0,(0)} y_{2,(0)} e^{-j\theta} d\theta = 0, \quad (69e)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{1,(0)} y_{2,(0)} e^{-j\theta} d\theta = 0. \quad (69f)$$

Luego, a partir de las ecuaciones (68-69) se deduce que  $\mu_{(1)} = \tau_{(1)} = 0$ .

Para  $l = 2$ , la ecuación (63c) implica, junto con  $\mu_{(1)} = \tau_{(1)} = 0$ ,

$$-2k_0 \int_0^{2\pi} y_{0,(0)} y_{1,(0)} e^{-j\theta} d\theta - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} \int_0^{2\pi} y_{0,(0)} e^{-j\theta} d\theta - \int_0^{2\pi} (y_{0,(0)} y_{2,(1)} + y_{0,(1)} y_{2,(0)}) e^{-j\theta} d\theta$$

$$- [\hat{u}_0 + N_{sb}(1-\hat{u}_0)] \tau_{(2)} \int_0^{2\pi} \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta + N_{sb} \hat{u}_0 \tau_{(2)} \int_0^{2\pi} \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta + N_{sb} \int_0^{2\pi} (y_{1,(1)} y_{2,(0)} + y_{2,(1)} y_{1,(0)}) = 0 \quad (70)$$

Proponemos para  $y_{0,(0)}$ , una solución (real) que satisface las ecuaciones (66) y (70):

$$y_{0,(1)} = a + b e^{j\theta} + \bar{b} e^{-j\theta} + c e^{2j\theta} + \bar{c} e^{-2j\theta} \quad (71)$$

donde el parámetro  $a$  es real, mientras que  $b$  y  $c$  son complejos. Las magnitudes demoradas correspondientes con esta solución son:

$$y_{1,(1)} = a + b e^{j(\theta-\tau\omega_c)} + \bar{b} e^{-j(\theta-\tau\omega_c)} + c e^{2j(\theta-\tau\omega_c)} + \bar{c} e^{-2j(\theta-\tau\omega_c)}, \quad (72a)$$

y

$$y_{2,(1)} = a + b e^{j(\theta-2\tau\omega_c)} + \bar{b} e^{-j(\theta-2\tau\omega_c)} + c e^{2j(\theta-2\tau\omega_c)} + \bar{c} e^{-2j(\theta-2\tau\omega_c)} \quad (72b)$$

Usando las ecuaciones (67) y (71-72) podemos calcular:

$$\int_0^{2\pi} y_{0,(1)} y_{0,(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a+c) \quad (73a)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{2,(1)} y_{0,(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a + c e^{-4\tau\omega_c}) \quad (73b)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{1,(1)} y_{2,(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-4\tau\omega_c} + c) \quad (73c)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{2,(1)} y_{1,(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-\tau\omega_c} + c e^{-3\tau\omega_c}) \quad (73d)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0,(1)} y_{2,(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-2\tau\omega_c} + c e^{2\tau\omega_c}) \quad (73e)$$

Reemplazando las ecuaciones (69c,d) y las ecuaciones (73) en la ecuación (70), la condición de Fredholm sobre  $l = 2$  puede expresarse como:

$$-2k_0(a+c) - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} - (a + ce^{-4\tau \omega_c j}) + N_{sub}(ae^{-2\tau \omega_c j} + c) + N_{sub}(ae^{-2\tau \omega_c j} + ce^{-3\tau \omega_c j}) - (ae^{-2\tau \omega_c j} + ce^{2\tau \omega_c j}) + \left\{ -2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)]e^{-2\tau \omega_c j} + N_{sub}\hat{u}_0 e^{-\tau \omega_c j} \right\} \tau \omega_c^2 \tau_{(2)j} = 0 \quad (74)$$

Los coeficientes  $a$  y  $c$  se pueden calcular combinando las ecuaciones (71) y (63b), obteniéndose:

$$a = \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{N_{sub} - N_{sub} \hat{u}_0}{\hat{u}_0} \right) + \frac{1}{4} \left[ (e^{2\tau \omega_c j} + e^{-2\tau \omega_c j}) - N_{sub}(e^{\tau \omega_c j} + e^{-\tau \omega_c j}) \right] \right\} / \left[ 2(N_{sub} + \hat{u}_0) - N_{sub} \hat{u}_0 \right] \quad (75a)$$

$$c = \left[ \left( \frac{N_{sub}(1 - \hat{u}_0)}{16\hat{u}_0} \right) e^{2\tau \omega_c j} + \frac{1 - N_{sub} e^{\tau \omega_c j}}{8} \right] / \left[ \frac{N_{sub}}{2} + \left( \frac{N_{sub}(1 - \hat{u}_0)}{16\hat{u}_0} \right) \cos(2\tau \omega_c) \right] \quad (75b)$$

Combinando las ecuaciones (74) y (75), la ecuación de las partes reales nos permite obtener una expresión analítica del coeficiente  $\mu_{(2)}$ :

$$\begin{aligned} 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} = & -\frac{N_{sub}(1 - \hat{u}_0)}{\hat{u}_0} (a + c_1) - c_1(Re^4 - 6Re^2 Im^2 + Im^4) - a - 4c_2(Re^3 Im - Re Im^3) \\ & + N_{sub} a(Re^2 - Im^2) + N_{sub}(c_1 + a Re) + N_{sub} c_1(Re^3 - 3Re Im^2) \\ & + N_{sub} c_2(3Re^2 Im - Im^3) - (a + c_1)(Re^2 - Im^2) + 2c_2 Re Im(1 + N_{sub}) \\ & + Im \left\{ N_{sub} \hat{u}_0 - 4 Re[\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)] \right\} \left[ \frac{N_{sub}(1 - \hat{u}_0)c_2}{\hat{u}_0} - N_{sub} c_2 \right. \\ & + N_{sub} a Im + N_{sub} c_1(3Re^2 Im - Im^3) - N_{sub} c_2(Re^3 - 3Re Im^2) \\ & \left. - 4c_1(Re^3 Im - Re Im^3) + c_2(Re^2 - Im^2) + c_2(Re^4 - 6Re^2 Im^2 + Im^4) \right. \\ & \left. + \frac{2(c_1 - a) Re Im + 2a N_{sub} Re Im}{\hat{u}_0} \right] / \\ & \left\{ N_{sub} \hat{u}_0 Re - [\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)] 2(Re^2 - Im^2) \right\} \equiv f(N_{sub}, \hat{u}_0) \quad (76a) \end{aligned}$$

donde  $c$  fue separado en su parte real e imaginaria como  $c = c_1 + j c_2$ , y análogamente la ecuación de las partes imaginarias nos permite obtener una expresión analítica del coeficiente  $\tau_{(2)}$ , que podemos expresar como:

$$\tau_{(2)} \tau \omega_c^2 = \left\{ \frac{N_{sub} (1 - \hat{u}_0) c_2}{\hat{u}_0} - 4c_1 (Re^3 Im - Re Im^3) + c_2 (Re^4 - 6 Re^2 Im^2 + Im^4) \right.$$

$$+ 2N_{sub} a Re Im + N_{sub} a Im + N_{sub} c_1 (3 Re^2 Im - Im^3) - N_{sub} c_2 (Re^3 - 3 Re Im^2)$$

$$- N_{sub} c_2 - 2a Re Im + 2c_1 Re Im + c_2 (Re^2 - Im^2) \left. \right\}$$

$$/ \left[ N_{sub} \hat{u}_0 Re - (\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)) 2(Re^2 - Im^2) \right] \equiv g(N_{sub}, \hat{u}_0) \quad (76b)$$

Las ecuaciones (76) constituyen un importante resultado concerniente a las propiedades no lineales del modelo algebraico en demoras de la dinámica de canales con ebullición. En primer lugar, el signo de  $\mu_{(2)}$  (76a) permite determinar el carácter de la bifurcación. Como en nuestro caso  $Re[\partial\alpha(\mu=0)/\partial\mu] < 0$ , el criterio establecido por el teorema de Hopf es:

$\mu_{(2)} > 0 \Rightarrow$  bifurcación subcrítica.

$\mu_{(2)} < 0 \Rightarrow$  bifurcación supercrítica.

La ecuación (76a) fue usada para construir las curvas de nivel del parámetro  $\mu_{(2)}$ , en la Fig. 2.9, el cual caracteriza el tipo de comportamiento no lineal (subcrítico o supercrítico), en el espacio de los parámetros  $(\hat{u}_0, N_{sub})$ .

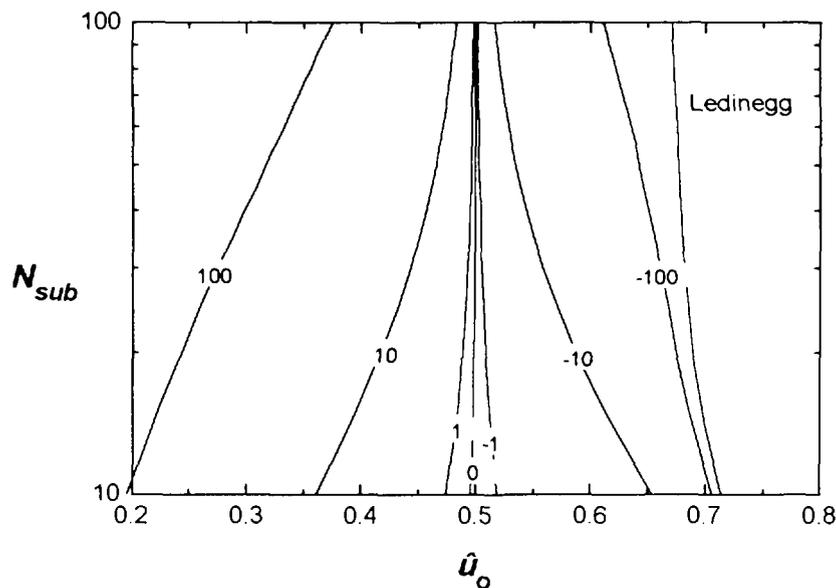


Figura 2.9: Curvas de nivel de  $\mu_{(2)}$ .

Otra importante aplicación de la ecuación (76a) es el cálculo de la amplitud de los ciclos límites (en bifurcaciones supercríticas), o alternativamente el tamaño de la perturbación mínima necesaria para inestabilizar el sistema dentro de los márgenes de estabilidad (en bifurcaciones subcríticas). Tomando solamente los términos de menor orden, las ecuaciones (59) llevan a:

$$\mu = \mu_{(2)} \varepsilon^2 \tag{77a}$$

$$\theta = \omega_c t \tag{77b}$$

$$y_\theta = y_{\theta(0)} = \cos \theta \tag{77c}$$

$$\delta_0 = \varepsilon y_\theta \tag{77d}$$

Combinando las ecuaciones (76a) y (77), la amplitud relativa de la perturbación puede ser relacionada con el alejamiento de  $k$  desde su límite linear,  $k_0$ , por:

$$\frac{\|\delta_0\|}{\hat{u}_0} = \frac{\sqrt{(k - k_0) / \mu_{(2)}}}{\hat{u}_0} \tag{78}$$

La Fig. 2.10 muestra el resultado para  $N_{sub} = 30$ . Las curvas cortadas siguen las soluciones periódicas de una amplitud relativa dada. Cuando ellas caen dentro de la región linearmente inestable indican la amplitud de los ciclos límites estables hacia los que evolucionan todas las perturbaciones iniciales. Pero cuando ellas caen en la región linearmente estable como el “ruido permitido” al sistema.

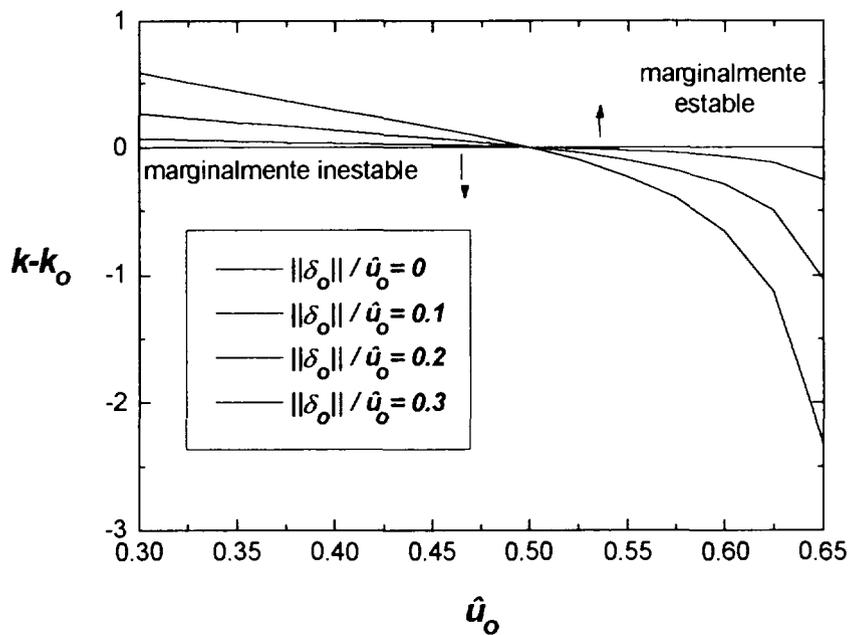


Figura 2.10: Superficies de inestabilidades de amplitud finita. ( $N_{sub} = 30$ ).

Bajo condiciones subcríticas, el sistema es inestable ante una excitación de cualquier amplitud en la región linealmente inestable. Más aún, también dentro de los márgenes de estabilidad es inestable si la perturbación es suficientemente grande. Este último comportamiento es significativo por cuanto demuestra que el análisis de estabilidad lineal no es suficiente para garantizar la estabilidad dentro de los márgenes de estabilidad.

Por otra parte, un sistema supercrítico es siempre estable dentro de los márgenes de estabilidad, y exhibe soluciones periódicas acotadas (ciclos límites) en alguna franja adyacente al límite de estabilidad y dentro de la región linealmente inestable (donde el desarrollo de términos hasta segundo orden tenga validez). La Fig. 2.11 muestra las regiones subcrítica y supercrítica en el plano paramétrico  $(k, \hat{u}_0)$ . La condición singular para la cual  $\mu_{(2)} = 0$ , representa el punto de transición donde el sistema conmuta de un tipo de comportamiento a otro, y determina una curva en el espacio paramétrico  $(N_{sub}, \hat{u}_0)$  dada por:

$$f(N_{sub}, \hat{u}_0) = 0 \tag{79}$$

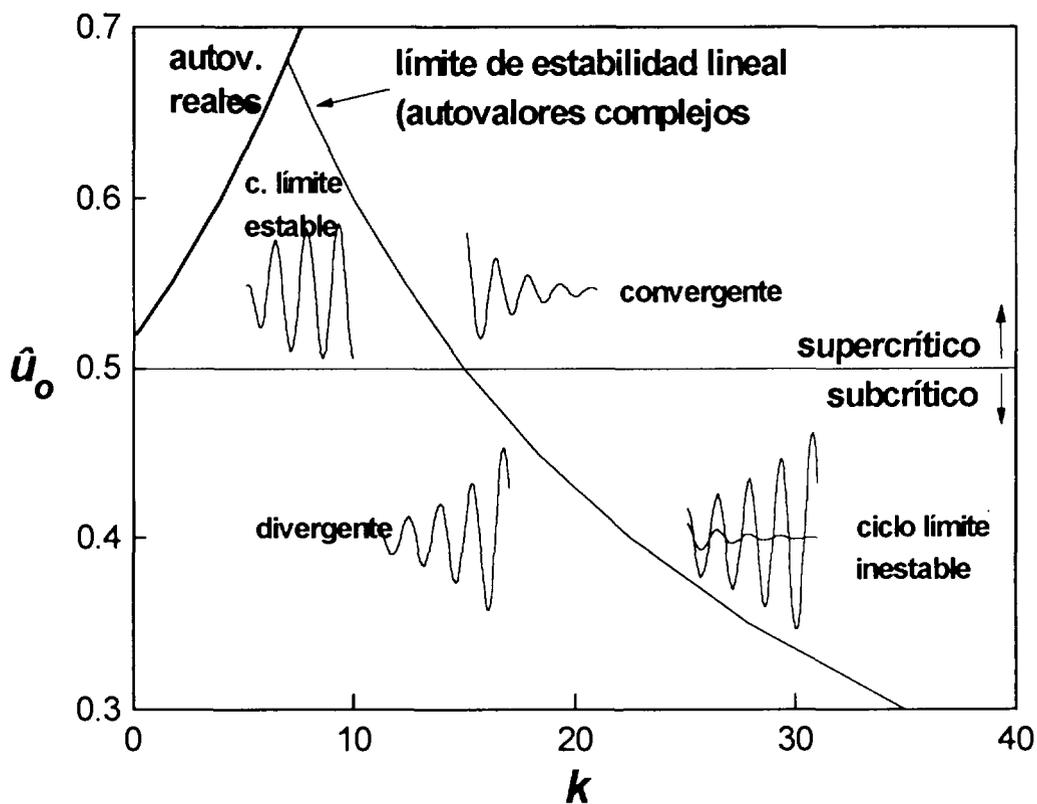


Figura 2.11: Mapa de comportamientos no lineales ( $N_{sub}=30$ ).

La ecuación (79) se grafica en la Fig. 2.12. Se observa que para altos subenfriamientos el carácter de la bifurcación viene determinado solamente por el valor de  $\hat{u}_0$ . Se calculó este valor asintótico, encontrándose que:

$$\lim_{\substack{\hat{u}_0 \rightarrow 1/2 \\ N_{sub} \rightarrow \infty}} f(N_{sub}, \hat{u}_0) = 0$$

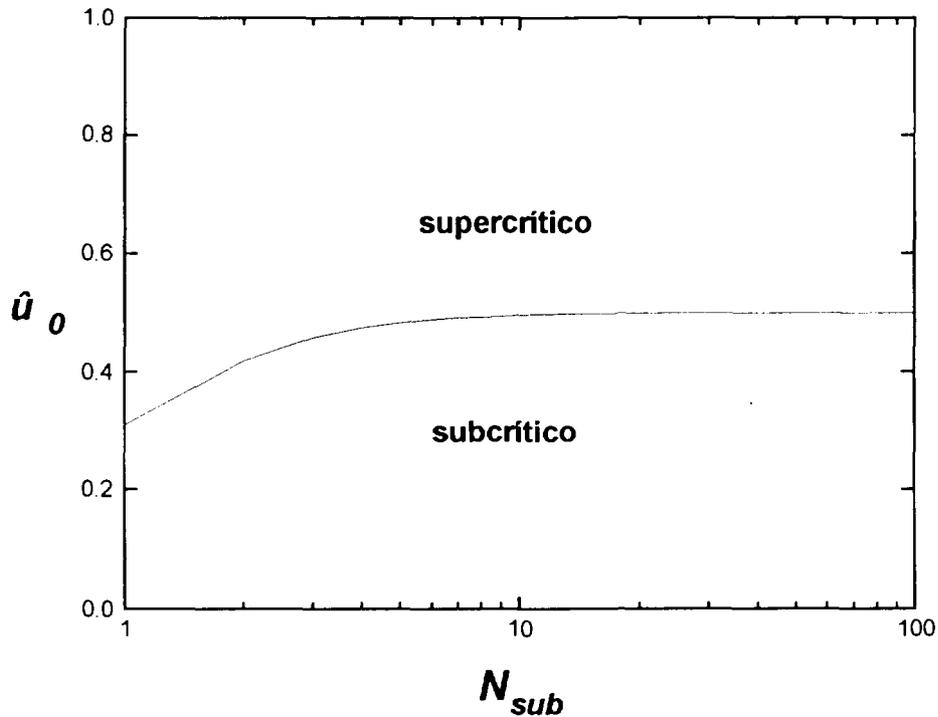


Figura 2.12: Carácter de las bifurcaciones.

Combinando las ecuaciones (76) y (78), la amplitud relativa de la perturbación se relaciona con el alejamiento de  $k$  desde el límite lineal,  $k_0$ , a través de:

$$\frac{\|\delta_0\|^2}{\hat{u}_0^2} = \frac{1}{R} \left( \frac{\mu}{k_0} \right) \tag{80}$$

donde  $R$  se define como:

$$R = \frac{\hat{u}_0^2}{N_{sub} (1 - \hat{u}_0)} f(N_{sub}, \hat{u}_0) \tag{81}$$

De la ecuación (80) puede deducirse el significado de  $R$ . Para bifurcaciones subcríticas, ( $R > 0$ ), cuanto mayor sea  $R$ , menor será la perturbación requerida para inestabilizar una situación marginalmente estable. Por lo tanto, en regiones estables donde  $R$  sea alto, deberá prestarse especial cuidado a la respuesta del sistema ante perturbaciones de amplitudes finitas. Por otra parte, en el caso de bifurcaciones supercríticas ( $R < 0$ ), cuanto menor sea  $R$ , menor será la amplitud de los ciclos límites.

Podemos concluir pues que en regiones inestables donde  $R$  sea bajo, la respuesta del sistema puede ser aceptable para el diseño, ya que permanecerán dentro de los rangos controlables. Puede considerarse a  $R$  como un indicador de "riesgo", en el sentido de que más altos  $R$  implican situaciones más peligrosas.

La Fig. 2.13 ilustra la dependencia de  $R$  con  $N_{sub}$  para diferentes  $\hat{u}_0$ . Se observa que para valores de  $N_{sub}$  grandes el factor de riesgo sólo depende de  $\hat{u}_0$ , existiendo un límite asintótico de  $R$  para cada  $\hat{u}_0$ . En la Fig. 2.14 se muestra el mapa de contorno de  $R$  en el espacio paramétrico  $(\hat{u}_0, N_{sub})$ . La región supercrítica, correspondiente a  $R$  negativos, está acotada en su parte superior por el límite de Ledinegg, (autovalores reales), donde existen inestabilidades del tipo excursivo solamente. En la región subcrítica  $R$  presenta un máximo si nos desplazamos hacia  $\hat{u}_0$  menores. En ambos casos (supercrítico y subcrítico) se observó que, para  $N_{sub}$  grandes,  $R$  tiende a ser sólo función de  $\hat{u}_0$  y podemos notarlo como  $R_\infty$ . Este límite  $R_\infty$ , fue calculado analíticamente y su resultado se muestra en la Fig. 2.15. Hay tres resultados interesantes que merecen ser señalados:

- $\text{máx} (R) = 0.201$  , ocurriendo para  $\hat{u}_0 = 0.211$
- $\lim_{\substack{\hat{u}_0 \rightarrow 0 \\ N_{sub} \rightarrow \infty}} R = 0.1875$
- la raíz ( $R_\infty = 0$ ) se encuentra en  $\hat{u}_0 = 0.5$ .

La Fig. 2.16 ilustra las curvas de nivel de  $R$  ahora en el plano  $(N_{pch}, N_{sub})$  los cuales son los parámetros característicos para graficar los márgenes de estabilidad en canales en ebullición. El mapa de  $R$  dado puede ser útil como un indicador de "peligro" en aquellas regiones linealmente estable donde se espera que la subcriticidad ocurra.

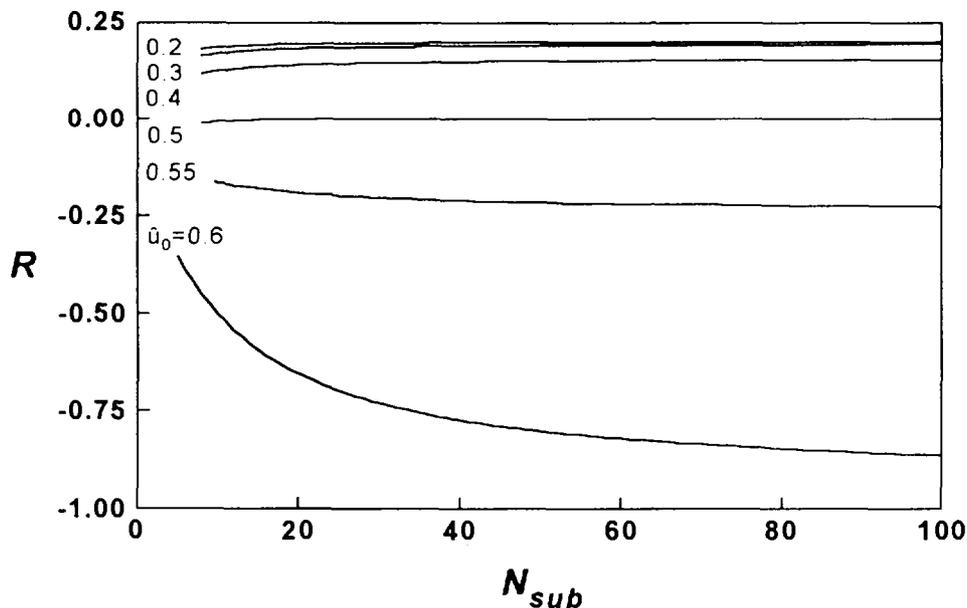


Figura 2.13: Función indicadora de riesgo.

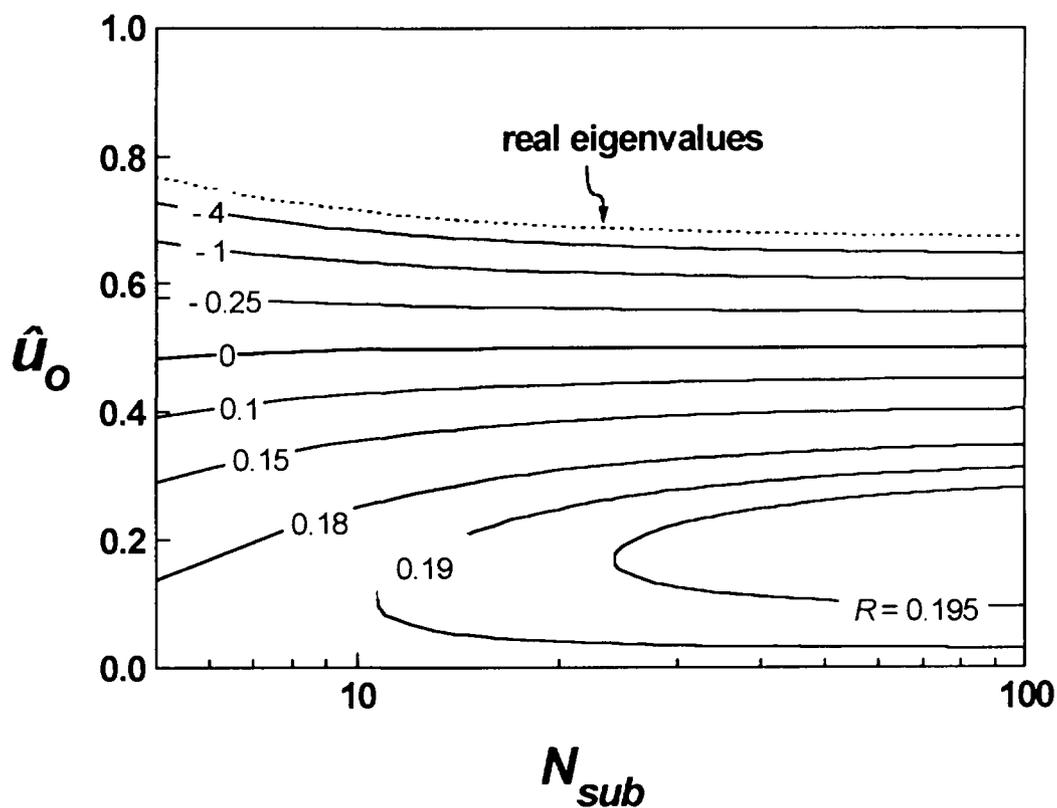


Figura 2.14: Curvas de nivel de  $R$ .

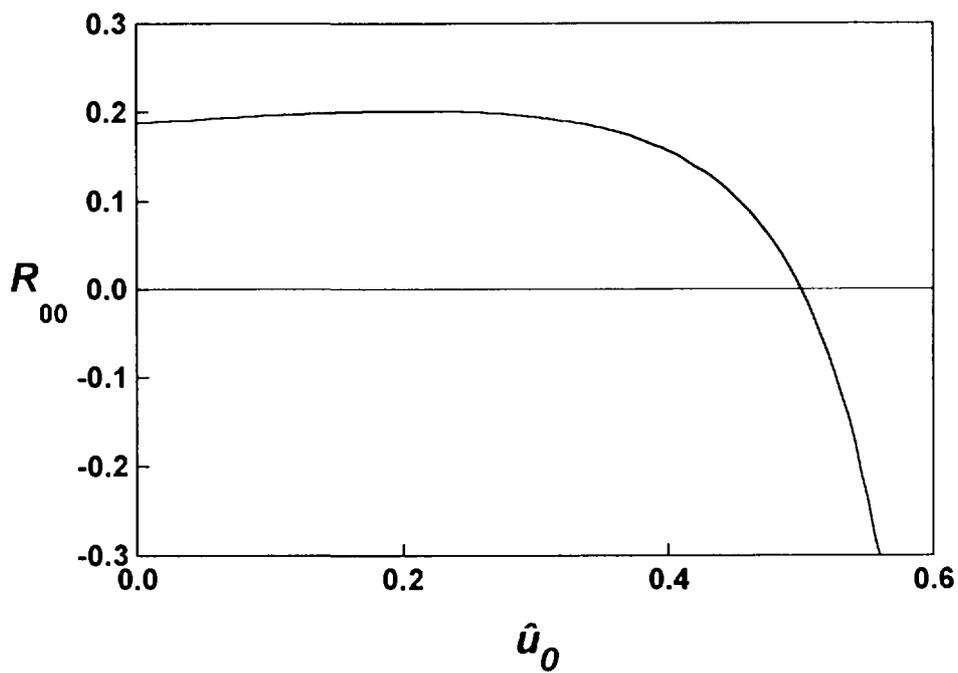


Figura 2.15: Función indicadora de riesgo para  $N_{nb}$  grandes.

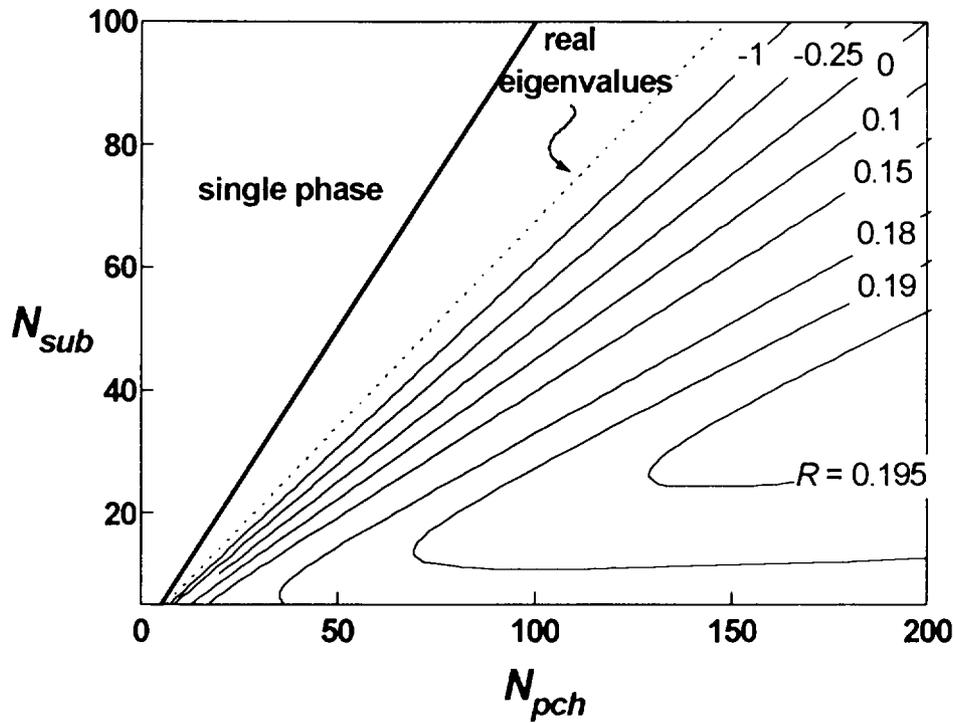


Figura 2.16: Curvas de nivel de  $R$  en el plano  $(N_{sub}, N_{pch})$ .

Por otra parte, la ecuación (76b) tiene importantes implicancias sobre la frecuencia de las ondas de densidad. A primer orden, la frecuencia linealizada de las oscilaciones viene dada por la ecuación (77b). Los efectos no lineales considerados afectan esta frecuencia; la cual en base a la ecuación (59b) puede escribirse a segundo orden como:

$$\omega = \frac{\omega_c}{1 + \omega_c \tau_{(2)} \varepsilon^2} \tag{82}$$

estando determinado el valor de  $\tau_{(2)}$  por el miembro derecho de la ecuación (76b).

El significado del coeficiente  $\tau_{(2)}$  es claro a partir de analizar la ecuación (82). Permite estimar los cambios en la frecuencia real de las ondas de densidad al alejarnos del límite de estabilidad lineal. En la Fig. 2.17 se ilustran las curvas de nivel de  $\tau_{(2)}$ . Nótese que  $\tau_{(2)}$  toma valores siempre negativos, resultando del mismo un aumento de la frecuencia. Este efecto es además más apreciable a medida que nos acercamos al límite de las inestabilidades excursivas, y relacionándolo con la Fig. 2.19 podemos concluir que es más notorio en presencia de supercriticalidad que de subcriticalidad (*i.e.* para  $\hat{u}_c$  mayores).

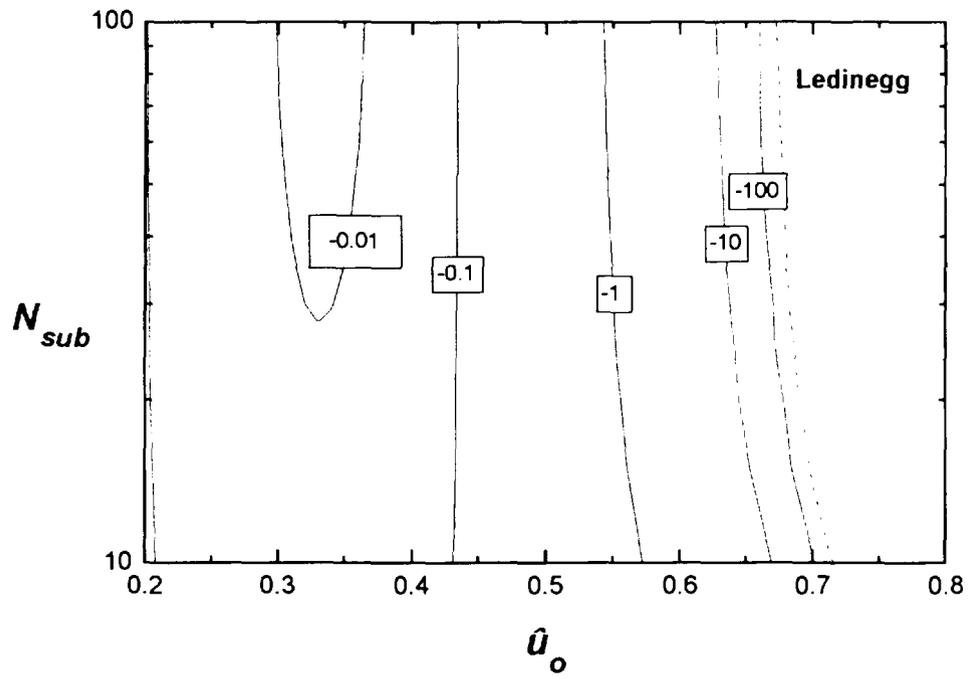


Figura 2.17: Curvas de nivel de  $\tau_{(2)}$ .

### 2.4 Estudio numérico de las bifurcaciones de Hopf

Resolviendo la ecuación iterativa (12) representamos la dinámica aproximada de nuestro sistema bajo distintas condiciones inestables. Las Fig. 2.18 ilustran un conjunto de ciclos límites estables presentes cuando tenemos una bifurcación de Hopf supercrítica dentro de la región de inestabilidad de Niemark. Estos ciclos límites representan en el espacio de las fases  $(\hat{u}_i, \lambda)$  las oscilaciones acotadas conocidas como “ondas de densidad”. La “nariz” que aparece en el ciclo para las mayores amplitudes se debe a la presencia del punto ensilladura o de inestabilidad de Ledinegg.

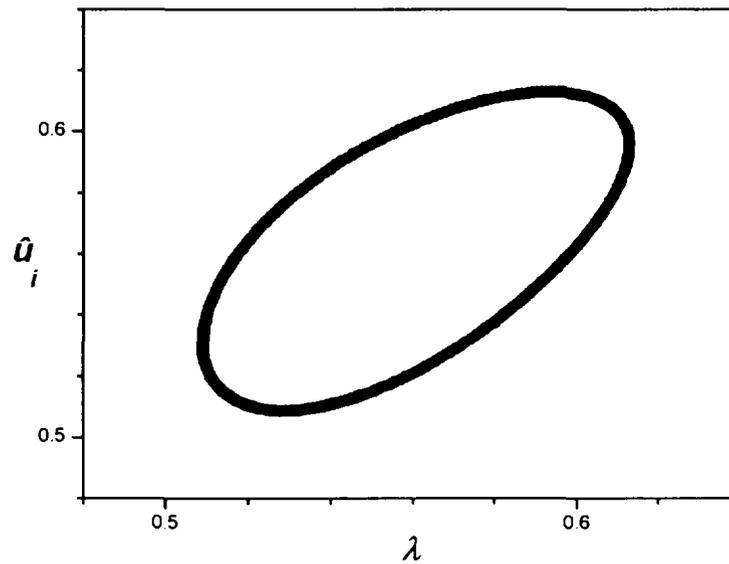


Figura 2.18a: Ciclo límite ( $N_{sub} = 50, N_{pch} = 89.1, k=19.5$ ).

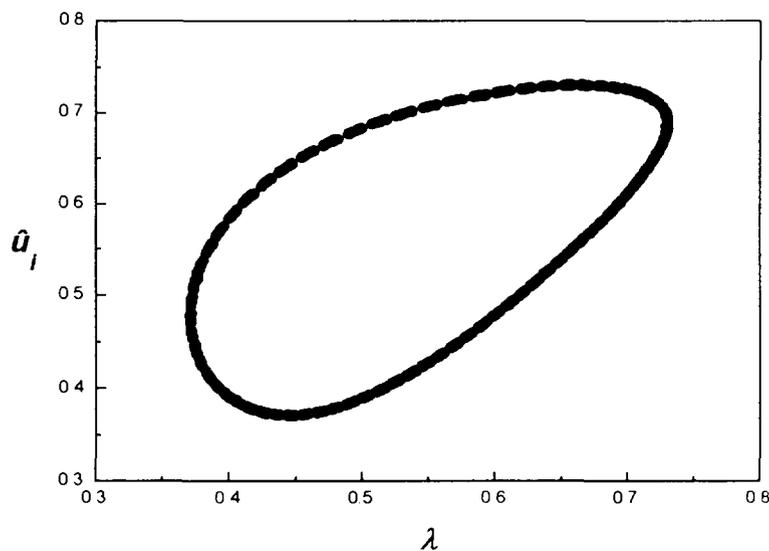


Figura 2.18b: Ciclo límite ( $N_{sub} = 50, N_{pch} = 90.1, k=19.5$ ).

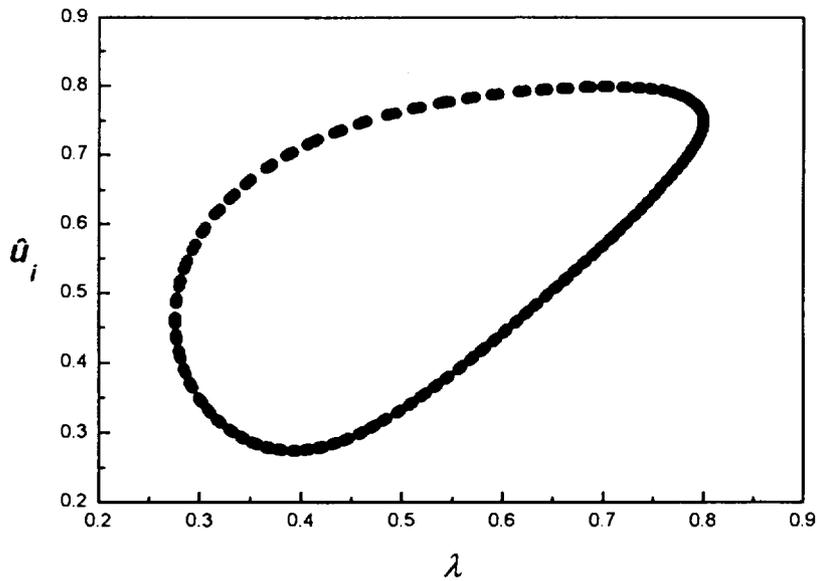


Figura 2.18c: Ciclo límite ( $N_{sub} = 50, N_{pch} = 91.1, k=19.5$ ).

Por otra parte, en presencia de una bifurcación de Hopf subcrítica dentro de la región de inestabilidad de Niemark, el sistema responde con oscilaciones divergentes a partir de cualquier perturbación inicial. En cambio, si el sistema se encuentra dentro de los márgenes de estabilidad lineal existe si un ciclo límite, aunque éste es inestable. La Fig. 2.19 ejemplifica la dinámica del sistema en el espacio de las fases: si el punto inicial se encuentra dentro del ciclo límite, éste decae oscilando al punto fijo ( y por lo tanto el sistema es estable), mientras que si ubicamos inicialmente al sistema fuera del ciclo límite, éste oscila en forma divergente.

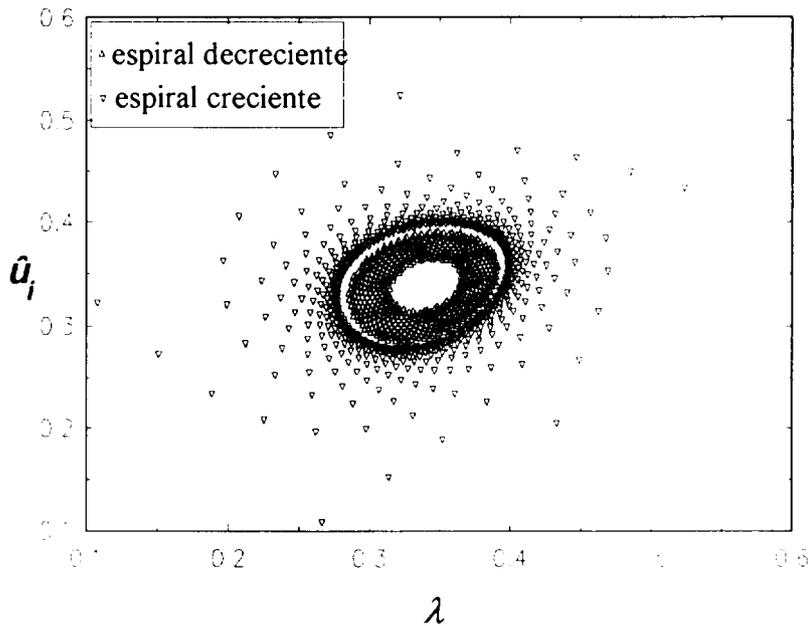


Figura 2.19: Bifurcación de Hopf subcrítica, modelo algebraico en demoras ( $N_{sub} = 20, N_{pch} = 58.8, k=19.5$ ).

En la Fig. 2.20 se observa el mismo fenómeno simulado ahora con el modelo completamente diferencial [39], encontrándose cualitativamente el mismo comportamiento anterior.

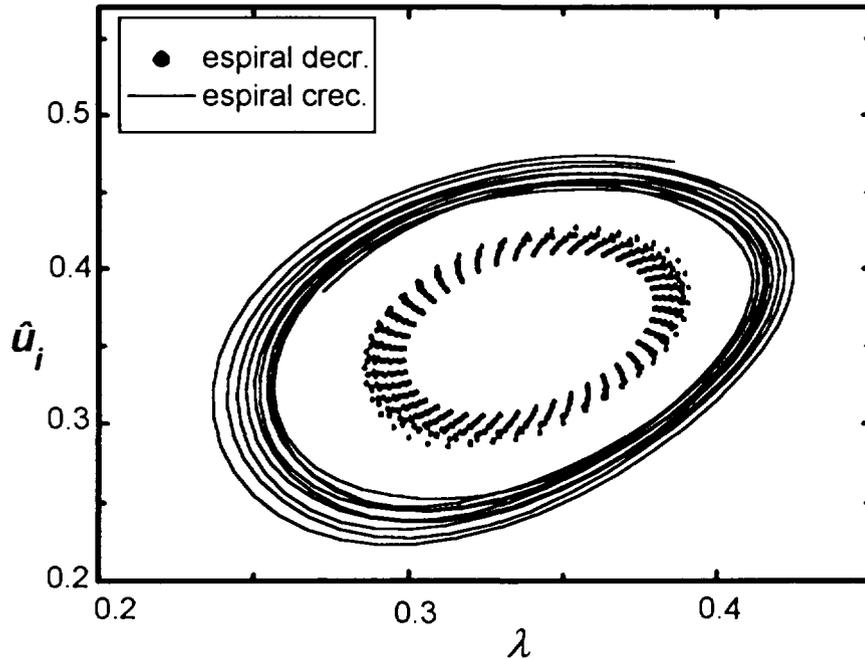


Figura 2.20: Bifurcación de Hopf subcrítica, modelo diferencial (ver Fig. 2.19)

Para el caso de las bifurcaciones subcríticas es de interés conocer la amplitud de los ciclos límites inestables, ya que constituyen los límites de estabilidad “no lineales” dentro de la región linealmente estable. Pueden calcularse numéricamente resolviendo repetidamente la ecuación (12) para distintos puntos iniciales del espacio de la fases  $(\hat{u}_i, \lambda)$  y aproximando cada punto del ciclo inestable por el par más cercano de puntos para los cuales la evolución del sistema es opuesta (estable o divergente). A su vez, al variar el parámetro sobre el que definimos la bifurcación de Hopf, (por ejemplo  $N_{pch}$ ) variará la amplitud de estos ciclos, describiendo un cono de estabilidad en el espacio tridimensional  $(\hat{u}_i, \lambda, N_{pch})$ . En las siguientes figuras se muestra el resultado de este cálculo numérico, para una bifurcación subcrítica dada. Las Fig. 2.21 representan el corte de la superficie cónica sobre los planos  $\lambda = 0$ , y  $\hat{u}_i = 0$  respectivamente, y fueron obtenidos considerando perturbaciones puras (en  $\hat{u}_i$  para el plano  $\lambda = 0$  y en  $\lambda$  para el plano  $\hat{u}_i = 0$ ).

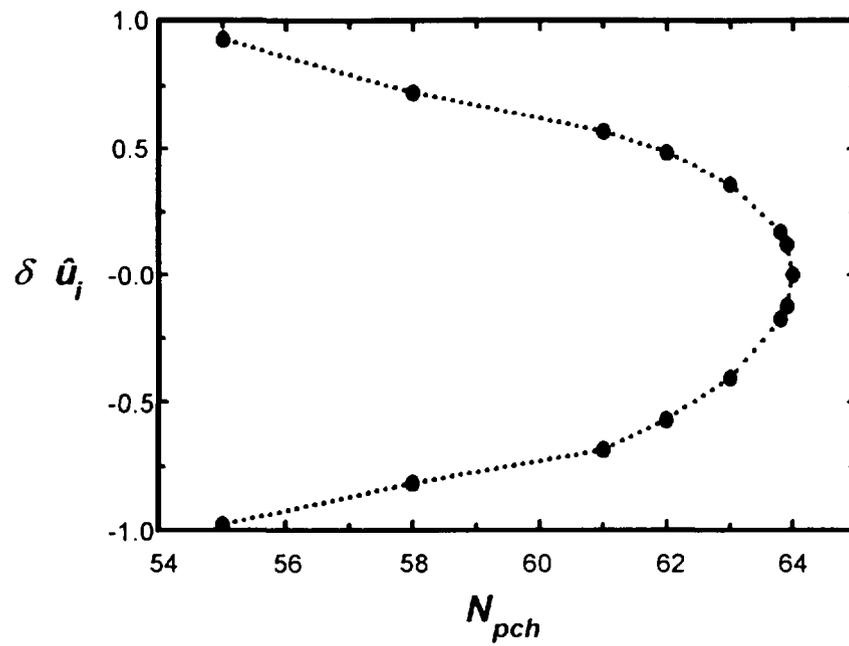


Fig. 2.21a: Envoltura de estabilidad para perturbaciones de la velocidad de entrada ( $\delta \hat{u}_i$ ), ( $N_{sub} = 25$ ,  $k = 19.5$ ).

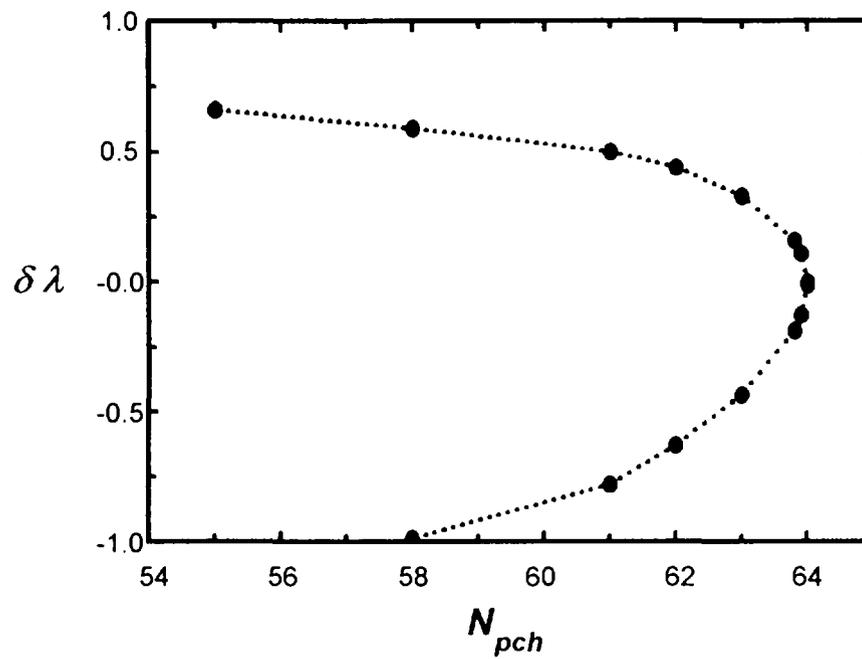


Fig. 2.21b: Envoltura de estabilidad para perturbaciones de la frontera de ebullición ( $N_{sub} = 25$ ,  $k = 19.5$ ).

Para el caso de las bifurcaciones supercríticas se llevó a cabo un estudio similar. La amplitud de los ciclos límites nos brinda información acerca del rango de variación de las variables del sistema en una onda de densidad. En la Fig. 2.22 se grafican los valores extremos de  $\delta(\hat{u}_i - \hat{u}_{i0})$  en función  $N_{pch}$  para un caso particular, pudiendo observarse el aumento de la amplitud de las oscilaciones al apartarse del límite de estabilidad. Finalmente, cabe destacar que si bien para perturbaciones pequeñas el sistema evoluciona hacia un ciclo límite, para condiciones inestables no cercanas al límite de estabilidad lineal el comportamiento resulta divergente si las perturbaciones superan un cierto valor.

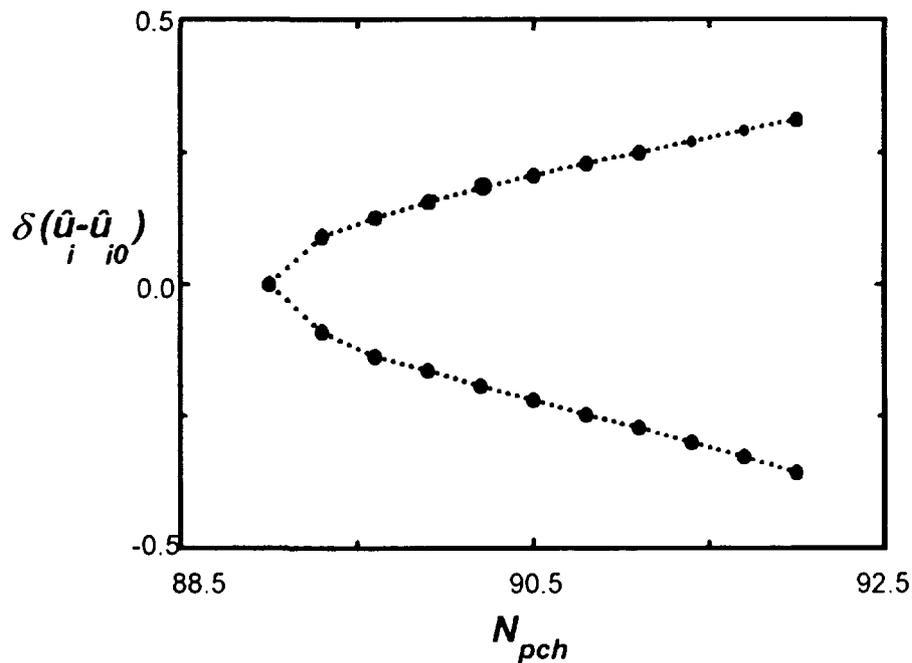


Figura 2.22: Amplitud de los ciclos límites estables ( $N_{sub} = 50$ ,  $k = 19.5$ ).

Se determinaron también en el espacio tridimensional los *loci* de ambos tipos de bifurcaciones en los mismos casos estudiados. Los resultados para la bifurcación subcrítica y supercrítica se ilustran en las Fig. 2.23 y 2.24 respectivamente.

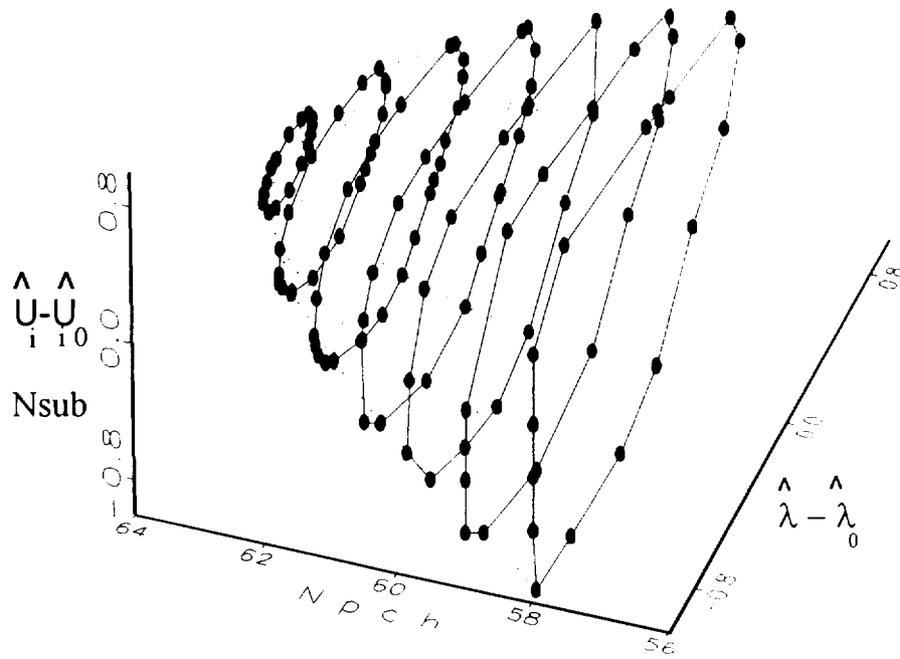


Figura 2.23: Superficie de estabilidad para una bifurcación subcrítica. ( $N_{sub}=25, k=19.5$ ).

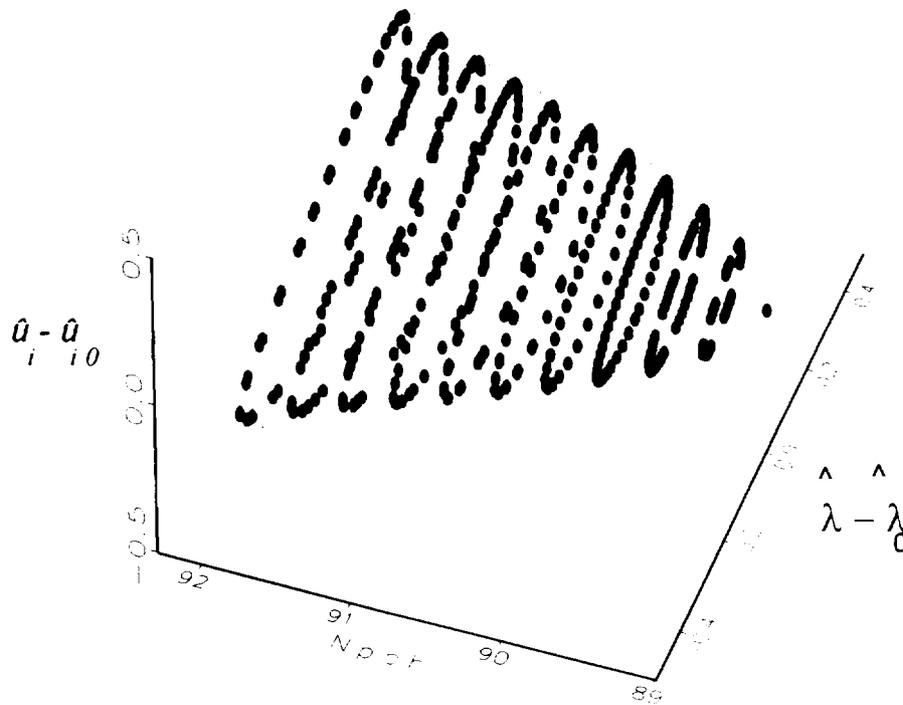


Figura 2.24: Locus de los ciclos límites estables. ( $N_{sub}=25, k=19.5$ ).

## 2.5 Modelado del término gravitatorio

Asumiremos nuevamente un balance de fuerzas cuasiestático en la ecuación de momento. Considerando ahora números de Froude moderados, el salto de presión externo al canal estará balanceado por las fuerzas de arrastre, aceleración y gravedad. Reescribimos así la ecuación (8):

$$(k_i - 1) \rho_f u_i^2 + (k_e + 1) \rho_e u_e^2 + \frac{M_{ch} g}{A_{xs}} = \Delta p \quad (84)$$

Considerando las mismas aproximaciones que planteamos en el modelado de altos números de Froude (donde el término de gravedad puede despreciarse), obtenemos nuevamente nuestra ecuación en demoras (10), con el agregado del término de gravedad:

$$(k_i - 1) \rho_f u_i^2(t) + (k_e + 1) \rho_f u_i(t-t_2) [u_i(t) - \Omega v u_i(t-t_1) + \Omega L] + \frac{M_{ch} g}{A_{xs}} = \Delta p \quad (85)$$

Adimensionalizando nuevamente esta ecuación en forma similar al caso anterior, y considerando  $M_{ref} = \rho_f A_{xs} L_{ch}$  (masa del canal si éste permanece totalmente en una fase), obtenemos:

$$(k_i - 1) \hat{u}_i^2(t) + (k_e + 1) \hat{u}_i(t-t_2) [\hat{u}_i(t) - N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1) + N_{sub}] + \frac{\hat{M}_{ch}}{Fr} = Eu \quad (86)$$

donde hemos definido el número de Froude como:  $Fr = \frac{u_{ref}^2}{gL}$ .

Asumiendo un perfil lineal de densidad a través de la región de dos fases en el canal, (cuarta hipótesis de nuestro modelo) la densidad a la salida,  $\rho_e$ , la frontera de ebullición,  $\hat{\lambda}$ , y la masa del canal,  $M_{ch}$ , están relacionadas adimensionalmente [40] por:

$$\hat{M}_{ch} = \hat{\lambda} + \frac{(1 - \hat{\lambda}) \ln(1 / \hat{\rho}_e)}{(1 / \hat{\rho}_e - 1)} \quad (87)$$

Combinando las ecuaciones (4), (7) y (9) previamente adimensionalizadas, junto con la (87), podemos reescribir ésta última:

$$\hat{M}_{ch} = \hat{u}_i(t-t_1) + \frac{(1 - \hat{u}_i(t-t_1)) \hat{u}_i(t-t_2) \ln \left( \frac{\hat{u}_i(t) + N_{sub}(1 - \hat{u}_i(t-t_1))}{\hat{u}_i(t-t_2)} \right)}{\hat{u}_i(t) + N_{sub}(1 - \hat{u}_i(t-t_1)) - \hat{u}_i(t-t_2)} \quad (88)$$

Las ecuaciones (86) y (88) se combinan para obtener una nueva ecuación en demoras (válida para cualquier número de Froude) que relaciona nuevamente los valores de la velocidad de entrada,  $u_i$ , en tres tiempos diferentes:  $t$ ,  $t-t_1$  y  $t-t_2$ , de acuerdo a:

$$\begin{aligned} & (k_e + 1) \hat{u}_i^2(t) + (k_e - 1) \hat{u}_i(t-t_2) (\hat{u}_i(t) - N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1) + N_{sub}) + \\ & + \frac{1}{Fr} \left[ \hat{u}_i(t-t_1) + \frac{(1-\hat{u}_i(t-t_1)) \hat{u}_i(t-t_2) \ln \left( \frac{\hat{u}_i(t) + N_{sub}(1-\hat{u}_i(t-t_1))}{\hat{u}_i(t-t_2)} \right)}{\hat{u}_i(t) + N_{sub}(1-\hat{u}_i(t-t_1)) - \hat{u}_i(t-t_2)} \right] = Eu \end{aligned} \quad (89)$$

Tomando nuevamente en cuenta la tercera aproximación de nuestro modelo, al igual que en el caso de gravedad despreciable, es decir que  $t_1 = t_2 / 2 = \tau$ , y dividiendo miembro a miembro por  $k_e+1$  para reescribiremos esta ecuación como:

$$\begin{aligned} & k \hat{u}_n^2 + \hat{u}_{n-2} (\hat{u}_n - N_{sub} \hat{u}_{n-1} + N_{sub}) \\ & + \frac{1}{Fr(k_e + 1)} \left[ \hat{u}_{n-1} + \frac{(1-\hat{u}_{n-1}) \hat{u}_{n-2} \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub}(1-\hat{u}_{n-1})}{\hat{u}_{n-2}} \right)}{\hat{u}_n + N_{sub}(1-\hat{u}_{n-1}) - \hat{u}_{n-2}} \right] = \frac{Eu}{k_e + 1} \end{aligned} \quad (90)$$

utilizando el factor  $k$  y definiendo las demoras de la velocidad de entrada en igual forma que en la sección previa.

Razonando similarmente al modelado del caso no gravitatorio, estas aproximaciones serán razonables si el tiempo de residencia en dos fases, esto es, el tiempo que necesita una partícula para recorrer la región en ebullición del canal, es pequeño.

### 2.5.1 Análisis de estabilidad con término gravitatorio

Linealizamos la ecuación (90) alrededor de un punto fijo,  $\hat{u}_0$  para estudiar los límites de estabilidad. Cuando los autovalores de la ecuación característica así obtenida sean complejos conjugados sobre el círculo unitario, el sistema será marginalmente estable. Obtenemos así una expresión analítica para el límite de estabilidad lineal de las inestabilidades de Niemark para moderados números de Froude:

$$\frac{N_{sub}}{N_{pch}} (2k + N_{sub} - N_{sub} N_{pch}) + \frac{1}{N_{sub} Fr (k_e + 1)} \left[ 1 + \alpha^{-1} - \ln \alpha - \frac{2 \ln \alpha}{N_{pch} - N_{sub}} \right] \quad (91)$$

donde:  $\alpha = 1 + N_{pch} - N_{sub}$ .

Este criterio analítico permite analizar la estabilidad del sistema frente a variaciones de los parámetros involucrados. Es interesante destacar que bajo estas hipótesis el margen de estabilidad lineal de las inestabilidades oscilatorias sólo depende de dos parámetros: uno, ya introducido en el modelo sin gravedad, expresa la relación entre los términos de fricción,  $k$ , y otro,  $Fr(k_e+1)$ , que puede interpretarse como el cociente entre el término de fricción a la salida y el gravitatorio. Éste último puede escribirse como:

$$N_g = Fr(k_e + 1) = \frac{u_{ref}^2 (k_e + 1)}{gL} \quad \text{Número de gravedad} \quad (92)$$

Si los autovalores de la ecuación característica son reales y menores que 1, el sistema pierde su estabilidad a través de las inestabilidades excursivas. El criterio de estabilidad así determinado puede escribirse como:

$$\frac{N_{sub}}{N_{pch}} (2 + 2k + N_{pch} - N_{sub}) + \frac{1}{N_{sub} Ng} \left[ 1 - \alpha^{-1} - N_{sub}^{-1} + (\alpha N_{sub})^{-1} + \frac{\ln \alpha}{N_{sub}} \right] = 0 \quad (93)$$

El análisis dimensional anterior puede extenderse al caso de las inestabilidades excursivas, como puede observarse de la ecuación (93).

Nótese que una alternativa a variar el  $Fr$ , para conseguir variar la importancia del término gravitatorio, es cambiar los factores de fricción. Esta alternativa es potencialmente útil en estudios experimentales, donde el rango de variación del  $Fr$  puede estar acotado a un rango pequeño por razones operativas.

En la Fig. 2.25 se ilustran los criterios de estabilidad dados por las ecuaciones (91) y (93) para distintos valores del  $Ng$ . Se aprecia en esta figura el efecto inestabilizante de la gravedad sobre las inestabilidades oscilatorias y estabilizante sobre las inestabilidades de Ledinegg. Estos efectos fueron encontrados previamente utilizando un modelo de parámetros distribuidos [41], observándose en la Fig. 2.25 un acuerdo cualitativo entre ambos para un amplio rango de subenfriamientos.

