

FRNC.TH\_1623

FR8500361

TROISIEME CYCLE  
ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

-----

I D

THESE DE TROISIEME CYCLE

présentée

A L'UNIVERSITE D'AIN MARDON DE LA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INFINI

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

par

Jean RUIZ

(Maîtrise-Sciences)

-----

ASPECTS PROBABILISTES DES THEORIES DE JAUFLY SUR RESEAU :  
PROBLEME DU CONFINEMENT ET INEGALITES DE CORRELATION

-----

Soutenue à Marseille, le 25 Mars 1982

JURY :

N. ME KHOUT  
J.M. BROUFFE  
F. GUERRA  
J. LEBOWITZ  
A. MESSAGER  
S. MIRACLE-SOLE  
Ch. PFISTER  
R. SENEOR

Président

Examineurs

56 p

*Je voudrais tout d'abord remercier Monsieur S. Mirails-Sole d'avoir bien voulu accepter la direction de cette thèse. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour l'aide efficace qu'il m'a apportée lors de l'élaboration de ce travail ainsi que pour ses encouragements et ses précieux conseils.*

*Je suis tout particulièrement reconnaissant envers Monsieur A. Messager pour l'aide constante et les judicieux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. Je tiens à le remercier pour sa permanente disponibilité et ses encouragements.*

*Je remercie vivement Messieurs J.M. Drouffe, F. Guerra, J. Lebourts, et R. Sénor qui me font l'honneur d'être membres de mon jury, ainsi que Monsieur M. Mekhout d'en assurer la présidence.*

*Je ne saurais oublier dans mes remerciements les membres du Centre de Physique Théorique pour l'enseignement de qualité que j'ai reçu pendant le Troisième Cycle ainsi que pour l'atmosphère fructueuse de collaboration qui y règne.*

*Pendant la préparation de cette thèse j'ai bénéficié d'une bourse D.G.R.S.T. et d'un contrat D.R.E.T.. J'exprime ici ma gratitude envers ceux qui m'ont permis de les obtenir.*

*Enfin, je remercie Le secrétariat du Centre de Physique Théorique, et particulièrement Mlle N. Cohen-Solal qui a bien voulu se charger avec amabilité de la dactylographie et Mme G. Escalon qui en a réalisé une édition d'une excellente qualité.*

## SOMMAIRE

|  | <u>Pages</u> |
|--|--------------|
| <b><u>CHAPITRE I : INTRODUCTION</u></b>  |              |
| 1.1. Généralités .....   | 1.1          |
| 1.2. Définitions, Formalisme des théories de jauge<br>sur réseau .....                                     | 1.3          |
| 1.3. Quelques résultats sur les modèles de jauge.....  | 1.11         |
| 1.4. Notations .....   | 1.14         |
| <u>Références du Chapitre I</u> .....  | 1.18         |
| <br><b><u>CHAPITRE II : MODELE A SYMETRIE LOCALE CONTINUE EN<br/>DIMENSION TROIS</u></b>                   |              |
| II.1. Introduction .....   | II.1         |
| II.2. Transformation de l'espace des phases .....  | II.3         |
| II.3. Propriétés des variables bidimensionnelles .....   | II.10        |
| II.4. Comportement du paramètre de Wilson .....  | II.14        |
| II.5. Quelques remarques sur la brisure de symétrie ..   | II.17        |
| II.6. Le cas général .....   | II.19        |
| II.7. Conclusion .....   | II.21        |
| <br><b><u>CHAPITRE III : LE GROUPE <math>Z_2</math> : INEGALITES DE CORRELATION<br/>EN DIMENSION d</u></b> |              |
| III.1. Introduction .....  | III.1        |
| III.2. Inégalités de type "Simon" pour les modèles<br>de jauge .....                                       | III.1        |
| III.3. Propriétés de monotonie des fonctions de<br>corrélation .....                                       | III.4        |
| III.4. Application .....   | III.6        |
| III.5. Conclusion .....  | III.8        |
| <u>Références des Chapitres II et III</u> .....  | III.9        |

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. INTRODUCTIONI.1. GENERALITES

A l'heure actuelle les théories de jauge apparaissent comme des modèles très prometteurs pour l'étude des particules élémentaires en interactions électromagnétiques forte ou faible.

L'électromagnétisme est l'exemple le plus simple de théorie de jauge. Les équations de l'électrodynamique classique, c'est-à-dire les équations de Maxwell décrivent une 2-forme  $F$  le champ électromagnétique

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Les équations de Maxwell s'écrivent dans ce formalisme

$$dF = 0 \quad , \quad d \star F = \star J \quad (1.1)$$

(où  $\star$  est la dualité de Hodge,  $J$  la 1-forme courant).

Dans le cas où la forme  $F$  est exacte, c'est-à-dire s'il existe une 1-forme  $A$  telle que  $F = dA$ , et donc  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  alors l'équation  $dF = 0$  est automatiquement satisfaite. On peut remplacer  $A$  par

$$A' = A + d\Lambda \quad (1.2)$$

où  $\Lambda$  est une 0-forme, la solution des équations (1.1) reste inchangée et  $F' = F$ .

La transformation (1.2) est appelée transformation de jauge.

L'idée de généraliser l'électromagnétisme à un champ admettant une invariance de jauge non abélienne est due à Yang et Mills [1] qui proposent de considérer un champ à valeur dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact (SU(2) ou SU(3) par exemple).

En remplaçant  $d$  par la dérivée covariante  $D_A$

$$F = D_A A \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu] \quad (1.3)$$

les équations de Maxwell sont remplacées par

$$D_A F = D \quad , \quad D_A *F = J \quad (1.4)$$

Géométriquement  $A$  peut être interprété comme une connexion sur l'espace des positions,  $F$  étant la forme de courbure définie par  $A$ ,  $F$  et  $A$  satisfont alors les identités de Bianchi  $D_A F = 0$ .

Les équations (1.1) et (1.4) peuvent être dérivées du principe variationnel appliqué à une certaine action  $S$ , par exemple, dans le cas  $J = 0$  (théorie de Yang-Mills pure), (1.1) et (1.4) sont déduites de l'action

$$S = \int \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \begin{matrix} F = dA \\ (\text{imp. } F = D_A A) \end{matrix} \quad (1.5)$$

Une façon de quantifier une théorie des champs est d'utiliser la formulation en intégrale de chemin de Feynman, Kac [2] [3] [4]. On considère une action intégrale  $S(\phi)$  dépendant des champs classiques (notés  $\phi$ ). La valeur moyenne d'une quantité physique est donnée par

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \, e^{S(\phi)} x \\ z &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{S(\phi)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Cette formule, a priori, n'est pas bien définie.

Dans les théories sur réseau, l'espace euclidien est discrétisé. On considère un réseau de maille  $\delta$ , les champs étant définis sur les sites du réseau. On obtient ainsi un espace fonctionnel dénombrable qui est le produit cartésien des espaces où prennent leurs

valeurs les champs définis en chaque site du réseau. On peut éventuellement considérer un réseau de dimension finie. L'action doit être construite de façon à ce que l'on retrouve l'action continue dans la limite de maille nulle.

Les modèles de théorie des champs sur réseau sont des modèles de mécanique statistique bien que le vocabulaire soit différent. Les techniques de la mécanique statistique se sont révélées fructueuses pour l'étude de la théorie constructive des champs, voir [4][5].

En 1974, Wilson [6] a proposé de considérer des actions sur réseau qui gardent l'invariance de Jauge. L'intérêt de ces modèles que nous allons définir dans le paragraphe suivant vient du fait qu'ils décrivent correctement des effets non perturbatifs, transition de phase, confinement des quarks (suivant l'hypothèse de Wilson). De plus, ils interviennent dans les constructions des modèles continus, voir [7][8].

## 1.2. DEFINITIONS, FORMALISME DES THEORIES DE JAUGE SUR RESEAU

Les modèles de Jauge sur réseau étant des modèles de mécanique statistique, nous allons utiliser dans les définitions le langage probabiliste introduit par Dobrushin [9], voir aussi [10].

### - Réseau

On considère un réseau cubique  $d$ -dimensionnel  $Z^d$  ( $d \geq 2$ ). Les objets basiques sur le réseau sont les sites  $n \in \{1, \dots, n\} \in Z^d$ , les liens  $(n, n') = \{ \text{couples de sites plus proches voisins} \}$  et les plaquettes = {courbes fermées formées par quatre liens}.  
 - Un ensemble de liens est appelé 1-chaîne  
 - Une chaîne fermée est appelée 1-cycle.

Soit  $\partial$  l'opération bord usuelle de la géométrie différentielle [11].

- Un ensemble de plaquettes est appelé 2-chaîne
- Le bord d'une 2-chaîne est un 1-cycle
- Une 2-chaîne fermée est appelée 2-cycle.

#### - Configuration

On suppose qu'un groupe de Lie compact connexe  $G$  est donné ( $G$  sera le groupe de jauge).  $G$  pourra éventuellement être un groupe discret).

Soit  $\Lambda$  un ensemble fini de liens de  $Z^d$ , à chaque lien  $(n, n')$  appartenant à  $\Lambda$  est associé un élément  $x$  de  $G$  tel que  $x(n, n') = x^{-1}(n', n)$ .

Une configuration est une application de  $\Lambda$  à valeurs dans  $G^\Lambda$  on note  $x = \{x(n, n')\}_{(n, n') \in \Lambda} \in G^\Lambda$   
 $G^\Lambda$  est l'ensemble de toutes les configurations.

Soit  $\mu$  la mesure de Haar sur  $G$  définie sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}_G$  des sous-ensembles boréliens de  $G$  on construit de façon naturelle sur  $G^\Lambda$  une mesure  $\mu_\Lambda$  produit de  $|\Lambda|$  mesures de Haar ( $|\Lambda|$  est le nombre de liens contenus dans  $\Lambda$ ).

$\mu_\Lambda$  est définie sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}_{G^\Lambda}$  produit de  $|\Lambda|$   $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{B}_G$ .

#### - Potentiel

Un potentiel  $\mathcal{V}$  est un ensemble de fonctions  $\{\mathcal{V}_A, A \text{ étant un ensemble fini de liens}\}$  tel que chaque fonction est définie sur  $G^\Lambda$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

#### - Energie

Soit  $\Lambda$  une partie finie de  $Z^d$ , l'énergie de la configuration  $x_\Lambda$  est donnée par :

$$U_\Lambda(x_\Lambda) = \sum_{A: A \cap \Lambda \neq \emptyset} \beta_A \mathcal{V}_A(x_\Lambda) \quad \text{où } \beta_A \in \mathbb{R}^+$$



Soit  $\bar{\Lambda}$  le complémentaire de  $\Lambda$ , l'énergie de la configuration  $x_\Lambda$  avec condition au bord  $x_{\bar{\Lambda}}$  est donnée par

$$U(x_\Lambda | x_{\bar{\Lambda}}) = \sum_{A: \Lambda \cap A \neq \emptyset} \beta_A \psi_A(x_\Lambda)$$

- Transformation de Jauge et Invariance de Jauge

Une application  $\mathcal{G}$  définie sur les sites de  $Z$  à valeur dans le groupe  $G$  induit une transformation (appelée transformation de Jauge) de la manière suivante

$$x(n, n') \rightarrow \mathcal{G}(n) x(n, n') \mathcal{G}(n')^{-1} \text{ pour tout lien } (n, n') \text{ de } Z$$

Soit  $\tau_{\mathcal{G}}$  cette transformation

- un potentiel est dit invariant de jauge si pour tout ensemble fini de liens  $A$  appartenant à  $(Z^d)^d$  et pour  $x_\Lambda$  appartenant à  $G^\Lambda$ ,

$$\psi_A(\tau_{\mathcal{G}} x_\Lambda) = \psi_A(x_\Lambda)$$

Remarque. Intuitivement les potentiels invariants de jauge sont associés à des 1-cycles, c'est-à-dire à des courbes fermées.

