

O Teorema dos Quatro Vértices e sua Recíproca

Mário Jorge D. Carneiro
Ronaldo A. Garcia

O Teorema dos Quatro Vértices e sua Recíproca

Mário Jorge D. Carneiro
Ronaldo A. Garcia

O Teorema dos Quatro Vértices e sua Recíproca

Primeira publicação, julho de 2019

Copyright © 2019 Mário Jorge D. Carneiro e Ronaldo A. Garcia.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-85-244-0430-6

MSC (2010) Primary: 53A04, Secondary: 53A15, 53A17, 53A20, 51M04, 51M05

Comissão Editorial

Emanuel Carneiro
S. Collier Coutinho
Lorenzo J. Díaz
Étienne Ghys
Paulo Sad

Produção Books in Bytes

Capa Sergio Vaz

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

Telefones: (21) 2529-5005
2529-5276

www.impa.br

ddic@impa.br

Sumário

Teorema dos quatro vértices e a sua recíproca	1
1 Curvatura de curvas planas	1
1.1 Introdução	1
1.2 O que é curvatura?	2
1.3 Círculo Osculador	4
1.4 Arcos Monótonos	5
1.5 Curvas Convexas	8
1.6 Vértices e singularidades de aplicações	9
1.6.1 Envelope de retas e evoluta de uma curva	9
1.7 Vértices e contato	14
1.8 Exercícios	17
2 Teorema dos Quatro Vértices	28
2.1 Introdução	28
2.2 Prova Analítica do TQV	28
2.3 Função suporte	29
2.4 Guggenheimer - Círculos bitangentes	30
2.5 Conjunto de simetria	33
2.6 A prova de R. Osserman	36
2.7 Outra prova analítica do TQV	40
2.8 Curvas não simples	42
2.9 Exercícios	43

3 A Recíproca dos Quatro Vértices	51
3.1 Recíproca do TQV	51
3.1.1 Uma prova para o caso convexo usando séries de Fourier	51
3.1.2 Deformações da curvatura por mudanças de coordenadas.	55
3.1.3 Resolvendo a equação em uma situação mais simples	59
3.1.4 A solução do caso convexo	61
3.1.5 Conclusão da recíproca do TQV	64
3.2 Exercícios	65
Curvatura em outros contextos geométricos e o problema de Toeplitz	69
4 Curvatura afim de curvas planas	70
4.1 Comprimento afim de curvas planas	70
4.2 Interpretação variacional	79
4.3 Contato com cônicas	80
4.4 Deformação de cônicas	82
4.5 Conjunto focal afim	84
4.6 Exercícios	85
5 Curvas centroafim no plano	90
5.1 Introdução	90
5.2 Curvatura centroafim	91
5.3 Contato com cônicas ou retas	95
5.4 Exercícios	96
6 Curvas planas projetivas	100
6.1 Introdução	100
6.2 Plano projetivo	106
6.3 Forma normal de uma curva projetiva	107
6.4 Elemento de arco e curvatura projetiva	109
6.5 Equações de Frenet	115
6.6 Exemplos	115
6.7 Interpretação geométrica da curvatura	116
6.8 Relação entre as curvaturas afim e projetiva	119
6.9 Reta normal projetiva	120
6.10 Exercícios	123
7 Curvatura Discreta	129
7.1 Introdução	129
7.2 Curvatura discreta de poligonais	130
7.3 Teorema dos quatro vértices discreto	136
7.4 Evoluta de uma poligonal convexa	138
7.5 Curvaturas discretas e a euclidiana	142

7.6 Exercícios	145
8 Problema de Toeplitz	149
8.1 Introdução	149
8.2 Quadrado Inscrito de Toeplitz	149
8.3 Exercícios	153
Bibliografia	155
Índice Remissivo	166

Prefácio

*“The beginning is the most important part of any work.”
“Geometry existed before creation.”*

– Platão (427 a.C.– 347 a.C.).

“ The product of mathematics is clarity and understanding. Not theorems, by themselves. ... In short, mathematics only exists in a living community of mathematicians that spreads understanding and breathes life into ideas both old and new.”

– W. Thurston (1946–2012).

A leitura do artigo “The four vertex theorem and its converse” de D. DeTurck, H. Gluck, D. Pomerleano e D. Shea Vick [DeTurck et al. \(2007\)](#) e do capítulo “Around the four vertices Theorem” [Fuchs e Tabachnikov \(2007, Lecture 10\)](#) do livro de D. Fuchs e S. Tabachnikov, motivou a elaboração dessas notas.

O Teorema dos Quatro Vértices (TQV) tem uma longa história. Em 1909, S. Mukhopadhyaya provou a primeira versão: uma oval (curva plana regular simples, fechada com curvatura estritamente positiva) que não é um círculo, possui pelo menos quatro pontos extremos da curvatura (dois máximos e dois mínimos locais).

Esse resultado foi generalizado em vários contextos e é possível encontrar várias provas diferentes. A. Kneser, em 1912, provou o teorema para o caso não convexo. W. C. Graustein, em 1937, e S. B. Jackson, em 1944, estudaram com mais detalhes a localização dos vértices em curvas fechadas regulares não necessariamente simples.

Outras provas do teorema surgiram usando propriedades analíticas ou geométricas (círculos inscritos bitangentes). Mais recentemente, em 1985, R. Osserman, obteve uma relação entre o número de vértices de uma curva simples fechada de classe C^2 com o número de componentes da interseção do traço da curva com o seu círculo circunscrito.

A recíproca do teorema dos quatro vértices para o caso convexo foi provada por H. Gluck, em 1971, motivado por um contexto mais geral (Problema de Minkowski generalizado) sobre a existência de esferas no espaço euclidiano com uma dada função curvatura Gaussiana estritamente positiva.

A recíproca no caso geral (sem a hipótese de curvatura estritamente positiva) foi provada por B. Dahlberg, em 1997.

O Teorema Fundamental das Curvas Planas afirma que a curvatura é o único invariante geométrico local das curvas regulares, restando assim investigar propriedades globais.

A literatura sobre o TQV e tópicos relacionados é bastante ampla e cada abordagem, seja analítica ou geométrica, revela novos aspectos e propriedades interessantes sobre as curvas planas. Assim sendo, podemos afirmar que o TQV serve de pretexto para introduzir ferramentas matemáticas poderosas, muitas das quais envolvem ideias ou conceitos que podem ser generalizados em outros contextos, para curvas em superfícies ou para dimensões mais altas. Essas ideias surgem em várias situações: contato entre curvas, singularidades de aplicações, homotopia, deformação e número de voltas, funções periódicas e equações diferenciais ordinárias.

Por outro lado, foi necessário limitar o escopo dessas notas evitando o enciclopedismo e dispersão. Por esse motivo, os exercícios propostos têm um duplo objetivo: complementar ou aprofundar o tópico exposto e aguçar a curiosidade do leitor ou leitora, motivando-os a explorar novos desdobramentos. Por essas razões, o nível dos exercícios varia desde aqueles de aplicação quase que imediata de conceitos até desafios ou perguntas cujas respostas não estão facilmente disponíveis.

Com o objetivo de discutir algumas ideias que nos conduzem a novas indagações, nos capítulos finais, são apresentados alguns tópicos sobre curvas planas que esperamos motivem o leitor a fazer as suas próprias expedições.

“I think it is said that Gauss had ten different proofs for the law of quadratic reciprocity. Any good theorem should have several proofs, the more the better. For two reasons: usually, different proofs have different strengths and weaknesses, and they generalize in different directions - they are not just repetitions of each other.” Michael Atiyah (1929–2019).

No capítulo 1 introduzimos o conceito de curvatura, círculo osculador, arcos monótonos, vértice, envelope e evoluta.

No capítulo 2 várias demonstrações do teorema dos 4-vértices são apresentadas.

No capítulo 3 a recíproca do teorema dos 4-vértices será analisada com detalhes no caso de ovais convexas.

No capítulo 4 apresentamos outro tópico sobre curvas convexas, a geometria diferencial afim e o teorema dos 6-vértices afins.

No capítulo 5 apresentamos outro tópico sobre curvas convexas, a geometria diferencial centroafim e o teorema dos 2-vértices.

No capítulo 6 apresentamos os rudimentos da geometria diferencial projetiva das curvas planas.

No capítulo 7 apresentamos o conceito de curvatura discreta para curvas poligonais e

o teorema dos 4-vértices.

No capítulo 8 é apresentado uma breve introdução ao problema de Toeplitz sobre inscrever um quadrado numa curva de Jordan.

Algumas referências bibliográficas citadas no texto foram incluídas por abordarem temas relacionados à geometria, singularidades e topologia das curvas, na maioria, planas.

Versões preliminares dessas notas foram usadas nos minicursos ministrados pelos autores na VIII Bienal da SBM em abril de 2017 e na Escola de Singularidades do ICMC/USP em julho/2018.

Mário Jorge D. Carneiro

e Ronaldo A. Garcia

BH, GYN, julho 2019.

I

Curvatura de curvas planas

“Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions.”

“Thus, in a sense, mathematics has been most advanced by those who distinguished themselves by intuition rather than by rigorous proofs.”

– F. Klein (1849-1925).

I read... that geometry is the art of making no mistakes in long calculations. I think that this is an underestimation of geometry. Our brain has two halves: one is responsible for the multiplication of polynomials and languages, and the other half is responsible for orientation of figures in space and all the things important in real life. Mathematics is geometry when you have to use both halves.

– V. Arnold (1937-2010).

1.1 Introdução

Em seu famoso programa “Erlanger Programm” de 1872, F. Klein formulou uma definição para a geometria. Segundo este princípio, geometria é basicamente o estudo das propriedades dos objetos geométricos (figuras) que restam intactos quando os mesmos são submetidos as ações de um certo grupo de transformações geométricas. No caso da

geometria euclidiana, as grandezas fundamentais que são preservadas por movimentos rígidos ou isometrias (rotações, reflexões e translações) são: distância entre dois pontos e ângulos entre duas retas.

Na geometria diferencial métrica temos vários conceitos que caracterizam os objetos geométricos. Um bom exemplo é a noção de curvatura de curvas no plano euclidiano. E o fato fundamental é de que para determinar uma curva $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, de classe C^2 , salvo movimentos rígidos, é suficiente conhecer uma única função $k(s)$, chamada a curvatura de γ .

Outro ponto importante a observar é de que todo conceito geométrico, para estar bem definido, deve ser independente de coordenadas. Mas, muitas vezes, é essencial escolher coordenadas naturais e adaptadas para expressar com maior síntese os conceitos. Nesse minicurso o leitor ou leitora poderá observar em várias ocasiões esse ponto de vista.

1.2 O que é curvatura?

Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , uma curva regular, simples, parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $|\gamma'(s)| = 1$.

Se $T(s) = \gamma'(s)$ e $N(s)$ é o vetor unitário da normal escolhido de modo que $\{T, N\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 então as fórmulas de Frenet são:

$$T'(s) = k(s)N(s), \quad N'(s) = -k(s)T(s). \quad (1.1)$$

A aplicação $s \mapsto T(s) \in \mathbb{S}^1$ é chamada indicatriz tangente da curva e a aplicação $s \mapsto N(s) \in \mathbb{S}^1$ é a aplicação normal de Gauss, que generaliza-se para o caso de hipersuperfícies.

Denotando por $T(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ o vetor unitário da tangente, $T'(s) = \varphi'(s) (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$.

Definição 1.1. *Definição de Curvatura:* $k(s) = \varphi'(s)$.

Proposição 1.1. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de γ é dada por*

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3}, \quad (1.2)$$

onde $[\gamma', \gamma'']$ é a área orientada do paralelogramo gerado por γ' e γ'' .

Demonstração. Exercício. □

Exemplo 1.1. *A curvatura de um círculo de raio r é igual a $\frac{1}{r}$.*

A curvatura da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, parametrizada por $\gamma(u) = (a \cos u, b \sin u)$, é igual a

$$\frac{ab}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Usando a Fórmula de Taylor obtemos a seguinte forma normal local para curvas regulares planas (parametrizadas pelo comprimento de arcos s):

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s - s_0) + \gamma''(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} \\ & + \gamma'''(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + O(4). \end{aligned}$$

Usando as Fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \gamma(s_0) + [(s - s_0) + k(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^3}{3!}]T(s_0) + [k(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} \\ & + k'(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!}]N(s_0) + O(4). \end{aligned}$$

Definição 1.2. *Um vértice de γ é um ponto de máximo local ou de mínimo local da curvatura.*

No caso em que a curva é de classe C^3 um vértice é um ponto crítico de k , isto é, $k'(s_0) = 0$.

O objetivo dessas notas é discutir o seguinte

Teorema (Quatro vértices). *Uma curva plana regular simples e fechada (curva de Jordan regular), contém pelo menos dois pontos distintos de máximo local e dois pontos distintos de mínimo local de k .*

Observação 1.1. *Uma curva de Jordan (curva fechada contínua e simples) divide o plano em duas regiões conexas, sendo uma limitada e outra não limitada. Para uma demonstração desse importante resultado no caso de curvas de classe C^2 veja [Alencar e Santos \(2008, cap. 4\)](#).*

A curvatura pode ser definida usando-se a noção de *contato entre curvas*. O traço de uma curva regular será denotado por γ e, neste texto, algumas vezes iremos confundir γ com o seu traço. Em geral, γ é tratado como objeto geométrico contido no plano, uma subvariedade uni-dimensional que possui uma métrica induzida pela métrica euclidiana do plano.

Definição 1.3. *Duas curvas regulares planas α e β de classe C^∞ possuem contato de ordem $m \geq 2$ em um ponto $p = \alpha(s_0)$ se $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, $\alpha'(s_0) = \beta'(s_0)$ e $\frac{d^j \alpha}{ds^j}(s_0) = \frac{d^j \beta}{ds^j}(s_0)$, para $j = 1, 2, \dots, m - 1$, mas $\frac{d^m \alpha}{ds^m}(s_0) \neq \frac{d^m \beta}{ds^m}(s_0)$.*

Exemplo 1.2. *Curvas que se intersectam possuem contato de ordem maior ou igual a zero. Curvas tangentes possuem contato de ordem maior ou igual a 1.*

Na definição acima temos que estar cientes da reparametrização das curvas. Veja [Bruce e Giblin \(1992\)](#) para esclarecimentos adicionais.

Exercício:

Se uma das curvas, digamos β , é definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, então α e β têm contato de ordem m em p se e somente se o primeiro termo não nulo da fórmula de Taylor da função composta $f(s) = F(\alpha(s))$ no ponto s_0 é o de grau m ou seja, a fórmula de Taylor da função composta $f(s) = F(\alpha(s))$ no ponto s_0 é: $\frac{f^{(m)}(s_0)(s-s_0)^m}{m!} + O(m+1)$.

1.3 Círculo Osculador

Vejamos como definir a curvatura em um ponto $p \in \gamma$ em termos de contato entre γ e círculos que passam p .

Começamos com uma pergunta: na família dos círculos tangentes a γ em $p \in \gamma$ qual é o círculo que possui maior ordem de contato com γ em p ?

Observe que círculos tangentes a γ em p são centrados na reta normal a γ em p . Trata-se de uma família parametrizada pelo centro do círculo ou seja, pelo raio r , distância do centro a p .

Para responder à pergunta, escrevemos a família de círculos parametrizada por r definida implicitamente como $F(z, r) = |z - (p + rN)|$, $r \neq 0$ e analisamos a função $f(s) = F(\gamma(s)) = |\gamma(s) - \gamma(s_0) - rN(s_0)|$.

A regra da cadeia, juntamente com a forma normal local implica que $f(s_0) = |r|$, $f'(s_0) = 0$ e

$$f''(s_0) = \frac{1 - k(s_0)r}{r}.$$

Conclui-se assim que o contato da curva com o círculo é máximo se, e somente se, $k(s_0) = \frac{1}{r}$. Veja Fig. 1.1. Por essa razão definimos

Definição 1.4. *O círculo osculador de γ em p é o círculo tangente a γ em p de raio $\frac{1}{|k(s_0)|}$. Ou seja, a equação do círculo osculador é:*

$$|z - \gamma(s_0) - \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)| = \frac{1}{|k(s_0)|}.$$

O inverso do raio (raio de curvatura) do círculo osculador é a *curvatura* de γ .

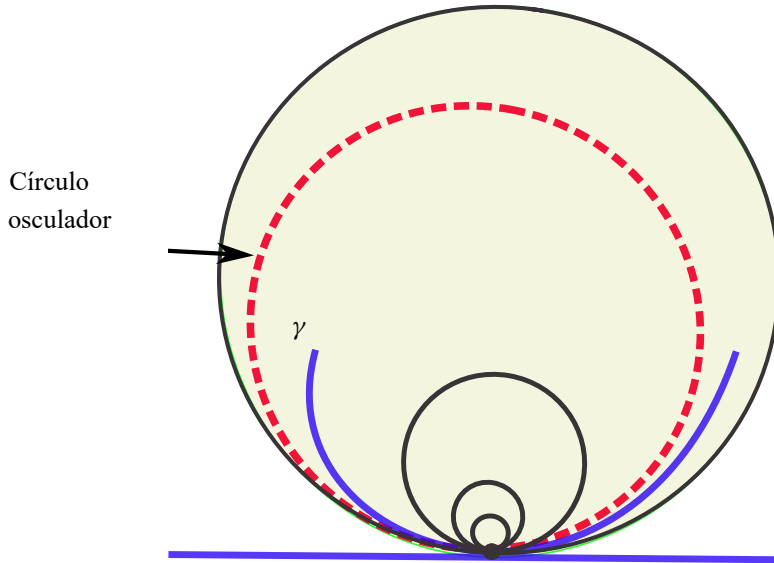


Figura 1.1: Círculo osculador e curvatura.

Relacionado com o problema acima temos as seguintes exercícios:

1. O que ocorre quando $k(s) = 0$?
2. Desenhe a família de círculos osculadores da curva (x, x^3) .
3. Usando a derivada terceira da função f definida acima, prove que se $\gamma(s_0)$ não é um vértice então existe uma vizinhança V de s_0 tal que o traço de γ em V atravessa o círculo osculador.
4. Prove que se um círculo de raio R tangente a γ em p contém (localmente) o traço de γ em seu interior então $|k(p)| > \frac{1}{R}$.

1.4 Arcos Monótonos

Definição 1.5. (*Arco monótono*): Um arco de curva $J \subset \gamma$ é dito *monótono* se a curvatura em J é uma função monótona, não decrescente ou não crescente.

Proposição 1.2. Em um arco monótono os círculos osculadores são encaixados.

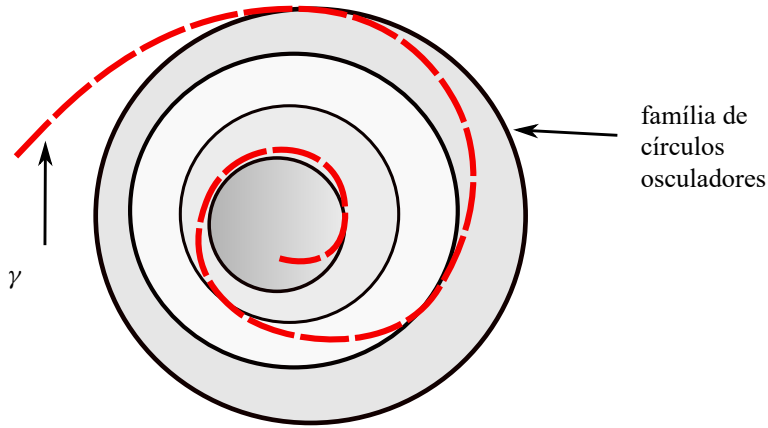


Figura 1.2: Círculos osculadores e arco monótono γ .

Demonstração. Dados os discos $D_1 = D(p_1, r_1)$ e $D_2 = D(p_2, r_2)$ (centro p_i e raio r_i) temos que $\text{int}(D_1) \subset \text{int}(D_2)$ se, e somente se, $|p_2 - p_1| < r_2 - r_1$.

Suponha γ parametrizada pelo comprimento de arco s e considere a evoluta $\Gamma(s) = \gamma(s) + \left[\frac{1}{k(s)}\right] n(s)$ definida pelos centros dos círculos osculadores de γ . Temos que $\Gamma'(s) = r'(s)n(s)$, onde $r(s) = \frac{1}{k(s)}$. Logo, $|\Gamma(s_2) - \Gamma(s_1)| = \left| \int_{s_1}^{s_2} r'(s)n(s) ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} |r'(s)| ds = |r(s_2) - r(s_1)|$.

Tomando os discos $D_i = D_i(\Gamma(s_i), r(s_i))$ a desigualdade acima (supondo $r' > 0$) é precisamente a condição para $\text{int}D_1 \subset \text{int}D_2$. No caso $r' < 0$, temos que $\text{int}D_2 \subset \text{int}D_1$. Em qualquer situação obtemos que os círculos osculadores são encaixados. \square

Exercício: Prove que arcos monótonos são preservados por inversões no plano. Mais precisamente, seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \mathbb{C}$, uma transformação de Möbius tal que os pontos $z = -\frac{d}{c}$ e $z = -\frac{b}{a}$ não pertencem a γ . Se J é um arco monótono de γ então $f(J)$ é um arco monótono de $f(\gamma)$.

Sugestão: Transformações de Möbius levam círculos em círculos ou em retas e preservam o contato entre curvas, pois são difeomorfismos locais do plano e nas condições acima, a imagem de uma curva regular, também é uma curva regular.

Uma consequência interessante dessa invariância é a localização de vértices.

Lema 1.1 (S. B. Jackson-1944). *Se um arco de curva regular simples $AB \subset \gamma$, não circular, é tangente a um círculo C nos pontos A e B , com a mesma orientação e nunca cruza transversalmente este círculo, então existe um vértice de γ no interior de AB .*

O vértice será um máximo local da curvatura se o círculo estiver no interior da região limitada pelo traço de γ . Será um mínimo local se estiver no exterior da curva.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que a intersecção do arco com o círculo C seja igual a $\{A, B\}$. Tome um ponto z_0 no arco em C complementar ao arco circular de A até B .

Considere uma transformação de Möbius que leva z_0 ao infinito e, portanto, leva C sobre uma reta \mathcal{L} . A curva será enviada em uma outra curva γ_1 simples e tangente à reta \mathcal{L} em dois pontos A_1 e B_1 .

Segue da hipótese que o arco $A_1 B_1$ em γ_1 está contido inteiramente em um dos semiplanos definidos por \mathcal{L} . Portanto, a curvatura de γ_1 nestes pontos tem mesmo sinal.

Afirmção: $\int_{A_1}^{B_1} k_{\gamma_1}(s) ds = 0$.

Se isso de fato ocorre, segue que a curvatura deve trocar de sinal no arco $A_1 B_1$. Por continuidade, deve haver um ponto de mínimo ou máximo local da curvatura, ou seja um vértice de γ_1 .

Mas as transformações de Möbius preservam arcos monótonos (e portanto vértices). Assim, usando a transformação inversa, vemos que γ apresenta um vértice no interior do arco AB .

Para provar a *Afirmção* basta calcular a integral da curvatura da curva C^2 por partes, simples e fechada, formada pelo arco $A_1 B_1$ em γ_1 seguido do segmento de reta liga A_1 a B_1 . A curvatura total desta curva é zero. Como a curvatura no segmento de reta é nula, segue que a curvatura total de γ_1 no arco $A_1 B_1$ é zero. \square

Proposição 1.3 (S. B. Jackson). *Seja γ uma curva plana, contínua fechada e simples (de Jordan) que delimita uma região \mathcal{R} simplesmente conexa. Suponha que A_1, A_2 e A_3 sejam três arcos que dividem γ . Então existe um círculo contido em \mathcal{R} que possui um ponto de tangência com cada um dos arcos.*

Outra maneira de dizer, existe um ponto no interior de \mathcal{R} equidistante dos três arcos.

Demonstração. Reproduzimos a prova dada por Jackson em [Jackson \(1944\)](#), por ele atribuída a P. Erdős. Defina $D_i = \{z \in \mathcal{R} \mid \text{dist}(z, A_i) \leq \text{dist}(z, A_j), j \neq i\}$. É claro que $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \mathcal{R}$.

Basta provar que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, pois um ponto nesta intersecção é equidistante aos três arcos.

Afirmção: D_i é fechado e conexo.

É fechado por que é definido por desigualdades e cada arco é um subconjunto fechado. O conjunto D_j é, de fato, conexo por caminhos. Para ver isso, sejam z_1 e z_2 dois pontos quaisquer de D_j . Tome pontos $a_1, a_2 \in D_j$ tais que $d(z_i, A_j) = |z_i - a_i|$, $i = 1, 2$. Então, segue imediatamente da definição dos subconjuntos que a curva contínua por partes formada pelo segmento de reta entre z_1 e a_i , o sub-arco de a_1 a a_2 e o segmento entre a_2 e z_2 é um caminho em D_j . Temos que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, pois cada um desses arcos têm um ponto em comum (uma extremidade) com o outro. Portanto, $D_i \cup D_j$ é um subconjunto fechado e conexo de \mathcal{R} .

Suponha, por absurdo, que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \emptyset$. Assim, a intersecção de D_1 com $D_2 \cup D_3$ são dois subconjuntos fechados, $D_1 \cap D_2$ e $D_1 \cap D_3$ conexos por caminhos e disjuntos cuja união é simplesmente conexa. O que nos dá uma contradição. \square

Observe que ao menos dois dos três pontos de tangência são distintos. Portanto, usando o círculo tri-tangente, o teorema anterior e a paridade dos pontos de máximo e de mínimo locais obtemos uma prova do Teorema dos Quatro Vértices para curvas de classe C^2 .

Em resumo, círculos inscritos ou circunscritos bitangentes dão origem a vértices. Mais adiante veremos como R. Osserman usa este fato para contar os vértices de uma curva usando o círculo circunscrito.

Círculos bitangentes são usados na prova do TQV dada por Guggenheimer (1969). Vértices são obtidos como pontos limites de pares de pontos de bitangência.

Um círculo de bitangência a γ nos pontos $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ define localmente um eixo de simetria da curva. Basta tomar a reta que passa pelo centro do círculo e pelo ponto de intersecção das retas tangentes a γ em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$. O que ocorre se essas retas são paralelas?

Uma outra prova do TQV, como descreveu R. Thom, [Thom \(1989, p205\)](#), foi sugerida por Alan Weinstein que usa círculos inscritos bitangentes à curva, ou melhor, o lugar dos centros dos círculos de bitangência ou *Conjunto de Simetria* da curva.

1.5 Curvas Convexas

Definição 1.6. *Uma curva regular $\gamma(s)$ é convexa se para todo ponto s_0 o traço da curva está contido em um dos semiplanos fechados determinados pela reta tangente à curva no ponto γ .*

Considere a função suporte h definida localmente por $h(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle$. O traço da curva está inteiramente contido em um semiplano se não muda de sinal. Temos que $h(s_0) = 0$, $h'(s_0) = 0$, $h''(s_0) = k(s_0)$. Se a curvatura em s_0 não se anula, então h é uma função estritamente convexa e s_0 é um ponto de máximo ou mínimo local. O que implica que a curva é localmente convexa. De fato, h' é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Suponhamos o primeiro caso. Assim $h > 0$ em uma vizinhança de s_0 . Suponha por absurdo que h troca de sinal: existem dois pontos s_1, s_2 tais que $s_0 < s_1 < s_2$ (a outra possibilidade pode ser tratada de modo análogo) tais que $h(s_1) > 0$ e $h(s_2) < 0$. Segue pelo teorema do valor médio, que existe um ponto em que $h'(s^*) < 0$. Uma contradição. No caso em que $s_2 < s_1 < s_0$, o ponto s^* está entre s_1 e s_0 .

Pergunta: vale a recíproca?

Uma curva convexa de curvatura não nula é chamada *estritamente convexa*.

Exercício: Prove que uma curva regular, simples e fechada é uma curva convexa se a região fechada \mathcal{R} limitada pelo traço de γ é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^2 . Isto é, $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{R}$ o segmento de reta $[z_1, z_2] = tz_1 + (1-t)z_2, 0 \leq t \leq 1$, está contido em \mathcal{R} .

Seja $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^2 fechada, simples e estritamente convexa parametrizada por comprimento de arco s . Se $T(s)$ denota o vetor tangente, então $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ com $\theta(s) - \theta(0) = \int_0^s k(u) du$.

Por ser fechada, temos $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n$. Como γ é estritamente convexa, $n = 1$ pois, caso contrário, teríamos pontos distintos $s_0 \neq s_1$ tais que $T(s_0) = T(s_1)$. Isso implicaria a existência de um ponto tal que $k(s) = 0$, o que é um absurdo.

Isto significa que $\theta: [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ é um difeomorfismo de classe C^1 e que, portanto, toda curva estritamente convexa pode ser parametrizada pelo ângulo θ que a sua tangente faz com uma direção fixa.

Escrevendo $\gamma_1(\theta) = \gamma(s(\theta))$, a priori uma curva de classe C^1 , temos:

$$\begin{aligned}\gamma_1'(\theta) &= \gamma'(s(\theta)) \frac{ds}{d\theta} = \gamma'(s(\theta)) \frac{1}{k(s(\theta))} = \frac{1}{k(s(\theta))} T(s(\theta)), \\ T'(s(\theta)) \frac{ds}{d\theta} &= k(s(\theta)) \frac{1}{k(s(\theta))} N(s(\theta)) = N(s(\theta)).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$N'(s(\theta)) = -T(s(\theta)).$$

Em resumo, se uma curva convexa $\beta(\theta)$ está parametrizada pelo ângulo θ que a tangente faz com uma direção fixa, então: $\beta'(\theta) = R(\theta)T(\theta)$, $T'(\theta) = N(\theta)$, $N'(\theta) = -T(\theta)$.

1.6 Vértices e singularidades de aplicações

Muitas propriedades geométricas, podem ser formuladas no contexto da teoria de singularidades de aplicações. Os exemplos mais conhecidos estão na teoria de contato e na teoria de singularidades de funções altura.

1.6.1 Envelope de retas e evoluta de uma curva

Uma família de retas a um parâmetro no plano \mathbb{R}^2 é chamada na literatura clássica de congruência de retas. Na forma cartesiana podemos representar essa família pela equação

$$R(x, y, u) = a(u)x + b(u)y + c(u) = 0, \quad a(u)^2 + b(u)^2 \neq 0. \quad (1.3)$$

Suporemos que as funções envolvidas são de classe C^k , $k \geq 3$.

Genericamente, pelo Teorema de Sard, a equação $R(x, y, u) = 0$ define uma superfície regular em \mathbb{R}^3 e sua projeção $\pi(x, y, u) = (x, y)$ no plano é singular, isto é, não é uma submersão, quando $R_u(x, y, u) = 0$.

O conjunto definido por $\mathcal{C} = \{(x, y, u) : R(x, y, u) = R_u(x, y, u) = 0\}$ é chamado de *criminante*.

A projeção da curva definida por $R = R_u = 0$ é definida como sendo o envelope da congruência de retas. É também denominado de *discriminante*.

Um cálculo direto nos mostra que o envelope é dado por

$$x(u) = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad y(u) = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}. \quad (1.4)$$

Observe que, em cada um dos seus pontos regulares, o envelope é tangente a algum membro da família de retas.

Exemplo 1.3. Considere a família de retas $\cos ux + \sin uy = c$. O seu envelope é o círculo $\gamma(u) = c(\cos u, \sin u)$.

O envelope da família de retas $x \cos u + y \sin u = h(u)$ é dado por $E(u) = h(u)(\cos u, \sin u) + h'(u)(-\sin u, \cos u)$.

Exemplo 1.4. A congruência de retas $R(x, y, u) = x - uy + \frac{c}{6}u^3 = 0$ possui envelope $E(u) = (\frac{c}{3}u^3, \frac{c}{2}u^2)$. Veja Fig. 1.3.

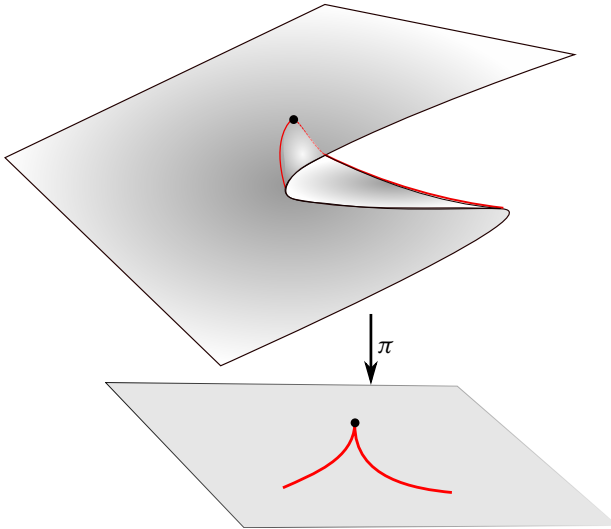


Figura 1.3: Envelope e ponto de cúspide.

Exemplo 1.5. Uma família a um parâmetro de retas na forma paramétrica se escreve como $x = x_0(t) + va(t)$, $y = y_0(t) + vb(t)$. Logo o seu envelope $E(t) = (x(t), y(t))$ está definido por:

$$x(t) = \frac{a(x_0'b + x_0b') - a'bx_0 - a^2y_0'}{ab' - ba'},$$

$$y(t) = \frac{a(y_0b' - y_0'b) - a'by_0 + b^2x_0'}{ab' - ba'}.$$

Dada uma curva regular, $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco s , de classe C^2 consideramos a família a um parâmetro de retas normais a γ

$$\Gamma(s, t) := \gamma(s) + tN(s).$$

O envelope dessa família de retas normais, é também caracterizado pela condição $[\Gamma_s, \Gamma_t] = 0$, onde $\Gamma_s = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}$, $\Gamma_t = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ e $[w, r]$ é o determinante da matriz formada pelos vetores w e r , é chamado a *cáustica* ou *evoluta* de γ . Veja [Arnold \(1994, Cap. 3\)](#), [Berger e Gostiaux \(1987, pág. 305\)](#), [Bruce e Giblin \(1992, Cap. 5\)](#). Fazendo os cálculos obtemos que a cáustica de γ é dada por:

$$E(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s).$$

A evoluta é portanto o lugar dos centros dos círculos osculadores a curva γ . Nos vértices de γ , isto é, $k'(s) = 0$ temos que a curva E não é regular, isto é $E'(s) = 0$. Esses pontos são chamados *singulares* ou *cúspides*. Um ponto de cúspide $E(s_0)$ é chamado simples ou de primeira ordem se $k'(s_0) = 0$ e $k''(s_0) \neq 0$.

Para uma curva de classe C^3 , pontos singulares da evoluta correspondem aos vértices da curva.

Exercício: Utilizando a projeção $g(s) = \langle E(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle$, faça um esboço da evoluta em uma vizinhança de um vértice correspondente a curvatura máxima e em uma vizinhança de um vértice de curvatura mínima. No primeiro caso, o raio que liga o centro de curvatura ao vértice está no exterior da evoluta, enquanto no segundo, esse raio está no interior.

Proposição 1.4. *Na vizinhança de um ponto de cúspide de primeira ordem a congruência de retas normais possui dois comportamentos.*

i) *Se for um ponto de mínimo da curvatura ($k'(s_0) = 0$, $k''(s_0) < 0$) a família de segmentos normais $[\gamma(s), E(s)]$, tangentes a E , são disjuntos, definindo uma folheação singular tendo a evoluta como envelope. Veja Fig. 1.4, direita.*

ii) *Se for um ponto de máximo da curvatura ($k'(s_0) = 0$, $k''(s_0) > 0$) a família de segmentos normais $[\gamma(s), E(s)]$, tangentes a E , definem uma rede singular na região interior a evoluta. Veja Fig. 1.4, esquerda.*

Demonstração. Na vizinhança de um vértice podemos parametrizar a curva γ como um gráfico $\gamma(u) = (u, \frac{k}{2}u^2 + \frac{a}{24}u^4 + O(5))$. A curvatura de γ é dada por $k(u) = k + \frac{1}{2}(a - 3k^3)u^2 + O(3)$. Logo a evoluta de γ é parametrizada por

$$\begin{aligned} E(u) &= \left(\frac{(a - 3k^3)}{3k}u^3 + O(4), \frac{1}{k} + \frac{(a - 3k^3)}{2k^2}u^2 + O(3) \right), \\ &= (0, \frac{1}{k}) + (a - 3k^3) \left(\frac{u^3}{3k} + O(4), \frac{u^2}{2k^2} + O(3) \right) \end{aligned}$$

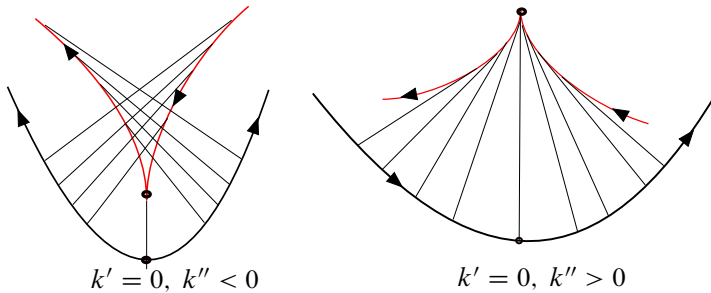


Figura 1.4: Cúspides associados a pontos extremais da curvatura.

Fazendo a análise da evoluta nos dois casos $k'(0) = a - 3k^3 \neq 0$ segue o resultado. Observamos que percorrendo a curva γ no sentido anti-horário a evoluta é percorrida no sentido horário. Veja Fig. 1.4. \square

Observação 1.2. Na região interior ao ponto de cúspide a congruência de retas normais a uma curva regular define uma 3-teia (3-web) tendo como envelope a evoluta. Veja Fig. 1.5.

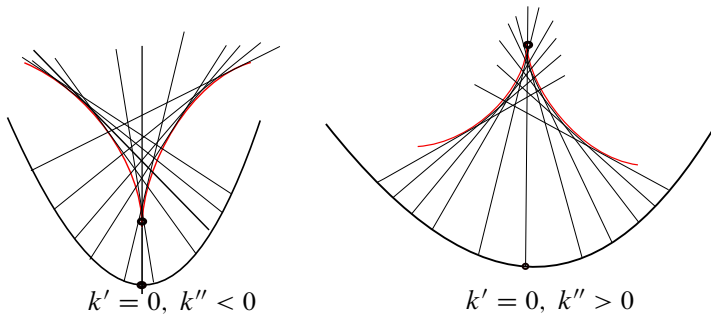


Figura 1.5: Teia associada a pontos de cúspides.

Um ponto singular $s = s_0$ de uma curva E , de classe C^r , $r \geq 3$, é um ponto de *cúspide de primeira ordem* quando $E'(s_0) = 0$ e $[E''(s_0), E'''(s_0)] \neq 0$. Quando E for a evoluta de uma curva este conceito corresponde a vértices.

Observamos que a definição de cúspide acima não depende da parametrização considerada. Na vizinhança de um ponto de cúspide simples ou de primeira ordem a curva tem a seguinte forma normal

$$(x(t), y(t)) = (at^2, bt^3).$$

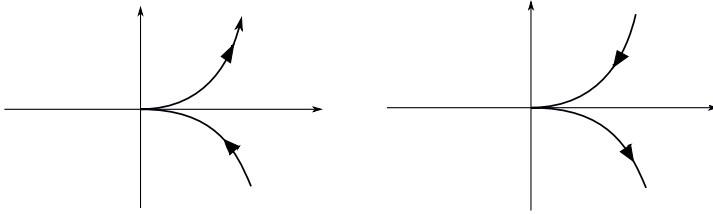


Figura 1.6: Ponto de cúspide e orientação da curva.

Nas cônicas (hipérbole, elipse e parábola) o conjunto focal possui singularidades do tipo cúspide. Veja Fig. 1.7.

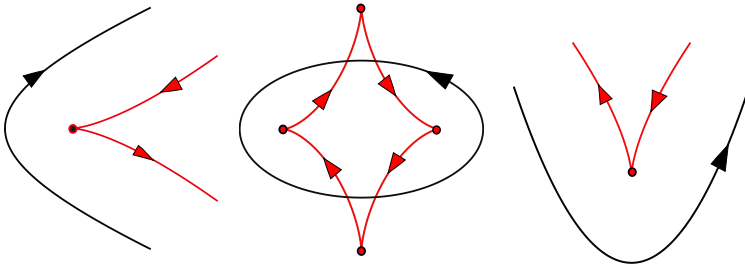


Figura 1.7: Conjunto focal (cáustica) da hipérbole (esquerda), elipse (centro) e parábola (direita).

Em [Tabachnikov \(1995\)](#) encontramos uma prova do TQV para o caso genérico em que a curvatura é uma função de Morse, isto é, todos os seus pontos críticos são não degenerados. Os vértices são pontos de máximo ou mínimo com derivada segunda não nula.

Neste caso, a evoluta possui um ponto de cúspide de primeira ordem correspondente a cada um dos vértices. Contar vértices, portanto, é contar cúspides da evoluta.

Teorema 1.1. *Seja γ uma curva de Jordan regular, estritamente convexa e suponha que $[\gamma''(s), \gamma'''(s)] \neq 0$ para todo s . Então o envelope da família de retas $\gamma(t) + v\gamma''(t)$ possui pelo menos 4 pontos de cúspides de primeira ordem.*

Observação 1.3. A hipótese do teorema acima depende da parametrização de γ . No caso em que a curva está parametrizada por comprimento de arco a condição $[\gamma''(s), \gamma'''(s)] \neq 0$ para todo s significa que c é estritamente convexa.

Demonstração. Primeiro observamos que todo $p \in \mathbb{R}^2$ pertence a uma reta tangente a cáustica E , ou seja, p pertence a alguma reta normal à curva γ . Em outras palavras, a

aplicação $(t, s) \mapsto \gamma(s) + tN(s)$ é sobrejetora. De fato, considere a função $f(s) = [\gamma(s) - p, \gamma'(s)]$. Esta função assume o máximo em s_0 . Logo, $f'(s_0) = [\gamma(s_0) - p, \gamma''(s_0)] = 0$ e portanto os vetores $\gamma(s_0) - p$ e $\gamma''(s_0)$ são colineares. Isto significa que p pertence à reta tangente à cáustica $\gamma(s_0) + t\gamma''(s_0)$.

Considere a função $\phi: \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{N}$ cujo valor $\phi(p)$ é o número de retas tangentes a γ que passa por p . Esta função é constante em cada componente conexa do domínio. Numa curva regular de curvatura não constante, o número de pontos de interseção de retas tangentes decresce de dois ao atravessarmos a curva da parte côncava para a parte convexa. De fato, convexidade significa que a curva situa-se inteiramente em um dos semiplanos definidos pela reta tangente. Assim o valor de ϕ decresce de dois quando cruzamos a evoluta de uma componente localmente côncava para uma localmente convexa. Além disso, para p na região exterior à curva $\phi(p) = 2$, pois a correspondência $s \mapsto N(s)$ é injetiva.

Suponhamos que E possua somente dois pontos de cúspides, $E(s_1)$ e $E(s_2)$, como ilustrado na Fig. 1.8. Tomemos a reta \mathcal{L} que passa $E(s_1)$ e $E(s_2)$. A função altura em relação a \mathcal{L} , assume um máximo num ponto fora das duas cúspides, ou seja, em um ponto regular da cáustica, veja Fig. 1.8. Lembre que a função altura é a restrição a E da projeção ortogonal a direção de \mathcal{L} .

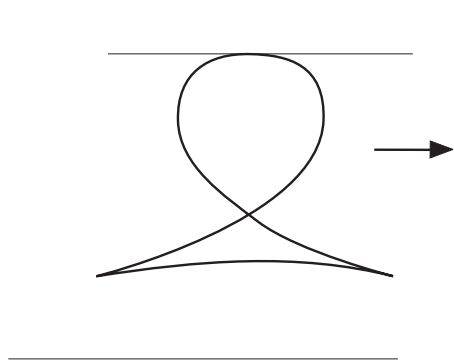


Figura 1.8: Função altura e cúspides.

Logo, pela convexidade, imediatamente abaixo do ponto de máximo temos $\phi(p) = 0$. Isto contradiz a primeira afirmação demonstrada. \square

1.7 Vértices e contato

Nesta seção faremos uma demonstração geométrica do teorema dos quatro vértices para curvas estritamente convexas. A ideia básica é relacionar vértices (pontos críticos

da curvatura) com a teoria do contato aplicada a uma curva (indicatriz tangente) e uma família de círculos.

Considere uma curva de Jordan convexa $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ de classe C^r , $r \geq 3$, com curvatura estritamente positiva e parametrizada de modo que $[\gamma', \gamma''] = 1$. Isto sempre é possível pois γ não possui ponto de inflexão (contato cúbico ou mais degenerado com a reta tangente). Portanto a curvatura k de γ é dada por:

$$k = \frac{1}{|\gamma'|^3} = \frac{1}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.5)$$

Considere a curva $\gamma' : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, com as hipóteses acima, é uma curva regular simples e periódica de período L . De fato, L é comprimento afim de γ . Além disso observamos que $\int_0^L \gamma'(u) du = 0$ e que o traço de γ' é um conjunto estrelado em relação a origem, i. e., para todo $\gamma'(u)$ o segmento de reta $r_t = t\gamma'(u)$, $t \in [0, 1]$ está contido na região delimitada pelo traço de γ' .

Denote por Γ' a região compacta simplesmente conexa delimitada pelo traço de γ' , i. e., $\gamma'([0, L]) = \partial\Gamma'$.

O seguinte lema é devido a H. Guggenheimer, [H. Guggenheimer \(1969b\)](#).

Lema 1.2. *Uma curva fechada β é a derivada de uma curva de Jordan convexa γ se, e somente se, $\int \beta(u) du = (0, 0)$ e o traço de β é um conjunto estrelado em relação a origem.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\beta(u) = \gamma'(u)$, sendo γ uma curva fechada, então $\int \beta(u) du = (0, 0)$. Se β não for estrelado em relação a origem segue que existem dois pontos u_0 e u_1 tais que os vetores $\gamma'(u_0)$ e $\gamma'(u_1)$ sejam paralelos. Uma análise gráfica mostra-nos que esta situação não é compatível com a convexidade de γ . Veja Fig. 1.9.

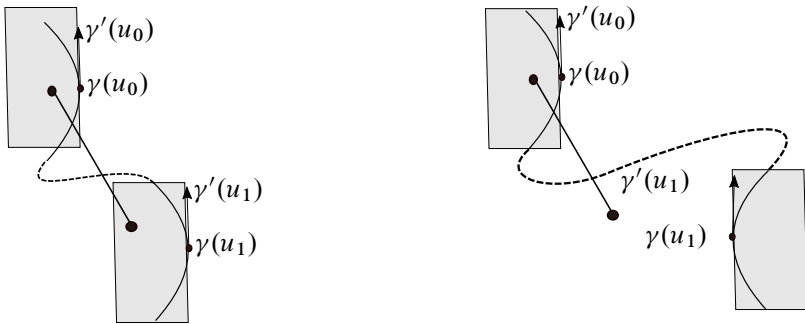


Figura 1.9: Curva não convexa

(\Leftarrow) Considere β curva fechada em relação a origem tal que $\int \beta(u) du = (0, 0)$. Então $\gamma(u) = \int \beta(u) du$ é uma curva fechada e podemos supor que $(0, 0)$ não pertence ao traço

de γ . Com a hipótese de β ser estrelada podemos concluir que γ é uma curva fechada com número de voltas em relação a origem igual $W(\gamma, 0) = \pm 1$. A suposição de γ ser não convexa implica a existência de dois pontos $\gamma(u_0)$ e $\gamma(u_1)$ como ilustrado na Fig. 1.9 e portanto $\gamma' = \beta$ não seria estrelada. \square

Considere a família de círculos C_r centrados na origem. Veja Fig. 1.10.

Afirmção: γ possui pelo menos 4 vértices.

De fato, nos pontos de tangências p_i entre γ' e os círculos de raios r_i temos que $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$.

Esta condição caracteriza os vértices de γ pois $\frac{d}{du} \left(\frac{1}{(k_e)^{\frac{2}{3}}} \right) = 2 \langle \gamma', \gamma'' \rangle$.

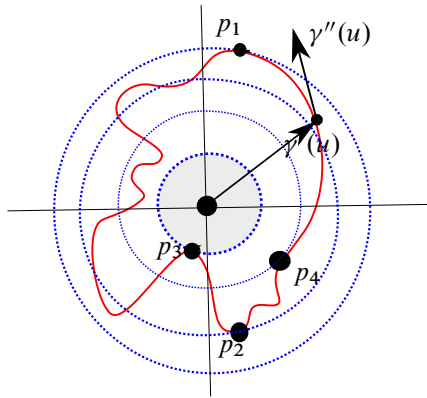


Figura 1.10: Vértices caracterizados pelo contato de círculos com a curva γ' .

Como o traço da curva γ' é um conjunto estrelado podemos parametrizá-la por $\gamma'(u) = (r(u) \cos u, r(u) \sin u)$. Como $\int \gamma' = 0$ temos que $r(u)$ e também $r'(u)$ ortogonais a $\{\cos u, \sin u\}$ e portanto pela Proposição 3.1 temos que $r(u)$ possui pelo menos 4 pontos críticos e portanto γ possui pelo menos 4 vértices.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} r(u) \cos u \, du &= r(u) \sin u \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} r'(u) \sin u \, du, \\ &= - \int_0^{2\pi} r'(u) \sin u \, du = 0. \end{aligned}$$

Observação 1.4. Para uma discussão sobre contatos entre famílias de curvas e curvas integrais de campos de vetores no plano veja [Khovanskii \(1991\)](#). Para uma introdução sobre as propriedades globais de famílias de curvas planas definidas por equações diferenciais no plano veja [Sotomayor \(1981\)](#).

1.8 Exercícios

Exercício 1.1. Considere a curva $\gamma(x) = (x, e^{ax})$.

i) Calcule a curvatura k de γ e analise o seu gráfico. Mostre que $k > 0$, possui um único ponto crítico (máximo global) e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = 0$.

ii) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx = 1$ para todo $a \neq 0$.

iii) Existe uma curva $\alpha(x) = (x, h(x))$ tal que a sua curvatura seja igual a x^2 ? Estude o artigo [Glessner, Shade e Suceavă \(2015\)](#).

iv) Faça a mudança de coordenadas (translação e rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$)

$$X = -\frac{1}{2a} \log(2a^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v), \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-u + v).$$

Defina $h(x, y) = y - e^{ax}$ e escreva $H(u, v) = h(X, Y)$. Resolva a equação implícita $H(u, v(u)) = 0$ e esboce o gráfico de $(u, v(u))$ calculando os pontos críticos de $v(u)$ e $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} v(u)$.

v) Analise os vértices e inflexões da curva $\alpha(x) = (x, e^{ax^2})$.

vi) Calcule a curvatura e os vértices da curva $\beta(x) = (x, -\frac{1}{a} \log x)$.

vii) Existe uma isometria (composição de rotações, rotações e rotações) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $h(\text{tr}(\gamma)) = \text{tr}(\beta)$? Justifique.

viii) Seja $I: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ a inversão definida por $I(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Esboce o traço da curva $\Gamma(x) = I(x, e^{ax})$ e analise a sua curvatura.

ix) Esboce os traços das curvas $\gamma(x) = (x, \arctan(x) + 1)$ e $\Gamma(x) = I(\gamma(x))$ e analise as suas curvaturas. Analise com detalhes o traço de Γ para $|x|$ muito grande.

x) Analise as curvaturas das curvas $\gamma(x) = (x, h(x))$ e $\Gamma(x) = (x, h^{-1}(x))$, onde h^{-1} é a inversa de h . Faça vários exemplos.

Exercício 1.2. Considere uma curva parametrizada por $\gamma(\theta) = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$.

i) Mostre que sua curvatura é dada por

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ii) Parametrize a lemniscata de Bernoulli definida pela equação

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = c^2, \quad F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0)$$

em coordenadas polares e calcule a sua curvatura.

iii) Mostre que a lemniscata de Bernoulli é uma curva algébrica de grau 4 definida por $H(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$.

iv) Analise a quantidade de vértices da curva implícita $H(x, y) = a$ para $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.3. Calcule e esboce o traço de uma curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco s , tendo curvatura dada por:

i) $k(s) = 4s(1 - s)$.

ii) $k(s) = 1 + |2s - 1|$.

iii) $k(s) = \text{senal}(\text{sen}(4\pi s))$ onde, $\text{senal}(x) = 1$ se $x > 0$ e $\text{senal}(x) = -1$ se $x < 0$. Defina $\text{senal}(0) = 0$.

Exercício 1.4. Considere 3 pontos distintos $p_i = (x_i, y_i)$ no plano \mathbb{R}^2 e defina a função $h(p) = |p - p_1| + |p - p_2| + |p - p_3|$.

i) Mostre que $h(p) = c$ define uma curva, denominada 3-elipse, a qual delimita uma região convexa para todo $c > c_0 = \min(h)$. Determine c_0 .

ii) Esboce as curvas de nível de h e analise os vértices da curva definida implicitamente por $h(p) = c$.

Exercício 1.5. Explique por que o conceito de curvatura está associado à forma geométrica da imagem da curva parametrizada. Mais formalmente: seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, isto é, Γ é a imagem de uma curva parametrizada regular $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $p = \gamma(t_0) \in \Gamma$, então definimos a curvatura de Γ em p por $k_\Gamma(p) = k_\gamma(t_0)$. Prove que se $\alpha(u)$ é outra curva parametrizada cuja imagem é igual a Γ , com $p = \alpha(u_0)$, então $k_\alpha(u_0) = k_\gamma(t_0)$.

Exercício 1.6. Prove que se $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria do plano euclidiano e Γ é uma curva regular, então $A(\Gamma)$ é uma curva regular com mesma curvatura.

Exercício 1.7. Na teoria das curvas planas, o Teorema Fundamental das Curvas Planas, [do Carmo \(2016, Cap. 1\)](#), diz que, a menos de uma isometria plana, a função curvatura determina a curva regular localmente. Explique o que isso significa. Analise um caso específico calculando uma curva onde a sua curvatura seja igual a e^s .

Exercício 1.8. Prove que se uma curva parametrizada regular é fechada e tem comprimento L então a curvatura é uma função periódica. Qual é a relação entre o período da curvatura e o comprimento L ?

Exercício 1.9. Prove que se k é a curvatura de uma curva regular fechada de comprimento L , $k(s + L) = k(s)$, então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^L k(s) ds = m \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 1.10. Prove que se uma curva regular fechada é simples então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^L k(s) ds = \pm 1.$$

Exercício 1.11. Na década de 1980, Gage e Hamilton, [Gage e Hamilton \(1986\)](#), desenvolveram a teoria do fluxo por curvatura de curvas planas. Em dimensão mais alta, esta teoria foi generalizada para outros fluxos geométricos, em particular o Fluxo de Ricci, importante na prova da Conjectura de Poincaré. Uma família $X(u, t)$ de curvas planas fechadas satisfaz a equação do fluxo de curvatura se

$$\frac{\partial X(u, t)}{\partial t} = k(u, t)N(u, t).$$

Em geral, u não é o parâmetro comprimento de arco. Tomemos o parâmetro $u \in \mathbb{S}^1$ (modulo 2π).