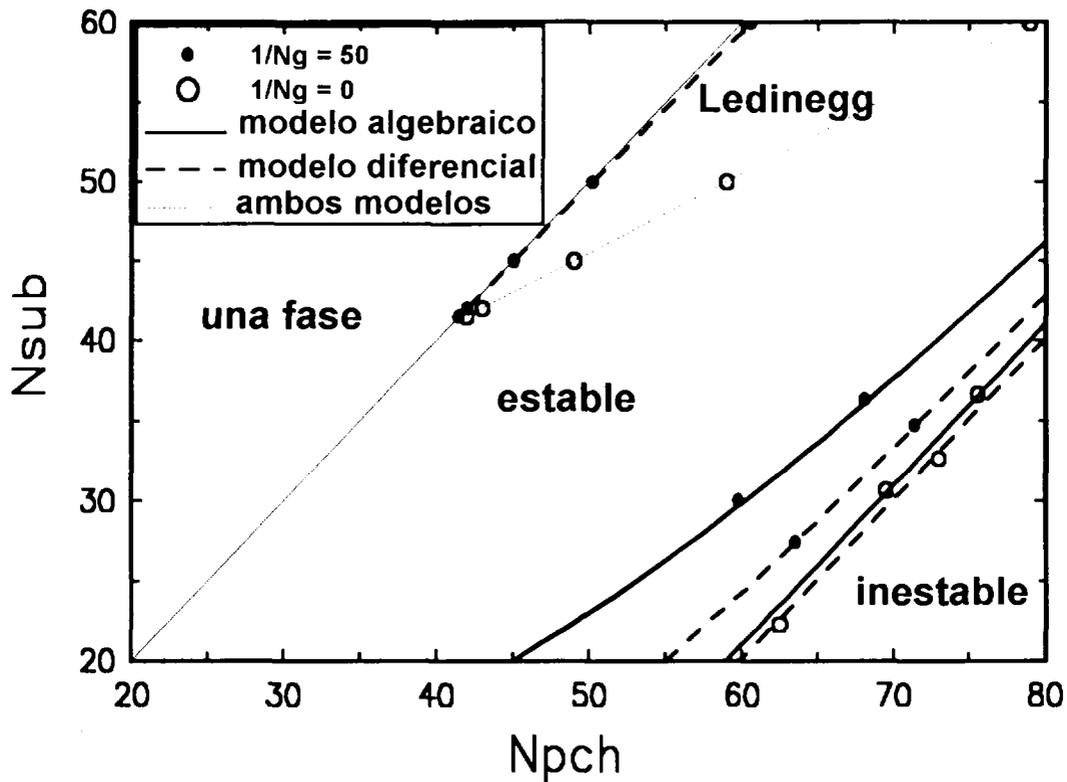


Figura 2.25: Márgenes de estabilidad lineal para distinta influencia de la gravedad.  
 ( $k_i = 40, k_e = 1, k = 19.5$ )

### 2.5.2 Influencia del término gravitatorio sobre las ondas de densidad

Estudiamos numéricamente la influencia de la gravedad sobre las inestabilidades de ondas de densidad. Conforme disminuimos  $Ng$ , además del efecto inestabilizante ya mencionado, pueden destacarse varios cambios:

- la frecuencia de las oscilaciones aumenta,
- la forma de los ciclos límites en el espacio  $\hat{u}, -\lambda$  cambia, rotando sus ejes en el sentido antihorario.
- el carácter de las bifurcaciones de Hopf cambia de supercrítico a subcrítico para cierto rango de subenfriamientos.
- los resultados obtenidos con este modelo se empobrecen en casos de gravedad dominante.

La variación de la frecuencia angular de las oscilaciones sobre el límite de estabilidad en función del  $Ng$  se representa en la Fig. 2.26, junto con los resultados del modelo diferencial [35]. Los valores obtenidos con ambos modelos son similares para números de gravedad altos a moderados, no pudiendo el modelo algebraico en demoras representar los casos de gravedad dominantes (*i.e.* bajos números de gravedad). En la Fig. 2.26 se distinguen tres zonas claramente:

1. Zona A (para  $Ng > 1$ ) de gravedad despreciable donde las frecuencias de las oscilaciones es varias veces menor  $2\pi$ .
2. Zona de transición B donde la gravedad tiene una importancia moderada, caracterizada por el hecho de que la frecuencia aumenta rápidamente su valor conforme disminuimos  $Ng$  ( $.01 < Ng < 1$ ).
3. Zona C (para  $Ng < 0.01$ ) donde la gravedad domina frente a los restantes términos, caracterizada por frecuencias altas, cercanas a  $2\pi$ .

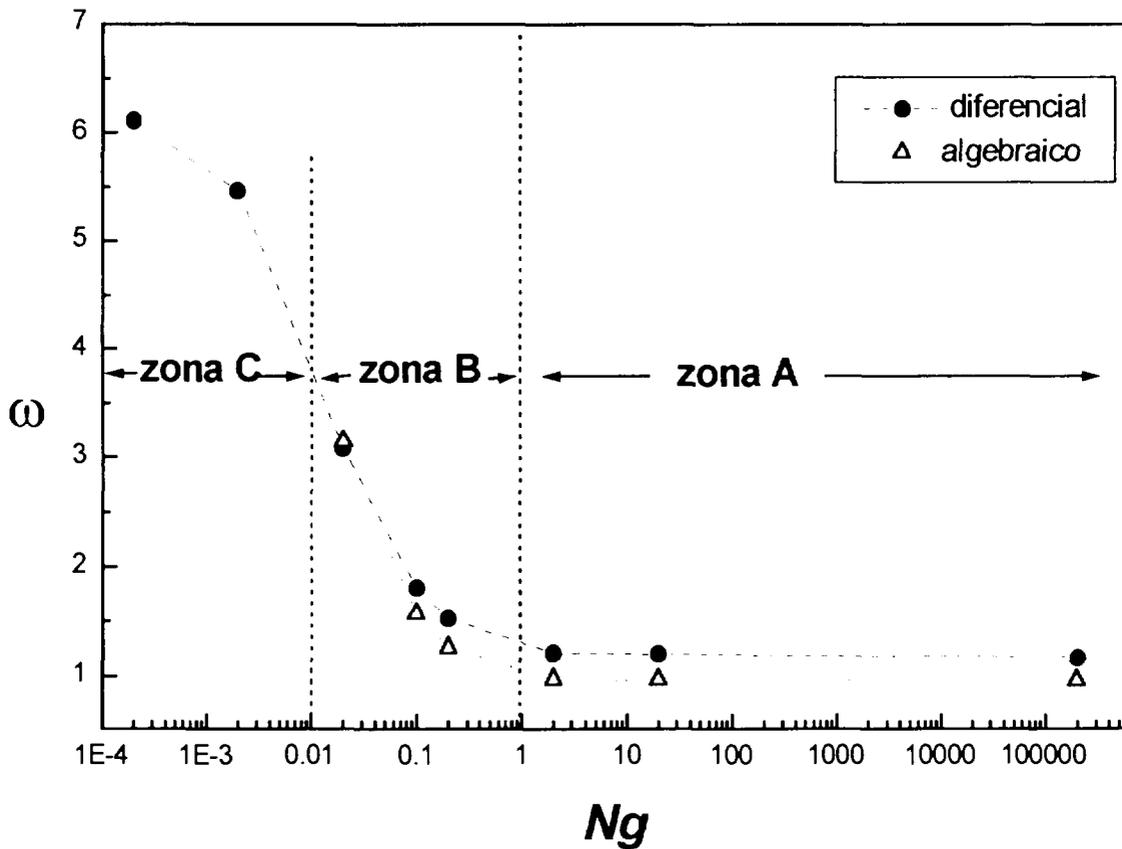


Figura 2.26: Frecuencia angular de las oscilaciones vs.  $Ng$  ( $k=19.5$ ,  $N_{sub}=70$ ).

Considerando oscilaciones armónicas, sabemos que la demora adimensional entre las ondas de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  se mantiene constante en 0.5. (ver Apéndice A). Podemos explicar entonces la rotación de los ejes de los ciclos límites proyectados en el espacio de estas variables analizando su desfase. Siendo la demora constante 0.5, y disminuyendo el período de las oscilaciones desde varias veces la unidad a 1, conforme disminuimos  $Ng$ , el desfase aumentará, tendiendo las oscilaciones de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  de fase a contrafase. Las Figs. 2.27 ilustran esta efecto.

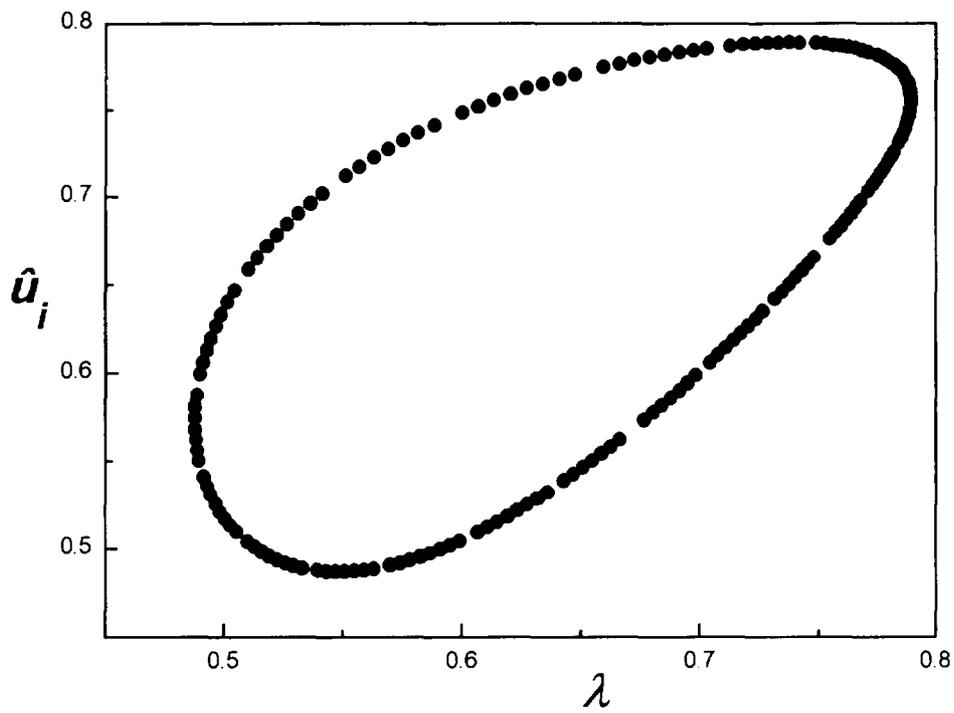


Figura 2.27a: Ciclo límite ( $N_{sub} = 70, N_{pch} = 110, k = 19.5, Ng = 0.08$ ).

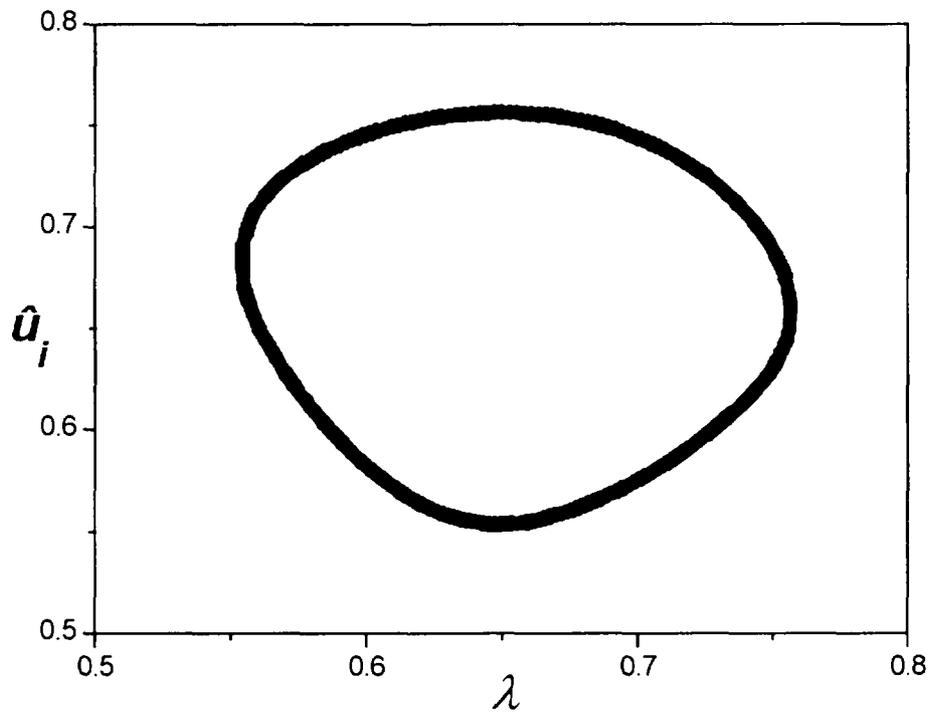


Figura 2.27b: Ciclo límite ( $N_{sub} = 70, N_{pch} = 106.1, k = 19.5, Ng = 0.02$ ).

En cuanto al tipo de bifurcación de Hopf presente se observa que el punto de transición de subcriticidad a supercriticidad sobre el límite de estabilidad, expresado en  $\hat{u}_i$ , aumenta por encima de 0.5 conforme disminuimos  $Ng$ . Este efecto no lineal potencia aún más el carácter inestabilizante de la gravedad sobre las inestabilidades oscilatorias. Este comportamiento se presenta también en el modelo diferencial, en forma cualitativamente semejante.

La Fig. 2.28 ilustra el ciclo límite obtenido con las mismas condiciones de la Fig. 2.27a. Las amplitudes de las oscilaciones comparadas para estos casos muestran un acuerdo razonable. Sin embargo, nótese de la Fig. 2.28 que para moderados números  $Ng$  las amplitudes de las oscilaciones en  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  son ligeramente asimétricas. Esta asimetría se acentúa si incrementamos la importancia del término gravitatorio, y siendo imposible de representar con el modelo algebraico en demoras (ver Ec. (7)) es probablemente una causa del pobre desempeño del modelo para estos casos.

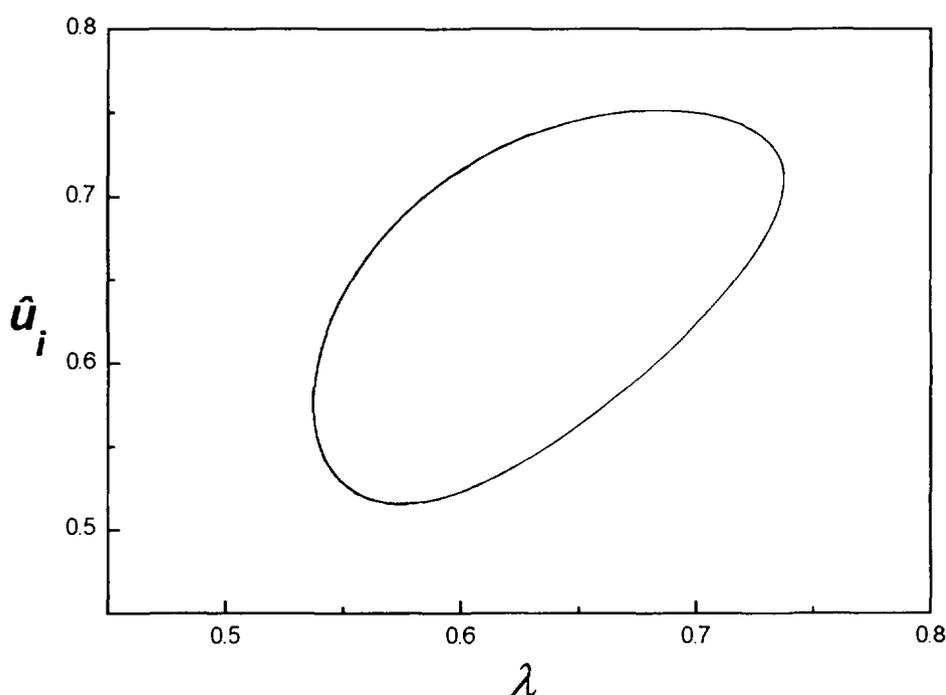


Figura 2.28: Ciclo límite para el modelo diferencial  
( $N_{nb} = 70$ ,  $N_{pch} = 110$ ,  $k_r = 40$ ,  $k_e = 1$ ,  $Ng = 0.08$ ).

Experiencias previas anteriores [40] demuestran la presencia de frecuencias mayores en flujos bajo convección natural (de gravedad dominante). En este estudio vemos que este fenómeno se encuentra también para flujos forzados donde la gravedad juega un papel preponderante frente a las otras fuerzas.

La ecuación (7) impone idénticas amplitudes de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  para todas las frecuencias de las oscilaciones. Considerando las ondas de  $\hat{u}_i$  y de  $\lambda$ , la función de transferencia entre ambas nos permite estudiar la respuesta en el dominio frecuencial del sistema. Así, el

módulo de la función de transferencia de nuestro modelo algebraico en demoras es constante y viene dada por:

$$\frac{\Lambda}{\bar{U}_i} = 1 \tag{94}$$

Por el contrario, la solución exacta de la función de transferencia de la frontera de ebullición puede obtenerse de [41], siendo su expresión:

$$\frac{\Lambda}{\bar{U}_i} = \frac{1 - e^{-s}}{s} \tag{95}$$

En la Fig. 2.29 se ilustran el módulo de ambas funciones dadas por las ecuaciones (94) y (95) en función de la frecuencia angular,  $\omega$ . Nótese que para frecuencias bajas (como corresponde a casos de gravedad despreciable) las amplitudes de las oscilaciones de  $\hat{u}$ , y  $\lambda$  son semejantes, mientras que para frecuencias mayores éstas últimas decrecen.

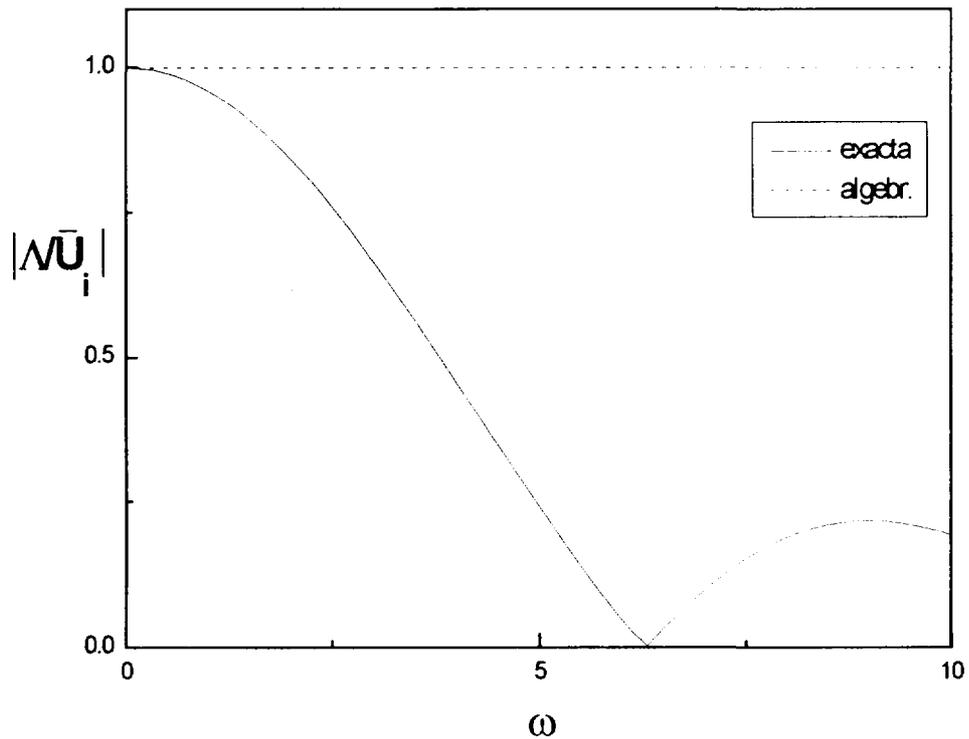


Figura 2.29. Comparación de los módulos de las oscilaciones de  $\hat{u}$ , y  $\lambda$  para distintas frecuencias segun nuestro modelo algebraico en demoras y la solución exacta.

### 2.5.3 Modelo algebraico en demoras con $\lambda$ calculado por trapecios

Nuestro modelo algebraico men demoras aproxima la integral que define  $\lambda$  por el valor en un punto (integración numérica según el método de Euler). Una aproximación de mayor orden consistiría en integrar por trapecios:

$$\lambda = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt' \cong \frac{\nu}{4} (u_i(t) + 2u_i(t-\tau) + u_i(t-2\tau)) \quad (96)$$

Utilizando esta nueva aproximación, la ecuación (90) en demoras que representa la dinámica del sistema se transforma ahora en:

$$k \hat{u}_n^2 + \hat{u}_{n-2} (\hat{u}_n - N_{sub} \hat{u}_1 + N_{sub}) + \frac{1}{Ng} \left[ \hat{u}_1 + \frac{(1-\hat{u}_1) \hat{u}_{n-2} \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub} (1-\hat{u}_1)}{\hat{u}_{n-2}} \right)}{\hat{u}_n + N_{sub} (1-\hat{u}_1) - \hat{u}_{n-2}} \right] = \frac{E\lambda}{k_e + 1} \quad (97)$$

donde llamamos  $\hat{u}_1 = (\hat{u}_n + 2 \hat{u}_{n-1} + \hat{u}_{n-2})/4$ .

Nótese que con esta nueva aproximación, las oscilaciones adimensionalizadas de la frontera de ebullición no necesariamente son simétricas con las de  $\hat{u}_1$ . Resolviendo numéricamente la ecuación iterativa (97) observamos que las oscilaciones de la frontera de ebullición en ondas de densidad son menores que las de  $\hat{u}_1$ , en concordancia con el comportamiento demostrado en el modelo diferencial. La función de transferencia para la frontera de ebullición viene dada por:

$$\frac{\Lambda}{\bar{U}_1} = \frac{1 + 2e^{-s/2} + e^{-s}}{4} \quad (98)$$

En la Fig. 2.30 se ilustra la comparación de ésta y la solución exacta. Nótese como la nueva aproximación mejora la respuesta para las frecuencias mayores.

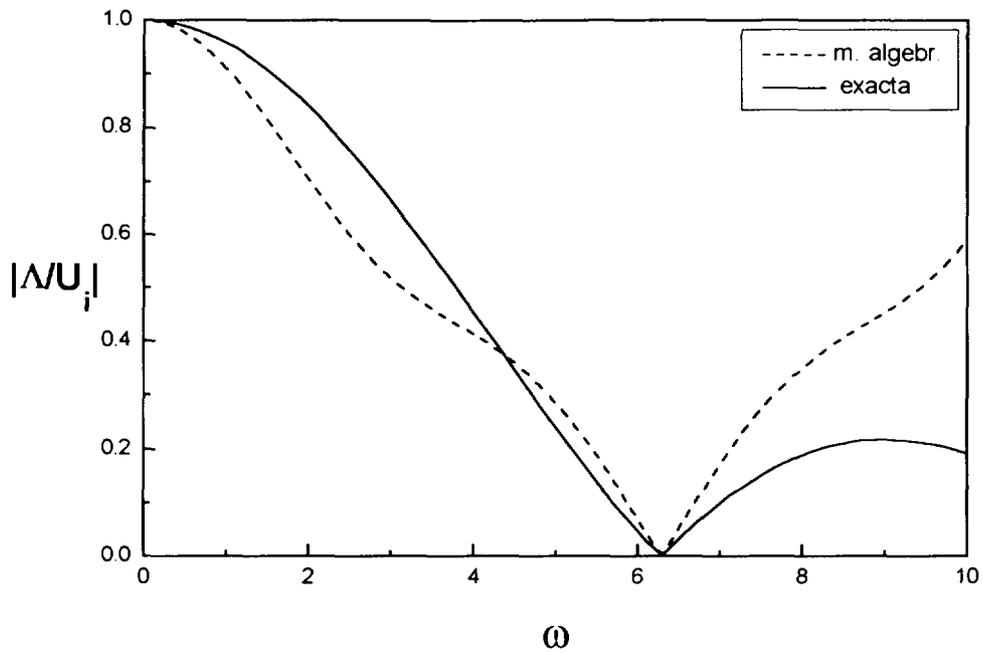


Figura 2.30: Comparación de los módulos de las oscilaciones de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  del modelo algebraico en demoras por trapecios y el modelo diferencial para distintas frecuencias.

En las Figs. 2.31 y 2.32 se muestran los ciclos límites y la evolución temporal obtenidas con esta aproximación. Es interesante destacar que esta nueva aproximación no modifica el límite de estabilidad lineal respecto del modelo anterior.

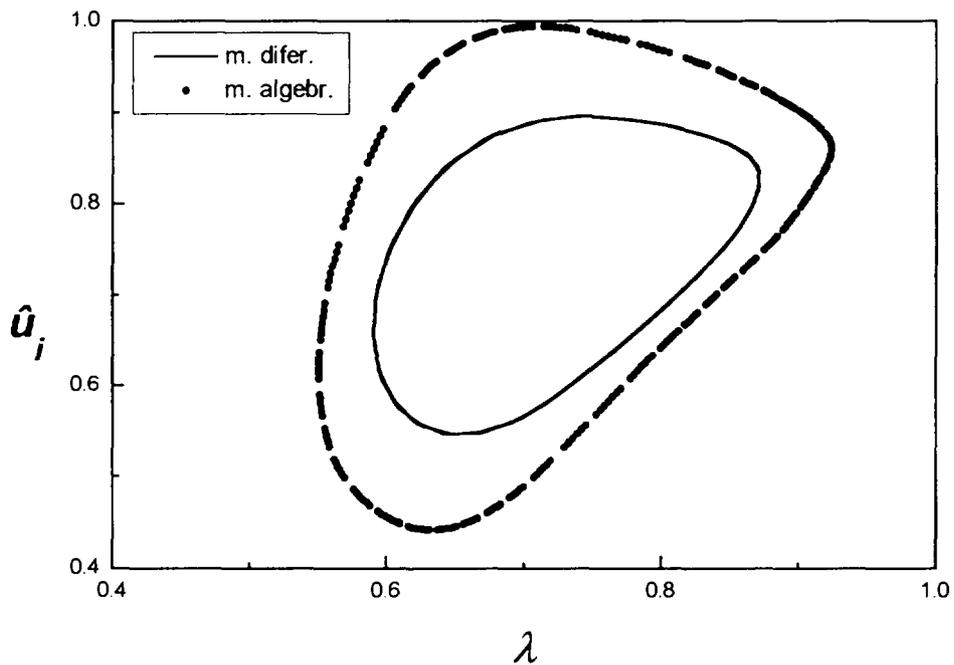


Figura 2.31: Ciclo límite para los modelos algebraico en demoras mejorado y diferencial ( $N_{sub} = 110$ ,  $N_{pch} = 151.6$ ,  $k = 19.5$  y  $Ng = .02$ ).

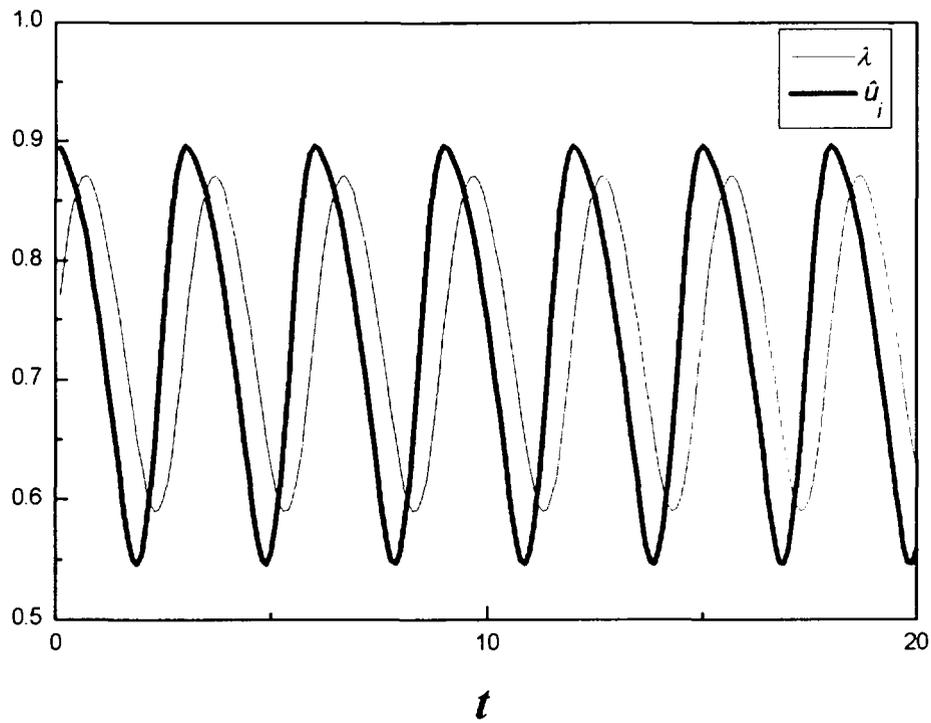


Figura 2.32a: Evolución temporal de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  según el modelo diferencial (ver Fig. 2.31).

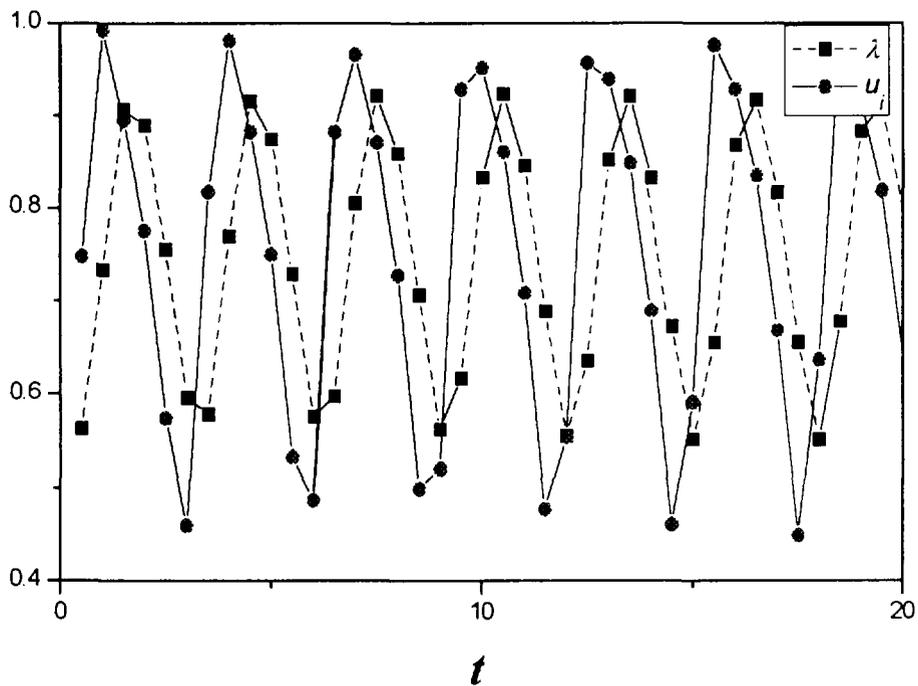


Figura 2.32b: Evolución temporal de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  según el modelo algebraico en demoras (ver Fig. 2.31).

## 2.6 Modelado del término de fricción distribuida

La caída de presión debida a la fricción a lo largo del canal puede escribirse como:

$$\Delta p_{fr} = \int_0^L \frac{\Lambda}{L} \rho u^2 dz \quad (100)$$

donde  $\Lambda$  es el número de fricción:  $\Lambda = (fL) / (2D)$ .

Siguiendo con las aproximaciones de nuestro modelo, asumiremos un balance cuasiestático de fuerzas en la ecuación de momento. Estudiaremos ahora casos donde el término dominante en la ecuación de momento es el de fricción distribuida. El salto de presión impuesto al canal es entonces balanceado por las fuerzas de fricción y de aceleración, es decir:

$$\Delta p_{fr} + \Delta p_{ace} = \Delta p_{ext} \quad (101)$$

Utilizaremos las mismas aproximaciones en la evaluación de la masa del canal que fueron descritas en el modelado del término gravitatorio. Imponiendo pues un perfil lineal de entalpía a lo largo de la región de dos fases, la densidad a la salida,  $\rho_e$ , la frontera de ebullición,  $\lambda$ , y la masa del canal,  $M_{ch}$ , se relacionan [9] a través de la ecuación (87). La ecuación de momento (101) se puede escribir entonces como:

$$\Lambda \left[ \frac{M_{ch}}{AL} u_i^2 + \frac{2u_i \left( \rho_f - \frac{M_{ch}}{LA} \right) (u_e - u_i)}{\rho_f / \rho_e - 1} \right] + \frac{\Lambda}{L} \left[ \left( \frac{u_e - u_i}{\frac{\rho_f}{\rho_e} - 1} \right)^2 \left( \frac{\left( \frac{\rho_f}{\rho_e} - 3 \right) (L - \lambda) \rho_f}{2} + \frac{M_{ch}}{A} - \lambda \rho_f \right) \right] - \rho_f u_i^2 + \rho_e u_e^2 = \Delta p_{ext} \quad (102)$$

Las ecuaciones (9),(88) junto con la (102) previamente adimensionalizada en la forma usual, pueden ser combinadas en una ecuación en demoras que relaciona los valores de la velocidad de entrada  $\hat{u}_n$ , a tres tiempos diferentes,  $t$ ,  $t-t_1$  y  $t-t_2$  :

$$\hat{u}_{n-2} \left( \hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1}) \right) - \hat{u}_n^2 + \Lambda \left\{ \hat{u}_{n-1} \hat{u}_n^2 + \frac{(1 - \hat{u}_{n-1}) \hat{u}_{n-2} \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})}{\hat{u}_{n-2}} \right) \hat{u}_n^2}{\left( \hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1}) - \hat{u}_{n-2} \right)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})^2 \hat{u}_n \hat{u}_{n-2} \left[ \hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1}) - \hat{u}_{n-2} \left( 1 + \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})}{\hat{u}_{n-2}} \right) \right) \right]}{\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1}) - \hat{u}_{n-2}} \\
 & + \frac{N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})^3 \hat{u}_{n-2} \left( \hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1}) - 3\hat{u}_{n-2} \right)}{2 \left( \hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1}) - \hat{u}_{n-2} \right)^2} \Bigg\} = Eu \tag{103}
 \end{aligned}$$

donde definimos las demoras en la forma usual.

### 2.6.1 Análisis de puntos fijos

Los puntos fijos del mapa bidimensional dado por la ecuación (103), pueden hallarse tomando  $\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0 = N_{sub} / N_{pch}$ . La ecuación (104a) y (104b) expresan esta relación impuesta sobre la ecuación (103) para flujos bifásicos ( $\hat{u}_0 \leq 1$ ) y de una fase ( $\hat{u}_0 > 1$ ) respectivamente:

$$\left( \frac{\Lambda N_{sub}}{2} \right) \hat{u}_0^3 + (\Lambda - N_{sub} - \Lambda N_{sub}) \hat{u}_0^2 + \left( 1 + \frac{\Lambda}{2} \right) N_{sub} \hat{u}_0 = Eu \tag{104a}$$

$$\Lambda \hat{u}_0^2 = Eu \tag{104b}$$

La discusión de las ecuaciones (104) se ilustra en la Fig. 2.33 en el plano paramétrico ( $Eu, N_{sub}$ ). En ella, en las regiones a y b existen solamente una raíz real, en dos fases y una fase respectivamente. La región c corresponde a tres raíces reales con condiciones de ebullición y la d a una en una fase y dos en ebullición.

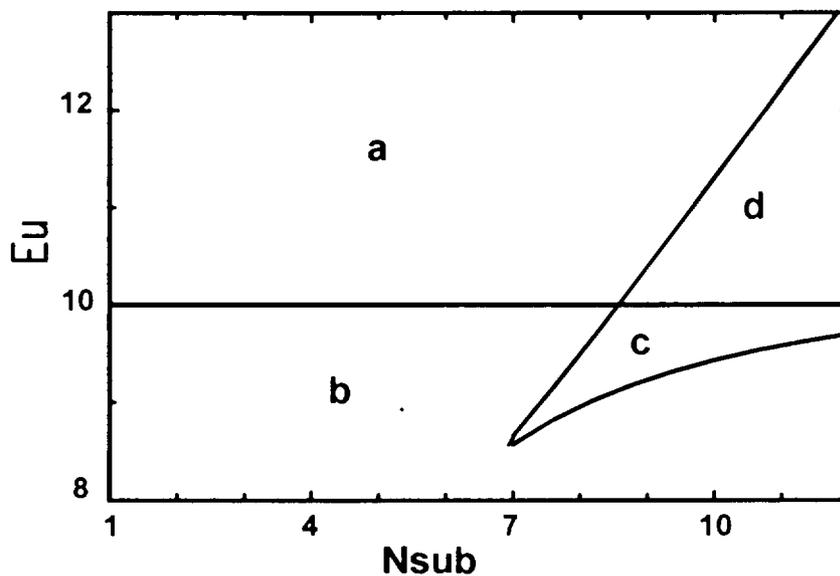


Figura 2.33: Clasificación de puntos fijos. ( $\Lambda = 10$ ).

Las curvas características obtenidas con las ecuaciones (104) se ilustran para varios números de subenfriamientos en la Fig. 2.34.

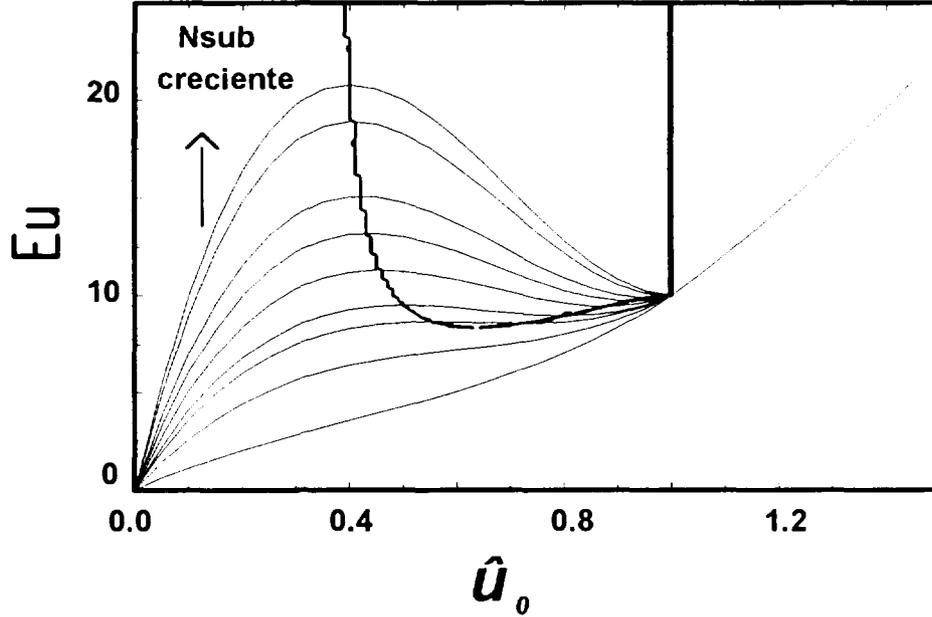


Figura 2.34: Curvas características para diferentes  $N_{sub}$  ( $\Lambda=10$ ).

En la Fig. 2.34 las líneas gruesas encierran la región bifásica donde la curva característica posee pendiente negativa, y por lo tanto aparecen las inestabilidades excursivas de Ledinegg si el sistema está bajo un salto de presión externo constante [32]. Por esto, diferenciando las ecuaciones (104) respecto a  $\hat{u}_0$  y calculando los extremos relativos (máximos y mínimos) de las curvas características, se obtuvo un criterio analítico para las inestabilidades de Ledinegg:

$$\hat{u}_0^{max} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}} \right) + \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}}} \quad (105a)$$

$$\hat{u}_0^{min} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}} \right) - \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}}} \quad (105b)$$

No hay inestabilidades de Ledinegg cuando las raíces de las ecuaciones (105) son imaginarias, *i.e.*, para valores de  $N_{sub}$  menores que:

$$N_{sub} = \frac{2\Lambda(2(\Lambda + 1) + \sqrt{3\Lambda(\Lambda + 2)})}{\Lambda^2 + 2\Lambda + 4} \quad (106)$$

La Fig. 2.35 muestra esta condición para la existencia de las inestabilidades de Ledinegg, definida por la ecuación (106). Nótese que para:

$$N_{sub} > 4 + 2\sqrt{3} \tag{107}$$

la inestabilidad de Ledinegg es siempre posible independientemente del valor de  $\Lambda$ .

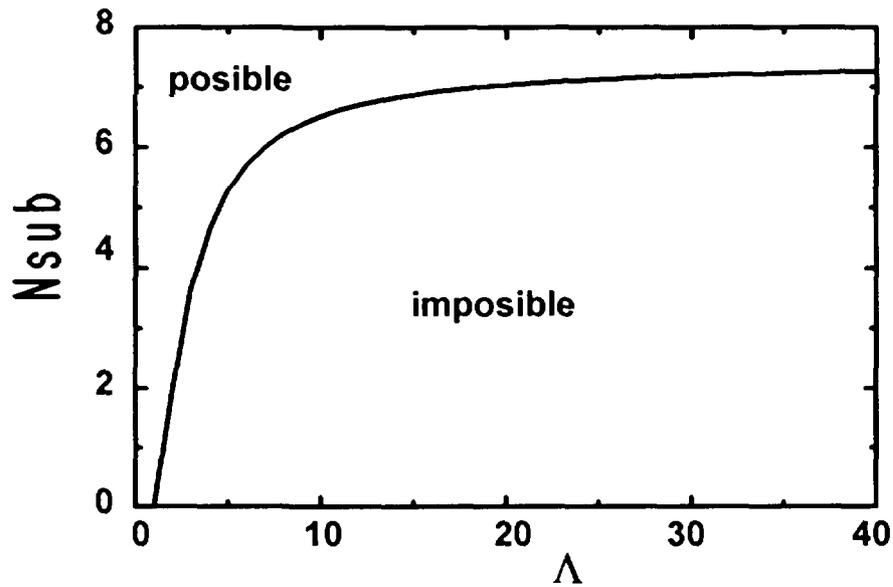


Figura 2.35: Condición para la existencia de Ledinegg.

La región paramétrica dentro de la cual ocurren las inestabilidades excursivas, se puede expresar en función del  $N_{pch}$  como:

$$\frac{3N_{sub}}{2\left(1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}}\right) + \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}^2}}} \leq N_{pch} \leq \frac{3N_{sub}}{2\left(1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}}\right) - \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}^2}}} \tag{108}$$

Para números de subenfriamiento altos, el límite superior de esta región,  $\hat{u}_0^{max}$  encuentra al límite de una fase ( $\hat{u}_0 = 1$  o  $N_{sub} = N_{pch}$ ) si:

$$N_{sub} \geq 2\Lambda \tag{109}$$

Sustituyendo el valor de  $N_{sub}$  obtenido con la condición (106) en las ecuaciones (105), podemos determinar el punto límite  $\hat{u}_0$  desde el cual se bifurcan dos ramas encerrando la región donde la pendiente de la curva característica del canal es negativa. Combinando este valor con la ecuación (109), obtenemos otra condición necesaria para la existencia de este punto límite:

$$\Lambda \geq 1 \tag{110}$$

### 2.6.2 Análisis de estabilidad lineal

Consideremos las demoras relacionadas en igual forma que antes  $t_1 = t_2/2 = \tau$ . Linealizando la ecuación (103) alrededor de un punto fijo,  $\hat{u}_0$ , obtenemos nuevamente una expresión analítica del límite de estabilidad lineal de las ondas de densidad[43]:

$$N_{pch} = \frac{-2 + \Lambda + N_{sub} + \Lambda N_{sub}}{2 + \Lambda} + \frac{\sqrt{4 - 4\Lambda + N_{sub}^2 + 2\Lambda N_{sub} + \Lambda^2 - 4N_{sub} + 4N_{sub}\Lambda^2}}{2 + \Lambda} \quad (111)$$

En las Figs. 2.36 se grafican los márgenes de estabilidad obtenidos con las ecuaciones (108) y (111) para diferentes  $\Lambda$ . Es interesante notar la “nariz” que dibujan los límites de Ledinegg. Nótese que al incrementar la fricción (*i.e.* incrementando  $\Lambda$ ) se observa un efecto estabilizante tanto sobre las inestabilidades oscilatorias como ercursivas. Estos efectos se encuentran también en el modelo diferencial [35] y para el caso de las ondas de densidad, en el criterio de Ishii [34].

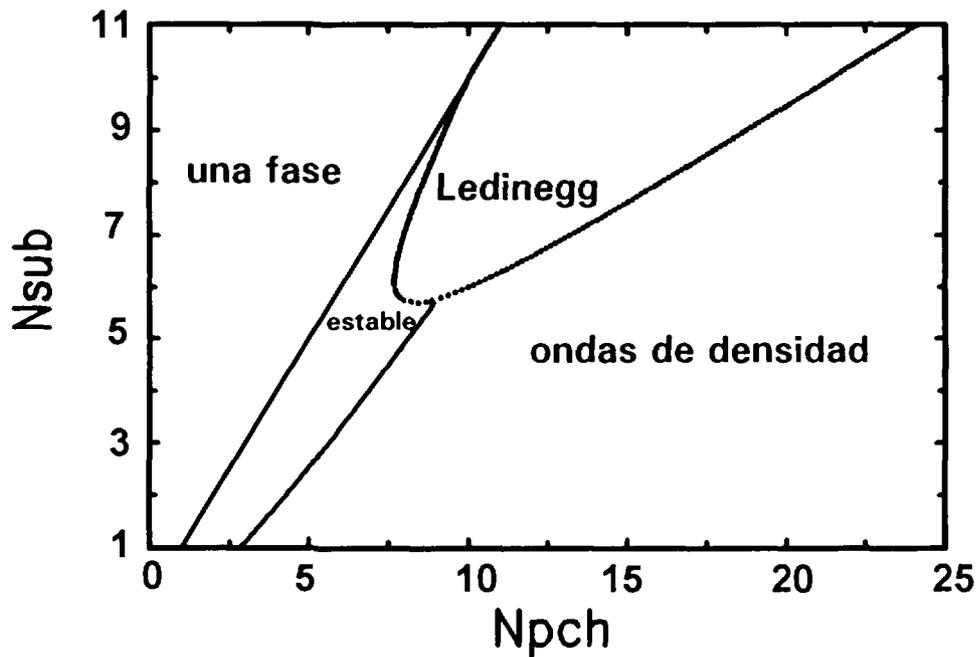


Figura 2.36a. Mapa de estabilidad para  $\Lambda=5$ .

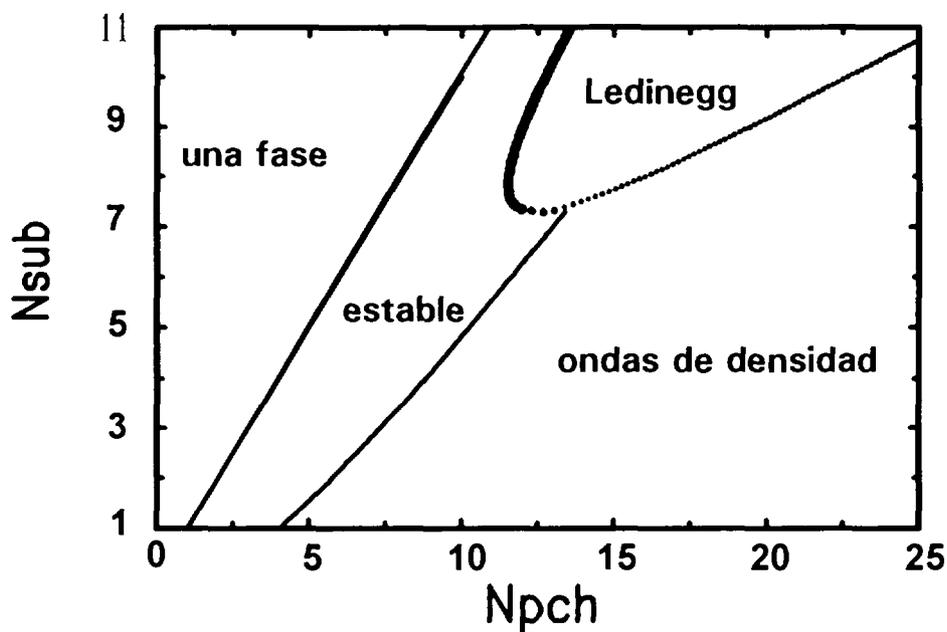


Figura 2.36b: Mapa de estabilidad para  $\Lambda=50$ .

### 2.6.3 Análisis numérico

Resolviendo la ecuación iterativa (103) se estudió numéricamente el comportamiento dinámico del sistema en una forma similar a los casos anteriormente presentados. Se identificaron nuevamente tanto focos supercríticos como subcríticos de bifurcaciones de Hopf. En la Fig. 2.37 se ilustra el ciclo límite descrito por la trayectoria del sistema en el espacio de las fases  $(\hat{u}_i, \lambda)$  para un caso de supercriticidad.

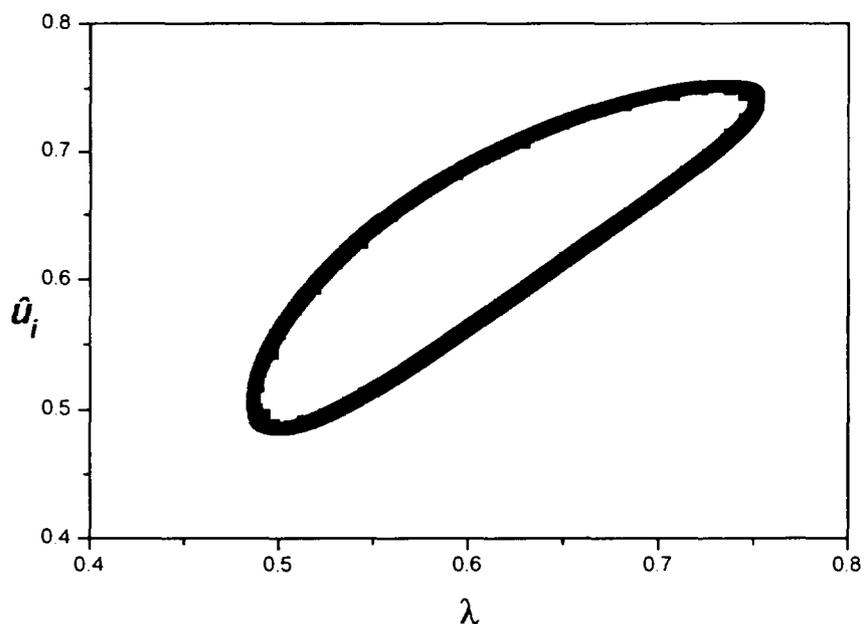


Figura 2.37: Trayectoria obtenida con el modelo algebraico ( $N_{sub}=5, N_{pch}=8.2, \Lambda=5$ ).

## 2.7 Conclusiones del modelo algebraico en demoras

Se presenta un estudio teórico de la dinámica de un canal en ebullición llevado a cabo con un modelo algebraico en demoras para flujos donde las fricciones concentradas son los términos dominantes en la ecuación de momento. En éste, las hipótesis realizadas permiten representar la compleja dinámica del sistema en estudio mediante una simple ecuación algebraica.

El análisis lineal de la dinámica de dicho fenómeno aporta criterios analíticos sencillos para calcular los márgenes de estabilidad, de buen acuerdo en un amplio rango de subenfriamientos con modelos complejos. La simpleza de los mismos permite estudiar analíticamente el efecto de incrementar las fricciones a la entrada sobre la estabilidad del flujo, mostrando que éste puede ser inestabilizante. Este resultado es sorprendente si consideramos que la regla práctica le asigna el sentido opuesto. Adicionalmente, la simulación numérica puede realizarse con un significativo ahorro computacional (del orden de 1000 veces más rápido que los modelos completamente diferenciales) [30]. Se pueden representar efectos no lineales conocidos (descritos matemáticamente con bifurcaciones de Hopf supercríticas y/o subcríticas) que permiten explicar las inestabilidades oscilatorias, dentro de la cuenca de estabilidad de este fenómeno.

Se estudió el carácter de las inestabilidades oscilatorias utilizando el método perturbativo de Hopf, utilizando la fricción a la entrada del canal como parámetro de la bifurcación. El análisis lleva a la identificación de las bifurcaciones subcríticas y supercríticas en forma completamente analítica. Es posible establecer una regla del arte: las bifurcaciones subcríticas aparecen para  $\hat{u}_0$  menores de 0.5 en sistemas con gravedad despreciable.

Se describió el comportamiento oscilatorio no lineal del sistema usando una función de riesgo, la cual provee una medida de la amplitud de los ciclos límites (sean estables o inestables). Se observa que el valor de este indicador depende para subenfriamientos grandes solamente de  $\hat{u}_0$ . Dos resultados interesantes fueron encontrados analíticamente para este indicador de riesgo: su máximo relativo (0.201, en  $\hat{u}_0 = 0.211$ ) y su límite en la dirección asintótica ( $\hat{u}_0 \rightarrow 0$ ,  $N_{sub} \rightarrow \infty$ , igual a 0.1875). Estos resultados son significativos en tanto que nos dan información acerca de cuándo podemos esperar que un sistema dentro de los márgenes de estabilidad se vuelva inestable (con oscilaciones divergentes) ante perturbaciones de amplitud finita. También se determinó analíticamente a primer orden la amplitud y frecuencia de las oscilaciones en función del apartamiento del límite de estabilidad lineal.

Fue modelada la influencia de la gravedad en el problema anterior bajo las hipótesis de este modelo algebraico en demoras. Con esta herramienta se obtuvieron nuevamente criterios analíticos de los márgenes de estabilidad lineal. Como un efecto destacable, se encontró que el término gravitatorio causa un efecto inestabilizante sobre las inestabilidades oscilatorias y estabilizante sobre las inestabilidades excursivas, en acuerdo cualitativo con modelos complejos [35] para un rango amplio de subenfriamientos.

Se estudiaron numéricamente las características no lineales de la dinámica del sistema en función de la preponderancia del término gravitatorio. Se encontró que al aumentar ésta, aumenta la frecuencia de las oscilaciones y disminuye la amplitud de las oscilaciones de  $\lambda$ . Se encontró además que al aumentar la importancia de la gravedad se encuentran bifurcaciones de Hopf subcríticas para  $\hat{u}_0 > 0.5$ , donde antes se encontraban focos supercríticos. Esto último acentúa el carácter inestabilizante de la gravedad sobre las inestabilidades de ondas de densidad antes mencionado.

El análisis dimensional de las ecuaciones resultantes sugiere la conveniencia de utilizar un nuevo parámetro adimensional para representar la preponderancia del término gravitatorio, reduciendo el número total de parámetros independientes. Los resultados preliminares obtenidos utilizando modelos más sofisticados[35] sugieren que para estos casos, de flujos dominados por fricciones y gravedad, estos resultados parecen extenderse razonablemente. Como corolario de este análisis, surge que una alternativa válida para variar la importancia del término gravitatorio indirectamente, es variar la magnitud de los coeficientes de las fricciones concentradas.

Se desarrolló un modelo algebraico en demoras para estudiar los flujos dominados por fricciones distribuidas con simplificaciones similares a los casos antes tratados. Con este modelo fueron determinados analíticamente los márgenes de estabilidad y puntos fijos. Se encontró que aumentando las fricciones distribuidas, (*i.e.* incrementando  $\Lambda$ ), éste introduce un efecto estabilizante sobre las inestabilidades del tipo de ondas de densidad y de Ledinegg. Observando su comportamiento, el modelo muestra acuerdo cualitativo con otras aproximaciones de parámetros distribuidos.

## Capítulo 3

### Modelado de oscilaciones de grandes amplitudes

El estudio teórico llevado a cabo para las bifurcaciones de Hopf (utilizando técnicas perturbativas) tiene validez en una angosta franja de la región de inestabilidad en el espacio de los parámetros del sistema. Este estudio permitió identificar fases dinámicas caracterizadas por oscilaciones de características divergentes. Sin embargo, en regímenes oscilatorios de gran amplitud, cabe esperar que entren en juego nuevos fenómenos en la compleja dinámica de los flujos en ebullición.

En este capítulo desarrollaremos un modelo numérico que nos permita:

- modelar sistemas basados en canales en ebullición ante situaciones en las cuales aparezca inversión de flujo o que la frontera de ebullición abandone el canal,
- y estudiar la interacción de las oscilaciones supercríticas y subcríticas con estas nuevas no linealidades consideradas.

Consideremos un canal refrigerante como el que se muestra en la Fig. 3.1. Este consta de un tramo de ingreso adiabático de longitud  $L_i$  y una sección calefaccionada de longitud  $L_c$  en la cual se entrega una potencia constante y uniforme  $Q$ . El fluido ingresa al tramo de entrada como líquido subenfriado a una cierta temperatura  $T_i$  constante pasando luego a la sección calefaccionada donde al alcanzar la temperatura de saturación comienza a hervir, dejando finalmente el canal como una mezcla bifásica de líquido y vapor. Dada la complejidad del problema, se plantearon las mismas hipótesis simplificativas que antes, respecto al flujo:

- flujo homogéneo (deslizamiento despreciable entre las fases) en equilibrio termodinámico,
- las variaciones de presión son pequeñas frente a la presión total del sistema,
- ambas fases se consideran incompresibles,
- flujo de calor uniforme y constante en el tiempo,
- área de pasaje uniforme,

- la disipación viscosa, las energías cinética y potencial y el trabajo de flujo, son despreciables,
- las fricciones están concentradas en ambos extremos del canal calefaccionado, y ahora además siendo
- la temperatura de entrada del fluido al primer tramo,  $T_i$  constante.

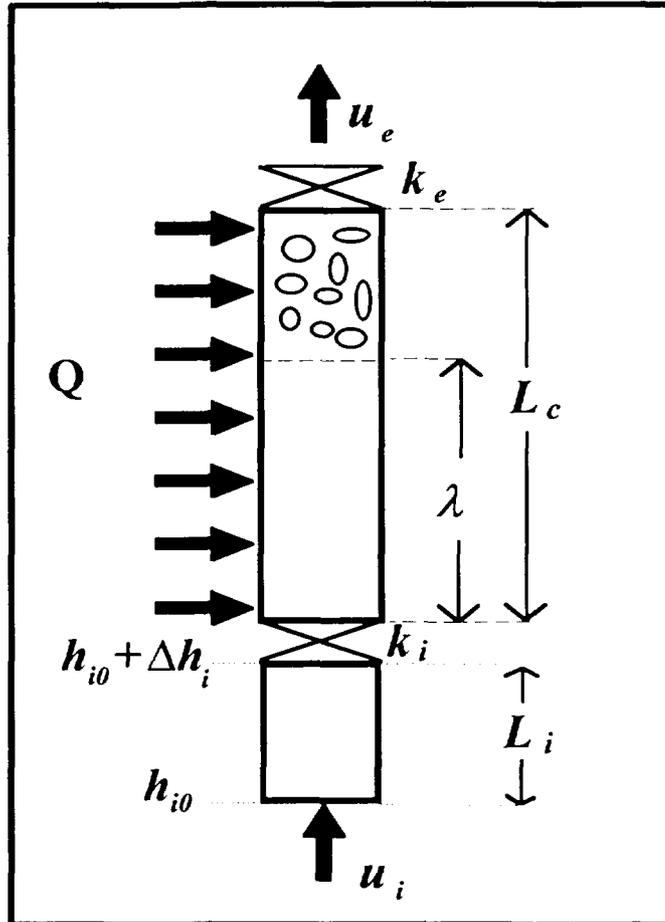


Figura 3.1: Esquema del canal en ebullición.

Bajo estas suposiciones las ecuaciones de conservación para un flujo unidimensional bifásico se pueden escribir en forma adimensional como [27]:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{\rho}\hat{u})}{\partial \hat{z}} = 0 \tag{112}$$

$$\frac{\partial (\hat{\rho}\hat{h})}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})}{\partial \hat{z}} = 0 \quad \text{en el tramo adiabático} \tag{113a}$$

$$\frac{\partial (\hat{\rho}\hat{h})}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{\rho}\hat{h}\hat{u})}{\partial \hat{z}} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}} \quad \text{en los tramos calefaccionados} \quad (113b)$$

$$\frac{\partial (\hat{\rho}\hat{u})}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{\rho}\hat{u}^2)}{\partial \hat{z}} = -k_i \delta(\hat{z} - \hat{z}_i) \hat{u}_i |\hat{u}_i| - k_e \delta(\hat{z} - \hat{z}_e) \hat{\rho}_e \hat{u}_e^2 - \frac{\hat{\rho}}{Fr} - Eu \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} \quad (114)$$

y las ecuaciones de estado correspondientes (con  $\hat{h}_f \leq 0$ ) son:

$$\hat{\rho} = 1 \quad \text{si } \hat{h} \leq 0 \quad (115a)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1 + N_{pch} \hat{h}} \quad \text{si } \hat{h} > 0 \quad (115b)$$

donde  $N_{sub}$ ,  $N_{pch}$ ,  $Fr$  y  $Eu$  son, respectivamente, los números de subenfriamiento, cambio de fase, Froude y Euler [27].

Se divide el sistema en tres zonas para su resolución [44]:

- Una primera adiabática de longitud  $L_s$ , donde el fluido ingresa con entalpía constante,  $h_{io}$ , y sale con entalpía variable  $h_i(t) = h_{io} + \Delta h_{io}(t)$  solución del problema.
- Una segunda zona de líquido subenfriado ubicada dentro de la sección calefaccionada, en la cual el líquido es calentado hasta alcanzar la entalpía de saturación, de longitud  $\lambda(t)$ .
- Una tercera zona de mezcla bifásica hasta la salida del canal, de longitud  $L_c - \lambda(t)$ .

La longitud de subenfriamiento en el canal calefaccionado,  $\lambda(t)$ , está determinada por las historias de la velocidad de entrada,  $u_i(t)$ , y de la entalpía de entrada,  $h_i(t)$ , dado que:

$$\hat{\lambda}(\hat{t}) = \int_{\hat{t} - \hat{v}(\hat{t})}^{\hat{t}} \hat{u}_i(\hat{t}') d\hat{t}' \quad (116)$$

donde el tiempo de residencia en una fase a un tiempo  $t$ ,  $v(t)$ , puede calcularse como:

$$\hat{v}(\hat{t}) = 1 - \frac{\Delta \hat{h}_i(\hat{t} - \hat{v}(\hat{t}))}{N_{sub} / N_{pch}} \quad (117)$$

Se integran las ecuaciones de conservación de masa y energía (112-113) en las tres zonas, utilizando la historia de la velocidad a la entrada, la entalpía de entrada a la sección calefaccionada, la densidad a la salida del canal,  $\rho_e$ , y el momento total,  $W$ , como variables de estado. Para las dos primeras zonas (de líquido subenfriado) se resuelven las ecuaciones integrando a lo largo de las características, utilizando una descripción Lagrangiana [45] en la cual el observador viaja sobre una partícula de fluido. Se calcula así la posición de la frontera de ebullición en cada instante y la entalpía de entrada a la

sección calefaccionada utilizando las historias de la velocidad y entalpía de entrada, junto con las ecuaciones (116-117). Para la tercera zona se integran las ecuaciones utilizando una aproximación nodal de Galerkin, considerando un único nodo con un perfil lineal de entalpía [46,47].

### 3.1 Zona adiabática

Integrando la ecuación de conservación de masa (112) a lo largo de este tramo, con fluido en una fase, se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (118)$$

Para integrar la ecuación de energía (113), se considera la longitud dentro de la sección adiabática que ocupan las partículas previamente calefaccionadas,  $L_o$  (ver Fig. 3.1). En un flujo siempre ingresante al canal,  $L_o$  tendrá naturalmente un valor nulo. Si temporariamente se invierte el sentido del flujo,  $L_o$  define la posición de la interfase entre la región de líquido a subenfriamiento constante  $h_{o,s}$ , y la región de entalpía mayor debido al calentamiento previo. Utilizando el método de las características se deduce su posición en función de la velocidad en una fase:

$$\frac{d\hat{L}_o}{d\hat{t}} = \hat{u}_i(t) \quad (119)$$

Utilizaremos la técnica de elementos finitos móviles para determinar la entalpía de salida de esta zona en el caso de velocidades positivas. Asumiremos un perfil lineal dentro de un elemento finito móvil de longitud  $L_o$ , entre la entalpía constante  $h_{o,s}$  y  $h_{o,s} + \Delta h_i(t)$ . Integrando la ecuación de la energía dentro del elemento se obtiene:

$$\frac{d\Delta\hat{h}_i(\hat{t})}{d\hat{t}} = \frac{\hat{u}_i \Delta\hat{h}_i}{\hat{L}_o} \quad \text{si } \hat{u}_i > 0 \quad (120a)$$

para el caso de flujo desde la sección adiabática hacia la calefaccionada, y

$$\frac{d\Delta\hat{h}_i(\hat{t})}{d\hat{t}} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}} \left( 1 - \hat{u}_i \frac{d\hat{h}_i}{d\hat{z}} \right) \quad \text{si } \hat{u}_i < 0 \quad (120b)$$

para el otro caso, donde  $\frac{d\hat{h}_i}{d\hat{z}}$  se obtiene a partir de la solución obtenida para el tramo siguiente, empleando nuevamente el método de las características.

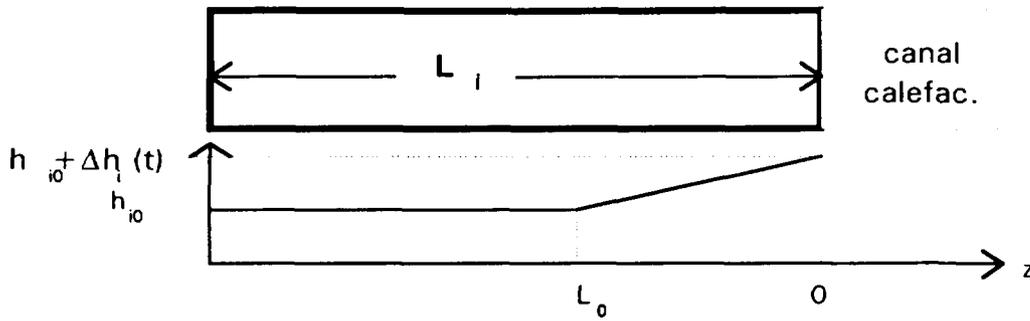


Figura 3.2: Esquema del perfil de entalpía en el tramo adiabático.

### 3.2 Zona calefaccionada en una fase

La ecuación de continuidad (118) obtenida para el tramo anterior es válida también en éste. Integrando la ecuación de energía a lo largo de este tramo calefaccionado, se halla la posición de la frontera de ebullición, resolviendo de forma iterativa las ecuaciones (116-117).

