

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além

Víctor León
Bruno Scárdua



33^o Colóquio
Brasileiro de
Matemática

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além

Primeira impressão, julho de 2021

Copyright © 2021 Víctor León e Bruno Scárdua.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-45-0

MSC (2020) Primary: 57R70, Secondary: 37C27, 32S65, 37C75, 57R30, 37F75

Coordenação Geral

Carolina Araujo

Produção Books in Bytes

Capa Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br

editora@impa.br

Apresentação

O objetivo deste livro é basicamente oferecer aos alunos de graduação de universidades brasileiras, um livro introdutório à teoria geométrica das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos. Com uma apresentação baseada nos resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias, focando nas autônomas, ou seja, aquelas dadas por campos de vetores. O caráter geométrico e suas relações com a topologia são abordados sempre que oportuno. Partindo de ambientes como subconjuntos abertos do espaço euclidiano, chegamos ao estudo dos temas propostos em ambientes mais gerais como superfícies regulares e, na segunda parte do texto, em variedades diferenciáveis. Tentamos adequar o texto à realidade das necessidades e possibilidades dos estudantes radicados no Brasil, sem sacrificar o nível final do texto e sua consequente utilidade. Este livro não foi concebido para ser usado como o livro-texto de um primeiro curso de equações diferenciais, que pensamos deva ser mais dedicado ao aprendizado dos conceitos básicos e métodos de resolução das mesmas. Este texto é pensado para ser, sim, um primeiro texto no estudo dos métodos geométricos em equações diferenciais, campos de vetores e sistemas dinâmicos. Na nossa visão, um texto dessa natureza deve incentivar e motivar muitos estudantes ao estudo de tais temas, iniciando assim uma possível carreira na pesquisa científica em ciências naturais. Também deve servir de literatura em língua portuguesa no Brasil para temas que em geral são tratados apenas em livros provenientes de outros países, cujo ensino possui, neste nível, características muito distintas, nem sempre facilitando o aprendizado de nossos estudantes. Enfim, resgatar a valorização dos métodos geométricos como esteio no aprendizado de conceitos e técnicas em matemática, mais especificamente em sistemas

dinâmicos e equações diferenciais, é também um dos principais objetivos deste texto.

Prefácio

Um dos aspectos pouco estudados nos cursos de graduação é a interação entre geometria, topologia e dinâmica em um dado espaço, por exemplo, uma hipersuperfície no espaço euclidiano. Nos cursos de Matemática, o foco principal costuma ser em aspectos algébricos (cursos de Álgebra de Polinômios, Grupos e Álgebra Linear) e na resolução de problemas oriundos e por meio do Cálculo Diferencial e Integral. Isto inclui a abordagem dada às equações diferenciais ordinárias (EDO). Neste texto de nível introdutório (Graduação, Iniciação Científica, início de Mestrado) pretendemos motivar o estudo futuro de assuntos modernos em Dinâmica, Geometria e Topologia, por meio da introdução dos conceitos e resultados mais básicos acerca dessa interação entre ditas áreas. Tal curso deve servir de motivação para o estudo de várias vertentes modernas da Matemática, incluindo mas não limitadas a essas áreas: Sistemas Dinâmicos em Variedades, Dinâmica de Aplicações e Teoria Geométrica das Folheações. A escolha dos temas foi elaborada tendo-se em conta a necessidade de deixar alguns marcos claramente definidos, apresentar alguns dos resultados mais fundamentais que evidenciam a conexão entre elas e estimular o aluno a seguir adiante aprendendo.

Os pré-requisitos para este livro são mínimos, dentro da filosofia de um curso introdutório. O principal é um curso de Cálculo de um ano (dois semestres), cobrindo até um pouco de equações diferenciais ordinárias. Também é desejável um semestre de Física, para familiaridade com a linguagem de campos de vetores. Seria ótimo ter algumas noções de Análise Real, como a noção de função analítica, mas que podem vir dos cursos de Cálculo acima mencionados. Um pouco de Geometria (esferas, toros, superfícies) também pode ser aconselhável, embora

não seja absolutamente imprescindível. Enfim, se possível alguns rudimentos de Topologia para a parte final. Contudo o mais importante é uma boa dose de interesse, perseverança e disposição para enfrentar desafios. Não podemos esquecer de curiosidade e interesse em aprender ciências.

Como já mencionamos acima, um dos objetivos deste curso é motivar o estudo futuro de assuntos modernos em Dinâmica, Geometria e Topologia, por meio da introdução dos conceitos e resultados mais básicos entre as áreas. Pretendemos também apresentar uma área, ou abordagem distinta do que se vê regularmente nos cursos de graduação em Matemática, Física etc, motivando uma linha de pensamento mais globalizada e com mais possibilidades de conexão entre as diversas disciplinas estudadas pelos alunos. Desta forma, uma eventual transição entre a graduação e os programas de pós-graduação (mestrado, doutorado) seria mais natural e menos potencialmente brusca. Esperamos também resgatar o interesse dos jovens estudantes dos cursos de graduação e início de mestrado, em áreas não tipificadas como centrais, mas que concentram, sim, grande parte da produção científica qualificada em Matemática realizada no Brasil.

Este livro foi escrito segundo nossa visão particular do que é relevante e imprescindível em um primeiro curso de Dinâmica e Geometria via equações diferenciais ordinárias. Desenvolvemos e utilizamos para isto, material eventualmente mais avançado do que aquele contido no programa dos cursos de Cálculo da graduação. Tentamos, na medida do possível, preservar a motivação e intuição físico-geométrica, que devem compor um bom texto sobre o tema.

No primeiro capítulo, apresentamos o conceito de equação diferencial ordinária, assim como os Problemas de Cauchy e Picard, e o Teorema de Picard sobre a existência e unicidade de soluções para o Problema de Cauchy. Iniciamos por exemplos clássicos de equações diferenciais ordinárias: a equação do pêndulo simples, o problema de desintegração do rádio e o teorema fundamental do cálculo. Os conceitos e resultados são, então, apresentados como resposta a questões gerais naturalmente sugeridas por esses exemplos. Nos capítulos seguintes, a teoria qualitativa e geométrica das EDOs e dos sistemas dinâmicos é apresentada e desenvolvida de forma suave e crescente. Iniciando em ambientes abertos do espaço euclidiano, seguimos pouco a pouco para o ambiente mais abstrato das superfícies e finalmente para as variedades diferenciáveis.

O modo como este texto foi escrito está baseado em nossa experiência em cursos de graduação e pós-graduação em universidades federais brasileiras. Um dos maiores desafios, e também motivação, foi a ausência de textos escritos originalmente em língua portuguesa em nosso país.

Esperamos ter alcançado parcialmente o objetivo inicial e que o livro possa

ser útil não apenas a estudantes de Matemática, mas de Ciências Naturais de um modo geral e a todos que apreciam a Matemática e que de alguma forma tenham o seu interesse voltado para este tema. Veremos...

Rio de Janeiro, Maio de 2021

Por favor, envie suas correções e/ou sugestões para:

victor.leon@unila.edu.br e bruno.scardua@gmail.com

ou então

V. León. ILACVN - CICN, Universidade Federal da Integração Latino-Americana,
Parque tecnológico de Itaipú, Foz do Iguaçu-PR, 85867-970 - Brasil

B. Scárdua. Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
CP. 68530-Rio de Janeiro-RJ, 21945-970 - Brasil

Conteúdo

Agradecimentos	i
Prefácio	ii
I Equações diferenciais em espaços euclidianos e em superfícies	1
1 Introdução às EDOs	2
1.1 O conceito de EDO	2
1.2 O Problema de Cauchy e o Teorema de Picard	9
1.3 O Teorema de Picard	10
1.4 Complementos e Exercícios	13
2 Teoria qualitativa das EDOs lineares	19
2.1 Normas em espaços de matrizes	19
2.2 A exponencial de uma matriz	20
2.3 A EDO linear, fluxos lineares	22
2.4 Classificação, hiperbolicidade e estabilidade	26
2.5 Exemplos de aplicações clássicas	31
3 Campos de vetores e EDOs	43
3.1 EDOs autônomas e campos de vetores	43
3.2 O teorema de Peano	45

3.3	Soluções maximais	47
3.4	O fluxo associado a um campo de vetores	49
3.5	Diferenciabilidade do fluxo	50
3.6	Folheação associada a um campo de vetores	52
3.7	Conjugação de campos de vetores	54
3.8	Estrutura local dos pontos regulares	56
3.9	Singularidades hiperbólicas de campos de vetores	58
3.10	Atratores e fontes locais	59
4	Teoria qualitativa de EDOs autônomas	62
4.1	Conjuntos limites	67
4.2	O Teorema de Poincaré–Bendixson	69
5	Estabilidade de Lyapunov	76
5.1	Estabilidade de Lyapunov	77
5.2	O critério de estabilidade de Lyapunov	81
6	Teoria de Morse e Teorema de Reeb	97
6.1	Exercícios do Capítulo	98
6.2	Pontos críticos não degenerados: o Lema de Morse	100
6.3	Superfícies regulares	103
6.4	O teorema de retração de Morse	106
6.5	O Teorema de Reeb esférico	109
7	O Teorema de Haefliger	113
7.1	O Teorema de Haefliger	114
7.2	Prova do Teorema de Haefliger	115
7.3	Inexistência de campos analíticos	119
8	Perturbação e o teorema de Peixoto	120
8.1	Introdução à Teoria da Perturbação	120
8.2	Estabilidade estrutural	125
II	Equações diferenciais em variedades diferenciáveis	130
9	Introdução às EDOs em Variedades	131
9.1	Espaços topológicos e funções contínuas	132
9.2	Superfícies no espaço euclidiano	138

9.3	O conceito de variedade diferenciável	140
9.4	Aplicações diferenciáveis	146
9.5	O Fibrado tangente	147
9.6	A derivada de uma aplicação diferenciável	153
9.7	Imersões, submersões e o Teorema da Aplicação inversa	156
9.8	Subvariedades	157
9.9	Primeiro Teorema de Mergulho de Whitney	159
9.10	Espaços fibrados	161
9.11	Grupos de Lie	163
9.12	Espaços de recobrimento	166
9.13	Ações propriamente descontínuas	167
9.14	Variedades orientáveis	170
9.15	Transversalidade de aplicações e subvariedades	174
9.16	Funções de Morse	178
9.17	Funções auxiliares e Partições da unidade	179
9.18	Campos de vetores em variedades	183
9.19	Espaços de funções em variedades	187
9.20	Teorema de Morse–Sard	198
9.21	O Teorema de transversalidade	204
9.22	Variedades como superfícies	211
9.23	O Teorema de Tischler	216
9.24	Exercícios do Capítulo	218
10	Classificação de superfícies	225
10.1	Superfícies	225
10.2	Singularidades de Morse em dimensão dois	230
11	Introdução à teoria das folheações	233
11.1	A noção de folheação	234
11.2	Holonomia	238
11.3	Teoremas de Estabilidade de Reeb Simplificado	243
12	Equações diferenciais complexas	246
12.1	Complexificação de um espaço vetorial	246
12.2	Equações diferenciais complexas	247
12.3	O Teorema de Briot–Bouquet	252
12.4	Integral primeira e noção de germe	254
12.5	O Blow-up na origem de \mathbb{R}^2 e \mathbb{C}^2	257

12.6 O Blow-up de uma folheação em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$	259
12.7 O Teorema de conjugação de Mattei–Moussu	263
12.8 Aplicação: O teorema de Poincaré–Lyapunov	264

Bibliografia

Parte I

Equações diferenciais em espaços euclidianos e em superfícies

I

Introdução às EDOs

Antes mesmo de começarmos nosso estudo dos campos de vetores, lembramos alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria das equações diferenciais ordinárias. Começamos inevitavelmente pelo conceito de equação diferencial ordinária, carinhosamente referida neste texto como EDO.

1.1 O conceito de EDO

Em poucas palavras, o que se entende por uma EDO em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ é uma expressão da forma $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, sendo que $F(t, x_1, \dots, x_{n+1})$ é uma função real (ou complexa) das variáveis $(t, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Em geral, é bastante útil pensar em t como a variável tempo e em y como uma função do tempo, que se descobre através da equação dada. Em particular, o domínio de definição da EDO dada deve ser levado em consideração, e pode ser pensado como um produto do tipo $I \times V$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo (no qual se considera o tempo $t \in I$) e $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, no qual a função $t \mapsto (y(t), \dots, y^{(n)}) \in V$ toma seus valores. Observamos que nem sempre se tem uma expressão explícita para a derivada de forma mais alta $y^{(n)}$, mesmo quando a equação tem ordem n e $n = 1$. Estudaremos mais detidamente o caso em que tal expressão explícita é possível e $n = 1$. Chamaremos a esse caso de *Problema*

de Cauchy.

Nesta seção, veremos os primeiros resultados básicos da teoria das EDOs, começando pela formalização do conceito de EDO, seguida dos teoremas de existência e unicidade, e dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais.

Vejamos alguns exemplos. Começaremos por um de nossos favoritos:

Exemplo 1.1.1 (O pêndulo simples). O *pêndulo simples* é um corpo ideal consistindo de uma massa pontual suspensa por um fio (sem massa considerável, inextensível, com densidade de massa constante). A massa pontual é afastada de sua posição de equilíbrio (vertical) e largada, passando a movimentar-se sob a ação da gravidade, em um movimento oscilatório periódico. Vamos estudar esse movimento, determinando seu *período* (tempo de cada oscilação) e sua equação em função do tempo.

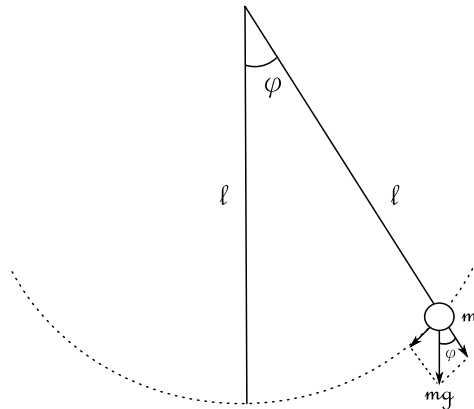


Figura 1.1: O pêndulo simples

Atuando sobre o objeto temos duas forças, a força gravitacional (que é vertical) dada por mg , onde m = massa pontual, e g = aceleração da gravidade. A outra força atuando é a tensão da corda. Pelas Leis de Newton, a componente da força gravitacional paralela à corda, somada à força de tensão, leva a resultante nula. A oscilação provém apenas da componente da força gravitacional que é perpendicular à corda, tangente, portanto, ao movimento (em arco de círculo) efetuado pela extremidade pontual. Tal *força tangencial* é dada por $mg \sin \varphi$, onde φ é o ângulo entre a corda e sua posição de equilíbrio original (eixo vertical). A Segunda Lei

de Newton nos dá, então,

$$mv = -mg \operatorname{sen} \varphi$$

onde mv é a quantidade de movimento do objeto. Mas, se a corda tem comprimento ℓ , podemos escrever

$$mv = m\ell \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)$$

onde t é o tempo.

Obtemos, então,

$$\frac{d}{dt} \left(m\ell \frac{d\varphi}{dt} \right) = -mg \operatorname{sen} \varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Agora, procedemos à seguinte simplificação, considerada *fisicamente razoável* para oscilações de pequena amplitude, $\operatorname{sen} \varphi \cong \varphi$. Podemos, então, reescrever a equação do movimento como a *equação do pêndulo simples*

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

cuja solução geral conhecemos dos cursos de equações diferenciais ordinárias como sendo

$$\varphi(t) = a \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right) + b \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right)$$

sendo $a, b \in \mathbb{R}$. Supondo que o pêndulo partiu do repouso com ângulo inicial φ_0 , obtemos as seguintes condições iniciais

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = 0$$

e obtemos solução da forma

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right).$$

O período desse *movimento harmônico simples* é, então,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Para amplitudes maiores de oscilação, a fórmula acima não se mostra muito eficaz. O que se faz é inverter a equação para a velocidade angular obtida a partir do método da conservação de energia. Isto resulta em uma expressão do tipo

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Então, por um processo de integração ao longo de um ciclo completo do movimento, obtemos a seguinte expressão

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

sendo que a última integral corresponde a um quarto do ciclo. Trata-se de uma *integral elíptica* cujo valor pode ser aproximado por métodos de séries de potências, mas que não possui solução completa no sentido usual. Aqui está um exemplo simples, belo e claro de um problema ainda em evolução dentro da teoria de equações diferenciais. A teoria de integrais elípticas é, por si só, um mundo com conexões com Álgebra e Geometria, chegando mesmo ao mundo das superfícies mínimas. Nosso objetivo ao apresentar este exemplo é, também, dar uma pequena amostra de como problemas simples de se formular, podem ser profundos.

Há ainda outros tipos de pêndulos ou movimentos pendulares. Podemos mencionar os pêndulos acoplados (nos quais dois ou mais pêndulos trabalham em conjunto) e os pêndulos circulares (nos quais o movimento pendular é em forma de um círculo plano). Enfim, como já mencionamos, as contribuições nesse assunto são ainda muito ativas e muito ainda há por fazer.

Exemplo 1.1.2 (A lei de desintegração do rádio). Em 1902, Ernest Rutherford e Frederick Soddy sugerem que a taxa de variação da quantidade de rádio é proporcional à quantidade de rádio. Assim, se $Q(t)$ é a quantidade de rádio no instante t , temos que existe $k < 0$ tal que

$$Q'(t) = kQ(t). \tag{1.1}$$

Multiplicando por $1/Q(t)$ em ambos os lados de (1.1), temos

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k$$

$$(\ln Q(t))' = k$$

logo, integrando de 0 a t , temos

$$\int_0^t (\ln Q(s))' ds = \int_0^t k ds$$

$$\ln Q(t) - \ln Q(0) = kt$$

$$\ln \left(\frac{Q(t)}{Q(0)} \right) = kt$$

portanto, a solução de (1.1) é dada por

$$Q(t) = Q(0)e^{kt}. \quad (1.2)$$

A equação (1.2) é um caso particular da equação diferencial

$$y' + ay = b$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos o caso $b = 0$, assim, temos a equação

$$y' + ay = 0$$

multiplicando por e^{at} em ambos os lados da equação anterior, tem-se

$$e^{at}(y' + ay) = 0$$

$$y'e^{at} + y(ae^{at}) = 0$$

$$(ye^{at})' = 0$$

integrando, temos que

$$ye^{at} = k$$

onde k é constante. Então $y = ke^{-at}$.

Conclusão: Toda solução de

$$y' + ay = 0, \quad (1.3)$$

com $a \in \mathbb{R}$ constante é da forma

$$\varphi(t) = ce^{-at}, \quad (1.4)$$

onde c é constante. A equação (1.3) é, por sua vez, um caso particular da seguinte equação.

Consideremos agora a equação

$$y' + ay = b,$$

com a, b constantes reais e $a \neq 0$. Multiplicando por e^{at} em ambos os lados da equação anterior, tem-se

$$e^{at}(y' + ay) = be^{at}$$

$$y'e^{at} + y(ae^{at}) = be^{at}$$

$$(ye^{at})' = \left(\frac{b}{a}e^{at}\right)'$$

integrando, temos que

$$ye^{at} = \frac{b}{a}e^{at} + c$$

onde c é constante. Então $y = \frac{b}{a} + ce^{-at}$.

Conclusão: Toda solução da equação diferencial

$$y' + ay = b, \tag{1.5}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes e $a \neq 0$ é da forma

$$\varphi(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at}, \tag{1.6}$$

onde c é constante.

Observação 1.1.1.

(1) e^{at} é chamado fator integrante.

(2) Se a equação $y' + ay = b$ é acompanhada de um valor inicial $y(t_0) = \alpha \in \mathbb{R}$, então temos um problema do valor inicial (PVI).

(3) A solução do PVI

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \quad (1.7)$$

com a, b constantes reais e $a \neq 0$ é dada por

$$\varphi(t) = \frac{b}{a} + \left(\alpha - \frac{b}{a} \right) e^{-a(t-t_0)}. \quad (1.8)$$

Exemplo 1.1.3. Seja agora $h: J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo aberto $J_0 \subset \mathbb{R}$. Podemos considerar $f: U \rightarrow \mathbb{R}, U = J_0 \times \mathbb{R}$ definida por $f(t, x) = h(t)$ e a EDO correspondente é, então,

$$\dot{x} = g(t).$$

Assim, uma solução é tão somente uma função diferenciável $\varphi(t)$ tal que,

$$\varphi'(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t g(\lambda) d\lambda. \forall t_0 \in J, \forall t \in J.$$

A possibilidade de integrar g e o Teorema Fundamental do Cálculo nos dão, nesse caso particular, a existência e unicidade de soluções que buscaremos em geral.

Para aquele leitor que esperava que iniciássemos com uma EDO de primeira ordem, lembramos que pagando o preço de se introduzir novas variáveis, ou seja, de aumentar a dimensão do espaço ambiente, podemos sempre reduzir uma EDO a uma EDO de primeira ordem (ou um sistema de EDOs de primeira ordem, o que dá no mesmo). Tal truque, bem conhecido dos cursos de Cálculo mais avançados, passa por introduzir novas variáveis como $z_1 = y, z_2 = y', z_3 = y'', \dots, z_{n+1} = y^{(n)}$, sendo que o último termo é a derivada de ordem n da variável y . Desta forma, obtemos um sistema de EDOs de primeira ordem, com as equações mais simples são da forma $z'_j = z_{j+1}, j = 1, \dots, n$ enquanto que a EDO original $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ nos dá a equação $F(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = 0$, completando o sistema de EDOs de ordem 1.

Antes mesmo de seguirmos com outros exemplos, introduzimos o chamado Problema de Cauchy.

1.2 O Problema de Cauchy e o Teorema de Picard

Como já mencionamos no início deste capítulo, nem sempre se tem uma expressão explícita para a derivada de forma mais alta $y^{(n)}$. Também já vimos que, do ponto de vista puramente teórico, sempre podemos considerar uma EDO como sendo de primeira ordem. Vejamos, então, esse caso, ou seja, o caso de EDOs de primeira ordem, no qual podemos explicitar a derivada de ordem mais alta, no caso $y' = \frac{dy}{dt}$. Começamos com algumas notações e definições que nos serão úteis.

Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com coordenadas retangulares (t, x) , onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Consideremos subconjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que não necessariamente são da forma produto de abertos.

Definição 1.2.1. Dada uma função contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um aberto, a equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por f é escrita como

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1.9)$$

Uma *solução* de (1.9) é uma função diferenciável $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tal que

$$(a) \quad \forall t \in J \text{ tem-se } (t, \varphi(t)) \in U,$$

$$(b) \quad \frac{d\varphi}{dt}(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)), \forall t_0 \in J,$$

onde $\frac{d\varphi}{dt}(t_0)$ denotará a derivada lateral correspondente ao caso em que t_0 para um extremo de J .

Definição 1.2.2 (Problema de Cauchy). Dada uma EDO (1.9) e dado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, o *Problema de Cauchy* associado é escrito como

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.10)$$

Uma *solução* de (1.10) é uma solução de (1.9), digamos, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $t_0 \in J$ e $\varphi(t_0) = x_0$.

Uma consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo é a seguinte:

Proposição 1.2.1. O Problema de Cauchy (1.10) é equivalente à equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\lambda, x(\lambda)) d\lambda.$$

Com essa terminologia chegamos ao seguinte resultado central:

Teorema 1.2.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no aberto U . Então $\forall (t_0, x_0) \in U$ o Problema de Cauchy (1.10) correspondente possui uma solução $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida num intervalo aberto $J \ni t_0$. Além disso, φ é única no seguinte sentido: seja $\psi : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma outra solução, então $\varphi(t) = \psi(t)$, $\forall t \in J \cap J_1$.*

Observe que a noção de unicidade de uma solução é relativo também à velocidade com que essa é percorrida e não apenas ao traço da curva imagem em \mathbb{R}^n . Deste modo, dificilmente uma reparametrização de uma solução seguirá sendo solução de uma mesma EDO.

O Teorema 1.2.1 será consequência de resultados mais precisos como o Teorema de Picard, que estimam um tamanho mínimo para o intervalo de definição J em termos de um certo controle da função f . É o que veremos a seguir.

1.3 O Teorema de Picard

Vamos, então, ao principal e mais clássico resultado sobre existência de soluções para EDOs com condições iniciais determinadas. Fixaremos a seguinte norma em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$, onde $|t|$ e $|x|$ denotam as normas euclidianas em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n respectivamente. As vantagens associadas a essa escolha específica logo ficarão claras.

Definição 1.3.1. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (não necessariamente contínua) é dita *Lipschitziana com respeito à segunda variável* se $\exists K > 0$ tal que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$, $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in U$.

A função é dita *localmente Lipschitziana com respeito à segunda variável* se todo ponto de U possui vizinhança restrita à qual f é Lipschitziana com respeito à segunda variável.

Essa noção pode ser realizada com hipóteses de diferenciabilidade adequadas:

Lema 1.3.1. *Toda função localmente Lipschitziana é Lipschitziana em partes compactas.*

Demonstração. (Teorema 1.4.4). □

Lema 1.3.2. *Toda função $f : U \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^1 com respeito à segunda variável, é localmente Lipschitziana com respeito a essa variável.*

Demonstração. Basta usar a Desigualdade do Valor Médio, uma vez que a derivada, sendo contínua, é localmente limitada. \square

Recordamos também que uma função $F: X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é uma *contração* se existe constante $0 \leq \lambda < 1$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$, $\forall x, y \in X$, sendo que d denota a distância em X .

Teorema 1.3.1 (do Ponto Fixo para Contrações, Lima (1977)). *Seja X um espaço métrico completo. Então toda contração F em X possui um único ponto fixo, isto é, existe um único ponto $p \in X$ tal que $F(p) = p$. Além disso, p é atrator de F , isto é, $\forall x \in X$ vale $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, o mesmo resultado vale se F possui algum iterado $F^m: X \rightarrow X$, que é uma contração.*

Esse teorema encontra-se demonstrado em livros de Espaços Métricos por exemplo Lima (ibid.). Sugerimos ao leitor que tente provar diretamente, usando o fato de que a sequência $F^n(x)$ é de Cauchy.

Lema 1.3.3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $K \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto compacto. O espaço $X = \mathcal{C}(I, K)$ das aplicações contínuas $\varphi: I \rightarrow K$, com a métrica do supremo $d(\varphi, \psi) = \sup_{t \in I} |\varphi(t) - \psi(t)|$, é completo.*

Esse resultado segue do fato conhecido que limite uniforme de aplicações contínuas é uma aplicação contínua (Teorema 1.4.5).

Obtemos então o seguinte refinamento do Teorema 1.2.1:

Sejam $I[t_0, a] = [t_0 - a, t_0 + a]$ onde $a > 0$, e $B[x_0, b] = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| \leq b\}$ onde $b > 0$.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Picard). *Seja $f: I[t_0, a] \times B[x_0, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, função contínua, Lipschitziana com respeito à segunda variável. Então existe uma única solução do Problema de Cauchy (1.9) correspondente a f e (t_0, x_0) , definida no intervalo $I[t_0, \alpha]$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$ e $M = \sup\{|f(t, x)|, (t, x) \in I[t_0, a] \times B[x_0, b]\}$.*

Demonstração. Pomos $X = \mathcal{C}(I[t_0; a], B[x_0, b])$ espaço métrico completo com a métrica do supremo. Definimos, então, aplicação $F: X \rightarrow X$ da seguinte forma

$$F(\varphi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\lambda, \varphi(\lambda)) d\lambda, \forall t \in I(t_0, a).$$

Afirmção 1.3.1. *F é bem definida e F^N é uma contração se $N \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande.*

Observe que uma vez provada a afirmação acima o Teorema de Picard estará provado, pois uma solução para o Problema de Cauchy em questão é dada justamente por um ponto fixo de F . Vamos, então, à demonstração da afirmação acima: Primeiro notemos que $\forall \varphi \in X$ temos

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\lambda, \varphi(\lambda)) d\lambda \right| \leq \int_{t_0}^t |f(\lambda, \varphi(\lambda))| d\lambda \\ &\leq M|t - t_0| \leq b \end{aligned}$$

logo, $F(\varphi)(t) \in B[x_0, b]$, $\forall t \in I[t_0, a]$ e, assim, F é bem definida. Agora, por indução, prova-se que se $K =$ constante de Lipschitz de f , então

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} |t - t_0|^n d(\varphi_1, \varphi_2), \forall t \in I(t_0, \alpha), \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, assumindo-se esta desigualdade, para um certo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} &|F^{n+1}(\varphi_1)(t) - F^{n+1}(\varphi_2)(t)| = |F(F^n(\varphi_1)(t)) - F(F^n(\varphi_2)(t))| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(\lambda, F^n(\varphi_1(\lambda)) - f(\lambda, F^n(\varphi_2(\lambda)))| d\lambda \leq K \int_{t_0}^t |F^n(\varphi_1)(\lambda) - F^n(\varphi_2)(\lambda)| d\lambda \\ &\leq K \int_{t_0}^t \frac{K^n}{n!} |\lambda - t_0|^n d(\varphi_1, \varphi_2) d\lambda \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Assim, $F: X \rightarrow X$ é tal que

$$d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como $\frac{K^n \alpha^n}{n!} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos que a afirmação é verdadeira. \square

Prova do Teorema 1.2.1. O Teorema 1.2.1 segue então do Teorema de Picard e dos Lemas 1.3.1 a 1.3.3 acima. \square

1.4 Complementos e Exercícios do Capítulo 1

Exercício 1.4.1 (Campos de força conservativos). Um campo de vetores $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido em um subconjunto aberto e conexo do espaço \mathbb{R}^3 , é chamado um *campo de forças* quando, em cada ponto p , interpretamos o vetor $F(p)$ como uma força agindo numa partícula situada no ponto p . O campo de forças é dito *conservativo* quando existe *função energia potencial* $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(p) = -\nabla U(p)$$

(o sinal negativo é tomado por razões históricas). Evidentemente U é única à exceção da adição de constantes.

Exercício 1.4.2 (O princípio da conservação da energia). Consideremos agora uma partícula movendo-se graças à ação de um campo de forças F e denotemos por $x(t)$ sua trajetória e m sua massa de repouso. O *vetor velocidade* da partícula é dada por $\frac{dx}{dt}(t)$ no tempo t , sendo que seu comprimento é chamado a *velocidade* da partícula. O vetor velocidade $x'(t)$ é tangente à trajetória no ponto em questão. Se o campo F é conservativo, digamos $F = -\nabla U$, então chamamos U de *energia potencial* e definimos a *energia cinética* como

$$K = \frac{1}{2}m|x'(t)|^2.$$

A *energia total* (ou *energia*) é definida como a soma $E = U + K$.

Princípio da conservação da energia. Seja $x(t)$ a trajetória de uma partícula movendo-se graças à ação de um campo de forças conservativo $F = -\nabla U$. A energia total é constante.

De fato, basta usar as Regras de Derivação de $\langle x, x \rangle$ e a Regra da Cadeia para mostrar que $\frac{dE}{dt} = 0, \forall t$ (mostre!).

Em diversas situações físicas, estamos interessados em estudar campos de vetores F que sejam paralelos ao vetor posição, ou seja, campos da forma $F(p) = \lambda(p)p, \lambda(p) \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^3$. Tais campos são chamados de *centrais*. Um exemplo de campo central é dado pelo campo gravitacional. Estudemos tais campos no caso em que são conservativos:

Afirmção 1.4.1. *Um campo de forças central F é conservativo se, e somente se, escreve como $F(x) = \lambda(|x|)x$, ou equivalentemente, $F(x) = -\nabla U(x)$ onde $U(x) = f(|x|)$.*

A prova desse fato deixamos como exercício para o leitor curioso (Teorema 1.4.3). Apliquemos ao estudo do movimento dos planetas em nosso sistema solar, segundo Isaac Newton. Segundo a lei de atração gravitacional de Newton, dois corpos de massas m_1 e m_2 se atraem com forças de mesma intensidade e contrárias descritas como

$$F_{12} = -gm_1m_2 \frac{x}{|x|^3} = -F_{21}$$

onde g é uma constante universal, x é a posição do corpo de massa m_2 , o corpo m_1 está na origem e F_{12} é a força (atratora) em m_2 .

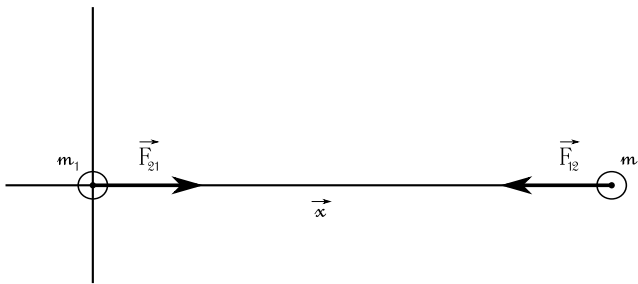


Figura 1.2:

Assumimos agora que os corpos se movem exclusivamente sob a ação destas forças, consideramos o corpo m_1 como o Sol e o corpo m_2 como um planeta de massa m . O campo de forças atuando sobre o planeta é então da forma

$$F = -C \frac{x}{|x|^3}, C > 0$$

de modo que pela observação anterior, esse é um campo central conservativo. De fato, temos $F = -\nabla U$ onde $U = -\frac{1}{|x|}$. O campo não está definido na origem. Calculemos a energia cinética desenvolvida pelo planeta m . Para isso, podemos nos restringir à situação correspondente, mas no plano cartesiano \mathbb{R}^2 (pois o campo é central, sendo, portanto, tangente a esse plano e, logo, uma partícula inicialmente posicionada no plano não escapará), e introduziremos coordenadas polares no plano: (r, θ) . Lembramos que o *momento angular* da partícula (planeta m) é definido como $\Omega = mr^2\theta'$ (derivadas tomadas com relação ao tempo t).

Tomando-se a notação clássica da Física, na qual os vetores $i = i(t)$, $j = j(t)$ são $i(t)$ o unitário na direção de $x(t)$ e $j(t)$ o unitário ortogonal positivo de $i(t)$. Então podemos escrever $x(t) = r(t)i(t)$ e $\frac{di}{dt} = \theta'j$, $\frac{dj}{dt} = -\theta'i$. Mas, então,

$$x' = r'i + r\theta'j.$$

Derivando, obtemos

$$x'' = [r'' - r(\theta')^2]i + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\theta')j.$$

Como o campo de forças é central, segue que a componente perpendicular a x é nula, ou seja,

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0$$

e provamos o seguinte:

Princípio da conservação do momento angular. *Dada uma partícula movendo-se graças à ação de um campo central, o momento angular se conserva: $\frac{d\Omega}{dt} = 0$.*

Uma observação importante é a seguinte: definamos $S(t)$ = área determinada pelos vetores posição $x(t)$, $x(t_0)$ e pelo arco de trajetória $((x(t_0)x(t)))$, percorrido pelo móvel entre os instantes t_0 e t . Então, em coordenadas polares, temos que

$$dS = \frac{1}{2}r^2d\theta.$$

De modo que $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\theta'$ mede a taxa com a qual o vetor posição varre a área entre o móvel e o centro do movimento. Aplicando esse raciocínio no caso do movimento de um planeta m em torno do Sol, como acima, a lei da conservação do momento angular pode ser enunciada como:

Segunda Lei de Kepler: *A linha traçada do Sol a qualquer planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.*

As demais leis de Kepler são:

- (i) **Primeira Lei de Kepler:** *Todos os planetas se movem em órbitas elípticas em torno do Sol, um dos focos.*
- (ii) **Terceira Lei de Kepler:** *O quadrado do período de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da distância média do Sol ao planeta.*

Prossigamos. Como vimos, $r^2\theta'$ é constante no caso do movimento de um planeta m no plano (r, θ) . Agora, isso implica o sinal de θ' é constante ao longo do movimento e, logo, podemos supor θ é função crescente do tempo t . Mas, então, podemos utilizar θ como novo parâmetro e descrever r somente como função de θ ao longo do movimento. Seja $k = \frac{1}{r}$, então $k = k(\theta(t))$ e, temos que $-k = U =$ energia potencial do movimento (de fato, $|x| = r$). A energia cinética é dada por $K = \frac{1}{2}m|x'(t)|^2$, de modo que, como $x'(t) = r'(t)i + r\theta'(t)j$, obtemos

$$K = \frac{1}{2}m[r'(t) + (r\theta'(t))^2].$$

Também, temos que

$$r'(t) = \left(\frac{1}{k(\theta(t))} \right)' (t) = -\frac{1}{k^2} \frac{dk}{d\theta} \theta'(t) = -\frac{\Omega}{m} \frac{dk}{d\theta}$$

onde aplicamos a Regra da Cadeia. Finalmente, observamos que

$$r\theta'(t) = \frac{\Omega}{mr} = \frac{1}{m}\Omega k.$$

Isto nos dá, então,

$$K = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{m} \left[\left(\frac{dk}{d\theta} \right)^2 + k^2 \right].$$

Como a energia total é $E = K + U$, temos que $K = E + k$. Usando as expressões acima obtidas, chegamos à seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{dk}{d\theta} \right)^2 + k^2 = \frac{2m}{\Omega^2} (E + k).$$

Derivando com relação a θ e usando a conservação da energia ($\frac{dE}{d\theta} = 0$), obtemos finalmente

$$\frac{d^2k}{d\theta^2} + k = \frac{m}{\Omega^2}$$

onde lembramos que $\frac{m}{\Omega^2}$ é uma constante.

Dessas considerações podemos deduzir as outras leis de Kepler.

Complete a prova do Princípio da Conservação da Energia.

Exercício 1.4.3. Prove a Afirmação 1.4.1 a respeito de campos de força conservativos centrais.

Exercício 1.4.4. Prove o Lema 1.3.1 e o Lema 1.3.3.

Exercício 1.4.5. Prove o seguinte:

seja $\{\psi_n\}$ sequência equicontínua, uniformemente limitada de funções $\psi_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, $X =$ espaço métrico compacto. Então, se toda subsequência uniformemente convergente da sequência ψ_n possui o mesmo limite ψ , a própria sequência ψ_n é uniformemente convergente para ψ .

Exercício 1.4.6. Neste exercício provaremos o clássico **Lema de Gronwall**: *sejam $u, v: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ contínuas tais que, para um $\alpha \geq 0$, temos*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \forall t \in [a, b].$$

Então $u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$. Em particular, $\alpha = 0 \implies u \equiv 0$.

Sugestão: Suponhamos inicialmente que $\alpha > 0$. Definimos função auxiliar

$$\varphi(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds.$$

Vale que $\varphi(a) = \alpha$ e $\varphi(t) \geq \alpha > 0, \forall t$. Derivando, obtemos $\varphi'(t) = u(t)v(t) \leq v(t)\varphi(t)$. Assim, $d \log \varphi(t) \leq v(t)$ e, então,

$$\log \frac{\varphi(t)}{\varphi(a)} \leq \int_a^t v(s)ds$$

de forma que

$$u(t) \leq \varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$$

Para o caso $\alpha = 0$, utilizamos o caso anterior para um $\epsilon > 0$ e fazemos $\epsilon \rightarrow 0^+$. Os detalhes são deixados para o leitor.

Exercício 1.4.7. Prove o Teorema do Ponto Fixo de Contrações.

Exercício 1.4.8. Uma equação diferencial $x' = \frac{g(t,x)}{h(t,x)}$ é uma equação do tipo *diferencial total* se: g, h são funções reais contínuas no aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, h não se anula em U e existe função diferenciável F em U tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = h$, $\frac{\partial F}{\partial y} = g$. Estude as soluções da EDO dada em termos das curvas de nível da função F .

Exercício 1.4.9. Uma EDO da forma $x' = f(t)g(x)$ é dita uma *equação a variáveis separadas*. Suponhamos que f é contínua no intervalo I e que g é contínua no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. Obtenha solução explícita para a EDO acima com os dados iniciais $x(t_0) = x_0$.

Exercício 1.4.10. Dadas $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo f Lipschitziana, prove que as soluções do sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x)y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ são únicas nos seus intervalos de definição. Estude o caso em que f não é Lipschitziana.

Exercício 1.4.11. Estude as soluções da *equação homogênea* $x' = h(\frac{x}{t})$ onde $t \neq 0$ e h é contínua no intervalo (a, b) e que, neste intervalo $h(y) - y$, não se anula. Sugestão: considere a mudança de variáveis $x = ty$.

Exercício 1.4.12. Resolva e estude as soluções da equação $x' = x^2 \cos t$.

Exercício 1.4.13. Mostre que as soluções da equação $x' = x^{\frac{2}{3}}$ não são únicas. Compare com o Teorema de Picard.

Exercício 1.4.14. Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, localmente Lipschitziana e globalmente limitada (digamos $|f| \leq M$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$). Prove que as soluções de $x' = f(x)$ estão definidas em toda a reta real e que se $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $\varphi(t, x) =$ solução de $x' = f(x)$, $x(0) = x$; então as aplicações $\varphi_t(x) = \varphi(t, x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definem homeomorfismos de \mathbb{R}^n . Prove que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ e conclua que $t \mapsto \varphi_t$ define um homomorfismo do grupo aditivo da reta no grupo dos homeomorfismos de \mathbb{R}^n .

Exercício 1.4.15 (Equações diferenciais complexas). Seja $U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ aberto, onde $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ é o plano complexo com coordenadas $x + iy$ e $i^2 = -1$. Prove que se $f: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ é função holomorfa (f é dita *holomorfa* se suas funções coordenadas são holomorfas), então o Problema de Cauchy holomorfo $\frac{dx}{dz} = f(z, x)$, $x(z_0) = x_0$ tem solução *holomorfa* $\varphi(z, (z_0, x_0))$ única definida em um disco $\mathbb{D}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq \epsilon\}$ para todo $(z_0, x_0) \in U$.

2

Teoria qualitativa das EDOs lineares

Muitas das equações diferenciais que modelam fenômenos físicos e da natureza, são lineares ou possuem modelos bem aproximados por equações lineares. Dentro dessa filosofia, temos motivação suficiente para dedicar parte de nosso estudo a essa classe de equações. Começamos com alguns pré-requisitos de Álgebra Linear. Vamos nos restringir ao estudo das matrizes quadradas. Dando início ao estudo da Álgebra Linear das matrizes quadradas, visando o estudo das EDOs lineares, começamos equipando o espaço de tais matrizes com uma topologia, mais precisamente, uma métrica dada por uma norma bastante natural.

2.1 Normas em espaços de matrizes

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definimos

$$\|A\| = \max\{|Ax|; |x| \leq 1\}.$$

Se verificam:

1. $\|A\| \geq 0$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
2. $\|A\| = 0$ se e só se $A = \theta$.

3. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
5. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$.
6. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
7. $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $k \geq 1$.

Das quatro primeiras propriedades, tem-se que

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \|A\| \end{aligned}$$

é uma *norma* em $\mathbb{R}^{n \times n}$, logo $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Dessa maneira, podemos definir

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto d_{\|\cdot\|}(A, B) = \|B - A\| \end{aligned}$$

a qual é uma *distância* em $\mathbb{R}^{n \times n}$. Logo, $(\mathbb{R}^{n \times n}, d_{\|\cdot\|})$ é um espaço métrico completo. Lembramos que uma vez que o espaço de matrizes quadradas é naturalmente um espaço vetorial de dimensão finita, ou seja, uma cópia do \mathbb{R}^{n^2} , duas normais quaisquer neste espaço serão equivalentes e induzirão a mesma topologia. Dessa forma, vamos nos restringir à norma do máximo introduzida acima, lembrando, porém, que não há perda de generalidade ao tomarmos essa norma.

2.2 A exponencial de uma matriz

Seguindo a noção de exponencial de um número real e sua expansão em série de potências, introduzimos a exponencial de uma matriz quadrada por meio do seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. Dada uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ é convergente para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

A prova é muito similar à prova do caso $n = 1$, e deixamos para o leitor. Tal prova utiliza a convergência absoluta da série em questão.

Definição 2.2.1. Dado $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a *exponencial de A* , denotado por $\exp(A)$ ou e^A , define-se como

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Denotemos por $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis.

Teorema 2.2.2. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se satisfaz:

1. $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$ para todo $P \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$.
2. Se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^Ae^B$.
3. $e^A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Exemplo 2.2.1. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, denotamos

$$\text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

então $e^{\text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]} = \text{diag}[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}]$.

Exemplo 2.2.2. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de nilpotência de ordem r , então

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{(r-1)!}A^{r-1}.$$

Exemplo 2.2.3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ da forma: $A = \lambda I + N_n$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Observe que N_n é uma matriz nilpotente com ordem de nilpotência n . Para calcular e^A em primeiro lugar, observamos que $(\lambda I)N_n = N_n(\lambda I)$, logo

$$e^A = e^{\lambda I} \left[I + N_n + \frac{1}{2!}N_n^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}N_n^{n-1} \right].$$

Exemplo 2.2.4. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, então não é difícil mostrar que

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b \\ -\operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.2.5. Denotemos

$$I_2(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ e } R_2(b) = \begin{bmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b \\ -\operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Pelo exemplo anterior $e^{I_2(a, b)} = e^a R_2(b)$, agora chamemos

$$J_{2n}(a, b) = \operatorname{diag}[I_2(a, b), I_2(a, b), \dots, I_2(a, b)] \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Seja $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ da forma $A = J_{2n}(a, b) + N_{2n}^2$, onde

$$N_{2n}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 & I_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & I_2 & \dots & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & I_2 \\ \theta_2 & \theta_2 & \theta_2 & \dots & \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Não é difícil mostrar que $J_{2n}(a, b)N_{2n}^2 = N_{2n}^2 J_{2n}(a, b)$, então

$$\begin{aligned} e^A &= e^{J_{2n}(a, b)} e^{N_{2n}^2} = \operatorname{diag}[e^{I_2(a, b)}, \dots, e^{I_2(a, b)}] e^{N_{2n}^2} \\ &= \operatorname{diag}[e^a R_2(b), \dots, e^a R_2(b)] e^{N_{2n}^2} = e^a \operatorname{diag}[R_2(b), \dots, R_2(b)] e^{N_{2n}^2}. \end{aligned}$$

2.3 A EDO linear, fluxos lineares

Dada uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e dado um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, consideramos o Problema de Cauchy $x' = Ax$, $x(0) = x_0$, sendo que $x \in \mathbb{R}^n$. Estudamos as soluções desse problema.

Teorema 2.3.1. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então a única solução do PVI

$$\begin{cases} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

é dada por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi(t) = e^{tA} x_0. \end{aligned}$$

Uma consequência imediata é:

Corolário 2.3.1. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, então a única solução do PVI

$$\begin{cases} x' &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

é dada por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x_0. \end{aligned}$$

Para calcular e^A , quando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é usado um resultado bem conhecido e fundamental da Álgebra Linear.

Teorema 2.3.2 (Forma canônica real de Jordan). Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então existe $P \in GL(\mathbb{R}^n)$ tal que $PAP^{-1} = J_A = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$, onde cada J_i é uma matriz quadrada da forma:

1. $J_i = \lambda_i I + N_{n_i}$, se λ_i é um autovalor real de A .
2. $J_j = J_{2n_j}(a_j, b_j) + N_{2n_j}^2$, se $a_j + ib_j$ é autovalor complexo de A .

Além disso, a soma das ordens dos blocos da forma $\lambda_i I + N_{n_i}$ é igual à multiplicidade algébrica de λ_i , enquanto que a soma das ordens dos blocos da forma $J_{2n_j}(a_j, b_j) + N_{2n_j}^2$ é igual ao dobro da multiplicidade algébrica de $a_j + ib_j$. A matriz $J_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada *Forma Canônica de Jordan (Real)* de A , sendo única a menos da ordem dos blocos e do sinal da parte imaginária b_j das raízes complexas do polinômio característico de A .

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pelo Teorema 2.3.1, sabemos que a única solução do PVI (2.1) é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi_{x_0}(t) = e^{tA}x_0. \end{aligned}$$

Fazendo variar x_0 em \mathbb{R}^n , obteremos todas as soluções da EDO $x' = Ax$.

Definição 2.3.1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o *fluxo associado à EDO linear* $x' = Ax$ é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi_A(t, x) = e^{tA}x. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3.1. Dada a EDO, $x' = Ax$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, o fluxo associado dessa EDO $\varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$\varphi_A(t, x_1, x_2) = \left(\left[\frac{x_1 + x_2}{3} \right] e^{5t} + \left[\frac{2x_1 - x_2}{3} \right] e^{-t}, \left[\frac{2(x_1 + x_2)}{3} \right] e^{5t} + \left[\frac{x_2 - 2x_1}{3} \right] e^{-t} \right).$$

Observação 2.3.1.

1. Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ define uma EDO linear $x' = Ax$. Reciprocamente, a toda EDO linear associa-se uma única matriz. Logo, podemos dizer indistintamente “fluxo associado a uma EDO linear” ou “fluxo associado a uma matriz”.
2. A cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associamos um fluxo φ_A o qual é uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R}^n . Será que toda função $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um fluxo?

Proposição 2.3.1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seu fluxo associado. Então se satisfaz:

1. $\varphi_A(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\varphi_A(t + s, x) = \varphi_A(t, \varphi_A(s, x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.3.2. Não é difícil ver que o fluxo $\varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^∞ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existe $\frac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mais ainda

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t, x) = A\varphi_A(t, x).$$

2. Fixando $t_0 \in \mathbb{R}$, podemos definir a função

$$\begin{aligned} (\varphi_A)_{t_0}: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (\varphi_A)_{t_0}(x) = \varphi_A(t_0, x) = e^{t_0 A} x. \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi_A)_{t_0} \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ mais ainda $((\varphi_A)_{t_0})^{-1} = (\varphi_A)_{-t_0}$. Assim, temos que $\{(\varphi_A)_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família em $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$, indexado pelo parâmetro t . Além disso, pela Proposição 2.3.1, obtemos:

(a) $(\varphi_A)_{t_1 + t_2} = (\varphi_A)_{t_1} \circ (\varphi_A)_{t_2}$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

$$(b) (\varphi_A)_0 = I.$$

O seguinte resultado dá uma resposta à questão proposta na Observação 2.3.1.

Proposição 2.3.2. Se $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existe $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. Para cada $t \in \mathbb{R}$, a função

$$\begin{aligned} F_t: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F_t(x) = F(t, x) \end{aligned}$$

é uma transformação linear.

3. $F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2}$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
4. $F_0 = I$.

Então existe $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\varphi_A = F$.

Por outro lado, vejamos que todo fluxo gera uma partição em \mathbb{R}^n .

Definição 2.3.2. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. A *órbita ou trajetória* de x ao longo do fluxo $\varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{O}_A(x)$, define-se como

$$\mathcal{O}_A(x) = \{\varphi_A(t, x); t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 2.3.3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\varphi_A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seu fluxo associado. Então se satisfaz:

1. Dados os pontos x e y em \mathbb{R}^n uma e só uma das propriedade seguintes é satisfeita:

$$(a) \mathcal{O}_A(x) \cap \mathcal{O}_A(y) = \emptyset.$$

$$(b) \mathcal{O}_A(x) = \mathcal{O}_A(y).$$

2. $x \in \text{Nu}(A)$ se e só se $\mathcal{O}_A(x) = \{x\}$.

Definição 2.3.3. O conjunto \mathcal{F}_A formado por todas as órbitas $\mathcal{O}_A(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) é chamado *folheação por curvas* em \mathbb{R}^n gerado por $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2.4 Classificação topológica de fluxos lineares, hiperbolicidade e estabilidade estrutural

Estudaremos a seguir alguns conceitos importantes dentro do contexto das EDOs lineares. Mais precisamente, estudaremos a estabilidade estrutural e classificação topológica desses sistemas. Começamos tornando essas noções mais precisas:

Definição 2.4.1. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ e consideremos seus fluxos associados φ_A e φ_B respectivamente. Dizemos que A e B são *topologicamente conjugados*, o que denotamos $A \equiv_{top} B$, se e só se existe $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo chamado *conjugação topológica* tal que

$$h(\varphi_A(t, x)) = \varphi_B(t, h(x))$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. No caso em que h é um difeomorfismo de classe C^r , dizemos que A e B são *C^r -conjugados* ($1 \leq r \leq \infty$), o que denotamos $A \equiv_{C^r} B$ e h é chamado *C^r -conjugação*, finalmente se h é um isomorfismo linear, então A e B são chamados *linearmente conjugados*, o que denotamos $A \equiv_{lin} B$ e h é chamado *conjugação linear*.

Observação 2.4.1.

1. As conjugações respeitam o parâmetro t e, portanto, respeitam sua orientação.
2. Se A e B são conjugados por $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se e só se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_A} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow (id, h) & & \downarrow h \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_B} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

3. Se A e B são conjugados por $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $h(\mathcal{O}_A(x)) = \mathcal{O}_B(h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa maneira, as conjugações levam órbitas de A em órbitas de B .
4. Não é difícil mostrar que “ \equiv_{top} ”, “ \equiv_{C^r} ” e “ \equiv_{lin} ” são relações de equivalência em $\mathbb{R}^{n \times n}$.
5. Podemos construir os conjuntos quocientes $\mathbb{R}^{n \times n} / \equiv_{top}$, $\mathbb{R}^{n \times n} / \equiv_{C^r}$ e $\mathbb{R}^{n \times n} / \equiv_{lin}$ cujos elementos são classes de equivalência de matrizes.

6. Denotemos por $\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os homeomorfismos de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e por $\text{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ ao conjunto de todos os difeomorfismos de classe C^r de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n . É conhecido que

$$\text{Hom}(\mathbb{R}^n) \supsetneq \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n) \supsetneq \text{Diff}^2(\mathbb{R}^n) \supsetneq \dots \supsetneq \text{Diff}^\infty(\mathbb{R}^n) \supsetneq \text{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Logo, a classificação “mais grossa” é a topologia e a “mais fina” é a linear.

7. Para estudar as propriedades qualitativas dos elementos de \mathcal{F}_A , basta considerar qualquer representante e analisá-lo. Como devemos escolher esse representante? Deve ser escolhido de modo que suas “soluções explícitas” sejam fáceis de serem obtidas e analisadas. Mas existe tal representante? Mais ainda, existem as conjugações?

Proposição 2.4.1. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, são equivalentes:

1. $A \equiv_{C^1} B$.
2. Existe $P \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $PA = BP$ (isto é, A e B são matrizes semelhantes).
3. $A \equiv_{lin} B$.

Observação 2.4.2.

1. Pela Proposição 2.4.1, vemos que nos sistemas lineares só há dois tipos de classificação: a topológica e a linear.
2. $A \equiv_{lin} B$ se e só se A e B são semelhantes.
3. Pelo Teorema 2.3.2, sabemos que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semelhante a sua forma canônica de Jordan $J_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Logo, cada classe de equivalência linear admite uma representação “simples”, desde o ponto de vista das EDOs, a qual é J_A .

Definição 2.4.2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e consideremos seu fluxo associado φ_A .

1. Dizemos que $0 \in \mathbb{R}^n$ é um *atrator* de A se e só se $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_A(t, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Dizemos que $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma *fonte* de A se e só se $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_A(t, x)| = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Observação 2.4.3. $0 \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A se e só se 0 é uma fonte de $-A$.

Vejamos, então, uma caracterização dos sistemas lineares com um atrator global na origem:

Teorema 2.4.1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, são equivalentes:

1. $A \equiv_{top} -I$.
2. $0 \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A .
3. Todos os autovalores de A têm parte real negativa.
4. Existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tal que $|\varphi_A(t, x)| \leq k e^{-\mu t} |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \geq 0$.

De forma muito similar, temos:

Teorema 2.4.2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, são equivalentes:

1. $A \equiv_{top} I$.
2. $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma fonte de A .
3. Todos os autovalores de A têm parte real positiva.
4. Existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tal que $|\varphi_A(t, x)| \geq k^{-1} e^{\mu t} |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \geq 0$.

Os resultados acima são de fácil demonstração, utilizando-se a forma canônica real de Jordan. Vejamos agora o conceito central da noção de estabilidade estrutural para sistemas lineares:

Definição 2.4.3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Dizemos que A é *hiperbólica* se e só se todos os autovalores de A têm parte real distinta de zero.
2. Se A é uma matriz hiperbólica, o *índice de A* , a qual denotamos $i(A)$, é o número de autovalores de A com parte real negativa (contando multiplicidade).

Exemplo 2.4.1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vale o seguinte:

1. Se $0 \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A , então A é hiperbólico e $i(A) = n$.
2. Se $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma fonte de A , então A é hiperbólico e $i(A) = 0$.

Observação 2.4.4. Denotemos por $\text{Hip}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as matrizes hiperbólicas. Não é difícil ver que $\text{Hip}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \text{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.4.4. Seja $A \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$.

1. O *subespaço estável* de A , denotado por $E^s(A)$, é o subespaço vetorial de \mathbb{R}^n gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores com parte real negativa.
2. O *subespaço instável* de A , denotado por $E^u(A)$, é o subespaço vetorial de \mathbb{R}^n gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores com parte real positiva.

Exemplo 2.4.2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vale o seguinte:

1. Se $0 \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A , então $E^s(A) = \mathbb{R}^n$ e $E^u(A) = \{0\}$.
2. Se $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma fonte de A , então $E^s(A) = \{0\}$ e $E^u(A) = \mathbb{R}^n$.

Com essas noções e notações temos:

Proposição 2.4.2. Seja $A \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$ com $i(A) = m$, então

1. $\mathbb{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A)$, $\dim E^s(A) = m$ e $\dim E^u(A) = n - m$.
2. Existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tal que

$$(a) \quad |\varphi_A(t, x)| \leq k e^{-\mu t} |x| \text{ para todo } x \in E^s(A) \text{ e todo } t \geq 0.$$

$$(b) \quad |\varphi_A(t, x)| \geq k^{-1} e^{\mu t} |x| \text{ para todo } x \in E^u(A) \text{ e todo } t \geq 0.$$

Um outro resultado muito interessante e de demonstração acessível ao leitor é o seguinte:

Teorema 2.4.3. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se satisfaz: $A \equiv_{top} B$ se e só se $i(A) = i(B)$.

Corolário 2.4.1. Seja $A \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$ com $i(A) = m$. Então $A \equiv_{top} \text{diag}[-I_m, I_{n-m}]$ onde $I_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é a identidade.

Lembramos que o espaço das matrizes reais quadradas $n \times n$ pode ser naturalmente identificado com o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n^2} . Desta forma, como já observamos e utilizamos anteriormente, o espaço de matrizes quadradas está munido de uma topologia induzida por uma métrica, dada por uma norma. Isso nos permite considerar conjuntos abertos e conjuntos densos nesse espaço de matrizes, como de hábito em \mathbb{R}^{n^2} . O resultado abaixo afirma que matrizes hiperbólicas são abundantes e formam um conjunto aberto no espaço das matrizes quadradas.

Teorema 2.4.4. $\text{Hip}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto aberto e denso em $\mathbb{R}^{n \times n}$.

A prova do teorema acima é bem simples: para provar que o conjunto é aberto, utilizamos o fato de que os autovalores não nulos dependem continuamente dos coeficientes da matriz quadrada considerada. Para ver a densidade, podemos utilizar argumentos tipo “perturbação”, ou seja, dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n^2}$, consideramos matrizes da forma $A_\epsilon = A + \epsilon I_n$, sendo $\epsilon \in \mathbb{R}$ próximo de $0 \in \mathbb{R}$ e I_n a matriz identidade. Para a maior parte dos valores ϵ , teremos matrizes A_ϵ hiperbólicas e arbitrariamente próximas de A .

De um ponto de vista de conjugação topológica, temos a seguinte noção importante:

Definição 2.4.5. Dizemos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *estruturalmente estável* se e só se existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $\|B - A\| < \delta$, então $B \equiv_{top} A$.

Observação 2.4.5. Intuitivamente uma matriz é estruturalmente estável se, ao “perturbar um pouco” a configuração de suas órbitas, não se altera salvo homeomorfismos.

Teorema 2.4.5. $A \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$ se e só se A é estruturalmente estável.