Prove que se $A(t)$ é a área da região delimitada pela curva $X(u, t)$ (t fixo), então $A'(t) = -2\pi$. Portanto a área converge monotonamente a 0 em um tempo $T = \frac{A(0)}{2\pi}$.

Sugestão: siga os passos:

i) Mostre que se $v(u, t) = |X'(u, t)| = \frac{ds}{du}$ então $\frac{dv}{dt} = -k^2v$, X' denota a derivada em relação ao parâmetro da curva u .

ii) Prove que $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k'(u, t)}{v}N(u, t)$ e $\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{k'(u, t)}{v}T(u, t)$.

iii) Prove que

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_X x dy - y dx = -\frac{1}{2} \int_X \langle X, N \rangle ds = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle X, vN \rangle du.$$

iv) Use os itens anteriores e integração por partes para concluir que

$$A'(t) = - \int_0^{2\pi} k v du = -2\pi.$$

Exercício 1.12. i) Considere uma curva convexa regular no plano. Mostre que existe $p_0 \in \text{int}(\gamma)$ e quatro semirretas normais a γ passando por p_0 .

ii) No caso da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ calcule o conjunto $P_4 = \{p_0 \in \mathbb{R}^2 : \text{existe quatro semirretas normais passando por } p_0\}$. Veja [Catalan \(1848\)](#).

iii) Construa exemplos de curvas convexas γ possuindo 6 ou mais semirretas normais a γ e passando por um ponto $p_0 \in \text{int}(\gamma)$.

Exercício 1.13. i) Dê exemplo de uma curva de classe C^0 , C^2 por partes, delimitando uma região convexa, com curvatura constante e que não seja circular.

ii) Mostre que não é possível construir exemplos com no item i) supondo curvas de classe C^1 e C^2 por partes.

Exercício 1.14. Considere uma curva regular plana definida implicitamente por $h(x, y) = 0$.

i) Mostre que sua evoluta (X, Y) é parametrizada por

$$X = x + \frac{h_x(h_x^2 + h_y^2)}{2h_x h_y h_{xy} - h_y^2 h_{xx} - h_x^2 h_{yy}},$$

$$Y = y + \frac{h_y(h_x^2 + h_y^2)}{2h_x h_y h_{xy} - h_y^2 h_{xx} - h_x^2 h_{yy}}$$

ii) Mostre que se $h(x, y) = 0$ é uma curva algébrica, então a sua evoluta também é algébrica.

iii) Mostre que a evoluta da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é dada por

$$X = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^2}, \quad Y = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^2}.$$

Conclua que a evoluta da elipse é definida por uma equação algébrica $H(X, Y) = 0$ de grau 6. Analise as curvas de nível de H .

iv) Calcule os vértices da evoluta da elipse.

Exercício 1.15. Calcule o envelope da congruência de retas definida por:

$$R(x, y, u) = (-r \operatorname{sen}(u + c) + \operatorname{sen}(u))x \\ + (-\cos(u) + r \cos(u + c))y + \operatorname{sen}(c)r = 0.$$

Interprete geometricamente o resultado.

Exercício 1.16. Seja $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e γ uma curva regular. Defina a curva pedal por

$$p(s) = p_0 + \frac{1}{\langle \gamma', \gamma' \rangle} \langle (p_0 - \gamma(s)), R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(s) \rangle R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(s).$$

Geometricamente $p(s)$ é a interseção da reta $p_0 + tR_{\frac{\pi}{2}}\gamma'(s)$ com a reta tangente (afim) a γ no ponto $\gamma(s)$. Veja Fig. 1.11.

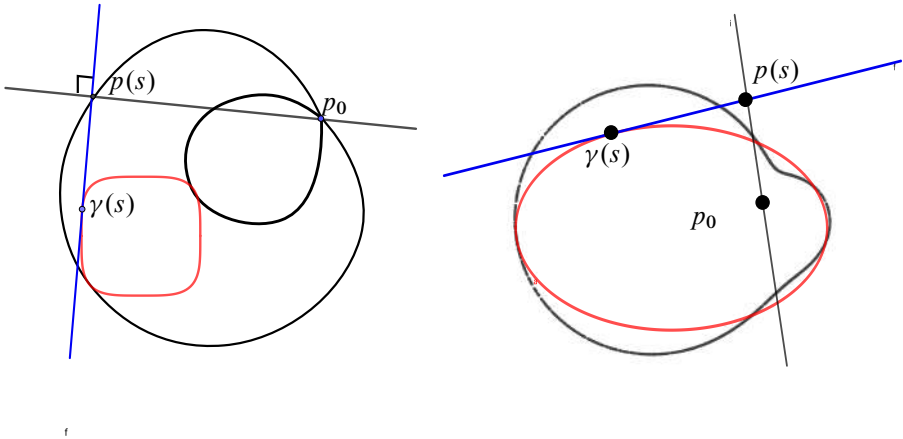


Figura 1.11: Curvas pedais.

- i) Seja $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$. Calcule o pedal $p(s)$ para vários valores de $p_0 = (x_0, y_0)$ e esboce o seu traço.
 - ii) Calcule o pedal da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em relação ao polo $(0, 0)$.
 - iii) Mostre que a curva pedal da elipse é convexa para $0 < b < a\sqrt{2}b$.
 - iv) Calcule os vértices e a evoluta do pedal da elipse.
 - v) Seja γ parametrizada por comprimento de arco s . Denote as equações de Frenet por $\gamma'(s) = t(s)$, $t'(s) = k(s)n(s)$, $n'(s) = -k(s)t(s)$. Mostre que se γ for uma oval estritamente convexa (curvatura positiva) a curva p é regular se, e somente se, p_0 pertence a região delimitada pelo traço de γ .
 - vi) Analise a curva p na vizinhança de um ponto de curvatura nula de γ . Em que condições este ponto é um ponto de cúspide simples?
 - vii) Calcule a curvatura da curva p .
- Determine condições sobre γ e p_0 para a curva pedal ser localmente convexa.
- viii) Considere a curval pedal negativa definida por

$$p_-(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\langle \gamma', \gamma' \rangle} \langle (p_0 - \gamma(s)), n(s) \rangle n(s), \quad n(s) = R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(s).$$

Analise os itens i), ii), iii), iv) e v) para a curva pedal negativa p_- e interprete geometricamente a curva p_- .

Exercício 1.17. Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^2 . Mostre o que o conjunto formado pelos centros de curvatura de γ é uma curva de classe C^0 e o seu traço possui medida zero no plano. Em particular, mostre que o interior do fecho do traço é vazio. Veja [Freilich \(1966\)](#).

Exercício 1.18. (Projeto). O objetivo deste exercício é apresentar vários tópicos de curvas planas, em especial das curvas de largura constante. Para mais informações veja [Alencar e Santos \(2008\)](#), [Escudero e Reventós \(2007\)](#), [Martini e Mustafaev \(2008\)](#), [Voloch \(1987\)](#).

i) Mostre que $p(\theta) = a \cos^2(\frac{3\theta}{2}) + b$ é uma função, 2π -periódica, tal que $p(\theta) + p(\theta + \pi) = a + 2b = cte$. Construa outros exemplos.

ii) Mostre que a curva $c(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, definida por

$$x(\theta) = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta, \quad y(\theta) = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta$$

é o envelope da família de retas $x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta)$, chamadas retas suportes. Interprete geometricamente.

iii) Calcule a curvatura de $c(\theta)$ e demonstre o teorema dos quatro vértices para curvas convexas usando a função suporte $p(\theta)$.

iv) Mostre que $x(\theta) = 9 \cos \theta + 2 \cos 2\theta - \cos 4\theta$, $y(\theta) = 9 \sin \theta - 2 \sin 2\theta - \sin 4\theta$ tem largura constante e calcule seus vértices. A largura $w(\theta)$ de uma curva convexa numa direção $N(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ é a distância entre as duas retas suportes perpendiculares a $N(\theta)$.

v) Mostre que a curva definida no item iv) é uma curva algébrica $f(x, y) = 0$, sendo f um polinômio de grau 8.

vi) Mostre que o comprimento de uma curva de largura constante $\lambda > 0$ é $\lambda\pi$.

vii) Dentre todas as curvas convexas de largura λ mostre que o círculo delimita uma região de área máxima e o triângulo de Reuleaux delimita a região de área mínima.

viii) Calcule explicitamente a evoluta $c_e(\theta)$ de $c(\theta)$ usando a parametrização definida no item ii). Mostre que se c for convexa então

$$\int_c \frac{1}{k} ds = 2\pi(F_c - F_e)$$

onde F_c é a área da região delimitada por c e F_e é a área algébrica da região delimitada pela evoluta c_e .

A área algébrica da região delimitada por uma curva Γ definida pelo envelope de uma família de retas $x \cos \theta + y \sin \theta = h(\theta)$ é dada por

$$F_\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)[h(\theta) + h''(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [h^2 - h'^2] d\theta.$$

ix) Seja $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , $r \geq 2$, uma curva simples não fechada, parametrizada por comprimento de arco s . Suponha que $\gamma(L) - \gamma(0)$ seja ortogonal a $\gamma'(L) = -\gamma'(0)$ e que $k(s) \geq \frac{1}{\lambda}$ para $s \in [0, \lambda]$ onde $\lambda = |\gamma(L) - \gamma(0)|$. Então existe uma curva fechada de largura constante $\Gamma: [0, \pi\lambda] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(s) = \gamma(s)$ para todo $s \in [0, L] \subset [0, \lambda\pi]$.

Exercício 1.19. Considere 5 retas L_i definidas por $L_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0$ em posição ao geral no plano \mathbb{R}^2 , ou seja, não há retas paralelas e nem interseção tripla.

i) Encontre uma cônica \mathcal{C} tendo as 5 retas como retas tangentes a \mathcal{C} .

ii) Analise a geometria das curvas C_λ definida implicitamente por $L = L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.20. Considere um arco de curva plana γ de classe C^5 parametrizado por comprimento de arco s e curvatura k com $k'(s) \neq 0$.

Defina

$$I_5 = \frac{4(k''' - k^2 k')k' - 5k''^2}{8k'^3}.$$

i) Encontre soluções da equação diferencial $I_5 = \text{cte}$. Veja [Bolt \(2007\)](#).

ii) Encontre a expressão de I_5 num parâmetro qualquer $t = t(s)$.

iii) Calcule I_5 para a espiral logarítmica $\gamma(t) = e^{at}(\cos bt, \sin bt)$, $ab \neq 0$.

iv) Mostre que uma espiral logarítmica intersecta a família de círculos centrados na origem com um ângulo constante.

Exercício 1.21. Considere um gráfico $\Gamma(x) = (x, h(x))$ tal que $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) > 0$. Considere, numa vizinhança da origem, três pontos distintos $p_1 = (x_1, h(x_1))$, $p_2 = (0, 0)$ e $p_3 = (x_3, h(x_3))$.

i) Calcule o círculo contido na região $\{(x, y) : y > 0\}$ e tangente as três retas tangentes ao gráfico passando pelos pontos p_i .

ii) Seja $R(x_1, x_3)$ o raio do círculo obtido no item i). Mostre que

$$\lim_{(x_1, x_3) \rightarrow (0, 0)} R(x_1, x_3) = \frac{1}{h''(0)}.$$

iii) Em que condições o círculo calculado no item i) passa pela origem? Justifique.

Exercício 1.22. Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ regular e simples delimitando a região $\text{int}(\square) = R$.

Definimos $M_x = \int_R x dx dy$, $M_y = \int_R y dx dy$ e $M = \int_R dx dy$. O ponto $CM = (\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M})$ é chamado centro de massa da região R considerada com densidade uniforme igual a 1.

Seja $ds = |\gamma'(t)| dt$ e definimos $L_x = \int_\gamma x(t) ds$, $L_y = \int_\gamma y(t) ds$ e $L = \int_\gamma ds$ o seu comprimento. O ponto $CL = (\frac{L_x}{L}, \frac{L_y}{L})$ é chamado centro de massa do perímetro (ponto de Steiner) do traço de γ .

Definimos $K_x = \int_\gamma x(t)k(t) ds$, $K_y = \int_\gamma y(t)k(t) ds$ e $K = \int_\gamma k(t) ds$. O ponto $CK = (\frac{K_x}{K}, \frac{K_y}{K})$ é chamado centro de curvatura do traço de γ .

i) Construa exemplos de curvas tais que $CM = CL = CK$ e exemplos onde $CM \neq CL \neq CK$.

ii) Mostre que quando γ é convexa, por cada um dos pontos CM , CL e CK passam quatro semirretas normais a γ . Veja [Chakerian e Stein \(1964\)](#) e [Tietze \(1948\)](#).

Exercício 1.23. (Projeto). Investigue o seguinte tema sobre vértices de curvas abertas sendo gráficos polinomiais. Veja [Edwards e Gordon \(2004\)](#).

Considere a curva plana Γ definida pelo gráfico $\{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ de um polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grau n .

- i) Mostre que os vértices de Γ , i. e., pontos críticos da curvatura, é definido pelos zeros de $Q = 3p'p''^2 - (1 + (p')^2)p'''$, polinômio de grau $3n - 5$.
- ii) Mostre que se p tem grau 3 então Γ tem no máximo 2 vértices. Dê exemplo de um polinômio de grau 3 com Γ possuindo 2 vértices.
- iii) Mostre que se p'' tem todos zeros reais, então Γ possui no máximo $n - 1$ vértices.
- iv) Analise a seguinte conjectura proposta em [Edwards e Gordon \(ibid.\)](#). “A curva Γ possui no máximo $n - 1$ vértices”.
- v) Faça vários exemplos e estabeleça resultados sobre a quantidade mínima de vértices para a curva Γ .

Exercício 1.24. (Projeto). Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos no plano tais que ∂A_1 e ∂A_2 sejam curvas convexas γ_1 e γ_2 de classe C^3 positivamente orientadas. Defina $C(A_1, A_2) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, A_1) = d(p, A_2)\}$ o conjunto equidistante (ou de conflito), onde $d(p, A_i) = \inf\{|p - p_i|, p_i \in A_i\}$.

- i) Dado $p \in C(A_1, A_2)$, mostre que

$$k(p) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \phi \left(\frac{k_1}{1 + rk_1} - \frac{k_2}{1 + rk_2} \right),$$

onde $r = d(p, A_i)$, k_i são as curvaturas nos pontos definidos implicitamente por $|p - p_i| = r$ e ϕ é o ângulo entre os vetores normais correspondentes, veja Fig. 1.12.

Sugestão: Mostre que $n = \frac{n_1 - n_2}{2 \operatorname{sen} \phi}$ e $t = -\frac{n_1 + n_2}{2 \cos \phi}$.

- ii) Calcule o conjunto de conflito entre dois círculos disjuntos e conclua que a elipse, a parábola e um ramo de hipérbole podem ser descritas como conflitos.

- iii) Calcule o conjunto de conflito entre a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a parábola $y = kx^2 + r$.

O conjunto de conflito é regular na vizinhança do ponto $(0, \frac{r+b}{2})$? Justifique.

- iv) Dado $p \in \mathbb{R}^2$ defina $F(p) = \frac{d(p, A_1)}{d(p, A_2)}$. Esboce as curvas de nível de F supondo A_i cônicas no plano. Faça vários exemplos ilustrando essa folheação por curvas de nível. Estude os artigos [Siersma \(1999\)](#) e [Ponce e Santibáñez \(2014\)](#).

- v) Calcule o conjunto de conflito entre os convexos $A_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^{ax}\}$ e $B_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq b \ln x\}$.

Exercício 1.25. (Projeto). Considere uma curva \mathcal{C} definida implicitamente por $f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) = 0$ onde f_i é um polinômio homogêneo de grau i .

- i) Mostre que

$$\gamma(t) = \left(-\frac{f_{m-1}(1, t)}{f_m(1, t)}, -t \frac{f_{m-1}(1, t)}{f_m(1, t)} \right)$$

é uma parametrização de \mathcal{C} , i.e., $f(\gamma(t)) = 0$.

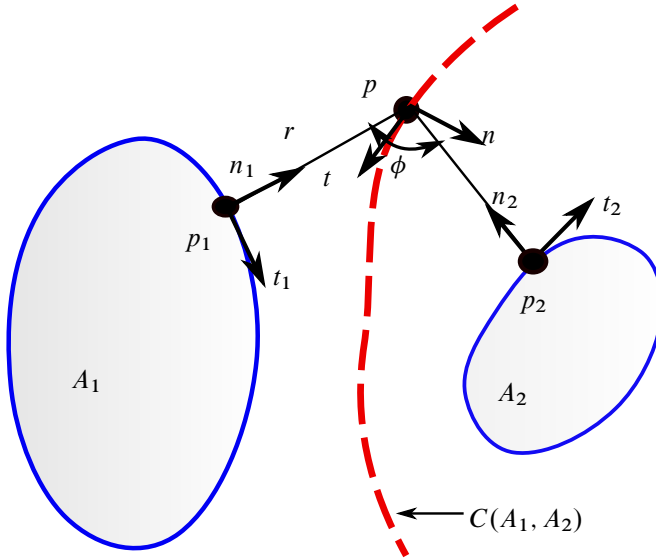


Figura 1.12: Conjunto de conflito entre dois convexos.

- ii) Faça vários exemplos ilustrando γ , suas singularidades e os seus vértices.
 iii) Mostre que uma cônica possui parametrização racional. Veja [Abhyankar e Bajaj \(1988\)](#), [Newton \(1971\)](#) para parametrizações racionais de cúbicas.

Exercício 1.26. (Projeto). i) Defina a curvatura geodésica de uma curva regular contida em uma superfície regular S em \mathbb{R}^3 .

ii) Mostre que quando a curvatura gaussiana da superfície S é variável não é esperado que a curvatura geodésica de círculos geodésicos possua quatro pontos críticos. Veja [Ghomi \(2013\)](#) e [Jackson \(1944\)](#).

iii) Analise o item ii) para curvas fechadas simples em superfícies com curvatura gaussiana constante. Veja [Cairns e Sharpe \(1990\)](#).

Exercício 1.27. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa e considere a curva $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma = f|_{\mathbb{S}^1}$.

i) Mostre que a curvatura de γ é igual a

$$k(z) = \frac{1}{|f'(z)|} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right), \quad z \in \mathbb{S}^1.$$

ii) Seja $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Considere a curva $\beta = g \circ f|_{\mathbb{S}^1}$. Calcule a curvatura de β .

Exercício 1.28. Considere uma curva γ regular e suave no plano parametrizada por comprimento de arco s . Considere a reta passando pelos pontos $\gamma(t+s)$ e $\gamma(s-t)$ e a reta tangente a γ no ponto $\gamma(s)$. Denote por $C(t, s)$ o ponto de interseção entre essas duas retas. Veja Fig. 1.13.

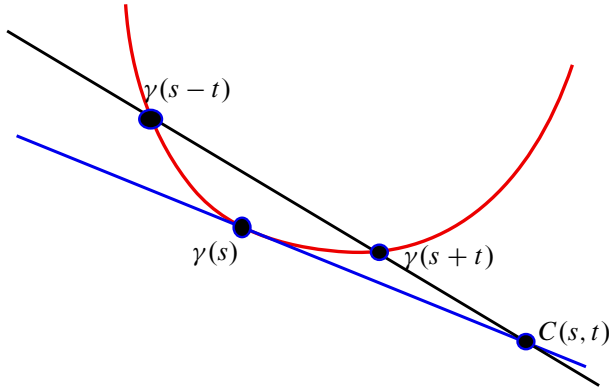


Figura 1.13: Raio de contração de uma curva no ponto $\gamma(s)$.

i) Mostre que $\rho(s) = \lim_{t \rightarrow 0} |C(s, t) - \gamma(s)|$ existe nos pontos onde $k'(s) \neq 0$, calculando este limite. De fato, mostre que $\rho(s) = \left| \frac{3k(s)}{k'(s)} \right|$. O ponto $C(s) = \lim_{t \rightarrow 0} C(s, t)$ é chamado centro de assimetria e $\rho(s)$ o raio de contração.

ii) Considere a função $\delta(s, t) = \frac{|\gamma(s+t) - \gamma(s-t)|}{2t}$ obtida fazendo o quociente do comprimento da corda pelo comprimento do arco de curva. Mostre que $\delta_s(t) = \delta(s, t) = 1 - \frac{1}{6}k(s)^2 t^2 + \frac{1}{72}(k'(s))^2 t^4 + O(5)$.

iii) Se γ for uma elipse analise o comportamento da função $\frac{1}{\rho(s)}$ introduzida no item i) e da curva $C(s)$.

iv) Encontre uma curva γ tal que $\rho(s) = 1$.

v) Analise o item i) supondo que a curva tenha uma parametrização qualquer, não necessariamente por comprimento de arco.

Exercício 1.29. Considere uma curva γ e a família de retas tangentes a curva, veja Fig. 1.14. Uma curva ortogonal a essa família de retas é chamada de involuta de γ .

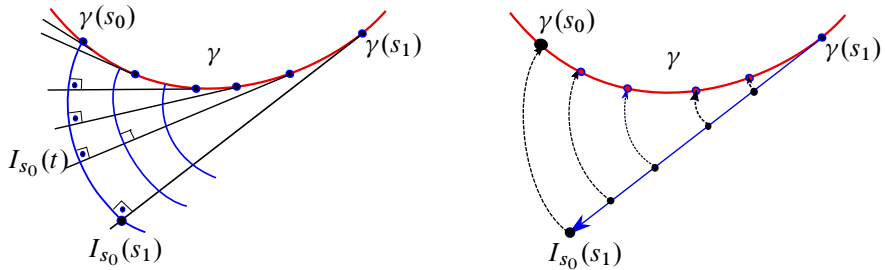


Figura 1.14: Involuta de uma curva γ .

i) Mostre que se $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ for parametrizada por comprimento de arco s , então a involuta de γ passando pelo ponto $\gamma(s_0)$, é dada por

$$I_{s_0}(t) = \gamma(t) + (s_0 - t)\gamma'(t).$$

ii) Mostre que $|I_{s_0}(s_1) - \gamma(s_1)| = |s_1 - s_0|$, ou seja, o comprimento de arco da curva γ entre os pontos $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ é igual a norma do vetor $I_{s_0}(s_1) - \gamma(s_1)$. Mecanicamente este resultado diz-nos que podemos ajustar o segmento de reta à curva.

iii) Mostre que as involutas de γ são curvas paralelas.

iv) Mostre que γ é a evoluta de qualquer uma das suas involutas.

v) Calcule e esboce as involutas do círculo $\gamma(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}))$.

vi) Calcule as involutas da curva $\gamma(x) = (x, x(x^2 - 1))$.

vii) Escreva as equações das involutas de γ no caso em que γ tem uma parametrização qualquer e também quando γ for definida implicitamente.

viii) Generalize o conceito de involuta. Considere as curvas fazendo um ângulo constante com a família de retas tangentes a uma curva dada. Veja [Apostol e Mnatsakanian \(2010\)](#) e [Apostol e Mnatsakanian \(2012, Chapter 11\)](#)

2

Teorema dos Quatro Vértices

“Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts.”

“The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.”

– D. Hilbert (1862-1943).

2.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar várias demonstrações do Teorema dos Quatro Vértices (TQV) ressaltando as ideias mais importantes. As provas analíticas são mais curtas e elegantes. As provas geométricas permitem aprofundar o entendimento das curvas planas regulares, simples e fechadas e exibem abordagens diferentes que possam sugerir generalizações.

2.2 Prova Analítica do TQV

As provas apresentadas nesta seção do TQV utilizam propriedades elementares de funções periódicas definidas a partir de situações geométricas.

Iniciamos com uma prova bem curta e elegante apresentada por H. W. Guggenheimer, [H. Guggenheimer \(1969a\)](#), para o caso de curvatura positiva (curva estritamente convexa).

Vimos que uma curva estritamente convexa pode ser parametrizada pelo ângulo que o seu vetor tangente $T(\theta)$ faz com uma direção fixa. Se a curva tem comprimento L então, $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k(\theta)} = L$. Se $N(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, então $\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta)} N(\theta) d\theta = 0$. Para ver isso, basta lembrar que $k(\theta) = \frac{d\theta}{ds}$.

Considere a função $f(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} - \frac{L}{2\pi}$. Então os pontos críticos de f coincidem com os pontos críticos de k , isto é, os vértices da curva. Para encontrar os vértices, a ideia é provar que f troca de sinal pelo menos quatro vezes. Pelo Teorema do Valor Médio, isto implica que f tem pelo menos quatro pontos críticos ou vértices da curva. Observe que f satisfaz às hipóteses da seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ periódica com média zero $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$ e $\int_0^{2\pi} f(\theta) N(\theta) d\theta = 0$. Logo, f se anula pelo menos quatro vezes.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f só troque de sinal nos pontos θ_0 e θ_1 . Por exemplo, suponha que $f(\theta) \geq 0$ para $\theta_0 < \theta < \theta_1$ e que $f(\theta) < 0$ para $\theta_1 < \theta < \theta_0 + 2\pi$.

Vamos usar agora que $\int_0^{2\pi} f(\theta) N(\theta) d\theta = 0$. Observe que essa condição não se altera se fizermos uma translação qualquer $Z(\theta) = N(\theta) + P$. Portanto, não há perda de generalidade ao supor que o segmento de reta entre $Z(\theta_0) = N(\theta_0) + P$ e $Z(\theta_1) = N(\theta_1) + P$ contém a origem com $\int_0^{2\pi} f(\theta) Z(\theta) d\theta = 0$.

Escreva

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) Z(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) Z(\theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_0+2\pi} |f(\theta)| \cdot (-Z(\theta)) d\theta.$$

As duas parcelas representam vetores não nulos situados no mesmo semiplano pois correspondem a curvas no plano situadas no mesmo semiplano definido pela reta que passa pela origem e contém os pontos $Z(\theta_0)$ e $Z(\theta_1)$. Isto segue do fato de que se $\int_a^b v(t) dt = 0$ então para qualquer vetor constante w , $\int_a^b \langle v(t), w \rangle dt = 0$. Escreva $v(t) = (x(t), y(t))$ de modo que a integral de cada componente se anula e use a linearidade para concluir o resultado. Tomando w vetor normal a corda, obtemos uma contradição. \square

2.3 Função suporte

Continuando com a hipótese de convexidade estrita, vamos agora dar uma prova do TQV que usa a função suporte.

Dados uma curva regular convexa γ , com raio de curvatura $r(\theta)$, e um ponto $z \in \mathbb{R}^2$ no interior da região compacta \mathcal{R} limitada pelo traço de γ , definimos a *função suporte* associada a z por

$$h_z(\theta) = -\langle \gamma(\theta) - z, N(\theta) \rangle.$$

A escolha do ponto z não é relevante para o estudo de propriedades geométricas e, por translação, podemos supor que $z = 0 = (0, 0)$. Denotamos $h_0 = h$.

Note que $h'(\theta) = \langle \gamma'(\theta), T(\theta) \rangle$ de modo que podemos escrever

$$\gamma(\theta) = h'(\theta)T(\theta) - h(\theta)N(\theta).$$

Além disso, o raio de curvatura pode ser obtido diretamente de h , pois $h''_z(\theta) = R(\theta) + \langle \gamma'(\theta), N(\theta) \rangle = R(\theta) - h(\theta)$.

Ou

$$h''(\theta) + h(\theta) = R(\theta).$$

Segue então que os vértices correspondem aos zeros de $h''' + h'$.

Observe também que dada uma função periódica positiva $p(\theta)$, considere a equação $h''(\theta) + h(\theta) = p(\theta)$.

Se conseguirmos uma solução periódica para a equação acima, então a curva $\gamma(\theta) = h'(\theta)T(\theta) - h(\theta)N(\theta)$ será uma curva convexa de raio de curvatura $p(\theta)$.

Essa observação será usada quando formos comentar a recíproca do TQV. O TQV é consequência do seguinte

Lema 2.1. *Uma função 2π -periódica da forma $h''' + h'$ tem pelo menos quatro zeros.*

Demonstração. Por ser periódica, $h''' + h'$ tem um número par de zeros e necessariamente tem pelo menos dois. Suponha, por absurdo, que $h''' + h'$ tenha apenas dois zeros.

Exercício: Existe uma função g , C^∞ , que satisfaz à equação diferencial $g''' + g' = 0$ e se anula exatamente nos mesmos zeros de $h''' + h'$, tal que $(h''' + h')g > 0$. [Sugestão: comece com a equação linear $g'' + g = A$, A constante].

Usando o exercício e integração por partes

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^{2\pi} (h''' + h')g d\theta = - \int_0^{2\pi} (h'' + h)g' d\theta, \\ &= - \int_0^{2\pi} h''g' d\theta - \int_0^{2\pi} hg' d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} h'g'' d\theta - \int_0^{2\pi} hg' d\theta = - \int_0^{2\pi} h(g''' + g')d\theta = 0, \end{aligned}$$

obtemos uma contradição. □

2.4 Guggenheimer - Círculos bitangentes

Além da prova curta publicada em 1969, [H. Guggenheimer \(1969a\)](#), Guggenheimer demonstrou o TQV sem a hipótese de convexidade. Esta prova geométrica usa círculos bitangentes.

Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^2 , simples e fechada. Para cada $s \in [0, L]$ denotamos por $C(s)$

- (i) o círculo osculador, caso este esteja inteiramente contido na região compacta \mathcal{R} limitada pelo traço de γ , obtida no Teorema da Curva de Jordan, ou
- (ii) o círculo de raio máximo tangente a γ em $\gamma(s)$ e contido em \mathcal{R} , caso o círculo osculador não esteja contido em \mathcal{R} .

No primeiro caso, s não pertence a um arco monótono de γ . No segundo, $C(s)$ é um círculo bitangente a γ . (Por que?).

Observe também que se há arcos monótonos então nem todos os círculos da família $C(s)$ são círculos de curvatura (por que?). Se não há arcos monótonos em γ , então γ é um círculo.

Se s_0 é um ponto tal que $C(s_0)$ não é o círculo de curvatura, existe um ponto, que denotaremos por \bar{s}_0 , o ponto mais próximo de $s_0 < \bar{s}_0$, tal que $\gamma(\bar{s}_0)$ está contido em $C(s_0)$. Isto é, outro ponto de tangência de $C(s_0)$ com γ .

Vamos denotar por $c(s)$ o centro do círculo $C(s)$ e por $[z_1, z_2] = tz_1 + (1-t)z_2$, $0 \leq t \leq 1$, o segmento de reta que liga os pontos z_1 e z_2 .

A primeira observação é que os segmentos radiais são disjuntos.

Lema 2.2. *Se $\gamma(s_1)$ não pertence ao círculo $C(s_0)$, então temos que $[\gamma(s_0), c(s_0)] \cap [\gamma(s_1), c(s_1)] = \emptyset$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $z \in [\gamma(s_0), c(s_0)] \cap [\gamma(s_1), c(s_1)]$. Trocando os pontos, se necessário, suponha que $|z - \gamma(s_0)| \geq |z - \gamma(s_1)|$. Então

$$\begin{aligned} |C(s_0) - \gamma(s_1)| &< |C(s_0) - z| + |z - \gamma(s_1)| < \\ &< |C(s_0) - z| + |z - \gamma(s_0)| = |C(s_0) - \gamma(s_0)|. \end{aligned}$$

Isto significa que $\gamma(s_1)$ está no interior do disco limitado por $C(s_0)$. O que contradiz a definição da família de círculos $C(s)$. Concluimos assim que $[\gamma(s_0), c(s_0)] \cap [\gamma(s_1), c(s_1)] = \emptyset$. \square

Vamos agora definir um processo indutivo para encontrar um ponto de máximo local da curvatura.

Observe que a família de círculos $\{C(s)\}_{s \in [0, L]}$ é uniformemente limitada, ou seja, existe um disco no plano que contém todos os elementos da família.

A ideia é usar o Teorema de Seleção de Blashke que diz que uma família infinita \mathcal{C} de conjuntos não vazios, convexos, compactos e uniformemente limitada em um espaço métrico contém uma sequência que converge em \mathcal{C} , veja [Lay \(1982, cap. 6\)](#). Repare a semelhança deste enunciado com o do Teorema de Bolzano–Weierstrass.

Começando com um círculo de bitangência $C(s_0)$ com ponto de tangência mais próximo \bar{s}_0 . Defina $s_1 = \frac{s_0 + \bar{s}_0}{2}$.

Como $\gamma(s_1)$ não pertence a $C(s_0)$, tomemos $C(s_1)$. Se $C(s_1)$ for um círculo de curvatura, então paramos o processo, pois encontramos um vértice.

Se esse não for o caso, considere \bar{s}_1 . O Lema implica que $\bar{s}_1 \in (s_0, \bar{s}_0)$ pois, caso contrário, o ponto $\gamma(\bar{s}_1)$ estaria no arco de γ complementar ao arco entre s_0 e \bar{s}_0 . Mas

isto implica que $c(s_1)$, o centro do círculo $C(s_1)$, está na componente exterior ao “setor” formado pelos raios $[c(s_0), \gamma(s_0)]$, $[c(s_0), \gamma(\bar{s}_0)]$ e o arco em γ que vai de $\gamma(s_0)$ a $\gamma(\bar{s}_0)$. Entretanto, essa configuração implica em interseção não vazia entre os raios:

$$\{[c(s_0), \gamma(s_0)] \cup [c(s_0), \gamma(\bar{s}_0)]\} \cap \{[c(s_1), \gamma(s_1)] \cup [c(s_1), \gamma(\bar{s}_1)]\} \neq \emptyset.$$

O que contradiz o que diz-nos o Lema 2.2 acima. Defina $s_2 = \frac{s_1 + \bar{s}_1}{2}$ e sucessivamente, caso não encontremos um vértice, $s_{j+1} = \frac{s_j + \bar{s}_j}{2}$.

Observe que $s_{j+1}, \bar{s}_{j+1} \in (s_j, \bar{s}_j)$ portanto, por indução, obtemos

$$|s_j - \bar{s}_j| < \frac{1}{2^j} |s_0 - \bar{s}_0|.$$

Segue que, tomando uma subsequência convergente $s_j \rightarrow s^*$, é claro que $\bar{s}_j \rightarrow s^*$.

A sequência de círculos de bitangência $C(s_j)$ está no interior da região \mathcal{R} logo o Teorema da Convergência de Blaschke afirma que existe uma subsequência convergindo a um círculo tangente a γ em $\gamma(s^*)$. Se provarmos que o raio deste círculo é igual a $\frac{1}{k(s^*)}$, então estaremos provando que C^* é o círculo de curvatura de $\gamma(s^*)$ e está contido em \mathcal{R} . Concluimos assim que s^* é um vértice.

Portanto, para concluir a prova do TQV, basta provar que $k(s^*) \neq 0$ e que o raio de $C(s^*)$ é igual a $\frac{1}{k(s^*)}$.

De fato, denotando por $\theta(s)$ o ângulo que $T(s)$ faz com uma direção fixa, pela definição de curvatura escrevemos

$$\theta(\bar{s}_j) = \theta(s_j) + k(s_j)(\bar{s}_j - s_j) + O(|\bar{s}_j - s_j|^2).$$

Portanto

$$k(s^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j) + k(s_j)}{\bar{s}_j - s_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} k(s_j).$$

Por outro lado, podemos obter uma estimativa para o raio de cada círculo $C(s_j)$ observando que $\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j)$ é o ângulo entre as normais a $C(s_j)$ nos pontos $\gamma(\bar{s}_j)$ e $\gamma(s_j)$.

Denotando por r_j o raio de $C(s_j)$ pela Lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} |\gamma(\bar{s}_j) - \gamma(s_j)|^2 &= 2r_j^2[1 - \cos(\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j))] = \\ &= 4r_j^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j)}{2}\right). \end{aligned}$$

De acordo com a forma normal das curvas planas:

$$|\gamma(\bar{s}_j) - \gamma(s_j)|^2 = (\bar{s}_j - s_j)^2 + O(|\bar{s}_j - s_j|^4).$$

Enquanto aplicando a Fórmula de Taylor do seno temos:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j)}{2}\right) = \frac{1}{4}k(s_j)^2(\bar{s}_j - s_j)^2 + O(|\bar{s}_j - s_j|^3).$$

Portanto, juntando todas estas estimativas, obtemos:

$$r_j = \frac{1}{k(s_j)} + O(|\bar{s}_j - s_j|^2).$$

Como a sequência dos círculos é uniformemente limitada, o mesmo ocorre com a sequência de raios r_j . Sendo assim a curvatura $k(s_j)$ não converge para zero e $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = \frac{1}{\bar{k}(s^*)}$. Em outras palavras, o raio do círculo C^* é igual a $\frac{1}{\bar{k}(s^*)}$. Ou seja, C^* é o círculo de curvatura de $\gamma(s^*)$ que está totalmente contido na região \mathcal{R} interior ao traço de γ . Segue então que s^* não pertence a um arco monótono, ou seja, é um vértice de γ .

Se agora considerarmos o arco de γ que vai de $\gamma(\bar{s}_0)$ até $\gamma(s_0)$ obtemos o outro ponto s^{**} cujo círculo de curvatura $C(s^{**})$ está contido na região limitada por γ . Se $C(s^{**}) \neq C(s^*)$, então encontramos um outro vértice que é máximo local da curvatura. No caso $C(s^{**}) = C(s^*)$, temos que $C(s^*)$ é um círculo de curvatura bitangente à curva. Prossequimos então tomando o ponto médio como anteriormente e novamente encontrando um terceiro ponto com círculo de curvatura tangente a γ . Como estamos supondo que nem todo círculo da família $C(s)$ é círculo de curvatura, repetindo o processo um número finito de vezes, caso necessário, encontraremos um novo círculo de curvatura, isto é, diferente de $C(s^*)$ inteiramente contido na região. Este círculo corresponde a um mínimo local.

2.5 Conjunto de simetria

O *Conjunto de Simetria*, lugar dos centros dos círculos de bitangência da curva, é utilizado em computação gráfica como uma espécie de esqueleto da curva. Dado um esqueleto e uma função contínua e positiva, a curva pode ser obtida como a envoltória dos círculos de centro no conjunto de simetria e raio igual ao valor da função.

Essa é uma das razões pelas quais discutimos uma prova do TQV que usa o conjunto de simetria. Outra razão é o uso de técnicas de singularidades de aplicações a problemas de geometria diferencial.

Um círculo de bitangência a γ nos pontos $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ define localmente (ou infinitesimalmente como se diz usualmente) um eixo de simetria da curva. Basta tomar a reta \mathcal{L} que passa pelo centro do círculo e pelo ponto de intersecção das retas tangentes a γ em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$. (O que ocorre se essas retas são paralelas?)

A *simetria* a que se refere é a reflexão com respeito a reta \mathcal{L} .

Ao introduzirmos a definição de evoluta, na primeira seção, consideramos a família de retas definida por $\Gamma(s, t) := \Gamma_t(s) = \gamma(s) + tN(s)$, considerando s como o parâmetro.

Mudando o ponto de vista, podemos fixar t como parâmetro e considerar a família de curvas $\Gamma_t(s)$ equidistantes a $\gamma(s) = \Gamma(s, 0)$ ($|\Gamma_t(s) - \gamma(s)| = |t|$)

O conjunto de simetria, lugar dos centros de círculos de bitangência é caracterizado por $z = \Gamma_t(s_1) = \Gamma_t(s_2)$, $s_1 \neq s_2$, os pontos de auto intersecção de Γ_t .

Como $\Gamma_t'(s) = [1 - k(s)t]T(s)$, vemos que se $t < \frac{1}{k_{max}}$, $k_{max} = \max\{k(s)\}$ então a curva Γ_t é regular.

Exercício: Prove que se $t < \frac{1}{k_{max}}$ então Γ_t é uma curva regular, fechada e *simples*. [Sugestão: comece provando que $\forall s_0 \in [0, L]$ existe um intervalo $I(s_0)$ tal que $\Gamma_t(s_1) \neq \Gamma_t(s_2)$, $s_1 \neq s_2 \in I(s_0)$. Para concluir observe que a restrição a Γ_t é homotópica a $\gamma(s)$].

Exercício: Dada uma curva convexa γ , seja \mathcal{L} , com extremidades $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ a sua menor corda, i.e., o comprimento da menor corda é definido por $\inf_s \sup_t (|\gamma(s) - \gamma(t)|)$. Na elipse a menor corda é o eixo menor. Prove que \mathcal{L} é perpendicular a γ e que o seu ponto médio está contido no conjunto de simetria.

Além disso, não pode haver mais pontos de γ contidos na corda. Ou seja, o ponto médio da corda é o único da intersecção da corda mínima com o conjunto de simetria.

Exercício: Será que por qualquer ponto da curva passa um círculo de bitangência interna em pontos distintos? Ou será que há pontos especiais em que o círculo de bitangência tem contato de ordem maior do que 1?

Exercício: Descreva o conjunto de simetria da parábola.

Exercício: Descreva o conjunto de simetria de uma elipse, por exemplo, $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$, com $a > 1$. Como a elipse tem simetrias axiais, certamente o seu conjunto de simetria está contido em um dos eixos da elipse, qual? A partir da corda mínima, verifique o que ocorre com os pontos de bitangência quando movemo-nos para a direita. Observe que estamos considerando os círculos de bitangência interna, portanto existe um valor máximo para o raio desses círculos. Qual será este máximo no caso da elipse?

O fato principal a ser usado nessa abordagem para o TQV é o seguinte: *o lugar dos centros do círculos bitangentes é um grafo, sem circuitos fechados (laços), cujas extremidades correspondem a pontos de máximo da curvatura.*

A estrutura do conjunto de simetria:

Proposição 2.2. *Dada uma oval $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cada ponto $\gamma(\theta)$ existe um único ponto do conjunto de simetria, centro do círculo de bitangência que passa por $\gamma(\theta)$.*

Demonstração. Considere a família a um parâmetro de círculos com centro no interior na região \mathcal{R} que são tangentes a γ em $\gamma(\theta)$. Como vimos no Capítulo 1, os centros estão sobre a reta normal e variando o raio, por continuidade, existe um primeiro valor para o qual o círculo volta a ser tangente à curva. Denote por $\mathcal{C}(z, t)$ o círculo de centro z e raio t .

Se a normal está orientada para dentro da região limitada por γ , para valores pequenos e positivos de t o círculo $\mathcal{C}(\gamma(\theta) + tN(\theta), t)$ está inteiramente contido na região \mathcal{R} . Quando t é suficientemente grande, o círculo, exceto o ponto $\gamma(\theta)$ está na região exterior a \mathcal{R} . Logo existe

$$t_0 = \text{Max}\{t > 0 \mid \mathcal{C}(\gamma(\theta) + tN(\theta), t) \subset \mathcal{R}\}.$$

O centro $\gamma(\theta) + t_0N(\theta)$ está no conjunto de simetria. Este ponto é o único ponto no conjunto de simetria associado ao ponto $\gamma(\theta)$. De fato, por absurdo, sejam $z_1(\theta)$ e $z_2(\theta)$ centros de círculos bitangentes a γ que passam por $\gamma(\theta)$, Suponha que $\gamma(\theta_1)$ e $\gamma(\theta_2)$ sejam os outros pontos de tangência com os círculos $\mathcal{C}(z_1, \gamma(\theta) + tN(\theta), t_1)$ e $\mathcal{C}(z_2, \gamma(\theta) + tN(\theta), t_2)$ respectivamente. Suponha que $t_1 < t_2$.

Então,

$$\begin{aligned} |z_2 - \gamma(\theta_1)| &< |z_2 - z_1| + |z_1 - \gamma(\theta_1)|, \\ &= |z_2 - z_1| + |z_1 - \gamma(\theta)| = |z_2 - \gamma(\theta)|. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato dos pontos z_1, z_2 e $\gamma(\theta)$ serem colineares. A desigualdade significa que o ponto $\gamma(\theta_1)$ está contido no interior do círculo $\mathcal{C}(z_2, \gamma(\theta) + tN(\theta), t_2)$, o que contradiz a definição de círculo bitangente (interno). Concluindo a demonstração da Proposição. \square

A componente regular do Conjunto de Simetria de uma curva:

Usaremos o Teorema da Função Implícita, [E. Lima \(1981\)](#), para obter localmente o ponto $\mathcal{S}(\theta)$ associado a um ponto $\gamma(\theta)$ em uma curva regular γ .

Observe que se $\gamma(\theta_0) + t_0N(\theta_0)$ é o centro de bitangência tangente a $\gamma(\theta_0)$, θ_0 pertencente a um arco monótono então $t_0 < R(\theta_0)$.

Seja $F(\theta_1, \theta_2, t) = \gamma(\theta_1) - \gamma(\theta_2) - t[N(\theta_1) - N(\theta_2)]$.

Se $\theta_1 \neq \theta_2$ e $F(\theta_1, \theta_2, t_0) = 0$ então o ponto $\gamma(\theta_1) - t_0N(\theta_1)$ pertence ao conjunto de simetria \mathcal{S} . De fato, $F(\theta_1, \theta_2, t_0) = 0$ se, e somente se, $\gamma(\theta_1) + t_0N(\theta_1) = \gamma(\theta_2) + t_0N(\theta_2)$, logo o círculo de centro $\gamma(\theta_1) + t_0N(\theta_1)$ e raio t_0 é bitangente à curva γ nos pontos $\gamma(\theta_1)$ e $\gamma(\theta_2)$.

Observe agora que a derivada de F no ponto $(\theta_1, \theta_2, t_0)$ tem as seguintes colunas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_1} &= [R(\theta_1) - t_0] T(\theta_1), \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_2} &= [t_0 - R(\theta_2)] T(\theta_2), \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= N(\theta_1) - N(\theta_2). \end{aligned}$$

Se $t < R(\theta)$ então as duas primeiras colunas só são linearmente dependentes se $T(\theta_1) = -T(\theta_2)$. Mas neste caso, $N(\theta_1) = -N(\theta_2)$, de modo que as duas últimas colunas são linearmente independentes, de fato, ortogonais.

Em qualquer um dos casos, o posto de $DF(\theta_1, \theta_2, t_0)$ é igual a 2 (máximo) e o Teorema da Função Implícita implica que o conjunto de simetria é uma curva de classe C^1 .

Para verificar que \mathcal{S} é uma curva regular, suponha inicialmente que $T(\theta_1) \neq -T(\theta_2)$ de modo que parametrizamos \mathcal{S} localmente por t : a cada t próximo de t_0 associamos um único par $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ tal que $\mathcal{S}(t) = \gamma(\theta_1(t)) + tN(\theta_1(t)) = \gamma(\theta_2(t)) + tN(\theta_2(t))$ pertence ao conjunto de simetria com vetor tangente:

$$\mathcal{S}'(t) = [R(\theta_1(t)) - t]T(\theta_1(t)) + N(\theta_1(t)) \neq 0$$

No caso em que $T(\theta_1) = -T(\theta_2)$, a cada θ_1 associamos um par $(\theta_2(\theta_1), t(\theta_1))$ tal que $\mathcal{S}(\theta_1) = \gamma(\theta_1(t)) + t(\theta_1)N(\theta_1(t))$ parametriza o conjunto de simetria, com vetor tangente

$$S'(\theta_1) = [R(\theta_1) - t(\theta_1)]T(\theta_1) + t'(\theta_1)N(\theta_1) \neq 0.$$

Concluindo assim a descrição local do conjunto de simetria. Seja z o centro de um círculo de bitangência situado em uma componente regular do conjunto de simetria \mathcal{S} , então z é a intersecção de duas retas normais que são transversais a \mathcal{S} em z .

Pergunta: Qual é o fecho do conjunto de simetria?

Vimos na prova o TQV dada por Guggenheimer, descrita na subsecção anterior, que os pontos de acumulação de arcos de bitangência são vértices que correspondem a máximos locais da curvatura. Assim, se provarmos que não há laços no conjunto de simetria então teremos provado que existem pelo menos dois pontos distintos de máximo da curvatura.

Proposição 2.3. *O conjunto de simetria não possui laços, i.e., não possui componentes conexas fechadas homeomorfas ao círculo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que Δ seja um laço do conjunto de simetria. Podemos supor que Δ seja regular. Defina $T : \Delta \rightarrow \gamma$ por $T(z) = \gamma(s)$ onde $s \in [0, L]$ é o menor valor tal que z é centro de círculo de tangente a γ em $\gamma(s)$. Temos que T é contínua e injetiva, portanto um homeomorfismo. Em particular, T é sobrejetora. Mas se p pertence à imagem de T , então a reta normal a γ que passa por p intersecta Δ duas vezes, pois é transversal a Δ .

Entretanto, vimos que o ponto de corda mínima intersecta o conjunto de simetria em apenas um ponto. Obtemos assim uma contradição. \square

Não tendo laços, as componentes regulares do conjunto de simetria são arcos de curvas regulares, que não possuem auto acumulação, logo seu fecho é constituído de pontos extremais ou vértices. Entretanto, a inexistência de arcos implica que deve haver pelo menos dois pontos extremais em \mathcal{S} .

2.6 A prova de R. Osserman: considere o círculo circunscrito

Com a frase do título desta subsecção os autores em [DeTurck et al. \(2007\)](#) resumem a principal ideia da prova do TQV dada por R. Osserman [Osserman \(1985\)](#). Essa bela prova essencialmente geométrica, tem várias vantagens, entre elas:

A) vale para curvas não convexas.

B) fornece o número de vértices em função do número de pontos de tangência da curva com o círculo circunscrito, de modo similar ao que foi provado por Jackson [Jackson \(1944\)](#).

O círculo circunscrito de um subconjunto compacto K do plano é o círculo de menor raio tal que o disco fechado limitado por \mathcal{C} contém K .

Teorema 2.1 (Osserman, 1985). *Seja c uma curva de Jordan de classe C^2 no plano \mathbb{R}^2 . Denotamos por C o círculo circunscrito a c . Então:*

i) $c \cap C$ contém pelo menos dois pontos.

ii) Se $c \cap C$ contém pelo menos n pontos, então c possui pelo menos $2n$ vértices.

A seguir apresentamos os lemas que serão usados na prova do teorema. Ao leitor interessado sugerimos o artigo de Osserman, [Osserman \(1985\)](#). Esta subsecção foi inteiramente baseada neste trabalho. A ideia fundamental a ser explorada aqui é comparar o raio de um círculo tangente à curva com o raio de curvatura, como foi feito no capítulo 1.

Lema 2.3. *Seja K um conjunto compacto no plano contendo pelo menos dois pontos. Denote por $\mathcal{C}(K)$ a classe de compactos do plano formada por círculos tais que $K \subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}(K)$. Então existe um único círculo $C_K \in \mathcal{C}(K)$ de raio mínimo R que contém K .*

A construção do círculo circunscrito C a uma curva regular γ , simples e fechada (ou mais geralmente de um compacto), não é explícita. Podemos, em geral, obter as suas propriedades que seguem da definição.

Algumas delas:

i) a interseção da curva γ com o seu círculo de curvatura \mathcal{C} é não vazia. Pois, caso contrário, a distância entre esses dois conjuntos compactos seria positiva e assim poderíamos diminuir o raio do círculo, obtendo um outro círculo que também circunscribe a curva.

ii) A interseção $\mathcal{C} \cap \gamma$ não pode estar contida em um semi-círculo aberto. Em outras palavras, qualquer semicírculo do círculo circunscrito \mathcal{C} intersecta γ .

Prova: Por absurdo, suponha que o compacto $\mathcal{C} \cap \gamma$ esteja contido em um semicírculo aberto. Usando um movimento rígido podemos supor que \mathcal{C} esteja centrado na origem de um sistema de coordenadas cartesiano, com raio R e que o semicírculo esteja no semiplano superior.

A ideia é transladar verticalmente o círculo de modo a obter outro círculo, disjunto do traço de γ , que a circunscribe. Pelo item i), é possível diminuir o raio e obter uma contradição.

Seja $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C} \cap \gamma$ cuja ordenada $y_0 > 0$ seja mínima entre esses pontos, isto é, p_0 é o ponto da interseção mais próximo do eixo $y = 0$. Observe que se $0 < \varepsilon_0 < 2y_0$, então p_0 está contido no círculo $\mathcal{C}(\varepsilon_0, R)$, de raio R com centro no ponto $(0, \varepsilon_0)$. Por continuidade, existe uma vizinhança aberta J_0 de p_0 em γ tal que para todo $t \in J_0$ o ponto $\gamma(t)$ está também contido em $\mathcal{C}(\varepsilon_0, R)$.

Considere o arco compacto I em γ totalmente contido no semiplano $y \leq \varepsilon_0$. Se $R_0 = \max\{|\gamma(t)|, t \in I\}$ então, por hipótese $R_0 < R$.

Tomemos $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \sqrt{R^2 - R_0^2}\}$. Segue que o círculo $\mathcal{C}(\varepsilon, R)$, de centro $(0, \varepsilon)$ e raio R circunscribe γ e $\mathcal{C}(\varepsilon, R) \cap \gamma = \emptyset$. Concluindo a prova.

iii) Segue imediatamente da prova do item ii) que se a interseção de uma curva com o seu círculo circunscrito tem dois pontos então os pontos são antípodas.

Lema 2.4. *Seja c uma curva regular C^2 de curvatura $k \neq 0$ orientada e C um círculo de raio de curvatura R tangente a c no ponto p . Então:*

i) Se $k(p) > \frac{1}{R}$ uma vizinhança de p em c está contida no interior da região delimitada por C .

ii) Se $k(p) < \frac{1}{R}$ uma vizinhança de p em c está contida no exterior de C .

Demonstração. Escolhemos coordenadas tais que $p = 0$, $k(0) = k$ e o eixo de tangência entre c e C seja o eixo x . Logo temos, $c(t) = (t, y_c(t)) = (t, \frac{k}{2}t^2 + \dots)$ e $C(t) = (t, y_C(t)) = (t, R - \sqrt{R^2 - t^2})$. Portanto para t pequeno temos $y_c(t) > y_C(t)$ se, e somente se, $k > \frac{1}{R}$. \square

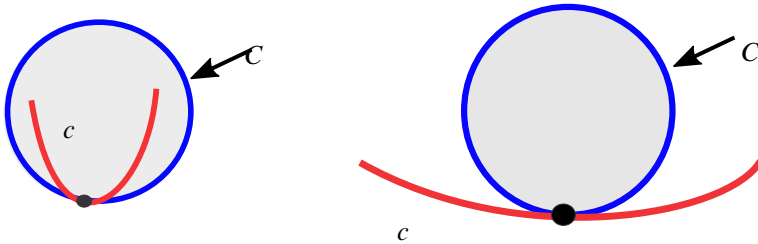


Figura 2.1: Posição relativa e curvatura.