L'invariance de jauge est une invariance locale.

- Choix d'une Jauge

Par transformation de jauge on peut éliminer des variables de liens de la manière suivante

$$x(n, n') \rightarrow \mathcal{G}(n) x(n, n') \mathcal{G}(n')^{-1} \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{G}(n) = x(n, n') \\ \mathcal{G}(n') = \mathbb{1}_G \end{cases}$$

D'une manière plus générale, sur un ensemble  $\Lambda$  de  $Z^d$  on dispose de  $m$  variables  $\mathcal{X}(n)$  ( $m$  étant le nombre de sites de  $\Lambda$ ). On peut ainsi éliminer un grand nombre de variables de liens pourvu que l'on ne forme pas de courbes fermées.

Exemple : La jauge axiale : On remplace par  $\mathbb{1}_G$  toutes les variables de liens parallèles à une direction donnée.

- Les potentiels usuels : Action de Yang-Mills pure

L'action de Yang-Mills pure sur le réseau est donnée par

$$U^{YM}(z_A) = - \sum_{p \in \Lambda} \beta_p \operatorname{Re} \left\{ \chi [x(\partial p)] \right\}$$

où  $\beta_p \in \mathbb{R}^+$

$\sum_{p \in \Lambda}$  est la somme sur toutes les plaquettes de  $\Lambda$   
 $\chi$  est le caractère sur  $G$ , et  $\operatorname{Re}$  la partie réelle

$$x(\partial p) = \prod_{\langle n, n' \rangle \in p} x(n, n')$$

La notation  $\langle n, n' \rangle$  signifiant plus proches voisins.

Le produit  $\prod_{\langle n, n' \rangle}$  étant ordonnée, c'est-à-dire



$$x(\partial p) = x(n_1, n_2) x(n_2, n_3) x(n_3, n_4) x(n_4, n_1)$$

D'une façon plus générale, si  $\gamma$  est une 1-chaîne de la forme suivante  
 $\gamma = \{n_1, \dots, n_i, \dots, n_k\}$   $n_i, n_{i+1}$  étant plus proches voisins, on note-  
 ra

$$x(\gamma) = \prod_{i=1}^{k-1} x(n_i, n_{i+1})$$

- pour  $G = \mathbb{Z}^2$

$$U^{YM}(z_A) = - \sum_p \beta_p \prod_{\langle n, n' \rangle \in p} \Gamma(n, n') \quad (1.9)$$

où  $\Gamma(n, n')$  est égal à +1 ou à -1

- pour  $G = U(1)$

$$U^{YM}(x_n) = - \sum_P \beta_P \text{tr}(x(\partial P)) = - \sum_P \beta_P \omega \left( \sum_{\langle n, n' \rangle \in P} H(n, n') \right) \quad (I.10)$$

avec

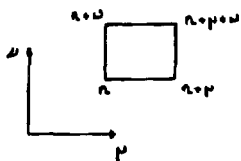
$$\begin{cases} \kappa(n, n') = e^{i H(n, n')} & H(n, n') \in [-\pi, \pi] \\ H(n, n') = -H(n', n) \end{cases}$$

- pour  $G = SU(2)$

$$U^{YM} = - \sum_{P \in \Lambda} \beta_P \left[ \text{tr}(x(\partial P)) \right] \quad (I.11)$$

- Action discrète et action continue

Posons  $p = (n_0, n_1, n_2, n_3) = (n, n+p, n+p+\omega, n+\omega)$



Considérons le cas  $G = U(1)$

En posant

$$\begin{cases} H(n, n+p) = H_p(n) \\ H(n+\omega, n+p+\omega) = H_p(n+\omega) \\ H(n, n+\omega) = H_\omega(n) \\ H(n+p, n+p+\omega) = H_\omega(n) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \cos H(\partial p) &= \cos \left( \sum_{\langle n, n' \rangle \in p} H(n, n') \right) \\ &= \cos (H_\omega(n+p) - H_\omega(n) - H_p(n+\omega) + H_p(n)) \\ &= \cos (\partial_p H_\omega(n) - \partial_\mu H_p(n)) \end{aligned}$$

où  $\partial$  est la dérivée discrète, c'est-à-dire

$$\partial_\mu H_\nu(n) = H_\mu(n, \mu) - H_\nu(n) \quad (\text{la maille du réseau étant égale à } 1)$$

avec l'approximation  $\cos \Theta \sim 1 - \Theta^2$  on retrouve l'action (1.5).

Dans le cas du groupe  $SU(2)$  posons  $x(n, n') = e^{i H(n, n')}$  où  $A$  appartient à l'algèbre de Lie de  $SU(2)$

$$H = H^1 \sigma_1 + H^2 \sigma_2 + H^3 \sigma_3 \quad ; \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

étant les matrices de Pauli.

Avec les notations précédentes et en utilisant la formule de Baker Hausdorf,  $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$  on trouve

$$x(\partial p) = e^{i \mathcal{F}_{\mu\nu}} \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu H_\nu - \partial_\nu H_\mu + i [H_\mu, H_\nu]$$

on retrouve ainsi l'action de Yang-Mills pure (voir [12]).

Remarque. Sur le réseau on peut construire des modèles où le champ de jauge est couplé à un champ de matière : par exemple, dans le cas de l'électrodynamique quantique scalaire sur le réseau le potentiel est donné par

$$U(\Theta_n, \psi_n) = - \sum_{\langle n, n' \rangle \in \Lambda} \beta \psi_{n'} (\Theta_n - \Theta_{n'}) \psi_n - \sum_{p \in \Lambda} \beta \psi_p U(\partial p)$$

$\Lambda$  étant le champ de jauge.

Le champ de matière  $\psi(n)$  étant défini en chaque site du réseau

$$\psi(n) \in [-\pi, \pi]$$

voir [13].

#### - Digression - Modèle Spin - Spin de la Mécanique Statistique

Avant l'introduction des modèles de jauge sur réseau, les modèles les plus généralement étudiés en Mécanique Statistique étaient les modèles décrivant le magnétisme que nous appellerons "spin-spin" le potentiel étant généralement un potentiel à deux corps associé à un

produit scalaire, les variables étant définies en chaque site du réseau.

### Exemples

1) Le Modèle d'Ising (plus proches voisins)

$$U(\sigma_A) = - \sum_{\langle n, n' \rangle \in \Delta} \beta_{ij} \sigma(n) \sigma(n') \quad (1.12)$$

avec  $\sigma(n) = \pm 1$

2) Le Rotateur Plan

$$U(\theta_A) = - \sum_{\langle n, n' \rangle \in \Delta} \beta_{ij} \vec{S}(n) \cdot \vec{S}(n') = - \sum_{\langle n, n' \rangle \in \Delta} \beta_{ij} \cos(\theta(n) - \theta(n')) \quad (1.13)$$

$S(n)$  étant un vecteur de  $\mathbb{R}^d$  de norme 1,  $S = \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases}$

3) Le Modèle d'Heisenberg ou Modèle  $S$

$$U(S_A) = - \sum_{\langle n, n' \rangle \in \Delta} \beta_{ij} \vec{S}(n) \cdot \vec{S}(n') \quad (1.14)$$

$S$  étant un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  (ou plus généralement de  $\mathbb{R}^d$ ), de norme 1.

Lorsque  $\beta_{ij} \geq 0$  pour tout  $\langle n, n' \rangle$   $U$  est dite ferromagnétique.

Ces potentiels possèdent une invariance globale par exemple pour (1.13) (1.14), une invariance par rotation.

### - Densité Conditionnelle de Gibbs

La densité conditionnelle de Gibbs dans le volume  $\Lambda$  avec conditions aux bords  $\omega_\Lambda$  et potentiel  $\mathcal{U}$  est définie par

$$p(\omega_\Lambda | \omega_\Lambda) = \frac{e^{-U(\omega_\Lambda | \omega_\Lambda)}}{\int e^{-U(\omega_\Lambda | \omega_\Lambda)} \mu(d\omega_\Lambda)} = Z^{-1} e^{-U(\omega_\Lambda | \omega_\Lambda)} \quad (1.15)$$

(pour certaines conditions restrictives sur le potentiel)

$Z$  est appelée fonction de partition.

- Etat

Soit  $\mathcal{L}$  l'ensemble des liens d'un réseau  $d$ -dimensionnel, de  $\mathcal{C}(\mathcal{L})^d$ . Sur l'espace des configurations  $\mathcal{C}^d$  on introduit la  $\sigma$ -algèbre  $\Sigma$  générée par les ensembles cylindriques de la forme

$$\mathcal{D}(\mathcal{D}_p, \mathcal{P} \in \Lambda) = \{(\omega, \rho \in \mathcal{L}) \in \mathcal{C}^d; \omega_p \in \mathcal{D}_p, \rho \in \Lambda\}$$

où  $\Lambda \subset \mathcal{L}$  est fini et  $\mathcal{D}_p \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ .  $\rho$  étant un lien de  $\Lambda$ .

- Un état du système est une mesure de probabilité sur  $(\mathcal{C}^d, \Sigma)$ .

- Etat de Gibbs

Pour tout  $\Lambda \subset \mathcal{L}$  on note  $\Sigma_\Lambda$  la  $\sigma$ -algèbre générée par  $\mathcal{D}(\mathcal{D}_p, \mathcal{P} \in \Lambda)$  où  $\Lambda \subset \Lambda$  est finie.

Un état de Gibbs avec potentiel est défini comme un état tel que pour tout  $\mathcal{D}_p \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ ,  $\mathcal{P} \in \Lambda$ , la probabilité conditionnelle de l'événement  $\mathcal{D}(\mathcal{D}_p, \mathcal{P} \in \Lambda)$  par rapport à la  $\sigma$ -algèbre  $\Sigma_\Lambda$  ( $\sigma$ -algèbre des conditions aux bords) est une fonction de la forme

$$q(\mathcal{D}(\mathcal{D}_p, \mathcal{P} \in \Lambda) | \Sigma_\Lambda) = \int_{\prod_{\mathcal{P} \in \Lambda} \mathcal{D}_p} p(\omega_\Lambda | \omega_\Lambda) \mu_\Lambda(d\omega_\Lambda) \quad (1.10)$$

- Espérance conditionnelle : Fonction de corrélation

Soit  $\mathcal{F}$  une observable, c'est-à-dire une fonction sur  $\mathcal{C}^d$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on définit l'espérance conditionnelle par :

$$E(\mathcal{F} | \Sigma_\Lambda) = \langle \mathcal{F} \rangle_{\Sigma_\Lambda} = \int \mathcal{F} p(\omega_\Lambda | \omega_\Lambda) \mu_\Lambda(d\omega_\Lambda) \quad (1.17)$$

On s'intéresse à ces quantités dans la limite de volume infinie (limite thermodynamique [10]).

Remarque. Si l'on considère un modèle et le même modèle dans une jauge fixée, il n'y a pas correspondance bijective entre les états de Gibbs

des deux modèles.

Les quantités non invariantes de jauge ont une expectation nulle.

- Paramètre de Wilson

Soit  $C_{L,T}$  le bord d'un rectangle de dimension  $L \times T$  on appelle paramètre de Wilson l'espérance de l'observable

$$W(C) = \int \{ \chi(C) \}$$

Wilson [6] a suggéré que  $V(L) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{T} \log W(C)$  calculé dans une théorie de jauge pure donneit le potentiel physique entre les quarks séparés par une distance  $L$ .

1.3. QUELQUES RESULTATS SUR LES MODELES DE JAUGE

1.3a) Propriétés "Haute Température"

(Supposons  $\beta_T$  a  $\beta$  pour tout  $p$ ).

Les propriétés "haute température", c'est-à-dire  $\beta$  petit, ont été parmi les premières étudiées en utilisant les développements perturbatifs [30] [14] [15].