Esse é um resultado um pouco mais profundo que os anteriores. Provar que matrizes hiperbólicas são estruturalmente estáveis é relativamente mais simples a partir de sua conjugação topológica com modelos de blocos de tipo $-I_m$ e I_{n-m} . Por sua vez, para provar que uma matriz estruturalmente estável é hiperbólica, podemos utilizar o fato de que uma matriz com um autovalor com parte real nula pode ser perturbada a uma matriz hiperbólica com um retrato de fase (descrição de órbitas) que não é similar ao da matriz original. Pense em matrizes 2×2 e conclua o caso geral.

2.5 Exemplos de aplicações clássicas das EDOs lineares

Como já mencionamos, equações lineares são fundamentais no estudo e descrição de vários problemas importantes em Física, Química e Ciências Naturais e da Terra de um modo geral. Vejamos mais de perto alguns exemplos concretos dessa relação.

2.5.1 A equação do pêndulo - revisitada

Considere um corpo de massa m que pende de um fio inextensível sem massa de comprimento ℓ , a qual é afastada da sua posição de equilíbrio a uma posição qualquer e a uma velocidade dada.

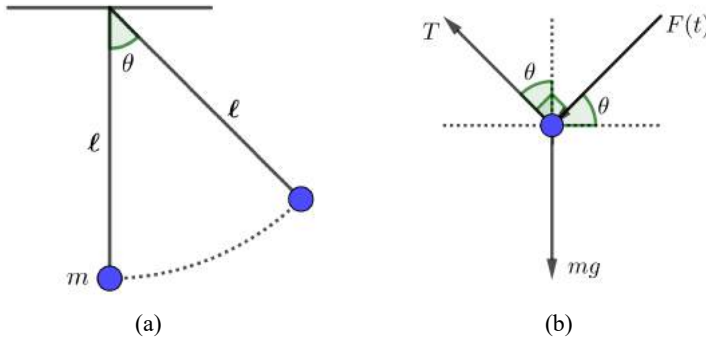


Figura 2.1: Pêndulo

A equação do pêndulo consiste em determinar a posição da massa m em qualquer instante t .

Seja $\theta = \theta(t)$ o ângulo que forma o fio com a vertical no instante t . Então a posição de m é descrita por uma curva $\alpha: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$, onde

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (\ell \sin \theta, \ell \cos \theta). \quad (2.2)$$

As forças que atuam sobre m são:

1. A força gravitacional mg (g é a aceleração da gravidade).
2. A tensão T do fio.
3. A força de resistência que sempre se opõe ao movimento $F(t)$.

Aplicando a Segunda Lei de Newton temos:

$$m\alpha_1''(t) = -T \operatorname{sen} \theta - F(t) \cos \theta \quad (2.3)$$

$$m\alpha_2''(t) = mg - T \cos \theta + F(t) \operatorname{sen} \theta. \quad (2.4)$$

Multiplicando (2.3) por $\frac{\cos \theta}{m}$ e (2.4) por $\frac{\operatorname{sen} \theta}{m}$ e subtraindo, obtemos:

$$\alpha_1''(t) \cos \theta - \alpha_2''(t) \operatorname{sen} \theta = -g \operatorname{sen} \theta - \frac{F(t)}{m}. \quad (2.5)$$

Derivando duas vezes (2.2), temos:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)) \\ &= (-\ell(\theta')^2 \operatorname{sen} \theta + \ell\theta'' \cos \theta, -\ell(\theta')^2 \cos \theta - \ell\theta'' \operatorname{sen} \theta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

De (2.6), obtemos:

$$\alpha_1''(t) \cos \theta - \alpha_2''(t) \operatorname{sen} \theta = \ell\theta''. \quad (2.7)$$

Por (2.5) e (2.7), tem-se:

$$\ell\theta'' = -g \operatorname{sen} \theta - \frac{F(t)}{m}. \quad (2.8)$$

Quando $F(t) = 0$, a equação (2.8) é chamada *equação do pêndulo não amortecido*.

É razoável pensar que $F(t)$ é proporcional ao comprimento do fio e à velocidade (angular) da massa, então

$$F(t) = c\ell\theta' \quad (2.9)$$

onde $c > 0$ é a constante de proporcionalidade. Substituindo (2.9) em (1.5), temos:

$$m\ell\theta'' + c\ell\theta' + mg \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é chamada *equação do pêndulo amortecido*.

Vamos transformar (2.10) a um sistema de equações diferenciais. Basta definir $x = \theta$ e $y = \theta'$, assim, obtemos:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} x. \end{cases} \quad (2.11)$$

Consideremos o campo

$$X(x, y) = \left(y, -\frac{c}{m}y - \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} x \right)$$

associado a (2.11). O conjunto singular de X é dado por

$$\operatorname{Sing}(X) = \{(n\pi, 0); n \in \mathbb{N}\}$$

e a parte linear de X é dado por

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos x & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}.$$

Aqui consideremos dois casos:

1. Se $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $X'(2k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$. O

polinômio característico é $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{g}{\ell} = 0$ e, portanto, os autovalores são

$$-\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{4g}{\ell}}.$$

- (a) Se $\frac{c^2}{m^2} - \frac{4g}{\ell} > 0$. Como $\frac{c^2}{m^2} - \frac{4g}{\ell} < \frac{c^2}{m^2}$, então $\sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{4g}{\ell}} < \frac{c}{m}$ logo, as duas raízes são negativas.
- (b) Se $\frac{c^2}{m^2} - \frac{4g}{\ell} = 0$, então existe uma única raiz negativa de multiplicidade dois.
- (c) Se $\frac{c^2}{m^2} - \frac{4g}{\ell} < 0$, então as duas raízes são complexas conjugadas com parte real negativa.

Em qualquer caso $(2k\pi, 0)$ são singularidades hiperbólicas de índice dois (atratores locais).

2. Se $n = 2k - 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $X'((2k-1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$.

O polinômio característico é $\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda - \frac{g}{\ell} = 0$ e, portanto, os autovalores

são

$$-\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} + \frac{4g}{\ell}}.$$

Ambas raízes são reais, uma negativa e a outra positiva. Portanto, $((2k - 1)\pi, 0)$ são singularidades hiperbólicas de índice um (selas). Fazendo algumas contas, obtemos que o autoespaço associado ao autovalor negativo é gerado por $(1, \alpha)$, onde

$$\alpha = -\frac{c}{2m} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} + \frac{4g}{\ell}} < 0$$

enquanto o autoespaço associado ao autovalor positivo é gerado pelo vetor $(1, \beta)$, onde

$$\beta = -\frac{c}{2m} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} + \frac{4g}{\ell}} > 0.$$

2.5.2 Crescimento de populações

Problema: Determinar a quantidade de indivíduos $x = x(t)$ de uma população, em qualquer instante t , conhecendo o número inicial deles.

O modelo matemático mais simples foi proposto por T. Malthus em 1778, supondo que a taxa de crescimento é constante, isto é

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a.$$

A solução dessa EDO é $x(t) = x(0)e^{at}$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ +\infty & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

Um modelo mais refinado consiste em supor que, quando a população é pequena, a taxa de crescimento é constante a , mas, à medida que a população cresce, os recursos disponíveis diminuem e produzem um efeito inibidor sobre o crescimento da população, isto é, a taxa de crescimento decresce quando a população cresce. Se denotamos por $f(x)$ a essa taxa de crescimento. A função mais simples que

satisfaz essas condições é $f(x) = a - bx$, onde $b > 0$. Assim, o modelo fica determinado por

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - bx(t).$$

Consideremos o campo $X(x) = ax - bx^2$ cujo conjunto singular é dado por $\text{Sing}(X) = \left\{0, \frac{a}{b}\right\}$. A parte linear de X é dado por $X'(x) = a - 2bx$. Aqui consideremos dois casos:

1. $X'(0) = a > 0$, logo 0 é uma fonte.
2. $X'\left(\frac{a}{b}\right) = -a < 0$ logo $\frac{a}{b}$ é um atrator.

Observe que podemos obter soluções explícitas de esta EDO da forma

$$X(t) = \frac{a}{b + \left[\frac{a - bx_0}{x_0}\right] e^{-at}} \quad \text{para todo } t \geq 0$$

onde $x_0 = X(0)$. Este modelo foi proposto em 1838 por Pierre François Verhulst. Este modelo também foi usado por Raymond Pearl e Lowell Reeb em 1920 com seu trabalho intitulado “On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation”.

Outros modelos propostos são:

1. $f(x) = a \ln\left(\frac{k}{x}\right)$ por Benjamin Gompertz em 1825.
2. $f(x) = \frac{a(k-x)}{k+ax}$ por Frederick Smith em 1963.
3. $f(x) = a \left[1 - \left(\frac{x}{k}\right)^\theta\right]$ por Narendra Goel, Samresh Maitra e Elliott Montroll em 1971.
4. $f(x) = a - bx + ce^{-x}$ por Francisco Ayala, Michael Gilpin e Joan Ehrenfeld em 1973.

2.5.3 Espécies competidoras

Suponha que temos duas espécies semelhantes que competem por um abastecimento limitado de recursos (por exemplo, duas espécies de peixes em um aquário que não se devoram entre si, mas competem pelo mesmo alimento). Denotemos por $x = x(t)$ a quantidade de indivíduos da primeira espécie em qualquer instante t e $y = y(t)$ a quantidade de indivíduos da segunda espécie em qualquer instante t .

Problema: Sabendo a quantidade atual de indivíduos (isto é, conhecendo $x(0)$, $y(0)$). Como cresceram ou decresceram cada uma das espécies? De acordo com Verhulst, em ausência da espécie y , o crescimento de x é dado por

$$x' = x(a_1 - b_1x), \quad a_1, b_1 > 0.$$

Em ausência da espécie x , o crescimento de y é dado por

$$y' = y(a_2 - b_2y), \quad a_2, b_2 > 0.$$

Quando as duas espécies estão presentes cada uma violará o abastecimento da outra, causando um efeito inibidor na taxa de crescimento que para x é diretamente proporcional a y e para y é diretamente proporcional ao número x . Com essas considerações, temos:

$$\begin{cases} x' = (a_1 - b_1x - \alpha_1y)x \\ y' = (a_2 - b_2y - \alpha_2x)y \end{cases} \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0. \quad (2.12)$$

Exemplo 2.5.1. Consideremos o sistema

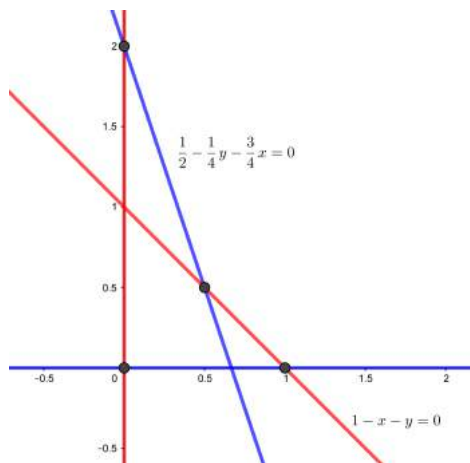
$$\begin{cases} x' = (1 - x - y)x \\ y' = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x)y. \end{cases}$$

O campo associado ao sistema anterior é dado por

$$X(x, y) = (x - x^2 - xy, \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy).$$

As singularidades de X são soluções do sistema

$$\begin{cases} (1 - x - y)x = 0 \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x)y = 0 \end{cases}$$

Figura 2.2: Singularidades do campo X

logo, $\text{Sing}(X) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ (ver Figura 2.2) e a parte linear de X é dado por

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -\frac{3}{4}y & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}x \end{bmatrix}.$$

Então

$$X'(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad X'(1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$X'(0, 2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Aqui obtemos o seguinte:

1. $(0, 0)$ é uma fonte local.
2. $(1, 0)$ é um atrator local.
3. $(0, 2)$ é um atrator local.

4. O polinômio característico de $X'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é dado por $\lambda^2 + \frac{5}{8}\lambda - \frac{1}{8} = 0$, e os autovalores são $\frac{-5 \pm \sqrt{57}}{16}$, logo um autovalor é positivo e o outro negativo, então $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é uma sela.

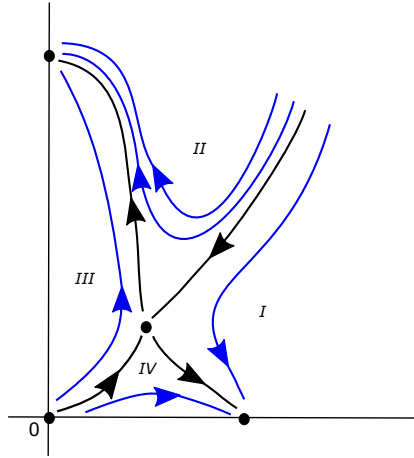


Figura 2.3: Esboço das órbitas do campo X

Se (x_0, y_0) está na região I ou em IV , a espécie y extingue-se e a espécie x sobrevive.

Se (x_0, y_0) está na região II ou em III , a espécie x extingue-se e a espécie y sobrevive.

Voltemos ao caso geral (2.12). O campo associado ao sistema (2.12) é dado por

$$X(x, y) = (a_1x - b_1x^2 - \alpha_1xy, a_2y - b_2y^2 - \alpha_2xy).$$

A parte linear de X está dado por

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} a_1 - 2b_1x - \alpha_1y & -\alpha_1x \\ -\alpha_2y & a_2 - 2b_2y - \alpha_2x \end{bmatrix}.$$

As singularidades de X são soluções do sistema

$$\begin{cases} (a_1 - b_1x - \alpha_1y)x = 0 \\ (a_2 - b_2y - \alpha_2x)y = 0. \end{cases}$$

Denotemos $\mathcal{L}_1 : a_1 - b_1x - \alpha_1y = 0$ e $\mathcal{L}_2 : a_2 - b_2y - \alpha_2x = 0$. Note que $(0, 0)$, $(0, \frac{a_2}{b_2})$ e $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$ sempre são singularidades de X , pode aparecer uma quarta singularidade, dependendo da posição das retas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 . Assim, temos os seguintes casos:

1. Se $\frac{a_2}{\alpha_2} < \frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_1}{\alpha_1} < \frac{a_2}{b_2}$.

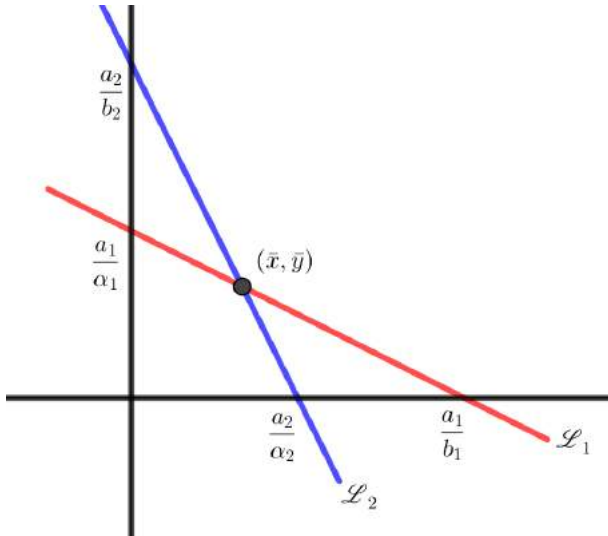


Figura 2.4: Interseção das retas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 no primeiro quadrante

Nesse caso, as retas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 se interceptam em um ponto (\bar{x}, \bar{y}) do primeiro quadrante. Assim, obtemos:

- $X'(0, 0) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, então $(0, 0)$ é uma fonte local.
- $X'(0, \frac{a_2}{b_2}) = \begin{bmatrix} \frac{a_1 b_2 - \alpha_1 a_2}{-b_2} & 0 \\ -\frac{\alpha_2 a_2}{b_2} & -a_2 \end{bmatrix}$, então $(0, \frac{a_2}{b_2})$ é um atrator local.
- $X'(\frac{a_1}{b_1}, 0) = \begin{bmatrix} -a_1 & -\frac{\alpha_1 a_1}{b_1} \\ 0 & \frac{b_1 a_2 - \alpha_2 a_1}{b_1} \end{bmatrix}$, então $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$ é um atrator local.

• $X'(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} -b_1\bar{x} & -\alpha_1\bar{x} \\ -\alpha_2\bar{y} & -b_2\bar{y} \end{bmatrix}$ tem polinômio característico dado por

$$\lambda^2 + (b_1\bar{x} + b_2\bar{y})\lambda + (b_1b_2 - \alpha_1\alpha_2)\bar{x}\bar{y} = 0$$

cujas raízes são

$$\frac{-(b_1\bar{x} + b_2\bar{y}) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

onde Δ é o discriminante do polinômio característico

$$\begin{aligned} \Delta &= (b_1\bar{x} + b_2\bar{y})^2 - 4(b_1b_2 - \alpha_1\alpha_2)\bar{x}\bar{y} \\ &= (b_1\bar{x} - b_2\bar{y})^2 + 4\alpha_1\alpha_2\bar{x}\bar{y} > 0. \end{aligned}$$

Logo, as duas raízes são reais. Uma é negativa e, para saber o sinal da outra, observamos que

$$b_1 < \frac{a_1\alpha_2}{a_2} \text{ e } b_2 < \frac{a_2\alpha_2}{a_1} \text{ então } b_1b_2 < \alpha_1\alpha_2$$

logo

$$\sqrt{\Delta} > b_1\bar{x} + b_2\bar{y}$$

portanto, a outra raiz é positiva. Concluimos que (\bar{x}, \bar{y}) é uma sela.

2. Se $\frac{a_2}{a_2} < \frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{a_1}{a_1} > \frac{a_2}{b_2}$.

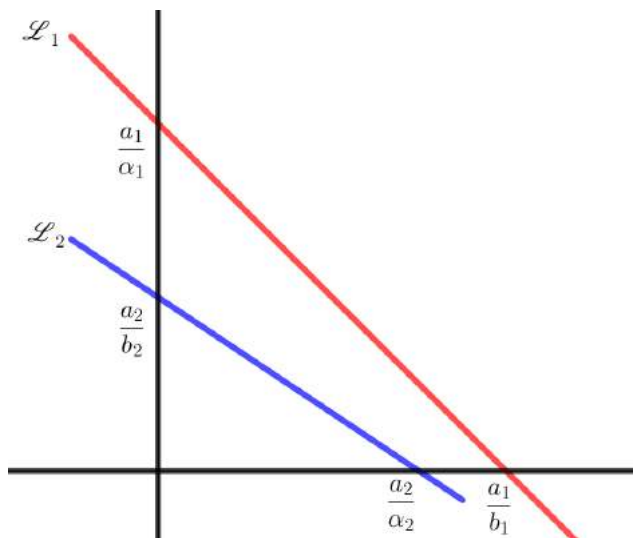


Figura 2.5: Interseção das retas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 fora do primeiro quadrante

Nesse caso, as retas \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 não se interceptam no primeiro quadrante e, portanto, só analisamos as três primeiras singularidades. Aqui obtemos:

- $X'(0, 0) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, então $(0, 0)$ é uma fonte local.
- $X'(0, \frac{a_2}{b_2}) = \begin{bmatrix} \frac{a_1 b_2 - \alpha_1 a_2}{b_2} & 0 \\ -\frac{\alpha_2 a_2}{b_2} & -a_2 \end{bmatrix}$, então $(0, \frac{a_2}{b_2})$ é uma sela.
- $X'(\frac{a_1}{b_1}, 0) = \begin{bmatrix} -a_1 & -\frac{\alpha_1 a_1}{b_1} \\ 0 & \frac{b_1 a_2 - \alpha_2 a_1}{b_1} \end{bmatrix}$, então $(\frac{a_1}{b_1}, 0)$ é um atrator local.

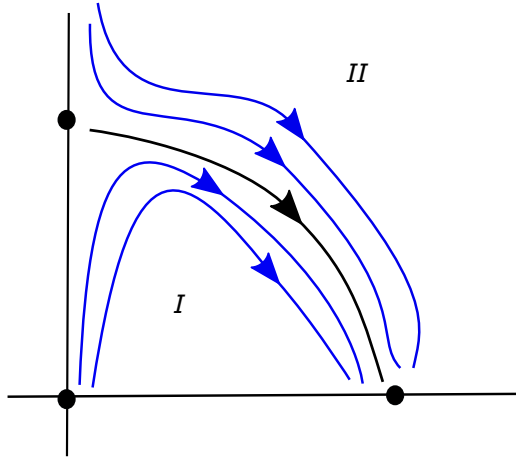


Figura 2.6: Esboço das órbitas do campo X

3

Campos de vetores e EDOs

A teoria das EDOs é muito rica e ativa. Neste texto, vamos nos dedicar aquelas EDOs ditas *autônomas*, que são da forma do Problema de Cauchy, $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, a função $f(t, x)$ não depende do tempo t , ou seja, podem ser escritas na forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$. Temos, então, uma EDO dada por um *campo de vetores*. Vejamos como formalizar.

3.1 EDOs autônomas e campos de vetores

Vejamos, então, a teoria das EDOs *autônomas*. Tais EDOs são da forma $x' = f(x)$, ou seja, a função dada pelos coeficientes da EDO não depende do tempo t , apenas do ponto x no espaço. Evidentemente isso se traduz em linguagem de campos de vetores.

Definição 3.1.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um *campo de vetores de classe C^k* em U (onde $k = 0, 1, \dots$) é uma função

$$\begin{aligned} X: U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto X(x) = (X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x)) \end{aligned}$$

que satisfaz:

1. $X_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^k em U para todo $j = 1, 2, \dots, n$. As funções X_1, X_2, \dots, X_n são chamadas *funções coordenadas*.
2. Se $x \in U$ então $X(x) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor cujo ponto de aplicação é x .

Denotaremos por $\mathcal{X}^k(U)$ (onde $0 \leq k \leq \infty$) ao conjunto de todos os campos de vetores de classe C^k definidos no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.1.1. Denotemos por $\mathbb{R}^{n \times n}$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais. Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definimos

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto X(x) = Ax \end{aligned}$$

é claro que $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nesse caso, dizemos que X é um *campo linear*.

Definição 3.1.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ (onde $0 \leq k \leq \infty$).

1. A *equação diferencial ordinária (EDO)* associada ao campo X é dada por

$$x' = X(x). \quad (3.1)$$

2. Uma *solução da EDO* (3.1) é uma função $\varphi : J \rightarrow U$ diferenciável no intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ para todo $t \in J$.

Observação 3.1.1.

1. As soluções da EDO (3.1) são *curvas* as quais denominam-se *trajetórias, órbitas ou curvas integrais* de X .
2. Se $X \in \mathcal{X}^k(U)$, então $\varphi : J \rightarrow U$ e a solução da EDO (3.1) é uma curva de classe C^{k+1} em J .
3. Geometricamente $\varphi : J \rightarrow U$ é uma curva integral de $X \in \mathcal{X}^k(U)$ se e só se seu vetor tangente em t (isto é, $\varphi'(t)$) coincide com o valor do campo X no ponto $\varphi(t)$ para todo $t \in J$.

Definição 3.1.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ (onde $0 \leq k \leq \infty$), $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$.

1. O *problema de valor inicial (PVI)* associado ao campo X é dada por

$$\begin{cases} x' &= X(x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

2. Uma *solução do PVI* (3.2) é uma função $\varphi: J \rightarrow U$ diferenciável no intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que

- (a) $t_0 \in J$.
- (b) $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ para todo $t \in J$.
- (c) $\varphi(t_0) = x_0$.

3.2 O teorema de Peano

Se $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$, sabemos que, para $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única solução do PVI (3.2). O que acontece no caso contínuo, ou seja, o que ocorre se temos “apenas” $X \in \mathcal{X}^0(U)$?

Exemplo 3.2.1. Seja $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $X(x) = 7x^{6/7}$, claramente $X \in \mathcal{X}^0(\mathbb{R})$. Consideremos o PVI

$$\begin{cases} x' &= 7x^{6/7} \\ x(0) &= 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Usando as técnicas de um curso introdutório de EDOs, chegamos a $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(t) = t^7$ é solução do PVI (3.3). Mas, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi(t) = 0$ também é solução de (3.3). Para $c > 0$, definimos

$$\begin{aligned} \phi_c: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^7 & \text{se } t > c \\ 0 & \text{se } t \leq c \end{cases} \end{aligned}$$

que é também solução do PVI (3.3). Portanto, o PVI (3.3) tem infinitas soluções. Isso deve-se a que X é contínua em 0, mas não é diferenciável em 0. Somente com a continuidade em x_0 perdemos a unicidade.

Teorema 3.2.1 (Peano). Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{X}^0(B_r[x_0])$. Então existe ao menos uma solução do PVI (3.2).

Demonstração. A ideia aqui é utilizar o fato de que o limite uniforme de soluções é um bom candidato a solução. Mas, para podermos recair nas hipóteses do Teorema de Picard, consideramos o seguinte corolário do Teorema de Aproximação de Weierstrass (Lima (1977)):

Fato 1. Existe sequência de campos de vetores $X_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cujas componentes são polinômios e tais que $X_n|_{B_b[x_0]}$ converge uniformemente para X .

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, temos que $|X_n| \leq M + \epsilon$ em $I_a[t_0] \times B_b[x_0]$, $\forall n$ suficientemente grande. Pelo Teorema de Picard, existe uma única solução φ_n de $x' = X_n(x)$, $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo $I_{\alpha_\epsilon}[t_0]$ onde $\alpha_\epsilon = \min\{a, \frac{b}{M+\epsilon}\}$.

Agora

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| = \left| \int_s^t X_n(\varphi_n(\lambda)) d\lambda \right| \leq (M + \epsilon)|t - s|$$

de modo que $\{\varphi_n\}$ é família equicontínua e também equilimitada. Segue, então, do Teorema de Arzelà (Lima (1977)), que existe uma subsequência φ_{n_j} que converge uniformemente em $I_{\alpha_\epsilon}[t_0]$ para uma certa função φ_ϵ . Agora é fácil ver que φ_ϵ é solução de $x' = X(x)$, $x(t_0) = x_0$. Por outro lado, φ_ϵ é definida em $I_{\alpha_\epsilon}(t_0)$ como queríamos. \square

Corolário 3.2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^0(U)$. Então, para qualquer $x_0 \in U$ e qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$, o PVI (3.2) admite pelo menos uma solução.

Observação 3.2.1.

1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^0(U)$ tal que, para todo $x_0 \in U$ e todo $t_0 \in \mathbb{R}$, o PVI (3.3) admite uma única solução. Podemos afirmar que $X \in \mathcal{X}^1(U)$? A resposta é Não! Por exemplo, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}$, considere o PVI

$$\begin{cases} x' &= |x| \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

não é difícil mostrar que esse PVI admite uma única solução, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}$, mas $X(x) = |x|$ não é diferenciável em 0.

2. Quando o campo de vetores $X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é contínuo, seu PVI associado pode não admitir solução. Por exemplo, basta considerar o PVI

$$\begin{cases} x' &= X(x) \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3.3 Soluções maximais

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$, $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Sabemos que o PVI (3.2) admite uma única solução φ definida em uma vizinhança de t_0 (solução local). Essa solução pode ser estendida a um intervalo maior? Esse intervalo pode ser \mathbb{R} ?

Definição 3.3.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^0(U)$, $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos seu PVI associado (3.2). Uma função diferenciável $\varphi_M: I_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada *solução maximal* do PVI (3.2) se e só se φ_M é solução de (3.2) e se $\psi: J \rightarrow U$ é solução de (3.2), então $J \subset I_M$ e $\varphi_M|_J = \psi$.

Observação 3.3.1.

1. Uma solução $\varphi_M: I_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução maximal se e só se não admite extensões que sigam sendo solução do PVI.
2. I_M é chamado *intervalo maximal*. Observe que $t_0 \in I_M$.
3. Equivalentemente: $\varphi_M: I_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução maximal de (3.2) se e só se toda solução $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (3.2) tal que $I_M \subset J$ e $\psi|_{I_M} = \varphi_M$, então $I_M = J$.
4. Tanto a solução φ_M quanto o intervalo maximal I_M dependem de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$. Por essa razão escrevemos $\varphi_M = \varphi_{(t_0, x_0)}$ e $I_M = I_{(t_0, x_0)}$.

Proposição 3.3.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$, $x_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Se $\varphi: [a, b] \rightarrow U$ (onde $t_0 \in [a, b]$) é solução do PVI (3.2), então ela pode ser estendida a um intervalo aberto $]a - \delta, b + \varepsilon[$.

Observação 3.3.2. Da Proposição 3.3.1, desprende-se que o intervalo maximal deve ser aberto.

Proposição 3.3.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^0(U)$ tal que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ o PVI (3.2) admita solução definida num intervalo aberto $J_{(t_0, x_0)}$, vale o seguinte:

1. Se $\psi_1: J_1 \rightarrow U$ e $\psi_2: J_2 \rightarrow U$ são soluções de (3.2), então $\psi_1|_{J_1 \cap J_2} = \psi_2|_{J_1 \cap J_2}$.
2. O PVI (3.2) admite uma única solução maximal.

Corolário 3.3.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$, então, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$, o PVI associado (3.2) admite uma única solução maximal $\varphi_M: I_M \rightarrow U$.

Sabemos que a solução maximal φ_M assim como seu intervalo I_M dependem de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$. Por isso, denotamos $\varphi_M = \varphi_{(t_0, x_0)}$ e $I_M = I_{(t_0, x_0)}$. Mais ainda $I_{(t_0, x_0)} =]\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0)[$.

Observação 3.3.3. Não se pode garantir que $I_{(t_0, x_0)} = \mathbb{R}$.

De fato, considere o PVI

$$\begin{cases} x' &= 1 + x^2 \\ x(0) &= 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

como $X(x) = 1 + x^2 \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R})$, então (3.4) admite solução única. Resolvendo, obtemos que

$$\begin{aligned} \varphi:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) = \tan t \end{aligned} \quad (3.5)$$

é claramente a solução maximal de (3.4).

Teorema 3.3.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$. Se $\varphi := \varphi_{(t_0, x_0)}: I_{(t_0, x_0)} =]\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0)[\rightarrow U$ é solução maximal do PVI (3.2), onde $\omega_+ := \omega_+(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\omega_- := \omega_-(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$), então, para todo $K \subset U$ compacto existe W_+ vizinhança aberta de ω_+ (respectivamente W_- vizinhança aberta de ω_-) tal que $t \in W_+ \cap [t_0, \omega_+[$, então $\varphi(t) \notin K$ (respectivamente $t \in W_- \cap]\omega_-, t_0]$, então $\varphi(t) \notin K$).

Corolário 3.3.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ e $\varphi:]\omega_-, \omega_+[\rightarrow U$ solução maximal do PVI (3.2). Se $\omega_+ \in \mathbb{R}$ (respectivamente ω_-) e existe $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \varphi(t)$ (respectivamente existe $\lim_{t \rightarrow \omega_+^+} \varphi(t)$), então $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \varphi(t) \in \partial U$ (respectivamente $\lim_{t \rightarrow \omega_+^+} \varphi(t) \in \partial U$).

Corolário 3.3.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ e $\varphi:]\omega_-, \omega_+[\rightarrow U$ solução maximal do PVI (3.2). Se existe $K \subset U$ compacto tal que $\varphi([t_0, \omega_+[) \subset K$ (respectivamente $\varphi(]\omega_-, t_0]) \subset K$), então $\omega_+ = +\infty$ (respectivamente $\omega_- = -\infty$).

Observação 3.3.4. Se $\omega_+ \in \mathbb{R}$ não é garantido a existência do $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \varphi(t)$ e

$$\lim_{t \rightarrow \omega_+^+} \varphi(t).$$

De fato, considere o PVI (3.4) cuja solução é dada por (3.5). Embora

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varphi(t) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \varphi(t) = -\infty.$$

Proposição 3.3.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$ limitado (isto é, existe $C > 0$ tal que $|X(x)| \leq C$ para todo $x \in U$). Se $\omega_+ \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\omega_- \in \mathbb{R}$), então existe $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \varphi(t)$ (respectivamente $\lim_{t \rightarrow \omega_+^+} \varphi(t)$).

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$. De agora em diante, denotaremos $\varphi_{(t_0, x_0)}: I_{(t_0, x_0)} \rightarrow U$ a solução maximal do PVI (3.2). O seguinte resultado nos diz que sob certas condições X se $x_1 \in U$ está suficientemente próximo de x_0 , então $\varphi_{(t_0, x_1)}: I_{(t_0, x_1)} \rightarrow U$ se mantém razoavelmente próximo de $\varphi_{(t_0, x_0)}$.

Tal resultado se formula como segue:

Teorema 3.3.2 (Dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $x_0, x_1 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{X}^1(U) \cap \text{Lip}(U; \mathbb{R}^n)$, então

$$|\varphi_{(t_0, x_0)}(t) - \varphi_{(t_0, x_1)}(t)| \leq |x_0 - x_1| \exp(\text{Lip}(X)|t - t_0|)$$

para todo $t \in I_{(t_0, x_0)} \cap I_{(t_0, x_1)}$.

3.4 O fluxo associado a um campo de vetores

De agora em diante, vamos supor que o instante inicial é $t_0 = 0$, isto é, vamos considerar o PVI

$$\begin{cases} x' & = X(x) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

denotaremos por φ_{x_0} em vez de $\varphi_{(0, x_0)}$, $I(x_0)$ em vez de $I_{(0, x_0)}$ e $\omega_+(x_0)$, $\omega_-(x_0)$ em vez de $\omega_+(0, x_0)$, $\omega_-(0, x_0)$.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$, definimos $D_X = \{(t, x); x \in U \text{ e } t \in I(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e a função

$$\begin{aligned} \varphi_X: D_X & \rightarrow U \\ (t, x) & \mapsto \varphi_X(t, x) = \varphi_x(t). \end{aligned}$$

Exemplo 3.4.1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e consideremos $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $X(x) = Ax$. Sabemos que $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ além disso, $D_X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} \varphi_X: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto \varphi_X(t, x) = e^{tA}x. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4.2. Seja $X:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definido por $X(x) = \frac{1}{2x}$. Claramente $X \in \mathcal{X}^\infty(]0, +\infty[)$. Dado $x_0 \in]0, +\infty[$ consideremos o PVI associado a

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2x} \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Sabemos que esse PVI tem solução única, mas ainda sua solução maximal é dada por $I(x_0) =]-x_0^2, +\infty[$ e $\varphi_{x_0}(t) = \sqrt{t + x_0^2}$. Dessa maneira, temos que $D_X = \{(t, x); x > 0 \text{ e } t > -x^2\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi_X: D_X &\rightarrow]0, +\infty[\\ (t, x) &\mapsto \varphi_X(t, x) = \varphi_x(t) = \sqrt{t + x^2}. \end{aligned}$$

Teorema 3.4.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$. A função $\varphi_X: D_X \rightarrow U$ satisfaz:

1. $\varphi_X(0, x) = x$ para todo $x \in U$.
2. Se $(t, x) \in D_X$ e $(s, \varphi_x(t)) \in D_X$, então $(s + t, x) \in D_X$ e

$$\varphi_X(s + t, x) = \varphi_X(s, \varphi_X(t)).$$

3.5 Diferenciabilidade do fluxo

Teorema 3.5.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$, então

1. $D_X = \{(t, x); x \in U \text{ e } t \in I(x)\}$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. $\varphi_X: D_X \rightarrow U$ é contínua em D_X .

Seja

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x)) \end{aligned}$$

denotaremos

$$\partial_2 \varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Teorema 3.5.2 (Diferenciabilidade local). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$. Dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ existem $\alpha > 0, \beta > 0$ e $\varphi: I_\alpha(t_0) \times B_\beta(x_0) \rightarrow U$ de classe C^1 tal que

1. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = X(\varphi(t, x))$ para todo $(t, x) \in I_\alpha(t_0) \times B_\beta(x_0)$.
2. $\varphi(t_0, x) = x$ para todo $x \in B_\beta(x_0)$.
3. $\frac{\partial(\partial_2 \varphi)}{\partial t}(t, x) = X'(\varphi(t, x))\partial_2 \varphi(t, x)$ para todo $(t, x) \in I_\alpha(t_0) \times B_\beta(x_0)$.

Teorema 3.5.3 (Diferenciabilidade do fluxo). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$). Então seu fluxo associado $\varphi_X: D_X \rightarrow U$ é de classe C^k em D_X .

Como sabemos, $I(x)$ em geral é um subconjunto próprio de \mathbb{R} . Aqueles campos de vetores onde $I(x) = \mathbb{R}$, para todo $x \in U$, recebem um nome especial.

Definição 3.5.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$. Dizemos que X é *completo* se e só se $I(x) = \mathbb{R}$ para todo $x \in U$.

Observação 3.5.1.

1. Se $X \in \mathcal{X}^1(U)$ é completo, então $D_X = \mathbb{R} \times U$.
2. Se X é um campo linear, então X é completo e $D_X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.5.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^1(U)$ limitado. Então X é completo.

Teorema 3.5.4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) completo. Então seu fluxo associado $\varphi_X: D_X \rightarrow U$ satisfaz:

1. D_X é aberto.
2. $\frac{\partial \varphi_X}{\partial t}(t, x) = X(\varphi_X(t, x))$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$.
3. $\varphi_X(0, x) = x$ para todo $x \in U$.
4. $\frac{\partial \varphi_X}{\partial t}(0, x) = X(x)$ para todo $x \in U$.
5. Dado $t \in \mathbb{R}$, a função

$$\begin{aligned} \varphi_t: U &\rightarrow U \\ x &\mapsto \varphi_t(x) = \varphi_X(t, x) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo de classe C^k em U .

6. A função

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}^k(U) \\ t &\mapsto F(t) = \varphi_t \end{aligned}$$

é um homomorfismo do grupo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo $(\text{Diff}^k(U), \circ)$.

3.6 Folheação associada a um campo de vetores

Introduziremos agora a noção de folheação associada a um campo de vetores, que será nosso primeiro exemplo desta importante noção. Vejamos como segue:

Definição 3.6.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$. A órbita de p associada a X , denotada por $\mathcal{O}_X(p)$, define-se como

$$\mathcal{O}_X(p) = \{\varphi_X(t, p); t \in I(p)\}$$

onde $\varphi_X: D_X \rightarrow U$ é o fluxo associado a X .

Observação 3.6.1.

1. $p \in \mathcal{O}_X(p)$.
2. $q \in \mathcal{O}_X(p)$ se e só se $\mathcal{O}_X(q) = \mathcal{O}_X(p)$.
3. Dado $p, q \in U$. Definimos a seguinte relação: $p \equiv_X q$ se e só se $q \in \mathcal{O}_X(p)$. Não é difícil mostrar que \equiv_X é uma relação de equivalência.

Definição 3.6.2. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$). O conjunto quociente $U / \equiv_X = \{\mathcal{O}_X(p); p \in U\}$ é chamado *folheação* em U gerado por X , que denotaremos por \mathcal{F}_X .

Observação 3.6.2.

1. Os elementos de \mathcal{F}_X são órbitas $\mathcal{O}_X(p)$, chamadas *folhas* de \mathcal{F}_X .
2. \mathcal{F}_X é chamado também *retrato de fase*.

Definição 3.6.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$. Dizemos que p é *ponto singular* de X se e só se $X(p) = 0$. Os pontos de U que não são singulares são chamados *pontos regulares* de X .

Observação 3.6.3.

1. $\text{Sing}(X) = \{p \in U; p \text{ é ponto singular de } X\}$.
2. Se $X(x) = Ax$ onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então $\text{Sing}(X) = \text{Nu}(A)$.
3. Se $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathcal{X}^k(U)$. $p \in \text{Sing}(X)$ se e só se $X_1(p) = X_2(p) = \dots = X_n(p) = 0$.

Proposição 3.6.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$. São equivalentes:

1. $p \in \text{Sing}(X)$.
2. $I(p) = \mathbb{R}$ e $\varphi_p: \mathbb{R} \rightarrow U$ é a função constante $\varphi_p(t) = p$.
3. $\mathcal{O}_X(p) = \{p\}$.

Proposição 3.6.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$), $p \in U$ e $\varphi_p: I(p) \rightarrow U$ solução maximal. Se existem $t_1, t_2 \in I(p)$ com $t_1 \neq t_2$ tal que $\varphi_p(t_1) = \varphi_p(t_2)$, então $I(p) = \mathbb{R}$ e existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_p(t + c) = \varphi_p(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (isto é, φ_p é periódica).

Teorema 3.6.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$), $p \in U$ e $\varphi_p: I(p) \rightarrow U$ solução maximal, então se verifica uma e só uma das alternativas seguintes:

1. φ_p é injetiva.
2. $I(p) = \mathbb{R}$ e φ_p é constante.
3. $I(p) = \mathbb{R}$ e φ_p é periódica com período positivo.

Observação 3.6.4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$), então as órbitas $\mathcal{O}_X(p)$ só podem ser de algum dos três seguintes tipos:

1. Imagem bijetiva de um intervalo.
2. Um ponto.
3. Uma curva fechada.

3.7 Conjugação de campos de vetores

Definição 3.7.1. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $X_1 \in \mathcal{X}^{k_1}(U_1)$ ($k_1 \geq 1$), $X_2 \in \mathcal{X}^{k_2}(U_2)$ ($k_2 \geq 1$) e denotemos $\varphi_1: D_1 \rightarrow U_1$ e $\varphi_2: D_2 \rightarrow U_2$ os fluxos associados a X_1 e X_2 respectivamente.

1. Dizemos que X_1 e X_2 são *topologicamente conjugados* se e só se existe $h: U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo chamado *conjugação topológica* tal que

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$$

para todo $(t, p) \in D_1$.

2. Dizemos que X_1 e X_2 são C^r -conjugados (onde $r \leq \min\{k_1, k_2\}$) se e só se existe $h: U_1 \rightarrow U_2$ difeomorfismo de classe C^r chamado C^r -conjugação tal que

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$$

para todo $(t, p) \in D_1$.

Observação 3.7.1.

1. Se $X_1 \in \mathcal{X}^{k_1}(U_1)$ e $X_2 \in \mathcal{X}^{k_2}(U_2)$ são conjugados por $h: U_1 \rightarrow U_2$ então

$$I_1(p) = I_2(h(p))$$

para todo $p \in U_1$.

2. $X_1 \in \mathcal{X}^{k_1}(U_1)$ e $X_2 \in \mathcal{X}^{k_2}(U_2)$ são conjugados por $h: U_1 \rightarrow U_2$ se e só se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & U_1 \\ \downarrow (id, h) & & \downarrow h \\ D_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & U_2 \end{array}$$

onde $D_1 = \{(t, p); p \in U_1 \text{ e } t \in I_1(p)\}$ e $D_2 = \{(t, q); q \in U_2 \text{ e } t \in I_2(q)\}$.

3. $h(\mathcal{O}_{X_1}(p)) = \mathcal{O}_{X_2}(h(p))$ para todo $p \in U_1$.

4. Denotaremos:

$X_1 \sim_{top} X_2$ se e só se X_1 e X_2 são topologicamente conjugados

$X_1 \sim_{C^r} X_2$ se e só se X_1 e X_2 são C^r -conjugados.

5. Se $X_1 \sim_{C^r} X_2$ então $X_1 \sim_{top} X_2$.

Exemplo 3.7.1. Sejam $X_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $X_1(x, y) = (x, -y)$ e $X_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $X_2(x, y) = (x - 4y^3, -y)$. Claramente $X_1, X_2 \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Seja $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = (x + y^3, y)$.

Afirmção 3.7.1. h é uma C^∞ -conjugação entre X_1 e X_2 .

De fato, um fácil cálculo mostra que

$$\begin{aligned} \varphi_1: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\mapsto \varphi_1(t, (x, y)) = (xe^t, ye^{-t}) \end{aligned}$$

é o fluxo associado a X_1 e

$$\begin{aligned} \varphi_2: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\mapsto \varphi_2(t, (x, y)) = ((x - y^3)e^t + y^3e^{-3t}, ye^{-t}) \end{aligned}$$

é o fluxo associado a X_2 . Agora note que

$$\begin{aligned} h(\varphi_1(t, (x, y))) &= h(xe^t, ye^{-t}) \\ &= (xe^t + y^3e^{-3t}, ye^{-t}) \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \varphi_2(t, h(x, y)) &= \varphi_2(t, (x + y^3, y)) \\ &= (xe^t + y^3e^{-3t}, ye^{-t}) \end{aligned}$$

comparando, mostramos a afirmação.

Proposição 3.7.1. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $X_1 \in \mathcal{X}^{k_1}(U_1)$ ($k_1 \geq 1$), $X_2 \in \mathcal{X}^{k_2}(U_2)$ ($k_2 \geq 1$) e $h: U_1 \rightarrow U_2$ difeomorfismo de classe C^r . Então h é um C^r -conjugação entre X_1 e X_2 se e só se $h'(p)(X_1(p)) = X_2(h(p))$ para todo $p \in U_1$.

Voltando ao Exemplo 3.7.1, vamos usar a Proposição 3.7.1 para comprovar que $X_1(x, y) = (x, -y)$ e $X_2(x, y) = (x - 4y^3, -y)$ são conjugados por $h(x, y) = (x + y^3, y)$. De fato, $h'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 3y^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo

$$h'(x, y)(X_1(x, y)) = \begin{bmatrix} 1 & 3y^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = (x - 3y^3, -y)$$

por outro lado

$$X_2(h(x, y)) = X_2(x + y^3, y) = (x - 3y^3, -y).$$

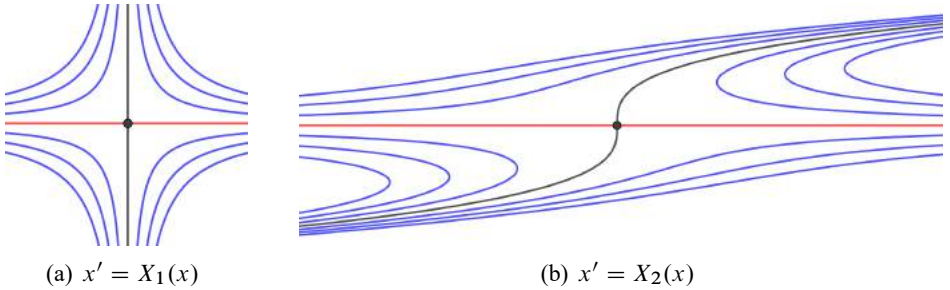


Figura 3.1: Conjugação entre X_1 e X_2

3.8 Estrutura local dos pontos regulares

Sejam v_1, v_2, \dots, v_k vetores em \mathbb{R}^n . Denotemos o espaço vetorial gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_k por $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.

Definição 3.8.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$. Uma *seção transversal local de classe C^r ao campo X , no ponto p* , é uma função $\sigma: V^{n-1} \rightarrow U$ de classe C^r (onde V^{n-1} é aberto conexo de \mathbb{R}^{n-1}) que satisfaz:

1. σ é uma *imersão* de V^{n-1} em U (isto é, $\sigma'(x): \mathbb{R}_x^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{\sigma(x)}^n$ é injetiva para todo $x \in V^{n-1}$).
2. $\sigma: V^{n-1} \rightarrow \sigma(V^{n-1}) = \Sigma$ é um homeomorfismo.
3. $p \in \Sigma$.

4. $\sigma'(x)(\mathbb{R}_x^{n-1}) \oplus \langle X(\sigma(x)) \rangle = \mathbb{R}_{\sigma(x)}^n$ para todo $x \in V^{n-1}$.

Observação 3.8.1. $\sigma'(x)(\mathbb{R}_x^{n-1})$ é um \mathbb{R} -espaço vetorial de dimensão $n-1$ (desde que $\sigma'(x)$ é injetiva) gerado por $\sigma'(x)((e_1)_x), \dots, \sigma'(x)((e_n)_x)$.

Exemplo 3.8.1. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ definido por $X(x, y) = (x, -y)$ e seja $p = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \sigma:]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \sigma(t) = (1, -t). \end{aligned}$$

Afirmção 3.8.1. σ é uma seção transversal local a X em p de classe C^∞ .

De fato, claramente σ é de classe C^∞ em $] - 1, 1[$.

1. $\sigma'(t) = (0, -1)$ para todo $t \in] - 1, 1[$, então $\sigma'(t)$ é injetiva para todo $t \in] - 1, 1[$.
2. $\Sigma = \sigma(] - 1, 1[) = \{(1, y); y \in] - 1, 1[\}$. Segue-se que σ é um homeomorfismo entre $] - 1, 1[$ e Σ .
3. $p = (1, 0) = \sigma(0) \in \Sigma$.
4. Dado $t \in] - 1, 1[$, temos

$$\sigma'(t)(\mathbb{R}_t) = \langle (0, -1)_{\sigma(t)} \rangle \text{ e } X(\sigma(t)) = (1, t)_{\sigma(t)}$$

então

$$\sigma'(t)(\mathbb{R}_t) \oplus \langle X(\sigma(t)) \rangle = \mathbb{R}_{\sigma(t)}^2.$$

Proposição 3.8.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$ um ponto regular de X . Então existe uma seção transversal local σ de classe C^∞ ao campo X no ponto p tal que $\sigma(0) = p$.

Teorema 3.8.1 (Teorema do fluxo tubular). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$ um ponto regular de X . Dado uma seção transversal local $\sigma: V \rightarrow U$ de classe C^∞ ao campo X em p , com $0 \in V$ e $\sigma(0) = p$, então existe uma vizinhança aberta $W_p \subset U$ de p e um difeomorfismo $h: W_p \rightarrow I_\varepsilon(0) \times B$ de classe C^k onde $\varepsilon > 0$, e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} centrada na origem, tais que:

1. $h(\Sigma \cap W_p) = \{0\} \times B$.

2. h é uma C^r -conjugação entre $X|_{W_p}$ e o campo constante

$$\begin{aligned} Y: I_\varepsilon(0) \times B &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Y(x) = (1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Definição 3.8.2. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $X_1 \in \mathcal{X}^{k_1}(U_1)$ ($k_1 \geq 1$), $X_2 \in \mathcal{X}^{k_2}(U_2)$ ($k_2 \geq 1$), $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ e denotemos $\varphi_1: D_1 \rightarrow U_1$ e $\varphi_2: D_2 \rightarrow U_2$ os fluxos associados a X_1 e X_2 respectivamente. Dizemos que X_1 e X_2 são *localmente topologicamente conjugados* (respectivamente *localmente C^r -conjugados*, $r \leq \min\{k_1, k_2\}$) se e só se existem $W_1 \subset U_1$ vizinhança aberta de p_1 , $W_2 \subset U_2$ vizinhança aberta de p_2 tal que $X_1|_{W_1}$ e $X_2|_{W_2}$ são topologicamente conjugados (respectivamente C^r -conjugados).

Com a Definição 3.8.2 e por consequência do Teorema 3.8.1, temos:

Corolário 3.8.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $p \in U$ um ponto regular de X . Então X é localmente C^r -conjugado a $Y = (1, 0, \dots, 0)$ em p e $(0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}^{n-1}})$.

3.9 Singularidades hiperbólicas de campos de vetores

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $a \in \text{Sing}(X)$. Denotaremos por $U_a = \{p \in \mathbb{R}^n; a + p \in U\}$. Como X é diferenciável em a , tem-se

$$X(a + p) = \underbrace{X(a)}_0 + X'(a)(p) + r_a(p), \text{ para todo } p \in U_a$$

onde $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{r_a(p)}{|p|} = 0$. Como $X(a + p) \approx X'(a)(p)$ para $|p|$ suficientemente pequeno, então podemos concluir que X na vizinhança de a pode ser aproximada por $X'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na vizinhança de a . Logo, as órbitas de $A = X'(a)$ aproximam as órbitas de X numa vizinhança de a .

Proposição 3.9.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$) e $a \in \text{Sing}(X)$. Então a solução maximal $\varphi_p: I(p) \rightarrow U$ pode-se escrever na forma

$$\varphi_p(t) = e^{tA}p + \int_0^t e^{(t-s)A}r_a(\varphi_p(s))ds, \text{ para todo } t \in I(p).$$

Definição 3.9.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$).

1. Dizemos que $a \in U$ é uma *singularidade hiperbólica* de X se e só se $a \in \text{Sing}(X)$ e $X'(a) \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$.
2. Se $a \in U$ é uma singularidade hiperbólica de X , definimos o *índice de X em a* , a qual denotamos $i_a(X)$, como o índice da matriz hiperbólica $X'(a)$, isto é, $i_a(X) = i(X'(a))$.

Exemplo 3.9.1. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por $X(x, y) = (-x, -y + \text{sen } x)$. Claramente $\text{Sing}(X) = \{(0, 0)\}$. Além disso, como

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \cos x & -1 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad X'(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

concluimos que $(0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica de X com $i_{(0,0)}(X) = 2$.

Exemplo 3.9.2. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por $X(x, y) = (y, -y - \text{sen } x)$. Segue-se que $\text{Sing}(X) = \{(n\pi, 0); n \in \mathbb{Z}\}$. Além disso, como

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -1 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad X'(n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos dois casos:

1. Se n é par, então $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, logo $X'(2k\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Os autovalores associados a essa matriz são $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, então $(2k\pi, 0)$ são singularidades hiperbólicas e $i_{(2k\pi,0)}(X) = 2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2. Se n é ímpar então $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, logo $X'((2k - 1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Os autovalores associados a essa matriz são $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, então $((2k - 1)\pi, 0)$ são singularidades hiperbólicas e $i_{((2k-1)\pi,0)}(X) = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3.10 Atratores e fontes locais

Definição 3.10.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $X \in \mathcal{X}^k(U)$ ($k \geq 1$).

1. Dizemos que $a \in \text{Sing}(X)$ é um *atrator local* de X se e só se existe $\delta > 0$ tal que se $p \in B_\delta(a)$, então $[0, +\infty[\subset I(p)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = a$.

2. Dizemos que $a \in \text{Sing}(X)$ é uma *fonte local* de X se e só se a é um atrator local de $-X$.

Teorema 3.10.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ e $a \in U$ singularidade hiperbólica de X .

1. Se $i_a(X) = n$, então a é um atrator local de X .
2. Se $i_a(X) < n$, então a não é um atrator local de X .

Corolário 3.10.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ e $a \in U$ singularidade hiperbólica de X .

1. a é um atrator local de X se e só se $i_a(X) = n$.
2. a é uma fonte local de X se e só se $i_a(X) = 0$.

Exemplo 3.10.1. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por $X(x, y) = (-x, -y + \text{sen } x)$. Sabemos que $(0, 0)$ é uma singularidade hiperbólica de X e $i_{(0,0)}(X) = 2$. Pelo Corolário anterior, $(0, 0)$ é um atrator local de X .

Exemplo 3.10.2. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por $X(x, y) = (y, -y - \text{sen } x)$. Sabemos que $(2k\pi, 0)$ é singularidade hiperbólica de X com $i_{(2k\pi,0)}(X) = 2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pelo Corolário anterior, $(2k\pi, 0)$ é um atrator local de X para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.10.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ e $a \in U$ singularidade hiperbólica de X . Se $i_a(X) = n$, então X é localmente topologicamente conjugado a $-I$ em a e 0.

Corolário 3.10.2. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $Y \in \mathcal{X}^k(V)$, $a \in U$ singularidade hiperbólica de X e $b \in V$ singularidade hiperbólica de Y .

1. Se $i_a(X) = i_b(Y) = n$, então X e Y são localmente topologicamente conjugados em a e b .
2. Se $i_a(X) = i_b(Y) = 0$, então X e Y são localmente topologicamente conjugados em a e b .

Definição 3.10.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $a \in U$ singularidade hiperbólica de X , $V \subset U$ vizinhança aberta de a e $V' \subset U$ tal $V \subset V'$.

1. O conjunto estável local a X em V , denotado por $W_X^s(V)$, define-se como

$$W_X^s(V) = \{p \in V; [0, +\infty[\subset I(p), \varphi_p(t) \in V' \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_p(t) = a\}.$$

2. O conjunto instável local a X em V , denotado por $W_X^u(V)$, define-se como

$$W_X^u(V) = W_{-X}^s(V).$$

Exemplo 3.10.3.

1. Se $i_a(X) = n$, então $W_X^s(B_\delta(a)) = B_\delta(a)$ e $W_X^u(B_\delta(a)) = \{a\}$.

2. Se $i_a(X) = 0$, então $W_X^s(B_\delta(a)) = \{a\}$ e $W_X^u(B_\delta(a)) = B_\delta(a)$.

O que acontece quando $i_a(X) = m$, onde $m \in \{1, \dots, n-1\}$?

Teorema 3.10.3 (Teorema da superfície estável). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ e $a \in U$ singularidade hiperbólica de X com $i_a(X) = m$. Então existe $r > 0$ tal que

1. $W_X^s(B_r(a))$ é uma superfície de dimensão m e classe C^k que contém a e $T_a W_X^s(B_r(a)) = E^s(X'(a))$;

2. $W_X^u(B_r(a))$ é uma superfície de dimensão $n - m$ e classe C^k que contém a e $T_a W_X^u(B_r(a)) = E^u(X'(a))$.

Teorema 3.10.4 (Grobmann–Hartman). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ e $a \in U$ singularidade hiperbólica de X com $i_a(X) = m$. Então X é localmente topologicamente conjugado a

$$\text{diag}[-I_{m \times m}, I_{(n-m) \times (n-m)}]$$

em a e 0.

4

Teoria qualitativa de EDOs autônomas: o Teorema de Poincaré– Bendixson

A introdução da noção de transformação de primeiro retorno, também conhecida como Transformação de Poincaré foi um marco importante na teoria qualitativa das EDOs. Até então, parte substancial dos esforços dos pesquisadores, era direcionada à resolução das EDOs. Isto, porém, muitas vezes, objetivava a compreensão do comportamento das soluções, seja em torno de um ponto singular, seja em termos assintóticos (quando o tempo transcorrido é grande). Henri Poincaré foi pioneiro na ideia de que tais informações podem ser obtidas não necessariamente por meio da solução explícita da EDO, mas sim pelo estudo da geometria de suas soluções e, mais precisamente, da maneira como essas se distribuem no espaço.

Em particular, em uma vizinhança de uma solução periódica (curva fechada), é importante considerar como retornam as soluções próximas a essa curva fechada. Vejamos a formalização de tais conceitos:

Proposição 4.0.1. *Seja γ uma trajetória orientada (não singular) de um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$ em $U \subset \mathbb{R}^n$. Dados pontos $p, q \in \gamma$ e seções transversais Σ_p e Σ_q com $p \in \Sigma_p \cap \gamma$ e $q \in \Sigma_q \cap \gamma$; existe uma aplicação de classe C^k $h_\gamma: V_p \subset \Sigma_p \rightarrow \Sigma_q$ tal que:*

- (i) *Se $x \in V_p$, então $h_\gamma(x) \in \Sigma_q$ é o primeiro ponto de intersecção da trajetória (orientada) de X passando por x , com a seção Σ_q .*
- (ii) *$h(p) = q$ e h é difeomorfismo C^k de V_p sobre sua imagem.*

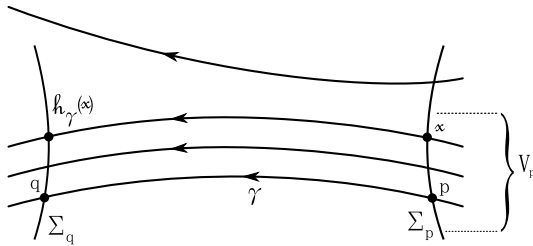


Figura 4.1: Comportamento das órbitas próximo a uma órbita periódica

Demonstração. (Exercício!).

□

Para o caso em γ é uma órbita periódica obtemos:

Proposição 4.0.2 (Transformação de Poincaré). *Seja X um campo de classe C^k , $k \geq 1$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Dada uma trajetória compacta (regular) γ de X , um ponto $p \in \gamma$ e uma seção transversal Σ com $\Sigma \cap \gamma = \{p\}$, existe um difeomorfismo $\pi: V \subset \Sigma \rightarrow \pi(V) \subset \Sigma$, onde V é uma vizinhança de p , tal que $\forall x \in V$, $\pi(x)$ é o primeiro ponto de retorno da trajetória de X partindo de p , à seção transversal Σ . Em particular $\pi(p) = p$. Em particular, existe uma vizinhança saturada W de γ na qual todas as órbitas são periódicas se e somente se podemos escolher V de modo que π seja a aplicação identidade em V .*

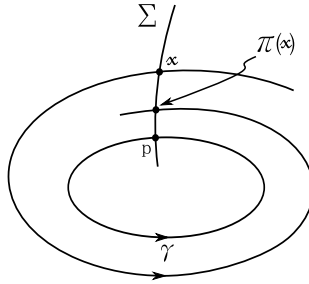


Figura 4.2: Transformação de Poincaré

Demonstração. (Exercício!) □

Definição 4.0.1 (Ciclos Limites). Uma órbita periódica γ de um campo de vetores X é um *ciclo limite* se existe uma vizinhança W de γ tal que nessa vizinhança não há ponto pertencente a nenhuma outra órbita periódica.