Lema 2.5. *Seja c uma curva de Jordan positivamente orientada e C o círculo circunscrito de raio R tal que $\{p_1, p_2\} \subset c \cap C$. Denote por $C_1 \subset C$ o arco orientado ligando p_1 a p_2 . Então ou c coincide com o sub-arco C_1 ou existe um ponto $q_1 \in c$ tal que $k(q_1) < \frac{1}{R}$.*

Demonstração. Podemos supor, pelo lema 2.3, que o arco $C_1 \subset C$ positivamente orientado de p_1 a p_2 tem comprimento menor que o de um semicírculo. Suporemos, escolhido um referencial, que C está centrado na origem e p_1 e p_2 tenham a mesma abscissa; veja Fig. 2.2. Denotamos por c_1 o arco de c , positivamente orientado, ligando os pontos p_1 e p_2 . Se c_1 e C_1 não coincidirem existe $q \in c_1$ contido na região delimitada por C . Tomamos q na região a direita da reta vertical determinada por p_1 e p_2 . Consideramos o círculo C' determinado pelos pontos p_1, q, p_2 . Transladamos o círculo C' para a esquerda até que o arco c_1 tenha um único ponto de contato (tangência) q_1 com C' , isto é, $c_1 \cap C' = q_1$.

Como o raio R' de C' satisfaz $R' > R$ e c_1 está na região externa de C' transladado, temos pelo lema 2.4 que $k(q_1) \leq \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}$. \square

Demonstração do Teorema 2.1: A seguir faremos a prova do teorema para o caso de curvas convexas. O caso geral pode ser facilmente adaptado, levando-se em conta a possibilidade de inversão de orientação.

Dado uma curva de Jordan c a mesma divide o plano em duas componentes conexas A e B tal que A é limitada e B não limitada com $\bar{A} \cap \bar{B} = c$.

A parte i) do teorema segue do lema 2.3 pois o conjunto $\bar{A} \cup c$ é compacto e difeomorfo a um círculo.

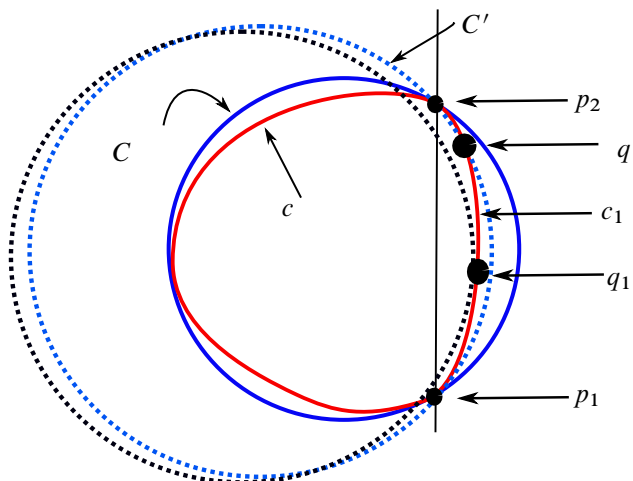


Figura 2.2: Círculo circunscrito.

Para obtermos a parte ii) consideramos os pontos p_1, \dots, p_n em $c \cap C$. Ordenando estes pontos ciclicamente obtemos n arcos c_1, \dots, c_n de c e correspondentes arcos C_1, \dots, C_n em C , conforme Fig. 2.3.

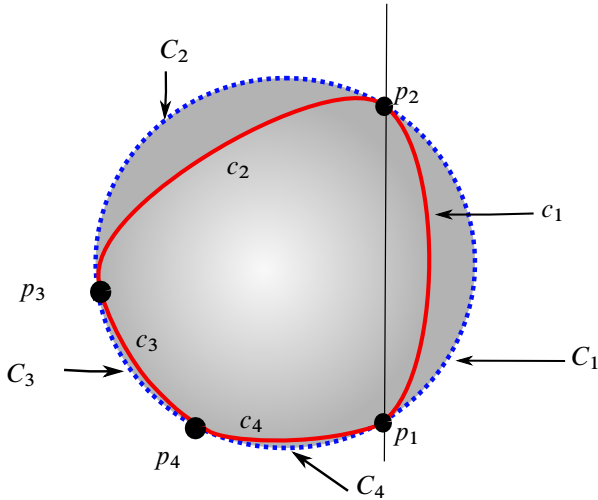


Figura 2.3: Círculo circunscrito e vértices

Cada um dos arcos c_i coincide com C_i ou contém um ponto q_i tal que $k(q_i) < \frac{1}{R}$. Pelo lema 2.4 temos que $k(p_i) \geq \frac{1}{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto k possui um mínimo em pontos interiores de $c'_i \in c_i$ e $k(q'_i) < \frac{1}{R}$. Deste modo obtemos n vértices satisfazendo a desigualdade acima.

Por outro lado cada subarco $c'_i \subset c_i$ ligando q_i a q_{i+1} contém o ponto p_{i+1} . Tendo em vista as desigualdades $k(q_i) < \frac{1}{R}$ e $k(p_i) \geq \frac{1}{R}$ existe um ponto $p'_k \in c'_k$ onde k tem um máximo e $k(p'_k) \geq \frac{1}{R}$. Assim obtemos outros n vértices e portanto obtendo a parte ii) do teorema. \square

- Exercício:** i) Dê vários exemplos de curvas de Jordan possuindo exatamente 4 vértices.
 ii) Dê exemplos de curvas de Jordan possuindo exatamente 6 vértices.
 iii) Calcule o número de vértices da parte compacta da cúbica $x^2 + y^2 + \varepsilon(x^3 - y^3) = 1$

2.7 Outra prova analítica do TQV

Nesta seção daremos uma prova analítica do teorema dos quatro ou mais vértices, baseada principalmente no artigo [Tabachnikov \(1997\)](#).

Lema 2.6. *Seja $c(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular de classe C^3 convexa e com curvatura $k(s)$. A função $k'(s)$ é ortogonal, relativo ao produto interno do espaço de funções $L^2([0, L], \mathbb{R})$, ao conjunto $\{1, x(s), y(s)\}$.*

Demonstração. Claramente $\int_0^L 1 \cdot k'(s) ds = 0$. Fazendo integração por partes obtemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^L k'(s)c(s)ds &= - \int_0^L k(s)T(s)ds = \int_0^L N'(s)ds, \\ &= N(L) - N(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto segue o resultado. \square

Observação 2.1. O espaço de funções $H = L^2([0, L], \mathbb{R})$ de quadrado integrável é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^L f(t)g(t)dt$.

Um subespaço Y de funções reais definidas no intervalo $[0, L]$, $(2n + 1)$ -dimensional, é chamado um *sistema de Chebyshev* se toda função não nula neste espaço possui no máximo $2n$ zeros, contando multiplicidades. O sistema é chamado *regular* se todo subespaço $0 \neq Z \subset Y$ é ainda um *sistema de Chebyshev*.

Um exemplo típico de sistema de Chebyshev é o espaço de polinômios de grau menor ou igual $2n$, o qual é gerado por $\{1, x, x^2, \dots, x^{2n}\}$ e portanto $2n + 1$ -dimensional. Outro exemplo importante de sistema de Chebyshev é o formado pelas funções $\{1, x, x^2, \dots, x^n, x \ln x, x^2 \ln x, \dots, x^n \ln x\}$ de dimensão $3n + 1$.

Um critério útil para caracterizar os sistemas de Chebyshev é dado pela seguinte proposição (veja Kreyszig (1989, cap. 6)).

Proposição 2.4. *Um subespaço de funções Y é um sistema de Chebyshev $2n + 1$ -dimensional se, e somente se, para toda base $\{f_1, f_2, \dots, f_{2n+1}\}$ de Y e toda $2n + 1$ -upla de pontos distintos $\{t_1, \dots, t_{2n+1}\}$ no intervalo $[0, L]$ temos que:*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \dots & f_1(t_{2n+1}) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \dots & f_2(t_{2n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{2n+1}(t_1) & f_{2n+1}(t_2) & \dots & f_{2n+1}(t_{2n+1}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. Toda função $f \in Y$ é dada por $f = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_i$. O subespaço Y é um sistema de Chebyshev se, e somente se, toda f como acima com $2n + 1$ zeros distintos $\{t_1, \dots, t_{2n+1}\}$ no intervalo $[0, L]$ for identicamente nula. O sistema de equações $f(t_j) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_i(t_j) = 0$, $(j = 1, \dots, 2n + 1)$ implica que $a_1 = \dots = a_{2n+1} = 0$. Mas isto ocorre se, e somente se, o determinante no enunciado da proposição for não nulo. \square

Teorema 2.2. *Uma função f ortogonal em $L^2([0, L], \mathbb{R})$ a um sistema $(2n + 1)$ -dimensional de Chebyshev tem pelo menos $2n + 2$ zeros distintos.*

Demonstração. Suponha que f possua somente $2n$ zeros simples, $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$. Logo existe g no subespaço $2n + 1$ dimensional de Chebyshev possuindo exatamente os mesmos zeros de f . Logo o sinal de $f \cdot g$ é constante em cada um dos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ e portanto $\int f g \neq 0$ contradizendo a ortogonalidade. O mesmo argumento pode ser efetuado supondo que f possua um menor número de zeros (contando multiplicidade). \square

O teorema dos quatro ou mais vértices é portanto uma consequência do Teorema 2.2 acima.

2.8 Curvas não simples

No artigo [Jackson \(1944\)](#), adotando um ponto de vista diferente para o TQV, Jackson busca caracterizar as curvas convexas planas fechadas que possuem exatamente dois vértices. Isso o levou à discussão sobre arcos monótonos, exposta no Capítulo 1. Uma tal curva é formada por arcos monótonos que só não serão simples se contiverem um círculo tangente à curva. Supondo que não existam tais círculos, uma análise da geometria partindo do vértice de curvatura mínima até o vértice de curvatura máxima, mostra que a curva possui um único ponto duplo na intersecção de dois laços simples, cada um dos quais contendo um vértice.

Jackson vai mais além, procurando descrever as curvas convexas simples fechadas com exatamente $2n$ vértices.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de curvas fechadas com exatamente dois vértices.

Exemplo 2.1. *A curva regular fechada γ*

$$\gamma(u) = ((R + r \cos u) \cos u, (R + r \cos u) \sin u),$$

com $r > R$ possui somente dois vértices, $\gamma(0) = R + r$ e $\gamma(\pi) = r - R > 0$. O ponto de cruzamento normal é $(0, 0)$, obtido resolvendo a equação $R + r \cos u = 0$.

A curvatura k e sua derivada k' são:

$$k(u) = \frac{R^2 + 2r^2 + 3rR \cos u}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos u)^{\frac{3}{2}}}, \quad k'(u) = \frac{3Rr^2(R \cos u + r) \sin u}{(r^2 + 2Rr \cos u + R^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Exemplo 2.2. *A curva fechada $\gamma(u) = (\cos u - a \sin 2u, \sin u + a \cos 2u)$ é regular tendo um ponto de cruzamento normal $(0, a)$ quando $|a| > \frac{1}{2}$ e possui somente dois vértices, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = 1 - a$, $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = -1 - a$. De fato sua curvatura é dado por*

$$k_\gamma(u) = \frac{6a \sin u - 8a^2 - 1}{(-4a \sin u + 4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Portanto,

$$k'_\gamma(u) = \frac{12a^2 \cos u (\sin u - 2a)}{(-4a \sin u + 4a^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Para $|a| < \frac{1}{2}$ a curva γ é fechada e simples e para $|a| = \frac{1}{2}$ a curva possui um ponto de cúspide $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, a)$. Veja Fig. 2.2.

A curva γ é definida implicitamente pela quártica

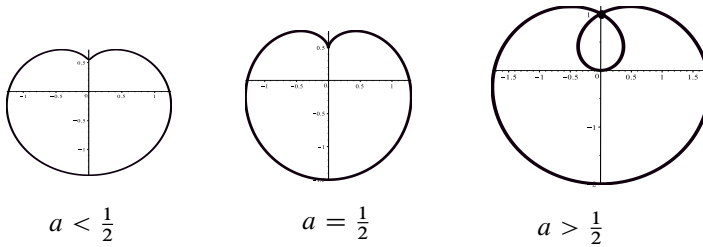


Figura 2.4: Família de curvas $\gamma_a(u) = (\cos u - a \operatorname{sen} 2u, \operatorname{sen} u + a \cos 2u)$.

$$q_4(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (2a^2 + 1)(x^2 + y^2) + 2ay + a^2(a^2 - 1) = 0.$$

Veja Exercício 1.16 para observar que esta curva é a translação de uma curva pedal do círculo.

2.9 Exercícios

Exercício 2.1. Construa um exemplo de uma curva convexa possuindo exatamente 32 vértices.

Exercício 2.2. Investigue o teorema dos quatro vértices para curvas fechadas planas no plano de Minkowski \mathbb{R}^2 com o produto interno $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$, onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Veja [V. Ovsienko e Tabachnikov \(2005, cap. 4\)](#) e [Scalco e Tari \(2018\)](#).

Exercício 2.3. Considere um par de curvas suaves e regulares γ e Γ , parametrizadas pelos comprimentos de arcos s e u e relacionadas por

$$\Gamma(u(s)) = \gamma(s) + L\gamma'(s). \quad (2.1)$$

Seja $\alpha(u(s))$ o ângulo entre os vetores tangentes $\gamma_s = \gamma'(s)$ e $\Gamma_s = \Gamma'(u(s))$ e denote por k_γ e k_Γ as curvaturas correspondentes. Faça uma boa figura para ilustrar a situação geométrica.

i) Mostre que $|\alpha(s)| < \frac{\pi}{2}$, $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\cos \alpha}$, $k_\gamma = \frac{\tan \alpha}{L}$ e $k_\Gamma = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{L} + \frac{d\alpha}{du}$.

ii) Seja γ convexa. Determine as restrições sobre L de modo a assegurar que Γ seja uma curva regular convexa.

iii) Se Γ for uma curva regular de Jordan (fechada e simples), existe alguma restrição sobre a quantidade mínima de vértices dessa curva? Veja Teorema 4 em [Tabachnikov \(2006\)](#).

- iv) Mostre que para L pequeno ou muito grande a curva Γ é regular se γ o for. Encontre as restrições sobre L de modo a assegurar que Γ seja uma curva regular quando γ for regular.
- v) Suponha conhecida a curva $\Gamma(u)$ parametrizada pelo comprimento de arco u . Como determinar a curva $\gamma(s)$ satisfazendo a equação (2.1)? Observamos que a equação (2.1) não é uma equação diferencial linear.
- vi) A equação (2.1) modela o movimento de uma bicicleta no plano \mathbb{R}^2 , sendo γ descrevendo o movimento da roda traseira e Γ descrevendo o movimento da roda dianteira. É possível encontrar um par de curvas (γ, Γ) , diferentes de retas, relacionadas pela equação (2.1) de modo que os traços das duas curvas coincidem? Veja [Levi e Tabachnikov \(2009\)](#) e [Tabachnikov \(2006\)](#) para maiores detalhes sobre este problema (aberto) no caso de exigir que as curvas sejam analíticas reais.

Exercício 2.4. Considere a elipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ e $\Gamma(t) = \gamma(t) + L \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ ilustradas na Fig. 2.5 com $a = 3$, $b = 1$ e $L = 3$.

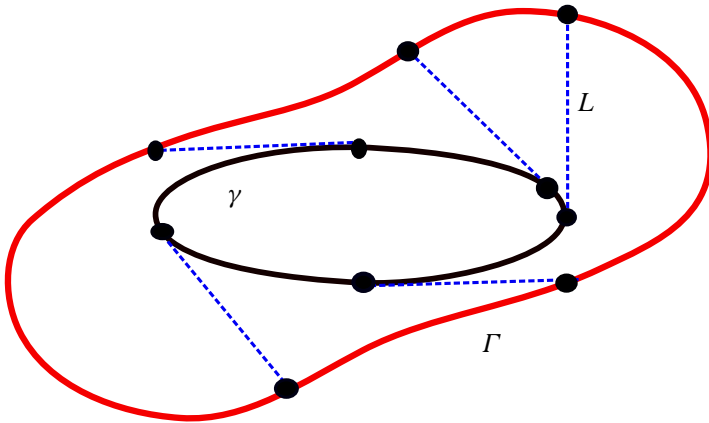


Figura 2.5: Pares de curvas (γ, Γ) sendo γ uma elipse.

- i) Mostre que se L for pequeno a curva Γ é convexa e possui exatamente 4 vértices.
 ii) Determine valores de L para os quais a curva Γ seja não convexa.
 iii) Encontre parâmetros (a, b, L) tais que Γ possua oito vértices.

Exercício 2.5. Seja γ uma curva fechada, localmente convexa (curvatura positiva k), parametrizada pelo comprimento de arco s e referencial de Frenet $\{t, n\}$ positivamente orientado. Considere a família de curvas paralelas $\gamma_r(s) = \gamma(s) + rn(s)$.

- i) Mostre que genericamente os pontos singulares de γ_r são cúspides.

- ii) Mostre que a curvatura de γ_r é igual $\frac{k(s)}{1-rk(s)}$ para $r < \min(\frac{1}{k})$.
- iii) Mostre que para $r > 0$ grande a curva γ_r é regular, localmente convexa e sua curvatura é negativa, i. e., houve uma mudança de orientação.
- iv) Esboce todo o processo de deslocamento paralelo da elipse. Supondo $b < a$, observe que para $\frac{b^2}{a} < r < \frac{a^2}{b}$ a curva γ_r possui 4 pontos de cúspides.
- v) Investigue os vértices das curvas γ_r supondo que k seja uma função de Morse (pontos críticos não degenerados).

Exercício 2.6. Seja $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica. Dado uma curva planar $\gamma(s)$ seja $\Gamma(s)$ a curva esférica definida por $\pi(\Gamma(s)) = \gamma(s)$.

- i) Calcule a curvatura e a torção de Γ em função dos dados geométricos de γ .
- ii) Mostre que os vértices de γ e os pontos de torção nula de Γ estão em correspondência biunívoca.
- iii) Caracterize os vértices da curvatura geodésica de Γ . Veja [Struik \(1988\)](#) e [do Carmo \(2016\)](#) para os conceitos de curvatura geodésica e torção.

Exercício 2.7. Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco de curva convexa possuindo o mesmo círculo osculador \mathcal{C} nos pontos $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$.

- i) Se nas vizinhanças de A e B o traço de γ está contido no interior (ou exterior) de \mathcal{C} então γ possui pelo menos 3 vértices.
- ii) Se na vizinhança de A o traço de γ está contido no interior de \mathcal{C} e na vizinhança de B o traço de γ está contido no exterior então γ possui pelo menos 4 vértices.
- iii) Seja γ uma curva convexa fechada possuindo o mesmo círculo osculador \mathcal{C} em dois pontos $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$. Se A e B não são vértices, então γ possui pelo menos 6 vértices.

Se A e B são vértices e na vizinhança de A , $\text{traço}(\gamma) \subset \text{int}(\mathcal{C})$ e na vizinhança de B , $\text{traço}(\gamma) \subset \text{ext}(\mathcal{C})$ então γ possui pelo menos 10 vértices.

Exercício 2.8. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular convexa e estrelada em relação a origem.

Defina a curva dual γ^* pelas equações $\langle \gamma, \gamma^* \rangle = 1$ e $\langle \gamma', \gamma^* \rangle = 0$.

- i) Mostre que γ^* é regular, estrelada em relação a origem e convexa.
- ii) Dado a elipse parametrizada por $\gamma(s) = (a \cos s, b \sin s)$ calcule γ^* e analise suas propriedades geométricas.

Exercício 2.9. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular e suponha parametrizada pelo comprimento de arco s .

Seja $F: \mathbb{R}^2 \setminus p_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus p_0$ a inversão em relação ao círculo centrado em $p_0 \notin \text{traço}(\gamma)$.

Se $p_0 = (0, 0)$ e o círculo for o unitário temos que $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$.

- i) Calcule a curvatura da curva $\beta(s) = F(\gamma(s))$.
- ii) Mostre que os vértices de γ e de β estão em correspondência biunívoca.

Exercício 2.10. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular e suponha parametrizada pelo comprimento de arco s e suponha que $p_0 = (0, 0) = \gamma(s_0)$. Denote por \mathcal{C} o círculo osculador de γ em $(0, 0)$.

i) Seja F a inversão em relação ao círculo osculador \mathcal{C} . Mostre que a curva $\beta(s) = F(\gamma(s))$ é assintótica a uma reta tangente a uma curva γ em $(0, 0)$ no infinito e que sua curvatura tende a zero no infinito. Se $(0, 0)$ não for vértice de γ então, na vizinhança do infinito, β está contida em semiplanos distintos definidos pela reta $R(t) = t\gamma'(s_0)$.

ii) Mostre que se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ for um arco regular com $\gamma(a) \in L$ e $\gamma(b) \in L$, onde L é uma reta e tal que a região limitado por $\gamma([a, b])$ e o segmento de $[\gamma(a); \gamma(b)]$ for simplesmente conexa então existe $s_0 \in (a, b)$ tal que a curvatura de γ em s_0 é positiva (ou negativa).

iii) Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco regular com $\gamma(a) \in L$ e $\lim_{s \rightarrow b^-} \gamma(s) = \infty$, com γ assintótica a L no infinito e além disso a reta L esteja a esquerda de γ . Mostre que existe $s_0 \in (a, b)$ tal que $k(s_0) > 0$ e $s_0 < s_1 \in (a, b)$ tal que $k(s_1) < 0$ e $k'(s_1) = 0$.

iv) A partir dos itens i), ii) e iii) demonstre o teorema dos 4-vértices. Veja Heil (1970).

v) Demonstre o teorema de Möbius que afirma que uma curva regular de Jordan no plano projetivo que não seja homotópica a zero possui pelo menos 3 pontos de inflexão e portanto também 3 vértices.

Exercício 2.11. Seja $z(s) = x(s) + iy(s) \in \mathbb{C}$ uma curva regular plana parametrizada por comprimento de arco s , i. e., $|z'| = 1$, com curvatura $k(s)$. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, uma transformação de Möbius.

i) Mostre que $k' = \text{Im}\left(\frac{z'''}{z'}\right) = \text{Im}\{z, s\}$ onde

$$\{z, s\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

Observamos que $\{z, s\}$ é a derivada de Schwarz.

ii) Defina a curva $w(s) = f(z(s))$ e mostre que os sinais das derivadas das curvaturas de $z(s)$ e $w(s)$ são os mesmos. Em particular os vértices são preservados por uma transformação de Möbius.

Exercício 2.12. Considere a curva regular cilíndrica $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, h(s))$, sendo h uma função periódica de período 2π e de classe C^k , $k \geq 3$.

i) Calcule a curvatura e a torção de γ .

ii) Mostre que γ possui pelo menos 4 pontos de torção nula.

iii) Escreva o vetor curvatura $\vec{k} = \vec{k}_g + \vec{k}_n$ e defina $k_g = |\vec{k}_g|$ e $k_n = |\vec{k}_n|$. Lembramos que $\vec{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\right)$. Calcule k_g e k_n e mostre que cada uma dessas funções possui pelo menos 4 pontos críticos.

iv) Considere a curva esférica $\beta(s) = \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}$ e faça os itens anteriores para a curva β .

Exercício 2.13. Seja γ uma curva regular de Jordan esférica que divide a esfera em duas regiões com a mesma área. i) Mostre que γ possui pelo menos 4 pontos de inflexão, i. e., 4 pontos com curvatura geodésica nula.

Exercício 2.14. Considere o polinômio cúbico $h(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.
i) Mostre que

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right)$$

é uma parametrização de $h(x, y) = 0$ e esboce o seu traço.

ii) Calcule os vértices da cúbica $x^3 + y^3 - 3axy = b$ para vários valores de (a, b) .

Exercício 2.15. i) Demonstre o seguinte teorema de Schur.

“Considere dois arcos de curvas convexas γ e η parametrizados por comprimento de arco s e possuindo o mesmo comprimento intrínseco $L = \int_0^L |\gamma'(s)| ds = \int_0^L |\eta'(s)| ds$ e suponha que $0 < k_\eta(s) < k_\gamma(s)$. Então o comprimento euclidiano $L_\gamma = |\gamma(L) - \gamma(0)|$ de γ é menor que o comprimento euclidiano $L_\eta = |\eta(L) - \eta(0)|$ de η .”

ii) Demonstre o Teorema de Schur para curvas convexas com esquinas, i. e., curvas de classe C^2 por partes, com um número finito de pontos de descontinuidade da função curvatura.

Sugestão: Veja as notas de curso de H. Hopf no endereço.

<http://www.math.cornell.edu/hatcher/Other/hopf-samelson.pdf>

Exercício 2.16. [Teorema de Vogt] Suponha um arco de curva γ tal que a corda determinada por a e b e γ determina uma região convexa, veja Fig. 2.6. Suponha que entre os pontos a e b a curvatura de γ seja positiva e monótona decrescente. Mostre que o ângulo α é maior que o ângulo β .

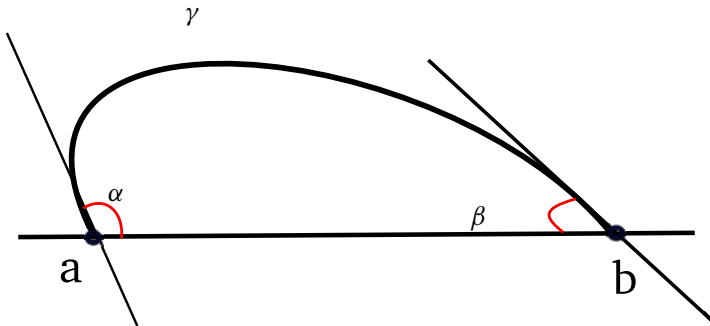


Figura 2.6: Arcos de curvas convexas com curvatura monótona.

Exercício 2.17. i) Demonstre o teorema dos quatro vértices usando o Teorema de Schur.
ii) Demonstre o teorema dos quatro vértices usando o Teorema de Vogt.

Exercício 2.18. Seja $p_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto exterior a uma elipse \mathcal{E} . Considere as duas retas tangentes L_i a \mathcal{E} passando por p_0 e seja $p_i = L_i \cap \mathcal{E}$. Sejam $l_i = |p_0 - p_i|$ e $r_i = \frac{1}{k_i}$ os raios de curvatura da elipse \mathcal{E} no ponto p_i . Mostre que

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^3.$$

Exercício 2.19. Seja

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \cos(f(u)) du, \int_0^t \sin(f(u)) du \right), \quad f(u) = \frac{u^2}{2}.$$

- i) Calcule a curvatura de γ e esboce o traço de γ .
- ii) Mostre que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ e determine aproximadamente este limite.
- iii) Faça os itens i) e ii) supondo $f(u) = \frac{u^n}{n}$.

Exercício 2.20. Seja $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível definida por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Identifique A com a sua representação matricial na base canônica. Veja [Shafer e Zegeling \(2002b\)](#).

- i) Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular de classe C^3 parametrizada por comprimento de arco s . Calcule a curvatura de $\beta(s) = A\gamma(s)$.
- ii) Seja $p_0 = \gamma(s_0)$ um vértice de γ . Mostre que para um conjunto aberto de matrizes A o ponto $\beta(s_0) = A p_0$ não é vértice de β .
- iii) Suponha γ fechada simples e V_γ o conjunto de vértices de γ . Mostre que A é uma rotação ou uma homotetia se, e somente se, $A(V_\gamma) = V_\beta$.
- iv) Dê exemplo de uma curva de Jordan γ com 4 vértices e tal que $\beta = A\gamma$ possua exatamente 6 vértices.

Exercício 2.21. Seja $X_n(x, y) = (P_n(x, y), Q_n(x, y))$ um campo de vetores polinomial no plano de grau n . Veja [Shafer e Zegeling \(2002a\)](#).

- i) Seja γ uma solução periódica (curva integral regular) de X_2 . Mostre que γ é convexa.
- ii) Mostre que γ como no item i) possui infinitos vértices ou no máximo 12 vértices.
- iii) Construa um campo de vetores quadrático possuindo uma órbita periódica com 6 vértices.
- iv) Obtenha estimativas sobre o número de vértices de uma curva integral (aberta e/ou fechada) de X_n .

Exercício 2.22 (Projeto). Considere uma curva fechada plana localmente convexa (rosácea) $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com curvatura $k(s) > 0$ e de perímetro $2l$. Considere o campo de vetores $h(s) = \gamma(s) - \gamma(s + l)$ ao longo de γ satisfazendo $h(s + l) = -h(s)$.

i) Mostre que numa rosácea existem pelo menos duas retas normais a γ que dividem o perímetro em duas partes iguais.

ii) Se cada normal de uma rosácea γ divide o perímetro em duas partes iguais, então o traço de γ é um círculo de diâmetro $\frac{2l}{\pi}$.

iii) Estude o artigo [Wegner \(1989\)](#).

Exercício 2.23. Seja γ uma curva convexa com curvatura estritamente positiva. Mostre que existe $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que existem quatro retas normais a γ e passando por p_0 .

Exercício 2.24. Estude os artigos [Ghomi \(2013\)](#), [Ghomi \(2017\)](#), [R. Garcia \(2007\)](#), [Nuño Ballesteros e Romero Fuster \(1993\)](#), [Romero Fuster e Sedykh \(1995\)](#) que tratam sobre vértices e pontos de torção nula (pontos planares) de curvas espaciais.

Exercício 2.25. Estude a prova do teorema dos quatro vértices apresentada em [Montiel e Ros \(2009, chapter 9\)](#).

Exercício 2.26. (Projeto) O objetivo é analisar propriedades geométricas de curvas definidas implicitamente.

Uma equação implícita $h(x, y) = c$ define uma curva regular (união de componentes conexas difeomorfas a retas e/ou círculos) se c for um valor regular, isto é, $\nabla h = (h_x, h_y) \neq 0$ quando restrito ao conjunto $H_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = c\}$.

Por exemplo, um polinômio de grau k no anel de polinômios $\mathbb{R}[x, y]$ é definido por $\frac{1}{2}k(k+3)$ coeficientes e a equação $p(x, y) = 0$ define o que chamamos de uma curva algébrica. Observe que dados $\frac{1}{2}k(k+3)$ pontos em posição geral no plano, existe uma única curva regular polinomial de grau k passando por estes pontos.

i) Considere uma curva regular γ definida implicitamente por $h(x, y) = 0$. Então a sua curvatura é dada por

$$\begin{aligned} k &= \frac{h_y^2 h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + h_x^2 h_{yy}}{|\nabla h|^3} = -\frac{u^t \text{Hess}(f) u^t}{|\nabla h|^3}, \\ &= \frac{1}{|\nabla h|^3} \begin{pmatrix} -h_y & h_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_y \\ h_x \end{pmatrix} = \frac{D^2 h(u^t, u^t)}{|u|^3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $u = \nabla h = (h_x, h_y)$ e $u^t = (-h_y, h_x)$.

ii) Mostre o seguinte resultado.

Uma curva algébrica regular de grau k possui infinitos vértices ou no máximo $2k(2k-3)$ vértices e no máximo $k(k-2)$ pontos de inflexão.

Os vértices são dados pelas equações $h = k' = 0$ que são equivalentes a interseções de dois polinômios de grau k e menor ou igual a $6k-8$. Mas observamos que o conjunto

definido por $h_x^2 + h_y^2 = h = 0$ está contido nessa intersecção e possui $2k(k-1)$ pontos. Logo pelo Teorema de Bézout temos no máximo $k(6k-8) - 2k(k-1) = 4k^2 - 6k = 2k(2k-3)$ vértices. A estimativa para o número de pontos de inflexão dados por $k = h = 0$ é análoga a anterior.

Observação 2.2. O teorema de Bézout no contexto complexo assegura que duas equações polinomiais algébricas $h(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ de graus m e n possuem infinitos pontos de intersecção ou exatamente mn soluções. No contexto real teremos no máximo mn soluções. Veja [Vainsencher \(2009, cap. 5\)](#).

iii) Trevo $r = 2a \cos(3\theta)$. A sua equação implícita é dada por $h(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 2a(x^3 - 3xy^2) = 0$. O trevo possui 6 vértices. Calcular o número de vértices do nível $h^{-1}(c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.27. Mostre que as órbitas periódicas do campo de vetores planar $X(x, y) = (-x(x+2y-1), y(2x+y-1))$ possuem 4 ou 6 vértices.

De fato $h(x, y) = xy(x+y-1)$ é uma integral primeira de X . As curvas integrais na vizinhança do centro $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ possuem 4 vértices e as próximas do triângulo, gráfico de X , com vértices $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ (pontos singulares tipo sela do campo X) possuem 6 vértices.

Exercício 2.28. Considere uma função C^∞ duplamente periódica $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período 2π , i. e., $f(u+2\pi, v+2\pi) = f(u+2\pi, v) = f(u, v+2\pi) = f(u, v)$ para todo (u, v) . Considere o sistema de equações

$$f_{uuu} + f_u = 0, \quad f_{vvv} + f_v = 0. \quad (2.3)$$

Denote por $S_f = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f_{uuu} + f_u = f_{vvv} + f_v = 0\}$.

- i) Dê exemplos de funções tais que S_f seja um conjunto regular (união de curvas regulares difeomorfas a reta ou círculo).
- ii) Dê exemplos de funções tais que S_f seja um conjunto discreto.
- iii) Qual é a quantidade mínima de soluções no domínio fundamental $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$? É possível dar exemplos de funções tais que $S_f = \emptyset$? Justifique.
- iv) Estude o artigo [V. Ovsienko e Tabachnikov \(2007\)](#) e a teoria de Sturm para funções duplamente periódicas. Veja também [Freitas e R. A. Garcia \(2018\)](#).

3

A Recíproca do Teorema dos Quatro Vértices

“Topology is precisely the mathematical discipline that allows the passage from local to global...”

“All models divide naturally...into two a priori parts: one is kinematics, whose aim is to parameterize the forms of the states of the process under consideration, and the other is dynamics, describing the evolution in time of these forms.”

– René Thom (1923-2002)

3.1 Recíproca do TQV

Neste capítulo será considerada a recíproca do teorema dos quatro vértices. A questão básica é estabelecer as condições necessárias e suficientes para que uma função periódica seja a curvatura de uma curva simples fechada no plano.

3.1.1 Uma prova para o caso convexo usando séries de Fourier

Vimos que uma curva regular, simples, convexa e fechada admite uma parametrização, usando a função suporte $f(\theta) = -\langle \gamma(\theta), N(\theta) \rangle$ da seguinte forma $\gamma(\theta) = f'(\theta)T(\theta) - f(\theta)N(\theta)$. Vimos também que $\frac{1}{k(\theta)} = f''(\theta) + f(\theta)$.

Lema 3.1 (Bray e Jauregui (2015)). *Seja p uma função periódica, positiva, de período 2π e de classe C^k , $k \geq 2$. Suponha que*

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0 \quad e \quad \int_0^{2\pi} p(\theta) \sen \theta \, d\theta = 0. \quad (3.1)$$

Considere a equação diferencial

$$(*) \quad f''(\theta) + f(\theta) = p(\theta).$$

Então

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sen x \, p(x + \theta + \pi) dx \quad (3.2)$$

é uma solução periódica e positiva de (*).

Toda solução de (*) é da forma $f(\theta) = f_0(\theta) + a_1 \cos \theta + b_1 \sen \theta$.

Demonstração. Segue por cálculo direto. De fato, temos que

$$f_0''(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sen x \, p''(x + \theta + \pi) dx.$$

Integrando por partes duas vezes obtemos:

$$\begin{aligned} 2\pi(f_0''(\theta) + f_0(\theta)) &= p(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x p(\theta + x + \pi) dx, \\ &= 2\pi p(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos(x - \theta - \pi) p(x) dx, \\ &= 2\pi p(\theta) - \frac{\cos \theta}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos(x) p(x) dx \\ &\quad + \frac{\sen \theta}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sen(x) p(x) dx = 2\pi p(\theta). \end{aligned}$$

Claramente $f_0(\theta) > 0$ pois $x \sen x > 0$ em $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ e $f_0(\theta) = f_0(\theta + 2\pi)$. Portanto o resultado está demonstrado. \square

Proposição 3.1 (Arnold (1994), Hurwitz (1902) e Tabachnikov (1990)). *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π e de classe C^r , $r \geq 1$, tal que*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \sen k\theta \, d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Então f possui pelo menos $2(n+1)$ pontos críticos no intervalo $[0, 2\pi]$.

Em outros termos, se

$$f(\theta) = \sum_{k \geq n+1} [a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta],$$

então $\#\{\theta \bmod 2\pi : f(\theta) = 0\} \geq 2(n+1)$.

Demonstração. Faremos inicialmente a demonstração quando $n = 1$. Suponha que f tenha média zero, i. e., $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$. Portanto f troca de sinal pelo menos duas vezes. Vamos mostrar que f se anula pelo menos 4 vezes. Considere o vetor $N(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Como por hipótese $\int_0^{2\pi} f(\theta)N(\theta)d\theta = 0$ temos que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)N(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)[R_\alpha(N(\theta) + U)]d\theta = 0,$$

onde R_α é uma rotação de ângulo α e $U = (u_0, v_0)$ é um vetor constante.

Assim, fazendo uma translação e uma rotação se necessário, podemos supor que f anula-se nos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ com $f|_{(0,\pi)} > 0$.

Agora observamos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta, \\ &= \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} |f(\theta)|(-\sin \theta) d\theta > 0. \end{aligned}$$

Ambas as parcelas possuem o mesmo sinal e assim obtemos uma contradição.

O caso $n \geq 2$ seguiremos a mesma ideia.

Inicialmente interpretamos $f(\theta)$ como sendo a restrição ao círculo unitário de uma função $F(x, y)$ definida no plano, ou num aberto contendo o círculo unitário.

Definindo $x = \cos \theta$ e $y = \sin \theta$ temos que $\cos 2\theta = x^2 - y^2$, $\sin 2\theta = 2xy$. Em geral, $\cos k\theta$ e $\sin k\theta$ são polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x e y .

Assim nas hipóteses da proposição temos que

$$F(x, y) = \sum_{k \geq n+1} [a_k p_k(x, y) + b_k q_k(x, y)].$$

Logo $f(\theta) = F(\cos \theta, \sin \theta)$.

No caso $n = 2$, suponha $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$. Se f possuir somente 4 zeros podemos encontrar um polinômio trigonométrico $f_2(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta$ tal que f_2 possua os mesmos zeros de f e $\text{sinal}(f_2) = \text{sinal}(f)$ o que conduz a $\int_0^{2\pi} f_2(\theta)f(\theta)d\theta \neq 0$, uma contradição. Logo f possui pelo menos 6 zeros e f' possui pelo menos 6 pontos críticos. O polinômio f_2 é a restrição ao círculo unitário de um polinômio $q_2(x, y) = (ax + by + c)(Ax + By + C)$ que intersecta o círculo em quatro pontos (zeros de f).

O caso geral é obtido formalizando o argumento anterior. O ponto importante a observar é que dado quaisquer conjuntos de $2n$ pontos no círculo unitário existe um polinômio $q(x, y)$ de grau n tal que a interseção de $q(x, y) = 0$ com o círculo unitário é exatamente este conjunto de pontos. \square

- Exercício i)** Construa um polinômio trigonométrico da forma $p(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$ tendo como pontos críticos o conjunto $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\}$.
- ii)** Construa um polinômio trigonométrico da forma $p(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$, com $a_2 b_2 \neq 0$, tendo como pontos críticos o conjunto $\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\}$.

Lema 3.2. *Seja p uma função periódica, de período 2π e de classe C^k , $k \geq 2$. Suponha que a equação (3.1) é satisfeita. Então p possui pelo menos dois pontos de máximo e dois de mínimo.*

Demonstração. Considere a decomposição de p na sua série de Fourier (veja [Figueiredo \(1996\)](#))

$$p(\theta) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\theta).$$

Como por hipótese $\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta d\theta = 0$ e $\int_0^{2\pi} p(\theta) \sin \theta d\theta = 0$ obtemos que $a_1 = b_1 = 0$. Logo os primeiros harmônicos de p não nulos são periódicos de período menor ou igual a π , i. e., $p(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) + \dots$, com $n \geq 2$. Portanto, pela Proposição 3.1, p' possui pelo menos 4 zeros no intervalo $[0, 2\pi]$. □

Teorema 3.1. *Seja $p(\theta)$ uma função positiva de classe C^k , $k \geq 2$, e periódica de período 2π , tal que*

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} p(\theta) \sin \theta d\theta = 0.$$

Então existe uma curva regular fechada $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ tal que $k_\gamma = \frac{1}{p(\theta)}$.

Demonstração. Segue diretamente dos lemas 3.1 e 3.2 tendo γ parametrizada pela função suporte $h(\theta)$. □

Proposição 3.2. *Seja $p(\theta)$ uma função positiva de classe C^k , $k \geq 2$, e periódica de período 2π com dois pontos de máximo e dois de mínimo. Então existe um difeomorfismo $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$, tal que $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(2\pi)$ e*

$$\int_0^{2\pi} p(\varphi(\theta)) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} p(\varphi(\theta)) \sin \theta d\theta = 0.$$

Demonstração. Pode ser obtida usando a mesma técnica da prova da recíproca do teorema dos quatro vértices a ser apresentada na subseção 3.1.4. □

3.1.2 Deformações da curvatura por mudanças de coordenadas.

Nesta seção provamos uma recíproca do TQV para curvas estritamente convexas. A ideia da prova é generalizada para o caso não convexo. Nessa prova, usamos o conceito de deformação de um campo de vetores normais, que, no caso da curvatura segue da seguinte observação:

Sejam $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva regular fechada de classe C^2 com curvatura k e $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo de classe C^2 , isto é, uma aplicação C^2 com inversa C^2 . A composta $\gamma_h = \gamma \circ h$ é uma curva regular cuja curvatura é igual a:

$$k_h = k \circ h.$$

Este fato segue da regra da cadeia e da fórmula da curvatura:

$$\gamma'_h = (\gamma' \circ h) \cdot h' \text{ e } \gamma''_h = (\gamma'' \circ h) \cdot (h')^2 + (\gamma' \circ h) \cdot h''.$$

Assim temos a seguinte relação:

$$k_h = \frac{[\gamma'_h \cdot \gamma''_h]}{|\gamma'_h|^3} = \frac{[(\gamma' \circ h) \cdot h', (\gamma'' \circ h) \cdot (h')^2]}{|(\gamma' \circ h) \cdot h'|^3} = \frac{[\gamma' \circ h, \gamma'' \circ h]}{|\gamma' \circ h|^3},$$

$$= k \circ h.$$

Exemplo 3.1. Considere $k(t) = \sin t + 2$ e o homeomorfismo $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ definido por $h(x) = \frac{5}{9} |x| + \frac{40}{9} |x - \frac{9}{10} \pi| - \frac{40}{9} |x - \frac{11}{10} \pi| + \frac{4}{9} |x - 2\pi|$.

Na Fig. 3.1 temos esboçados os gráficos de h , k e $k \circ h$.

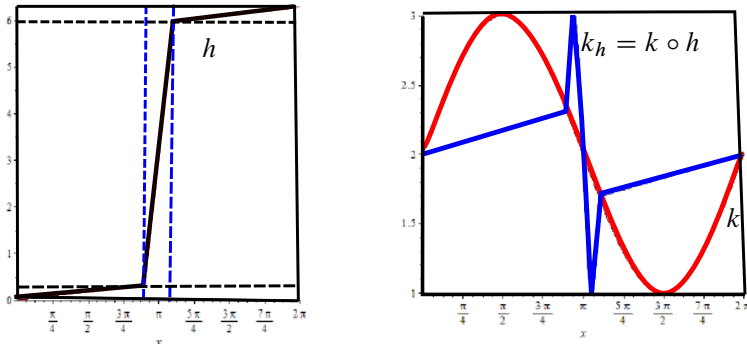


Figura 3.1: Homeomorfismo h (esquerda) e as funções k e $k_h = k \circ h$ (direita).

Exemplo 3.2. Considere $k(t) = \cos t + 2$ e o homeomorfismo $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ definido por $h(x) = \frac{2}{3} |x| + \frac{4}{3} |x - \frac{3}{4} \pi| - \frac{4}{3} |x - \frac{5}{4} \pi| + \frac{1}{3} |x - 2\pi|$.

Na Fig. 3.2 está esboçado os gráficos do homeomorfismo h e das funções $k \circ h$ e k .

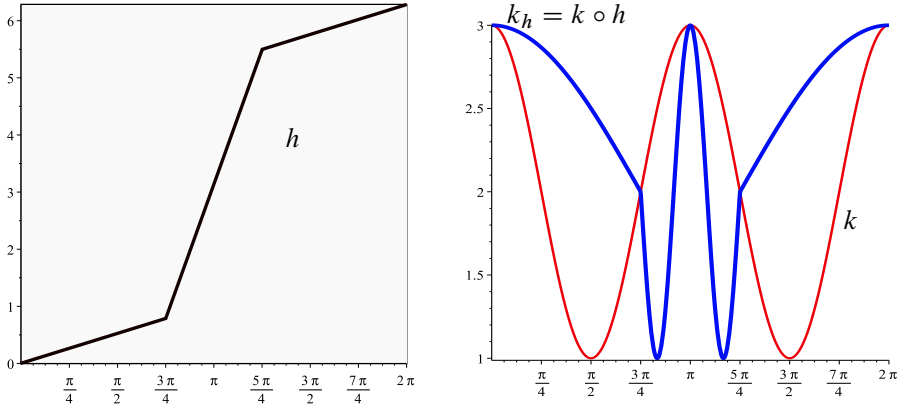


Figura 3.2: Homeomorfismo h (esquerda) e as funções k e $k_h = k \circ h$ (direita).

Outro tipo de deformação ocorre ao fazermos uma homotetia no plano. Sejam $c \neq 0$ e $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva simples, regular e fechada de classe C^2 , com curvatura k . Então a curva $c\gamma$ tem curvatura igual a $\frac{1}{c}k$, mantendo as mesmas propriedades (simples, regular e fechada).

Essas duas propriedades de deformações são úteis na prova do Caso Convexo:

Teorema 3.2. *Seja $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não constante, estritamente positiva, com pelo menos dois máximos e dois mínimos locais.*

Então existe um mergulho $G: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja imagem é uma curva regular convexa cuja curvatura no ponto $G(\varphi)$ é igual a $k(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathbb{S}^1$.

Além disso, se k for de classe C^r , $r \geq 0$, então o mergulho G é de classe C^{r+1} .

A seguir enunciamos condições que caracterizam a função curvatura de uma curva fechada simples:

Se a função k for estritamente positiva e $T(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ o vetor unitário da tangente, então a função que a cada $s \mapsto \theta(s)$ é uma mudança de parâmetros de modo que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta)} T(\theta) d\theta = 0.$$

Ou, equivalentemente, conforme [Gluck \(1971\)](#), usando o vetor normal apontando para fora da curva (aplicação normal de Gauss) e o ângulo $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\varphi)} N(\varphi) d\varphi = 0.$$

Vejamus como formular a caracterização em termos de uma equação:

A recíproca do teorema dos quatro vértices para curvas convexas pode ser formulada em termos de uma equação:

Se $\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\varphi)} N(\varphi) d\varphi = 0$, com $\int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi = 2\pi$, existe uma curva simples fechada convexa contida em \mathbb{R}^2 cuja curvatura é igual a $k(\varphi)$. De fato, se $\gamma(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{T(u)}{k(u)} du$, então $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ (fechada), regular, com curvatura $k(\varphi)$, é simples.

Entretanto, para uma dada função k positiva, é possível que a integral não se anule mas que exista um difeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(h^{-1}(\varphi))} N(\varphi) d\varphi = 0.$$

Neste caso, obtemos um outro mergulho cuja imagem é uma curva fechada, simples e convexa cuja curvatura é a função dada.

De fato, seja $\gamma_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{k(h^{-1}(\phi))} T(\phi) d\phi$.

Então, γ_1 é uma curva regular, simples fechada de curvatura igual a $k_{\gamma_1} = k(h^{-1}(\phi))$. Portanto, se $\gamma = \gamma_1 \circ h$, então é uma curva simples e fechada com curvatura $k_\gamma = k_{\gamma_1} \circ h = k$, o que prova a recíproca do Teorema dos Quatro Vértices no caso convexo.

O argumento de Gluck para encontrar o difeomorfismo h é uma bela ilustração do uso de conceitos topológicos, isotopia e número de voltas (*winding number*), para provar resultados de análise. No nosso caso resolver uma equação funcional.

Gluck prova um resultado mais abstrato sobre campos de vetores normais ao círculo que implica em uma prova do teorema dos quatro vértices e de sua recíproca para curvas convexas. Antes, porém, definimos os conceitos usados no enunciado do resultado.

Definição 3.1. *Um campo contínuo e normal ao círculo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é dado por $X(\varphi) = f(\varphi)N(\varphi)$, onde f é uma função contínua e $N(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.*

Definição 3.2. *Um campo normal $g(\varphi)N(\varphi)$ é uma deformação de um campo $f(\varphi)N(\varphi)$ se existe um difeomorfismo $h \in \text{Difeo}(\mathbb{S}^1)$ tal que $g = f \circ h^{-1}$.*

Definição 3.3. *Um difeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é isotópico à identidade se existe uma família $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ contínua tal que, para cada t fixado a aplicação $\theta \rightarrow F(t, \theta)$ é um difeomorfismo com $F(0, \theta) = h(\theta)$ e $F(1, \theta) = id(\theta)$.*

Teorema 3.3. *Um campo vetorial normal não constante $f(\varphi)N(\varphi)$ no círculo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ possui uma deformação tal que a sua integral em \mathbb{S}^1 se anula se e somente se f possui pelo menos dois máximos e dois mínimos.*

Antes de discutir a prova do teorema, descreveremos os passos da prova:

Suponhamos que f tenha pelo menos dois máximos e dois mínimos. Devemos encontrar um difeomorfismo h tal que

$$\int_0^{2\pi} f(h^{-1}(\varphi)) N(\varphi) d\varphi = 0.$$

Isto motiva a definição da seguinte aplicação $I_f: \text{Difeo}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$I_f(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi.$$

Observe que se definimos

$$I_1(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f(h(\varphi))N(\varphi)d\varphi$$

então,

$$\begin{aligned} |I_1(h_1) - I_1(h_2)| &\leq \int_{\mathbb{S}^1} |f(h_1(\varphi)) - f(h_2(\varphi))| |N(\varphi)| d\varphi, \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^1} |f(h_1(\varphi)) - f(h_2(\varphi))| d\varphi. \end{aligned}$$

Mas f é contínua em um conjunto compacto, logo uniformemente contínua, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(\theta_1, \theta_2) < \delta$ implica $|f(\theta_1) - f(\theta_2)| < \varepsilon$, onde dist é a distância no círculo.

Portanto, se $\|h_1 - h_2\|_\infty = \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \text{dist}(h_1(\theta), h_2(\theta)) < \delta$, então $|I_1(h_1) - I_1(h_2)| < 2\pi\varepsilon$.

O operador I_1 é contínuo na topologia compacto-aberta no conjunto de difeomorfismos $\text{Difeo}(\mathbb{S}^1)$ (portanto contínuo na topologia C^r).

Como a aplicação $\text{Difeo}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \text{Difeo}(\mathbb{S}^1)$, $h \mapsto h^{-1}$ é contínua, temos que o operador $I_f(h) = I_1(h^{-1})$ também é contínuo.

Usando um argumento similar, provamos que o operador I_f depende continuamente da função f .

Usando a hipótese de existência de pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo locais, é possível deformar f por um difeomorfismo h^* de modo que $f \circ h^*$ é constante por partes exceto em um subconjunto de medida pequena.

O resultado disso, no contexto em que $f = \frac{1}{k}$, o raio de curvatura, é a concentração da variação da curvatura em pequenos intervalos. Isto significa que a curva regular, obtida por integração, é constituída de arcos quase circulares e pequenos arcos onde concentramos a variação de curvatura.

Defina um novo operador para o campo deformado, ou seja, substituindo f por $f \circ h^*$:

$$I_1(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f \circ h^*(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi.$$

Novamente, se $I_1(h_0) = 0$, então $I(h_0 \circ h^{*-1}) = 0$. Portanto, basta encontrar a solução para funções bem aproximadas, em média, por funções constantes por partes.

Campos normais com as características descritas acima podem ser aproximados por campos constantes por partes.

3.1.3 Resolvendo a equação em uma situação mais simples

Um problema mais simples poderia ser formulado da seguinte forma: dados quatro arcos de círculos J_1, J_3 , de raios $\frac{1}{A}$ e J_2 e J_4 de raios iguais a $\frac{1}{B}$, de comprimentos variáveis, encontrar os comprimentos de modo que a curva formada pelos quatro arcos intercalados, justapostos J_1, J_2, J_3 e J_4 seja fechada.

Formulado em termos de campos normais:

Suponha então que $g(\varphi)N(\varphi)$ seja um campo constante por partes em intervalos alternados $J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 = \mathbb{S}^1$ (descontínuo) definido por

$$g(\varphi) = \begin{cases} A, & \text{se } \varphi \in J_1 \cup J_3, \\ B, & \text{se } \varphi \in J_2 \cup J_4. \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi &= \int_{J_1 \cup J_3} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi + \int_{J_2 \cup J_4} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi \\ &= B \int_{J_1 \cup J_3} N(\varphi)d\varphi + A \int_{\mathbb{S}^1} N(\varphi)d\varphi - A \int_{J_1 \cup J_3} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi \\ &= [B - A] \int_{J_1 \cup J_3} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi. \end{aligned}$$

Aqui usamos $\int_{\mathbb{S}^1} N(\varphi)d\varphi = 0$.

Afirmção: uma curva formada por quatro arcos de círculos de raios alternados iguais é fechada se, e somente se, os arcos opostos têm comprimentos iguais.

Demonstração. Calcule $\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} N(\varphi)d\varphi$.

Se $\lambda = \varphi_b - \varphi_a$ e $\varphi_0 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}$ é o ponto médio do intervalo (φ_a, φ_b) então fazendo uma mudança de variáveis e calculando a integral obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} N(\varphi)d\varphi &= \int_{\varphi_0 - \frac{\lambda}{2}}^{\varphi_0 + \frac{\lambda}{2}} N(\varphi)d\varphi = \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} N(\varphi)d\varphi \\ &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right) N(\varphi_0) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}\right) N(\varphi_0). \end{aligned}$$

Usando esse cálculo concluímos que a uma curva formada por quatro arcos alternados de círculos de raios $\frac{1}{A}$ e $\frac{1}{B}$ é fechada se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{S}^1} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi \\ &= [B - A] \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) N(\phi_0) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{2}\right) N(\phi_m) \right]. \end{aligned}$$

onde $J_1 = [\phi_1, \phi_2]$, $J_3 = [\phi_3, \phi_4]$, ϕ_0 e ϕ_m são os respectivos pontos médios.