### 3.3 Zona de dos fases

Se eligió la densidad a la salida del canal como variable de estado. Su ecuación de conservación puede obtenerse integrando la ecuación de continuidad en esta región considerando un perfil lineal de entalpía [48]:

$$\frac{d \hat{\rho}_e}{d \hat{t}} = \left( \hat{u}_i - \hat{\rho}_e \hat{u}_e - \frac{(1 - \hat{M}_{ch})}{1 - \hat{\lambda}} \frac{d \hat{\lambda}}{d \hat{t}} \right) \cdot \left( \frac{(\hat{M}_{ch} - \hat{\lambda}) - \hat{\rho}_e (1 - \hat{\lambda})}{\hat{\rho}_e (1 - \hat{\rho}_e)} \right)^{-1} \quad (121)$$

La velocidad a la salida  $u_e$ , se calcula combinando primero las ecuaciones (112), (113b) y (115b), e integrando luego en la zona de dos fases:

$$\hat{u}_e = \hat{u}_i + N_{sub} (1 - \hat{\lambda}) \quad (122)$$

Combinando (112) y (115), e integrando a lo largo del canal se obtiene la masa total del canal:

$$\hat{M}_{ch} = \hat{L}_i + \hat{\lambda} + (1 - \hat{\lambda}) \frac{\ln(1 / \hat{\rho}_e)}{1 / \hat{\rho}_e - 1} \quad (123)$$

### 3.4 Ecuaciones de impulso y condiciones de cierre

Integrando la ecuación de impulso entre los extremos del canal y usando como condición de contorno una caída de presión  $\Delta p_{ext}(t)$  fijada externamente sobre el canal, se obtiene que:

$$Eu \Delta \hat{p}_{ext}(\hat{t}) = \Delta \hat{P}_I + \Delta \hat{P}_G + \Delta \hat{P}_{fr} + \Delta \hat{P}_a \quad (124)$$

donde la caída de presión debida a la inercia

$$\Delta \hat{P}_I = \int_0^{\hat{L}_I + \hat{L}_C} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\rho} \hat{u}) d\hat{z} = \frac{d}{d\hat{t}} \int_0^{\hat{L}_I + \hat{L}_C} \hat{\rho} \hat{u} d\hat{z} = \frac{d\hat{W}}{d\hat{t}} \quad (125)$$

viene dada por:

$$\Delta \hat{P}_I = \frac{d}{d\hat{t}} \left( \hat{M}_{ch} \hat{u}_i + \frac{N_{sub} (1 - \hat{\lambda}) (1 - \hat{M}_{ch})}{(1/\hat{\rho}_e) - 1} \right) \quad (126)$$

En forma similar las caídas de presión gravitacionales, de fricción y de aceleración pueden expresarse como:

$$\Delta \hat{P}_G = \int_0^{\hat{L}_I + \hat{L}_C} \frac{\hat{\rho}}{Fr} d\hat{z} = \frac{\hat{M}_{ch}}{Fr} \quad (127)$$

$$\Delta \hat{P}_{fr} = \int_0^{\hat{L}_I + \hat{L}_C} k_n \delta(\hat{z} - \hat{z}_n) \hat{\rho} \hat{u}^2 d\hat{z} = k_i \hat{u}_i |\hat{u}_i| + k_e \hat{\rho}_e \hat{u}_e^2 \quad (128)$$

$$\Delta \hat{P}_a = \int_0^{\hat{L}_I + \hat{L}_C} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{u}^2}{\partial \hat{z}} d\hat{z} = \hat{\rho}_e \hat{u}_e^2 - \hat{u}_i^2 \quad (129)$$

Cuando la frontera de ebullición sale fuera del canal el tratamiento de la evolución de las zonas de una fase no cambia, considerándose un canal ficticio que se prolonga más allá del final del canal real. En cuanto a la masa del canal, la densidad y la velocidad a la salida valen  $L_I + I$ ,  $I$  y  $u$ , respectivamente, mientras que la ecuación de momento se simplifica teniéndose en cuenta sólo los términos de una fase del canal real. Las ecuaciones diferenciales (119),(120),(121) y (125) que describen al canal en ebullición son integradas numéricamente en forma explícita utilizando el método de Euler[49].

En cuanto al rango de validez de nuestro modelo podemos señalar algunas limitaciones:

- se permiten casos en los cuales las oscilaciones de  $\lambda$  abarquen todo el canal calefaccionado e incluso con el mismo transitoriamente en una fase líquida, pero no casos donde todo el canal calefaccionado se encuentre totalmente en dos fases;
- se permite que la velocidad con la que ingresa el líquido al canal cambie transitoriamente de sentido, pero no que suceda lo mismo con el flujo de salida del canal.

### 3.5 Estudio de bifurcaciones subcríticas

En presencia de subcriticidad, las amplitudes de las oscilaciones tienen características divergentes. Una vez que las oscilaciones crecen, pueden manifestarse nuevos fenómenos, de características dinámicas no lineales, tales como la inversión de caudal y la salida de la frontera de ebullición del canal, que tiendan a “frenar” las oscilaciones. En las Figs. 3.3 se presentan la proyección en el plano  $\hat{u}_i - \lambda$  y la evolución temporal de  $\hat{u}_i$  y  $\Delta h$ , respectivamente, observándose el estado oscilatorio con inversiones temporarias de caudal al que arriba el sistema luego de un comportamiento divergente característico de subcriticidad. En las Figs. 3.4 y 3.5 se ilustran dos focos subcríticos en los cuales el abandono del canal por parte de la frontera de ebullición es la no linealidad que estabiliza al sistema. En las Figs. 3.6 se observa otro caso de subcriticidad donde el comportamiento divergente es frenado por ambos fenómenos antes mencionados.

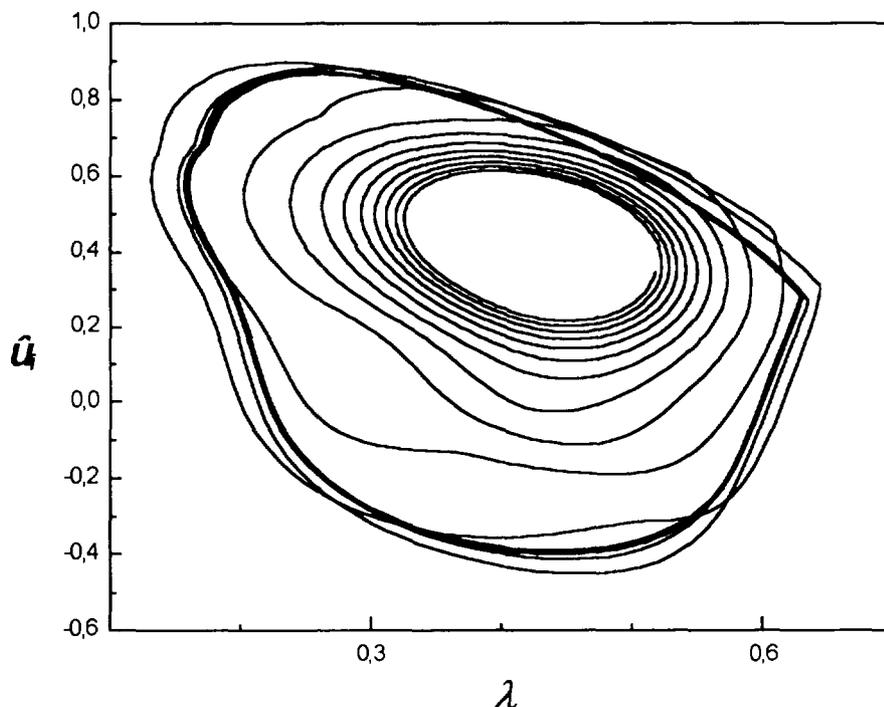


Figura 3.3a: Proyección de la trayectoria en el plano  $u_i - \lambda$  para un foco subcrítico ( $k_i = 40$ ,  $k_e = 1$ ,  $N_{sub} = 30$ ,  $N_{pch} = 70$ ,  $Fr = 10^{-2}$ ).

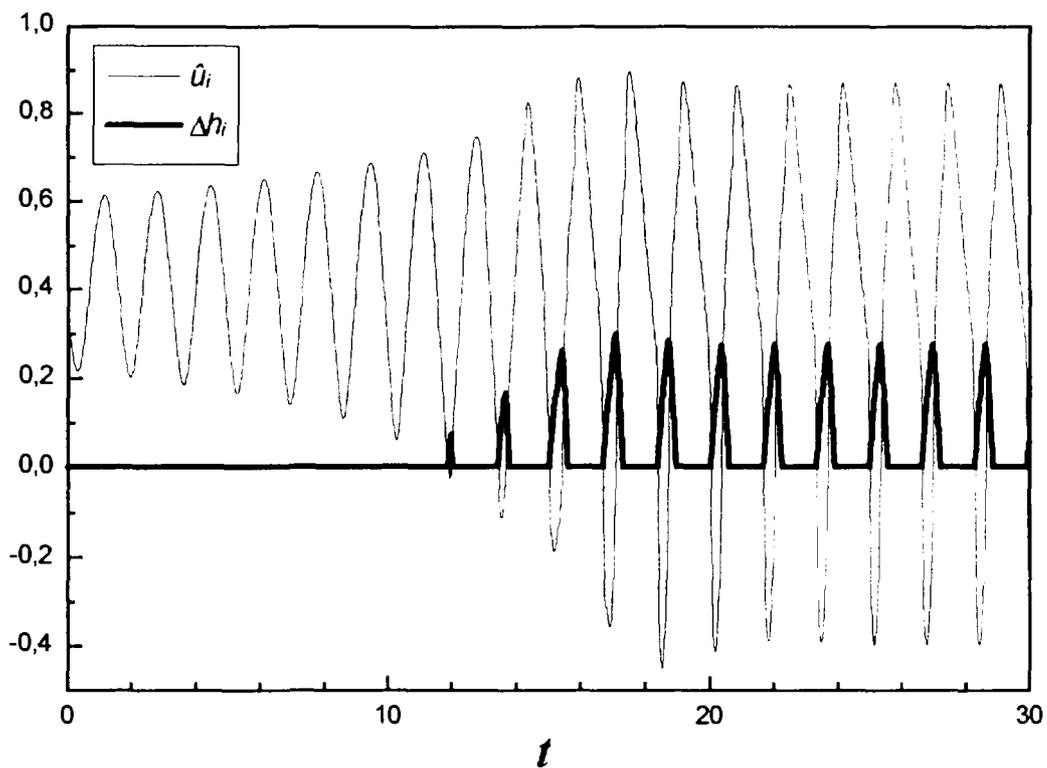


Figura 3.3b: Evolución temporal de  $\hat{u}_i$  y  $\Delta h_i$  para un foco subcrítico (de flujo reverso).

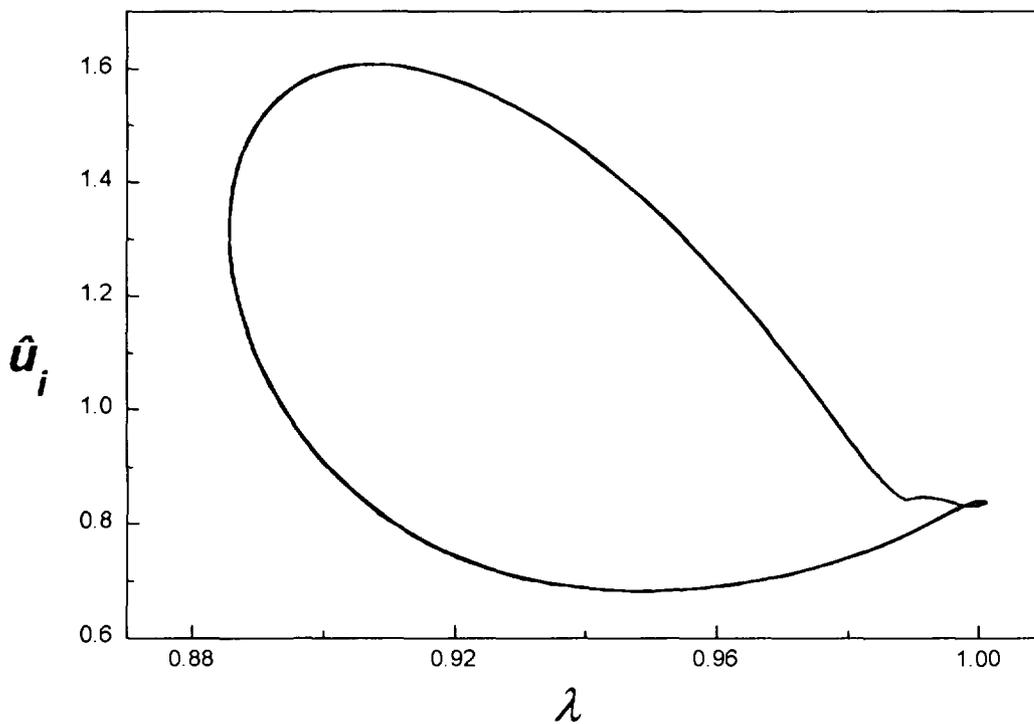


Figura 3.4a: Proyección de la trayectoria en el plano  $\hat{u}_i$  -  $\lambda$  para un foco subcrítico ( $k_i = 20$ ,  $k_e = 10$ ,  $N_{sub} = 85.3$ ,  $N_{pch} = 87.8$ ,  $Fr = 4.3 \cdot 10^{-4}$ ).

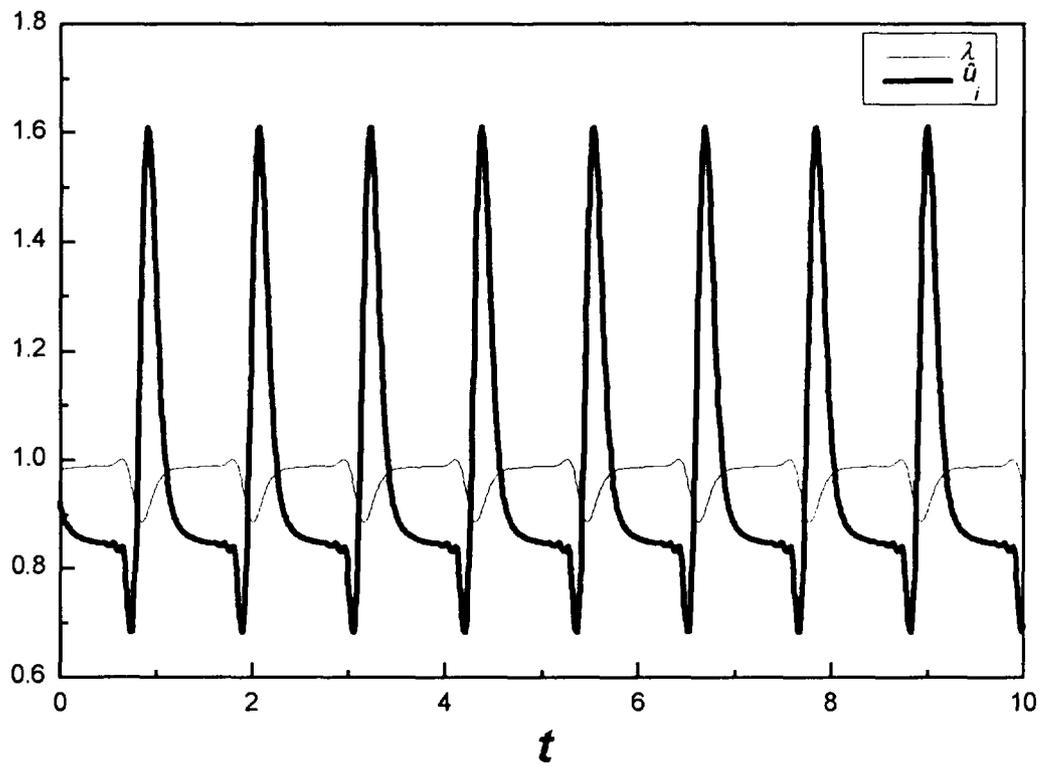


Figura 3.4b: evolución temporal de  $\hat{u}_i$  y  $\lambda$  para el caso anterior ( $\lambda$  abandona el canal)

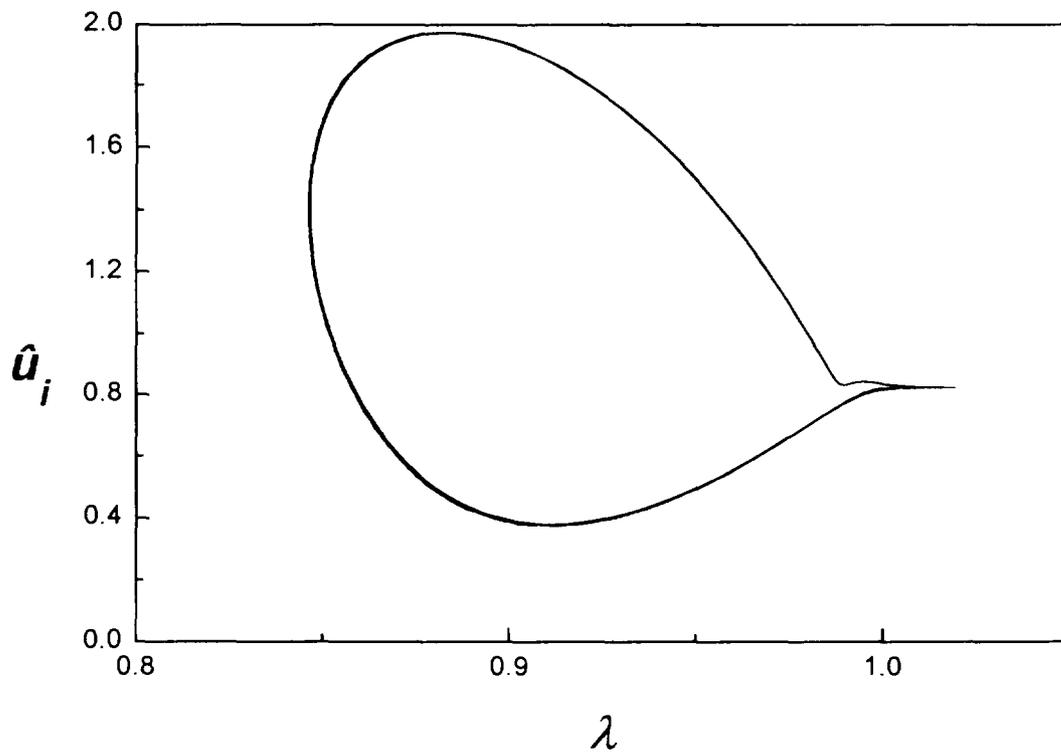


Figura 3.5a: Proyección de la trayectoria en el plano  $\hat{u}_i - \lambda$  para un foco subcrítico ( $k_i = 20$ ,  $k_e = 10$ ,  $N_{sub} = 88.8$ ,  $N_{pch} = 90.3$ ,  $Fr = 4.0 \cdot 10^{-4}$ ).

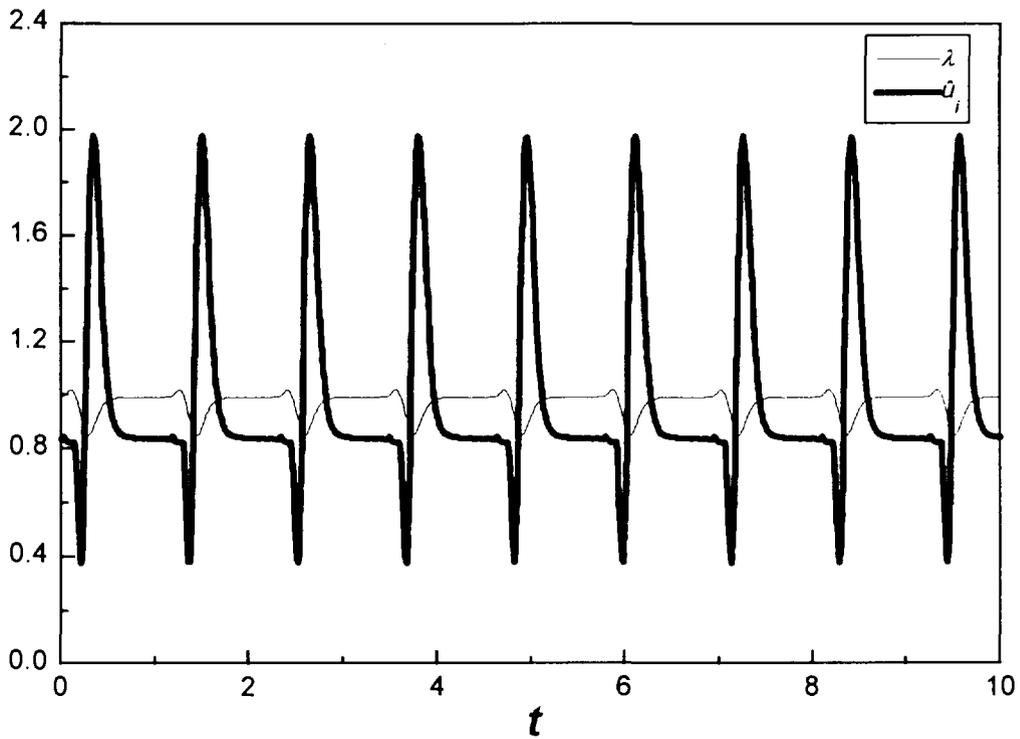


Figura 3.5b: evolución temporal de  $u_i$  y  $\lambda$  para el caso anterior ( $\lambda$  abandona el canal)

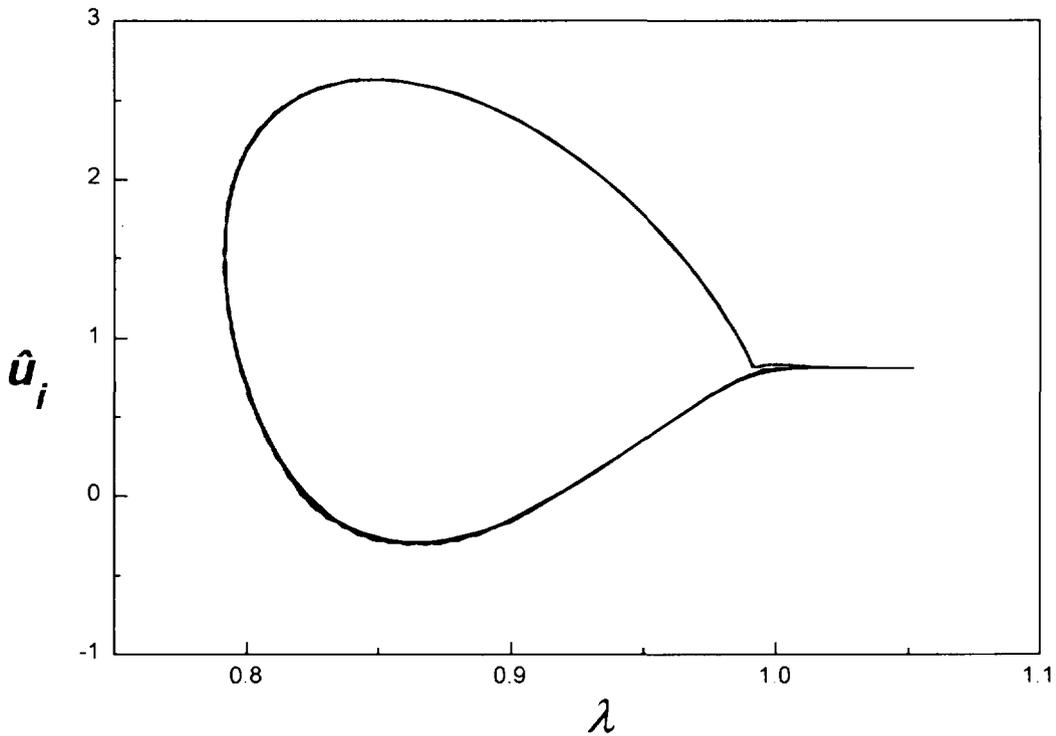


Figura 3.6a: Proyección de la trayectoria en el plano  $u_i$  -  $\lambda$  para un foco subcrítico (con flujo reverso y  $\lambda$  abandona el canal calefaccionado) ( $k_i=20$ ,  $k_e=10$ ,  $N_{sub}=95.7$ ,  $N_{pch}=98.0$ ,  $Fr=3.4 \cdot 10^{-4}$ ).

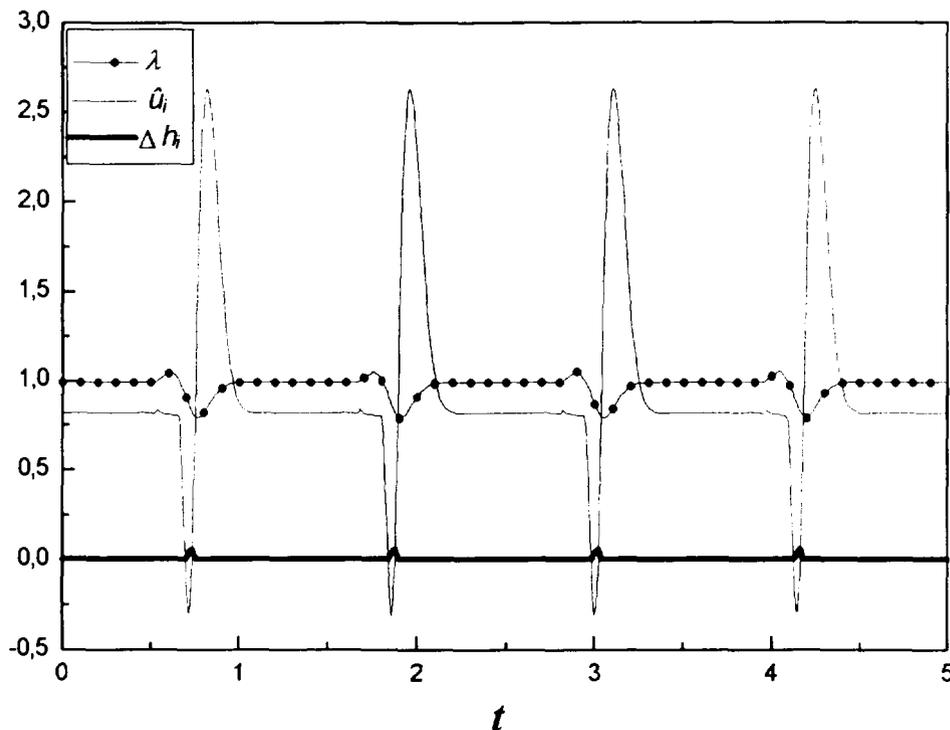


Figura 3.6b: Evolución temporal de  $\tilde{u}_i$ ,  $\lambda$  y  $\Delta h_i$  para el caso anterior.

### 3.6 Estudio de bifurcaciones supercríticas

Para un sistema supercrítico bajo condiciones marginalmente inestables es de esperar que aparezcan oscilaciones acotadas sin inversión de caudal, si la distancia al margen de estabilidad es suficientemente pequeña. Si colocamos al sistema en una cierta posición inicial con una perturbación infinitesimal, a través de oscilaciones crecientes, el sistema alcanzará un estado oscilatorio autosostenido de amplitud finita (ciclo límite). También se llegará al mismo estado final cuando la perturbación inicial es mayor que la amplitud del ciclo límite, siempre y cuando éstas no alejen al sistema de la cuenca de atracción o de estabilidad del ciclo límite.

Cuando la perturbación es lo suficientemente grande para alejar al sistema de la cuenca de atracción del ciclo límite, las oscilaciones divergen alejándose de la cuenca. Es de esperar que la presencia de otros fenómenos tiendan a frenar las oscilaciones divergentes, o que el sistema vaya hacia un nuevo punto fijo. Se puede llegar entonces a un nuevo estado oscilatorio, con inversiones de caudal. Este comportamiento se ilustra en la Fig. 3.7 donde se observan los ciclos límites obtenidos con distintas perturbaciones del salto de presión impuesto externamente al canal, bajo una condición oscilatoria supercrítica. Para la perturbación menor, se observa un ciclo límite sin inversiones de caudal, mientras que para otra perturbación mayor, se obtiene el ciclo límite caracterizado por inversiones del caudal. En las Figs. 3.8 se aprecian las evoluciones temporales de ambos estados oscilatorios correspondientes a este caso.

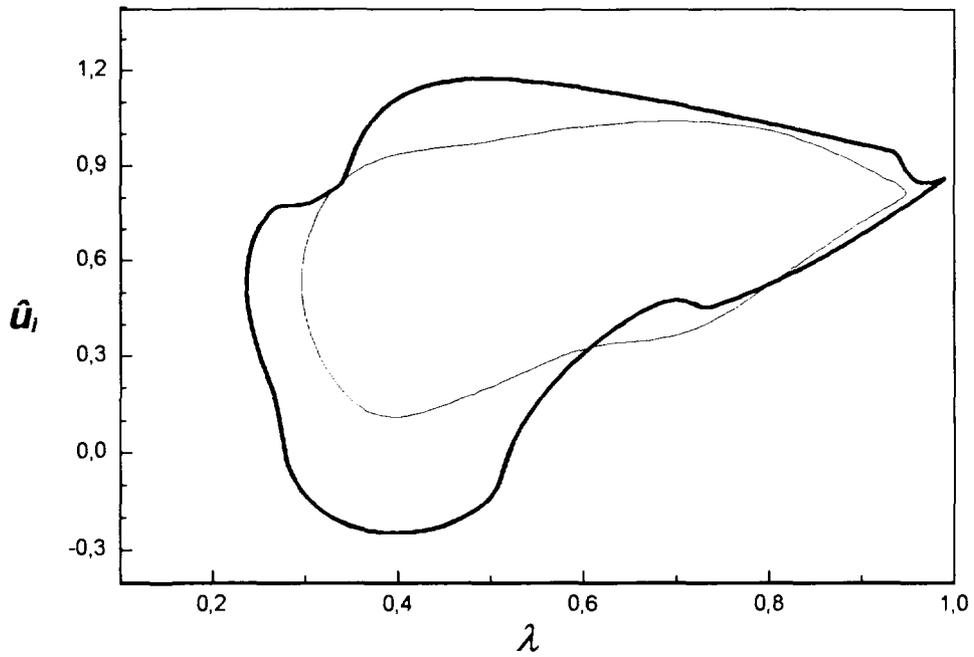


Figura 3.7: Proyección de la trayectoria en el plano  $u_i - \lambda$  para un foco supercrítico ( $k_i=400$ ,  $k_e=30$ ,  $N_{sub}=50$ ,  $N_{pch}=76.8$ ,  $\hat{u}_0=0.651$ ,  $Fr=1.5 \cdot 10^{-3}$  y  $L_i=0,3$ ).

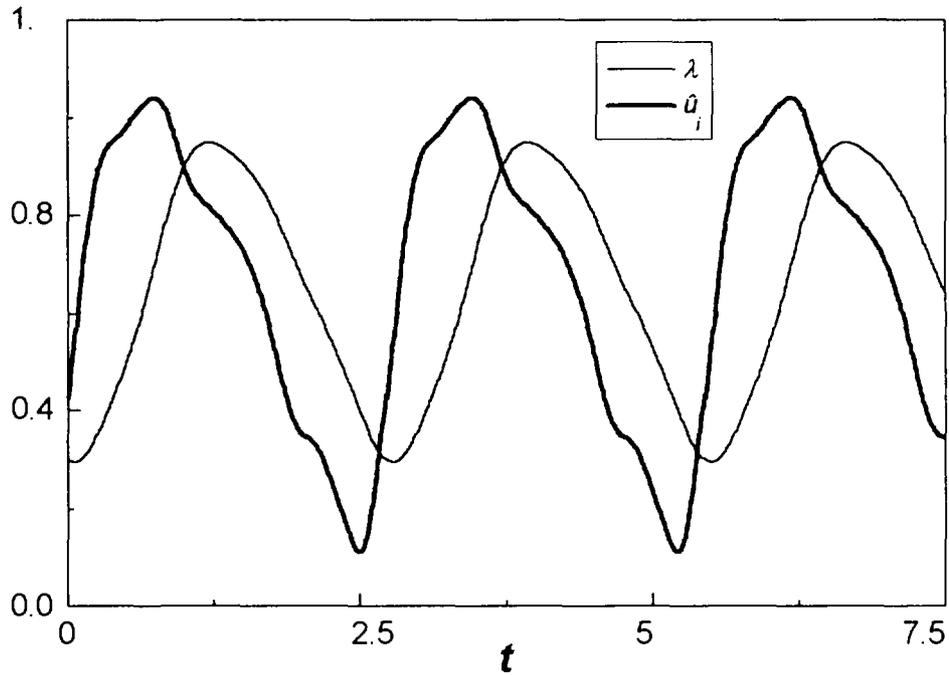


Figura 3.8a: evolución temporal sin inversiones de caudal (ver Fig. 3.7)

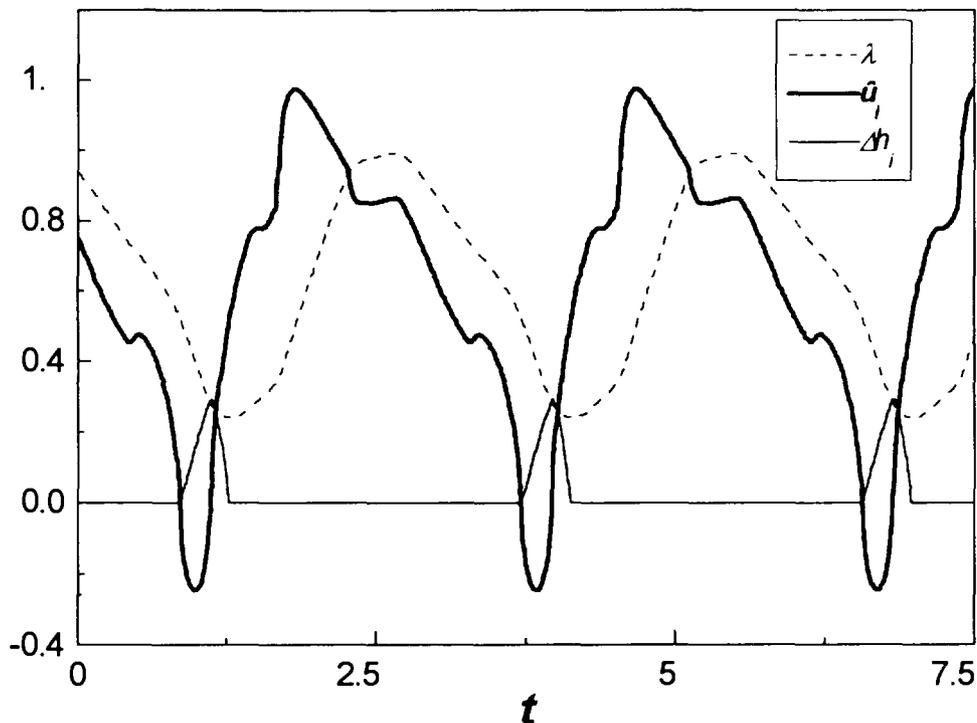


Figura 3.8b: evolución temporal con inversiones temporarias de caudal (ver Fig. 3.7)

En condiciones de operación, donde podemos controlar las magnitudes de los parámetros del sistema pero no las perturbaciones, es de esperar encontrar efectos de histéresis al pasar de uno a otro tipo de oscilaciones. En efecto, si inestabilizamos el sistema viniendo de un estado oscilatorio sin inversiones de caudal, en cierto umbral la cuenca de atracción desaparece, pudiendo entonces el sistema experimentar una transición a una nueva cuenca de atracción caracterizada por inversiones de caudal. Volviendo a estabilizar el sistema desde la nueva cuenca (con amplitudes de oscilaciones mayores que en la primera fase) es factible que el sistema no experimente la transición de cuenca opuesta sobre el mismo umbral anterior, sino que permanezca en su cuenca actual. Necesitaremos estabilizar aún más al sistema, hasta que la amplitud de la cuenca de atracción atrape a las oscilaciones actuales, para observar nuevamente la transición. Este efecto de histéresis se espera que sea más o menos notable en función de las formas de los conos envolventes de ciclos límites y de sus cuencas de atracción. En la Fig. 3.9 se ilustra esquemáticamente este efecto.

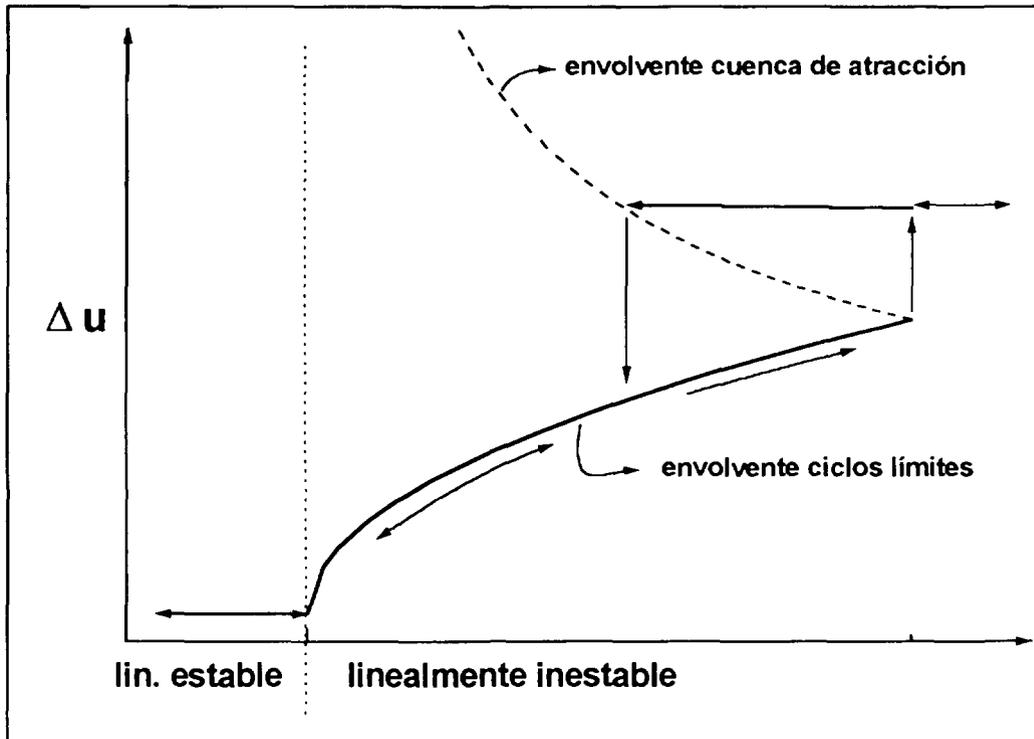


Figura 3.9: Diagrama de transición de fase.

### 3.8 Conclusiones

Se presentó un modelo basado en una combinación de dos técnicas conocidas para estudiar estados oscilatorios con inversiones temporarias de caudal. Una de ellas consiste en resolver las ecuaciones a lo largo de las características, refiriendo la solución en cada punto a la historia de la velocidad de entrada; la otra técnica deriva de una aproximación nodal de Galerkin con elementos finitos móviles. Con el modelo desarrollado se analizó el comportamiento de un canal en ebullición ante estados oscilatorios con grandes amplitudes, derivados tanto de bifurcaciones de Hopf supercríticas como subcríticas. Se encontraron nuevos estados oscilatorios, caracterizados por inversiones temporarias de caudal los cuales presentan características dinámicas distintivas que lo diferencian de las oscilaciones de pequeña amplitud.

En el caso de las bifurcaciones supercríticas vimos que al incrementarse la magnitud de las oscilaciones por encima de cierto umbral, el sistema abandona la cuenca de atracción del foco supercrítico, (*i.e.* no decae al ciclo límite) conduciendo a un nuevo estado oscilatorio caracterizado por la presencia de nuevas no linealidades (*i.e.* inversiones de caudal).

Para las bifurcaciones subcríticas, encontramos que el comportamiento oscilatorio divergente predicho por la teoría de Hopf conduce a un nuevo estado donde la presencia de otras no linealidades pueden acotar a las oscilaciones (abandono del canal de la frontera de ebullición o inversión de caudal).

## Capítulo 4

### Estudio Experimental

Para desarrollar el estudio experimental de la dinámica de flujos bifásicos se eligió un sistema en ebullición bajo circulación forzada y salto de presión constante. Entre otras razones el régimen de circulación forzada es importante dado que tiene importantes implicaciones para el análisis de situaciones accidentales y de operación en reactores nucleares tipo BWR, basados en canales paralelos en ebullición. Su comportamiento dinámico presenta además características interesantes desde el punto de vista de la investigación básica [38].

#### 4.1 Objetivos

El estudio experimental se llevó a cabo con los siguientes objetivos:

- Verificación de las hipótesis del modelo algebraico en demoras presentado en esta tesis (*i.e.* oscilaciones del caudal másico de entrada, de salida, y de la frontera de ebullición de similar amplitud y frecuencia, con una demora constante e igual a la mitad del tiempo de residencia en una fase).
- Comprobación de las características no lineales de las inestabilidades de ondas de densidad predichas por el análisis de Hopf llevado a cabo en el desarrollo teórico.
- Identificación de focos supercríticos y subcríticos a través del estudio de distintas evoluciones en el espacio de los parámetros termohidráulicos del sistema.
- Caracterización de las oscilaciones de ondas de densidad en flujos donde el término de gravedad es importante.
- Identificación de supercriticidad y subcriticidad para flujos dominados por la gravedad, observando como cambia el punto de transición entre ambas clases de bifurcaciones de Hopf.

- Identificación de nuevos estados de equilibrio hacia los que evoluciona el sistema al alejarse de un foco subcrítico.
- Identificación de nuevos estados de equilibrio hacia los que evoluciona el sistema a partir de un estado oscilatorio estable (foco supercrítico) al caer fuera de la cuenca de atracción del mismo (estabilidad del ciclo límite).

## 4.2 Aparato Experimental.

El sistema que se utilizó es un circuito de agua a presión atmosférica. En la Fig. 4.1 se muestra un esquema del circuito, donde se indican sus dimensiones principales.

Sus principales componentes son:

- un tanque abierto a la atmósfera,
- un tubo de bajada,
- una bomba impulsora,
- un bypass lateral, con su correspondiente válvula,
- una válvula principal de entrada ubicada a la salida de la bomba,
- una válvula principal de salida ubicada antes del tanque,
- un plenum inferior y otro superior, desde y hacia donde se deriva la sección de prueba,
- una válvula de entrada a la sección de prueba,
- una válvula de salida de la sección de prueba,
- una sección calefaccionada y
- un circuito secundario de refrigeración con intercambiador de calor en el tanque superior.

El fluido refrigerante es agua que circula impulsada por la bomba, a través de la sección calefaccionada y el *bypass* lateral montados en paralelo entre el tanque superior y la bomba. Las válvulas están colocadas a fin de permitir regular la presión absoluta del sistema, el caudal total y el de cada sección. La mayor parte del flujo es desviado a través del *bypass* de modo de asegurar un salto de presión constante en la sección de prueba. El caudal se regula con la válvula ubicada sobre el mismo.

El diámetro de los tubos de bajada de acero inoxidable, *bypass* y de conexiones hacia ambos plena es de 2 pulgadas. Los tubos de conexión de ambos plenum con la sección calefaccionada son de bronce y su diámetro interno es de 1 pulgada. Todas las válvulas son Worcester del tipo esféricas.

El calefactor es un Watlow de 1,11 metros de longitud con una longitud activa de 1 metro, revestido en acero inoxidable y con un diámetro externo de 9,5 milímetros. Su resistencia es de 0,5 ohms permitiendo una potencia máxima de 5 kW. La potencia es suministrada por una fuente de corriente continua Brucker B-MN programable capaz de entregar un máximo de 700 A.



### 4.3 Instrumentación y sistema de adquisición

Las variables que se miden son:

1. temperatura en el plenum inferior,
2. temperatura de entrada a la sección calefaccionada,
3. temperatura de salida de la sección calefaccionada,
4. potencia entregada al calefactor
5. caudal de entrada.

Las temperaturas de entrada y salida a la sección calefaccionada, y la temperatura en el plenum inferior, son medidas con termocuplas de Chromel-Alumen ubicadas en el centro de la cañería, a la entrada y salida de la sección de prueba, y del plenum. Las señales son tomadas por un lector de termocuplas Fluke 2190A luego de pasar por un selector Fluke Y2001, y también son adquiridas con una tarjeta de adquisición PCL-818 convertora de señal analógico-digital A/D de frecuencia máxima 100 kHz de ganancia programable montada sobre una computadora personal a los efectos de su ulterior procesamiento.

La potencia entregada al calefactor se determina en base a una calibración del sistema. Esta calibración se realizó midiendo la tensión en los bornes del calefactor y la variación de la resistencia de éste con la temperatura. Para obtener la potencia real que se lleva el fluido se estimaron las pérdidas al medio ambiente en base a las fórmulas propuestas por Mc Adams [51] para placas y cilindros verticales en aire. El rango de potencias con ebullición que permite manejar el calefactor en la configuración montada abarca de los 2.5 kW a los 4.1kW.

Los coeficientes de pérdida de carga de las secciones de entrada y salida fueron calculados a partir de una medición realizada sobre el mismo equipo corroborada con valores tabulados[52].

Para medir el caudal se utiliza una placa orificio de 16 milímetros de diámetro construida especialmente y ubicada sobre el tubo de entrada al canal calefaccionado. La diferencia de presión producida a ambos lados de la placa orificio es medida por un transductor de presión diferencial TEKFL0 modelo TF7 con un rango de 0 a 50 milímetros de columna de agua. La electrónica de estos instrumentos fue previamente reacondicionada para que fueran capaces de medir oscilaciones en el caudal con períodos menores a 1 segundo. Los transductores proporcionan una salida en corriente; haciendo pasar esta señal por resistencias de valor conocido obtenemos una señal en tensión. Esta tensión fue calibrada en función del caudal circulante y es adquirida con un microprocesador personal a través de un conversor A/D PLC-818. El error en la medición del caudal de entrada en estado estacionario se estima en 2 cm<sup>3</sup>/seg.

La medición de la temperatura de salida fue utilizada con dos fines: en primer lugar realizar un balance térmico que permitiera corroborar las mediciones de caudal y potencia, y, en segundo lugar para conocer la temperatura de saturación del fluido en la sección calefaccionada. Las mediciones de la temperatura de entrada al canal y del

plenum inferior permiten conocer el subenfriamiento de entrada, y en el caso de oscilaciones de gran amplitud con inversión del sentido del flujo, permiten detectar el mismo a través de picos en la temperatura medida inmediatamente antes de ingresar al canal, los cuales no se observan en el plenum. Esta medición cubre en parte la carencia de información del transductor de presión en estos casos, dado que este transductor diferencial no mide valores por debajo de un determinado umbral (aproximadamente un 10% de fondo de escala) ni tampoco valores negativos.

#### 4.4 Método experimental

Los experimentos se realizaron manteniendo constante el salto de presión entre la entrada y la salida de la sección de prueba, la potencia entregada y la apertura de las válvulas, durante cada uno de ellos. Se variaba la temperatura de entrada a la sección calefaccionada muy lentamente (típicamente a razón de 0.1 °C/minuto) con respecto al período de las oscilaciones. El control de la temperatura de entrada se realizaba regulando la transferencia de calor hacia el circuito de refrigeración secundario a través del intercambiador de calor que se encuentra ubicado en el tanque superior, regulando el caudal de refrigerante.

Partiendo de un estado estable se aumentaba la temperatura hasta cruzar el umbral de estabilidad. Una vez que se establecían los regímenes oscilatorios típicos, se invertía el proceso, disminuyendo la temperatura de entrada hasta volver a un estado estable. Se investigaba la existencia de efectos de histéresis en tales procesos, que permitieran caracterizar el tipo de bifurcación de Hopf presente.

Una variación del umbral de estabilidad al recorrer el proceso en distintos sentidos significaría la presencia de una bifurcación subcrítica. En efecto, si partimos de un estado estable, el sistema se inestabilizará al llegar al margen de estabilidad lineal; pero volviendo a la región estable desde un estado inicial oscilatorio, el sistema mantendrá su comportamiento oscilatorio aún dentro de la región linealmente estable (mientras que las perturbaciones del sistema sean mayores que las correspondientes al ciclo límite inestable). Por otra parte la ausencia de histéresis de este tipo evidencian la presencia de una bifurcación supercrítica. En este caso, independientemente del estado inicial, al cruzar el límite de estabilidad lineal, se produce el cambio de comportamiento.

Otra característica determinante del tipo de bifurcación, lo constituye la aparición de una envolvente de ciclos límites dentro de la región de inestabilidad lineal (para supercriticidad) o la ausencia de la misma (para subcriticidad).

## 4.5 Resultados Experimentales

### 4.5.1 Verificación de las hipótesis del modelo algebraico en demoras

Manteniendo constante las fricciones, potencia calefaccionada y salto de presión externo en el canal, disminuimos el subenfriamiento de entrada al canal. Nos interesaba reducir los efectos gravitatorios, por lo que trabajamos con las válvulas tan cerradas como era posible y con las mayores potencias que nos permitía el calefactor. Una vez que el sistema alcanza el estado oscilatorio, se mantuvo constante el subenfriamiento controlando la transferencia de calor al circuito secundario. Se deja relajar el sistema al estado estacionario durante algunos minutos y se mide la evolución del caudal de entrada.

Deconvolucionando esta señal, se obtiene la evolución de la frontera de ebullición y del caudal másico de salida del canal [53]. Estas tres señales se ilustran conjuntamente en forma adimensionalizada (utilizando el tiempo de residencia en el canal,  $\nu$ , como tiempo característico, y  $L_{ch}/\nu$  como velocidad característica) en las Figs. 4.2a y 4.3a. Se observa que las amplitudes son similares. La demora entre el caudal ingresante,  $W_i$ , y la frontera de ebullición  $\lambda$  por un lado, y la demora entre la frontera de ebullición y el caudal que egresa  $W_e$  por el otro, son constantes en el tiempo, iguales entre sí y del orden de  $\nu/2$ . Este resultado experimental es muy importante, dado que corrobora la hipótesis fundamental del modelo de demoras. Similares conclusiones se obtienen de analizar los ciclos límites en los espacios de estas fases. Las Figs. 4.2b-4.3b y 4.2c-4.3c ilustran la evolución en los espacios  $W_i-\lambda$  y  $\lambda-W_e$  respectivamente. Se observan en los mismos similares desfases entre ambos pares de variables. Por otra parte si observamos los ciclos límites en el espacio de las fases  $W_i-W_e$ , mostrados en las Figs. 4.2d y 4.3d, observamos un desfase mayor que en los ciclos precedentes.

Los valores dimensionales del caudal de referencia ( $L A_{cs} \nu^{-1}$ ) para los casos ilustrados en las Figs. 4.2 y 4.3 son  $70 \pm 3$  cm<sup>3</sup>/seg y  $51 \pm 3$  cm<sup>3</sup>/seg respectivamente, mientras que el valor de la potencia es  $4100 \pm 100$  W en ambos experimentos.

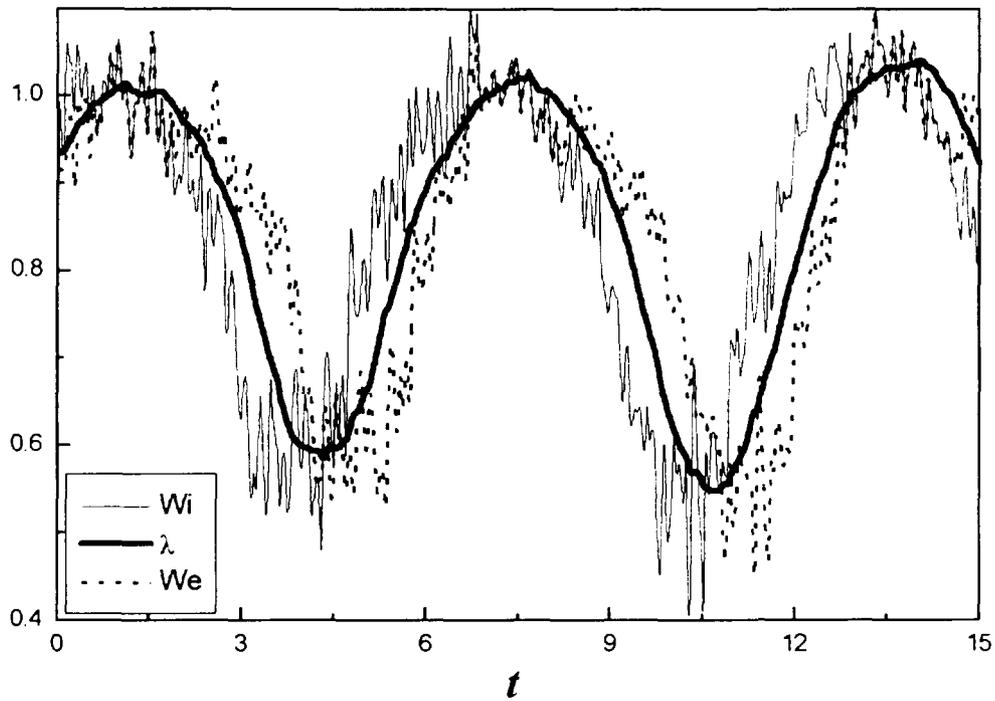


Figura 4.2a: Evolución temporal de las oscilaciones en caudal y  $\lambda$ .  
 ( $N_{sub} = 39.2 \pm 1.$ ,  $\hat{u}_o = 0.75 \pm .05$ ,  $k = 10. \pm 4.$ ,  $Ng = (5 \pm 2.)10^{-2}$ .)

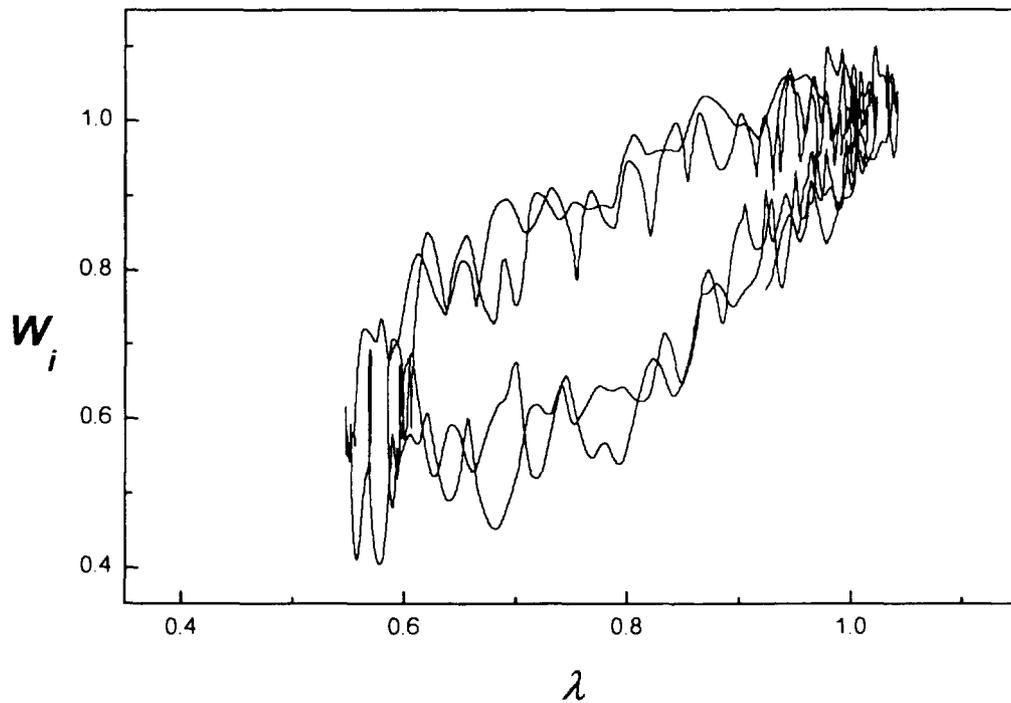


Figura 4.2b: Trayectoria en el espacio  $W_i$  -  $\lambda$ .  
 ( $N_{sub} = 39.2 \pm 1.$ ,  $\hat{u}_o = 0.75 \pm .05$ ,  $k = 10. \pm 4.$ ,  $Ng = (5 \pm 2.)10^{-2}$ .)

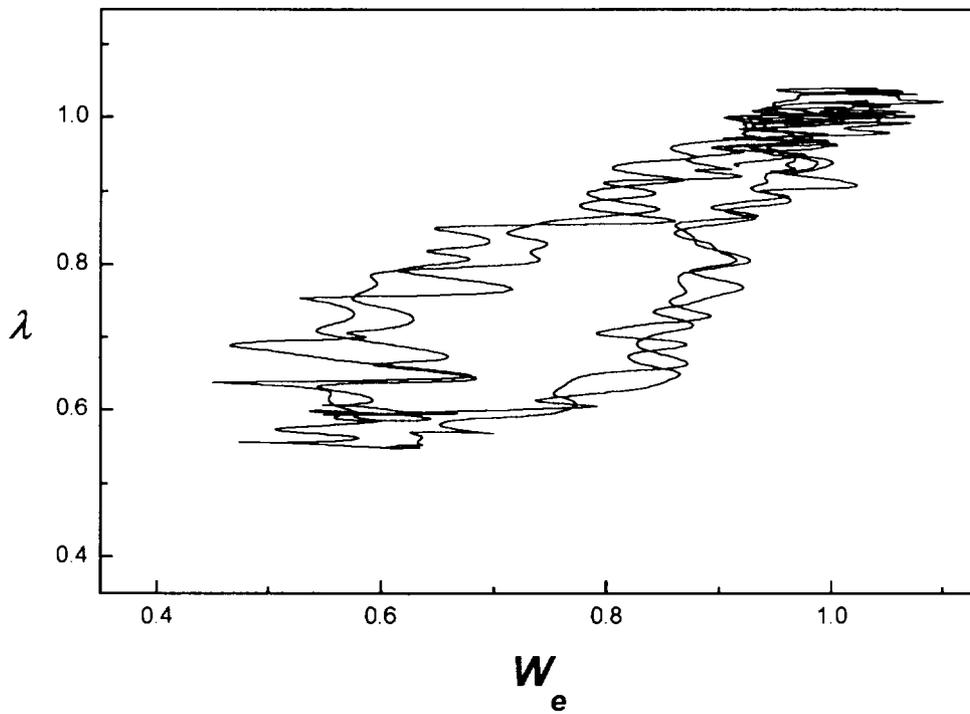


Figura 4.2c: Trayectoria en el espacio  $\lambda - W_e$ .  
 ( $N_{sub} = 39.2 \pm 1.$ ,  $\hat{u}_0 = 0.75 \pm .05$ ,  $k = 10. \pm 4.$ ,  $Ng = (5 \pm 2.)10^{-2}$ ).

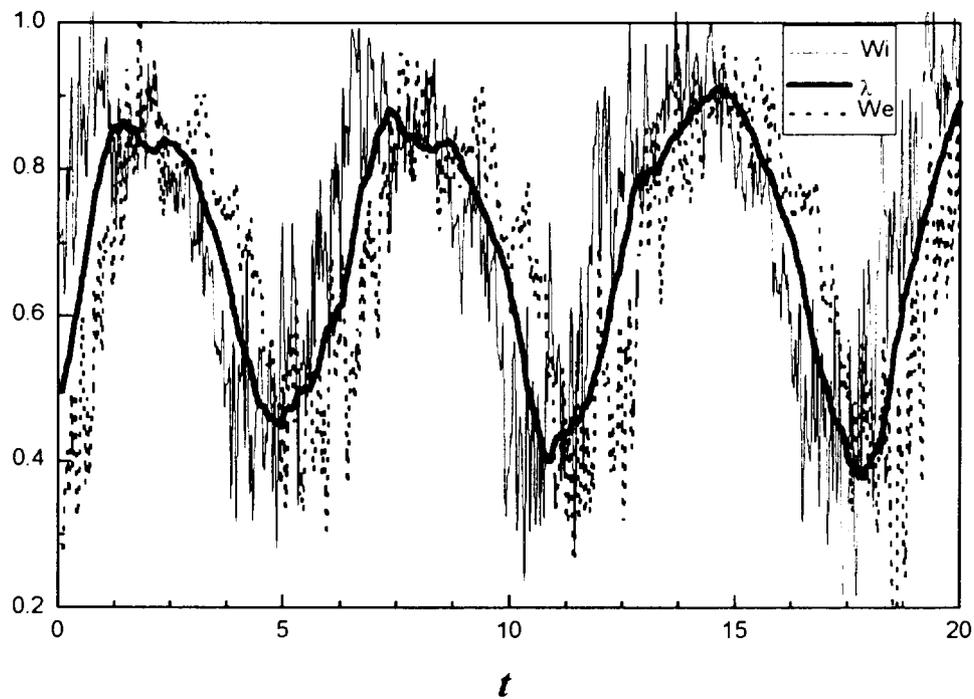


Figura 4.3a: Evolución temporal de las oscilaciones en caudal y  $\lambda$ .  
 ( $N_{sub} = 53. \pm 1.$ ,  $\hat{u}_0 = 0.68 \pm .05$ ,  $Ng = (6.7 \pm 2.)10^{-2}$ ,  $k = 9. \pm 4.$ ).

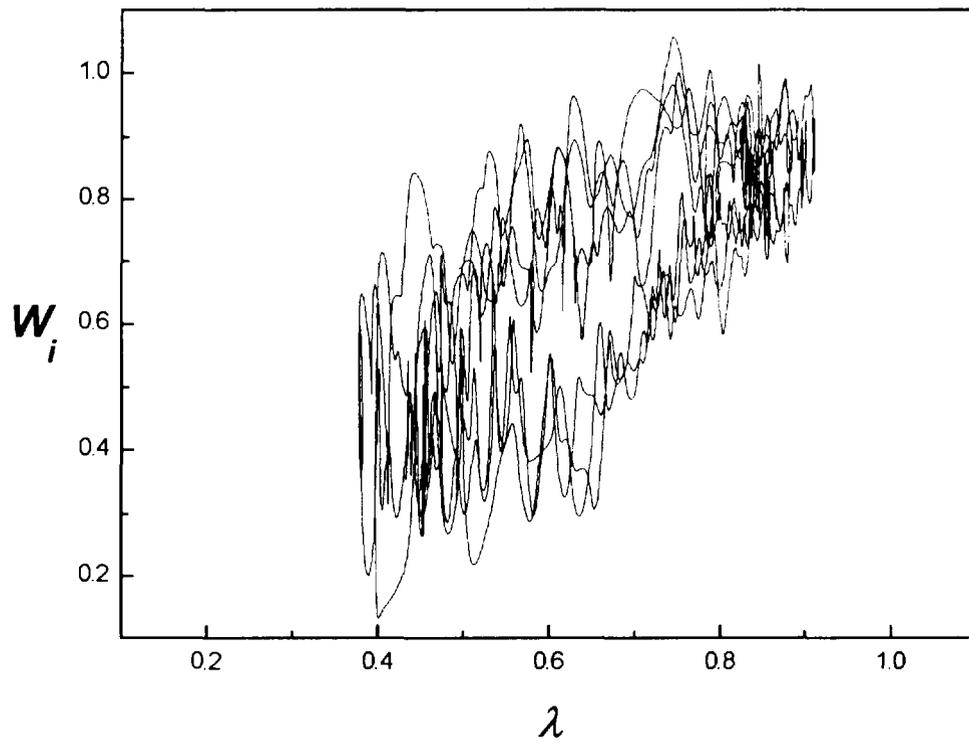


Figura 4.3b: Trayectoria en el espacio  $W_i - \lambda$ .  
 ( $N_{sub} = 53. \pm 1.$ ,  $\hat{u}_0 = 0.68 \pm .05$ ,  $Ng = (6.7 \pm 2.)10^2$ ,  $k = 9. \pm 4.$ ).

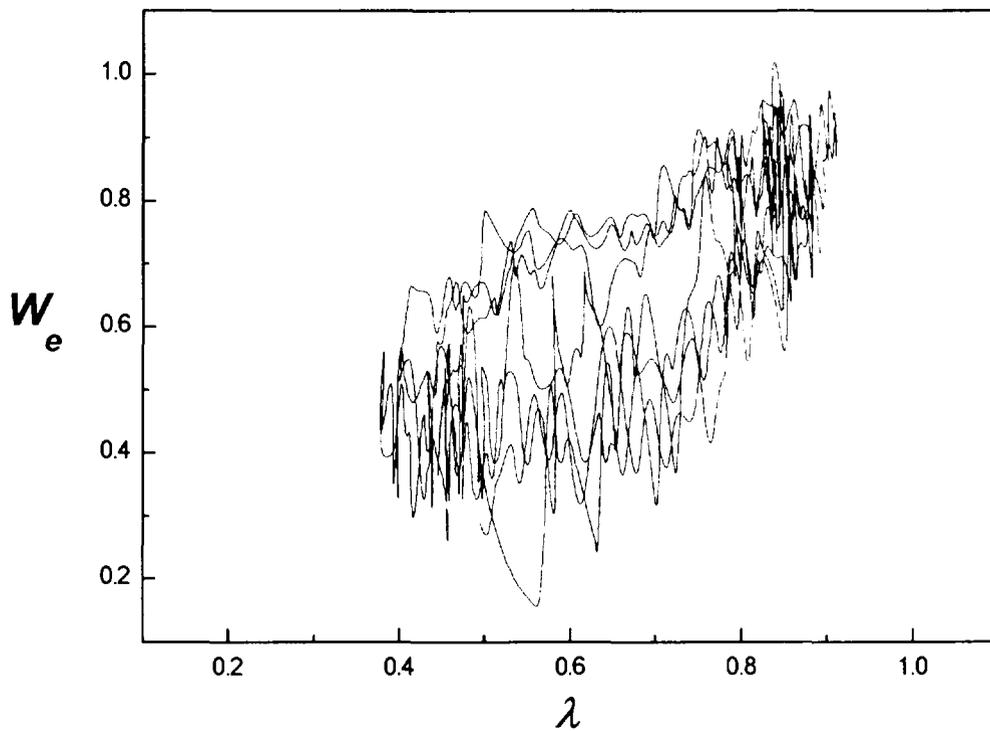


Figura 4.3c: Trayectoria en el espacio  $\lambda - W_e$ .  
 ( $N_{sub} = 53. \pm 1.$ ,  $\hat{u}_0 = 0.68 \pm .05$ ,  $Ng = (6.7 \pm 2.)10^2$ ,  $k = 9. \pm 4.$ ).