Proposição 4.0.3. *Seja γ um ciclo limite de um campo X de classe C^1 . Se V é vizinhança suficientemente pequena de γ temos as seguintes três possibilidades:*

$$(i) \ \gamma \text{ é estável: } q \in V \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0.$$

$$(ii) \ \gamma \text{ é instável: } q \in V \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0.$$

$$(iii) \ \gamma \text{ é semiestável: } q \in V, q \text{ exterior a } \gamma \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0; \\ q \in V, q \text{ interior a } \gamma \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0; \text{ ou vice-versa.}$$

Demonstração. (Exercício!) □

Uma propriedade importante da Transformação de Poincaré é a seguinte:

Proposição 4.0.4. *Seja X um campo de vetores de classe C^1 em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com uma órbita periódica γ de período τ e com transformação de Poincaré $\pi: \Sigma \rightarrow \Sigma$, sendo Σ seção transversal a γ em p . Seja β uma base de $T_p(\Sigma)$, espaço tangente a Σ em p . Então temos uma base de \mathbb{R}^n em p dada por $\beta \cup \{X(p)\}$. As derivada $d\pi(p)$ e do fluxo $\varphi(t, z)$ nessa base se relacionam da seguinte forma*

$$D_z \varphi(\tau, p) = \begin{pmatrix} 1 & \square \\ 0 & d\pi(p) \end{pmatrix}.$$

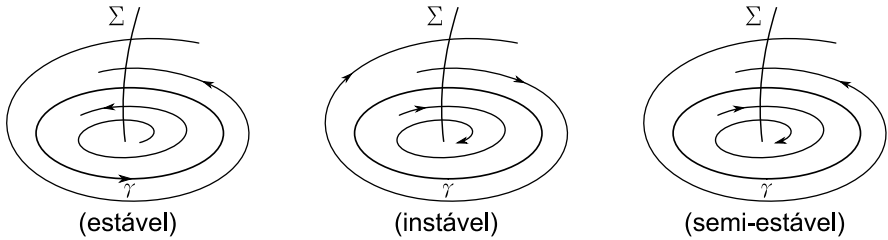


Figura 4.3: Ciclos Limites

Demonstração. Tomamos vizinhança W de p em Σ de modo que toda trajetória de X por um ponto $z \in W$ volta a interceptar Σ e, portanto, temos bem definida a transformação de Poincaré $\pi : W \rightarrow \Sigma$. Por simplicidade da notação, suporemos que a dimensão do ambiente é dois. Dessa forma, podemos escolher coordenadas locais $(x_1, x_2) \in U$ em uma vizinhança U de p em \mathbb{R}^2 , centradas em p e tais que $\Sigma : \{x_1 = 0\}$ e o eixo x_2 é colinear com $X(p)$ (em p). Consideramos, então, a restrição $\xi(t, z) := x_1(\varphi(t, z))$ definida em $]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[\times W$ (para $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente e diminuindo W se necessário). Um cálculo direto mostra, então, que $\frac{\partial}{\partial t} \xi(\tau, p) = dx_1(p)X(p)$. Uma vez que $X(p)$ é transversal ao eixo x_1 em p temos $\frac{\partial}{\partial t} \xi(\tau, p) \neq 0$. Por outro lado, temos que $\xi(\tau, p) = x_1(\varphi(\tau, p)) = 0$. Aplicamos, então, o Teorema da Aplicação Implícita para obter uma aplicação $\tilde{\tau} : W \rightarrow \mathbb{R}$ (sempre diminuindo W se necessário) tal que $\tilde{\tau}(p) = \tau$, e o tempo $\tilde{\tau}(z)$ é a única solução de $\xi(\varphi(t, z))$. Em outras palavras, $\tilde{\tau}(z)$ é o tempo de primeiro retorno da solução por $z \in W \subset \Sigma$ à seção Σ . Isso nos permite escrever $\pi(z) = \varphi(\tilde{\tau}(z), z)$, que nos permite obter

$$d\pi(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\tau, p) + \frac{d\varphi(t, p)}{dt} \Big|_{t=\tau} d\tilde{\tau}(p) = D_z \varphi(\tau, p) + X(p) d\tilde{\tau}(p).$$

Uma vez que $\varphi(t + \tau, p) = \varphi(t, p)$, temos

$$\frac{d}{dt} \varphi(t + \tau, p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi(t, p) \Big|_{t=0} = X(p).$$

Por outro lado, pela propriedade de fluxo, temos

$$\frac{d}{dt} \varphi(t + \tau, p) \Big|_{t=0} = D_z \varphi(\tau, p) \frac{d}{dt} \varphi(t, p) \Big|_{t=0} = D_z \varphi(\tau, p) X(p).$$

Assim sendo, obtemos

$$D_z \varphi(\tau, p) X(p) = X(p).$$

o que conclui a demonstração. \square

A transformação de Poincaré também pode ser obtida como solução de um problema variacional como segue:

Seja $y' = f(t, y)$ uma EDO com solução periódica $\gamma(t)$ de período τ . Usando a notação temos pomos $\gamma(0) = y_0$ e escrevemos $\gamma(t) = y(t, y_0)$, da mesma forma $y(t, z)$ é a solução que satisfaz $y(0) = z$. Em geral, dada uma seção transversal Σ a γ em y_0 , não é verdade que $y(\tau, z) \in \Sigma$ para todo $z \in \Sigma$ próximo a y_0 , ou seja, não é verdade, em geral, que as órbitas tenham um tempo de retorno τ à seção transversal escolhida Σ . Mas podemos escolher uma seção Σ com esta propriedade (exercício!). Suporemos, então, por conveniência neste parágrafo, que $y(\tau, z) \in \Sigma$ para todo $z \in \Sigma$ próximo o suficiente de y_0 , ou seja, a transformação de Poincaré de γ é dada por $\pi(z) = y(\tau, z)$. Calculemos, então, a sua derivada $\pi'(z)$ em $z = y_0$. Primeiro observamos que $P'(z) = \frac{\partial}{\partial z} y(\tau, z)$. De $y'(t) = f(t, y)$, obtemos $y'(t, z) = f(t, y(t, z))$ de modo que $\frac{\partial}{\partial z} y'(t, z) = \frac{\partial}{\partial z} (f(t, y(t, z))) = f_y(t, y(t, z)) \frac{\partial}{\partial z} y(t, z)$ e, portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} y(t, z) \right) = f_y(t, y(t, z)) \frac{\partial}{\partial z} y(t, z).$$

Note também que $\frac{\partial}{\partial z} y(0, z) = \frac{\partial z}{\partial z} = Id$. Assim, $\frac{\partial y(t, z)}{\partial z}$ é solução da seguinte EDO linear

$$Y' = f_y(t, y(t, z)) \cdot Y, Y(0) = Id.$$

Essa interpretação pode ser útil em problemas concretos, nos quais a EDO original $y' = f(t, y)$ apresente características simplificadoras como, por exemplo, periodicidade. Aplicando essa técnica à equação do *pêndulo com suporte oscilante* $\theta'' + (1 + a \cos \omega t) \sin \theta = 0$, obtemos a seguinte EDO conhecida como *equação de Mathieu*:

$$x' + (1 + a \cos \omega t)x = 0$$

descrevendo a transformação de Poincaré de uma órbita de período 2π .

4.1 Conjuntos limites

Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores C^k , $k \geq 1$ e para cada ponto $p \in U$ denotemos por $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$ a trajetória de X passando por $p = \varphi_p(0)$, definida no intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Suponhamos que $\omega_+(p) = +\infty$. Neste caso, definimos

$$\omega(p) = \{q \in U, \exists t_n \nearrow +\infty, \text{ com } \varphi(t_n) \rightarrow q\}.$$

Se $\omega_-(p) = -\infty$ definimos

$$\alpha(p) = \{q \in U, \exists t_n \searrow -\infty, \text{ com } \varphi(t_n) \rightarrow q\}.$$

Chamamos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ conjunto ω -limite e conjunto α -limite de p , respectivamente.

Observação 4.1.1.

- (i) Se p é ponto singular, então $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$.
- (ii) Se $\gamma_p \ni p$ é órbita periódica, então, $\alpha(p) = \omega(p) = \gamma_p$ (mais adiantes estudaremos a recíproca desse fato).

Exemplo 4.1.1. Seja $X = (-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2))$, então X tem o seguinte diagrama de fase (ver Figura 4.4). Em particular, se C é o círculo unitário centrado na origem do plano, então: $\alpha(p) = \{0\}, \emptyset, C$ caso $p \in$ interior de C , $p \in$ exterior de C , $p \in C$ respectivamente. Por outro lado, $\omega(p) = C, \forall p \neq 0$.

Lema 4.1.1. Se $p, q \in \gamma$, então $\omega(p) = \omega(q)$ e $\alpha(p) = \alpha(q)$.

Demonstração. Seja $\varphi(t)$ a solução de X que passa por p no tempo $t = 0$, que suporemos definida para todo $t \geq 0$. Dado $q \in \gamma(p)$, denotemos por $\psi(t)$ a solução de X que passa por q em $t = 0$. Então $q = \varphi(t_0)$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ e pela propriedade de fluxo, temos que $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$ para todo $t \geq 0$. Em particular, obtemos que $\omega(p) = \omega(q)$, pois $t_n \rightarrow +\infty$ se e somente se $t_n + t_0 \rightarrow +\infty$. \square

Podemos, então, formular a seguinte definição:

Definição 4.1.1. O conjunto ω -limite da órbita γ é o conjunto $\omega(\gamma) = \omega(p)$ onde $p \in \gamma$ é qualquer. Analogamente define-se $\alpha(\gamma)$.

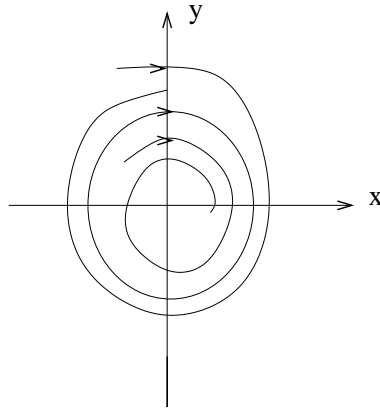


Figura 4.4: Diagrama de fase do campo X

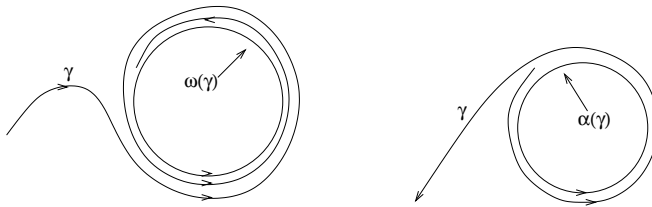


Figura 4.5: Conjunto ω -limite e α -limite

A estrutura topológica dos conjuntos limites é dada basicamente pelo seguinte resultado:

Proposição 4.1.1. *Sejam $X: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ campo $C^k, k \geq 1, p \in U$ e $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p), t \geq 0\}, \gamma_p^- = \{\varphi(t, p), t \leq 0\}$ as chamadas semiórbitas positiva e negativa de X respectivamente. Se $\gamma_p^+ \subset K$ para algum compacto $K \subset U$, então:*

- (i) $\omega(p) \neq \emptyset$.
- (ii) $\omega(p)$ é compacto e invariante.
- (iii) $\omega(p)$ é conexo.

(iv) $\omega(p)$ é saturado, ou seja, $q \in \omega(p) \implies \gamma(q) \subset \omega(p)$, onde $\gamma(q)$ denota a trajetória de X que contém q .

Resultados análogos valem para $\alpha(p)$.

Demonstração. Podemos escolher $p \in \gamma$ qualquer e estudar $\omega(p) = \omega(\gamma)$. Comparando uma sequência t_n com $t_n \rightarrow +\infty$, temos que $\varphi(t_n) \in K$, $\forall n$ por hipótese, de modo que esta possua uma subsequência convergente, digamos, $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q \in K$. Claramente $q \in \omega(p)$ de modo que $\gamma(p) \neq \emptyset$.

Seja agora $q_n \in \omega(p)$. Então, para cada n , existe uma sequência $\{t_m^n\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m^n) = q_n$. Um argumento canônico de sequências nos dá, então, uma sequência $T_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(T_n) \rightarrow \lim q_n = q$ de modo que $\omega(p)$ é fechado. Como $\omega(p) \subset K$ que é compacto, segue que $\omega(p)$ é compacto.

A fim de ver que $\omega(p)$ é conexo, suponhamos por contradição que é possível escrever $\omega(p) = A_1 \cup A_2$, onde A_j é compacto não vazio com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Seja $d = d(A_1, A_2)$ a distância entres esses dois compactos. Então, dado $q_1 \in A_1$, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_n) \rightarrow q_1$ e analogamente dado $q_2 \in A_2$, existe uma sequência $s_m \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(s_m) \rightarrow q_2$. Como $q_2 \notin A_1$, devemos ter para cada n um tempo $T_n > t_n$ tal que $d(\varphi(T_n), A_1) = \frac{d}{2}$ (de fato a trajetória deve sair de A_1 em algum tempo maior do que t_n e, logo, pelo Teorema da Alfândega (ver Lima (1981)), a função distância $t \mapsto d(\varphi(t), A_1)$ deve assumir o valor $d/2$). Mas, passando a uma subsequência convergente, isso nos dará uma sequência $T_{n_k} \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(T_{n_k}) \rightarrow q_3 \in K$ e $d(q_3, A_1) = d/2$. Mas, então, $d(q_3, A_2) \geq d/2 > 0$ e, logo, $q_3 \notin A_1 \cup A_2$. Mas, claramente, $q_3 \in \omega(p)$ gerando uma contradição.

O item (iv) é uma consequência direta da propriedade de fluxo $\varphi_p(t + t_n) = \varphi_{\varphi_p(t)}(t_n)$, que deixamos como exercício para o leitor. \square

4.2 O Teorema de Poincaré–Bendixson

Nesta parte do texto, estabeleceremos a principal ferramenta no estudo qualitativo dos campos de vetores globais em dimensão dois: O Teorema de Poincaré–Bendixson, que versa sobre os conjuntos limites de órbitas de campos vetores, com a hipótese de que estejam contidas em compactos. Podemos, assim, obter informação geral relevante sobre o comportamento assintótico das soluções de uma EDO autônoma, sem necessariamente conhecer suas expressões analíticas.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Poincaré–Bendixson). *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores C^k , $k \geq 1$, $p \in U$ um ponto e γ_p^+ a semiórbita positiva correspondente.*

Suponha que $\gamma_p^+ \subset K$ para algum compacto $K \subset U$. Denote por $\text{sing}(X)$ o conjunto dos pontos singulares de X . Então temos as seguintes possibilidades:

- (i) $\omega(p)$ contém infinitas singularidades de X .
- (ii) $\omega(p) \cap \text{sing}(X) = \emptyset \implies \omega(p)$ é órbita periódica de X .
- (iii) $\omega(p) \not\subset \text{sing}(X)$, possui apenas um número finito de singularidades de $X \implies \omega(p)$, que consiste de uma união de órbitas cada uma das quais tende a um dos pontos de $\omega \cap \text{sing}(X)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Observamos que esse resultado é válido somente em dimensão dois, utilizando o chamado Teorema da Curva de Jordan, que afirma que uma curva fechada simples (sem autointersecção) $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ no plano, divide o plano em duas regiões tendo γ como bordo, uma região limitada (dita *interior* a γ) e outra ilimitada (dita *exterior* a γ). Esse teorema se encontra na literatura corrente.

A demonstração que apresentaremos é aquela que se encontra na literatura corrente, Sotomayor (1979), Hirsch e Smale (1974), e está esquematizada em uma série de lemas de interesse próprio e que passamos a estabelecer.

No que se segue, guardamos as hipóteses e a notação do Teorema 4.2.1, ou seja, fixaremos a seguinte notação no que se segue: $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ é uma curva integral de X definida para todo $t \geq 0$, com $\gamma(p)^+ \subset K$, sendo $K \subset U$ compacto (aqui $\gamma(p)^+$ denota a *semiórbita positiva* de p , ou seja, o conjunto $\{\varphi(t), t \geq 0\}$). Também temos que, Σ é uma seção transversal a X (local) em p .

Lema 4.2.1. *Sejam Σ uma seção transversal local a X em $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$ onde γ é uma órbita de X , $\gamma = \{\varphi(t), t \in I\}$. Então existe a sequência $t_n \nearrow +\infty$ com $\varphi(t_n) \in \Sigma$ e com $\varphi(t_n) \rightarrow p$.*

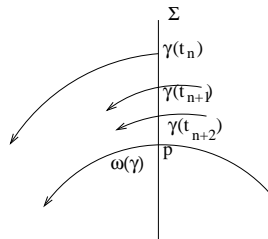


Figura 4.6: Sequência convergindo a p

Demonstração. Tomamos vizinhança V de p e aplicação $\tau: V \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\varphi(x, \tau(x)) \in \Sigma, \forall x \in V$. Escrevemos $\gamma = \{\varphi(t), t \in I\}$ onde $\varphi(t) = \varphi(t, q)$ e $p \in \Sigma \cap \gamma$. Agora, como $p \in \omega(\gamma)$, temos que $\exists s_n \nearrow +\infty$ tal que $\varphi(s_n) \rightarrow p$ de modo que se tem $\varphi(s_n) \in V$ para todo n suficientemente grande. Pomos, então, $t_n = s_n + \tau(t_n)$ para n grande o suficiente e obtemos $\varphi(s_n) \in \Sigma$. Finalmente, a continuidade de τ (e o fato de $\tau = 0$ sobre Σ) nos garante que $\lim \varphi(t_n) = \lim \varphi(s_n + \tau(t_n)) = \lim \varphi(s_n + \tau(s_n), q) = \lim \varphi(\tau(\varphi(s_n)), \varphi(s_n, q)) = \varphi(0, p) = p$. \square

Lema 4.2.2. *Sejam Σ uma seção transversal local de X com $\Sigma \subset U, p \in \Sigma \cap \gamma$ onde γ é órbita de X . Então γ_p^\pm intercepta Σ numa seqüência monótona (fixada uma orientação em Σ).*

Demonstração. Esse lema é consequência do Teorema da Curva de Jordan. Definimos o conjunto $A = \{t \geq 0, \varphi(t, p) \in \Sigma\}$, então pelo Teorema do Fluxo Tubular A é discreto de modo que pode ser ordenado, digamos, $A = \{0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$. Definimos, então, $p_1 = p$ e, caso exista, pomos $p_2 = \varphi(t_1, p)$. De forma indutiva, podemos definir $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$ (caso exista). Agora se $p_1 = p_2$, então, a órbita é periódica e temos $p = p_n, \forall n$. Seja, então, $p_1 \neq p_2$. Tomando-se uma orientação em Σ podemos escrever $p_1 < p_2$. Devemos, então, mostrar que, caso exista p_3 , teremos $p_2 < p_3$. Consideremos para isso a curva de Jordan formada C pelo segmento $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ e pelo arco de órbita $((p_1, p_2)) \subset \gamma$. Então se denotamos por R_i a região interna a C , temos em particular o seguinte:

Afirmção 4.2.1. *γ não sai de R_i para tempos $t > t_1$.*

De fato, como $((p_1, p_2))$ é um pedaço de órbita, é claro que γ não intercepta esse arco. Agora, como na seção transversal Σ e em particular numa vizinhança do segmento $\overline{p_1 p_2}$, o fluxo aponta para dentro de R_i , temos que γ não intercepta esse segmento. Desse modo, γ não escapará mais de R_i . De modo análogo, prova-se que caso exista p_4 , então necessariamente teremos $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ e assim sucessivamente. \square

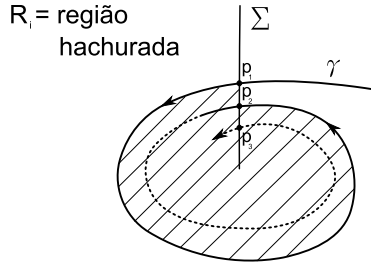


Figura 4.7: Região invariante

Lema 4.2.3. *Seja Σ uma seção transversal ao campo X e seja $p \in U$, então Σ intercepta $\omega(p)$ em no máximo um ponto.*

Demonstração. Com efeito, vimos que $\gamma(p)^+$ intersecta Σ numa sequência monótona, o que implica que seu conjunto de pontos de acumulação em Σ contém no máximo um ponto. \square

Lema 4.2.4. *Seja $p \in U$ com $\gamma_p^+ \subset K \subset U$ onde K é compacto e γ é uma órbita com $\gamma \subset \omega(p)$. Se $\omega(\gamma)$ contém pontos regulares, então γ é uma órbita periódica e $\omega(p) = \gamma$.*

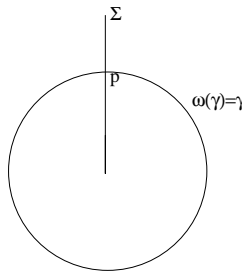


Figura 4.8:

Demonstração. Dado um ponto $q \in \omega(\gamma)$, tomamos vizinhança V de q na qual o fluxo de X é tubular. Desse modo, podemos supor que se $\Sigma_q \subset V$ é uma seção transversal a X em q , então, pelo Lema 4.2.1, existe uma sequência $t_n \nearrow +\infty$ com $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$. Agora, por hipótese, temos que $\gamma \subset \omega(p)$ de modo que $\gamma(t_n) \in$

$\omega(p)$ e logo, pelo Lema 4.2.2, a sequência $\gamma(t_n)$ é constante. Desse modo, é claro que γ deve ser periódica. Resta, então, ver que $\gamma = \omega(p)$. Como vimos, $\omega(p)$ é conexo e contém o fechado não vazio γ . Basta, então, provar que γ é aberto em $\omega(p)$. Para isso, tomamos $r \in \gamma$ e consideramos vizinhança V_r de r na qual o fluxo de X é tubular e $\Sigma_r \subset V_r$ seção transversal a X em r . É suficiente mostrar que, para V_r suficientemente pequena, temos

$$V_r \cap \gamma = V_r \cap \omega(p).$$

Agora se por absurdo existe um ponto $s \in V_r \cap \omega(p) \setminus \gamma$, então, usando o fato de que o fluxo em V_r é tubular, podemos obter $t_0 \in I(s)$ tal que $\varphi(t_0, s) \in \omega(p) \cap \Sigma_r$ e $\varphi(t_0, s) \neq r$ (lembre-se de que $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo de X).

Assim, obtemos $\sharp(\omega(p) \cap \Sigma_r) \geq 2$, contradizendo o Lema 4.2.3. Desse modo, terminamos a prova do Lema 4.2.4. \square

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 4.2.1.

Demonstração do Teorema 4.2.1. Suponhamos que $\omega(p)$ contém somente pontos regulares. Dado $q \in \omega(p)$, temos que a órbita $\gamma(q)$ satisfaz $\gamma(q) \subset \omega(p)$ e, logo, estando contida num compacto, temos que $\omega(q) \neq \emptyset$ e contém somente pontos regulares. Do Lema 4.2.4, segue, então, que $\omega(q)$ é uma órbita periódica.

Suponhamos agora que $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares. Dada uma órbita γ contida em $\omega(p)$, temos que γ é um ponto singular ou γ só contém pontos regulares. Como $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são conexos, $\omega(\gamma) \subset \omega(p)$ e $\alpha(\gamma) \subset \alpha(p)$, segue que, no caso não singular, γ é, então, uma órbita que tende a uma das singularidades em $\omega(p)$ à medida que $t \rightarrow \pm\infty$.

Finalmente suponhamos que $\omega(p)$ não contém pontos regulares. Neste caso, a conexidade de $\omega(p)$ e o fato de que (por hipótese) X possui apenas um número finito de singularidades, garantem que $\omega(p)$ é um ponto singular de X . \square

Vejam agora algumas aplicações do Teorema de Poincaré–Bendixson:

Dada uma curva simples γ no plano, denotaremos por $\text{Int}(\gamma)$ a região (aberta) interior a γ .

Proposição 4.2.1. *Seja γ uma órbita periódica de um campo de vetores $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Int}(\gamma) \subset U$. Então $\text{Int}(\gamma)$ contém alguma singularidade de X .*

Demonstração. Tomemos R como a região compacta cujo bordo é a curva γ . Suponhamos por absurdo que X não possui singularidades no interior de R . Seja, então, \mathcal{F} a família de órbitas fechadas de X contidas em R , e considere a seguinte

ordem parcial (invertida) em \mathcal{F} : dadas $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}$ temos $\gamma_2 \geq \gamma_1$ se $R_1 \supset R_2$, onde R_j denota a região compacta cujo bordo é γ_j .

Afirmção 4.2.2. (\mathcal{F}, \geq) é indutivo, ou seja, todo subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{F} possui cota superior.

Com efeito, dado $A \subset \mathcal{F}$ totalmente ordenado, tomamos $R(A) := \bigcap_{\gamma_a \in A} R_{\gamma_a}$ onde R_{γ_a} denota a região compacta limitada por $\gamma_a \in A$. Então, como cada intersecção finita de elementos da coleção $\{R_{\gamma_a}, \gamma_a \in A\}$ é não vazia e seus elementos são compactos de \mathbb{R}^2 , segue que $R(A) \neq \emptyset$. Note que $R(A)$ é um compacto invariante pelo fluxo de X de modo que, dado um ponto qualquer $q \in R(A)$, o Teorema de Poincaré–Bendixson garante que $\omega(q)$ é uma órbita periódica (aqui entra a hipótese de absurdo), digamos, $\gamma_A \subset R(A)$. Claramente γ_A é cota superior de A .

Assim, o Lema de Zorn nos garante a existência de um elemento maximal $\gamma_{\mathcal{F}}$ na família \mathcal{F} (note que \mathcal{F} é não vazia, pois contém a γ). Em particular, a região $R_{\gamma_{\mathcal{F}}}$ limitada por $\gamma_{\mathcal{F}}$ não contém nenhuma outra órbita compacta. Isso é uma contradição ao Teorema de Poincaré–Bendixson, pois sendo $R_{\gamma_{\mathcal{F}}}$, invariante por X , dado qualquer ponto p interior a $R_{\gamma_{\mathcal{F}}}$ temos que $\omega(p)$ é uma órbita periódica. \square

O resultado acima é também uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (exercício!).

Proposição 4.2.2 (Critério de Bendixson). *Seja X um campo de vetores de classe C^1 em uma região simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$ na qual temos $\text{div}(X) > 0$. Então X não tem órbita periódica em D .*

Demonstração. Escreva $X = (f, g)$ em funções coordenadas. Se Γ é o traço de uma órbita periódica $\gamma(t)$ em D , então Γ limita um disco $D_1 \Subset D$ no qual aplicando o Teorema de Green (Stokes de fato), obtemos

$$\oint_{\Gamma} (f dy - g dx) = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_1} \text{div}(X) dx dy > 0$$

onde a última desigualdade segue da condição $\text{div}(X) > 0$ em D . Por outro lado, escrevamos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in [a, b]$ para obter

$$\oint_{\Gamma} f dy - g dx = \int_a^b (x' y' - y' x') dt = 0$$

gerando absurdo.

□

A prova acima diz de fato que se $\operatorname{div}(X) \geq 0$ e $\Gamma = \partial D_1$ é o traço de uma órbita periódica em D , então $\operatorname{div}(X) \equiv 0$ em D_1 .

5

Estabilidade de Lyapunov

O conceito de estabilidade é um dos principais na teoria moderna das equações diferenciais. Há basicamente duas maneiras de se pensar em estabilidade. Uma consiste em estabelecer se um dado sistema dinâmico por meio, por exemplo, as soluções de uma equação diferencial ou um sistema dessas, pode ser “perturbado” sem que as suas soluções ou o seu comportamento assintótico (com o passar do tempo) mude radicalmente. Outro modo de se pensar em estabilidade é o que passamos a descrever, devido a Lyapunov, que busca estabelecer se, dada uma solução de uma equação diferencial, as soluções suficientemente próximas a essa solução fixada, permanecem próximas a ela com o passar do tempo. Em particular, se temos uma singularidade (uma solução estacionária), perguntamos se soluções partindo de pontos suficientemente próximos à esta singularidade, permanecem próximas ou, no caso do que se chamará estabilidade assintótica, se essas soluções convergem para a singularidade com o passar do tempo. A ideia de Lyapunov foi de introduzir funções que poderiam garantir essa estabilidade por meio de condições na derivada da função ao longo das órbitas do campo de vetores, que descreve a equação diferencial dada.

Tudo isso é formalizado, assim como o principal resultado de Lyapunov que passamos a descrever.

5.1 Estabilidade de Lyapunov

Neste capítulo, trataremos da noção de estabilidade de uma EDO $x' = f(t, x)$. Nesta primeira parte, estaremos preocupados com aspectos locais em uma vizinhança de um ponto singular isolado. Por estabilidade, entenderemos, portanto, o seguinte:

Definição 5.1.1 (Estabilidade de Lyapunov). Dada uma função contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é um aberto. Consideremos a EDO

$$x' = f(t, x) \quad (5.1)$$

Uma solução $\varphi(t)$ de (5.1) definida para $t \geq 0$ diz-se *estável* (no sentido de Lyapunov) se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\psi(t)$ é solução de (5.1) e $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$, então $\psi(t)$ também está definida para todo $t \geq 0$ e $|\varphi(t) - \psi(t)| < \epsilon$, $\forall t \geq 0$. Se além disso existir $\delta_1 > 0$ tal que $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$, diremos que $\varphi(t)$ é *assintoticamente estável*.

Seja agora $f = X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, um campo de vetores contínuo e x_0 singularidade isolada de X . Consideremos o sistema autônomo associado. Dizemos que x_0 é *estável* (respectivamente *assintoticamente estável*) se a órbita constante $\varphi(t) = x_0$ é estável (respectivamente assintoticamente estável). Em outras palavras, se dada uma vizinhança $V \subset U$ de x_0 existir vizinhança W de x_0 tal que $x \in W \implies [0, +\infty[\subset I_x$ e $\varphi_x(t) \in W$, $\forall t \geq 0$ (respectivamente, se além disso existir vizinhança $W \supset W_1 \ni x_0$ tal que $x \in W_1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_x(t) = x_0$).

Vejamos alguns exemplos de estabilidade de Lyapunov:

Exemplo 5.1.1. Dada uma equação linear com coeficientes constantes $x' = Ax$, temos que a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é uma singularidade estável se e somente se o sistema é um atrator.

Vejamos como se propaga essa caracterização para perturbações do sistema acima:

Exemplo 5.1.2 (Sistemas quase lineares). Um sistema da forma $x' = Ax + g(t, x)$ é dito *quase linear*, onde $g : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, U é aberto e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Fato. A solução trivial para o sistema quase linear acima é assintoticamente estável em $\mathbb{R} \times B^n(0, R)$ desde que:

- (i) $x' = Ax$ seja um atrator.
- (ii) $g: \mathbb{R} \times B^n(0, R)$ seja contínua, e seja $g(t, x) = o(|x|)$ uniformemente em t .
- (iii) O sistema tenha soluções únicas em todo ponto tomado em $\mathbb{R} \times B^n(0, R)$.

Demonstração. Temos que $|e^{At}| \leq Ke^{-\mu t}$, $\forall t \geq 0$, para algum $K \geq 1$ e $\mu > 0$. Existe também constante positiva $\rho > 0$ tal que $|x| < \rho \implies |g(t, x)| \leq \frac{\mu}{4K}|x|$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Dado $|x| < \delta := \frac{\rho}{K}$, seja $\varphi(t)$ a solução em $\mathbb{R} \times B^n(0, \rho)$ com $\varphi(0) = x$ e intervalo maximal $I_x =]\omega_-(x), \omega_+(x)[$. Temos que $\varphi_x(t) = e^{At}x$ é solução da EDO linear subjacente $x' = Ax$, $x(0) = 0$; logo $\varphi(t) - \varphi_x(t)$ é solução do sistema quase-linear partindo da origem. Desse modo, podemos escrever

$$\varphi(t) - \varphi_x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} g(s, \varphi(s)) ds$$

e, logo

$$\varphi(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s, \varphi(s)) ds, \forall t \in]\omega_-(x), \omega_+(x)[.$$

Daí segue facilmente que

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq K|x| + \int_0^t K e^{\mu s} |g(s, \varphi(s))| ds.$$

Agora, $\varphi(t) \in \mathbb{R} \times B^n(0, \rho)$, $\forall t \in I_x$, de modo que $|g(s, \varphi(s))| \leq \frac{\mu}{2K} |\varphi(s)|$, $\forall s \in I_x$ e, logo

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq K|x| + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{\mu s} |\varphi(s)| ds, \forall t \in [0, \omega_+(x)[$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall, obtemos agora

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq K|x| e^{t\mu/2}, \forall t \in [0, \omega_+(x)[.$$

Agora, isso já mostra que $\omega_+(x) = +\infty$, ou seja, $\varphi(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Mas, então, a partir de $|\varphi(t)| < \rho e^{-\mu t}$, $\forall t \geq 0$ (observe que $K|x| < \rho$), concluímos. \square

Exemplo 5.1.3. Seja x_0 uma singularidade isolada do campo de vetores $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Se x_0 é singularidade atratora de X (ou seja, $DX(x_0)$ é uma matriz atratora), então x_0 é assintoticamente estável.

Esse resultado pode também ser obtido como consequência do Teorema de Hartman (ver Sotomayor (1979)) que afirma nesse caso X é localmente conjugado (em torno da origem) ao campo linear constante $DX(x_0)$.

Esse exemplo será provado mais adiante.

Para nós, o resultado principal a respeito de estabilidade será o seguinte:

Definição 5.1.2. Dados um campo de vetores $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e uma função diferenciável $L: V \subset U \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in V$ singularidade (isolada) de X . Diremos que L é uma *função de Lyapunov* de X em V se satisfaz:

- (i) $L(x_0) = 0, L(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{x_0\}$
- (ii) $X(L)(x) = dL(x) \cdot X(x) \leq 0, \forall x \in V \setminus \{x_0\}$.

A função de Lyapunov será dita *estrita* se

- (iii) $X(L) < 0$ em $V \setminus \{x_0\}$.

Teorema 5.1.1 (Teorema de Lyapunov). Seja x_0 um ponto singular do campo de vetores $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Se X admite função de Lyapunov (respectivamente, função de Lyapunov estrita) em torno de x_0 , então x_0 é estável (respectivamente, assintoticamente estável).

Demonstração. Seja $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para X em torno de x_0 . Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\rho > 0$ tal que $B = B^n(x_0, \rho) \subset U$ e denotemos por ∂B o seu bordo, que é compacto, de modo que $L \geq m > 0$ em ∂B , para algum $m > 0$. Mas, então, a partir da continuidade de L e de $L(x_0) = 0$, temos que existe $\rho > \delta > 0$ com $m > M := \sup L|_{\overline{B_1}}$, onde $B_1 = B(x_0, \delta)$.

Dado agora $x \in B$, é fácil ver que $\omega_+(x) = +\infty$, pois caso contrário $\varphi_x(t) \rightarrow \partial U$ quando $t \rightarrow \omega_+(x)$, mas, por outro lado, $t \mapsto L(\varphi_x(t))$ é decrescente de modo que $|L(\varphi_x(t))| \leq |L(x)| \leq M < m$. Pelo Teorema da Alfândega (ver Lima (1981)), temos que $\varphi_x(t) \in B, \forall t \in [0, \omega_+(x)]$, contradição.

Assim, $\varphi_x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Além disso, a mesma prova acima mostra que $\varphi_x(t) \in B$, $\forall t \geq 0$. Como $\rho > 0$ é arbitrário, concluímos que x_0 é estável.

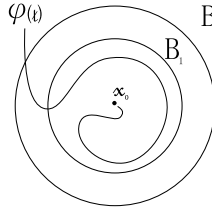


Figura 5.1: x_0 é um ponto estável

Suponhamos agora que L é estrita. Então mostraremos o seguinte:

Afirmção 5.1.1. *Dada uma vizinhança U_1 de x_0 , é possível obter $\delta > 0$ e também $\epsilon > 0$ tais que $x \in B_2 = B(x_0, 2\epsilon) \implies \varphi_x(t)$ está definida e em U_1 para todo $t \geq 0$ e $x \in B_1 = B(x_0, \delta) \implies \varphi_x(t) \in B(x_0, \epsilon)$.*

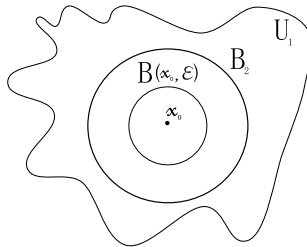


Figura 5.2: x_0 é um ponto assintoticamente estável

Demonstração. Basta mostrar que se $x \in B_1$ e $t_n \nearrow +\infty$ é tal que $\varphi_x(t_n)$ converge, digamos, $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$, então $y = x_0$: Com efeito, uma vez mostrado, tome $x \in B_1$ arbitrário e suponha que $\varphi_x(t) \not\rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow +\infty$, então (pela compacidade de $\overline{B}(x_0, \epsilon)$) podemos tomar sequência $t_n \nearrow +\infty$ com $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$, $y \neq x_0$, o que seria uma contradição.

Agora, se $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$ e $y \neq x_0$, com $x \in B_1$, então por continuidade vale $L(\varphi_x(t_n)) \rightarrow L(y)$. Como L é estritamente decrescente ao longo das órbitas de X , diferentes de x_0 , obtemos $L(\varphi_x(t)) > \lim_{n \rightarrow +\infty} L(\varphi_x(t_n)) =$

$L(y)$, $\forall t \geq 0$. Agora, considerando-se $y \in B_2 = B(x_0, 2\epsilon)$, obtemos que $\varphi_y(t)$ está definida e em U_1 para todo $t \geq 0$. Como $L(\varphi_y(t))$ é decrescente para $t \geq 0$, segue que $L(\varphi_y(1)) < L(y)$. Como o fluxo local φ é contínuo se z é suficientemente próximo de y , vale $L(\varphi_z(1)) < L(y)$. Finalmente, $\varphi_x(t_n) \rightarrow y$ logo se $n \gg 1$ vale $L(\varphi_x(t_n)) < L(y)$, contradição. \square

 \square

Para sistemas autônomos (campos de vetores) a estabilidade de Lyapunov pode ser ligada à parte linear do sistema em questão:

Proposição 5.1.1. Seja $x' = X(x)$ um sistema autônomo de classe C^1 com singularidade na origem. Seja $A = DX(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (i) Se todo autovalor de A tem parte real negativa, então 0 é assintoticamente estável.
- (ii) Se A possui algum valor próprio λ de parte real positiva, então 0 não é singularidade estável.

Demonstração. Exercício! \square

5.2 O critério de estabilidade de Lyapunov

Definição 5.2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$ e $a \in \text{Sing}(X)$.

- (1) Dizemos que a é uma *singularidade estável* de X se e só se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $p \in B_\delta(a)$, então $[0, +\infty[\subset I(p)$ e $\varphi_p(t) \in B_\epsilon(a)$ para todo $t \geq 0$.
- (2) Dizemos que a é uma *singularidade assintoticamente estável* de X se e só se a é uma singularidade estável de X e existe $\eta > 0$ tal que $p \in B_\eta(a)$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = a$.
- (3) Dizemos que a é uma *singularidade instável* de X se e só se a não é uma singularidade estável de X .

Observação 5.2.1.

- 1. da parte (1) da Definição 5.2.1, desprende-se que $\delta < \epsilon$.

2. $a \in U$ é singularidade assintoticamente estável de X se e só se a é um atrator local de X .
3. $a \in U$ é singularidade instável de X se e só se existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existem $p_\delta \in B_\delta(a)$ e $t_\delta > 0$ tal que $\varphi_{p_\delta}(t_\delta) \notin B_\varepsilon(a)$.
4. Singularidade instável não é o mesmo que fonte local. O que sim satisfaz é: a é fonte local, então a é uma singularidade instável.

Exemplo 5.2.1. $0 \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade estável (que não é assintoticamente estável) do campo linear $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Exemplo 5.2.2. $0 \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade instável (que não é fonte local) do campo linear $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Definição 5.2.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ e $a \in \text{Sing}(X)$. Dizemos que $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função de Lyapunov* para X em a se e só se

1. V é de classe C^1 ;
2. $V(a) = 0$ e $V(p) > 0$ para todo $p \in U \setminus \{a\}$;
3. $\dot{V}(p) \leq 0$ para todo $p \in U$, onde $\dot{V}(p) = \langle \nabla V(p), X(p) \rangle$.

Se além disso V satisfaz:

4. $\dot{V}(p) < 0$ para todo $p \in U \setminus \{a\}$

então dizemos que V é uma *função de Lyapunov estrita* para X em p .

Observação 5.2.2. Sejam $p \in U$ e $\varphi_p: I(p) \rightarrow U$ solução maximal. Se $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Lyapunov para X em $a \in \text{Sing}(X)$, então

$$\begin{aligned} (V \circ \varphi_p)'(t) &= \langle \nabla V(\varphi_p(t)), \varphi_p'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla V(\varphi_p(t)), X(\varphi_p(t)) \rangle \\ &= \dot{V}(\varphi_p(t)) \leq 0, \text{ para todo } t \geq 0 \end{aligned}$$

como $V \circ \varphi_p$ é a função V restringida à órbita $\mathcal{O}_X(p)$, concluímos que uma função de Lyapunov é monótona decrescente ao longo das órbitas $\mathcal{O}_X(p)$, para todo $p \in U$.

Exemplo 5.2.3. Seja $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x, y) = x^2 + y^2$. Vejamos a continuação que V é uma função de Lyapunov estrita para o campo linear $A =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em } (0, 0).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x, y), A(x, y) \rangle \\ &= \langle (2x, 2y), (-x, -y) \rangle \\ &= -2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

portanto, $\dot{V}(x, y) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exemplo 5.2.4. Consideremos $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Vejamos que V é uma função de Lyapunov para o campo linear $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

em $(0, 0)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x, y), A(x, y) \rangle \\ &= \langle (2x, 2y), (y, -x) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 5.2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ e $a \in \text{Sing}(X)$.

1. Se existe uma função de Lyapunov para X em a , então a é uma singularidade estável.
2. Se existe uma função de Lyapunov estrita para X em a , então a é uma singularidade assintoticamente estável.

Exemplo 5.2.5. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por $X(x, y) = (-x^3 + xy^2, -2x^2y - y^3)$. Não é difícil ver que $\text{Sing}(X) = \{(0, 0)\}$ e $X'(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, não podemos usar dinâmica hiperbólica. Vejamos se o critério de Lyapunov nos dá uma informação. Consideremos $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x, y) = ax^2 + by^2$,

onde $a, b > 0$ serão determinados:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x, y), X(x, y) \rangle \\ &= \langle (2ax, 2by), (-x^3 + xy^2, -2x^2y - y^3) \rangle \\ &= -2ax^4 - 2(2b - a)x^2y^2 - 2by^4\end{aligned}$$

se $a = 1$ e $b = 2$, temos que $\dot{V}(x, y) = -2x^4 - 6x^2y^2 - 4y^4 < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Portanto, V é uma função de Lyapunov estrita para X em $(0, 0)$ e, pelo Teorema 5.2.1, $(0, 0)$ é uma singularidade assintoticamente estável.

Exemplo 5.2.6. Seja $X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^3)$ dada por $X(x, y, z) = (-2y + 2yz, x - xz, -z^3)$. Não é difícil ver que $\text{Sing}(X) = \{(0, 0, 0)\}$ e $X'(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Logo, novamente, não podemos usar dinâmica hiperbólica. Consideremos $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, onde $a, b, c > 0$ serão determinados:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y, z) &= \langle \nabla V(x, y, z), X(x, y, z) \rangle \\ &= \langle (2ax, 2by, 2cz), (-2y + 2yz, x - xz, -z^3) \rangle \\ &= 2(b - 2a)xy - 2(b - 2a)xyz - 2cz^4\end{aligned}$$

se $c = 1$, $a = 1$ e $b = 2$, temos que $\dot{V}(x, y, z) = -2z^4 \leq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Portanto, V é uma função de Lyapunov para X em $(0, 0, 0)$ e, pelo Teorema 5.2.1, $(0, 0, 0)$ é uma singularidade estável.

5.2.1 Aplicações

Vejam agora algumas aplicações bastante interessantes da teoria de Lyapunov desenvolvida acima.

O problema predador–presa

Suponhamos que temos duas espécies, uma (predador) devora a outra (presa) que se alimenta de uma fonte distinta de recursos. Um exemplo raposas (predadores) e coelhos (presas); os coelhos se alimentam de vegetais e as raposas comem coelhos. Podem ambas espécies coexistir?

Denotemos por $x = x(t)$ o número de predadores no instante t e $y = y(t)$ o número de presas no instante t . Para obter um modelo matemático, são feitas as seguintes suposições:

1. Na ausência do predador, as presas cresceram ilimitadamente, isto é, se $x(t) = 0$, então $\frac{y'(t)}{y(t)} = a > 0$.
2. Na ausência da presa, o predador morre, isto é, se $y(t) = 0$, então $\frac{x'(t)}{x(t)} = b < 0$.
3. Os predadores aumentam e as presas diminuem com uma rapidez proporcional ao número de encontros entre eles.

Com essas considerações, temos

$$\begin{cases} x' = -cx + bxy \\ y' = ay - dxy \end{cases} \quad a, b, c, d > 0. \quad (5.2)$$

A equação (5.2) é chamada *equação de Lotka–Volterra*. Em 1925, o matemático Vito Volterra desenvolveu um modelo de equações que para analisar o crescimento de populações de tubarões e o decréscimo dos demais peixes no mar da Itália. Por outro lado, nesse mesmo ano, o biofísico Alfred Lotka estudou a interação predador–presa.

O campo associado ao sistema (5.2) vem dada por

$$X(x, y) = (-cx + bxy, ay - dxy).$$

As singularidades de X são soluções do sistema

$$\begin{cases} (-c + by)x = 0 \\ (a - dx)y = 0 \end{cases}$$

logo, $\text{Sing}(X) = \{(0, 0), (\frac{a}{d}, \frac{c}{b})\}$ e a parte linear de X é dado por

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} -c + by & bx \\ -dy & a - dx \end{bmatrix}.$$

Então

- $X'(0, 0) = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, então $(0, 0)$ é uma sela.
- $X'(\frac{a}{d}, \frac{c}{b}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ab}{d} \\ -\frac{cd}{b} & 0 \end{bmatrix}$ tem polinômio característico dado por $\lambda^2 + ac = 0$ cujas raízes são $\pm \sqrt{aci}$, então $(\frac{a}{d}, \frac{c}{b})$ é uma singularidade não hiperbólica. Para simplificar os cálculos, faremos um mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u = x - \frac{a}{d} \\ v = y - \frac{c}{b} \end{cases}$$

nessas coordenadas, o campo vem dada por

$$\tilde{X}(u, v) = (buv + \frac{ab}{d}v, -dub - \frac{cd}{b}u).$$

Vamos buscar uma função de Lyapunov tipo “variáveis separáveis”, isto é,

$$V(u, v) = F(u) + G(v).$$

Intuitivamente $(u, v) = (0, 0)$ deve ser uma singularidade estável. Logo, devemos escolher F e G convenientemente tal que $\dot{V}(u, v) \leq 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= \langle \nabla V(u, v), \tilde{X}(u, v) \rangle \\ &= \langle (F'(u), G'(v)), (buv + \frac{ab}{d}v, -dub - \frac{cd}{b}u) \rangle \\ &= \frac{bv}{d}(du + a)F'(u) - \frac{du}{b}(bv + c)G'(v) \end{aligned}$$

se fazemos a expressão anterior igual a zero, temos

$$\frac{b^2}{u}(du + a)F'(u) = \frac{d^2}{v}(bv + c)G'(v) = k$$

onde k é uma constante arbitrária a escolher caso seja necessário. Logo

$$F'(u) = \frac{ku}{b^2(du + a)} \text{ e } G'(v) = \frac{kv}{d^2(bv + c)}.$$

Integrando e levando em consideração que $0 = V(0, 0) = F(0) + G(0)$, obtemos que:

$$F(u) = \frac{k}{b^2 d^2} \left[du - a \ln \left(\frac{du + a}{a} \right) \right]$$

$$\text{e } G(v) = \frac{k}{b^2 d^2} \left[bv - c \ln \left(\frac{bv + c}{c} \right) \right].$$

Para que V seja uma função de Lyapunov, só falta verificar que $V(u, v) > 0$ para todo (u, v) . Um fácil cálculo mostra que

$$\nabla V(u, v) = (0, 0) \text{ se e só se } (u, v) = (0, 0).$$

Para ver se $(0, 0)$ é um ponto máximo ou ponto mínimo ou ponto sela, usamos o critério do Hessiano (segunda derivada)

$$\text{Hess}(V)(u, v) = \frac{k}{b^2 d^2} \begin{bmatrix} \frac{ad^2}{(dv + a)^2} & 0 \\ 0 & \frac{cb^2}{(bv + c)^2} \end{bmatrix}$$

então

$$\text{Hess}(V)(0, 0) = \frac{k}{b^2 d^2} \begin{bmatrix} \frac{d^2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{c} \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma quadrática associada a $\text{Hess}(V)(0, 0)$ é definida positiva, então $(0, 0)$ é um mínimo absoluto. Portanto $V(u, v) > V(0, 0) = 0$ para todo (u, v) . Dessa maneira, provamos que $(u, v) = (0, 0)$ ou equivalentemente $(x, y) = \left(\frac{a}{d}, \frac{c}{b}\right)$ é uma singularidade estável que não é assintoticamente estável.

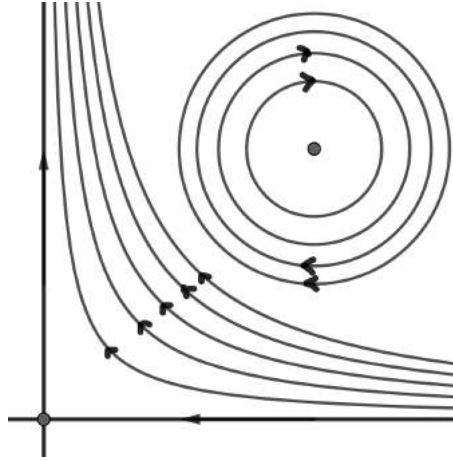


Figura 5.3: Esboço das órbitas do campo X

A equação de Liénard

Uma família de equações muito importantes na teoria de circuitos elétricos é dada pela equação de Liénard, que passamos a descrever. Sejam $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que 0 é uma raiz isolada de g (isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que $g(0) = 0$ e $g(u) \neq 0$ para todo $u \in I_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$). A equação diferencial

$$u'' + f(u)u' + g(u) = 0 \quad (5.3)$$

é chamada *equação de Liénard* que foi proposta pelo físico e engenheiro francês Alfred-Marie Liénard. Por exemplo, se $f(u) = \frac{c}{m\ell}$ e $g(u) = \frac{g}{\ell} \sin u$, a equação (5.3) é a equação do pêndulo com amortecimento. Se $f(u) = \varepsilon(u^2 - 1)$ e $g(u) = u$, a equação (5.3) é chamada *equação de Van der Pool*.

Problema: Sob que condições (5.3) admite soluções estáveis?

Transformemos (5.3) a um sistema de equações diferenciais, fazendo $x = u$ e $y = u'$, assim, obtemos

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x)y - g(x). \end{cases} \quad (5.4)$$

Consideremos o campo

$$X(x, y) = (y, -f(x)y - g(x))$$

associado a (5.4). Note que $(0, 0)$ é uma singularidade isolada de X .

A parte linear de X está dada por

$$X'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x)y - g'(x) & -f(x) \end{bmatrix}.$$

Vejam os primeiro o caso particular onde $f(x) = 0$. Nesse caso, o campo X é dado por $X(x, y) = (y, -g(x))$ e sua parte linear $X'(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & 0 \end{bmatrix}$ tem polinômio característico $\lambda^2 + g'(0) = 0$.

1. Se $g'(0) < 0$ os autovalores são $\pm \sqrt{-g'(0)}$, então $(0, 0)$ é uma sela.
2. Se $g'(0) > 0$ os autovalores são $\pm \sqrt{g'(0)}i$, então $(0, 0)$ não é uma singularidade hiperbólica. Usaremos o critério de Lyapunov. Em primeiro lugar, note que

$$g(x) < 0, \text{ se } x \in]-\varepsilon, 0[\text{ e } g(x) > 0, \text{ se } x \in]0, \varepsilon[. \quad (5.5)$$

Agora observe que (5.3), nesse caso, é dado por $u'' + g(u) = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= u''u' + g(u)u' \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{(u')^2}{2} + \int_0^u g(s)ds \right] \end{aligned}$$

isto motiva definir $V: I_\varepsilon(0) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)ds.$$

Vemos que $V(0, 0) = 0$ e, por (5.5), temos que $\int_0^x g(s)ds > 0$ para todo $x \in I_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$, portanto, $V(x, y) > 0$ para todo $(I_\varepsilon(0) \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$. Finalmente

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x, y), X(x, y) \rangle \\ &= \langle (g(x), y), (y, -g(x)) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então V é uma função de Lyapunov para X em $(0, 0)$. Concluimos que $(0, 0)$ é uma singularidade estável.

3. Se $g'(0) = 0$. Há problemas!

Passemos agora ao caso geral, aqui $X'(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -f(0) \end{bmatrix}$ cujo polinômio característico é dado por $\lambda^2 + f(0)\lambda + g'(0) = 0$ e seus autovalores são

$$\frac{1}{2}[-f(0) \pm \sqrt{f(0)^2 - 4g'(0)}].$$

1. Se $f(0) > 0$ e $f(0)^2 - 4g'(0) < 0$, então $(0, 0)$ é um atrator local.
2. Se $f(0) > 0$ e $f(0)^2 - 4g'(0) = 0$, então $(0, 0)$ é um atrator local.
3. Se $f(0) > 0$, $f(0)^2 - 4g'(0) > 0$ e $g'(0) > 0$, então $(0, 0)$ é um atrator local.
4. Se $f(0) > 0$, $f(0)^2 - 4g'(0) > 0$ e $g'(0) < 0$, então $(0, 0)$ é uma sela.
5. Se $f(0) > 0$, $f(0)^2 - 4g'(0) > 0$ e $g'(0) = 0$. Há problemas!
6. Se $f(0) < 0$ e $f(0)^2 - 4g'(0) < 0$, então $(0, 0)$ é uma fonte local.
7. Se $f(0) < 0$ e $f(0)^2 - 4g'(0) = 0$, então $(0, 0)$ é uma fonte local.
8. Se $f(0) < 0$, $f(0)^2 - 4g'(0) > 0$ e $g'(0) > 0$, então $(0, 0)$ é uma fonte local.
9. Se $f(0) < 0$, $f(0)^2 - 4g'(0) > 0$ e $g'(0) < 0$, então $(0, 0)$ é uma sela.
10. Se $f(0) < 0$, $f(0)^2 - 4g'(0) > 0$ e $g'(0) = 0$. Há problemas!

O regulador de Watt–Vichnégradski

Ninguém duvida de que a Revolução Industrial e suas conseqüências para o desenvolvimento da raça humana possuem íntima relação com o desenvolvimento de máquinas a vapor eficientes e de funcionamento estável. De fato, as primeiras locomotivas e máquinas a vapor de grande porte costumavam “apagar” em meio ao seu funcionamento, ou também poderiam simplesmente “explodir” suas caldeiras por excesso de pressão acumulada. Tal problema, o da estabilização de máquinas

a vapor, foi abordado por vários cientistas ao final dos anos 1600 e início dos anos 1700. Tal problema foi satisfatoriamente resolvido pelo fantástico matemático e engenheiro James Watt em 1736, e compartilhada com seu colega Vichnégradski. Vejamos as bases matemáticas do seu funcionamento ¹.

O problema em questão consiste em regular automaticamente (a pressão nas caldeiras de) uma máquina a vapor. Desse modo, buscamos regular a abertura de uma válvula aliviadora de pressão de forma a obter o equilíbrio do conjunto máquina-regulador: a grosso modo, não se deve permitir que a pressão suba a níveis perigosos e tampouco permitir que esta baixe demasiado. Também devemos evitar oscilações como as que costumam ocorrer em fenômenos em que um oscilador varia com regularidade entre duas frequências, uma mais baixa e outra mais alta. Tal processo poderia ocorrer em ciclos cada vez mais curtos de tempo, levando ao colapso do sistema que porventura estivesse sendo regulado por esse dispositivo.

Note que o problema é realmente intrigante, pois a carga na máquina pode variar consideravelmente com o tempo: por exemplo, um trem que passa de uma trilha plana a uma subida acentuada e depois volta a descer.

Apresentamos o engenhoso *regulador de Watt* que data do ano de 1769. Temos um eixo principal E ligado ao volante V do motor a vapor que se conecta por uma redução a um eixo menor e , que gira tendo em sua extremidade superior duas hastes metálicas iguais com esferas iguais de contrapeso nas pontas. As hastes estão ligadas ao eixo e de forma que, quando e gira, as hastes abrem seu ângulo φ com o eixo vertical e , dependendo da velocidade de rotação angular de e . As esferas possuem massa m . Às hastes conectamos ainda, em pontos a uma mesma distância duma base móvel comum, duas outras hastes menores que também possuem ângulo central (com o eixo vertical e) variável e que ao se abrirem (devido ao movimento circular de e) fazem subir um pequeno anel ligado a uma alavanca que ao subir faz abrir a válvula aliviadora da caldeira a vapor.

Vejamos a descrição matemática do movimento no regulador.

¹James Watt, nasceu em Greenock, Escócia, 19 de janeiro de 1736.

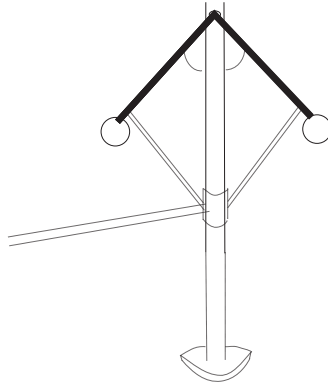


Figura 5.4: Movimento do regulador

Analisemos primeiramente as forças sobre as esferas. Suporemos que o comprimento das hastes maiores é 1 unidade. Chamaremos de ω a velocidade angular do eixo e .

Temos que a força centrífuga sobre as esferas é $m\omega^2 \sin \varphi$ a força peso é mg . A soma das forças tangentes ao arco de círculo descrito pela massa m ao se abrir o ângulo central φ deve ser nula na situação de equilíbrio de modo que

$$m\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0.$$

A equação acima (na qual o ângulo φ é pensado como função monótona crescente da velocidade angular ω do eixo e) determina o ângulo φ .

Para achar a equação diferencial que descreve φ fora da posição de equilíbrio, faremos a suposição de que a força de abertura das hastes maiores é proporcional à velocidade de abertura φ' de modo que, pela Segunda Lei de Newton, obtemos a EDO

$$m\varphi'' = m\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\varphi'$$

onde $b > 0$ é a constante de proporcionalidade.

Voltemos nossa atenção agora para a máquina a vapor. Denotemos por Ω a velocidade angular do eixo principal que gira o volante V , por $M = M(\alpha)$ o momento angular de força da máquina ($\alpha =$ ângulo de abertura da válvula aliviadora), por N o momento angular de força atuando sobre o volante devido à carga e por I o momento de inércia do volante. Então temos que

$$I\Omega' = M - N.$$

A uniformidade do movimento assegurada pelo (bom) funcionamento do regulador nos dá, então, razão constante de transmissão

$$\frac{\omega}{\Omega} = C > 0.$$

Vejamos finalmente a válvula reguladora.