Como $A \neq B$, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)N(\varphi_0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_3 - \phi_4}{2}\right)N(\varphi_m).$$

Tomando o módulo na expressão acima concluímos que $\phi_2 - \phi_1 = \phi_4 - \phi_3$.

Ou seja os arcos J_1 e J_3 têm comprimentos iguais. Analogamente conclui-se que J_2 e J_4 também têm comprimentos iguais. \square

Portanto, resolver a equação $I_g(h) = 0$ para uma função g simples, positiva e periódica significa encontrar um difeomorfismo h que deforme os intervalos de modo que a condição acima seja satisfeita. Isso pode ser feito geometricamente, movendo-se o ponto de intersecção das cordas que unem extremos opostos dos arcos. Observe que, de acordo com os cálculos feitos acima $I_g(h) = [B - A] \int_{h(J_1 \cup J_3)} N(\varphi) d\varphi$.

Como estamos interessados em um argumento para o caso geral, usamos a teoria do número de voltas de uma curva fechada em $\operatorname{Difeo}(\mathbb{S}^1)$.

Devemos encontrar uma curva fechada (laço) $\Sigma \in \operatorname{Difeo}(\mathbb{S}^1)$ que é fronteira de um retângulo fechado \mathcal{D} em $\operatorname{Difeo}(\mathbb{S}^1)$ (2-célula) tal que $I_g(\Sigma)$ dá uma volta em torno da origem em \mathbb{R}^2 .

A restrição de I_g ao retângulo \mathcal{D} (família a dois parâmetros de difeomorfismos do círculo) define uma aplicação contínua de um retângulo em \mathbb{R}^2 .

A questão agora é verificar se a imagem $I_g(\mathcal{D})$ contém a origem, isto é, se existe algum difeomorfismo \hat{h} em \mathcal{D} tal que $I(\hat{h}) = 0$.

A solução deste problema usa a relação entre o grau de uma aplicação definida em um retângulo (ou disco) e o número de voltas da imagem da sua fronteira, como observaremos logo abaixo, no Teorema de Rouché.

De fato, provamos que $I_g(\Sigma)$ é uma curva que dá uma volta em torno da origem.

Vejam os detalhes da construção:

Primeiramente vamos ser mais precisos em relação ao domínio da função simples g :

Sejam $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi$ e $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Vamos supor que os intervalos de na definição do campo g estejam centrados nesses pontos.

Tomemos intervalos disjuntos J_1 , J_2 , J_3 e J_4 , centrados nestes pontos de modo que J_2 e J_4 tenham comprimentos iguais a $\frac{\pi}{4}$. O comprimento dos intervalos J_1 e J_3 é um pouco menor do que $\frac{\pi}{4}$, mas não será relevante neste momento.

Seja $\mathcal{D} = \{(t, d) \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}] \times [\frac{1}{2}, 1]\}$.

Considere uma família a dois parâmetros de difeomorfismos de $h_{t,d} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$h_{t,d}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t + d(\varphi - \frac{\pi}{2}), & \text{para } \varphi \in J_2, \\ \frac{3\pi}{2} - t + (\frac{3}{2} - d)(\varphi - \frac{3\pi}{2}), & \text{para } \varphi \in J_4. \end{cases}$$

Em intervalos contendo 0 e π , $h_{t,d}$ é a identidade para todo $(t, d) \in \mathcal{D}$.

Um tal difeomorfismo é construído usando-se uma partição da unidade. Veja [E. Lima \(1981\)](#).

Usando as expressões acima para o cálculo do operador $I_g(h)$ associado à função g podemos descrever completamente a imagem $I_g(D)$ e de sua fronteira.

De fato,

$$I_g(h_{t,d}) = [B - A] \int_{h_{t,d}(J_2 \cup J_4)} N(\varphi) d\varphi.$$

Entretanto, usando a expressão linear de $h_{t,d}$ nesses intervalos, vemos que $h_{t,d}(J_2)$ é um intervalo centrado em $\frac{\pi}{2} - t$ e de tamanho $d \frac{\pi}{4}$ e $h_{t,d}(J_4)$ é um intervalo centrado em $\frac{3\pi}{2} - t$ e de tamanho $(\frac{3}{2} - d) \frac{\pi}{4}$.

Assim de acordo com o cálculo acima

$$I_g(h_{t,d}) = [B - A] \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi d}{8}\right) N\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\left(\frac{3}{2} - d\right) \frac{\pi}{8}\right) N\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \right).$$

Note que $I_g(h_{0,\frac{3}{4}}) = (0, 0)$, ou seja o difeomorfismo $h_{0,\frac{3}{4}}$ é uma solução da equação $I_g(h) = 0$.

Vista como uma aplicação do retângulo $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I_g(h_{t,d})$ é um mergulho (difeomorfismo local injetivo) cuja imagem da fronteira Σ é um laço que dá uma volta em torno da origem.

De fato, usando as coordenadas do vetor normal obtemos:

$$I_g(h_{t,d}) = [B - A] \times \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{32}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{32} - \frac{\pi d}{8}\right) \operatorname{sen}(t), 2 \cos\left(\frac{3\pi}{32}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi d}{8} - \frac{3\pi}{32}\right) \cos(t) \right).$$

Fica como exercício mostrar que a imagem da fronteira $I_g(\Sigma)$ é a união de quatro arcos de elipses cuja distância até a origem é igual a

$$d = 4[B - A] \cos\left(\frac{3\pi}{32}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right).$$

Ou seja,

$$|I_g(\Sigma)| \geq 4[B - A] \cos\left(\frac{3\pi}{32}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right).$$

Segue da dependência contínua da aplicação $f \mapsto I_f$, que se tomarmos $|f - g|$ suficientemente pequeno de modo que $|I_f(\Sigma) - I_g(\Sigma)| < \frac{1}{3}d$ então $|I_f(\Sigma)| > \frac{2d}{3} > 0$.

Em particular, os laços $I_f(\Sigma)$ e $I_g(\Sigma)$ são homotópicos em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Isso será útil no argumento perturbativo usado no caso geral da próxima seção.

3.1.4 A solução do caso convexo

Antes de prosseguirmos, vamos dar uma ideia de como o argumento usado na seção anterior é “robusto” e implica na solução do caso geral convexo.

Observe que nas hipóteses satisfeitas por f , (não constante, contínua, periódica e que possui dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo locais alternados) existem quatro pontos ordenados no círculo φ_1^* , φ_2^* , φ_3^* , φ_4^* tais que

$$f(\varphi_1^*) = f(\varphi_3^*) = Z < M = f(\varphi_2^*) = f(\varphi_4^*).$$

Seja $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ um número a ser escolhido posteriormente e considere intervalos fechados E_1^* e E_3^* contendo φ_1^* e φ_3^* respectivamente tais que

$$|f(\varphi^*) - Z| < \varepsilon \quad \text{para } \varphi^* \in E_1^* \cup E_3^*.$$

Analogamente, sejam D_2^* e D_4^* contendo φ_2^* e φ_4^* respectivamente tais que

$$|f(\varphi^*) - M| < \varepsilon \quad \text{para } \varphi^* \in D_2^* \cup D_4^*.$$

Os intervalos são tomados disjuntos.

Sejam $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi$ e $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Tomemos os seguintes intervalos no círculo: $E_1 = [\frac{13\pi}{8} + \frac{\varepsilon}{4}, \frac{3\pi}{8} - \frac{\varepsilon}{4}]$, $D_2 = [\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$, $E_3 = [\frac{5\pi}{8} + \frac{\varepsilon}{4}, \frac{11\pi}{8} - \frac{\varepsilon}{4}]$ e $D_4 = [\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}]$ em torno de φ_1 , φ_2 , φ_3 e φ_4 respectivamente.

Seja $h^* : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo que preserva orientação leva $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ e E_1, D_2, E_3, D_4 em $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \varphi_4^*$ e $E_1^*, D_2^*, E_3^*, D_4^*$, respectivamente. (Tente construir uma função linear por partes satisfazendo essas condições).

Considere $f \circ h^*$. A vantagem de considerarmos o operador $I_{f \circ h^*}$ associado a essa função ao invés da função f original é que os centros dos intervalos escolhidos são uniformes e que a medida de Lebesgue (Leb) do complementar de $E_1 \cup D_2 \cup E_3 \cup D_4$ é igual a ε .

Uma observação importante é que se resolvemos o problema para uma função $f \circ h^*$, ou seja, se existe h tal que

$$I_{f \circ h^*}(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f \circ h^*(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi = 0,$$

vemos que $h \circ (h^*)^{-1}$ é uma solução para o problema original, isto é, $I(h \circ (h^*)^{-1}) = 0$.

Usamos um argumento de perturbação. Para isso, definimos uma função simples g , como na seção anterior:

$$g(\varphi) = \begin{cases} M, & \text{se } \varphi \in D_2 \cup D_4, \\ Z, & \text{se } \varphi \in E_1 \cup E_3. \end{cases}$$

com $|(f \circ h^*)(\varphi) - g(\varphi)| < \varepsilon$, se $\varphi \in E_1 \cup E_3 \cup D_2 \cup D_4$.

Observe que $m(\mathbb{S}^1 - E_1 \cup E_3 \cup D_2 \cup D_4) < \varepsilon$ onde m denota a medida da união dos sub-intervalos no complementar (ou a medida de Lebesgue).

Como isso, temos que as imagens $I_{f \circ h^*}(\mathcal{D})$ e $I_g(\mathcal{D})$ estão ε próximas. Também sabemos que $I_g(h_0, 3/4) = 0$ e que $I_g(\Sigma)$ é positivo. Logo, tomando $\varepsilon < \frac{\text{dist}(I_g(\Sigma), 0)}{3}$ obtemos, pela continuidade de $I_F(h)$ que $I_{f \circ h^*}(B)$ contém a origem.

Usando propriedades do número de voltas, que recordamos logo abaixo, isso implica que existe um zero de $I_{f \circ h^*}$ em \mathcal{D} .

Como vimos anteriormente, isto implica que existe um zero de I_f em \mathcal{D} . Segue então a recíproca do TQV, no caso convexo, conforme a discussão no início desta seção.

Vamos recordar algumas propriedades do *Número de Voltas de uma curva fechada*. A referência é E. Lima (1981). Se $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é uma curva fechada (C^1 por partes) o número inteiro $\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ chama-se o número de voltas que a curva dá em torno da origem. Por translação define-se o número de voltas em relação a qualquer ponto que não está na imagem.

Observe que a forma $\frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ é fechada, portanto, curvas homotópicas em $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ possuem o mesmo número de voltas.

Uma maneira prática para calcular o número de rotação (número de voltas) é a seguinte.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma curva contínua. Então existe uma função contínua $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|(\cos \varphi(t), \text{sen } \varphi(t)). \tag{3.3}$$

A diferença $\varphi(b) - \varphi(a)$ é independente de φ e quando γ for uma curva fechada com $\gamma(a) = \gamma(b)$ o número $W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a))$ é o número de rotação de γ em torno de 0. De fato, $W(\gamma, 0)$ mede o número de voltas efetivas que γ dá em torno de 0.

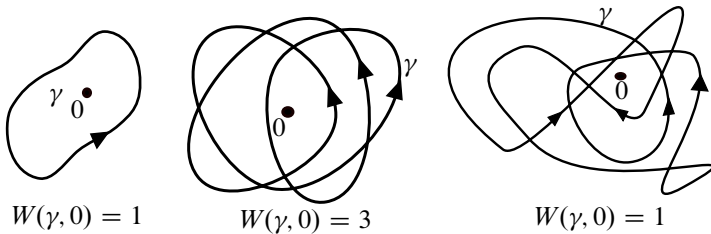


Figura 3.3: Número de rotação de uma curva em relação a um ponto.

Outro conceito importante é o de índice de rotação.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. O índice de γ é o número de rotação da curva $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ será denotado por $\text{Ind}(\gamma) = W(\gamma', 0)$.

Proposição 3.3. *O índice de rotação de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, regular e fechada é igual a sua curvatura total dividida por 2π , i. e.,*

$$2\pi \text{Ind}(\gamma) = \int_0^L k(s)ds = \int_a^b k(t)|\gamma'(t)|dt.$$

Demonstração. Confiamos ao leitor. □

O conceito de número de voltas é muito útil. Por exemplo, é possível provar o Teorema da Curva de Jordan usando o número de voltas. Um curva simples e fechada divide o plano em duas classes de pontos: aqueles para os quais o número de voltas é zero e os que o número de voltas é $+1$ ou -1 .

Também é usado para mostrar a existência de zeros de sistemas de equações. Em dimensão dois, dado o sistema de equações $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$. Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Suponha que D seja um disco tal que a imagem do seu bordo $\Sigma = \partial D$ por F não contenha a origem. Então se o número de voltas de $F(\Sigma)$ for não nulo, então existe um ponto $(x_0, y_0) \in D$ tal que $F(x_0, y_0) = (0, 0)$. Ou seja, existe uma solução do sistema de equações no interior do disco D .

No argumento acima, para obter uma solução para o operador, calculamos um número de voltas via homotopia e verificamos que é não nulo. Uma propriedade útil para obter a homotopia foi o seguinte resultado enunciado como Teorema de Rouché em [E. Lima \(1981\)](#).

Teorema 3.4. *Sejam $F, G : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 com $F(x, y) \neq (0, 0)$ e $\|G(x, y)\| < \|F(x, y)\|$ para todo $(x, y) \in \partial D$. Então $F + G$ e F possuem o mesmo número de voltas em relação à origem.*

Além disso, se $F(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in D$, então o número de voltas de F é nulo.

3.1.5 Conclusão da recíproca do TQV

A conclusão da recíproca do TQV é obtida da seguinte maneira:

Dada uma função contínua, periódica e positiva, $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, considere o campo normal definido por $\theta \mapsto \frac{N(\theta)}{k(\theta)}$, com θ é a coordenada no círculo \mathbb{S}^1 , de modo que, sem perda de generalidade estamos supondo que o período mínimo é igual a 2π .

Segue da análise realizada na subseção 3.1.4, que existe um difeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\int_0^{2\pi} \frac{N(\theta)}{k(h(\theta))} d\theta = 0$.

Multiplicando por uma constante, se necessário, podemos supor que a curvatura total $\int_0^{2\pi} k(h(u)) du = 2\pi$. Isso garante que a curva obtida é simples. Uma mudança de escala no final do processo não altera essa propriedade.

Defina a única curva parametrizada regular, que satisfaz $\hat{\gamma}(0) = (0, 0), \hat{\gamma}'(0) = (1, 0)$

$$\hat{\gamma}(\theta) = \int_0^\theta \frac{N(u)}{k(h(u))} du.$$

Então $\hat{\gamma}$ é fechada e simples com curvatura $k_{\hat{\gamma}} = k \circ h$.

Se $\gamma = \gamma \circ h^{-1}$, então, γ é simples, fechada, com curvatura igual a k . Como queríamos.

O argumento de Dahlberg no caso geral segue a mesma linha, porém com várias dificuldades técnicas a serem superadas entre elas o fato de que não podemos usar o ângulo da

normal com uma direção fixa para parametrizar a curva. Veja [Dahlberg \(2005\)](#) e [DeTurck et al. \(2007\)](#).

3.2 Exercícios

Exercício 3.1. Seja $\gamma(s) = \left(\frac{1}{6} \cos(3s) + \frac{3}{2} \cos(s), \frac{1}{6} \sin(3s) + \frac{5}{2} \sin(s)\right)$.

- Mostre que sua curvatura é igual a $k(s) = \frac{1}{2 + \cos(2s)}$.
- Calcule o número de voltas que γ dá em torno de $(0, 0)$.

Exercício 3.2. Seja $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \cos(s)), \frac{1}{6} \sqrt{6} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \sin(s)\right) \right).$$

Mostre que sua curvatura é igual $k(s) = 2 + \cos 2s$. Esboce o traço de γ e calcule o seu comprimento. O traço de γ é uma curva algébrica? Justifique escrevendo a curva na forma implícita $h(x, y) = 0$.

Exercício 3.3. Encontre uma curva γ tal que sua curvatura seja igual a $k(s) = \frac{1}{2 + |\sin 2s|}$. A curva γ é fechada? Qual é a classe de diferenciabilidade de γ ?

Exercício 3.4. Considere a curva $\gamma(t)$ definida por

$$\begin{cases} \gamma_-(t) = ((1-t) \cos t + \sin t, (1-t) \sin t - \cos t + 1), & t < 0, \\ \gamma_+(t) = ((1+t) \cos t - \sin t, (1+t) \sin t + \cos t - 1), & t \geq 0. \end{cases}$$

- Mostre que γ é somente de classe C^1 no ponto $t = 0$.
- Mostre que a curvatura de γ é igual a $k(t) = 1/(1 + |t|)$ e portanto existe $k(0) = \lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 1$.
- Calcule os pontos de autointerseção de γ e esboce o traço de γ .

Exercício 3.5. Considere uma função $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, positiva, possuindo exatamente dois pontos críticos, um de mínimo e outro de máximo. Existe um difeomorfismo $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $k \circ \varphi$ seja a curvatura de uma curva fechada com um ponto de cruzamento normal? Faça uma análise detalhada.

Exercício 3.6. Seja $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica com período minimal T_k . Suponha

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{T_k} k(s) ds = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \quad \text{mdc}(m, n) = 1.$$

Pelo teorema fundamental das curvas planas existe uma curva $\gamma_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua curvatura é igual a k .

i) Mostre que γ_k é periódica de período nT_k . Veja [Arroyo, Garay e Mencia \(2008\)](#)

ii) Seja $k(s) = \frac{1}{3} + \sin s$. Mostre que a curva γ tem período 6π e esboce o seu traço.

iii) Faça vários exemplos ilustrando o resultado do item i) e estude o artigo [Arroyo, Garay e Mencia \(ibid.\)](#).

Exercício 3.7. Seja $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica definida, no domínio fundamental, por

$$r(s) = \begin{cases} 1 + 2 \sin s, & s \in [0, \pi], \\ 1, & s \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

i) Mostre que a curva

$$\gamma(s) = \begin{cases} (-s + \frac{1}{2} \sin 2s + \cos s, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2s + \sin s) & s \in [0, \pi], \\ (-\pi + \cos s, \sin s) & s \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

possui curvatura $k(s) = \frac{1}{r(s)}$.

ii) Descreva a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua curvatura seja igual a $\frac{1}{r}$. Esboce o traço de γ . Veja [Gluck \(1971\)](#) para mais comentários sobre a recíproca do teorema dos quatro vértices.

Exercício 3.8. Considere uma curva fechada definida por justaposição de 4 arcos de círculos

$$X(t) = \begin{cases} (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \frac{3}{2} \sin t), & t \in [0, \pi] \\ (\cos t, \sin t), & t \in [\pi, 2\pi], \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t), & t \in [2\pi, 3\pi], \\ (1 + \cos t, \sin t), & t \in [3\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

i) Mostre que X é C^1 por partes e calcule sua curvatura.

ii) Mostre que existe uma curva γ , fechada, suave e C^1 próxima de X possuindo 4 vértices.

Exercício 3.9. Seja $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica definida, no domínio fundamental, por

$$r(s) = \begin{cases} 2 + \sin s, & s \in [0, \pi], \\ 2 - a \sin s, & s \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

i) Encontre uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua curvatura seja igual a $\frac{1}{r}$. Esboce o traço de γ .

ii) Mostre que γ obtida no item i) é uma curva de Jordan de classe C^1 se, e somente se, $a = 1$.

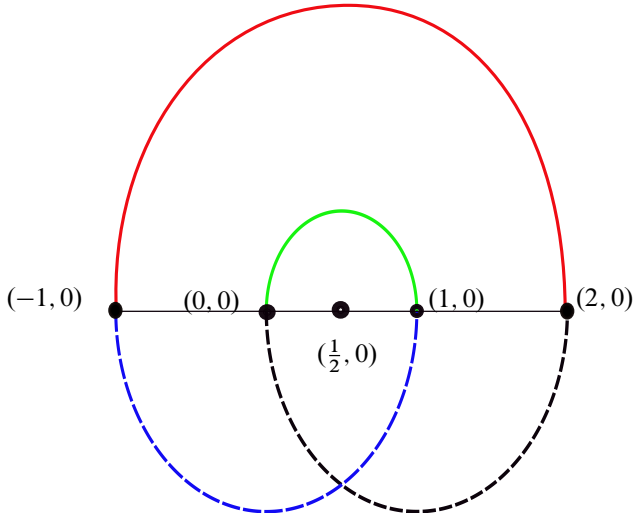


Figura 3.4: Curva fechada não simples, obtida por justaposição de 4 arcos de círculos.

- Exercício 3.10.** i) Construa uma curva não circular fechada simples, C^1 por partes obtida por justaposição de 4 arcos de círculos $\gamma_i(t) = (a_i + r_i \cos t, b_i + r_i \sin t)$, $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.
 ii) Construa uma curva fechada não cônica simples, C^1 por partes, obtida por justaposição de 4 arcos de elipses $\gamma_i(t) = (a_i + r_i \cos t, b_i + s_i \sin t)$, $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.
 iii) Construa uma curva não circular fechada simples, C^1 por partes, obtida por justaposição de 6 arcos de círculos $\gamma_i(t) = (a_i + r_i \cos t, b_i + r_i \sin t)$, $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.

Exercício 3.11. Considere a Fig. 3.5 com duas curvas fechadas formadas de arcos de círculos.

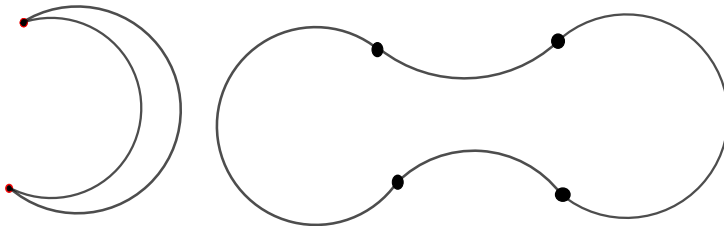


Figura 3.5: Curvas fechadas de Jordan formadas por arcos de círculos.

- i) Esboce o gráfico das curvaturas das duas curvas e calcule a curvatura total em cada caso.

- ii) Encontre curvas fechadas simples de classe C^2 contidas em vizinhanças tubulares das curvas dadas.
 iii) Esboce os gráficos das curvaturas de curvas de classe C^2 obtidas no item ii).

Exercício 3.12. Considere a Fig. 3.6 com duas curvas fechadas formadas de arcos de círculos.

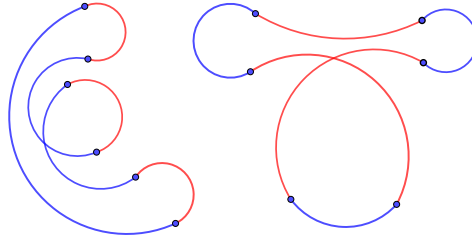


Figura 3.6: Curvas fechadas não simples formadas por arcos de círculos.

- i) Esboce o gráfico das curvaturas das duas curvas e calcule a curvatura total de cada curva.
 ii) Encontre curvas fechadas de classe C^∞ contidas em vizinhanças tubulares das curvas dadas.
 iii) Esboce os gráficos das curvaturas das curvas de classe C^∞ obtidas no item ii).
 iv) É possível encontrar curvas fechadas simples de classe C^2 contidas em vizinhanças tubulares das curvas dadas? Justifique.

Exercício 3.13. Considere a Fig. 3.7

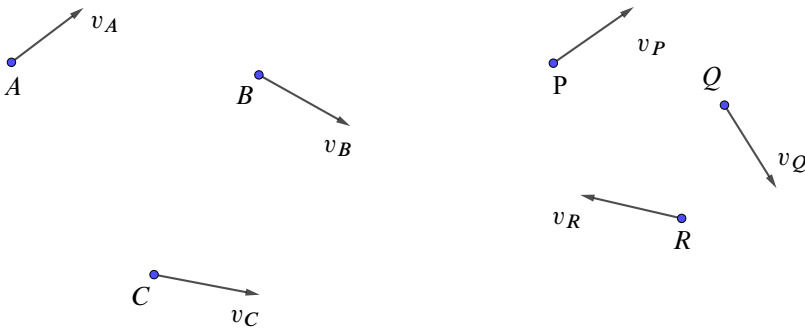


Figura 3.7: Dados discretos e interpolação de curvas suaves.

- i) Construa curvas fechadas de classe C^∞ passando, respectivamente, pelos pontos A , B e C e tendo, respectivamente, os vetores tangentes v_A , v_B e v_C como na Fig. 3.7. Analise

as curvaturas das curvas construídas.

ii) Construa curvas fechadas de classe C^∞ passando, respectivamente, pelos pontos P , Q e R e tendo, respectivamente, os vetores tangentes v_P , v_Q e v_R como na Fig. 3.7. Analise as curvaturas das curvas construídas.

iii) Construa curvas fechadas de classe C^∞ passando, respectivamente, pelos pontos A , B , C , P , Q e R e tendo, respectivamente, os vetores tangentes v_A , v_B , v_C , v_P , v_Q e v_R como na Fig. 3.7. Analise as curvaturas das curvas construídas.

iv) Faça exemplos numéricos ilustrando os itens i), ii) e iii).

v) Encontre uma curva regular fechada (se possível algébrica de grau 3) passando pelos pontos $A = (-1, 1)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$ e possuindo vetores normais (ou tangentes) proporcionais a $v_A = (1, 1)$, $v_B = (1, -1)$ e $v_C = (1, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

vi) Analise os itens i), ii) e iii) supondo que nos pontos dados consideramos as retas tangentes geradas pelos vetores dados. Em outras palavras, a curva deve passar pelos pontos dados e tendo retas tangentes definidas pelos vetores dados. Por exemplo, no ponto A a reta tangente a curva será $A + tv_A$. Justifique que essa mudança de ponto de vista é crucial na análise do problema.

Exercício 3.14. (Projeto) Analise a recíproca do teorema dos quatro vértices para curvas simples não convexas. Estude os artigos [Dahlberg \(2005\)](#) e [DeTurck et al. \(2007\)](#).

Exercício 3.15. Considere a função k definida pelo gráfico esboçado na Fig. 3.8.

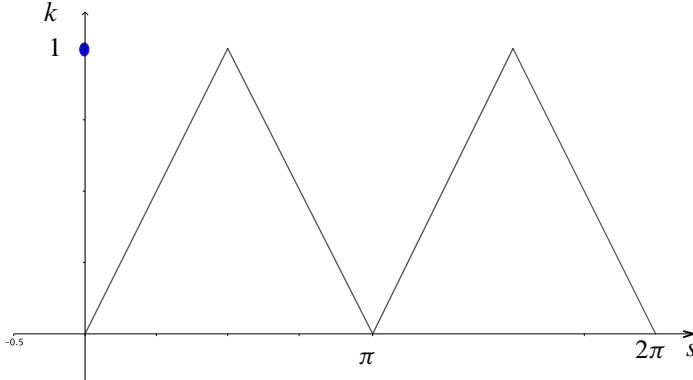


Figura 3.8: Função k linear por partes.

i) Calcule uma curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tendo k como função curvatura. Esboce o traço de γ .

ii) Calcule uma curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tendo $k + 1$ como função curvatura. Esboce o traço de γ .

iii) Estenda k periodicamente $k(s + 2\pi) = k(s)$, e encontre uma curva $\gamma_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tendo $k + a$ como função curvatura. Esboce o traço de γ_a para vários valores de a .

4

Curvatura afim de curvas planas

Longtemps les objets dont s'occupent les mathématiciens étaient pour la plupart mal définis; on croyait les connaître, parce qu'on se les représentait avec le sens ou l'imagination; mais on n'en avait qu'une image grossière et non une idée précise sur laquelle le raisonnement pût avoir prise.

– H. Poincaré (1854-1912).

Neste capítulo faremos uma breve descrição da teoria da curvatura afim de curvas planas. Vários resultados locais e globais são análogos ao caso euclidiano, entretanto não é um simples dicionário relacionar estas duas geometrias. Para uma introdução mais aprofundada no assunto sugerimos [Andrade e Lewiner \(2011\)](#), [Su \(1983\)](#), [H. W. Guggenheimer \(1963\)](#), [Nomizu e Sasaki \(1994\)](#), [Spivak \(1979\)](#).

4.1 Comprimento afim de curvas planas

VI. Arnold, inicia o seu livro sobre métodos matemáticos da mecânica clássica definindo a estrutura galileana de espaço e tempo ressaltando que o *universo* é um espaço afim de dimensão quatro em que se distinguem pontos (ou acontecimentos) e os deslocamentos, que formam um espaço vetorial linear. O tempo tem uma estrutura especial, cujos detalhes não cabe-nos analisar aqui.

O importante a ser ressaltado é que a origem do sistema de coordenadas não está fixada e assim pode-se ver um deslocamento por meio do movimento de um referencial no espaço-

tempo. Assim o conjunto de pontos \mathbb{R}^n , sem estrutura algébrica alguma, distingue-se do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

Espaços afins aparecem naturalmente em computação gráfica exatamente pela razão apontada acima, não há necessidade de escolher uma origem no espaço.

O objetivo deste capítulo é dar uma breve introdução á geometria afim e do conceito de curvatura de curvas convexas nesse contexto, concluindo com um teorema sobre o número mínimo de vértices (seis).

Espaços afins e espaços vetoriais euclidianos têm geometria bem diferentes. Espaços vetoriais euclidianos têm um ponto fixo distinguido 0, enquanto em espaços afins, onde age um espaço vetorial, as isometrias incluem as translações.

Definição 4.1. Um espaço afim é uma tripla $(E, \overrightarrow{E}, +)$ tal que E é um conjunto e \overrightarrow{E} um espaço vetorial e $+$ denota ação de \overrightarrow{E} em E isto é uma função $+: E \times \overrightarrow{E} \rightarrow E$ que associa a cada par (P, \overrightarrow{u}) um ponto $P + \overrightarrow{u}$ tal que

$$(i) P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (P + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v},$$

$$(ii) P + \mathbf{0} = P,$$

(iii) dado um ponto $Q \in E$ existe um único vetor, denotado por \overrightarrow{PQ} tal que $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ (ação transitiva) e $P + \overrightarrow{v} = P$ implica $\overrightarrow{v} = \mathbf{0}$.

A dimensão de um espaço afim é a dimensão do espaço vetorial \overrightarrow{E} .

Exemplo 4.1. $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +)$ com ação definida pela translação usual: $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (u_1, u_2, \dots, u_n) = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_n + u_n)$.

Exemplo 4.2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y + 3 = 0\}$, $E = \mathbb{R}$

Exemplo 4.3. Generalizando o exemplo anterior: o conjunto solução de um sistema de equações lineares.

Exemplo 4.4. Gráficos: $E := (x, y, Q(x, y))$, Q uma função de duas variáveis. $\overrightarrow{E} = \mathbb{R}^2$, ação é a translação no domínio $(x, y, Q(x, y)) + (u, v) = (x + u, y + v, Q(x + u, y + v))$

Exemplo 4.5. O complementar de um hiperplano em um espaço projetivo tem uma estrutura de espaço afim.

Proposição 4.1. Propriedades:

$$(i) \text{ Identidade de Chasles } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR},$$

$$(ii) \overrightarrow{PP} = \mathbf{0},$$

Prova: exercício

$$(iii) \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP},$$

Prova: exercício.

$$(iv) \text{ Lei do Paralelogramo: se } \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} \text{ então } \overrightarrow{YQ} + \overrightarrow{XP}.$$

Demonstração. (i) $Q = P + \vec{PQ}$ e $R = Q + \vec{QR}$ implicam $R = Q + \vec{QR} = (P + \vec{PQ}) + \vec{QR} = P + (\vec{PQ} + \vec{QR})$. Mas $R = P + \vec{PR}$, logo $P + (\vec{PQ} + \vec{QR}) = P + \vec{PR}$. Usando a unicidade, temos $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ como queríamos demonstrar.

(ii) e (iii) exercícios.

(iv) Tem-se $\vec{PX} + \vec{XY} = \vec{PQ} + \vec{QY}$. Usando a hipótese obtemos: $\vec{PX} = \vec{QY}$, o que equivale a $\vec{YQ} = \vec{XP}$. \square

A noção de combinação linear é um dos conceitos fundamentais na álgebra linear pois dela derivam, por exemplo, os conceitos de base e de dimensão. Vejamos como essa noção se adapta para o caso de espaços afins.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, números reais tais que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Se P_1, P_2, \dots, P_n é uma sequência de pontos de E , então, a identidade de Chasles implica que se X é um ponto qualquer, então o ponto $X + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{XP}_i$, não depende de X escolhido. De fato, sabemos que $\vec{XP}_i = \vec{XY} + \vec{YP}_i$ e $X + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{XP}_i = X + \vec{XY} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{XP}_i = Y + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{YX} + \vec{XP}_i) = Y + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{YP}_i$, pois $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Logo $X + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{XP}_i = Y + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{YP}_i$.

Esse ponto, denotado por $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ é chamado *baricentro* dos pontos $\{P_i\}$ com pesos $\{\lambda_i\}$.

Analogamente dado um conjunto de números reais $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, com $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e um conjunto de vetores $V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, o baricentro de V com pesos $\{\lambda_i\}$, denotado por $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$ é o conjunto de pontos da forma $X + \sum_{i=1}^n \lambda_i (X + \vec{v}_i)$.

Exemplo 4.6. O baricentro de $(1, 2)$, $(-1, 2)$ e $(2, 1)$ com pesos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$

Exemplo 4.7. Se $t \in \mathbb{R}$, é um número real, então o baricentro de dois pontos X e Y quaisquer de \mathbb{R}^2 com pesos $t, 1-t$ é o ponto $tX + (1-t)Y$

Exemplo 4.8. Usando o desenvolvimento binomial de $(t + (1-t))^2 = 1$, dados três pontos no plano $\{P, Q, R\}$ o baricentro com pesos $\{(1-t)^2, 2t(1-t), t^2\}$ é dado por $p(t) = (1-t)^2 P + 2t(1-t)Q + t^2 R$. Ao variarmos o parâmetro t , obtemos uma parábola $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que passa por $P = p(0)$ e $R = p(1)$ com $p'(0) = 2(Q - P)$ e $p'(1) = 2(R - Q)$. Veja Fig. 4.1.

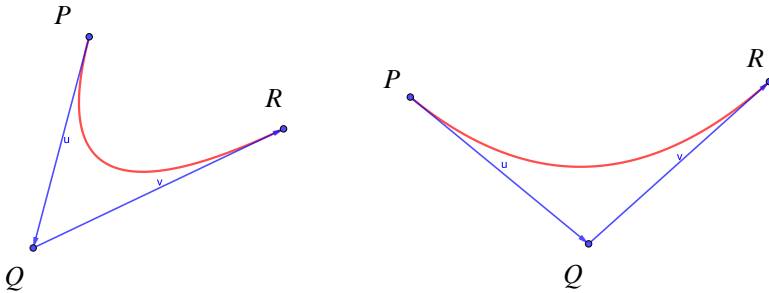


Figura 4.1: Parábolas.

Exemplo 4.9. Usando o desenvolvimento binomial de $(t + (1-t))^3 = 1$, dados quatro pontos no plano $\{P, Q, R, S\}$ o baricentro com pesos $\{(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t), t^3\}$ é dado por $\gamma(t) = (1-t)^3P + 3t(1-t)^2Q + 3t^2(1-t)R + t^3S$. Ao variarmos o parâmetro t , obtemos uma curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que passa por $P = \gamma(0)$ e $S = \gamma(1)$, mas não em geral pelos pontos Q e R . Além disso $\gamma'(0) = 3(Q-P)$ e $\gamma'(1) = 3(S-R)$. Veja Fig. 4.2.

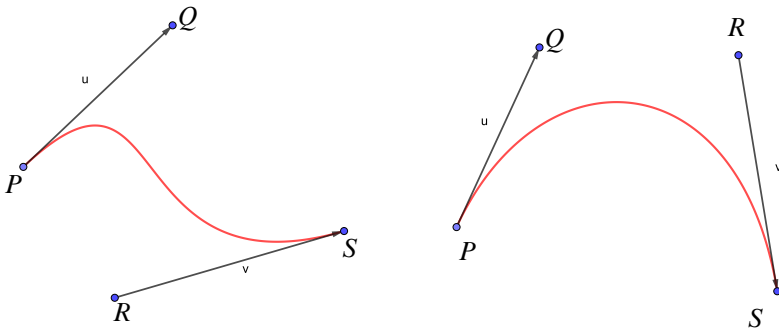


Figura 4.2: Curvas cúbicas paramétricas.

Esse exemplo generaliza-se para qualquer grau n para $n + 1$ pontos dados.

Todo ponto de E possui coordenadas baricêntricas correspondente a uma coleção de pontos $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ tais que o conjunto de vetores $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$ é uma base do espaço vetorial \overrightarrow{E} .

De fato, como V é uma base, para todo ponto $X \in E$ existem números reais c_1, c_2, \dots, c_m tais que $P_0X = \sum_{i=1}^m c_i \overrightarrow{P_0P_i}$.

Se definimos $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^m c_i$, $\lambda_i = c_i$ então o baricentro dos pontos $\{P_i\}$ com pesos $\{\lambda_i\}$ se escreve $P_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i}$ que é exatamente o ponto X em relação ao conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$.

Dessa forma, denominamos $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ as coordenadas baricêntricas do ponto X .

Definição 4.2. Uma transformação entre dois espaços afins $F : (E, \overrightarrow{E}, +) \rightarrow (E_1, \overrightarrow{E}_1, +)$ é chamada transformação afim se preserva baricentros (para simplificar notação, denotamos a ação nos dois espaços pelo mesmo símbolo $+$).

Ou seja, F satisfaz a equação $F(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{v_i}) = F(X) + \sum_{i=1}^n \lambda_i F(X + \overrightarrow{v_i})$.

Exemplo 4.10. se $H : \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{E}_1$ é uma transformação linear, e $P \in E$ é um ponto qualquer, então $F(X + \overrightarrow{v}) = P + H(\overrightarrow{v})$ é uma transformação afim.

Proposição 4.2. As seguintes propriedades das transformações afins seguem da definição:

- Colinearidade: se P, Q e R são pontos colineares de E , isto é, se
- Paralelismo: as imagens de duas retas paralelas são duas retas paralelas.
- Razão de pontos colineares: uma transformação afim preserva a razão entre os comprimentos (euclidianos) de dois segmentos colineares.
- Convexidade: a imagem de um subconjunto convexo por uma transformação afim é um subconjunto convexo.

De fato temos a seguinte caracterização das aplicações afins:

Toda aplicação afim se escreve como uma aplicação linear seguida de uma translação.

Prova: Seja $H : E \rightarrow E$ uma aplicação linear, então $F(X + V) = B + H(V)$ é uma transformação afim

$$(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i (X + v_i)) = B + H(\sum_{i=1}^n \lambda_i (x + v_i)).$$

Usando a invariância do baricentro por transformações afins, introduzimos o conceito de comprimento de arco afim para curvas convexas.

Suponhamos que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja uma curva plana regular e convexa. Dados dois valores em I , $t_1 < t_0$ seja $\gamma(t_2)$ o ponto tal que o segmento que contém $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ seja paralelo ao vetor $\gamma'(t_0)$.

Ou seja, t_2 é obtido da seguinte equação $[\gamma(t_2) - \gamma(t_1), \gamma'(t_0)] = 0$, que, pelo fato da curva ser convexa, tem sempre solução.

Além disso, aplicando novamente a convexidade e o Teorema de função implícita, obtemos que $t_2 = T_2(t_0, t_1)$ é uma função de classe C^1 , caso γ seja de classe C^2 .

Consideremos agora o ponto t_0 fixo e tomemos o ponto médio $\beta(t_1) = \frac{\gamma(t_1) + \gamma(t_2)}{2}$, baricentro dos pontos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ com pesos iguais a $\frac{1}{2}$. A curva β é chamada *curva central* ou *medial*.

A invariância dos baricentros por transformações afins implica que essa configuração é também invariante. Assim, a curva média é invariante por transformações afins.

Em particular a direção de seu vetor tangente também é invariante por transformações afins.

Finalmente, tomando $\lim_{t_1 \rightarrow t_0} m'(t_1)$ obteremos um vetor, que denotaremos provisoriamente por $n(t_0)$, tal a base $\gamma'(t_0), n(t_0)$ (referencial afim) que está definida intrinsecamente do ponto de vista das transformações afins.

A obtenção do referencial afim pode ser simplificada simplificada se usarmos uma parametrização adequada.

O comprimento afim de uma curva $\gamma(u) = (x(u), y(u))$, localmente convexa, é definido por:

$$s(u) = \int_0^u (x'y'' - x''y')^{\frac{1}{3}} du = \int_0^u \det(\gamma', \gamma'')^{\frac{1}{3}} du \quad (4.1)$$

Geometricamente o comprimento afim é baseado na área do paralelogramo gerado pelos vetores γ' e γ'' .

Em todo o capítulo iremos supor que o paralelogramo gerado por γ' e γ'' esteja positivamente orientado e seja não degenerado. Este é o caso de curvas estritamente convexas.

Observamos que o comprimento de arco afim é invariante pelo grupo afim especial do plano, i. e., as curvas $\alpha(u)$ e $\beta(u) = A\alpha(u) + b$ com $\det(A) = 1$ possuem o mesmo comprimento.

Considere uma curva regular $c(s) = (x(s), y(s))$ no plano afim \mathbb{A}^2 munido da forma de área canônica $\omega = dx dy$ e suponha que $[c'(s), c''(s)] = 1$. Isso é sempre possível quando c é uma curva estritamente convexa, isto é, a sua curvatura euclidiana é positiva.

Vamos explicitar a construção do referencial afim em termos do parâmetro comprimento de arco s .

Escrevendo a expansão de Taylor $c(s) = c(s_0) + c'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}c''(s_0)(s - s_0)^2 + r(s, s_0)$, com $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{r(s, s_0)}{(s - s_0)^2} = 0$.

Segue da convexidade e do Teorema da Função Implícita que a equação $[c(s_2) - c(s_1), c'(s_0)] = 0$ define $s_2 = s_2(s_0, s_1) = 2s_0 - s_1 + r_1(s_0, s_1)$, com $\lim_{s_1 \rightarrow s_0} \frac{r_1(s_1, s_0)}{(s_1 - s_0)} = 0$. Aqui usamos a normalização $[c'(s_0), c''(s_0)] = 1$.

O vetor tangente da curva medial escreve-se como

$$\beta'(s_1) = \frac{c'(s_2) \frac{\partial s_2}{\partial s_1} + c'(s_1)}{2} = c''(s_0)(s_1 - s_0) + r_2(s_1, s_0),$$

com $\lim_{s_1 \rightarrow s_0} \frac{r_2(s_1, s_0)}{(s_1 - s_0)} = 0$.

De modo que $\lim_{s_1 \rightarrow s_0} \frac{\beta'(s_1)}{(s_1 - s_0)} = c''(s_0)$.

Ou seja, se $c(s)$ é uma curva convexa parametrizada pelo comprimento de arco afim, então o referencial afim ao longo de c é dado por $\{c'(s), c''(s)\}$.

Derivando a equação $[c'(s), c''(s)] = 1$ obtemos que $[c'(s), c'''(s)] = 0$ e portanto, como $c' \neq 0$, temos que:

$$c'''(s) + k_a(s)c'(s) = 0 \Rightarrow k_a = [c''(s), c'''(s)].$$

A função k_a é denominada *curvatura afim* de c .

Lema 4.1. *Seja c uma convexa fechada simples e suponha que a mesma esteja parametrizada pelo comprimento de arco afim s . A função k'_a é ortogonal a $\{1, c\}$.*

Demonstração. De fato,

$$\int_0^L k'_a(s) ds = 0,$$

$$\int_0^L k'_a(s)c(s) ds = - \int_0^L k_a(s)c'(s) ds = \int_0^L c'''(s) ds = 0.$$

□

Em relação a uma parametrização $\gamma(u) = c(s(u))$ temos que

$$\begin{aligned}\gamma' &= c_s s' \\ \gamma'' &= c_{ss}(s')^2 + c_s s'' \\ \gamma''' &= c_{sss}(s')^3 + 3c_{ss}s's'' + c_s s'''\end{aligned}$$

onde $c_s = \frac{dc}{ds}$, etc.

Além disso temos,

$$\begin{aligned}(s')^3 &= [\gamma', \gamma''] \\ 3(s')^2 s'' &= [\gamma', \gamma'''] \\ 6s'(s'')^2 + 3(s')^2 s''' &= [\gamma', \gamma''''] + [\gamma'', \gamma''']\end{aligned}$$

Logo, usando que $k_a(s) = [c_{ss}, c_{sss}]$, obtemos:

$$k_a(u) = \frac{4[\gamma'', \gamma'''] + [\gamma', \gamma'''']}{3[\gamma', \gamma''']^{\frac{5}{3}}} - \frac{5}{9} \frac{[\gamma', \gamma''']^2}{[\gamma', \gamma'']^{\frac{8}{3}}} \quad (4.2)$$

Observação 4.1. Na equação (4.2) é importante observar o caráter intrínseco da curvatura expressado pelo balanço das derivadas.

Em relação a parametrização $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ definida pela função suporte h temos que:

$$\begin{aligned}x(u) &= h(u) \cos u - h'(u) \sin u \\ y(u) &= h'(u) \cos u + h(u) \sin u\end{aligned}$$

Logo, por cálculos longos mas elementares, temos:

$$k_a(u) = \frac{9r(u)^2 - 3r''(u)r(u) + 4(r'(u))^2}{9r(u)^{\frac{10}{3}}} \quad (4.3)$$

onde $r(u) = h''(u) + h(u)$.

Lema 4.2. *O vetor normal afim a γ no ponto s_0 é colinear ao vetor tangente a curva β no ponto s_0 . Veja Fig. 4.3*

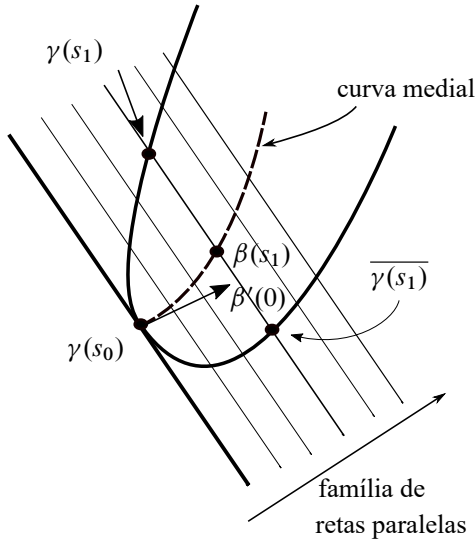


Figura 4.3: Curva central e vetor normal afim.

Demonstração. Fixamos $p_0 = (0, 0)$ e parametrizamos a curva γ na forma de gráfico $\gamma(u) = (u, h(u)) = (u, \frac{1}{2}a_2u^2 + \frac{1}{6}a_3u^3 + \frac{1}{24}a_4u^4 + O(u^5))$. Calculando a interseção entre as retas horizontais $R(t, u) = t(1, 0) + (u, h(u)) = (t + u, h(u))$ com a curva γ concluímos que a curva central β é parametrizada por $\beta(v) = (-\frac{1}{6}\frac{a_3}{a_2}v + O(v^{\frac{3}{2}}), \frac{1}{2}a_2v + O(v^{\frac{3}{2}}))$, onde $v = \sqrt{u}$. Logo $\beta'(0) = (-\frac{1}{6}\frac{a_3}{a_2}, \frac{1}{2}a_2)$.

Por outro lado, parametrizando a curva γ pelo comprimento de arco afim s obtemos

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= (x(s), y(s)) \\ x(s) &= \frac{s}{\sqrt[3]{a_2}} - \frac{1}{6} \frac{a_3 s^2}{a_2^{\frac{5}{3}}} + \frac{(-3 a_4 a_2 + 5 a_3^2) s^3}{54 a_2^3} + O(s^4), \\ y(s) &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{a_2} s^2 + \frac{(5 a_3^2 - 3 a_2 a_4) s^4}{216 a_2^{\frac{7}{3}}} + O(s^5)\end{aligned}$$

Portanto, o vetor normal afim no ponto p_0 é

$$\gamma''(0) = \left(-\frac{1}{3} \frac{a_3}{a_2^{\frac{5}{3}}}, \sqrt[3]{a_2} \right),$$

o qual é colinear ao vetor $\beta'(0)$. □

Exercício. Na curva $\gamma(u) = (u, h(u))$ acima mostre que

$$k_a(0) = \frac{1}{9} \frac{3 a_4 a_2 - 5 a_3^2}{a_2^{\frac{8}{3}}} e \frac{dk_a}{du}(0) = \frac{1}{27} \frac{9 a_5 a_2^2 - 45 a_2 a_3 a_4 + 40 a_3^3}{a_2^{\frac{11}{3}}}.$$

Exercício. Seja γ uma curva convexa tal que toda curva central seja uma reta. Mostre que γ é uma cônica.

Proposição 4.3. *Seja $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular convexa de classe C^k , $k \geq 3$, com curvatura euclidiana $k_e > 0$.*

Então o vetor normal afim é dado por

$$n_a = \frac{1}{[\beta', \beta'']^{\frac{2}{3}}} \left(\beta'' - \frac{1}{3} \frac{[\beta', \beta''']}{[\beta', \beta'']} \beta' \right) \quad (4.4)$$

Demonstração. Seja $\gamma(s) = \beta(t(s))$ a reparametrização de β pelo comprimento de arco afim s . Denote por $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{ds}$ e $\beta' = \frac{d\beta}{dt}$. O normal afim é o vetor $\ddot{\gamma}$. Assim temos $\dot{\gamma} = \dot{t} \beta'$, $\ddot{\gamma} = \dot{t}^2 \beta'' + \ddot{t} \beta'$ e $\ddot{\gamma} = \dot{t}^3 \beta''' + 3 \dot{t} \ddot{t} \beta'' + \ddot{t} \beta'$. Usando a equação $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = 1$ obtemos $\dot{t} = [\beta', \beta'']^{-\frac{1}{3}}$. Derivando a equação $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = 1$ obtemos $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = 0$ e portanto $\ddot{t} = -\frac{1}{3} \dot{t}^2 \frac{[\beta', \beta''']}{[\beta', \beta'']}$. Simplificando segue o resultado enunciado na equação (4.4). □

Observação 4.2. Nas condições da Proposição 4.3 se t for o comprimento de arco euclidiano e k_e a curvatura euclidiana de β com base ortonormal positiva $\{T, N\}$ ao longo de β temos que

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{k_e^{\frac{1}{3}}} T, \quad \ddot{\gamma} = -\frac{1}{3} \frac{k_e'}{k_e^{\frac{5}{3}}} T + k_e^{\frac{1}{3}} N.$$

4.2 Interpretação variacional da curvatura afim.

O conceito de curvatura aparece naturalmente em geometria diferencial quando considera-se o seguinte problema *variacional*:

Problema 4.1. *Dados dois pontos p e q e um número positivo T , encontrar uma curva $\gamma: [0, T] \rightarrow M$, que minimiza o comprimento $A(\alpha) = \int_0^T |\alpha'(t)| dt$ entre todas as curvas que de classe C^1 (ou absolutamente contínuas), que satisfazem a condição de extremidades fixas: $\alpha(0) = p$, $\alpha(T) = q$.*

Alternativamente, dada $L(x, y)$ uma função de classe C^2 , encontrar uma curva $\gamma: [0, T] \rightarrow M$ que minimiza a ação $A(\alpha) = \int_0^T L(\alpha(t), \alpha'(t)) dt$.

A abordagem clássica do Cálculo Variacional consiste em considerar primeiramente o problema local que dá a condição *necessária* para a existência de uma tal curva, ou seja, procura-se um ponto crítico do funcional L .

Para isso, fixado $\varepsilon > 0$, tomemos uma família parametrizada de curvas $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, T] \rightarrow M$, de classe C^1 , que satisfaz $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ e $\Gamma(\lambda, 0) = p$, $\Gamma(\lambda, T) = q$, para todo valor do parâmetro λ , com $|\lambda| < \varepsilon$. Observe que

$$a(\lambda) = \int_0^T L(\Gamma(\lambda, t), \Gamma'(\lambda, t)) dt$$

é uma função de classe C^1 .

Portanto, a condição necessária para minimização é que 0 seja um *ponto crítico* da função a : isto é, $a'(0) = 0$.

As hipóteses sobre L nos permitem derivar dentro do sinal de integração. O resultado é uma propriedade que depende exclusivamente da curva γ .

No exemplo em que $L(\alpha, \alpha') = |\alpha'|$ obtemos uma condição na curvatura (geodésica) de γ .

Vamos aplicar essa ideia para o caso em que L é o comprimento de arco afim, $L(\alpha', \alpha'') = |\alpha', \alpha''|^{\frac{1}{3}}$. Veja [L. L. de Lima e Montenegro \(1999\)](#).

Provaremos que $a'(0) = 0$ se, e somente se, a curvatura afim de γ é identicamente nula: $k_a(\gamma) = 0$.

$$\text{Usaremos a notação: } \Gamma'(\lambda, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \Gamma_\lambda(\lambda, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda}.$$

Como foi visto anteriormente, $s(t) = \int_0^t [\Gamma'(\lambda, u), \Gamma''(\lambda, u)]^{\frac{1}{3}} du$ é o parâmetro comprimento de arco afim.

Se denotamos $\zeta = s'(\lambda, t) = [\Gamma'(\lambda, t), \Gamma''(\lambda, t)]^{\frac{1}{3}}$ então, fixado λ , temos o referencial ao longo de cada curva Γ , $\{T(s), N(s)\}$, de modo que $\Gamma' = \zeta T$, $T' = \zeta N$, $N' = -k_a \zeta T$.

Assim, podemos escrever o campo ao longo de cada curva $\Gamma_\lambda = fN + gT$.

Derivando em relação a λ : $\Gamma'_\lambda = f'N + fN' + g'T + gT' = f'N - k_a \zeta fT + g'T + g\zeta N$.

Agrupando os termos: $\Gamma'_\lambda = (-k_a \zeta f + g')T + (f' + g\zeta)N$.

Por outro lado, $\Gamma'_\lambda = \zeta_\lambda T + \zeta T_\lambda$. Usando $[T, N] = 1$ é possível calcular $[\Gamma'_\lambda, N]$ e $[\Gamma'_\lambda, T]$ de duas maneiras para obter:

$$\zeta_\lambda + \zeta[T_\lambda, N] = (g' - k_a \zeta f) \quad \text{e} \quad [T_\lambda, T] = -\frac{f' + g\zeta}{\zeta} \quad (4.5)$$

Segue então que para calcular $a'(\lambda) = \int_0^T \zeta_\lambda dt$ é necessário calcular $[T_\lambda, N]$.