Las Figs. 4.4 y 4.5 muestran las soluciones del modelo de demoras para las condiciones de las Figs. 4.2 y 4.3. La concordancia es muy buena, tanto en amplitud como en frecuencia. Cabe destacar el período extenso de dichas oscilaciones, del orden de varias veces el tiempo de residencia en el canal, características observada en todos los casos de flujos dominados por fricciones.

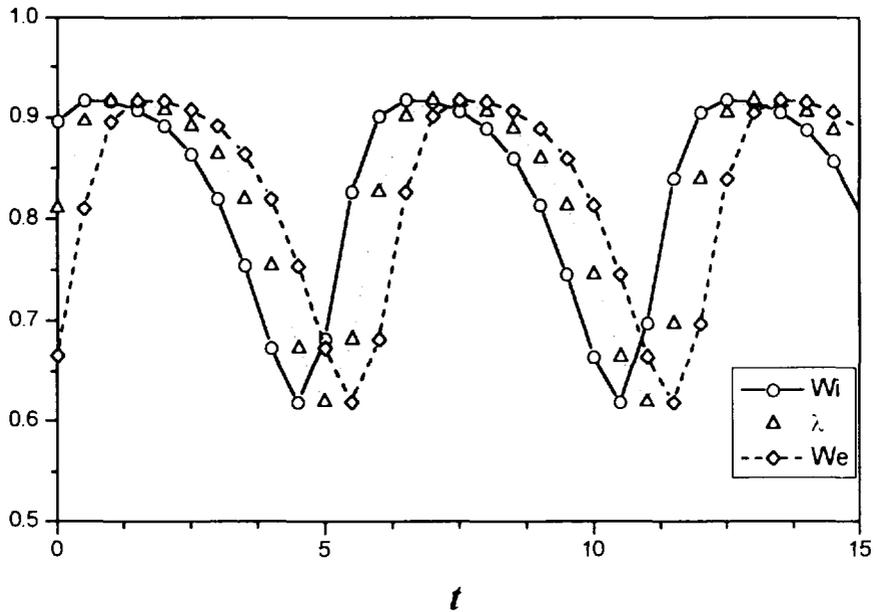


Figura 4.4a: Evolución temporal según el modelo algebraico en demoras. ( $N_{sub} = 40, \hat{u}_0 = .745, k = 6.42, Ng = 6.2 \cdot 10^{-2}$ ).

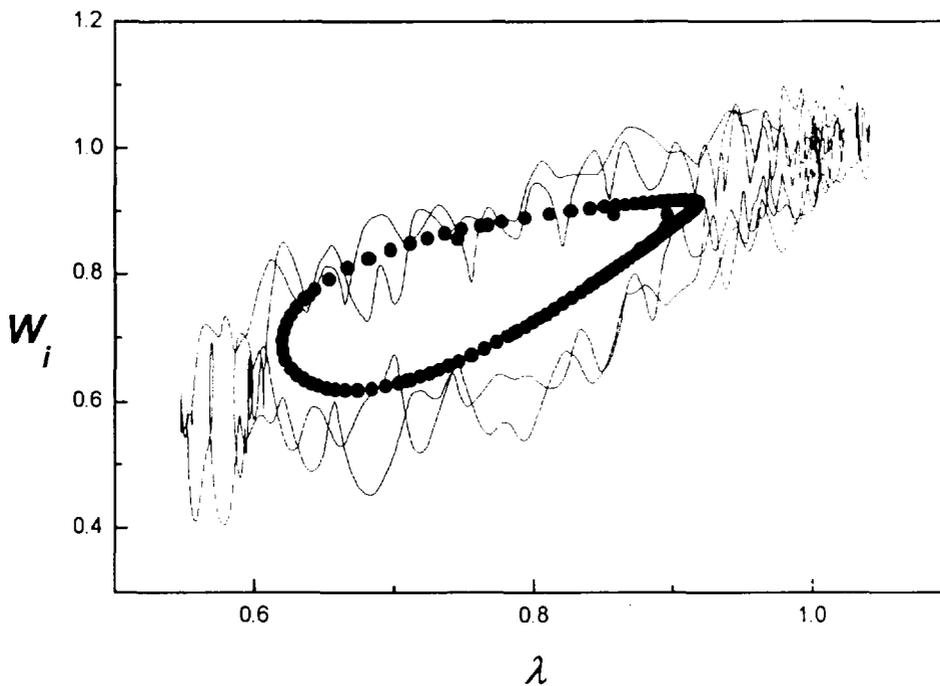


Figura 4.4b: Comparación entre la trayectoria experimental y teórica (modelo de demoras) ( $N_{sub} = 40, \hat{u}_0 = .745, k = 6.42, Ng = 6.2 \cdot 10^{-2}$ ).

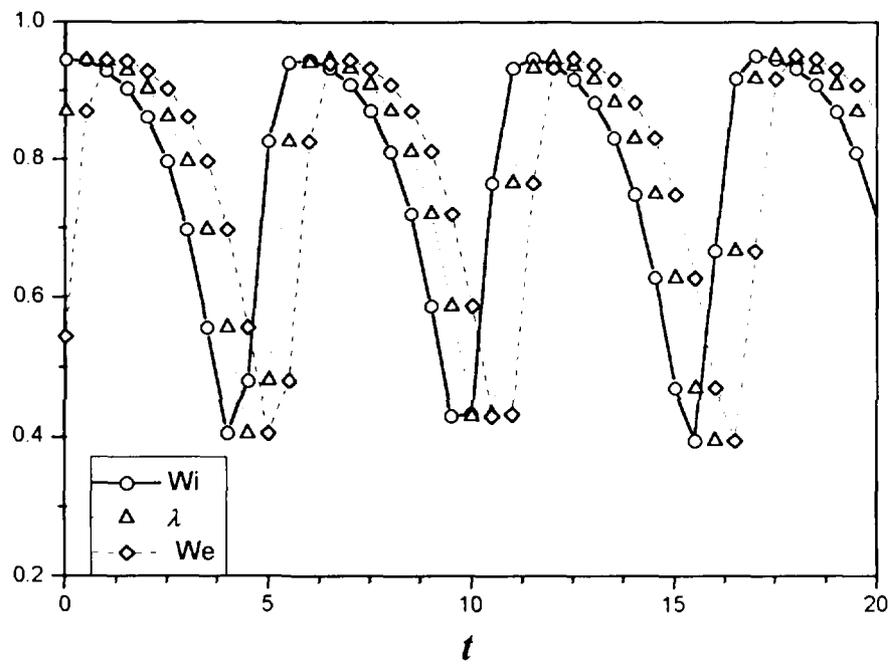


Figura 4.5a: Evolución temporal según el modelo de demoras  
 ( $N_{sub} = 52$ ,  $\hat{u}_0 = 0.65$ ,  $k = 11.935$ ,  $Ng = 8.3 \cdot 10^{-2}$ ).

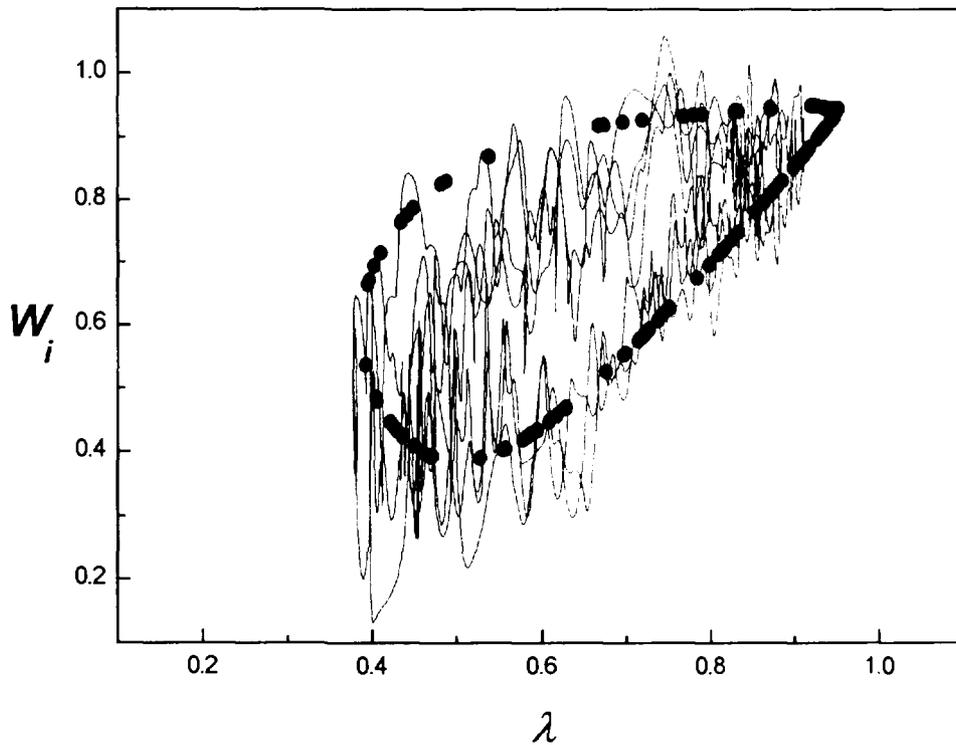


Figura 4.5b: Comparación de las trayectorias experimental y teórica según el modelo algebraico en demoras ( $N_{sub} = 52$ ,  $\hat{u}_0 = 0.65$ ,  $k = 11.935$ ,  $Ng = 8.3 \cdot 10^{-2}$ ).

#### 4.5.2 Estudio de cuencas dinámicas en flujos dominados por fricciones

Caracterizamos el tipo de bifurcación (supercrítica o subcrítica) a través de fenómenos de histéresis asociados a una trayectoria dada del sistema en el espacio de las fases. Manteniendo constante los coeficientes de fricción, el salto externo de presión y la potencia entregada, variamos el subenfriamiento de entrada al canal. Partimos de altos subenfriamientos de entrada de modo que el fluido abandone el canal permaneciendo en una fase líquida. A medida que aumentamos la temperatura de ingreso (*i.e.* disminuimos el subenfriamiento) se alcanza la temperatura de saturación para abandonar al canal como una mezcla bifásica. Eventualmente, si continuamos disminuyendo el subenfriamiento, el sistema evoluciona hacia un estado inestable a partir de una cierta temperatura,  $T_{i1}$  para la cual se alcanza el límite de estabilidad, observándose entonces ondas de densidad. Si recorremos el mismo camino en sentido inverso disminuyendo el subenfriamiento lentamente, una vez que el sistema traspone el umbral de estabilidad, cabe esperar que el sistema decaiga nuevamente al estado estable para una temperatura,  $T_{i2}$ . Si no se observan efectos de histéresis,  $T_{i1}=T_{i2}$ , es un indicio de una bifurcación supercrítica. En efecto, una característica distintiva de este tipo de bifurcaciones es que al ingresar el sistema dentro de la región inestable, se observan oscilaciones con amplitud creciente con el alejamiento del umbral de estabilidad. Por el contrario, si estuviéramos en presencia de una bifurcación del tipo subcrítico, cabe esperar un efecto de histéresis,  $T_{i2}<T_{i1}$ . En efecto, al reingresar a la región linealmente estable desde un estado oscilatorio, y por ende perturbado, no decae al estado estable hasta que la magnitud de las perturbaciones sean inferiores a las del ciclo límite inestable. Las oscilaciones subcríticas son divergentes (siendo limitadas en última instancia por otras no linealidades, como por ejemplo inversión de flujo).

Es importante destacar que siguiendo una trayectoria como la descrita, mantenemos dos parámetros variables: el subenfriamiento de entrada (controlado) y el caudal medio. Este último puede determinarse a partir de la ecuación estacionaria de momento para un canal (93). Considerando que la potencia se mantiene constante, mientras que el tiempo de residencia en una fase,  $v$ , varía en función del subenfriamiento, es conveniente adimensionalizar los resultados tomando como velocidad de referencia  $u_{ref}=L_{ch}\Omega$ , en lugar de  $u_{ref}=L_{ch}/v$ , de forma que la velocidad adimensionalizada así,  $u^*$ , represente directamente el caudal medio medido en el experimento.

En la Fig. 4.6 ilustramos una familia de trayectorias teóricas del sistema siguiendo las curvas de estado estacionario, para distintos valores del coeficiente de fricción a la salida,  $k_e$ . Las curvas son a potencia,  $k$ , y subenfriamiento de entrada constantes. Nótese que variaciones pequeñas de  $k_e$  tienen efectos apreciables sobre la trayectoria. Para valores bajos de  $k_e$  se observan cambios suaves en el caudal al ingresar a la zona de dos fases, mientras que para valores mayores de  $k_e$  se produce un efecto de histéresis asociado con las inestabilidades excursivas de Ledinegg. La flechas que se muestran en la Fig. 4.6 representan la trayectoria buscada en el experimento.

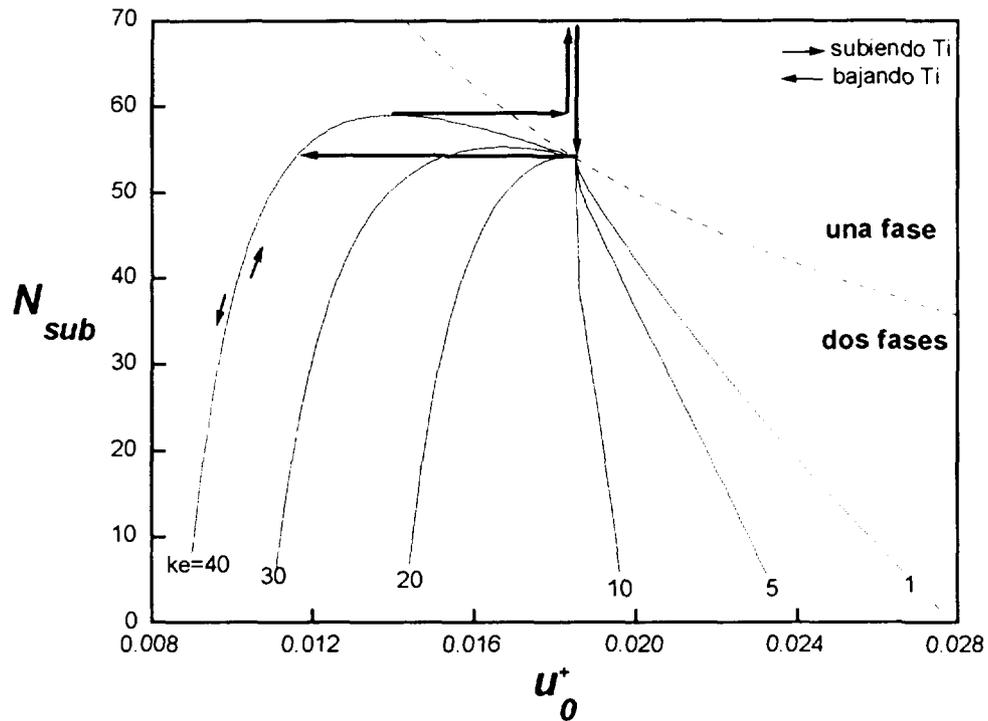


Figura 4.6: Familia de trayectorias teóricas ( $k_i = 400$ , Potencia = 4100 W).

A continuación estudiaremos una serie experimental siguiendo la trayectoria antes mencionada. En la Fig. 4.7 se observa la trayectoria seguida desde y hacia la región estable, encontrándose ondas de densidad para los menores subenfriamientos. El valor de la potencia se mantuvo en  $3850 \pm 100$  W, siendo por lo tanto el caudal de referencia ( $L A_{cs} \Omega$ ) de  $2600 \pm 80$  cm<sup>3</sup>/seg .

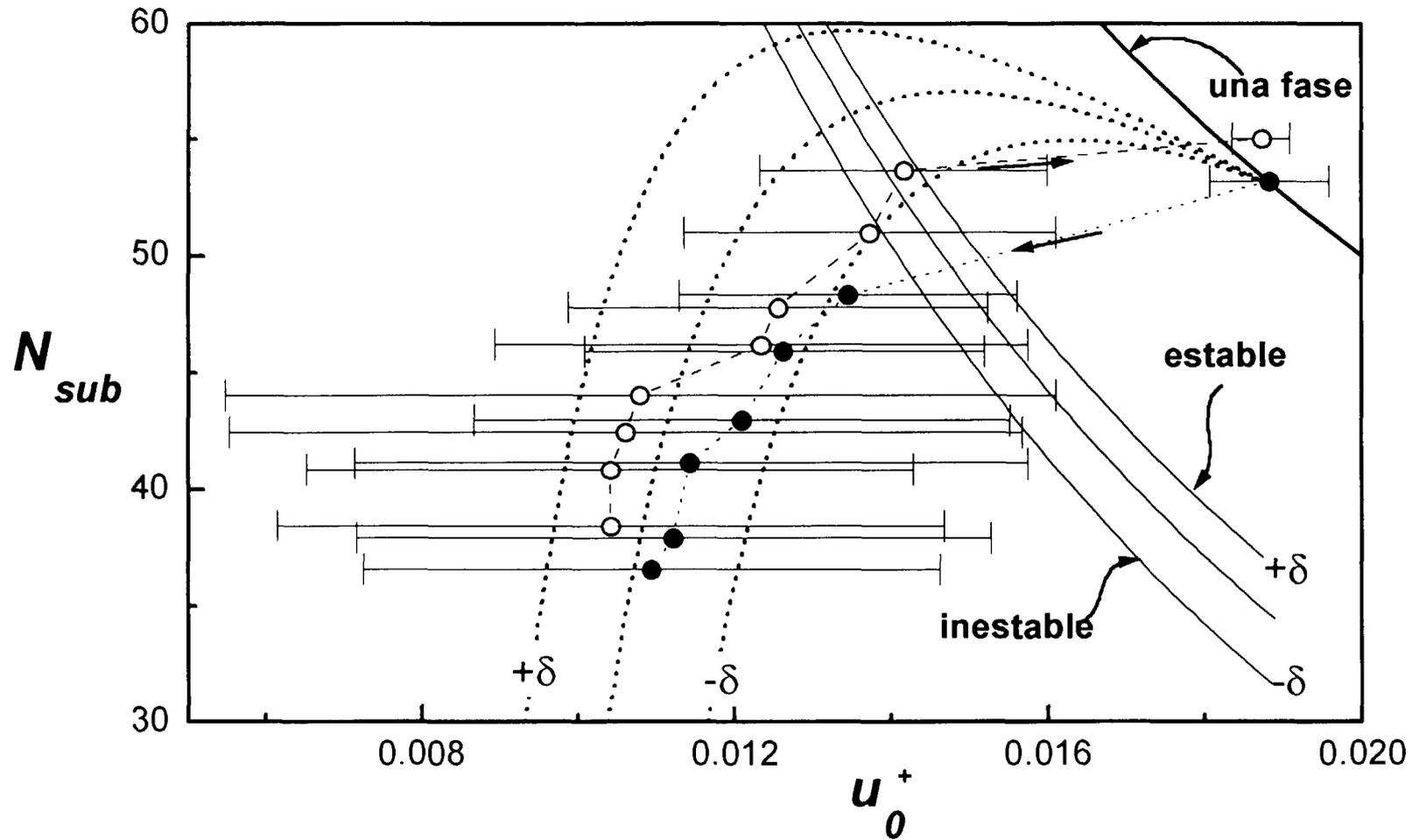


Figura 4.7: Trayectoria en el plano  $(N_{sub}, u_0^+)$ . Potencia =  $3850 \pm 100$  W,  $k_r = 350 \pm 100$ ,  $k_s = 35 \pm 5$ . -●-  $N_{sub}$  disminuyendo, -○-  $N_{sub}$  aumentando, ---- estacionario, — limite estab. lineal,  $\pm\delta$  indica el rango de incerteza del estacionario debido a  $k_r$ , las barras son la desviación cuadrática media de las mediciones de caudal (*i.e.* indican la amplitud de la oscilación)

Del análisis de esta serie experimental surgen varias observaciones que podemos destacar:

- Se observa un buen acuerdo entre las trayectorias experimentales y las pronosticadas según el modelo homogéneo para los valores medidos de los parámetros del sistema (tanto en los valores estacionarios como en los márgenes de estabilidad).
- Las frecuencias observadas (ver Apéndice B), de 4 a 5 veces el tiempo de residencia  $\nu$  permiten asegurar que la importancia relativa del término gravitatorio es moderada.
- No se aprecian procesos de histéresis. El sistema se inestabiliza y recobra la estabilidad en el mismo punto, dentro de las incertezas experimentales. El pequeño desfase que se observa en la transición corresponde a la excursión de Ledinegg (ver Fig. 4.6 y Figs. B1 y B16 del Apéndice B). Por ello se puede concluir que la transición observada es atribuible a una bifurcación supercrítica. La envolvente supercrítica se muestra en la Fig. 4.8.
- En la Fig. 4.7 se observa que a medida que baja el subenfriamiento (alejándose del umbral de estabilidad) la amplitud de las oscilaciones aumenta, llegando incluso a observarse inversión de flujo en algunos experimentos. La inversión de caudal se caracteriza por:
  - 1 patrón de ondas con inversión de caudal discontinuado e irregular.
  - 2 histéresis: el punto en el cual comienza la inversión de caudal (aumentando la temperatura) es distinto del punto en el que se extingue este fenómeno (disminuyendo la temperatura). Estas características no pertenecen a las oscilaciones típicas de una bifurcación de Hopf supercrítica, lo cual sugiere la presencia de una dinámica más compleja.

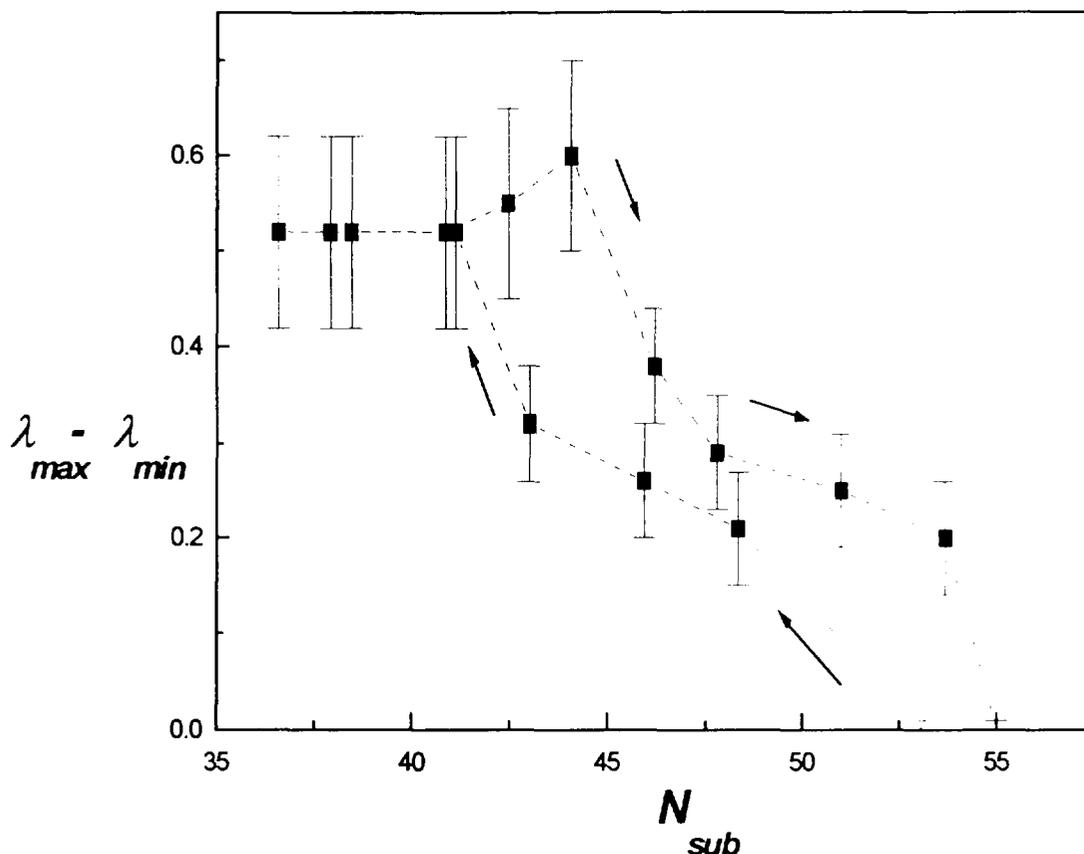


Figura 4.8: Envolvente de amplitudes de las oscilaciones ( $\lambda_{max} - \lambda_{min}$ ).

En el Apéndice B se muestra la serie completa de datos en el orden en que fueron adquiridos.

#### 4.5.2.1 Histéresis con inversión de caudal

En la serie experimental anterior se observaban efectos no lineales interesantes. Al progresar dentro de la región linealmente inestable aumentaban las amplitudes de las oscilaciones. A partir de cierto punto, caracterizado por la temperatura de ingreso al canal,  $T_{i1}$ , éstas incluían nuevas no linealidades, tales como la inversión de caudal. Disminuyendo luego  $T_i$ , observamos que este nuevo fenómeno se presentaba hasta un cierto umbral,  $T_{i2}$ , menor que  $T_{i1}$ . Este efecto de histéresis fue estudiado en la serie experimental siguiente.

En la Fig. 4.9 se ilustra la trayectoria seguida en el plano ( $N_{sub}, u'_o$ ), para la serie experimental con potencia constante  $4100 \pm 100$  W, siendo por lo tanto el caudal de referencia ( $L A_{xs} \Omega$ ) de  $2700 \pm 80$  cm<sup>3</sup>/seg. Se utilizó el criterio anteriormente descrito para estimar los caudales medios. Los valores de los coeficientes de fricción para las pérdidas de presión concentradas en ambos extremos del canal calefaccionado fueron en la entrada  $k_i = 550 \pm 100$  y en la salida  $k_e = 40 \pm 10$ , en esta segunda serie experimental.

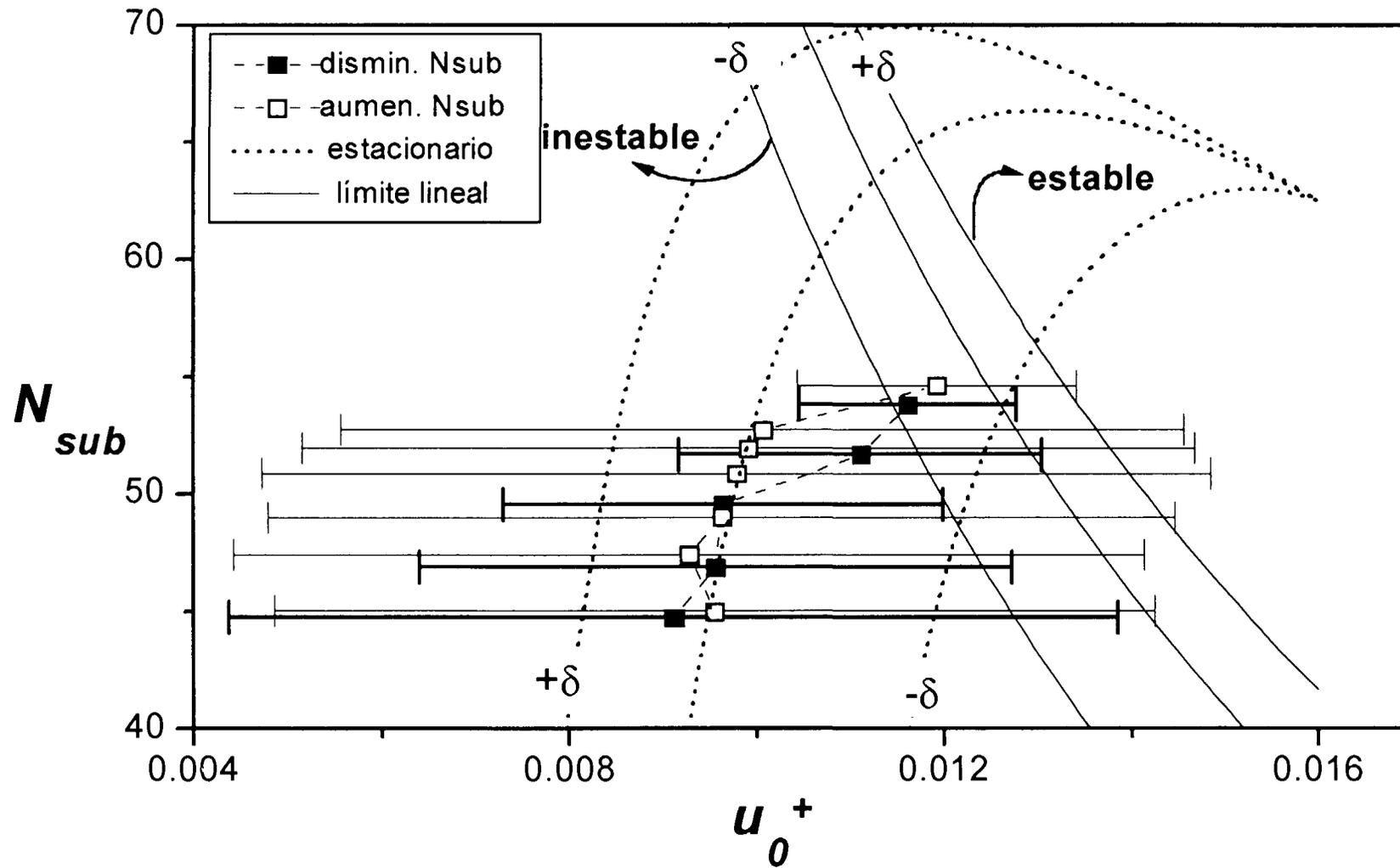


Figura 4.9: Trayectoria experimental. (Potencia =  $4100 \pm 100$  W,  $k_i = 550 \pm 100$ ,  $k_r = 40 \pm 10$ ,  $\pm \delta$  indica la incerteza debida a  $k_r$ , las barras representan la desviación cuadrática media en las mediciones de caudal).

**2 PAGES ARE MISSING IN  
THE ORIGINAL DOCUMENT**

Debido a las limitaciones de la medición de caudal con medidor de presión diferencial para detectar inversión de flujo, en los casos en que se verifican picos en la temperatura de entrada (evidencia de caudal inverso) no tiene sentido deconvolucionar la señal de caudal para hallar la frontera de ebullición,  $\lambda$ . En su lugar, se utilizó la información visual (máximos y mínimos de la oscilación del punto donde comienza la ebullición). En la Fig. 4.10 se observan las bandas de oscilación de la frontera de ebullición así obtenidas. Se destacan los siguientes efectos:

- Al incrementar la temperatura de entrada partiendo de la región estable se observa un aumento de las amplitudes de las oscilaciones, formando una envolvente típica de un foco supercrítico en el plano  $(u^*, N_{nb})$ .
- Estas oscilaciones siguen creciendo hasta producir inversión de caudal, lo cual se evidencia por la presencia de picos de temperatura medida por la termocupla ubicada a la entrada del canal.
- A partir de allí, disminuyendo la temperatura de entrada (*i.e.*, aumentando el  $N_{nb}$ ) se observa que el sistema no vuelve por la misma trayectoria. En particular, las oscilaciones con flujo reverso continúan aún para subenfriamientos donde antes observamos oscilaciones sin este fenómeno. Esta histéresis debe ser explicada a partir del estudio de la estabilidad de la cuenca de atracción del foco supercrítico.
- Finalmente, al disminuir la temperatura de modo que el sistema reingresa a la región linealmente estable, se observa la brusca desaparición de este fenómeno, decayendo el sistema a un estado estable. Esta es una característica distintiva de la bifurcación supercrítica, ya que el sistema decae al estado estable independientemente de la perturbación que tenga, dentro de la región linealmente estable (ver Figs. C1 y C11 del Apéndice C).

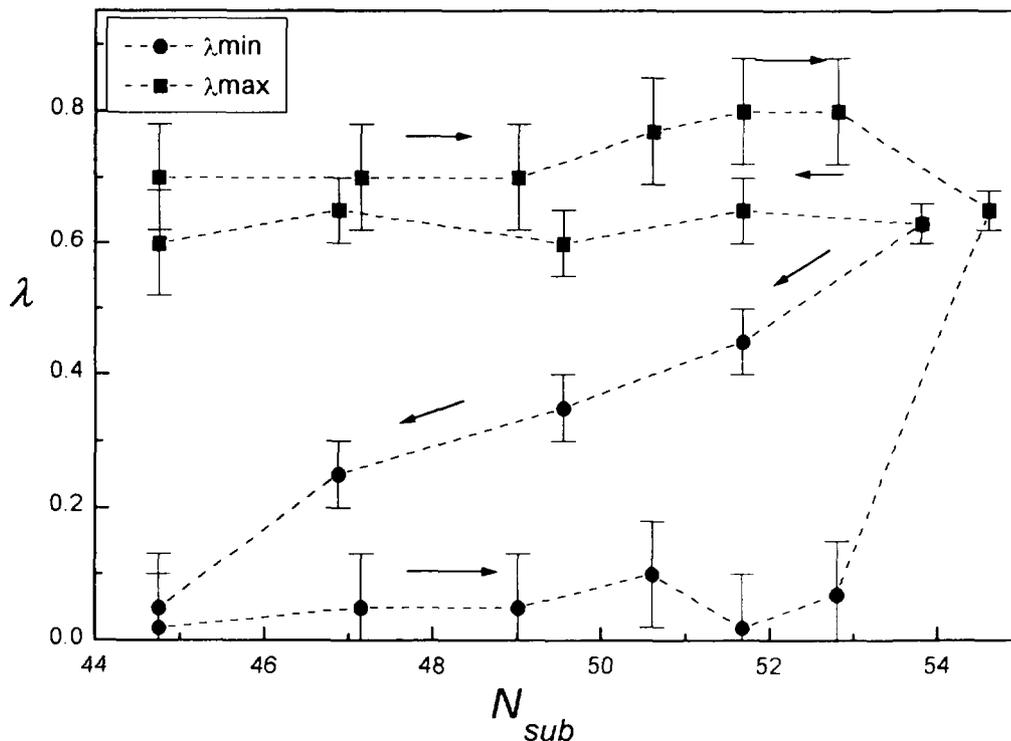


Figura 4.10: Envolvente de las oscilaciones de  $\lambda$  en la trayectoria experimental.

El fenómeno de histéresis aquí observado presenta un buen acuerdo con los resultados numéricos obtenidos en el desarrollo previo, donde se pronosticaron fenómenos de histéresis en la transición entre cuencas.

La serie completa de mediciones experimentales es mostrada en el Apéndice C, siguiendo el orden en que fueron adquiridas. Las señales correspondientes a oscilaciones sin inversión de caudal se muestran filtradas y deconvolucionadas, mientras que en los casos con inversión se muestran las señales sin filtrar y sin deconvolucionar.

### 4.5.3 Estudio de cuencas dinámicas en flujos gravitatorios

En el estudio teórico se encontró que en flujos dominados por fricciones las bifurcaciones de Hopf cambian de supercríticas a subcríticas si la frontera de ebullición sobre el margen de estabilidad se encuentra por debajo de la mitad de la longitud del canal (i.e., si  $\hat{u}_0 < 0.5$ ). El valor 0.5 de la transición aumenta en sistemas donde la gravedad no es despreciable.

En esta sección se mostrarán resultados experimentales obtenidos en flujos donde el término gravitatorio es preponderante en la ecuación de momento. La manera de alcanzar esta condición es disminuir substancialmente las pérdidas irreversibles en el circuito. Esto se puede lograr abriendo las válvulas ubicadas a la entrada y salida del canal.

El procedimiento experimental fue el mismo que se siguió en los experimentos con fricción dominante: se controla la temperatura de entrada a la sección calefaccionada manteniendo constante la potencia. En la Fig. 4.11 se ilustra la trayectoria experimental seguida por el sistema. Pueden destacarse los siguientes aspectos:

- El caudal medio se incrementa conforme disminuye el título a la salida del canal (y disminuye  $\lambda$ ). Esto demuestra que el efecto del término gravitatorio domina frente al de las fricciones concentradas en la salida. A diferencia del caso de fricciones dominantes, no se observa un salto en el caudal medio al comenzar la ebullición (causado por las inestabilidades de Ledinegg).
- Otras características distintivas que permiten identificar al flujo como gravitatorio son el período de las oscilaciones (del orden de  $\nu$ ) y la asimetría de las amplitudes de las oscilaciones de la velocidad y de la frontera de ebullición (ver Apéndice D).
- Se observan efectos de histéresis apreciables en el umbral de estabilidad partiendo de distintas perturbaciones iniciales. Partiendo de un estado estable, poco perturbado, se observa que el sistema comienza a oscilar cuando la temperatura de entrada sobrepasa 72.8 °C. Sin embargo, al efectuar el camino inverso, deja de oscilar en 68.2 °C (ver la serie experimental completa en el Apéndice D).
- Se nota gran amplitud de las oscilaciones en la velocidad. En todas las oscilaciones entra en juego una nueva no linealidad: la frontera de ebullición sale fuera del canal. Esta no linealidad, al igual que la inversión de caudal, tiende a acotar la amplitud de las oscilaciones.

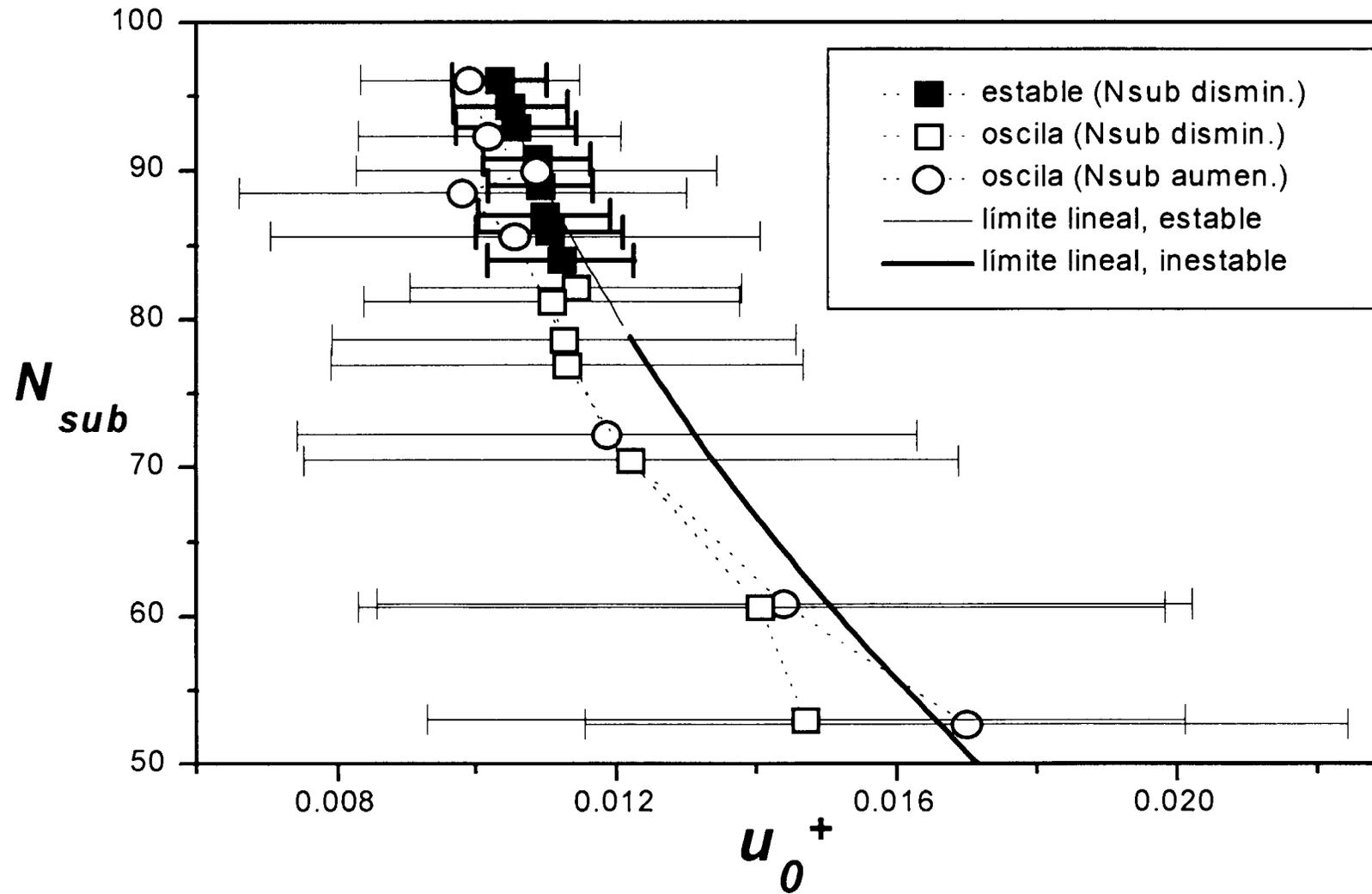


Figura 4.11: Trayectoria experimental en el plano ( $N_{sub}, u_0^+$ ). Potencia =  $3400 \pm 100$  W, siendo el caudal de referencia ( $L A_{cs} \Omega$ ) =  $2350 \pm 80$  cm<sup>3</sup>/seg,  $k_i = 18 \pm 5$ ,  $k_r = 8 \pm 4$ . (estacionario con  $k_i = 20$ ,  $k_r = 10$ , las barras representan la desviación cuadrática media en las mediciones de caudal).

En el Apéndice D se muestran la serie experimental completa, filtrada y deconvolucionada. En las Figs. 4.12 se ilustran los ciclos límites correspondientes a las trayectorias experimentales seguidas en el espacio de las fases ( $\hat{u}_i, \lambda$ ) para dos casos de la serie experimental. Hay diferencias notables con respecto a los experimentos con gravedad despreciable, las cuales concuerdan con el análisis teórico:

- las amplitudes de las oscilaciones de la frontera de ebullición son marcadamente menores que las del caudal.
- la frecuencia de estas oscilaciones es del orden del tiempo de residencia,  $v$ , varias veces menor que las del caso de gravedad moderada, y por lo tanto, dado que la demora  $\hat{u}_i - \lambda$  es de  $v/2$
- los ejes de los ciclos límites aparecen rotados en sentido antihorario, respecto a los casos de término gravitatorio despreciable (ver Fig. 4.12a y b).

Con respecto al carácter divergente del foco, nótese la aparición de oscilaciones fuera del canal en toda la serie experimental lo cual “frena” al comportamiento divergente. Se estudió numéricamente esta característica utilizando el modelo desarrollado en el capítulo 3. Se encontraron focos subcríticos con estados oscilatorios donde la frontera de ebullición abandona el canal, en algunos casos estudiados de la serie experimental anterior. Las figuras 3.4 y 3.5 ilustran concretamente dos de estos casos. Sus parámetros concuerdan (dentro de los errores experimentales) con los de las Figs. D7 y D5 (donde se aprecia un comportamiento estacionario) y con los de las Figs. D17 y D19 del Apéndice D (donde se aprecia un comportamiento oscilatorio), correspondientes a puntos de la serie experimental ubicados dentro de la región linealmente estable (ver Fig. 4.11). Al ubicar al sistema en estos puntos, y perturbarlo con un pequeño cambio en el salto de presión externo, el mismo decae al estado estacionario, pero para perturbaciones mayores de un cierto valor observamos que el sistema abandona la cuenca anterior, y a través de un comportamiento oscilatorio divergente alcanza una nueva cuenca donde aparece una nueva no linealidad en juego, el abandono por parte de  $\lambda$  del canal.

Comparando también el período de las oscilaciones dadas por las figuras obtenidas de la simulación numérica, 3.4b y 3.5b y las de la serie experimental, D17 y D19, respectivamente, surge un buen acuerdo, siendo en todas ellas aproximadamente  $1.2 v$ .

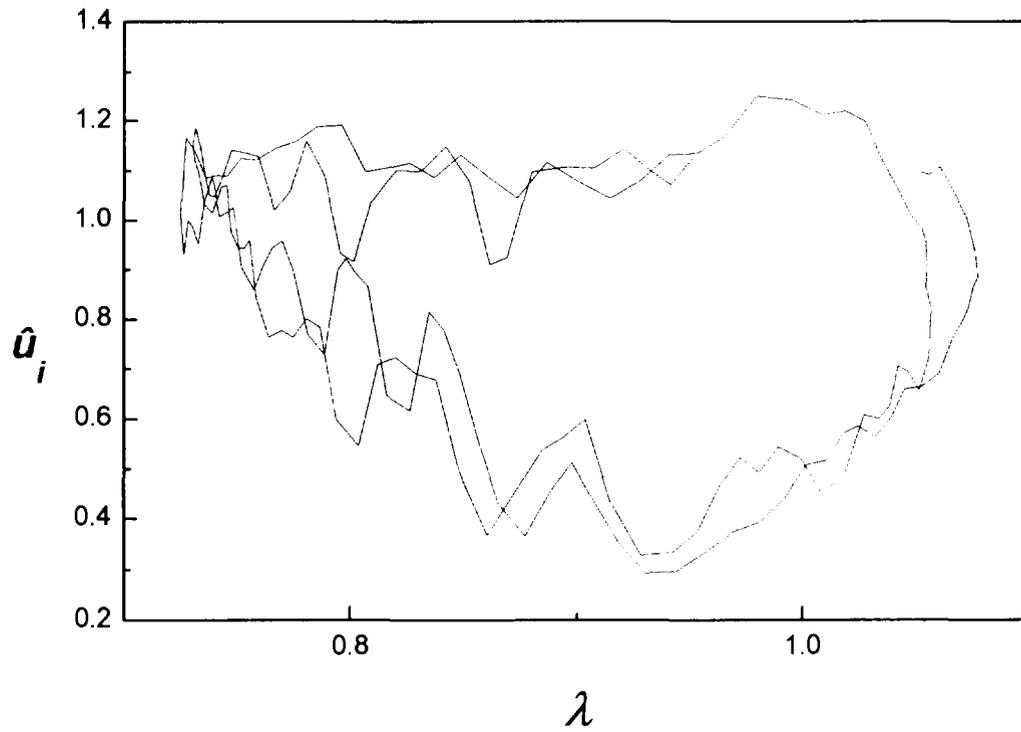


Figura 4.12a: Trayectoria experimental en el plano  $(\hat{u}_i, \lambda)$   
 $(N_{sub}=76.9 \pm .8, Ng=5.9 \pm 3 \cdot 10^{-3}, \hat{u}_o = .88 \pm .05)$  (ver Fig. D12).

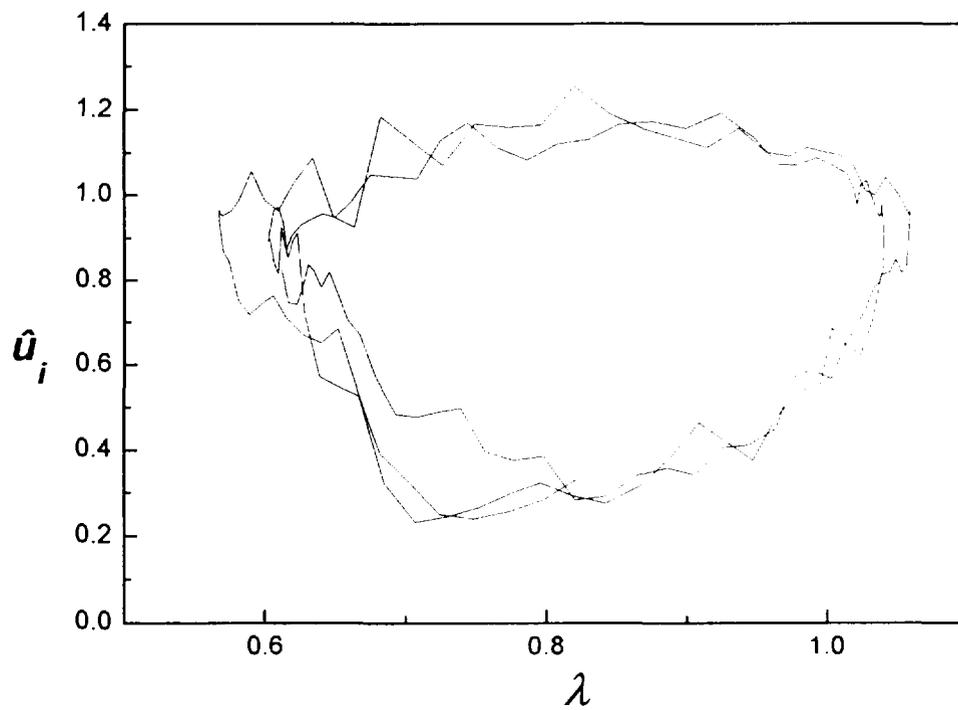


Figura 4.12b: Trayectoria experimental en el plano  $(\hat{u}_i, \lambda)$   
 $(N_{sub}=53.0 \pm .8, Ng=1.21 \cdot 10^{-2}, \hat{u}_o = .82 \pm .05)$ .

## Capítulo 5

### Conclusiones y recomendaciones

Las conclusiones generales que se obtuvieron en el presente trabajo son:

- Los flujos bifásicos en ebullición pueden presentar un comportamiento dinámico bastante complejo. Tanto los resultados experimentales como el modelado numérico sugieren en el caso estudiado (circulación forzada a presión atmosférica) la existencia de diversas cuencas dinámicas.
- El modelo algebraico en demoras desarrollado es una simplificación del problema, útil para entender algunos de los fenómenos no lineales presentes, asociados con bifurcaciones de Hopf. Los resultados obtenidos, en general cualitativamente concordantes con modelos más complejos, derivan en criterios analíticos sencillos que ponen de manifiesto las relaciones existentes entre las variables del problema.
- Se observó que incrementando las pérdidas de presión debidas a la gravedad se produce un aumento en la frecuencia y una rotación de los ejes de los ciclos límites de las ondas de densidad. El análisis dimensional de los resultados obtenidos con este modelo sugiere la conveniencia de utilizar nuevos números adimensionales para representar casos donde las fricciones y la gravedad son las fuerzas dominantes.
- Se estudiaron numéricamente las inestabilidades dinámicas con estados oscilatorios de grandes amplitudes fuera de la cuenca de atracción de las bifurcaciones de Hopf. Se reconocieron nuevos efectos no lineales que pueden aparecer en estos casos, dando origen a nuevas cuencas de atracción. Se estudió el fenómeno de ondas de densidad en este nuevo dominio, encontrándose características propias que sugieren una dinámica aún más compleja. En especial, el estudio sugiere la posible aparición de fenómenos de histéresis asociados con la transición de fases dinámicas.
- El estudio experimental ilustra las diferencias entre los casos con flujos de gravedad despreciable y los casos donde no lo es, mostrando la razonabilidad de las hipótesis del modelo algebraico en el primero de ellos.

- La información experimental permite observar distintos fenómenos, de características distintivas, que pueden explicarse a partir de bifurcaciones de Hopf supercríticas o subcríticas estudiadas numéricamente, dentro de las incertezas experimentales.
- Efectos de histéresis observados experimentalmente en estados oscilatorios caracterizados por inversiones temporarias de caudal, pueden explicarse asociando este fenómeno a una transición de cuenca dinámica estudiada numéricamente, dentro de las incertezas experimentales.

Entre las recomendaciones para trabajos futuros podemos indicar:

- Ampliación del estudio experimental sobre flujos en ebullición bajo éstas y otras condiciones de interés.
- Ampliación del dominio de estudio del modelo numérico desarrollado en el estudio de flujos con oscilaciones de grandes amplitudes para incluir nuevos fenómenos, tales como oscilaciones con estados temporarios del canal totalmente en dos fases.
- Ampliación del modelo algebraico para estudiar otros casos (flujos con inercia considerable, o sistemas más complejos por ejemplo) y validación de los resultados obtenidos utilizando modelos físicos más avanzados.

## APÉNDICE A

### Relación armónica entre el caudal ingresante y la frontera de ebullición.

Consideraremos un canal en ebullición con densidad de potencia constante y uniforme, y subenfriamiento de entrada constante. La posición de la frontera de ebullición,  $\lambda(t)$  es definida por:

$$\lambda(t) = \int_{t-v}^t u_i(t') dt' \quad (A1)$$

Una perturbación armónica de la velocidad de entrada:

$$u_i(t) = u_0 + \delta u = u_0 + \sin \omega t \quad (A2)$$

se traduce en una perturbación en la frontera de ebullición dada por:

$$\delta \lambda(t) = \int_{t-v}^t \sin \omega t dt' = -\frac{1}{\omega} [\cos \omega t - \cos \omega(t-v)] \quad (A3)$$

Por identidades trigonométricas vale que:

$$\cos \omega(t-v) = \cos \omega t \cos \omega v + \sin \omega t \sin \omega v \quad (A4)$$

$$\sin \omega t = 2 \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} \quad (A5)$$

y

$$\cos \omega t = \cos^2 \frac{\omega t}{2} - \sin^2 \frac{\omega t}{2} \quad (A6)$$

Reemplazando estas identidades (A4-6) en la ecuación (A3) y operando convenientemente se obtiene:

$$\lambda(t) = \frac{2 \sin \frac{\omega v}{2}}{\omega} \left[ \sin \omega t \cos \frac{\omega v}{2} - \cos \omega t \sin \frac{\omega v}{2} \right] \quad (A7)$$

Operando sobre la Ec. (A7):

$$\lambda(t) = \frac{2 \sin \frac{\omega v}{2}}{\omega} \sin \omega \left( t - \frac{v}{2} \right) \quad (A8)$$

Recordando que partimos de una velocidad  $u$ , armónica,  $\lambda$  puede reescribirse en función de  $u$ , para obtenerse así la relación:

$$\lambda(t) = \frac{2 \sin \frac{\omega v}{2}}{\omega} u, (t - \frac{v}{2}) \quad (\text{A9})$$

De la ecuación (A9), se desprenden dos importantes resultados:

- Si hay oscilaciones armónicas, las oscilaciones del caudal de entrada al canal y las de  $\lambda$  están desfasadas en  $v/2$ .
- $\lambda$  opera como un filtro de las altas frecuencias de las oscilaciones de caudal.

Analizando estas conclusiones considerando la hipótesis aproximativa planteada por nuestro modelo algebraico en demoras (ver ecuación (7)), notamos que para oscilaciones armónicas la demora  $t_1$  es constante y toma el valor  $v/2$ . No es igualmente cierto que las oscilaciones de  $u$ , y  $\lambda$  tengan igual amplitud, pero esta aproximación será razonable a frecuencias bajas. Esto último surge a partir de que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\lambda}{u} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\omega v}{2}}{\omega v} = 1 \quad (\text{A10})$$

En los flujos dominados por las fricciones, las frecuencias de las oscilaciones son bajas y esta aproximación funciona muy bien, mientras que en flujos dominados por la gravedad su frecuencia aumenta y la aproximación pierde exactitud.

## Apéndice B

### Primera serie experimental (ver Fig. 3.7 )

La evolución del caudal se presenta filtrada para tener en cuenta los efectos de inercia [53], y se deconvoluciona para hallar la evolución de la frontera de ebullición, en aquellos casos en que no se produce inversión de flujo. En los casos de inversión de flujo, evidenciado por aumentos bruscos de la temperatura adquirida con la termocupla ubicada sobre la entrada del canal, se muestra solamente la evolución del caudal sin filtrar y sin deconvolucionar.

El “salto” del caudal medio producido a partir de que se alcanza ebullición, debida a las inestabilidades excursivas, puede observarse directamente en las Figs. B1 y B16. Como consecuencia del mismo el sistema llega a un nuevo estado, fuera de la región estable, y comienza a oscilar inmediatamente.

A continuación se presenta la serie experimental completa correspondiente a la Fig. 3.7. Todas las temperaturas de ingreso al canal tienen un error estimado en  $\pm .2$  °C.

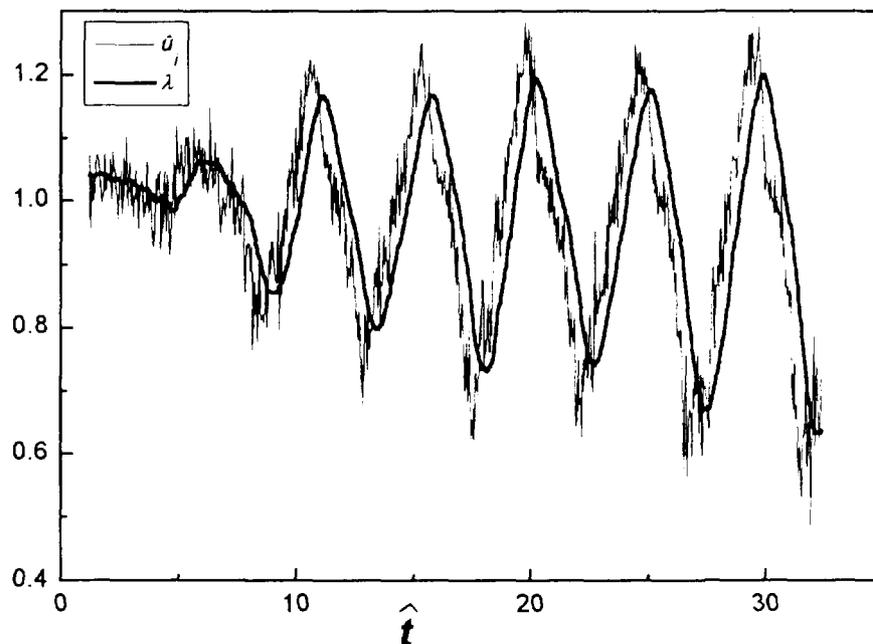


Figura B1  $T_i=83.7$  °C (aumentando  $T_i$ ).

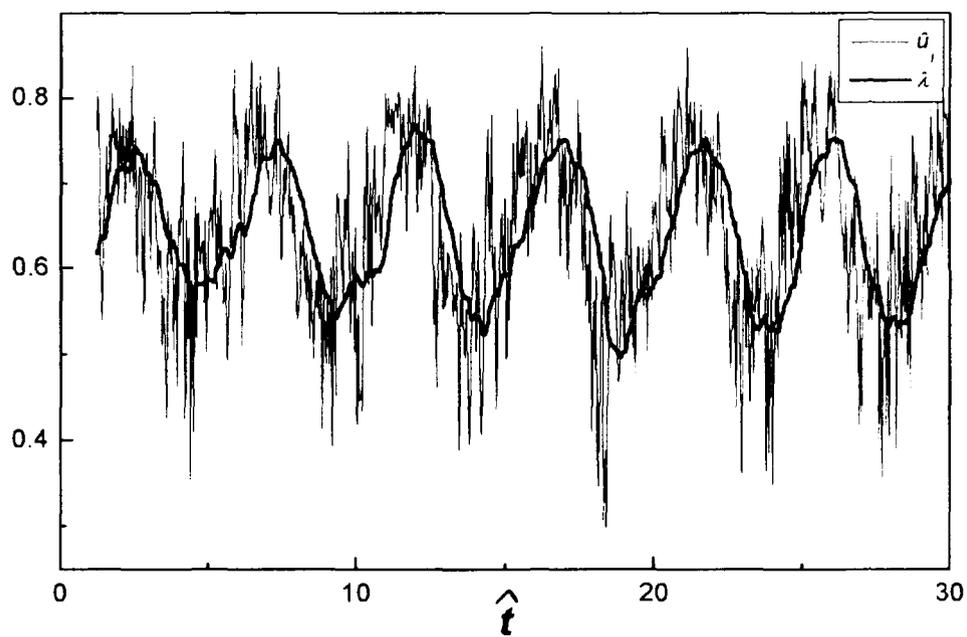


Figura B2  $T_i=85.5\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ ).