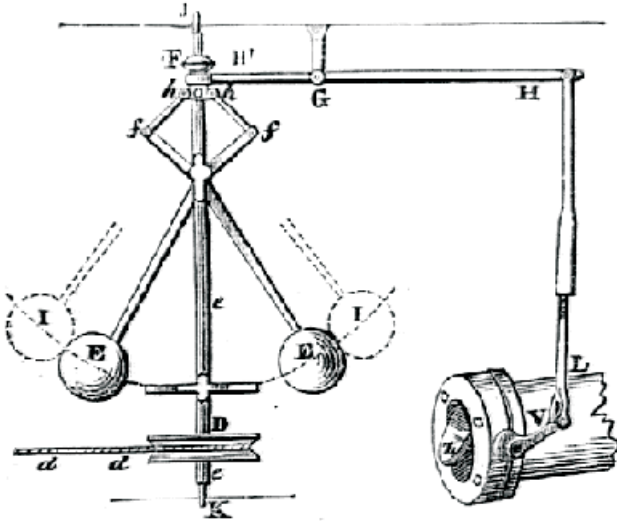


Figura 5.5: Figura ilustrando o Regular de Watt.

Se denotamos por φ_m , o valor médio do ângulo central φ perto do qual φ deve se manter e por F_m a força correspondente a esse valor médio, temos que

$$M = F_m + \mu(\cos \varphi - \cos \varphi_m)$$

onde $\mu > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Assim, obtemos o seguinte sistema de EDOs que descreve o regulador acima:

$$m\varphi'' = mC^2\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\varphi'$$

$$I\Omega' = \mu \cos \varphi - F$$

onde $F := N - F_m + \mu \cos \varphi_m$ depende da carga.

Podemos reduzir esse sistema a um de primeira ordem:

$$(W - V) \begin{cases} \varphi' = \psi, \\ \psi' = C^2 \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \psi, \\ \Omega' = \frac{\mu}{I} \cos \varphi - \frac{F}{I}. \end{cases}$$

Como em funcionamento normal Ω é constante fixada a carga N , temos que φ é constante e, logo, buscamos solução do sistema $(W - V)$ sujeita às seguintes condições iniciais

$$\varphi = \varphi_0, \psi = 0, \Omega = \Omega_0.$$

Desse modo, o problema agora se resume a estudar a estabilidade da posição de equilíbrio abaixo descrita:

$$\psi_0 = 0, \cos \varphi_0 = \frac{F}{\mu}, C^2 \Omega_0^2 = \frac{g}{\cos \varphi_0}.$$

Utilizaremos a técnica de linearização tipo perturbação da identidade. O sistema linear associado a $(W - V)$ nesse ponto singular é:

$$(W - V^*) \begin{cases} \varphi' = \psi \\ \psi' = C^2 \Omega_0^2 \cos(2\varphi_0) \varphi + C^2 \Omega_0 \sin(2\varphi_0) \Omega - g \cos(\varphi_0) \varphi - \frac{b}{m} \psi, \\ \Omega' = -\frac{\mu}{I} \sin \varphi_0 \varphi. \end{cases}$$

Como $C^2 \Omega_0^2 = \frac{g}{\cos \varphi_0}$, obtemos para a segunda equação

$$\psi' = -\frac{g \sin^2(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} \varphi - \frac{b}{m} \psi + \frac{2g \sin(\varphi_0)}{\Omega_0} \Omega.$$

O polinômio característico deste sistema linear é então

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{g \operatorname{sen}^2(\varphi_0)}{\cos \varphi_0} & -\frac{b}{m} - \lambda & \frac{2g \operatorname{sen}(\varphi_0)}{\Omega_0} \\ -\frac{\mu}{I} \operatorname{sen}(\varphi_0) & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Desse modo, obtemos

$$p(\lambda) = -\left[\lambda^3 + \frac{b}{m} \lambda^2 + g \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi_0)}{\cos \varphi_0} \lambda + \frac{2\mu g \operatorname{sen}^2(\varphi_0)}{I \Omega_0} \right].$$

Como $-p(\lambda)$ tem coeficientes positivos, segue que o sistema tem autovalores com parte real negativa desde que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\frac{b}{m} \frac{g \operatorname{sen}^2(\varphi_0)}{\cos \varphi_0} > 2 \frac{\mu g}{I \Omega_0} \operatorname{sen}^2(\varphi_0)$$

ou seja,

$$\frac{bI}{m} > \frac{2\mu}{\Omega_0} \cos \varphi_0 = 2 \frac{F}{\Omega_0}.$$

Essa condição é, então, *condição suficiente de Vichnégradski* para a estabilidade do sistema máquina-regulador.

A grandeza $\frac{d\Omega_0}{dN}$ mede a taxa de variação de Ω_0 com relação à carga N . O valor absoluto $\eta = \left| \frac{d\Omega_0}{dN} \right|$ é a chamada *não uniformidade de marcha* da máquina a vapor em questão. Temos que $F \Omega_0^2 = cte$ como consequência de

$$\psi_0 = 0, \cos \varphi_0 = \frac{F}{\mu}, C^2 \Omega_0^2 = \frac{g}{\cos \varphi_0}$$

como já vimos. Deste modo, derivando, obtemos

$$\frac{d\Omega_0}{dF} = -\frac{\Omega_0}{2F}$$

e, portanto, a não uniformidade de marcha é dada por

$$\eta = \frac{\Omega_0}{2F}.$$

A condição de estabilidade de Vichnégradski pode, então, ser reescrita como

$$\frac{bI}{m}\eta > 1.$$

A partir dessas observações, podemos resumir as conclusões de Vichnégradski da seguinte forma:

Afetam de forma *desfavorável* a estabilidade do sistema máquina-regulador: (i) o *aumento* da massa m das esferas; (ii) a *diminuição* do momento de inércia do volante I ; (iii) a *diminuição* da não uniformidade de marcha; (iv) a *diminuição* do coeficiente b associado à válvula.

6

Um pouco de Teoria de Morse e o Teorema esférico de Reeb

Todos lembramos das lições de um primeiro curso de Cálculo, no qual aprendemos a estudar o gráfico de uma função real de uma variável real, $y = f(x)$, em função do estudo do sinal e pontos singulares (zeros) de suas derivadas primeira e segunda, $y' = f'(x)$ e $y'' = f''(x)$. Assumindo que essas existem obviamente. Nesses mesmos cursos, aprendemos que um ponto de máximo ou mínimo local e interior ao domínio de definição da função deve ser um *ponto crítico* dessa, ou seja, um zero de sua derivada primeira, $f'(x)$. Entre esses pontos críticos, pode haver também pontos que não sejam pontos de máximo e nem de mínimo local de sua função. Por exemplo, os chamados *pontos de inflexão*, ou seja, pontos onde ocorre a mudança de concavidade da função, pontos (interiores ao domínio) em que devemos ter necessariamente $f'' = 0$. Por outro lado, nem todo zero da derivada segunda corresponde a um ponto de mudança de concavidade. Também

pode ocorrer a mudança de concavidade em pontos que não são críticos, bem conhecido dos cursos de Cálculo. Vamos nos concentrar agora nos pontos críticos onde a derivada segunda não se anula. Sabemos, sempre recordando nossos cursos de Cálculo, que nesses pontos temos necessariamente um máximo ou mínimo local da função $y = f(x)$. De fato, sabemos que se a derivada segunda é positiva, então estamos em um mínimo local, e caso a derivada segunda seja negativa estamos em um máximo local. Nos cursos de Cálculo em que estudamos funções de mais variáveis, tal estudo dos pontos de máximo e mínimo locais se repete. Embora a noção de ponto crítico seja bastante natural, pede-se que todas as derivadas parciais se anulem no ponto, o estudo da natureza desse ponto crítico depende de um ente de dimensão superior: a hessiana da função no ponto. Lembramos que se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais segundas definidas e contínuas em uma vizinhança de um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, então esse será um ponto crítico desta função se $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Tal ponto crítico é dito *não degenerado* se temos $\text{hess}(f)(a, b) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2 \neq 0$. Chamamos $\text{hess}(f)(a, b)$ de determinante hessiano de f em (a, b) . Sabemos que se $\text{hess}(f)(a, b) > 0$, então temos um ponto de máximo **ou** mínimo local de f em (a, b) . Caso $\text{hess}(f)(a, b) < 0$ então o ponto não é de máximo e nem de mínimo local de f e teremos um *ponto de sela*. Tal nomenclatura é justificada pelo Lema de Morse, que afirma que nesse caso a função pode ser reescrita como $f(u, v) = \mp(u^2 - v^2)$, como veremos a seguir. De fato, a Teoria de Morse é pedra fundamental no estudo das funções e o impacto da combinatória de seus pontos críticos na Topologia do ambiente no qual a mesma se encontra definida. Também é fundamental no estudo das iterações entre estudo de funções através de seus pontos críticos e a Dinâmica de certas equações diferenciais. Neste capítulo, estudaremos a topologia (isto é, a forma) de objetos (superfícies, variedades) no caso mais simples, em que admitem uma função duas vezes diferenciável com apenas dois pontos críticos, sendo um de máximo e outro de mínimo e ambos não degenerados. Provaremos, no curso de nosso estudo, um resultado devido a Georges Reeb, que afirma serem esses objetos esferas, no caso em que são compactos e sem fronteira.

6.1 Exercícios do Capítulo

Exercício 6.1.1. O seguinte exemplo de equação de Bernoulli é dado no contexto do crescimento populacional. Sabemos que, para crescimento de populações, o

modelo básico é dado por

$$N'(t) = \text{velocidade de nascimento} - \text{velocidade de morte.}$$

Quando trata-se de crescimento de bactérias, temos

$$\text{velocidade de nascimento} = aN(t)$$

$$\text{velocidade de morte} = bN(t).$$

Esse modelo é usado para populações humanas? Não, já que devemos tomar em consideração o fator da superpopulação e outros fatores, cujo efeito é medido por $bN^2(t)$ sempre que os encontros dos indivíduos sejam aleatório. Portanto,

$$N'(t) = aN(t) - bN^2(t),$$

onde a e b são determinados experimentalmente. Assim, tem-se que

$$N'(t) - aN(t) = -bN^2(t)$$

fazendo a mudança

$$v(t) = N^{1-2}(t) = N^{-1}(t)$$

logo,

$$v'(t) = -N^{-2}(t)N'(t)$$

assim, multiplicando por $-N^{-2}(t)$ em ambos os lados da equação diferencial anterior, temos

$$-N^{-2}(t)N'(t) + aN^{-1}(t) = b$$

equivalentemente tem-se

$$v'(t) + av(t) = b.$$

Essa é uma equação linear de primeira ordem, cuja solução geral é dada por

$$v(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at},$$

onde c é uma constante. Em particular,

$$\frac{1}{N(0)} = v(0) = \frac{b}{a} + c$$

então,

$$c = \frac{1}{N(0)} - \frac{b}{a}$$

de modo que

$$\frac{1}{N(t)} = \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{N(0)} - \frac{b}{a} \right) e^{-at}$$

daí, temos a *curva logística*

$$N(t) = \frac{aN(0)}{bN(0) + (a - bN(0))e^{-at}}.$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{a}{b}.$$

Esse modelo que temos estudado é conhecido como *modelo populacional de Verhulst*.

Dada a equação logística

$$x' = (1 - x)x$$

prove que, dado qualquer ponto (estado inicial) $x > 0$ a trajetória segue para o estado de equilíbrio $x = 1$ em tempo sempre infinito e para $x = 0$ quando o tempo t tende a $-\infty$.

6.2 Pontos críticos não degenerados: o Lema de Morse

Seja agora $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto U de \mathbb{R}^n . Um ponto $p \in U$ é um *ponto crítico* de f se $df(p) = 0$, ou seja, p é uma singularidade do campo gradiente ∇f . Se f é duas vezes diferenciável, dizemos que um ponto crítico p é *não degenerado* se a forma hessiana $\text{hess}(f)$ de f em p é não degenerada, ou seja, se a matriz $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p))$ onde $i, j \in \{1, \dots, n\}$ é não singular. Nesse caso, definimos o *índice* de f em p como o índice da forma hessiana, ou seja, a maior dimensão de subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}_p^n$, tal que $\text{hess}(f)|_V$ é negativa definida.

De um modo mais rigoroso temos:

Definição 6.2.1. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um aberto U do \mathbb{R}^n .

1. Uma *singularidade* ou *ponto crítico* de f é um ponto $p \in U$ no qual $df(p) = 0$.

2. Uma singularidade $p \in U$ de f é não degenerada se a forma quadrática simétrica

$$H(p) \cdot u = D^2 f(p)(u, u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (f \circ x^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x(p)) u_i u_j$$

é não degenerada, onde $(u_1, \dots, u_n) = dx(p) \cdot u$.

Observação 6.2.1.

1. Se (x_1, x_2, \dots, x_n) é um sistema de coordenadas em torno de uma singularidade p de f , então temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

2. $H(p)$ independe do sistema de coordenadas escolhido.

3. Associada à forma quadrática $H(p)$ e ao sistema de coordenadas $x: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos a matriz simétrica $\left[\frac{\partial^2 (f \circ x^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x(p)) \right]_{1 \leq i, j \leq n}$, a qual é denominada de Hessiana de f em p com respeito a x .

4. A forma $H(p)$ é não degenerada se e só se a matriz Hessiana de f , em algum sistema de coordenadas, é não degenerada.

Recordamos o célebre Lema de Morse:

Lema 6.2.1 (Lema de Morse). *Seja f uma função de classe C^3 em uma vizinhança U da origem $0 \in \mathbb{R}^n$ e seja 0 um ponto crítico não degenerado de f . Então existem coordenadas (z_1, \dots, z_n) em um aberto $0 \in W \subset U$ tais que nessas coordenadas f se escreve em forma quadrática:*

$$f(z_1, \dots, z_n) = f(0) - (z_1)^2 - \dots - (z_r)^2 + (z_{r+1})^2 + \dots + (z_n)^2$$

onde r é índice de f em 0 . Em particular, 0 é ponto crítico isolado de f .

Demonstração. (Ver também Milnor (1963), Lima (1981)) Sem perda de generalidade podemos supor que U é convexo e que $f(p) = 0$. Sejam (y_1, \dots, y_n) as coordenadas afins em \mathbb{R}^n . Temos que

$$f(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) y_i y_j$$

com a_{ij} de classe C^1 (lembre que f e df se anulam em $p = 0$) dada por

$$a_{ij}(y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(sty) ds dt.$$

Agora, a matriz $A(y) = (a_{ij}(y))_{i,j=1}^n$ é simétrica e podemos escrever

$$f(y) = \langle A(y) \cdot y, y \rangle.$$

Como a origem é ponto crítico não degenerado, temos que $A(0)$ é não singular e daí podemos escrever $A(y) = A(0) \cdot B(y)$ onde $B(y)$ é uma matriz de classe C^1 com $B(0) = Id$. Mas, então, em uma vizinhança suficientemente pequena de $0 \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever $B(y) = C(y)^2$ (exercício!) com $C(y)$ de classe C^1 e daí $A(y) = A(0) \cdot C(y)^2$. Como $A(y)$, $A(0)$ são simétricas vale $A(y) = (C(y)^t)^2 \cdot A(0)$ e logo $(C(y)^t)^2 = A(0) \cdot C(y)^2 \cdot A(0)^{-1}$ de modo que

$$(C(y)^t)^2 = (A(0) \cdot C(y) \cdot A(0)^{-1})^2.$$

Como $y \approx 0 \implies C(y) \approx Id$ e também $C(y)^t \approx Id$, vale que de fato

$$C(y)^t = A(0) \cdot C(y) \cdot A(0)^{-1}.$$

Dessa forma, para $y \approx 0$, temos $A(0) \cdot C(y) = C(y)^t \cdot A(0)$ e, então,

$$A(y) = A(0) \cdot C(y)^2 = C(y)^t \cdot A(0) \cdot C(y).$$

Desse modo, temos

$$f(y) = \langle A(y) \cdot y, y \rangle = \langle C(y)^t \cdot A(0) \cdot C(y) \cdot y, y \rangle = \langle A(0) \cdot C(y) \cdot y, C(y) \cdot y \rangle$$

Por sua vez, a aplicação $\psi : y \mapsto C(y) \cdot y$ de classe C^1 é tal que

$$\psi'(y) \cdot v = \frac{\partial C}{\partial v}(y) \cdot y + C(y) \cdot v.$$

Desse modo, $\psi'(0) \cdot v = C(0) \cdot v = v$ e, então, $\psi'(0) = Id$ e, logo ψ é difeomorfismo local em uma vizinhança da origem $y = 0$. Podemos então $x = \psi^{-1}(y)$ para obter sistema de coordenadas definido em uma vizinhança da origem tal que

$$f(x) = \langle A(0) \cdot x, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0) x_i x_j.$$

Agora a matriz simétrica $A(0) = (a_{ij}(0))$ pode ser diagonalizada e, logo, existe uma carta local z válida na origem tal que

$$f(z) = - \sum_{j=1}^r z_j^2 + \sum_{j=r+1}^n z_j^2,$$

onde r é o índice de Morse de f em p . □

6.3 Superfícies regulares

Dada uma *variedade diferenciável* M podemos estender as noções acima utilizando cartas locais. O fato de que as definições de ponto crítico, ponto crítico não degenerado e de índice de uma função em um ponto crítico não degenerado não dependem da carta local escolhida para M , é consequência da Regra da Cadeia e do fato de que as mudanças de coordenadas são difeomorfismos entre abertos de \mathbb{R}^n . Assim, enunciaremos o resultado abaixo já no ambiente mais geral de variedades diferenciáveis. Evidentemente, o leitor menos familiarizado com essa noção pode pensar em M como uma *superfície regular* no lugar de um aberto em \mathbb{R}^n .

Recordamos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma *superfície regular* (de classe C^1) se, para cada ponto $p \in M$, existe uma aplicação $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ fortemente diferenciável (de classe C^1) tal que:

- (i) φ é uma imersão, ou seja, $D\varphi(x): \mathbb{R}_x^m \rightarrow \mathbb{R}_{\varphi(x)}^n$ é injetiva, $\forall x \in U$.
- (ii) U e W são abertos e $\varphi: U \rightarrow V = W \cap M$ é um homeomorfismo.

Nesse caso, dizemos que $\varphi: U \rightarrow V$ é uma *parametrização* ou *carta local* de M numa vizinhança de p , e vale o seguinte como consequência da forma local das imersões (ver Lima (1981)).

Proposição 6.3.1. Dadas duas parametrizações $\varphi: U \rightarrow V$ e $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ de M , com $\tilde{V} \cap V \neq \emptyset$, temos que a *mudança de coordenadas* $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V) \rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{V} \cap V)$, é um difeomorfismo. Se φ e $\tilde{\varphi}$ são de classe C^k , $k \geq 1$, então essa mudança de coordenadas é um difeomorfismo de classe C^k .

Uma coleção de parametrizações é um *atlas* se suas imagens cobrem a superfície M . A superfície é dita *de classe C^k* se podemos tomar parametrizações de classe C^k de modo a obter um *atlas* para M .

Dado um ponto $p \in M$, tomamos carta local $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset M$ de M com $p = \varphi(p_0)$. O *espaço tangente* a M em p é, por definição, o subespaço vetorial afim $T_p(M) \subset \mathbb{R}_p^n$ definido pela imagem $D\varphi(p_0) \cdot (\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}_p^n$. Pela proposição anterior, essa definição não depende da carta tomada. Também podemos interpretar $T_p(M)$ como segue.

Proposição 6.3.2. Seja $\mathcal{C}_p(M)$ o conjunto dos caminhos diferenciáveis $\lambda:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\lambda(t) \in M, \forall t, \lambda(0) = p$. Então $T_p(M) = \{\lambda'(0), \lambda \in \mathcal{C}_p(M)\}$.

A prova desse fato é elementar e a deixamos para o leitor.

Definição 6.3.1. Sejam $M \subset \mathbb{R}^r, N \subset \mathbb{R}^s$ superfícies regulares e seja $f: M \rightarrow N$ aplicação contínua. Dado um ponto $p \in M$ uma *representação local* de f em torno de p , aplicação $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow W$ onde $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ e $\psi: W \rightarrow \psi(W) \subset N$ são parametrizações de M e N respectivamente, com $p \in \varphi(U), f(\varphi(U)) \subset \psi(W)$. A aplicação f é dita *diferenciável* (resp. de classe C^k) em p se podemos tomar φ e ψ de modo que a representação local correspondente para f , seja diferenciável (resp. de classe C^k) em $\varphi^{-1}(p)$. Dizemos que f é *diferenciável* (resp. de classe C^k) se é diferenciável (resp. de classe C^k) em todo ponto $p \in M$.

Utilizando as mudanças de coordenadas e a Regra da Cadeia, podemos mostrar:

Proposição 6.3.3. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Então duas representações locais de f têm a mesma classe de diferenciabilidade.

A proposição acima mostra que a noção de diferenciabilidade independe da representação local tomada.

Definição 6.3.2. Sejam M uma superfície regular de dimensão n e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em M .

1. Um *ponto singular ou ponto crítico* de f é um ponto $p \in M$ tal que $df(p) = 0$.
2. Um ponto singular p de f é *não degenerado* se para algum sistema de coordenadas $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in U$, a função $f \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma singularidade não degenerada em $x(p)$.

Definição 6.3.3. Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão $n, f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $p \in M$ ponto singular de f e E um subespaço de $T_p M$.

1. Dizemos que $H(p)$ é *positiva* (respectivamente *negativa*), *definida* em E , se $H(p) \cdot u > 0$ (respectivamente se $H(p) \cdot u < 0$) para todo $u \in E \setminus \{0\}$.
2. O *índice* de f em p , denotado por $\text{ind}(f, p)$, é a maior dimensão possível para um subespaço $E \subset T_p M$ onde $H(p)$ é negativa definida, isto é,

$$\text{ind}(f, p) = \max\{\dim E; \quad E \text{ é subespaço de } T_p M \text{ e}$$

$$H(p) \cdot u < 0 \text{ se } u \in E \setminus \{0\}\}.$$

Teorema 6.3.1 (Lema de Morse). Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in M$ ponto singular não degenerado de f com $\text{ind}(f, p) = k$. Então existe um sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ numa vizinhança U de p tal que

$$f(q) = f(p) - x_1^2(q) - \dots - x_k^2(q) + x_{k+1}^2(q) + \dots + x_n^2(q).$$

Em outras palavras, a função f é localmente equivalente à função

$$x \mapsto f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Observação 6.3.1. Quando $n = 2$, tem-se três possíveis formas canônicas:

- (a) $f(x, y) = f(p) - x^2 - y^2$.
- (b) $f(x, y) = f(p) - x^2 + y^2$.
- (c) $f(x, y) = f(p) + x^2 + y^2$.

As curvas de nível das três alternativas acima são representadas na Figura 6.1:

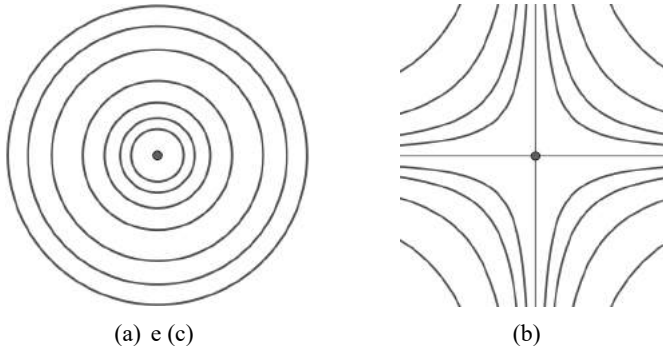


Figura 6.1: Formas canônicas

Definição 6.3.4. Sejam M uma superfície regular de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em M . Dizemos que f é uma *função de Morse* se todos os pontos singulares são não degenerados.

6.4 O teorema de retração de Morse

Sejam M uma superfície regular, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Denotemos por

$$M_a = f^{-1}(]-\infty, a]) = \{p \in M; f(p) \leq a\}$$

$$\text{e } M_{[a,b]} = f^{-1}([a, b]) = \{p \in M; a \leq f(p) \leq b\}.$$

Perguntamos qual a relação entre os conjuntos M_a e M_b sabendo-se que não há pontos críticos da função f na região $M_b \setminus M_a \subset M$, ou seja, sabendo-se que não há ponto crítico $x_0 \in M$ com $f(x_0) \in]a, b[$. Tal questão é respondida abaixo.

Teorema 6.4.1 (Teorema de Morse, Milnor (1963)). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Suponha que o conjunto $M_{[a,b]}$ seja compacto e não contenha pontos críticos de f . Então M_a é difeomorfo a M_b . Além disso, M_a é um retrato por deformação de M_b , de modo que a aplicação inclusão $M_a \hookrightarrow M_b$ seja uma equivalência de homotopia.

Melhor esclarecendo, temos o seguinte resultado, conhecido como *Teorema de retração de Morse*:

Teorema 6.4.2 (Teorema de Retração de Morse). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e seja $a < b$ tais que o conjunto $[a \leq f \leq b] \subset M$ é compacto (e.g., se M é compacta) e não contém pontos críticos de f . Então as superfícies de nível $[f = a]$ e $[f = b]$ são difeomorfas, de fato $[f \leq a]$ é um retrato de deformação de $[f \leq b]$. Em particular, ambas têm o mesmo tipo de homotopia.

Recordamos a definição de retrato de deformação.

Definição 6.4.1. Sejam X e Y espaços topológicos com $Y \subset X$ subespaço. Dizemos que Y é um *retrato de deformação de X* se existe uma homotopia contínua $r_t : X \rightarrow X, t \in [0, 1]$, tal que $r_1 = Id : X \rightarrow X$ (identidade) e $r_0 : X \rightarrow Y$ é uma *retração* (isto é, $r_0|_Y = Id : Y \rightarrow Y$, identidade de Y).

Nesse caso, temos uma *equivalência homotópica* $X \equiv Y$ (ver **L3**) dada por r_0 e pela inclusão $Y \rightarrow X$.

Observamos também o seguinte:

Lema 6.4.1. Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$ e $c \in f(M)$. Então o conjunto $[f = c] \setminus Cr(f)$ dos pontos $p \in [f = c]$, que não estão no conjunto $Cr(f)$ dos pontos críticos de f , é uma subvariedade de classe C^k e $(m - 1)$ -dimensional de M^m .

Demonstração. Suporemos $c = 0$ por simplicidade. Como f é de classe C^1 , temos que se $p \in [f = 0] \setminus Cr(f)$ podemos escolher carta local $x: U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$, de M válida em $p \in U$, com $x(p) = 0$ tal que $df(q) \neq 0, \forall q \in U$, e $\frac{\partial f}{\partial x_m}(q) \neq 0, \forall q \in U$. Definimos, então, $F: x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ pondo $F(x_1(q), \dots, x_m(q)) = (x_1(q), \dots, x_m(q), f(q)), q \in U$. Obtemos, então, $F \in C^k$ que é um difeomorfismo local em $x(U)$ e, logo, existe uma bola aberta $B(0, \epsilon) \subset x(U)$ tal que restrita a essa bola F é um difeomorfismo C^k , com $F(0) = 0$. Pomos, então, $\xi: x^{-1}(B(0, \epsilon)) \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $\xi(q) := (F \circ x)(q)$, obtendo difeomorfismo C^k tal que $\xi^{-1}(\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) = ([f = 0] \setminus Cr(f)) \cap x^{-1}(B(0, \epsilon))$, o que prova o afirmado. \square

Como corolário obtemos:

Corolário 6.4.1. Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k e c é valor regular não trivial de f , então $[f \leq c]$ é subvariedade com bordo, de classe C^k , e bordo $[f = c]$, $m - 1$ -dimensional.

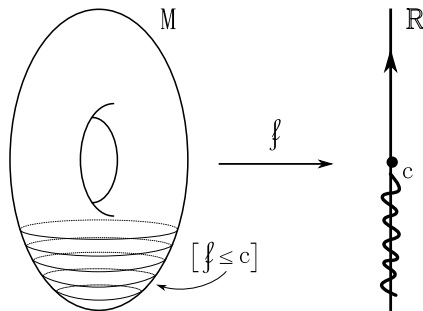


Figura 6.2: Subvariedade com bordo $[f \leq c]$

Demonstração do Teorema 6.4.2. Inicialmente observamos que a ideia aqui consiste em “descer” $[f \leq b]$ até $[f \leq a]$, utilizando o fluxo do campo $-\nabla f$, possível pois (na ausência de singularidades) f é estritamente decrescente ao longo das

órbitas orientadas de $-\nabla f$. Restam dois problemas a solucionar, o primeiro se refere ao fato que ∇f pode não ser completo em M , o segundo refere-se à própria definição de ∇f em uma variedade diferenciável qualquer.

Com relação a esse segundo problema, observamos que M pode ser munida de uma *métrica Riemanniana*, ou seja, de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em cada espaço tangente $T_p(M)$ e que varia diferenciavelmente com o ponto p , do seguinte modo: Se X e Y são campos de vetores de classe C^k em M , então a função real $\langle X, Y \rangle: M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k . A existência de métricas Riemannianas é um fato e pode ser obtida facilmente a partir da existência de partições da unidade (ver Lima (1981), do Carmo (1979), Lima (1961)). Outra forma de definir uma tal métrica em M consiste em utilizar os Teoremas de Whitney (ver Lima (ibid.)) para produzir uma imersão de classe C^k de M em \mathbb{R}^N para algum $N \in \mathbb{N}$, digamos $\Psi: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ e definir $\langle v, w \rangle_p := \langle\langle d\Psi(p) \cdot v, d\Psi(p) \cdot w \rangle\rangle$ para $p \in M$ e $v, w \in T_p(M)$, onde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ denota o produto escalar em \mathbb{R}^N , fazendo desse modo Ψ uma *imersão isométrica*.

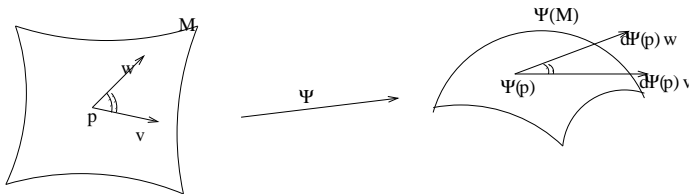


Figura 6.3: Imersão isométrica

Uma vez munida M de uma métrica Riemanniana, podemos definir o campo gradiente exigindo que $\langle \nabla f(p), v \rangle_p = df(p) \cdot v, \forall v \in T_p(M), \forall p \in M$. Utilizando cartas locais, vemos que ∇f é localmente bem definido, único e de classe C^{k-1} (se $f \in C^k$). Podemos, então, considerar o campo ∇f ao longo de M . Resolvemos agora o primeiro problema, tomando função de classe C^{k-1} , $\rho: M \rightarrow [0, +\infty[$ tal que $\rho = \frac{1}{\|\nabla f\|^2}$ numa vizinhança $U \supset V \supset f^{-1}[a, b]$ e tal que $\rho = 0$ fora de U .

Definimos, então, um novo campo de vetores $X := \rho \nabla f$ obtendo campo C^{k-1} global em M tal que $X = 0$ fora de U , e $X = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}$ em V .

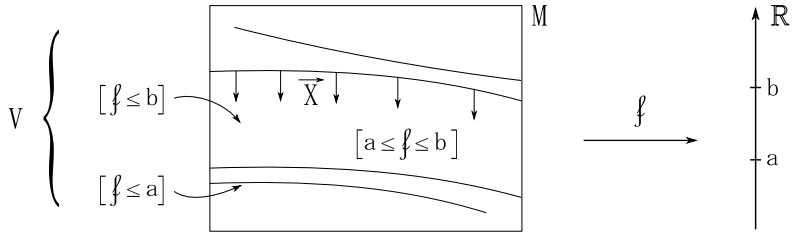


Figura 6.4: O campo de vetores $X := \rho \nabla f$

Em particular, por hipótese, X tem suporte compacto em M e, logo, X é completo (exercício!). Assim, podemos considerar o grupo a 1-parâmetro gerado por X , digamos, $\varphi_t : M \rightarrow M, t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Fixado $q \in M$ se $\varphi_{t_0}(q) \in f^{-1}[a, b]$, então

$$\left. \frac{d}{dt} [f(\varphi_t(q))] \right|_{t=t_0} = \left\langle \nabla f(\varphi_{t_0}(q)), \frac{\nabla f(\varphi_{t_0}(q))}{\|\nabla f(\varphi_{t_0}(q))\|^2} \right\rangle = 1.$$

Assim, a correspondência $t \mapsto f(\varphi_t(q))$ é afim da forma $f(\varphi_t(q)) = t + cte$ no intervalo compacto $I_q := \{t, f(\varphi_t(q)) \in [a, b]\}$.

Note agora que $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ aplica $[f \leq a]$ difeomorficamente sobre $[f \leq b]$. Definimos finalmente a homotopia $r_t : [f \leq b] \rightarrow [f \leq b]$ pondo $r_t(q) = q$ se $q \in [f \leq a]$ e $r_t(q) = \varphi_{t(a-f(q))}(q)$, se $a \leq f(q) \leq b$.

Então $r_0 = Id$ e vê-se facilmente que r_1 é uma retração de $[f \leq b]$ sobre $[f \leq a]$. □

6.5 O Teorema de Reeb sobre classificação das esferas em termos de pontos críticos de uma função

Como saber se um corpo celeste observado no espaço desde grandes distâncias é da forma de uma esfera, ou de um toro, ou de qualquer outra forma? Essa parece ser uma questão bastante fácil de responder. Alguns diriam, tratando-se de corpos celestes, que a gravidade e eventuais movimentos de *spin* ou rotação, fazem com que os corpos celestes sólidos sejam todos esféricos... Muito bem, parece razoável, afinal todos os corpos celestes que temos visto em imagens telescópicas, ao menos os sólidos, possuem uma aparência esférica, mesmo que tenha sofrido com alguns impactos. Isso parece tão razoável quanto aquele passageiro de um trem que, ao

passar ao lado de uma fazenda de gado, cuja cerca foi recentemente pintada de verde, ao ver uma das vacas com manchas verdes no lado direito do corpo, afirma solenemente: “podemos afirmar com certeza que, neste local, todas as vacas são verdes.”

Na verdade, o estudo da forma geométrica (topológica) dos objetos celestes pode ser uma questão bastante interessante, uma vez que, em um objeto sólido com uma superfície em forma de toro, pode comportar fluxos em sua superfície que apresentam nenhuma singularidade, gerando possivelmente movimentos e campos eletromagnéticos muito distintos dos gerados por um corpo celeste esférico (ou seja, pelo spin do núcleo do mesmo). Isso por si só já seria motivação suficiente para seguirmos estudando as possíveis formas de tais corpos. A ideia que se pode propor, então, para se descobrir a forma de um tal corpo celeste, seria a de “monitorar” o comportamento de alguma função definida na superfície do corpo, por exemplo, temperatura, alguma outra emissão de ondas etc. Enfim, a nós matemáticos cabe entender o efeito na topologia de uma superfície fechada (conexa, compacta e sem bordo), da combinatória de pontos críticos de uma função com singularidades que começamos assumindo não degeneradas (o que sempre suporemos nesta parte deste texto). Tal teoria remete aos trabalhos do genial matemático americano Marston Morse (1892-1977) que introduziu os princípios modernos do Cálculo das Variações, assim como os fundamentos da Teoria Moderna dos Campos de Vetores tipo gradiente e da relação entre topologia e singularidades de uma função em uma superfície. Seu trabalho sobre pontos críticos não degenerados, datado dos anos 1930 e que havia passado um pouco despercebido, foi revisitado por S. Smale nos anos 1960 e deu origem a toda a Teoria Moderna dos Campos de Vetores tipo gradiente. Uma consequência menos conhecida dos dinamicistas do trabalho de Morse é o seguinte resultado devido a Georges Reeb, datado de meados da década de 1950:

Teorema 6.5.1. *Seja M^m uma superfície regular compacta, conexa e de dimensão m . Suponha que M^m admite uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , com singularidades apenas de tipo Morse que tenha apenas dois pontos críticos. Então M^m é homeomorfa a uma esfera, ou seja, existe uma aplicação contínua bijetiva $h : M^m \rightarrow S^m$ com inversa contínua, sendo que S^m é a esfera unitária em \mathbb{R}^{m+1} .*

Demonstração. A prova desse teorema se dará em etapas. Inicialmente observamos que, sendo M^m compacta, a função f admite ao menos um ponto de máximo e um ponto de mínimo em M^m . Teremos, então, ao menos dois pontos críticos correspondentes a esses pontos. Como f possui por hipótese apenas dois pontos críticos, temos que estes correspondem exatamente aos pontos em questão. Chamare-

mos de $N \in M^m$ e $S \in M^m$ os pontos de máximo e mínimo de f em M^m . Como por hipótese as singularidades de f são do tipo Morse, segue que N e S são centros de f . Existem, portanto, vizinhanças $U(N)$ e $U(S)$ de N e S respectivamente que são uniões de níveis de f difeomorfos a esferas de dimensão $m - 1$ de forma que tais vizinhanças correspondem a discos fechados de dimensão m , difeomorfos ao disco unitário $D^m[1] = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m x_j^2 \leq 1\}$. De fato, tais vizinhanças são obtidas como resultado da escrita local de f em torno de N e S , respectivamente, nos termos do Lema de Morse. Como $b = f(N) > f(S) = a$, podemos, então, tomar o bordo de $U(N)$ como sendo um nível $f^{-1}(b)$ de f , difeomorfo à esfera S^{m-1} e tomar o bordo de $U(S)$ como sendo um nível $f^{-1}(a)$ de f , difeomorfo a S^{m-1} sendo que $a < b$. Dessa forma, as regiões $U(N)$ e $U(S)$ são disjuntas em M^m e não a desconectam. Utilizaremos, então, o Teorema de Retração de Morse (também conhecido como Lema de Isotopia de Morse) para concluir que a região $R = M^m \setminus (U(N) \cup U(S))$ é simplesmente difeomorfa a um cilindro $S^{m-1} \times [a, b]$ e que, em termos topológicos, a superfície abstrata M^m pode ser escrita como a colagem dessas três partes, $U(S) \cup R \cup U(N)$, através de seus bordos comuns, ou seja, M^m é difeomorfa à colagem de duas tampas (difeomorfas ao disco fechado $D^m[1]$) superior e inferior, ao cilindro $S^{m-1} \times [a, b]$, através de seus bordos comuns $\partial D^m[1] \simeq S^{m-1} \times \{a\} \simeq S^{m-1} \times \{b\}$. Evidentemente, tal objeto trata-se de uma esfera topologicamente falando.

□

Uma versão mais geral do Teorema de Reeb acima, pode ser enunciada para variedades diferenciáveis, um conceito que ainda estudaremos mais adiante neste texto, que se escreve como:

Teorema 6.5.2 (Teorema de Reeb). Seja M uma variedade compacta de dimensão n tal que exista uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com exatamente dois pontos críticos, então M é homeomorfa à esfera S^n .

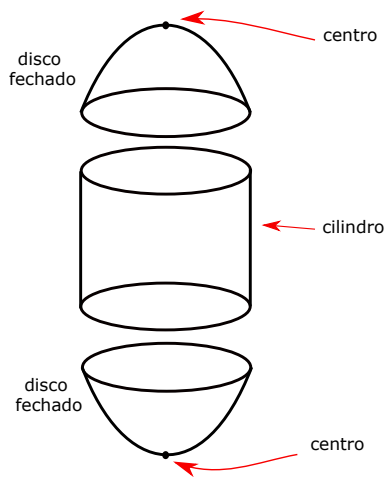


Figura 6.5: O teorema de Reeb

7

O Teorema de Haefliger

Imagine-se sentado à beira de um tranquilo lago de águas paradas. Ao atirar uma pedra no centro do lago, você pode observar pequenas ondas circulares concêntricas formadas, espalhando-se a partir do ponto de impacto. Imagine que você já viu essa situação tantas vezes que, estando de olhos fechados, é acordado por um ruído. Ao abrir os olhos, observa os tais círculos concêntricos, embora não veja mais nenhum ponto de impacto na superfície da água. Parece razoável conjecturar que o ruído, assim como as ondas na superfície do lago, foram criados por algum objeto que atingiu a superfície e desapareceu. Pois bem, imagine agora que você gostaria de prever a existência e a natureza de impactos ou explosões a partir de suas ondas de choque. Seria possível haver, em dimensão três, tais ondas esféricas sem que tenha havido um impacto ou explosão? Seria possível termos mais de uma explosão, gerando, uma vez combinadas, ondas esféricas? O Teorema de Haefliger, muito embora seu enunciado formal pareça estar bastante distante dessa contextualização, versa sobre esses temas. Uma maneira de considerarmos versões simplificadas do mesmo, que parecem ter relação direta com o fenômeno da pedra no lago acima, é considerarmos campos de vetores definidos em uma vizinhança de um disco no plano. Temos especial interesse, por motivos que ficam claros em um curso de Teoria Geométrica das Folheações, no caso de campos transversais ao bordo do disco em questão. Ou seja, imaginaremos campos de vetores cujas

órbitas “entram” no disco e veremos o que se pode dizer neste caso.

7.1 O Teorema de Haefliger

Denotemos por $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ o disco unitário bidimensional centrado na origem de \mathbb{R}^2 . Denotemos por $\mathcal{X}(D^2)$ o conjunto de todos os campos de vetores de classe C^1 definidos em alguma vizinhança aberta do disco D^2 em \mathbb{R}^2 . Finalmente, denotemos por $\mathcal{X}(D^2)^{\text{h}} \subset \mathcal{X}(D^2)$ o subconjunto de tais campos que são transversais ao bordo $\partial D^2 = S^1$ de D^2 . Observe que tal bordo consiste do círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Primeiramente observamos dois fatos importantes:

1. *Um campo $X \in \mathcal{X}(D^2)^{\text{h}}$ necessariamente aponta sempre para dentro ou sempre para fora do disco ao longo de seu bordo.* Isto se deve ao fato de que o bordo S^1 é conexo e a função que mede o cosseno do ângulo entre o campo e o vetor tangente ao bordo do disco, em cada ponto desse bordo, é contínua e nunca se anula. Esta função terá portanto sinal constante. Podemos, então, a menos trocando a orientação do campo X , assumir que esse sempre aponta para dentro do disco desde seu bordo.
2. *Sendo o bordo do disco um conjunto compacto, o subconjunto $\mathcal{X}(D^2)^{\text{h}} \subset \mathcal{X}(D^2)$ é um subconjunto aberto,* ou seja, uma pequena perturbação nos coeficientes de um campo $X \in \mathcal{X}(D^2)^{\text{h}}$, que ainda gera um campo transversal ao bordo de D^2 .

Uma vez dito isso prosseguimos. Lembramos também o seguinte conceito:

Definição 7.1.1. Dado um campo de vetores X de classe C^1 , em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$ de um ponto $p \in U$, dizemos que p é uma *singularidade tipo Morse* de X se existem uma função de classe C^2 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma vizinhança $p \in V \subset U$, com uma singularidade de Morse (i.e., um ponto crítico não degenerado em p) e uma função de classe C^1 , $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, tais que em V temos $X = gX_f$, em que X_f denota o campo Hamiltoniano de f .

Em particular, em função do Lema de Morse, podemos escolher coordenadas locais (u, v) centradas em p tais que nessas coordenadas podemos escrever uma das duas formas:

1. $X(u, v) = g(u, v)(2v \frac{\partial}{\partial u} - 2u \frac{\partial}{\partial v})$.

$$2. X(u, v) = g(u, v)(2v \frac{\partial}{\partial u} + 2u \frac{\partial}{\partial v}).$$

A primeira forma corresponde a uma singularidade tipo *centro*, na qual todas as órbitas próximas a p são fechadas periódicas difeomorfas a círculos $u^2 + v^2 = c$, $c \geq 0$. Na segunda forma, temos uma singularidade tipo *sela* e as órbitas próximas a p são dadas em uma vizinhança de p por hipérbolas $u^2 - v^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ (neste caso, essa parte corresponde apenas à intersecção da órbita com a vizinhança na qual temos a validade da escrita acima).

Um campo de vetores X de classe C^1 em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ será dito de *tipo Morse* se:

1. As singularidades de X em U são todas de tipo Morse.
2. Não existem ligações de sela, i.e., não existe uma órbita γ de X em U que tenha como ω -limite e α -limite duas selas distintas de X em U .

Considere $p \in D^2$ e $X \in \mathcal{X}(D^2)$. Observe que se Σ é um intervalo transversal a X e $p \in D^2$ regular, então $\omega_X(p)$ intercepta Σ no máximo uma vez. Em particular, uma órbita periódica de X cruza Σ uma vez. Esses fatos decorrem da topologia trivial do disco D^2 . Uma singularidade de X é chamada de *sela ou centro* de acordo com as duas faces do retrato que correspondem à Figura 6.1 (à esquerda para o centro e à direita para sela). Essas singularidades são chamadas *singularidades tipo Morse*. Uma singularidade de sela exhibe duas separatrizes estáveis e duas separatrizes instáveis. Um grafo de X é um conjunto conexo Γ formado por selas e separatrizes de sela de modo que se $s \in \Gamma$ é uma sela, então Γ contém pelo menos uma separatriz estável e uma separatriz instável de s .

Teorema 7.1.1 (Teorema de Haefliger). Seja $X \in \mathcal{X}^h(D^2)$ um campo de classe C^1 , tipo Morse e transversal ao bordo do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$. Então X tem uma órbita periódica ou um grafo, que tem uma transformação de Poincaré associada, $\pi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que restrita a um dos intervalos $]-\epsilon, 0[$, $]0, \epsilon[$ é a identidade e restrita ao intervalo restante é uma aplicação monótona decrescente ou crescente.

Vejamos a seguir a prova do Teorema de Haefliger acima.

7.2 Prova do Teorema de Haefliger

Seja, então, X um campo C^1 de tipo Morse definido em uma vizinhança do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, que seja transversal ao bordo do disco. Lembramos que, por hipótese,

o campo X possui apenas singularidades de tipo Morse em D^2 . Observe que a hipótese de que as singularidades são do tipo Morse é fundamental. De fato, o campo radial $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ é real analítico em \mathbb{R}^2 e é transversal ao bordo de D^2 , porém possui uma singularidade tipo radial não Morse na origem $0 \in \mathbb{R}^2$.

Vamos à prova que é baseada nos seguintes lemas:

Lema 7.2.1. *Seja X campo como no Teorema de Haefliger. Denote por c o número de singularidades tipo centro de X em D^2 e por s o número de singularidades tipo sela. Então $c = s + 1$.*

Demonstração. De fato, utilizaremos um fato de Topologia Algébrica, conhecido como Teorema do Índice de Euler–Poincaré–Hopf. Dada uma singularidade p do campo X , definimos o seu índice como sendo $+1$ se o determinante jacobiano de X em p tem sinal positivo, e como sendo -1 caso esse seja negativo. Lembramos que, por hipótese, as singularidades de X em D são centros ou selas. Em um centro, temos determinante positivo (igual a $+4$ se tomamos apenas o hamiltoniano de $x^2 + y^2$) e, em uma sela, temos determinante jacobiano negativo (igual a -4 se tomamos apenas o hamiltoniano de $x^2 - y^2$). O Teorema de Euler–Poincaré–Hopf diz que, para um campo transversal ao bordo do disco, a soma dos índices de suas singularidades, assumindo que todas sejam de determinante jacobiano diferente de zero, é sempre a mesma. No caso do disco, se tomamos o campo radial verificamos que tal soma deve, então, ser igual a $+1$. Dessa feita, para nosso campo X acima, devemos ter $c - s = 1$, ou seja, $c = s + 1$. \square

Primeira parte da prova do Teorema de Haefliger. Consideramos agora o caso em que não temos nenhuma singularidade tipo sela para X em D^2 . Nesse caso, em função do lema anterior, temos um único centro $p \in D^2$, obviamente fora do bordo $S^1 = \partial D^2$. Começamos considerando as órbitas periódicas do campo X em uma vizinhança W de p no interior de D^2 na qual vale o lema de Morse para X . Usando o Lema de Zorn, concluímos que existe uma órbita periódica γ_{\max} de X contida no interior de D^2 tal que p está no interior da região plana $R(\gamma_{\max})$ limitada por γ_{\max} e tal que γ_{\max} é *maximal* no seguinte sentido: não existe nenhuma órbita periódica $\tilde{\gamma}$ tal que todas as órbitas de X na região $R(\tilde{\gamma})$ limitada por $\tilde{\gamma}$ sejam periódicas e tal que $R(\tilde{\gamma})$ contém propriamente a região $R(\gamma_{\max})$.

Fazemos também a seguinte observação: dado um ponto $q \in S^1 = \partial D^2$ do bordo do disco, a órbita γ_q de X por q está definida para todo $t \geq 0$ (isso é fácil, uma vez que γ_q entra e não sai mais da região D^2 , já que X sempre aponta para dentro de D^2 desde S^1). Assim, podemos considerar o conjunto ω -limite de γ_q

que denotaremos simplesmente por $\omega(q)$. Pelo Teorema de Poincaré–Bendixson, tal conjunto será uma órbita periódica: de fato, esse não pode ser uma singularidade por somente haver uma e essa ser do tipo centro. Também não poderá ser um grafo por essa mesma razão. Assim, necessariamente $\omega(q)$ trata-se de uma órbita periódica $\gamma_q \subset D^2$, que necessariamente contém uma singularidade na região $R(\gamma_q)$ e, logo, tal singularidade será p . Assim, pela maximalidade de γ_{\max} , necessariamente γ_{\max} não está contida em uma faixa de órbitas periódicas, sendo que isso acontece apenas de um dos lados dela. Ou seja, a transformação de Poincaré associada a γ_{\max} é igual à identidade de um dos lados (o lado interior de $R(\gamma_{\max})$) de γ_{\max} , sendo uma transformação monótona do outro lado (o lado exterior de $R(\gamma_{\max})$), encerrando esse primeiro caso em que há apenas uma singularidade. \square

Prova do caso geral. Vejamos agora como provar o caso geral, em que há um número qualquer de singularidades tipo sela. Vamos usar indução sobre tal número de selas s . O caso $s = 0$ já foi provado acima. Suponhamos que $s \geq 1$ e que o teorema está demonstrado para campos com até $s - 1$ selas. Temos $c = s + 1$ centros de X em D^2 . Dado um centro p , consideremos a região $R(p) \subset D^2$ interior a D^2 tal que $R(p)$ é a região maximal, segundo a inclusão de conjuntos, com a seguinte propriedade: toda órbita de X em $R(p)$ diferente de p é periódica. Pelo Lema de Zorn e pela transversalidade de X com o bordo de D^2 , tal região maximal existe e está inteiramente contida no interior de D^2 . Vejamos as possibilidades para o bordo $\Gamma(p) := \partial R(p)$. Como $R(p)$ é invariante, $\Gamma(p)$ será uma união de órbitas e singularidades de X . Claramente $\Gamma(p)$ não pode conter nenhum centro de X . Também não pode $R(p)$ conter mais de uma singularidade de X , pois tal singularidade é o próprio centro p . Caso $\Gamma(p)$ não contenha nenhuma singularidade de X , então esta será uma órbita periódica de X e sua transformação de Poincaré será necessariamente do tipo anunciado: igual à identidade na parte interior a $R(p)$ e monótona na parte exterior a $R(p)$. Podemos assumir, então, que cada centro p origina uma região $R(p)$ cujo bordo contém uma sela $q(p)$ de X . Como há mais centros do que selas, necessariamente devemos ter ao menos dois centros p_1, p_2 tais que as regiões $R(p_1)$ e $R(p_2)$ compartilham uma mesma sela q em seus bordos, o que nos dá uma das configurações descritas nas figuras abaixo:

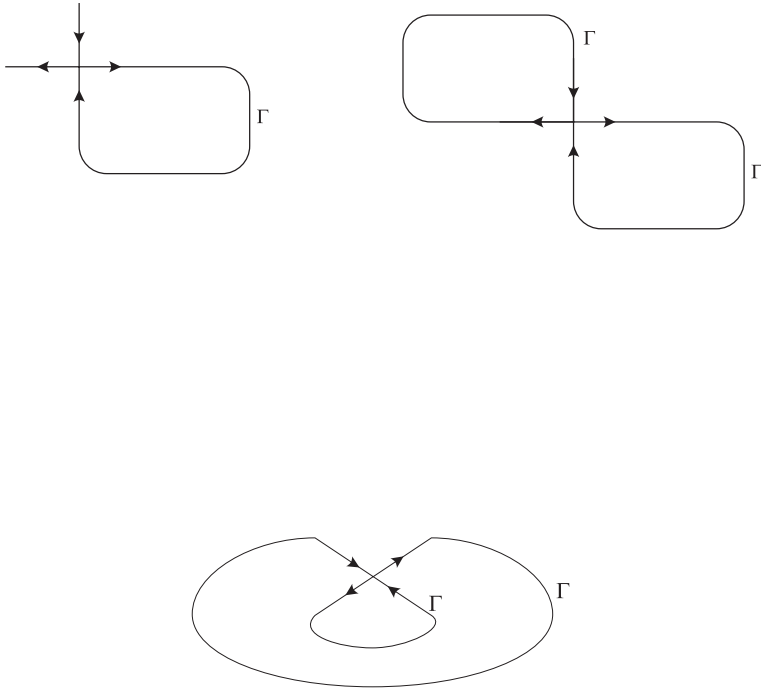


Figura 7.1: Grafos

Como se pode observar, podemos modificar o campo X em uma região $R \subset D^2$ de modo que, o novo campo \tilde{X} , ainda tenha apenas singularidades tipo Morse, sendo transversal (igual a X em uma vizinhança do) ao bordo S^1 e de modo que \tilde{X} admita um centro e uma sela a menos. Outra propriedade importante dessa *cirurgia*, no campo X , é que o campo resultante \tilde{X} admite, fora da região R , as mesmas transformações de Poincaré associadas a suas órbitas. Usando agora a hipótese de indução, uma vez que \tilde{X} possui uma sela a menos que X , concluímos que \tilde{X} satisfaz a conclusão do teorema de Haefliger. O mesmo valerá para X , visto que a transformação de Poincaré unilateral associada a \tilde{X} corresponderá a uma transformação de Poincaré de X , que também será unilateral. \square

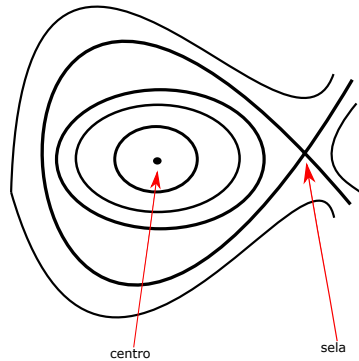


Figura 7.2: O teorema de Haefliger

7.3 Inexistência de campos analíticos

Vejamos agora uma belíssima consequência do Teorema de Haefliger:

Corolário 7.3.1. *Não existe campo de vetores real analítico $X \in \mathcal{X}^{\text{an}}(D^2)$, tipo Morse e transversal, ao bordo do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$.*

A prova é imediata, uma vez que a transformação de primeiro retorno associada a um ciclo limite ou um grafo, sendo o campo de vetores real analítico, também será analítica real. Por outro lado, pelo princípio da identidade, uma função real analítica $\pi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ que seja a identidade de um dos lados de $]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\}$ será a identidade, o que impede a existência de ciclos limites ou grafos com transformação de primeiro retorno unilateral como no teorema de Haefliger.

Uma consequência mais profunda refere-se à inexistência de folheações reais analíticas de codimensão um em variedades compactas com grupo fundamental finito, por exemplo, nas esferas S^n , $n \geq 2$. Em verdade, essa é a real formulação original do Teorema de Haefliger. Tal resultado pode ser obtido rapidamente a partir do teorema que provamos para campos transversais ao bordo do disco. Basta usar um pouco de transversalidade e aproximações. O leitor que chegar até o final deste texto terá plenas condições de fazê-lo.



Perturbação, estabilidade estrutural e o teorema de Peixoto

Este capítulo é dedicado ao estudo de campos de vetores em dimensão $n \geq 2$, que são transversais ao bordo S^{n-1} do disco fechado $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$. Notadamente estudamos a teoria da perturbação de tais campos, mais precisamente sua estabilidade estrutural, sendo que na parte final enunciamos o teorema de Peixoto para o caso de dimensão $n = 2$. Começaremos, entretanto, com alguns fatos gerais, para campos em abertos do espaço euclidiano.

8.1 Introdução à Teoria da Perturbação

Neste parágrafo, iniciaremos o estudo da Teoria da Perturbação em Sistemas Dinâmicos. Abordaremos a persistência de singularidades e de órbitas periódicas para campos de vetores. Para isso, é necessário introduzirmos uma topologia no espaço dos campos de vetores de classe C^r em um dado aberto de \mathbb{R}^n .

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e denote por $\mathcal{X}^r(U)$ o espaço vetorial

dos campos de vetores de classe C^r em U . Se $r \geq 1$, então $\mathcal{X}^r(U)$ pode ser munido da seguinte norma C^1 :

$$\|X\|_1 := \sup\{|X(p)|, |DX(p)|; p \in U\}.$$

Em particular, podemos ter $\|X\|_1 = \infty$. As vizinhanças em $\mathcal{X}^1(U)$ são, então, conjuntos que contém um aberto da forma $\{Y \in \xi(U), \|Y - X\|_1 < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$.

Observação 8.1.1. $\mathcal{X}^1(U)$ munido de $\|\cdot\|$ é um espaço vetorial normado, ou seja, $\|\cdot\|$ é positiva definida, que satisfaz a $\|\lambda \cdot X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{X}^1(U)$ e vale a desigualdade triangular.

Demonstração. Exercício! □

Definição 8.1.1. Uma singularidade p de um campo de vetores diferenciável X é dita uma singularidade *simples* se sua derivada $DX(p)$ é inversível (ver Spivak (1979)).

Teorema 8.1.1. Sejam $X \in \mathcal{X}^1(U)$ e $p \in U$ uma singularidade simples de X . Então existem vizinhança $p \in V \subset U$ e vizinhança $X \in \eta \subset \xi(U)$ tais que qualquer $Y \in \eta$ possui singularidade em V . Além disso, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar Y tal que $\|Y - X\|_1 < \epsilon$. Se p é singularidade hiperbólica de X , então podemos tomar V, η suficientemente pequenas de modo que cada $Y \in \eta$ possua uma única singularidade hiperbólica em V e de mesmo índice que p como singularidade de X .

O Teorema acima é de fato um resultado sobre espaços de funções, mais precisamente, sobre estabilidade de difeomorfismos em classe C^1 . Apresentaremos, portanto, uma prova com esse ponto de vista mais geral.

Proposição 8.1.1. Sejam $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores C^1 e $p \in U$ singularidade simples de X . Existem vizinhanças abertas η de X em $\mathcal{X}^1(U)$ e V de p em U , de modo que se $Y \in \eta$, então:

- (i) $Y|_V$ é injetiva.
- (ii) $X(p) \in Y(V)$.

O Teorema 8.1.1 seguirá da Proposição 8.1.1 acima.

Prova da Proposição 8.1.1. Dividiremos a prova em passos fundamentais:

Passo 1. Sejam $c > \|DX(p)^{-1}\| > 0$ e $V \subset U$ vizinhança de p tais que $\|DX(x)^{-1}\| < c$ e $\|DX(x) - DX(y)\| < \frac{1}{c}$, $\forall x, y \in V$. Então $X|_V$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x \in V$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, então $v = DX(x)^{-1}(DX(x) \cdot v)$ de modo que $|v| \leq \|DX(x)^{-1}\| \cdot |DX(x) \cdot v|$, e logo, $|DX(x) \cdot v| > \frac{1}{c}|v|$. Sejam $x, y \in V$ onde $y = x + v$. Podemos supor que V é uma bola convexa. Assim sendo, $x + tv \in V, \forall t \in [0, 1]$, de modo que está bem definida a aplicação $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = X(x + tv)$ que é de classe C^1 e satisfaz $f(0) = X(x)$, $f(1) = X(y)$. Pela Regra da Cadeia, temos que $f'(t) = DX(x + tv) \cdot v$ e assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$\begin{aligned} X(y) - X(x) &= \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 DX(x + tv) \cdot v dt \\ &= \int_0^1 DX(x) \cdot v dt + \int_0^1 [DX(x + tv) - DX(x)] \cdot v dt. \end{aligned}$$

Isto nos dá a seguinte estimativa

$$|X(x) - X(y)| \geq |DX(x) \cdot v| - \int_0^1 \|DX(x + tv) - DX(x)\| \cdot |v| dt.$$

Das desigualdades anteriores obtemos então que $|X(x) - X(y)| > \frac{1}{c}|v| - \frac{1}{c}|v|$ o que prova a injetividade de X em V . \square

Passo 2. Tome $B \subset U$ bola compacta de centro p e tome $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{1}{2} \min\{|X(x)|, x \in \partial B\}$. Então $X(B) \supset B(0, \delta)$.