A derivada da segunda equação em relação a t nos dá:

$$[T'_\lambda, T] + [T_\lambda, T'] = -\left[\frac{f'+g\zeta}{\zeta}\right]'$$

$$\text{ou } [T'_\lambda, T] + \zeta[T_\lambda, N] = -\left[\frac{f'+g\zeta}{\zeta}\right]'$$

Usando $T' = \zeta N$ temos $T'_\lambda = \zeta_\lambda N + \zeta N_\lambda$ o que implica

$$[T'_\lambda, T] = -\zeta_\lambda + \zeta[N_\lambda, T] = -\zeta_\lambda + \zeta[T_\lambda, N].$$

$$\text{Portanto } -\zeta_\lambda + 2\zeta[T_\lambda, N] = -\left(\frac{f'+g\zeta}{\zeta}\right)'$$

Substituindo em (4.5) obtemos:

$$\zeta_\lambda = \frac{1}{3}\left[\frac{f'+g\zeta}{\zeta}\right]' + \frac{2}{3}g' - \frac{2}{3}k_a \zeta f.$$

Concluimos assim que

$$a'(\lambda) = \int_0^T \zeta_\lambda dt = \int_0^T \left[\frac{1}{3}\left[\frac{f'+g\zeta}{\zeta}\right]' + \frac{2}{3}g' - \frac{2}{3}k_a \zeta f\right] dt.$$

Finalmente, usamos o fato de que todas curvas têm extremidades nos mesmos pontos p e q para obter $a'(0) = \int_0^T -\frac{2}{3}k_a \zeta f dt$.

Como $\zeta dt = ds$, a condição de ponto crítico se escreve:

Para toda função contínua f , $-\frac{2}{3}\int_0^S k_a f ds = 0$. Isso implica que $k_a = 0$ (Prove).

Conclusão: as parábolas são os pontos críticos do funcional comprimento de arco afim e têm curvatura afim nula.

Isto sugere que, do ponto de vista computacional, para fazer aproximações “poligonais” de curvas planas, é interessante usar arcos de parábola. Veja exemplo 4.8 e [Craizer, Lewiner e Morvan \(2007\)](#).

4.3 Contato com cônicas

No caso da curvatura euclidiana o natural foi considerar o contato da curva com a família de círculos tangentes e obtemos o círculo osculador que possui um contato de ordem maior que o esperado com a curva dentre todos os círculos tangentes.

Na curvatura afim, o análogo é considerar o contato da curva com a família de cônicas tangentes e detectar a cônica com contato de maior ordem.

Definição 4.3. Um ponto p_0 de uma curva γ localmente convexa é chamado sextático se existe uma cônica passando por p_0 e possuindo contato de ordem maior ou igual a 6 com a curva γ no ponto p_0 .

Definição 4.4. Um ponto $p_0 = \gamma(s_0)$ de uma curva γ localmente convexa é chamado um vértice afim quando for um ponto crítico da curvatura afim k_a de γ .

Consideramos um referencial (x, y) e escrevemos a curva c na forma de gráfico

$$y(x) = a_0 + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{24}x^4 + \frac{a_5}{5!}x^5 + \frac{a_6}{6!}x^6 + O(7).$$

Observamos que sempre podemos normalizar as coordenadas sob a ação do grupo afim de forma a fazer $a_2 = 1$ e $a_3 = 0$. Portanto a curvatura afim de c no ponto $(0, a_0)$ é igual a $\frac{a_4}{3}$ que iremos supor positiva.

Portanto assumiremos a curva na forma normal

$$y(x) = a_0 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a_4}{24}x^4 + \frac{a_5}{120}x^5 + \frac{a_6}{6!}x^6 + O(7). \quad (4.6)$$

Consideramos também a elipse definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^4}.$$

Portanto a série de Taylor da elipse é:

$$y_e(x) = -\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}x^4 + \frac{1}{16}\frac{a^4}{b^4}x^6 + O(8)$$

Portanto sua curvatura euclidiana no ponto $(0, -\frac{b^2}{a^2})$ é igual a 1.

O contato entre c escrita na forma normal (4.6) e a elipse é de quarta ordem quando $a_0 = -\frac{b^2}{a^2}$ e $\frac{a_4}{3} = \frac{a^2}{b^2}$ e será de sexta ordem ou superior quando também $a_5 = 0$.

Neste caso temos que $(0, a_0)$ é vértice afim de γ pois $k'_a(0) = \frac{a_5}{3}$.

Assim concluímos que os conceitos de ponto sextático e vértice afim são equivalentes.

Proposição 4.4. Considere uma curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco afim s , i. e., $[\gamma', \gamma''] = 1$.

Então para todo s existe uma única cônica $\mathcal{C}(s)$ (cônica osculadora) tangente a γ no ponto $\gamma(s)$ possuindo um contato de ordem 5 no ponto $\gamma(s_0)$ se, e somente se, $k'(s_0) \neq 0$. A cônica $\mathcal{C}(s)$ e γ possuem contato de ordem 6 no ponto $\gamma(s_0)$ se, e somente se, $k'_a(s_0) = 0$ e $k''_a(s_0) = 0$.

Demonstração. Escolha um referencial tal que $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = (1, 0)$ e $\gamma''(0) = (0, 1)$. Usando a equação $\gamma''' + k(s)\gamma'(s) = 0$ temos a seguinte expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left(s - \frac{1}{6}ks^3 - \frac{1}{4!}k's^4 + \frac{1}{5!}(k^2 - k'')s^5 + \frac{1}{6!}(4kk' - k''')s^6 \right. \\ &\quad \left. + O(s^7) \right) \gamma'(0), \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{2}{5!}k's^5 + \frac{1}{6!}(k^2 - 3k'')s^6 + O(s^7) \right) \gamma''(0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $k = k(0)$, $k' = k'(0)$, $k'' = k''(0)$ e $k''' = k'''(0)$.

Uma cônica passando por 0 e tangente a γ em $(0, 0)$ é definida implicitamente por $F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + y = 0$.

Definindo $g(s) = F(\gamma(s))$ temos: $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2a + 1$, $g'''(0) = 3c$, $g''''(0) = -k(8a + 1) + 6b$, $g''''''(0) = (10a + 2)k' - 15ck$. Impondo a condição de contato quántico ou superior obtemos $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{k}{2}$, $c = 0$. Logo, a única cônica tangente e possuindo contato de ordem 5 ou superior com γ em $(0, 0)$ é dada por $F(x, y) = 2y - x^2 - ky^2 = 0$.

Portanto, $g(s) = \frac{1}{20}(k's^5 + \frac{1}{6}k''s^6 + O(7))$. Isto conclui a demonstração. \square

Exercício. Considere um arco $\gamma = \gamma(t)$ tal que sua curvatura afim não possua pontos críticos. Então a família de cônicas osculadoras $\mathcal{C}(t)$ define uma folheação numa região do plano (decomposição em cônicas disjuntas e encaixadas). Maiores detalhes veja, [Dymara \(2000\)](#) e [Ghys, Tabachnikov e Timorin \(2013\)](#).

4.4 Deformação de cônicas

Considere uma curva convexa com função suporte $h(s) = 1 + \varepsilon H(s)$

Usando a equação (4.3) e fazendo os cálculos, obtemos que:

$$\begin{aligned} k_a(s) &= 1 - \frac{\varepsilon}{3}[H'''' + 5H'' + 4H](s) + O(\varepsilon^2), \quad D = \frac{d}{ds}, \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{3}[(D^2 + I)(D^2 + 4I)H(s)] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Teorema 4.1. *Considere uma curva convexa fechada γ_ε , deformação infinitesimal de uma elipse. Então γ_ε possui pelo menos seis vértices afins.*

Demonstração. Pela equação (4.8) temos que os vértices de γ_ε são, em primeira aproximação, dados pelos zeros da função

$$W(s) = D(D^2 + I)(D^2 + 4I)H(s) = 0.$$

Escrevendo a série de Fourier de H na forma

$$H = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(ks) + b_k \sin(ks)]$$

temos que $W(s) = 120[b_3 \cos(3s) - a_3 \sin(3s)] + \dots$.

Logo pelo Teorema 2.2 e também pela Proposição 3.1, temos que W possui pelo menos 6 zeros. \square

O análogo do teorema dos 4-vértices para a geometria afim é o teorema dos 6 - vértices.

Teorema 4.2. *Uma curva de Jordan convexa possui pelo menos 6 vértices afins.*

Demonstração. Seguiremos a demonstração dada em [H. W. Guggenheimer \(1963, pág. 152\)](#).

Afirmção: Seja γ uma curva convexa fechada com curvatura afim k_a . Então para todo polinômio quadrático $q(x, y)$ temos que $\int_{\gamma} q(x, y) dk_a = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dk_a &= 0, \\ \int_{\gamma} x dk_a &= \int_0^L x(s)k'_a(s)ds = - \int_0^L k_a(s)x'(s) = \int_0^L x'''(s)ds = 0, \\ \int_{\gamma} x^2 dk_a &= \int_0^L x(s)^2 k'_a(s)ds = -2 \int_0^L k_a(s)x(s)x'(s) = 2 \int_0^L x(s)x'''(s)ds, \\ &= -2 \int_0^L x'(s)x''(s)ds = 2 \int_0^L d(x')^2 ds = 0, \\ \int_{\gamma} xy dk_a &= \int_0^L x(s)y(s)k'_a(s)ds = - \left[\int_0^L k_a(s)(x'(s)y(s) + x(s)y'(s))ds \right], \\ &= \int_0^L x'''(s)y(s)ds + \int_0^L y'''(s)x(s)ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada k'_a da curvatura afim k_a é ortogonal no espaço de Hilbert $L^2([0, L], \mathbb{R})$ ao conjunto de funções $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$. Logo, fazendo raciocínio análogo a demonstração analítica do teorema dos 4 vértices obtemos o resultado. Mais precisamente, a condição k'_a ortogonal ao conjunto de funções $\{1, x, y\}$ implica a existência de pelo menos 4 vértices.

Suponha que k'_a possua somente quatro zeros, os quais denotamos por $p_i = \gamma(s_i)$. Suponha p_1 e p_3 pontos de máximos locais e p_2 e p_4 pontos de mínimos locais. Nessas condições existe um polinômio quadrático $q(x, y) = q_1(x, y)q_2(x, y)$ (produto de dois fatores lineares) tal que $q(p_i) = q(\gamma(s_i)) = 0$. Portanto $\text{sinal}(q(\gamma(s))) = \text{sinal}(k'_a)$. Logo, $\int q(\gamma(s))k'_a > 0$, o que é uma contradição. Veja Fig. 4.4. \square

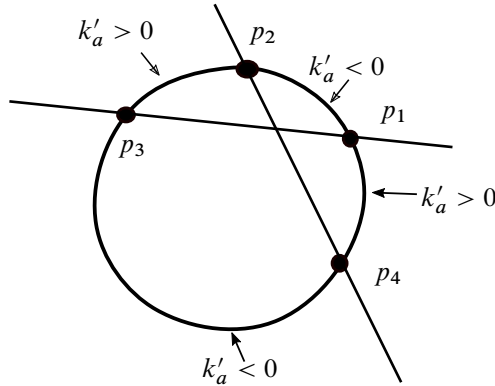


Figura 4.4: Definição de polinômio quadrático com 4 zeros no círculo.

Observação 4.3. Veja [Guieu, Mourre e V. Y. Ovsienko \(1997\)](#) para uma demonstração usando ideias da teoria de Sturm. Outra demonstração recente pode ser vista em [Thorbergs-son e Umehara \(2004\)](#). Veja também [V. Ovsienko e Tabachnikov \(2005\)](#) e [Tabachnikov \(2008\)](#).

4.5 Conjunto focal afim

Consideramos uma curva regular fechada e estritamente convexa c parametrizada tal que $[c'(s), c''(s)] = 1$. Derivando a equação acima obtemos, $[c'''(s), c'(s)] = 0$ e portanto, $c'''(s) = -k_a(s)c'(s)$.

A função k_a é chamada *curvatura afim* de c . Então a cáustica afim de c é dada por

$$\gamma(s) = c(s) + \frac{1}{k_a(s)}c''(s).$$

Os pontos singulares da cáustica de c são chamados de *cúspides afins*. Assim temos o teorema.

Teorema 4.3. *Seja γ uma curva regular de Jordan tal que $[\gamma'(s), \gamma''(s)] = 1$. Suponhamos que sua curvatura afim k_a seja não nula. Então γ possui pelo menos 6 pontos de cúspides afins.*

Demonstração. Nas condições acima temos que $[\gamma'''(s), \gamma''(s)] = -k_a(s) \neq 0$. Portanto aplicando o Teorema 4.2 temos que os vértices afins de γ correspondem aos pontos de cúspides afins da cáustica associada. \square

4.6 Exercícios

Exercício 4.1. i) Mostre que a curvatura afim da curva $\gamma(s) = (s, e^{as})$ é igual a

$$k_a(s) = -\frac{2}{9} a^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3} as}.$$

ii) Mostre que a cônica osculadora C_s a γ no ponto $\gamma(s)$ é definida implicitamente por

$$\begin{aligned} C_s(x, y) = & 2a^2x^2 + 8e^{-as}axy - e^{-2as}y^2 + (10a - 4a^2s)x \\ & - 8y(as + 2)e^{-as} + 2a^2s^2 - 10as + 17 = 0. \end{aligned}$$

iii) Calcule o envelope da família C_s calculada no item ii). Mais precisamente, mostre que o envelope da família C_s é constituído de duas curvas regulares $E_1(s) = \gamma(s)$ e $E_2(s) = (s, -17e^{as})$. Ilustre geometricamente.

iv) Calcule as evolutas euclidiana e afim da curva γ .

Exercício 4.2. Considere a curva fechada $\gamma(u) = (\cos u - a \sin 2u, \sin u + a \cos 2u)$.

i) Mostre que quando $|a| > \frac{1}{2}$ ou $|a| < \frac{1}{4}$, γ é localmente convexa e possui somente dois vértices afins.

ii) Mostre que quando $0 < a < \frac{1}{4}$, γ é simples e convexa e faça um estudo sobre os seus vértices afins.

iii) Analise os vértices afins e as inflexões de γ quando $\frac{1}{4} \leq |a| \leq \frac{1}{2}$.

Exercício 4.3. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja $T_t(x)$ o seu polinômio de Taylor de grau menor ou igual a n no ponto $x = t$. Isto é,

$$T_t(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k.$$

i) Suponha n par e $f^{n+1}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então para todo $a, b \in I$ os gráficos de T_a e T_b são disjuntos em toda a reta.

ii) Suponha n ímpar e $f^{n+1}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então para todo $a < b \in I$ os gráficos de T_a e T_b são disjuntos no intervalo $[b, \infty)$.

iii) Estude o artigo [Ghys, Tabachnikov e Timorin \(2013\)](https://arxiv.org/pdf/1207.5662.pdf), também disponível no sítio arxiv.org/pdf/1207.5662.pdf

Exercício 4.4. Considere a cúbica definida por $h(x, y) = y^2 - x(x-a)(x-b) = c$ e suponha $0 < a < b$. Mostre que toda oval $h(x, y) = c$, para c próximo de zero, é convexa e possui exatamente 6 vértices afins.

Exercício 4.5. i) Dê exemplo de um arco de curva γ tal que as curvaturas euclidiana k_e e afim k_a de γ sejam iguais ou proporcionais.

ii) Mostre que existem arcos de curvas não circulares γ tais que $k_e = k_a \neq \text{cte}$.

iii) Mostre que não existe uma curva fechada e simples (não circular) tal que $k_e = k_a \neq \text{cte}$.

iv) Existe uma curva fechada (que não seja circular) tal que $\frac{k_e}{k_a} = \text{cte}$?

Exercício 4.6. Considere uma curva regular estritamente convexa γ de classe C^k , $k \geq 5$. Fixa $p_0 = \gamma(s_0)$ e suponha que as curvaturas euclidiana k_e e afim k_a de γ em p_0 sejam não nulas.

i) Analise as várias possibilidades de contato entre o círculo osculador \mathcal{C}_0 e a cônica osculadora \mathcal{Q}_0 de γ passando por p_0 .

ii) Mostre que em geral $\mathcal{Q}_0 \cap \mathcal{C}_0 = \{p_0, p_0^*\}$. Repetindo a construção num ponto $\gamma(s)$ obtemos uma curva $p^*(s)$ com $p^*(s_0) = p_0^*$. A curva p^* tem alguma particularidade geométrica relevante?

iii) Quando temos que $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{C}_0$?

Exercício 4.7. Considere um arco injetivo de uma curva regular plana γ possuindo dois pontos de inflexões consecutivos genéricos (a função $A(t) = [\gamma', \gamma'']$ possui somente zeros transversais) $p_1 = \gamma(s_1)$ e $p_2 = \gamma(s_2)$. Mostre que existe um ponto sextático $\gamma(s^*)$ com $s_1 < s^* < s_2$.

Exercício 4.8. Considere uma curva plana γ parametrizada pelo gráfico $y(x) = x^2 + ax^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + O(9)$.

i) Mostre que pela ação das transformações birracionais lineares (quociente de funções lineares) é sempre possível reduzir, localmente, uma curva plana na forma normal acima. Lembramos que o grupo acima é gerado pelas transformações da forma

$$T(x, y) = \left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha x + \beta y + \gamma} \right).$$

ii) Mostre que a curva algébrica de grau 3 que possui contato de ordem 9 ou superior com γ é

$$\begin{aligned} C_3(x, y) = & [a_6 y (x^2 - y) - a (ay^3 + x^3 - xy)] a_{11} \\ & + [a_7 y (x^2 - y) - a (axy^2 + a_6 y^3 + x^2 - y)] a_{01} \end{aligned}$$

Sugestão: Escreva $C(x, y) = \sum_{i+j=3} a_{ij} x^i y^j + \sum_{i+j=2} a_{ij} x^i y^j + a_{10}x + a_{01}y$ e imponha a condição de que a função $h(x) = C(x, y(x))$ tenha derivadas até a ordem 8 nula na origem. Veja [Lane \(1942\)](#).

Exercício 4.9. i) Investigue a recíproca do teorema dos seis vértices. Veja [Tabachnikov \(2008\)](#).

ii) Quais são as condições necessárias e suficientes para que uma função contínua e periódica seja a curvatura afim de uma curva fechada e convexa?

Exercício 4.10. i) Pesquise na literatura os conceitos de curvatura discreta e vértices para curvas poligonais simples no plano.

ii) Investigue a versão discreta do teorema dos quatro vértices e dos 6 vértices para curvas poligonais de Jordan. Veja [Craizer, R. C. Teixeira e da Silva \(2012\)](#), [Dahlberg \(2008\)](#) e [V. Ovsienko e Tabachnikov \(2005\)](#).

Exercício 4.11. (Projeto). Veja [R. Garcia \(2012, cap. 3\)](#).

Problema 4.2. *Dados n segmentos s_i de comprimentos $a_i > 0$ e $n-1$ ângulos $\alpha_i > 0$ tais que $\sum \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}$ determine o arco poligonal convexo formado pelos segmentos s_i e ângulos externos α_i (todos com a mesma orientação positiva) tal que a distância euclidiana entre o ponto inicial e o final seja máxima.*

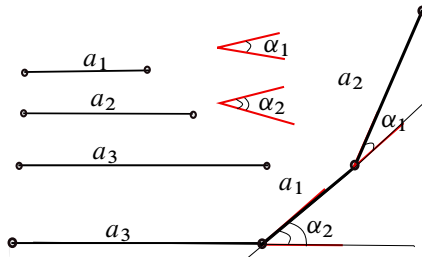


Figura 4.5: Ilustração de uma poligonal convexa com três lados e dois ângulos externos dados.

Observamos que podemos formar exatamente $n! \times (n-1)!$ arcos poligonais convexos distintos.

i) Analise o problema 4.2 e faça simulações numéricas.

ii) Na situação descrita acima denotamos por $\gamma_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ o arco poligonal aberto e por $\Gamma_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n, p_1\}$ o polígono convexo obtido conectando os vértices p_1 (inicial) e p_n (final). Dentre os $n! \times (n-1)!$ determine o polígono convexo Γ_n delimitando a região com área mínima (máxima).

iii) Formule e analise o problema análogo ao problema 4.2 para poligonais não convexas; neste caso os ângulos externos podem alternar para obter curvas não convexas. A Fig. 4.6 mostra uma poligonal não convexa $[a_0, a_1, a_2; \alpha_1(+), \alpha_2(-)]$ com ângulos externos orientados. Qual é a intuição para a solução do problema neste caso particular?

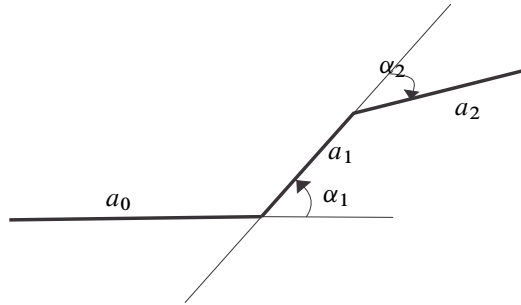


Figura 4.6: Ilustração de uma poligonal não convexa com três lados e dois ângulos externos orientados.

Exercício 4.12. i) Demonstre o teorema de Schur para curvas convexas esféricas e no plano hiperbólico.

ii) Demonstre o teorema de Schur para curvas convexas no plano de Minkowski. Veja [López \(2011\)](#).

Exercício 4.13. Investigue os vértices afins de curvas convexas fechadas definidas por um campo de vetores polinomial no plano. Veja Exercício 2.21. Veja [Shafer e Zegeling \(2002a\)](#).

Exercício 4.14. Considere a curva plana definida por $\gamma_a(t) = (\cos t(a + \cos 2t), \sin t(a + \cos 2t))$.

i) Mostre que γ_5 é uma curva convexa (não estrita).

ii) Calcule a curvatura afim de γ_a e esboce o seu gráfico para vários valores de a .

iii) Mostre que γ_a possui somente dois pontos sextáticos.

iv) Analise a família (γ_a) e determine os pontos de inflexões e os sextáticos. Veja [Thorbergsson e Umehara \(2002\)](#).

Exercício 4.15. Considere três retas $L_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0$ em posição geral no plano \mathbb{R}^2 .

i) Calcule os círculos tangentes às retas L_i .

ii) Analise a geometria das cúbicas definidas por $L = L_1 L_2 L_3 = cte$.

Exercício 4.16. Estude o artigo [Craizer, R. Teixeira e Balestro \(2018\)](#) e obtenha generalizações do teorema dos quatro e seis vértices no contexto da geometria de Minkowski no plano.

Exercício 4.17. Estude o artigo [Kamran, P. Olver e Tenenblat \(2009\)](#) e observe que no plano a curvatura simplética de uma curva coincide com a sua curvatura afim.

Exercício 4.18. Mostre que a curvatura afim da cônica definida por

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

é igual a $k_a = \frac{S}{T^{\frac{3}{2}}}$, onde $S = ac - b^2$ e

$$T = \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Exercício 4.19. (Projeto). Considere uma curva plana convexa γ . Dado $x \in \text{int}(\gamma)$ e uma direção $v \in \mathbb{S}^1$ considere a corda orientada pq passando por x e $p, q \in \gamma$ os dois pontos de interseção da reta $r(t) = x + tv$ com a curva γ . Defina a razão $\rho(x, v) = \frac{|p-x|}{|p-q|}$ e $\lambda(x) = \min\{\rho(x, v), v \in \mathbb{S}^1\}$.

Finalmente defina

$$\mu_1 = \max\{\lambda(x), x \in \text{int}(\gamma)\}.$$

- i) Mostre que $0 \leq \mu_1 < \infty$ é um invariante afim, i.e., invariante por transformações afins do plano.
- ii) Mostre que $\frac{1}{3} \leq \mu_1 \leq \frac{1}{2}$.
- iii) Mostre que $\mu_1 = \frac{1}{3}$ para todos os triângulos.
- iv) Mostre que se $\mu_1 = \frac{1}{2}$ então $\text{int}(\gamma)$ possui um centro $x_0 \in \text{int}(\gamma)$.
- v) Mostre que toda curva γ convexa, μ_1 é assumido em um único ponto $x_1 \in \text{int}(\gamma)$ e por três cordas distintas. Veja Fig. 4.7.
- vi) Estude o artigo [Neumann \(1939\)](#) e generalize a razão ρ considerando três ou mais cordas passando pelo ponto $x \in \text{int}(\gamma)$.
- vii) Analise o invariante afim obtido considerando razões entre áreas, veja [Neumann \(1945\)](#).

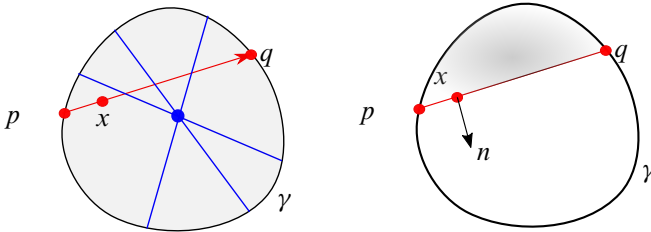


Figura 4.7: Cordas de um conjunto convexo no plano.

5

Curvas centroafim no plano

“In the broad light of day mathematicians check their equations and their proofs, leaving no stone unturned in their search for rigour. But, at night, under the full moon, they dream, they float among the stars and wonder at the mystery of the heavens: they are inspired. Without dreams there is no art, no mathematics, no life.”

– Michael Atiyah (1929-2019).

5.1 Introdução

Uma curva regular fechada $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\{\gamma(t) - p_0, \gamma'(t)\}$ seja linearmente independente para todo $t \in \mathbb{S}^1$ é chamada de *centroafim* com respeito ao ponto p_0 . A seguir, sem perda de generalidade, iremos considerar $p_0 = (0, 0)$. Também, salvo nos casos explicitamente considerados, todas as curvas regulares neste capítulo serão supostas de classe C^k , $k \geq 3$. Em geral, a geometria centroafim aborda propriedades geométricas que são invariantes pelo grupo afim $GL(2, \mathbb{R}) = \{A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \det A \neq 0\}$, isto é, A é linear e invertível. Também é usual considerar o subgrupo $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$, i.e., as transformações lineares que preservam área.

Dado um subgrupo $G \triangleleft GL(2, \mathbb{R})$ dizemos que duas curvas γ_1 e γ_2 são G -equivalentes ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) se existe $A \in G$ tal que $\gamma_2 = A\gamma_1$.

Na geometria afim das curvas devemos evitar os pontos de inflexões. Na geometria centroafim as inflexões correspondem a zeros da curvatura centroafim.

5.2 Curvatura centroafim

Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular fechada centroafim com relação a origem.

Nessas condições, definindo $s(t) = \int_{t_0}^t [\gamma(t), \gamma'(t)] dt$ a curva reparametrizada $\beta(s) = \gamma(t(s))$, onde $t(s)$ é a inversa de $s(t)$, está normalizada com $[\beta(s), \beta'(s)] = 1$. Nessa normalização escolhemos a orientação positiva. Veja Fig. 5.1.

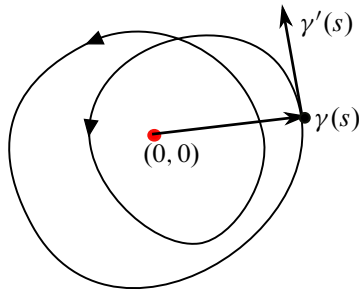


Figura 5.1: Curva centroafim em relação a origem, e positivamente orientada.

De fato, $\beta_s = \gamma' \frac{dt}{ds} = \frac{1}{[\gamma(t(s)), \gamma'(t(s))]} \gamma' t$.

$$\text{Logo, } [\beta(s), \beta'(s)] = [\gamma(t(s)), \frac{\gamma'(t(s))}{[\gamma(t(s)), \gamma'(t(s))]}] = 1.$$

Geometricamente, a normalização acima significa que a área do paralelograma gerado por $\{\beta(s), \beta'(s)\}$ é constante e igual a 1. O parâmetro s é chamado comprimento de arco centroafim.

Derivando a equação $[\beta(s), \beta'(s)] = 1$ com relação a s obtemos $[\beta(s), \beta''(s)] = 0$.

Portanto, $\gamma'' = -k_{ca}(s)\beta(s)$. A função k_{ca} é chamada de curvatura centroafim de β . Logo, $k_{ca}(s) = [\beta', \beta'']$.

Lema 5.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva centroafim com relação a origem. Então*

$$k_{ca}(t) = \frac{[\gamma', \gamma'']}{[\gamma, \gamma']^3}.$$

Demonstração. Defina $\beta(s) = \gamma(t(s))$. Temos que $\beta_s = \gamma_t \frac{dt}{ds}$ e

$$\begin{aligned}\beta_{ss} &= \gamma_{tt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \gamma_t \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{[\gamma(t(s)), \gamma'(t(s))]} \right) \\ &= \gamma_{tt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + (\star) \gamma_t.\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } k_{ca}(t) = [\beta_s, \beta_{ss}] = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 [\gamma_t, \gamma_{tt}] = \frac{[\gamma', \gamma'']}{[\gamma, \gamma']^3}.$$

□

Lema 5.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva centroafim com relação a origem e $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Então $A \circ \gamma$ é centroafim em relação a origem e $k_{ca}(\gamma) = k_{ca}(A \circ \gamma)$.*

Demonstração. Segue diretamente da linearidade de A e da propriedade de invariância de área por transformações lineares com determinante 1. □

Proposição 5.1. *Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva centroafim com relação a origem parametrizada por comprimento de arco centroafim s . Suponha que $k_{ca}(s) = k$. Temos as seguintes alternativas.*

- i) *Se $k = 0$, o traço de β está contido numa reta.*
- ii) *Se $k > 0$, o traço de β está contido numa elipse centrada na origem.*
- iii) *Se $k < 0$, o traço de β está contido numa hipérbole centrada na origem.*

Demonstração. Se $k = 0$ temos que $\beta''(s) = 0$ e portanto $\beta(s) = a_0s + b_0$.

Se $k > 0$ e $k_{ca}(s) = k^2$ temos que $\beta''(s) + k^2\beta(s) = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade de sistemas lineares temos que

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{k(a^2 + b^2)}} (a(\cos(ks), \sin(ks)) + b(-\sin(ks), \cos(ks)))$$

com $[\beta(s), \beta'(s)] = 1$. Portanto o traço de β está contida no círculo $x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$. Se $k < 0$ e $k_{ca}(s) = -k^2$ temos que $\beta''(s) - k^2\beta(s) = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade de sistemas lineares temos que

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{k(a^2 + b^2)}} \{a(\cosh(ks), \sinh(ks)) + b(-\sinh(ks), \cosh(ks))\}$$

com $[\beta(s), \beta'(s)] = 1$. Portanto o traço de β está contida na hipérbole

$$k(-a^2 + b^2)x^2 - 4abkxy + k(a^2 - b^2)y^2 + a^2 + b^2 = 0.$$

□

Definição 5.1. Dado uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ centroafim em relação a origem, um ponto $p_0 = \gamma(t_0)$ é chamado de vértice da curvatura centroafim de γ se for ponto de máximo ou mínimo local de k_{ca} .

Proposição 5.2. Uma curva fechada centroafim e simples $\beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possui pelo menos dois pontos tais que a sua curvatura centroafim seja extremal (vértices).

Demonstração. Segue diretamente do fato de que toda função contínua real definida num compacto possui pelo menos um ponto de máximo e um mínimo global. \square

Em geral, no contexto da geometria centroafim, uma curva fechada simples nem sempre possui 4 vértices centroafins. Uma elipse não centrada na origem possui somente dois vértices.

Exemplo 5.1. A elipse $x(t) = x_0 + a \cos t$, $y(t) = b \sin t$ possui somente dois vértices centroafim se $a > x_0 \neq 0$. De fato, a sua curvatura centroafim é dada por

$$k_{ca}(t) = \frac{a}{b^2 (a + \cos(t) x_0)^3}.$$

Os valores extremais de k_{ca} são $k_{ca}(0) = \frac{a}{b^2(a+x_0)^3}$ e $k_{ca}(\pi) = \frac{a}{b^2(a-x_0)^3}$.

Exemplo 5.2. Considere a curva $\gamma(t) = (\cos t + 4 \cos 2t, \sin t + 2 \sin 2t)$. A sua curvatura centroafim possui 6 pontos extremais.

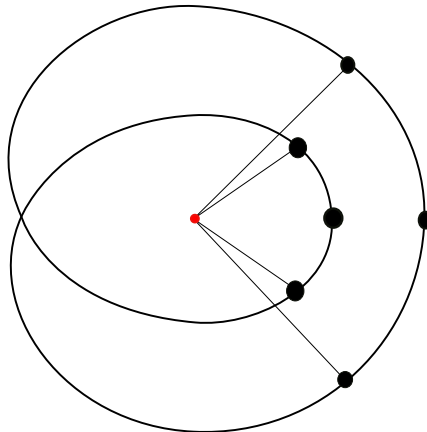


Figura 5.2: Curva γ centroafim em relação a origem com 6 vértices centroafins.

Cálculos longos, confirmados com computação simbólica, concluem que os pontos extremais da curvatura centroafim são os zeros da função
 $\sin t (16 \cos^5 t + 32 \cos^3 t + 229 \cos^2 t - 24 \cos t - 178)$.

Proposição 5.3. Considere a curva plana parametrizada por

$$\gamma(u) = (h(u) \cos u - h'(u) \sin u, h(u) \sin u + h'(u) \cos u)$$

e suponha γ centroafim em relação a origem, i.e., $h(u)(h''(u) + h(u)) \neq 0$. Então a curvatura centroafim de γ é:

$$k_{ca}(u) = \frac{1}{(h''(u) + h(u)) h(u)^3}.$$

Demonstração. Segue por cálculo direto. □

Proposição 5.4. Considere uma curva centroafim em relação a origem parametrizada por

$$\gamma(u) = (u, -1 + \frac{a_2}{2}u^2 + \frac{a_3}{6}u^3 + \frac{a_4}{24}u^4 + \frac{a_5}{5!}u^5 + O(6)).$$

Então a curvatura centroafim de γ é:

$$k_{ca}(u) = a_2 + a_3 u + \frac{1}{2} (a_4 - 3a_2^2) u^2 + \frac{1}{6} (a_5 - 15 a_2 a_3) u^3 + O(4).$$

Demonstração. Segue por cálculo direto. □

Proposição 5.5. Considere uma curva γ estritamente localmente convexa e centroafim em relação a origem. Suponha que $[\gamma', \gamma''] = 1$. Então temos:

$$k_e = \frac{1}{|\gamma'|^3}, \quad k_a = [\gamma'', \gamma'''], \quad k_{ca} = \frac{1}{[\gamma', \gamma']^3}.$$

Demonstração. Usando as definições das curvaturas euclidiana, afim e centroafim o resultado segue por cálculo direto. □

Proposição 5.6. Nas condições da Proposição 5.5 temos:

$$k_a(u) = \sqrt[3]{k_{ca}(u)} - \frac{4}{9} \frac{(k'_{ca}(u))^2}{(k_{ca}(u))^2} + \frac{1}{3} \frac{k''_{ca}(u)}{k_{ca}(u)}$$

Demonstração. Temos que $k_{ca}(u)^{-\frac{1}{3}} = [\gamma(u), \gamma'(u)]$. Derivando duas vezes e observando que $\gamma'''(u) + k_a(u)\gamma'(u) = 0$ segue o resultado. □

5.3 Contato de uma curva com cônicas ou retas

Nesta seção temos como objetivo explorar o conceito de curvatura centroafim em termos da teoria do contato.

Na proposição 5.1 caracterizamos as curvas que possuem curvatura centroafim constante.

Dado uma curva centroafim $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ podemos considerar o contato de γ com uma cônica centrada na origem $(0, 0)$ ou uma reta.

Em geral uma cônica centrada na origem tem equação implícita da forma $C(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0$, com $b^2 - ac \neq 0$. Lembramos que a curvatura centroafim de C é $k_{ca} = ac - b^2$.

Considere o sistema linear de equações nas variáveis a, b e c a seguir.

$$E(s) = C(\gamma(s)) = 0, \quad E'(s) = 0, \quad E''(s) = 0.$$

Resolvendo o sistema acima obtemos,

$$\begin{aligned} a &= \frac{y'(s)^3 x(s) + [\gamma'(s), \gamma''(s)] y(s)^2 - x'(s) y'(s)^2 y(s)}{[\gamma(s), \gamma'(s)]^3}, \\ b &= \frac{x'(s)^2 y'(s) y(s) - [\gamma'(s), \gamma''(s)] x(s) y(s) - x'(s) y'(s)^2 x(s)}{[\gamma(s), \gamma'(s)]^3}, \\ c &= \frac{x'(s)^2 y'(s) x(s) + [\gamma'(s), \gamma''(s)] x(s)^2 - y(s) x'(s)^3}{[\gamma(s), \gamma'(s)]^3}. \end{aligned}$$

Da solução acima temos,

$$ac - b^2 = \frac{[\gamma'(s), \gamma''(s)]}{[\gamma(s), \gamma'(s)]^3}.$$

Assim podemos definir a curvatura centroafim de γ como sendo a curvatura centroafim da cônica possuindo pelo menos contato de ordem cúbica com γ . Veja Fig. 5.3. Essa é a mesma conceituação das curvaturas euclidiana e afim. A diferença fundamental é que na geometria centroafim a curvatura não é invariante por translações no plano.

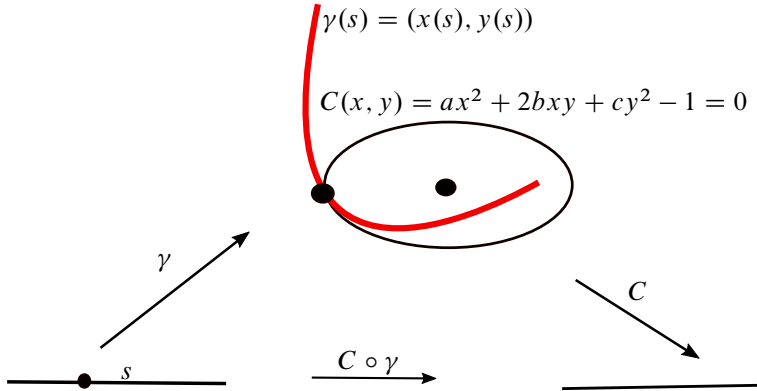


Figura 5.3: Contato cúbico de uma curva centroafim com uma cônica.

Uma análise similar permite-nos concluir que uma reta, não passando pela origem, possui contato cúbico com uma curva γ se, e somente se, a curvatura centroafim de γ é zero. Portanto num ponto de inflexão de γ .

5.4 Exercícios

Exercício 5.1. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t + 4 \cos 2t, \sin t + 2 \sin 2t)$ possui 8 vértices euclidianos.

Exercício 5.2. Construa exemplos de curvas centroafim em relação a origem tais que a sua curvatura centroafim seja igual a sua curvatura euclidiana.

Exercício 5.3. Calcule a curvatura centroafim da curva parametrizada em coordenadas polares $\gamma(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$.

Exercício 5.4. Considere uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , $k \geq 2$, tal que $[\gamma(s), \gamma'(s)] = 1$. Defina a curva $\Gamma(s) = \int_{s_0}^s \gamma(s) ds$.

- Mostre que $[\Gamma'(s), \Gamma''(s)] = 1$.
- Calcule as curvaturas afim e centroafim de Γ .

Exercício 5.5. Considere uma curva regular de classe C^k , $k \geq 4$, parametrizada por $\gamma(t) = (-h'(t) \sin t + h(t) \cos t, h'(t) \cos t + h(t) \sin t)$.

- Supondo γ centroafim em relação a origem encontre uma relação explícita entre as curvaturas euclidiana (k_e) e centroafim (k_{ca}) de γ . Mais precisamente, obtenha uma relação funcional entre k_e e k_{ca} da forma $R(k_e, k_{ca}, k'_e, k''_e, k'_{ca}, k''_{ca}) = 0$.
- Seja h uma solução T -periódica da equação diferencial $h'' + \sin h = 0$. Analise os vértices euclidiano e centroafim da curva γ .

iii) No item ii) para quais valores de $T \in (2\pi, \infty)$ a curva γ é fechada?

Exercício 5.6. Considere a equação diferencial do pêndulo $h'' + \text{sen } h = 0$ e a curva definida por $\gamma(t) = (h(t), h'(t))$, sendo h solução da equação diferencial.

i) Faça uma análise qualitativa dos traços da curva γ em função das condições iniciais $h(0) = h_0$, $h'(0) = h_1$.

ii) Calcule a curvatura centroafim de γ supondo que γ seja centroafim em relação a um ponto $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Faça uma análise qualitativa e analise os vértices centroafim e euclidiano de γ .

Exercício 5.7. Considere uma curva suave $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada por comprimento de arco euclidiano s , centroafim em relação a origem. Suponha $\{T(s), N(s)\}$ o referencial móvel de Frenet de γ .

i) Seja $\beta(s) = \gamma(s) + \varepsilon N(s)$. Calcule a curvatura centroafim k_{ca} de β e analise a sua dependência com relação ao parâmetro ε .

ii) Mostre que a curva centroafim k_{ca} num ponto $\beta(s_0)$ é zero se, e somente se, $\gamma(s_0)$ é um ponto de inflexão de γ .

iii) Mostre que se γ é estritamente localmente convexa então γ' e β' são centroafim em relação a origem.

Exercício 5.8. i) Mostre que a curvatura centroafim da cônica definida implicitamente por

$$C(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx - 1 = 0,$$

é igual a

$$\frac{2(cd^2 + 4ac - 4b^2)}{(2 - dx)^3}.$$

ii) Calcule os vértices de $C(x, y) = 0$. Analise a elipse e a hipérbole separadamente.

Exercício 5.9. Considere uma curva regular $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ centroafim em relação a origem. Calcule a curval dual γ^* definida implicitamente pelo sistema

$$\langle \gamma^*, \gamma \rangle = 1, \quad \langle \gamma^*, \gamma' \rangle = 0.$$

Acima estamos identificando o covetor γ^* com o vetor $\bar{\gamma}$ definido por $\gamma^*(v) = \langle \bar{\gamma}, v \rangle$.

i) Calcule γ^* e as suas curvaturas (centroafim, afim e euclidiana).

ii) Mostre que se γ for convexa com a origem pertencendo ao interior da região delimitada por γ então γ^* é convexa.

Exercício 5.10. Estude o artigo [Petty e Barry \(1962\)](#) e relacione a teoria de sistemas de equações diferenciais lineares de segunda ordem com a teoria de curvas centroafim em relação a origem no plano.

Exercício 5.11. Considere 5 pontos p_i , ($i = 1, \dots, 4$) em posição geral no plano \mathbb{R}^2 . Defina

$$[ijk] = (p_i - p_j) \wedge (p_i - p_k) = [p_i, p_j, p_k]$$

o dobro da área orientada do triângulo com vértices p_i, p_j e p_k .

Mostre que a equação implícita da cônica passando pelos 5 pontos é

$$[013][024][p12][p34] = [012][034][p13][p24],$$

onde $p = (x, y)$ é um ponto de \mathbb{R}^2 que pertence a cônica. Veja [Calabi, P. J. Olver e Tannenbaum \(1996\)](#) e [Salmon \(1879\)](#).

Exercício 5.12. (Projeto) Estude os artigos [Pinkall \(1995\)](#), [Terng e Wu \(2013\)](#) e [Tabachnikov \(2019\)](#). O estudo da equação de Korteweg-de Vries (KdV) é relacionado com curvas centroafim.

Exercício 5.13. (Projeto) Estude os artigos [Cairns e Sharpe \(1990\)](#), [Maeda \(1942b\)](#) e [Patterson \(1928\)](#). O objetivo é analisar os conceitos de comprimento e curvatura conforme de curvas planas. Nessa geometria o grupo considerado é o grupo gerado pelas transformações de Moebius do plano e a conjugação complexa. Se a curva for parametrizada por comprimento de arco euclidiano s e curvatura euclidiana $k(s)$ o comprimento conforme é dado por $ds_c = \sqrt{|k'(s)|} ds$ e a curvatura conforme é dada por

$$k_c = \frac{4(k''' - k^2 k')k' - 5k''^2}{8k'^3}.$$

Exercício 5.14. (Projeto) Estude os artigos [Barrett e Bolt \(2010\)](#) e [Maeda \(1942a\)](#). O objetivo é analisar as propriedades geométricas das curvas planas no contexto da geometria de Laguerre.

Exercício 5.15. (Projeto) Estude o artigo [Salvai \(2017\)](#). O objetivo é analisar a geometria das curvas convexas com relação a origem e do espaço de elipses centradas na origem.

Exercício 5.16. (Projeto). Estude o artigo [Weifeng Wo \(2018\)](#). O objetivo é analisar o fluxo geométrico centroafim de curvas convexas contendo a origem.

Exercício 5.17. (Projeto). Seja

$$F(x, y) = \left(\frac{x(a_1 x^2 + b_1 y^2)}{Ax^2 + By^2}, \frac{y(a_2 x^2 + b_2 y^2)}{Ax^2 + By^2} \right), \quad A > 0, \quad B > 0.$$

i) Seja $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ uma elipse com $a > b > 0$. Descreva as propriedades qualitativas (geométricas e topológicas) da curva $\Gamma(t) = F(\gamma(t))$. Faça vários exemplos.

ii) Calcule as curvaturas euclidiana, afim e centroafim de Γ . Faça vários exemplos numéricos.

iii) Encontre parâmetros $(a_1, b_1, a_2, b_2, A, B, a, b)$ tais que a curva Γ possua oito pontos de cruzamento normal.

iv) Encontre parâmetros $(a_1, b_1, a_2, b_2, A, B, a, b)$ tais que o traço de Γ seja uma elipse (não um círculo). Veja [R. Garcia \(2019\)](#).

v) Determine e dê exemplos de conjuntos abertos no espaço de parâmetros $(a_1, b_1, a_2, b_2, A, B, a, b)$ tais que a curva Γ seja localmente convexa.

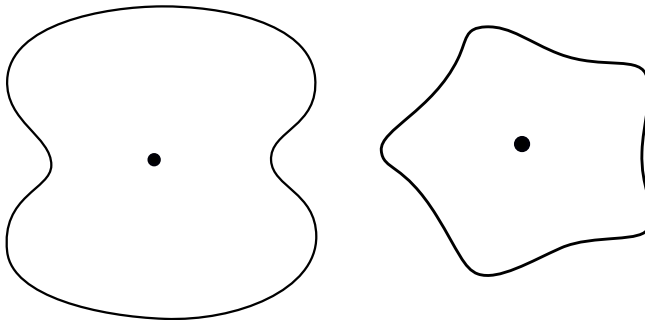
vi) Analise as propriedades geométricas e topológicas da função F . Por exemplo, calcule o conjunto $F^{-1}(x_0, y_0)$ e determine a sua cardinalidade.

Exercício 5.18. Calcule a curvatura centroafim da curva $\gamma(s) = (s, e^{as})$ e faça uma análise do seu gráfico.

Exercício 5.19. Considere a família de curvas definida por

$$\gamma(t) = \left((R+r) \cos t - d \cos\left(\frac{(R+r)t}{r}\right), (R+r) \sin t - d \sin\left(\frac{(R+r)t}{r}\right) \right).$$

i) Faça vários exemplos ilustrando o traço de $\gamma = \gamma_{r,R,d}$. Interprete geometricamente a curva γ . Por exemplo, para $R = 2, r = 1$ e $d = 1$ (esquerda) e $R = 5, r = -1$ e $d = \frac{1}{2}$ (direita), temos:



ii) Calcule a curvatura centroafim em relação a origem de γ e analise os seus vértices.

6

Curvas planas projetivas

“There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world.”

“In geometry I find certain imperfections which I hold to be the reason why this science, apart from transition into analytics, can as yet make no advance from that state in which it came to us from Euclid.”

– Nikolai I. Lobachevsky (1792–1856)

6.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma breve introdução à teoria da geometria diferencial das curvas planas projetivas.

A geometria projetiva tem longa tradição e suas raízes históricas mais estabelecidas datam do século XVII e trata da questão fundamental da representação plana de figuras tri-dimensionais. Suas origens estão portanto, na pintura e na arquitetura renascentista. Basicamente podemos dizer que a geometria projetiva é o estudo de propriedades de figuras que ficam inalteradas (invariantes) por projeções. Nas artes, arquitetura, fotografia, geometria descritiva, geometria computacional temos a necessidade de representar e reconhecer objetos tridimensionais a partir de figuras planas. Portanto, projeção, sombreamento, contorno aparente, profundidade e perspectiva são conceitos fundamentais. Na geometria projetiva, projeções serão sempre lineares. Convidamos ao leitor refletir sobre

a noção de projeção esférica, ou mais geralmente numa superfície regular. Por exemplo, qual é a projeção central em relação a origem de uma elipse situada no plano $z = 1$ na esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$? E em relação ao polo sul $S = (0, 0, -1)$?

Matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento da geometria projetiva e que destacaram-se no século XVII foram Girard Desargues (1591–1661) e Blaise Pascal (1623–1662).

No século XVIII temos Gaspard Monge (1746–1818), criador da geometria descritiva, e Jean-Victor Poncelet (1788–1867) [Poncelet \(1995a\)](#), [Poncelet \(1995b\)](#), considerado um dos fundadores da geometria projetiva.

No século XIX destacamos (Plucker, Steiner, Mobius, Gauss, Lobachevskii, Hilbert, Cremona, Poincaré, Clebsch, Riemann, Chasles, Max Noether, Klein, Enriques, Segre, Severi, Schubert) dentre outros. Veja [Hefez \(1986\)](#) para uma introdução histórica à geometria projetiva.

Os entes básicos que mantêm-se invariantes por projeções são pontos e retas. Comprimento, área e ângulo não são preservados em geral por projeções. Por outro lado, a incidência e certas proporções, como a razão cruzada, são preservadas. Um invariante importante que é preservado por projeções é a colinearidade. Na Fig. 6.1 ilustramos o Teorema de Pappus (séc III a.C.).

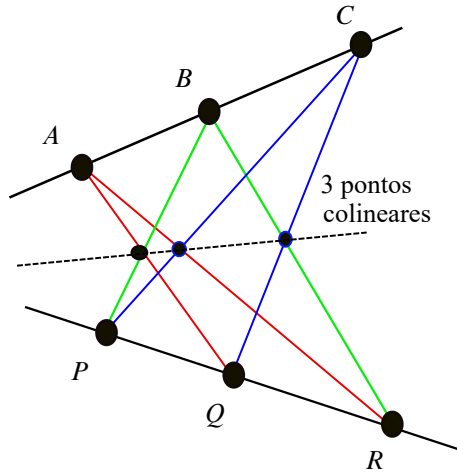


Figura 6.1: Teorema de Pappus: colinearidade preservada por projeções e perspectivas.

Na Fig. 6.2 ilustramos o teorema de Desargues.

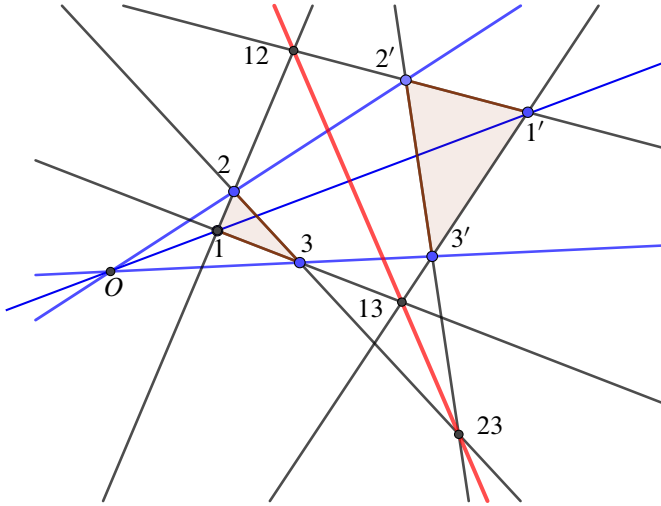


Figura 6.2: Teorema de Desargues: projeção central e colinearidade de três pontos.

O conceito básico da geometria projetiva que é preservado por projeções é o da razão cruzada de quatro pontos alinhados. Veja Fig. 6.4.

Definimos a razão cruzada por

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{BC} \times \frac{BD}{AD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}. \quad (6.1)$$

Observação 6.1. Existem 6 possibilidades para definir a razão cruzada, mas conceitualmente é o mesmo invariante. Na literatura, as duas mais frequentes são

$$\begin{aligned} [q_1, q_2, q_3, q_4] &= \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_4 - y_3)(y_2 - y_1)} = \lambda \\ [[q_1, q_2, q_3, q_4]] &= \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_3 - y_2)(y_4 - y_1)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Os seis possíveis valores são λ , $1 - \lambda$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ e $\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Observação 6.2. A razão cruzada entre quatro números complexos z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) distintos, veja Fig. 6.3, é definida por

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}.$$

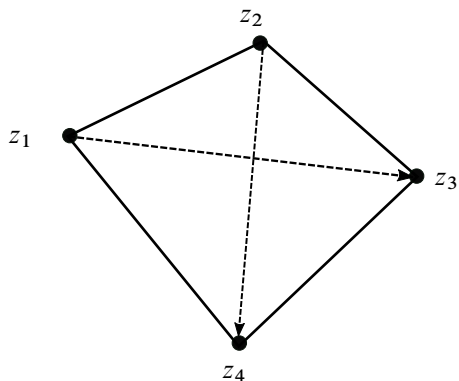


Figura 6.3: Razão cruzada entre 4 números complexos distintos.

Se $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$, é uma função de Möbius então

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)].$$

Além disso, $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ se, e somente se, os pontos são colineares ou estão contidos num mesmo círculo.

O resultado importante (ver Fig. 6.4) é de que a razão cruzada é invariante por projeções.

$$[A, B, C, D] = [A_1, B_1, C_1, D_1].$$

Assim podemos também definir a razão cruzada de quatro retas intersectando num ponto.

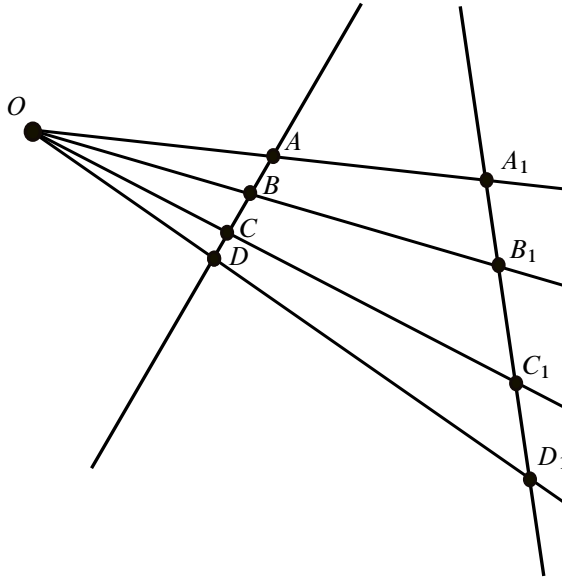


Figura 6.4: A razão cruzada é preservada por projeções.