Pour les modèles "spin-spin" (1.12) (1.13) (1.14), il est connu qu'à haute température l'entropie domine l'énergie et le système est désordonné. Mathématiquement, cela se traduit par le fait qu'il existe une température  $T_c$  telle que si  $T_0 > T_c$  l'ensemble des états de Gibbs se réduit à un point, les fonctions de corrélations sont analytiques en  $T_0$  dans l'ensemble  $[T_c, +\infty[$ .

Pour les modèles de jauge, ces propriétés restent vraies, et les dévelop-

gements perturbatifs ont montré qu'à haute constante de couplage ( $\beta$  petit) on a :

$$\langle w(c) \rangle \sim e^{-K(\beta)LT}$$

$w(c)$  étant le paramètre de Wilson et  $K(\beta)$  une fonction de  $\beta$ .

### 1.3b) Quelques Propriétés des Modèles Usuels $Z_n$ , $U(1)$ , $SU(2)$

- En dimension deux, les modèles de jauge usuels (1.9) (1.10) (1.11) sont triviaux. Par exemple, pour le modèle Ising Jauge (1.9), en dimension 2, si on se place dans la jauge axiale, on se ramène à des modèles d'Ising unidimensionnels découplés.

- En dimension 3, pour le modèle  $Z_n$  couplé à un champ de matière, S. Miracle-Sole et R. Marra [10] ont étudié en utilisant la dualité [17] [18] les propriétés d'analyticité des fonctions de corrélation. Plus précisément, l'énergie ayant la forme suivante :

$$\text{ou } G(n) = \pm 1 \quad D(n, n') = \pm 1$$

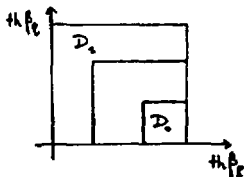


Figure 1

dans les régions  $D_+$   $D_-$  les fonctions de corrélation sont analytiques en  $\beta_L$   $\beta_S$  et

$$\text{en } D_+ \quad \langle w(c) \rangle \sim e^{-K'T \cdot L}$$

$$\text{en } D_- \quad \langle w(c) \rangle \sim e^{-K'(T) \cdot L}$$

Ceci montrant l'existence d'une transition de phase (voir aussi [19]).



- en dimension 3 pour le modèle  $U(1)$  (1.10), il a été montré que :

$$\langle w(c) \rangle \leq e^{-K T \log L}$$

Ce résultat a d'abord été montré par Glimm et Jaffe [20] pour  $T \gg L$  et à basse température. (La méthode utilisée est une généralisation de la méthode de Mac Bryan et Spencer [21] pour l'étude du rotateur plan en dimension 2).

Ce résultat a été démontré par Kunz [22] en utilisant les inégalités de Ginibre [23][24]. En effet on peut montrer que

$$\langle w(c) \rangle \leq (\langle \bar{S}_0 \cdot \bar{S}_L \rangle)^T$$

où  $\langle \bar{S}_0 \cdot \bar{S}_L \rangle$  est la corrélation à deux points du rotateur bidimensionnel.

En utilisant à nouveau les inégalités de Ginibre on peut montrer que

$$\langle \bar{S}_0 \cdot \bar{S}_L \rangle \leq e^{-K \log L}$$

Pour les modèles non abéliens, J. Fröhlich et Dunhus [25] ont développé une méthode générale de comparaison de modèle de jauge en dimension  $d-1$  avec des modèles  $\sigma$  en dimension  $d$ . Ils ont ainsi obtenu que pour le modèle  $SU(2)$  (1.14), en dimension trois et pour  $\beta$  suffisamment petit

$$\langle w(c) \rangle \leq e^{-K T \cdot L}$$

Pour cette partie, nous nous sommes inspirés des articles de références usuels pour l'introduction aux modèles de jauge : K. Wilson [6], R. Balian, J.M. Drouffe et C. Itzykson [30][13], F. Guerra et coll. [26], A. Jaffe [29], K. Osterwalder et E. Seiler [27][29], J. Kogut et L. Susskind [28][12].

I.4. NOTATIONS

Dans le Chapitre 2, les problèmes étudiés ont une symétrie par rapport à un axe. Il est pratique d'introduire les notations suivantes : L'espace discrétisé  $Z^3$  est rapporté à un repère orthonormé  $(Ot, x, y)$ . Un site  $n$  est repéré par trois coordonnées cartésiennes :  $n_{\mathbb{M}}(t, x, y)$ .

On définit la distance d'un site  $n_{\mathbb{M}}(t, x, y)$  à l'axe  $Ot$  de la manière suivante :

$$l = d(Ot, n) = \sup\{|x|, |y|\}$$

On définit l'opération  $\text{Proj}(n)$  : projection du site  $n$  par rapport à l'axe  $Ot$  sur le demi plan :  $\{x = 0, y \geq 0\}$  de la manière suivante :

$$\text{Proj}(t, x, y) = (t', x', y') \quad \begin{cases} t' = t \\ x' = 0 \\ y' = d(Ot, n) \end{cases}$$

On note  $n_{t,l}(0)$  le site  $(t, 0, l)$

$n_{t,l}(s)$  tout site tel que  $\text{Proj}(n_{t,l}(s)) = n_{t,l}(0)$

On note  $\text{Proj}^{-1}\{n_{t,l}(0)\}$  l'ensemble des sites  $n_{t,l}(s)$ .

Les variables de liens seront notées

$$x(t, x, y; t+1, x, y) \equiv x^t(t, x, y)$$

$$x(t, x, y; t, x+1, y) \equiv x^x(t, x, y)$$

$$x(t, x, y; t, x, y+1) \equiv x^y(t, x, y)$$

On notera  $\gamma_{n_{t,\ell}(a)}$  l'ensemble des liens  $(n_{t,\ell}(s), n_{t,\ell}(s'))$  où  $n_{t,\ell}(s)$  et  $n_{t,\ell}(s')$  sont plus proches voisins et

$$\text{Proj}(n_{t,\ell}(s)) = \text{Proj}(n_{t,\ell}(s')) = n_{t,\ell}(a)$$

On notera  $\{\gamma_{n_{t,\ell}}\}$  l'ensemble des liens dont la projection se réduit à un point.

- Soit  $(n(s), n'(s))$  un lien tel que  $\text{Proj}(n(s)) \neq \text{Proj}(n'(s))$ .

On définit la projection d'un tel lien de la manière suivante :

$$P\{(n(s), n'(s))\} = (\text{Proj}(n(s)), \text{Proj}(n'(s)))$$

- On notera  $(n_{t,\ell}(s), n_{t,\ell}(s'))$  les liens dont la projection est le lien  $(n_{t,\ell}(a), n_{t,\ell}(a'))$ .

- On notera  $(n_{t,\ell}(s), n_{t,\ell}(s'))$  les liens dont la projection est  $(n_{t,\ell}(a), n_{t,\ell}(a'))$ .

Soit  $p$  une plaquette  $p = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ , telle que

$$\text{Proj}(n_i) \neq \text{Proj}(n_j) \quad \begin{array}{l} + i = 1, 2, 3, 4 \\ + j = 1, 2, 3, 4 \\ i \neq j \end{array}$$

On définit la projection de la plaquette  $p$  de la manière suivante

$$\text{Proj}(p) = (\text{Proj}(n_1), \text{Proj}(n_2), \text{Proj}(n_3), \text{Proj}(n_4))$$

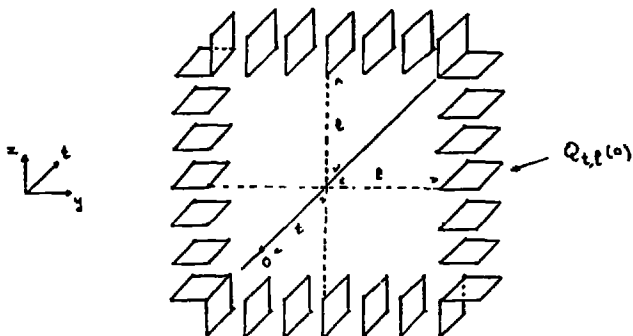
- On notera  $Q_{t,\ell}(a)$

toute plaquette telle que

$$\text{Proj}(Q_{t,\ell}(a)) = (n_{t,\ell}(a), n_{t,\ell}(a'), n_{t,\ell}(a), n_{t,\ell}(a')) = Q_{t,\ell}(a)$$

- L'ensemble des plaquettes  $Q_{t,\ell}(a)$  telles que  $\text{Proj}(Q_{t,\ell}(a)) = Q_{t,\ell}(a)$  sera appelé tube  $\gamma_{t,\ell}$

$$Q_{t,\ell} = \text{Proj}^{-1}\{Q_{t,\ell}(a)\}$$

Figure 1.2, tube  $Q_{t,l}$ 

- On notera  $R_{t,l}(n)$  toute plaquette telle que

$$P_{\text{adj}}(R_{t,l}(o)) = (n_{x,t,l}(o), n_{z,t,l}(o))$$

l'ensemble de ces plaquettes sera noté  $R_{t,l}$

- On notera  $S_{t,l}(s)$  toute plaquette telle que

$$P_{\text{adj}}(S_{t,l}(o)) = (n_{x,t,l}(o), n_{x+1,t}(o))$$

l'ensemble de ces plaquettes sera noté  $S_{t,l}$ .

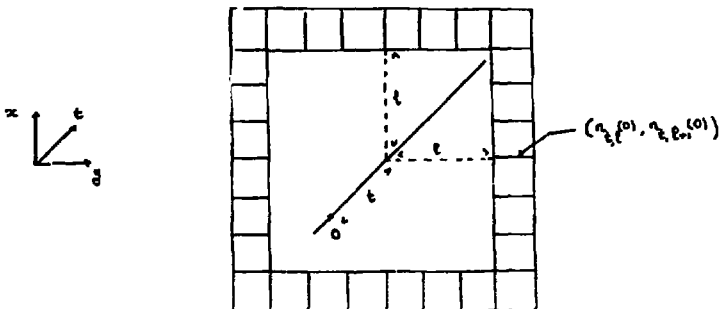


Figure 1.3

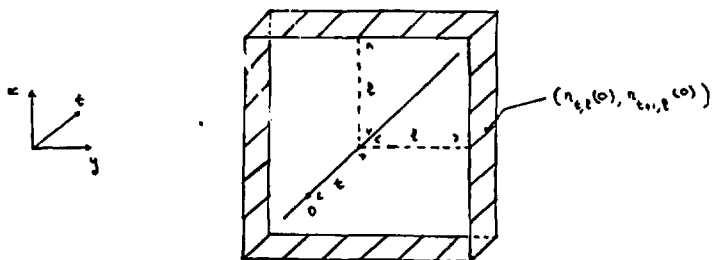
Ensemble  $R_{t,1}$ 

Figure 1.4

Ensemble  $S_{t,1}$

REFERENCES DU CHAPITRE I

- [1] C.N. YANG, R.L. MILLS,  
Conservation of Isotopic Spin and Gauge Invariance  
Phys. Rev. 96, 191 (1954).
- [2] R. FEYNMAN, M.R. HIBBS,  
Quantum Mechanics and Path Integrals, Mac Graw-Hill.
- [3] B.S. LEE,  
Path Integrals and Gauge Theories,  
dans "Renormalization and Invariance in Quantum Field Theory",  
edited by Eduardo Caianiello, Plenum Press.
- [4] J. GLIMM, A. JAFFE,  
Quantum Physics. A Functional Integral Point of View,  
Springer-Verlag.
- [5] Constructive Quantum Field Theory,  
Lecture Notes in Physics n° 25, edited by G. Velo and A. Wightman.
- [6] K.G. WILSON,  
Confinement of Quarks,  
Phys. Rev. D10, 2445 (1974).
- [7] D. BRYDGES, J. FRÖHLICH, E. SEILER,  
On the Construction of Quantized Gauge Fields,  
I. Ann. of Phys. 121, 227 (1979).  
II. Commun.Math.Phys. 71, 159 (1980).  
III. Commun.Math.Phys. 79, 353 (1981).
- [8] J. MACNEN, R. SENEOR,  
In Springer Lecture Notes in Physics, K. Osterwalder Ed.
- [9] R.L. DOBRUSHIN,  
The Description of Random Fields by Means of Conditions of  
its Regularity,  
Theory Prob. App. 13, 197 (1968) et Commun.Math.Phys. 42, 31 (1975).
- [10] D. RUELLE,  
Statistical Mechanics, Benjamin, New York (1969).
- [11] M. HENLE,  
A Combinatorial Introduction to Topology, Victor Klee Ed.