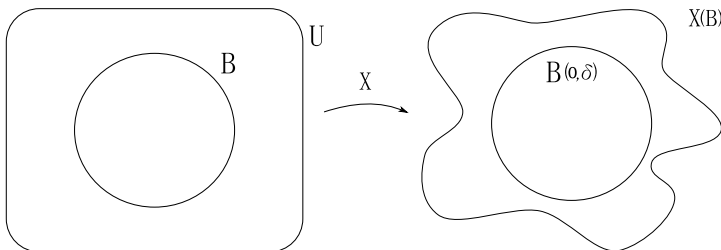


Figura 8.1: $X(B) \supset B(0, \delta)$

Demonstração. Fixemos $u \in B(0, \delta)$. Seja $x_0 \in B$ um ponto de mínimo da função $\frac{1}{2}|X(x) - u|^2$, $x \in B$. Observe que, dado $x \in \partial B$, temos que $|X(x) - u| \geq |X(x) - X(p)| - |X(p) - u| = |X(x)| - |u| > 2\delta - \delta$, assim $|X(x) - u| > \delta > |X(x)|$ de modo que $|X(x)|$ não é minimal se $x \in \partial B$. Desse modo, $x_0 \notin \partial B$. Pela Regra da Cadeia, temos que $\frac{1}{2}|X(x) - u|^2$ é diferenciável com derivada em x_0 dada por $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $w \mapsto \langle X(x_0) - u, DX(x_0) \cdot w \rangle$. Como x_0 é ponto crítico e ponto interior de B , devemos ter $T = 0$. Por outro lado, como $DX(x_0)$ é invertível (pois X é de classe C^1 e $DX(p)$ é invertível) existe $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $DX(x_0) \cdot w = X(x_0) - u$. Assim, $0 = T(w) = \langle X(x_0) - u, DX(x_0) \cdot w \rangle = |X(x_0) - u|^2$ e, portanto, $X(x_0) = u$. \square

Passo final. Existe $c > 0$ tal que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\|T - DX(p)\| < c \implies T$ é invertível. Por outro lado, como $x \mapsto DX(x)$ é contínua, segue que existe uma vizinhança $p \in V \subset U$ de modo que $x \in V \implies \|DX(x) - DX(p)\| < \frac{1}{2}c$, de modo que $Y \in \mathcal{X}^1(U)$, $\|DY(x) - DX(p)\| < \frac{1}{2}c, \forall x \in V \implies DY(x)$ é invertível. Seja, então, $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$ a vizinhança assim definida de X em $\mathcal{X}^1(U)$. Tomemos $b > \|DX(p)^{-1}\|$. Como a operação $GL(\mathbb{R}^n) \leftarrow, T \mapsto T^{-1}$ é contínua, existem vizinhanças $X \in \eta_1 \subset \mathcal{X}^1(U)$ e $p \in V_1 \subset V$ tais que $Y \in \eta_1$ e $x \in V_1 \implies \|DY(x)^{-1}\| < b$. Podemos diminuir essas vizinhanças de modo a obter também

$$\|DY(x) - DY(y)\| < \frac{1}{b}, \forall x, y \in V_1, \forall Y \in \eta_1.$$

Segundo o primeiro passo, temos que $Y \in \eta_1 \implies Y|_A$ é injetiva para qualquer bola $A \subset V_1$. Fixemos uma tal bola \tilde{V} centrada em p , denotemos por $B \subset \tilde{V}$ uma bola compacta centrada em p e tomemos $\delta > 0$ como no segundo passo acima. Existe, então, vizinhança $\tilde{\eta} \subset \eta_1 \subset \mathcal{X}^1(U)$ tal que $Y \in \tilde{\eta} \implies \min\{|Y(x) - Y(p)|, x \in \partial B\} > 2\delta > 0$. Segue que se $|u - Y(p)| < \delta$ e $Y \in \tilde{\eta}$, então $u \in Y(B)$. Isso prova a Proposição 8.1.1. \square

A seguir discutimos a persistência de órbitas fechadas. Começamos com a seguinte definição.

Definição 8.1.2. Sejam X um campo de vetores diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma \subset U$ órbita periódica de X . Denotemos por $\varphi(t)$ uma trajetória de X com $p = \varphi(0) \in \gamma$. Então o *período* de γ é o período da função $\varphi(t)$. Denote agora por $\pi: \Sigma_0 \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré de γ na seção transversal local $p \in \Sigma_0$. Dizemos que p é ponto fixo *hiperbólico* de π se $D\pi(p)$ não possui

autovalor igual a 1 (tal fato independe da seção Σ_0 tomada e do ponto $p \in \gamma$ escolhido (verifique!)). Nesse caso, diremos que γ é órbita periódica *hiperbólica* de X .

Teorema 8.1.2. *Sejam $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores C^1 , $\gamma \subset U$ uma órbita periódica hiperbólica de X e $V \subset U$ uma vizinhança de γ . Existe, então, vizinhança $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$ de X tal que se $Y \in \eta$, então Y possui uma órbita periódica hiperbólica $\gamma_Y \subset V$.*

Demonstração. Primeiramente estabeleceremos a notação a ser utilizada. Seja $\tau_0 > 0$ o período de γ e suponhamos que $0 \in \gamma$. Denotemos por $\tau: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação de classe C^1 tal que $\tau(0) = \tau_0$ e $\pi(z) = \varphi(\tau(z), z)$ onde φ é o fluxo local de X numa vizinhança de γ . Tomemos Σ relativamente compacta (de fecho compacto) em U de modo que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com a propriedade de que $Y \in \mathcal{X}^1(U)$, $|Y(x) - X(x)| < \delta$, $\forall x \in \Sigma_0 \implies \Sigma$ é também uma seção transversal local para Y em 0 e existe uma aplicação de classe C^1 $\rho: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|\rho(x) - \tau(x)| < \epsilon, \psi(\rho(x), x) \in \Sigma, \forall x \in \Sigma$$

(onde ψ denota o fluxo local de Y numa vizinhança de γ) e

$$|\psi(\rho(x), x) - \pi(x)| < \epsilon, \forall x \in \Sigma_0.$$

Em particular, podemos definir uma espécie de aplicação de Poincaré para Y pondo $\pi_Y: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$, $\pi_Y(x) = \psi(\rho(x), x)$.

Afirmção 8.1.1. *Dados $a > 0$ e compacto $K \subset U$, para cada $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|X - Y\| < \delta_1 \implies \|D\varphi_t(x) - D\psi_t(x)\| < \epsilon_1$, $\forall t \in [-a, a]$, $\forall x \in K$.*

Essa afirmação segue basicamente da dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais.

Juntando o que obtivemos acima, concluímos que, dado $\epsilon_2 > 0$ qualquer, podemos obter $\delta_2 > 0$ com a propriedade de que $Y \in \mathcal{X}^1(U)$, $\|Y - X\| < \delta \implies |\pi(x) - \pi_Y(x)| < \epsilon_2$, $|D\pi(x) - D\pi_Y(x)| < \epsilon_2$, $\forall x \in \Sigma_0$. Procuramos por órbitas periódicas de Y , buscando pontos fixos de π_Y , ou seja, zeros da aplicação $F: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{E}^{n-1}$, onde \mathbb{E}^{n-1} é o hiperplano ($\cong \mathbb{R}^{n-1}$) contendo Σ_0 , que é dada por $F(x) = \pi_Y(x) - x$. Seja $G: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{E}$ a aplicação correspondente, associada a X , isto é, $G(x) = \pi(x) - x$. Então G é de classe C^1 , $G(0) = 0$ e $DG(0) = D\pi(0) - Id$, onde $I: \mathbb{E} \leftrightarrow \mathbb{E}$ é a aplicação identidade. Como γ é hiperbólica, segue que $DG(0)$ é invertível e, logo, podemos obter vizinhança $G \in \mathcal{M} \subset \mathcal{X}^1(\Sigma_0)$ tal que $H \in \mathcal{M} \implies H$ possui um único zero em Σ_0 (ver

Proposição 8.1.1). Desse modo, podemos também tomar δ_2 pequeno o suficiente de modo que $Y \in \mathcal{X}^1(U)$, $\|Y - X\| < \delta_2 \implies F \in \mathcal{M}$ e, logo, F possui um único zero em Σ_0 e logo Y possui uma única órbita periódica γ_Y em uma vizinhança de γ , obtida saturando-se Σ_0 por Y . Podemos também tomar essa órbita contida em qualquer vizinhança $V \subset U$ de γ . O resto da demonstração (a hiperbolicidade de γ_Y) deixamos a cargo do leitor. \square

8.2 Um pouco de estabilidade estrutural e o Teorema de Peixoto

Nesta seção, abordaremos alguns resultados clássicos sobre estabilidade estrutural, finalizando a apresentação do teorema de Maurício Peixoto sobre caracterização dos campos de vetores estruturalmente estáveis no disco plano, entre os que apontam para dentro desde o bordo. Observamos que não estamos na situação estudada no teorema de Haefliger, uma vez que nesse caso as singularidades do campo no disco são supostas do tipo Morse, em particular, estão muito distantes de singularidades hiperbólicas.

Mas o que é estabilidade estrutural? *A grosso modo* os campos de vetores *estruturalmente estáveis* são aqueles que têm uma dinâmica sem propriedades singulares, que pudessem ser destruídas com pequenas perturbações do campo. Lembremos primeiramente o seguinte resultado fundamental devido a Hartman:

Teorema 8.2.1 (Teorema de Conjugação de Hartman). Sejam $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 e $p \in U$ singularidade hiperbólica de X . Existem vizinhança W de p em U e homeomorfismo $h: W \rightarrow B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ que conjugua $X|_W$ à restrição do campo linear $DX(p)$ à bola $B(0, \epsilon)$.

Sabemos que dois sistemas lineares hiperbólicos em \mathbb{R}^n são topologicamente conjugados se e somente se têm o mesmo índice de estabilidade. Assim, o teorema acima nos permite deduzir que os campos de vetores que possuem dinâmica estruturalmente estável próximo a um ponto singular são os que exibem singularidades hiperbólicas. Por outro lado, devido ao Teorema do Fluxo Tubular, a noção de estabilidade estrutural não é interessante em uma vizinhança de um ponto regular. Mas vejamos uma definição formal de estabilidade estrutural. Como estamos interessados apenas no caso local, vamos nos restringir a campos no disco, mais do que isto, a campos de vetores que são transversais ao bordo do disco unitário fechado em dimensão n , que denotaremos por $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$. Como

antes, denotamos por $\mathcal{X}^1(U)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, munido da topologia C^1 .

Dado um campo de vetores $X \in \mathcal{X}^1(U)$ onde $U \supset \mathbb{D}^n$, transversal ao bordo $\partial\mathbb{D}^n$, temos que, a menos de mudança de orientação, podemos supor que X aponta para dentro de \mathbb{D}^n .

Agora, se $Y \in \mathcal{X}^1(U)$ é suficientemente próximo de X , então claramente também Y aponta para dentro de \mathbb{D}^n .

Definição 8.2.1. Dizemos que X , como acima, é *estruturalmente estável* se existe uma vizinhança $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$ de X tal que $Y \in \eta \implies Y$ é topologicamente conjugado a X em \mathbb{D}^n , ou seja, os fluxos de X_t e Y_t de X e Y são conjugados por um homeomorfismo $h: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ do disco:

$$h(X_t(x)) = Y_t(h(x)), \forall x \in \mathbb{D}^n.$$

Evidentemente uma conjugação topológica preserva singularidades e órbitas periódicas. Em particular, de acordo com o que observamos acima, as singularidades de X em \mathbb{D}^n devem ser hiperbólicas. Por outro lado, o Teorema de Poincaré–Bendixson garante a existência de pelo menos uma singularidade de X em \mathbb{D}^n . Assim, enunciamos o mais simples resultado a respeito da estabilidade estrutural de campos como segue:

Teorema 8.2.2. Seja $X: U \supset \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 , apontando para dentro de \mathbb{D}^n e tal que a origem é a única singularidade de X em \mathbb{D}^n , sendo essa singularidade um atrator (poço). Suponha também que, para todo $x \in \mathbb{D}^n$, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = 0$. Então X é estruturalmente estável em \mathbb{D}^n .

A demonstração pode ser entendida do seguinte modo: dado $Y \in \mathcal{X}^1(U)$ suficientemente próximo de X , temos que Y também aponta para dentro de \mathbb{D}^n e possui uma única singularidade (que é um poço) situada próximo à origem. Podemos, então, definir a conjugação partindo da identidade no bordo $\partial\mathbb{D}^n$ e seguindo as trajetórias de X e Y simultaneamente, de modo a preservar o tempo ao longo dessas curvas de fluxo. Veremos que de fato isso pode ser feito de forma a obtermos um homeomorfismo.

Utilizaremos uma noção útil também em outros problemas:

Definição 8.2.2. Seja p uma singularidade do campo de vetores $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. A *bacia de atração* de p consiste do conjunto Γ_p dos pontos $q \in U$ tais que $X_t(q)$ está definido para todo $t \geq 0$ e tem $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(q) = p$.

Observação 8.2.1. Prova-se usando a dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais que $\Gamma_p = \{p\}$ ou $\Gamma_p \setminus \{p\}$ é aberto. Se p é um poço atrator, então Γ_p contém uma vizinhança de p .

Lema 8.2.1. Existem produto interno $((,))$ em \mathbb{R}^n , vizinhança $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$ de X e raio positivo $r > 0$ tais que se $Y \in \eta$, então Y possui uma única singularidade $p(Y)$ em \mathbb{D}^n , que está localizada na bola $\tilde{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, ((x, x)) \leq r^2\}$. Tal singularidade é um poço atrator, $\tilde{B}(0, r)$, que contém a bacia de atração de $\Gamma_{p(Y)}$ e é positivamente invariante pelo fluxo de Y .

Demonstração. Usando a caracterização dos atratores que demos anteriormente, obtemos a existência de um produto interno $((,))$ em \mathbb{R}^n com a propriedade de que existem $r > 0, \delta > 0$ tais que $0 < ((x, x)) \leq r^2 \implies ((X(x), x)) < \delta((x, x))$. Em particular, $\tilde{B}(0, r/2) \subset \Gamma_0$ está na bacia de atração da origem, e $X(x)$ aponta para dentro ao longo do bordo $\partial\tilde{B}(0, r/2)$. Assim, podemos obter vizinhança $\eta_1 \subset \mathcal{X}^1(U)$ de X tal que $Y \in \eta_1 \implies Y$ também aponta para dentro ao longo de $\partial\tilde{B}(0, r/2)$. Denotemos por $\|\cdot\|$ a norma induzida por $((,))$ em \mathbb{R}^n . Podemos obter $\epsilon \in]0, r/2[, \nu > 0$ tais que $\|x\| < \epsilon \implies \tilde{B}(0, r/2) \subset \tilde{B}(x, \nu) \subset \tilde{B}(0, r)$. Finalmente notemos que, dado $Y \in \eta_1$, temos para $x \in \tilde{B}(p(Y), \nu)$ vale

$$\begin{aligned} ((Y(x), x - p(Y))) &= ((X(x - p(Y)), x - p(Y))) \\ &\quad + ((Y(x) - X(x - p(Y)), x - p(Y))) \\ &\leq \delta \|x - p(Y)\|^2 + ((Y(x) - X(x - p(Y)), x - p(Y))). \end{aligned}$$

Agora, como $Y(x) - X(x - p(Y))$ se anula em $x = p(Y)$ e a norma de sua derivada é majorada por

$\|D(Y(x) - X(x - p(Y)))\| \leq \|DY(x) - DX(x)\| + \|DX(x) - DX(x - p(Y))\|$
temos que (como $\|X - Y\|_1 \rightarrow 0 \implies \|DX(x) - DY(x)\| \rightarrow 0, x - p(Y) \rightarrow 0$ e, logo, também $\|DX(x) - DX(x - p(Y))\| \rightarrow 0$ uniformemente na bola $\tilde{B}(0, r)$), se $\|X - Y\|_1$ é pequena o suficiente então $Y(x) - X(x - p(Y))$ vai ter constante de Lipschitz pequena o suficiente, de modo a garantir que, dado qualquer $\delta_1 > \delta$, podemos obter

$$((Y(x), x - p(Y))) \leq \delta_1 \|x - p(Y)\|^2.$$

Desse modo, podemos (intersectando essa nova vizinhança com a vizinhança η_1 anteriormente obtida) obter vizinhança $X \in \eta \subset \mathcal{X}^1(U)$ tal que $Y \in \eta \implies \Gamma_{p(Y)} \supset \tilde{B}(p(Y), \nu)$, e também Y aponta para dentro ao longo de $\partial\tilde{B}(0, r/2)$. Isso prova o lema. \square

Prova do Teorema 8.2.2. Suporemos (apenas por simplicidade da notação) que o produto interno (\cdot, \cdot) do lema anterior coincide com o euclidiano. Primeiro observemos que as trajetórias orientadas de X não escapam de \mathbb{D}^n por causa da orientação de X ao longo do bordo compacto $\partial\mathbb{D}^n$. Desse modo, \mathbb{D}^n é positivamente invariante e existem $r > 0$ e vizinhança $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$ como no lema anterior de modo que $Y \in \eta \implies Y$ aponta para dentro ao longo de $\partial\mathbb{D}^n$. Assim, \mathbb{D}^n é positivamente invariante também para $Y \in \eta$. Existe cobertura aberta finita $U_j, j = 1, \dots, k$ de $\partial\mathbb{D}^n$ tal que $U_j \subset U, \exists t_j > 0$ com $y \in U_j, t \geq t_j \implies |X_t(y)| < r$. Seja, então, $t_0 \geq t_j, \forall j = 1, \dots, k$. Desse modo, $t \geq t_0 \implies X_t(\mathbb{D}^n \setminus \text{Int } B(0, r)) \subset B(0, r)$. Mas, então, a continuidade das soluções com respeito aos coeficientes da equação diferencial nos garante que se diminuirmos suficientemente a vizinhança η podemos supor que $Y \in \eta \implies Y_t(\mathbb{D}^n \setminus \text{Int } B(0, r)) \subset B(0, r), \forall t \geq t_0$. Mas, então, $x \in \mathbb{D}^n \implies Y_{t_0}(x) \in B(0, r) \implies Y_{t_0} \in \Gamma_p(Y)$ e, logo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y_t(x) = p(Y), \forall x \in \mathbb{D}^n \quad (8.1)$$

Além disso, podemos concluir que $y \in \mathbb{D}^n \setminus \{p(Y)\} \implies y = Y_t(x)$ para algum $t \geq 0$ e algum $x \in \partial\mathbb{D}^n$.

Assim, as aplicações de fluxo $\tilde{Y}, \tilde{X}: [0, \infty[\times \partial\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ definidas por $\tilde{Y}(t, x) = Y_t(x)$ e $\tilde{X}(t, x) = X_t(x)$ respectivamente, têm como imagem $\mathbb{D}^n \setminus \{p(Y)\}$ e $\mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ respectivamente. Fixamos agora $Y \in \eta$. Definimos, então (pensando na ideia original da prova), a aplicação

$$h: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n, h(x) = \tilde{Y} \circ (\tilde{X})^{-1}(x), x \neq 0, h(0) = p(Y).$$

Então $h(X_t(x)) = Y_t(x), \forall x \in \partial\mathbb{D}^n, t \geq 0$. Temos que h é sobrejetiva e sua continuidade fora da origem é garantida pela continuidade dos fluxos e de suas inversas. A continuidade de h na origem é garantida pela condição (8.1) acima. Como podemos definir a inversa de h simplesmente permutando X e Y na construção acima, temos que h^{-1} é contínua e, logo, h é um homeomorfismo conjugando os fluxos de X e Y , como queríamos. \square

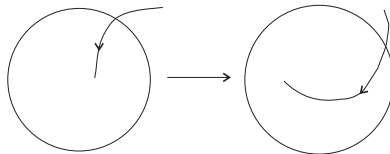


Figura 8.2: Conjugação dos campos X e Y

A respeito da estabilidade estrutural não poderíamos deixar de citar o seguinte resultado clássico *em dimensão 2* devido a M. Peixoto (ver Peixoto (1969)):

Seja $\mathcal{X}_0^1(U)$ o subconjunto de $\mathcal{X}^1(U)$ dos campos que apontam para dentro de \mathbb{D}^2 .

Teorema 8.2.3 (M. Peixoto, Peixoto (ibid.)). O conjunto dos campos $X \in \mathcal{X}_0^1(U)$ que são estruturalmente estáveis em \mathbb{D}^2 é aberto e denso em $\mathcal{X}_0^1(U)$. Esse conjunto é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- (i) as singularidades de X são hiperbólicas e não há ligações de selas.
- (ii) as órbitas fechadas são atratores periódicos ou repulsores periódicos.

Parte II

Equações diferenciais em variedades diferenciáveis

9

Introdução às EDOs em Variedades Diferenciáveis

Nesta segunda parte do texto, estudaremos equações diferenciais, campos de vetores e dinâmica em ambientes mais gerais do que estudados até o momento. Ou seja, estamos partindo do mundo composto apenas por abertos de espaços e superfícies regulares para o universo das superfícies abstratas, ou seja, das variedades diferenciáveis. Esse modelo de ambiente é mais geral e comporta mais exemplos e modela mais situações, uma vez que nem sempre é claro que um espaço de parâmetros no qual se considera um sistema dinâmico, seja uma superfície regular em algum espaço euclidiano de forma natural.

Com esse objetivo, desenvolvemos o material necessário para o estudo proposto. Começamos com as definições e principais propriedades e construções das variedades diferenciáveis, seguindo para as pedras fundamentais da Teoria das Variedades Diferenciáveis. O leitor que até aqui chegou é convidado a seguir e apreciar os temas propostos no restante deste texto.

9.1 Espaços topológicos e funções contínuas

Ideias são fundamentais, sem elas a ciência não avança. Porém, as ideias podem se perder se não as colocamos devidamente. Para isso, é necessário termos uma boa linguagem, que em sistemas dinâmicos e geometria depende de noções de topologia bem estabelecidas. Vamos a esse tema então.

9.1.1 Topologias

Nesta seção, introduzimos a noção e as propriedades básicas dos espaços topológicos. Seja X um conjunto de pontos.

Definição 9.1.1 (Topologia). Uma *topologia* em X é uma coleção τ de partes de X , chamadas *conjuntos abertos*, com as seguintes propriedades:

- (i) \emptyset e X pertencem a τ .
- (ii) Se A_1, \dots, A_n são em τ , então a intersecção $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.
- (iii) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma coleção cujos elementos são em τ , então $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$.

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) onde τ é a topologia em X . Dizemos que o espaço topológico é *Hausdorff* se para qualquer par de pontos distintos, $x \neq y$ em X , existem conjuntos abertos $U, V \in \tau$ com $x \in U, y \in V$ e temos $U \cap V = \emptyset$. Em outras palavras, é possível separar pontos em X usando o conjuntos abertos de τ .

Exemplo 9.1.1. Dado qualquer conjunto de pontos X , podemos introduzir a *topologia caótica* cujos únicos conjuntos abertos são \emptyset, X .

A ideia que a topologia é um tipo de medida em um conjunto nos diz que essa topologia, sempre definida, é não muito interessante. Podemos procurar por topologias mais finas.

Exemplo 9.1.2. Seja (X, d) uma *espaço métrico*. Isto significa que no conjunto X temos definida uma função $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ com as propriedades seguintes:

- (i) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$.

Um bom exemplo é dado por $X = \mathbb{R}^n$ e $d =$ distância euclideana. Então (X, d) admite topologia naturalmente definida, induzida pela métrica d . O conjunto abertos da qual são definidos como segue: um subconjunto $U \subset X$ é *aberto* se para qualquer $p \in U$ existe $\delta > 0$ tal que a bola $\{x \in X, d(x, p) < \delta\}$ é contida em U .

A topologia é chamada *metrizável* quando existe uma métrica $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ em X cuja topologia induzida coincide com a original. Nem todas topologias são metrizáveis. Uma questão interessante em Análise Funcional é decidir se certas topologias em espaços duais a um espaço de Banach são metrizáveis.

A fim de introduzir uma topologia em X não é necessário descrever todos os seus conjuntos abertos, basta descrever uma *base* de conjuntos abertos.

Definição 9.1.2. Uma *base de conjuntos abertos* em um espaço topológico (X, τ) é uma coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ com a seguinte propriedade: *qualquer subconjunto aberto* $A \in \tau$ *se escreve como uma união* $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ *de elementos* $B_\lambda \in \mathcal{B}$.

Proposição 9.1.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. A coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base se e somente se para qualquer conjunto aberto $A \in \tau$ e ponto qualquer $a \in A$ existe $B_a \in \mathcal{B}$ com $a \in B_a$ e $B_a \subset A$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base. Sejam $A \in \tau$ um conjunto aberto e $a \in A$ um ponto. Como \mathcal{B} é uma base temos que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ onde $B_\lambda \in \mathcal{B}$ e como $a \in A$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $B_\lambda \in \mathcal{B}$ com $a \in B_\lambda \subset A$. Basta tomar $B_a = B_\lambda$. Reciprocamente, seja $A \in \tau$ um conjunto aberto. Por hipótese, para cada $a \in A$ existe $B_a \in \mathcal{B}$ com $a \in B_a \subset A$. Logo $\{a\} \subset B_a \subset A$ e portanto $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subset \bigcup_{a \in A} B_a \subset A$, donde $A = \bigcup_{a \in A} B_a$. \square

Usando essas mesmas ideias podemos enunciar:

Proposição 9.1.2. Dada uma coleção \mathcal{B} de partes de X , podemos construir uma topologia em X tendo \mathcal{B} como uma base se e somente se:

1. Para qualquer $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$.
2. Se $x \in B_1 \cap B_2$ com $B_j \in \mathcal{B}$, então existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Exemplo 9.1.3 (Topologia produto). Sejam agora $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ espaços topológicos. No produto cartesiano $X = X_1 \times \dots \times X_n$, podemos introduzir a *produto topologia* com uma base dada pela coleção $\mathcal{B} = \tau_1 \times \dots \times \tau_n$. Usando o Proposição 9.1.2 acima, concluímos que efetivamente \mathcal{B} induz uma topologia em X .

Por exemplo, a topologia canônica em \mathbb{R}^n (dada pela euclidiana distância) é a topologia produto associada a n cópias da topologia canônica em \mathbb{R}^1 ou também em \mathbb{R}^{n-m} e \mathbb{R}^m . Se todas o fatores (X_j, τ_j) são Hausdorff, então o produto topologia é também Hausdorff.

9.1.2 Aplicações contínuas

A noção de continuidade se estende de um espaço euclidiano para aplicações entre espaços topológicos em um modo natural:

Seja $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \eta)$ uma aplicação entre espaços topológicos. Quando não houver risco de confusão, omitiremos as topologias da notação e a denotaremos simplesmente por $f : X \rightarrow Y$.

Definição 9.1.3. A aplicação $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* se para qualquer subconjunto aberto $V \subset Y$ a imagem inversa $f^{-1}(V) \subset X$ é um conjunto aberto. Isto equivale ao seguinte fato:

Dados $x \in X$ e conjunto aberto $f(x) \in V \subset Y$, existe conjunto aberto $U \subset X$ com $f(U) \subset V$.

Definição 9.1.4. Um *homeomorfismo* $h : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e bijetiva de X sobre Y , cuja inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.

9.1.3 Espaços quociente

Muitos exemplos de espaços topológicos são obtidos de aplicações e espaços com uma topologia original no domínio ou contradomínio de tais aplicações. Vejamos os exemplos mais comum entre todos:

Exemplo 9.1.4 (Topologia induzida). Seja X um espaço topológico e E qualquer conjunto de pontos com uma aplicação $f : E \rightarrow X$. Seja τ a coleção das imagens inversas $f^{-1}(U)$ onde $U \subset X$ é um conjunto aberto. Então τ define a topologia em E , chamada de *topologia induzida* por f . Claramente $f : E \rightarrow X$ se torna a aplicação contínua. Qualquer topologia em E , que faz f uma aplicação contínua, deve conter essa topologia induzida. Assim, diremos que *a topologia induzida* é *a mais fina* topologia em E que faz f contínua.

Se consideramos o caso onde $E \subset X$ e f é a aplicação de inclusão $E \rightarrow X$, $f(x) = x$; então E se torna um *subespaço topológico* de X . Se X é Hausdorff com base enumerável, então o mesmo vale para qualquer subespaço $E \subset X$.

Exemplo 9.1.5 (Topologia coinduzida). Seja agora $\pi: X \rightarrow E$ uma aplicação de um espaço topológico X em qualquer conjunto E . Seja τ a coleção de subconjuntos $U \subset E$ tal que $\pi^{-1}(U) \subset X$ é aberto. Então τ é a topologia em X chamada de *topologia coinduzida* pela aplicação π . Claramente $\pi: X \rightarrow E$ se torna uma aplicação contínua e qualquer outra topologia que faz π contínua deve estar contida na topologia coinduzida: *a topologia coinduzida é a mais fina topologia que faz π contínua*.

Sejam agora X, Z espaços topológicos e $f: E \rightarrow Z, \pi: X \rightarrow E$ aplicações. Munimos E com a topologia coinduzida dada por π . A aplicação $f: E \rightarrow Z$ é contínua se e somente se $f \circ \pi: X \rightarrow Z$ é contínua.

Exemplo 9.1.6 (Topologia quociente). Seja X um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência em X . Denote por \overline{X} o espaço quociente X/\sim . Seja $\pi: X \rightarrow \overline{X}$ a projeção canônica, $\pi(x) = [x]$. Em \overline{X} , consideramos a topologia coinduzida por π . Isto é, a *topologia quociente* de acordo com essa é um subconjunto $A \subset \overline{X}$ aberto se e somente se $\pi^{-1}(A) \subset X$ é aberto. Podemos aplicar essa construção à seguinte situação geral: seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua sobrejetiva entre espaços topológicos. Em X , podemos considerar a relação de equivalência: $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Então, denotando por $\pi: X \rightarrow \overline{X}$ a projeção canônica como acima encontramos, existe a única aplicação $\overline{f}: \overline{X} \rightarrow Y$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. Desde que $\overline{f} \circ \pi = f: X \rightarrow Y$ é contínua e \overline{X} tem a topologia coinduzida por π , segue-se que \overline{f} é contínua. Além disso, claramente \overline{f} é bijetiva.

Proposição 9.1.3. $\overline{f}: \overline{X} \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se e somente se a topologia em Y é a coinduzida por f .

Demonstração. Exercício! □

Definição 9.1.5 (Sistema fundamental de vizinhanças). Dados um espaço topológico X e um ponto $x \in X$, dizemos que um subconjunto $x \in V \subset X$ é uma *vizinhança* de x se existe um aberto $U \subset X$ com $x \in U \subset V$. Uma coleção \mathcal{V} de vizinhanças de x é um *sistema fundamental de vizinhanças* de x se, dada qualquer vizinhança $W \subset X$ de x , existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset W$.

9.1.4 Espaços topológicos compactos e conexos

Seja X um espaço topológico (omitimos a topologia τ da notação). Seja $A \subset X$ um subconjunto. Uma *cobertura* de A é uma coleção $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de X tal que $A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. A cobertura é uma *cobertura aberta* se temos U_λ

aberto para todo $\lambda \in \Lambda$. Uma subcoleção de uma cobertura que seja também uma cobertura será chamada de uma *subcobertura*. Dadas duas coberturas $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ e $\mathcal{V} = \{V_j, j \in J\}$ de X , dizemos que \mathcal{V} é *mais fina* que \mathcal{U} se para qualquer $j \in J$ existe $i(j) \in I$ tal que $V_j \subset U_{i(j)}$.

Definição 9.1.6. Um espaço topológico X chama-se *compacto* quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita. Um subconjunto $S \subset X$ de um espaço topológico chama-se *subconjunto compacto* quando, com a topologia induzida de X , S é um espaço topológico compacto

Um subconjunto $F \subset X$ de um espaço topológico é *fechado* se o complementar $X \setminus F$ é aberto.

Proposição 9.1.4. Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto. Se X é Hausdorff, qualquer subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X .

Demonstração. Seja $F \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ uma cobertura de F por abertos $U_\lambda \subset X$. Logo $X \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \cup (X \setminus F)$. Como X é compacto, existe uma cobertura finita $X = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} \cup (X \setminus F)$. Desde que $F \cap (X \setminus F) = \emptyset$ temos que $F \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$, o que prova a compacidade de F . Por outro lado, suponhamos que X é Hausdorff e $K \subset X$ compacto. Seja $x \in X \setminus K$. Para cada $y \in K$, como $x \neq y$ e X é Hausdorff existem abertos $A_y \ni x$ e $B_y \ni y$ tais que $A_y \cap B_y = \emptyset$. Obtém-se dessa maneira uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{y \in K} B_y$ e como K é compacto existe uma subcobertura finita $K \subset B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$. Correspondentemente, definimos $A = A_{y_1} \cap \dots \cap A_{y_n}$. Claramente A é aberto e $x \in A \subset X \setminus K$. \square

Definição 9.1.7. Um espaço topológico X chama-se *conexo* quando \emptyset e X são os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados. Um subconjunto $S \subset X$ de um espaço topológico chama-se *subconjunto conexo* quando, com a topologia induzida de X , S é um espaço topológico conexo.

Proposição 9.1.5. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então $f(K) \subset Y$ é compacto para qualquer compacto $K \subset X$. Também $f(A) \subset Y$ é conexa para qualquer subconjunto $A \subset X$ conexo.

Demonstração. Dada cobertura aberta de $f(K) \subset Y$, a pré-imagem dessa é uma cobertura aberta do compacto K , pois f é contínua. Como K é compacto, podemos escolher entre os abertos desta pré-imagem uma subcobertura finita e a imagem dessa subcobertura por f é uma cobertura finita de K . Por outro lado,

como ser conexo é uma propriedade intrínseca do espaço topológico A (isto é, não depende do espaço X onde A está contido), basta considerar o caso $A = X$ e $f(A) = Y$. Assim, suponhamos que X é conexo e $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua sobrejetiva. Vamos mostrar que Y é conexo. Caso contrário, existirá um subconjunto B aberto e fechado, diferente de \emptyset e Y . Considerando $A = f^{-1}(B)$, teríamos que A é aberto e fechado em X , pois f é contínua. Além disso, $A \neq X$ pois $B \neq Y$ e $A \neq \emptyset$ pois $B \neq \emptyset$ e f é sobrejetiva. Isto contradiz a conexidade de X . \square

Definição 9.1.8. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é chamada *aplicação própria* se $f^{-1}(K) \subset X$ é compacto para qualquer subconjunto compacto $K \subset Y$.

Uma *sequência* num conjunto X é uma aplicação definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dos números inteiros positivos tomando valores em X . A cada inteiro $n \in \mathbb{N}$ a sequência faz corresponder um elemento de X , que denotaremos com x_n e chamaremos o n -ésimo termo da sequência. A própria sequência é denotada com as notações (x_n) ou $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Uma *subsequência* $(x_{n'})$ em X é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ do conjunto \mathbb{N} . Uma subsequência é denotada pelas notações (x_{n_k}) , $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$.

Seja (x_n) um sequência num espaço topológico X . Diremos que (x_n) *converge* para o ponto $x \in X$, e denotaremos $x = \lim x_n$, quando para todo aberto A contendo o ponto x for possível obter um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implique $x \in A$.

Uma sequência (x_n) em um espaço topológico X é dita *divergente* se não possui subsequência convergente em X .

Proposição 9.1.6. Seja X um espaço métrico. Então:

1. Dado $x \in X$, $\{x\}$ é compacto.
2. Seja $K \subset X$ compacto. Toda sequência $(x_n) \subset K$ possui subsequência convergente.

Demonstração. Exercício. \square

Proposição 9.1.7. Seja $f : X \rightarrow Y$ aplicação contínua entre espaços métricos.

1. Se f é própria, então $f^{-1}(y)$ é compacto para qualquer $y \in Y$, e f leva as sequências divergentes em sequências divergentes.

2. f leva a subconjuntos fechados de X sobre subconjuntos fechados de Y , isto é, f é uma *aplicação fechada*.

Demonstração. Exercício. □

9.2 Superfícies no espaço euclidiano

A noção de superfície (regular) no espaço euclidiano permite estendermos, para essa classe de subconjuntos do espaço euclidiano, a noções de diferenciabilidade e seus resultados relacionados enunciados inicialmente para subconjuntos abertos do espaço euclidiano. Tal noção surge naturalmente quando consideramos problemas físicos como o movimento de objetos, planetas e outros. Nesta seção, recordamos a definição e propriedades básicas das superfícies regulares. Usaremos isso como motivação para a noção variedade diferenciável, a ser introduzida posteriormente.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. Recordamos a definição de superfície regular já mencionada neste texto:

Definição 9.2.1 (Superfície regular). Dizemos que M é uma *superfície regular* (*superfície*) de dimensão m se para cada ponto $p \in M$ existem uma vizinhança aberta $V_p \ni p$ em \mathbb{R}^n e uma aplicação $\varphi_p: U_p \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V_p$, onde $U_p \subset \mathbb{R}^m$ é um subconjunto aberto com as seguintes propriedades:

- (i) $\varphi_p: U_p \rightarrow V_p \cap M$ é um homeomorfismo.
- (ii) $\varphi_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável, que é também uma imersão.

Dizemos que (φ_p, U_p) é uma *parametrização* ou *carta local* de M no ponto $p \in M$.

A superfície M é de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$) se as parametrizações (φ_p, U_p) podem ser escolhidas de classe C^k , de modo que as imagens $V_p \cap M$ ainda cobrem M . Claro que, não necessariamente todas as parametrizações de uma dada superfície são de classe C^k . Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m . Um *atlas* de M é uma coleção de parametrizações cujas imagens formam uma cobertura da superfície M .

O Lema de Zorn mostra a existência de um *atlas maximal*, isto é, um atlas que contém todas as possíveis parametrizações da superfície.

Note que, como espaço topológico, a superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é apenas um subespaço de \mathbb{R}^n com a topologia euclidiana. Em outras palavras, M carrega a topologia induzida de \mathbb{R}^n .

Daremos agora alguns exemplos importantes de superfícies euclidianas:

Exemplo 9.2.1. Uma superfície de dimensão zero $M^0 \subset \mathbb{R}^n$ é apenas um conjunto de pontos isolados.

Exemplo 9.2.2. Qualquer subconjunto aberto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão n e classe C^∞ . De fato, podemos tomar como um atlas C^∞ aquele dado pela inclusão $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exemplo 9.2.3. Qualquer hiperplano

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{j=1}^n a_j x_j = 0 \right\}$$

é uma superfície de codimensão um e classe C^∞ em \mathbb{R}^n . De fato, podemos supor que $a_n \neq 0$ e considerar a parametrização $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow H$ dada por $(t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto \left(t_1, \dots, t_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} t_j \right)$.

Exemplo 9.2.4. A esfera euclidiana $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície de classe C^∞ e codimensão um. Provamos isso como segue: Dadas coordenadas afins $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, podemos escrever $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}); \sum x_j^2 = 1\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$, definimos os subconjuntos abertos $V_j^+ = \{x_j > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e $V_j^- = \{x_j < 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos $\varphi_j^\pm: \mathbb{B}^n(0, 1) \rightarrow V_j^\pm$, onde $\mathbb{B}^n(0, 1)$ é o a bola unitária aberta centrada na origem de \mathbb{R}^n , como segue:

$$\varphi_j^\pm(y_1, \dots, y_n) := \left(y_1, \dots, y_{j-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n y_k^2}, y_{j+1}, \dots, y_n \right).$$

Então a coleção φ_j^\pm nos dá o atlas desejado com $2(n+1)$ cartas (exercício!).

O exemplo anterior é também um caso particular do seguinte resultado:

Proposição 9.2.1. Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^r , $r \geq 1$, e seja $q \in \mathbb{R}^k$ um valor regular de f , com $f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Então a pré-imagem $M = f^{-1}(q)$ é uma superfície de codimensão k e classe C^r em \mathbb{R}^n , contida em U .

Demonstração. Utilize a Forma Local das Submersões para obter as parametrizações locais da superfície de nível. \square

Vejam agora algumas propriedades das superfícies que motivam a noção de variedade diferenciável.

Proposição 9.2.2. Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k ($k \geq 1$) e $\varphi: U_1 \rightarrow V_1, \psi: U_2 \rightarrow V_2$ duas parametrizações de M , com $V_1 \cap V_2 \cap M \neq \emptyset$. Então a *mudança de coordenadas* $\psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V_1 \cap V_2)}: \varphi^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow \psi^{-1}(V_1 \cap V_2)$ é a C^k difeomorfismo, entre subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n .

Demonstração. A sutileza aqui é que não se pode aplicar de imediato a Regra da Cadeia, pois ψ^{-1} está definida em um conjunto que não é necessariamente um aberto de \mathbb{R}^n . Entretanto, utilizaremos o seguinte lema auxiliar (aplicação da Forma Local das Imersões) nas coordenadas de φ .

Lema 9.2.1. Seja $\psi: U \rightarrow V$ parametrização de $M \supset V$ e seja $g: W \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow V$ aplicação de classe C^r , $r \geq 1$. Então a composta $\psi^{-1} \circ g: W \rightarrow U$ é de classe C^r e vale também $(\psi^{-1} \circ g)'(x) = (\psi'(y))^{-1} \cdot g'(x)$, onde $x \in W$, $y = \psi^{-1}(g(x)) \in U$.

Prova do Lema 9.2.1. Pela Forma Local das Imersões, para cada ponto $q \in V \cap M$, existe uma aplicação C^r ; $\xi: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida numa vizinhança $A \ni q$ em \mathbb{R}^m tal que

$$\xi|_{A \cap V \cap M} = \psi^{-1}|_{A \cap V \cap M}.$$

Assim, $\psi^{-1} \circ g = \xi \circ g$ em $A \cap V \cap M$, e podemos aplicar a Regra da Cadeia. \square

A proposição segue de imediato do lema. \square

Como veremos em seguida, essa propriedade juntamente com a topologia, será suficiente para estendermos a noção de superfície.

9.3 O conceito de variedade diferenciável

Considere o conjunto $\mathbb{P}(n)$ cujos elementos são as retas $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que passam pela origem. Daremos a esse conjunto uma estrutura diferenciável. Primeiro notamos que cada elemento $L \in \mathbb{P}(n)$ intersecta a esfera \mathbb{S}^n em exatamente dois pontos, pontos antípodas. Retas distintas intersectam a esfera em pontos distintos. Reciprocamente, por quaisquer dois pontos antípodas na esfera, passa uma única

$L \in \mathbb{P}(n)$. Assim, temos uma bijeção natural $\mathbb{P}(n) \longleftrightarrow \mathbb{S}^n / \sim$, onde \sim é relação de equivalência $p, q \in \mathbb{S}^n$; $p \sim q \iff p = -q$. Usamos esta bijeção e equipamos $\mathbb{P}(n)$ com a topologia quociente, de modo que $\mathbb{P}(n)$ é um espaço compacto Hausdorff, tendo recobrimento de grau dois pela esfera. A questão agora é: *É possível considerar funções diferenciáveis em $\mathbb{P}(n)$?*

A resposta é naturalmente positiva, uma vez que podemos usar as parametrizações da esfera e os homeomorfismos locais dados pelo recobrimento $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}(n)$.

Damos agora a generalização anunciada:

Definição 9.3.1 (Atlas diferenciável). Seja M um espaço topológico Hausdorff, tendo uma base enumerável de subconjuntos abertos. Um *atlas diferenciável* de dimensão m para M , é uma coleção de homeomorfismos $\varphi_j : U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^m$ ($j \in J$), entre subconjuntos abertos, de modo que:

$$(i) \quad M = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

(ii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a *mudança de coordenadas* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é um difeomorfismo entre subconjuntos abertos de \mathbb{R}^m .

Se as mudanças de coordenadas são de classe C^k , então dizemos que M é uma variedade diferenciável de classe C^k .

Dado um atlas \mathcal{A} de classe C^k para M como acima, dizemos que um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ onde $U \subset M$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ é *admissível* ou *compatível* com \mathcal{A} , se para todo $U_j \cap U \neq \emptyset$ temos que as mudanças de coordenadas associadas $\varphi \circ \varphi_j^{-1}$ e $\varphi_j \circ \varphi^{-1}$ são difeomorfismos de classe C^k . Nesse caso, adicionamos φ ao atlas \mathcal{A} e obtemos um novo atlas de classe C^k para M . Usando esta observação e o Lema de Zorn, podemos provar a existência de um atlas *maximal* de \mathcal{A} para M , contendo \mathcal{A} e todas as cartas compatíveis de classe C^k .

Definição 9.3.2 (Variedade diferenciável). Uma *variedade diferenciável* de dimensão m e classe C^k é um espaço topológico Hausdorff M com uma base enumerável de conjuntos abertos, equipado com um atlas maximal de classe C^k e dimensão m , digamos, $\mathcal{A} = \{\varphi_j : U_j \rightarrow V_j\}_{j \in J}$.

Proposição 9.3.1. Se um espaço topológico M admite um atlas de dimensão m , então qualquer atlas para M é de dimensão m .

Essa proposição é a consequência do chamado *Teorema da Invariância de Brower Greenberg* (1967).

A fim de exemplificar a noção de variedade, observamos que:

Proposição 9.3.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular de dimensão m e classe C^k , então M admite uma estrutura natural de variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m , de fato esse atlas para M é dado pelas aplicações inversas das parametrizações de M .

Demonstração. Exercício! □

Um primeiro exemplo não trivial de variedade é o seguinte:

Exemplo 9.3.1. O espaço projetivo $\mathbb{P}(n)$ tem uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ .

Mais adiante, veremos que esse exemplo é um caso particular de quociente de um variedade por uma certa ação de um grupo de homeomorfismos nesse espaço. Mas, antes disto, introduziremos a noção de diferenciabilidade em variedades.

Proposição 9.3.3. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de classe C^r , então o produto $M \times N$ admite uma estrutura natural de variedade diferenciável de classe C^r e dimensão $m + n$.

Demonstração. Em $M \times N$, consideramos a topologia produto gerada pelos abertos da forma $U \times V$ onde $U \subset M$ e $V \subset N$ são abertos. Dado atlas $\{\varphi_j \subset M : U_j \rightarrow \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$ de M e $\{\psi_k \subset N : V_k \rightarrow \psi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^n\}_{k \in K}$ de N , temos que as *aplicações produto* $\varphi_j \times \psi_k : U_j \times V_k \rightarrow \varphi_j(U_j) \times \psi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, onde $j \in J$ e $k \in K$ formam um atlas de classe C^k de $M \times N$ cujas mudanças de coordenadas também são do tipo produto (verifique!). □

Um modo importante de definição de variedades é o seguinte:

Proposição 9.3.4. Sejam M qualquer conjunto de pontos e $\{\varphi_j : U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^m\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma coleção de aplicações bijetivas tal que:

- (i) $V_j \subset \mathbb{R}^m$ é aberto para todo $j \in \mathbb{N}$.
- (ii) $M = \cup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ e se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ são subconjuntos abertos de \mathbb{R}^m , além disso, a mudança de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k entre esses conjuntos abertos.

Então M admite uma única estrutura de espaço topológico (não necessariamente Hausdorff), tal que tenha coleção $\{\varphi_j : U_j \rightarrow V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ a C^k atlas. Se esta topologia é Hausdorff, então temos uma variedade diferenciável.

Demonstração. Para definir a topologia em M definimos os seus abertos: um conjunto $U \subset M$ será *aberto* se $\varphi_j(U \cap U_j)$ for aberto em \mathbb{R}^n para todo $j \in \mathbb{N}$. Como a cobertura $M \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$ é enumerável, segue que essa topologia em M tem base enumerável de abertos. Para que a topologia em M seja Hausdorff, se necessita da seguinte condição:

- (iii) $\forall U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e para toda sequência $p_\nu \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ com $p_\nu \rightarrow p \in \varphi_i(U_i \setminus U_j)$ não se tem $(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(p_\nu) \rightarrow p' \in \varphi_j(U_j \setminus U_i)$ para alguma subsequência (p_{ν_μ}) de (p_ν) .

Para verificar que a coleção acima de fato define um atlas e, portanto, uma estrutura de variedade, basta usar as propriedades de interseção de abertos de \mathbb{R}^n . \square

Seja M um espaço topológico Hausdorff com uma base enumerável de conjuntos abertos.

Definição 9.3.3. Uma *estrutura diferenciável* em M é uma coleção de bijeções $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$ onde:

- (a) $M = \bigcup_j U_j$ é uma cobertura aberta de M .
- (b) Cada aplicação $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$ é um homeomorfismo de $U_j \subset M$, sobre um conjunto aberto $V_j \subset \mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ fixado.
- (c) Se $U_j \cap U_i \neq \emptyset$, então a aplicação $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_j \cap U_i) \rightarrow \varphi_i(U_j \cap U_i)$ é uma aplicação diferenciável entre conjuntos abertos de \mathbb{R}^n .

Dizemos que a estrutura diferenciável é *de classe C^r* onde $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se a aplicações $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_j \cap U_i) \rightarrow \varphi_i(U_j \cap U_i)$, são todas de classe C^r . Essas aplicações são chamadas *mudanças de coordenadas* na estrutura diferenciável. O número n é o *dimensão* das estrutura diferenciável, sendo (obviamente) a dimensão de M como um espaço topológico. No caso $r = 0$, a terminologia diferenciável significa contínua, e temos a *variedade topológica*.

Neste capítulo, estaremos lidando com variedades diferenciáveis, usualmente de classe C^∞ . Note que podemos considerar variedades analíticas reais da mesma forma, com a mesma definição acima para $r = \omega$.

Definição 9.3.4. Uma *variedade diferenciável* é um par $(M, \{\varphi_j : U_j \rightarrow V_j\}_{j \in J})$, onde M é um espaço topológico como acima, e $\{\varphi_j : U_j \rightarrow V_j\}_{j \in J}$ é uma estrutura diferenciável em M . A classe de diferenciabilidade da variedade é aquela de sua estrutura diferenciável. Dada uma variedade diferenciável como acima, e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de algum subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, então dizemos que $\varphi : U \rightarrow V$ é *compatível* com a estrutura diferenciável se, para qualquer aplicação $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$, tal que $U \cap U_j \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas associada $\varphi \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U) \rightarrow \varphi(U_j \cap U)$ é uma aplicação diferenciável da mesma classe da variedade.

Usando o Lema de Zorn, não é difícil provar que cada variedade diferenciável admite um *atlas maximal*, uma estrutura diferenciável na variedade que contém todas as aplicações compatíveis como acima. Assim, podemos definir uma *variedade diferenciável* como um par (M, \mathcal{A}) , onde M é um espaço topológico como acima e \mathcal{A} é um atlas maximal definindo uma estrutura diferenciável em M .

Observação 9.3.1. Um dado espaço topológico pode admitir, mesmo com sua topologia fixada, mais de uma estrutura diferenciável.

Como estamos fixando a estrutura diferenciável de uma dada variedade, a denotaremos simplesmente por M ou M^n , onde n é a dimensão de M , definido como acima.

Os elementos de um atlas maximal de M são chamadas *sistemas de coordenadas* ou *cartas* de M . A seguinte observação é uma consequência imediata das definições acima:

Observação 9.3.2. Sejam M^n uma variedade diferenciável e $p \in M$ ponto qualquer. Dada qualquer vizinhança aberta $V \ni p$ em M , existe uma carta de M , digamos, $\varphi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$, tal que $p \in U \subset V$ e também $\varphi(p) = 0$. Podemos também assumir que $W = \mathbb{B}_1^n$ é a bola unitária em \mathbb{R}^n .

A seguir, alguns exemplos e construções básicas relacionadas às variedades diferenciáveis.

Exemplo 9.3.2. O espaço afim euclidiano \mathbb{R}^n é claramente uma variedade diferenciável de dimensão n , com a estrutura diferenciável dada pela aplicação de inclusão $\varphi : M = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = p$. O atlas maximal para essa variedade consiste de aplicações diferenciáveis entre subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n (exercício!). Esse exemplo é importante para motivar a noção de aplicação diferenciável em uma variedade que iremos introduzir abaixo.

Definição 9.3.5. Dadas uma variedade diferenciável M^n e uma aplicação $f: A \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, em um subconjunto aberto de M , dizemos que f é diferenciável em $p \in A$ se, existe uma carta local $\varphi: U \rightarrow V$, de M com $p \in U$, tal que a composição $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Analogamente, definimos f como sendo de classe C^r em p se a composição é de classe C^r em $\varphi(p)$. A aplicação f é diferenciável em A se é diferenciável em p para todo $p \in A$.

Não difícil ver que podemos supor que o carta local $\varphi: U \rightarrow V$, na definição acima, é uma carta do atlas maximal de M com $p \in U$ (exercício!).

Exemplo 9.3.3. Sejam M uma variedade e $A \subset M$ um subconjunto aberto de M . Consideramos A um espaço topológico com a natural topologia induzida. Então A é naturalmente a variedade da mesma classe e dimensão que M . A estrutura diferenciável para A é obtida considerando-se restrições das cartas $\varphi: U \rightarrow V$ de M , cujos domínios coordenados intersectam A : $A \cap U \neq \emptyset$. Não difícil ver que é um atlas para A (exercício!).

Exemplo 9.3.4. . Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^s$. Então o gráfico de f definido por

$$G(f) := \{(p, f(p)), p \in U\} \subset U \times \mathbb{R}^m$$

é uma variedade da mesma classe que f , de dimensão s . (Exercício!)

Exemplo 9.3.5. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. O produto $M \times N$ é naturalmente uma variedade da mesma classe comum a ambas e dimensão $n + m$.

Um exemplo notável de variedade real analítica é dado pelo espaço projetivo real.

Exemplo 9.3.6 (Espaço projetivo real). Denotamos por \mathbb{S}^n a esfera

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1 \right\}.$$

Em \mathbb{S}^n , definimos a seguinte equivalência:

$$p \sim q \Leftrightarrow p = \pm q.$$

O espaço quociente topológico \mathbb{S}^n / \sim , por essa relação, é o bem conhecido *espaço projetivo real* de dimensão n , denotado por $\mathbb{R}P(n)$. A aplicação projeção

$\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P(n)$ é uma aplicação aberta (exercício!) e, portanto, os subconjuntos $U_j \subset \mathbb{R}P(n)$, dados pelas projeções $\pi(V_j)$ onde $V_j \subset \mathbb{S}^n$ é definido pela condição $x_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n+1$ são subconjuntos abertos que formam um recobrimento de $\mathbb{R}P(n)$. Por outro lado, cada V_j é difeomorfo a \mathbb{R}^n via a aplicação $\varphi_j: V_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_j(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1/x_j, \dots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \dots, x_{n+1}/x_j)$. Além disso, as restrições $\pi|_{V_j}: V_j \rightarrow U_j$ são homeomorfismos. Assim, podemos considerar uma estrutura diferenciável em $\mathbb{R}P(n)$, dadas pelas cartas $\psi_j = \varphi_j \circ (\pi|_{V_j})^{-1}: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, que dão as mesmas mudanças de coordenadas do atlas $\varphi_j: V_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ da esfera. Assim, $\mathbb{R}P(n)$ é munido com uma estrutura natural diferenciável compatível (de algum modo) com a de \mathbb{S}^n . Há outros modos de se introduzir o espaço $\mathbb{R}P(n)$ (Exercício!).

9.4 Aplicações diferenciáveis

Definição 9.4.1 (Aplicação diferenciável). Uma aplicação contínua $f: M \rightarrow N$ entre duas variedades é *diferenciável* (de classe C^k) se para qualquer ponto $p \in M$ existe uma carta $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e uma carta local $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, $f(U) \subset V$ e tal que a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável (de classe C^k).

Observação 9.4.1. Como f é contínua e como a restrição de uma carta local a qualquer subconjunto aberto de seu domínio é também uma carta local, não existe perda de generalidade em pedirmos que $f(U) \subset V$, isto é, apenas para conveniência da notação.

Proposição 9.4.1. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável de classe C^k . Dado qualquer ponto $p \in M$, qualquer carta local $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e qualquer carta local $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$, a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável (de classe C^k).

Em outras palavras, a definição de diferenciabilidade não depende da escolha local de coordenadas em M e N . sendo de fato a razão principal pela qual pedimos que as mudanças de coordenadas sejam difeomorfismos.

Definição 9.4.2 (Representação local). Chamamos a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ uma *representação local* de f em uma vizinhança do ponto p .

Demonstração. De fato, basta observar que duas representações locais $F_1 := \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ e $F_2 := \psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ de f , em um mesmo ponto $a \in M$ com $b =$

$f(a) \in N$, diferem por mudança de coordenadas à esquerda e à direita, mais precisamente temos $F_2 = \psi_2 \circ \psi^{-1} \circ F \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Como as mudanças de cartas são difeomorfismos de classe C^k , segue F_1 é de classe C^k em a se e somente o mesmo vale para F_2 . \square

Uma aplicação entre duas variedades é um *difeomorfismo* se é diferenciável e exibe uma aplicação inversa diferenciável. Tais noções podem ser localizadas com o que se segue:

Proposição 9.4.2. Seja $W \subset M$ um subconjunto aberto de uma variedade. Então W admite uma estrutura natural de variedade diferenciável com a mesma classe e dimensão que M . Além disso, com essa estrutura, a inclusão $i: W \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável.

E também:

Proposição 9.4.3. Sejam M^m uma C^k variedade e $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ um homeomorfismo local sobrejetivo onde \tilde{M} é um espaço topológico (Hausdorff com base enumerável de conjuntos abertos). Então \tilde{M} possui uma estrutura natural de variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m . Além disso, com essa estrutura, π é um difeomorfismo local.

Demonstração. Um atlas para \tilde{M} é assim obtido: dado qualquer ponto $\tilde{p} \in \tilde{M}$, tomamos a projeção $p = \pi(\tilde{p}) \in M$ e cobrimos p com um aberto coordenado $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ de M . Seja $\tilde{U} \ni \tilde{p}$ aberto de \tilde{M} tal que π aplica \tilde{U} homeomorficamente sobre $\pi(\tilde{U}) \subset U$. Então tomamos a composta $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \varphi(\pi(\tilde{U})) \subset \mathbb{R}^m$ como uma carta de \tilde{M} em \tilde{p} . Então verificamos que as mudanças de cartas associadas são restrições de mudanças de cartas de M , portanto, temos um atlas diferenciável de mesma classe que M . \square

9.5 O Fibrado tangente

9.5.1 Construção por meio de vetores velocidade de caminhos

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular de classe C^k . Como sabemos, o conjunto $TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; p \in M, v = \lambda'(0), \lambda \in \mathcal{C}(p)\}$, onde $\mathcal{C}(p)$ é o conjunto de todos os caminhos diferenciáveis $\lambda:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M, \lambda(0) = p$, é uma superfície regular de classe C^{k-1} e dimensão $2m$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Chamamos TM o *fibrado tangente* de M . Dado o ponto $p \in M$, o conjunto $T_p(M) = \{v = \lambda'(0) \in$

$\mathbb{R}^n, \lambda \in \mathcal{C}(p)\}$, é um espaço vetorial de dimensão m , chamada o *espaço tangente* de M no ponto p . Além disso, dada a parametrização $\varphi: U \rightarrow V$ de M , com $U \subset \mathbb{R}^m$ conjunto aberto, $\varphi(p_0) = p$, temos a isomorfismo linear $d\varphi(p_0): \mathbb{R}^m \rightarrow T_p(M) \subset \mathbb{R}^n$. Assim parece que a inclusão $M \subset \mathbb{R}^n$ é fundamental na definição das espaço tangente. Entretanto veremos como definir o fibrado tangente para a variedade em um modo abstrato.