Na conceituação acima, com quatro pontos distintos, consideramos o segmento $[A, B]$ e definimos os quocientes $r_C = \frac{AC}{CB} = \frac{C-A}{B-C}$ e $r_D = \frac{AD}{DB} = \frac{D-A}{B-D}$. O quociente r_C mede a posição relativa do ponto C em relação ao segmento $[A, B] = \{(1-t)A + tB, t \in [0, 1]\}$. Temos que $r_C > 0$ se, e somente se, $C \in [A, B]$.

Portanto temos que

$$[A, B, C, D] = \frac{r_C}{r_D} = \frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB}.$$

Temos que $[A, B, C, D] < 0$ se, e somente se, $C \in [A, B]$ e $D \notin [A, B]$ ou $C \notin [A, B]$ e $D \in [A, B]$.

Quando $[A, B, C, D] = -1$ dizemos que os pontos C e D são harmonicamente conjugados em relação a A e B .

A razão cruzada foi bastante explorada por Chasles [Chasles \(1880, Chapitres II, III, IV\)](#) e foi usada por Möbius para introduzir coordenadas homogêneas projetivas, [Chasles \(1989, Note IX\)](#), [Gray \(2011, Chapter 13\)](#) e [Chemla \(2016\)](#).

Na Fig. 6.5 ilustramos os teoremas de Pascal.

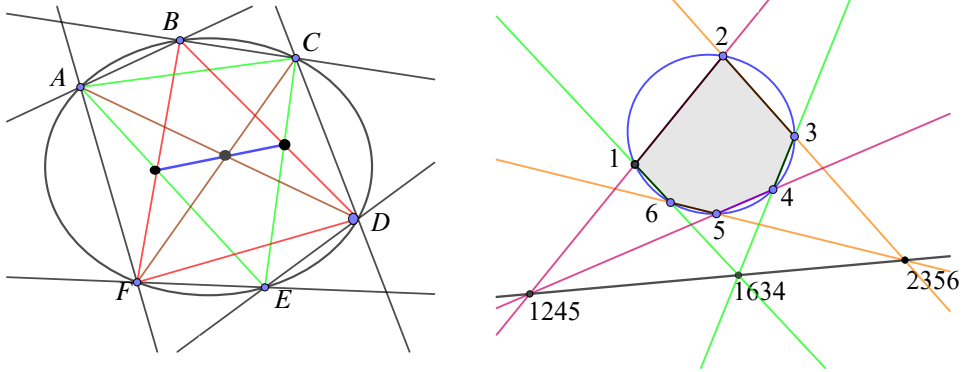


Figura 6.5: Hexágono inscrito numa elipse (teoremas de Pascal).

Outros ingredientes importantes da geometria projetiva clássica são as seções cônicas (elipses, hipérbolas, parábolas). A unificação da geometria projetiva e geometria analítica é realizada usando o princípio de dualidade e o uso de coordenadas homogêneas.

Um resultado baseado no princípio de dualidade é o Teorema de Brianchon ilustrado na Fig. 6.6.

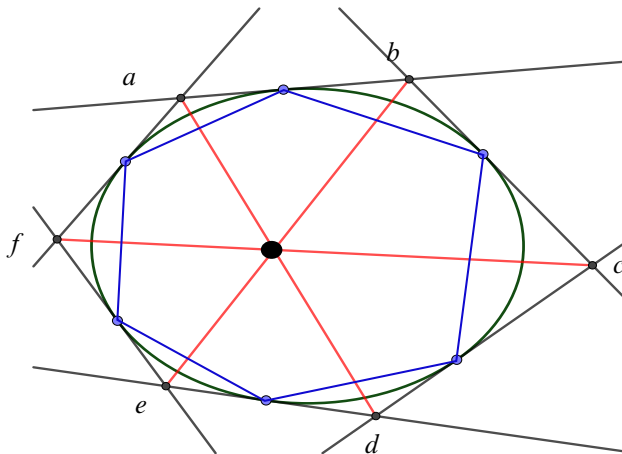


Figura 6.6: Hexágonos inscrito e circunscrito numa elipse e interseção de diagonais (teorema de Brianchon).

Para ilustrar mencionamos que Isaac Newton (1643 – 1727) demonstrou que toda curva cúbica (definida implicitamente por um polinômio de grau 3) no plano pode ser obtida como imagem de uma transformação projetiva de apenas cinco tipos especiais de cúbicas. Veja [Bix \(2006, Chapter III\)](#).

Ilustramos na Fig. 6.7 o Teorema de Poncelet. Veja [Poncelet \(1995a\)](#), [Halbeisen e Hungerbühler \(2015\)](#).

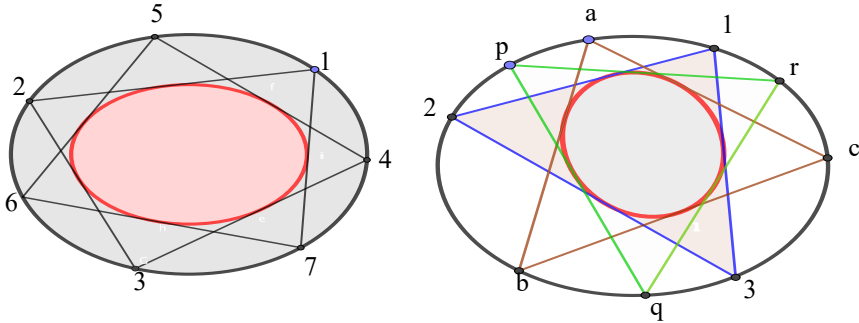


Figura 6.7: Teorema de Poncelet (órbitas de período sete e três).

Os primeiros trabalhos sobre a geometria diferencial das curvas planas projetivas são devidos a [Halphen \(1880\)](#) e [Wilczynski \(1906\)](#). Vale destacar que todas as cônicas são equivalentes, portanto, a obtenção de invariantes via contato entre curvas exigirá curvas de grau maior. Como consequência, teremos que as curvas aqui tratadas têm classe de diferenciabilidade mais alta. Para maiores detalhes veja [Cartan \(1937\)](#), [Lane \(1942\)](#), [Su \(1958\)](#) e [V. Ovsienko e Tabachnikov \(2005\)](#). Para um pouco de história veja [Stillwell \(2010, chapter 8\)](#), [Gray \(2011\)](#).

6.2 Plano projetivo

A ideia da conceituação do plano projetivo $P_2\mathbb{R}$ está relacionada a de projeção central em \mathbb{R}^3 e a de projeções de figuras planas entre planos diferentes. Como comprimentos e ângulos não são preservados por projeções, estes conceitos não desempenham nenhum papel relevante na geometria projetiva. Pontos e retas são conceitos fundamentais nessa geometria. Um dos primeiros invariantes da projetivos que se estuda é a “razão cruzada” e mais adiante, veremos como interpretar invariantes diferenciais locais em termos da razão cruzada. Para fundamentos da geometria projetiva veja [Klein \(2016\)](#), [Coxeter \(1974\)](#), [Samuel \(1988\)](#).

O plano projetivo $P_2\mathbb{R}$ é o conjunto das classes de equivalências definidas por

$$(x, y, z) \equiv \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

A classe de equivalência de $p = (x, y, z) \neq 0$ será denotada por $[p] = [x : y : z]$.

O plano projetivo pode ser definido também como conjunto das retas no espaço que passam pela origem. Essa noção, leva à caracterização do espaço projetivo como uma variedade homogênea (quociente de um grupo de Lie por um subgrupo). Nessas notas o objetivo é apenas o de ilustrar como um conceito de curvatura aparece no contexto da geometria projetiva.

Quando $z \neq 0$, a aplicação $(x, y) \rightarrow [x : y : 1]$ é injetiva e podemos considerar \mathbb{R}^2 como um subconjunto de $P_2\mathbb{R}$. Analogamente podemos considerar os casos $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Esses subconjuntos definem abertos no espaço projetivo onde podemos definir uma atlas.

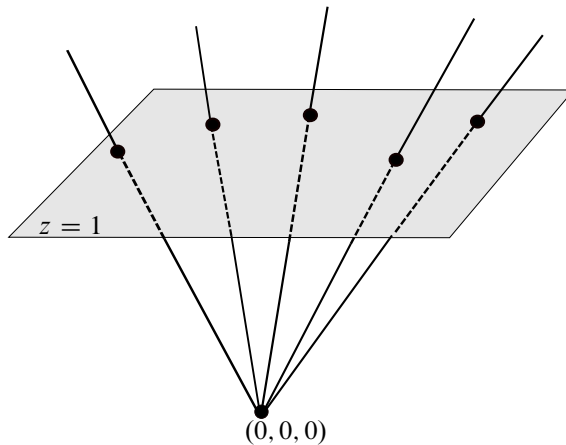


Figura 6.8: Plano projetivo numa carta afim $z = 1$.

Um isomorfismo $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva as classes de equivalências e portanto induz uma aplicação $\tilde{B}: P_2\mathbb{R} \rightarrow P_2\mathbb{R}$. Estas aplicações definem o *grupo projetivo* de $P_2\mathbb{R}$.

Uma curva paramétrica projetiva é uma aplicação $\gamma: I \rightarrow P_2\mathbb{R}$.

Como nos casos, euclidiano, afim e centroafim vamos definir os conceitos de elemento de arco e de curvatura projetiva que sejam invariantes pelo grupo projetivo.

6.3 Forma normal de uma curva projetiva

Antes de definir o elemento de arco projetivo que seja invariante por transformações projetivas examinemos o seguinte exemplo:

Considere uma curva projetiva $\gamma: I \rightarrow P_2\mathbb{R}$ a qual suporemos de classe C^∞ . Na maioria dos casos podemos considerar curvas de classe C^r , $r \geq 7$. Suponha $\gamma(0) = [0 : 0 : 1]$ e $\gamma'(0) = (1, 0, 0)$.

Portanto, na vizinhança de 0 podemos expressar γ na forma de gráfico

$$(x, h(x), 1), \quad h(x) = \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + \frac{a_5}{5!}x^5 + \frac{a_6}{6!}x^6 + O(7).$$

Suponha que $a_2 \neq 0$. Considere a mudança de coordenadas projetivas da forma

$$x = \frac{u}{1 + b_1u + b_2v}, \quad y = \frac{v}{1 + b_1u + b_2v}.$$

Cálculos elementares, mas longos, com

$$b_1 = \frac{a_3}{3a_2}, \quad b_2 = \frac{1}{18} \frac{3a_2a_4 - 4a_3^2}{a_2^2}$$

nos permitem expressar a curva na forma

$$v = \frac{a_2}{2}u^2 - \frac{1}{9} \frac{(9a_5a_2^2 - 45a_4a_3a_2 + 40a_3^3)}{a_2^2}u^5 + O(6). \quad (6.2)$$

Por uma mudança de escala (dilatação ou contração) podemos supor $a_2 = 1$.

Assim, com essa normalização, obtemos a seguinte representação local:

$$v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{9} (9a_5 - 45a_4a_3 + 40a_3^3)u^5 + O(6).$$

No caso de uma curva parametrizada localmente por

$$y = a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + \frac{a_5}{5!}x^5 + \frac{a_6}{6!}x^6 + O(7)$$

fazemos a mudança de coordenadas $y = a_2y_1 + a_1x$ obtendo

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\bar{a}_3}{6}x^3 + \frac{\bar{a}_4}{4!}x^4 + \frac{\bar{a}_5}{25!}x^5 + \frac{\bar{a}_6}{6!}x^6 + O(7),$$

onde $\bar{a}_i = \frac{a_i}{a_2}$.

Proposição 6.1. *A quantidade*

$$\omega = \frac{1}{1080 a_2^2} (9a_5a_2^2 - 45a_3a_4a_2 + 40a_3^3) \quad (6.3)$$

é um invariante projetivo da curva γ .

Demonstração. Será apresentada na próxima seção e ω será identificado como o elemento de arco projetivo, avaliado na origem. \square

6.4 Elemento de arco e curvatura projetiva de curvas planas

Esta seção é baseada em [Cartan \(1937\)](#) e [V. Ovsienko e Tabachnikov \(2005\)](#). O objetivo principal será o de definir o conceito de curvatura projetiva de uma curva plana. Em geral, para formalizar os conceitos cálculos longos são inevitáveis, mas esperamos que o leitor(a) possa apreciar a importância dessa sistematização.

A toda curva projetiva $A(t) = [x(t) : y(t) : z(t)]$, tal que a curva espacial $(x(t), y(t), z(t))$ tenha curvatura não nula temos associada uma equação diferencial linear de terceira ordem

$$\begin{aligned} L(A) &= A''' + p(t)A'' + q(t)A' + r(t)A = 0 \\ p(t) &= -\frac{[A, A', A''']}{[A, A', A'']}, \quad q(t) = \frac{[A, A'', A''']}{[A, A', A'']}, \\ r(t) &= -\frac{[A', A'', A''']}{[A, A', A'']}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

A equação segue diretamente, observando que o conjunto de vetores $\{A, A', A'', A'''\}$ é um conjunto linearmente dependente. A equação acima, escrita na forma determinantal,

$$\begin{vmatrix} \theta & \theta' & \theta'' & \theta''' \\ x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = 0$$

mostra que cada coordenada de $A(t)$, acima representada pela função θ , satisfaz uma equação diferencial linear de terceira ordem.

Defina a função

$$H = r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{2}q' + \frac{1}{3}pp' + \frac{1}{6}p''.$$

Considere uma curva projetiva $\gamma(u)$ e consideramos as mudanças de coordenadas $\bar{u} = f(u)$ e de classe de equivalência $\gamma_1(u) = \lambda(u)\gamma(f(u))$, com $\lambda(u) \neq 0$. Vamos demonstrar que

$$H_{\gamma_1}(\bar{u})d\bar{u}^3 = H_\gamma(u)du^3.$$

Definição 6.1. A forma $d\sigma = \sqrt[3]{H(u)} du$ é denominada elemento de arco projetivo da curva $\gamma(u)$.

Para conveniência do leitor que queira consultar [Cartan \(1937\)](#) consideramos a notação a seguir.

Fazendo as mudanças de variáveis $\bar{A} = \lambda A$ e $\bar{t} = f(t)$ e aplicando a regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{A}}{d\bar{t}} &= \frac{\lambda'}{f'}A + \frac{\lambda}{f'}A' \\ \frac{d^2\bar{A}}{d\bar{t}^2} &= \left(\frac{\lambda''f' - \lambda'f''}{f'^3}\right)A + \left(\frac{2\lambda'f' - \lambda f''}{f'^3}\right)A' + \frac{\lambda}{f'^2}A'' \\ \frac{d^3\bar{A}}{d\bar{t}^3} &= \left(\frac{\lambda'''f'^2 - 3\lambda''f'f'' + 3\lambda'f''^2 - \lambda'f'f'''}{f'^5}\right)A \\ &\quad + \left(\frac{3\lambda''f'^2 - 6\lambda'f'f'' + 3\lambda f''^2 - \lambda f'f'''}{f'^5}\right)A' \\ &\quad + \left(\frac{3\lambda'f'^2 - 3\lambda f'f''}{f'^5}\right)A'' + \frac{\lambda}{f'^3}A'''.\end{aligned}$$

Para reduzir a equação (6.4) a uma forma mais simples

$$\frac{d^3\bar{A}}{d\bar{t}^3} + \bar{r}\bar{A} = 0,$$

devemos resolver o sistema de equações diferenciais abaixo obtido usando as equações acima e a equação (6.4).

$$\begin{aligned}3\frac{\lambda'}{\lambda} - 3\frac{f''}{f'} &= p \\ 3\frac{\lambda''}{\lambda} - 6\frac{\lambda'f''}{\lambda f'} - \frac{f'''}{f'} + 3\frac{f''^2}{f'^2} &= q \\ \frac{\lambda'''}{\lambda} - 3\frac{\lambda''f''}{\lambda f'} - \frac{\lambda'f'''}{\lambda f'} + 3\frac{\lambda'f''^2}{\lambda f'^2} + \bar{r}f'^3 &= r\end{aligned}\tag{6.5}$$

Eliminando a função λ nas duas primeiras equações do sistema (6.5) obtemos:

$$S(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{f''^2}{f'^2} \right) = \frac{q}{4} - \frac{p'}{4} - \frac{p^2}{12},\tag{6.6}$$

onde $S(f)$ é a derivada de Schwarz e será também denotada por $\{\bar{t}, t\} = \{\bar{t}\}_t = \{f\}_t$.

Observação 6.3. Em geral, na literatura, a derivada de Schwarz é definida sem o fator de proporcionalidade $\frac{1}{2}$ na equação (6.6). Usaremos esta definição para manter a terminologia de [Cartan \(1937\)](#).

Resolvendo a equação diferencial (6.6) determinamos $\bar{t} = f(t)$ e a seguir obtemos $\lambda(t)$ resolvendo uma equação diferencial linear não homogênea. Finalmente obtemos \bar{r} a partir da terceira equação do sistema (6.5).

De fato, do sistema (6.5) e da equação (6.6), obtemos:

$$\bar{r} f'^3 = r - \frac{1}{3}pq + \frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{2}q' + \frac{1}{3}pp' + \frac{1}{6}p'' = H(t). \quad (6.7)$$

Portanto obtemos,

$$\bar{r} d\bar{t}^3 = H(t)dt^3 = d\sigma^3. \quad (6.8)$$

O elemento de arco projetivo $d\sigma$ é um invariante projetivo que depende do quinto jato da curva. Usando a forma normal (6.2) obtemos que $H(0) = \omega$, onde ω é dado pela equação (6.3).

Proposição 6.2. *Uma curva plana projetiva é uma cônica se, e somente se, $\bar{r} = H = 0$.*

Demonstração. Se $\bar{r} = H = 0$ temos pela equação (6.8) que $\frac{d^3\bar{A}}{dt^3} = 0$. Logo,

$$\bar{A}(t) = A_0 + A_1t + \frac{1}{2}A_2t^2,$$

onde A_i são vetores fixos. Portanto, a curva parametrizada é uma cônica.

Reciprocamente, uma cônica definida por um polinômio homogêneo de grau 2, $h_2(x, y, z) = 0$, possui uma parametrização da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 \\ y(t) &= b_0 + b_1t + b_2t^2 \\ z(t) &= c_0 + c_1t + c_2t^2. \end{aligned}$$

Se a equação da parametrização é $(t + 1, t^2 + 1, 1)$ a equação da cônica será $h_2(x, y, z) = x^2 - 2xz - yz + 2z^2 = 0$. \square

Observação 6.4. Para uma cônica e/ou reta projetiva o elemento de arco projetivo $d\sigma$ é nulo.

Consideramos a seguir uma curva projetiva $A(t)$ e o elemento de arco projetivo σ . Multiplicando A por um fator $\lambda(t)$ conveniente, obtemos uma equação diferencial linear de terceira ordem, onde o coeficiente de $\frac{d^2A}{d\sigma^2}$ é nulo.

Assim obtemos,

$$\frac{d^3A}{d\sigma^3} + 2q_1(\sigma)\frac{dA}{d\sigma} + r_1(\sigma)A = 0. \quad (6.9)$$

Os coeficientes q_1 e r_1 são invariantes projetivos, mas não são independentes.

Fixando uma origem, qualquer que seja o elemento de arco projetivo t satisfaz a equação $d\sigma^3 = dt^3$ e portanto $H = 1$. Logo pela equação (6.8) temos a relação $r_1 = q_1' + 1$.

Proposição 6.3. *Uma curva projetiva $A(\sigma)$ parametrizada pelo elemento de arco projetivo σ satisfaz uma equação diferencial linear de terceira ordem*

$$\frac{d^3 A}{d\sigma^3} + 2k(\sigma) \frac{dA}{d\sigma} + (1 + k'(\sigma))A = 0. \quad (6.10)$$

Demonstração. Segue diretamente da discussão acima. \square

Proposição 6.4. *Nas condições acima, em coordenadas homogêneas, temos que*

$$\begin{aligned} k(\sigma) &= \frac{1}{2} \frac{[A''', A'', A]}{[A'', A', A]} \\ k'(\sigma) &= - \frac{[A''', A'', A']}{[A'', A', A] - 1} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Demonstração. Segue diretamente da equação (6.10) fazendo os produtos mistos indicados. \square

Definição 6.2. *A função $k(\sigma)$ definida pela equação (6.10) será chamada de curvatura projetiva.*

Fazendo $t = \sigma$, $p = 0$, $q = 2k(\sigma)$, $r = k'(\sigma) + 1$ e usando a equação (6.6) obtemos,

$$\{\bar{t}\}_\sigma = \{\bar{t}, \sigma\} = \frac{1}{2}k.$$

Proposição 6.5. *Dado duas funções $x(t)$ e $y(t)$ de uma variável t , temos*

$$\{y\}_x dx^2 = [\{y\}_t - \{x\}_t] dt^2.$$

Demonstração. Aplicando a regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned} y_x &= \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \\ y_{xx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3}, \\ y_{xxx} &= \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3x''^2 y' - 3x' x'' y'' - x' x''' y' + x'^2 y'''}{x'^5} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xxx}}{y_x} - \frac{3 y_{xx}^2}{y_x^2} \right) x'^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{y'''}{y'} - \frac{3 y''^2}{y'^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x'''}{x'} - \frac{3 x''^2}{x'^2} \right) \\ \{y\}_x (x')^2 &= \{y\}_t - \{x\}_t. \end{aligned}$$

\square

Aplicando a proposição 6.5 para $y = \bar{t}(t)$ e $x = \sigma(t)$ obtemos

$$\{\bar{t}\}_\sigma d\sigma^2 = [\{\bar{t}\}_t - \{\sigma\}_t] dt^2$$

Logo,

$$k = 2\{\bar{t}\}_\sigma = 2 \frac{\{\bar{t}\}_t - \{\sigma\}_t}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2}.$$

Na equação acima conhecemos $\{\bar{t}\}_t$ e $\frac{d\sigma}{dt}$. Falta determinar $\{\sigma\}_t$.

Temos que $\frac{d\sigma}{dt} = H^{\frac{1}{3}}$. Derivando obtemos,

$$\frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{1}{3} \frac{H'}{H}.$$

Derivando outra vez temos que,

$$\frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{\sigma''^2}{\sigma'^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2} \right).$$

Portanto,

$$\{\sigma\}_t = \frac{1}{2} \frac{\sigma'''}{\sigma'} - \frac{3}{4} \frac{\sigma''^2}{\sigma'^2} = \frac{1}{6} \frac{H''}{H} - \frac{7}{36} \frac{H'^2}{H^2}.$$

Podemos então concluir que a curvatura projetiva é:

$$k_p = H^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{2} q - \frac{1}{2} p' - \frac{1}{6} p^2 - \frac{1}{3} \frac{H''}{H} + \frac{7}{18} \frac{H'^2}{H^2} \right]. \quad (6.12)$$

Da expressão acima observamos que a curvatura projetiva k_p é um invariante que depende do sétimo jato da curva.

Exemplo 6.1. Para um gráfico $\gamma(t) = (t, h(t), 1)$ numa carta afim $(x, y, 1)$ temos a equação diferencial linear de terceira ordem

$$\gamma''' - \frac{h'''}{h''} \gamma'' = 0.$$

Portanto, $p(t) = -\frac{h'''}{h''}$, $q(t) = 0$ e $r(t) = 0$. Definindo $p(t) = \frac{3}{2} \frac{\xi'}{\xi}$, obtemos $H = \frac{1}{4} \frac{\xi'''}{\xi}$.

A curvatura projetiva é dada por

$$k_p = \frac{\sqrt[3]{2}}{36} \frac{\left(28 \xi''''^2 \xi^2 - 8 \xi'''' \xi''' \xi' \xi + 7 \xi'^2 \xi''^2 - 30 \xi \xi'' \xi''^2 \right)}{\xi^{\frac{4}{3}} \xi''^{\frac{8}{3}}}.$$

Exemplo 6.2. Considere a curva convexa definida na carta afim por

$$\gamma(t) = (h(t) \cos t - h'(t) \operatorname{sen} t, h(t) \operatorname{sen} t + h'(t) \cos t, 1).$$

Definindo $h'' + h = e^\delta$ obtemos a equação diferencial linear

$$\gamma''' - 2\delta(t)\gamma'' + (1 + \delta(t)^2 - \delta'(t))\gamma' = 0.$$

Portanto, $p(t) = -2\delta(t)$, $q(t) = 1 + \delta(t)^2 - \delta'(t)$ e $r(t) = 0$. Logo,

$$H = \frac{2}{27} \delta(t)^3 - \frac{1}{3} \delta(t)\delta'(t) + \frac{2}{3} \delta(t) + \frac{1}{6} \delta''(t).$$

A curvatura projetiva pode ser calculada usando a equação (6.12) e os dados acima. Sua expressão é longa e será omitida.

Proposição 6.6. Considere uma curva projetiva γ e um elemento de arco projetivo t tal que $\gamma'''(t) + r(t)\gamma(t) = 0$. Então a curvatura projetiva de γ é

$$k_p = -\frac{1}{18} \frac{6r''(t)r(t) - 7r'(t)^2}{r(t)^{\frac{8}{3}}}$$

Demonstração. Segue diretamente das equações (6.7), (6.12) e observando que $p = q = 0$. \square

Proposição 6.7. Considere uma curva projetiva C^∞ definida na carta afim $(x, y, 1)$ por $\gamma(t) = (t, h(t), 1)$ onde,

$$h(t) = \frac{1}{2}t^2 + \sum_{i \geq 5} \frac{a_i}{i!} t^i, \quad a_5 \neq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} H(t) &= -\frac{1}{6}(a_5 + a_6t + \dots), \\ k_p(0) &= \frac{1}{18} \frac{(7a_6^2 - 6a_5a_7)6^{\frac{2}{3}}}{a_5^{\frac{8}{3}}}, \\ k'_p(0) &= \frac{1}{54} \frac{6^{\frac{2}{3}}(-315a_5^4 + 18a_8a_5^2 + 56a_6^3 - 72a_7a_6a_5)}{a_5^{\frac{11}{3}}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue diretamente das equações (6.7) e (6.12). Expressões confirmadas com cálculos simbólicos. \square

6.5 Equações de Frenet de uma curva projetiva

Seja $A(\sigma)$ uma curva projetiva parametrizada pelo elemento de arco σ tal que

$$\frac{d^3 A}{d\sigma^3} + 2k_p(\sigma) \frac{dA}{d\sigma} + (1 + k_p'(\sigma))A = 0.$$

Suponhamos que o produto misto $[A, A', A''] \neq 0$. Definimos as equações de Frenet em relação ao referencial $\{A, A_1, A_2\}$ pelo sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\sigma} &= A_1 \\ \frac{dA_1}{d\sigma} &= -k_p A + A_2 \\ \frac{dA_2}{d\sigma} &= -A - k_p A_1. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Por verificação direta podemos comprovar que o sistema de Frenet é equivalente a equação diferencial linear de terceira ordem definida por $A(\sigma)$.

6.6 Exemplos

Nesta seção iremos considerar exemplos para ilustrar o conceito de elemento de arco e de curvatura projetiva.

Exemplo 6.3. *Seja $A(t) = (t, e^{at}, 1)$ uma curva plana projetiva. Pela equação (6.4) obtemos*

$$[A, A', A''] = a^2 e^{at} \neq 0, \quad p(t) = -a, \quad q(t) = 0, \quad r(t) = 0.$$

Portanto, pelas equações (6.7) e (6.12), temos:

$$H = -\frac{2a^3}{27}, \quad k_p = -\frac{3 \times 2^{\frac{1}{3}}}{4}.$$

A título de comparação observamos que A tem curvatura euclidiana limitada com um único ponto de máximo global e depende do parâmetro a , ver Exercício 1.21. A curvatura afim de A é monótona e não limitada, ver Exercício 4.1. Por fim, a curvatura projetiva de A é constante e independente de a .

Exemplo 6.4. *Seja $A(t) = [\cos t : \sin t : e^{at}]$ uma curva plana projetiva definida em coordenadas homogêneas. Pela equação (6.4) obtemos*

$$[A, A', A''] = e^{at}(a^2 + 1) \neq 0, \quad p(t) = -a, \quad q(t) = 1, \quad r(t) = -a.$$

Portanto, pelas equações (6.7) e (6.12), temos:

$$H = \frac{2a(a^2 + 9)}{27}, \quad k_p = -\frac{3}{4} \frac{(a^2 - 3) \sqrt[3]{2}}{a^{\frac{2}{3}}(a^2 + 9)^{\frac{2}{3}}}.$$

Exemplo 6.5. Seja $A(t) = ((x_0 + ty_0)e^{at}, y_0e^{at}, 1)$, com $ay_0 \neq 0$, uma curva plana projetiva. Pela equação (6.4) obtemos

$$[A, A', A''] = -e^{2at}(a^2 y_0) \neq 0, \quad p(t) = -2a, \quad q(t) = a^2, \quad r(t) = 0.$$

Portanto, pelas equações (6.7) e (6.12), temos:

$$H = \frac{2a^3}{27}, \quad k_p = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{2}.$$

Exemplo 6.6. Seja $A(t) = (t^2, t^3, 1)$ uma curva plana projetiva singular. Pela equação (6.4) obtemos

$$[A, A', A''] = 6t^2 \quad p(t) = -\frac{2}{t}, \quad q(t) = \frac{2}{t^2}, \quad r(t) = 0.$$

Portanto, pelas equações (6.7) e (6.12), temos:

$$H = \frac{20}{27t^3}, \quad k_p = -\frac{21 \sqrt[3]{20}}{40}.$$

6.7 Interpretação geométrica do arco projetivo e da curvatura projetiva

Nesta seção temos como objetivo relacionar os conceitos de elemento de arco e curvatura projetiva com a razão cruzada através de construção geométricas envolvendo colinearidade de pontos e retas.

Seja $\gamma(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma))$ uma curva projetiva parametrizada pelo elemento de arco projetivo σ . Usando as equações de Frenet (6.13), e supondo $\gamma(0) = (0, 0, 1)$, $\gamma' = (1, 0, 0)$ e $\gamma'' = (0, 1, 0)$ obtemos

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= \sigma - \frac{1}{3}k_p\sigma^3 - \frac{1}{24}(1 + 3k'_p)\sigma^4 + \frac{1}{30}(k_p^2 - k''_p)\sigma^5 + O(\sigma^6) \\ y(\sigma) &= \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{12}k_p\sigma^4 - \frac{1}{120}(1 + 5k'_p)\sigma^5 + O(\sigma^5) \\ z(\sigma) &= 1 - \frac{1}{6}(1 + k')\sigma^3 + \frac{1}{24}(2k_p^2 - k''_p)\sigma^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!}(7k_pk'_p + 3k_p - k'''_p)\sigma^5 + O(\sigma^6). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Em coordenadas afins $(x, y, 1)$ a curva $\left(\frac{x(\sigma)}{z(\sigma)}, \frac{y(\sigma)}{z(\sigma)}\right)$ é definida por

$$\Gamma(\sigma) = \left(s - \frac{k_p}{3} s^3 + \left(\frac{1}{8} + \frac{k'_p}{24} \right) s^4 + O(s^5), \frac{1}{2} s^2 - \frac{k_p}{12} s^4 + O(s^5) \right).$$

Consideramos 4 pontos, $p_1 = \Gamma(\varepsilon)$, $p_2 = \Gamma(2\varepsilon)$, $p_3 = \Gamma(3\varepsilon)$ e $p_4 = \Gamma(4\varepsilon)$.

Consideramos as 4 retas projetivas $\ell_i = O + tp_i$. As mesmas intersecam a reta $x = 1$ nos pontos $q_i = (1, \frac{y(i\varepsilon)}{\varepsilon}) = (1, y_i)$, onde $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}k_p x^4 - \frac{1}{20}x^5 + O(6)$. Veja Fig. 6.9.

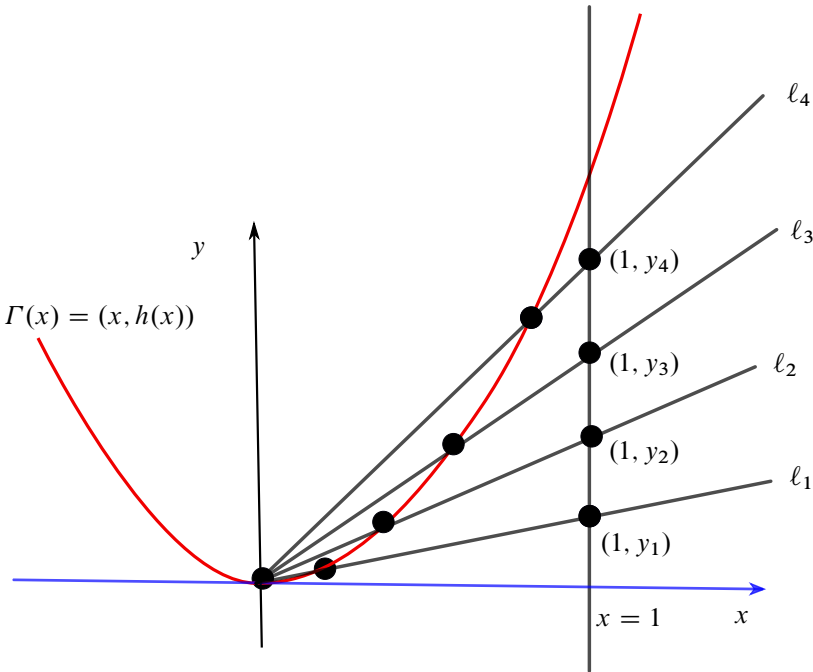


Figura 6.9: Razão cruzada e curvatura projetiva.

A razão cruzada entre estes quatro pontos q_i é:

$$[q_1, q_2, q_3, q_4] = \frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_4 - y_3)(y_2 - y_1)}.$$

Desenvolvendo os cálculos obtemos a expansão de Taylor

$$[q_1, q_2, q_3, q_4] = 4 - 6k_p\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Portanto, a curvatura projetiva está relacionada com a razão cruzada de 4 retas projetivas. Lembramos que pelo teorema de Desargues a razão cruzada independente das retas transversais consideradas.

A seguir, inspirado em [Lewiner e Craizer \(2010\)](#), vamos considerar outra interpretação da razão cruzada, relacionando-a com a curvatura projetiva e elemento de arco projetivo de uma curva.

Considere uma curva plana γ parametrizada pelo elemento de arco projetivo σ . Consideramos três pontos $A = \gamma(-r)$, $B = \gamma(0)$ e $C = \gamma(r)$ e consideramos as retas tangentes a γ nesses pontos. Consideramos também a reta secante passando por A e B . A seguir considere os quatro pontos colineares p_i ($i = 1, \dots, 4$) como mostrado na Fig. 6.10. Os mesmos são definidos pelas interseções das quatro retas.

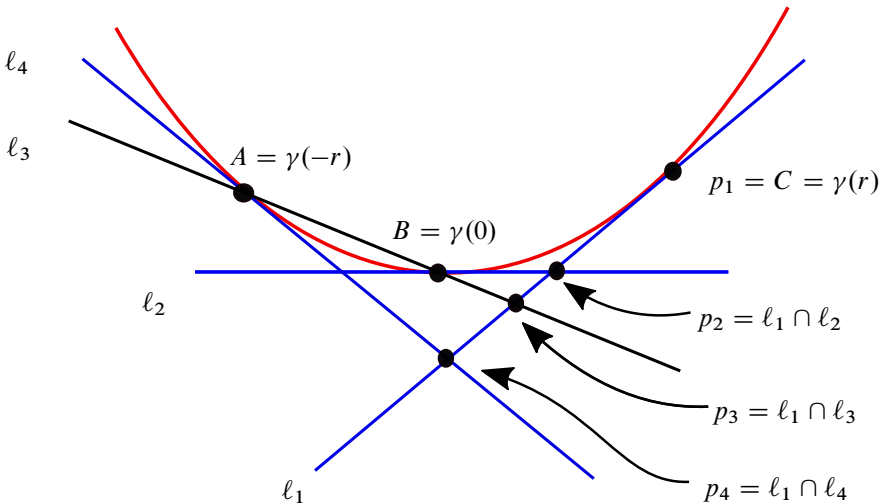


Figura 6.10: Razão cruzada entre quatro pontos colineares.

Usando a equação (6.14) obtemos

$$\begin{aligned}
p_1 &= \left(r - \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{24}(1 + 3k'_p)r^4, \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{12}k_p r^4 \right) + O(5) \\
p_2 &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{12}k_p r^3 + \left(\frac{1}{48}k'_p - \frac{1}{80} \right)r^4, 0 \right) + O(5) \\
p_3 &= \left(r - \frac{1}{3}k_p r^3 + \left(\frac{3}{40} - \frac{1}{24}k'_p \right)r^4, \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{12}k_p r^4 \right) + O(5) \\
p_4 &= \left(-\frac{1}{2}r^2 - \frac{5}{12}k_p r^4, \left(\frac{1}{24}k'_p - \frac{3}{40} \right)r^4 \right) + O(5).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Cálculos longos conduzem-nos a

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_3 - p_1)(p_4 - p_2)}{(p_2 - p_1)(p_4 - p_3)} = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}k'_p \right) r^3 + O(4).$$

Em particular, para as curvas com curvatura projetiva zero o elemento de arco projetivo σ está determinado pela razão cruzada definida acima.

Para uma curva parametrizada como gráfico $\gamma(x) = (x, h(x))$, onde

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5!}a_5x^5 + \frac{1}{7!}a_7x^7 + O(8),$$

e considerando os pontos $A = \gamma(-r)$, $B = \gamma(0)$ e $C = \gamma(r)$ obtemos

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{1}{30}a_5r^3 + \frac{1}{120}a_7r^5 + O(6).$$

Relacionando assim explicitamente a razão cruzada com o elemento de arco projetivo e a curvatura projetiva. Conforme estabelecido na proposição 6.7 temos $H(0) = -\frac{1}{6}a_5$ e

$$k_p(0) = -\frac{6^{\frac{2}{3}}a_7}{3a_5^{\frac{5}{3}}}.$$

Observação 6.5. O seguinte problema de *spline* projetivo foi analisado em [Lewiner e Craizer \(ibid.\)](#). Considere o conjunto de dados (q_i, ℓ_i) , onde q_i é um ponto no plano projetivo e ℓ_i é uma reta projetiva passando por q_i . Determine uma curva projetiva com curvatura projetiva zero passando pelos pontos q_i e tangente as retas ℓ_i nos pontos q_i . No caso de três pontos a solução do problema é uma espiral logarítmica.

6.8 Relação entre as curvaturas afim e projetiva

Considere uma curva plana $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco afim s e suponha que $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 0)$ e $\gamma''(0) = (0, 1)$.

Usando que $\gamma''' + k_a \gamma' = 0$, e desenvolvendo γ na sua série de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k_a}{6}s^3 - \frac{k'_p}{24}s^4 + \frac{1}{5!}(k_a^2 - k''_a)s^5 \\ &\quad + \frac{1}{6!}(4k_a k'_a - k'''_a)s^6 + \frac{1}{7!}(-k''''_a + 7k_p k''_p + 4(k'_a)^2 - k_a^3)s^7 + O(s^8), \\ y(s) &= \frac{1}{2}s^2 - \frac{k_a}{24}s^4 - \frac{k'_a}{60}s^5 + \frac{1}{6!}(k_a^2 - 3k''_a)s^6 \\ &\quad + \frac{1}{7!}(6k_a k'_a - 4k'''_a)s^7 + O(s^8). \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde k_a é a curvatura afim de γ , e as derivadas são calculadas em $s = 0$.

Escrevendo na forma de gráfico obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= (x, h(x), 1) \\ h(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{k_a}{8}x^4 + \frac{k'_a}{40}x^5 + \frac{1}{6!}(45k_a^2 + 3k''_a)x^6 \\ &\quad + \frac{3}{7!}(51k_a k'_a + k'''_a)x^7 + O(x^8) \end{aligned}$$

Procedendo os cálculos, usando as equações (6.7) e (6.12), obtemos que a curvatura projetiva k_p na origem é:

$$k_p = \frac{1}{18} \frac{(9k_a k'_a{}^2 - 6k'_a k'''_a + 7k''_a{}^2) 2^{\frac{2}{3}}}{(k'_a)^{\frac{8}{3}}}. \quad (6.17)$$

Para o arco projetivo $d\sigma$ temos $d\sigma^3 = -\frac{1}{2}k'_a ds^3$.

Observação 6.6. Uma curva de Jordan suave $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, estritamente convexa, possui pelo menos 6 vértices afins e portanto a sua curvatura projetiva k_p não está definida globalmente. Assim k_p possui pelo menos 6 pontos singulares.

6.9 Contato com cúbicas e reta normal projetiva

Nesta seção vamos formalizar o conceito de reta normal projetiva a uma curva plana projetiva.

Do ponto de vista projetivo não se distinguem as retas de contato dois ou as cônicas de contato 3 com a curva em um ponto dado. Ou seja, todas as retas e todas as cônicas são equivalentes. Resta-nos considerar o contato com as cúbicas. Ao considerarmos as cúbicas de contato alto com uma curva projetiva vemos que aparece uma família a dois parâmetros de cúbicas que têm contato de ordem 7 com a curva em um ponto. Geralmente, este conjunto é chamado *feixe de cúbicas*.

Vamos seguir a conceituação clássica que pode ser encontrada em [Cartan \(1937\)](#) e [Fon \(1939\)](#).

Basicamente, usaremos o contato da curva com a cônica osculadora e a uma família a dois parâmetros de cúbicas possuindo contato de ordem sete com a curva.

Proposição 6.8. *Considere uma curva plana projetiva C parametrizada na carta afim pela forma normal*

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x^5 + k_p x^7 + O(8).$$

A família a dois parâmetros de cúbicas

$$\begin{aligned} C_3(x, y) = & a \left(y - \frac{1}{2}x^2 - 4xy^2 \right) + b \left(y^2 - \frac{1}{2}x^2y \right) \\ & + \left(xy - 8y^3 - \frac{1}{2}x^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

possui contato de ordem sete na origem com a curva.

Demonstração. Segue por cálculo direto. Considere uma cúbica definida implicitamente por

$$\begin{aligned} h(x, y) = & a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ & + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y = 0. \end{aligned}$$

Considerando a composição definida por $\varphi(x) = h(x, \frac{1}{2}x^2 + x^5 + k_p x^7 + O(8))$ e fazendo $\varphi^{(i)}(0) = 0$ para $(i = 1, \dots, 6)$ obtemos o resultado. \square

Para $a = 0$, e $b = 0$, $C_3(x, y) = 0$ é uma cúbica singular na origem, cujo um cone tangente é formado pelas retas $x = 0$ e $y = 0$. A interseção de qualquer elemento do feixe com o cone tangente define os pontos P_0 e A_0 . A interseção de qualquer membro da família, com a cônica osculadora define dois pontos P_0 e A_1 . Tomando-se a reta que passa pelos pontos P_0 e A_1 e a reta polar de cônica com respeito ao ponto A_0 obtemos quatro retas harmonicamente conjugadas. Essa configuração é invariante projetivamente, definindo o que podemos chamar de *reta normal projetiva*.

Mais formalmente temos o seguinte.

A reta tangente a C no ponto $P_0 = (0, 0)$ é $y = 0$.

Qualquer elemento da família de cúbicas $C_3(x, y) = 0$, também denominada feixe de cúbicas, intersecta a reta $y = 0$ nos pontos $P_0 = (0, 0)$ (com multiplicidade 2) e $A_0 = (-a, 0)$ (com multiplicidade 1). A interseção de $C_3(x, y) = 0$ com a cônica osculadora $2y - x^2 = 0$ a C se dá nos pontos $P_0 = (0, 0)$ (com multiplicidade 5) e $A_1 = (-a, \frac{1}{2}a^2)$ (com multiplicidade 1). A reta passando por P_0 e A_1 é dada por $2y + ax = 0$ e será denominada *reta associada ao feixe*. A reta polar da cônica $2y - x^2 = 0$ com respeito a A_0 é dada por $y + ax = 0$. Ela é determinada pelos dois pontos de interseção das retas tangentes à cônica e passando por A_0 .

As quatro retas $x = 0$, $y = 0$, $y + ax = 0$ e $2y + ax = 0$ são harmonicamente conjugadas, i.e., a razão cruzada entre as mesmas é igual a $\lambda = 2$ ou, equivalentemente, $1 - \lambda = -1$.

De fato, as inclinações são $0, -a, -\frac{a}{2}, \infty$. Logo $[0, -\frac{a}{2}, -a, m] = \frac{(-a-0)(m+\frac{a}{2})}{(m+a)(-\frac{a}{2}-0)} = \frac{a+2m}{a+m} = 2$ quando $m = \infty$.

Dizemos que um ponto A é harmonicamente conjugado a B relativamente aos pontos C e D quando a razão cruzada $[A, B, C, D] = \frac{AC \times BD}{BC \times AD} = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = -1$.

Dizemos que uma reta ℓ_1 é harmonicamente conjugada a ℓ_2 relativamente as retas ℓ_3 e ℓ_4 quando a razão cruzada $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = -1$.

Definimos portanto a *reta normal projetiva* como sendo a reta harmonicamente conjugada a reta tangente relativa as retas polar e associada ao feixe de cúbicas.

Proposição 6.9. *A reta normal projetiva passando pela origem da curva $(x, \frac{1}{2}x^2 + x^5 + k_p x^7 + O(8))$ é o eixo y . As quatro retas $y = 0$, $ax + 2y = 0$, $ax + y = 0$ e $x = 0$ são harmonicamente conjugadas. Veja Fig. 6.11.*

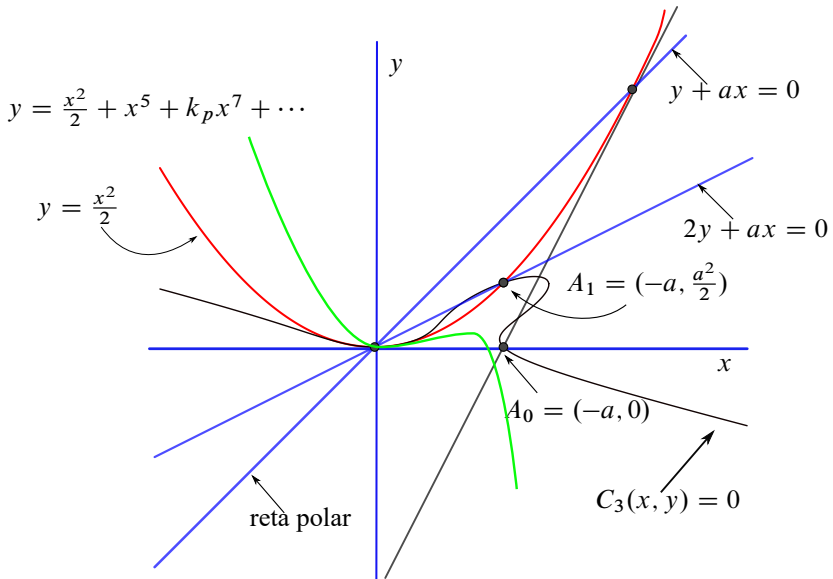


Figura 6.11: Contato com cúbicas e retas harmonicamente conjugadas.

Demonstração. Segue diretamente das considerações acima. □

6.10 Exercícios

Exercício 6.1. Considere um par de retas projetivas r e s intersectando no ponto O . Considere três retas ℓ_i transversais a r e s , intersectando as retas dadas nos pontos r_i e s_i como ilustrado na Fig. 6.12.

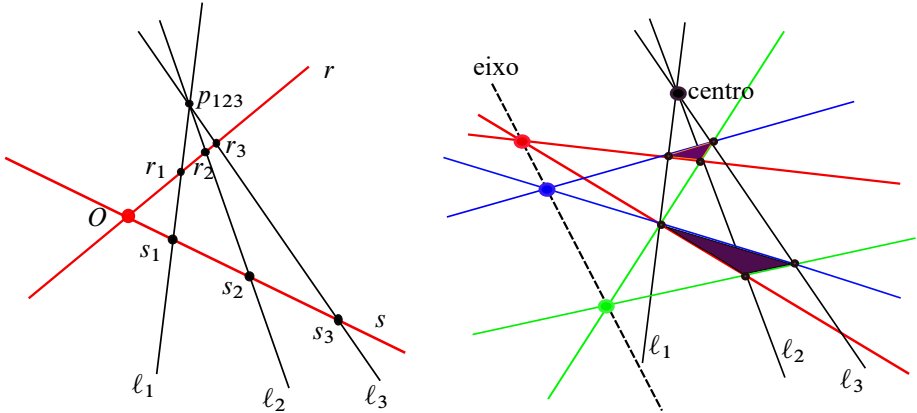


Figura 6.12: Interseções de retas, razão cruzada e perspectivas.

Mostre que $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$ é um ponto p_{123} se, e somente se, $[O, r_1, r_2, r_3] = [O, s_1, s_2, s_3]$.

Use o resultado acima para ilustrar o teorema de Desargues que relaciona perspectivas central e axial. Veja [Coxeter \(1949, cap. 2\)](#).

Exercício 6.2. Considere uma curva plana projetiva parametrizada por $\gamma(t) = (t, h(t), 1)$.

i) Mostre $H = \frac{1}{4}(h'')^{\frac{2}{3}} \left((h'')^{-\frac{2}{3}} \right)'''$.

ii) Conclua que toda cônica parametrizada localmente por $(t, h(t), 1)$ satisfaz a equação diferencial $\left((h'')^{-\frac{2}{3}} \right)''' = 0$.

Exercício 6.3. Considere uma curva plana projetiva parametrizada por $\gamma(t) = (t, \frac{t^3}{6} + at + b, 1)$. Mostre que $H = -\frac{20}{27t^3}$ e $k = -21(20^{-\frac{2}{3}})$.

Exercício 6.4. Considere uma curva plana projetiva parametrizada por $\gamma(t) = (t, \frac{t^n}{n!}, 1)$. Mostre que,

$$H = -\frac{1}{27} \frac{(n-2)(2n-1)(n+1)}{t^3},$$

$$k = -\frac{3}{2} \frac{n^2 - n + 1}{[(n-2)(2n-1)(n+1)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Exercício 6.5. Calcule o elemento de arco projetivo e a curvatura projetiva da curva $\gamma(t) = (t^2, t^3, 1)$.

Exercício 6.6. Considere a curva plana projetiva $\gamma(t) = [x(t) : y(t) : z(t)]$ definida por

$$\begin{aligned}x(t) &= e^t + 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\y(t) &= e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right), \\z(t) &= e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).\end{aligned}$$

i) Mostre que $H = -1$ e $k = 0$. Veja [Wilczynski \(1906, pag. 70\)](#) e [Ancochea \(1955\)](#).

ii) Esboce o traço da curva $\Gamma(t) = \left(\frac{y(t)}{x(t)+y(t)+z(t)}, \frac{z(t)}{x(t)+y(t)+z(t)}\right)$.

iii) Encontre o sistema diferencial linear da forma $p' = Ap$ tal que γ seja uma solução com condição inicial $\gamma(0) = (3, 0, 0)$.

iv) Mostre que o conjunto das curvas projetivas com curvatura projetiva zero é um espaço vetorial de dimensão 8.

Exercício 6.7. Considere a curva projetiva definida por $\gamma(t) = [e^{\lambda_1 t} : e^{\lambda_2 t} : e^{\lambda_3 t}]$.

i) Mostre que $H = -\frac{1}{27}(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)$.

ii) Mostre que $k = \frac{1}{6}H^{-\frac{2}{3}}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)$.

Exercício 6.8. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + I(t)y = 0.$$

Seja $f = \frac{y_1}{y_2}$, onde y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação linear acima.

i) Mostre que $\{f, t\} = \{f\}_t = 2I(t)$.

ii) Determine soluções linearmente independentes da equação diferencial acima para $I(t) = \frac{a}{t^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 6.9. Considere a equação diferencial de terceira ordem

$$\theta''' + \frac{a}{t^2}\theta' + \frac{b}{t^3}\theta = 0.$$

i) Mostre que com $p(t) = 0$, $q(t) = \frac{a}{t^2}$ e $r(t) = \frac{b}{t^3}$ temos $H = \frac{a+b}{t^3}$ e $k = \frac{1}{2}(a - 1)(a + b)^{-\frac{2}{3}}$.

ii) Para $a = 1$ e $b = -2$, mostre que a curva projetiva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida por

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right), \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t\right), t^2 \right)$$

possui elemento de arco projetivo $H = -\frac{1}{t^3}$ e curvatura projetiva $k = 0$.

iii) Esboce o traço da curva plana $\Gamma(t) = \left(\frac{x(t)}{z(t)}, \frac{y(t)}{z(t)}\right)$.

Exercício 6.10. Calcule o elemento de arco projetivo e a curvatura projetiva da curva $\gamma(t) = (t^m, t^n, t^l)$, $m, n, l \in \mathbb{Z}$.

Exercício 6.11. Seja $\gamma(t) = (t(t^2 - 1), t(t^2 + 1), t^4 + 1)$.

i) Mostre que γ é uma parametrização racional da curva implícita definida pelo polinômio homogêneo $h(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 - z^2(x^2 - y^2) = 0$.

ii) Calcule a curvatura projetiva de γ e esboce o traço da curva

$$\Gamma(t) = \left(\frac{t(t^2 - 1)}{t^4 + 1}, \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 1} \right).$$

Exercício 6.12. (Projeto). Considere uma curva regular fechada γ imersa e genérica no plano \mathbb{R}^2 , possuindo T_+ retas com dupla tangência externa, T_- retas com dupla tangência interna, I pontos de inflexão e D pontos de cruzamento transversal como ilustrado na Fig. 6.13. O termo “genérico” significa que as retas de tangências externas e/ou internas não se intersectam em pontos de γ , não passam pelos pontos de inflexão e nem pelos pontos de cruzamento transversal, e que todos os contatos da curva com as suas retas tangentes são quadráticos ou cúbicos (nos pontos de inflexão). Além disso, não é admitido retas com tangências triplas.

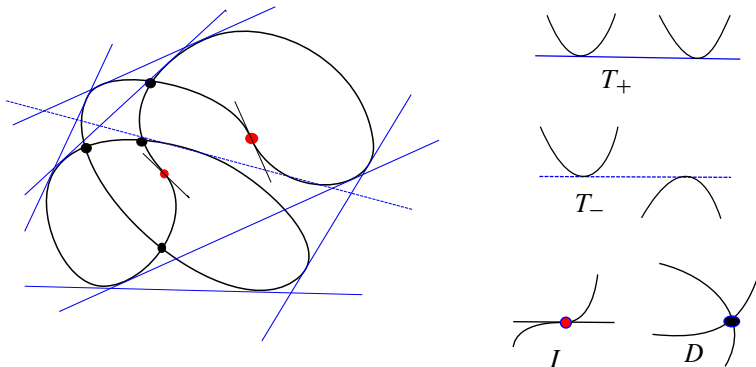


Figura 6.13: Curva imersa genérica ($T_+ = 5$, $T_- = 1$, $I = 2$ e $D = 3$).