- [12] J. KOCUT  
Rev. Modern Phys. 51, 4, 659 (1979).
- [13] G.F. DE ANGLIS, D. DE FALCO, F. GUERRA,  
Scalar Quantum Electrodynamics as Classical Statistical  
Mechanics,  
Commun.Math.Phys. 57, 201 (1977).
- [14] G.F. DE ANGLIS, D. DE FALCO, F. GUERRA, R. MARRA,  
Lattice Gauge Field in the Strong Coupling Regime,  
Lettere al Nuovo Cimento 19, 55 (1977).
- [15] J.M. DROUFFE and C. ITZYKSON,  
Lattice Gauge Field,  
Phys. Reports 38C, 133 (1978).
- [16] R. MARRA, S. MIRACLE-SOLE,  
On the Statistical Mechanics of the Gauge Invariant Ising Model,  
Commun.Math.Phys. 67, 23 (1979).
- [17] J.M. DROUFFE,  
Transition and Duality in Gauge Lattice Systems,  
Phys. Rev. D18, 4.(1974).
- [18] C.P. KORTHALS ALTES,  
Duality for  $Z(N)$  Gauge Theory,  
Nuclear Physics B132, 315 (1978).
- [19] G. CALLAVOTTI, F. GUERRA, S. MIRACLE-SOLE,  
in "Mathematical Problems in Theoretical Physics",  
Lecture Notes in Physics, n° 80, Springer-Verlag (1978).
- [20] J. GLIMM, A. JAFFE,  
Quark Trapping for Lattice  $U(1)$  Gauge Fields,  
Physics Letters, B66, 67 (1977).
- [21] J. Mac BRYAN, T. SPENCER,  
Commun.Math.Phys. 53, 299 (1977).
- [22] H. KUNZ,  
non publié.
- [23] J. GINIBRE,  
Commun.Math.Phys. 16, 310 (1970).
- [24] A. MESSEGER, S. MIRACLE-SOLE, C. PFISTER,  
Commun.Math.Phys. 58, 19 (1978).
- [25] J. FROHLICH, R. DUNHUS,  
A Connection between  $\mu$ -Dimensional Yang-Mills Theory and  
( $\mu-1$ ) Dimensional Non Linear  $G^*$ -Models,  
Commun.Math.Phys. 75, 103 (1980).

- [26] G.F. DE ANGELIS, D. DE FALCO, F. GUERRA, R. MARRA,  
Facts and Prospects of Gauge Theory,  
edited by \_\_\_\_\_, Springer Verlag (1978).
- [27] K. OSTERWALDER, E. SEILER,  
Ann. Phys. 110, 440 (1978), et référence [19].
- [28] T. KOCUT, L. SUSSKIND,  
Phys. Rev. D11, 395 (1975).
- [29] Mathematical Problems in Theoretical Physics,  
Lecture Notes in Physics n° 80, edited by G.F. Dell'Antonio,  
S. Doplicher and C. Jona-Lasinio, Springer Verlag.
- [30] R. BALIAN, J.M. BROUFFE, .. ITZYKSON,  
Gauge Fields on a Lattice,  
I. General Outlook, Phys. Rev. D10, 3376 (1974).  
II. Gauge Invariant Ising Model, Phys. Rev. D11, 2098 (1975).  
III. Strong Coupling Expansion and Transition Points, Phys. Rev.  
D11, 2104 (1975).



CHAPITRE II

MODELE A SYMETRIE LOCALE CONTINUE EN DIMENSION TROIS

II. MODELE A SYMETRIE LOCALE CONTINUE EN DIMENSION TROISII.1. INTRODUCTION

Il est connu que les modèles "spin-spin" en mécanique statistique possédant une symétrie continue n'ont pas de magnétisation spontanée en dimension deux par opposition au modèle d'Ising. En utilisant l'argument d'onde de spin, Mermin et Wagner [1] ont montré ce résultat pour le modèle d'Heisenberg. Ce résultat a été généralisé par Dobrushin et Shlossman [2] qui ont montré l'absence de brisure spontanée de symétrie pour une large classe de modèles possédant une symétrie continue. Leur méthode permet aussi d'obtenir la décroissance des fonctions de corrélation à deux points en fonction de la distance. La méthode consiste à réduire le problème à un problème unidimensionnel. Le résultat est alors une conséquence du théorème central limite (pour les densités de probabilités) pour des variables aléatoires non identiquement distribuées sur le groupe  $U(1)$ , démontré par Statulėvicius [4]. (Ce résultat a ensuite été amélioré par Shlossman [3], la convergence étant remplacée par la convergence uniforme).

Dans ce chapitre, nous construisons un argument analogue pour les modèles de jauge en dimension trois. Nous en déduisons que pour toute valeur de la constante de couplage et pour une large classe de potentiel, le potentiel de confinement est logarithmique ; le groupe considéré est  $U(1)$  ou un groupe dont le centre contient  $U(1)$ . Nous espérons généraliser ce résultat à tout groupe possédant une symétrie continue.

L'idée basique est de construire un ensemble de solénoïdes aléatoires par une transformation du modèle original : on considère un espace des phases élargi constitué de l'espace des phases du modèle original tridimensionnel et de l'espace des phases d'un modèle de jauge bidimensionnel, les variables du modèle bidimensionnel agissant sur celles du modèle tridimensionnel. L'effet de cette transformation est d'ajouter un même champ magnétique aux différentes plaquettes d'un même tube, de

plus elle se réduit à une transformation de jauge sur les autres plaquettes ( $R_{\ell_i}(\alpha)$ ,  $S_{\ell_i}(\alpha)$ ). Sur une boucle fermée, l'effet est d'ajouter à la circulation initiale un cône flux qui est la circulation du modèle bidimensionnel.

Cette transformation est décrite dans le paragraphe II.2. Dans le paragraphe II.3, on montre que la densité de probabilité associée à cette circulation tend vers une densité uniforme.

De cette propriété on déduit (II.4), le comportement du paramètre de Wilson.

Les hypothèses sur le potentiel sont les suivantes :

- A) Invariance de jauge  
 B)  $C_2$  différentiabilité.

Soit  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^D$ ,  $\pi_\alpha \in G^\Lambda$ ,  $G$  étant un groupe dont le centre contient  $U(1)$ ,  $\ell_1, \ell_2$  deux liens de  $\Lambda$ .

On définit l'action de  $G \times G'$  sur  $G$  pour  $G' = U(1)$

$$[(\Omega_1, \Omega_2) \circ \pi_\alpha]_{\ell_i} = \begin{cases} \Omega_1, \pi(\ell_1) & \alpha \neq \ell_1 \\ \Omega_2, \pi(\ell_2) & \alpha \neq \ell_2 \\ \pi(\varphi) & \alpha = \ell_1 \text{ ou } \ell_2 \end{cases}$$

où  $\Omega_i = a^{i\theta_i} \in U(1)$ ,  $\Omega_i = a^{i\theta_i} \in U(1)$

On suppose

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \sum_{\alpha \in \ell_1, \ell_2, \pi_\alpha} [(\Omega_1, \Omega_2) \circ \pi_\alpha] \leq K \quad (\text{II.1})$$

C) On suppose le potentiel de portée finie, c'est-à-dire qu'il existe  $d_0, 1 < d_0 < \infty$  tel que  $v_\Lambda(x) \equiv 0$  lorsque  $d(\Lambda) > d_0$  ( $d(\Lambda)$  étant le "diamètre" de  $\Lambda$ ).

D) Convergence et mesurabilité

Soit  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3, |\Lambda| < \infty$  et  $A \subset \Lambda$ . La fonction  $v_\Lambda(x_\Lambda)$  est supposée  $B_{G,\Lambda}$ -mesurable, et l'intégrale

$$\int e^{-\beta v_\Lambda(z_\Lambda, z_\Lambda/\Lambda)} \mu_\Lambda(dz_\Lambda)$$

converge pour tout  $\Lambda, A \subset \Lambda$  et  $x_{\Lambda/A} \in G^{\Lambda/A}$ .

Pour des simplicités de notations, nous étudions tout d'abord (II.2, II.3, II.4, II.5), un potentiel vérifiant de plus l'hypothèse E. Le cas général étant étudié au paragraphe (II.6).

E)  $v_\Lambda(x_\Lambda) \equiv 0$  si  $\Lambda$  n'est pas une plaquette. L'énergie est alors de la forme

$$U_\Lambda(z_\Lambda) = \sum_{p \in \Lambda} \psi_p(z_p)$$

## II.2. TRANSFORMATION DE L'ESPACE DES PHASES

Soit l'ensemble des liens intérieurs au parallélépipède

$$(0 \leq x \leq T; -L \leq y \leq L; -L \leq z \leq L) \quad T, L \in \mathbb{N}$$

Soit  $\Lambda'$  tel que  $\Lambda \subset \Lambda'$

On considère l'ensemble des variables aléatoires suivantes

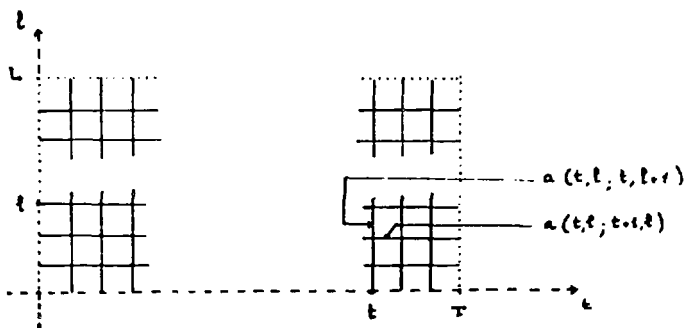
$$\mathcal{R}^1 = \{ a(t, l; t, l), t \in [0, \tau-1], l \in [0, L-1] / a^1(t, l; t, l) = a(t, l; t, l) \}$$

$$\mathcal{R}^1 \in \mathcal{U}(1)^{L \times T}$$

$$\mathcal{R}^2 = \{ a(t, l; t, l+1), t \in [1, \tau-1], l \in [0, L-1] / a^2(t, l; l+1) = a(t, l+1; t, l) \}$$

$$\mathcal{R}^2 \in \mathcal{U}(1)^{L \times (\tau-1)}$$

les variables  $\mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2$  sont les variables d'un modèle de jauge bidimensionnel (voir Figure II.1).



On pose  $a = e^{iR}$

Figure II.1

Soit  $x_A$  une configuration. On note  $R x_A$  la configuration obtenue après la transformation suivante

$$\pi(n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t+1,\ell}^{(t)}) \xrightarrow{R^1} \alpha(t, \ell; t+1, \ell) \pi(n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t+1,\ell}^{(t)})$$

$$\text{pour } t = \{0, 1, \dots, T-1\}, \ell = \{0, 1, \dots, L-1\}$$

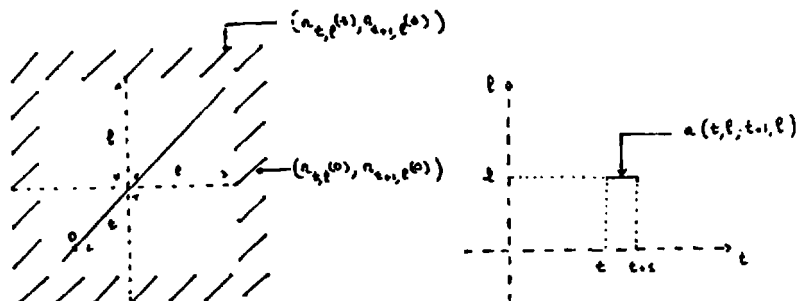
$$\text{pour tout lien } (n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t+1,\ell}^{(t)}) \text{ tel que } P_{ij}\{(n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t+1,\ell}^{(t)})\} = (n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t+1,\ell}^{(t)})$$

$$\pi(n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t,\ell+1}^{(t)}) \xrightarrow{R^2} \alpha(t, \ell; t, \ell+1) \pi(n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t,\ell+1}^{(t)})$$

$$\text{pour } t = \{1, 2, \dots, T-1\}, \ell = \{0, 1, \dots, L-1\}$$

$$\text{pour tout lien } (n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t,\ell+1}^{(t)}) \text{ tel que } P_{ij}\{(n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t,\ell+1}^{(t)})\} = (n_{t,\ell}^{(t)}, n_{t,\ell+1}^{(t)})$$

voir Figure 11.2.