Seja M^m uma variedade de classe C^k ($k \geq 2$). Dado $p \in M$ denotamos por $\mathcal{C}(p) = \mathcal{C}(p, M)$ o conjunto de caminhos diferenciáveis no ponto $p, \lambda:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M, \lambda(0) = p$. Mais uma vez lembramos que por diferenciável no ponto p queremos dizer que dada qualquer carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M com $p \in U$, e qualquer elemento $\lambda \in \mathcal{C}(p)$ temos $\varphi \circ \lambda:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^m$ é um caminho diferenciável em $t = 0$ em \mathbb{R}^m .

A fim de munir $\mathcal{C}(p)$ com alguma estrutura intrínseca consideramos as seguintes relações de equivalência: *Dois caminhos λ e μ em $\mathcal{C}(p)$ são equivalentes se e somente se $\varphi \circ \lambda$ e $\varphi \circ \mu$ ambos têm o mesmo vetor velocidade em $t = 0$, isto é, $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$ para alguma (e portanto para qualquer) carta local φ de M em p .*

Lema 9.5.1. Dados dois caminhos λ e μ em $\mathcal{C}(p)$ suponha que $\varphi \circ \lambda$ e $\varphi \circ \mu$ ambos têm o mesmo vetor velocidade em $t = 0$, isto é, $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$ para alguma carta local φ de M em p . Então o mesmo vale para qualquer carta de M válida em p .

Demonstração. Com efeito dada outra carta $\psi: U_1 \rightarrow \psi(U_1)$ de M válida em $p \in U_1$, temos pela Regra da Cadeia em \mathbb{R}^m que

$$(\psi \circ \lambda)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \lambda)'(0),$$

e também

$$(\psi \circ \mu)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \cdot (\varphi \circ \mu)'(0).$$

Como por hipótese $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$ segue que

$$(\psi \circ \lambda)'(0) = (\psi \circ \mu)'(0).$$

□

Lema 9.5.2. A relação acima é uma relação de equivalência.

Demonstração. Isto se verifica trivialmente tomando uma carta φ de M válida em p e calculando os vetores velocidade dos caminhos via φ . □

Denotaremos por $T_p(M)$ o espaço quociente $\mathcal{C}(p)/\sim$ de $\mathcal{C}(p)$ por essa relação de equivalência.

Proposição 9.5.1. $T_p(M)$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial real de dimensão m .

Demonstração. A estrutura de espaço vetorial em $T_p(M)$ é definida como segue: Seja $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ qualquer carta local de M em p . Definimos $\bar{\varphi}_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação $[\lambda] \rightarrow (\varphi \circ \lambda)'(0)$, onde $[\lambda]$ denota a classe de equivalência definida por $\lambda \in \mathcal{C}(p)$. Claramente, por construção, a aplicação $\bar{\varphi}_p$ é bem definido.

Proposição 9.5.2. $\bar{\varphi}_p$ é uma aplicação bijetiva.

Demonstração. Por definição da relação de equivalência, segue que $\bar{\varphi}_p$ é injetiva. Agora, dado qualquer $v \in \mathbb{R}^m$, consideramos $\alpha:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^m$ como o caminho $\alpha(t) = \varphi(p) + t \cdot v$, de modo que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Se pomos $\lambda(t) = \varphi^{-1}(\alpha(t))$, então temos definido um elemento de $\mathcal{C}(p, M)$ que satisfaz $(\varphi \circ \lambda)'(0) = v$. Assim, $[\lambda] \in T_p(M)$ é tal que $\bar{\varphi}_p([\lambda]) = v$. \square

Usando a bijeção acima, munimos $T_p(M)$ com uma estrutura de espaço vetorial. Isto é, definimos a adição de vetores e a multiplicação por escalar em $T_p(M)$ como segue:

$$[\lambda] + [\mu] := \bar{\varphi}_p^{-1}(\bar{\varphi}_p([\lambda]) + \bar{\varphi}_p([\mu]))$$

$$t \cdot [\lambda] := \bar{\varphi}_p^{-1}(t \cdot \bar{\varphi}_p([\lambda]))$$

para todas $[\lambda], [\mu] \in T_p(M)$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, a aplicação $\bar{\varphi}_p$ se torna um isomorfismo linear.

Resta ver que essa estrutura não depende da carta local escolhida φ . Para isso, tomemos $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$, outra carta de M válida em p . Então, considerando a aplicação induzida correspondente $\bar{\psi}_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$, temos pela Regra da Cadeia os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc} & T_p(M) & \\ \bar{\varphi}_p \swarrow & & \searrow \bar{\psi}_p \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Isto é, $\bar{\psi}_p = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \circ \bar{\varphi}_p$. Como $(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$ é a isomorfismo linear, segue que φ e ψ induzem a mesma estrutura em $T_p(M)$. \square

Definição 9.5.1. O espaço vetorial $T_p(M)$ é chamado o *espaço tangente* de M no ponto p .

Procedamos agora a construção da variedade fibrado tangente. Seja $\{\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$ um atlas para M e consideremos o conjunto abstrato

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p(M),$$

união disjunta. Em TM , consideramos as aplicações $\Phi_j : TU_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, onde $TU_j := \bigcup_{p \in U_j} \{p\} \times T_p(M)$, e definidas por $\Phi_j(p, [\lambda]_p) := (\varphi_j(p), \overline{\varphi_j}_p([\lambda]_p))$, para $[\lambda]_p \in T_p(M)$, então não é difícil ver que Φ_j são bijeções. Além disso, para qualquer $TU_i \cap TU_j \neq \emptyset$, temos $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e temos $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}|_{\Phi_j(TU_i \cap TU_j)}$ é uma aplicação entre conjuntos abertos de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, dado por

$$\begin{aligned} \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \\ (x, v) &\mapsto ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(x), (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(x) \cdot v). \end{aligned}$$

Portanto, temos difeomorfismos entre conjuntos abertos de modo que existe uma única topologia em TM que faz desse uma variedade diferenciável de classe C^{k-1} (se M é de classe C^k , $k \geq 2$), tendo $\{\Phi_j : TU_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$ como um atlas (note que a topologia de TM herda a propriedade de Hausdorff e a existência de base enumerável de abertos da topologia de M). Podemos resumir a discussão acima como segue:

Proposição 9.5.3. Dada M variedade de dimensão m e classe C^k , $k \geq 2$, existe uma estrutura diferenciável em TM que faz desse uma variedade de classe C^{k-1} e dimensão $2m$. Além disso, a projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, [\lambda]_p) = p$ é uma submersão. O espaço tangente $T_p(M)$ é naturalmente isomorfo à fibra $\pi^{-1}(p)$.

Definição 9.5.2. Chamamos TM munido com essa estrutura diferenciável canônica o *fibrado tangente* de M .

Mantemos a notação acima na seguinte observação:

Observação 9.5.1. Dado o ponto $(p, v) \in TM$, o espaço tangente $T_{(p,v)}(TM)$ é dado por $(\overline{\Phi}_{(p,v)})^{-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$, onde $\Phi = (\varphi, \varphi')$ é obtida de uma carta local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M com $p \in U$.

9.5.2 Construção abstrata do fibrado tangente

Nesta seção, estudamos a noção de diferenciabilidade em uma variedade. Como já comentamos na introdução, essa é principal motivação para o estudo das variedades. Primeiro, introduzimos o fibrado tangente de um variedade diferenciável. Aqui escolhemos um modo não geométrico, mas com algumas características importantes como veremos. O outro modo já discutimos acima. Há ainda uma terceira maneira, via derivações no módulo dos germes de funções diferenciáveis em cada ponto da variedade, que será explorado nos exercícios 9.24.

Fixemos alguma notação: M^n é a variedade, $\mathcal{A} = \{\varphi_j : U_j \rightarrow V_j\}_{j \in J}$ é seu atlas maximal, onde J é o conjunto de índices. Consideramos o produto espaço $P = M \times J \times \mathbb{R}^n$ onde é definida a relação de equivalência:

$$(p, j, v) \sim (q, i, w) \Leftrightarrow p = q \text{ em } U_i \cap U_j \text{ e } (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(\varphi_j(p)) \cdot v = w \in \mathbb{R}^n.$$

Isto define uma relação de equivalência em P (Exercício!), e, para cada ponto $(p, j, v) \in P$, denotamos por $[p, j, v]$ sua classe de equivalência, isto é, o ponto correspondente no espaço quociente P/\sim . Denote por $\pi : P \rightarrow P/\sim$ a projeção quociente. A fibra $\pi^{-1}(p)$ sobre o ponto $p \in M$ é denotada por

$$T_p(M) = \{[p, j, v]; p \in U_j \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Denotamos também por TM o espaço quociente P/\sim .

Proposição 9.5.4. O espaço TM admite uma estrutura natural diferenciável, que faz da projeção $\pi : TM \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Temos $\dim(TM) = 2 \cdot \dim(M) = 2m$, para cada $p \in M$, a fibra $T_p(M)$ tem uma estrutura natural de m -dimensional real espaço vetorial, e existe uma inclusão natural $i_M : M \rightarrow TM$, tal que para cada $p \in M$ $i_M(p) \in T_p(M)$ corresponde à origem.

Demonstração. Para cada aplicação $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$ do atlas de M , definimos uma aplicação $\Phi_j : TU_j \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^n$ como segue:

$$TU_j := \pi^{-1}(U_j), \quad \Phi_j([p, i, v]) := (\varphi_j(p), (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(\varphi_j(p)) \cdot v).$$

Usando a definição de TM pela equivalência \sim , segue que a aplicação $\Phi_j : TU_j \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^n$ é bem definida e é de fato uma bijeção. Além disso, não é difícil ver que a mudanças de coordenadas $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ são difeomorfismos entre conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Portanto, existe uma única topologia em TM que faz, primeiramente, as aplicações $\Phi_j : TU_j \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^n$ homeomorfismos e, portanto, a coleção

$\{\Phi_j : TU_j \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^n\}_{j \in J}$, dá uma estrutura diferenciável para TM . Compomos a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ com essas cartas para obter $\pi \circ \Phi_j^{-1} : V_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow V_j$, dado por $(p, v) \mapsto p$. Assim segue que π é uma aplicação aberta e diferenciável.

Agora consideramos a fibra $T_p(M)$ sobre alguns $p \in M$. Definimos as aplicações $\xi_{p,j} : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ associadas a índices $j \in J$, como segue:

$$\xi_{p,j}([p, j, v]) := v.$$

Segue das identificações em TM , que essas são aplicações bem definidas, que dão bijeções de $T_p(M)$ com \mathbb{R}^n . A estrutura de espaço vetorial de \mathbb{R}^n pode ser, portanto, transportada para $T_p(M)$ de modo que, *a priori*, dependa da aplicação $\xi_{p,j}$. Todavia, não é difícil provar que, de fato, essa estrutura não depende dessas aplicações (exercício!): Podemos identificar, via aplicações $\xi_{p,j}$, o pontos $[p, j, v] \in T_p(M)$ com o par (p, v) por simplicidade. Assim, temos munido cada $T_p(M)$ com a estrutura de espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^n . Podemos considerar a inclusão $i_M : M \rightarrow TM$ definido como segue:

$$M \ni p \mapsto (p, 0_p)$$

onde 0_p denota a origem de $T_p(M)$ como um espaço vetorial. Essa aplicação é diferenciável e dá um difeomorfismo de M com o imagem $i_M(M) \subset TM$, chamada *seção nula* de TM . \square

Definição 9.5.3. A variedade TM é chamada o *fibrado tangente* de M . Dado $p \in M$, a fibra $T_p(M)$ é chamada *espaço tangente* de M em p .

Observação 9.5.2. O fibrado tangente é (como um conjunto) a união disjunta de espaços tangentes

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M).$$

Ilustramos a noção acima com alguns exemplos:

Exemplo 9.5.1. O fibrado tangente de \mathbb{R}^n é $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via a identificação natural de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ com o vetor $v_p \in \mathbb{R}^n$, tendo origem no ponto $p \in M = \mathbb{R}^n$ (Exercício!).

Exemplo 9.5.2. Se M e N são variedades, então o fibrado tangente do produto $P = M \times N$ é naturalmente identificado (difeomorfo por um difeomorfismo que induz isomorfismos lineares nos espaços tangentes) com o produto $TM \times TN$ (Exercício!).

Exemplo 9.5.3. O fibrado tangente da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é naturalmente descrito como segue: dado o ponto $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, o espaço tangente em p é

$$T_p(\mathbb{S}^n) = \left\{ (p, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}; v = (v_1, \dots, v_{n+1}), \sum_{j=1}^{n+1} x_j \cdot v_j = 0 \right\}.$$

Observação 9.5.3. No exercícios, damos uma construção alternativa do fibrado tangente.

Proposição 9.5.5. Sejam M e N variedades de classe C^k , $k \geq 2$. Então o fibrado tangente da variedade produto $M \times N$ é naturalmente difeomorfo ao produto dos fibrados tangentes, isto é, $T(M \times N) \cong TM \times TN$ de modo natural. Em particular, dados $p \in M$ e $q \in N$, existe isomorfismo natural de espaços vetoriais $T_p(M) \times T_q(N) \cong T_{(p,q)}(M \times N)$.

Demonstração. Primeiro recordamos que, dada variedade M com atlas $\Phi = \{\varphi_j: U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$, temos um atlas natural para TM dado por $T\Phi := \{T\varphi_j: TU_j \subset TM \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$, onde cada aplicação $T\varphi_j: TU_j = \pi^{-1}(U_j) \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^m$ é definida por $T\varphi_j(p, v_p) = (\varphi_j(p), \bar{\varphi}_j(p) \cdot v)$ para todo $p \in U_j$ e todo vetor tangente $v_p \in T_p(M)$. Dados, então, atlas $\Phi = \{\varphi_j: U_j \rightarrow \varphi_j(U_j)\}$ e $\Psi = \{\psi_k: W_k \subset N \rightarrow \psi_k(W_k) \subset \mathbb{R}^n\}$ de M e N respectivamente, o atlas produto $\Phi \times \Psi$, cujas cartas são da forma produto $\varphi_j \times \psi_k$, é um atlas para $M \times N$ conforme já vimos. Esse atlas nos dá, então, um atlas para $T(M \times N)$ cujas cartas são da forma $T(\varphi_j \times \psi_k)$. Mas então é fácil verificar que temos identificação $T(\varphi_j \times \psi_k) \cong T(\varphi_j) \times T(\psi_k)$ e, portanto, temos difeomorfismo $T(M \times N) \cong TM \times TN$ dado de forma natural por essa identificação. □

9.6 A derivada de uma aplicação diferenciável

Lembramos que uma aplicação contínua $f: M \rightarrow N$ entre duas variedades é de classe C^k se admite representação local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de classe C^k , em torno de cada ponto $p \in M$. Dada, portanto, uma C^k aplicação $f: M \rightarrow N$, vamos definir uma aplicação entre os fibrados tangentes. Dadas cartas locais $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que $f(U) \subset V$, a representação local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ nos permite introduzir uma aplicação local $Tf: TU \subset$

$TM \rightarrow TV \subset TN$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{Tf} & TV \\ \downarrow T\varphi & & \downarrow T\psi \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \psi(V) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$(x, v) \longmapsto ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x), (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(x) \cdot v)$$

é um diagrama comutativo.

Proposição 9.6.1. $Tf : TM \rightarrow TN$ é bem definida, não depende da representação local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ e pode ser estendida a uma aplicação global $Tf : TM \rightarrow TN$. Se f é de classe C^k , então Tf é de classe C^{k-1} . Além disso, dado ponto qualquer $p \in M$, temos definida por restrição uma aplicação linear $df(p) : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$, dado por $df(p) \cdot v = Tf((p, v))$.

Demonstração. Tudo pode ser provado tomando-se uma representação local conveniente de Tf . Para isso, tomamos uma carta φ de M e uma carta ψ de N válidas em $p \in U \subset M$ e $q = f(p) \in V \subset N$ respectivamente. Temos cartas associadas $T\varphi$ de TM válida em TU e $T\psi$ de TN válida em TV . Então a representação local $f_0 := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f e a representação local $F_0 := T\psi \circ Tf \circ (T\varphi)^{-1}$ de Tf estão relacionadas por

$$F_0 = Tf_0$$

onde, para uma aplicação $g : U \rightarrow W$ de classe $C^k, k \geq 1$ entre abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m respectivamente, definimos

$$Tg : TU := U \times \mathbb{R}^n \rightarrow W \times \mathbb{R}^n$$

pondo

$$Tg(x, u) := (g(x), g'(x) \cdot u).$$

Tudo o que observamos acima então nos diz que basta provar o resultado no caso em que f é uma aplicação entre abertos de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , e que este caso é verdade. \square

Definição 9.6.1 (Aplicação derivada). A aplicação $Tf : TM \rightarrow TN$ é chamada o *aplicação tangente* ou *aplicação derivada* de f , e a restrição $df(p) : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ é chamada *derivada* ou *diferencial* de f no ponto p .

A derivada pode ser definida usando-se caminhos como veremos nos exercícios. A derivada de um aplicação entre variedades tem as mesmas propriedades das derivadas de aplicações em conjuntos abertos de espaço euclidianos. Resumimos as mais comuns abaixo:

Proposição 9.6.2 (Regra da Cadeia). *Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ aplicação contínuas entre variedades C^r $r \geq 1$. Se f e g são de classe C^s , $s \leq r$, então $g \circ f: M \rightarrow P$ é de classe C^s . Além disso, temos a Regra da Cadeia: $(g \circ f)'(p): T_p(M) \rightarrow T_g(f(p))(P)$ é a composição de $f'(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ com $g'(f(p)): T_{f(p)}(N) \rightarrow T_g(f(p))(P)$. Mais geralmente, se $r \geq 2$, temos $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.*

Demonstração. Basta observar que o resultado enunciado se traduz no resultado análogo para aplicações em espaços euclidianos, uma vez tomando-se representações locais da forma $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ e $\xi \circ g \circ \psi^{-1}$ de f e g . Assim, podemos aplicar diretamente o resultado em espaços euclidianos. \square

Começamos essa seção com a generalização da noção de diferenciabilidade anteriormente introduzida para superfícies.

Sejam M e N variedades.

Definição 9.6.2 (Diferencial de uma aplicação). A aplicação $f: M \rightarrow N$ é diferenciável em um ponto $p \in M$ se existem cartas $\varphi: U \rightarrow U_1$ de M , e $\psi: V \rightarrow V_1$ de N , tal que $p \in U$, $q \in V$ e a composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, é diferenciável no ponto $\varphi(p) \in U_1 \subset \mathbb{R}^m$. Da mesma forma, definimos aplicação de classe C^r e aplicação contínua.

Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades. A *diferencial de f* em um ponto $p \in M$ é o aplicação linear $df(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ definido como segue: escolhemos um sistema de coordenadas $\varphi: U \rightarrow V$ para M em p com $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$, e o sistema de coordenadas $\psi: A \rightarrow B$ para N em $f(p)$ com $\psi(f(p)) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Então consideramos os isomorfismos $T_p(M) \approx \mathbb{R}^m$ e $T_{f(p)}(N) \approx \mathbb{R}^n$ dadas pelas aplicações lineares $\varphi_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi_{f(p)}: T_{f(p)}(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos a imagem de um ponto $(p, v) \in T_p(M)$ como o ponto $df(p) \cdot v := (f(p), w)$, onde $w \in \mathbb{R}^n$ é dado por $w = (\psi \circ \varphi^{-1})'(0) \cdot v \in \mathbb{R}^n$. Segue da definição de TM e TN , que a aplicação linear $df(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$, não depende das escolhas de φ e ψ (Exercício!).

A definição de diferencial de um aplicação entre variedades compartilha propriedades com a definição de diferencial de uma aplicação entre subconjuntos abertos de espaço euclidianos. Algumas dessas propriedades são descritas na seguinte proposição:

Proposição 9.6.3. Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ aplicações diferenciáveis entre variedades. Então:

- (a) A composição $g \circ f: M \rightarrow P$ é uma aplicação diferenciável, e temos a *Regra da Cadeia* para a diferencial de $g \circ f$, isto é, para cada $p \in M$, temos $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N) \rightarrow T_{g(f(p))}(P)$. Além disso, se f e g são de classe C^r , então o mesmo vale para $g \circ f$.
- (b) Se f é um difeomorfismo, então sua diferencial é um isomorfismo para cada $p \in M$. Reciprocamente, se f é de classe C^r , $r \geq 1$ e sua diferencial $df(p)$ é um isomorfismo para algum $p \in M$ então existe uma vizinhança $U \ni p$ em M , tal que $f(U)$ é um subconjunto aberto de N , e $f|_U: U \rightarrow f(U)$, é um difeomorfismo de classe C^r (*Teorema da Aplicação Inversa*).

Demonstração. Para a prova aplicamos os resultados correspondentes para aplicações entre subconjuntos abertos de espaço euclidianos, usando as representações locais $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow B$ como acima. (Exercício!) \square

9.7 Imersões, submersões e o Teorema da Aplicação inversa

Agora estamos aptos a introduzir algumas noções úteis para aplicações diferenciáveis entre variedades:

Definição 9.7.1. Uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ é *submersiva* em um ponto $p \in M$ se a diferencial $df(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ é uma aplicação linear sobrejetiva. Dizemos que f é a *submersão* se essa é submersiva em todos os pontos $p \in M$. A aplicação f é *imersiva* em $p \in M$ se a diferencial $df(p)$ é injetiva. Dizemos que f é uma *imersão* se essa é imersiva em todos os pontos $p \in M$. Finalmente, $f: M \rightarrow N$ é um *mergulho* se é uma imersão e também um homeomorfismo sobre sua imagem $f(M) \subset N$.

Podemos agora enunciar as Formas Locais das Submersões e Imersões para aplicações entre variedades:

Teorema 9.7.1 (Forma Local das Imersões e Submersões). Seja $f: M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação de classe C^r com $r \geq 1$.

- (a) Se f é imersiva em $p \in M$, então existe uma representação local de classe C^r digamos $\xi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow B$ de f em p , tal que $\xi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ é a aplicação de inclusão.

- (b) Se f é submersiva em $p \in M$, então podemos encontrar uma representação local de classe C^r tal que $\xi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ é a projeção nas m primeiras coordenadas.

Esse resultado é uma consequência das Formas Locais das Imersões e Submersões para aplicações entre conjuntos abertos em espaço euclidianos. A prova é deixada como um exercício para o leitor.

Também segue do análogo para aplicações entre espaços euclidianos o seguinte:

Teorema 9.7.2 (Teorema do Posto). Seja $f: M^{m+k} \rightarrow N^{n+k}$ aplicação de classe C^r , $r \geq 1$, tal que f tem posto constante igual a k em uma vizinhança de $p \in M$. Existe, então, representação local C^r de f em uma vizinhança de p , tal que o resultado é a composição de uma inclusão com uma projeção, mais precisamente, é da forma $(x, y) \mapsto (x, 0)$ onde $x \in W \subset \mathbb{R}^k$.

9.8 Subvariedades

Neste ponto, é interessante introduzir a noção de subvariedade de uma dada variedade diferenciável; que generaliza a noção de superfície no espaço euclidiano. Há várias formas equivalentes de se introduzir tal noção. Começamos com uma bastante natural:

Definição 9.8.1. Seja M uma variedade. Uma *subvariedade* de M^m é um subconjunto $N \subset M$ tal que para cada $p \in N$ existe a carta local $\varphi: U \rightarrow V$ de M válida em $p \in U$, com $\varphi(p) = 0$ e tal que $\varphi(U \cap N)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Nesse caso, dizemos que N é a *subvariedade* de M , de dimensão n . Dada uma subvariedade $N \subset M$, a aplicação de inclusão $i: N \rightarrow M$ é uma imersão. Dizemos que a subvariedade N é *de classe C^r* se a inclusão é de classe C^r .

Existem alguns modos equivalentes de introduzir a noção de subvariedade:

Proposição 9.8.1. Sejam M^m uma variedade e $N \subset M$ um subconjunto. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) $N \subset M$ é uma subvariedade.
- (b) N munida com a topologia induzida pela inclusão admite a estrutura de variedade diferenciável, que faz o inclusão $i: N \rightarrow M$ um mergulho.

- (c) N é a variedade, a topologia de N é o induzida pela inclusão em M e, para cada ponto $p \in N$, existem carta local de M , digamos, $\varphi: U \rightarrow V$ e carta local de N , digamos, $\psi: A \rightarrow B$, com a propriedade que $p \in A \subset U$, sendo $\varphi \circ \psi^{-1}: B \rightarrow V$ é uma imersão.

Demonstração. Exercício! □

Exemplo 9.8.1. Seja $U \subset M$ um subconjunto aberto de um variedade M . Então, com a estrutura natural induzida, U é uma variedade da mesma dimensão e classe de M .

Exemplo 9.8.2. Lembramos que dada a variedade M the *diagonal* é definido as $\Delta(M) = \{(x, y) \in M \times M; x = y\}$. Então $\Delta(M) \subset M \times M$ é a subvariedade difeomorfo a M (Exercício!).

Seja $N \subset M$ uma subvariedade. Dado ponto qualquer $p \in N$, o espaço tangente $T_p(N)$ é naturalmente identificado com o subespaço de $T_p(M)$, e podemos escrever $T_p(N) \subset T_p(M)$. Essa inclusão também se estende aos fibrados tangentes:

Proposição 9.8.2. Seja $N \subset M$ uma subvariedade de classe C^2 . Então TN é naturalmente identificado com uma subvariedade de TM , e podemos escrever $TN \subset TM$.

Exemplo 9.8.3. As subvariedades de classe C^k e dimensão r de \mathbb{R}^n são precisamente as superfícies regulares de classe C^k e dimensão r em \mathbb{R}^n .

Lembramos que, dada a aplicação diferenciável $f: M^m \rightarrow N^n$, um ponto $q \in N$ é a *valor regular* de f se $f^{-1}(q) = \emptyset$ ou, para ponto qualquer $p \in M$ com $f(p) = q$, f é submersiva em p .

Proposição 9.8.3. Seja $f: M \rightarrow N$ de classe C^r , $r \geq 1$. Dado qualquer valor regular $q \in N$ de f , com $f^{-1}(q) \neq \emptyset$, então $P := f^{-1}(q)$ é a subvariedade de M , de classe C^r e dimensão $m - n$.

Demonstração. Essa é uma consequência direta da Forma Local das Submersões. Deixamos os detalhes para o leitor bem disposto (Exercício!). □

Observação 9.8.1. Mais adiante generalizaremos o seguinte resultado, que é um dos objetivos centrais deste capítulo.

9.9 Primeiro Teorema de Mergulho de Whitney

Nesta seção, provaremos que uma variedade compacta é sempre difeomorfa a uma superfície em um espaço euclidiano. Esse belo resultado é conhecido como *Primeiro Teorema de Mergulho de Whitney*. Mais adiante, utilizando um pouco de Teoria de Transversalidade e de Espaços de Aplicações entre Variedades, provaremos versões mais fortes.

Teorema 9.9.1 (Whitney). Seja M uma variedade compacta de classe C^r com $1 \leq r \leq \infty$. Então existe mergulho $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todo n grande o suficiente. Em outras palavras, M é difeomorfa a uma superfície em algum espaço euclidiano.

Demonstração. Seja $B^m(0; r) \subset \mathbb{R}^m$ a bola aberta de centro na origem e raio $r > 0$.

Afirmção 9.9.1. Existe cobertura finita por domínios de sistemas de coordenadas $\{\varphi_j: U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^m\}$, $j = 1, \dots, \ell$ onde:

1. $M = \bigcup_{j=1}^{\ell} \varphi_j^{-1}(B^m(0; 1))$.
2. $\varphi_j(U_j) \supset \overline{B^m(0; 2)}$, $j = 1, \dots, \ell$.

Para provar a afirmação, basta usar a compacidade de M e o fato de que existe um atlas enumerável de M formado por cartas $\varphi_\nu: U_\nu \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde $\varphi_\nu(U_\nu) = \mathbb{R}^m$ e $\bigcup_{\nu \in \mathcal{V}} \varphi_\nu^{-1}(B^m(0; 1))$ ainda é cobertura de M .

Assim, consideramos aplicação de classe C^∞ , $\alpha: \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo:

1. $\alpha(x) = 1$ se $x \in \overline{B^m(0; 1)}$.
2. $\alpha(x) = 0$ se $x \notin \overline{B^m(0; 2)}$.

Para cada $j \in \{1, \dots, \ell\}$, definimos aplicações C^r em M pondo $\lambda_j: M \rightarrow [0, 1]$, $\lambda_j = \alpha \circ \varphi_j$ em U_j e $\lambda_j = 0$ em $M \setminus U_j$.

Então é claro que λ_j é bem definida e de classe C^r em toda a variedade M .

A seguinte afirmação se prova, então de forma imediata.

Afirmção 9.9.2. $M = \bigcup_{j=1}^{\ell} \lambda_j^{-1}(1)$ e $\lambda_j^{-1}(1) \subset U_j, \forall j$.

Definimos finalmente aplicações $f_j: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ pondo $f_j(x) = 0$ se $x \notin U_j$ e $f_j(x) = \lambda_j(x)\varphi_j(x)$ se $x \in U_j$. Então f_j é de classe C^r em M e temos aplicações C^r $F_j: M \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{m+1}$ definidas por $F_j = (f_j, \lambda_j)$. Agora, com elas definimos o mergulho $\psi: M \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^{m+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m+1}}_{\ell\text{-vezes}} = (\mathbb{R}^{m+1})^\ell =$

$\mathbb{R}^{\ell(m+1)}$ do seguinte modo:

$$\psi := (F_1, \dots, F_\ell).$$

Como é claro, ψ é de classe C^r e vale:

Afirmção 9.9.3. ψ é um mergulho.

Prova da afirmação. Vejamos primeiro que ψ é uma imersão: dado ponto $p \in M$, temos, pela Afirmção 9.9.2 acima, que $p \in \lambda_j^{-1}(1)$ para algum $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Agora, tomando-se esse j temos que, em uma vizinhança de p ,

$$\begin{aligned} F_j(x) &= (f_j(x), \lambda_j(x)) = (\lambda_j(x)\varphi_j(x), \lambda_j(x)) = \lambda_j(x) \cdot (\varphi_j(x), 1) \\ &= (\alpha \circ \varphi_j(x)) \cdot (\varphi_j(x), 1) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que para x próximo a p vale $\lambda_j(x) = (\alpha \circ \varphi_j)(x)$.

Desse modo, temos que $F_j(x) = (\varphi_j(x), 1)$ em uma vizinhança de p e, daí claramente, F_j é imersiva em p o que implica que ψ é imersiva em p .

Vejamos agora que F é uma bijeção sobre a imagem. De fato, se $x_1 \neq x_2$ são tais que $F(x_1) = F(x_2)$, então escolhemos $j \in \{1, \dots, \ell\}$ como acima tal que $x_1 \in \lambda_j^{-1}(1)$ de modo que $F_j(x_1) = (\varphi_j(x_1), 1)$. Assim, se $x_2 \notin \lambda_j^{-1}(1)$, então $\lambda_j(x_2) \neq 1$, e, logo, $F_j(x_2) \neq F_j(x_1)$. Portanto, devemos ter $x_2 \in \lambda_j^{-1}(1)$ também e, daí, $F_j(x_2) = (\varphi_j(x_2), 1)$ de modo que necessariamente $\varphi_j(x_1) = \varphi_j(x_2)$ e, daí, $x_1 = x_2$.

Finalmente, observamos que como ψ é uma bijeção contínua sobre a imagem $\psi(M) \subset \mathbb{R}^{\ell(m+1)}$ e como M é compacta, segue que ψ é um homeomorfismo de M sobre sua imagem $\psi(M)$, que será, portanto, uma superfície de classe C^r em $\mathbb{R}^{\ell(m+1)}$. Isto encerra a prova. \square

\square

9.10 Espaços fibrados

Nesta seção, estudamos uma importante classe de estrutura diferenciável, associada a uma aplicação e duas variedades. Esta é a classe dos espaços fibrados, e nos dá uma generalização do fibrado tangente de um variedade, assim como de algumas outras construções geométricas.

Começamos com a terminologia básica:

Definição 9.10.1 (Espaço fibrado). Um *fibrado diferenciável* consiste de um submersão $\pi : E \rightarrow B$, onde E e B são variedades, com a *local produto estrutura*: Existe uma cobertura aberta $B = \bigcup_{j \in J} U_j$, tal que para cada $j \in J$ existe um difeomorfismo $\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \subset E \rightarrow U_j \times F$, onde F é a variedade fixada, tal que $\pi_1 \circ \varphi_j = \pi$ em $U_j \times F$, sendo que $\pi_1 : U_j \times F \rightarrow U_j$ é a primeira projeção $\pi_1(p, v) = p ; (p, v) \in U_j \times F$. Em outras palavras, temos diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_j) & \xrightarrow{\varphi_j} & U_j \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & U_j & \end{array}$$

Chamamos B a *base*, E o *espaço total*, F a *fibra*, π a *projeção*, os difeomorfismos $\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$, as *trivializações locais* do fibrado, que denotaremos por $\pi : E \rightarrow B$. Dado o ponto $p \in B$, a *fibra sobre p* é $F_p : \pi^{-1}(p) \subset E$.

Como π é a submersão, F_p é a subvariedade de F . Além disso, usando a comutatividade dos diagramas acima, podemos provar que F_p e F são difeomorfas para todo $p \in B$.

Se $i, j \in J$ são tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então podemos definir $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Diff}(F)$ do seguinte modo:

Consideramos a mudança de trivialização

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ (U_i \cap U_j) \times F & \xrightarrow{\xi_{ij}} & (U_i \cap U_j) \times F \end{array}$$

Então claramente ξ_{ij} se escreve

$$\xi_{ij}(p, v) = (p, h_{ij}(p, v))$$

para alguma aplicação diferenciável $h_{ij} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow F$.

Portanto, dado $p \in U_i \cap U_j$, a aplicação $g_{ij}(p) : F \rightarrow F$, definida por $g_{ij}(p)(v) = h_{ij}(p, v)$, é um difeomorfismo de F . Obtemos desse modo uma aplicação

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Diff}(F).$$

O fibrado diferenciável $\pi : E \xrightarrow{F} B$ é chamado um *fibrado vetorial*, se as fibras F_p admitem um espaço vetorial estrutura, tal que a aplicações $F_p \rightarrow F_p$, dado por $v \mapsto h_{ij}(p, v)$, são isomorfismos lineares.

Se a aplicações $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Diff}(F)$ são localmente constantes, dizemos que $\pi : E \xrightarrow{F} B$ tem *grupo estrutural discreto*.

Vejam agora alguns exemplos de fibrados vetoriais:

Exemplo 9.10.1. Seja M^m uma variedade. O fibrado tangente TM tem uma estrutura natural de fibrado vetorial sobre M , onde a fibra é $F = \mathbb{R}^m$, e a projeção é a projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$, dado por $\pi(p, v) = p$, onde escrevemos

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p(M)\}.$$

De fato, consideramos a estrutura diferenciável $\{(\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^m)\}_{j \in J}$ para M e a estrutura diferenciável correspondente para TM dada por $\{(\Phi_j : TU_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)\}_{j \in J}$, onde as aplicações $\Phi_j : TU_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ são definidas por $TU_j = \pi^{-1}(U_j) \subset TM$, e pomos $\Phi_j(p, v) = (\varphi_j(p), \varphi'_j(p) \cdot v)$. Não é difícil ver que as aplicações $TU_j \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^m$ definidas por $(p, v) \mapsto (p, \varphi_j(p) \cdot v)$ definem trivializações do fibrado, e os isomorfismos lineares $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dão a estrutura de fibrado vetorial para TM . As fibras do fibrado são os espaços tangentes $T_p(M)$.

Exemplo 9.10.2 (Fibrado normal). Seja $N^n \subset M^m$ uma subvariedade. Considere uma métrica Riemanniana \langle, \rangle em M . Considere a métrica Riemanniana induzida em N pela inclusão $N \rightarrow M$. Para cada ponto $p \in N$, introduzimos o *espaço normal* $T_p(N)^\perp \subset T_p(M)$ como o complemento ortogonal do subespaço $T_p(N) \subset T_p(M)$. De acordo com a métrica \langle, \rangle_p em $T_p(M)$. Pomos

$$\nu(N) := \{(p, v); p \in N, v \in T_p(N)^\perp\}.$$

Então temos uma projeção natural $\pi : \nu(N) \rightarrow N$, definida por $\pi(p, v) = p$. Usando a estrutura de subvariedade para $N \subset M$ não é difícil provar que $\pi : \nu(N) \xrightarrow{\mathbb{R}^{m-n}} N$ é um fibrado vetorial com uma estrutura natural (exercício!).

Exemplo 9.10.3 (Fibrado tangente unitário). Dada variedade M^m de classe C^r , $r \geq 2$ equipada com uma métrica Riemanniana, podemos usar a projeção para construir uma aplicação $f: TM \rightarrow [0, +\infty[$ pondo $\pi(p, v_p) := \|v_p\|^2$. Então $1 \in \mathbb{R}$ é valor regular de f de modo que $T_1(M) := f^{-1}(1) \subset TM$ é uma subvariedade $2m - 1$ dimensional de TM e de classe C^{r-1} . Se M é compacta, então o mesmo vale para $T_1(M)$. A restrição da projeção do fibrado tangente sobre M nos dá aplicação $\pi_1: T_1(M) \rightarrow M$, e afirmamos que isso define estrutura de fibrado diferenciável sobre M , cuja fibra típica é a esfera S^{m-1} (ver exercício!). Tal fibrado é chamado *fibrado tangente unitário* de M .

9.11 Grupos de Lie

Seja G um grupo, isto é, G é um conjunto com uma aplicação (chamada *operação de grupo*) $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \circ y$, tal que:

- (i) Existe um elemento $e \in G$ tal que $x \circ e = e \circ x$, $\forall x \in G$.
- (ii) Dado qualquer $x \in G$, existe um elemento $x^{-1} \in G$ tal que $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
- (iii) A operação de grupo é associativa.

O grupo G , uma vez visto como um conjunto de pontos, pode admitir topologias interessantes. As mais interessantes são aquelas relacionadas à operação do grupo. Este é o espírito da definição abaixo:

Definição 9.11.1. Um *grupo topológico* é um grupo G munido com a topologia que faz a operação de grupo $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \circ y$ e a operação inversa $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ são aplicações contínuas. Isto é equivalente a dizer que a aplicação $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \circ y^{-1}$ é uma aplicação contínua.

Muitos são os exemplos interessantes de grupos topológicos. Entretanto, estamos interessados em estruturas mais ricas:

Definição 9.11.2. Um *grupo de Lie* é um grupo topológico com a estrutura diferenciável que faz a operação de grupo e a operação inversa aplicações diferenciáveis.

Proposição 9.11.1. Seja G um grupo de Lie. As translações à esquerda e à direita $L_x, R_x: G \rightarrow G$, definidas por $L_x(y) = x \circ y$, $R_x(y) = y \circ x$, $\forall y \in G$ são difeomorfismos de G . Em particular, dados quaisquer dois pontos $a, b \in G$, existem uma translação à esquerda e uma à direita que levam a em b .

Vejam alguns exemplos notáveis de Grupos de Lie:

Exemplo 9.11.1. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n munido com a adição é um grupo de Lie. Notamos que esse grupo de Lie é abeliano (comutativo) e o denotaremos por $(\mathbb{R}^n, +)$. Qualquer espaço vetorial finito dimensional (real) é também um grupo de Lie.

Exemplo 9.11.2. A multiplicação induz uma estrutura de grupo de Lie na reta real menos a origem $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemplo 9.11.3. O círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ é um grupo de Lie com uma estrutura natural dado pela multiplicação de números complexos e pela usual real estrutura diferenciável.

Exemplo 9.11.4. Sejam G um grupo de Lie e $G_0 \subset G$ a componente conexa que contém o elemento neutro $e \in G$. Então G_0 é uma subvariedade aberta de G , que é também um subgrupo, que induz uma estrutura de grupo de Lie em G_0 .

Exemplo 9.11.5. Denote por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de operadores lineares em \mathbb{R}^n e por $GL(n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a subvariedade de aplicações não singulares. Então $GL(n)$ é um grupo de Lie com a multiplicação de matrizes, isto é, a composição de aplicações.

Exemplo 9.11.6. O grupo ortogonal $O(n) = \{T \in GL(n); T \circ T^t = I_n\}$ é um subgrupo de Lie de $GL(n)$. A componente conexa que contém a identidade é $SO(n) = \{T \in O(n); \det(T) = 1\}$, de modo que essa é um subgrupo de Lie como segue do exemplo acima.

Exemplo 9.11.7. O grupo afim $Aff(\mathbb{R}^n) = \{T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; T(x) = A \cdot x + B, A \in GL(n), B \in \mathbb{R}^n\}$ é um grupo de Lie com a operação de composição.

Exemplo 9.11.8. O grupo de aplicações de Möbius

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ T: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}; T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

é um grupo de Lie com a composição. Aqui identificamos a esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a euclidean esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, por meio da projeção estereográfica, que resulta em uma estrutura diferenciável em $\overline{\mathbb{C}}$.

Exemplo 9.11.9. O exemplo acima pode ser estendido como segue: Seja M uma variedade Riemanniana compacta. O grupo G de isometrias de M é um grupo de Lie (Teorema de Cartan).

Exemplo 9.11.10. A esfera \mathbb{S}^3 , vista como o grupo dos quatérnios, é um grupo de Lie.

Exemplo 9.11.11. Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie. O produto $G_1 \times G_2$ admite uma estrutura natural de grupo de Lie.

9.11.1 Fibrado tangente e campos de vetores invariantes à esquerda

No que segue, G denota um grupo de Lie conexo de classe C^∞ e dimensão n . $\pi : TG \rightarrow G$ denota o fibrado tangente. As seções de TG são o campo de vetores em G . Veremos que esse fibrado é trivial, como uma consequência da trivialidade de tais seções. É útil considerar os seguintes conceitos:

Denote por $L_g : G \rightarrow G$ a translação à esquerda $L_g(x) = g \circ x, \forall x \in G$ onde $g \in G$ é fixado. Como se vê, L_g é um difeomorfismo com inversa $L_{g^{-1}}$.

Definição 9.11.3. Um campo de vetores $X \in TG$ é *invariante à esquerda* se $(L_g)_*X(x) = X(L_g(x)), \forall x \in G, \forall g \in G$. Note que $(L_g)_*$ é a diferencial de L_g .

Lema 9.11.1. Um campo de vetores X em G é invariante à esquerda se e somente se $(L_g)_*X(e) = X(g), \forall g \in G$.

Corolário 9.11.1. Dado um vetor tangente $x \in T_e(G)$, existe um único campo de vetores invariante à esquerda X em G tal que $X(e) = x$.

Corolário 9.11.2. Seja G um grupo de Lie. O fibrado tangente TG é trivial.

A seguir, exploramos as propriedades dos campos de vetores invariantes à esquerda e suas relações com o grupo G .

Lema 9.11.2. O colchete de Lie de dois campos de vetores invariantes à esquerda é também invariante à esquerda.

Usando esta observação, definimos:

Definição 9.11.4 (Álgebra de Lie). Dados $x, y \in T_e(G)$ consideramos X, Y sua extensão invariante à esquerda e definimos $[x, y] := [X, Y](e) \in T_e(G)$.

O produto $[x, y]$ acima é bem definido de acordo com o Lema 9.11.2.

O espaço tangente $T_e(G)$ munido com este produto $[,]$ torna-se uma *Álgebra*, chamada *Álgebra de Lie de G* , denotada $\mathcal{L}(G)$. Em $\mathcal{L}(G)$, temos:

(i) $[x, x] = 0, \forall x \in G$.

$$(ii) \quad [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in G.$$

$$(iii) \quad [x, y] = -[y, x], \forall x, y \in G.$$

Qualquer álgebra satisfazendo essas propriedades é chamada uma Álgebra de Lie.

A Álgebra de Lie pode classificar o grupo de Lie (ver Duistermaat e Kolk (2000)).

9.12 Espaços de recobrimento

Uma das principais noções no estudo de variedades e espaços topológicos é a noção de espaço de recobrimento. Recordemos algumas noções da topologia: Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Dizemos que f é um *homeomorfismo local* se, para ponto qualquer $x \in X$, existe a vizinhança $x \in V \subset X$ tal que $f(V) \subset Y$ é aberto e $f|_V: V \rightarrow f(V) \subset Y$ é um homeomorfismo. Em particular, f é uma aplicação aberta.

Definição 9.12.1. Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é uma *aplicação de recobrimento* se:

- (i) f é sobrejetiva.
- (ii) Para qualquer $y \in Y$, existe uma vizinhança aberta $Y \supset W \ni y$ tal que $f^{-1}(W) = \cup_{i \in I} U_i$ onde $U_i \subset X$ é aberto e $f|_{U_i}: U_i \rightarrow W$ é um homeomorfismo.

Em particular, f é um homeomorfismo local. Estamos interessados no caso em que X, Y são variedades.

Definição 9.12.2. Sejam M, N variedades e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é uma *aplicação de recobrimento* (diferenciável) se essa é uma aplicação de recobrimento e um difeomorfismo local.

Exemplo 9.12.1. A aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = \exp(t \cdot \sqrt{-1}) = (\cos t, \sin t)$ é a aplicação de recobrimento.

Exemplo 9.12.2. Seja $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P(n)$ a aplicação quociente, $f(p) = [p]$, então f é uma aplicação de recobrimento.

Observação 9.12.1. Nem todo homeomorfismo local é uma aplicação de recobrimento.

Exemplo 9.12.3. Toda aplicação de recobrimento (topológico) de um variedade pode ser vista como uma aplicação diferenciável de recobrimento. De fato, seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de recobrimento, onde M, N são espaços topológicos. Suponha que N também admite uma estrutura diferenciável compatível com sua topologia. Então podemos introduzir uma estrutura diferenciável em M , que faz f uma aplicação de recobrimento diferenciável.

A caracterização dos recobrimentos topológicos finitos é dada abaixo:

Proposição 9.12.1. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma homeomorfismo local entre espaços topológicos com X Hausdorff e Y conexo. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) f é uma aplicação de recobrimento com $\#f^{-1}(y) < \infty, \forall y \in Y$.
- (ii) f é própria e sobrejetiva.
- (iii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\#f^{-1}(y) = n, \forall y \in Y$.

Corolário 9.12.1. Sejam X, Y Hausdorff com X compacto. Um homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento se e somente se é sobrejetiva. Neste caso, f tem um número de folhas finito.

Observação 9.12.2. Todo espaço topológico possui um *recobrimento universal*, ou seja, X é simplesmente conexo.

Proposição 9.12.2. Seja M variedade C^k n -dimensional. Seja $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ homeomorfismo local. Então \tilde{M} possui estrutura de variedade única que faz de π um difeomorfismo local. Em particular, se $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é o recobrimento universal M (como espaço topológico), então existe única estrutura de variedade diferenciável em \tilde{M} que faz de π um difeomorfismo local.

Exemplos 9.12.1 e 9.12.2 acima podem ser vistos do ponto de vista de ações que introduziremos na seção abaixo.

9.13 Ações propriamente descontínuas

Sejam G um grupo e M uma variedade.

Definição 9.13.1 (Ações). Uma *ação* de G em M é uma aplicação $\Phi : G \times M \rightarrow M$ tal que:

- (i) $\Phi_g : M \rightarrow M$, $\Phi_g(x) := \Phi(g, x)$, $\forall x \in M$ define um difeomorfismo de M .
- (ii) A aplicação $G \rightarrow \text{Diff}(M)$, $g \mapsto \Phi_g$ é a homomorfismo de grupos.

Se G é um grupo topológico, então pedimos que a aplicação Φ seja contínua, e se G é um grupo de Lie, pedimos que Φ seja diferenciável.

Exemplo 9.13.1. Seja G um grupo de Lie. Então G age sobre si mesmo por meio das translações à esquerda.

Exemplo 9.13.2. $SO(n)$ age na esfera S^{n-1} de modo natural: $SO(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $(T, x) \mapsto T(x)$. Mais geralmente, o grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana compacta age na variedade de um modo natural.

A importância dessa noção vem principalmente do seguinte conceito:

Definição 9.13.2. Sejam X um espaço topológico e G um subgrupo das grupo de homeomorfismos de X . Dizemos que G é *propriamente descontínuo* se para qualquer $x \in X$ existe a vizinhança $x \in V \subset X$ tal que $g(V) \cap V = \emptyset$, $\forall g \in G$, $g \neq Id$. Chamamos V a *vizinhança estrita ou distinguida* de x , com respeito a G . Se M é uma variedade e G é um grupo de difeomorfismos, então a noção é a mesma. Finalmente, dizemos que o grupo G *age de modo propriamente descontínuo* em M se existe uma ação Φ de G em M , tal que a imagem $\{\Phi_g, g \in G\}$ é um grupo propriamente descontínuo.

Dada a aplicação de recobrimento $\pi : X \rightarrow Y$, denotamos por $G(\pi)$ o *grupo de automorfismos de recobrimento* definido como $G(\pi) := \{T \in \text{Hom}(X), \pi \circ T = \pi\}$. Claramente $G(\pi)$ é um subgrupo de $\text{Hom}(X)$.

A importância da noção acima reside nos seguintes resultados:

Proposição 9.13.1. Seja G um grupo propriamente descontínuo em um espaço topológico X . Denote por X/G o espaço quociente de X pela relação de equivalência $x \sim y \iff g(x) = y$ para alguns $g \in G$. Munimos X/G com a topologia quociente. Então a projeção canônica $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento cujo grupo de transformações de recobrimento é G . Reciprocamente, dado qualquer recobrimento $\pi : X \rightarrow Y$, o grupo de aplicações de recobrimento $G(\pi)$ é propriamente descontínuo e Y é homeomorfo ao espaço quociente $X/G(\pi)$.

Demonstração. Exercício!

□

Proposição 9.13.2. Seja M uma variedade e $\pi: M \rightarrow N$ uma aplicação de recobrimento, onde N é um espaço topológico Hausdorff. Então N pode ser munido com uma estrutura diferenciável que faz π o recobrimento diferenciável. De fato, com essa estrutura, temos N difeomorfa ao quociente $M/G(\pi)$.

Proposição 9.13.3. Seja $\pi: M \rightarrow N$ um recobrimento de um espaço topológico Hausdorff M sobre a variedade N . Então M admite uma única estrutura diferenciável que faz π um recobrimento diferenciável.

Corolário 9.13.1. Seja M uma variedade. Existe um recobrimento diferenciável $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$, onde \tilde{M} é uma variedade simplesmente conexa. Além disso, esse recobrimento é único a menos de isomorfismos (ou seja, a menos de difeomorfismos preservando as fibras das projeções).

Exemplo 9.13.3. Seja $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação antípoda, $A(p) = -p$, $p \in \mathbb{S}^n$, então o grupo $G = \{A, I\}$ onde I é a aplicação identidade de \mathbb{S}^n , é propriamente descontínua. A variedade quociente é $\mathbb{S}^n/G = \mathbb{R}P(n)$, o espaço projetivo real de dimensão n .

Exemplo 9.13.4. A aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f(t) = e^{it}$, $i^2 = -1$ é uma aplicação de recobrimento (Exemplo 9.12.1), de modo que \mathbb{S}^1 é difeomorfo à variedade quociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} , onde \mathbb{Z} denota o grupo cíclico infinito de automorfismos de recobrimento $G(f)$ gerado pela translação $T(x) = x + 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9.13.5 (Superfícies de Riemann). Uma superfície de Riemann é uma variedade complexa de dimensão um conexa. Isto é, uma variedade real 2-dimensional que admite um atlas cujas mudanças de coordenadas são aplicações holomorfas locais entre subconjuntos abertos de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Por exemplo, temos subconjuntos abertos de \mathbb{C} , a Riemann esfera $\overline{\mathbb{C}}$ (identificada com a esfera \mathbb{S}^2 por meio da projeção estereográfica), curvas algébricas não singulares \mathbb{C}^2 etc.

Vejamos um exemplo mais elaborado:

Exemplo 9.13.6. Sejam α, β vetores reais linearmente independentes em \mathbb{R}^2 . Denote por $T_\alpha, T_\beta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o automorfismos $T_\alpha(z) = z + \alpha$, $T_\beta(z) = \beta + z$. O grupo G gerado por T_α, T_β é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e age de modo propriamente descontínuo em \mathbb{C} . O espaço quociente \mathbb{C}/G é, portanto uma superfície de Riemann recoberta por \mathbb{C} , que chamamos de *toro complexo*, denotado genericamente por $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$. Se $\alpha \wedge \beta = 0$, então $G \sim \mathbb{Z}$ e temos \mathbb{C}/G holomorficamente equivalente a \mathbb{C}^* , recoberto por $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$. Essa última é chamada *cilindro complexo* e genericamente denotado \mathbb{C}/\mathbb{Z} .

De acordo com o Teorema de Uniformização de Riemann e Koebe (Farkas e Kra (1980)), temos:

Teorema 9.13.1. Seja R uma simplesmente conexa superfície de Riemann. Então existe um difeomorfismo holomorfo de R com exatamente superfícies: \mathbb{C} , $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, $\overline{\mathbb{C}}$.

Aplicando os resultados acima, devidamente adaptados ao contexto holomorfo, obtemos:

Teorema 9.13.2. Seja R uma superfície de Riemann. Existe um recobrimento holomorfo $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$, onde \tilde{R} é holomorficamente equivalente a exatamente uma das superfícies: $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \overline{\mathbb{C}}$.

Corolário 9.13.2. Seja R uma superfície de Riemann. Temos as seguintes possibilidades para R , a menos de equivalência holomorfa: $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), \mathbb{D}/G$, onde $G \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é um subgrupo descontínuo de aplicações de Möbius do disco.

9.14 Variedades orientáveis

No caso de superfícies em \mathbb{R}^3 , a noção de orientabilidade é relacionada à possibilidade de se poder definir um campo global contínuo de vetores unitários, chamada *aplicação de Gauss* na superfície. Estendemos essa noção para variedades como segue:

Definição 9.14.1. Uma variedade M é *orientável* se admite um atlas cujas mudanças de coordenadas têm Jacobiano positivo em todo ponto. Um tal atlas é chamada *um atlas coerente* de M . Em outras palavras, M é orientável se existe um atlas $\{\varphi_j: U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^n, j \in J\}$ tal que para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ a mudança de coordenadas $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ tem Jacobiano positivo, onde estiver definido.

Sejam agora M uma variedade orientável e $\mathcal{A} = \{\varphi_j: U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^n, j \in J\}$ um atlas coerente. Dado ponto qualquer $p \in M$, temos duas orientações possíveis no espaço vetorial $T_p(M)$. A orientação *positiva* (com respeito ao atlas \mathcal{A}) é dado por qualquer base de $T_p(M)$, que é levada por qualquer carta $\varphi_j \in \mathcal{A}$, válida em p , em uma base positiva de \mathbb{R}^n . Isso mostra que podemos associar a cada espaço tangente uma orientação natural *dada por* \mathcal{A} .

Exemplo 9.14.1. \mathbb{R}^n e \mathbb{S}^n são variedades orientáveis.

Exemplo 9.14.2. Seja $f: M \rightarrow N$ uma C^r , $r \geq 1$ aplicação entre duas variedades orientáveis e seja $q \in N$ um valor regular de f , com $R = f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Então R é um orientável subvariedade de M .

Exemplo 9.14.3. Sejam M e N variedades orientáveis. Então $M \times N$ é orientável.

Exemplo 9.14.4. Seja $f: M \rightarrow N$ de classe C^r , $r \geq 1$ e seja $G(f) \subset M \times N$ seu gráfico. Então $G(f)$ é orientável.

Proposição 9.14.1. Seja M uma variedade possivelmente não orientável. O fibrado tangente TM é orientável.

Demonstração. Tomamos qualquer atlas $\Phi := \{\varphi_j: U_j \subset M \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$ para M e consideramos o atlas $T\Phi := \{T\varphi_j: TU_j \subset TM \rightarrow V_j \times \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$ para TM . Temos que as mudanças de coordenadas para $T\Phi$ são da forma $T\varphi_i \circ (T\varphi_j)^{-1} = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}, (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})')$, o que nos dá matrizes Jacobianas da forma

$$D[T\varphi_i \circ T\varphi_j] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \dots & A \end{pmatrix}$$

onde A é a matriz Jacobiana da mudança $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Isto nos diz que o determinante da mudança é igual a $(\det A)^2$ e, portanto, positivo. □

Proposição 9.14.2. Qualquer superfície de Riemann é orientável. Isto também vale para variedades complexas (holomorfas) de dimensão ≥ 2 .

Demonstração. As equações de Cauchy–Riemann mostram que a mudança de coordenadas de uma superfície de Riemann, sendo um difeomorfismo holomorfo entre abertos de \mathbb{C} é uma aplicação que preserva a orientação, ou seja, de determinante Jacobiano positivo. □

Com o objetivo de dar exemplos de variedades não orientáveis, fazemos um estudo de variedades que são quocientes por ações propriamente descontínuas:

Definição 9.14.2. Seja $f: M \rightarrow N$ um difeomorfismo local entre duas variedades orientadas. Dizemos que f preserva a orientação se para qualquer $x \in M$ e qualquer base positiva $\{v_1, \dots, v_n\} \subset T_x(M)$, a base $\{f'(x) \cdot v_1, \dots, f'(x) \cdot v_n\} \subset T_{f(x)}(N)$ é positiva.

Teorema 9.14.1. Seja G um grupo propriamente descontínuo de difeomorfismos da variedade orientada M .

- (i) Se cada elemento $g \in G$ preserva a orientação de M , então M/G é orientável.
- (ii) Se M/G é orientável, então existe orientação de M tal que cada elemento $g \in G$ preserva essa orientação.

Demonstração. Suponha que cada elemento de G preserva a orientação de M , induzimos, então, orientação para o quociente definindo um atlas da seguinte forma: dado um ponto $p \in M/G$, tomamos aberto $p \in U \subset M/G$ tal que a pré-imagem $\pi^{-1}(U)$ seja uma união de abertos $W_\nu \subset M$ com a propriedade de que π aplica cada aberto W_ν difeomorficamente sobre U . Dado ponto $\tilde{p} \in M$ sobre p , isto é, tal que $\pi(\tilde{p}) = p$, temos que $\tilde{p} \in W_\nu$, para algum ν , e tomamos, então, carta local $\tilde{\varphi}$ de M válida em \tilde{p} e que seja carta de um atlas positivo de M . Consideramos, então, como carta de M em p , a composta $\tilde{\varphi} \circ (\pi|_{W_\nu})^{-1}$ definida em uma vizinhança de p em M . Isto nos dá um atlas para M . Diremos que esse atlas é positivo e essa definição é bem posta porque duas dessas cartas diferem em uma vizinhança de p por um difeomorfismo $g \in G$, que mapeia um aberto W_{ν_1} sobre W_ν e pela mudança de cartas dentro do atlas positivo de M (explicitite). Isto nos dá, então, um atlas coerente para M/G .