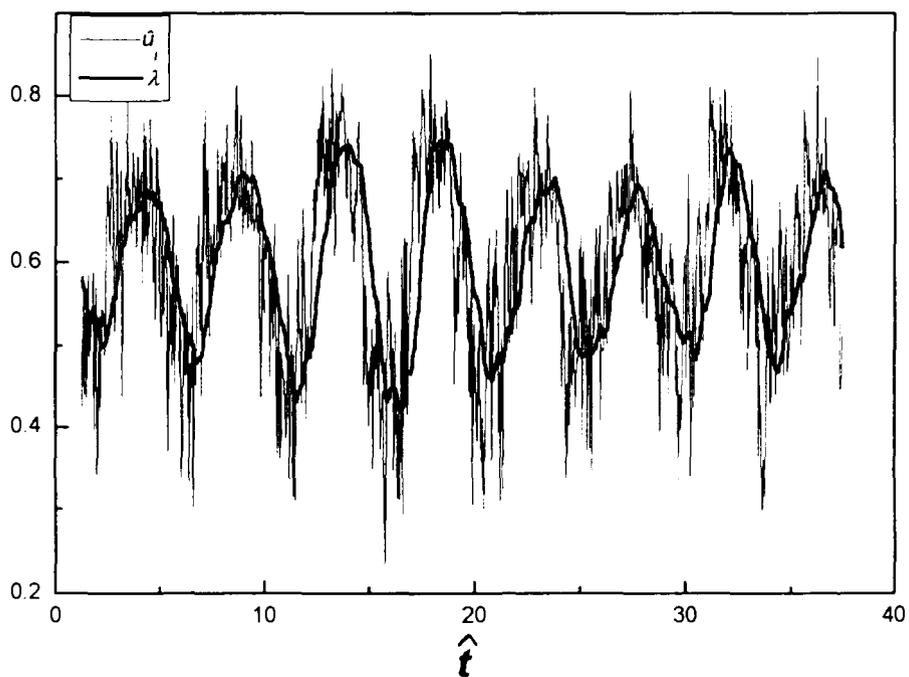


Figura B3  $T_i=86.4\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

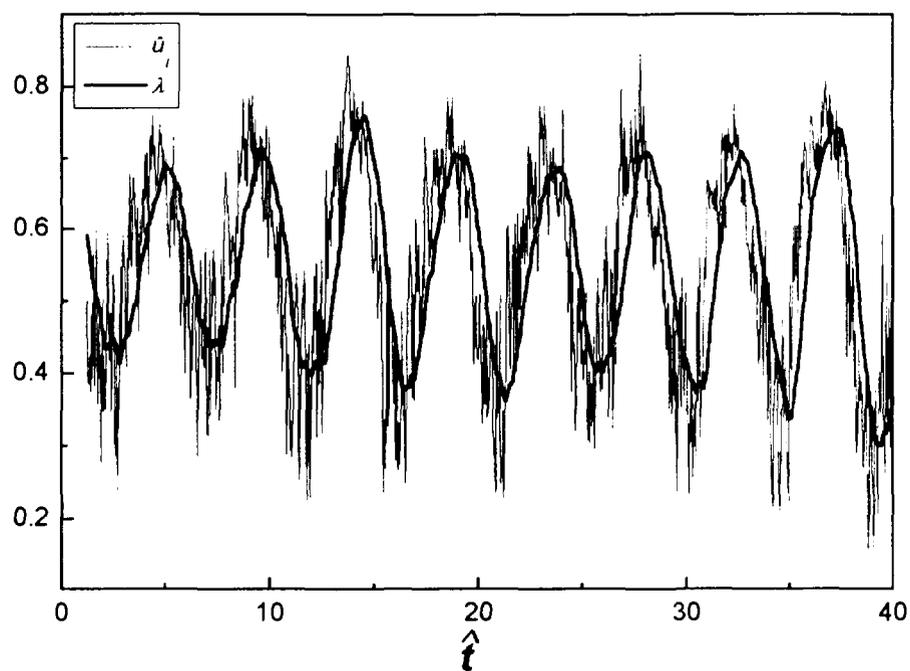


Figura B4  $T_i=87.5$  °C (aumentando  $T_i$ )

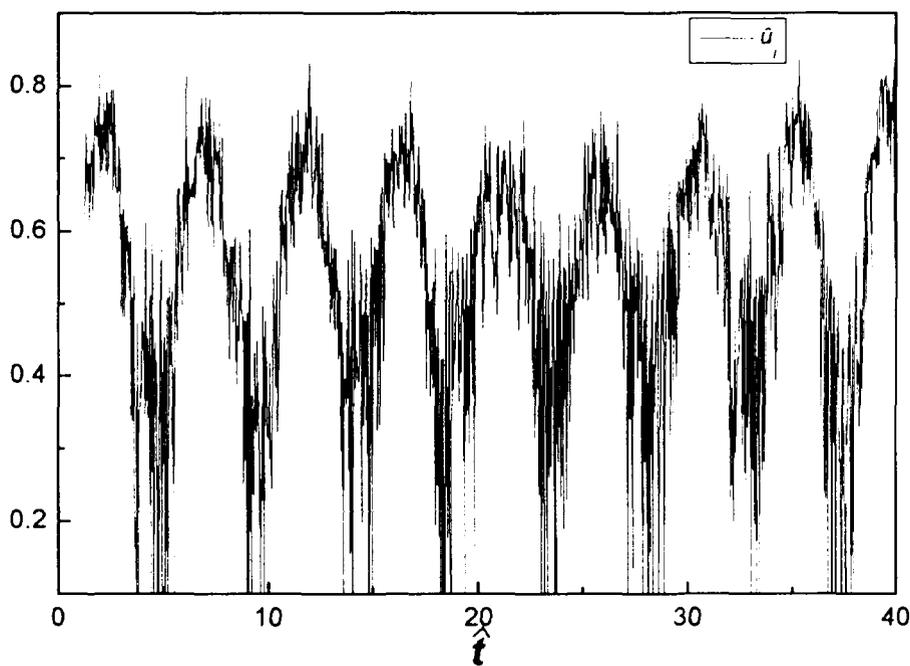


Figura B5  $T_i=88.3$  °C (aumentando  $T_i$ )

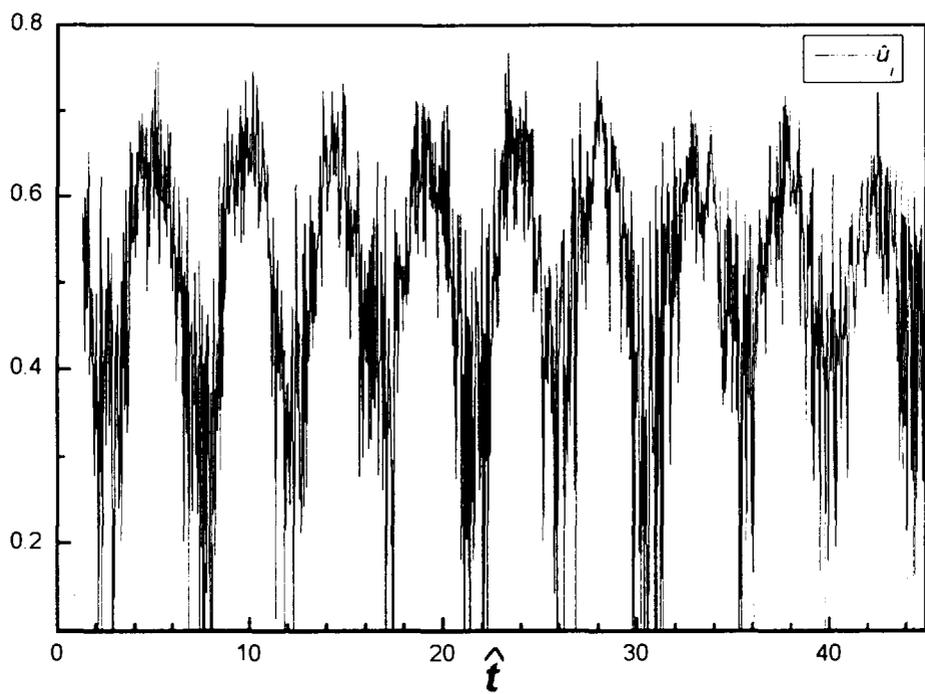


Figura B6  $T_i=89.4$  °C (aumentando  $T_i$ )

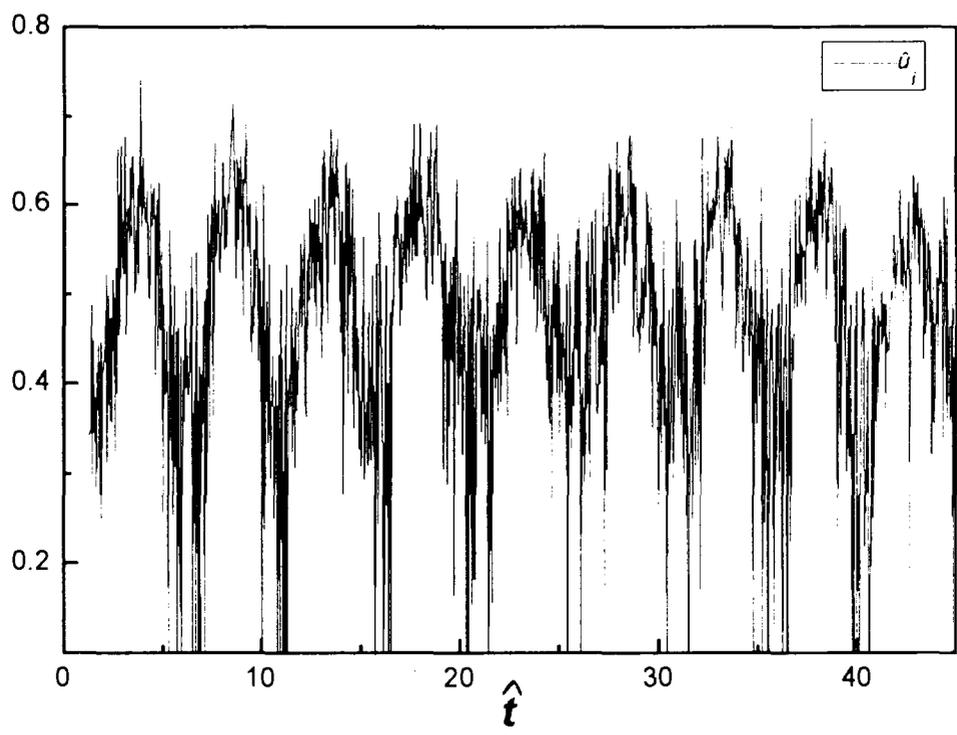


Figura B7  $T_i=89.9$  °C (aumentando  $T_i$ )

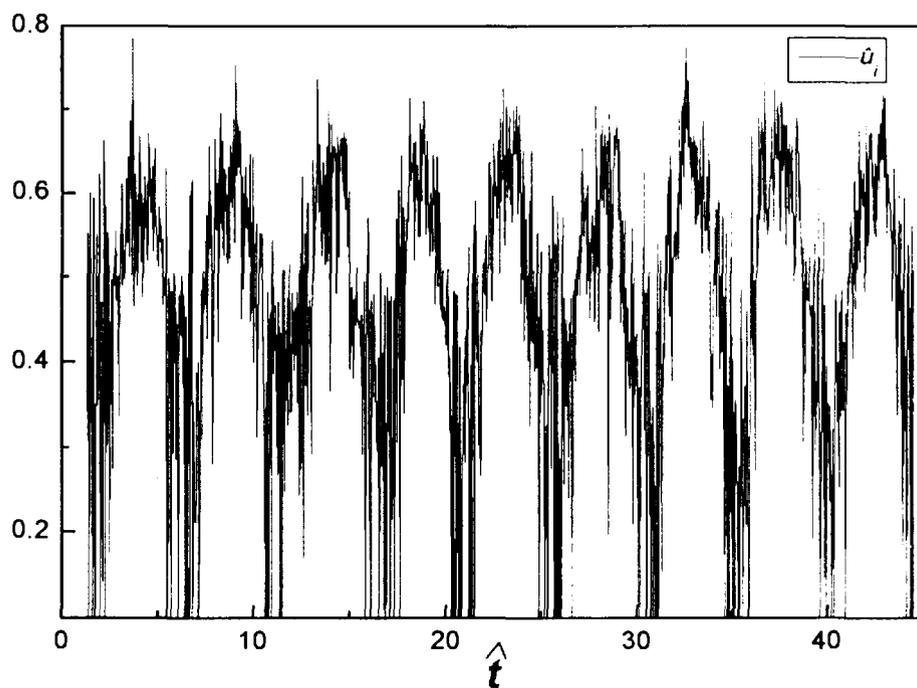


Figura B8 Ti=89.1 °C (disminuyendo Ti)

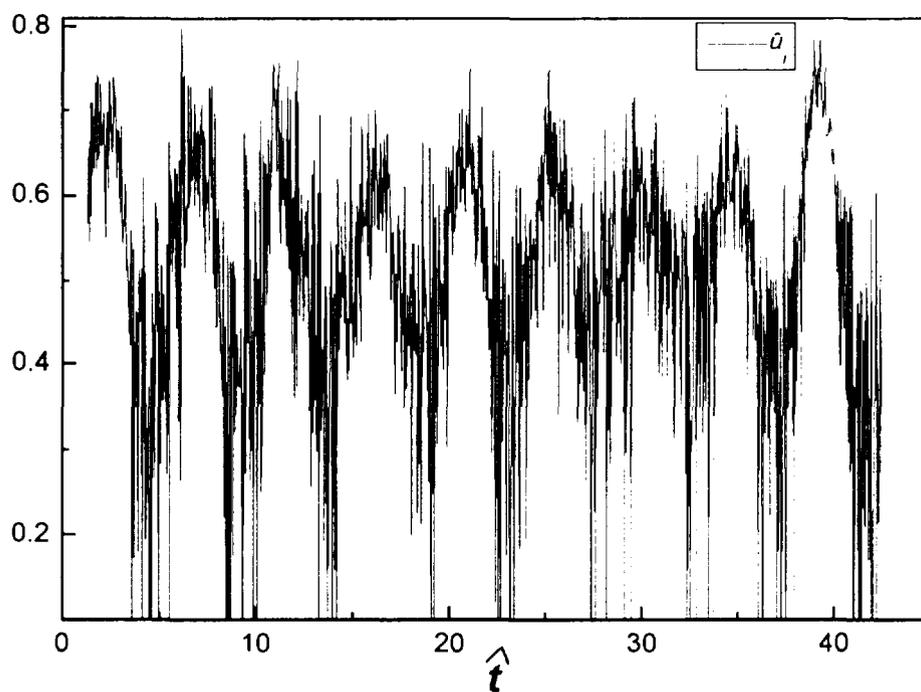


Figura B9 Ti=88.3 °C (disminuyendo Ti)

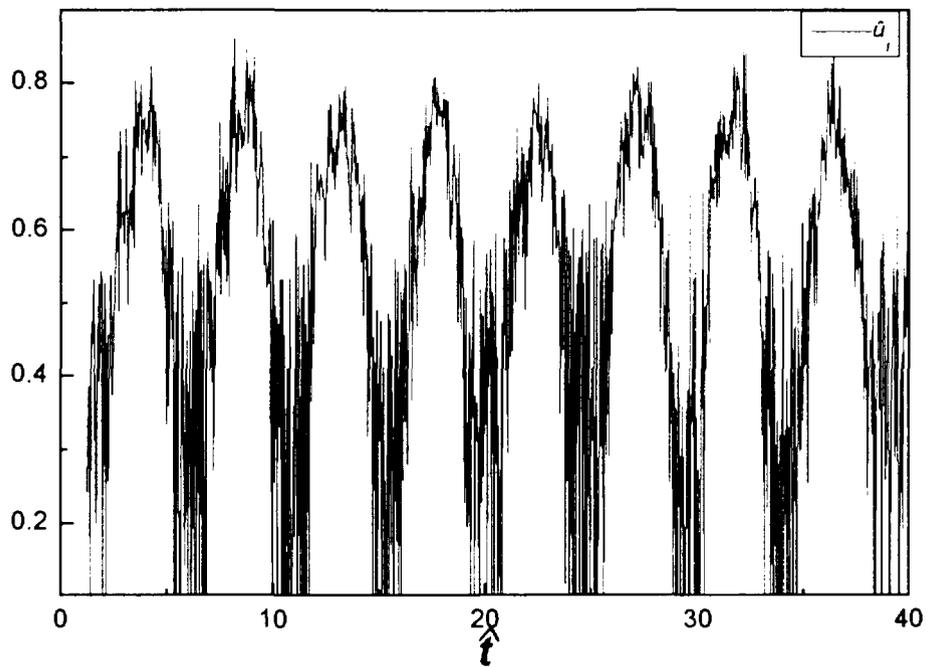


Figura B10 Ti=87.7 °C (disminuyendo Ti)

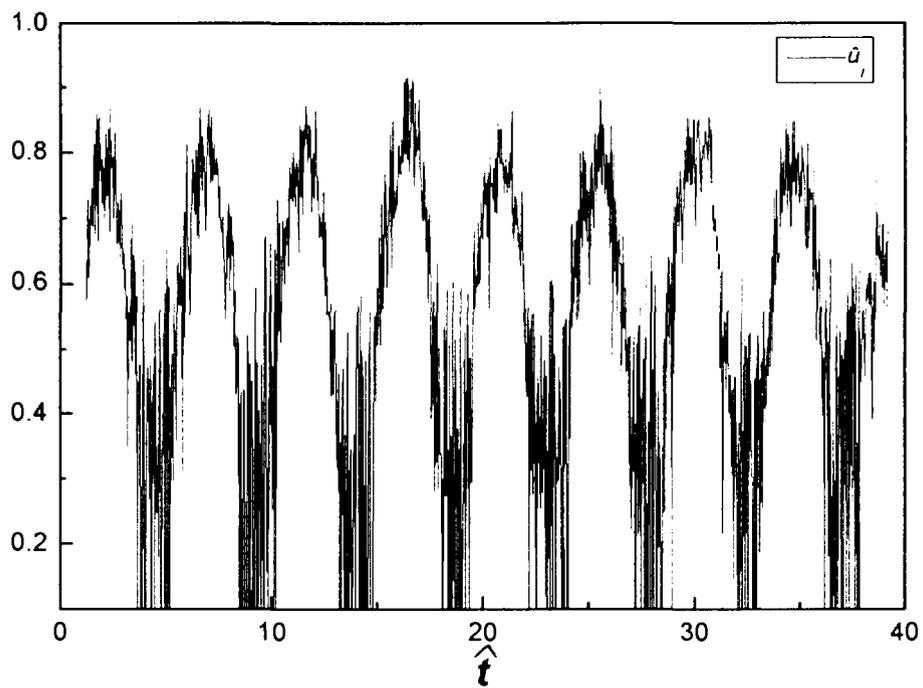


Figura B11 Ti=87.1 °C (disminuyendo Ti)

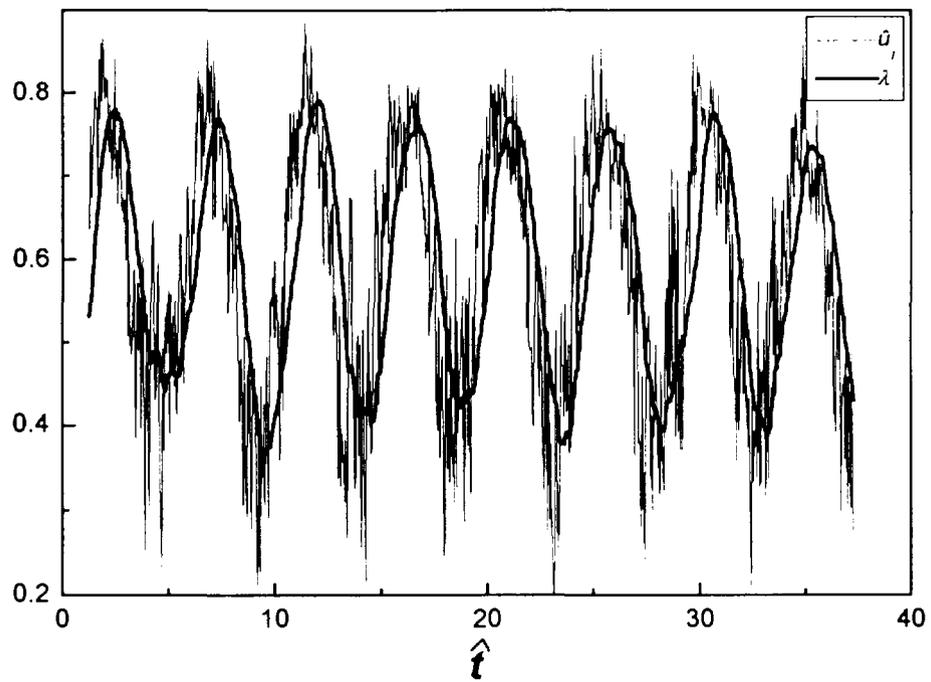


Figura B12  $T_i=86.3$  °C (disminuyendo  $T_i$ )

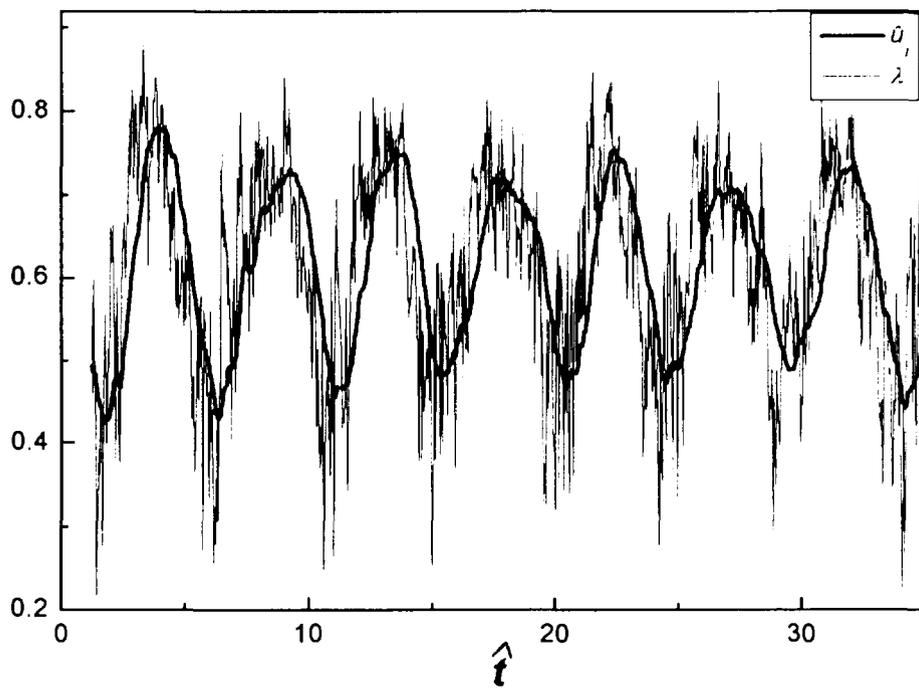


Figura B13  $T_i=85.7$  °C (disminuyendo  $T_i$ )

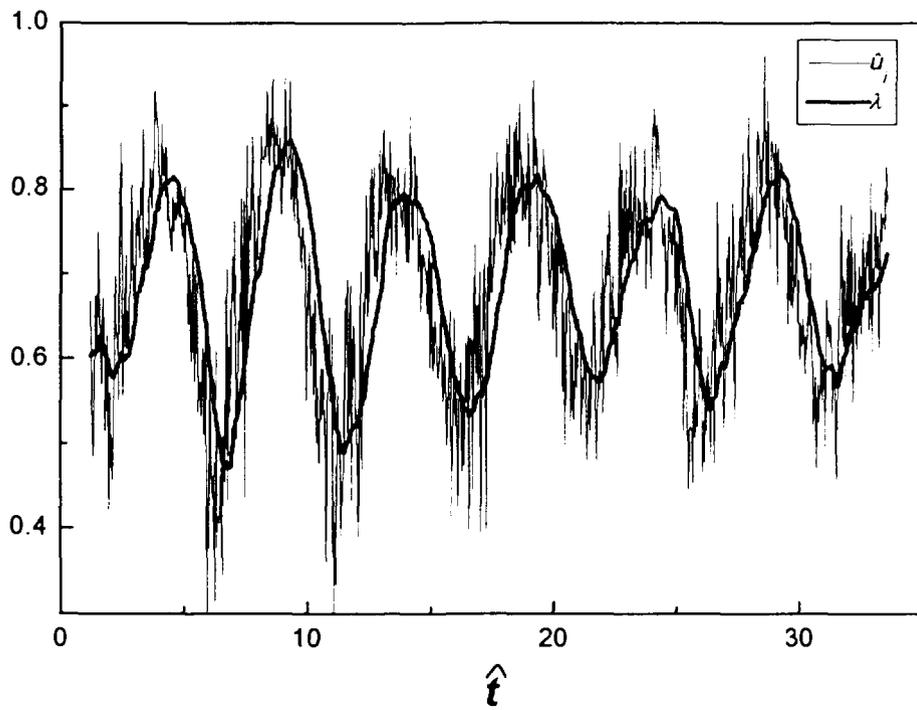


Figura B14  $T_i=84.4\text{ }^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

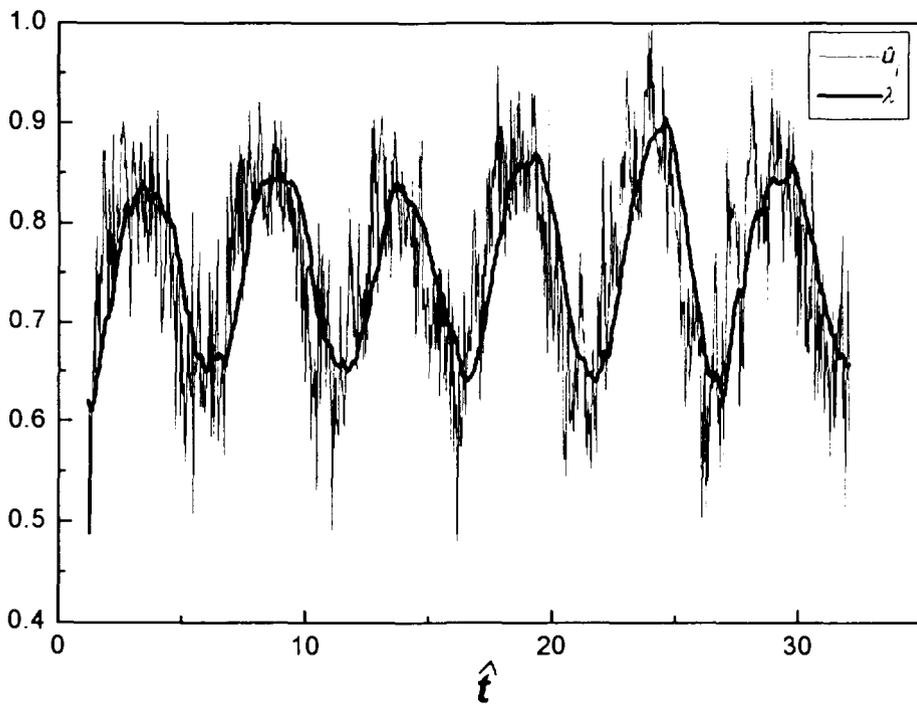


Figura B15  $T_i=83.5\text{ }^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

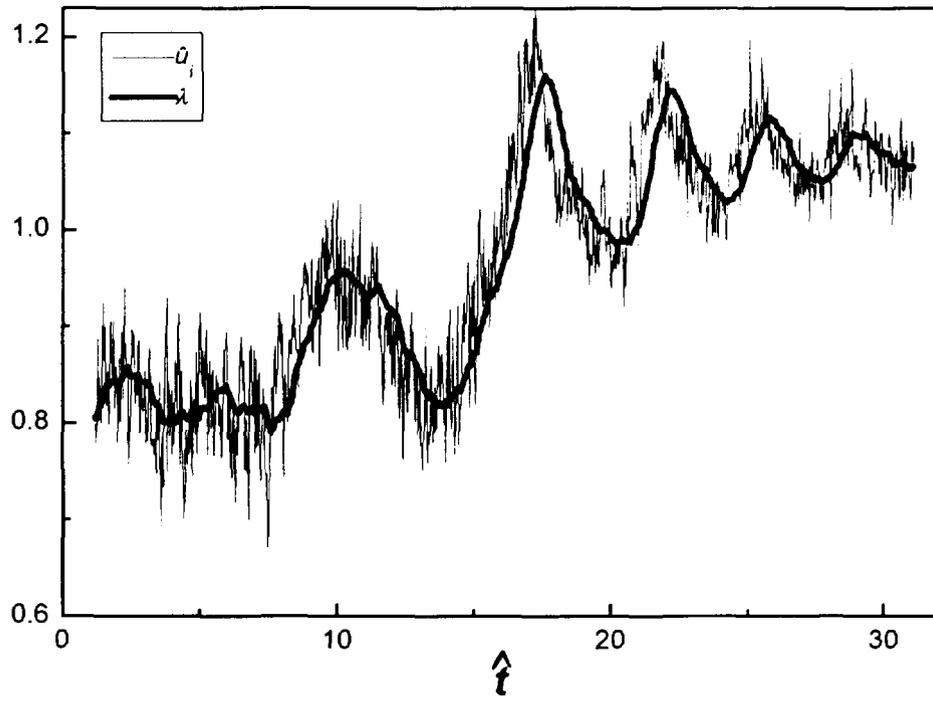


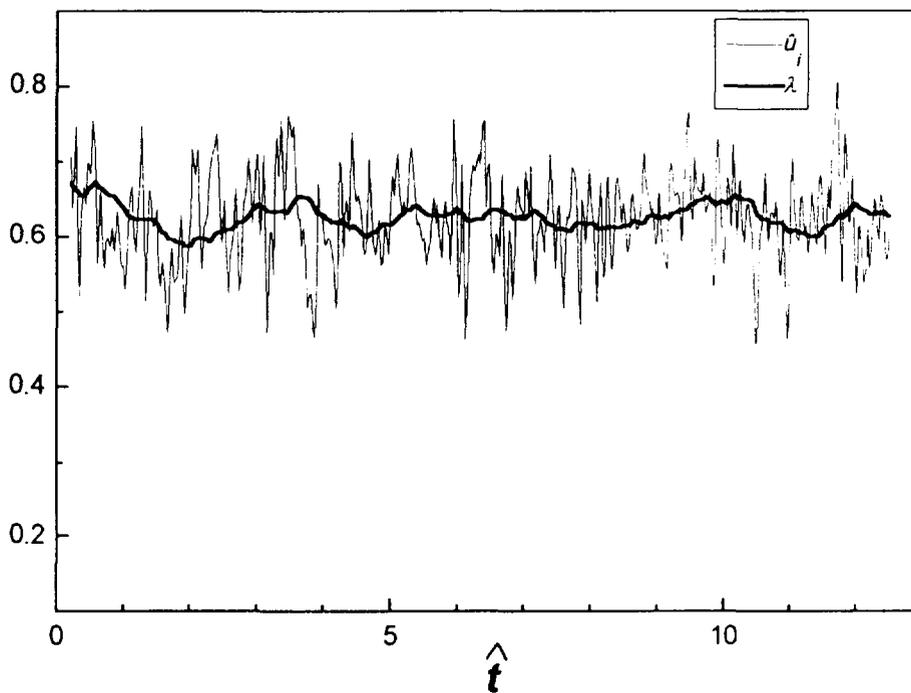
Figura B16 Ti=83.0 °C (disminuyendo Ti)

## Apéndice C

### Segunda serie experimental (ver Fig. 4.9)

La evolución del caudal se presenta filtrada para tener en cuenta los efectos de inercia [53], y se deconvoluciona para hallar la evolución de la frontera de ebullición, en aquellos casos en que no se produce inversión de flujo. En los casos de inversión de flujo, evidenciado por aumentos bruscos de la temperatura adquirida con la termocupla ubicada sobre la entrada del canal, se muestra la evolución del caudal sin filtrar y sin deconvolucionar, y se muestra además la evolución de la temperatura medida a la entrada al canal.

A continuación se presenta la serie experimental completa correspondiente a la Fig. 4.9. Todas las temperaturas de ingreso al canal tienen un error estimado en  $\pm .2$  °C.



FiguraC1  $T_1 = 83.3$  °C (aumentando  $T_1$ .)

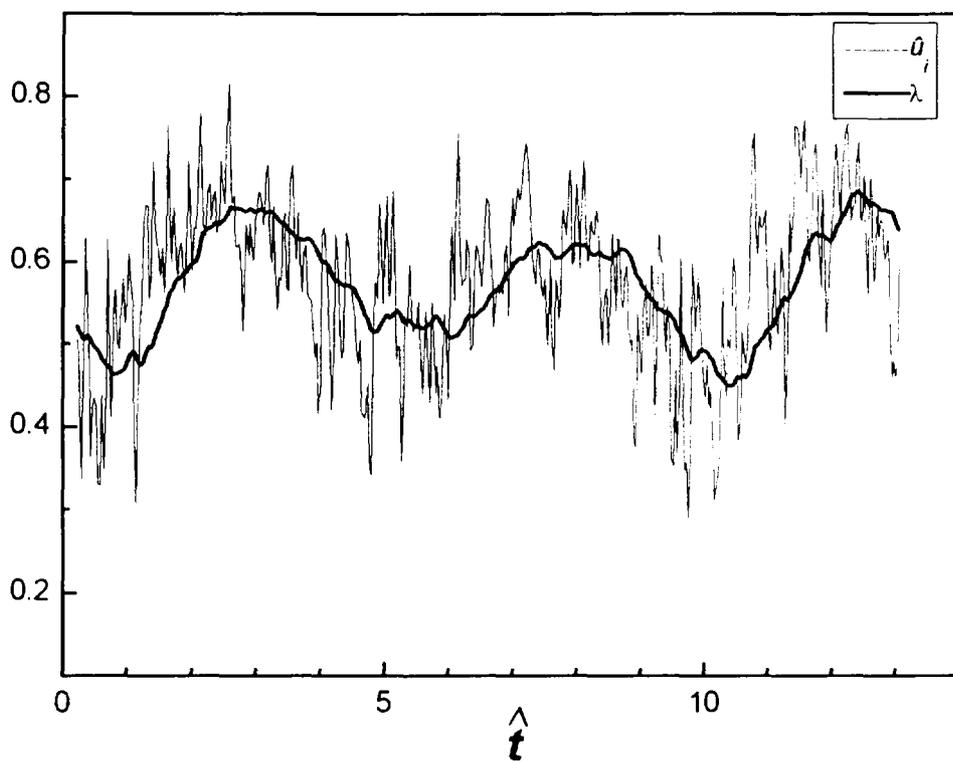


Figura C2  $T_1 = 84.1 \text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_1$ )

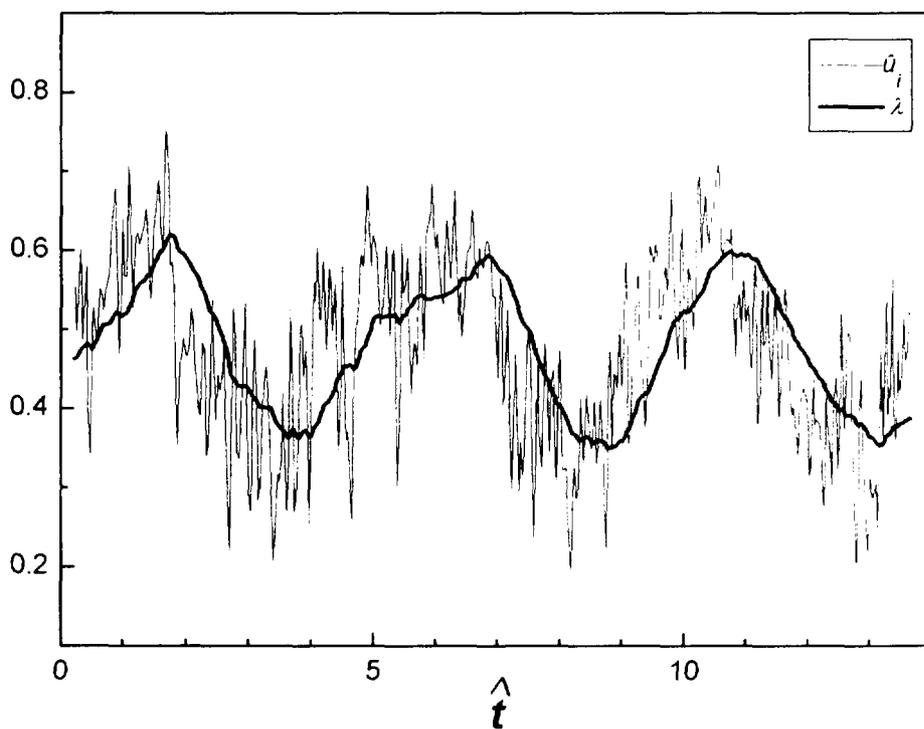


Figura C3  $T_1 = 84.9 \text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_1$ )

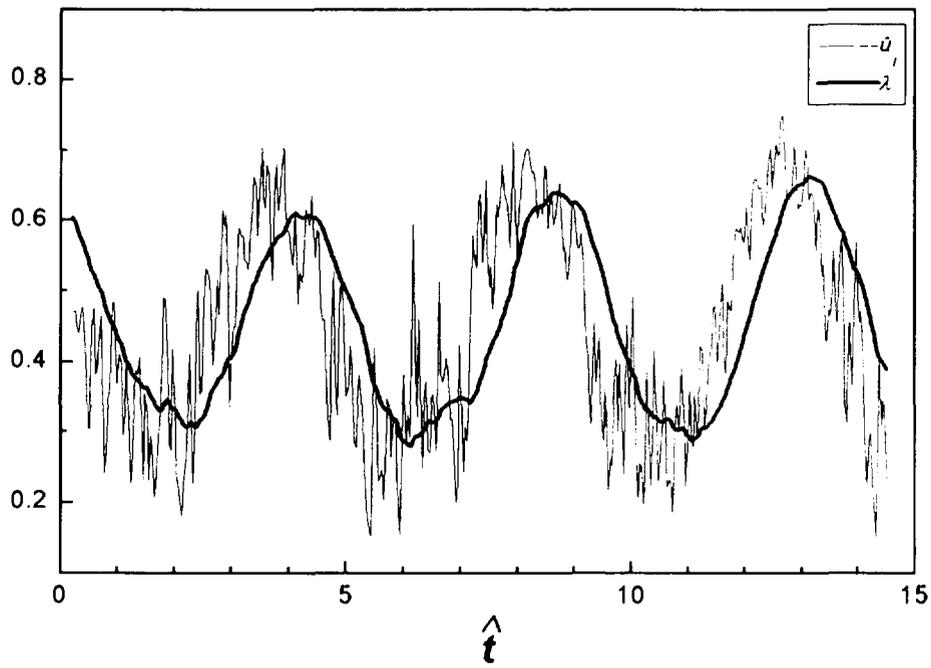


Figura C4  $T_i = 85.9 \text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

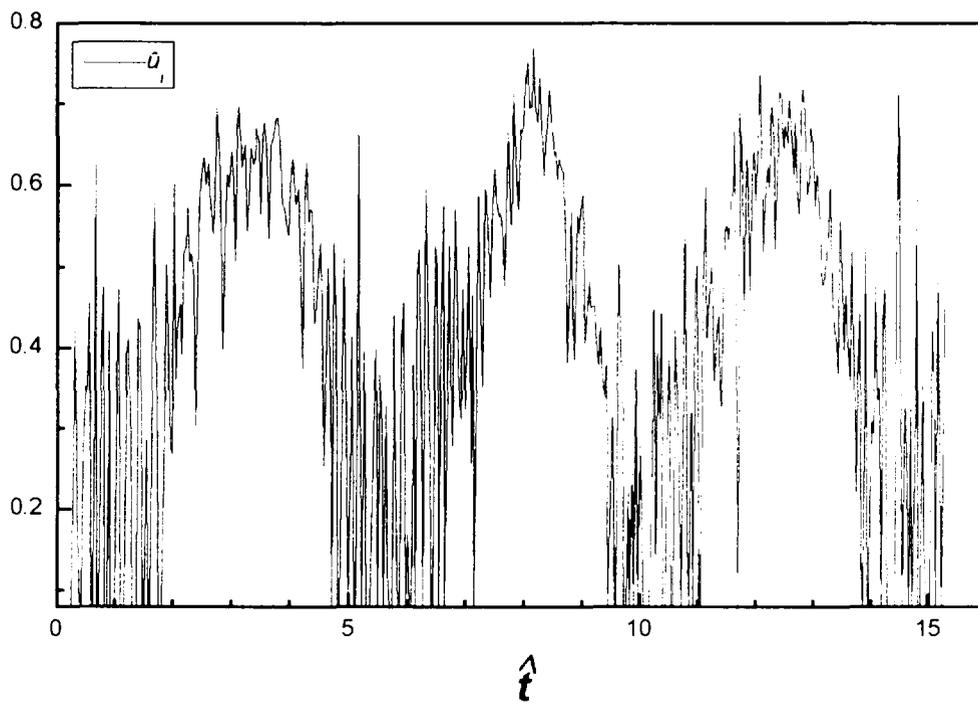


Figura C5a  $T_i = 86.7 \text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

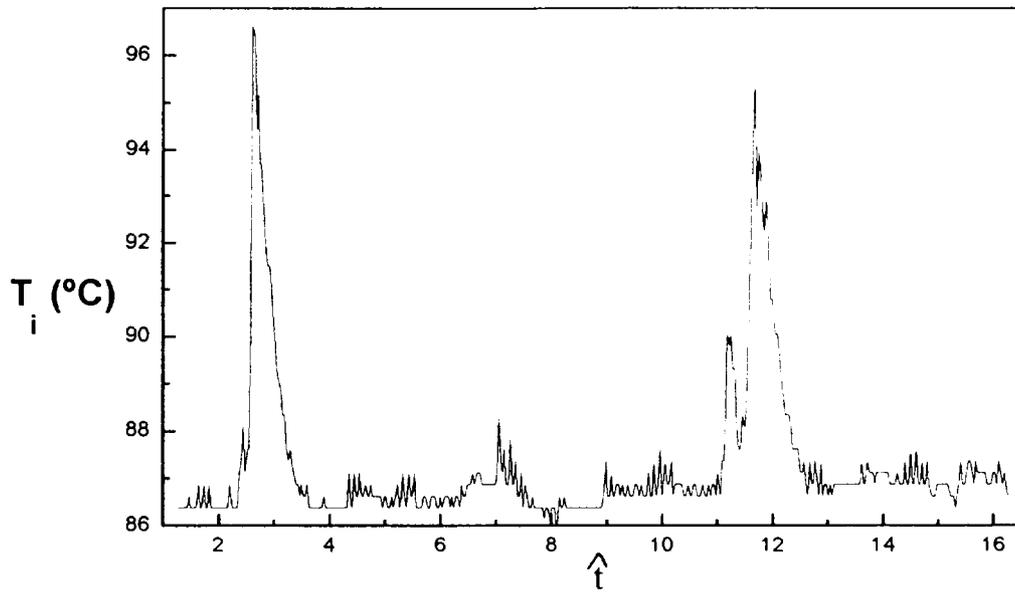


Figura C5b Evolución de la temperatura de ingreso (ver Fig. C5a)

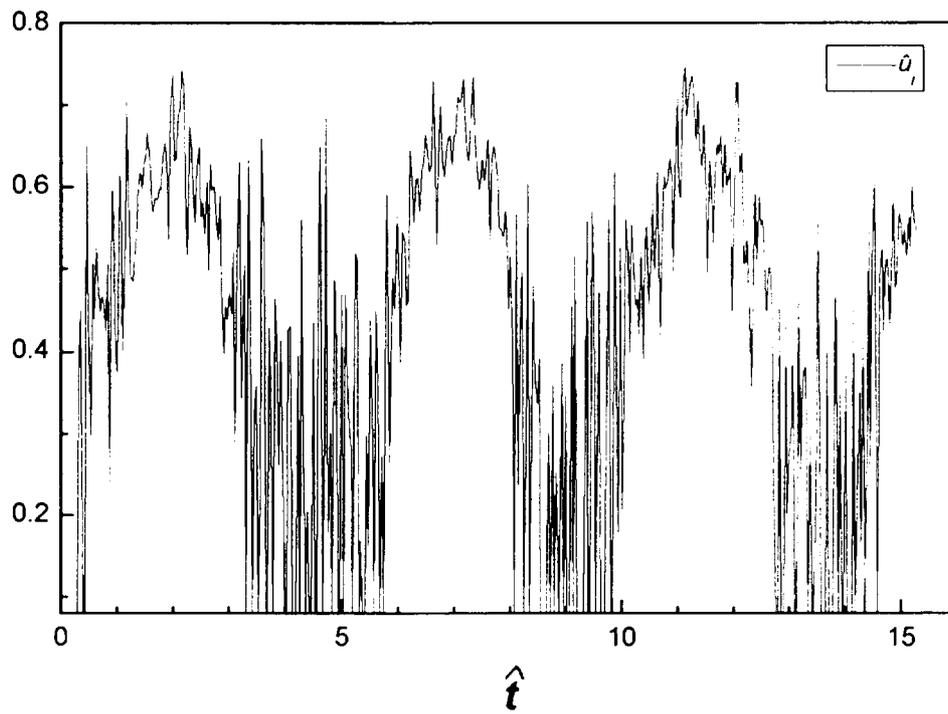


Figura C6a  $T_i = 86.7 \text{ } ^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

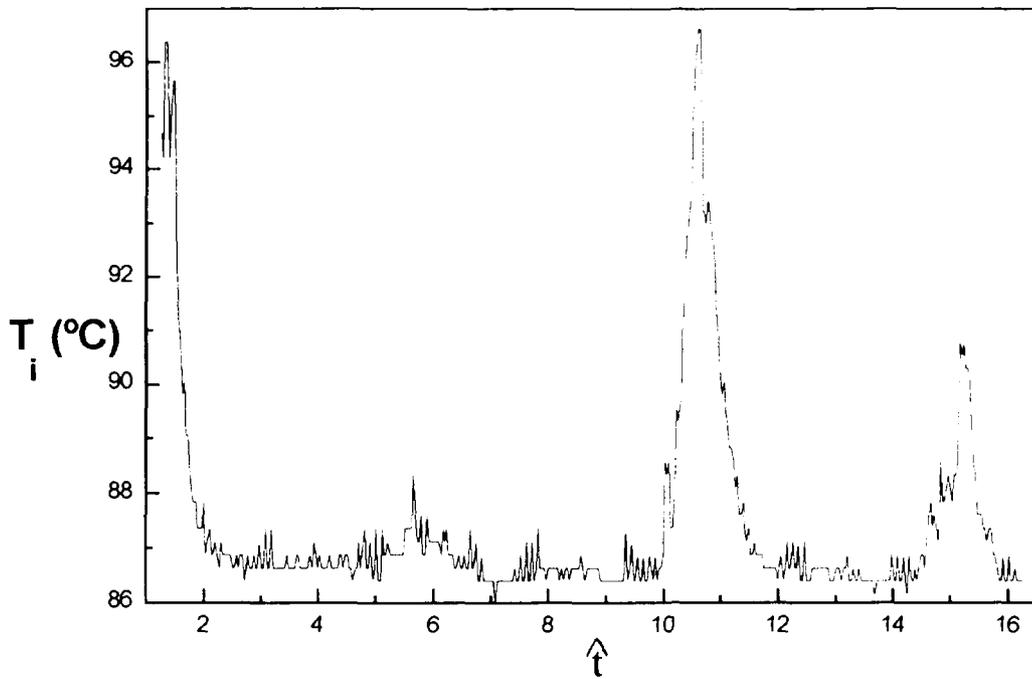


Figura C6b Evolución de la temperatura de ingreso (ver Fig. C6a)

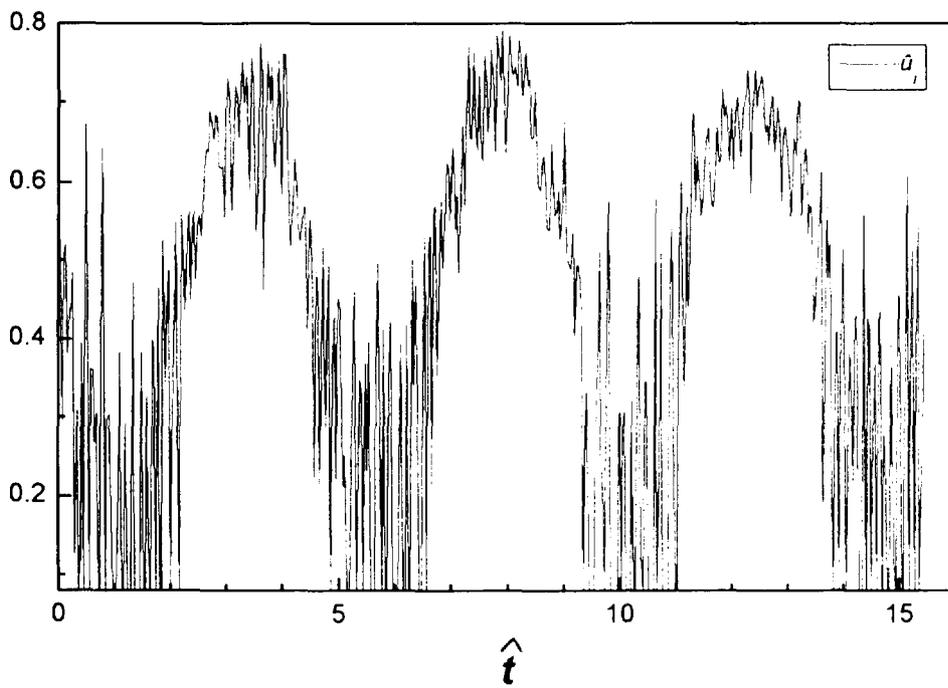


Figura C7a  $T_i = 85.7 \text{ } ^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

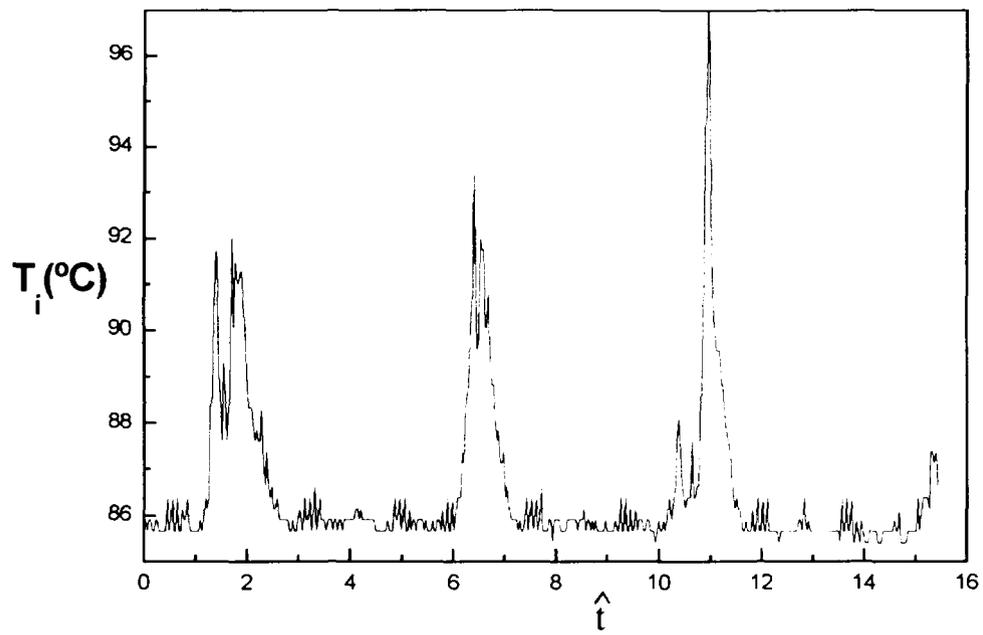


Figura C7b Evolución de la temperatura de ingreso (ver Fig. C7a)

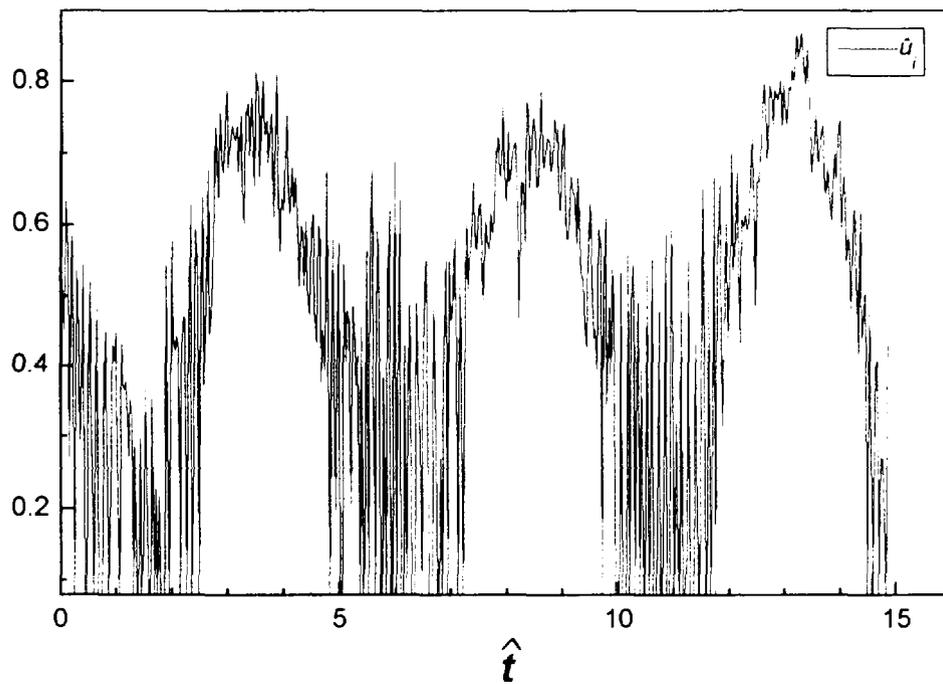


Figura C8a  $T_i = 85.0 \text{ } ^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

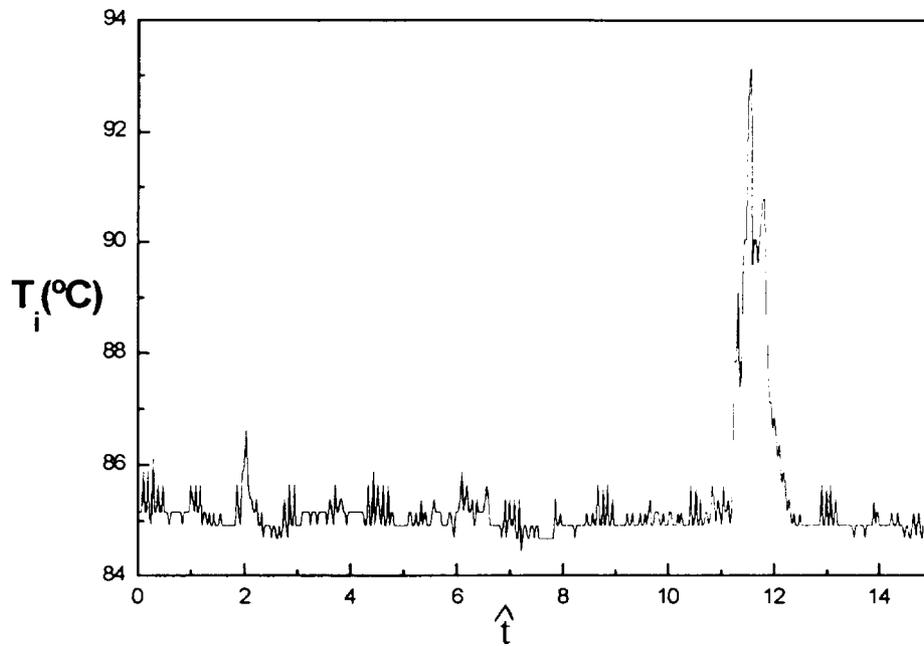


Figura C8b Evolución de la temperatura de ingreso (ver Fig. C8a)

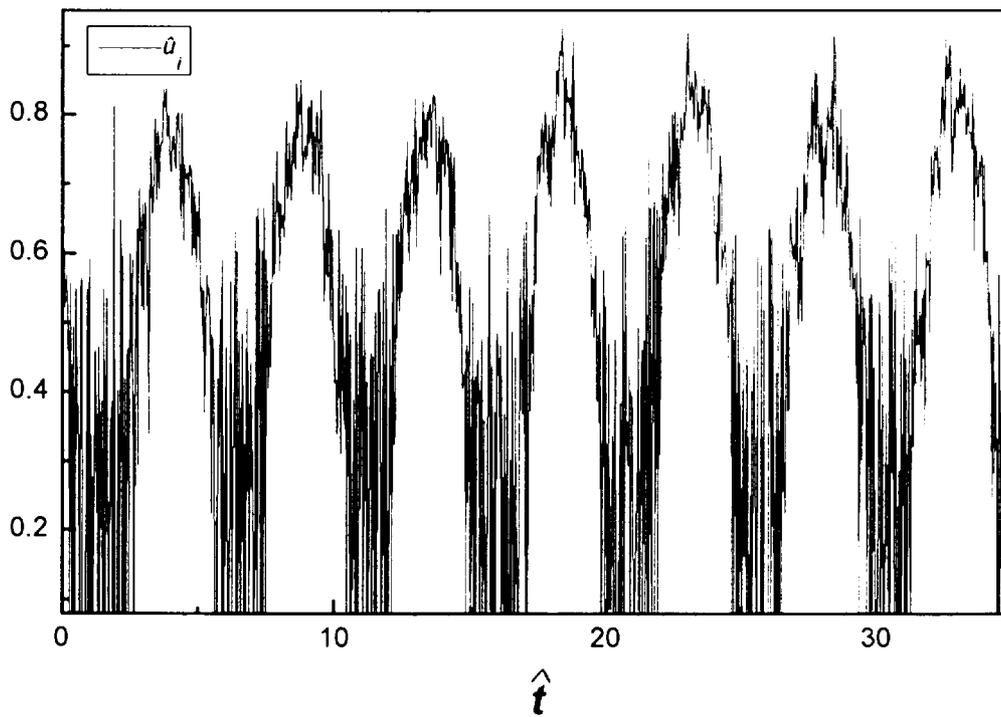


Figura C9a  $T_i = 84.4$  °C (disminuyendo  $T_i$ )

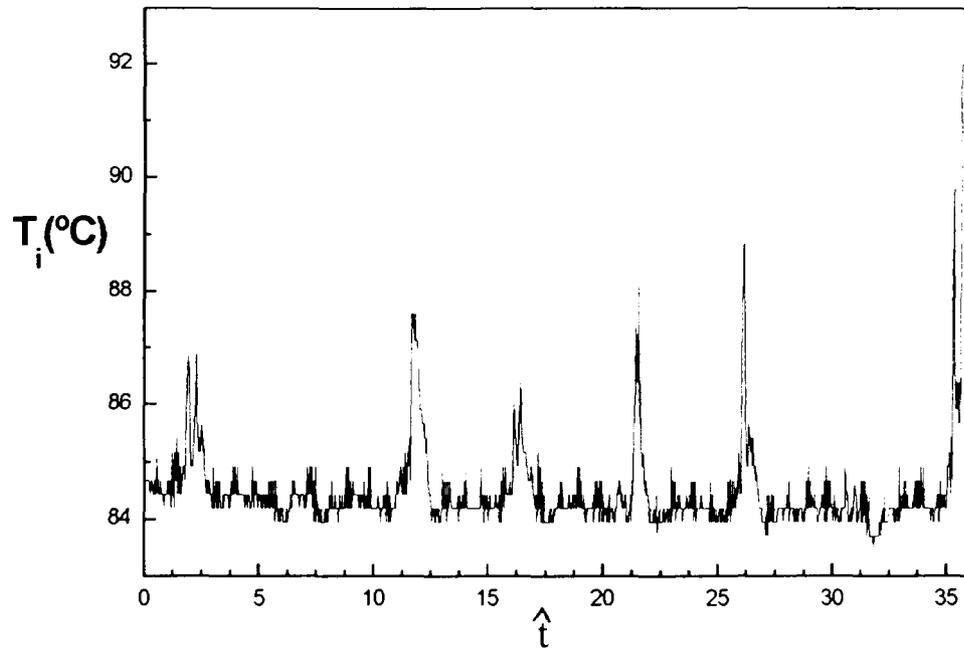


Figura C9b Evolución de la temperatura de ingreso (ver Fig. C9a)

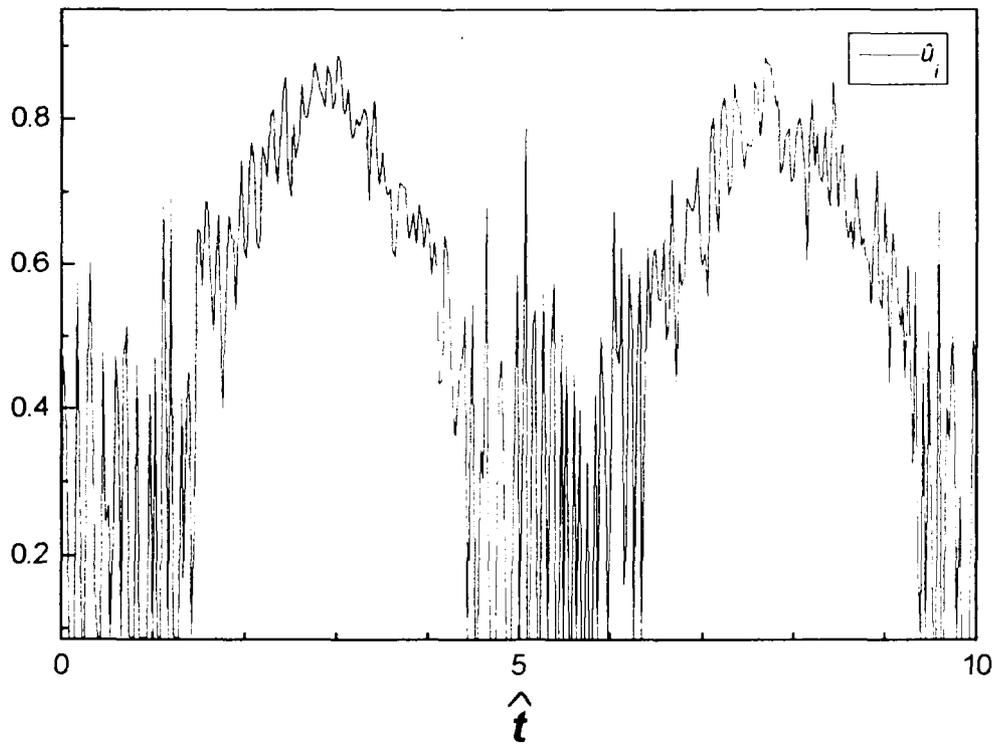


Figura C10a  $T_i = 83.6$  °C (disminuyendo  $T_i$ )

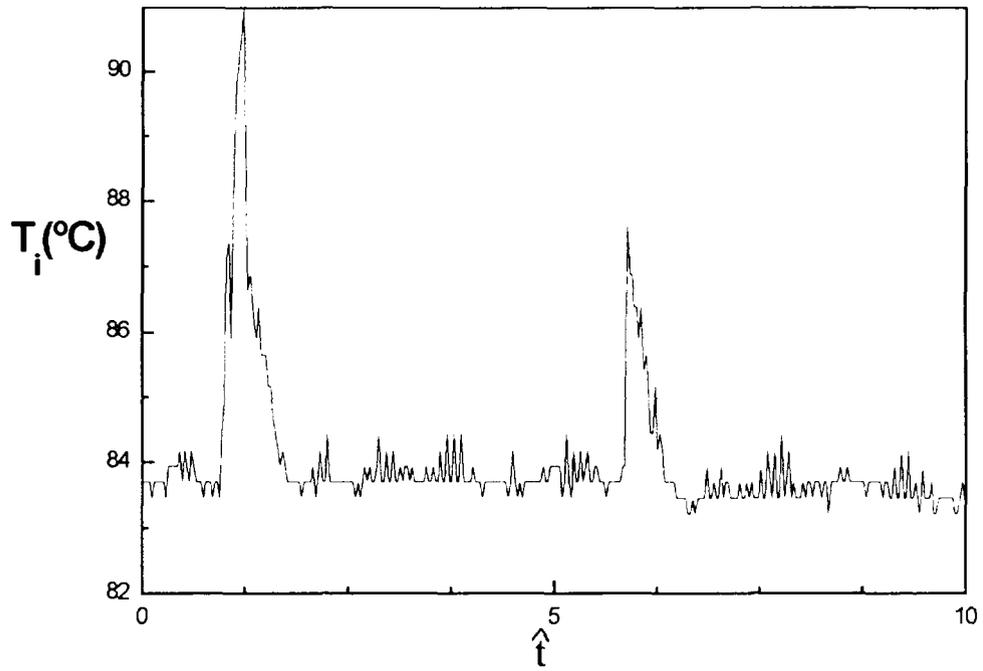


Figura C10b Evolución de la temperatura de ingreso (ver Fig. C10a)

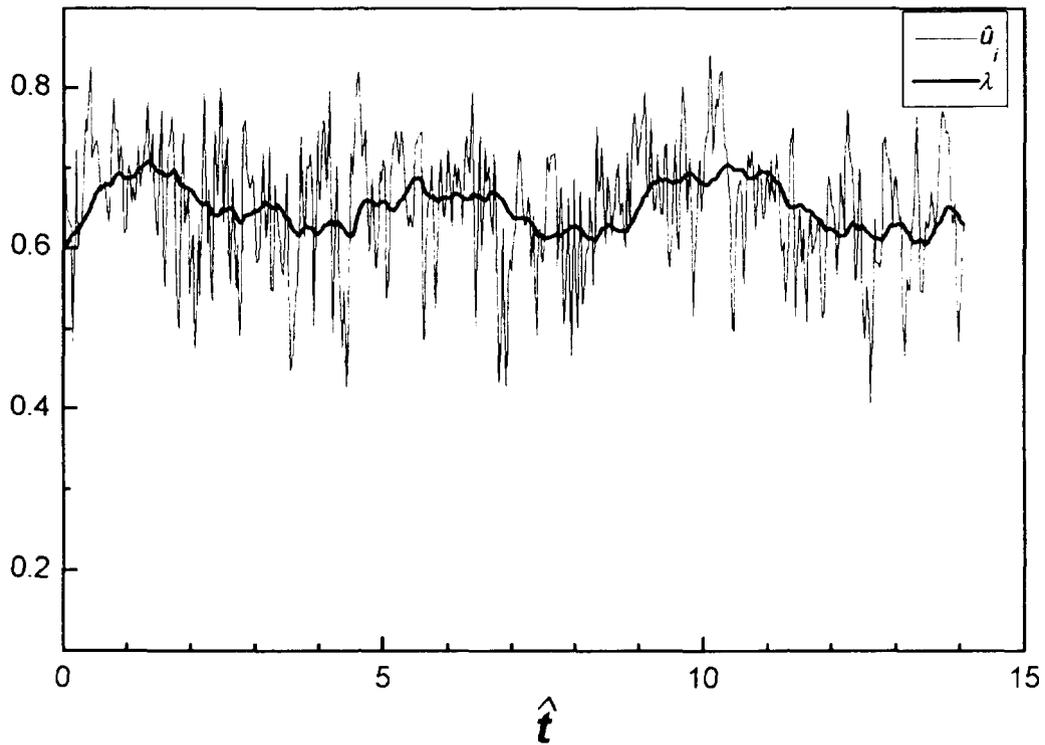


Figura C11  $T_i = 83.0 \text{ } ^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

## Apéndice D

### Tercera serie experimental (ver Fig. 4.11)

A continuación se presenta la serie experimental completa representada en la Fig. 4.11. Todas las temperaturas de ingreso al canal tienen un error estimado en  $\pm 2^\circ\text{C}$ .