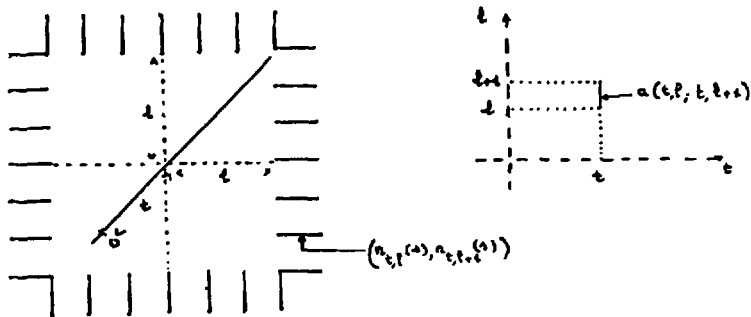


Figure II.2

On a donc un espace des phases élargi où sur chaque lien est définie une variable aléatoire  $x(n, n')$  et une variable agissant sur  $x(n, n')$ .

Sur cet espace, on considère la densité de probabilité suivante

$$P(R, x_n, x_{n'/n} | x_n^-) = \frac{e^{-U(R, x_n, x_{n'/n} | x_n^-)}}{\int \nu(dR) \int \nu(dx_n) e^{-U(R, x_n, x_{n'/n} | x_n^-)}}$$

où

$$\nu(dR) = \left\{ \prod_{t_0}^{T-1} \prod_{l_0}^{L-1} \nu[da(t, l, t, l, t)] \right\} \left\{ \prod_{t_0}^{T-1} \prod_{l_0}^{L-1} \nu[da(t, l; t, l, t)] \right\}$$

$\nu(da)$  étant la mesure de Haar sur  $U(1)$ .

Analysons la contribution de la transformation  $\hat{R}$  sur l'énergie.

a) Sur les plaquettes  $R_{t, l}$  (a) la transformation se réduit à une

transformation de jauge.

En effet, soit  $p = (n_1, n_2, n_3, n_4)$  une plaquette  $R_{t,p}(s)$ , alors

$$v_p(x_p) \xrightarrow{R} v_p(a_{1,p} x(n_1, n_2), x(n_1, n_3), a_{2,p} x(n_3, n_4), x(n_4, n_1))$$

avec  $a_{1,p} = a_{2,p}^{-1}$

Par la transformation de jauge suivante.

$$x(n_i, n_j) \rightarrow \Omega_i x(n_i, n_j) \Omega_j^{-1} \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \Omega_i a(n_i, n_j) \Omega_i^{-1} = I \\ \Omega_i = \Omega_j \\ \Omega_i = \sigma \Omega_j \end{cases}$$

il est facile de voir que  $v_p$  ne dépend ni de  $a_{1,p}$  ni de  $a_{2,p}$ , et donc si  $p$  est une plaquette  $R_{t,p}(s)$ , alors

$$v_p(x_p) \xrightarrow{R} v_p(x_p)$$

De même, pour les plaquettes de type  $S_{t,p}(s)$  la transformation se réduit à une transformation de jauge.

Remarque. Ceci est vrai parce que les éléments  $a$  et  $x$  commutent.

b) Les plaquettes  $Q_{t,p}(s)$  se transforment de la manière suivante :

$$\text{Soit } Q_{t,p}(s) \equiv \begin{array}{ccc} n_{2,t}(s) & & n_{4,t}(s) \\ \square & & \\ n_{3,t}(s) & & n_{1,t}(s) \end{array}$$

alors



$$\begin{aligned}
 x(n_{t,l}(s), n_{t+1,l}(s)) &\xrightarrow{R} a(t,l; t+1,l) x(n_{t,l}(s), n_{t+1,l}(s)) \\
 x(n_{t+1,l}(s), n_{t+1,l+1}(s)) &\xrightarrow{R} a(t+1,l; t+1,l+1) x(n_{t+1,l}(s), n_{t+1,l+1}(s)) \\
 x(n_{t+1,l+1}(s), n_{t+1,l+1}(s)) &\xrightarrow{R} a(t+1,l+1; t,l) x(n_{t+1,l+1}(s), n_{t+1,l+1}(s)) \\
 x(n_{t+1,l+1}(s), n_{t+1,l}(s)) &\xrightarrow{R} a(t,l+1; t,l) x(n_{t+1,l+1}(s), n_{t+1,l}(s))
 \end{aligned}$$

c) Changement de variable

Posons

$$\begin{cases}
 a(t,l; t,l+1) = \mathcal{F}_{t,l} \mathcal{F}_{t,l+1}^{-1} \\
 a'(t,l; t+1,l) = \mathcal{F}_{t,l}^{-1} a(t,l; t+1,l) \mathcal{F}_{t+1,l} \\
 b_{t,l} = a'(t,l; t+1,l) a^{-1}(t,l+1; t+1,l+1)
 \end{cases}$$

En posant  $b_{t,l} = e^{i B_{t,l}}$ , on peut remarquer que ce changement de variable correspond à "B = rot A".

Par transformation de jauge, il est facile de voir que, après transformation,  $\chi_{Q_{t,l}(s)}$  dépend uniquement de  $b_{t,l}$  et de  $\chi_{Q_{t,l}(s)}$

$$\mathcal{U}_{Q_{t,l}(s)}(\chi_{Q_{t,l}(s)}) \xrightarrow{R} \mathcal{U}_{Q_{t,l}(s)}(b_{t,l}, \chi_{Q_{t,l}(s)})$$

La Figure II.3 résume la transformation

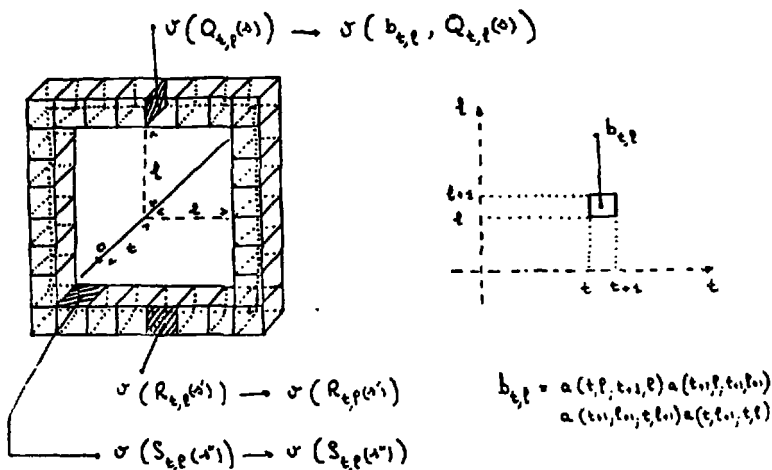


Figure 11.3

Remarque. Lorsque le potentiel est le potentiel usuel défini pour (1.10) l'effet de la transformation est d'ajouter à chaque plaquette  $Q_{t,p}(s)$  le même "champ magnétique"  $B_{t,p}$ .

Si  $x(n, n') \in U(1)$ , on pose  $x = e^{iX}$

Alors la transformation s'écrit  $X \rightarrow X + A$

et donc "rot X"  $\rightarrow$  "rot X + A" = "rot X" + "rot A"  
 $=$  "rot X" + B

$$\omega_1[X(\partial Q_{t,p}(s))] \rightarrow \omega_1[X(\partial Q_{t,p}(s)) + B_{t,p}]$$

Après la transformation  $\mathcal{R}$  l'énergie s'écrit donc de la manière suivante :

$$U(R, x_{\lambda}, x_{\lambda'/\lambda} | x_{\lambda'}) = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{L-1} U(b_{t,l}, x_{Q_{t,l}})$$

$$\cdot \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{L-1} U(x_{R_{t,l}}) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{L-1} U(x_{S_{t,l}}) + U(x_{\lambda'/\lambda} | x_{\lambda'}) \quad (11.2)$$

$$\text{ou } \begin{cases} U(b_{t,l}, x_{Q_{t,l}}) = \sum_{Q_{t,l}^{(k)} \in Q_{t,l}} \psi(b_{t,l}, x_{Q_{t,l}^{(k)}}) \\ U(x_{R_{t,l}}) = \sum_{R_{t,l}^{(k)} \in R_{t,l}} \psi(x_{R_{t,l}^{(k)}}) \\ U(x_{S_{t,l}}) = \sum_{S_{t,l}^{(k)} \in S_{t,l}} \psi(x_{S_{t,l}^{(k)}}) \end{cases}$$

Remarque.

Nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial b_{t,l}^2} U(b_{t,l}, x_{Q_{t,l}}) \leq 4(2L+1)K \leq C_1(K).L \quad (11.3)$$

en effet  $U(b_{t,l}, x_{Q_{t,l}})$  est la somme de  $4(2L+1)$  termes dépendant de  $B_{t,l}$ , chacun de ces termes a une dérivée seconde par rapport à  $B_{t,l}$  bornée par  $K$  (condition B sur le potentiel).

Nous analysons dans le paragraphe suivant les propriétés des variables aléatoires  $R$ .

11.3. ETUDE DES VARIABLES BIDIMENSIONNELLES

Considérons la densité de probabilité suivante

$$p(R | x_{\lambda}, x_{\lambda'}) = \frac{e^{-U(R, x_{\lambda}, x_{\lambda'/\lambda} | x_{\lambda'})}}{\int p(dR) e^{-U(R, x_{\lambda}, x_{\lambda'/\lambda} | x_{\lambda'})}}$$

en utilisant (II.2), on obtient :

$$p(R | x_{\lambda'}, x_{\bar{\lambda}}) = p(B | x_{\lambda'}, x_{\bar{\lambda}}) \quad (II.4)$$

où

$$p(B | x_{\lambda'}, x_{\bar{\lambda}}) = \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{\ell=0}^{L-1} p_{t,\ell}(b_{t,\ell} | x_{Q_{t,\ell}})$$

$$p_{t,\ell}(b_{t,\ell} | x_{Q_{t,\ell}}) = \frac{e^{-u(b_{t,\ell}, x_{Q_{t,\ell}})}}{\int p(d_{t,\ell}) e^{-u(b_{t,\ell}, x_{Q_{t,\ell}})}}$$

La densité de probabilité  $p(B | x_{\lambda'}, x_{\bar{\lambda}})$  est associée à un modèle de jauge bidimensionnel. Les variables aléatoires  $B_{t,\ell}$  sont indépendantes et si  $\Psi$  est la somme des variables aléatoires  $B_{t,\ell}$ , alors la densité de probabilité associée à  $\Psi$  est le produit de convolution des densités de probabilité  $p(b_{t,\ell} | x_{Q_{t,\ell}})$ . La boucle de Wilson usuelle  $\langle e^{i\Psi} \rangle$  est associée à la fonction caractéristique de la densité  $P(\gamma)$  où  $\gamma = e^{i\Psi}$ .

Remarque. La somme des variables  $B_{t,\ell}$  est égale à la somme des variables  $A(t, \ell; t+1, \ell)$  sur le segment  $(t=0, \ell=0; t=T, \ell=0)$ .