A recíproca deixamos para o leitor. □

Corolário 9.14.1. O espaço projetivo real $\mathbb{R}P(n)$ é orientável se e somente se $n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Com efeito, o espaço projetivo é o quociente da esfera de mesma dimensão pelo grupo cíclico de ordem dois gerado pela aplicação antípoda $A_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, que tem determinante Jacobiano igual a $\det(A_n) = (-1)^{n+1}$ como mostra um cálculo direto em coordenadas. □

9.14.1 O recobrimento duplo orientado

Teorema 9.14.2. Dada uma variedade conexa M existe um recobrimento $\pi: \hat{M} \rightarrow M$, tal que:

- (i) $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ é um recobrimento duplo, isto é, $\#\pi^{-1}(x) = 2, \forall x \in M$.
- (ii) Se $\pi(\tilde{x}_1) = \pi(\tilde{x}_2)$ com $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$, então a aplicação

$$\pi'(\tilde{x}_2)^{-1} \circ \pi'(\tilde{x}_1): T_{\tilde{x}_1}(\hat{M}) \rightarrow T_{\tilde{x}_2}(\hat{M})$$

inverte a orientação.

- (iii) M é orientável se e somente se \hat{M} é desconexa. Neste caso, $\hat{M} = \hat{M}_1 \cup \hat{M}_2$ onde \hat{M}_1, \hat{M}_2 são conexas componentes disjuntas, e $\pi|_{\hat{M}_j} : \hat{M}_j \rightarrow M$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Construiremos a variedade \hat{M} da seguinte forma: dado ponto $p \in M$, tomamos as duas orientações possíveis em $T_p(M)$ e as denotamos por $O_p^{(j)}$, $j = 1, 2$ em qualquer ordem. Construimos, então, novo espaço \hat{M} como união disjunta dos pontos $(p, O_p^{(j)})$ de forma que temos um espaço munido com uma aplicação $\pi : \hat{M} \rightarrow M$ definida por $\pi(p, O_p^{(j)}) := p$. Equipamos, então, \hat{M} com uma estrutura de variedade diferenciável que de π uma aplicação de recobrimento de grau 2. Observe que \hat{M} é naturalmente uma variedade orientável (!). Resta ver que M é não orientável se e somente se \hat{M} é conexa. Para isso, observamos que \hat{M} admite uma involução, isto é, uma aplicação $i : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ que tem ordem 2, $i^2 = i \circ i = \text{Id}$ e que gera o grupo de transformações de recobrimento de $\pi : \hat{M} \rightarrow M$. Assim, se \hat{M} é conexa, então podemos concluir que \hat{M} não possui orientação que é preservada pelas transformações de recobrimento e, logo, que M é não orientável. Reciprocamente se M é não orientável, então \hat{M} é conexa pois, caso contrário, seria união de dois abertos disjuntos cada um difeomorfo a M pela projeção π e, isto nos daria, uma vez que \hat{M} é orientável, que M é orientável gerando absurdo. \square

Definição 9.14.3. O recobrimento duplo acima construído é chamado *recobrimento duplo orientado de M* . Sua existência é frequentemente usada em extensões ao caso não orientável de resultados originalmente provados para o caso orientável.

Corolário 9.14.2. Seja M uma simplesmente conexa variedade. Então M é orientável.

Demonstração. De posse do recobrimento duplo orientável, suponhamos por absurdo que M é simplesmente conexa, mas não orientável. Temos recobrimento de grau dois de uma variedade conexa \hat{M} sobre M , de modo que, como M é simplesmente conexa, pela teoria dos espaços de recobrimento, o grupo de transformações de recobrimento é trivial. De fato, o recobrimento é um difeomorfismo. Isto nos diz que, M e \hat{M} são difeomorfas e, portanto, M é orientável, contradição. \square

Proposição 9.14.3. O recobrimento duplo orientado de um variedade é único a menos de isomorfismos.

Demonstração. Exercício! □

Exemplo 9.14.5. A esfera é o recobrimento duplo orientado do espaço projetivo real de mesma dimensão.

9.15 Transversalidade de aplicações e subvariedades

A noção de transversalidade é muito importante na Teoria das Variedades. Possui também inúmeras aplicações nos Sistemas Dinâmicos, em especial na estudo da estabilidade. Nesta seção, apresentamos as ideias centrais e resultados mais básicos envolvendo essa noção, assim como alguns exemplos importantes. Primeiro começamos por dizer que a noção de transversalidade é a generalização da noção de valor regular para a dada aplicação.

Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e seja $S \subset N$ uma subvariedade.

Definição 9.15.1. Dizemos que f é *transversal* a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ se

$$T_{f(p)}(N) = f'(p) \cdot T_p(M) + T_{f(p)}(S).$$

Note que não se pede que a soma acima seja direta.

Também dizemos que f é *transversal a S* se $f^{-1}(S) = \emptyset$ ou se f é transversal a S em cada ponto $p \in f^{-1}(S)$.

O que segue se vê diretamente:

- (a) No caso $S = \{y\} \subset N$ é um único ponto, temos que: f é transversal a S se e somente se y é a valor regular de f .
- (b) Se $f: M \rightarrow N$ é a submersão, então f é transversal a qualquer $S \subset N$.
- (c) Suponha que $\dim M + \dim S < \dim N$. Então f é transversal a S se e somente se $f^{-1}(S) = \emptyset$.

A proposição seguinte é uma caracterização da transversalidade para uma aplicação e a subvariedade, em termos de uma propriedade de valor regular para uma certa aplicação:

Proposição 9.15.1. Sejam $f: M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável e $S^s \subset N^n$ uma subvariedade. Sejam $q \in S$, $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local com $\psi(q) = 0$, tal que $\psi(V \cap S) = \mathbb{R}^s \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Denote por $\pi: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} =$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ a segunda projeção $\pi(x, y) = y$. Seja $U \subset M$ um conjunto aberto tal que $f(U) \subset V$ e seja $p \in U \cap f^{-1}(S) = (\pi \circ \psi \circ f|_U)^{-1}(0)$, tal que $f(p) = q$. Então:

1. f é transversal a S no pontos de $U \cap f^{-1}(S)$ se e somente se $0 \in \mathbb{R}^{n-s}$ é a valor regular de $\pi \circ \psi \circ f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$.
2. Suponha que f é transversal a S e que S e f são de classe C^r , $r \geq 1$. Então $f(M) \cap S = \emptyset$ ou $f^{-1}(S)$ é a subvariedade de M de codimensão igual à codimensão de S em N .
3. Se f é transversal a S e $f^{-1}(S) \neq \emptyset$, então para todo $p \in f^{-1}(S)$ temos

$$T_p[f^{-1}(S)] = (f'(p))^{-1}[T_{f(p)}(S)].$$

Demonstração. Podemos supor que $U \subset M$ é domínio de uma carta $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M . Assim, $\pi \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ é uma representação local de $\pi \circ \psi \circ f|_U$ em $p \in M$. Podemos também supor que $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Assim, são equivalentes as seguintes afirmações:

- f é transversal a S em p .
- $f'(p) \cdot T_p(M) + T_q(S) = T_q(N)$.
- $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) \cdot \mathbb{R}^m + \mathbb{R}^s \times \{0\} = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$.
- $\pi[(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) \cdot \mathbb{R}^m] = \mathbb{R}^{n-s}$.
- $(\pi \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0) \cdot \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n-s}$.
- $\pi \circ \psi \circ f$ é submersiva em $p \in M$.

Isto encerra a prova de (1). Vejamos a prova de (2). De fato (2) e (3) seguem da prova de (1). Em particular, quando não vazia, $f^{-1}(S)$ é subvariedade de codimensão $n - s$ de M , codimensão de S em N . Para ver que $T_p(f^{-1}(S)) = (f'(p))^{-1}[T_{f(p)}(S)]$ daremos, entretanto, uma prova direta. Seja $[\lambda] \in T_p(M)$ tal que de fato tem-se $[\lambda] \in T_p(f^{-1}(S))$. Então podemos supor que $\lambda:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow f^{-1}(S)$ é um caminho diferenciável com $\lambda(0) = p$. Mas, então, temos que $f \circ \lambda:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow S$ é um caminho diferenciável com $(f \circ \lambda)(0) = f(p)$ de modo que $[f \circ \lambda] \in T_{f(p)}(S)$. Agora, por definição da diferencial de f em p , temos que $[f \circ \lambda] = f'(p) \cdot [\lambda]$. Portanto, provamos que $T_p(f^{-1}(S)) \subset (f'(p))^{-1}[T_{f(p)}(S)]$ como subespaço. Comparando as dimensões (que são iguais), vemos que a inclusão é de fato uma igualdade. \square

Aproveitamos a motivação dada pela proposição acima para definir:

Definição 9.15.2. Sejam M^m, N^n variedades e $R \subset N, S \subset N$ subvariedades. Dizemos que R e S *se intersectam transversalmente* no ponto $p \in R \cap S$, se

$$T_p(R) + T_p(S) = T_p(M).$$

Dizemos que R e S *se intersectam transversalmente* (ou ainda, *estão em posição geral*) se $R \cap S = \emptyset$ ou elas se intersectam transversalmente em cada ponto em $R \cap S$.

Usando os mesmos argumentos da prova da Proposição 9.15.1, podemos provar:

Proposição 9.15.2. Sejam R, S, M como acima. Então:

1. R e S estão em posição geral se e somente se a aplicação de inclusão $i_R: R \rightarrow M$ é transversal à subvariedade $S \subset M$.
2. Se $R \cap S \neq \emptyset$ e R, S estão em posição geral, então a intersecção $P = R \cap S$ é a subvariedade de M , de dimensão $\dim P = \dim R + \dim S - \dim M$. Além disso, para todo $p \in P$, temos

$$T_p(P) = T_p(R) \cap T_p(S) \subset T_p(M).$$

A prova dessa proposição é deixada para o leitor como um exercício.

Agora estendemos a noção de transversalidade para pares de funções.

Definição 9.15.3. Sejam $f: M^m \rightarrow P^s$ e $g: N^n \rightarrow P^s$ aplicações diferenciáveis. Dizemos que f e g são *transversais* no pontos $p \in M$ e $q \in N$ se $f(p) = g(q) = t \in P$ e

$$T_t(P) = f'(p) \cdot T_p(M) + g'(q) \cdot T_q(N).$$

Dizemos que f e g são *aplicações transversais* se $f(M) \cap g(N) = \emptyset$ ou se ambas são transversais em cada ponto de sua intersecção.

Recordemos o seguinte lema de Álgebra Linear:

Lema 9.15.1. Seja \mathbb{E} um espaço vetorial e $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{E}$ subespaços. Denote por $D \subset \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ o subespaço diagonal. As seguintes condições são equivalentes:

(i) $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{E}$.

(ii) $\mathbb{A} \times \mathbb{B} + D = \mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

Demonstração. Exercício! □

Proposição 9.15.3. Sejam M, N, P variedades diferenciáveis e $f: M \rightarrow P$, $g: N \rightarrow P$ aplicações diferenciáveis. Então f e g são transversais em $p \in M$ e $q \in N$ ($f(p) = g(q) = t$) se e somente se $f \times g: M \times N \rightarrow P \times P$ definido por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ é transversal à diagonal $\Delta(P) \subset P \times P$ no ponto $(p, q) \in M \times N$.

Podemos agora introduzir a noção de número de intersecção: sejam $R^r, S^s \subset M^{r+s}$ subvariedades compactas. Suponha que R, S, M são orientáveis e orientadas, e também R e S estão em posição geral em M . Neste caso, $R \cap S$ é a compacto zero dimensional subvariedade e, portanto, temos $R \cap S = \{p_1, \dots, p_\ell\}$, com um número finito de pontos.

Definição 9.15.4. Dado o ponto $p \in R \cap S$ temos $T_p(M) = T_p(R) \oplus T_p(S)$ e dizemos que p é *positivo* se, dadas duas bases positivas $\{v_1, \dots, v_r\} \subset T_p(R)$ e $\{w_1, \dots, w_s\} \subset T_p(S)$, temos que $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$ é uma base positiva de $T_p(M)$. Caso contrário, p é chamada *negativa*.

Aqui usamos as orientações canônicas dos espaço tangentes.

Definição 9.15.5. O *número de intersecção* $R \# S$ de R e S é por definição a soma algébrica dos pontos $p \in R \cap S$. Em outras palavras, temos $R \# S = \#\{\text{pontos positivos}\} - \#\{\text{pontos negativos}\}$ em $R \cap S$.

Sejam agora M, N compactas e M, N, P variedades orientáveis, $f: M \rightarrow P$, $g: N \rightarrow P$ aplicações transversais, com $\dim P = \dim M + \dim N$. Neste caso, $(f \times g)^{-1}(\Delta(P))$ é uma subvariedade zero dimensional de $M \times N$, e podemos escrever

$$(f \times g)^{-1}(\Delta(P)) = \{(p_1, q_1), \dots, (p_\ell, q_\ell)\}.$$

Dado $(p, q) \in (f \times g)^{-1}(\Delta(P))$, dizemos que (p, q) é *positivo* se a orientação canônica de $T_t(P)$, onde $t = f(p) = g(q)$ é a soma da orientação de $T_p(M)$, induzida por $f'(p)$ e a orientação de $T_q(N)$ induzida por $g'(q)$. Isto significa que $\{v_1, \dots, v_r\} \subset T_p(M)$ e $\{w_1, \dots, w_s\} \subset T_q(N)$ são bases positivas, então $\{f'(p) \cdot v_1, \dots, f'(p) \cdot v_r, g'(q) \cdot w_1, \dots, g'(q) \cdot w_s\}$ é uma base positiva de $T_t(P)$ nas orientações canônicas. Caso contrário, dizemos que (p, q) é *negativa*. Assim, de forma análoga ao caso de subvariedades, temos:

Definição 9.15.6. O número de intersecção de f e g é o número $f \# g$ obtido como resultado da soma algébrica dos pontos $(p, q) \in (f \times g)^{-1}(\Delta(P))$.

9.16 Funções de Morse

Sejam M uma variedade de classe C^∞ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$. O ponto $p \in M$ é a *ponto crítico* de f se a derivada $df_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é identicamente nula. Um valor $r \in \mathbb{R}$ é a *valor crítico* se existe $p \in M$ um ponto crítico de f tal que $f(p) = r$. Se r não é um valor crítico então é um *valor regular* de f . Denote por $\text{Sing}(f)$ o conjunto de pontos críticos de f . O ponto $p \in \text{Sing}(f)$ é *não degenerado* se, dado qualquer carta local $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, válida em p , a matriz hessiana $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p))_{i,j=1}^m$ é não singular. Esta definição não depende da escolha da carta local x válida em p , pois p é um ponto crítico de f (verifique!), que pode ser provado também do seguinte modo: sejam vetores dados $v, w \in T_p(M)$. Escolha qualquer campo de vetores locais V, W definido em uma vizinhança U de p , com a propriedade que $V(p) = v, W(p) = w$. Definimos agora $d^2 f(p)(v, w) := V(p)(W(f))$, onde V e W são vistos como derivações. Então temos

$$d^2 f(p)(v, w) = [V, W](p)(f) + W(p)(V(f)) = W(p)(V(f)) + df_p([V, W](p))$$

e, como $df_p = 0$, segue que $V(p)(W(f)) = W(p)(V(f))$ depende apenas dos vetores v, w , não das extensões V, W . Assim, $d^2 f(p)(v, w)$ é bem definido e é uma aplicação bilinear simétrica em $T_p(M)$: $d^2 f(p)(v, w) = d^2 f(p)(w, v)$.

Definição 9.16.1. $d^2 f(p): T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é a *forma hessiana* de f em p .

Escrevemos $\text{hess } f(p) = d^2 f(p)$. Assim, p é um ponto crítico não degenerado se e somente se a hessiana $\text{hess } f(p)$ é uma forma não singular bem definida. Se esse é o caso, então temos definido o *índice* de f em p , como a dimensão máxima de subespaço $V \subset T_p(M)$, tal que $\text{hess } f(p)(v, v) \leq 0, \forall v \in V$. O Lema de Morse mostra que o comportamento de f em uma vizinhança de p é completamente descrito por este invariante local:

Teorema 9.16.1 (Lema de Morse). Sejam f de classe C^k , $k \geq 2$ e p ponto crítico não degenerado de índice m . Então existem local coordenadas $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em uma vizinhança de p tal que $f \circ x = f(p) - x_1^2 - \dots - x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2$. Em particular, p é isolado em $\text{Sing}(f)$.

A prova é a mesma para o caso de superfícies, igual também para o caso de abertos de espaços euclidianos.

Também com a mesma prova do caso de superfícies se obtém a versão para variedades do *Teorema de Retração de Morse*:

Teorema 9.16.2 (Morse). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^∞ e sejam $a < b$ tais que o conjunto $[a \leq f \leq b] \subset M$ é compacto (e.g., se M é compacta) e não contém pontos críticos de f . Então as superfícies de nível $[f = a]$ e $[f = b]$ são difeomorfas. De fato, $[f \leq a]$ é um retrato de deformação de $[f \leq b]$. Em particular, ambas têm o mesmo tipo de homotopia.

9.17 Funções auxiliares e Partições da unidade

Utilizaremos os seguintes lemas básicos de Cálculo em uma variável real:

Lema 9.17.1. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e suponha que f é derivável em $I \setminus \{a\}$ para algum ponto $a \in I$, mas existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$. Então f é derivável em a com $f'(a) = L$.

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in I \setminus \{a\}$ existe ponto $c_x \in I \setminus \{a\}$ entre a e x de modo que o quociente de Newton

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Fazendo $x \rightarrow a$, obtemos que $f'(c_x) \rightarrow L$ e, portanto, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow L$, de modo que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$, ou seja, f é derivável com derivada igual a L no ponto a . \square

Corolário 9.17.1. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua no intervalo aberto I , tal que f é de classe C^∞ em $I \setminus \{a\}$ para algum ponto $a \in I$. Suponha que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = 0$. Então f é de classe C^∞ em I com $f^{(k)}(a) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Consequência imediata do lema acima via Indução Matemática. \square

Lema 9.17.2. Seja $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Então f é de classe C^∞ em \mathbb{R} com todas as derivadas nulas na origem.

Demonstração. A prova segue dos seguintes fatos conhecidos:

Afirmção 9.17.1. Dados polinômios $P(x), Q(x)$, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

A prova dessa afirmação deixamos como exercício.

Uma vez de posse dessa afirmação, usaremos a seguinte:

Afirmção 9.17.2. Seja $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2}}$ para polinômios $P_n(x), Q_n(x)$.

Esta afirmação se prova trivialmente por indução sobre n . □

Como consequência desta afirmação, obtém-se a função f de classe C^∞ em \mathbb{R} com $f(x) > 0$ fora da origem, com f decrescente em $] -\infty, 0[$ e crescente em $]0, +\infty[$, sendo f infinitamente plana na origem, ou seja, $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Basicamente as mesmas ideias acima nos dão algo mais elaborado como veremos a seguir:

Denotaremos por $B(p; r) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta de centro $p \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$.

Lema 9.17.3. Dado $0 < a < b < \infty$ existe uma função $C^\infty \lambda: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

1. $\lambda(x) = 1, \forall x \in \overline{B(0; a)}$.
2. $a < |x| < b \implies 0 < \lambda(x) < 1$.
3. $\lambda(x) = 0, \forall |x| \geq b$.

Uma tal função λ é chamada uma *função auxiliar* com respeito a $B(0; a)$.

Demonstração. Seja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\alpha(x) = 0, x \geq 0$ e $\alpha(x) = e^{-\frac{1}{x}}, x > 0$. Então, como acima, α é de classe C^∞ em \mathbb{R} .

Definimos agora $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $\beta(x) = \alpha(x-a) \cdot \alpha(b-x)$ de modo que β é de classe C^∞ e se anula fora do intervalo $[a, b]$. Pomos finalmente $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ como

$$\gamma(x) = \frac{1}{\int_a^b \beta(t)dt} \int_x^b \beta(t)dt$$

de modo a obtermos a função procurada como definida por $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, $\lambda(x) = \gamma(|x|)$. \square

Lembramos que, dado uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço topológico, o *suporte* de f é por definição $\text{supp}(f) := \{x \in X, f(x) \neq 0\} \subset X$.

Definição 9.17.1. Seja M uma variedade e seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M . Uma *partição da unidade subordinada a \mathcal{U}* é uma família de aplicações $\lambda_j: M \rightarrow [0, 1]$, $j \in J$, com as seguintes propriedades:

- (i) A família $\{\text{supp}(\lambda_j), j \in J\}$ é *localmente finita*: dado um ponto qualquer $p \in M$ existe a vizinhança $p \in V$ tal que $V \cap \text{supp}(\lambda_j) = \emptyset$ exceto para um número finito de índices $j \in J$.
- (ii) $\forall x \in M$ temos $\sum_{j \in J} \lambda_j(x) = 1$ (note que esta soma é finita).
- (iii) Dado $j \in J$, existe $i(j) \in I$ tal que $\text{supp}(\lambda_j) \subset U_{i(j)}$.

A partição é *partição estritamente subordinada a \mathcal{U}* se temos, a menos de reordenação, $I = J$ e

- (iv) $\text{supp}(\lambda_j) \subset U_j, \forall j \in J$.

Em particular temos:

- (iv) $\{\text{Int}(\text{supp}(\lambda_j))\}_{j \in J}$ é uma cobertura aberta de M localmente finita, com $\text{Int}(\text{supp}(\lambda_j)) \subset U_j, \forall j \in J$.

O resultado central é o seguinte:

Teorema 9.17.1. Seja M uma variedade C^r , $r \geq 0$. Dada uma cobertura aberta de M , é possível encontrar uma partição da unidade estritamente subordinada.

A prova é baseada nos seguintes lemas:

Lema 9.17.4. Sejam M uma variedade e \mathcal{U} uma cobertura aberta de M . Existe uma cobertura aberta enumerável $\mathcal{V} = \{V_k, k \in \mathbb{N}\}$ de M , mais fina que \mathcal{U} , tal que \mathcal{V} é localmente finita e cada V_k é a domínio coordenado, de um carta $\varphi_k: V_k \rightarrow B(0; 3) \subset \mathbb{R}^n$, de modo que a coleção $\{W_k := \varphi_k^{-1}(B(0; 1))\}_{k \in \mathbb{N}}$ é também um recobrimento de M .

Demonstração. Primeiro observamos que M admite uma *exaustão* por compactos, isto é, $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ onde cada $K_i \subset M$ é um subconjunto compacto com $K_i \subset \text{Int}(K_{i+1})$. O compacto K_2 é coberto por um número finito de abertos W , como os W_k , com os abertos V (como os V_k) contidos em $\text{Int}(K_3)$ e em algum aberto U de \mathcal{U} . De modo similar, $K_3 \setminus \text{Int}(K_2)$ pode ser coberto por um número finito de abertos W com os V associados estando contidos em $\text{Int}(K_4) \setminus K_1$, e algum aberto $U \in \mathcal{U}$. Raciocinando de modo análogo para $K_4 \setminus \text{Int} K_3$, $K_5 \setminus \text{Int} K_4$ e assim sucessivamente obtemos a cobertura enumerável $\mathcal{W} = \{W_1, \dots\}$ de M e, associada a essa, cobertura $\mathcal{V} = \{V_1, \dots\}$. Temos que \mathcal{V} refina \mathcal{U} por construção e é localmente finita, porque cada V_i intersecta apenas um número finito de abertos $U \in \mathcal{U}$, pois está contido em algum compacto K_j . \square

O próximo passo é o seguinte lema:

Lema 9.17.5. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_j, j \in \mathbb{N}\}$ de M , de classe C^r , existe uma partição da unidade de classe C^r , subordinada a \mathcal{U} .

Demonstração. Denotamos por $\mathcal{V} = \{V_1, \dots\}$ a cobertura enumerável dada pelo lema anterior, que refina \mathcal{U} . Pelo Lema 9.17.3, podemos construir funções auxiliares de classe C^r , $\lambda_j: M \rightarrow [0, 1]$ tais que $\lambda_j(x) = 1$ se $x \in \varphi_j^{-1}(B(0; 1)) = W_j$ e $\lambda_j(x) = 0$ se x está fora da bola $\varphi_j^{-1}(B(0; 2))$. Seja $\lambda: M \rightarrow [0, \infty[$ a soma $\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j(x)$, $x \in \mathbb{N}$. Claramente λ é de classe C^r (bem definida, pois \mathcal{V} é localmente finita de modo que a soma acima é localmente com um número finito de parcelas). Pomos $\xi_j: M \rightarrow [0, 1]$ dada por $\xi_j = \lambda_j / \lambda$ obtendo, então, partição da unidade subordinada à cobertura \mathcal{U} , pois essa é refinada por \mathcal{V} . \square

Finalmente podemos completar a prova do Teorema 9.17.1.

Prova do Teorema 9.17.1. Seja $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ cobertura aberta qualquer de M . Pelo Lema 9.17.5, existe partição C^r da unidade $\sum_i \lambda_i = 1$, subordinada a \mathcal{U} .

Desse modo, podemos usar o *Axioma da Escolha* para tomar uma função $\nu: \mathbb{N} \rightarrow J$ tal que $V_i \subset U_{\nu(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{V} = \{V_1, \dots\}$ é dada pelo Lema 9.17.4.

Definimos, então, de modo natural as funções C^r ; $\xi_j := \sum_{\nu(i)=j} \lambda_i$. Como \mathcal{V} é localmente finita, vale que $\overline{\bigcup_{\nu(i)=j} V_i} = \bigcup_{\nu(i)=j} \overline{V_i}$ e, logo, $\text{supp}(\xi_j) = \bigcup_{\nu(i)=j} \overline{V_i}$. Deixamos para o leitor verificar que $\{\text{supp}(\xi_j)\}_{j \in J}$ é localmente finita. Finalmente definimos $F := \sum_{j \in J} \xi_j$ e $\tilde{\xi}_j := \xi_j / F$ de modo que $\{\tilde{\xi}_j\}_{j \in J}$ é a partição procurada, estritamente subordinada a \mathcal{U} . □

Esse resultado também é usado para construir aproximações diferenciáveis de funções contínuas em variedades.

9.18 Campos de vetores em variedades

Seja M^n uma variedade e denote por $\pi : TM \rightarrow M$ seu fibrado tangente. Um *campo de vetores* em um subconjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação $X : U \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = i_U : U \rightarrow M$, onde i_U é a aplicação de inclusão.

Escolhendo uma carta local $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos escrever, para cada $p \in U$,

$$X(x(p)) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(p),$$

definindo desse modo funções $a_j : U \rightarrow \mathbb{R}$. O campo de vetores X é de classe C^r se as funções a_j são de classe C^r .

Escolhemos outra carta local $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $p \in U \cap V$. Escreva também

$$X(y(q)) = \sum_{j=1}^n \beta_j(q) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}(q).$$

Então em $U \cap V$ temos

$$\beta_i(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p), \forall i = 1, \dots, n.$$

Em outras palavras, a cada carta local corresponde uma representação de X dada por um campo de vetores em \mathbb{R}^n e dois deles diferem pela ação dos Jacobianos das mudanças de coordenadas. Vamos assumir que X é definido de classe C^r em

M . Uma *trajetória* de X é uma curva diferenciável $c: I \rightarrow M$ tal que $X(c(t)) = c'(t)$, $\forall t \in I$. Em outras palavras, a restrição de X à curva c coincide com o vetor tangente (velocidade) de c .

Utilizando representações locais para o campo de vetores na variedade, os resultados de existência, unicidade e dependência das soluções com respeito aos parâmetros, no caso de equações autônomas em abertos de \mathbb{R}^m , podemos concluir:

Teorema 9.18.1. Seja X um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$ em M . Para cada $p \in M$, existe uma única trajetória $\phi_p(t)$ definida para algum intervalo $(-\epsilon_p, \epsilon_p)$, com $\phi_p(0) = p$. Além disso, existe um conjunto aberto $U_p \ni p$ tal que: para qualquer $q \in U_p$, podemos tomar $\epsilon_q \geq \epsilon > 0$ para algum $\epsilon > 0$, que define uma aplicação

$$\phi_{U_p}: U_p \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M, (q, t) \mapsto \phi_q(t)$$

chamada *fluxo local* de X em U , que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\phi(q, 0) = q$, $\forall q \in U_p$.
- (ii) Se $s, t, s + t \in]-\epsilon, \epsilon[$, temos $\phi(t + s, q) = \phi(t, \phi(s, q))$, $\forall q \in U_p$.
- (iii) Se X é de classe C^k , então ϕ_{U_p} é de classe C^k em $U_p \times]-\epsilon, \epsilon[$.
- (iv) Se M é compacto, podemos tomar $\epsilon = +\infty$, isto é, o fluxo local é definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e temos uma ação $\phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de $(\mathbb{R}, +)$ em M . Isto é, o chamado *fluxo global* de X em M .

Exemplo 9.18.1. Como sabemos $T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de modo natural, como a projeção $\pi: T\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por $\pi(p, v) = p$, um campo de vetores em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é da forma $X(p) = (p, v_p)$, onde $p \in U$ e v_p é um vetor tangente a \mathbb{R}^m com origem em p . Podemos, então, identificar X com sua segunda coordenada $v: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \mapsto v_p$, de forma a entendermos campos de vetores em $U \subset \mathbb{R}^m$ simplesmente como aplicações $v: U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Denotemos por $\mathcal{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores classe C^r na variedade M .

Proposição 9.18.1. $\mathcal{X}^r(M)$ é um módulo real sobre o anel de funções de classe C^∞ de M em \mathbb{R} .

Demonstração. Basicamente a prova consiste em verificar que se podem definir soma de campos de vetores e multiplicação por escalar, assim como uma ação de $\mathcal{X}^r(M)$ em $C^\infty(M)$, o que se faz de forma natural e óbvia, utilizando as caracterizações e construções dadas para o espaço tangente e o fibrado tangente. \square

Em $\mathcal{X}^r(M)$, distinguí-se a *seção nula*, ou seja, o campo de vetores $\theta: M \rightarrow TM$ que tem representações locais da forma:

$$(T\varphi \circ \theta \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Proposição 9.18.2. Seja $\theta: M \rightarrow TM$ a seção nula. Então a imagem $\theta(M) \subset TM$ é uma subvariedade difeomorfa a M . De fato, isso vale para a imagem $X(M) \subset TM$ de qualquer campo de vetores $X \in \mathcal{X}^r(M)$.

Demonstração. Com efeito, basta observar que a composição $\pi \circ X$, onde $\pi: TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, é a identidade. Dessa forma, $X: M \rightarrow TM$ é uma imersão que é um homeomorfismo sobre a imagem, ou seja, um mergulho. \square

9.18.1 Singularidades simples

Passamos agora a estudar campos de vetores de um ponto de vista mais local. Seja X um campo de vetores em M . Uma *singularidade* de X é um ponto $p \in M$ tal que $X(p) = 0 \in T_p(M)$. Uma singularidade $p \in M$ é *singularidade simples* se existe uma carta local $x: U \rightarrow M$, válida em p , tal que se $X(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(x)$, então $\det \left(\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \right)(p) \neq 0$. As seguintes proposições asseguram que a definição não depende da escolha das cartas locais.

Proposição 9.18.3. Uma singularidade $p \in M$ é simples se e somente se as subvariedades $X(M) \subset TM$ e $\theta(M) \subset TM$ (onde $\theta: M \rightarrow TM$ é a seção nula), se intersectam transversalmente em p .

Demonstração. Em uma representação local, temos X e θ dados por

$$(T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = (x, v(x)) \text{ e } (T\varphi \circ \theta \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0).$$

Assim, as seguintes afirmações são equivalentes:

- p é ponto de intersecção transversal de X e θ .
- $v: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e a função nula $O: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto 0$ se intersectam transversalmente em $\varphi(p)$.

- $v(\varphi(p)) = 0$ e $v'(\varphi(p)) \cdot \mathbb{R}^m + O \cdot \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$.
- $v(\varphi(p)) = 0$ e $v'(\varphi(p)) \cdot \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$.
- $v(\varphi(p)) = 0$ e $\det v'(\varphi(p)) \neq 0$.

Isto encerra a prova. □

Proposição 9.18.4. Seja $X: M \rightarrow TM$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$.

- (i) As singularidades simples de X são isoladas.
- (ii) Se as singularidades de X são simples e M é compacto então $\text{sing}(X)$ é finito.

Demonstração. Para provar (i), basta aplicar o Teorema da Aplicação Inversa a $v: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, segunda coordenada de uma representação local como acima de X . (ii) segue imediatamente de (i). □

Definição 9.18.1. Seja X um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$ em M variedade orientada m -dimensional. Dada uma singularidade simples $p \in \text{sing}(X) \subset M$, definimos o *índice* de X em p como o índice de intersecção de $X(M)$ e $\theta(M)$ em p , fixada a orientação de M e, portanto, as de $X(M)$ e $\theta(M)$. Denotamos esse número por $I(X, p)$ de modo que, como p é simples, temos $I(X, p) = \pm 1$. Suponha agora que X admite apenas singularidades simples em M , compacta e orientada. O *índice total* de X em M é definido por

$$I(X) = \sum_{p \in \text{sing}(X)} I(X, p).$$

Outra forma de interpretar o índice $I(X, p)$ é dado pelo lema abaixo:

Lema 9.18.1. Sejam X campo de vetores C^1 em M e $p \in \text{sing}(X)$ singularidade simples de X . Dada carta $\varphi: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ de M válida em p com $\varphi(p) = 0$, escrevemos $X_\varphi := T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ na forma $X_\varphi(x) = (x, v(x))$, então temos $I(X, p) = \text{sign}(\det v'(0))$, ou seja, $I(X, p)$ é igual a $+1$ se e somente $v'(0)$ tem determinante positivo e igual a -1 caso contrário.

A prova do lema se faz de modo direto a partir das definições e da escrita local para X_φ dadas acima.

Definição 9.18.2. A *característica de Euler* de uma variedade compacta orientada M é o número inteiro $\chi(M)$ obtido como o índice total $I(X)$ de um campo de vetores C^1 com singularidades simples X em M .

Observação 9.18.1. É fundamental observar que se prova, por meios de Topologia Diferencial, que o índice total $I(X)$ não depende do campo X tomado (de classe C^1 com singularidades simples em M). De fato, pode-se estender, usando o conceito de *grau* e/ou elementos de Topologia Algébrica, a noção de índice para uma singularidade isolada de um campo de vetores contínuos em M .

9.19 Espaços de funções em variedades

Sejam M, N variedades de classe C^r , $r \geq 0$. Denotaremos por $C^r(M, N)$ o espaço de aplicações $f: M \rightarrow N$ de classe C^r . Há várias questões relacionadas a esse espaço que, embora pareçam naturais, não possuem resposta imediata. Por exemplo:

1. $C^r(M, N) \neq \emptyset$?
2. Como é a inclusão $C^r(M, N) \subset C^0(M, N)$?
3. Existe alguma topologia natural no espaço $C^r(M, N)$?

Vejamos como responder essas questões e outras no que se segue:

O primeiro passo é considerar o caso $0 \leq r < \infty$. Sejam $f, g \in C^r(M, N)$. Dadas quaisquer cartas locais (φ, U) , (ψ, V) de M e N respectivamente e um subconjunto compacto $K \subset U$ com $f(K) \subset V$, definimos para $\epsilon > 0$ e g tal que $g(K) \subset V$:

$$\|\psi \circ g \circ \varphi^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\|_{r, K} < \epsilon \iff |D^{(k)}(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})(y) - D^{(k)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y)| < \epsilon$$

para todo $y \in \varphi(K)$ e para todo $k = 0, \dots, r$. Então definimos os seguintes conjuntos de aplicações

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon) := \left\{ g \in C^r(M, N); g(K) \subset V \text{ e } \|\psi \circ g \circ \varphi^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\|_{r, K} < \epsilon. \right\}$$

Seja \mathcal{T}_W a topologia definida em $C^r(M, N)$ pelos conjuntos da forma

$$\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon).$$

Os conjuntos abertos em \mathcal{T}_W são, portanto, intersecções finitas de tais conjuntos.

Definição 9.19.1. A topologia fraca em $C^r(M, N)$ é a topologia \mathcal{T}_W , também chamada topologia compacto-aberto. O espaço topológico $(C^r(M, N), \mathcal{T}_W)$ denotamos por $C^r_W(M, N)$.

Dada função $f \in C^r(M, N)$. Uma vizinhança vizinhança de f em $C^r_W(M, N)$ é um subconjunto $V \subset C^r(M, N)$ que contém uma união de intersecções finitas de conjuntos $\mathcal{N}^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon)$.

Tomemos agora um atlas $\Phi = \{(\varphi_j, U_j)\}_{j \in J}$ de M com a propriedade de que Φ é localmente finito (isto é, para todo $p \in M$, existe vizinhança $V_p \ni p$ em tal que V_p intersecta apenas um número finito de abertos U_j). Sejam também $K = \{K_j\}_{j \in J}$ família de compactos $K_j \subset U_j$ e $\Psi = \{(\psi_j, V_j)\}_{j \in J}$ família de cartas de N (não necessariamente um atlas), e finalmente, $\epsilon = \{\epsilon_j\}_{j \in J}$ família de números reais $\epsilon_j > 0$. Dada $f \in C^r(M, N)$ tal que $f(K_j) \subset V_j, \forall j \in J$, definimos o conjunto

$$\mathcal{N}^r_S(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon) := \left\{ g \in C^r(M, N); g(K_j) \subset V_j, \forall j \in J \text{ e } \|\psi_j \circ g \circ \varphi_j^{-1} - \psi_j \circ f \circ \varphi_j^{-1}\|_{r, K_j} < \epsilon_j, \forall j \in J \right\}.$$

Lembramos que, dada aplicação de classe C^r , $h: W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde W é aberto, a norma C^r de h em um compacto $K \subset W$ é definida por

$$\|h\|_{r, K} := \sup\{|h^{(\ell)}(x)|; x \in K, \ell = 0, \dots, r\}.$$

Podemos escrever

$$\mathcal{N}^r_S(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon) := \bigcap_{j \in J} \mathcal{N}^r(f; (\varphi_j, U_j), (\psi_j, V_j), K_j, \epsilon_j).$$

Seja \mathcal{B} a coleção de todos os conjuntos $\mathcal{N}^r := \mathcal{N}^r_S(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon)$ obtidos variando-se $f, \Phi, \Psi, K, \epsilon$ como acima.

Lema 9.19.1. \mathcal{B} é base de uma topologia em $C^r(M, N)$.

Demonstração. É preciso provar duas afirmações:

1. Dada $f \in C^r(M, N)$, existe $\mathcal{N}^r \in \mathcal{B}$ tal que $f \in \mathcal{N}^r$.
2. Dadas $f \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ com $\mathcal{N}_j \in \mathcal{B}$, existe $\mathcal{N}_3 \in \mathcal{B}$ tal que $f \in \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$.

A prova de tais afirmações é deixada como exercício interessante para o leitor. \square

Definição 9.19.2. A topologia induzida por \mathcal{B} em $C^r(M, N)$ é chamada *topologia forte* ou *topologia fina de Whitney*, e o espaço topológico correspondente é denotado por $C_S^r(M, N)$.

Observação 9.19.1. Algumas observações sobre $C_W^r(M, N)$ e $C_S^r(M, N)$ são como segue:

1. A aplicação identidade $i : C_S^r(M, N) \rightarrow C_W^r(M, N)$ é contínua, ou seja, $C_S^r(M, N)$ é mais fina do que $C_W^r(M, N)$. O contrário, porém, nem sempre é verdade, bastando observar que $C_W^0(M, N)$ é a topologia da convergência uniforme em partes compactas.
2. Se M é compacta, então, $i : C_S^r(M, N) \rightarrow C_W^r(M, N)$ é um homeomorfismo, ou seja, as topologias forte e fraca são a mesma.
3. Em geral, se M é não compacta e N é de dimensão ≥ 1 , então $C_W^r(M, N)$ é não metrizável (não há sistema fundamental de vizinhanças para os pontos desse espaço).
4. O espaço $C_S^r(M, N)$ possui a boa propriedade de que vale o *Teorema de Categoria de Baire*

Vejamos agora como introduzir os espaços $C_W^\infty(M, N)$ e $C_S^\infty(M, N)$: a *topologia forte* em $C^\infty(M, N)$ será a união das topologias induzidas pelas inclusões $i : C^\infty(M, N) \rightarrow C_S^r(M, N)$, $r = 0, 1, \dots$. A *topologia fraca* em $C^\infty(M, N)$ é a união das topologias dadas pelas inclusões $i : C^\infty(M, N) \rightarrow C_W^r(M, N)$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Vários conjuntos interessantes são abertos na topologia forte. Vejamos alguns deles:

Teorema 9.19.1. *Sejam M^m, N^n variedades de classe C^r , $r \geq 1$. São abertos em $C_S^r(M, N)$ os seguintes conjuntos:*

- $\text{Im}^r(M, N)$ das imersões de classe C^r de M em N .
- $\text{Sub}^r(M, N)$ das submersões de classe C^r de M em N .
- $\text{Merg}^r(M, N)$ dos mergulhos de classe C^r de M em N .
- $\text{Prop}^r(M, N)$ das aplicações próprias de classe C^r de M em N .
- $\text{Diff}^r(M, N)$ dos difeomorfismos de classe C^r ($r \geq 1$) de M em N .

Demonstração. Como certamente vale $\text{Im}^r(M, N) = \text{Im}^1(M, N) \cap C^r(M, N)$, basta provar que $\text{Im}^1(M, N)$ é aberto em $C^1(M, N)$. Seja, então, $f: M \rightarrow N$ uma imersão C^1 e seja $\Psi^0 = \{(\psi_\nu, V_\nu)\}_{\nu \in \mathcal{V}}$ atlas em N .

Afirmção 9.19.1. Existe atlas $\Phi = \{(\varphi_j, U_j)\}_{j \in J}$ de M tal que:

1. Cada U_j tem fecho compacto em M .
2. Para cada $j \in J$, existe $\nu(j) \in \mathcal{V}$ com $f(U_j) \subset V_{\nu(j)}$.

A afirmação tem prova imediata. Pomos, então, $V_j := V_{\nu(j)}$ e $\psi_j := \psi_{\nu(j)}$, obtendo família $\Psi = \{(\psi_j, V_j)\}_{j \in J}$ de cartas de N . Seja $K = \{K_j\}_{j \in J}$ família de compactos cobrindo M , com $K_j \subset U_j$ (lembre-se que cada U_j é aberto de fecho compacto em M). Seja também $A_j := \{(\psi \circ f \circ \varphi_j^{-1})'(x) : x \in \varphi_j(K_j)\} \subset \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Como $f: M \rightarrow N$ é imersão, segue que A_j é formado por aplicações lineares injetivas de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n , obtidas fazendo-se x variar em $\varphi_j(K_j)$. Por outro lado, $\det: \mathbb{R}^{m^2} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, logo, o conjunto das aplicações lineares injetivas de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n é um conjunto aberto no espaço vetorial normado $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Como os $\varphi_j(K_j)$ são compactos, segue que A_j é compacto de modo que existe $\epsilon_j > 0$ tal que se $T \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é tal que $\|T - S\| < \epsilon_j$ para alguma $S \in A_j$, então $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva. Tomando-se $\epsilon = \{\epsilon_j\}_{j \in J}$, obtemos desse modo vizinhança $\mathcal{N}_S^1(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon)$ de f em $C_S^1(M, N)$ tal que cada elemento dessa vizinhança é de fato uma imersão de M em N . Isto prova o primeiro item. Vejamos agora que $\text{Merg}^r(M, N)$ é aberto na topologia forte. Como antes, basta verificar o caso $r = 1$. Começamos com o seguinte resultado preliminar:

Lema 9.19.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $W \Subset U$ aberto relativamente compacto (com fecho compacto). Dado mergulho de classe C^1 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre a imagem, existe $\epsilon > 0$ tal que se $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e $|g'(x) - f'(x)| < \epsilon, \forall x \in W$, então $g|_W$ é um mergulho.

Prova do Lema 9.19.2. Precisaremos da seguinte:

Afirmção 9.19.2. Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ e $|g'(x) - f'(x)| < \epsilon_0, \forall x \in W$, então $g|_W$ é uma imersão.

De fato, a aplicação derivada $f': U \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $x \mapsto f'(x)$ é contínua, pois f é de classe C^1 e, portanto, a imagem $f'(W) \subset \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é um subconjunto compacto.

Agora usamos o fato de que o conjunto $A^{m,n}$ das imersões lineares de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n é aberto em $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ para concluir que (como $f(\overline{W}) \subset A \subset \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$) existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $T \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $|T - f'(y)| \leq \epsilon_0$ para algum $y \in \overline{W}$, então $T \in A$. Portanto, se $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ é tal que $|g'(x) - f'(x)| < \epsilon_0$, $\forall x \in W$, então $g|_W$ é uma imersão, pois $g'(x) \in A$, $\forall x \in W$. Uma vez provada a afirmação, suponhamos por absurdo que o lema proposto é falso. Existe, então, uma sequência $g_j \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ tal que $|g'_j(x) - f'(x)| \rightarrow 0$ e $|g_j(x) - f(x)| \rightarrow 0$ uniformemente em W , mas para cada $j \in \mathbb{N}$ existem $a_j \neq b_j$ em W com $g(a_j) = g_j(b_j)$ (como \overline{W} é compacto $g|_{\overline{W}}: \overline{W} \rightarrow g(\overline{W})$ é mergulho desde que g seja injetiva). Da compacidade de W , podemos supor que $a_j \rightarrow a$ e $b_j \rightarrow b$ em $\overline{W} \subset U$. Mas, então, $f(a) = f(b)$, pois f é contínua. Como $a_j \neq b_j$, podemos definir o vetor

$$v_j = \frac{b_j - a_j}{|b_j - a_j|} \in S^{n-1}.$$

Da compacidade de S^{n-1} , podemos supor que $v_j \rightarrow v \in S^{n-1}$. Mas sendo g_j de classe C^1 e, logo, uniformemente diferenciável segue que:

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \exists \eta_\delta > 0 \text{ tal que } x, y \in U, |x - y| < \eta_\delta \\ \Rightarrow \frac{|g_j(x) - g_j(y) - g'_j(y) \cdot (x - y)|}{|x - y|} < \delta. \end{aligned}$$

Isto nos diz que

$$\lim \frac{|g_j(a_j) - g_j(b_j) - g'_j(b_j) \cdot (a_j - b_j)|}{|a_j - b_j|} = 0.$$

Como $|g'_j(x) - f'(x)| \rightarrow 0$ uniformemente em W , temos que

$$\frac{|g_j(a_j) - g_j(b_j) - f'(b_j) \cdot (a_j - b_j)|}{|a_j - b_j|} \rightarrow 0.$$

Mas $g_j(a_j) = g_j(b_j)$ de modo que $f'(b_j) \cdot v_j \rightarrow 0$ e, logo, $f'(b) \cdot v = 0$. Como $b \in U$ e f é imersão em U , concluimos que $v = 0$, absurdo, pois $v \in S^{n-1}$. \square

Finalmente podemos partir para a prova do resultado central para mergulhos. Uma vez mais podemos supor $r = 1$. Seja então $f: M \rightarrow N$ um mergulho C^1 . Usando o lema anterior, obtemos o seguinte:

- Um atlas localmente finito Φ de M com elementos (φ_j, U_j) .
- Uma família Ψ de cartas para N com cartas (ψ_j, V_j) , sendo que $f(U_j) \subset V_j$.
- Uma família K de compactos K_j cobrindo M de modo que os seus interiores $\text{Int } K_j = W_j$ ainda cobrem M .
- Uma família ϵ de números positivos $\epsilon_j > 0$ tais que se $g \in \mathcal{N}_0 := \mathcal{N}^1(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon)$, então $g(U_j) \subset V_j$ e $g|_{W_j}$ é um mergulho C^1 .

Como f é um mergulho vale o seguinte:

Afirmção 9.19.3. Existem (para cada j) abertos disjuntos A_j, B_j em N tais que $f(K_j) \subset A_j$ e $f(M \setminus U_j) \subset B_j$.

Existe, portanto, vizinhança \mathcal{N}_1 de f em $C_S^1(M, N)$ tal que se $g \in \mathcal{N}_1$, então $g(K_j) \subset A_j$ e $g(M \setminus U_j) \subset B_j$.

Afirmção 9.19.4. Se $g \in \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}_1$, então g é um mergulho.

Prova da afirmação. Como $g \in \mathcal{N}_0$, temos que g é uma imersão. Para ver que g é injetiva, tomamos $x \neq y$ em M com $x \in K_j$. Se $y \in K_j$, então $g(x) \neq g(y)$, pois g é injetiva em U_j . Suponha, então, que $y \in M \setminus U_j$. Nesse caso, $g(x) \in A_j$ e $g(y) \in B_j$ e, logo, $g(x) \neq g(y)$. Resta, portanto, ver que a inversa g^{-1} é contínua. Seja $\{y_\nu\} \subset M$ sequência com $g(y_\nu) \rightarrow g(x)$, vejamos que $y_\nu \rightarrow x$. Se $x \in K_j$, então $g(x) \in A_j$ e apenas um número finito de $g(y_\nu)$ podem estar em B_j e, logo, quase todo y_ν está em U_j e portanto (como $g|_{U_j}: U_j \rightarrow g(U_j)$ é um homeomorfismo) vale $y_\nu \rightarrow x$.

Que $\text{Prop}^r(M, N)$ é aberto na topologia forte é um exercício que deixamos para o leitor. \square

Utilizando o fato de que toda aplicação própria é fechada e de que um mergulho fechado entre duas variedades conexas de mesma dimensão é de fato um difeomorfismo prova-se também que $\text{Diff}^r(M, N)$ é aberto na topologia forte. \square

9.19.1 Um pouco de teoria de aproximação

Abrimos a seção enunciando o resultado central que queremos demonstrar:

Teorema 9.19.2. Sejam M, N variedades de classe C^r . Então, dado qualquer $0 \leq s \leq r$, temos que a inclusão $C^r(M, N) \hookrightarrow C^s(M, N)$ é densa se consideramos a topologia forte. Em outras palavras, cada aplicação de classe C^s de M em N pode ser aproximada na topologia forte por aplicação de classe C^r .

Como primeiro resultado nessa direção, que não necessita de técnicas especiais como convolução, temos:

Proposição 9.19.1. Seja M variedade C^r , $1 \leq r \leq \infty$. Então $C^r(M, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C_S^0(M, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cobertura aberta localmente finita de M . Para cada $\alpha \in A$, seja dado $\epsilon_\alpha > 0$.

Afirmção 9.19.5. Dada aplicação contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe aplicação $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r tal que $|g - f| < \epsilon_\alpha$ em V_α , $\forall \alpha \in A$.

Prova da afirmação. Para cada $x \in M$, existe vizinhança $W_x \ni x$ tal que W_x intersecta apenas um número finito de abertos V_α . Assim, $\delta_x := \min\{\epsilon_\alpha : x \in V_\alpha\}$. Seja agora $U_x \subset W_x$ vizinhança aberta de x , de modo que $y \in U_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \delta_x$. Pomos, então, $g_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ como aplicação constante $g_x(y) = f(x)$. Assim, estendemos essas aplicações a aplicações constantes em M e reindexamos a cobertura $\{U_x; x \in M\}$ de M do seguinte modo: existe cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ de M e aplicações (constantes) $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g \in U_i \cap V_\alpha$ então $|g_i(y) - f(y)| < \epsilon_\alpha$. Seja $\sum_i \lambda_i = 1$ partição C^∞ da unidade subordinada a \mathcal{U} . Pomos $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$g(y) = \sum_i \lambda_i(y) g_i(y).$$

Note que $g \in C^r$. Para $y \in V_\alpha$, temos

$$\begin{aligned} |g(y) - f(y)| &= \left| \sum_i \lambda_i(y) g_i(y) - \left(\sum_i \lambda_i(y) \right) f(y) \right| \\ &= \left| \sum_i \lambda_i(y) (g_i(y) - f(y)) \right| \\ &\leq \sum_i \lambda_i(y) |g_i(y) - f(y)| \\ &< \sum_i \lambda_i(y) \epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha. \end{aligned}$$

□

A afirmação implica a proposição. □

9.19.2 Convolução

Recordaremos agora o conceito e propriedades básicas da *convolução*, bem conhecidos de um aluno de um curso de Equações Diferenciais Parciais ou Teoria da Medida.

Começamos com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação contínua e $\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação contínua de suporte compacto $\text{supp}(\theta) \subset \overline{B^m(0; R)}$, sendo que escolhemos $R > 0$ o menor raio com essa propriedade.

Definição 9.19.3. A *convolução* de f por θ é a aplicação $\theta * f: U_R \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U_R := \{x \in U; B^m(x; R) \subset U\}$, pondo-se

$$(\theta * f)(x) = \int_{\overline{B^m(0; R)}} \theta(y) f(x - y) dy$$

integral de Riemann ordinária.

Observação 9.19.2. A respeito da convolução temos:

1. Note que $\theta = 0$ no bordo de $B^m(0; R)$ de modo que o integrando se estende continuamente a \mathbb{R}^m sendo igual a 0 fora de $\overline{B^m(0; R)}$. Podemos, então, reescrever

$$(\theta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta(y) f(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \theta(x - z) f(z) dz, \quad x \in U_R$$

via a mudança de variáveis $z = x - y$.

2. A noção de convolução é definida para uma classe mais ampla de funções que as contínuas.
3. Uma boa interpretação da convolução $(\theta * f)(x)$ é como uma média ponderada dos valores de f próximo a x . Por isso mesmo, veremos que $\theta * f$ aproxima f suavemente para θ suave.

Definição 9.19.4. Uma aplicação $\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um *núcleo de convolução* se $\theta \geq 0$, $\text{supp}(\theta)$ é compacto e $\int_{\mathbb{R}^m} \theta(y) dy = 1$.

Pelo que vimos das funções auxiliares (Lema 9.17.3), temos que $\forall R > 0$ existe núcleo de convolução C^∞ , $\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ com $\text{supp}(\theta) = \overline{B^m(0, R)}$. Dada $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , definimos para um compacto $K \subset U$ a norma

$$\|f\|_{r,K} := \sup\{\|D^{(k)} f(x)\|; x \in K, k = 0, 1, \dots, r\}.$$

As principais propriedades que utilizaremos da operação de convolução estão resumidas na proposição abaixo:

Proposição 9.19.2. Sejam θ e f contínuas como acima. A convolução $\theta * f: U_R \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem as seguintes propriedades:

1. Se $\theta|_{\text{Int}(\text{supp}(\theta))}$ é de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, então $\theta * f$ também é de classe C^r e dado $0 \leq k \leq r < \infty$ temos que $D^{(k)}(\theta * f) = (D^{(k)}\theta) * f$.
2. Se f é de classe C^r , então $\theta * f$ é de classe C^r e vale $D^{(k)}(\theta * f) = \theta * (D^{(k)}f)$ para todo k de 0 a r .
3. Seja f de classe C^r em U com $0 \leq r \leq \infty$. Dados $K \subset U$ compacto e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $K \subset U_\delta$ e $\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um núcleo de convolução C^r com $\text{supp}(\theta) = \overline{B^m(0; \delta)}$, então $\theta * f$ é de classe C^r sendo que $\|\theta * f - f\|_{r,K} < \epsilon$.

A prova é bem conhecida de um aluno de um curso de EDP ou de Teoria da Medida. Como corolário, temos:

Corolário 9.19.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dada $f: U \rightarrow V$, $K \subset U$ compacto e $\epsilon > 0$, existe aplicação $g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , com $K \subset W \Subset U$, sendo W aberto, de modo que $\|g - f\|_{r,W} < \epsilon$.

Demonstração. Seja $\delta > 0$ tal que $K \subset U_{2\delta}$, ou seja, $x \in K \implies B^{2m}(x; 2\delta) \subset U$. Pomos $L := \{x \in U, d(x, K) \leq \delta\}$, definindo compacto em U , com $K \subset \text{Int } L$.

Tomamos agora $\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ núcleo de convolução C^∞ suportado em $\overline{B^m(0; \delta)}$. Como $L \subset U_{2\delta}$, podemos usar o item (2) da Proposição 9.19.2 para (sendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno) obter $\|\theta * f - f\|_{r, L} < \epsilon$. Como $g = \theta * f: U_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ (pois θ é de classe C^∞ e a convolução herda a maior classe de diferenciabilidade de suas componentes), tomamos $W = \text{Int } L$ e $g|_W: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ com $\|g - f\|_{r, W} < \epsilon$. \square

Finalmente obtemos o seguinte resultado básico:

Teorema 9.19.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Então $C^\infty(U, V)$ é denso em $C_r^r(U, V)$ qualquer que seja $r \in \{0, 1, \dots\}$.

Demonstração. Podemos supor $0 \leq r < \infty$ pela própria definição da topologia forte em $C^\infty(U, V)$. Dada $f \in C^r(U, V)$, seja dada vizinhança $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f)$ de f em $C^r(U, V)$. Pelo que sabemos, existe vizinhança $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(f)$ de f em $C_r^r(U, \mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{N}_1 \subset C^r(U, V)$ (ou seja, $C^r(U, V)$ é aberto em $C^r(U, \mathbb{R}^n)$ exercício!). Assim, podemos supor que $V = \mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{N}(f)$ da forma $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(f; K; \epsilon)$ onde K é uma família de compactos K_j , localmente finita e cujos compactos cobrem U e ϵ é uma família de números reais positivos ϵ_j . Então $\mathcal{N}(f) = \{g \in C^r(U, \mathbb{R}^n); \|g - f\|_{r, K_j} < \epsilon_j, \forall j\}$. Seja agora $\sum_j \lambda_j = 1$ uma partição C^∞ da unidade em U com $\text{supp}(\lambda_j) \subset K_j$. Dados números reais positivos δ_j , existem aplicações C^∞ $g_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|g_j - f\|_{r, K_j} < \delta_j$ (Corolário 9.19.1). Seja agora $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sum_j (\lambda_j \cdot g_j)(x)$.

Claramente g é de classe C^∞ e fixado $x \in U$ a aplicação

$$C^r(U, \mathbb{R}) \times C^r(U, \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$(\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}, \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n) \mapsto D^{(r)}(\lambda \cdot \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$$

é bilinear, e logo, existe $A_r \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|D^{(r)}(\lambda\varphi)(x)\| \leq A_r \cdot \max_{0 \leq \ell \leq r} \|D^{(\ell)}\lambda(x)\| \cdot \max_{0 \leq \ell \leq r} \|D^{(\ell)}\varphi(x)\|.$$

Seja, então, $A := \max\{A_0, \dots, A_r\} > 0$ e para cada j defina $\mathcal{A}_j := \{i \in J : K_i \cap K_j \neq \emptyset\}$. Temos que $j \in \mathcal{A}_j$ e esse é um conjunto finito de índices, pois a cobertura $\{K_j\}_j$ é localmente finita.

Assim, podemos escolher $C_j := \max\{\|\lambda_i\|_{r, K_i \cap K_j}; i \in \mathcal{A}_j\}$ e também $D_j := \max\{\delta_i; i \in \mathcal{A}_j\} > 0$. Para cada $x \in K_j$ e cada $0 \leq k \leq r$, temos

$$\begin{aligned}
 \|D^{(k)}g(x) - D^{(k)}f(x)\| &= \|D^{(k)}\left(\sum_j \lambda_j(x) \cdot g_j(x)\right) - D^{(k)}\left(\sum_j \lambda_j(x) \cdot f(x)\right)\| \\
 &= \|D^{(k)}\left(\sum_{j \in \mathcal{A}_i} \lambda_j(x) \cdot g_j(x)\right) - D^{(k)}\left(\sum_{j \in \mathcal{A}_i} \lambda_j(x) \cdot f(x)\right)\| \\
 &\leq \left\| \sum_{j \in \mathcal{A}_i} D^{(k)}[\lambda_j(x) \cdot (g_j(x) - f(x))] \right\| \\
 &\leq \sum_{j \in \mathcal{A}_i} \|D^{(k)}[\lambda_j(x) \cdot (g_j(x) - f(x))]\| \\
 &\leq \sum_{j \in \mathcal{A}_i} AC_i D_i = AC_i D_i (\#\mathcal{A}_i).
 \end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos $\{\delta_j\}_j$ de modo que

$$0 < \delta_j < \frac{\epsilon_i}{A \cdot C_i (\#\mathcal{A}_i)}, \quad \forall j \in \mathcal{A}_i$$

então

$$\|D^{(k)}g(x) - D^{(k)}f(x)\| < \epsilon_j, \quad \forall x \in K_j, \forall k \in \{0, \dots, r\}$$

e logo

$$\|g - f\|_{r, K_j} < \epsilon_j, \quad \forall j.$$

Isto conclui a demonstração. □

Concluimos com o nosso resultado central:

Teorema 9.19.4 (Teorema de Aproximação). Sejam M e N variedades C^r com $1 \leq r \leq \infty$. Então $C^r(M, N)$ é denso em $C^s(M, N)$ para todo $0 \leq s \leq r$.