- i) Mostre que $T_+ - T_- - \frac{1}{2}I - D = 0$. Veja [Fabricius-Bjerre \(1962\)](#) e [Berger e Gostiaux \(1987\)](#).
- ii) Encontre a relação linear $R(T_+, T_-, I, D) = 0$ para as curvas imersas genéricas no plano projetivo $P_2\mathbb{R}$. Veja [Fabricius-Bjerre \(1977\)](#) e [Thompson \(2006\)](#).
- iii) Analise o caso em que a curva γ possua pontos singulares do tipo cúspide. Veja [Fabricius-Bjerre \(1977\)](#) e [Scalco e Tari \(2018\)](#).
- iv) Calcule os invariantes geométricos T_+ , T_- , I e D para a leminiscata.
- v) Construa exemplos de curvas localmente convexas com número de rotação igual a $\mu \geq 1$ possuindo $\mu - 1$ tangências duplas.
- vi) Estude a dissertação de mestrado [Nóbrega \(2018\)](#) e também capítulos do livro [Ghys \(2017\)](#) referentes as curvas planas.

Exercício 6.13. (Projeto). Considere uma curva cúbica plana definida em coordenadas homogêneas $[x : y : z]$ por

$$h([x : y : z]) = x^3 + y^3 + z^3 - 3kxyz = 0, \quad (6.19)$$

denominada forma de Hesse, ou em coordenadas afins $[x : y : 1]$ por

$$H(x, y) = y^2 - (x^3 + ax + b) = 0 \quad (6.20)$$

- i) Calcule os pontos singulares de $h([x : y : z]) = 0$ e de $H(x, y) = 0$.
- ii) Calcule os pontos de inflexões reais de $h([x : y : z]) = 0$ e de $H(x, y) = 0$.
- iii) Mostre que a curva $h([x : y : z]) = 0$ é conexa se $k < 1$ e possui duas componentes conexas se $k > 1$.
- iv) Calcule a curvatura projetiva de $h([x : y : z]) = 0$ e de $H(x, y) = 0$.
- v) Estude os artigos [Bonifant e J. Milnor \(2017\)](#), [Mordell \(1944\)](#), [Nagell \(1929\)](#) e [Poincaré \(1901\)](#). Analise os invariantes projetivos e aritméticos das curvas $h([x : y : z]) = 0$ e $H(x, y) = 0$.

Exercício 6.14. Mostre que uma vizinhança tubular de uma reta projetiva é difeomorfa a uma faixa de Möbius. Faça figuras.

Exercício 6.15. (Projeto). Considere F e a curva Γ definida no exercício 5.17.

- i) Calcule a curvatura projetiva de Γ .
- ii) Verifique se existem parâmetros $(a_1, b_1, a_2, b_2, A, B, a, b)$ tais que a curva Γ possua curvatura projetiva constante.
- iii) Seja $p(s) = (s, ks^2)$ uma parábola e considere a curva $P(s) = F(p(s))$. Calcule as curvaturas euclidiana, afim e projetiva de P . Analise as propriedades geométricas e topológicas da curva P . Faça vários exemplos numéricos.

Exercício 6.16. Considere uma curva convexa e suave γ , como mostrado na Fig. 6.14.

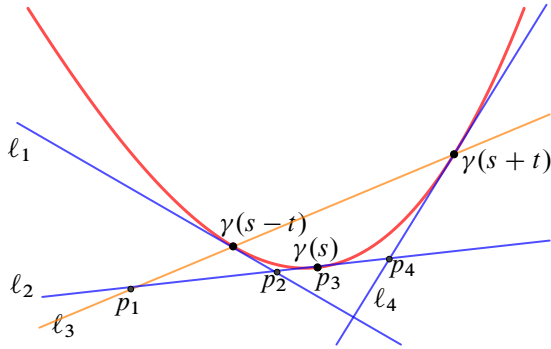


Figura 6.14: Curva convexa e interseções de retas (tangentes e transversais a curva).

- i) Supondo γ parametrizada por comprimento de arco euclidiano s calcule a razão cruzada $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ e faça o desenvolvimento de Taylor na variável t até ordem 3.
- ii) Supondo γ parametrizada por comprimento de arco afim s calcule a razão cruzada $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ e faça o desenvolvimento de Taylor na variável t até ordem 3.
- iii) Supondo γ parametrizada por elemento de arco projetivo s calcule a razão cruzada $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ e faça o desenvolvimento de Taylor na variável t até ordem 3.
- iv) Compare os resultados obtidos nos itens anteriores e interprete geometricamente.

Exercício 6.17. Considere a Fig. 6.15 e duas famílias de quatro retas passando pelos pontos A, B, C, D e pelos pontos O_1 e O_2 inscritos numa cônica (círculo ou elipse).

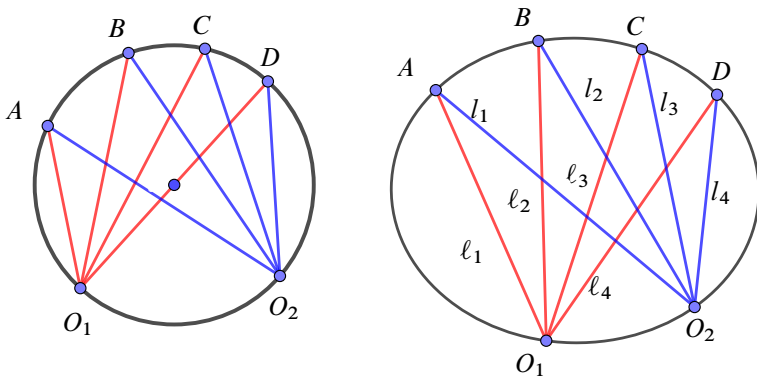


Figura 6.15: Famílias de retas e razão cruzada.

- i) Considere quatro retas ℓ_i ($i = 1, \dots, 4$) concorrentes num ponto $O = [0 : 0 : 1]$ e quatro

pontos $A_i = [a_1^i, a_2^i, 1] \in \ell_i$ em coordenadas homogêneas. Denote por $a_{ij} = [0, A_i, A_j]$. Mostre que $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = \frac{a_{13}a_{24}}{a_{14}a_{23}}$. Este resultado é devido a Möbius.

ii) Mostre que a razão cruzada das quatro retas independe dos pontos O_1 e O_2 , i.e., $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$. Este resultado é devido a Chasles.

iii) Considere uma curva $\gamma = (x(s), y(s), 1)$ parametrizada por elemento de arco projetivo. Considere os pontos $O = \gamma(0) = [0, 0, 1]$, $A_1 = \gamma(\varepsilon)$, $A_2 = \gamma(2\varepsilon)$, $A_3 = \gamma(-2\varepsilon)$, $A_4 = \gamma(-\varepsilon)$. Considere as retas ℓ_i passando pelos pontos $\{O, A_i\}$ e calcule a expansão de Taylor de $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$ até $O(\varepsilon^4)$.

Exercício 6.18. Considere oito pontos p_i ($i = 1, \dots, 8$) no plano em posição geral, isto é, qualquer subconjunto de três pontos não está alinhado e nenhum subconjunto de seis pontos está contido numa cônica. Mostre que qualquer cúbica passando por estes pontos passam por um único ponto p_9 . Este resultado é devido a Cayley e Bacharach. Veja [Ren, Richter-Gebert e Sturmfels \(2015\)](#).

7

Curvatura Discreta

“Arc, amplitude, and curvature sustain a similar relation to each other as time, motion, and velocity, or as volume, mass, and density.”

“We must admit with humility that, while number is purely a product of our minds, space has a reality outside our minds, so that we cannot completely prescribe its properties a priori.”

– Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

7.1 Introdução

O estudo de retas, triângulos, quadriláteros, polígonos regulares e não regulares, curvas poligonais, tem longa tradição na matemática e continua sendo fonte de problemas e aplicações em diversas áreas do conhecimento, não restringindo-se a geometria plana e/ou espacial. Por exemplo, mencionamos os sistemas articulados com graus de liberdades e precisão, agrimensura, arquitetura e a robótica. Essas aplicações, na maioria das vezes, passa pelo processo de discretização pelo qual procura-se obter informações sobre figuras suaves (curvas ou superfícies) a partir de uma coleção finita de dados, em uma malha, por exemplo. Neste sentido, é preciso destacar quais as informações geométricas locais são suficientes para a representação mais acurada das figuras.

O objetivo da geometria diferencial discreta é desenvolver noções análogas às da geometria diferencial, isto é que sejam invariantes pelo grupo das transformações geométricas,

mo nosso caso, o grupo de isometrias euclidianas.

O conceito de curvatura euclidianana para curvas poligonais (linear por partes) é também um conceito clássico na teoria das curvas planares. Veja [Bobenko e Suris \(2008\)](#), [Hoffmann \(2009\)](#), [Pak \(2010\)](#), para uma abordagem moderna da “*geometria discreta*” de curvas poligonais e superfícies poliedrais.

É relevante observar que a geometria discreta não é simplesmente uma discretização das equações da geometria diferencial clássica. Como veremos, muitas vezes, é possível fazer escolher mais de uma conceituação conforme a propriedade geométrica a ser estudada. A geometria discreta é uma importante ferramenta matemática e no seu estudo técnicas do cálculo a “diferenças” são aplicadas.

Uma referência clássica para uma introdução as superfícies “discretas” é [Sauer \(1970\)](#).

Neste capítulo iremos abordar alguns destes aspectos para curvas poligonais planas, incluindo desigualdades, evolutas e o teorema dos quatro vértices neste contexto.

7.2 Curvatura discreta de poligonais

Considere uma curva poligonal γ no plano com vértices definidos por $\{p_1, \dots, p_{n-1}, p_n\}$.

Podemos unificar a conceituação dizendo que uma poligonal é uma função $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $I \subset \mathbb{Z}$ é um intervalo discreto. A poligonal é fechada quando $I = \mathbb{Z}$ e existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma(k) = \gamma(k + n)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Em geral $I = \{1, 2, \dots, k\}$ e denotamos $\gamma(k) = p_k$.

Quando a poligonal for fechada convencionaremos que $p_{n+1} = p_1$. Os segmentos ou arestas definidos pelos vetores $v_i = p_{i+1} - p_i$ serão denotadas por $[p_i, p_{i+1}]$. Também dizemos que $l_i = |v_i|$ são os comprimentos dos lados da poligonal. A poligonal está parametrizada por comprimento de arco se $l_i = l > 0$ para todo $i \in I$.

Os ângulos θ_i entre os vetores $v_i = p_{i+1} - p_i$ e $v_{i-1} = p_i - p_{i-1}$ são os ângulos externos da poligonal. A curva poligonal é localmente convexa quando os ângulos externos forem todos positivos, i.e., a base $\{v_{i-1}, v_i\}$ é positiva. Neste caso, ao percorrer a poligonal γ fechada e convexa a região delimitada por γ fica sempre a esquerda. Veja [Fig. 7.1](#). Fazendo o percurso da poligonal no sentido contrário todos os ângulos externos trocam de sinal.

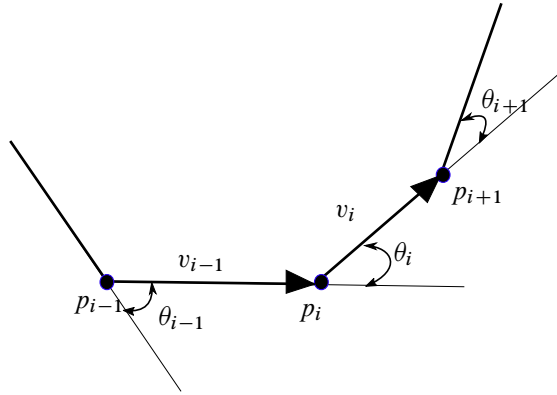


Figura 7.1: Curva poligonal localmente convexa e seus ângulos externos θ_i .

Também consideramos o círculo \mathcal{I}_i de raio r_i tangente aos segmentos $p_{i-1}p_i$, $p_i p_{i+1}$ e $p_{i+1}p_{i+2}$. O denominaremos por *círculo osculador*. Veja Fig. 7.2.

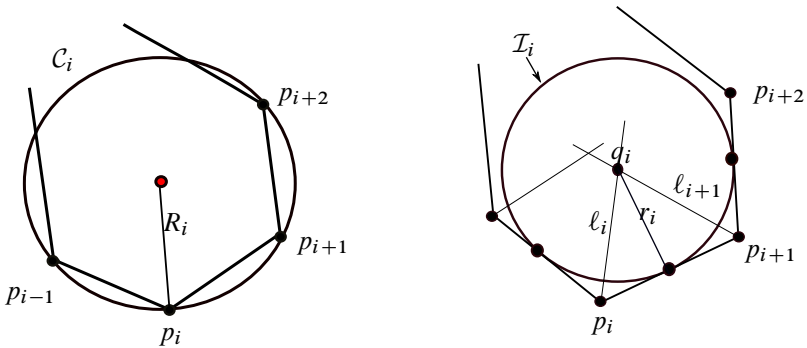


Figura 7.2: Curva poligonal γ e círculos circunscrito (esquerda) e inscrito (direita).

Por cada vértice de γ consideramos a bissetriz interna ℓ_i passando pelo ponto p_i . Consideramos ℓ_i orientada pelo vetor $n_i = |v_{i-1}|v_i - |v_i|v_{i-1} = l_{i-1}v_i - l_i v_{i-1}$. Denotamos por $N_i = \frac{n_i}{|n_i|}$ o vetor unitário que define $\ell_i = p_i + tn_i$ orientada internamente e por ξ_i o vetor unitário perpendicular ao vetor $v_i = p_{i+1} - p_i$. Escolhemos o vetor ξ_i de modo que $\{v_i, \xi_i\}$ seja uma base positiva do plano. O raio do círculo centrado no ponto q_i e

tangente aos segmentos $[p_{i-1}, p_i]$, $[p_i, p_{i+1}]$ é

$$r_i = \langle \xi_i, q_i - p_i \rangle = \langle \xi_{i+1}, q_i - p_{i+1} \rangle.$$

Definição 7.1. O raio curvatura de γ no vértice p_i é

$$\rho_i = \frac{l_{i-1} + l_i}{2\theta_i} \quad (7.1)$$

A curvatura discreta é $k_i = \frac{1}{\rho_i}$.

Essa definição de curvatura é baseada na noção de curvatura de um arco circular com ângulo central θ e raio r , onde temos que o comprimento do arco é $l = \frac{r}{\theta}$.

Observação 7.1. Na literatura é também comum definir raio de curvatura como sendo o raio r_i do círculo osculador tangente aos segmentos $[p_{i-1}, p_i]$ e $[p_i, p_{i+1}]$ com centro na bissetriz do ângulo interno α_i . Veja Fig. 7.3.

Considere os vértices $\{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$ e o círculo circunscrito \mathcal{C}_i definido por estes três pontos. Seja R_i o raio de \mathcal{C}_i .

Na Fig. 7.3, usando a lei dos senos, $\text{sen } \beta_i = \frac{l_{i-1}}{2R_i}$, $\text{sen } \varphi_i = \frac{l_i}{2R_i}$ e a relação entre ângulos externos de um triângulo obtemos que

$$\rho_i = R_i \frac{\text{sen } \beta_i + \text{sen } \varphi_i}{\beta_i + \varphi_i}, \quad \theta_i = \beta_i + \varphi_i. \quad (7.2)$$

Quando uma sequência de poligonais convexas γ_n converge a uma curva regular γ , o ângulo externo $\theta_i(n)$ converge a zero e $\rho_i(n)$ e $R_i(n)$ convergem para o raio de curvatura de γ no ponto $\gamma(p_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(p_i)$. Na seção 7.5 faremos uma descrição mais precisa dessa convergência.

Lema 7.1. Considere um polígono regular convexo com n lados e comprimento L . Então o seu raio de curvatura é constante e igual a $\rho = \frac{L}{2\pi}$.

Demonstração. Em cada vértice p_i temos que $l_i + l_{i-1} = 2\rho\theta_i$, com $l_0 = l_n$ e $l_1 = l_{n+1}$, onde ρ é o raio de curvatura.

Logo,

$$2L = \sum_{i=1}^n (l_i + l_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 2r\theta_i = 2\rho(2\pi).$$

□

Definição 7.2. Uma poligonal convexa é chamada umbilica quando o raio de curvatura for constante.

O seguinte teorema foi obtido em [Cufí, Reventós e Rodríguez \(2015\)](#).

Teorema 7.1. *Seja γ uma poligonal convexa com n vértices com lados de comprimento l_i e raio de curvatura ρ_i . Seja $L = l_1 + \dots + l_n$ o comprimento de γ .*

Então,

$$\frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \quad (7.3)$$

Temos igualdade se, e somente se, γ for umbílica.

Demonstração. Seja $\theta_i = \alpha_i \pi$. Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} &= \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^n l_i \left(\frac{l_{i-1} + l_i}{\alpha_i} + \frac{l_i + l_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(l_i + l_{i+1})^2}{\alpha_{i+1}} + \frac{l_1(l_0 + l_1)}{\alpha_1} + \frac{l_n(l_n + l_{n+1})}{\alpha_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(l_i + l_{i+1})^2}{\alpha_{i+1}} \right). \end{aligned}$$

Para obter a última igualdade usamos que $\alpha_1 = \alpha_{n+1}$, $l_0 = l_n$ e $l_1 = l_{n+1}$. Também reindexamos o primeiro somatório substituindo a variável ($i \rightarrow i + 1$).

Como $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz ($(u, v) \leq |u||v|$), temos que

$$\begin{aligned} 2L &= \sum_{i=1}^n (l_i + l_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^n \frac{(l_i + l_{i+1})^2}{\sqrt{\alpha_{i+1}}} \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(l_i + l_{i+1})^2}{\alpha_{i+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(l_i + l_{i+1})^2}{\alpha_{i+1}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2L^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{(l_i + l_{i+1})^2}{\alpha_{i+1}} = 4\pi \sum_{i=1}^n l_i \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2}.$$

Simplificando obtemos a desigualdade afirmada. \square

Corolário 7.1. *Nas condições do Teorema 7.1 temos que a área A da região delimitada por γ satisfaz a desigualdade*

$$A \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \quad (7.4)$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 7.1 e da desigualdade isoperimétrica $L^2 \geq 4\pi A$. \square

Observação 7.2. A versão contínua do Corolário 7.1 é o seguinte resultado, veja [Cufi, Reventós e Rodríguez \(2015\)](#). Seja γ uma curva estritamente convexa de classe C^2 no plano \mathbb{R}^2 . Então

$$A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \rho(s) ds.$$

Aqui, A é a área da região delimitada por γ , s o comprimento de arco euclidiano de γ e $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ o raio de curvatura.

O seguinte resultado é conhecido como lema de Cauchy e tem aplicações em problemas de rigidez de poliedros convexos.

Proposição 7.1. *Sejam $\gamma = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e $\Gamma = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ duas curvas poligonais convexas (abertas) no plano. Sejam α_i o ângulo interno de γ no vértice p_i e β_i o correspondente de Γ no vértice q_i . Suponha que $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 2, \dots, n-1$ e $|p_{i+1} - p_i| \leq |q_{i+1} - q_i|$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Então $|p_n - p_1| \leq |q_n - q_1|$.*

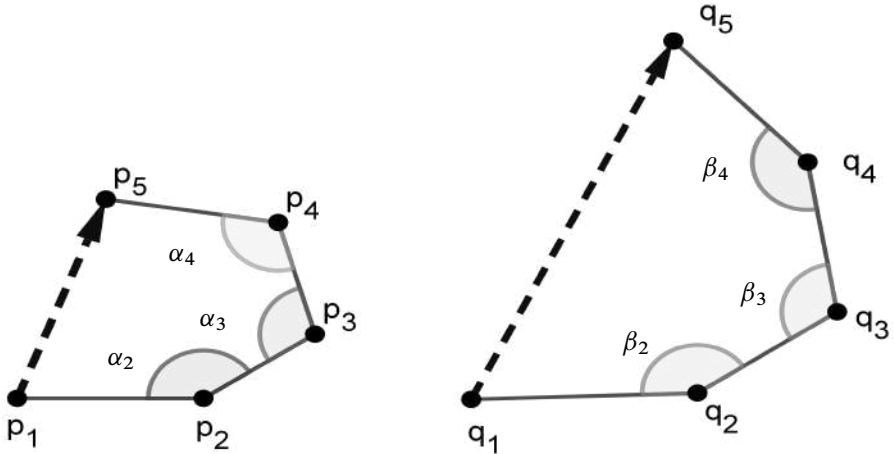


Figura 7.4: Curvas poligonais abertas.

Demonstração. A prova a seguir será baseada em [Schoenberg e Zaremba \(1967\)](#). Escolha um sistema de coordenadas tal que o segmento p_1, p_n esteja contido no eixo x e p_n a direita de p_1 . Seja p_k o vértice de γ mais afastado do eixo x . Consideramos o eixo ortogonal y contendo o vértice p_k . Observe que não temos unicidade de p_k . Um lado do polígono poderia ser paralelo ao vetor $p_n - p_1$. Na argumentação a seguir vamos supor

$|p_{i+1} - p_i| = |q_{i+1} - q_i|$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Transladando a poligonal Γ podemos supor $q_k = p_k$. Com uma rotação podemos supor também que os vértices p_i e q_i possuem ordenadas menor ou igual a y_k . Seja $p_i = (x_i, y_i)$ e ϕ_i o ângulo do vetor $v_i = p_{i+1} - p_i$ com o eixo x . Supondo $y_k > 0$ temos que $\phi_i \in (-\pi, 0)$ para todo $k \leq i \leq n-1$. Portanto a abscissa de p_n é $|v_k| \cos \phi_k + \dots + |v_{n-1}| \cos \phi_{n-1}$. Seja $\varphi_i \in (-\pi, 0)$ o ângulo entre o vetor $w_i = q_{i+1} - q_i$ e o eixo x e denote $q_i = (a_i, b_i)$. Seguindo o mesmo raciocínio acima temos que a abscissa de q_n é $|w_k| \cos \varphi_k + \dots + |w_{n-1}| \cos \varphi_{n-1} = |v_k| \cos \varphi_k + \dots + |v_{n-1}| \cos \varphi_{n-1}$. Nas condições acima, como $\alpha_i \leq \beta_i$, temos que $-\pi < \varphi_i \leq \phi_i < 0$ para todo $k \leq i \leq n-1$. Portanto $x_n \leq b_n$ e a desigualdade é estrita se pelo menos uma desigualdade entre os ângulos internos ocorrer. Usando um argumento de simetria (reflexão) em relação ao eixo y considerando a parte das poligonais contidas na região $x < 0$ também concluímos que $a_1 \leq x_1$. Assim obtemos que $x_n - x_1 < a_n - a_1$ e por conseguinte $|p_n - p_1| \leq |q_n - q_1|$. Veja Fig. 7.5.

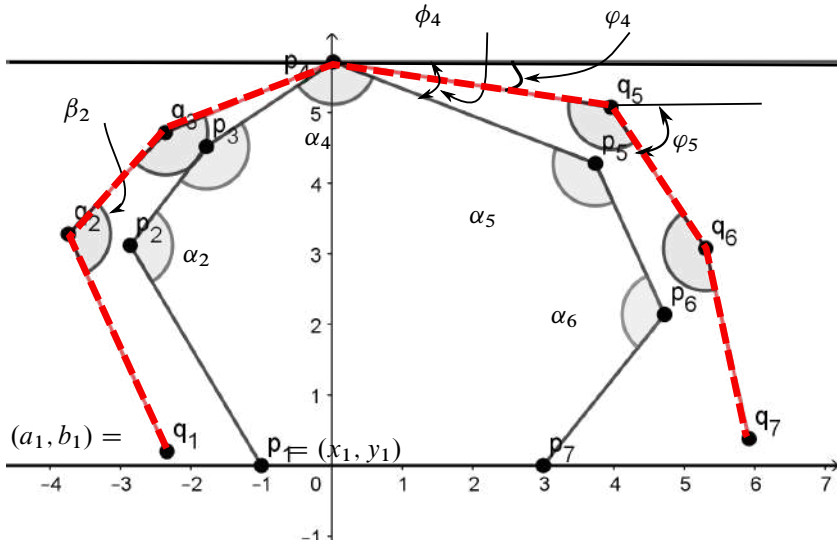


Figura 7.5: Curvas poligonais abertas e ilustração da prova com sete vértices.

Confiemos ao leitor concluir a demonstração no caso em que $|v_i| \leq |w_i|$. □

Teorema 7.2. *Sejam $\gamma = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e $\Gamma = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ duas curvas poligonais convexas fechadas no plano. Sejam α_i os ângulos internos de γ e β_i os correspondentes de Γ . $|p_{i+1} - p_i| = |q_{i+1} - q_i|$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Seja $\theta_i = \beta_i - \alpha_i$ e suponha que $\theta_i \neq 0$ para algum i . Então a sequência cíclica θ_i possui pelo menos 4 variações de sinal.*

Demonstração. Exercício. □

7.3 Teorema dos quatro vértices discreto

Esta seção tem como objetivo obter o teorema de quatro vértices para curvas poligonais. A apresentação será baseada em [Wegner \(1994\)](#).

Proposição 7.2. *Considere quatro vértices consecutivos p_1, p_2, p_3, p_4 de um polígono convexo \mathcal{P} tal que os ângulos interiores α_2 e α_3 satisfaçam $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$. Suponha que os raios dos círculos osculadores satisfaçam $r_1 \geq r_2 \geq r_3$. Considere o arco poligonal $P_e = \{p_1, q, p_4\}$ obtido do arco $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ sendo q o ponto de interseção entre a reta L_{12} passando por p_1 e p_2 e a reta L_{34} passando por p_3 e p_4 . Sejam \bar{r}_1 e \bar{r}_2 os raios dos círculos osculadores de P_e correspondentes aos segmentos $[p_1, q]$ e $[q, p_4]$. Então*

$$r_1 \geq \bar{r}_1 \geq r_2 \geq \bar{r}_2 \geq r_3.$$

Além disso, se $r_1 > r_2$ ou $r_2 > r_3$ então $\bar{r}_1 > r_2$. Veja Fig. 7.6.

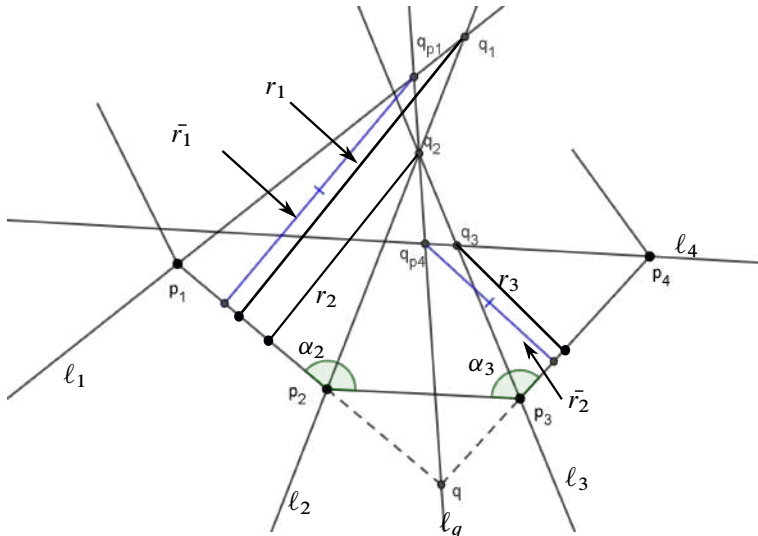


Figura 7.6: Arcos poligonais convexos $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ e $\{p_1, q, p_4\}$ e pontos focais $\{q_1, q_2, q_3\}$ e $\{q_{p1}, q_{p4}\}$.

Demonstração. Os pontos focais $q_i = l_i \cap l_{i+1}$ da poligonal $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ são as interseções das bissetrizes l_i . Os pontos focais da poligonal $\{p_1, q, p_4\}$ são $q_{p1} = l_1 \cap l_q$

e $q_{p_4} = \ell_4 \cap \ell_q$. Pelas hipóteses temos que $q_2 = \ell_2 \cap \ell_q \cap \ell_3$. Como $r_2 \geq r_3$ temos que o ponto focal q_{p_4} é exterior ao triângulo com vértices $\{p_3, q_2, p_4\}$. Logo $\bar{r}_2 \geq r_3$. Se $r_2 > r_3$ o ponto q_{p_4} está no interior do segmento $[q, q_2]$ e portanto $\bar{r}_2 < r_2$. Argumentação similar, supondo $r_1 > r_2$, concluímos que o ponto $q_{p_1} \in \ell_q$ está exterior ao segmento $[q, q_2]$ e consequentemente $r_1 > \bar{r}_1 > r_2$. \square

Definimos as sequências $(\Delta R)_i = R_{i+1} - R_i$ e $(\Delta r)_i = r_{i+1} - r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 7.3. *Seja γ uma curva poligonal fechada convexa não contida num círculo. Então ambas as sequências cíclicas $(\Delta R)_i$ e $(\Delta r)_i$ possuem pelo menos 4 variações de sinal. Mais precisamente, os raios r_i dos círculos osculadores possuem 4 valores extremais (dois máximos e dois mínimos alternados). O mesmo é válido para os raios R_i dos círculos circunscritos.*

Demonstração. Primeiro observamos que um triângulo está inscrito num círculo e os círculos osculadores são coincidentes. Um quadrilátero convexo sempre possui uma variação da forma $\{+, -, +, -\}$. Na Fig. 7.7, que ilustra o caso geral, temos $r_1 < r_2$, $r_2 > r_3$, $r_3 < r_4$ e $r_1 < r_4$. Mais detalhes veja a seção 7.4.

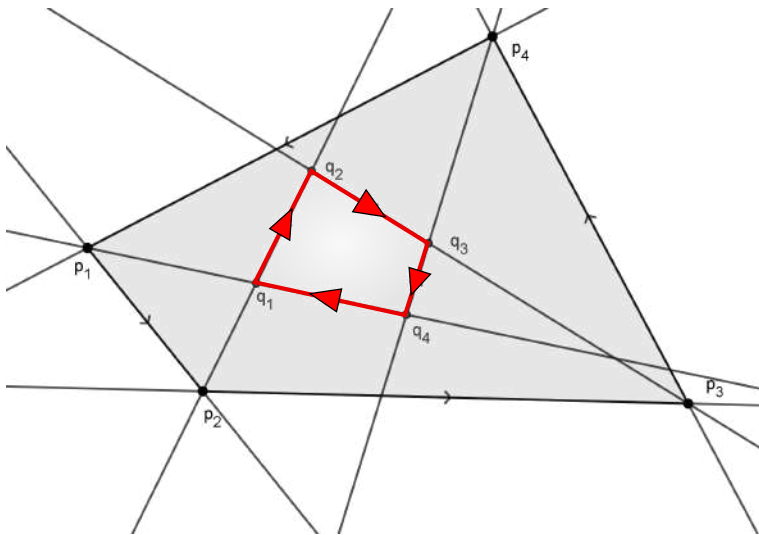


Figura 7.7: Quadrilátero convexo $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ e pontos focais $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$.

Suponhamos a seguir que temos uma poligonal convexa \mathcal{P} não circular com $n \geq 5$ vértices e possuindo somente duas variações de sinal, ou seja, somente dois valores extremais para os raios r_i dos círculos osculadores. Logo podemos encontrar 4 vértices consecutivos de \mathcal{P} , os quais renomeamos por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, satisfazendo as hipóteses da Proposição

7.2. A seguir substituímos o arco $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ pelo arco $\{p_1, q, p_4\}$ e com $\bar{r}_1 \geq \bar{r}_2$ obtendo uma poligonal convexa \bar{P} com $n - 1$ vértices e sem alterar a quantidade de valores extremais dos raios r_i . Seguindo por indução e supondo por contradição que temos somente dois valores extremais para os r_i em cada etapa, substituímos o polígono inicial por um quadrilátero. Isto é uma contradição. A análise da variação de sinal da sequência R_i confiamos ao leitor. \square

7.4 Evoluta de uma poligonal convexa

A seguir definimos a evoluta de γ , a qual suporemos uma curva fechada convexa. Por cada vértice de γ consideramos a bissetriz interna ℓ_i passando pelo ponto p_i . Os vértices da evoluta Γ são as interseções $q_i = \ell_i \cap \ell_{i+1}$. Denotamos $\Gamma = \{q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1} = q_1\}$. Veja Fig. 7.8. A esquerda a evoluta é uma curva fechada simples. A direita, a evoluta é uma curva poligonal imersa com cruzamento transversal.

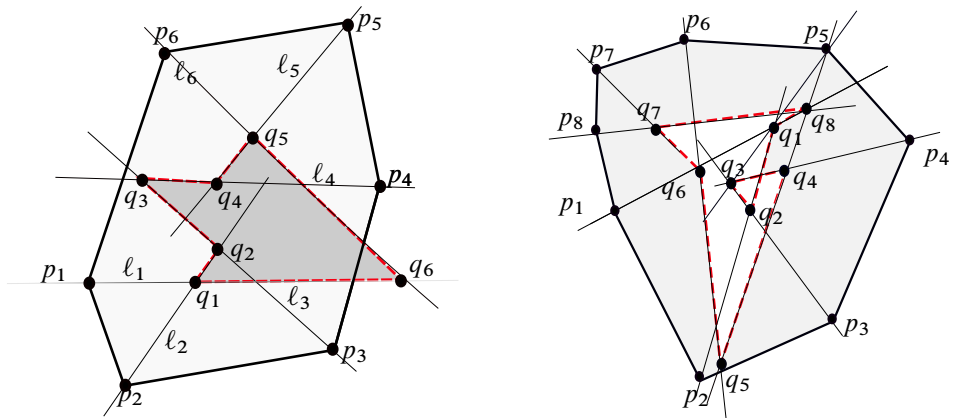


Figura 7.8: Evolutas de curvas poligonais convexas.

Em geral, uma noção importante e fundamental é o conceito de orientação. Considere γ orientada positivamente. Intuitivamente isto quer dizer que ao percorrer γ , a região delimitada por γ sempre fica a esquerda. A orientação da evoluta Γ será a induzida por γ , i.e., percorremos Γ seguindo os vetores $q_{i+1} - q_i$, ($i = 1, \dots, n$). Outra orientação são as das bissetrizes $\ell_i = p_i + t(q_i - p_i)$ que consideramos orientadas positivamente pelos vetores $q_i - p_i$. Em cada vértice q_i comparamos os vetores colineares $q_{i+1} - q_i$ e $q_i - p_{i+1}$. Quando $q_{i+1} - q_i = \lambda(q_i - p_{i+1})$, com $\lambda < 0$, os vértices q_i e q_{i+1} são denominados de *cúspides*.

Equivalentemente, a aresta $[q_{i-1}, q_i]$ é percorrida com orientações distintas quando considerada como parte da poligonal Γ e quando considerada como parte da bissetriz

ℓ_{i+1} com a orientação descrita acima. Na Fig. 7.9 as arestas $[q_1, q_2]$ e $[q_3, q_4]$ possuem a propriedade descrita e portanto todos os vértices são pontos de cúspides.

Dizemos que γ é genérica quando três bissetrizes consecutivas não intersectam-se num único ponto. Os triângulos não são genéricos. A maioria dos quadriláteros são genéricos. Isto significa que dado um quadrilátero não genérico uma pequena deformação dos seus vértices produz um equilátero cuja evoluta possui quatro vértices distintos. Um retângulo é genérico.

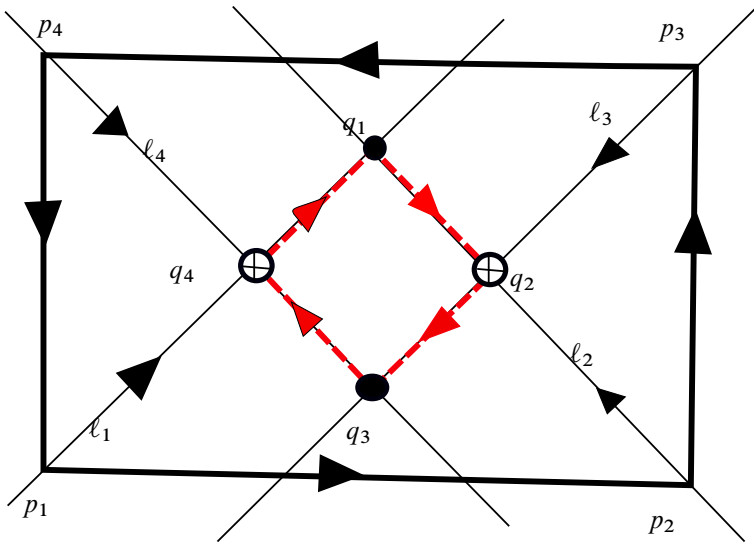


Figura 7.9: Evoluta do retângulo com quatro pontos do tipo cúspide.

Na Fig. 7.10 apresentamos dois exemplos de evolutas. A esquerda temos as arestas $[q_1, q_2]$, $[q_3, q_4]$ e $[q_5, q_1]$ com orientações opostas as das bissetrizes e a direita temos as arestas $[q_2, q_3]$, $[q_3, q_4]$ e $[q_5, q_1]$ com orientações opostas as das bissetrizes. Nos dois casos todos os vértices são pontos de cúspides.

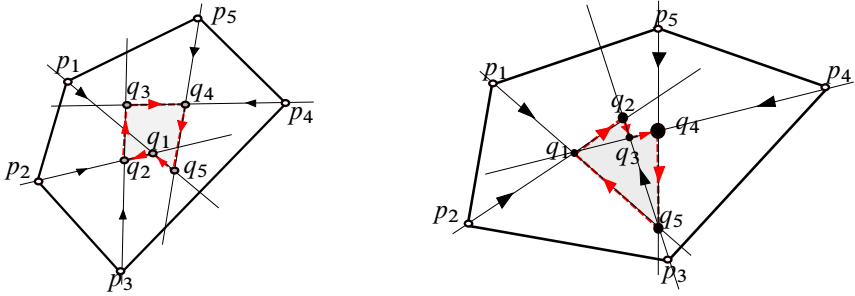


Figura 7.10: Evolutas de um pentágono.

Na Fig. 7.11 as arestas $[q_2, q_3]$ e $[q_5, q_6]$ possuem orientações opostas as das bissetrizes e portanto temos quatro pontos tipo cúspide $\{q_2, q_3, q_5, q_6\}$.

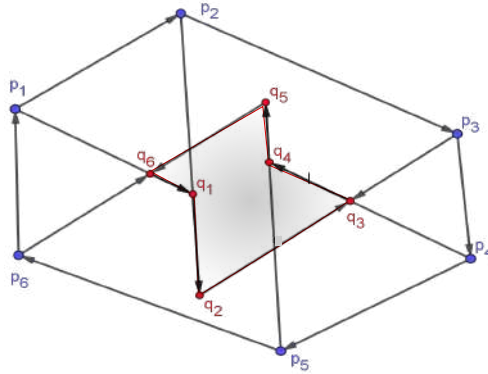


Figura 7.11: Evoluta de um hexágono.

O seguinte teorema foi obtido por S. Tabachnikov, [Tabachnikov \(1995\)](#), e a demonstração que apresentaremos a seguir será baseada neste trabalho.

Teorema 7.4. *Seja γ uma curva poligonal fechada convexa genérica. Então a sua evoluta Γ possui pelo menos quatro cúspides.*

Demonstração. Inicialmente consideramos uma poligonal $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ com arestas $[v_i, v_{i+1}]$ paralelas as arestas $[p_i, p_{i+1}]$ da poligonal γ e tal que os triângulos $\{0, v_i, v_{i+1}\}$ sejam semelhantes aos triângulos $\{q_i, p_i, p_{i+1}\}$. Construa uma poligonal S

tendo seus vértices s_i nas bissetrizes ℓ_i de γ e arestas paralelas as correspondentes de γ . A poligonal V é construída trasladando os vetores $v_i = s_i - p_i$ para o origem. Por construção a poligonal S é fechada, i.e., $v_{n+1} = v_1$. Veja Fig. 7.12.

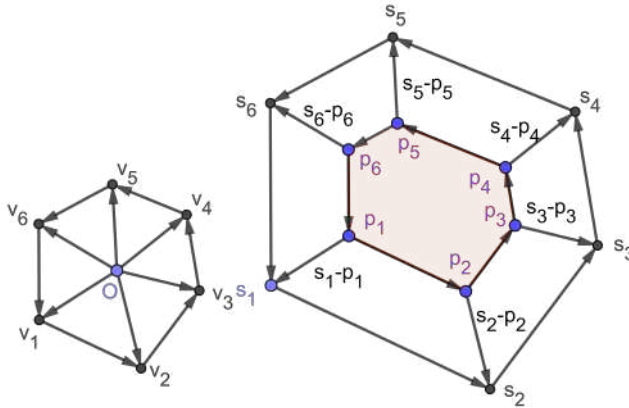


Figura 7.12: Poligonais paralelas.

Seja t_i o fator de proporcionalidade entre os triângulos $\{0, v_i, v_{i+1}\}$ e $\{q_i, p_i, p_{i+1}\}$. Definimos a sequência $(\Delta t)_i = t_{i+1} - t_i$. Temos que q_i é um ponto de cuspide se, e somente se, $(\Delta t)_{i-1}$ e $(\Delta t)_i$ possuem sinais diferentes.

De fato, a troca de sinal reflete a troca de orientação dos lados da evoluta.

Como $v_{i+1} - v_i = t_i(p_{i+1} - p_i)$ temos que,

$$\sum_{i=1}^n (\Delta t)_i p_{i+1} = - \sum_{i=1}^n t_i (p_{i+1} - p_i) = - \sum_{i=1}^n (v_{i+1} - v_i) = 0.$$

Como $\sum_{i=1}^n (\Delta t)_i = 0$, a sequência cíclica $(\Delta t)_i$ possui pelo menos duas trocas de sinais. Suponha que temos exatamente apenas duas trocas de sinais. Escolha $k > 0$ tal que $(\Delta t)_i > 0$ para $1 \leq i \leq k$ e $(\Delta t)_i < 0$ para $k+1 \leq i \leq n$.

Escolha uma reta ℓ intersectando as arestas $[p_1, p_2]$ e $[p_{k+1}, p_{k+2}]$. Com esta escolha todos os vetores $(\Delta t)_i p_{i+1}$ ficam situados na mesma região de $\mathbb{R}^2 \setminus \ell$. Assim $\sum_{i=1}^n (\Delta t)_i p_{i+1}$ não se anula. Contradição. \square

7.5 Relação entre curvaturas discretas e a euclidiana

Nesta seção, baseada em [Calabi, P. J. Olver e Tannenbaum \(1996\)](#), iremos comparar a curvatura discreta e a euclidiana.

Considere uma curva plana regular de classe C^r , $r \geq 2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Considere três pontos A , B e C não colineares no plano \mathbb{R}^2 definindo um triângulo $\Delta = \Delta(A, B, C)$. Denotamos por $a = |B - A|$, $b = |C - B|$ e $c = |A - C|$. O semiperimétrico de Δ é igual a $s = \frac{a+b+c}{2}$. O raio do círculo circunscrito a Δ , veja Fig. 7.13, é igual a

$$\frac{1}{R} = 4 \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc} \quad (7.5)$$

Definimos a *curvatura aproximada* da curva γ no ponto $B = \gamma(0)$ por

$$\tilde{k} = \frac{1}{R}. \quad (7.6)$$

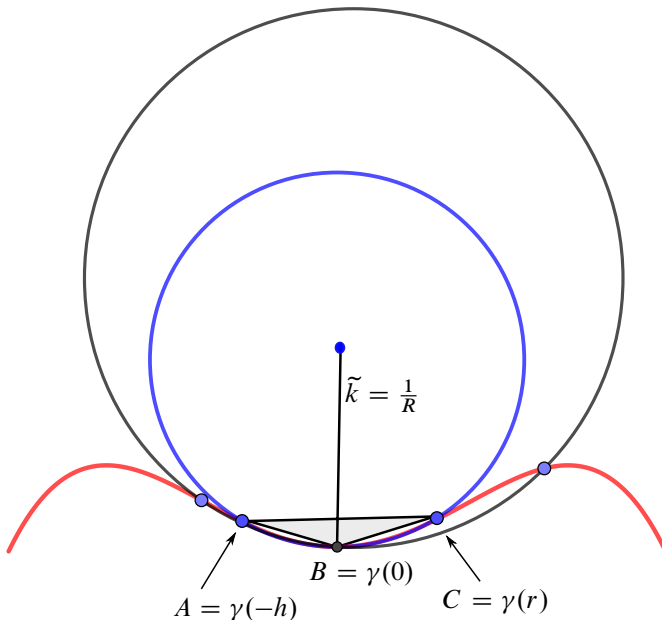


Figura 7.13: Círculo circunscrito ao triângulo $\Delta(A, B, C)$ inscrito na curva γ .

Observação 7.3. Temos a seguinte relação entre os raios dos círculos inscrito e circunscrito ao triângulo $\Delta(A, B, C)$.

$$rR = \frac{abc}{2(a+b+c)} \quad (7.7)$$

Pela equação (7.5) temos

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Teorema 7.5. Seja $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^r , $2 \leq r$, $A = \gamma(-h)$, $B = \gamma(0)$ e $C = \gamma(r)$, três pontos consecutivos suficientemente próximos. Seja $a = |B - A|$, $b = |C - B|$ e $c = |A - C|$. Seja k_e a curvatura euclidiana de γ e denote por $k = k_e(0)$, $k' = \frac{dk_e}{ds_e}(0)$, $k'' = \frac{d^2k_e}{ds_e^2}(0)$. Então temos a seguinte expansão

$$\begin{aligned} c^2 = & (a+b)^2 - \frac{1}{4}ab(a+b)^2k^2 + \frac{1}{6}ab(a^2-b^2)kk' \\ & - \frac{1}{24}ab(a^2-ab+b^2)(a+b)kk'' - \frac{1}{36}ab(a^2-b^2)^2(k')^2 \\ & - \frac{1}{64}ab(a^2-b^2)^2k^4 + O(7). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Demonstração. Usando as equações de Frenet dadas pela equação (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (x(s), y(s)), \\ x(s) &= s - \frac{1}{6}k^2s^3 - \frac{1}{8}kk's^4 + \frac{1}{5!}(k^4 - 3(k')^2 - 4kk'')s^5 + O(6), \\ y(s) &= \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}k's^3 + \frac{1}{24}(k'' - k^3)s^4 + \frac{1}{5!}(k''' - 6k'k'')s^5 + O(6). \end{aligned}$$

Portanto, com $a = |\gamma(-h) - \gamma(0)|$ e $b = |\gamma(r) - \gamma(0)|$ obtemos,

$$\begin{aligned} a &= h - \frac{1}{24}k^2h^3 + \frac{1}{24}kk'h^4 + \left(\frac{1}{1920}k^4 - \frac{1}{80}kk'' - \frac{1}{90}(k')^2 \right)h^5 + O(6) \\ b &= r - \frac{1}{24}k^2r^3 - \frac{1}{24}kk'r^4 + \left(\frac{1}{1920}k^4 - \frac{1}{80}kk'' - \frac{1}{90}(k')^2 \right)r^5 + O(6) \end{aligned}$$

Invertendo as funções acima obtemos

$$\begin{aligned} h &= a + \frac{1}{24}k^2a^3 - \frac{1}{24}kk'a^4 + \left(\frac{3}{640}k^4 + \frac{1}{80}kk'' + \frac{1}{90}(k')^2 \right)a^5 + O(6) \\ r &= b + \frac{1}{24}k^2b^3 + \frac{1}{24}kk'b^4 + \left(\frac{3}{640}k^4 + \frac{1}{80}kk'' + \frac{1}{90}(k')^2 \right)b^5 + O(6). \end{aligned}$$

Logo, para $c^2 = |\gamma(r) - \gamma(-h)|^2$, obtemos o resultado afirmado. \square

Teorema 7.6. *Seja $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^r , $2 \leq r$, $A = \gamma(-h)$, $B = \gamma(0)$ e $C = \gamma(r)$, três pontos consecutivos suficientemente próximos. Seja $a = |B - A|$, $b = |C - B|$ e $c = |A - C|$. Seja \tilde{k} a curvatura discreta do triângulo $\Delta = \Delta(A, B, C)$. Seja k_e a curvatura euclidiana de γ e denote por $k = k_e(0)$, $k' = \frac{dk_e}{ds_e}(0)$, $k'' = \frac{d^2k_e}{ds_e^2}(0)$. Então temos a seguinte expansão*

$$\tilde{k} = k + \frac{1}{3}(b-a)k' + \frac{1}{12}(a^2 - ab + b^2)k'' + O(3) \quad (7.9)$$

Demonstração. Da equação (7.8) obtemos

$$\begin{aligned} c = a + b - \frac{1}{2}ab(a+b)k^2 + \frac{1}{12}ab(a^2 - b^2)kk' - \frac{1}{48}ab(a^3 + b^3)kk'' \\ - \frac{1}{72}ab(a^2 - b^2)(k')^2 - \frac{1}{128}ab(a^3 + b^3)k^4 + O(5). \end{aligned}$$

Substituindo na equação (7.5) obtemos

$$\tilde{k}^2 = k^2 + \frac{1}{6}(a^2 - ab + b^2)kk'' + \frac{2}{3}(b-a)kk' + \frac{1}{9}(a-b)^2(k')^2 + O(3).$$

Portanto,

$$\tilde{k} = k + \frac{1}{3}(b-a)k' + \frac{1}{12}(a^2 - ab + b^2)k'' + O(3).$$

\square

Observação 7.4. Tomando pontos A e C com $a = b$ teremos

$$\tilde{k} = k + \frac{1}{12}k''a^2 + \dots$$

obtendo uma aproximação de segunda ordem entre a curvatura discreta \tilde{k} e a euclidiana k_e .

Teorema 7.7. *Seja $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^s , $2 \leq s$, $A = \gamma(-h)$, $B = \gamma(0)$ e $C = \gamma(r)$ com $0 < h$ e $0 < r$, três pontos consecutivos suficientemente próximos. Sejam $a = |B - A|$, $b = |C - B|$ e $c = |A - C|$. Seja \bar{k} a curvatura discreta, definida pela equação (7.1), da poligonal $\{A, B, C\}$ calculada no vértice B . Seja k_e a curvatura euclidiana de γ e denote por $k = k_e(0)$ e $k' = \frac{dk_e}{ds_e}(0)$. Então temos a seguinte expansão*

$$\begin{aligned} \bar{k} = k + \frac{1}{96}(a+b)^2k^3 - \frac{1}{96}(a-b)(a+b)^2k^2k' + \frac{1}{3}(b-a)k' \\ - \frac{1}{18k}(a-b)^2(k')^2 + O(4) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Em particular, para $a = b$ temos uma aproximação quadrática

$$\bar{k} = k + \frac{1}{24}k^3a^2 + 0(4).$$

Demonstração. O ângulo externo é

$$\cos \theta = \frac{\langle B - A, C - B \rangle}{\|B - A\| \|C - B\|}.$$

Os cálculos são análogos aos da demonstração do Teorema 7.6 e serão confiados ao leitor. \square

7.6 Exercícios

Exercício 7.1. No Teorema 7.1 mostre que

$$\frac{L^2}{4\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$$

se, e somente se, a poligonal for umbílica.

Exercício 7.2. Construa um exemplo de uma poligonal umbílica que não seja um polígono regular convexo. Classifique os quadriláteros umbílicos.

Exercício 7.3. (Projeto). Defina os conceitos de comprimento de arco afim, normal afim discreto, evoluta e de curvatura afim discreta para curvas poligonais convexas e, baseado em [Craizer, R. C. Teixeira e da Silva \(2012\)](#), formule e demonstre um teorema de seis vértices afins para curvas poligonais convexas. Veja também [Käferböck \(2014\)](#).

Exercício 7.4. Defina e explore o conceito de curvatura projetiva discreta para curvas poligonais convexas. Sugerimos discretizar a equação (6.11) do capítulo 6 que define $k(\sigma)$. Veja [Lewiner e Craizer \(2010\)](#).

Exercício 7.5. Estude o artigo [Schoenberg e Zaremba \(1967\)](#). Estabeleça o análogo do resultado da Proposição 7.1 para poligonais esféricas e demonstre-o.

Exercício 7.6. Seja $\gamma = \{p_1, \dots, p_n\}$ uma curva poligonal no plano \mathbb{R}^2 com ângulos externos θ_i ($i = 2, \dots, n-1$). Defina a *variação angular total* de γ como sendo $\kappa = \sum_{i=2}^{n-1} \theta_i$ e o comprimento $L = \sum_{i=1}^{n-1} |p_{i+1} - p_i|$. Supondo que $\kappa < \pi$, mostre que $L \leq \frac{|p_n - p_1|}{\cos \kappa}$.

Mostre que a igualdade ocorre se, e somente se, $\gamma = \{p_1, p_2, p_3\}$ e $|p_2 - p_1| = |p_3 - p_2|$.

Exercício 7.7. Demonstre o Teorema 7.3 para a variação de sinal da seqüência $(\Delta R)_i$.

Exercício 7.8. Analise o exercício 4.11 sem fazer hipóteses sobre a soma dos ângulos externos α_i .

Exercício 7.9. Seja $\mathcal{P}_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ uma poligonal convexa com todos os segmentos possuindo o mesmo comprimento. Suponha que quatro vértices consecutivos de \mathcal{P}_n não estejam situados num mesmo círculo (poligonal de Delaunay). Denotamos por α_i o ângulo interno no vértice p_i . Considere a seqüência cíclica $(\Delta\alpha)_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$. Supondo $n \geq 4$, mostre que a seqüência cíclica $(\Delta\alpha)_i$ possui pelo menos 4 variações de sinal.

Exercício 7.10. Considere a razão cruzada de quatro números distintos $\{a, b, c, d\}$ definida por

$$[a, b, c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}.$$

Considere duas seqüências distintas de números reais $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Defina $\alpha_i = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$, $\beta_i = [y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}]$ e considere a seqüência cíclica $(\Delta\theta)_i = \beta_i - \alpha_i$. Mostre que $(\Delta\theta)_i$ possui pelo menos quatro variações de sinal. Veja Pak (2010, p.205).

Exercício 7.11. (Projeto). Considere uma poligonal fechada $P = \{a_0, a_1, \dots, a_m = a_0\}$ em \mathbb{R}^n . Denote por α_i o ângulo entre os vetores $a_i - a_{i-1}$ e $a_{i+1} - a_i$ com $0 \leq \alpha_i \leq \pi$. Defina a curvatura total da poligonal por $\kappa(P) = \sum_{i=1}^m \alpha_i$.

Uma poligonal P está inscrita numa curva fechada γ com $\gamma(t) = \gamma(t+l)$ se existem parâmetros $t_i, t_i < t_{i+1}$, tais que $\gamma(t_i) = a_i$.