#### Théorème I

Soit  $\gamma = \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{\ell=0}^{L-1} b_{t,\ell}$  et soit  $p(b_{t,\ell} | x_{Q_{t,\ell}})$  défini par (II.4).

Si pour tout  $p$   $\beta_T = \beta$ , alors

$$\max_{\beta \in U(1)} |p(B | x_{\lambda'}, x_{\bar{\lambda}}) - 1| \leq e^{-C(\beta, K) T \log L} \quad (II.5)$$

$C(\beta, K)$  étant une constante dépendant de  $\beta$  et  $K$ .

$p(B | x_{\lambda'}, x_{\bar{\lambda}})$  étant le produit de convolution des densités  $p_{t,\ell}$ .

Preuve : Le théorème est une conséquence du lemme suivant.

Lemme.

Si  $p_1, \dots, p_n$  sont des densités de distribution de probabilité sur  $U(1)$  telles que  $p_i(x) \leq \alpha_i$ , alors pour la convolution des fonctions  $p_i$  nous avons

$$\max_{x \in U(1)} |(p_1 * \dots * p_n)(x) - 1| \leq (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} \prod_{i=3}^n (1 - \alpha_i^2)$$

cf. [3].

Démontrons que  $p_{t,t}(b_{t,t} | x_{Q_{t,t}}) \leq c_2$ .  
Il existe  $b_{t,t}^0 = e^{-\frac{c_1}{2} |B_{t,t}^0 - B_{t,t}^0|}$  tel que

$$U(b_{t,t}^0, x_{Q_{t,t}}) = \min_{b_{t,t} \in U(1)} U(b_{t,t}, x_{Q_{t,t}})$$

en utilisant le développement de Taylor-Lagrange et l'inégalité (II.3) on obtient

$$\begin{aligned} U(b_{t,t}, x_{Q_{t,t}}) &\leq U(b_{t,t}^0, x_{Q_{t,t}}) + \frac{c_1 \rho}{2} |B_{t,t} - B_{t,t}^0|^2 \\ \text{d'où} \int e^{-U(b_{t,t}, x_{Q_{t,t}})} \nu(b_{t,t}) &\geq e^{-U(b_{t,t}^0, x_{Q_{t,t}})} \int e^{-\frac{c_1 \rho}{2} |B_{t,t} - B_{t,t}^0|^2} \nu(b_{t,t}) \\ &\geq c_1' (\sqrt{\rho})^{-2} e^{-U(b_{t,t}^0, x_{Q_{t,t}})} \end{aligned}$$

d'où

$$p_{t,t}(b_{t,t} | x_{Q_{t,t}}) \leq c_2 \sqrt{\rho}$$

De cette inégalité et du lemme, on obtient pour  $p(\mathcal{J} | x_{\lambda}, x_{\bar{\lambda}})$  l'estimation suivante :

$$p(\mathcal{J} | x_{\lambda}, x_{\lambda'}) \leq \left[ \alpha, \alpha, \frac{L}{4\pi} (1 - \alpha_2^2) \right]^T$$

avec  $\alpha_2 = C_2 \sqrt{E}$

on obtient (II.5) en remarquant que  $1 - \alpha_2 \leq e^{-\alpha_2}$ .

#### Interprétation du Théorème 1

Considérons la 1-chaîne  $\Gamma_{AB}$  formée par le segment A,B

$$A \equiv \{t = 0, x = 0, y = 0\} \quad B \equiv \{t = T, x = 0, y = 0\}$$

et  $\Gamma'$  une 1-chaîne telle que  $\Gamma' \cup \Gamma_{AB}$  soit un rectangle de dimension  $L \times T$

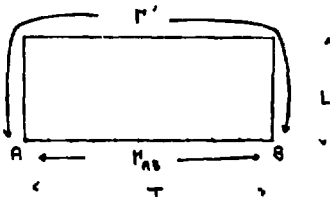


Figure II.4

Le Théorème 1 signifie que la circulation  $\Gamma'$  étant fixée, on peut modifier la circulation  $\Gamma_{AB}$  ou ce qui revient au même de modifier le "flux" traversant toute surface s'appuyant sur  $\Gamma_{AB} \cup \Gamma'$ .

On peut s'intéresser à la possibilité de modifier indépendamment les variables de liens de  $\Gamma_{AB}$ . Pour cela, on considère la densité de probabilité suivante :

$$p(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_T) = \text{Prob} \left[ a(0,0,1,0) = \mathcal{J}_1, \dots, a(t,0,t+1,0) = \mathcal{J}_t, \dots, a(T,0,T,0) = \mathcal{J}_T \right]$$

en utilisant le Lemme II et les propriétés du potentiel, on peut montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, T\}$

$$\max_{\mathcal{I}_i \in \mathcal{U}(0)} |P(\mathcal{I}_i) - 1| \leq e^{-c\beta_i \cdot L}$$

on obtient ainsi

$$|P(\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_T)| \leq \left(1 + \frac{1}{L^{\beta_i}}\right)^T$$

#### II.4. COMPORTEMENT DU PARAMÈTRE DE WILSON

Du Théorème I, il est aisé de déduire le comportement du paramètre de Wilson.

##### Théorème II

Soit un potentiel vérifiant les conditions A, B, . D, E.

Soit  $\mathcal{H}$  un 1-cycle rectangulaire de dimension  $L \times T$ .

Soit  $\mu$  la densité de probabilité gibbsienne associée à  $\mathcal{U}$

$$P(x_{\mathcal{H}} | x_{\bar{\mathcal{H}}}) = \frac{e^{-\mathcal{U}(x_{\mathcal{H}} | x_{\bar{\mathcal{H}}})}}{\int e^{-\mathcal{U}(x_{\mathcal{H}} | x_{\bar{\mathcal{H}}})} \mu(dx_{\mathcal{H}})}$$

alors

$$(11.6) \quad \int \mu(dx_T) |P(x_T | x_{\bar{\mathcal{H}}}) - \tilde{P}(x_T | x_{\bar{\mathcal{H}}})| \leq e^{-c(\beta, \kappa) T \log L}$$

et

$$(11.7) \quad \int \mu(dx_T) |P_T(\phi | x_{\bar{\mathcal{H}}}) - \tilde{P}_T(\phi | x_{\bar{\mathcal{H}}})| \leq e^{-c(\beta, \kappa) T \log L}$$

où

$$\begin{aligned}
 P_{\mu}(\phi | x_{\bar{\lambda}}) &= \mathbb{P}_{\text{ob}} \{ \pi(r) = \phi | x_{\bar{\lambda}} \} = \int \mu(dz_r) p(z_r | x_{\bar{\lambda}}) \delta(\pi(r)\phi) \\
 \tilde{P}(z_r | x_{\bar{\lambda}}) &= \int \mu(dz) p(z | z_r | x_{\bar{\lambda}}) \\
 \tilde{P}(\phi | x_{\bar{\lambda}}) &= \int \mu(dz) p(z | \phi | x_{\bar{\lambda}})
 \end{aligned}$$

Preuve : Soit  $\Gamma$  le 1-cycle formé par les bords du rectangle de sommet  $M, N, P, Q$ , où

$$M \equiv \{ t = 0, x = 0, y = 0 \}$$

$$N \equiv \{ t = T, x = 0, y = 0 \}$$

$$P \equiv \{ t = T, x = L, y = 0 \}$$

$$Q \equiv \{ t = 0, x = L, y = 0 \}$$

- Nous montrons d'abord l'inégalité suivante

$$\left| \int \mu(dz) | p(z | x_{\mu} x_{\bar{\lambda}}) - 1 | \leq e^{-c(\beta, K) T \log L} \quad (II.8)$$

cette inégalité est une conséquence de la formule

$$\begin{aligned}
 P(z | x_{\mu} x_{\bar{\lambda}}) &= \int \mu(dx_{\lambda'/r}) p(z, x_{\lambda'/r} | x_{\mu} x_{\bar{\lambda}}) \\
 &= \int \mu(dx_{\lambda'/r}) p(z | x_{\lambda'} x_{\bar{\lambda}}) p(x_{\lambda'/r} | x_{\mu} x_{\bar{\lambda}})
 \end{aligned}$$

et de l'inégalité

$$\left| \int \mu(dz) | p(z | x_{\lambda'} x_{\bar{\lambda}}) - 1 | \leq e^{-c(\beta, K) T \log L}$$



qui découle du Théorème I.

- L'inégalité (II.6) est une conséquence de (II.8). En écrivant dans (II.8) :

$$P(\mathcal{Z} | x_T, x_{\tilde{\lambda}'}^*) = \frac{P(\mathcal{Z} | x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*)}{P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*)}$$

(II.7) est une conséquence de (II.6).

En effet, puisque le potentiel est invariant de jauge, la densité  $P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*)$  ne dépend uniquement que de  $x(\tilde{r})$  ( $x(\tilde{r}) = \prod_{\langle n, n' \rangle \in \tilde{r}} x(n, n')$ ) et donc

$$P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*) = P(x_1, x_2, \dots, x_{r-1} | x_{\tilde{\lambda}'}^*) = P(x(\tilde{r}), 1, \dots, 1 | x_{\tilde{\lambda}'}^*)$$

$$P_T(\phi | x_{\tilde{\lambda}'}^*) = P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*)$$

### Théorème III

Dans les hypothèses du Théorème II et pour  $G = U(1)$ , alors

$$\int P(d x_T) | P_T(\phi | x_{\tilde{\lambda}'}^*) - 1 | \leq e^{-c(\beta, K) T \log L} \quad (II.9)$$

$$\text{et} \quad \langle x(\tilde{r}) \rangle_{x_{\tilde{\lambda}'}^*} \leq e^{-c(\beta, K) T \log L} \quad (II.10)$$

Preuve : (II.9) est une conséquence de (II.7) en remarquant que pour  $G = U(1)$ ,

$$\tilde{P}_T(\phi | x_{\tilde{\lambda}'}^*) = 1$$

(II.10) est une conséquence de (II.9).

En effet :

$$\begin{aligned} \langle x(\tilde{r}) \rangle &= \int P(d x_T) P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*) x(\tilde{r}) \\ &= \int P(d x_T) [P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*) - 1] x(\tilde{r}) + \int P(d x_T) x(\tilde{r}) \\ &\leq \int P(d x_T) | P(x_T | x_{\tilde{\lambda}'}^*) - 1 | \end{aligned}$$

11.5. QUELQUES REMARQUES SUR LA BRISURE DE SYMETRIE

Pour les modèles de jauge sur réseau, il est connu [14] qu'il n'y a jamais brisure spontanée de symétrie de jauge, la symétrie étant locale et donc l'espérance d'une quantité non invariante de jauge est nulle.

La situation semble a priori différente lorsque la jauge est fixée. Cependant, même dans la jauge axiale, l'espérance d'une variable de lien est nulle. L'argument dû à F. Guerra est le suivant :

Prenons par exemple un modèle de jauge sur le groupe  $Z_2$  en dimension  $d > 1$ , l'espace étant rapporté aux axes  $(t, \vec{x})$ ,  $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_d\}$ .

On fixe la jauge axiale suivante : toutes les variables dans la direction  $t$  sont prises identiques à 1.

Sur tout l'espace, on fait la transformation de jauge suivante :

$$\sigma(n, n') \rightarrow \Omega(n) \sigma(n, n') \Omega(n') \quad \sigma \in \Omega \in Z^d$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Omega(n) = -1 & \text{pour } n \text{ appartenant à la droite} \\ & \{x_1 = x_2 = \dots = x_d = 0\} \\ \Omega(n) = 1 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

Donc nous avons multiplié par -1 les liens  $\sigma^{x_i}(t, 0)$  pour tout  $t$  et pour tout  $x_i$ .