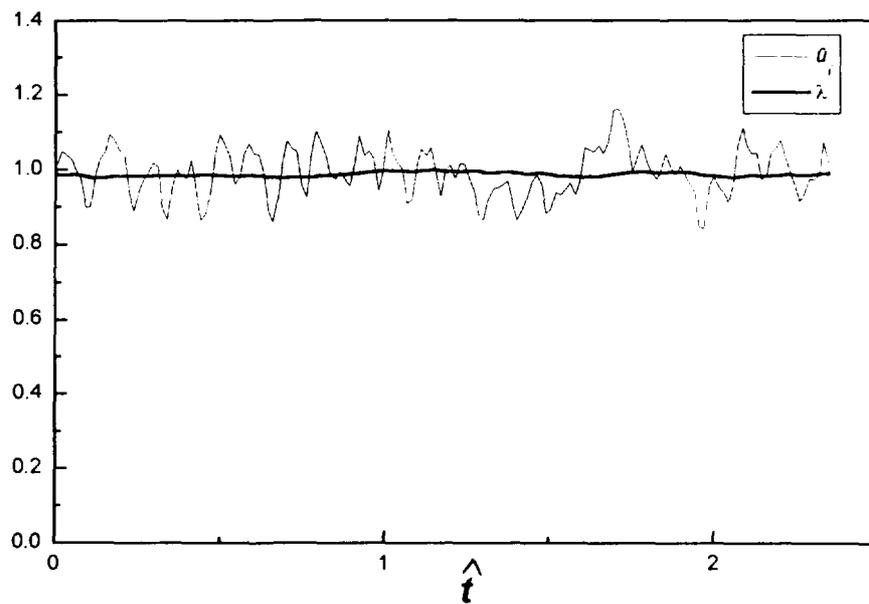


Figura D1  $T_i=68.0^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

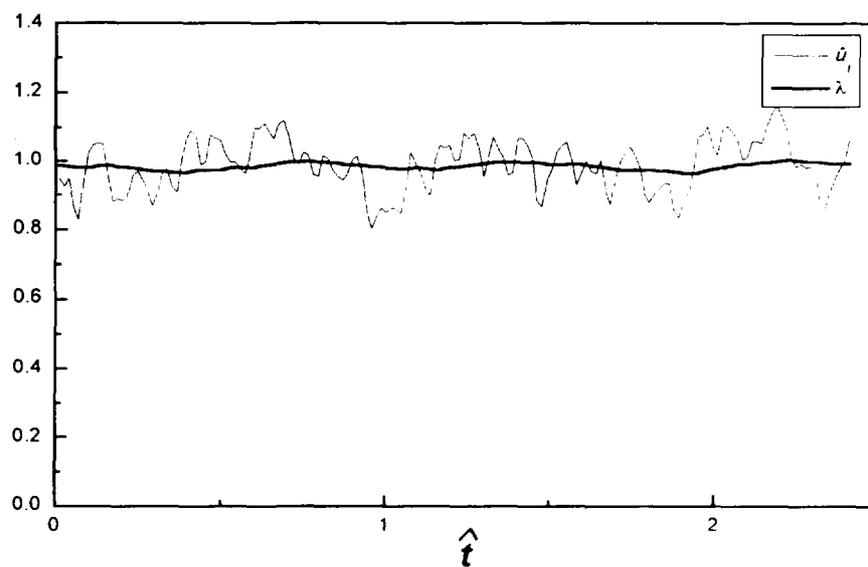


Figura D2  $T_i=68.6^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

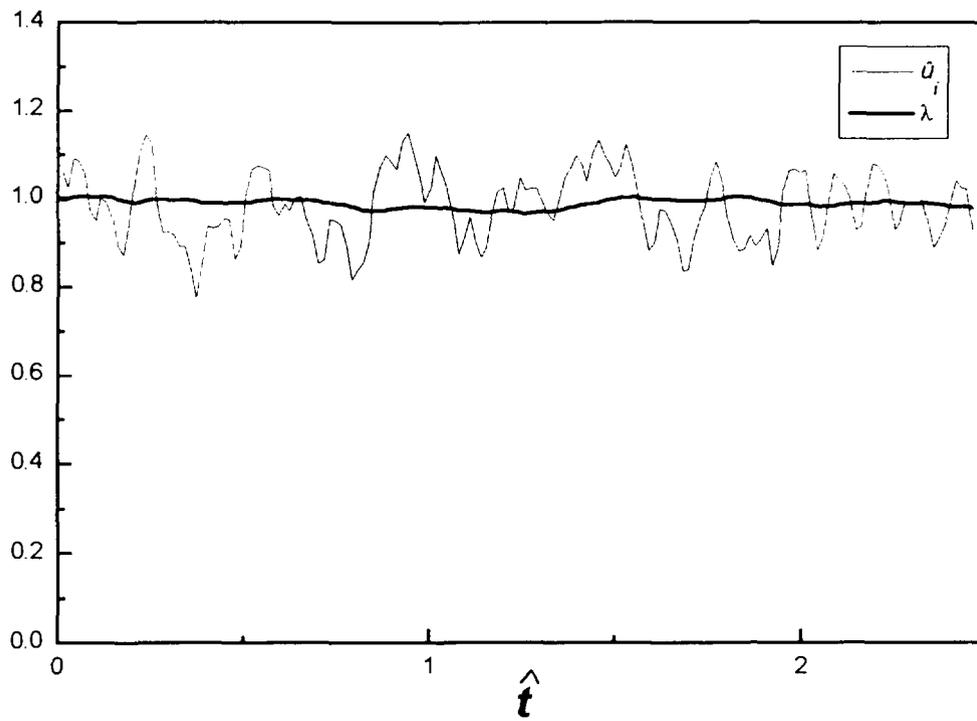


Figura D3  $T_i=69.1\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

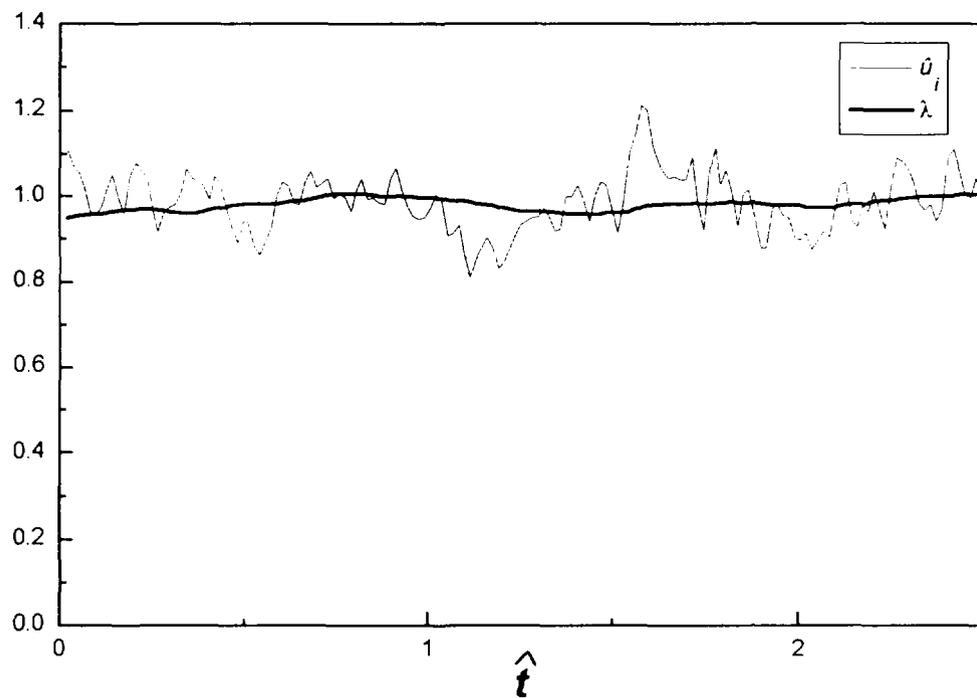


Figura D4  $T_i=69.9\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

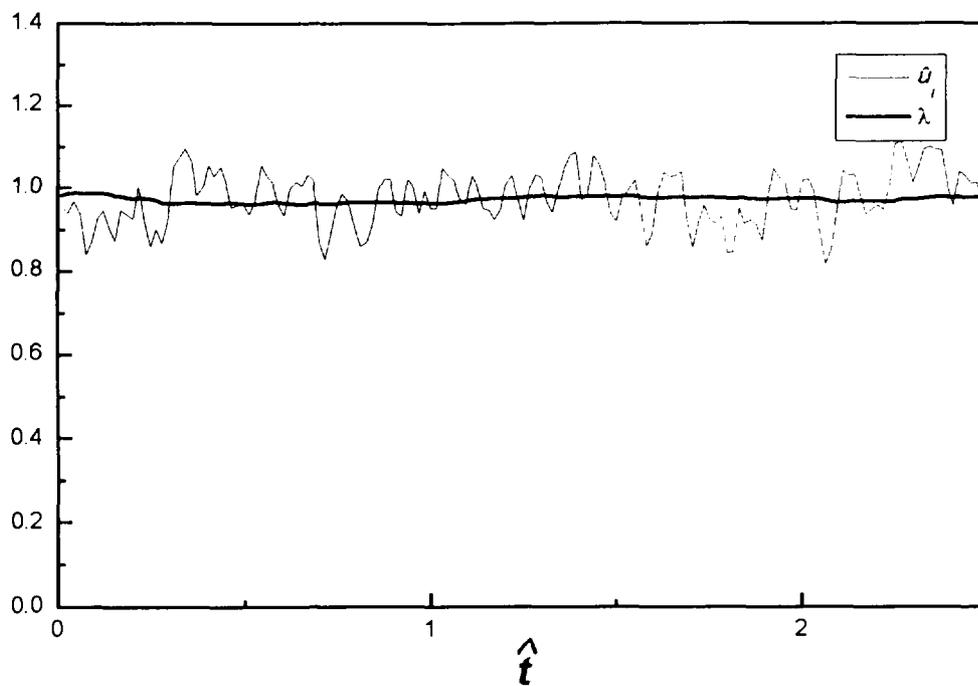


Figura D5  $T_i=70.4\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

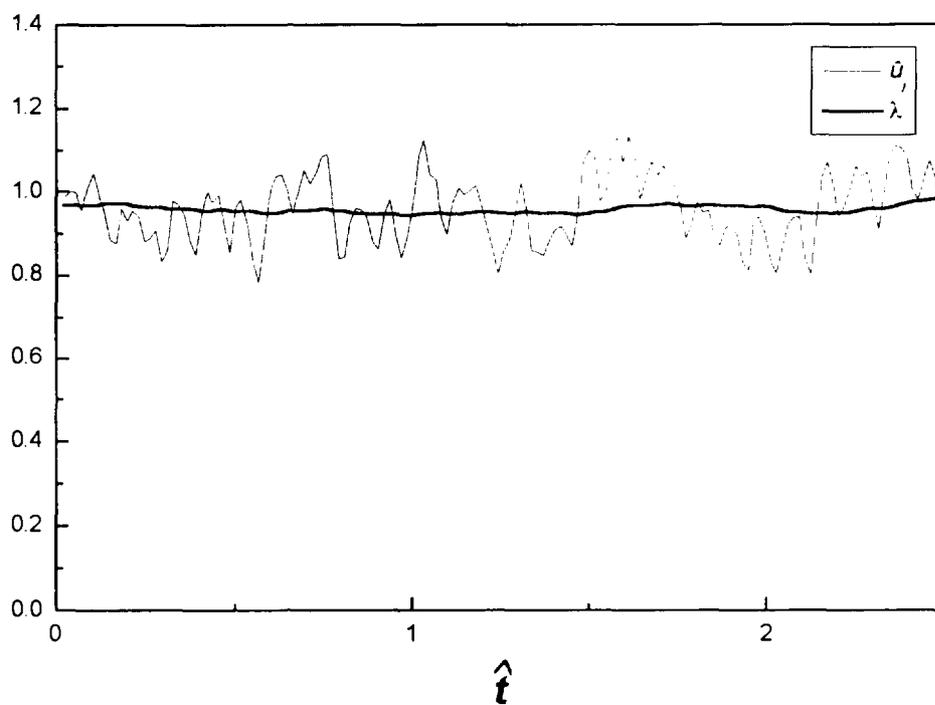


Figura D6  $T_i=71.0\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

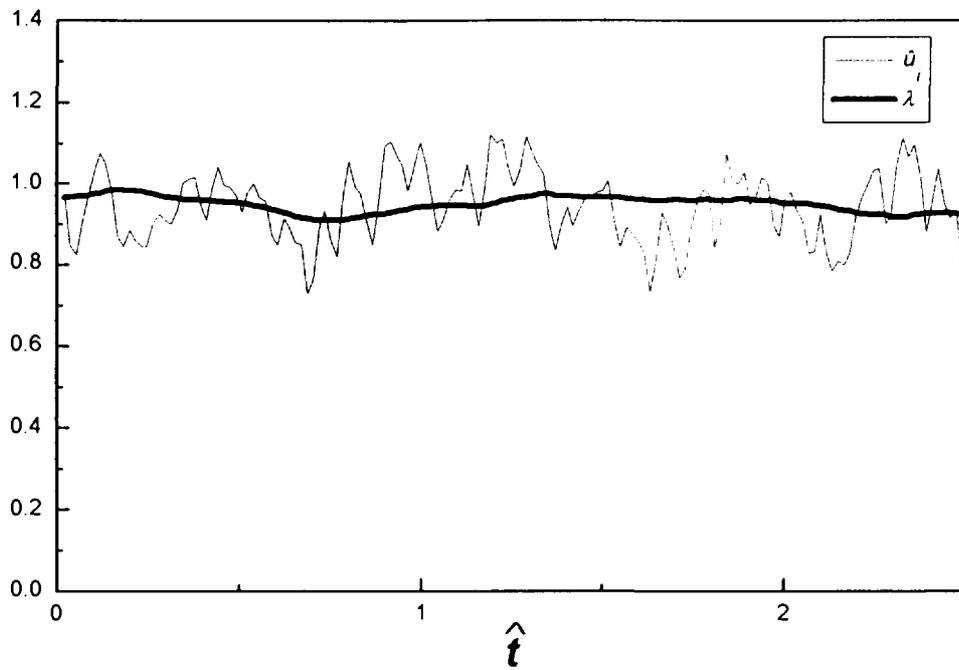


Figura D7  $T_i=71.6\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

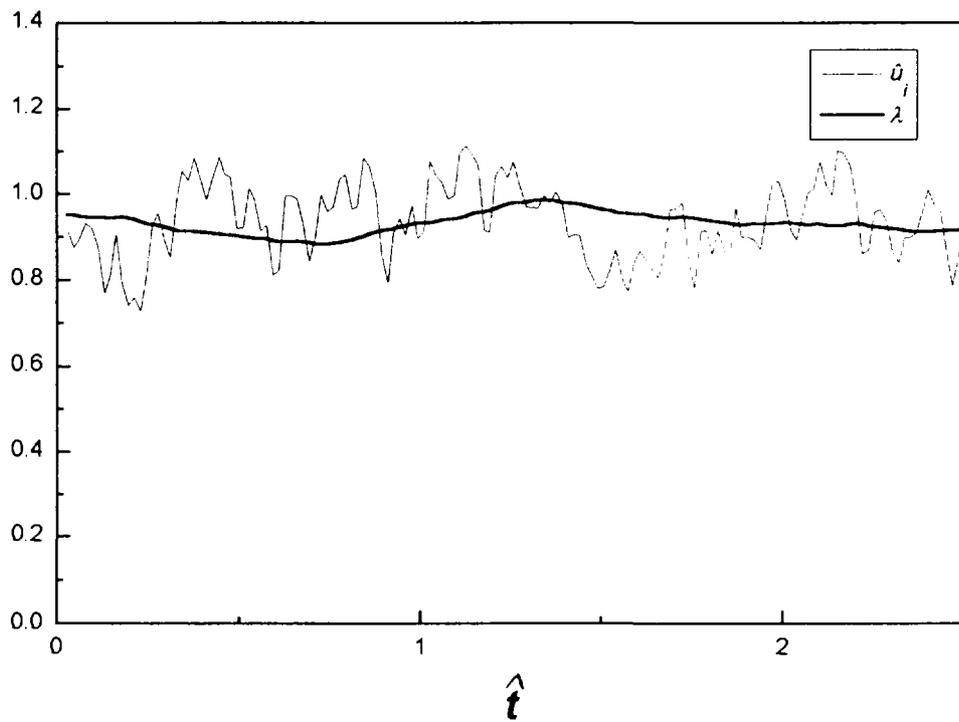


Figura D8  $T_i=72.3\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

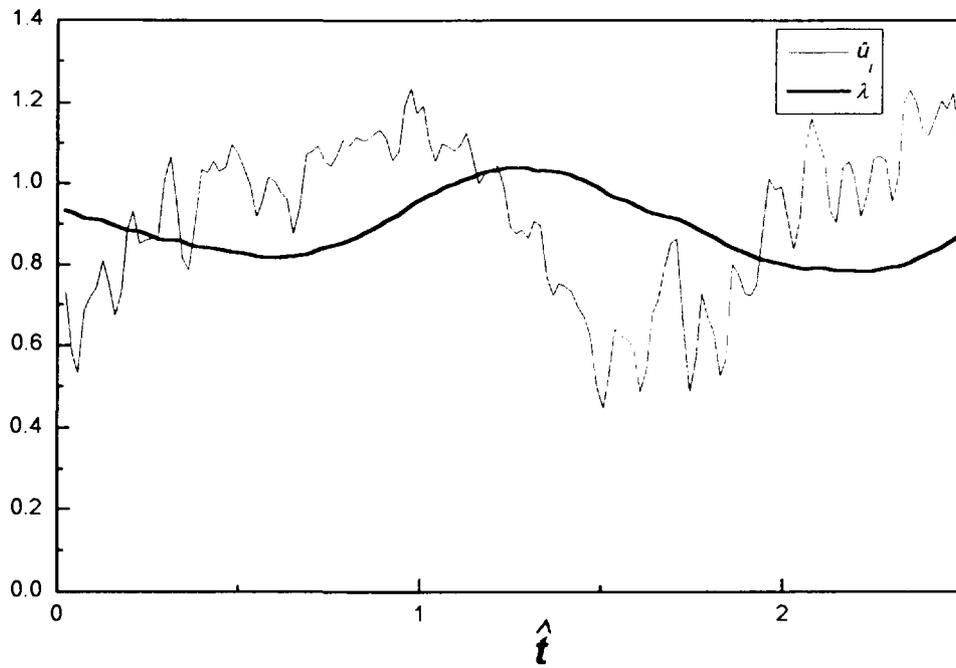


Figura D9  $T_i=72.8 \text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

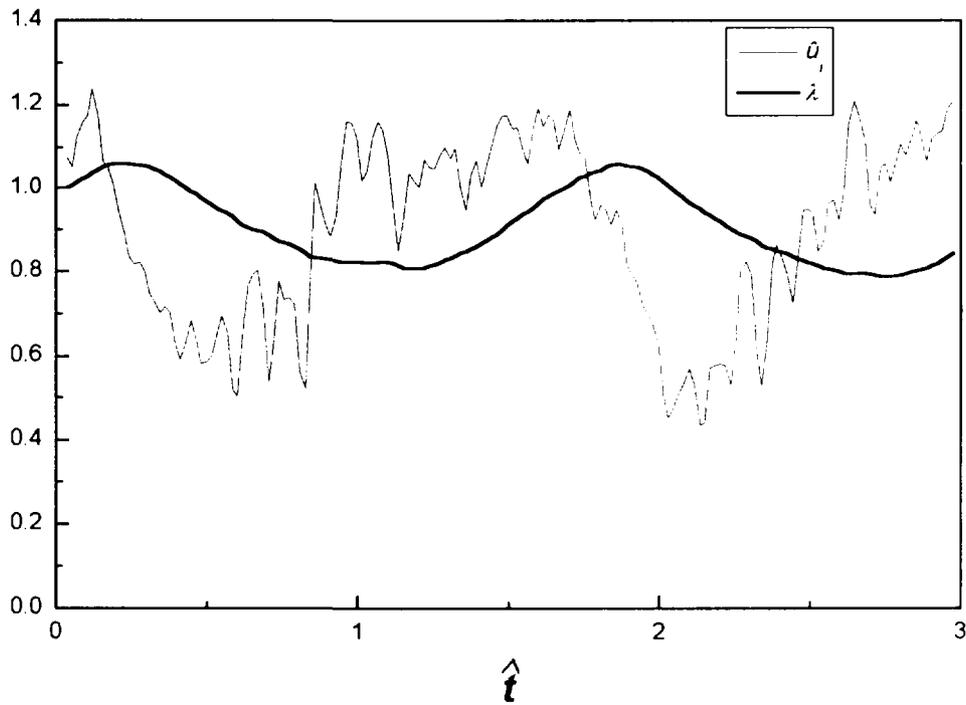


Figura D10  $T_i=73.2 \text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

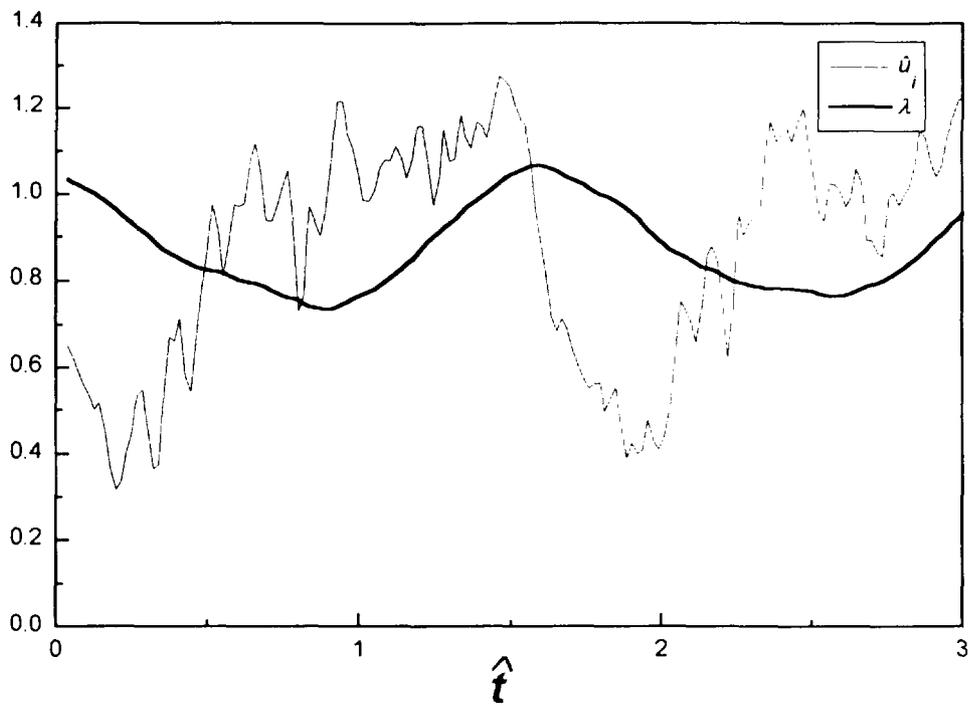


Figura D11  $T_i=74.1$  °C (aumentando  $T_i$ )

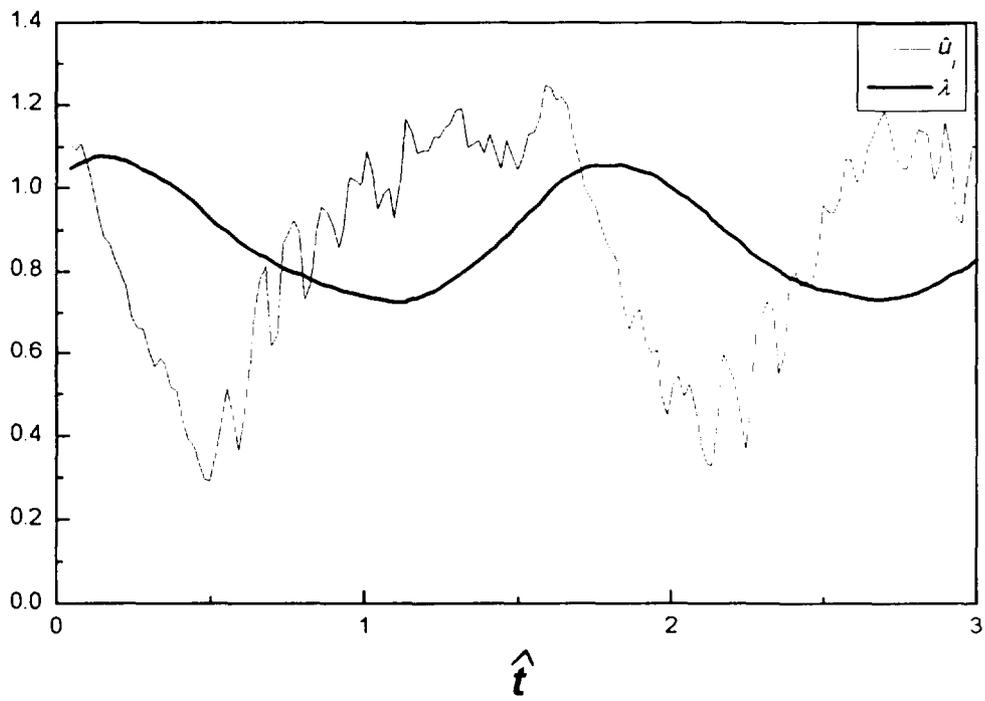


Figura D12  $T_i=74.7$  °C (aumentando  $T_i$ )

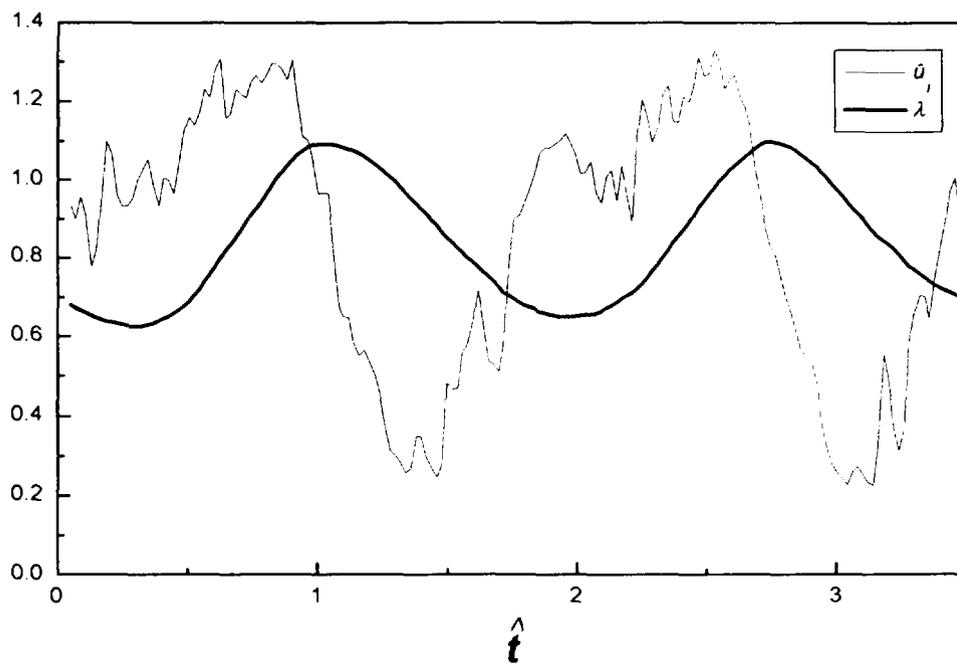


Figura D13  $T_i=77.0\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

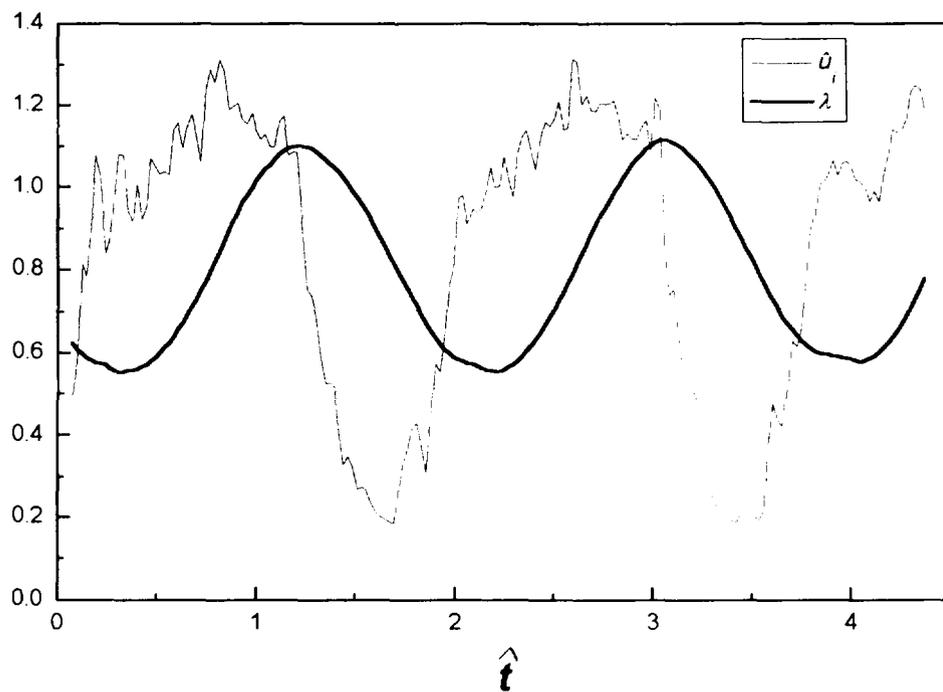


Figura D14  $T_i=80.3\text{ }^\circ\text{C}$  (aumentando  $T_i$ )

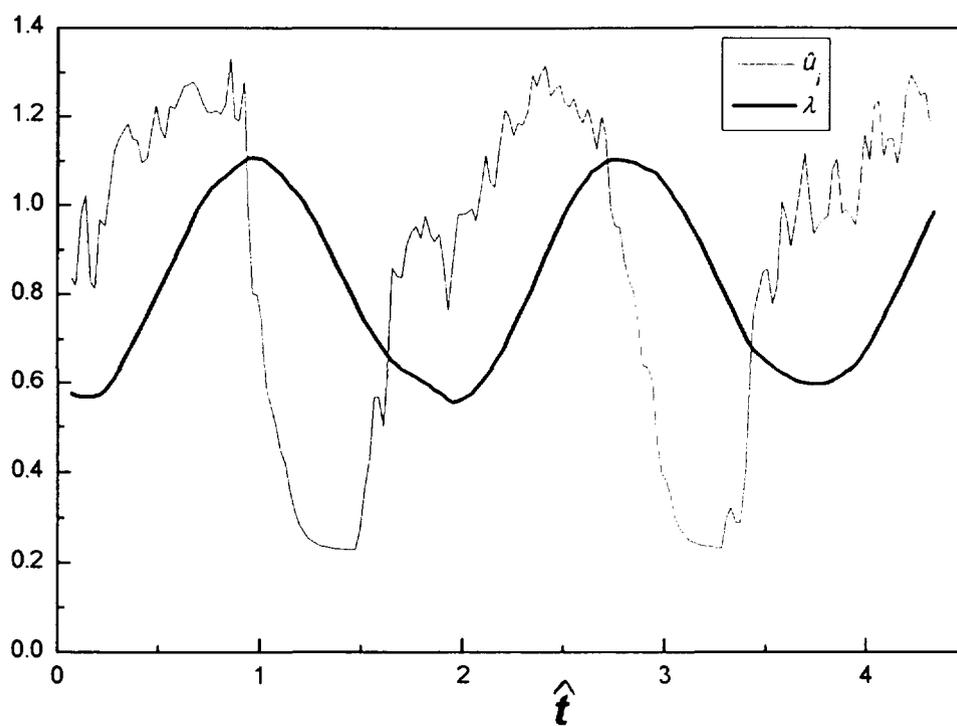


Figura D15  $T_i=80.1\text{ }^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ .)

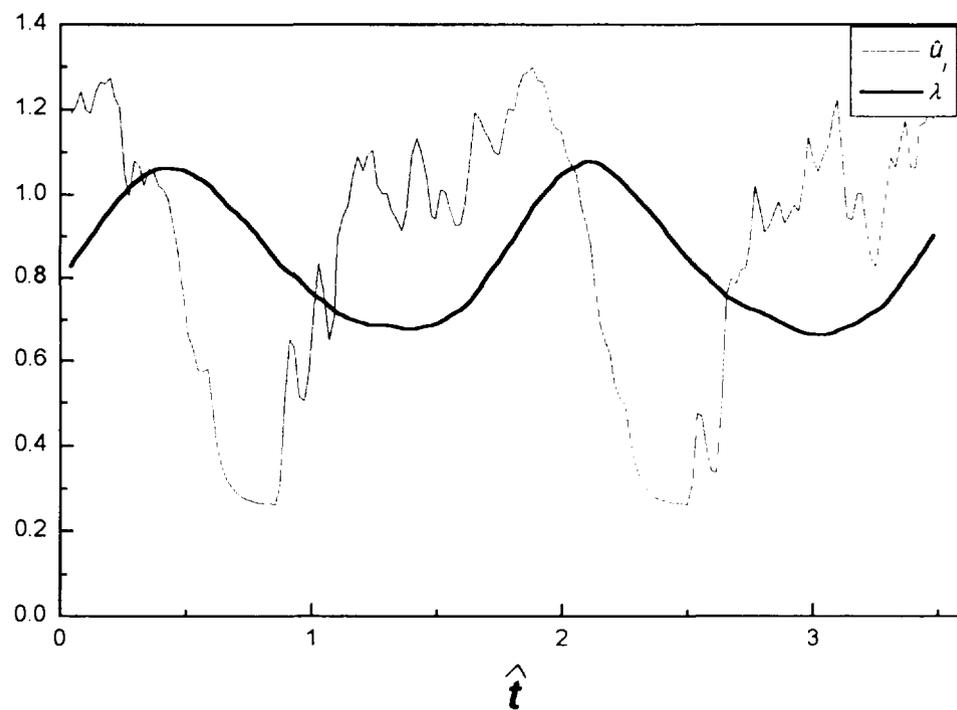


Figura D16  $T_i=76.5\text{ }^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ .)

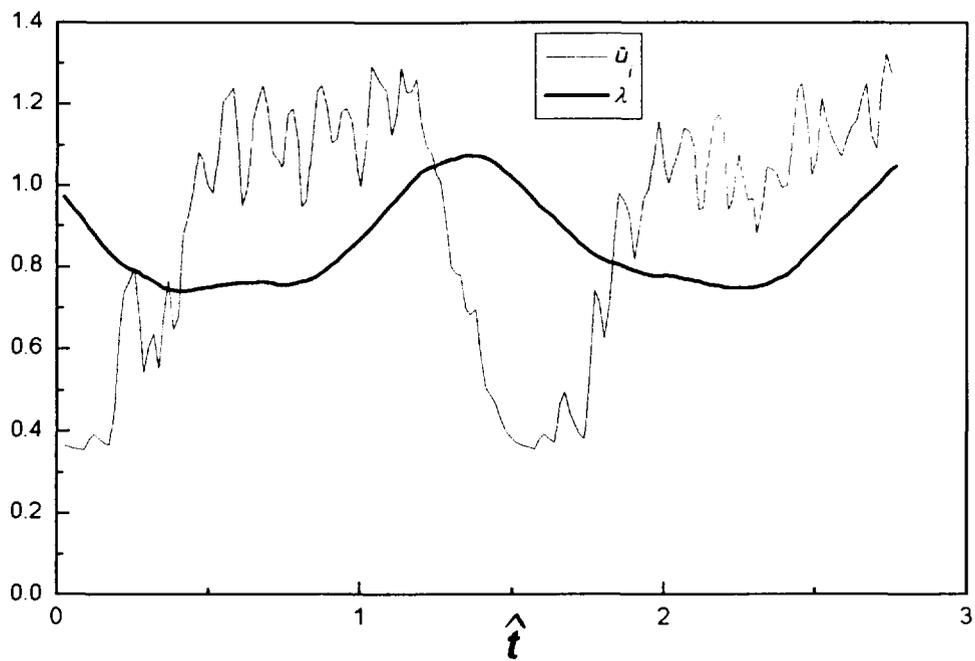


Figura D17  $T_i=71.8\text{ }^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

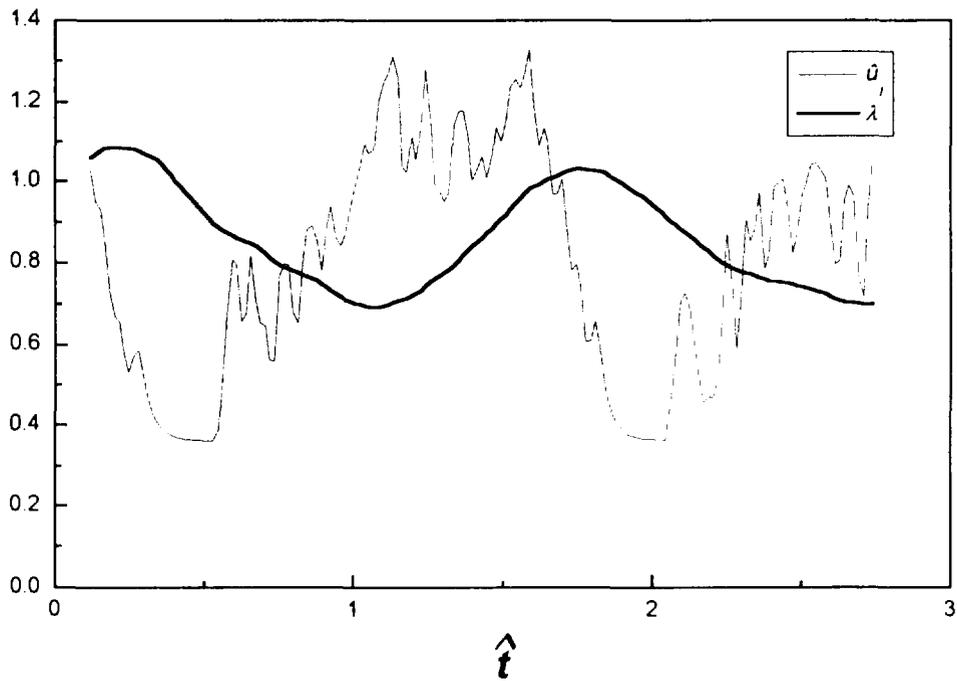


Figura D18  $T_i=71.0\text{ }^\circ\text{C}$  (disminuyendo  $T_i$ )

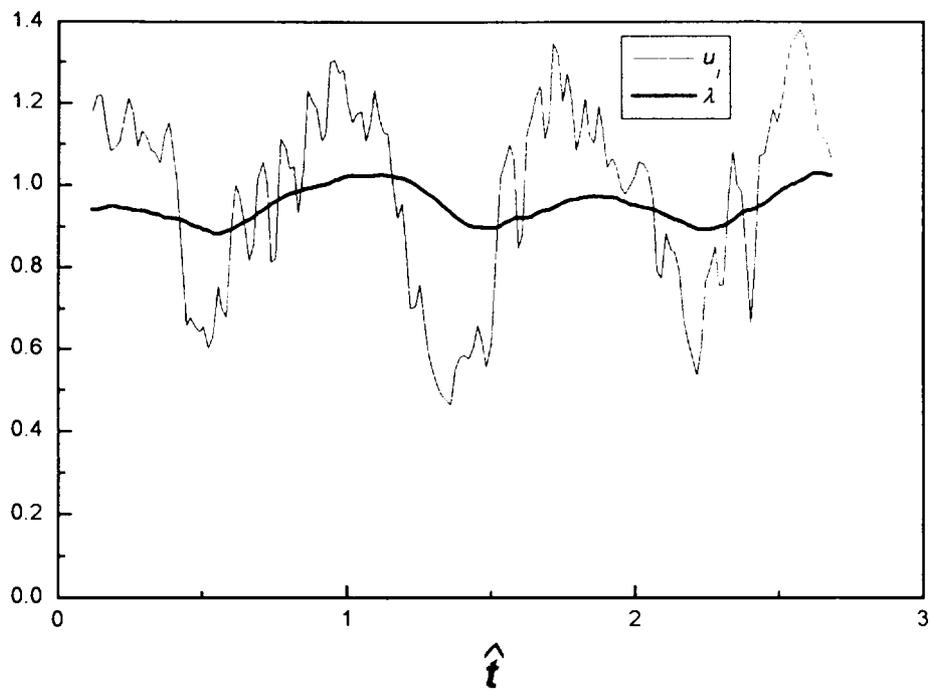


Figura D19  $T_i=70.3$  °C (disminuyendo  $T_i$ )

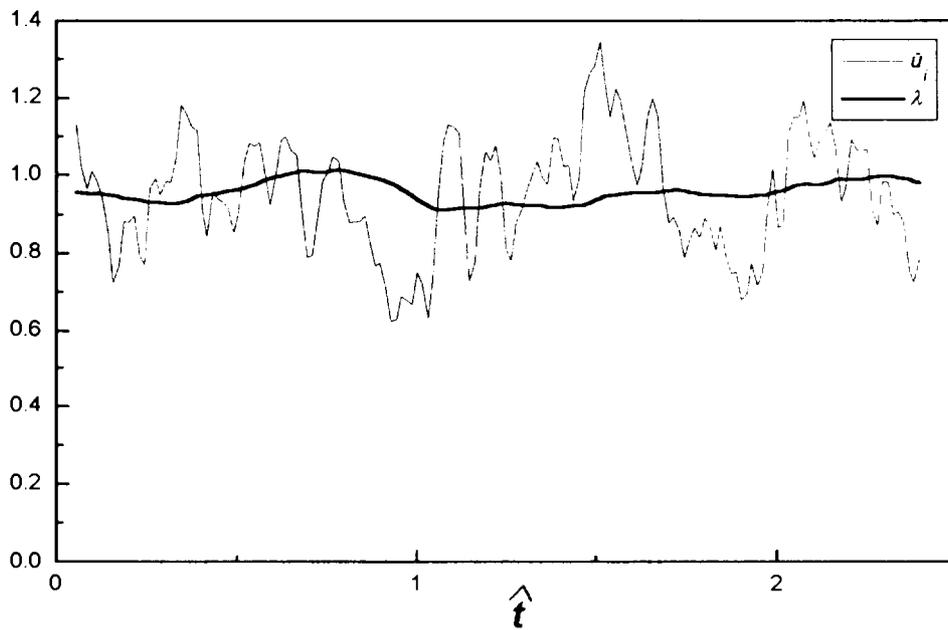


Figura D20  $T_i=68.2$  °C (disminuyendo  $T_i$ )

## Referencias

- [1] Clause A. y J. Converti. Análisis de estabilidad de generadores de vapor. *En Conf. AATN*, 1984.
- [2] Otsuji T. and A. Kurosawa. Critical heat flux of forced convection boiling in an oscillating aceleration filed - contribution of flow oscillation. *Nuclear Engineering and Design*, 76:13-21, 1983.
- [3] Belblidia L.A. and L.E. Weaver. Linear stability analysis of density-wave oscillations. *Annals of Nuclear Energy*, 7:13-23, 1980.
- [4] Rizwan-Uddin. On density-wave oscillations in two-phase flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 20(4):721-737, 1994.
- [5] Pinheiro Rosa M. and M. Podowsky. Simulation and Analysis of the LA Salle-2 BWR Power Plant Instability Event using the DYNBOSS CODE. *VI CGEN Rio Janeiro*, 1996.
- [6] Durnan J.D. SBWR, A simplified boiling water reactor. *Nucl. Eng. Des.* 109:73-77, 1988.
- [7] Kataoka Y. et al., "Conceptual design and thermal-hydraulics characteristics of natural circulation boiling water reactors". *Nucl. Technol.* 82:147-156, 1988.
- [8] March - Leuba J. and J.M. Rey. Coupled Thermohydraulics-neutronic instabilities in boiling water nuclear reactors: a review of the state of the art. *Nucl. Eng. Des.* 146(1):97-111, 1993.
- [9] Taleyarkhan R., M. Podowski and R.T. Lahey Jr.. The development of a nodal method for the stability analysis of ventilated boiling channels. *2nd. Int. Topical Meet. on Nucl. Reactor Thermalhydraulics*, Sta. Barbara, California, January 1983.
- [10] Peng S.J., M. Z. Podowsky and R.T. Lahey Jr.. BWR Linear stability analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 93: 25-37, 1986.
- [11] Xiao M., X.J. Chen, M.Y. Zhang, T.N. Verizoglu and S. Kokac. A multivariable linear investigation of two-phase flow instabilities in parallel boiling channels under high pressure. *Int. J. Multiphase Flow*, 19:65-77, 1993.

- [12] Chang C.J. and R.T. Lahey Jr.. Analysis of chaotic instabilities in boiling system. *Nuclear Engineering and Design*, 167 (3):307-334, 1997.
- [13] Achard J.L., D.A Drew and R.T. Lahey Jr.. The analysis of nonlinear density-wave oscillations in boiling channels. *J. Fluid Mech.*, 155: 213-232, 1985.
- [14] Clause A. and R.T. Lahey Jr. The analysis of periodic and strange attractors during density-wave oscillations in boiling flows. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1(2): 167-178, 1991.
- [15] Rizwan-Uddin and J.J. Dorning. A chaotic Attractor in a Periodically Forced Two-Phase Flow System. *Nucl. Sci. Eng.*, 100:393-404, 1988.
- [16] Mc. Fadden J.H. et al.. RETRAN-02, a program fro the transient thermal-hydraulic analysis of complex fluid flow systems. EPRI-NP-1850-CCM, 1981.
- [17] Taylor D.D. et al.. An advance best estimate computer program for BWR thermal-hydraulic analysis, Vol.1: model description. NUREG/CR-3633, 1984.
- [18] Ledinegg M. Instability of flow during natural and forced circulation. *Die Wärme*, 61:891, 1938.
- [19] Tong L.S. and J. Weisman. The Thermal Analysis of Pressurized Water Nuclear Reactor. *ANS Monograph*, 1970.
- [20] Ward M.E. and J.C. Lee. Singular perturbation analysis of limit cycle behavior in nuclear-coupled density-wave oscillations. *Nucl. Sci. Eng.*, 97:190-202, 1987.
- [21] Le Coq G., M. Metaich, and M. Slassi-Sennou. A simple model for the study of dynamic instabilities in steam generators. *Nuclear Engineering and Design*, 122:41-52, 1990.
- [22] Lee S.Y. and M. Ishii. Thermally induced flow oscillations in vertical two-phase natural circulation loop. *Nuclear Engineering and Design*, 122:119-132, 1990.
- [23] Aritomi M., J.H. Chiang, T. Nakahashi, M. Wataru, and M. Mori. Fundamental study on thermo-hydraulics durig start-up in natural circulation boiling water reactors, (i) thermo-hydraulic instabilities. *J. Nucl. Sci. Technol.*, 29(7):631,641, 1992.
- [24] Belblidia L.A. and C. Bratianu. Density-wave oscillations. *Annals of Nuclear Energy*, 6:425-444, 1979.
- [25] Dorning J. An introduction to chaotic dynamics in two-phase flow. In Salim B. Yilmaz, editor, *Heat Transfer - Philadelphia, 1989*, pages 241-248, 1989.
- [26] Glendinning, Paul. Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations. *Cambridge texts in Applied Mathematics*, Cambidge University Press, 1994.
- [27] Clause, A., D.F. Delmastro and R.T Lahey. The Analysis of Chaotic Instabilities in Natural Circulation Boiling Systems. *Eurotherm Seminar*, 16: 161-167, 1990.
- [28] Clause, A., D. Delmastro and L. Juanicó. A Simple Delay Model for Two-Phase Flows Dynamics'. Presentado en *NURETH-7*, Saratoga Springs, Setiembre de 1995. En Report NUREG-CP-0142 (1995), Vol. 4, 3232-3244.

- [29] Lahey R.T. Jr., A. Clause and P. Dimarco. Chaos and non-linear dynamics of density-wave instabilities in a boiling channel. In Salim B. Yilmaz, Editor, *Heat Transfer-Philadelphia*, 256-261, 1989.
- [30] Clause, A., D. Delmastro and L. Juanicó. A Simple Delay Model for the Dynamics of Boiling Channels'. *Latin American Applied Research*, 26(3/4): 185-192, 1996.
- [31] Thompson J.M.T. and H.B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley&Sons, 1986.
- [32] Lahey Jr. R.T. and F.J. Moody. The Thermal Hydraulic of a Boiling Water Reactor. *ANS Monograph*, 1977.
- [33] Delmastro, D.F., A. Clause, and J. Converti. The influence of gravity on the stability of boiling flows. *Nuclear Engineering and Design*, 127: 129-139, 1991.
- [34] Tong L.S. and J. Weisman. Thermal analysis of pressurized water reactors. In the *American Nuclear Society*, 227-228, 1979.
- [35] Achard, J.L., D.A. Drew, and R.T. Lahey Jr.. The effect of gravity and friction on the stability of boiling flow in a channel. *Chem. Eng. Commun.*, 11:59-79, 1981.
- [36] Achard, J.L., D.A. Drew and R.T. Lahey Jr.. The analysis of nonlinear density-wave oscillations in boiling channels. *J. Fluid Mech.*, 155:213-232, 1985.
- [37] Ruelle, David. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. Academic Press, Inc., 1989.
- [38] Lahey R.T. Jr.. Advances in the analytical modelling of lineal and non-linear density-wave instability modes. *Nucl. Eng. and Design*, 95:5-34, 1986.
- [39] Rizwan-Uddin nad J.J. Dorning. Some nonlinear dynamics of a heated channel. *Nuclear Engineering and Design*, 93:1-14, 1986.
- [40] Delmastro, D.F, and A. Clause. Modelado por medio de elementos finitos móviles de la dinámica de flujos en ebullición. *Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*. 463-471, 1992.
- [40] Delmastro, D.F.. Aplicación de la teoría de sistemas dinámicos al análisis de inestabilidades termihidráulicas. *Tesis de doctorado en Ing. Nuclear, Instituto Balseiro, Bariloche, Argentina*, 1993.
- [41] Delmastro, D.F. Influencia de la gravedad sobre la estabilidad de canales en ebullición. *Trabajo Especial de Ing. Nuclear, Instituto Balseiro, Bariloche, Argentina*, 1988.
- [42] Delmastro, D.F, L.E. Juanicó and A. Clause. Convergencia del método de elementos finitos en problemas de frontera móvil. *Revista de Mecánica Computacional*, Vol. XV, 243-251.
- [43] Delmastro D.F., L.E. Juanicó and A. Clause. A delay model for lineal stability analysis of boiling channels with distributed friction. *Rev. Bras. Pesqui. Desenvol.*, 1(2): 43-49, 1996.

- [44] Juanicó, L., D. Delmastro, y A. Clause. Modelado numérico de canales en ebullición con inversiones temporarias de caudal. *Revista de Mecánica Computacional*, Vol. XVIII, 73-82, 1997.
- [45] Rizwan-Uddin and J.J. Dorning. A Chaotic Attractor in a Periodically Forced Two-Phase Flow System. *Nucl. Sci. Eng.*, 100: 393-404, 1988.
- [46] Delmastro D.F. y A. Clause. Modelado por medio de Elementos Finitos Móviles de la Dinámica de Flujos en Ebullición. *Revista Int. de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Eng.* 8(4): 463-471, 1992.
- [47] Delmastro D.F. y A. Clause. Oscilaciones de frontera de entalpía en flujos de dos fases. *Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi*, 23:103-119, 1993.
- [48] Delmastro D.F. y A. Clause. Simulación numérica de canales refrigerantes en ebullición. *XIX Reunión Anual de la AATN*, Buenos Aires, Noviembre 1991.
- [49] Marshall G. Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales. *Ed.Reverté Argentina*, 1985.
- [50] Clause, A. Efectos no lineales en inestabilidades de ondas de densidad bifásicos en flujo de dos fases. *Tesis de doctorado en Ing. Nuclear, Instituto Balseiro*, Bariloche, Argentina, 1986.
- [51] Mc Adams, W.H. *Heat Transmission*. McGraw-Hill, New York, 1954.
- [52] Guido, G. Inestabilidades de ondas de densidad en flujos bifásicos en canales paralelos. *Trabajo Especial de Ing. Nuclear, Instituto Balseiro*, Bariloche, Argentina, 1988.
- [53] Delmastro, D.F. and A. Clause. Experimental Phase Trajectories in Boiling Flow Oscillations. *International Journal of Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, 9(1): 47-52, 1994.

## A DELAY MODEL FOR LINEAR STABILITY ANALYSIS OF BOILING CHANNELS WITH DISTRIBUTED FRICTION

D.F. Delmastro, L.E. Juanicó and A. Clausse  
Centro Atómico Bariloche,  
8400 Bariloche, Argentina  
delmast@cab.cnea.edu.ar

### ABSTRACT

*A model based in delay equations for density-wave oscillations is presented. Channels where the distributed friction is much larger than the other pressure drops, are analyzed. The fixed points and the linear stability margins were analytically studied. The present approach can be used to better understanding the complicated dynamics of boiling flows.*

Key words: two-phase flow / boiling channel / linear stability.

### RESUMO

*E apresentado um modelo baseado nas equações de retardo para as oscilações de densidade (density-wave oscillations). São analisados os canais onde a perda de carga distribuída é a componente principal da perda de carga total. Foram estudados analiticamente os pontos fixos e as margens de estabilidade linear. Esta técnica pode ser utilizada para uma melhor compreensão da dinâmica complexa de escoamentos com mudança de fase.*

### INTRODUCTION

The phenomenon of density-wave instabilities in boiling channels has been extensively studied during the last 30 years [1]. These oscillations may be encountered for certain operating conditions of boiling system, in which they become unstable due to lags in the phasing of the pressure-drop feedback mechanisms. Perturbations at the inlet of the channel move with the fluid, yielding transport delays in the local changes of state variables. Given the appropriate set of operating conditions, these delays may lead to self-excitation.

The most common manifestations of density-wave instabilities are self-sustained oscillations of the flow variables. It may also happen that these oscillations cause the system to reach the point of excursive instability [2].

Density-wave instabilities in boiling system, besides being scientifically interesting,

have serious practical implications for many industries. Boiling water nuclear reactors (BWRs), steam generators and phase-change heat exchangers are potential candidates to experience density-wave instability.

The classical tool which has been used to study the problem of density-wave instability in boiling systems is the linear frequency-domain analysis. Rather accurate and reliable models are now available for the stability analysis of complicated systems, such as BWRs [3,4].

In this paper a model of density-wave oscillations based in delay equations is presented. The present approach deals with channels where the distributed friction prevails over gravity and concentrated friction forces. The fixed points and stability margins are studied. Analytical expressions for Ledinegg and density-wave oscillations linear stability boundaries are calculated.

## BOILING CHANNEL MODEL

Lets us consider the boiling channel shown in Fig.1 The liquid enters at constant subcooled temperature and is heated up uniformly along the channel. At certain location the fluid reaches its saturation temperature and starts to boil, exiting the channel as a two-phase mixture.

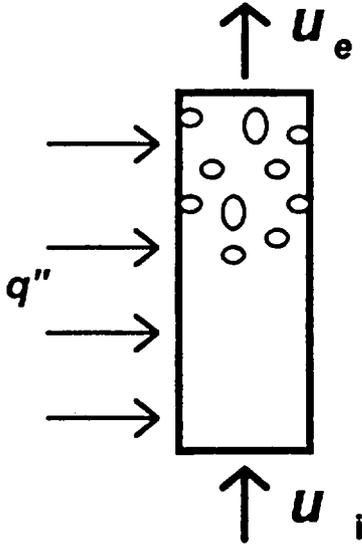


Fig. 1. Boiling channel

The following assumptions have been made in the modeling of the two-phase flow :

- The flow is homogeneous (that is, no phasic slip occurs).
- The system pressure is constant.
- The heat flux is constant in space and time.
- Both phases are incompressible.
- The phases are in thermodynamic equilibrium.
- Viscous dissipation and internal heat generation are neglected in the energy equation.
- Friction loss coefficient is uniformly distributed along the channel.
- Gravity effects are neglectabled.

The one-dimensional conservation equations of mass and energy can be written as:[5]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho h u)}{\partial z} = q \quad (1b)$$

where  $u$ ,  $t$ ,  $z$  and  $q$  are the velocity, time, spatial coordinate and volumetric power respectively.

Moreover, enthalpy,  $h$ , and density,  $\rho$ , are related by the following equation of state:

$$\rho = \rho_f \quad \text{for } h \leq h_f \quad (2a)$$

$$\rho = \left[ v_f + \frac{(h-h_f)}{h_{fg}} v_{fg} \right]^{-1} \quad \text{for } h > h_f \quad (2b)$$

where  $v$  is the specific volume and the subscripts  $f$  and  $fg$  mean liquid in saturation and phase change respectively.

Combining Eqs.(1b) and (2b) for the two-phase region gives:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = q \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \equiv \Omega \quad (3a)$$

Similarly in the single phase region, we have:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3b)$$

Integrating Eqs.(3) along the channel leads to:

$$u_e = u_i + \Omega (L - \lambda) \quad (4)$$

where  $L$  is the channel length and the subcooled length,  $\lambda(t)$ , is defined by

$$\lambda(t) = \int_{t-v}^t u_i(t') dt' \quad (5)$$

Here  $v$  is the time needed by a fluid particle at the inlet of the channel to reach saturation temperature:

$$v = \frac{\Delta h_{sub} \rho_f}{q} \quad (6)$$

For low frequencies the subcooled length can be written as:

$$\lambda(t) = \int_{t-v}^t u_i(t') dt' = v u(t-t_1) \quad (7)$$

In Eqn.(7),  $t_1$  is a delay time such that  $0 < t_1 < v$ .

The friction losses along the channel can be written as:

$$\Delta p_{fr} = \int_0^L \frac{\Lambda}{L} \rho u^2 dz \quad (8)$$

where  $\Lambda$  is the friction number:  $\Lambda = (fL)/(2D)$ .

Assuming a quasi-static balance of forces in the momentum equation the external pressure head is then balanced by friction and acceleration forces, that is

$$\Delta p_{fr} + \Delta p_{acc} = \Delta p_{ext} \quad (9)$$

Imposing, for simplicity, an enthalpy linear profile along the two-phase region, the exit density,  $\rho_e$ , the boiling boundary,  $\lambda$ , and the channel mass,  $M_{ch}$ , are related [6] by:

$$M_{ch} = A_{xs} \rho_f \left[ \lambda + \frac{(L-\lambda) \ln(\rho_f / \rho_e)}{(\rho_f / \rho_e - 1)} \right] \quad (10)$$

Therefore, using this assumption, the momentum equation (9) can be rewritten as:

$$\Lambda \left[ \frac{M_{ch}}{AL} u_i^2 + \frac{2u_i(\rho_f - M_{ch}/LA)(u_e - u_i)}{\rho_f / \rho_e - 1} \right] + \frac{\Lambda}{L} \left[ \left( \frac{u_e - u_i}{\rho_f / \rho_e - 1} \right)^2 \left( \frac{(\rho_f / \rho_e - 3)(L-\lambda)\rho_f + M_{ch}}{2} - \lambda\rho_f \right) \right]$$

$$-\rho_f u_i^2 + \rho_e u_e^2 = \Delta p \quad (11)$$

Following the quasi-static approximation it can be assumed that the exit flow follows the history of the inlet flow [7] that is:

$$\rho_e(t) u_e(t) = \rho_f u_i(t-t_2) \quad (12)$$

where  $t_2$  is a certain transport delay which will be considered constant.

In steady state, the last three assumption are verified.

Combining Eqs.(4),(7),(12) and (10), a delay expression for the Mch is obtained:

$$M_{ch} = A_{xs} \rho_f [vu(t-t_1) + (L - vu(t-t_1))u(t-t_2)]$$

$$\left. \frac{\ln \left( \frac{[u(t) + \Omega(L - vu(t-t_1))]/u(t-t_2)}{u(t) + \Omega(L - vu(t-t_1)) - u(t-t_2)} \right) \right] \quad (13)$$

Eqs.(11),(12) and (13) may be combined in a delay equation relating the values of the inlet velocity,  $u_i$ , at three different times:  $t$ ,  $t-t_1$  and  $t-t_2$ .

## FIXED POINTS ANALYSIS

Writing the delay equation described above in a non dimensional form (where the  $\wedge$  superscript means dimensionless) using the following reference values, together with the Euler (Eu) and subcooling number (Nsub):

$$\bullet L_{ref} = L,$$

$$\bullet u_{ref} = L_{ref} / v_i,$$

$$\bullet \rho_{ref} = \rho_f,$$

$$\bullet M_{ref} = A_{xs} L \rho_f,$$

$$\bullet Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_r^2},$$

$$\bullet N_{sub} = v\Omega = \frac{\Delta h_{sub} v_{fg}}{h_{fg} v_f}$$

we obtained:

$$\begin{aligned}
& \hat{u}_{n-2} (\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})) - \hat{u}_n^2 + \\
& \Lambda \left\{ \hat{u}_{n-1} \hat{u}_n^2 + \frac{(1 - \hat{u}_{n-1}) \hat{u}_{n-2} \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})}{\hat{u}_{n-2}} \right) \hat{u}_n^2}{(\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})) - \hat{u}_{n-2}} \right. \\
& + \frac{2N_{sub}(1 - \hat{u}_{n-1})^2 \hat{u}_i \hat{u}_{i-1} \left[ \hat{u}_i + N_{sub}(1 - \hat{u}_{i-1}) - \hat{u}_{i-1} \left( 1 + \ln \left( \frac{\hat{u}_i + N_{sub}(1 - \hat{u}_{i-1})}{\hat{u}_{i-1}} \right) \right) \right]}{\hat{u}_i + N_{sub}(1 - \hat{u}_{i-1}) - \hat{u}_{i-1}} \\
& + \frac{N_{sub}^2 (1 - \hat{u}_{n-1})^3 \hat{u}_{n-2}^3}{(\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})) - \hat{u}_{n-2}} \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})}{\hat{u}_{n-2}} \right) \\
& \left. + \frac{N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})^3 \hat{u}_{n-2} (\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})) - 3\hat{u}_{n-2}^2}{2(\hat{u}_n + N_{sub} (1 - \hat{u}_{n-1})) - \hat{u}_{n-2}} \right\} = Eu
\end{aligned} \tag{14}$$

where:

$$\hat{u}_n = \hat{u}_i(t),$$

$$\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_i(t - t_1),$$

$$\hat{u}_{n-2} = \hat{u}_i(t - t_2).$$

The fixed points of the two-dimensional map given by Eqn.(14), can be obtained by making

$$\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0 = N_{sub} / N_{pch}.$$

Thus, we get Eq.(15a) for two-phase flow ( $\theta_0 \leq 1$ ) and Eq.(15b) for one-phase flow ( $\theta_0 > 1$ ):

$$\left( \frac{\Lambda N_{sub}}{2} \right) \hat{u}_0^3 + (\Lambda - N_{sub} - \Lambda N_{sub}) \hat{u}_0^2 + \left( 1 + \frac{\Lambda}{2} \right) N_{sub} \hat{u}_0 = Eu \tag{15a}$$

$$\Lambda \hat{u}_0^2 = Eu \tag{15b}$$

where  $N_{pch}$  is well known in the literature as the "phase change number":  $N_{pch} = (Q v_{fg}) / (W h_{fg} v_d)$ .

Different kinds of solutions of Eqs.(15) are illustrated in the parametric plane ( $Eu, N_{sub}$ )

shown in Fig.2. Region-a corresponds to only one solution in single-phase. Region-b corresponds to only one solution with boiling. Region-c corresponds to three boiling solutions. Region-d corresponds to one solution in single phase and two solutions in boiling.

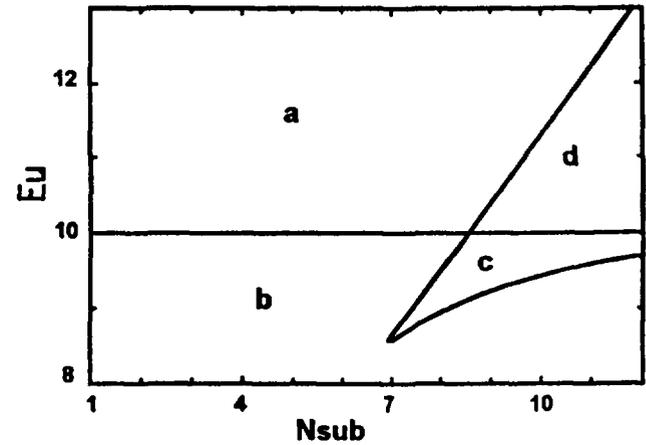


Figure 2: Fixed points characteristics. ( $\Lambda = 10$ ).

The characteristic curves obtained from Eqs.(15) for several subcooling numbers, are shown in Fig.3.

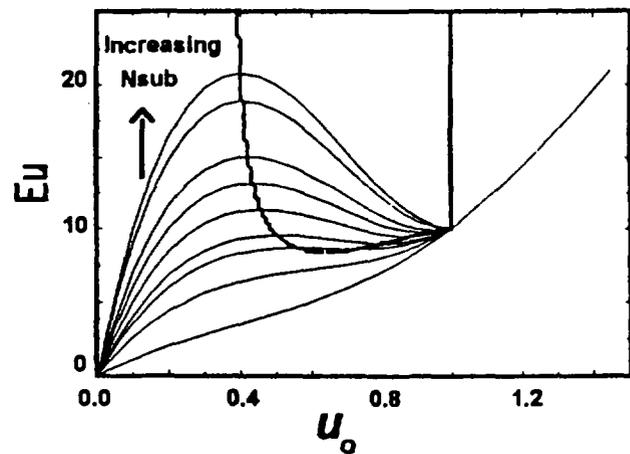


Fig.3 Characteristic curves (different  $N_{sub}$ ,  $\Lambda=10$ ).

The wide line close the region with negative slope, where the excursive Ledinegg instability occurs for systems under constant external pressure drop [2]. Thus, differentiating Eqs.(15) respect to  $\hat{u}_0$ , an analytical criterion

for Ledinegg excursion is obtained by calculating the relative extremes (maximum and minimum) of the curves, resulting:

$$\hat{u}_0^{\max} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}} \right) - \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}}} \quad (16a)$$

$$\hat{u}_0^{\min} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}} \right) + \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}}} \quad (16b)$$

Therefore the Ledinegg instability boundaries can be analytically obtained. It never occurs for imaginary solutions, i.e.  $N_{sub}$  values smaller than:

$$N_{sub} = \frac{2\Lambda(2(\Lambda+1) + \sqrt{3\Lambda(\Lambda+2)})}{\Lambda^2 + 2\Lambda + 4} \quad (17)$$

Fig.4 shows the condition for the existence of Ledinegg instabilities, given by Eq.(17). For:

$$N_{sub} > 4 + 2\sqrt{3} \quad (18)$$

the Ledinegg instability is always possible independently of the value of  $\Lambda$ .

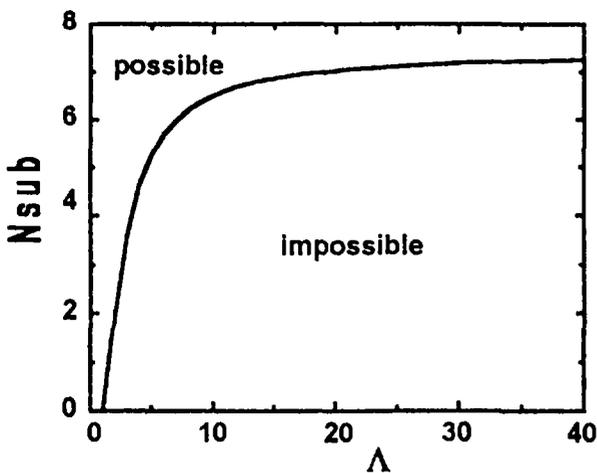


Fig.4 Conditions for the existence of Ledinegg instability.

The parametric region for which the Ledinegg instability occurs is given by:

$$\frac{3N_{sub}}{2 \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}} \right) + \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}}} } \leq N_{pch} \leq$$

$$\frac{3N_{sub}}{2 \left( 1 + \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{N_{sub}} \right) - \sqrt{1 + \frac{4}{\Lambda^2} + \frac{2}{\Lambda} + \frac{4}{N_{sub}^2} - \frac{8}{\Lambda N_{sub}} - \frac{8}{N_{sub}}} } \quad (19)$$

For high subcooling numbers, the upper  $\hat{u}_0$  boundary ( $\hat{u}_0^{\min}$ ) match the single-phase boundary ( $\hat{u}_0 = 1$  or  $N_{sub} = N_{pch}$ ) if:

$$N_{sub} \geq 2\Lambda \quad (20)$$

Substituting the  $N_{sub}$  value obtained from Eq.(17) in Eqs.(16) we get the  $\hat{u}_0$  limit point for which two branches closing the characteristic curve negative slope region appear. Therefore, combining this value with Eq.(20), another condition is obtained for the existence of the limit point that is:

$$\Lambda \geq 1 \quad (21)$$

### LINEAR STABILITY ANALYSIS.

An interesting result can be obtained considering  $t_1 = t_2 / 2 = \tau$ .

This is reasonable if the two-phase residence time, (i.e. the time that a particle needs to travel along the boiling region) is smaller than  $\nu$ .

Linearizing Eqs.(14) about a fixed point,  $\hat{u}_0$ , an analytical expression for the density-waves linear stability boundary can be obtained:

$$N_{pch} = \frac{-2 + \Lambda + N_{sub} + \Lambda N_{sub}}{2 + \Lambda} +$$

$$\frac{\sqrt{4 - 4\Lambda + N_{sub}^2 + 2\Lambda N_{sub} + \Lambda^2 - 4N_{sub} + 4N_{sub}\Lambda^2}}{2 + \Lambda} \quad (22)$$

If  $\Lambda$  is equal to one, the channel becomes unstable as long as boiling occurs.

Increasing friction (*i.e.* increasing  $\Lambda$ ), an stabilizing effect over the density-waves limit was found. In this respect, this simple delay model shows agreement with the complete differential model [8] and Ishii's criterion [9].

Figs.5 show the stability boundary for different  $\Lambda$ . It is interesting to see the "nose" of the Ledinegg boundary.