Dado uma curva fechada γ de classe C^2 definimos a curvatura total de γ como $\kappa(\gamma) = \sup \{\kappa(P), P \text{ poligonal inscrita em } \gamma\}$.

i) Seja P uma poligonal e P' uma poligonal obtida acrescentando um novo vértice a P . Mostre que $\kappa(P) \leq \kappa(P')$.

ii) Mostre que a curvatura total de uma curva γ de classe C^2 parametrizada por comprimento de arco s e comprimento $l > 0$ é $\kappa(\gamma) = \int_0^l |\gamma''(s)| ds$.

iii) Construa uma poligonal fechada em \mathbb{R}^3 possuindo curvatura total maior ou igual a 4π . Faça figuras.

iv) Estude os artigos J. W. Milnor (1950) e J. Milnor (1953).

Exercício 7.12. (Projeto). Considere uma poligonal planar fechada definida pelo conjunto de vértices $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0\}$, $x_i \in \mathbb{R}^2$. Considere a equação diferencial linear (fluxo pela curvatura discreta)

$$x'_i = x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i$$

com condição inicial $x_i(0) = x_i$ ($i = 0, \dots, n-1$).

i) Calcule explicitamente o polígono $P_n(t) = \{x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)\}$ para $n = 3$ e $n = 4$.

- ii) Analise a forma geométrica (ponto de vista euclidiano) do polígono $P_n(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.
- iii) Analise a forma geométrica (ponto de vista da geometria afim) do polígono $P_n(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.
- iii) Estude os artigos [Chow e Glickenstein \(2007\)](#), [C. Rademacher e H.-B. Rademacher \(2017\)](#) e [Vieira e R. Garcia \(2018\)](#).

Exercício 7.13. (Projeto) Considere um triângulo equilátero “rolando” idealmente sobre uma reta.

- i) Descreva a trajetória de um vértice do triângulo e calcule a área da região delimitada pelo gráfico dessa curva após uma volta completa.
- ii) Descreva a trajetória do baricentro do triângulo e calcule a área da região delimitada pelo gráfico dessa curva após uma volta completa.
- iii) Generalize os itens i) e ii) para um triângulo qualquer. Considere as trajetórias de pontos especiais (incentro, ortocentro, circuncentro, baricentro, etc).
- iv) Investigue as curvas geradas pelos vértices de um polígono regular rolando sobre uma reta, ou mais geralmente sobre um círculo e/ou sobre outro polígono.

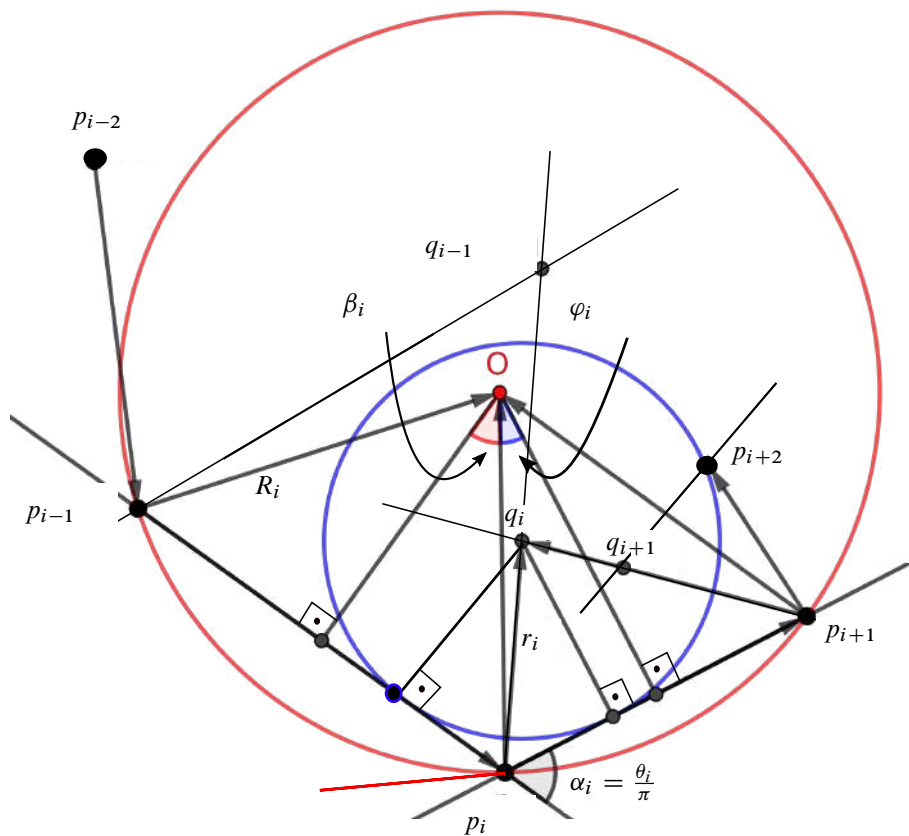


Figura 7.3: Curvatura de uma poligonal no vértice p_i .



Problema de Toeplitz

“Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit.”
“One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.”

– Stefan Banach (1892-1945)

8.1 Introdução

Neste capítulo iremos expor um outro problema geométrico centenário relacionado às curvas planas. Trata-se do problema de inscrever um quadrado numa curva fechada e simples no plano, formulado por O. Toeplitz, [Toeplitz \(1911\)](#). Veja também [Klee \(1979\)](#), [Klee e Wagon \(1991\)](#), [Pettersson, Tverberg e Östergård \(2014\)](#) e [Matschke \(2014\)](#) para uma visão recente (“*survey*”) sobre o tema e suas variações.

8.2 Problema do Quadrado Inscrito de Toeplitz

Nesta seção iremos considerar o problema de Toeplitz no caso especial da curva ser convexa e demonstrar o resultado obtido em [Emch \(1913\)](#). Em toda a sua generalidade este é ainda um problema em aberto, ou seja, não resolvido. Para desenvolvimento recente sobre o problema veja [Tao \(2017\)](#).

Problema 8.1. *Toeplitz (1911)] Dado uma curva de Jordan (fechada e simples) γ no plano \mathbb{R}^2 . É possível obter um quadrado com vértices contidos no traço da curva γ ?*

Para ilustrar a generalidade do problema veja a Fig. 8.1.

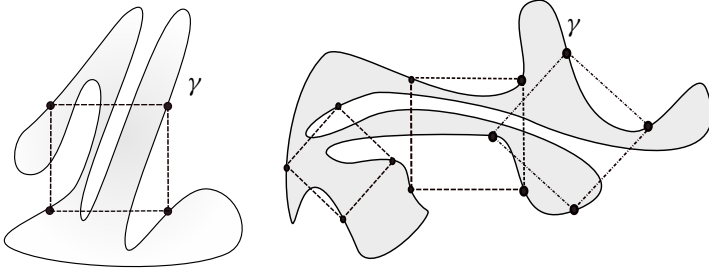


Figura 8.1: Quadrados inscritos em curvas de Jordan.

A partir do problema de Toeplitz podemos formular várias outros relacionados, tais como, quantos quadrados inscritos existem e qual é a sua paridade? Existem infinitos quadrados inscritos em curvas fechadas simples não circulares?

Exemplo 8.1. *Na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ existe apenas um quadrado inscrito. Os seus vértices são $(\pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$.*

Exemplo 8.2. *Na quártica $Q_4 = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 1\}$, o quadrado com vértices $(\pm 2^{-\frac{1}{4}}, \pm 2^{-\frac{1}{4}})$ está inscrito em Q_4 . Também o quadrado com vértices $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ está inscrito em Q_4 . De fato existem infinitos quadrados inscritos em Q_4 . Com efeito, as retas $y = kx$ e $y = -\frac{1}{k}x$ intersectam a quártica Q_4 nos 4 pontos $P_1 = (\frac{1}{\sqrt[4]{1+k^4}}, \frac{k}{\sqrt[4]{1+k^4}})$, $P_2 = (\frac{k}{\sqrt[4]{1+k^4}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{1+k^4}})$, $P_3 = -P_1$ e $P_4 = -P_2$ que são vértices de um quadrado de lado $L(k) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt[4]{1+k^4}}$. Observamos que $L(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(k) = \sqrt{2}$ e $\max_{k \in [0, \infty)} L(k) = L(1) = 2^{\frac{3}{4}}$.*

Teorema 8.1 (A. Emch). *Seja γ uma curva convexa de classe C^2 , fechada e simples (curva de Jordan). Então sempre existe um quadrado inscrito em γ .*

A demonstração será baseada nos lemas introduzidos a seguir.

Considere um ponto $p \in \gamma$ e um par de retas ortogonais \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 passando pelo ponto p .

Considere a família de retas $(\mathcal{L})_\alpha$ paralelas a \mathcal{L}_1 (análogo para \mathcal{L}_2) e considere a curva γ_α definida pelos pontos médios das cordas $[P_1(\alpha), P_2(\alpha)]$, o segmento compacto intersectando a reta \mathcal{L}_α com a curva γ . Analogamente considere a curva γ_β referente a construção acima para a família de retas paralelas a \mathcal{L}_2 .

Lema 8.1. As curvas γ_α e γ_β intersectam-se em apenas um ponto p_{12} contido no interior da curva γ . Veja Fig. 8.2

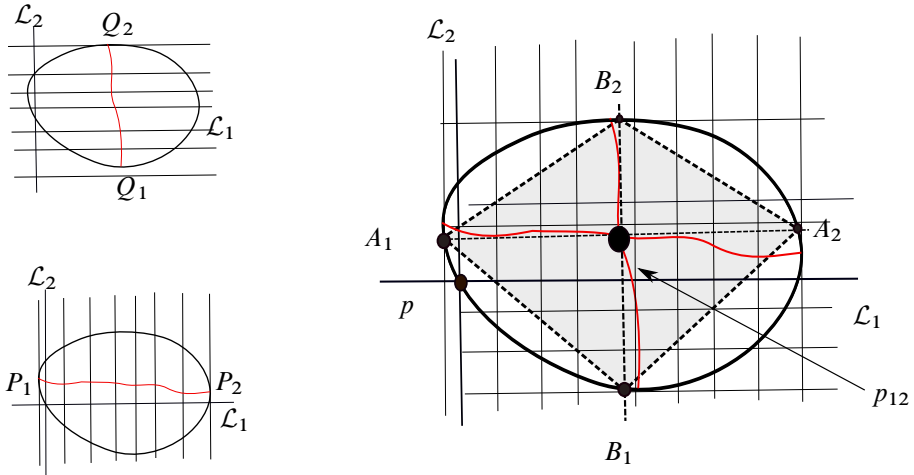


Figura 8.2: Losango inscrito numa curva convexa.

Demonstração. Pela construção acima as curvas γ_α e γ_β estão contidas no interior de γ e intersectam-se em pelo menos um ponto p_{12} .

Pelo ponto p_{12} considere as retas paralelas a \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 passando por p_{12} e intersectando a curva γ em quatro pontos A_1, A_2, B_1, B_2 . Veja Fig. 8.2. Pela construção das famílias de retas paralelas temos que o quadrilátero tendo como vértices os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 é um losango (diagonais cruzando ortogonalmente e lados paralelos de mesmo comprimento).

Caso exista mais de um ponto de intersecção entre γ_α e γ_β iremos obter outro losango com centro p'_{12} e vértices A'_1, B'_1, A'_2, B'_2 . Estes dois losangos possuem lados paralelos.

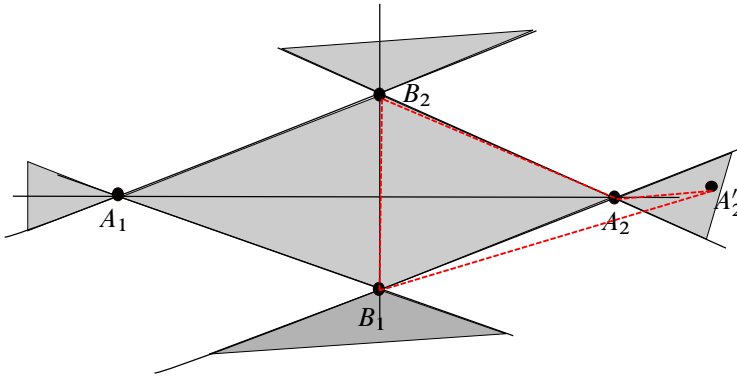


Figura 8.3: Unicidade do losango inscrito na curva convexa.

Uma possibilidade é de que pelo menos um dos vértices do segundo losango pertença a uma das regiões sombreadas na Fig. 8.3 referente ao primeiro losango. Assim obtemos um quadrilátero não convexo inscrito em γ . Uma contradição. Confiamos ao leitor verificar as demais possibilidades das possíveis posições relativas entre os losangos e concluir a demonstração do lema. \square

Temos associado a cada par de retas ortogonais $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ passando pelo ponto $p \in \gamma$ um único losango $L = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ inscrito na curva γ . É claro que o mesmo losango é obtido tomando o par $\{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1\}$.

Lema 8.2. *Existe uma correspondência biunívoca entre todos os pares de retas ortogonais passando por p e todos os losangos inscritos em γ .*

Demonstração. (\Rightarrow) Segue do lema 8.1.

(\Leftarrow) Considere um losango $L = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ inscrito em γ com eixos de simetrias ortogonais $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ com $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{p\}$.

Por uma translação e uma rotação obtemos um par de retas ortogonais $\{\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2\}$ passando por p e paralelas a $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$. Aplicando o lema 8.1 obtemos um losango $L' = \{A'_1, A'_2, B'_1, B'_2\}$ inscrito em γ e com lados paralelos aos do losango L . Novamente pelo lema 8.1 temos que $L = L'$. Isto conclui a demonstração. \square

Considere a seguir os comprimentos das diagonais do losango e denote por $\lambda = |A_1A_2|$ e $\mu = |B_1B_2|$ e para fixar o argumento suponha que a reta \mathcal{L}_1 seja horizontal (eixo x) e a reta \mathcal{L}_2 vertical (eixo y).

A família ortogonal de pares de retas $\{\mathcal{L}_1(\theta), \mathcal{L}_2(\theta)\}$ fazendo um ângulo θ com o par $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ dá origem a família de losangos $L(\theta)$ tais que $\lambda(0) = \mu(\frac{\pi}{2})$ e $\lambda(\frac{\pi}{2}) = \mu(0)$.

De fato, a variação no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ faz com que o losango com vértices $\{A_1, B_1, A_2, B_2\}$ em $\theta = 0$ evolui ao losango com vértices $\{B_1, A_2, B_2, A_1\}$ quando atingimos o ponto

$\theta = \frac{\pi}{2}$. Convidamos ao leitor analisar a situação na elipse. Como todo o processo é contínuo temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe pelo menos um $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\lambda(\theta_0) = \mu(\theta_0)$ e portanto temos definido o quadrado inscrito em γ . Portanto o teorema 8.1 está demonstrado.

8.3 Exercícios

Exercício 8.1. Dê exemplo de uma curva fechada simples γ , diferente da elipse, onde existe somente um quadrado inscrito em γ .

Exercício 8.2. Mostre que num quadrado Q podemos inscrever infinitos quadrados. Faça figuras.

Exercício 8.3. i) Dê exemplos de várias curvas de Jordan possuindo infinitos quadrados inscritos.

ii) No retângulo de vértices $(\pm a, \pm b)$, $(a > b)$, encontre todos os quadrados inscritos.

iii) No paralelogramo gerado pelos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (a, b)$. $(a \neq 0)$, determine todos os quadrados inscritos.

iv) Na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, justifique a unicidade do quadrado inscrito.

v) Na hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determine todos dos quadrados inscritos.

Exercício 8.4. Seja $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h(0) = h(1) = 0$ e $h(x) > 0$ se $x \in (0, 1)$. Considere a curva fechada simples γ formada pela justaposição do segmento $[0, 1] \times \{0\}$ e o gráfico de h . Faça uma figura ilustrando a situação geométrica descrita. Mostre que existe um quadrado inscrito em γ . Veja [Nielsen \(2019\)](#).

Exercício 8.5. Determine todos os quadrados inscritos na curva fechada simples de classe C^1 definida por $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ e $x^4 + y^4 = 1$, $y \leq 0$.

Exercício 8.6. Determine todos os quadrados inscritos na curva fechada simples de classe C^0 definida por

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & |x| < 1, \\ x^4 + y^4 = 1, & y \leq 0. \end{cases}$$

Exercício 8.7. Calcule os quadrados inscritos nas curvas algébricas homogêneas $x^{2m} + y^{2m} = 1$, $m \geq 3$.

Exercício 8.8. Mostre que existe um cubo inscrito no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a > b > c > 0)$.

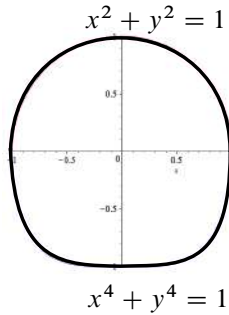


Figura 8.4: Curva convexa de classe C^1 .

Exercício 8.9. Mostre que numa curva algébrica de grau d no plano temos infinitos quadrados inscritos ou no máximo $\frac{5d^4 - 5d^2 + 4d}{4}$. Veja [Matschke \(2014\)](#).

Exercício 8.10. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa de classe C^k , $k \geq 1$, e D um disco convexo tal que $f(p) \geq 0$, $p \in D$ e $f(p) = 0$, $p \notin D$. Seja $d > 0$ um número real dado. Mostre que existem quatro pontos p_i , ($i = 1, \dots, 4$) formando um quadrado de lado d e centro contido em D , tal que $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) = f(p_4)$. Veja [Fenn \(1970\)](#).

Exercício 8.11. i) Mostre que existem infinitos paralelogramos inscritos na elipse $E_1(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Sugestão: Encontre esta família de paralelogramos todos tangentes a elipse

$$E_2(x, y) = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} \right) x^2 + \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^2} \right) y^2 - 1 = 0.$$

Os paralelogramos inscritos são as órbitas de período 4 associado ao par de elipses confocais $\{E_1, E_2\}$.

ii) Encontre um paralelogramo inscrito na elipse E_1 e que possua perímetro máximo.

iii) Encontre um quadrado Q inscrito na elipse E_2 e calcule a área da região delimitada por Q .

iv) Encontre um quadrado Q circunscrito a elipse E_1 , calcule $Q \cap E_1$ e a área da região delimitada por Q .

Exercício 8.12. Um quadrilátero é chamado *cíclico* quando possuir círculo circunscrito. Estude o artigo [Akopyan e Avvakumov \(2018\)](#) que mostra a existência de um quadrilátero cíclico inscrito numa curva convexa de classe C^1 . Veja também [Matschke \(2018\)](#).

Exercício 8.13. Estude o artigo [Pak \(2008\)](#) que trata do problema de inscrever um quadrado numa curva poligonal fechada.

Exercício 8.14. (Projeto) Estude o artigo [Tao \(2017\)](#) que mostra o seguinte fato.

Sejam $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções $((1 - \varepsilon)$ -Lipschitz com $f(0) = g(0)$, $g(1) = f(1)$ e $G_f \cap G_g = \{(0, f(0)) \cup (1, f(1))\}$. Considere a curva de Jordan γ formada pela justaposição dos dois gráficos $G_f = \{(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$ e $G_g = \{(x, g(x)), x \in [0, 1]\}$. Então existe um quadrado inscrito em γ .

Exercício 8.15. (Projeto) Estude o artigo [Pettersson, Tverberg e Östergård \(2014\)](#) que generaliza a conjectura de Toeplitz considerando curvas de Jordan com vértices no reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e lados horizontais e verticais.

Bibliografia

- S. S. Abhyankar e C. L. Bajaj (1988). “Automatic parameterization of rational curves and surfaces. III. Algebraic plane curves”. *Comput. Aided Geom. Design* 5.4, pp. 309–321. MR: 983465. Zbl: 0655.65019 (ver p. 25).
- A. Akopyan e S. Avvakumov (2018). “Any cyclic quadrilateral can be inscribed in any closed convex smooth curve”. *Forum Math. Sigma* 6, e7, 9. MR: 3810027. Zbl: 1395.53001 (ver p. 154).
- H. Alencar e W. Santos (2008). *Introdução às curvas planas*. XII Escola de Geometria Diferencial, IME/UFG (2002). Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, p. 253 (ver pp. 3, 22).
- G. Ancochea (1955). “On the geometric interpretation of the projective curvature of a real plane curve”. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 20, pp. 52–56. MR: 0074851 (ver p. 124).
- M. Andrade e T. Lewiner (2011). *Cálculo e estimação de invariantes geométricos: uma introdução às geometrias Euclidiana e afim*. Publicações Matemáticas do IMPA. 28º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, RJ, pp. ii+127. MR: 2816506. Zbl: 1258.53001 (ver p. 70).
- T. M. Apostol e M. A. Mnatsakanian (2010). “Tanvolutes: generalized involutes”. *Amer. Math. Monthly* 117.8, pp. 701–713. MR: 2732246. Zbl: 1210.53005 (ver p. 27).
- (2012). *New horizons in geometry*. Vol. 47. The Dolciani Mathematical Expositions. With an introduction by Don Albers and a foreword by Don Chakerian. Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. xiv+513. MR: 3024916. Zbl: 1268.51001 (ver p. 27).
- V. I. Arnold (1994). *Topological invariants of plane curves and caustics*. Vol. 5. University Lecture Series. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University, New Brunswick, New Jersey. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. viii+60 (ver pp. 11, 52).

- J. Arroyo, O. J. Garay e J. J. Mencía (2008). “When is a periodic function the curvature of a closed plane curve?”. *Amer. Math. Monthly* 115.5, pp. 405–414. Zbl: 1165.53001 (ver p. 66).
- D. E. Barrett e M. Bolt (2010). “Laguerre arc length from distance functions”. *Asian J. Math.* 14.2, pp. 213–233. MR: 2746121. Zbl: 1225.51002 (ver p. 98).
- M. Berger e B. Gostiaux (1987). *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces*. Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, pp. vi+513. MR: 903026 (ver pp. 11, 126).
- R. Bix (2006). *Conics and cubics*. Second. Undergraduate Texts in Mathematics. A concrete introduction to algebraic curves. Springer, New York, pp. viii+346. MR: 2242725. Zbl: 1106.14014 (ver p. 106).
- A. I. Bobenko e Y. B. Suris (2008). *Discrete differential geometry*. Vol. 98. Graduate Studies in Mathematics. Integrable structure. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xxiv+404. MR: 2467378. Zbl: 1158.53001 (ver p. 130).
- M. Bolt (2007). “Extremal properties of logarithmic spirals”. *Beiträge Algebra Geom.* 48.2, pp. 493–520. MR: 2364804. Zbl: 1159.53002 (ver p. 23).
- A. Bonifant e J. Milnor (2017). “On real and complex cubic curves”. *Enseign. Math.* 63.1-2, pp. 21–61. MR: 3777131. Zbl: 1390.14088 (ver p. 126).
- H. L. Bray e J. L. Jauregui (2015). “On curves with nonnegative torsion”. *Arch. Math. (Basel)* 104.6, pp. 561–575. MR: 3350346. Zbl: 1320.53004 (ver p. 52).
- J. W. Bruce e P. J. Giblin (1992). *Curves and singularities*. Second. A geometrical introduction to singularity theory. Cambridge University Press, Cambridge, pp. xviii+321. MR: 1206472. Zbl: 0770.53002 (ver pp. 4, 11).
- G. Cairns e R. W. Sharpe (1990). “On the inversive differential geometry of plane curves”. *Enseign. Math. (2)* 36.1-2, pp. 175–196. MR: 1071419. Zbl: 0718.53013 (ver pp. 25, 98).
- E. Calabi, P. J. Olver e A. Tannenbaum (1996). “Affine geometry, curve flows, and invariant numerical approximations”. *Adv. Math.* 124.1, pp. 154–196. MR: 1423202. Zbl: 0973.53006 (ver pp. 98, 142).
- M. P. do Carmo (2016). *Differential geometry of curves & surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, pp. xvi+510. MR: 3837152. Zbl: 1352.53002 (ver pp. 18, 45).
- E. Cartan (1937). *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Gauthier Villars, Paris, p. 305 (ver pp. 106, 109, 110, 121).
- E. Catalan (1848). “Sur les normales aux coniques”. *Nouvelles annales de mathématiques Ire série* 7.7, pp. 332–337 (ver p. 19).
- G. D. Chakerian e S. K. Stein (1964). “On the centroid of a homogeneous wire”. *Michigan Math. J.* 11, pp. 189–192. MR: 0164281. Zbl: 0131.20201 (ver p. 23).
- M. Chasles (1880). *Traité de Géométrie Supérieure*. Gauthier-Villars, pp. XLII+645 (ver p. 104).
- M. Chasles (1989). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Reprint of the 1837 original. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, pp. iv+572. MR: 1355544 (ver p. 104).

- K. Chemla (2016). “The value of generality in Michel Chasles’s historiography of geometry”. Em: *The Oxford handbook of generality in mathematics and the sciences*. Oxford Univ. Press, Oxford, pp. 47–89. MR: [3588271](#) (ver p. [104](#)).
- B. Chow e D. Glickenstein (2007). “Semidiscrete geometric flows of polygons”. *Amer. Math. Monthly* 114.4, pp. 316–328. MR: [2281928](#). Zbl: [1171.52009](#) (ver p. [147](#)).
- H. S. M. Coxeter (1949). *The Real Projective Plane*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y., pp. x+196. MR: [0030205](#) (ver p. [123](#)).
- (1974). *Projective geometry*. Second. University of Toronto Press, Toronto, Ont., pp. xii+163. MR: [0346652](#). Zbl: [1032.51002](#) (ver p. [106](#)).
- M. Craizer, T. Lewiner e J.-M. Morvan (2007). “Combining points and tangents into parabolic polygons: an affine invariant model for plane curves”. *J. Math. Imaging Vision* 29.2-3, pp. 131–140. MR: [2385286](#) (ver p. [80](#)).
- M. Craizer, R. C. Teixeira e M. A. H. B. da Silva (2012). “Affine properties of convex equal-area polygons”. *Discrete Comput. Geom.* 48.3, pp. 580–595. MR: [2957633](#). Zbl: [1255.52001](#) (ver pp. [87](#), [145](#)).
- M. Craizer, R. Teixeira e V. Balestro (2018). “Closed cycloids in a normed plane”. *Monatsh. Math.* 185.1, pp. 43–60. MR: [3745700](#). Zbl: [1382.52002](#) (ver p. [88](#)).
- J. Cufi, A. Reventós e C. J. Rodríguez (2015). “Curvature for polygons”. *Amer. Math. Monthly* 122.4, pp. 332–337. MR: [3343069](#) (ver pp. [132](#), [134](#)).
- B. E. J. Dahlberg (2005). “The converse of the four vertex theorem”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 133.7, pp. 2131–2135. MR: [2137880](#). Zbl: [1229.53005](#) (ver pp. [65](#), [69](#)).
- (2008). “A discrete four vertex theorem”. *Geom. Dedicata* 133, pp. 111–128. MR: [2390072](#). Zbl: [1143.51009](#) (ver p. [87](#)).
- D. DeTurck, H. Gluck, D. Pomerleano e D. S. Vick (2007). “The four vertex theorem and its converse”. *Notices Amer. Math. Soc.* 54.2, pp. 192–207. MR: [2285124](#). Zbl: [1142.53004](#) (ver pp. [iv](#), [36](#), [65](#), [69](#)).
- J. Dymara (2000). “Duality for curves in affine plane geometry”. *Geom. Dedicata* 79.2, pp. 189–204. MR: [1748881](#). Zbl: [0955.53004](#) (ver p. [82](#)).
- S. Edwards e R. A. Gordon (2004). “Extreme curvature of polynomials”. *Amer. Math. Monthly* 111.10, pp. 890–899. MR: [2104693](#). Zbl: [1187.53004](#) (ver p. [24](#)).
- A. Emch (1913). “Some Properties of Closed Convex Curves in a Plane”. *Amer. J. Math.* 35.4, pp. 407–412. MR: [1506193](#) (ver p. [149](#)).
- C. A. Escudero e A. Reventós (2007). “An interesting property of the evolute”. *Amer. Math. Monthly* 114.7, pp. 623–628. MR: [2341325](#). Zbl: [1144.53007](#) (ver p. [22](#)).
- F. Fabricius-Bjerre (1962). “On the double tangents of plane closed curves”. *Math. Scand* 11, pp. 113–116. MR: [0161231](#). Zbl: [0173.50501](#) (ver p. [126](#)).
- (1977). “A relation between the numbers of singular points and singular lines of a plane closed curve”. *Math. Scand.* 40.1, pp. 20–24. MR: [0444673](#). Zbl: [0352.50011](#) (ver p. [126](#)).
- R. Fenn (1970). “The table theorem”. *Bull. London Math. Soc.* 2, pp. 73–76. MR: [0271940](#). Zbl: [0194.53901](#) (ver p. [154](#)).
- D. Figueiredo (1996). *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides, IMPA, RJ (ver p. [54](#)).

- T. C. Fon (1939). “On the theory of curves in projective plane”. *Tohoku Math. Journal* 45, pp. 252–258. Zbl: [65.0772.01](#) (ver p. [121](#)).
- G. Freilich (1966). “Centers of curvature”. *Bull. Amer. Math. Soc.* 72, pp. 297–299. MR: [0187154](#). Zbl: [0135.21601](#) (ver p. [21](#)).
- B. R. Freitas e R. A. Garcia (2018). “Inflection points on hyperbolic tori of \mathbb{S}^3 ”. *Q. J. Math.* 69.2, pp. 709–728. MR: [3815161](#). Zbl: [1398.53064](#) (ver p. [50](#)).
- D. Fuchs e S. Tabachnikov (2007). *Mathematical omnibus*. Thirty lectures on classic mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xvi+463. MR: [2350979](#). Zbl: [1318.00004](#) (ver p. [iv](#)).
- M. Gage e R. S. Hamilton (1986). “The heat equation shrinking convex plane curves”. *J. Differential Geom.* 23.1, pp. 69–96. MR: [840401](#). Zbl: [0621.53001](#) (ver p. [19](#)).
- R. Garcia (2007). “A special trefoil knot has two or more vertices”. *Results Math.* 50.1-2, pp. 43–51. MR: [2313130](#). Zbl: [1137.53001](#) (ver p. [49](#)).
- (2012). *Dinâmica e Geometria*. 2^o Colóquio de Matemática da Região Nordeste da SBM, UFPI. EDUFPI (ver p. [87](#)).
- (2019). “Elliptic Billiards and Ellipses Associated to the 3-Periodic Orbits”. *Amer. Math. Monthly* 126.6, pp. 491–504. Zbl: [07061253](#) (ver p. [98](#)).
- M. Ghomi (2013). “Vertices of closed curves in Riemannian surfaces”. *Comment. Math. Helv.* 88.2, pp. 427–448. MR: [3048192](#). Zbl: [1268.53042](#) (ver pp. [25](#), [49](#)).
- (2017). “Boundary torsion and convex caps of locally convex surfaces”. *J. Differential Geom.* 105.3, pp. 427–487. MR: [3619309](#). Zbl: [1381.53017](#) (ver p. [49](#)).
- É. Ghys (2017). *A singular mathematical promenade*. ENS Éditions, Lyon, pp. viii+302. MR: [3702027](#). Zbl: [06797578](#) (ver p. [126](#)).
- É. Ghys, S. Tabachnikov e V. Timorin (2013). “Osculating curves: around the Tait–Kneser theorem”. *Math. Intelligencer* 35.1, pp. 61–66. MR: [3041992](#). Zbl: [1294.53003](#) (ver pp. [82](#), [85](#)).
- A. Glesser, J. Shade e B. D. Suceavă (2015). “On the inverse curvature problem”. *College Math. J.* 46.3, pp. 207–214. MR: [3413908](#). Zbl: [1406.97025](#) (ver p. [17](#)).
- H. Gluck (1971). “The converse to the four vertex theorem”. *Enseignement Math.* (2) 17, pp. 295–309. MR: [0344998](#). Zbl: [0226.53001](#) (ver pp. [56](#), [66](#)).
- J. Gray (2011). *Worlds out of nothing*. Springer Undergraduate Mathematics Series. A course in the history of geometry in the 19th century, Second edition [of MR2305283]. Springer-Verlag London, Ltd., London, pp. xxvi+384. MR: [2760764](#). Zbl: [1205.01013](#) (ver pp. [104](#), [106](#)).
- H. Guggenheimer (1969a). “Notes on geometry, two short proofs of the four vertex theorem”. *Arch. Math. (Brno)* 5, pp. 125–130. MR: [0290247](#). Zbl: [0235.53001](#) (ver pp. [29](#), [30](#)).
- (1969b). “Sign changes, extrema, and curves of minimal order”. *J. Differential Geometry* 3, pp. 511–521. MR: [0262999](#). Zbl: [0197.17702](#) (ver p. [15](#)).
- H. W. Guggenheimer (1963). *Differential geometry*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-San Francisco-Toronto-London, pp. x + 378. MR: [0156266](#) (ver pp. [70](#), [83](#)).

- L. Guieu, E. Mourre e V. Y. Ovsienko (1997). “Theorem on six vertices of a plane curve via Sturm theory”. Em: *The Arnold-Gelfand mathematical seminars*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp. 257–266. MR: [1429895](#). Zbl: [1076.53500](#) (ver p. [84](#)).
- L. Halbeisen e N. Hungerbühler (2015). “A simple proof of Poncelet’s theorem (on the occasion of its bicentennial)”. *Amer. Math. Monthly* 122.6, pp. 537–551. MR: [3361732](#). Zbl: [1341.51017](#) (ver p. [106](#)).
- G.-H. Halphen (1880). “Sur les invariants différentiels des courbes gauches”. OC tome. 2, 353–446 (ver p. [106](#)).
- A. Hefez (1986). “Uma Introdução à história da geometria projetiva”. *Revista Matemática Universitária* 03.3, pp. 35–50 (ver p. [101](#)).
- E. Heil (1970). “Some vertex theorems proved by means of Moebius transformations”. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 85, pp. 301–306. MR: [0266130](#). Zbl: [0175.48103](#) (ver p. [46](#)).
- T. Hoffmann (2009). “Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces”. COE Lecture Notes Vol. 18, Faculty of Mathematics, Kyushu University. Zbl: [1258.53004](#) (ver p. [130](#)).
- A. Hurwitz (1902). “Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier”. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 19, pp. 357–408. MR: [1509016](#) (ver p. [52](#)).
- S. B. Jackson (1944). “Vertices for plane curves”. *Bull. Amer. Math. Soc.* 50, pp. 564–478. MR: [0010992](#). Zbl: [0060.34909](#) (ver pp. [7](#), [25](#), [36](#), [42](#)).
- F. Käferböck (2014). “Affine arc length polylines and curvature continuous uniform B-splines”. *Comput. Aided Geom. Design* 31.7-8, pp. 331–344. MR: [3268212](#). Zbl: [1364.65030](#) (ver p. [145](#)).
- N. Kamran, P. Olver e K. Tenenblat (2009). “Local symplectic invariants for curves”. *Commun. Contemp. Math.* 11.2, pp. 165–183. MR: [2518578](#). Zbl: [1176.53032](#) (ver p. [88](#)).
- A. G. Khovanskiĭ (1991). *Fewnomials*. Vol. 88. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. viii+139. MR: [1108621](#) (ver p. [16](#)).
- V. Klee (1979). “Some unsolved problems in plane geometry”. *Math. Mag.* 52.3, pp. 131–145. MR: [533432](#) (ver p. [149](#)).
- V. Klee e S. Wagon (1991). *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*. Vol. 11. The Dolciani Mathematical Expositions. Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. xvi+333. MR: [1133201](#). Zbl: [0784.51002](#) (ver p. [149](#)).
- F. Klein (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Vol. II. Geometry*. Translated from the fourth (1926) German edition by Gert Schubring. Springer-Verlag, Berlin, pp. xvi+315. MR: [3495524](#). Zbl: [1341.51001](#) (ver p. [106](#)).
- E. Kreyszig (1989). *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. xvi+688. MR: [992618](#). Zbl: [0706.46001](#) (ver p. [41](#)).
- E. P. Lane (1942). *A Treatise on Projective Differential Geometry*. University of Chicago Press, Chicago, Ill., pp. ix+466. MR: [0007286](#) (ver pp. [86](#), [106](#)).

- S. R. Lay (1982). *Convex sets and their applications*. Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. xvi+244. MR: [655598](#). Zbl: [0492.52001](#) (ver p. [31](#)).
- M. Levi e S. Tabachnikov (2009). “On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin’s conjecture, and oscillation of unicycle tracks”. *Experiment. Math.* 18.2, pp. 173–186. MR: [2549686](#). Zbl: [1185.37146](#) (ver p. [44](#)).
- T. Lewiner e M. Craizer (2010). “Projective splines and estimators for planar curves”. *J. Math. Imaging Vision* 36.1, pp. 81–89. MR: [2579312](#) (ver pp. [118](#), [119](#), [145](#)).
- E. Lima (1981). *Análise. Vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, Zbl: [0511.26003](#) (ver pp. [35](#), [60](#), [63](#), [64](#)).
- L. L. de Lima e J. F. Montenegro (1999). “Classification of solitons for the affine curvature flow”. *Comm. Anal. Geom.* 7.4, pp. 731–753. MR: [1714938](#). Zbl: [0941.53039](#) (ver p. [79](#)).
- R. López (2011). “The theorem of Schur in the Minkowski plane”. *J. Geom. Phys.* 61.1, pp. 342–346. MR: [2747005](#) (ver p. [88](#)).
- J. Maeda (1942a). “Differential Laguerre geometry of plane curves”. *Jap. J. Math.* 18, pp. 385–581. MR: [0018031](#). Zbl: [0063.03706](#) (ver p. [98](#)).
- (1942b). “Differential Möbius geometry of plane curves”. *Jap. J. Math.* 18, pp. 67–260. MR: [0014288](#) (ver p. [98](#)).
- H. Martini e Z. Mustafaev (2008). “A new construction of curves of constant width”. *Comput. Aided Geom. Design* 25.9, pp. 751–755. MR: [2468204](#). Zbl: [1172.51309](#) (ver p. [22](#)).
- B. Matschke (2014). “A survey on the square peg problem”. *Notices Amer. Math. Soc.* 61.4, pp. 346–352. MR: [3184501](#). Zbl: [1338.51017](#) (ver pp. [149](#), [154](#)).
- (2018). “Quadrilaterals inscribed in convex curves”. arXiv: [1801.01945](#) (ver p. [154](#)).
- J. W. Milnor (1950). “On the total curvature of knots”. *Ann. of Math. (2)* 52, pp. 248–257. MR: [0037509](#). Zbl: [0037.38904](#) (ver p. [146](#)).
- J. Milnor (1953). “On total curvatures of closed space curves”. *Math. Scand.* 1, pp. 289–296. MR: [0059030](#). Zbl: [0052.38402](#) (ver p. [146](#)).
- S. Montiel e A. Ros (2009). *Curves and surfaces*. Second. Vol. 69. Graduate Studies in Mathematics. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, pp. xvi+376. MR: [2522595](#). Zbl: [1173.53001](#) (ver p. [49](#)).
- L. J. Mordell (1944). “Rational points on cubic curves and surfaces”. *Amer. Math. Monthly* 51, pp. 332–339. MR: [0010155](#). Zbl: [0060.09203](#) (ver p. [126](#)).
- T. Nagell (1929). “Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre”. *Acta Math.* 52.1, pp. 93–126. MR: [1555271](#) (ver p. [126](#)).
- B. H. Neumann (1939). “On some affine invariants of closed convex regions”. *J. London Math. Soc.* 14, pp. 262–272. MR: [0000978](#). Zbl: [0026.35901](#) (ver p. [89](#)).
- (1945). “On an invariant of plane regions and mass distributions”. *J. London Math. Soc.* 20, pp. 226–237. MR: [0017564](#). Zbl: [0063.05928](#) (ver p. [89](#)).
- I. Newton (1971). *Enumeratio Linearum Terti Ordinis, Appendix to Optics. The Mathematical Papers of Isaac Newton, vol. 41704*. Cambridge (ver p. [25](#)).

- M. J. Nielsen (2019). “[Figures Inscribed in Curves, a short tour of an old problem](#)” (ver p. [153](#)).
- F. B. Nóbrega (2018). “[Representation of generic curves by their singularities](#)”. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio (ver p. [126](#)).
- K. Nomizu e T. Sasaki (1994). *Affine differential geometry*. Vol. 111. Cambridge Tracts in Mathematics. Geometry of affine immersions. Cambridge University Press, Cambridge, pp. xiv+263. MR: [1311248](#). Zbl: [0834.53002](#) (ver p. [70](#)).
- J. J. Nuño Ballesteros e M. C. Romero Fuster (1993). “[A four vertex theorem for strictly convex space curves](#)”. *J. Geom.* 46.1-2, pp. 119–126. MR: [1205702](#). Zbl: [0776.53002](#) (ver p. [49](#)).
- R. Osserman (1985). “[The four-or-more vertex theorem](#)”. *Amer. Math. Monthly* 92.5, pp. 332–337. MR: [790188](#). Zbl: [0579.53002](#) (ver pp. [36](#), [37](#)).
- V. Ovsienko e S. Tabachnikov (2005). *Projective differential geometry old and new*. Vol. 165. Cambridge Tracts in Mathematics. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups. Cambridge University Press, Cambridge, pp. xii+249. MR: [2177471](#). Zbl: [1073.53001](#) (ver pp. [43](#), [84](#), [87](#), [106](#), [109](#)).
- (2007). “[Hyperbolic Carathéodory conjecture](#)”. *Tr. Mat. Inst. Steklova* 258. Proc. Steklov Inst. Math. 258:178–193, 2007., pp. 185–200. MR: [2400530](#) (ver p. [50](#)).
- I. Pak (2008). “[The discrete square peg problem](#)”. arXiv: [0804.0657](#) (ver p. [155](#)).
- (2010). “[Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry](#)” (ver pp. [130](#), [146](#)).
- B. C. Patterson (1928). “[The Differential Invariants of Inversive Geometry](#)”. *Amer. J. Math.* 50.4, pp. 553–568. MR: [1506688](#) (ver p. [98](#)).
- V. H. Pettersson, H. A. Tverberg e P. R. J. Östergård (2014). “[A note on Toeplitz’ conjecture](#)”. *Discrete Comput. Geom.* 51.3, pp. 722–728. MR: [3201252](#). Zbl: [1309.51010](#) (ver pp. [149](#), [155](#)).
- C. M. Petty e J. E. Barry (1962). “[A geometrical approach to the second-order linear differential equation](#)”. *Canad. J. Math.* 14, pp. 349–358. MR: [0146451](#). Zbl: [0105.06801](#) (ver p. [97](#)).
- U. Pinkall (1995). “[Hamiltonian flows on the space of star-shaped curves](#)”. *Results Math.* 27.3-4, pp. 328–332. MR: [1331105](#). Zbl: [0835.35128](#) (ver p. [98](#)).
- H. Poincaré (1901). “[Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques](#)”. *Journal de mathématiques* 7, pp. 161–233 (ver p. [126](#)).
- M. Ponce e P. Santibáñez (2014). “[On equidistant sets and generalized conics: the old and the new](#)”. *Amer. Math. Monthly* 121.1, pp. 18–32. MR: [3139579](#). Zbl: [1292.51011](#) (ver p. [24](#)).
- J.-V. Poncelet (1995a). *Traité des propriétés projectives des figures. Tome I*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Reprint of the second (1865) edition. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, pp. xxxii+429. MR: [1399774](#) (ver pp. [101](#), [106](#)).
- (1995b). *Traité des propriétés projectives des figures. Tome II*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Reprint of the second (1866) edition. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, pp. viii+453. MR: [1399775](#) (ver p. [101](#)).

- C. Rademacher e H.-B. Rademacher (2017). “Solitons of discrete curve shortening”. *Results Math.* 71.1-2, pp. 455–482. MR: 3600820. Zbl: 1367.53056 (ver p. 147).
- Q. Ren, J. Richter-Gebert e B. Sturmfels (2015). “Cayley-Bacharach formulas”. *Amer. Math. Monthly* 122.9, pp. 845–854. MR: 3418206. Zbl: 1346.14083 (ver p. 128).
- M. C. Romero Fuster e V. D. Sedykh (1995). “On the number of singularities, zero curvature points and vertices of a simple convex space curve”. *J. Geom.* 52.1-2, pp. 168–172. MR: 1317266. Zbl: 0826.53002 (ver p. 49).
- G. Salmon (1879). *A treatise on the Higher Plane curves: intended as a sequel to A treatise on conic sections*. Dublin: Booksellers to the University, pp. x+387 (ver p. 98).
- M. Salvai (2017). “Centro-affine invariants and the canonical Lorentz metric on the space of centered ellipses”. *Kodai Math. J.* 40.1, pp. 21–30. MR: 3626571. Zbl: 1375.53019 (ver p. 98).
- P. Samuel (1988). *Projective geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Translated from the French by Silvio Levy, Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, pp. x+156. MR: 960691. Zbl: 0679.51001 (ver p. 106).
- R. Sauer (1970). *Differenzengeometrie*. Springer-Verlag, Berlin-New York, p. 234. MR: 0262939. Zbl: 0199.25001 (ver p. 130).
- F. Scalco e F. Tari (2018). “On vertices and inflections of plane curves”. *J. Singul.* 17, pp. 70–80. MR: 3786013. Zbl: 1388.53003 (ver pp. 43, 126).
- I. J. Schoenberg e S. C. Zaremba (1967). “On Cauchy’s lemma concerning convex polygons”. *Canad. J. Math.* 19, pp. 1062–1071. MR: 0216365. Zbl: 0153.51802 (ver pp. 134, 145).
- D. S. Shafer e A. Zegelung (2002a). “Geometry of cycles in quadratic systems”. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 3.1, pp. 251–274. MR: 1960725. Zbl: 1043.34030 (ver pp. 48, 88).
- (2002b). “Vertices of planar curves under the action of linear transformations”. *J. Geom.* 73.1-2, pp. 148–175. MR: 1916469. Zbl: 1011.53002 (ver p. 48).
- D. Siersma (1999). “Properties of conflict sets in the plane”. Em: *Geometry and topology of caustics—CAUSTICS ’98 (Warsaw)*. Vol. 50. Banach Center Publ. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, pp. 267–276. MR: 1739670. Zbl: 0959.53003 (ver p. 24).
- J. Sotomayor (1981). *Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano*. 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA (ver p. 16).
- M. Spivak (1979). *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III*. Second. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., pp. xii+466. MR: 532832 (ver p. 70).
- J. Stillwell (2010). *Mathematics and its history*. Third. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, pp. xxii+660. MR: 2667826. Zbl: 1207.01003 (ver p. 106).
- D. J. Struik (1988). *Lectures on classical differential geometry*. second. Dover Publications, Inc., New York, pp. x+232. MR: 939369. Zbl: 0697.53002 (ver p. 45).
- B. C. Su (1958). *The general projective theory of curves*. Science Press Beijing, Beijing, pp. iv+242 (ver p. 106).
- (1983). *Affine differential geometry*. Science Press Beijing, Beijing; Gordon & Breach Science Publishers, New York, pp. iv+248. MR: 724783 (ver p. 70).

- S. Tabachnikov (1990). “Around four vertices”. *Uspekhi Mat. Nauk* 45.1(271). Russian Math. Surveys 45:229–230, 1990., pp. 191–192. MR: 1050943. Zbl: 0704 . 53002 (ver p. 52).
- (1995). “The four-vertex theorem revisited—two variations on the old theme”. *Amer. Math. Monthly* 102.10, pp. 912–916. MR: 1366053. Zbl: 0842 . 53003 (ver pp. 13, 140).
- (1997). “Parametrized plane curves, Minkowski caustics, Minkowski vertices and conservative line fields”. *Enseign. Math. (2)* 43.1-2, pp. 3–26. MR: 1460119. Zbl: 1066 . 53501 (ver p. 40).
- (2006). “Tire track geometry: variations on a theme”. *Israel J. Math.* 151, pp. 1–28. MR: 2214115. Zbl: 1124 . 52005 (ver pp. 43, 44).
- (2008). “Converse Sturm–Hurwitz–Kellogg theorem and related results”. *J. Fixed Point Theory Appl.* 3.1, pp. 121–130. MR: 2402912. Zbl: 1194 . 53005 (ver pp. 84, 87).
- (2019). “On Centro-Affine Curves and Bäcklund Transformations of the KdV Equation”. *Arnold Math J.* (Ver p. 98).
- T. Tao (2017). “An integration approach to the Toeplitz square peg problem”. *Forum Math. Sigma* 5, e30, 63. MR: 3731730. Zbl: 06819974 (ver pp. 149, 155).
- C.-L. Terng e Z. Wu (2013). “Central affine curve flow on the plane”. *J. Fixed Point Theory Appl.* 14.2, pp. 375–396. MR: 3248564. Zbl: 1317 . 37078 (ver p. 98).
- R. Thom (1989). “Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique: un bilan”. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 70, 199–214 (1990). MR: 1067383 (ver p. 8).
- A. Thompson (2006). “Invariants of curves in RP^2 and R^2 ”. *Algebr. Geom. Topol.* 6, pp. 2175–2186. MR: 2263063. Zbl: 1128 . 53010 (ver p. 126).
- G. Thorbergsson e M. Umehara (2002). “Sextactic points on a simple closed curve”. *Nagoya Math. J.* 167, pp. 55–94. MR: 1924719. Zbl: 1088 . 53049 (ver p. 88).
- (2004). “A global theory of flexes of periodic functions”. *Nagoya Math. J.* 173, pp. 85–138. MR: 2041757. Zbl: 1066 . 51007 (ver p. 84).
- H. Tietze (1948). “Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels”. *Elemente der Math.* 3, pp. 97–100. MR: 0026345 (ver p. 23).
- O. Toeplitz (1911). “Ueber einige Aufgaben der Analysis situs”. *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn* 4, p. 197 (ver pp. 149, 150).
- I. Vainsencher (2009). *Introdução as Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, RJ (ver p. 50).
- E. Vieira e R. Garcia (2018). “Asymptotic behavior of the shape of planar polygons by linear flows”. *Linear Algebra Appl.* 557, pp. 508–528. MR: 3848285. Zbl: 06946351 (ver p. 147).
- F. Voloch (1987). “Curvas de largura constante”. *Matemática Universitária* 05, pp. 69–75 (ver p. 22).
- B. Wegner (1989). “Some global properties and constructions for closed curves in the plane”. *Geom. Dedicata* 29.3, pp. 317–326. MR: 995307. Zbl: 0641 . 53002 (ver p. 49).
- (1994). “On the evolutes of piecewise linear curves in the plane”. *Rad Hrvatske Akad. Znan. Umjet.* 467, pp. 1–16. MR: 1362494. Zbl: 0723 . 51008 (ver p. 136).

- C. Q. Weifeng Wo Xiaoliu Wang (2018). “The centro-affine invariant geometric heat flow”. *Math. Z.* 228, pp. 311–331. Zbl: [1388.53013](#) (ver p. [98](#)).
- E. J. Wilczynski (1906). *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*. Cornell University Library, pp. viii+298. MR: [0131232](#). Zbl: [37.0620.02](#) (ver pp. [106](#), [124](#)).

Índice Remissivo

- 3-elipse, 18
- arco monótono, 5
- centro de assimetria, 26
- comprimento
 - afim, 75
- comprimento de arco
 - afim, 75
 - centroafim, 91
- congruência de retas, 9
- conjunto
 - de conflito, 24
 - de simetria, 33, 36
 - focal afim, 84
- contato
 - entre curvas, 3
- criminante, 9
- curva
 - algébrica, 49
 - centroafim, 90
 - convexa, 8
 - de Jordan, 3, 13
 - de largura constante, 24
 - esférica, 46
 - estritamente convexa, 8
 - implícita, 49
 - involuta, 26
 - não simples, 42
 - pedal, 20
- curvatura, 2, 15, 18, 45, 49
 - discreta, 132
 - afim, 76
 - centroafim, 91
 - conforme, 98
 - geodésica, 47
 - projetiva, 113
 - simplética, 88
 - total, 146
- círculo
 - osculador, 131
 - bitangente, 8, 31
 - circunscrito, 36
 - osculador, 4, 31
- cônica osculadora, 81
- cústica afim, 84
- derivada

- de Schwarz, 46, 110
- discriminante, 9
- elemento de arco
 - projetivo, 111
- envelope, 9
- evoluta, 11, 138
- forma normal
 - de Hesse, 126
- Frenet
 - equações, 2, 115
- função suporte, 29
- Geometria Afim, 70
- indicatrix
 - tangente, 2
- leminiscata, 17
- losango inscrito, 151
- normal
 - de Gauss, 56
- número
 - de rotação, 63
 - de voltas, 62
- ordem de contato, 4
- orientação, 138
- par de curvas, 43
- polinômio, 47
- polinômio de Taylor, 85
- ponto
 - crítico, 3
 - cúspide, 13
 - cúspide afim, 84
 - cúspide de primeira ordem, 12
 - de inflexão, 15, 46, 49
 - sextático, 81
 - singular, 11
- problema
 - de Toeplitz, 149
 - de distância máxima, 87
- quadrado inscrito, 149
- quadrilátero
 - cíclico, 154
- raio de contração, 26
- raio de curvatura, 4, 30
- razão cruzada, 102, 117
- reta
 - normal projetiva, 122
- rosácea, 49
- sistema de Chebyshev, 41
- série de Fourier, 53
- Teorema
 - de Rouché, 64
 - recíproca dos 4 vértices, 56
 - convergência de Blashke, 32
 - de Bézout, 50
 - de Schur, 47
 - de Vogt, 48
 - dos quatro vértices, 3, 28
 - dos seis vértices, 82
 - recíproca dos 4 vértices, 54
- teorema
 - Chasles, 128
- transformação de Möbius, 46
- valor regular, 49
- variação angular, 145
- vértice, 3, 11, 45
 - centroafim, 93
- vértice afim, 81
- vértices, 49
- índice de rotação, 63

Títulos Publicados — 32º Colóquio Brasileiro de Matemática

Emergence of Chaotic Dynamics from Singularities – *Pablo G. Barrientos, Santiago Ibáñez, Alexandre A. Rodrigues e J. Ángel Rodríguez*

Nonlinear Dispersive Equations on Star Graphs – *Jaime Angulo Pava e Márcio Cavalcante de Melo*

Scale Calculus and M-Polyfolds An Introduction – *Joa Weber*

Real and Complex Gaussian Multiplicative Chaos – *Hubert Lacoin*

Rigidez em Grafos de Proteínas – *Carlile Lavor*

Gauge Theory in Higher Dimensions – *Daniel G. Fadel e Henrique N. Sá Earp*

Elementos da Teoria de Aprendizagem de Máquina Supervisionada – *Vladimir Pestov*

Función Gamma: Propriedades Clásicas e Introducción a su Dinâmica – *Pablo Diaz e Rafael Labarca*

Introdução à Criptografia com Curvas Elípticas – *Sally Andria, Rodrigo Gondim e Rodrigo Salomão*

O Teorema dos Quatro Vértices e sua Recíproca – *Mário Jorge Dias Carneiro e Ronaldo Alves Garcia*

Uma Introdução Matemática a Blockchains – *Augusto Teixeira*