Soit  $b$  et  $b'$  les conditions aux bords avant et après transformation, alors

$$\langle \sigma^{x_i}(t, 0) \rangle^b = - \langle \sigma^{x_i}(t, 0) \rangle^{b'}$$

or à la limite thermodynamique  $\langle \cdot \rangle^b = \langle \cdot \rangle^{b'}$

$$\text{donc } \langle \sigma^{x_i}(t, 0) \rangle = 0$$

On peut utiliser cet argument parce que l'on change les conditions aux

bords seulement sur une ligne. Par exemple, il ne s'applique pas lorsque l'on se place dans la jauge "J" où toutes les variables de liens de l'ensemble  $\{\gamma_{n_{\ell}, \ell}\}$  (voir notation p. 1.15) sont prises identiques à 1.

Remarque 1

Du paragraphe II.2, il résulte qu'un potentiel vérifiant les conditions A et E est invariant par la transformation  $R^{\ell}$  pour  $a(t, \ell; t_{\ell+1}, \ell)$  indépendant de  $\ell$  et pour tout lien  $(n_{\ell, \ell^{(0)}}, n_{\ell+1, \ell^{(1)}})$  appartenant à  $\Sigma^*$  lorsque G est U(1) ou un groupe dont le centre contient U(1) et lorsque a appartient à U(1). Soit  $R'$  cette transformation pour un certain  $t_0$  fixé.

L'étude de l'absence de brisure spontanée de cette symétrie pour un  $t_0$  fixé est identique à celle étudiée par Dobrushin Shlossman dans [2]. En effet, on se ramène au cas de [2] en faisant la transformation suivante

$$\alpha(n_{t_0, \ell^{(0)}}^{(0)}, n_{t_0+1, \ell^{(1)}}^{(1)}) \longrightarrow \alpha_{\ell} \alpha(n_{t_0, \ell^{(0)}}^{(0)}, n_{t_0+1, \ell^{(1)}}^{(1)})$$

$$\begin{cases} \ell = \{0, 1, \dots, L-1\} \\ \Lambda = (n_{t_0, \ell^{(0)}}^{(0)}, n_{t_0+1, \ell^{(1)}}^{(1)}) \quad \forall \ell = \{0, 1, \dots, L-1\}, \forall \Lambda \end{cases}$$

On peut donc conclure que cette symétrie n'est pas spontanément brisée et donc que les états de Gibbs sont invariants par la transformation  $R^{\ell}$ .

Si l'on se place dans la jauge "J" citée ci-dessus, l'argument reste vrai du fait que les variables choisies identiques à 1 ne sont pas affectées par la transformation. Donc dans cette jauge, l'espérance d'une variable de lien est égale à zéro.

Remarque 2

Si l'on considère un modèle dont le potentiel est défini par (1.8) (modèle de jauge pure usuel) sur un groupe de Lie compact annexe G, on peut obtenir un résultat analogue dans la jauge J (toujours en dimension 3). En effet, dans cette jauge, le potentiel est invariant par

la transformation suivante :

pour tout lien  $(n, n') \in x(n, n') \xrightarrow{\Omega} \Omega(n) x(n, n') \Omega^{-1}(n')$

avec  $\Omega(n) \equiv \Omega(x, y)$  indépendant de  $x$  et de  $y$ , et  $\Omega$  appartenant à  $G$ .

Il est possible de montrer que pour  $t$  fixé, cette invariance n'est pas spontanément brisée en utilisant la méthode développée par C. Pfister dans [5] ou celle utilisée par J. Fröhlich et C. Pfister dans [6].

## 11.6. LE CAS GENERAL : CAS D'UN POTENTIEL DE PORTEE FINIE

On considère un réseau 3-dimensionnel  $\mathbb{Z}^3$ .

Le potentiel vérifie les conditions A), B), C), D) (voir II.1).

$\Lambda$  est le parallélépipède  $(0 \leq t \leq d_0 T, -d_1 L \leq x \leq d_0 L, -d_2 L \leq y \leq d_2 L)$ , soit  $\Lambda'$  tel que  $\Lambda \subset \Lambda'$ .

On considère  $\mathcal{A}$  l'ensemble des variables  $a_{\alpha, \beta}$   $\alpha \in [0, T-1]$   
agissant sur  $x_{\Lambda}$  de la manière suivante :  $\beta \in [0, L-1]$

si  $t = \alpha d_0$

et si  $(\beta-1)d_2 < t \leq \beta d_2$ .

$$\pi(n_{t, \beta}^{(\alpha)}, n_{t+\beta d_2}^{(\alpha)}) \xrightarrow{\mathcal{R}} a_{\alpha, \beta} \pi(n_{t, \beta}^{(\alpha)}, n_{t+\beta d_2}^{(\alpha)})$$

pour  $\alpha \in [0, T-1]$

$\beta \in [0, L-1]$

La transformation  $\mathcal{R}$  contribue dans l'énergie de la manière suivante :

$$U(A, x_\Lambda, x_{\Lambda'/\Lambda} | x_{\Lambda'}) =$$

$$\sum_{\alpha, \beta} \sum_{A: \substack{\{A \cap Q_{d_0, \beta d_0} \text{ contient au} \\ \text{moins une plaquette de } Q_{d_0, \beta d_0}\}} V_A(\alpha_{\alpha, \beta}^{-1} \alpha_{\alpha, \beta+1}^{-1}, x_A)$$

$$+ \sum_{\alpha, \beta} \sum_{A: \substack{\{A \cap Q_{d_0, \beta d_0} \text{ ne contient} \\ \text{pas de plaquette de } \wedge_{d_0, \beta d_0}\}} V_A(x_A) + \sum_{A: \substack{\{A \cap x_\Lambda = \emptyset \\ \{A \cap x_{\Lambda'} \neq \emptyset\}}} V_A(x_A)$$

En effet, si  $A$  ne contient pas de plaquette  $Q_{d_0, \beta d_0}(a)$  il est facile de voir que la transformation se réduit à une transformation de jauge en remarquant que

$$a \times (a, a') a' = \times (a, a')$$

pour la même raison, si l'intersection de  $A$  et  $Q_{d_0, \beta d_0}$  contient au moins une plaquette  $Q_{d_0, \beta d_0}(a)$ , alors  $v_A$  ne dépend que de

$$\alpha_{\alpha, \beta}^{-1} \alpha_{\alpha, \beta+1}^{-1}$$

En faisant le changement de variable

$$\begin{cases} b_{\alpha, \beta} = \alpha_{\alpha, \beta}^{-1} \alpha_{\alpha, \beta+1}^{-1} & \forall \alpha \in [0, T-1] \quad \forall \beta \in [0, L-1] \\ b_{\alpha, L} = \alpha_{\alpha, L} & \forall \alpha \in [0, T-1] \end{cases}$$

l'inégalité (II. 5) reste vraie en remplaçant  $C(K)$  par  $C(K, d_0)$ .

Le reste de la démarche est alors analogue à (II.3), (II.4), (II.5). On obtient ainsi que le paramètre de Wilson est borné supérieurement par

$$e^{-C'(K, \beta, d_0) T \log L}$$

## II.7. CONCLUSION

Nous avons donc montré le confinement logarithmique à trois dimensions pour une classe d'interactions assez générale et indépendamment de la constante de couplage comme une conséquence de la symétrie continue de jauge. Nous espérons montrer ce résultat pour tout groupe de Lie compact connexe. Dans ce cas, on est conduit, en utilisant la méthode développée dans ce chapitre, à étudier des modèles  $\mathcal{G}$  unidimensionnels non linéaires comme dans [7].

Le résultat attendu lorsque le groupe de jauge est non-abélien est un potentiel de confinement linéaire. Comme nous l'avons dit dans le chapitre I, J. Fröhlich et R. Durrhus l'ont montré pour  $\beta$  suffisamment petit.

Ce problème est très proche de celui de la décroissance exponentielle des fonctions de corrélation à deux points du modèle  $\mathcal{G}$ . Récemment, une approche intéressante a été faite dans cette voie : une décroissance suffisante des fonctions de corrélation  $\langle \vec{S}_x, \vec{S}_y \rangle \leq \frac{4}{d^2} e^{-c|x-y|}$  (où  $d$  est la dimension de l'espace) implique une décroissance exponentielle, voir [8].

Ce résultat a été démontré par Simon, Aizenman, Lieb [9], [10], [11], en utilisant des inégalités de corrélation. Dans le chapitre suivant, nous étudions ces propriétés pour les modèles de jauge, le groupe de jauge étant  $Z_2$ .

CHAPITRE III

LE GROUPE  $z_2$  :

INEGALITES DE CORRELATION EN DIMENSION  $d$

III. 2. : INEGALITES DE CORRELATIONIII.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous généralisons (paragraphe III.2) l'inégalité de Simon [9], (p. 116), aux modèles de jauge. Nous montrons (paragraphe III.3) des propriétés de monotonie des boucles de Wilson (décroissance avec la surface). La démarche est analogue à celle utilisée par A. Messenger et S. Miracle-Sole [12] pour montrer la décroissance des fonctions de corrélation à deux points dans la distance, pour les modèles spin-spin. De même que dans [12], la validité des inégalités de Lebowitz [13] est nécessaire. Au paragraphe III.4, nous donnons une application de ces inégalités.

III.2. INEGALITES DE SIMON POUR LES MODELES DE JAUGE

Le potentiel considéré est le potentiel défini par la formule (1.9). Le réseau est  $d$ -dimensionnel  $d \geq 2$ .

Définitions 1

- Soit  $\Gamma$  un 1-cycle  $M, N$  2 sites de  $\Gamma$ . On note  $\Gamma = \Gamma \cup \Gamma_c$  avec  $\partial \Gamma = \partial \Gamma_c = \{M, N\}$
- Soit  $\{M_k\}_{k \in I}$  un ensemble de 1-chaînes tel que tout  $k$  appartenant à  $I$ ,  $\partial M_k = \{M, N\}$   $M_k \neq M_c, M_k \neq \Gamma_c$   
 $I$  est un ensemble d'indices.
- On dira que  $\{M_k\}_{k \in I}$  sépare  $\Gamma$  si pour toute surface  $S$  telle que  $\partial S = \Gamma$  il existe  $k$  tel que  $M_k \in S$ .
- Soit  $S$  une surface, c'est-à-dire un ensemble de plaquettes, chaque plaquette pouvant être recouverte plusieurs fois. Soit  $n_p$  le nombre



de fois que la plaquette  $p$  est recouverte. Soit  $f$  une fonction analytique des variables  $\beta_p$ . On note

$$\partial^S f = \frac{\partial^{\sum \beta_p} f}{\prod_{p \in S} \partial \beta_p} \quad \text{évaluée à } \beta_p = 0 \text{ pour tout } p$$

- Soit  $S$  et  $T$  deux surfaces telles que  $T \subset S$ . Soit  $R = S/T$ , on écrit  $S = T \oplus R$ , alors pour la formule de Leibnitz, on a :

$$\partial^S (fg) = \sum_{T \oplus R = S} (\partial^T f) (\partial^R g) \quad (III.1)$$

### Théorème 1

Soit  $U$  donné par la formule (I.9).

Soit  $M$  un 1-cycle  $M = M_1 \cup M_2$

Soit  $\{M_k\}_{k \in I}$  un ensemble de 1-chaînes séparant le 1-cycle (définition 1), alors avec les notations de la Définition 1, on a

$$\langle \sigma(M) \rangle = \left\langle \sum_{k \in I} \langle \sigma(M_1) \sigma(M_k) \rangle + \langle \sigma(M_2) \sigma(M_k) \rangle \right\rangle \quad (III.2)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est l'espérance dans le volume infini avec les conditions aux bords libres.

### Preuve

La preuve est similaire à [9] en remplaçant les graphes par des surfaces.