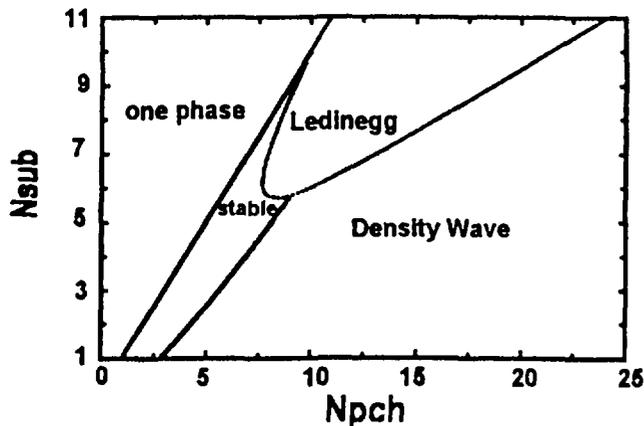


Figure 5a : Stability map ( $\Lambda=5$ )

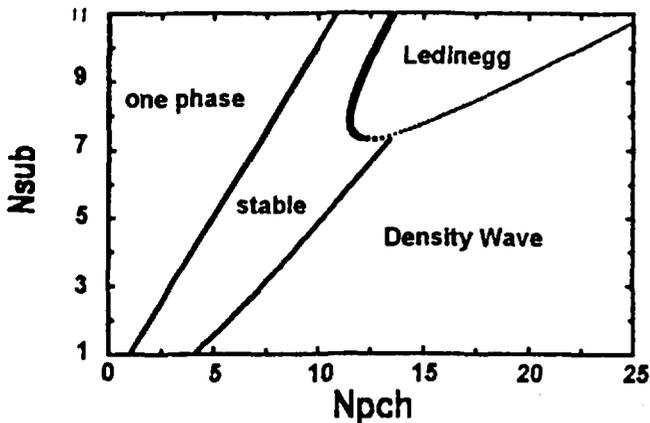


Figure 5b: Stability map ( $\Lambda=50$ )

## CONCLUSIONS

A simple delay model for density-wave instabilities was presented. The fixed points and stability margins were analytically studied.

For the linear stability analysis simple analytical expressions were obtained.

Regarding its performance, the model shows qualitative agreement with other distributed parameters approaches.

It was found that increasing the distributed friction, (*i.e.* increasing  $\Lambda$ ), introduces an stabilizing effect over density-waves and Ledinegg instabilities.

The assumptions used in this work seem to be reasonable for forced convection systems. However more studies are necessary in order to represent natural convection conditions.

## REFERENCES

- [1] LAHEY R.T., JR. and D.A. DREW, "An Assessment of the Literature Related to LWR Instability Modes", NUREG REPORT, NUREG/CR-1414,(1980).
- [2] LAHEY R.T., JR. and F.J. MOODY, "The Thermal hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor", *ANS Monograph*, (1977).
- [3] PENG S.J., M. Z. PODOWSKY and R.T. LAHEY JR., "BWR Linear stability analysis", *Nuclear Engineering and Design*, 93, 25-37 (1986).
- [4] XIAO M., X.J. CHEN, M.Y. ZHANG, T.N. VERIZOGLU and S. KOKAC, "A multivariable linear investigation of two-phase flow instabilities in parallel boiling channels under high pressure", *Int. J. Multiphase Flow*, 19, 65-77 (1993).
- [5] DELMASTRO, D.F., CLAUSSE, A. and CONVERTI, J., The influence of gravity on the stability of boiling flows, *Nuclear Engineering and Design*, 127 (1991), 129-139.
- [6] DELMASTRO D.F. and A. CLAUSSE , "Modelado por medio de elementos finitos moviles de la dinámica de flujos en ebullición", *Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 463-471 (1992).
- [7] LAHEY R.T. JR., . CLAUSSE A and P. DIMARCO,"Chaos and non-linear dynamics of density-wave instabilities in a boiling channel". *In Salim B. Yilmaz, editor, Heat Transfer-Philadelphia*, 256-261 (1989).
- [8] ACHARD J.L., DREW D.A. AND LAHEY JR. R.T., "The analysis of nonlinear density-wave oscillations in boiling channels", *J. Fluid Mech.*, 155 , 213-232 (1985).

[9] TONG L.S. and WEISMAN J. "Thermal analysis of pressurized water reactors". *In The American Nuclear Society*, 227-228 (1979).

## A SIMPLE DELAY MODEL FOR THE DYNAMICS OF BOILING CHANNELS

A. Clause, D.F. Delmastro and L.E. Juanicó  
*Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Argentina*

**Keywords:** Two-phased flow / Delay model / Dynamics System

### Abstract

A model based in delay equations for density-wave oscillations is presented. The equations are analyzed numerically and compared with more sophisticated models. Different kinds of behavior were found, particularly sub-critical and super-critical Hopf bifurcations. Moreover the present approach can be used to better understanding the complicated dynamics of boiling flows systems.

### 1. Introduction

The phenomenon of density-wave instabilities in boiling channels has been extensively studied during the last 30 years (Lahey and Drew, 1980). These oscillations may be encountered for certain operating conditions of boiling system, in which they become unstable due to lags in the phasing of the pressure-drop feedback mechanisms. Perturbations at the inlet of the channel move with the fluid, yielding transport delays in the local changes of state variables. Given the appropriate set of operating conditions, these delays may lead to self-excitation (Lahey and Moody, 1977).

The most common manifestations of density-wave instabilities are self-sustained oscillations of the flow variables. The amplitudes of these oscillations can be very large, and can lead to flow reversals (that is, negative inlet velocities). It may also happen that these oscillations can cause the system to reach the point of excursive instability experiencing substantial changes in the flow operating conditions (Lahey and Moody, 1977).

Density-wave instabilities in boiling system, besides being scientifically interesting, have serious practical implications for many industries. Phase-change heat exchangers, various chemical-process equipment, boiling water nuclear reactors (BWRs), and steam generators, to name a few, are potential candidates to experience density-wave instability.

The classical tool which has been used to study the problem of density-wave instability in boiling systems is the linear frequency-domain analysis. Rather accurate and reliable models are now available for the stability analysis of complicated systems, such as interconnected channels in BWRs (Taleyarkhan *et al.*, 1983; Peng *et al.*, 1986; Xiao *et al.*, 1993).

The study of the nonlinear behavior of density-wave instabilities has attracted considerable interest recently. Hopf-bifurcation techniques have been used to study the amplitude and frequency of oscillations (Achard *et al.*, 1985). In addition, numerical time-domain analyses were performed (Rizwan-Uddin and Doring 1988), where a chaotic attractor was found for periodically forced flows.

In this paper a simple model of density-wave oscillations based in delay equations is presented. The solutions are compared with results from more sophisticated models, showing good agreement. Different kinds of behavior were found, particularly sub-critical and super-critical Hopf bifurcations.

### 2. Boiling channel model

Let us consider the boiling channel shown in Fig. 1. The liquid enters at constant subcooled temperature and is heated up uniformly along the channel. At certain location the fluid reaches its saturation temperature and starts to boil, exiting the channel as a two-phase mixture.

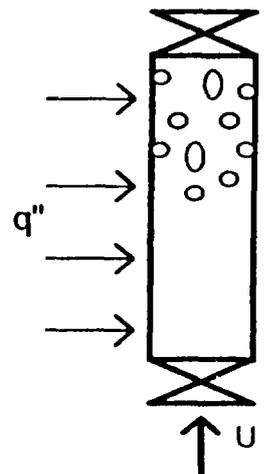


Fig. 1. Boiling channel.

The following assumptions have been made in the modeling of the two-phase flow :

- The flow is homogeneous (that is, no phasic slip occurs).
- The system pressure is constant.
- The heat flux is constant in space and time.
- Both phases are incompressible.
- The phases are in thermodynamic equilibrium.

- Viscous dissipation and internal heat generation are neglected in the energy equation.
- Friction is concentrated at the inlet and the exit of the channel.

In the hypotheses above, the one-dimensional conservation equations of mass and energy can be written as:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u)}{\partial z} = q. \tag{1b}$$

Moreover, enthalpy and density are related by the following equation of state

$$\rho = \rho_f \quad \text{for } h \leq h_f, \tag{2a}$$

$$\rho = \left[ v_f + \frac{(h-h_f)}{h_{fg}} v_{fg} \right]^{-1} \quad \text{for } h > h_f. \tag{2b}$$

Combining Eqs.(1b) and (2b) for the two-phase region gives

$$\frac{\partial u}{\partial z} = q \frac{v_{fg}}{h_{fg}} = \Omega. \tag{3a}$$

Similarly in the single phase region, we have

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{3b}$$

Integrating Eqs.(3) along the channel leads to

$$u_e = u_i + \Omega(L_{ch} - \lambda). \tag{4}$$

Where the subcooled length,  $\lambda(t)$ , is defined by

$$\lambda(t) = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt'. \tag{5}$$

Here  $\nu$  is the time needed by a fluid particle at the inlet of the channel to reach saturation temperature:

$$\nu = \frac{\Delta h_{sub} \rho_f}{q}. \tag{6}$$

For low frequencies we can write:

$$\lambda(t) = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt' = \nu u_i(t - t_1). \tag{7}$$

In Eqn.(7),  $t_1$  is a delay time such that  $0 < t_1 < \nu$ .

Let us assume a quasi-static balance of forces in the momentum equation. At high Froude numbers the external pressure head is then balanced by the drag and acceleration forces, that is

$$(k_i - 1)\rho_f u_i^2 + (k_e + 1)\rho_e u_e^2 = \Delta p. \tag{8}$$

Following the quasi-static approximation we can assume that the exit flow follows the history of the inlet flow (Lahey *et al.*, 1989) that is:

$$\rho_e(t) u_e(t) = \rho_f u_i(t - t_2), \tag{9}$$

where  $t_2$  is a certain transport delay which will be considered constant.

Eqs.(4),(7),(8) and (9) may be combined in a delay equation relating the values of the inlet velocity,  $u_i$ , at three different times:  $t$ ,  $t - t_1$  and  $t - t_2$ , according to the following expression

$$(k_i - 1)u_i^2(t) + (k_e + 1)u_i(t - t_2)[u_i(t) - \Omega \nu u_i(t - t_1) + \Omega L_{ch}] = \frac{\Delta p}{\rho_f}. \tag{10}$$

Writing Eqn.(10) in a nondimensional form, using the reference values

$$\begin{aligned} L_r &= L_{ch}, \\ u_r &= \Omega L_r, \\ \rho_r &= \rho_f, \end{aligned}$$

we obtain the following expression

$$(k_i - 1)\hat{u}_i^2(t) + (k_e + 1)\hat{u}_i(t - t_2)[\hat{u}_i(t) - N_{sub} \hat{u}_i(t - t_1) + 1] = Eu, \tag{11}$$

where the superscript  $\hat{\phantom{x}}$  means dimensionless and the Euler and subcooling number are defined as

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_r^2}, \quad N_{sub} = \nu \Omega = \frac{\Delta h_{sub} v_{fg}}{h_{fg} v_f}.$$

### 3. A Two-Dimensional Mapping of Density-Wave Instabilities

An interesting result can be reached considering  $t_1 = t_2/2 = \tau$ ,

$$(k_i - 1)\hat{u}_n^2 + (k_e + 1)\hat{u}_{n-2}(\hat{u}_n - N_{sub}\hat{u}_{n-1} + 1) = Eu \tag{12}$$

where:

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \hat{u}_i(t), \\ \hat{u}_{n-1} &= \hat{u}_i(t - \tau), \\ \hat{u}_{n-2} &= \hat{u}_i(t - 2\tau). \end{aligned}$$

This is reasonable if the two-phase residence time, *i.e.* the time that a particle needs to travel along the boiling region, is small.

3.1 Fixed Points

The fixed points of the two-dimensional map given by Eqn.(12) can be obtained by making

$\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0$ , that is:

$$\hat{u}_0 = \frac{u_0}{\Omega L_{ch}} = \frac{1}{N_{pch}} = \frac{-(k_e + 1) \pm \sqrt{(k_e + 1)^2 + 4Eu(k_i - 1 + (k_e + 1)(1 - N_{sub}))}}{2(k_i - 1 + (k_e + 1)(1 - N_{sub}))} \quad (13)$$

where  $N_{pch}$  is well known in the literature as the "phase change number".

This equation gives different kinds of solutions depending on the subcooling number.

If

$$N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} \quad (14)$$

there are two real fixed points, one positive and one negative.

If

$$\frac{k_i + k_e}{k_e + 1} < N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (15)$$

there are two positive real solutions.

If

$$N_{sub} > \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (16)$$

there are no real solutions.

3.2 Linear Stability

Linearizing Eqn.(12) about a fixed point,  $\hat{u}_0$ , and using the Laplace transform leads to the following characteristic equation :

$$\left( \frac{2k_i + k_e - 1}{k_e + 1} \right) \xi^2 - N_{sub} \xi + (1 + N_{pch} - N_{sub}) = 0. \quad (17)$$

If the eigenvalues are both inside the unit circle in the complex plane the system is stable. If one of the eigenvalues is real and exceeds 1, the fixed point is a saddle node, repelling along one direction in the plane ( $\hat{u}_n, \hat{u}_{n-1}$ ). When one of the eigenvalues is a real negative less than -1 a flip bifurcation occurs. On the other hand, if the eigenvalues are complex conjugate they can cross the complex unit circle at an angle  $\vartheta$  (different from 0 or  $\pi$ ). This is called a secondary Hopf bifurcation or Niemark instability (Thompson and Stewart, 1986).

Defining the parameter

$$k = \frac{2k_i + k_e - 1}{k_e + 1} \quad (18)$$

We can express the solutions of Eqn. (17) in terms of  $k, N_{sub}$  and  $N_{pch}$  as follows :

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2k} \left[ N_{sub} \pm \sqrt{N_{sub}^2 - 4(1 + N_{pch} - N_{sub})k} \right] \quad (19)$$

Complex eigenvalues exist if

$$N_{pch} > \frac{N_{sub}^2}{4k} + N_{sub} - 1. \quad (20)$$

In that case, a Niemark instability occurs if the module of the eigenvalues exceeds 1, which occurs for:

$$N_{pch} > N_{sub} + k - 1. \quad (21)$$

On the other hand, if the eigenvalues are real, a saddle point exist when the largest eigenvalue exceed 1, that is:

$$N_{pch} < 2N_{sub} - k - 1. \quad (22)$$

If the smallest eigenvalue is less than -1 a flip bifurcation occurs. However,  $N_{sub}, k$  and  $(N_{pch} - N_{sub})$  are always positive in the range of physical values. Therefore, from Eqn.(19) the eigenvalues are always greater than zero, and consequently a flip bifurcation cannot exist.

The stability criteria, given by Eqns.(20),(21) and (22), are illustrated in the two-parametric plane ( $N_{sub}, N_{pch} - N_{sub}$ ) showed in Fig.2. We can see in it, stable regions with real (a) or complex (b) eigenvalues, the Niemark instability region (c) and the saddle excursion region (d).

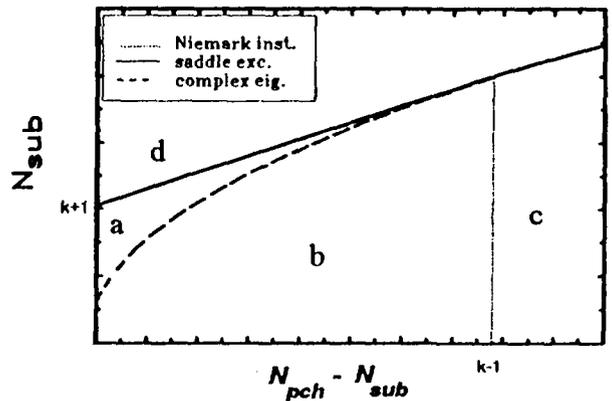


Fig.2: Linear stability map.

3.3 The Ledinegg Excursion

Let us consider the stability of the fixed point with the minus sign,  $\hat{u}_0^-$ . Replacing Eqn. (15) in Eqn. (13) shows that there are valid solutions of  $\hat{u}_0^-$  provided that:

$$0 < N_{pch} < 2N_{sub} - k - 1 \tag{23}$$

The upper limit of Eqn.(23) is exactly the same as the condition for saddle excursion, Eqn. (22). Therefore the point  $\hat{u}_o^-$  is always unstable and causes an excursive instability, usually known as the Ledinegg instability (Lahey and Moody, 1977).

### 3.4 Density-Wave Instability

Let us consider the stability of the fixed point of Eqn.(12) with the plus sign,  $\hat{u}_o^+$ . There are always positive solutions provided that

$$N_{sub} > \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \tag{24}$$

Combining Eqn. (24) with Eqn.(13) and (18) leads to the following inequality

$$N_{pch} > 2N_{sub} - k - 1 \tag{25}$$

By comparing Eqn. (22) and Eqn. (25) we can see that the point  $\hat{u}_o^+$  can never be a saddle point. The range of stable values of  $N_{pch} - N_{sub}$  are limited by the equation

$$N_{pch} - N_{sub} = k - 1 \tag{26}$$

The system goes to a Niemark bifurcation when  $N_{pch} - N_{sub}$  exceeds  $k-1$  (c region in Fig. 2). This instability has an oscillatory character, reflected in density waves traveling along the channel, which gives the name to the phenomena.

### 3.5 Stability Comparison

Comparing the linear stability map for this simple delay model with the complete differential model (Delmastro *et al.*, 1991) we found good agreement for a wide range of subcooling numbers. Fig. 3 shows lineal stability maps obtained with each model.

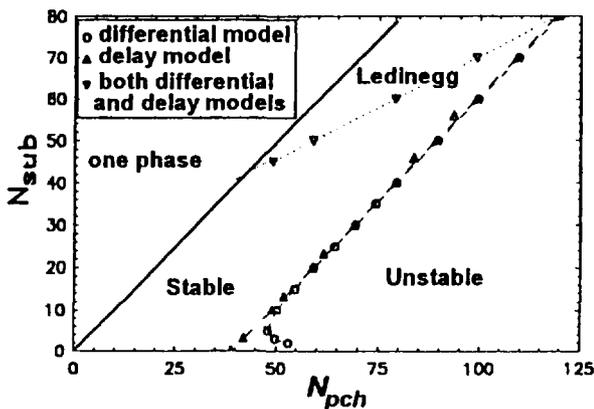


Fig. 3 Stability comparison.

For low subcooling numbers, the delay model is too conservative, but it should be noted that in this region  $t_1$  is much less than  $t_2$ , which invalidate the model hypothesis.

### 3.6 Non-Linear Behavior

The iterative Eqn.(12) can be used to study the system transient response under unstable conditions. Two different kind of behavior for density-wave instability were found depending on the subcooling number. For high subcooling numbers a supercritical Hopf bifurcation appears. Fig. 4 illustrates a series of limit cycles appearing in the presence of a Niemark instability in the unstable region of the Fig. 3. The "nose" appearing in the right side of the cycle for large amplitudes is due to the presence of the Ledinegg saddle point.

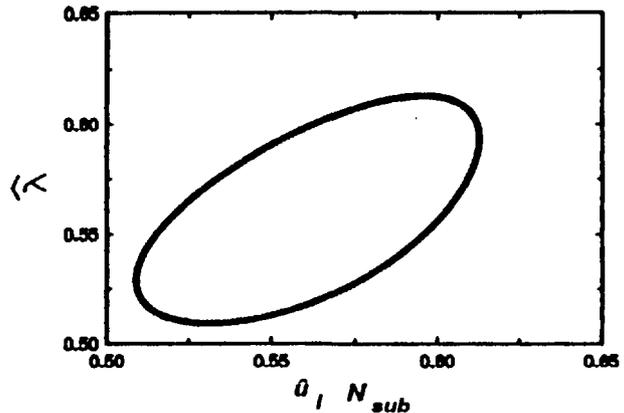


Fig. 4a. Limit cycle ( $N_{sub} = 50, N_{pch} = 89.1, k_i = 40, k_e = 1$ ).

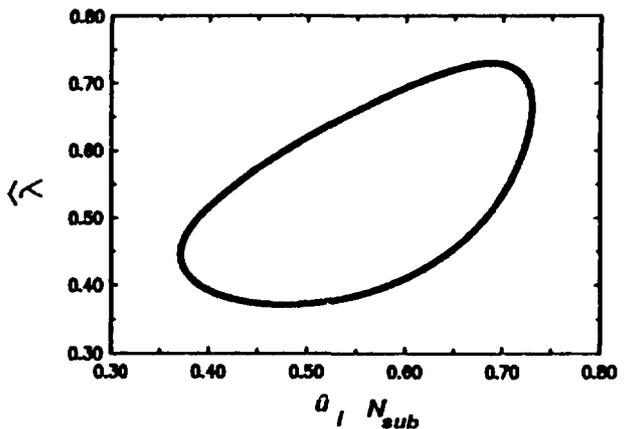


Fig.4b. Limit cycle ( $N_{sub} = 50, N_{pch} = 90.1, k_i = 40, k_e = 1$ ).

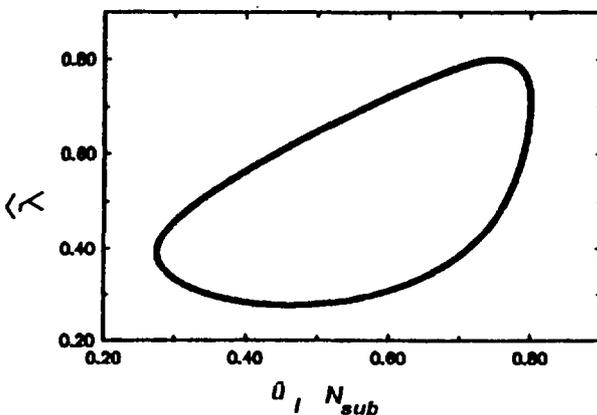


Fig.4c Limit cycle ( $N_{sub} = 50, N_{pch} = 91.1, k_i = 40, k_e = 1$ ).

On the other hand, for low subcooling numbers a subcritical Hopf bifurcation appears. Figure 5 shows this kind of behavior. As can be seen for a small perturbation, the system is stable but for a big one the oscillations diverge.

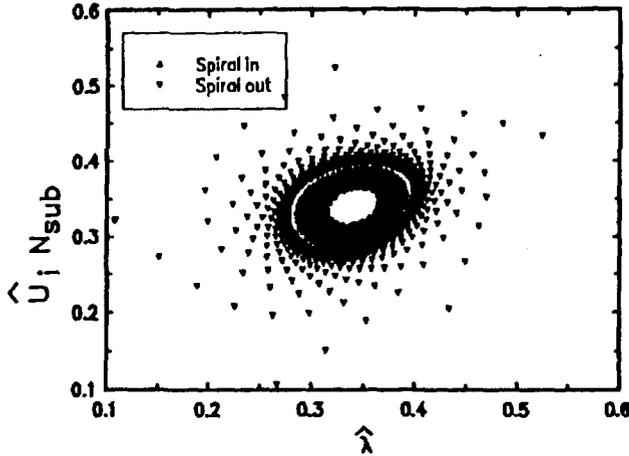


Fig. 5. Subcritical Hopf bifurcation, simple model ( $N_{sub} = 20, N_{pch} = 58.8, k_i = 40, k_e = 1$ ).

A more sophisticated model (Rizwan-Uddin and Doming, 1988) was used to check the present results. Good agreement was found as can be seen in Fig. 6, where the same situation of Fig. 5 was studied.

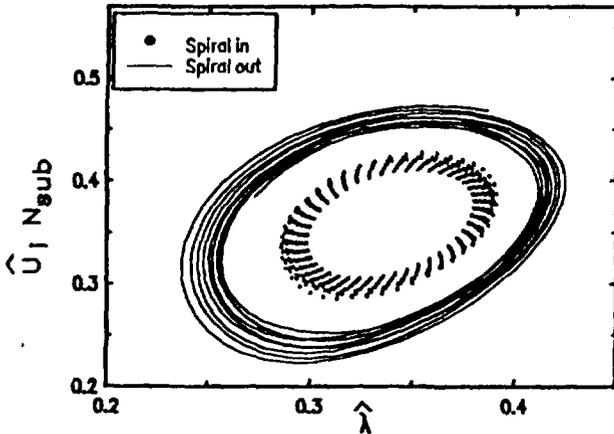


Fig. 6 Subcritical Hopf bifurcation, differential model.

For the case of subcritical bifurcations, the stability boundaries for a pure perturbation of  $\hat{u}_i$  and  $\hat{\lambda}$ , are showed in Figs. 7a and b, respectively.

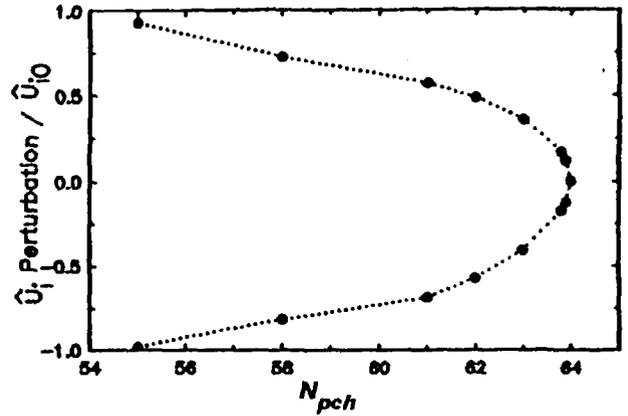


Fig. 7a. Stability boundary for inlet velocity perturbations ( $N_{sub}=25, k_i = 40, k_e = 1$ )

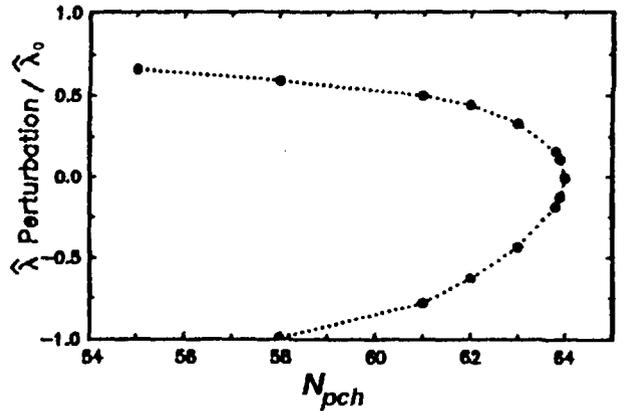


Fig. 7b: Stability boundary for subcooled length perturbations ( $N_{sub} = 25, k_i = 40, k_e = 1$ ).

For the case of supercritical bifurcations, we can see in Fig. 8 the maximum and minimum ( $\hat{u}_i - \hat{u}_{i0}$ )  $N_{sub}$ , showing that the limit cycles amplitude increases as  $N_{pch}$  departs from the stability threshold obtained with Eqn. (21).

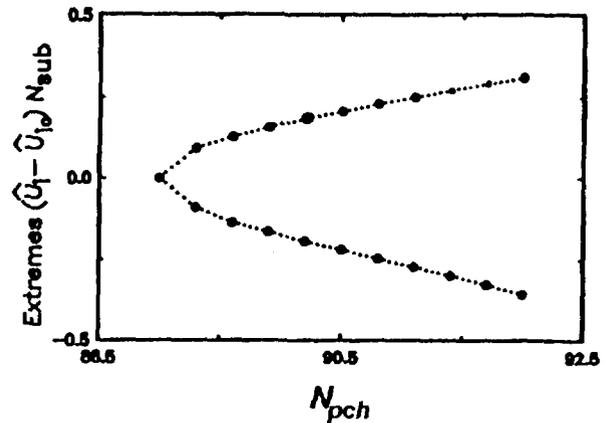


Fig. 8. Stable limit cycles amplitude ( $N_{sub} = 50, k_i = 40, k_e = 1$ ).

For both kind of bifurcations, the amplitude of the limit cycles was studied. For the subcritical region the locus of the unstable limit cycles is shown in Fig 9. While for a perturbation inside of this conical region the system converges to the fixed point, for another outside that region, the system diverges.

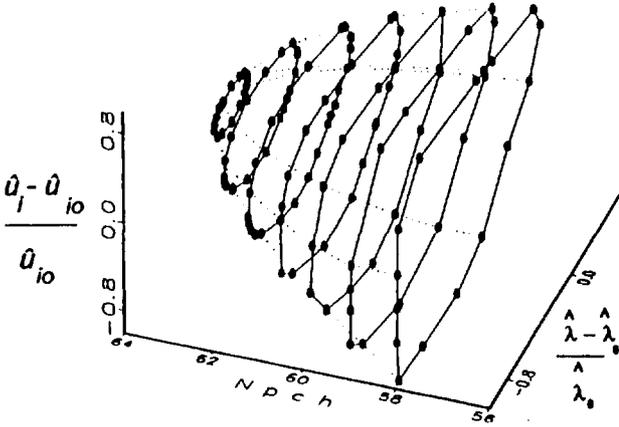


Fig 9: Stability surface of a subcritical bifurcation ( $N_{sub} = 25, k_i = 40, k_e = 1$ ).

For the supercritical behavior the locus of stable limit cycles is shown in Fig 10. The system evolves to a stable limit cycle for either a perturbation inside or outside of this conical surface.

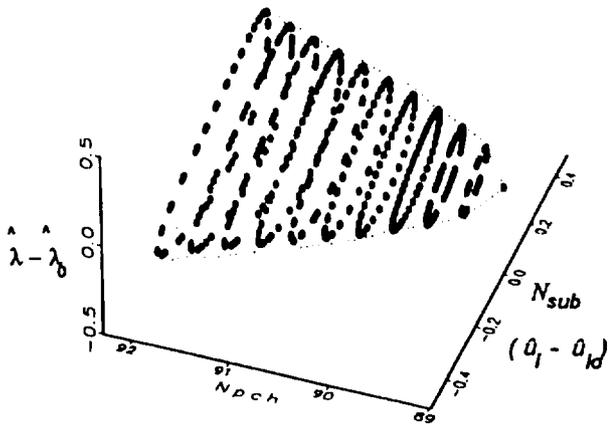


Fig. 10: Stable limit cycles locus ( $N_{sub} = 25, k_i = 40, k_e = 1$ ).

4. Conclusions

A simple delay model based in a two-dimensional mapping was studied. The approach is useful to contribute to the understanding of density-wave instabilities. Moreover, significant computational time saving is an attractive quality of this simple model (about 1000 times faster than complete differential delay models). BASIC and FORTRAN code programs of this model are available from the authors.

Regarding its performance, the model shows qualitative agreement with the differential treatment of the equations. For linear stability analysis good agreement was observed,

for high subcoolings. Subcritical and supercritical Hopf bifurcations were observed. This feature is similar to the behavior predicted by more complicated models.

The assumed relations between the outlet mass flow and the subcooled length with the inlet velocity history, are reasonable for forced systems. An interesting issue for future research is the modeling of gravity effects, in order to simulate natural convection systems.

6. Nomenclature

- $Eu$  Euler number,  $(\Delta p / (\rho_f u_r^2))$ ,
- $h$  specific enthalpy,
- $h_{fg}$   $h_g - h_f$
- $k$  concentrated friction constant, (see Eqn.(18)),
- $k_i$  inlet restriction coefficient,
- $k_e$  exit restriction coefficient,
- $L_{ch}$  heated channel length,
- $N_{pch}$  phase change number,  $(\Omega L_{ch} / u_0)$ ,
- $N_{sub}$  subcooling number,  $(\Omega v)$ ,
- $p$  pressure,
- $q$  volumetric power,
- $t$  time,
- $u$  velocity,
- $v$  specific volume,
- $v_{fg}$   $v_g - v_f$ ,
- $z$  space coordinate.

Greek

- $\lambda$  boiling boundary position,
- $\rho$  density,
- $\nu$  liquid phase particle time,
- $\tau$  two-phase particle time,
- $\Omega$   $q v_{fg} / h_{fg}$ .

Subscripts

- e exit,
- f liquid (saturation),
- g vapor,
- i inlet,
- n number of time step,
- o steady state,
- r reference.

Other

- $\wedge$  non-dimensional.

References

Achard J.L., D.A. Drew and R.T. Lahey Jr., "The analysis of nonlinear density-wave oscillations in boiling channels," *J. Fluid Mech.* 155, 213-232 (1985).  
 Delmastro D.F., A. Clausse and J. Converti, "The influence of gravity on the stability of boiling flows," *Nuclear Engineering and Design* 127, 129-139 (1991).

- Lahey R.T., Jr. and F.J. Moody, "*The Thermal Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor*," ANS Monograph, (1977).
- Lahey R.T., Jr. and D.A. Drew, "An Assessment of the Literature Related to LWR Instability Modes," NUREG/CR- 1414 (1980).
- Lahey R.T. Jr., A. Clausse and P. Dimarco, "Chaos and non-linear dynamics of density-wave instabilities in a boiling channel," in *Salim B. Yilmaz (Ed.) Heat Transfer-Philadelphia*, 256-261 (1989).
- Peng S.J., M. Z. Podowsky and R.T. Lahey Jr., "BWR Linear stability analysis," *Nuclear Engineering and Design* 93, 25-37 (1986).
- Rizwan-Uddin and J.J. Dornig, "A Chaotic Attractor in a Periodically Forced Two-Phase Flow System," *Nucl. Sci. Eng.* 100, 393-404 (1988).
- Taleyarkhan R., M. Podowski and R. Lahey, "The development of a nodal method for the stability analysis of ventilated boiling channels," *2nd. Int. Topical Meet. on Nucl. Reactor Thermalhydraulics*, Sta. Barbara, California (January 1983).
- Thompson J.M.T. and H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons (1986).
- Xiao M., X.J. Chen, M.Y. Zhang, T.N. Verizoglu and S. Kokac, "A multivariable linear investigation of two-phase flow instabilities in parallel boiling channels under high pressure," *Int. J. Multiphase Flow* 19, 65-77 (1993).

(Received September 5, 1994; accepted for publication March 27, 1996).

# A FULLY ANALYTICAL TREATMENT OF HOPF BIFURCATIONS IN A MODEL OF BOILING CHANNEL

D. Delmastro, L. Juanicó, and A. Clausse  
Centro Atómico Bariloche and Instituto Balseiro,  
8400 Bariloche, Argentina

**Keyword :** Two phase flow. Density-wave oscillations. Hopf bifurcation.

## Abstract

The analysis of a model of boiling channels dynamics based in delay equations is presented. A two-dimensional mapping is derived from the flow conservation equations by assuming constant transport delays along the different parts of the channel. The simplicity of the final equation allows the fully analytical treatment, both linear and non-linear, of the system dynamics, while preserving a realistic description of the main mechanisms involved.

Both kinds of Hopf bifurcations, subcritical and supercritical, could be identified and treated using perturbation methods. The derivation of a fully analytical criterion for Hopf bifurcation transcription was applied to determine the amplitude of limit cycles and the maximum allowed perturbations necessary to break the system stability.

## 1. Introduction

The phenomenon of density-wave instabilities in boiling channels has been extensively studied during the last 30 years (Lahey and Drew, 1980). These oscillations may be encountered for certain operating conditions of boiling systems, in which they become unstable due to lags in the phasing of the pressure-drop feedback mechanisms. Perturbations at the inlet of the channel move with the fluid, yielding transport delays in the local changes of state variables. Given the appropriate set of operating conditions, these delays may lead to self-excitation (Lahey and Moody, 1977).

The most common manifestations of density-wave instabilities are self-sustained oscillations of the flow variables. The amplitudes of these oscillations can be very large, and can lead to flow reversals (that is, negative inlet velocities). It may also happen that these oscillations can cause the system to reach the point of excursive instability experiencing substantial changes in the flow operating conditions. (Lahey and Moody, 1977).

Density-wave instabilities in boiling systems, besides being scientifically interesting, have serious practical implications for many industries. Phase-change heat exchangers, various chemical-process equipments, boiling water nuclear reactors (BWRs), and steam generators, to name a few, are potential candidates to experience density-wave instability.

The classical tool which has been used to study the problem of density-wave instability in boiling systems is the linear frequency-domain analysis. Rather accurate and reliable models are now available for the stability analysis of complicated systems, such as interconnected channels in BWRs (Taleyarkhan *et al.*, 1983; Peng *et al.*, 1986; Xiao *et al.*, 1993).

The study of the non-linear behaviour of density-wave instabilities has attracted considerable interest recently. Hopf-bifurcation techniques have been used to study the amplitude and frequency of oscillations (Achard *et al.*,

1985). In addition, numerical time-domain analyses were performed (Rizwan-Uddin and Dorning, 1988) where a chaotic attractor was found for periodically forced flows.

In this paper the analysis of a model of density-wave oscillations based in delay equations is presented. The model is an extension of a simplifivative treatment which allows an elegant description of self-sustained oscillations in boiling channels (Clausse *et al.*, 1996). Non-linear effects are studied by means of Hopf bifurcation characterisation.

## 2. Boiling channel model

Let us consider the boiling channel shown in Fig.1. The liquid enters at constant subcooled temperature and is heated up uniformly along the channel. At certain location the fluid reaches its saturation temperature and starts to boil, exiting the channel as a two-phase mixture.

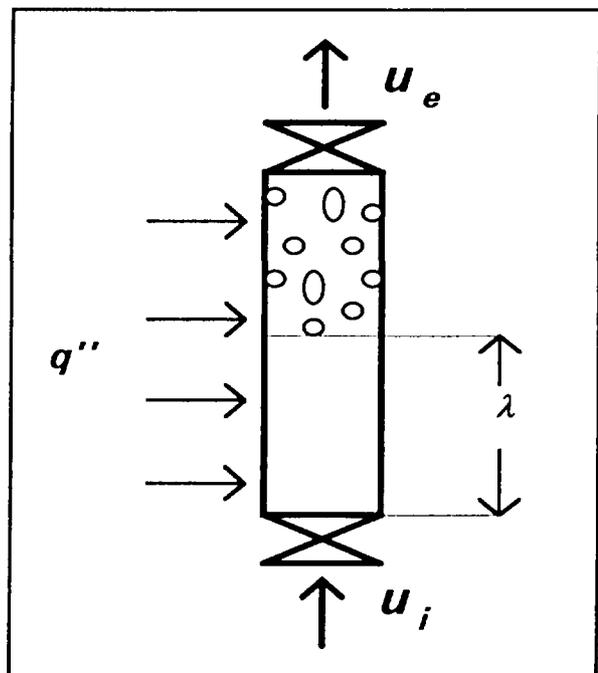


Figure 1. Boiling channel.

The following assumptions have been made in the modelling of the two-phase flow:

- The flow is homogeneous (that is, no phasic slip occurs).
- The system pressure is constant.
- The heat flux is constant in space and time.
- Both phases are incompressible.
- The phases are in thermodynamic equilibrium.
- Viscous dissipation and internal heat generation are neglected in the energy equation.
- Friction is concentrated at the inlet and the exit of the channel.

In the hypotheses above, the one-dimensional conservation equations of mass and energy can be written as:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u)}{\partial z} = q. \quad (1b)$$

Moreover, enthalpy and density are related by the following equation of state:

$$\rho = \rho_f, \quad \text{for } h \leq h_f \quad (2a)$$

$$\rho = \left[ v_f + \frac{(h - h_f)}{h_{fg}} v_{fg} \right]^{-1} \text{ for } h > h_f. \quad (2b)$$

Combining Eqns.(1b) and (2b) for the two-phase region gives:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = q \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \equiv \Omega. \quad (3a)$$

Similarly in the single phase region, we have:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3b)$$

Integrating Eqns.(3) along the channel leads to:

$$u_e = u_i + \Omega(L_{ch} - \lambda). \quad (4)$$

Where the subcooled length,  $\lambda(t)$ , is defined by

$$\lambda(t) = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt'. \quad (5)$$

Here  $\nu$  is the time needed by a fluid particle at the inlet of the channel to reach saturation temperature:

$$\nu = \frac{\Delta h_{sub} \rho_f}{q}. \quad (6)$$

For low frequencies we can write (Claussc *et al.*, 1995):

$$\lambda(t) = \int_{t-\nu}^t u_i(t') dt' = \nu u_i(t - t_1). \quad (7)$$

In Eqn.(7),  $t_1$  is a delay time such that  $0 < t_1 < \lambda$ .

Let us assume a quasi-static balance of forces in the momentum equation. At high Froude numbers the external pressure head is then balanced by the drag and acceleration forces, that is

$$(k_i - 1)\rho_f u_i^2 + (k_e + 1)\rho_e u_e^2 = \Delta p. \quad (8)$$

Following a quasi-static approximation we can assume that the exit flow follows the history of the inlet flow (Claussc *et al.*, 1995) that is:

$$\rho_e(t)u_e(t) = \rho_f u_i(t - t_2), \quad (9)$$

where  $t_2$  is a certain transport delay which will be considered constant.

Equations (4),(7),(8) and (9) may be combined in a delay equation relating the values of the inlet velocity,  $u_i$ , at three different times:  $t$ ,  $t - t_1$  and  $t - t_2$ , according to:

$$(k_i - 1) u_i^2(t) + (k_e + 1) u_i(t - t_2) \times [u_i(t) - \Omega \nu u_i(t - t_1) + \Omega L_{ch}] = \frac{\Delta p}{\rho_f}. \quad (10)$$

Expressing the velocity in units of  $u_r = \nu^{-1} L_{ch}$ , we obtain:

$$(k_i - 1) \hat{u}_i^2(t) + (k_e + 1) \hat{u}_i(t - t_2) \times [\hat{u}_i(t) - N_{sub} \hat{u}_i(t - t_1) + N_{sub}] = Eu, \quad (11)$$

where the superscript  $\hat{\phantom{x}}$  means dimensionless and the Euler and subcooling number are defined as:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_r^2}, \quad N_{sub} = \nu \Omega = \frac{\Delta h_{sub} v_{fg}}{h_{fg} v_f}.$$

The reference unit of the velocity is chosen such that the boiling boundary is at the end of the channel when the dimensionless velocity is unity.

### 3. A Two-Dimensional Mapping of Density-Wave Instabilities

An interesting result can be reached considering  $t_j = t_2/2 = \tau$ . This is reasonable if the two-phase residence time, *i.e.* the time that a particle needs to travel along the boiling region, is small. Then, we can write

$$(k_i - 1)\hat{u}_n^2 + (k_e + 1)\hat{u}_{n-2} [\hat{u}_n + N_{sub}(1 - \hat{u}_{n-1})] = Eu \quad (12)$$

where:

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \hat{u}_i(t), \\ \hat{u}_{n-1} &= \hat{u}_i(t-\tau), \\ \hat{u}_{n-2} &= \hat{u}_i(t-2\tau). \end{aligned}$$

Equation (12) represents a simplifivative description of the dynamics of a boiling channel by means of a two dimensional mapping of the inlet velocity. In the steady-state

$$\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0,$$

which should satisfy:

$$(k_i - 1)\hat{u}_0^2 + (k_e + 1)\hat{u}_0 [\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)] = Eu. \quad (13)$$

The parameter  $\hat{u}_0$  represents the subcooled fraction of the channel, that is:

$$\hat{u}_0 = \frac{\lambda_0}{L_{ch}} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}}.$$

$N_{pch}$  being the well known phase-change number, usually applied in the boiling dynamics literature (Lahey, 1986).

Let us now consider a small perturbation from the steady state  $\hat{u}_0$  by taking,

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_0 + \delta \hat{u} e^{\alpha t}.$$

Using this relation in Eqn. (12), we obtain the characteristic equation of the linearized system:

$$[\hat{u}_0 + N_{sub}(1 - \hat{u}_0)]x^2 - N_{sub}\hat{u}_0x + (2k + 1)\hat{u}_0 = 0, \quad (14)$$

$$\text{where } x = e^{-\alpha \tau} \text{ and } k = \frac{k_i - 1}{k_e + 1}.$$

Solving Eqn. (14),  $x$  is obtained as:

$$x = \frac{N_{sub}\hat{u}_0 \pm j\sqrt{4\hat{u}_0(2k+1)[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)] - N_{sub}^2\hat{u}_0^2}}{2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)]}. \quad (15)$$

The system is marginally stable at  $\hat{u}_0$  if  $x$  is a point of the unit circle in the complex plane. Depending on the character of  $x$  (*i.e.*, real or complex) the system loses its stability either oscillatory (complex eigenvalues) or excursively (real eigenvalues). For complex eigenvalues the instability margin is given by:

$$\hat{u}_0 = \frac{N_{sub}}{N_{sub} + 2k}. \quad (16)$$

For real eigenvalues a saddle point exists when the largest eigenvalue  $x$  is lower than 1. In this case, the system reaches the excursive or Ledinegg instability (Lahey and Moody, 1977). From Eqn.(15), this condition implies that

$$\hat{u}_0 = \frac{N_{sub}}{2(N_{sub} - k - 1)}, \quad \text{for } \hat{u}_0 < \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2} \quad (17a)$$

$$\hat{u}_0 = \frac{N_{sub}}{\frac{N_{sub}^2}{4(2k+1)} + N_{sub} - 1}, \quad \text{for } \hat{u}_0 > \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2}. \quad (17b)$$

The point where Eqns.(16) and (17) intersect, corresponds to the transition for complex to real unstable eigenvalues, that is:

$$\hat{u}_0 = \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2}. \quad (18)$$

The minimum values of  $N_{sub}$  and  $\hat{u}_0$  for the existence of the intersecting point given by Eqn. (18) are 2 and 2/3, respectively.

The linear stability map in the  $(N_{sub}, \hat{u}_0)$  plane is illustrated in Fig.2, showing stable regions with real (a) or complex (b) eigenvalues, the oscillatory unstable region (c), and the excursive or Ledinegg region (d).

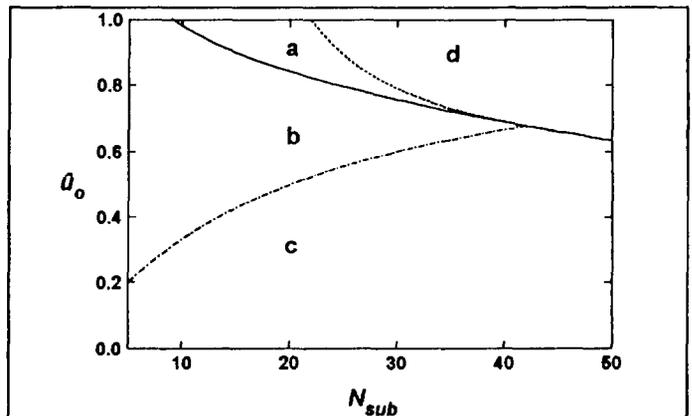


Figure 2. Linear stability map.

#### 4. Hopf bifurcation

Let us assume that the system is under marginally (complex eigenvalues) stable conditions. Therefore  $k$  is determined by Eqn.(16), that is :

$$k_0 = \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0)}{2\hat{u}_0} \quad (19)$$

As  $k$  is decreased past  $k_0$ , the stationary solution loses stability. The Hopf bifurcation theorem states that we may get a periodic solution which bifurcates from  $\hat{u}_0$  if

$$\alpha|_{\mu=0} = -\bar{\alpha}|_{\mu=0} \neq 0 ,$$

$$\text{Re} \left[ \frac{d\alpha}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \right] \neq 0 ,$$

where  $\alpha$  is given by the solution of Eqn.(14), that is:

$$\alpha = -\frac{1}{\tau} \log x \quad \text{and} \quad \mu = k - k_0 \quad (20)$$

Combining Eqns.(15) and (20),

$$\alpha|_{\mu=0} = -\bar{\alpha}|_{\mu=0} = \frac{j \arctan \left( \frac{\text{Im} \Big|_{\mu=0}}{\text{Re} \Big|_{\mu=0}} \right)}{\tau} \neq 0 , \quad (21)$$

$$\text{Re} \left[ \frac{d\alpha}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \right] < 0 ,$$

where  $Re$  and  $Im$  are the real and imaginary parts of  $x$  calculated at the linear limit, that is:

$$\text{Re} = \frac{N_{sub} \hat{u}_0}{2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)]} \quad (22a)$$

$$\text{Im} = \sqrt{1 - \left\{ \frac{N_{sub} \hat{u}_0}{2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)]} \right\}^2} \quad (22b)$$

Thus a bifurcation is possible in our delay equation.

In order to investigate the bifurcation, let us consider the "local", or perturbed, form of Eqn. (12):

$$\begin{aligned} (k_0 + \mu)(2\hat{u}_0 \delta_0 + \delta_0^2) + \hat{u}_0(\delta_0 + \delta_2) + \delta_0 \delta_2 \\ - N_{sub}[\hat{u}_0(\delta_1 + \delta_2) + \delta_1 \delta_2 - \delta_2] = 0 , \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$\hat{u}_n = \hat{u}_0 + \delta_0 ,$$

$$\hat{u}_{n-1} = \hat{u}_0 + \delta_1 ,$$

$$\hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0 + \delta_2 .$$

Letting  $\delta_n = \varepsilon y_n$ , where  $\varepsilon$  is a small parameter, we have

$$\begin{aligned} (k_0 + \mu)(2\hat{u}_0 y_0 + \varepsilon y_0^2) + \hat{u}_0(y_0 + y_2) + \varepsilon y_0 y_2 \\ - N_{sub}[\hat{u}_0(y_1 + y_2) + \varepsilon y_1 y_2 - y_2] = 0 . \end{aligned} \quad (24)$$

Let us now expand the following expressions

$$\mu = \mu_{(1)} \varepsilon + \mu_{(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (25a)$$

$$t = \theta \left( \frac{1}{\omega_c} + \tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2 + \dots \right) \quad (25b)$$

$$y_0 = y_{0(0)} + y_{0(1)} \varepsilon + y_{0(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (25c)$$

$$y_1 = y_{1(0)} + y_{1(1)} \varepsilon + y_{1(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (25d)$$

$$y_2 = y_{2(0)} + y_{2(1)} \varepsilon + y_{2(2)} \varepsilon^2 + \dots \quad (25e)$$

where  $\omega_c = \text{Im}(\alpha)$ .

The time stretching introduced in Eqn. (25b) implies over the delays:

$$y_{1(0)} = y_{0(0)} \left( \theta - \frac{\tau}{\omega_c^{-1} + \chi} \right) = y_{0(0)} (\theta - \tau \omega_c) +$$

$$\frac{dy_{0(0)}(\theta - \tau \omega_c)}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \chi + \frac{dy_{0(0)}(\theta - \tau \omega_c)}{d\chi^2} \Big|_{\chi=0} \chi^2 + \dots , \quad (26a)$$

$$y_{2(0)} = y_{0(0)} \left( \theta - \frac{2\tau}{\omega_c^{-1} + \chi} \right) = y_{0(0)} (\theta - 2\tau \omega_c) +$$

$$\frac{dy_{0(0)}(\theta - 2\tau \omega_c)}{d\chi} \Big|_{\chi=0} \chi + \frac{dy_{0(0)}(\theta - 2\tau \omega_c)}{d\chi^2} \Big|_{\chi=0} \chi^2 + \dots , \quad (26b)$$

where  $\chi = \tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2 \dots$

Forehand, we redefine

$$y_{1(0)} = y_{0(0)} (\theta - \tau \omega_c) , \quad (27a)$$

$$y_{2(0)} = y_{0(0)} (\theta - 2\tau \omega_c) . \quad (27b)$$

By combining Eqns. (24) to (26) we obtain:

$$L_0(y_{n(0)}) = 0, \quad (28a)$$

$$L_0(y_{n(1)}) = S_{(1)}, \quad (28b)$$

$$L_0(y_{n(2)}) = S_{(2)}. \quad (28c)$$

The derivation of functions  $L_0$  and  $S_{(l)}$  is shown in the Appendix.

We are looking for a periodic solution (with period  $2\pi$ ), which imposes the following orthogonality condition:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_{n(1)} e^{-j\theta} d\theta = 1. \quad (29)$$

Recall that,  $\delta_n = \varepsilon y_n = \varepsilon (y_{n(0)} + y_{n(1)} \varepsilon + y_{n(2)} \varepsilon^2 + \dots)$ , thus Eqn.(29) implies

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_n e^{-j\theta} d\theta = 1. \quad (30)$$

The necessary and sufficient condition for Eqns. (28) to have a periodic solution is the so-called "Fredholm alternative" condition:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_{(l)} e^{-j\theta} d\theta = 1. \quad (31)$$

A (real) solution which satisfies Eqns. (28a) and (29) is

$$y_{0(0)} = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}), \quad (32)$$

which together with Eqns.(26) determine the delayed solutions  $y_{1(0)}$  and  $y_{2(0)}$ .

For  $l = 0$ , since  $S_{(0)} = 0$ , Eqn. (31) is trivially satisfied. For  $l = 1$ , Eqn. (31) implies

$$\begin{aligned} & -k_0 \int_0^{2\pi} y_{0(0)}^2 e^{-j\theta} d\theta - 2\hat{u}_0 \mu_{(1)} \int_0^{2\pi} y_{0(0)} e^{-j\theta} d\theta \\ & + \hat{u}_0 \tau_{(1)} \left( N_{sub} \int_0^{2\pi} \frac{dy_{1(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{dy_{2(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta \right) \\ & - \int_0^{2\pi} y_{0(0)} y_{2(0)} e^{-j\theta} d\theta + N_{sub} \int_0^{2\pi} y_{1(0)} y_{2(0)} e^{-j\theta} d\theta = 0. \quad (33) \end{aligned}$$

Combining Eqns. (26a,b), (27a,b), and (32), we have,

$$\int_0^{2\pi} y_{0(0)}^2 e^{-j\theta} d\theta = 0, \quad (34a)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi, \quad (34b)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_{1(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = -\pi \tau \omega_c^2 j, \quad (34c)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dy_{2(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta = -2\pi \tau \omega_c^2 j, \quad (34d)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(0)} y_{2(0)} e^{-j\theta} d\theta = 0, \quad (34e)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{1(0)} y_{2(0)} e^{-j\theta} d\theta = 0. \quad (34f)$$

Hence, from Eqns.(33) and (34) we obtain  $\mu_{(1)} = \tau_{(1)} = 0$ . For  $l = 2$ , Eqn.(28c), together with  $\mu_{(1)} = \tau_{(1)} = 0$ , implies

$$\begin{aligned} & -2k_0 \int_0^{2\pi} y_{0(0)} y_{1(0)} e^{-j\theta} d\theta - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} \int_0^{2\pi} y_{0(0)} e^{-j\theta} d\theta \\ & - \int_0^{2\pi} (y_{0(0)} y_{2(1)} + y_{0(1)} y_{2(0)}) e^{-j\theta} d\theta - [\hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0)] \tau_{(2)} \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{dy_{2(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta + N_{sub} \hat{u}_0 \tau_{(2)} \int_0^{2\pi} \frac{dy_{1(0)}}{d\chi} e^{-j\theta} d\theta \\ & + N_{sub} \int_0^{2\pi} (y_{1(1)} y_{2(0)} + y_{2(1)} y_{1(0)}) = 0. \quad (35) \end{aligned}$$

Let us introduce a (real) solution for  $y_{0(1)}$ , which satisfies Eqns.(31) and (35), that is

$$y_{0(1)} = a + b e^{j\theta} + \bar{b} e^{-j\theta} + c e^{2j\theta} + \bar{c} e^{-2j\theta}. \quad (36)$$

In Eqn.(36) the parameter  $a$  is real, and  $b$  and  $c$  are complex. The corresponding delayed magnitudes are:

$$y_{1(0)} = a + b e^{j(\theta - \tau \omega_c)} + \bar{b} e^{-j(\theta - \tau \omega_c)} + c e^{2j(\theta - \tau \omega_c)} + \bar{c} e^{-2j(\theta - \tau \omega_c)} \quad (37a)$$

$$y_{2(0)} = a + b e^{j(\theta - 2\tau \omega_c)} + \bar{b} e^{-j(\theta - 2\tau \omega_c)} + c e^{2j(\theta - 2\tau \omega_c)} + \bar{c} e^{-2j(\theta - 2\tau \omega_c)} \quad (37b)$$

Using Eqns. (33), (36) and (37) we can calculate:

$$\int_0^{2\pi} y_{0(1)} y_{0(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a + c), \quad (38a)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{2(1)} y_{0(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a + c e^{-4\tau \omega_c j}), \quad (38b)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{1(1)} y_{2(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-4\tau \omega_c j} + c), \quad (38c)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{2(1)} y_{1(0)} e^{-j\theta} d\theta = \pi(a e^{-\tau \omega_c j} + c e^{-3\tau \omega_c j}), \quad (38d)$$

$$\int_0^{2\pi} y_{0(i)} y_{2(i)} e^{-j\theta} d\theta = \pi (a e^{-2\tau\omega_c j} + c e^{2\tau\omega_c j}) \quad (38e)$$

Replacing Eqns. (34c,d) and (38) in (35), we get for the Fredholm condition over  $l = 2$ :

$$\begin{aligned} & -2k_0(a+c) - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} - (a + c e^{-4\tau\omega_c j}) + N_{sub} (a e^{-2\tau\omega_c j} + c) \\ & + N_{sub} (a e^{-2\tau\omega_c j} + c e^{-3\tau\omega_c j}) - (a e^{-2\tau\omega_c j} + c e^{2\tau\omega_c j}) \\ & + \{-2[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)]e^{-2\tau\omega_c j} + N_{sub}\hat{u}_0 e^{-\tau\omega_c j}\} \tau\omega_c^2 \tau_{(2)} j = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

The  $a$  and  $c$  coefficients can be calculated combining Eqns. (36) and (28b), which gives:

$$a = - \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{N_{sub} - N_{sub}\hat{u}_0}{\hat{u}_0} \right) + \frac{1}{4} [(e^{2\tau\omega_c j} + e^{-2\tau\omega_c j}) - N_{sub}(e^{\tau\omega_c j} + e^{-\tau\omega_c j})]}{[2(N_{sub} + \hat{u}_0) - 3N_{sub}\hat{u}_0]} \quad (40a)$$

$$c = \frac{\left( \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0)}{8\hat{u}_0} \right) e^{2\tau\omega_c j} + \frac{1 - N_{sub}e^{-\tau\omega_c j}}{4}}{N_{sub}\hat{u}_0 - 2(\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)) \cos(2\tau\omega_c)} \quad (40b)$$

Combining Eqns.(39) and (40) the following analytical expression for the  $\mu_{(2)}$  coefficient is obtained:

$$\begin{aligned} 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} = & - \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0)}{\hat{u}_0} (a+c_1) - c_1 (Re^4 - 6Re^2 Im^2 + Im^4) - a \\ & + 4c_2 (Re^3 Im - Re Im^3) + N_{sub} a (Re^2 - Im^2) + N_{sub} (c_1 + a Re) \\ & + N_{sub} c_1 (Re^3 - 3Re Im^2) - N_{sub} c_2 (3Re^2 Im - Im^3) - 2c_2 Re Im \\ & - (a+c_1)(Re^2 - Im^2) - Im \{ N_{sub} \hat{u}_0 - 4Re[\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)] \} \\ & \left[ \frac{N_{sub}(1-\hat{u}_0)c_2}{\hat{u}_0} - N_{sub} c_2 - N_{sub} c_1 (3Re^2 Im - Im^3) - aN_{sub} Im \right. \\ & \left. - N_{sub} c_2 (Re^3 - 3Re Im^2) + 4c_1 (Re^3 Im - Re Im^3) + c_2 (Re^2 - Im^2) \right. \\ & \left. + c_2 (Re^4 - 6Re^2 Im^2 + Im^4) + 2(a-c_1) Re Im - 2aN_{sub} Re Im \right] / \\ & \{ N_{sub} \hat{u}_0 Re - [\hat{u}_0 + N_{sub}(1-\hat{u}_0)] 2(Re^2 - Im^2) \} \equiv f(N_{sub}, \hat{u}_0). \end{aligned} \quad (41)$$

In Eqn.(41),  $c$  was separated in its real and imaginary parts as  $c = c_1 + j c_2$ .

## 5. Analysis and discussion of results

Equation (41) constitutes an important result concerning the non-linear properties of the delay model of boiling channel dynamics presented in this paper. In first place, the sign of  $\mu_{(2)}$  determines the character of the bifurcation. Since  $Re[\partial\alpha(\mu=0)/\partial\mu] < 0$ , the criterion is:

$$\begin{aligned} \mu_{(2)} > 0 & \Rightarrow \text{subcritical bifurcation} \\ \mu_{(2)} < 0 & \Rightarrow \text{supercritical bifurcation} \end{aligned}$$

Under subcritical conditions, the system is unstable to the excitation of any amplitude in the linear instability region. Moreover, it is also unstable in some region of linear stability for large enough amplitude excitations. On the other hand a supercritical system is always stable in the region of linear stability and exhibits bounded periodic solutions (limit cycles) in some region of linear instability (Lahcy, 1986). Figure 3 shows the map of critical and supercritical regions in the parameter plane  $(k, \hat{u}_0)$ . The singular condition for which  $\mu_{(2)} = 0$ , represents the transcritical point where the system switches from subcritical to supercritical. This is determined by a curve in the parameter space  $(N_{sub}, \hat{u}_0)$  given by:

$$f(N_{sub}, \hat{u}_0) = 0. \quad (42)$$

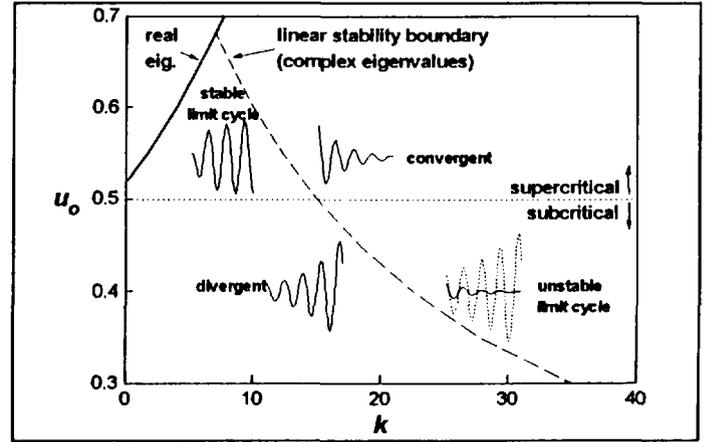


Figure 3. Nonlinear Behaviors ( $N_{sub} = 30$ ).

Equation (42) was numerically solved and shown in Fig.4. It can be seen that for large subcooling numbers the character of the bifurcation is determined only by the value of  $\hat{u}_0$ . It is possible to verify that:

$$\lim_{\substack{\hat{u}_0 \rightarrow 1/2 \\ N_{sub} \rightarrow \infty}} f(N_{sub}, \hat{u}_0) = 0.$$

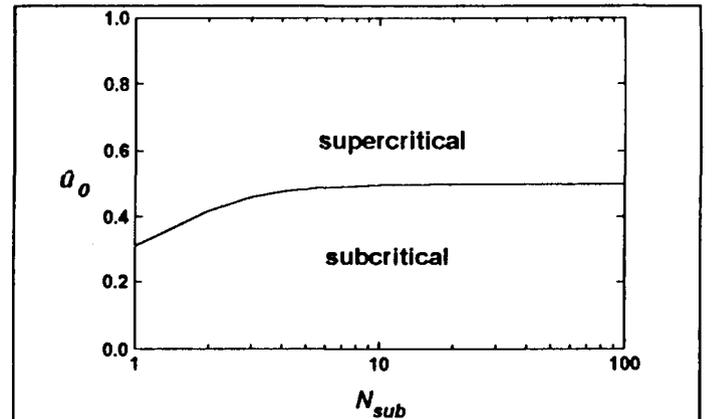


Figure 4. Character of the Hopf bifurcation.

Another application of Eqn. (41) is the calculation of the amplitude of the limit cycles (when supercritical bifurcations occur), or alternatively the size of the minimum perturbation which triggers instabilities within the linear stable domain (when subcritical bifurcations occur). Taking only the lower order term, Eqns.(25) yield:

$$\mu = \mu_{(2)} \varepsilon^2, \quad (43a)$$

$$\theta = \omega_c t, \quad (43b)$$

$$y_0 = y_{0(t)} = \cos \theta, \quad (43c)$$

$$\delta_0 = \varepsilon y_0. \quad (43d)$$

Combining Eqns. (41) and (43), the relative amplitude of the perturbation can be related with the departure of  $k$  from the linear limit,  $k_0$ , that is:

$$\frac{\|\delta_0\|^2}{\hat{u}_0^2} = \frac{1}{R} \left( \frac{\mu}{k_0} \right), \quad (44)$$

where  $R$  is defined as:

$$R = \frac{\hat{u}_0^2}{N_{sub}(1-\hat{u}_0)} f(N_{sub}, \hat{u}_0). \quad (45)$$

The significance of  $R$  can be deduced from Eqn. (44). For subcritical bifurcations ( $R > 0$ ), the higher the value of  $R$ , the lower is the perturbation required to destabilize a linearly stable condition. Therefore, in stable regions where  $R$  is high, especial attention should be given to the response of the system to finite amplitude perturbations. On the other hand, for supercritical bifurcations ( $R < 0$ ), the lower the value of  $R$ , the smaller is the amplitude of the limit cycles. Therefore, in unstable regions where  $R$  is low, the response of the system could be acceptable for design, for the oscillations might remain within controllable ranges. In general  $R$  can be viewed as a "risk" indicator, in the sense that higher  $R$  implies more dangerous situations.

Figure 5 shows the dependence of  $R$  with  $N_{sub}$  for different  $\hat{u}_0$ . It can be observed that for large  $N_{sub}$  the factor depends only on  $\hat{u}_0$ . Figure 6 shows the contour map of  $R$  in the parameter space ( $\hat{u}_0, N_{sub}$ ). The supercritical region, corresponding to negative  $R$ , is bounded in the upper part by the Ledinegg boundary (real eigenvalues), where only excursive instabilities occur. In the subcritical region  $R$  reaches a maximum as  $\hat{u}_0$  is reduced. In both cases it can be observed that, for larger  $N_{sub}$ ,  $R$  tends to be only function of  $\hat{u}_0$ . This limit was calculated analytically and it is depicted in Fig. 7. There are two interesting values to realize:

- $\max(R) = 0.201$ , occurring at  $\hat{u}_0 = 0.211$ .
- $\lim_{\substack{\hat{u}_0 \rightarrow 0 \\ N_{sub} \rightarrow \infty}} R = 0.1875$ .