Soit

$$\langle \cdot \rangle_0 = \sum_{\sigma(\beta_p) = \pm 1} \cdot ; \quad \langle \cdot \rangle = \langle \cdot e^{-U} \rangle_0 / Z ; \quad Z = \langle e^{-U} \rangle_0$$

Soit

$$f(\beta_p) = \left[ \sum_{k \in I} \langle \sigma(M_1) \sigma(M_k) e^{-U} \rangle_0 + \langle \sigma(M_2) \sigma(M_k) e^{-U} \rangle_0 \right] - \langle e^{-U} \rangle_0 \langle \sigma(M) e^{-U} \rangle_0$$

puisque  $f$  est analytique, il suffit de montrer que

$$\partial^S f \geq 0 \quad (III.3)$$

pour toute surface  $S$ .

Il est facile de voir que

$$\partial^S \langle \sigma(M) e^u \rangle_0 = \sum_{\partial S, M} \quad (III.4)$$

où  $\delta$  est la fonction de Kronecker.

Considérons une surface  $S$  telle que  $\partial S = M$ .

Alors il existe  $k$  tel que  $M_k \in S$ , et donc il existe  $S_1$  et  $S_2$  tels que

$$S = S_1 \cup S_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \partial S_1 = M_k \cup M \\ \partial S_2 = M_k \cup M \end{cases}$$

Nous avons en appliquant (III.1)

$$\begin{aligned} & \partial^S \left[ \langle \sigma(M_k) \sigma(M_k) e^u \rangle_0 \langle \sigma(M_k) \sigma(M_k) e^u \rangle_0 - \langle e^u \rangle_0 \langle \sigma(M) e^u \rangle_0 \right] \\ &= \sum_{R_1 \oplus R_2 = S} \delta_{\partial R_1, \partial S} \delta_{\partial R_2, \partial S} - \sum_{T_1 \oplus T_2 = S} \delta_{\partial T_1, M} \delta_{\partial T_2, M} \end{aligned} \quad (III.5)$$

Le membre de droite de l'inégalité (III.5) est égal à zéro. En effet, par la formule :

$$\begin{aligned} T_1 &= R_1 \Delta S_1 \\ T_2 &= R_2 \Delta S_2 \end{aligned} \quad \text{où } \Delta \text{ est la différence symétrique.}$$

Il y a une correspondance une à une entre  $R_1 \oplus R_2 = S$ , et  $T_1 \oplus T_2 = S$  et donc une annulation terme par terme entre les deux sommes, ceci prouve (III.3) et donc le théorème.

III.3. PROPRIETES DE MONOTONICITE DES FONCTIONS DE CORRELATIONThéorème II

Soit  $U$  donnée par la formule (I.9).

Soit  $S$  une surface plane simplement connexe et  $P(S)$  le plan qu'elle définit.

Soit  $(M,N)$  un lien de  $\partial S = Y$  tel que toutes les plaquettes de  $S$  soient dans un même demi-plan par rapport à la droite  $\mathcal{D}_{M,N}$  définie par le lien  $(M,N)$ .

Soit  $\mathcal{P}_{M,N}$  l'ensemble des plaquettes contenant le lien  $(M,N)$   
 $|\mathcal{P}_{M,N}| = 2(d-1)$  où  $d$  est la dimension de l'espace.

Soit  $P_0 = \mathcal{P}_{M,N} \cap S$ .

Alors, pour toute plaquette  $p$  de  $\mathcal{P}_{M,N}$ ,  $p \neq P_0$ , et avec des conditions aux bords libres ou périodiques

$$\langle \sigma(M) \sigma(\partial p) \rangle \leq \langle \sigma(M) \rangle \quad (\text{III.6})$$

$$\langle \sigma(M) \rangle \leq \langle \sigma(M) \sigma(\partial P_0) \rangle \quad (\text{III.7})$$

Preuve : La méthode est analogue à celle utilisée dans [17].

L'idée consiste à considérer le système de variables comme deux systèmes métriques par rapport à  $d$  hyperplan appelé hyperplan de duplication et d'utiliser ensuite les inégalités de Labovita.

- Nous démontrons tout d'abord (III.6) pour  $p$  appartenant au plan  $P(S)$ . Pour simplifier les notations, nous choisissons l'origine de telle sorte que  $\mathcal{D}_{M,N}$  soit la droite définie par  $\{x_i = 0 \ \forall i \neq 1\}$  et que  $S$  soit dans le demi-plan  $\{x_i = 0, \ \forall i \neq 1, \ 2, \ x_2 \geq 0\}$ .

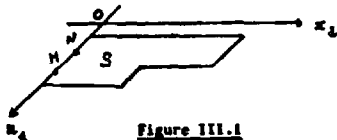


Figure III.1

Soit  $H(x^1, \dots, x^d)$  l'hyperplan  $\{x^1 = -\frac{1}{2}\}$

Chaque site  $x = \{x_1, \dots, x_d\}$  tel que  $x^1 \geq 0$  a un symétrique par rapport à l'hyperplan  $H(x^1 = -\frac{1}{2})$  que nous noterons  $\bar{x}$

$$x = \{x^1, x^2, \dots, x^d\} \Rightarrow \bar{x} = \{x^1, -(x^1), \dots, x^d\}$$

Nous choisissons la jauge axiale suivante :

Pour tout  $x$ ,  $\sigma^{x^1}(x) = 1$

ou  $\sigma^{x^i}(x) = \sigma(x^1, \dots, x^i, \dots, x^d; x^1, \dots, x^{i+1}, \dots, x^d)$

U s'écrit en fonction des variables  $\sigma^{x^i}(x)$  et  $\sigma^{x^i}(\bar{x})$ .

On pose

$$\begin{cases} p^{x^i}(x) = \frac{\sigma^{x^i}(x) - \sigma^{x^i}(\bar{x})}{2} \\ q^{x^i}(x) = \frac{\sigma^{x^i}(x) + \sigma^{x^i}(\bar{x})}{2} \end{cases}$$

On peut alors vérifier que U est ferromagnétique dans les variables p et q (ceci est vrai parce que l'interaction entre les deux systèmes est à deux corps du fait que l'on s'est placé dans la jauge axiale). La quantité

$$G(M) - G(N) G(\partial P) = G(M) G(M, N) [G(M, N) - G(M, N) G(\partial P)]$$

s'exprime comme une somme de termes de la forme  $\prod_{\ell} p_{\ell} \prod_{\ell'} q_{\ell'}$

Nous sommes donc dans les hypothèses des inégalités de Lebowitz [13] qui assurent que

$$\langle p_A q_B \rangle \geq 0 \quad \begin{cases} p_A = \prod_{i \in A} p_i \\ q_B = \prod_{i \in B} q_i \end{cases}$$

on peut donc conclure (III.6) dans ce cas.

Dans le cas où  $p$  n'appartient pas au plan  $P(S)$ , on choisit successivement les hyperplans de duplication et jauge correspondants suivants :

$$\begin{aligned} H^i & : x^i = +\frac{1}{2} \text{ avec la jauge axiale de direction } x^i \\ & x^i = -\frac{1}{2} \text{ avec la jauge axiale de direction } x^i \end{aligned}$$

pour  $i = 3, 4, \dots, d$ .

Pour démontrer (III.7), on choisit l'hyperplan de duplication  $x^i = \frac{1}{2}$ , et on se place dans la jauge axiale de direction  $x^i$ .

La quantité  $\sigma(r) \sigma(\partial \rho) - \sigma(r)$  s'écrit alors comme une somme de termes de la forme  $\prod \rho_t \prod q_t'$ , l'application de l'inégalité de Lebowitz implique alors (III.7).

#### III.4. APPLICATION

Dans ce paragraphe, nous montrons une application simple des inégalités précédentes. Nous montrons que pour certaines conditions sur l'expectation d'une plaquette, le paramètre de Wilson a une décroissance en aire. Pour les modèles de jauge, l'inégalité (III.1) ne permet pas de ramener cette hypothèse directement à une hypothèse sur le comportement des fonctions de corrélation comme cela est fait dans [9].

#### Théorème

Soit  $W$  une surface rectangulaire de dimension  $L \times T$ .

$\lambda$  étant un lien, on pose

$$H_\ell = \sum_{P/p > \ell} \langle \sigma(\partial p) \rangle$$

Si pour tout  $\rho \in W$   $H_\rho < 1$ .

alors  $\langle \sigma(\partial W) \rangle \leq e^{-\lambda L.T}$

où  $\lambda = - \frac{1}{L.T} \sum_{\rho \in \mathcal{L}} \text{Log } H_\rho$

$\mathcal{L}$  étant un ensemble de liens de  $W$  tel que  $|\mathcal{L}| = L.T$

Preuve : Soit  $\rho_0$  un lien de  $\partial W$

En appliquant l'inégalité (III.1) à  $W$

avec  $\{N, N\} = \partial \rho_0$ .

$$\{H_h\}_{h \in I} = \{ \partial \rho / \rho_0 / \rho \supset \rho_0 \}$$

(l'ensemble  $\{ \partial \rho / \rho_0 / \rho \supset \rho_0 \}$  sépare  $\partial W$ ).

On obtient

$$\langle \sigma(\partial W) \rangle \leq \sum_{\rho / \rho_0} \langle \sigma(\partial W) \sigma(\partial \rho) \rangle \langle \sigma(\partial \rho) \rangle$$

en appliquant les inégalités (III.6) et (III.7) aux quantités

$$\langle \sigma(\partial W) \sigma(\partial \rho) \rangle$$

où  $p$  contient  $\rho_0$ , on obtient:

$$\langle \sigma(\partial W) \sigma(\partial \rho) \rangle \leq \langle \sigma(\partial W) \sigma(\partial \rho_0) \rangle = \langle \sigma(\partial W') \rangle$$

où  $\rho_0$  est la plaquette appartenant à  $W$  et contenant  $\rho_0$ , donc  $W'$  contient  $(L.T)-1$  plaquettes.

On obtient ainsi

$$\langle \sigma(\partial W) \rangle \leq \langle \sigma(\partial W') \rangle H_{\rho_0}$$

En répétant cette opération  $(L.T)-1$  fois, on obtient le théorème.

### III.5. CONCLUSION

Dans le cas de groupes plus généraux, les inégalités citées dans ce chapitre ont été démontrées pour des potentiels à deux corps. Par exemple, les inégalités de Simon sont vérifiées pour le modèle  $\mathcal{G}$ . La démonstration [10] est basée sur les identités de Bard et les inégalités de Lebowitz. Le fait que l'interaction soit associée à un produit scalaire joue un rôle crucial. Pour la même raison, les inégalités de monotonie sont vérifiées seulement pour un potentiel associé à un produit scalaire entre deux vecteurs de  $R^2$  de norme 1.

Récemment, Boel et Kasteleyn ont dérivé un ensemble d'identités et d'inégalités appelées  $\Lambda$ -identités ( $\Lambda$ -inégalités) pour le modèle d'Ising. La méthode utilisée est très intéressante par le fait qu'elle donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la validité de ces identités (inégalités), de plus, elle s'applique au modèle d'Ising généralisé et est susceptible d'être généralisée à des groupes plus généraux. Aussi, il semblerait intéressant d'approfondir cette étude dans le cas des modèles de Jozsef.

## RESUME DE THESE DE TROISIEME CYCLE

Jean RUIZ

"Aspects probabilistes des théories de jauge sur réseau :  
Problème du confinement et inégalités de corrélation"

Ce travail sur les théories de jauge sur réseau dans le cadre de la mécanique statistique est divisé en trois parties :

Le premier chapitre est introductif : Définition, formalisme et résultats importants.

Le deuxième chapitre développe une méthode probabiliste qui permet de montrer le confinement permanent en dimension 3 d'espace temps pour les modèles de jauge définis sur le groupe  $U(1)$  ou un groupe tel que son centre contient  $0(1)$ .

Le troisième chapitre contient des inégalités de corrélation pour le modèle Ising jauge défini sur le groupe discret  $\mathbb{Z}_2$ .

NOTS CLES : Mécanique statistique - Théorie de jauge sur  
réseau - Confinement - Inégalités de  
corrélation.