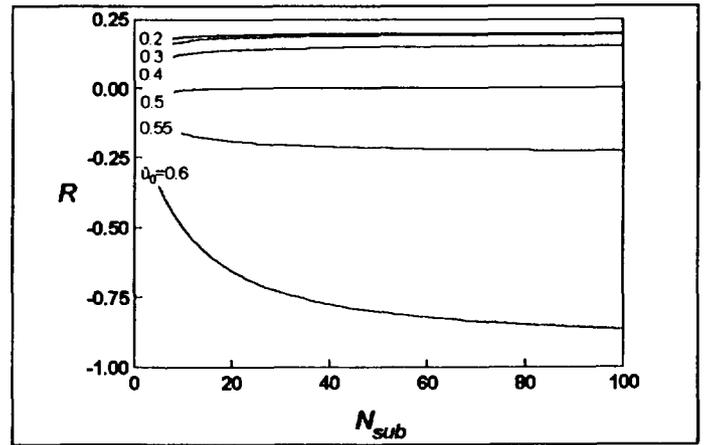


Figure 5. Risk indicator function.

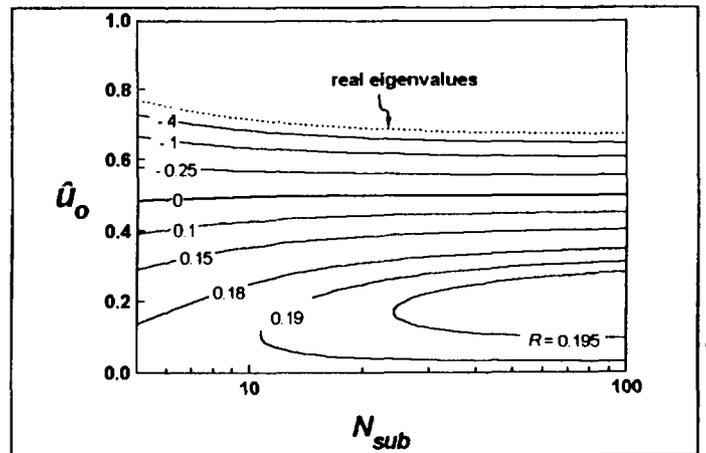


Figure 6. Contour map of  $R$ .

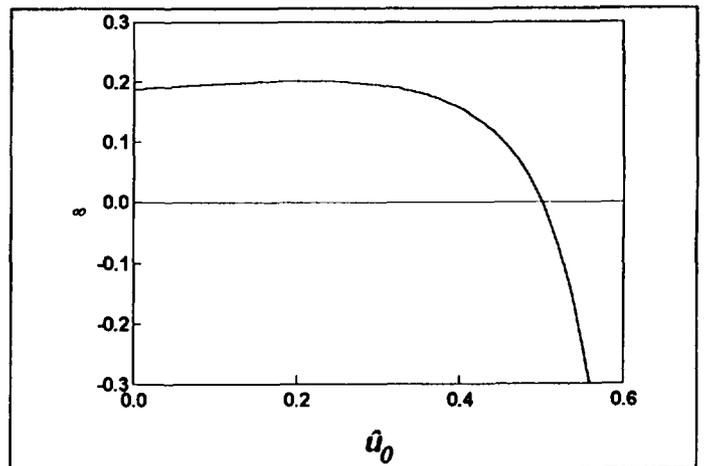


Figure 7. Risk indicator function for large  $N_{sub}$ .

It can be seen that the root ( $R = 0$ ) is located at  $\hat{u}_0 = 0.5$ .

Figure 8 shows the contour map of  $R$  in the plane ( $N_{pch}, N_{sub}$ ) which are the characteristic parameters used in linear stability graphics of boiling channels. The map of  $R$  can be applied as a warning indicator in those linearly stable regions where subcriticality is likely to occur.

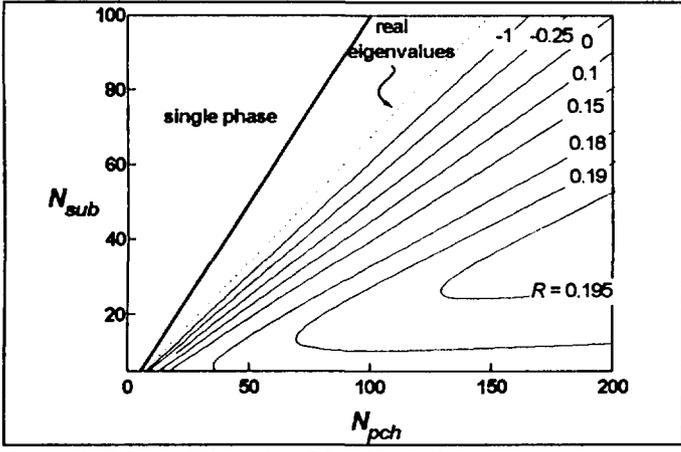


Figure 8. Map of  $R$  in the  $(N_{sub}, N_{pch})$  plane.

## 6. Conclusions

A mathematical model of boiling channels dynamics based in delay equations was derived from the homogeneous two-phase flow conservation equations. A two dimensional mapping results from the assumption of constant transport delays along the channel. The stability of the discrete dynamics was analyzed by linearly perturbing about the steady-state. Oscillatory and excursive solutions were found, corresponding to density-waves and Ledinegg instabilities.

The character of the oscillatory instabilities was studied using Hopf perturbation methods. The analysis leads to the identification of subcritical and supercritical bifurcations. It was possible to describe the non-linear behavior of the system using a "risk" function, which provide a measure of the amplitude of the limit cycles (either stable or unstable).

## 7. Appendix

By combining Eqns. (24) to (26) we obtain:

$$\begin{aligned} & (k_0 + \mu_{(1)} \varepsilon + \mu_{(2)} \varepsilon^2 + \dots) \left[ 2\hat{u}_0 (y_{0,(0)} + y_{0,(1)} \varepsilon + y_{0,(2)} \varepsilon^2 + \dots) \right. \\ & + \varepsilon (y_{0,(0)}^2 + 2\varepsilon y_{0,(0)} y_{0,(1)} + \dots) \left. \right] + \hat{u}_0 (y_{0,(0)} + y_{0,(1)} \varepsilon + y_{0,(2)} \varepsilon^2 + \dots) \\ & + \hat{u}_0 \left[ y_{2,(0)} + \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2) + \frac{d^2 y_{2,(0)}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \varepsilon^2 + y_{2,(1)} \varepsilon \right. \\ & \left. + \frac{dy_{2,(1)}}{d\chi} \tau_{(1)} \varepsilon^2 + y_{2,(2)} \varepsilon^2 + \dots \right] + \varepsilon (y_{0,(0)} + y_{0,(1)} \varepsilon + y_{0,(2)} \varepsilon^2 + \dots) \\ & \left[ y_{2,(0)} + \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \dots) + y_{2,(1)} \varepsilon + \dots \right] - N_{sub} \hat{u}_0 \left[ y_{1,(0)} + y_{1,(1)} \varepsilon + \dots \right. \\ & \left. \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2) + \frac{d^2 y_{1,(0)}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \varepsilon^2 + \frac{dy_{1,(1)}}{d\chi} \tau_{(1)} \varepsilon^2 + y_{1,(2)} \varepsilon^2 + \dots \right] \\ & + N_{sub} \left[ y_{2,(0)} + \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \tau_{(2)} \varepsilon^2) + \frac{d^2 y_{2,(0)}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \varepsilon^2 + y_{2,(1)} \varepsilon + \frac{dy_{2,(1)}}{d\chi} \tau_{(1)} \varepsilon^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + y_{2,(2)} \varepsilon^2 + \dots \left] (1 - \hat{u}_0) - N_{sub} \varepsilon \left[ y_{1,(0)} + \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \dots) + y_{1,(1)} \varepsilon + \dots \right] \\ & \times \left[ y_{2,(0)} + \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} (\tau_{(1)} \varepsilon + \dots) + y_{2,(1)} \varepsilon + \dots \right] = 0. \quad (46) \end{aligned}$$

Collecting like powers of  $\varepsilon$ , we get the following system of equations:

( $\varepsilon^0$ ):

$$(2k_0 + 1) \hat{u}_0 y_{0,(0)} + \hat{u}_0 y_{2,(0)} + N_{sub} \left[ (1 - \hat{u}_0) y_{2,(0)} - \hat{u}_0 y_{1,(0)} \right] = 0, \quad (47a)$$

or,  $L_0(y_{n(0)}) = 0$ .

( $\varepsilon^1$ ):

$$\begin{aligned} & (2k_0 + 1) \hat{u}_0 y_{0,(1)} - N_{sub} \hat{u}_0 y_{1,(1)} + \left[ \hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0) \right] y_{2,(1)} = \\ & -k_0 y_{0,(0)}^2 - 2\hat{u}_0 \mu_{(1)} y_{0,(0)} - y_{0,(0)} y_{2,(0)} + N_{sub} y_{1,(0)} y_{2,(0)} \\ & + \hat{u}_0 \left( N_{sub} \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} - \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} \right) \tau_{(1)}, \quad (47b) \end{aligned}$$

or,  $L_0(y_{n(1)}) = S_{(1)}$ .

( $\varepsilon^2$ ):

$$\begin{aligned} & (2k_0 + 1) \hat{u}_0 y_{0,(2)} + \left[ \hat{u}_0 + N_{sub} (1 - \hat{u}_0) \right] y_{2,(2)} - N_{sub} \hat{u}_0 y_{1,(2)} = \\ & -2k_0 y_{0,(0)} y_{0,(1)} - 2\hat{u}_0 \mu_{(2)} y_{0,(0)} - \mu_{(1)} (2\hat{u}_0 y_{0,(1)} + y_{0,(0)}^2) \\ & - \hat{u}_0 \left( \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} \tau_{(2)} + \frac{d^2 y_{2,(0)}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 + \frac{dy_{2,(1)}}{d\chi} \tau_{(1)} \right) - y_{2,(0)} y_{0,(1)} \\ & + N_{sub} \hat{u}_0 \left( \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} \tau_{(2)} + \frac{dy_{1,(1)}}{d\chi} \tau_{(1)} + \frac{d^2 y_{1,(0)}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 \right) \\ & - y_{0,(0)} \left( \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} \tau_{(1)} + y_{2,(1)} \right) + N_{sub} y_{2,(0)} \left( \frac{dy_{1,(0)}}{d\chi} \tau_{(1)} + y_{1,(1)} \right) \\ & + N_{sub} y_{1,(0)} \left( \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} \tau_{(1)} + y_{2,(1)} \right) \\ & - N_{sub} (1 - \hat{u}_0) \left( \frac{dy_{2,(0)}}{d\chi} \tau_{(2)} + \frac{d^2 y_{2,(0)}}{d\chi^2} \tau_{(1)}^2 + \frac{dy_{2,(1)}}{d\chi} \tau_{(1)} \right), \quad (47c) \end{aligned}$$

or,  $L_0(y_{n(2)}) = S_{(2)}$ .

In general,  $L_0(y_{n(l)}) = S_{(l)}$ . Note that while the form of  $L_0(y_{n(l)})$  stays the same,  $S_{(l)}$  increases in complexity greatly for  $l \geq 2$ .

## 8. Nomenclature

$E_u$	Euler number, $(\Delta p / \rho_f u_r^2)$ ,
$f$	function defined in Eqn. (41),
$h$	specific enthalpy,

$h_{fg}$	$h_g - h_f$
$k_i$	inlet restriction coefficient,
$k_e$	exit restriction coefficient,
$k$	$(k_i - 1)/(k_e + 1)$
$j$	imaginary unit,
$L_{ch}$	heated channel length,
$N_{pch}$	phase change number, $(\Omega L_{ch} / u_o)$ ,
$N_{sub}$	subcooling number, $(\Omega v)$ ,
$p$	pressure,
$q$	volumetric power,
$q''$	heat flux,
$R$	risk factor (defined in Eqn.(45)),
$t$	time,
$u$	velocity,
$v$	specific volume,
$v_{fg}$	$v_g - v_f$ ,
$z$	space coordinate.

#### Greek

$\delta$	velocity perturbation,
$\epsilon$	small parameter,
$\lambda$	boiling boundary position,
$\rho$	density,
$\nu$	liquid phase particle time,
$\tau$	two-phase particle time,
$\Omega$	$q v_{fg} / h_{fg}$ .

#### Subscripts

e	exit,
f	liquid (saturation),
g	vapour,
i	inlet,
n	time step,
l	term order,
o	steady state,
r	reference.

#### Other

$\wedge$	dimensionless.
----------	----------------

#### References

- Achard J. L., D. A. Drew and R. T. Lahey, "The analysis of non-linear density-wave oscillations in boiling channels", *J. Fluid Mech.* **155**, 213-232 (1985).
- Clausse A., D. F. Delmastro and L. Juanicó, "A simple delay model for two-phase flow dynamics", *NUREG-CP-0142*, **4**, 3232-3244, *NURETH-7 Conference*, Saratoga Springs, (1995).
- Clausse A., D. F. Delmastro and L. Juanicó, "A simple delay model for the dynamics of boiling channels", *Latin Am. Applied Research* **26**, 185-191 (1996).
- Lahey R.T., "Advances in the analytical modelling of linear and non-linear density-wave instability modes", *Nuc. Eng. and Design* **95**, 5-34 (1986).
- Lahey R.T. and D.A. Drew, "An Assessment of the Literature Related to LWR Instability Modes", *NUREG Report*, *NUREG/CR-1414* (1980).
- Lahey R.T. and F.J. Moody, "The Thermal hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor", *ANS Monograph*, (1977).
- Peng, S.J., M.Z. Podowsky and R.T. Lahey, "BWR Linear stability analysis", *Nuc. Eng. and Design* **93**, 25-37 (1986).
- Rizwan-Uddin and J.J. Dorning, "A chaotic attractor in a periodically forced two-phase flow system", *Nucl. Sci. Eng.* **100**, 393-404 (1988).
- Taleyarkhan, R, M. Podowski and R. Lahey, "The development of a nodal method for the stability analysis of ventilated boiling channels", *2nd. Int. Topical Meet. on Nucl. Reactor Thermalhydraulics*, Sta. Barbara, California (January 1983).
- Xiao, M., X.J. Chen, M.Y. Zhang,, T.N. Verizoglu, and S. Kokac, "A multivariable linear investigation of two-phase flow instabilities in parallel boiling channels under high pressure", *Int. J. Multiphase Flow* **19**, 65-77 (1993).

# A SIMPLE DELAY MODEL FOR TWO-PHASE FLOW DYNAMICS

A. Clause, D.F. Delmastro and L.E. Juanicó  
Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Argentina

## Abstract

A model based in delay equations for density-wave oscillations is presented. High Froude numbers and moderate ones were considered. The equations were numerically analyzed and compared with more sophisticated models. The influence of the gravity term was studied. Different kinds of behavior were found, particularly sub-critical and super-critical Hopf bifurcations. Moreover the present approach can be used to better understand the complicated dynamics of boiling flows systems.

## 1. Introduction

The phenomenon of density-wave instabilities in boiling channels has been extensively studied during the last 30 years [1]. These oscillations may be encountered for certain operating conditions of boiling system, in which they become unstable due to lags in the phasing of the pressure-drop feedback mechanisms. Perturbations at the inlet of the channel move with the fluid, yielding transport delays in the local changes of state variables. Given the appropriate set of operating conditions, these delays may lead to self-excitation.

The most common manifestations of density-wave instabilities are self-sustained oscillations of the flow variables. The amplitudes of these oscillations can be very large, and can lead to flow reversals (that is, negative inlet velocities). It may also happen that these oscillations can cause the system to reach the point of excursive instability [2].

Density-wave instabilities in boiling system, besides being scientifically interesting, have serious practical implications for many industries. Boiling water nuclear reactors (BWRs), steam generators, phase-change heat exchangers and various chemical-process equipment, are potential candidates to experience density-wave instability.

The classical tool which has been used to study the problem of density-wave instability in boiling systems is the linear frequency-domain analysis. Rather accurate and reliable models are now available for the stability analysis of complicated systems, such as BWRs [3,4].

The study of the nonlinear behaviour of density-wave instabilities has attracted considerable interest recently. Hopf-bifurcation techniques have been used to study the amplitude and frequency of oscillations [5]. In addition, numerical time-domain analyses were performed [6], where a chaotic attractor was found for periodically forced flows.

On the other hand, not much research work has been focused on the influence of the gravitational term in the stability of two-phase boiling flows [7]. The gravitational effect would be of interest for new reactors designed to work by natural circulation.

In this paper a simple model of density-wave oscillations based in delay equations is presented. The present approach consider gravity neglectable system as much as non neglectable ones. Solutions are compared with results from more sophisticated models, showing good agreement. Different kinds of behavior were found, particularly sub-critical and super-critical Hopf bifurcations.

## 2. Boiling channel model

Let us consider the boiling channel shown in Fig.1. The liquid enters at constant subcooled temperature and is heated up uniformly along the channel. At certain location the fluid reaches its saturation temperature and starts to boil, exiting the channel as a two-phase mixture.

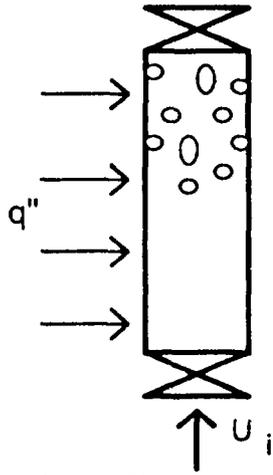


Fig. 1. Boiling channel

The following assumptions have been made in the modeling of the two-phase flow :

- The flow is homogeneous (that is, no phasic slip occurs).
- The system pressure is constant.
- The heat flux is constant in space and time.
- Both phases are incompressible.
- The phases are in thermodynamic equilibrium.
- Viscous dissipation and internal heat generation are neglected in the energy equation.
- Friction losses are concentrated at the inlet and the exit of the channel.

In the hypotheses above, the one-dimensional conservation equations of mass and energy can be written as:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u)}{\partial z} = q \quad (1b)$$

Moreover, enthalpy and density are related by the following equation of state:

$$\rho = \rho_f \quad \text{for } h \leq h_f \quad (2a)$$

$$\rho = \left[ v_f + \frac{(h - h_f)}{h_{fg}} v_{fg} \right]^{-1} \quad \text{for } h > h_f \quad (2b)$$

Combining Eqs.(1b) and (2b) for the two-phase region gives:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = q \frac{v_{fg}}{h_{fg}} \equiv \Omega \quad (3a)$$

Similarly in the single phase region, we have:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3b)$$

Integrating Eqs.(3) along the channel leads to:

$$u_e = u_i + \Omega(L - \lambda) \quad (4)$$

Where the subcooled length,  $\lambda(t)$ , is defined by

$$\lambda(t) = \int_{t-v}^t u_i(t') dt' \quad (5)$$

Here  $v$  is the time needed by a fluid particle at the inlet of the channel to reach saturation temperature:

$$v = \frac{\Delta h_{sub} \rho_f}{q} \quad (6)$$

For low frequencies the subcooled length can be written as:

$$\lambda(t) = \int_{t-v}^t u_i(t') dt' = v u_i(t - t_1) \quad (7)$$

In Eqn.(7),  $t_1$  is a delay time such that  $0 < t_1 < v$ .

Assuming a quasi-static balance of forces in the momentum equation the external pressure head is then balanced by the friction, gravity and acceleration forces, that is

$$(k_i - 1)\rho_f u_i^2 + (k_e + 1)\rho_e u_e^2 + \frac{M_{ch} g}{A_m} = \Delta p \quad (8)$$

Following the quasi-static approximation it can be assumed that the exit flow follows the history of the inlet flow [8] that is:

$$\rho_e(t) u_e(t) = \rho_f u_i(t - t_2) \quad (9)$$

where  $t_2$  is a certain transport delay which will be considered constant. Assuming an enthalpy linear profile along the two-phase region, the exit density,  $\rho_e$ , the boiling boundary,  $\lambda$ , and the channel mass,  $M_{ch}$ , are related [9] by:

$$M_{ch} = A_m \rho_f \left[ \lambda + \frac{(L - \lambda) \ln(\rho_f / \rho_e)}{(\rho_f / \rho_e - 1)} \right] \quad (10)$$

Combining Eqs.(4), (7), (9) and (10) gives:

$$M_{ch} = A_{xs} \rho_f \left[ vu(t-t_1) + \frac{(L - vu(t-t_1)) u(t-t_2) \ln \left( \frac{u(t) + \Omega(L - v\hat{u}(t-t_1))}{\hat{u}(t-t_2)} \right)}{u(t) + \Omega(L - vu(t-t_1)) - u(t-t_2)} \right] \quad (11)$$

Eqs. (8) and (11) may be combined in a delay equation relating the values of the inlet velocity,  $u_i$ , at three different times:  $t$ ,  $t-t_1$  and  $t-t_2$ , according to:

$$(k_i - 1) \rho_f u_i^2(t) + (k_s + 1) \rho_f u_i(t-t_2) [u_i(t) - \Omega v u_i(t-t_1) + \Omega L] +$$

$$+ A_{xs} \rho_f \left[ vu(t-t_1) + \frac{(L - vu(t-t_1)) u(t-t_2) \ln \left( \frac{u(t) + \Omega(L - v\hat{u}(t-t_1))}{\hat{u}(t-t_2)} \right)}{u(t) + \Omega(L - vu(t-t_1)) - u(t-t_2)} \right] = \Delta p \quad (12)$$

Putting Eqn. (12) in a nondimensional form, using the following reference values:

$$L_{ref} = L_{ch},$$

$$u_{ref} = \Omega L_{ref},$$

$$\rho_{ref} = \rho_f,$$

$$M_{ref} = A_{xs} L \rho_f$$

we obtain:

$$(k_i - 1) \hat{u}_i^2(t) + (k_s + 1) \hat{u}_i(t-t_2) [\hat{u}_i(t) - N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1) + 1] +$$

$$+ N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1) + \frac{(1 - N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1)) \hat{u}_i(t-t_2) \ln \left( \frac{\hat{u}_i(t) + N_{sub}(1 - N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1))}{\hat{u}_i(t-t_2)} \right)}{\hat{u}_i(t) + N_{sub}(1 - N_{sub} \hat{u}_i(t-t_1)) - \hat{u}_i(t-t_2)} = Eu \quad (13)$$

where the  $\hat{\quad}$  superscript means dimensionless and the Euler, Froude and subcooling number are defined as:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_r^2} \quad Fr = \frac{u_{ref}^2}{gL} \quad N_{sub} = v\Omega = \frac{\Delta h_{sub} v_{fg}}{h_{fg} v_f}$$

### 3. A Two-Dimensional Mapping of Density-Wave Instabilities

An interesting result can be reached considering  $t_1 = t_2 = \dots$

$$i+1 \hat{u}_n^2 + e-1 \hat{u}_{n-2} \hat{u}_n - N_{sub} \hat{u}_{n-1} + 1$$

$$+ \frac{1}{Fr} \left[ N_{sub} \hat{u}_{n-1} + \frac{(-N_{sub} \hat{u}_{n-1}) \hat{u}_{n-2} \ln \left( \frac{\hat{u}_n + N_{sub}(-N_{sub} \hat{u}_{n-1})}{\hat{u}_{n-2}} \right)}{\hat{u}_n + N_{sub}(-N_{sub} \hat{u}_{n-1}) - \hat{u}_{n-2}} \right] = Eu \quad (14)$$

where:

$$\begin{aligned}\hat{u}_n &= \hat{u}_i(t), \\ \hat{u}_{n-1} &= \hat{u}_i(t-\tau), \\ \hat{u}_{n-2} &= \hat{u}_i(t-2\tau).\end{aligned}$$

This is reasonable if the two-phase residence time, *i.e.* the time that a particle needs to travel along the boiling region, is smaller than  $v$ .

### 3.1 High Froude Numbers.

For high Froude numbers the gravity term can be neglected. For this case, simple solutions can be obtained in the linear stability analysis.

#### 3.1.1 Fixed Points.

The fixed points of the two-dimensional map given by Eqn.(14), can be obtained by making  $\hat{u}_n = \hat{u}_{n-1} = \hat{u}_{n-2} = \hat{u}_0$ , that is:

$$\hat{u}_0 = \frac{u_0}{\Omega L_{ch}} = \frac{1}{N_{pch}} = \frac{-(k_e + 1) \pm \sqrt{(k_e + 1)^2 + 4Eu(k_i - 1 + k_e(1 - N_{sub}))}}{2(k_i - 1 + (k_e - 1)(1 - N_{sub}))} \quad (15)$$

where  $N_{pch}$  is well known in the literature as the "phase change number".

This equation gives different kind of solutions depending on the subcooling number.

If

$$N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} \quad (16)$$

there are two real fixed points, one positive and one negative.

If

$$\frac{k_i + k_e}{k_e + 1} < N_{sub} < \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (17)$$

there are two positive real solutions.

If

$$N_{sub} > \frac{k_i + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (18)$$

there are not real solutions.

#### 3.1.2 Linear Stability.

Linearizing Eqn.(14) , about a fixed point,  $\hat{u}_0$ , leads to the following characteristic equation ( written in  $\xi$  variable) :

$$\left( \frac{2k_i + k_e - 1}{k_e + 1} \right) \xi^2 - N_{sub} \xi + (1 + N_{pch} - N_{sub}) = 0 \quad (19)$$

If the eigenvalues ( $\eta, \zeta$ ) are both inside the unit circle in the complex plane the system is stable. If one of the eigenvalues is real and exceeds 1, the fixed point is a saddle node, repelling along one direction in the plane ( $\hat{u}_n, \hat{u}_{n-1}$ ). When one of the eigenvalues is a real negative less than -1 a flip bifurcation occurs. On the other hand, if the eigenvalues are

complex conjugate they can cross the complex unit cycle at an angle  $\theta$  (different from 0 or  $\pi$ ). This is called a secondary Hopf bifurcation or Niemark instability [10].

Defining the parameter:

$$k = \frac{2k_1 + k_2 - 1}{k_1 + 1} \tag{20}$$

We can express the solutions of Eqn. (19) in terms of  $k$ ,  $N_{sub}$  and  $N_{pch}$  as follows :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2k} \left[ N_{sub} \pm \sqrt{N_{sub}^2 - 4(1 + N_{pch} - N_{sub})k} \right] \tag{21}$$

Complex eigenvalues exist if:

$$N_{pch} > \frac{N_{sub}^2}{4k} + N_{sub} - 1 \tag{22}$$

In that case, a Niemark instability occurs if the module of the eigenvalues exceeds 1, which occurs for:

$$N_{pch} > N_{sub} + k - 1 \tag{23}$$

On the other hand, if the eigenvalues are real, a saddle point exist when the largest eigenvalue exceed 1, that is:

$$N_{pch} < 2N_{sub} - k - 1 \tag{24}$$

If the smallest eigenvalue is less than -1 a flip bifurcation occurs. However,  $N_{sub}$ ,  $k$  and  $(N_{pch} - N_{sub})$  are always positive in the range of physical values. Therefore, from Eqn.(21) the eigenvalues are always greater than zero, and consequently a flip bifurcation cannot exist.

The stability criteria, given by Eqns.(22),(23) and (24), are illustrated in the two-parametric plane ( $N_{sub}$ ,  $N_{pch} - N_{sub}$ ) showed in Fig.2. We can see in it, stable regions with real (a) or complex (b) eigenvalues, the Niemark instability region (c) and the saddle excursion region (d).

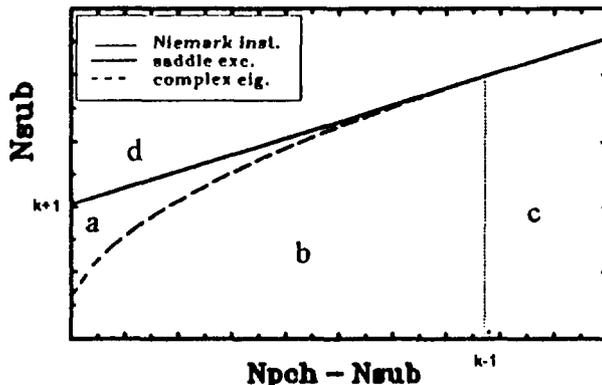


Fig.2: Linear stability map.

### 3.1.3 The Ledinegg Excursion.

Let us consider the stability of the fixed point with the minus sing,  $\hat{u}_0^-$ . Replacing Eqn. (17) in Eqn. (15) gives that there exist valid solutions of  $\hat{u}_0^-$  in the range:

$$0 < N_{pch} < 2N_{sub} - k - 1 \tag{25}$$

The upper limit of Eqn.(25) is exactly the same as the condition for saddle excursion, Eqn. (24). Therefore the point  $\hat{u}_0^-$  is always unstable and causes an excursive instability, usually known as the Ledinegg instability[2].

### 3.1.4 Density-Wave Instability.

Let us consider the stability of the fixed point of Eqn.(14) with the plus sign,  $\hat{u}_0^+$ . There are always positive solutions provided that:

$$N_{sub} > \frac{k_1 + k_e}{k_e + 1} + \frac{k_e + 1}{4Eu} \quad (26)$$

Combining Eqn. (26) with Eqn.(15) and (20) leads to :

$$N_{pch} > 2N_{sub} - k - 1 \quad (27)$$

By comparing Eqn. (24) and Eqn. (27) we can see that the point  $\hat{u}_0^+$  can never be a saddle point. The range of stable values of  $N_{pch} - N_{sub}$  are limited by the equation :

$$N_{pch} - N_{sub} = k \quad (28)$$

The system goes to a Niemark bifurcation when  $N_{pch} - N_{sub}$  exceeds  $k-1$  (remarked as the c region in Fig. 2). This instability has an oscillatory character, reflected in density waves traveling along the channel, which gives the name to the phenomena.

### 3.1.5 Stability Comparison.

Comparing the lineal stability map for this simple delay model with the complete differential model [11] and Ishii's criterion [12] we found good agreement for a wide range of subcooling numbers. Fig. 3 shows lineal stability maps obtained with each model.

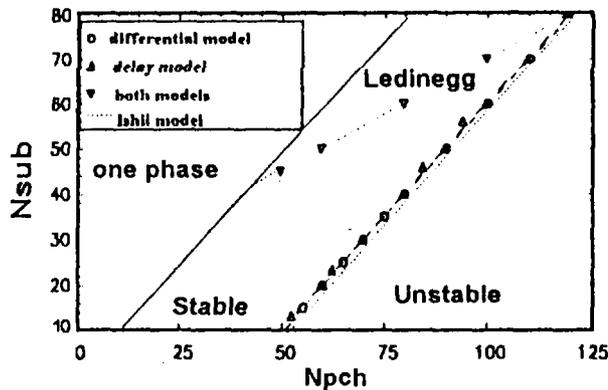


Fig. 3 Stability comparison

For low subcooling numbers, the delay model is too conservative, but it should be noted that in this region,  $t_1$  is much less than  $t_2$ , which invalidate the model hypothesis.

### 3.1.6 Non-Linear Behavior.

The iterative Eqn.(14) can be used to study the dynamical system response under unstable conditions. Two different kind of behavior for density-wave instability were found depending on the subcooling number. For high subcooling numbers a supercritical Hopf bifurcation appears. Fig. 4 illustrates a series of limit cycles appearing in the presence of a Niemark instability in the unstable region of the Fig. 3. The "nose" appearing in

the right side of the cycle for large amplitudes is due to the presence of the Ledinegg saddle point[8].

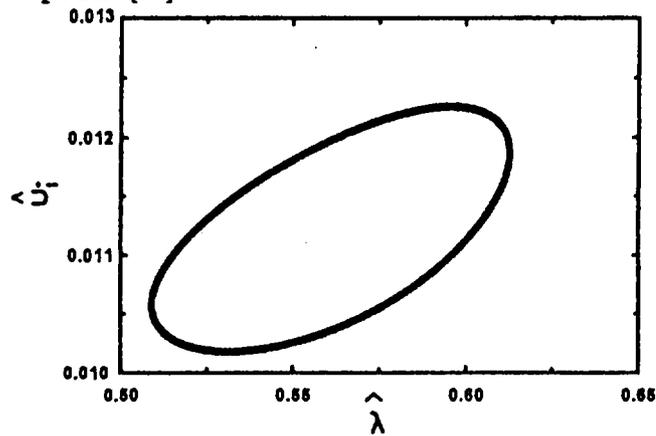


Fig. 4a Limit cycle ( $N_{\text{sub}} = 50, N_{\text{pch}} = 89.1, K_i = 40, K_e = 1$ )

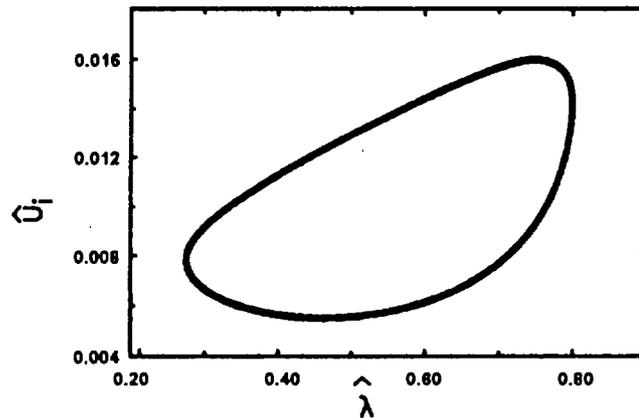


Fig.4b Limit cycle ( $N_{\text{sub}} = 50, N_{\text{pch}} = 91.1, K_i = 40, K_e = 1$ )

On the other hand, for low subcooling numbers a subcritical Hopf bifurcation appears. Figure 5 shows this kind of behavior. As can be seen for a small perturbation the system is stable but for a big one the oscillations diverge.

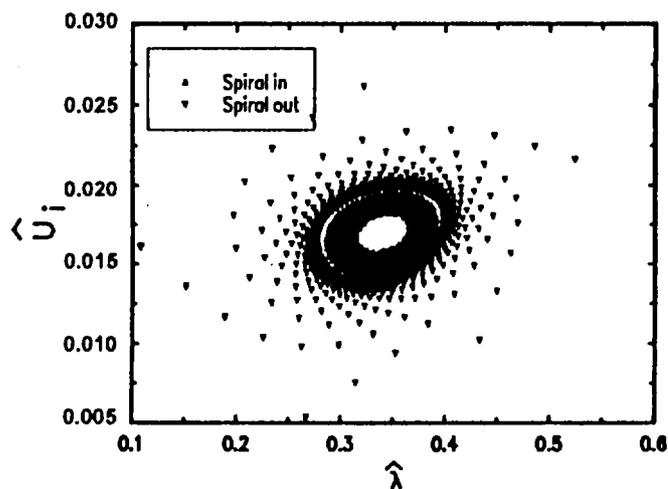


Fig. 5 Sub critical Hopf bifurcation, simple model  
( $N_{\text{sub}} = 20, N_{\text{pch}} = 58.8, K_i = 40, K_e = 1$ )

A more sophisticated model [5] was used to check the present results. Good agreement was found as can be seen in Fig. 6, where the same situation of Fig. 5 was studied.

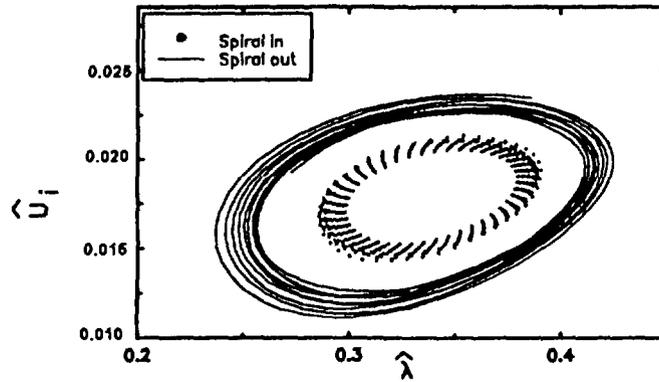


Fig. 6 Subcritical Hopf bifurcation, differential model .

For both kind of bifurcations, the amplitude of the limit cycles was studied. For the subcritical region the locus of the unstable limit cycles is shown in Fig 7. While for a perturbation inside of this conical region the system converges to the fixed point, for another outside that region, the system diverges.

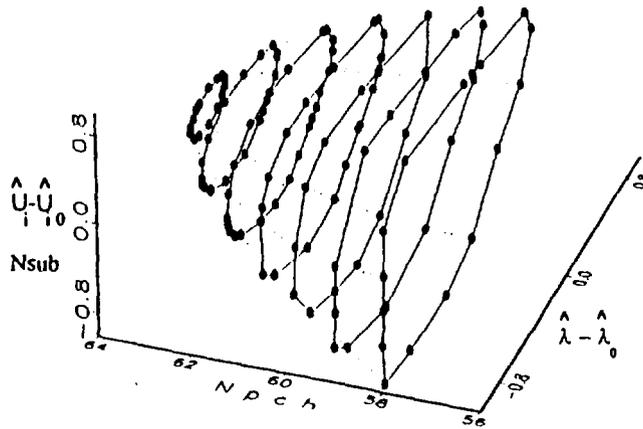


Fig 7: Stability surface of a subcritical bifurcation. ( $N_{sub} = 25, K_i = 40, K_e = 1$ ).

For the supercritical behavior the locus of stables limit cycles are shown in Fig 8. Either for a perturbation inside or outside of this conical surface, the system evolve to a stable limit cycle.

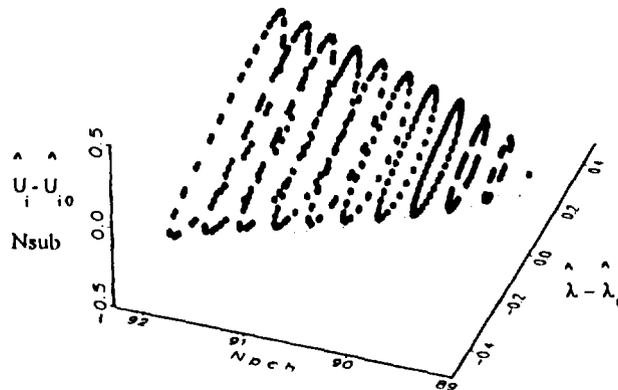


Fig. 8: Stables limit cycles locus. ( $N_{sub} = 25, K_i = 40, K_e = 1$ ).

### 3.2 Moderate Froude Numbers.

#### 3.2.1 Linear Stability.

Linearizing Eq.(14) about a fixed point,  $\hat{u}_0$ , similarly as the previous subsection, but considering now the mass term, an expression for the density-waves linear stability boundary for moderate Froude numbers can be obtained:

$$2K_1 + \frac{1}{N_{sub} Fr \alpha} = K_e (N_{pch} - N_{sub}) + \frac{\ln(\alpha N_{pch}) - 1}{N_{sub} Fr} N_{pch} + \frac{2 \ln(\alpha N_{pch})}{N_{sub} Fr \beta} \quad (29)$$

where:

$$\alpha = N_{ph}^{-1} + N_{sub} (1 - N_{sub} N_{pch}^{-1}) \quad \text{and} \quad \beta = \alpha - N_{pch}^{-1}$$

One of the most important gravity property, is its unstabilizing effect over the density-waves limit as much as the mass term increases. Fig. 9 shows these results for different Fr values. Comparing this particular behavior with differential model [11], we found qualitative agreement for high subcoolings as can be seen in Fig 9. On the other hand, an stabilizing effect over the Ledinegg limit was found.

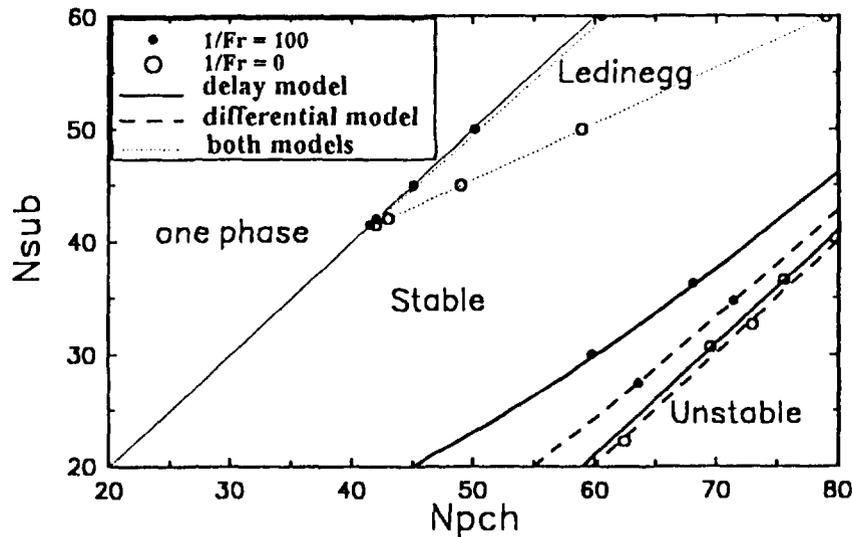


Fig. 9: Map of density-wave boundary for different gravity influence in both model.

#### 3.2.2 Nonlinear Behavior.

Another interesting result due to gravity effect, is the change of the limit cycles shape. This change appears as a clockwise rotation of the limit cycles axes when the gravity term is increased, in good agreement with complex model. Figs. 10 show this behavior.

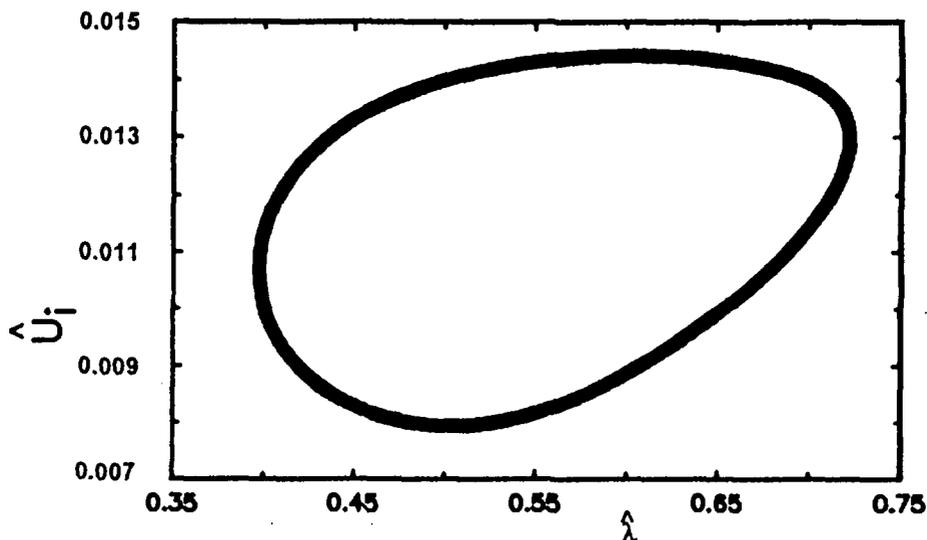


Fig. 10a Limit cycle for simple model ( $N_{sub} = 50$ ,  $N_{pch} = 88$ ,  $Fr = 0.04$ ,  $K_i = 40$ ,  $K_e = 1$ )

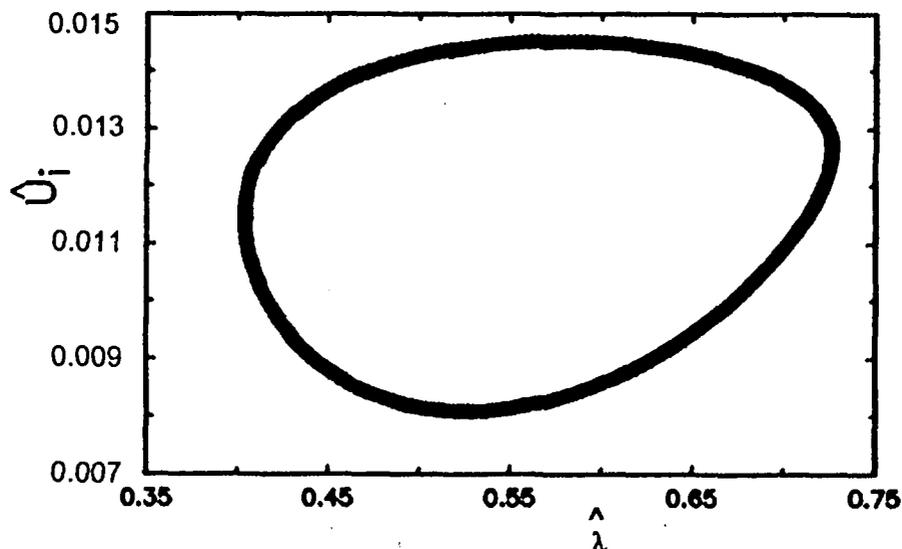


Fig. 10b Limit cycle for simple model ( $N_{sub} = 50$ ,  $N_{pch} = 87.1$ ,  $Fr = 0.025$ ,  $K_i = 40$ ,  $K_e = 1$ )

For the subcritical Hopf bifurcations these limit cycles are unstable, while for the supercritical ones, these are stable. It was also found that decreasing the Froude number, *i.e.* increasing the gravity term, the Hopf bifurcations change from super-critical to sub-critical at higher subcooling numbers. These results were compared with the ones obtained by using more sophisticated models, showing qualitative good agreement.

#### 4. Conclusions

A simple delay model based in a two-dimensional mapping was studied. The approach is useful to contribute to the understanding of density-wave instabilities. Moreover, significant computational time saving (compared with complete differential models) is an attractive quality of this simple model.

Regarding its performance, the model shows qualitative agreement with the differential treatment of the equations. For the linear stability analysis, simple expressions and good agreement were observed, for high subcoolings. Sub-critical and super-critical Hopf bifurcations were observed. This feature is similar to the behavior predicted by more complicated models.

The gravity term was modeled. Gravity influence for a wide range of Froude numbers was studied. It was found that increasing the gravity effect, *i.e.* decreasing the Froude number, has an unstabilizing effect

over the density-waves limit. On the other hand, stabilizing effect over the Ledinegg limit was found. Also related with the gravity influence, variations on the nonlinear behavior were found.

The assumptions used in this work seem to be reasonable for forced convection systems. However more studies are necessary in order to represent natural convection ones.

## 5. Nomenclature

$E_{II}$	Euler number,
$Fr$	Froude number,
$h$	specific enthalpy,
$h_{fg}$	$h_g - h_f$ ,
$k$	concentred friction constant,
$L_{ch}$	heated channel lenght,
$M_{ch}$	mass channel,
$N_{pch}$	phase change number,
$N_{sub}$	subcooling number,
$p$	pressure,
$q$	volumetric power,
$t$	time,
$u$	velocity,
$v$	specific volume,
$v_{fg}$	$v_g - v_f$ ,
$z$	space coordinate.
$\lambda$	boiling boundary position,
$\rho$	density,
$\tau$	liquid phase particle time,
$\tau$	two-phase particle time,
$\Omega$	$q v_{fg} / h_{fg}$ .

### Subscripts

e	exit,
f	liquid (saturation),
g	vapor,
i	inlet,
n	number of time step,
o	steady state,
ref	reference.

### Other

$\wedge$	non-dimensional.
----------	------------------

## 6. References

- [1] Lahey R.T., Jr. and D.A. Drew, "An Assessment of the Literature Related to LWR Instability Modes", NUREG Report, NUREG/CR- 1414, (1980).
- [2] Lahey R.T., Jr. and F.J. Moody, "The Thermal hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor", ANS Monograph, (1977).
- [3] Peng S.J., M. Z. Podowsky and R.T. Lahey Jr., "BWR Linear stability analysis", Nuclear Engineering and Design, 93 25-37 (1986).
- [4] Xiao M., X.J. Chen, M.Y. Zhang, T.N. Verizoglu and S. Kokac, "A multivariable linear investigation of two-phase flow instabilities in parallel boiling channels under high pressure", Int. J. Multiphase Flow, 19, 65-77 (1993).

- [5] Achard J.L., Drew D.A. and Lahey Jr. R.T., "The analysis of nonlinear density-wave oscillations in boiling channels", J. Fluid Mech., 155, 213-232 (1985).
- [6] Rizwan-Uddin and Dorning J.J., "A chaotic Attractor in a Periodically Forced Two-Phase Flow System", Nucl. Sci. Eng., 100, 393-404 (1988).
- [7] Achard J.L., Drew D.A. and Lahey Jr. R.T., "The effect of gravity and friction on the stability of boiling flow in a channel", Chem. Eng. Commun. 11 59-79 (1981).
- [8] Lahey R.T. Jr., Clause A and P. Dimarco, "Chaos and non-linear dynamics of density-wave instabilities in a boiling channel". In Salim B. Yilmaz, editor, Heat Transfer-Philadelphia, 256-261 (1989).
- [9] Delmastro D.F. and A. Clause, "Modelado por medio de elementos finitos moviles de la dinámica de flujos en ebullición", Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, 463-471 (1992).
- [10] Thompson J.M.T. and H.B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos", John Wiley & Sons (1986).
- [11] Delmastro D.F., Clause A and Converti J., "The influence of gravity on the stability of boiling flows", Nuclear Engrg. Des. 127, 129-139 (1991).
- [12] Tong L.S. and Weisman J. "Thermal analysis of pressurized water reactors". In The American Nuclear Society, 227-228 (1979).

# THE INFLUENCE OF THE INLET FRICTION ON BOILING CHANNELS STABILITY

Luis E. Juanicó, Dario F. Delmastro and Alejandro Clausse

Centro Atómico Bariloche and Instituto Balseiro,  
8100 Bariloche, Argentina  
E-mail: delmastro@cab.cnea.edu.ar  
Fax: 5554-944-61006

## ABSTRACT

Irreversible losses at the inlet of boiling channels usually increases the stability of the flow. In this paper a comprehensive analysis of this criterion is performed, in order to determine under which conditions the mentioned criterion is valid. It is shown that, for channels subjected to constant pressure drop, there is a region where an increase of the inlet friction actually reduces the stability of the system. Analytical expressions can be obtained using a simplified model of boiling flow dynamics based in delay equations.

## INTRODUCTION

The phenomenon of density-wave instabilities may be encountered for certain operating conditions of boiling channels, in which they become unstable due to lags in the phasing of the pressure-drop feedback mechanisms. Perturbations at the inlet of the channel move with the fluid, yielding transport delays in the local changes of state variables. Given the appropriate set of operating conditions, these delays may lead to self-excitation [1], which may have serious practical implications for many industries. Phase-change heat exchangers, various chemical-process equipment, boiling water nuclear reactors (BWRs), and steam generators, to name a few, are potential candidates to experience density-wave instability.

The most common manifestations of density-wave instabilities are self-sustained oscillations of the flow variables. The amplitudes of these oscillations can be very large, and can lead to flow reversals (that is, negative inlet velocities). It may also happen that these oscillations cause the system to reach the point of excursive instability experiencing substantial changes in the flow operating conditions. [1].

The classical tool which has been used to study the problem of density-wave instability in boiling systems is the linear frequency-domain analysis [2-4]. Rather accurate

and reliable models are now available for the stability analysis of complicated systems, such as interconnected channels in BWRs.

A rule of the art recognizes that increasing the inlet friction causes a stabilizing effect over the density-wave margins[5]. However, this rule is derived based on a family of operating conditions having equal flow rate. On the contrary, an inlet friction variation is generally coupled with other flow parameters, and consequently different effects could be expected depending on each particular situation.

In this paper the influence of the inlet friction on the linear stability is studied. Using a simple delay model of boiling channels dynamics an analytical relationship between changes in the inlet friction and stability margins were obtained for parallel channels condition.

## BOILING CHANNEL MODEL

Let us consider the boiling channel shown in Fig. 1. The liquid enters at constant subcooled temperature and is heated up uniformly along the channel. At certain location the fluid reaches its saturation temperature and starts to boil, exiting the channel as a two-phase mixture.

The following assumptions have been made in the modeling of the two-phase flow:

- The flow is homogeneous (that is, no phase slip occurs).
- The system pressure is constant.
- The heat flux is constant in space and time.
- Both phases are incompressible.
- The phases are in thermodynamic equilibrium.
- Viscous dissipation and internal heat generation are neglected in the energy equation.
- Friction is concentrated at the inlet and the exit of the channel.

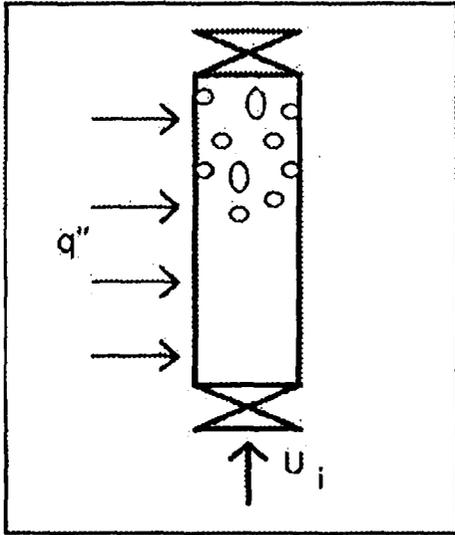


Figure 1. Boiling Channel.

In the hypotheses above, the one-dimensional conservation equations of mass and energy can be written in dimensionless form as [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u)}{\partial z} = \frac{N_{sub}}{N_{pch}} \quad (2)$$

where the subcooling and phase-change numbers,  $N_{sub}$  and  $N_{pch}$ , are defined as:

$$N_{sub} = \frac{\Delta h_{sub} v_{fg}}{h_{fg} v_f}$$

$$N_{pch} = \frac{v_{fg} q L}{h_{fg} u_0}$$

and the reference values are:

$$L_f = L_{ch}$$

$$L_r = v_f$$

$$\rho_f = \rho_f$$

$$h_r = Q/W$$

Integrating Eq. (2) along the channel together with the equation of state leads to:

$$u_e = u_i + N_{sub} (1 - A) \quad (3)$$

where the subcooled length  $\lambda(t)$  is defined by:

$$\lambda(t) = \int_{t-\tau}^t u_i(t') dt' \quad (4)$$

For low frequencies we can write:

$$\lambda(t) = \int_{t-\tau}^t u_i(t') dt' \approx u_i (t - t_1) \quad (5)$$

where  $t_1$  is a delay time such that  $0 < t_1 < 1$ .

Let us assume a quasi-static balance of forces in the momentum equation. At high Froude numbers the external pressure head is then balanced by the drag and acceleration forces, that is

$$(k_f - 1)u_f^2 + (k_p + 1)u_p^2 = Eu \quad (6)$$

where  $Eu$  is the Euler number, defined as:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f u_f^2}$$

Following the quasi-static approximation we can assume that the exit flow follows the history of the inlet flow [7] that is:

$$\rho_e(t) u_e(t) = u_i(t - t_2) \quad (7)$$

where  $t_2$  is a certain transport delay which will be considered constant.

Eqs. (3), (5), (6) and (7) may be combined in a delay equation relating the values of the inlet velocity,  $u_i$ , at three different times:  $t$ ,  $t - t_1$ , and  $t - t_2$ . Considering  $t_1 = t_2/2 = \tau$  the delay equation transforms to a two dimensional map:

$$(k_f - 1)u_n^2 + (k_p + 1)u_{n-2}^2 [u_n - N_{sub}(u_{n-1} - 1)] = Eu \quad (8)$$

where:

$$u_n = u_i(t)$$

$$u_{n-1} = u_i(t - \tau)$$

$$u_{n-2} = u_i(t - 2\tau)$$

**Steady-State Flow.** In this case the momentum conservation equation of the boiling channel reduces to:

$$[k_f - 1 + (k_p + 1)N] u_0^2 + N_{sub}(k_p + 1)u_0 = Eu \quad (9)$$

where  $u_0$  is the steady-state velocity. Solving Eq. (9) we have that:

$$u_0^2 = \frac{-N_{sub}(k_q + 1)}{2[k_1 - 1 + (k_q + 1)(1 - N_{sub})]} + \frac{\sqrt{N_{sub}^2(k_q + 1)^2 + 4k_1[k_1 - 1 + (k_q + 1)(1 - N_{sub})]}}{2[k_1 - 1 + (k_q + 1)(1 - N_{sub})]} \quad (10)$$

Eq. (10) is valid for a two-phase mixture at the exit of the channel (i.e., an exit quality,  $x_e$ , between 0 and 1). This condition is equivalent to:

$$1 \geq \rho_e \geq \frac{1}{1 + v_{fg}^2/v_f^2} \quad (11)$$

The exit density can be related to the inlet velocity by

$$\rho_e = \frac{u_0}{u_0 + N_{sub}(1 - u_0)} \quad (12)$$

Combining Eqs. (11) and (12), the range of inlet velocities for which two-phase mixture exists at the exit is:

$$\frac{N_{sub}}{N_{sub} + v_{fg}^2/v_f^2} \leq u_0 \leq 1 \quad (13)$$

The lower limit corresponds to vapor exit and the upper limit corresponds to liquid exit.

**Linear Stability Margins.** Linearizing Eq. (8) about a fixed point,  $u_0$ , and Laplace transforming, leads to the characteristic equation [8]. Hence, if the eigenvalues are complex conjugate which module exceed 1, a Niemark instability occurs. This linear stability boundary can be written as [8]:

$$u_0^{dw-1.0} = \frac{N_{sub}}{N_{sub} + 2k} \quad (14)$$

where  $k$  is the friction parameter, defined as  $k = \frac{k_f - 1}{k_c + 1}$ .

On the other hand, if the eigenvalues are real, a saddle point exists (Ledinegg instability) [8] when the largest module exceeds 1, that is:

$$u_0^{Led} = \frac{N_{sub}}{2(k + 1 - N_{sub})} \quad (15)$$

Combining Eqs. (14) and (15), the transition point for complex to real eigenvalues (on the unit circle) can be written as:

$$u_0^{dw-1.0} = \frac{2N_{sub}}{3N_{sub} - 2} \quad (16)$$

The stability criteria, given by Eqs. (14) and (15), are plotted in the parametric plane ( $u_0$ ,  $N_{sub}$ ) showed in Fig. 2. We can see in it, stable regions with eigenvalue modules lower than 1, the Niemark instability region (density-waves), and the saddle excursion region (Ledinegg).

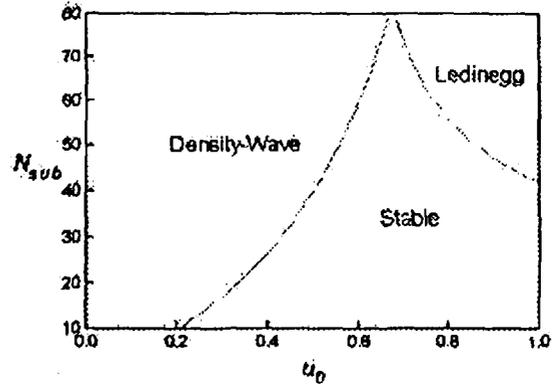


Figure 2. Linear Stability Map ( $k=20$ ).

Comparing the linear stability map for this simple delay model with the complete differential [9] and Ishii [10] models, we found good agreement for a wide range of subcooling numbers. Fig. 3 shows linear stability maps obtained with each model.

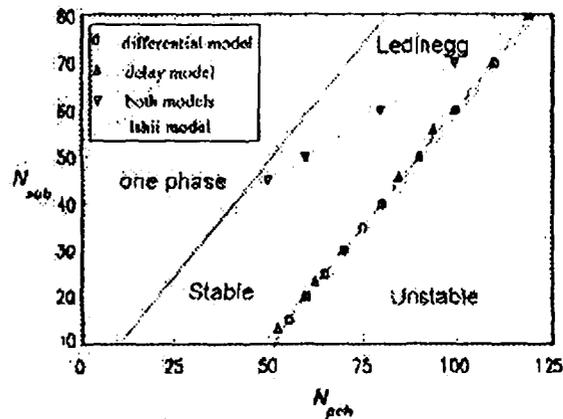


Figure 3. Stability Comparison ( $k_f=40$ ,  $k_c=1$ ).

For low subcooling numbers, the delay model is too conservative, but it should be noted that in this region  $t_r$  is much less than  $t_c$ , which invalidate the model hypotheses.

## RESULTS

A rule of the art recognizes that increasing the inlet friction causes a stabilizing effect over the density-wave margins. But, this rule is derived based on a family of operating conditions having equal flow rate. On the contrary, an inlet friction variation is generally coupled with other flow parameters, and consequently different effects could be expected depending on each particular situation.

Let us now analyze a channel subjected to constant pressure drop (parallel channels boundary conditions). This implies that  $\Gamma$  remains constant. Hence, any  $k_e$  variation of  $k_i$  causes a shift of the steady state  $u_0^s$  according to Eq. (10), and a shift of the linear limit  $u_0^{st}$  through Eq. (14). Therefore, there will be a stabilizing effect if:

$$\frac{d u_0^s}{d k} > \frac{d u_0^{st}}{d k} \quad (17)$$

Differentiating Eq. (10) we have that

$$\frac{d u_0^s}{d k} = \frac{u_0^2}{N_{mb}(2 - 3u_0) + 2u_0} \quad (18)$$

and similarly for Eq. (14)

$$\frac{d u_0^{st}}{d k} = \frac{2u_0^2}{N_{sub}} \quad (19)$$

Combining Eqs. (17) to (19) a criterion for a stabilizing effect of  $k_i$  can be obtained:

$$N_{mb} < \frac{4u_0}{3(2u_0 - 1)} \quad (20)$$

Figs. 4 shows Eq. (20) in the plane  $(u_0, N_{sub})$ . The curves are bounded by the two-phase and Ledinegg conditions, given by Eqs. (13) and (15) respectively. In terms of  $N_{sub}$  and  $N_{mb}$ , Eq. (20) is written as:

$$N_{sub} < \frac{N_{pch}}{2} + \frac{2}{3} \quad (21)$$

It can be observed from Eq. (20), that for  $N_{sub} < 4/3$  or  $u_0 < 1/2$  the effect of  $k_i$  is always stabilizing, since the  $u_0 < 1$ .

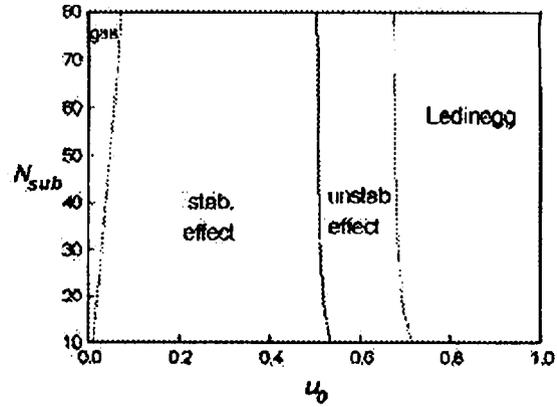


Figure 4a. Influence of the Inlet Friction on Boiling Channel Stability (atmospheric pressure).

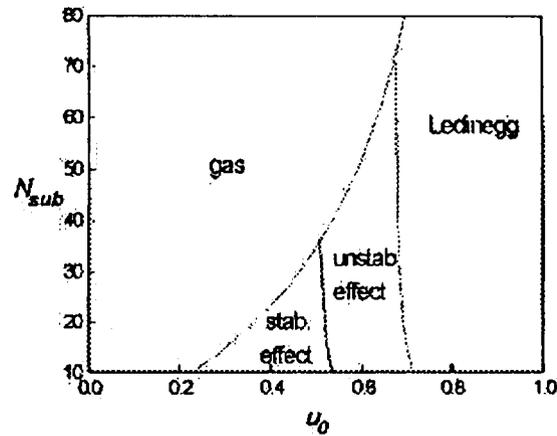


Figure 4b. Influence of the Inlet Friction on Boiling Channel Stability (4.5 atmospheres).

## CONCLUSIONS

A linear stability analysis of boiling channels was performed in order to study the effect of increasing the inlet friction in the flow stability. It was shown that channels subjected to constant pressure drop conditions can actually loose stability when the inlet friction is increased, experiences a reduction following the friction change.

## NOMENCLATURE

$Eu$	Euler number,
$h$	specific enthalpy,
$h_{fg}$	$h_g - h_f$
$L_{ch}$	heated channel length,
$N_{pch}$	phase change number,
$N_{sub}$	subcooling number,
$p$	pressure,
$Q$	power,
$q$	volumetric power,
$t$	time,
$u$	velocity,
$v$	specific volume,
$v_g - v_f$	$v_g - v_f$
$\dot{M}$	mass flow rate,
$x$	quality,
$z$	space coordinate.

### Greek

$\lambda$	boiling boundary position,
$\rho$	density,
$\gamma$	liquid phase particle time,
$\tau$	time delay.

### Subscripts

$e$	exit,
$f$	liquid (saturation),
$g$	vapor,
$i$	inlet,
$n$	number of time step,
$o$	steady state,
$r$	reference.

### Superscript

$Led$	Ledinegg instability,
$dw$	Density-Wave instability,
$s$	steady state.

## REFERENCES

- [1] Lahey Jr., R.T. and Moody, F.J., *The Thermal Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor*, ANS Monograph, 1977.
- [2] Taleyarkhan, R., Podowski M. and Lahey Jr., R.T., *The development of a nodal method for the stability analysis of ventilated boiling channels*, 2nd. Int. Topical Meet. on Nucl. Reactor Thermalhydraulics, Sta. Barbara, California, January 1983.
- [3] Peng, S. J., Podowsky, M.Z. and Lahey Jr., R.T., *BWR Linear stability analysis*, Nuc. Eng. and Design, vol. 93, p 25-37, 1986.
- [4] Xiao, M., Chen, X.J., Zhang, M.Y., Verizoglu T.N. and Kokac, S., *A multivariable linear investigation of two-phase flow instabilities in parallel boiling channels under high pressure*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 19, p 65-77, 1993.
- [5] Achard, J.L., Drew, D.A., and Lahey, R.T., *The effect of gravity and friction on the stability of boiling flow in a channel*, Chem. Eng. Commun. vol. 11, p 59-79, 1981.
- [6] Clause, A., Delmastro, D.F. and Lahey, R.T., *The Analysis of Chaotic Instabilities in Natural Circulation Boiling Systems*, Eurotherm Seminar No. 6, p 161-167.
- [7] Clause, A., Delmastro D.F. and Jimicó L.E., *A simple delay model for the dynamics of boiling channels*, NUREG-CP-0142, vol. 4, p 3232-3244, NURETH-7 Conference, Saratoga Springs, 1995.
- [8] Clause, A., Delmastro, D.F. and Jimicó, L.E., *A Simple Delay Model for the Dynamics of Boiling Channels*, Latin American Applied Research, in press.
- [9] Delmastro D.F., Clause A. and Converti J., *The influence of gravity on the stability of boiling flows*, Nuclear Engng. Des. vol. 127, p 129-139, 1991.
- [10] Tong, L.S. and Weisman, J., *Thermal analysis of pressurized water reactors*, in *The American Nuclear Society*, p 227-228, 1979.