O teorema acima se prova utilizando os resultados e técnicas anteriores (exercício!).

9.20 Teorema de Morse–Sard

Seja M uma variedade n -dimensional de classe C^∞ . Lembramos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito ter *medida de Lebesgue nula* se para qualquer $\epsilon > 0$ é possível encontrar uma cobertura aberta por bolas $B(p_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, de X tal que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B(p_j, r_j)) < \epsilon$. Uma aplicação localmente lipschitziana leva conjuntos

de medida de Lebesgue nula a conjuntos de medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^n . Isto se verifica facilmente. O fato de que uma aplicação de classe C^1 seja localmente lipschitziana (exercício!) implica que se $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 e $X \subset U$ tem medida de Lebesgue nula, então $f(X)$ tem medida de Lebesgue nula. Isto nos permite estender esta noção para variedades.

De forma análoga, se prova que $\text{Sub}^r(M, N)$ é aberto em $C_S^r(M, N)$, dessa vez utilizando a semicontinuidade do posto de uma matriz (o posto não diminui em uma vizinhança de uma matriz dada).

Definição 9.20.1. Seja $X \subset M$ qualquer subconjunto. Dizemos que X tem *medida nula* se existe um atlas de M cujas cartas $\varphi: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ têm as seguintes propriedades: $\varphi(X \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue nula.

De acordo com a observação acima, isso vale para qualquer carta local de M .

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ de medida nula. Então X não contém bolas abertas e, portanto, $\text{Int}(X) = \emptyset$. Em particular, para ponto qualquer, $x \in X$ existe uma sequência $x_n \in \mathbb{R}^n \setminus X$ com $x_n \rightarrow x$. Suponha também que X é fechado. Portanto, o complementar $\mathbb{R}^n \setminus X$ é aberto e denso. Neste caso, dizemos que X é *residual*. Essa mesma conclusão vale para subconjuntos fechados de medida nula de variedades. Suponha agora que X é um conjunto σ -compacto, isto é, $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$, onde $X_j \subset M$ é compacto. Suponha que X tem medida nula, então cada X_j é residual (de medida nula). Além disso, o complementar $M \setminus X = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} (M \setminus X_j)$ é uma intersecção enumerável de subconjuntos abertos. De acordo com o Teorema de Baire X , tem também interior vazio. Nesse caso, dizemos que $M \setminus X$ é, isto é, $M - X$ uma intersecção enumerável de subconjuntos abertos densos. Equivalentemente, X é contido em uma união enumerável de conjuntos fechados cada um tendo interior vazio.

Recordemos alguns fatos básicos a respeito destas noções:

Lema 9.20.1. Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Se $n < m$, então $f(U)$ tem medida nula em \mathbb{R}^m .

Demonstração. Definimos aplicação $G: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pondo $G(x, y) = g(x)$, então G é de classe C^1 e, portanto, localmente lipschitziana. Dessa forma,

G leva ao conjunto $U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ de medida nula em \mathbb{R}^n no conjunto $G(U \times \{0\}) \cong g(U)$ de medida nula em \mathbb{R}^n . Isto prova o lema. \square

Corolário 9.20.1. Seja $f: M \rightarrow N$ de classe C^1 onde M, N são variedades e $\dim M < \dim N$. Então $f(M)$ tem medida nula em N .

Demonstração. Basta aplicar o lema anterior a representações locais g de $f: M \rightarrow N$. \square

Corolário 9.20.2. Se $f: M \rightarrow N$ é de classe C^1 e $\dim M < \dim N$, então $f(M)$ é residual.

Demonstração. Escrevemos $M = \bigcup_{j \in J} K_j$ como união enumerável de compactos $K_j \subset M$. Como $f: M \rightarrow N$ é contínua, $f(K_j) \subset N$ é compacto logo $f(M) = \bigcup_{j \in J} f(K_j)$ é união enumerável de compactos de medida nula, sendo, portanto, residual. \square

Observação 9.20.1. Dada qualquer aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$, dizemos que o ponto $p \in M$ é a de f se $df(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$ é não sobrejetiva. Denotamos por $\text{Sing}(f) \subset M$ o conjunto de pontos críticos de f . Se f é de classe C^1 então $\text{Sing}(f)$ é fechado. Dado qualquer $y \in N \setminus f(\text{Sing}(f))$, $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou $f'(x): T_x(M) \rightarrow T_y(N)$ é sobrejetiva para todo $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, $N \setminus f(\text{Sing}(f))$ é o conjunto de valores regulares de f .

Teorema 9.20.1 (Morse–Sard). *Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^r . Se $r > \max\{0, \dim M - \dim N\}$, então:*

(i) $f(\text{Sing}(f))$ tem medida nula em N .

(ii) O conjunto de valores regulares de f em N é residual.

Prova do caso C^∞ . Passando a representações locais de f , vemos que basta provar o teorema localmente, isto é, para uma aplicação $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $W \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto. Suponhamos inicialmente que $m < n$. Nesse caso, o resultado segue do corolário anterior (Corolário 9.20.2).

Suponhamos, então, que $m \geq n$. Introduzimos agora alguma terminologia que nos será útil. Um *operador diferencial de ordem 1* significará uma aplicação

$\mathcal{D}: C^\infty(W, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(W, \mathbb{R})$ da forma $g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_k}$ para algum $k \in \{1, \dots, m\}$. Claramente a composição de t operadores diferenciais de ordem 1 é um *operador diferencial de ordem t* da forma $g \mapsto \frac{\partial^t g}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_t}}$, $k_j \in \{1, \dots, m\}$.

Escrevemos agora $f = (f_1, \dots, f_n)$ em funções coordenadas e denotamos por $\Sigma_f^1 \subset M$ o conjunto dos pontos $p \in \Sigma_f$, pontos críticos de f , tais que $\mathcal{D}f_j(p) = 0$ para todo operador diferencial \mathcal{D} de ordem $\leq m/n$ e todo índice $j = 1, \dots, n$. Seja também Σ_f^2 o conjunto dos pontos $p \in \Sigma_f$ tais que $\mathcal{D}f_j(p) \neq 0$ para algum $j \in$ e algum operador diferencial \mathcal{D} de ordem ≥ 2 . Seja finalmente Σ_f^3 o conjunto dos pontos $p \in \Sigma_f$ tais que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \neq 0$ para algum par j, k .

Com estes conjuntos decompomos o conjunto Σ_f como garante a seguinte:

Afirmção 9.20.1. Temos $\Sigma_f = \Sigma_f^1 \cup \Sigma_f^2 \cup \Sigma_f^3$.

Demonstração. Por definição temos $\Sigma_f^1 \cup \Sigma_f^2 \cup \Sigma_f^3 \subset \Sigma_f$. Seja dado $p \in \Sigma_f$. Suponha que $p \notin \Sigma_f^1$, então existe operador diferencial \mathcal{D} de ordem $\leq m/n$ e existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{D}f_j(p) \neq 0$. Agora, se a ordem de \mathcal{D} é maior ou igual que 2, então $p \in \Sigma_f^2$. Suponha, então, que a ordem de \mathcal{D} é menor do que 2. Nesse caso, \mathcal{D} tem ordem 1 e, portanto, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\mathcal{D} = \frac{\partial g}{\partial x_j}$ e daí $\mathcal{D}f_i(p) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \neq 0$, implicando, portanto, $p \in \Sigma_f^3$ de modo que a afirmação está provada. \square

Seguimos com a seguinte:

Afirmção 9.20.2. $f(\Sigma_f^1)$ tem medida nula em \mathbb{R}^n .

Demonstração. Seja t o menor inteiro maior que m/n . Seja $p_0 \in \Sigma_f^1$, então para todo operador diferencial \mathcal{D} de ordem $\leq m/n$ e para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ temos $\mathcal{D}f_j(p_0) = 0$. Seja $U \subset W$ vizinhança de p_0 com U convexo. Pela Fórmula de Taylor, escrevemos

$$f(q) = f(p_0) + f'(p_0) \cdot (q - p_0) + \frac{1}{2} \cdot (q - p_0)^2 + \dots + \frac{1}{t!} f^{(t)}(p_0) \cdot (q - p_0)^t + r(q - p_0),$$

para todo $q \in U$, onde

$$\lim_{q \rightarrow p_0} \frac{r(q - p_0)}{|q - p_0|^t} = 0.$$

Mas, então, $f(q) = f(p_0) + r(q - p_0)$ e, então, se tomamos U suficientemente pequeno, vemos que $|f(q) - f(p_0)| \leq B|q - p_0|^t$, $\forall q \in U$ para alguma constante $B > 0$. Dessa forma, U pode exatamente ser escolhido de modo que

$$p \in \Sigma_f^1 \cap U, q \in U \Rightarrow |f(q) - f(p)| \leq B|q - p|^t. \quad (9.1)$$

Seja U um cubo pequeno. Basta provar que $f(U \cap \Sigma_f^1)$ tem medida nula. Seja a a aresta de U e seja v um inteiro maior do que a aresta a . Dividimos U em v^m cubos de aresta a/v . Seja C_k , $k = 1, \dots, T$ a coleção daqueles que intersectam Σ_f^1 , então $T \leq v^m$. Cada C_k está contido em uma bola de raio $(a/v)\sqrt{m}$ (que é a sua diagonal) centrada em um ponto de U . Mas, então, $f(C_k)$ está contido em um cubo $D_k \subset \mathbb{R}^n$ com aresta $\leq 2B(\frac{a}{v}\sqrt{m})^t = A(\frac{a}{v})^t$ por conta de (9.1). Assim, a soma $\sigma(v)$ dos volumes desses cubos D_k é menor ou igual que $v^m A^m (\frac{a}{v})^{tn} = v^{m-tn} A^n a^{tn}$. Como $m - tn < 0$, segue que $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma(v) = 0$ de modo que $f(U \cup \Sigma_f)$ tem medida nula.

Observação 9.20.2. Observe que se $n = m = 1$, então $\Sigma_f = \Sigma_f^1$ e o teorema já está provado neste caso.

A seguir prosseguimos por indução em m . Tomemos $m > 1$ e suponhamos que o teorema está provado sempre que temos aplicação $C^\infty g: P \rightarrow Q$ onde $\dim P < m$ e $\dim P \geq \dim Q$. Nesse caso, temos:

Afirmção 9.20.3. $f(\Sigma_f^2 \setminus \Sigma_f^3)$ tem medida nula.

Demonstração. Seja dado ponto $p \in \Sigma_f^2 - \Sigma_f^3$, existe, então, operador diferencial \mathcal{D} de ordem 2 e existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\mathcal{D}f_j(p) \neq 0$ e tem-se por outro lado $\frac{\partial f_j}{\partial x_\ell}(p) = 0, \forall k, \ell$. Seja \mathcal{D} da forma $\mathcal{D}(g) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_\ell}$ então $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_\ell}(p) \neq 0$. Mas, então $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\ell} \right)(p) \neq 0$. Seja Θ o operador diferencial definido por $\Theta(g) = \frac{\partial g}{\partial x_\ell}$, então

1. $\frac{\partial \Theta f_j}{\partial x_i}(p) \neq 0$.
2. $\Theta f_j(p) = \frac{\partial f_j}{\partial x_\ell}(p) \neq 0$.

Seja agora $X_{i,j}$ o conjunto dos pontos que, como p , cumprem (1) e (2) acima (sendo que Θ, i, j são fixos).

Como $\Sigma_f^2 - \Sigma_f^3 \subset \bigcup_{(i,j)} (\Sigma_f \cap X_{i,j})$, basta mostrar que $f(\Sigma_f \cap X_{i,j})$ tem medida zero.

Considere então a aplicação $\Theta f_j : W \rightarrow \mathbb{R}$, Por (1) e (2), temos que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de Θf_j e como f_j é de classe C^∞ o mesmo ocorre para Θf_j de forma que sendo X_{ij} imagem inversa do valor regular $0 \in \mathbb{R}$, X_{ij} é uma subvariedade C^∞ de dimensão $m - 1$ de W . Por outro lado, é claro que $\Sigma_f \cap X_{ij} \subset \Sigma_f|_{X_{ij}}$.

Pela hipótese de indução, temos que $f(\Sigma_f|_{X_{ij}})$ tem medida nula e, portanto, $f(\Sigma_f \cap X_{ij})$ tem medida nula, provando a afirmação. \square

Mostremos finalmente:

Afirmção 9.20.4. $f(\Sigma_f^3)$ tem medida nula.

Demonstração. Dado $p \in \Sigma_f^3$, existem índices i, j tais que $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \neq 0$ e por continuidade existe uma vizinhança aberta $p \in U \subset W$ com $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(q) \neq 0, \forall q \in U$.

Mas, então, a aplicação $\pi_j : f = f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão C^∞ de modo que pela Forma Local das Submersões existem abertos $A \subset \mathbb{R}^{m-1}$, $B \subset \mathbb{R}$ e um difeomorfismo C^∞ , $h : A \times B \rightarrow U$, tal que $f_j h(x_1, \dots, x_{m-1}, t) = t, \forall (x_1, \dots, x_{m-1}, t) \in A \times B$. Apenas por simplicidade vamos supor reordenadas as coordenadas em \mathbb{R}^m de modo que $f_j = f_n$, isto é, $j = n$. Para todo ponto $(x, t) \in A \times B$, temos então que

$$f h(x, t) = (f_1 h(x, t), \dots, f_{n-1} h(x, t), t) =: (u_t(x), t)$$

onde fixado $t \in B$, temos $u_t : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ dada por

$$u_t(x) = (f_1 h(x, t), \dots, f_{n-1} h(x, t))$$

e, logo, essa é de classe C^∞ . Afirmamos que (x, t) é ponto crítico de $f h$ se e somente se x é ponto crítico de u_t (aqui se diminui a dimensão na argumentação por indução). De fato, fixado $t \in B$ para $x \in A$ temos que $f h'(x, t) : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ é sobrejetiva se e somente se $u_t'(x) : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é sobrejetiva. Assim

$$\Sigma_{f h} = \bigcup_{t \in B} \left(\Sigma_{u_t} \times \{t\} \right).$$

Como $\dim A = m - 1$ (A é um aberto de \mathbb{R}^{m-1}), segue pela hipótese de indução que $u_t(\Sigma_{u_t})$ tem medida de Lebesgue nula em \mathbb{R}^{n-1} . Denotemos por μ_k a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^k . Então

$$\begin{aligned} \mu_n(fh(\Sigma_{fh})) &= \mu_n\left(\bigcup_{t \in B} fh(\Sigma_{u_t} \times \{t\})\right) \\ &= \mu_n\left(\bigcup_{t \in B} u_t(\Sigma_{u_t}) \times t\right) \\ &= \int_B \mu_{n-1}(u_t(\Sigma_{u_t})) dt = \int_B 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Logo, $fh(\Sigma_{fh})$ tem medida nula em \mathbb{R}^n . Como $h: A \times B \rightarrow U$ é um difeomorfismo C^∞ , temos que $f(\Sigma_f^3 \cap U)$ tem medida nula em \mathbb{R}^n e, portanto, $f(\Sigma_f^3)$ tem medida nula em \mathbb{R}^n , finalizando a prova da afirmação. \square

A prova do teorema segue das afirmações anteriores e da igualdade $\Sigma_f = \Sigma_f^1 \cup \Sigma_f^2 \cup \Sigma_f^3$. \square

\square

Como corolário do Teorema de Morse–Sard, obtemos o seguinte resultado clássico:

Teorema 9.20.2. Não há retração C^∞ da bola unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$ sobre a esfera $S^{n-1} = \partial B^n \subset \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Dada retração C^∞ $h: B^n \rightarrow S^{n-1}$, podemos supor h definida de classe C^∞ em uma pequena vizinhança da esfera S^{n-1} também e temos pelo Teorema de Morse–Sard que a imagem por h dos pontos críticos de $h|_{B^n - S^{n-1}}$ tem medida nula em S^{n-1} . Em particular, existe $y \in S^{n-1}$ valor regular de $h|_{B^n}$ de modo que $N = h^{-1}(y)$ é uma subvariedade de dimensão 1 compacta da bola fechada B^n . Então temos que $\partial N = N \cap S^{n-1} = N \cap \partial B^n$ e, como $h(y) = y$ (lembre que $y \in S^{n-1}$ e que $h = \text{Id}$ em S^{n-1}), temos que $y \in N$ e logo $y \in \partial N$. A componente conexa N_y de N que contém y é então uma subvariedade compacta difeomorfa a um intervalo compacto de modo que existe um outro ponto z de ∂N com $z \neq y$. Assim, $h(z) = z$, pois $z \in S^{n-1}$ e também $h(z) = y$, pois $z \in N = h^{-1}(y)$, contradição. \square

9.21 O Teorema de transversalidade

Começamos introduzindo alguma notação. Seja $f: M \rightarrow N$ aplicação C^r , $r \geq 1$ e seja $S \subset N$ uma subvariedade C^r . Dado subconjunto $K \subset M$, dizemos que f é transversal a S ao longo de K se para todo $x \in K \cap f^{-1}(S)$ tem-se

$$T_{f(x)}N = f'(x) \cdot T_xM + T_{f(x)}N.$$

Escreveremos, então, $f \pitchfork_K S$. Quando $K = M$, temos que f é transversal a S no sentido usual.

Definimos, então, os seguintes conjuntos de aplicações:

$$\pitchfork_K^r(M, N; S) = \{f \in C^r(M, N); f \pitchfork_K S\}$$

e

$$\pitchfork^r(M, N; S) = \{f \in C^r(M, N); f \pitchfork S\}$$

O primeiro lema envolvendo esses conjuntos é o seguinte:

Lema 9.21.1. Dado subconjunto K da variedade M e dados aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ assim como subespaço linear “ \mathbb{R}^ℓ ” de dimensão ℓ de \mathbb{R}^n , temos que $\pitchfork^r(M, V; \mathbb{R}^\ell \cap V)$ é denso e aberto em $C_W^r(M, V)$.

Demonstração. Como $C_W^r(M, V)$ é aberto em $C^r(M, \mathbb{R}^n)$ (exercício!), podemos supor $V = \mathbb{R}^n$. Em \mathbb{R}^n , definimos a relação de equivalência $u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathbb{R}^\ell$ de modo que \mathbb{R}^n / \sim é simplesmente o espaço quociente clássico $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^\ell$. Seja $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^\ell$ a projeção quociente. Dada $f \in C^r(M, \mathbb{R}^n)$ e $x \in M$, temos que:

Afirmção 9.21.1. São equivalentes:

1. $f \pitchfork_x \mathbb{R}^\ell$.
2. Ou $f(x) \notin \mathbb{R}^\ell$ ou $f(x) \in \mathbb{R}^\ell$ e x é ponto regular de $\pi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^\ell$.

Prova da afirmação. Podemos supor, por meio de uma mudança linear de coordenadas, que \mathbb{R}^ℓ é gerado pelos vetores canônicos e_1, \dots, e_ℓ de \mathbb{R}^n e o quociente pelos vetores $e_{\ell+1}, \dots, e_n$ de modo que $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^\ell$ é em coordenadas $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\ell+1}, \dots, x_n)$. Escrevemos $f = (f_1, \dots, f_n)$ em funções coordenadas $f_j: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dado $x \in M$ tal

que $f \pitchfork_x \mathbb{R}^\ell$ com $f(x) \in \mathbb{R}^\ell$, temos que $\pi \circ f(z) = (f_{a+1}(z), \dots, f_n(z))$ e, portanto,

$$(\pi \circ f)'(x) \cdot T_x M = \pi'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot T_x M) = \pi_2(f'(x) \cdot T_x M)$$

onde $\pi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-a}$ é a projeção nas $(n-a)$ -últimas coordenadas $\pi_2(x_1, \dots, x_n) = (x_{a+1}, \dots, x_n)$. Observe que $f'(x) \cdot T_x M$ é um subespaço linear de \mathbb{R}^n , como $f \pitchfork_x \mathbb{R}^\ell$, tem-se que

$$f'(x) \cdot T_x M + T_{f(x)} \mathbb{R}^\ell = T_{f(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n.$$

Agora $T_{f(x)} \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^\ell$ de modo que

$$\pi_2(f'(x) \cdot T_x M + T_{f(x)} \mathbb{R}^\ell) = \pi_2(T_{f(x)} \mathbb{R}^n).$$

Portanto, $\pi_2(f'(x) \cdot T_x M) = \mathbb{R}^{n-a}$ e, então,

$$(\pi \circ f)'(x) \cdot T_x M = \mathbb{R}^{n-a} = T_{f(x)}(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a).$$

Daí segue que x é valor regular de $\pi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$. A recíproca se prova de forma absolutamente análoga. \square

Suponha agora que $f \pitchfork_K \mathbb{R}^a$. Seja dado $y \in K$.

Afirmção 9.21.2. Existe vizinhança compacta $K_y \subset K$ de y em K tal que (1) ou (2) abaixo ocorre para todo $x \in K_y$.

1. $f \pitchfork_x \mathbb{R}^\ell$.
2. Ou $f(x) \notin \mathbb{R}^\ell$ ou $f(x) \in \mathbb{R}^\ell$ e x é ponto regular de $\pi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^\ell$.

Prova da afirmação. Suponha que $f(y) \notin \mathbb{R}^\ell$. Como \mathbb{R}^ℓ é fechado e f é contínua existe vizinhança V_y de y com fecho compacto tal que $f(V_y) \cap \mathbb{R}^\ell = \emptyset$, mas, então, tomamos $K_y = \overline{V_y} \cap K$ e vemos que (1) ocorre para todo $x \in K_y$. Suponha agora que $f(y) \in \mathbb{R}^\ell$. Pela afirmação anterior, y é ponto regular de $\pi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$. Passando a uma representação local dessa, obtemos uma transformação linear com posto $n - a$, a saber $(\psi \circ \pi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(y)): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-a}$. Mas, por continuidade, o posto não diminui em uma vizinhança de $\varphi(y)$, logo existe vizinhança V_y de y em M com fecho compacto tal que x é valor regular de $\pi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$, $\forall x \in V_y$. Tomamos, então, $K_y = \overline{V_y} \cap K$, provando a afirmação. \square

Dado, então, $y \in K$ e escolhido $K_y \subset K$ como acima afirmamos:

Afirmção 9.21.3. Existe vizinhança \mathcal{N}_y de f em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{N}_y \subset \{g \in C^r(M, \mathbb{R}^n) : g \pitchfork_{K_y} \mathbb{R}^\ell\}$

Prova da afirmação. Suponha que (1) ocorre, isto é, $f(x) \notin \mathbb{R}^\ell$, $\forall x \in K_y$, então $d(f(K_y), \mathbb{R}^\ell) =: \epsilon > 0$ por compacidade $f(K_y)$ e por ser \mathbb{R}^ℓ fechado. Podemos supor $K_y \subset U$ domínio de uma carta local (φ, U) de M . Então $d(f\varphi(\varphi^{-1}(K_y)), \mathbb{R}^\ell) = \epsilon > 0$. Seja, então, $\mathcal{N}_y = \mathcal{N}(f; (\varphi, U), K_y, \epsilon)$. Vê-se imediatamente que \mathcal{N}_y é vizinhança de f em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$ com $g \in \mathcal{N}_y$ cumprindo $g(x) \notin \mathbb{R}^\ell$, $\forall x \in K_y$, logo $g \pitchfork_{K_y} \mathbb{R}^\ell$ por vacuidade. Suponha agora que (2) ocorre, isto é, que $f(x) \in \mathbb{R}^\ell$ e que x é valor regular de $\pi \circ f$, $\forall x \in K_y$. Como sabemos, podemos obter $\epsilon > 0$ tal que se $h \in C^r(M, \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^\ell)$ e $\|h - \pi \circ f\|_{r, K_y} < \epsilon$, então h também submersiva em K_y e, portanto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $g \in \mathcal{N}(f; (\varphi, U), K_y, \epsilon_1) \cap C^r(M, \mathbb{R}^n)$, então $\|\pi \circ g - \pi \circ f\|_{r, K_y} < \epsilon$ e, portanto, $\pi \circ g$ é submersiva em x , $\forall x \in K_y$. Podemos obter, então, \mathcal{N}_y vizinhança de f em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$ tal que se $g \in \mathcal{N}_y$, então $g(x) \in \mathbb{R}^\ell$ e x é valor regular de $\pi \circ g: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$, $\forall x \in K_y$. Isto prova a última afirmação. \square

Agora, sendo K compacto (lembrando que os K_y podem ser tomados de forma que $\bigcup_{y \in K} \text{Int } K_y = K$), esse pode ser coberto por um número finito de vizinhanças

K_y , digamos, $K = K_{y_1} \cup \dots \cup K_{y_s}$. Seja $\mathcal{N} = \bigcap_{j=1}^s \mathcal{N}_{y_j}$. Então \mathcal{N} é uma

vizinhança aberta de f em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$, pois essa é uma intersecção finita de abertos básicos vizinhanças de f . A partir das afirmações anteriores, concluímos que se $g \in \mathcal{N}$, então $g \pitchfork_K \mathbb{R}^\ell$, provando a última afirmação do teorema. Ou seja, mostramos que $\{f \in C^r(M, \mathbb{R}^n) : f \pitchfork_K \mathbb{R}^\ell\} = \pitchfork_K^r(M, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\ell)$ é aberto em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$. Vejamos agora a densidade de tal inclusão.

Como $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$, basta mostrar que uma aplicação qualquer $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ é limite de uma sequência de aplicações $g_\nu \pitchfork^r(M, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\ell)$ convergindo em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$. Seja y_j sequência de pontos em \mathbb{R}^n com $y_j \rightarrow 0$ tal que $\pi(y_j)$ é valor regular de $\pi \circ g: U \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$ (tal sequência obtida a partir do Teorema de Morse–Sard). Definamos, então, $g_j \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ pondo $g_j(x) = g(x) - y_j$. Claramente $g_j \rightarrow g$ em $C_W^r(M, \mathbb{R}^n)$, e fixado índice j temos que $\pi \circ g_j(x) = \pi(g(x)) - \pi(y_j)$, $x \in M$. Dado $x \in M$ suponha que $g_j(x) \in \mathbb{R}^\ell$. Afirmamos:

Afirmção 9.21.4. x é ponto regular para $\pi \circ g_j: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$.

Prova da afirmação. Com efeito, $g_j(x) \in \mathbb{R}^\ell \implies \pi g_j(x) = 0$ logo $\pi \circ g(x) = \pi(y_j)$ e, então, $g(x)$ é valor regular de $\pi \circ g$ e em particular x é ponto regular de $\pi \circ g: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^\ell$. Como $(\pi \circ g_j)'(x) = (\pi \circ g)'(x)$, segue que x é ponto regular para $\pi \circ g_j: M \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^a$, completando a prova da afirmação. \square

Assim, pelas afirmações anteriores, vemos que $g_j \pitchfork \mathbb{R}^\ell$, e então $g_j \in \pitchfork_{\mathbb{K}}^r(M, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\ell)$, finalizando a prova do teorema. \square

Chegamos, então, ao resultado central desta seção:

Teorema 9.21.1 (Teorema de Transversalidade). Sejam M, N variedades C^r e $S \subset N$ subvariedade C^r . Então:

1. $\pitchfork^r(M, N; S)$ é residual em $C_S^r(M, N)$ e $C^r(M, N)$.
2. Seja S fechada em N . Se $L \subset M$ é fechado (respectivamente, compacto), então $\pitchfork_L^r(M, N; S)$ é denso e aberto em $C_S^r(M, N)$ (respectivamente, $C_W^r(M, N)$).

A prova desse teorema não trivial é baseada em propriedades functoriais dos espaços de funções. Para isso, precisamos introduzir uma terminologia adequada:

Sejam M, N variedades C^r . Uma *classe de aplicações* C^r em (M, N) é uma função \mathcal{F} cujo domínio é o conjunto de todas os ternos (L, U, V) onde $U \subset M, V \subset N$ são abertos e $L \subset U$ é um fechado. A cada terno (L, U, V) , a aplicação \mathcal{F} associa um conjunto $\mathcal{F}_L(U, V) \subset C^r(U, V)$ de aplicações C^r de U em V , sendo que \mathcal{F} satisfaz o seguinte *Axioma de Localização*:

Dado terno (L, U, V) , uma aplicação $f \in C^r(U, V)$ está em $\mathcal{F}_L(U, V)$ con-
tanto que existam ternos (L_j, U_j, V_j) e aplicações $f_j \in \mathcal{F}_{L_j}(U_j, V_j)$ tais que
 $L \subset \cup L_j$ e $f = f_j$ em uma vizinhança de $L_j, \forall j$.

Uma classe de aplicações \mathcal{F} é dita *rica* se existem coberturas abertas \mathcal{U}, \mathcal{V} de M, N respectivamente tais que sempre que $U \subset M$ e $V \subset N$ são subconjuntos abertos elementos de \mathcal{U}, \mathcal{V} e $L \subset U$ compacto, então $\mathcal{F}_L(U, V)$ é aberto e denso em $C_W^r(U, V)$.

O resultado geral envolvendo estes conceitos é:

Teorema 9.21.2 (Teorema de Globalização). Seja \mathcal{F} uma classe rica de aplicações C^r em (M, N) . Para cada conjunto fechado $L \subset M$, vale:

1. $\mathcal{F}_L(M, N)$ é aberto e denso em $C_S^r(M, N)$.

2. Se L é compacto, então $\mathcal{F}_L(M, N)$ é aberto e denso em $C_W^r(M, N)$.

Demonstração. Ver Hirsch (1976). □

Podemos agora provar o Teorema de Transversalidade:

Prova do Teorema de transversalidade 9.21.1. Seja $S \subset N$ subvariedade fechada. Definimos \mathcal{F} classe de aplicações C^r em (M, N) da seguinte forma: $\mathcal{F}_L(U, V) := \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V)$.

Afirmção 9.21.5. \mathcal{F} acima definida é de fato uma classe de aplicações C^r em (M, N) .

Prova da afirmação. Como $S \cap V$ é subconjunto aberto de S , é uma subvariedade de N e, portanto, $\mathcal{F}_L(U, V) = \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V)$ é bem definida. Seja $f \in C^r(U, V)$ e suponha que existem ternos $(L + j, U_j, V_j)$ e aplicações $f_j \in \mathcal{F}_{L_j}(U_j, V_j)$ tais que $L \subset L_j$ e $f = f_j$ em uma vizinhança W_j de L_j para todo j . Por definição, temos $\mathcal{F}_{L_j}(U_j, V_j) = \mathring{h}_{L_j}^r(U_j, V_j; S \cap V_j)$. Seja dado $x \in L$ e suponha que $f(x) \in S \cap V$. Como $L \subset \cup L_j$, tem-se que $x \in L_j \subset U_j$ para algum índice j e, como $f = f_j$ em W_j vizinhança aberta de L_j , segue que $f'(x) = f'_j(x): T_x U_j \rightarrow T_{f(x)} V_j$. Observamos que sendo U_j subvariedade aberta de U vale $T_x U_j = T_x U$ e de forma análoga $T_{f(x)} V_j = T_{f(x)} V$. Como $f(x) = f_j(x)$ e como $f_j(U_j) \subset V_j$ e ainda $f_j \in \mathring{h}_{L_j}^r(U_j, V_j; S \cap V_j)$, temos que

$$f'_j(x) \cdot T_x U_j + T_{f(x)}(S \cap V_j) = T_{f(x)} V_j$$

e, logo,

$$f'(x) \cdot T_x U + T_{f(x)}(S \cap V) = T_{f(x)} V.$$

Assim, $f \in \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V)$, $\forall x \in L$ e, então, $f \in \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V) = \mathcal{F}_L(U, V)$. Isso mostra que \mathcal{F} satisfaz o Axioma de Localização e prova a afirmação. □

O próximo passo é mostrar:

Afirmção 9.21.6. A classe \mathcal{F} acima definida é uma classe rica.

Prova da afirmação. Devemos obter coberturas abertas \mathcal{U} e \mathcal{V} de M e N tais que sempre que $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$ e $L \subset U$ é compacto, então $\mathcal{F}_L(U, V)$ é aberto e denso em $C_W^r(U, V)$, isto é, $\mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V)$ é aberto e denso em $C_W^r(U, V)$.

Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta qualquer de M e seja \mathcal{V} uma cobertura aberta qualquer de N que contém os domínios das cartas de N , que são da forma (ψ, V)

onde $\psi(V \cap S) \subset \mathbb{R}^\ell \times 0$, isto é, as cartas de N que caracterizam S como subvariedade de N de dimensão ℓ . Sejam dados $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$ e $L \subset U$ compacto. Vamos supor $S \cap V \neq \emptyset$ e, portanto, supor que V é domínio de carta (ψ, V) de N com $\psi(V \cap S) = \mathbb{R}^\ell \times 0$. Seja $n = \dim N$, então $\mathbb{R}^\ell \times 0 \subset \mathbb{R}^n$. Pelo Lema 9.21.1, dadas a variedade U , o compacto $L \subset U$ e o subespaço linear $\mathbb{R}^\ell \cong \mathbb{R}^\ell \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ e o subconjunto aberto $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, tem-se que $\mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times \psi(V))$ é denso e aberto em $C_W^r(U, \psi(V))$, logo $\mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0)$ é aberto e denso em $C_W^r(U, \psi(V))$.

Seja $f \in \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V)$. Considere a aplicação $\psi \circ f \in C^r(U, \psi(V))$. Dado $x \in L$ tal que $f(x) \in S \cap V$, então $\psi \circ f(x) \in \mathbb{R}^\ell \times 0$. Agora

$$f'(x) \cdot T_x U + T_{f(x)}(S \cap V) = T_{f(x)} V$$

logo

$$\psi'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot T_x U) + \psi'(f(x)) \cdot T_{f(x)}(S \cap V) = \psi'(f(x)) \cdot (T_{f(x)} V).$$

Daí segue, então, que

$$(\psi \circ f)'(x) \cdot T_x U + \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^n$$

e, portanto,

$$(\psi \circ f)'(x) \cdot T_x U + T_{\psi(f(x))} \mathbb{R}^\ell \times 0 = T_{\psi(f(x))} \psi(V).$$

Assim, $\psi \circ f \in \mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0)$. Mas obtemos, então, vizinhança $\mathcal{N}(\psi \circ f)$ de $\psi \circ f$ em $C_W^r(U, \psi(V))$ com $\mathcal{N}(\psi \circ f) \subset \mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0)$ digamos, $\mathcal{N}(\psi \circ f) = \mathcal{N}^r(\psi \circ f, (\varphi_0, U_0), K_0, \epsilon_0)$ com (φ_0, U_0) carta de U , $K_0 \subset U_0$ compacto, $\epsilon_0 > 0$ e, então, $\mathcal{N}(\psi \circ f) = \{G \in C^r(U, \psi(V)); \|G \circ \varphi_0^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}\| < \epsilon_0\}$. Dada $G \in \mathcal{N}(\psi \circ f)$, seja $g = \psi^{-1} \circ G: U \rightarrow V$ então $g \in C^r(U, V)$. Dado $x \in K_0$, tem-se que

$$|G \circ \varphi_0^{-1}(x) - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}(x)| = |\psi \circ g \circ \varphi_0^{-1}(x) - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}(x)|.$$

Deste modo,

$$\|G \circ \varphi_0^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}\|_{r, K_0} = \|\psi \circ g \circ \varphi_0^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}\|_{r, K_0}.$$

Seja, então, $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}^r(f, (\varphi_0, U_0), K_0, \epsilon_0)$ vizinhança de f em $C_W^r(U, V)$. Claramente $g \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow G \in \mathcal{N}(\psi \circ f)$. Assim,

$$g \in \mathcal{N}(f) \implies G \in \mathcal{N}(\psi \circ f) \implies G \in \mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0).$$

Dado x tal que $G(x) \in \mathbb{R}^\ell \times 0$ temos que $\psi^{-1}(G(x)) \in \psi^{-1}(\mathbb{R}^\ell \times 0) = S \cap V$ de modo que $g(x) \in S \cap V$ e, então,

$$G \in \mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0) \implies g \in \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V),$$

logo $\mathcal{N}(f) \subset \mathring{h}_L^r(U, V; S \cap V)$ que é portanto aberto em $C_W^r(U, V)$. Seja dada $f \in C^r(U, V)$ e seja dada vizinhança $\mathcal{N}(f)$ de f em $C_W^r(U, V)$. Então $\psi \circ f \in C^r(U, \psi(V))$. Suponha que $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}^r(f, (\varphi_0, U_0), (\psi, V), K_0, \epsilon_0)$, isto é,

$$\mathcal{N}(f) = \{g \in C^r(U, V); g(K_0) \subset V_0, \|\psi \circ g \circ \varphi_0^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}\|_{r, K_0} < \epsilon_0\}.$$

Seja

$$\mathcal{N}(\psi \circ f) = \{G \in C^r(U, \psi(V)); G(K_0) \subset \psi(V), \|G \circ \varphi_0^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}\|_{r, K_0} < \epsilon\},$$

então $\mathcal{N}(\psi \circ f)$ é vizinhança de $\psi \circ f$ em $C_W^r(U, \psi(V))$. Certamente $g \in \mathcal{N}(f) \Leftrightarrow G = \psi \circ g \in \mathcal{N}(\psi \circ f)$.

Como $\mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0)$ é denso em $C_W^r(U, \psi(V))$ existe $G \in \mathcal{N}(\psi \circ f) \cap \mathring{h}_L^r(U, \psi(V); \mathbb{R}^\ell \times 0)$, logo $g = \psi^{-1} \circ G \in \mathcal{N}(f) \cap \mathring{h}_L^r(U, V; V \cap S)$ e, então, $\mathring{h}_L^r(U, V; V \cap S)$ é denso em $C_W^r(U, V)$. \square

Uma vez provada afirmação anterior, podemos aplicar o Teorema de Globalização para concluir que $\mathcal{F}_L(M, N) = \mathring{h}_L^r(M, N; S)$ é aberto e denso em $C_W^r(M, N)$ e se L é compacto, então $\mathcal{F}_L(M, N) = \mathring{h}_L^r(M, N; S)$ também é aberto e denso em $C_W^r(M, N)$, provando a segunda parte do enunciado do teorema.

Para provar a primeira parte, escrevemos a subvariedade $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$ como

uma reunião (não uma exaustão) de compactos L_j cada um deles contido em um domínio coordenado de S . Pelo que acabamos de demonstrar, temos que $\mathring{h}^r(M, N; L_j)$ é aberto e denso em $C^r(M, N)$ de modo que $\mathring{h}^r(M, N; S) =$

$\bigcap_{j=1}^{\infty} \mathring{h}^r(M, N; L_j)$ é residual em $C_S^r(M, N)$. Seja finalmente $M = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$

exaustão de M por compactos M_j . Então, pela parte que já demonstramos do enunciado do teorema, temos que $\mathring{h}^r M_\nu(M, N; L_j)$ é aberto e denso em $C_W^r(M, N)$ de modo que $\mathring{h}^r(M, N; L_j)$ é residual em $C_W^r(M, N)$ e, portanto, $\mathring{h}^r(M, N; S)$ é residual em $C_W^r(M, N)$. \square

9.21.1 Aplicações do Teorema de Transversalidade

Algumas aplicações do Teorema de Transversalidade são dadas abaixo:

Teorema 9.21.3. Sejam N_1, N_2 subvariedades C^r de M com $1 \leq r \leq \infty$. Então toda vizinhança da inclusão $i_{N_1}: N_1 \rightarrow M$ em $C_S^r(N_1, M)$ contém um mergulho que é transversal a N_2 . De outra forma: $N_1 \subset M$ pode ser perturbada em uma subvariedade transversal a N_2 , mas ainda difeomorfa N_1 .

Demonstração. Basta usar o Teorema de transversalidade e também o fato de que o conjunto dos mergulhos C^r de N_1 em M é aberto na topologia forte. \square

Teorema 9.21.4. Seja M variedade C^r com $1 \leq r \leq \infty$. Então o conjunto dos campos vetores C^r com singularidades simples em M é residual em $\mathcal{X}^r(M)$.

Demonstração. Basta observar que um campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ tem apenas singularidades simples se e somente se $X: M \rightarrow TM$ é transversal à seção nula de TM . Observe também que dado um campo $X: M \rightarrow TM$ e dada aplicação $Z: M \rightarrow TM$ próxima de X em $C_S^r(M, TM)$, então não necessariamente Z define um campo de vetores em M , pois não há porque termos $\pi \circ Z = \text{Id}: M \rightarrow M$, onde $\pi: TM \rightarrow M$ é a projeção canônica do fibrado tangente. Por outro lado, como Z é próximo de X , temos que $\pi \circ Z$ é próxima de $\pi \circ X = \text{Id}_M$ e, portanto, pelo que já vimos anteriormente, podemos supor que $h := \pi \circ Z$ é um difeomorfismo C^r de M . Composto as aplicações, obtemos que $\tilde{Z} := Z \circ h^{-1}: M \rightarrow TM$ satisfaz $\pi \circ \tilde{Z} = \pi \circ Z \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = \text{Id}_M$. Como h é próximo da identidade de M , segue que \tilde{Z} ainda é próximo de X e é um campo de vetores C^r em M . \square

O mesmo tipo de argumentação prova:

Teorema 9.21.5. Seja M variedade C^r onde $1 \leq r \leq \infty$. Então dado qualquer campo de vetores C^s , $0 \leq s \leq r$, esse pode ser aproximado na topologia forte em classe C^s em M por campos de vetores de classe C^r , com singularidades simples em M .

9.22 Variedades como superfícies - Teoremas de Whitney

Nesta seção, provamos primeiro o seguinte teorema conhecido como *Teorema de Imersão de Whitney*:

Teorema 9.22.1 (Whitney). Seja M^n uma variedade de classe C^r , $r \geq 1$. Se $s \geq 2m$ as imersões $g: M \rightarrow \mathbb{R}^s$, de classe C^1 , formam um aberto denso em $C_S^1(M, \mathbb{R}^s)$.

Em seguida, provaremos o *Teorema de Mergulho de Whitney*, que mergulha variedades compactas como superfícies:

Teorema 9.22.2 (Whitney). Seja M^m uma variedade compacta de classe C^r , $r \geq 2$. Existe um mergulho de classe C^r , $\Psi: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.

Utilizaremos alguns lemas preliminares:

Lema 9.22.1. Dada aplicação $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^1 , seja $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ união enumerável de subvariedades $N_j \subset \mathbb{R}^s$ todas de codimensão $> m$ em \mathbb{R}^s , $\forall j$. Então o conjunto $E := \{v \in \mathbb{R}^s; [f(M) + v] \cap X \neq \emptyset\}$ tem medida nula em \mathbb{R}^s .

Demonstração. Definimos aplicações $\varphi_j: M \times N_j \rightarrow \mathbb{R}^s$ pondo $\varphi(x, y) = y - f(x)$. Então $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi_j(M \times N_j)$. Basta, então, observar que $\varphi_j(M \times N_j)$ tem medida nula em \mathbb{R}^s , que segue do fato de que φ_j é de classe C^1 e $\dim(M \times N_j) < s$. \square

Lema 9.22.2. Dados $\epsilon > 0$ e $f: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^r , $r \geq 1$ e $s \geq 2m$, existe imersão $g: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^∞ com $\|g - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon$.

Demonstração. Já sabemos que f pode ser aproximada em $C_S^1(B^m(0; 3), \mathbb{R}^s)$ por aplicações de classe C^∞ , de modo que suporemos f de classe C^∞ . Buscamos $g: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ da forma $g(x) = f(x) + A \cdot x$, onde $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ é linear. Temos $g'(x) = f'(x) + A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ e $|(g-f)(x)| = |A \cdot x|$, $|(g'-f')(x)| = \|A\|$. Agora, as matrizes de $\text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$, com posto $j < m$, formam uma superfície $N_j \subset \mathbb{R}^{s \cdot m}$ de dimensão $j \cdot (s + m - j)$ (trata-se de uma Grassmaniana! exercício!). Assim, $N_j \subset \mathbb{R}^{s \cdot m}$ tem codimensão $(m - j) \cdot (s - j)$ e, como por hipótese $s \geq 2m$, segue (observe que $j \leq m - 1$) que $(m - j) \cdot (s - j) \geq 1 \cdot (2m - (m - 1)) = m + 1$. Assim, cada N_j tem codimensão $> m$ em $\mathbb{R}^{s \cdot m}$ se $j < m$. Pelo lema anterior, o conjunto das transformações lineares $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ tais que $[f'(B^m(0; 3)) + A] \cap \bigcup_{j=0}^{m-1} N_j \neq \emptyset$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{s \cdot m}$, e em particular seu complementar é denso e, portanto, para toda A fora de um conjunto de

medida nula temos que $f'(x) + A$ tem posto m para todo $x \in B^m(0; 3)$. Podemos, então, escolher tal A de sorte que também temos $\|g - f\|_1 < \epsilon$ em $B^m(0; 3)$. \square

Lema 9.22.3. Dados $\epsilon > 0$ e aplicação $f: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^r , $r \geq 1$, existe aplicação $h: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ também de classe C^r , com $\|h - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon$ e $h = f$ em $B^m(0; 3) \setminus \overline{B^m(0; 2)}$ sendo que a restrição $h|_{\overline{B^m(0; 1)}}$ é uma imersão de classe C^∞ .

Demonstração. Seja $\lambda: B^m(0; 3) \rightarrow [0, 1]$ função auxiliar de classe C^∞ com $\lambda = 1$ em $\overline{B^m(0; 1)}$ e $\lambda = 0$ em $B^m(0; 3) \setminus \overline{B^m(0; 2)}$. Seja $\alpha > 0$ constante tal que $1 + \lambda(x) + |\lambda'(x)| < \alpha$ em $B^m(0; 3)$ (lembre-se que λ é de classe C^∞). Pelo Lema 9.22.2, existe imersão $g: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^∞ tal que $\|g - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \frac{\epsilon}{\alpha}$. Definimos, então, aplicação $h: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ pondo $h(x) := f(x) + \lambda(x) \cdot (g(x) - f(x))$. Vale que $h = f$ em $B^m(0; 3) \setminus \overline{B^m(0; 2)}$, $h|_{B^m(0; 1)} = g|_{B^m(0; 1)}$ e, portanto, é uma imersão. Finalmente, por construção, temos $\|h - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon$. \square

Refinando o lema anterior obtemos:

Lema 9.22.4. Seja $F \subset B^m(0; 3)$ fechado tal que f é imersiva em cada ponto de F , onde $f: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ é de classe C^r , $r \geq 1$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $h: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ também de classe C^r , com $\|h - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon$ e $h = f$ em $F \cup [B^m(0; 3) \setminus \overline{B^m(0; 2)}]$, sendo que a restrição $h|_{F \cup \overline{B^m(0; 1)}}$ é uma imersão de classe C^∞ .

Demonstração. Seja $K = F \cap \overline{B^m(0; 2)}$, então K é compacto e vale:

Afirmção 9.22.1. É suficiente obter aplicação h tal que $\|h - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon$ e $h = f$ em $K \cup [B^m(0; 3) \setminus \overline{B^m(0; 2)}]$, sendo que a restrição $h|_{\overline{B^m(0; 1)} \cup K}$ é uma imersão de classe C^∞ .

Prova da afirmação. Com efeito, dentro das hipóteses da afirmação, seja V uma vizinhança aberta de K tal que o fecho de V é compacto e contido em $B^m(0; 3)$. Podemos supor que $\epsilon > 0$ é pequeno de modo que $\|h - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon$ implique h imersiva em \overline{V} . Seja agora $u: B^m(0; 3) \rightarrow [0, 1]$ função auxiliar de classe C^∞ tal que $u = 0$ em $K \cup [B^m(0; 3) \setminus \overline{B^m(0; 2)}]$ e $u = 1$ em $B^m(0; 1) \setminus V$. Ponhamos $h = f + u \cdot (g - f)$ onde g é obtida do Lema 9.22.3, é uma imersão C^∞ de $B^m(0; 3)$ em \mathbb{R}^s tal que a norma $\|g - f\|_{1, B^m(0; 3)} < \epsilon/\alpha$, onde $\alpha > 0$ é constante

que satisfaz $\alpha > |u(x)| + |u'(x)| + 1$ em $B^m(0; 3)$. Como $h = g$ em $\overline{B^m(0; 1)} \setminus V$, segue que h é imersiva nos pontos de $\overline{B^m(0; 1)} \setminus V$. Da mesma forma, $h|_K$ é imersiva pois $h = f$ em K e, portanto, h é uma imersão em $\overline{B^m(0; 1)} \cup K$, pois $\overline{B^m(0; 1)} \cup K \subset (\overline{B^m(0; 1)} \setminus V) \cup K$. As demais afirmações são imediatas. \square

A afirmação implica o Lema. \square

Podemos finalmente provar o Teorema de Imersão:

Prova do Teorema de Imersão. Dada função contínua e positiva $\epsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ aplicação qualquer de classe C^1 , basta¹ obter uma imersão $g: M \rightarrow \mathbb{R}^s$, de classe C^1 , tal que $\|g - f\|_1 < \epsilon$ em M . Seja $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ cobertura aberta de M por domínios coordenados de cartas $\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que a cobertura dos U_j é localmente finita. Podemos supor $\varphi_j(U_j) = B^m(0; 3)$ e que $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$ onde $W_j = \varphi_j^{-1}(B^m(0; 1))$. Seja $V_j := \varphi_j^{-1}(B^m(0; 2))$. Definiremos indutivamente uma sequência de aplicações $f_0, f_1, \dots, f_v, \dots$ de M em \mathbb{R}^s todas de classe C^1 , cumprindo:

1. $f_0 = f, f_v = f_{v-1}$ em $M \setminus V_v$.
2. $\|f_v - f_{v-1}\|_1 < \frac{\epsilon}{2^v}$ em M .
3. f_v é uma imersão em $\overline{W_1} \cup \dots \cup \overline{W_v}$.

Começamos pondo $f_0 = f$. Por vacuidade, f_0 cumpre também (2) e (3). Suponhamos já definidas f_1, \dots, f_{v-1} . Vamos definir f_v . Seja $\alpha = f_{v-1} \circ \varphi_v^{-1}: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$. Podemos obter $\delta > 0$ tal que se $\theta: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^1 é tal que $\|\theta - \alpha\|_1 < \delta$ em $\overline{B^m(0; 2)}$, então $\|\theta \circ \varphi_v - \alpha \circ \varphi_v\|_1 < \frac{\epsilon}{2^v}$ em $\overline{V_v}$. Seja agora $F = \varphi_v[(\overline{W_1} \cup \dots \cup \overline{W_{v-1}}) \cap U_v]$. Pelo Lema 9.22.4, efetivamente existe $\theta: B^m(0; 3) \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^1 tal que $\|\theta - \alpha\|_1 < \delta$ em $B^m(0; 3)$, $\theta = \alpha$ em $[B^m(0; 3) \setminus B^m(0; 2)] \cup F$ e $\theta|_{\overline{B^m(0; 1)} \cup F}$ é uma imersão.

Definimos, então, $f_v: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ pondo $f_v = f_{v-1}$ em $M \setminus V_v$ e $f_v = \theta \circ \varphi_v$ em U_v . Tem-se que:

¹Embora a topologia forte de Whitney tenha sido definida originalmente em termos de famílias $\epsilon = \{\epsilon_j\}_{j \in J}$ de números reais positivos, associados a abertos U_j de um atlas de M , essa também pode ser posta em termos de funções contínuas positivas $\epsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$ (exercício!).

$f_v = f_{v-1}$ em $M \setminus V_v$ por construção, provando (1). Também temos que (2) é verificada e por construção f_v é imersiva em $\overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_v$ provando (3). Definimos então a imersão $g: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ pondo $g(p) = \lim_{v \rightarrow \infty} f_v(p)$, $p \in M$. \square

Prova do Teorema de Mergulho de Whitney. Como M é compacta, segue do Primeiro Teorema do Mergulho de Whitney que existe um mergulho $\Psi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ para algum n grande o suficiente. Se por ventura $n \leq 2m + 1$, então nada há a fazer. Suponhamos, então, que $n > 2m + 1$ e provaremos que se pode “reduzir” a dimensão do espaço de chegada, por meio de teoria de transversalidade, até o limite de $2m + 1$. Podemos supor $M \subset \mathbb{R}^n$ como superfície regular compacta.

Afirmção 9.22.2. Existe mergulho $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

Prova da afirmação. Denotaremos por (x_1, \dots, x_n) as coordenadas canônicas em \mathbb{R}^n e por \mathbb{R}^{n-1} o hiperplano $\{x_n = 0\}$. Dado vetor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$, denotaremos por $\pi_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ a projeção paralela a u . Buscamos por $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_u|_M: M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ seja um mergulho (naturalmente C^r).

Verificamos as condições para tanto:

Injetividade. Temos que

$$\begin{aligned} \pi_u|_M \text{ é injetiva} &\Leftrightarrow u \text{ não é paralelo a nenhuma } \textit{secante} \text{ de } M \\ &\Leftrightarrow \forall x \neq y, x, y \in M \text{ temos } u \neq \frac{x-y}{|x-y|}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Imersão. A aplicação $\pi_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é linear e tem como núcleo a reta $u \cdot \mathbb{R}$. Logo, um vetor tangente a M , $v \in T_p(M)$, pertence ao núcleo de $d(\pi_u|_M)(p): T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ se e somente se v é paralelo a u em \mathbb{R}^n . Assim,

$$\pi_u|_M \text{ é imersiva} \Leftrightarrow u \neq \frac{v}{|v|}, \forall v \in T_p(M) \setminus \{0\}, \forall p \in M. \quad (9.3)$$

Estudemos cada uma das condições (9.2) e (9.3) acima começando por (9.2): seja $\Theta: M \times M - \Delta \rightarrow S^{n-1}$ a aplicação C^r definida por $\Theta(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|}$ onde $\Delta \subset M \times M$ é a diagonal. Então u satisfaz (9.2) se e somente se u não pertence à imagem de Θ . Mas $\dim(M \times M \setminus \Delta) = 2m < \dim S^{n-1}$ de modo que $\Theta(M \times M \setminus \Delta)$ tem interior vazio em S^{n-1} . Analisemos agora (9.3). Obviamente basta verificar essa condição para $v \in T_p(M)$ com $|v| = 1$. Seja, então, $\mathfrak{X}: TM \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação de classe C^{r-1} definida por $\mathfrak{X}(p, v) = \|v\|^2$ e $T_1(M) = \mathfrak{X}^{-1}(1)$ o fibrado tangente unitário de M . Note que, como $M \subset \mathbb{R}^n$, temos $TM \subset \mathbb{R}^{2n}$ e

$T_1(M) \subset \mathbb{R}^{2n}$ é subvariedade compacta (M é compacta!) de dimensão $2m - 1$. De fato, temos $T_1(M) \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Finalmente, seja $\tau: T_1(M) \rightarrow S^{n-1}$, definida pela restrição da projeção $\pi_2: T_1(M) \rightarrow S^{n-1}$, $\pi_2(p, v) = v$. Então τ é de classe C^{r-1} e $\dim T_1(M) = 2m - 1 < \dim S^{n-1}$ de modo que a imagem de τ tem interior vazio. Assim, sendo $T_1(M)$ compacto, o complementar U da imagem de τ é um aberto denso da esfera S^{n-1} . Logo, $U \cap S^{n-1} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1})$ é um aberto não vazio U_0 que, pelo que vimos acima, contém algum vetor u que não está na imagem de Θ e, portanto, para esse u temos que $\pi_u|_M: M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é um mergulho. □

Seguindo esse raciocínio, podemos concluir a prova do mergulho em \mathbb{R}^{2m+1} . □

Prova muito similar àquela acima nos dá:

Teorema 9.22.3 (Whitney). Seja M^m variedade compacta de classe C^r , $r \geq 2$. Existe imersão C^r de M em \mathbb{R}^{2m} .

Observação 9.22.1. Ambos os teoremas acima demonstrados valem também para a classe de diferenciabilidade $r = 1$, usando-se argumentos mais finos de Topologia devidos a Pontryagin e Hurewicz.

Usando o Teorema de Globalização bem como resultados anteriores, podemos provar:

Teorema 9.22.4. Sejam M, N variedades de classe C^r sendo $1 \leq r \leq \infty$.

1. Se $\dim N \geq 2 \dim M$, então o conjunto $\mathfrak{S}^r(M, N)$ é denso em $C_S^r(M, N)$.
2. Se $\dim N \geq 2 \dim M + 1$, então $\text{Merg}^r(M, N)$ é denso em $\text{Prop}^r(M, N)$ na topologia forte.
3. Se M é compacta e $\dim N \geq 2 \dim M + 1$, então $\text{Merg}^r(M, N)$ é denso em $C_S^r(M, N)$.

9.23 O Teorema de Tischler

Seja M uma variedade compacta admitindo uma submersão $f: M \xrightarrow{C^2} S^1$. Consideramos a forma elemento de ângulo $\theta \in H^1(S^1, \mathbb{R})$ e tomamos $\omega = f^*(\theta)$

seu levantamento a M . Obtemos, então, uma 1-forma fechada, sem singularidades, de classe C^1 em M . Como ω é integrável, define folheação \mathcal{F} de codimensão 1, classe C^1 em M . Seja agora $p \in M$ ponto qualquer. Como ω é não singular, existem vizinhanças $p \in U_p \subset M$ e campo C^1 de vetores X_p em U_p tal que $\omega \cdot X_p = 1$ em U_p . Utilizando partição da unidade, obtemos finalmente um campo global de vetores X em M com a propriedade de que $\omega \cdot X = 1$. Como M é compacta, X é completo definindo, portanto, um fluxo $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. De $\omega \cdot X = 1$, conclui-se que o fluxo é transversal a \mathcal{F} . Como $d\omega = 0$, vale que $L_X(\omega) = d(\omega \cdot X) + i_X(d\omega) = 0$ de modo que φ preserva a folheação \mathcal{F} (cada difeomorfismo $\varphi_t: M \rightarrow M$ leva folhas de \mathcal{F} em folhas de \mathcal{F}). Concluímos que \mathcal{F} é “invariante por um fluxo transversal”. O Teorema de Tischler estabelece a seguinte recíproca desse fato:

Teorema 9.23.1 (Tischler, Tischler (1970) 1970). Seja M variedade diferenciável fechada. São equivalentes:

- (i) M suporta uma folheação \mathcal{F} , de classe C^1 e codimensão 1, invariante por um fluxo transversal C^1 .
- (ii) M suporta uma 1-forma C^1 sem singularidades.
- (iii) M fibra sobre o círculo S^1 .

Tendo em vista o Teorema de Sacksteder (segundo o qual uma folheação de classe C^2 , codimensão 1 e sem holonomia é topologicamente conjugada a uma folheação definida por 1-forma fechada não singular (cf. Sacksteder (1965)), obtemos em classe C^2 a seguinte condição equivalente:

- (iv) M admite folheação de codimensão 1 e sem holonomia.

A demonstração do Teorema de Tischler utiliza fortemente o fato de que, numa variedade fechada M podemos encontrar formas fechadas $\omega_1, \dots, \omega_\ell \in H^1(M, \mathbb{R})$ e tais que, dada uma base $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$ da parte livre de $H_1(M, \mathbb{Z})$ tenhamos, $\int_{\gamma_j} \omega_i = \delta_{ij}$ delta de Kronecker. Assim, uma 1-forma fechada ω em M se escreve $\omega = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \omega_j + df$ para alguma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\}$ geral o grupo de períodos $\text{Per}(\omega) < (\mathbb{R}, t)$ de ω . Se ω é não singular, então, como

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, podemos obter perturbação $\omega' = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \omega_j + df$ de ω tal que ω' é não singular e $\text{Per}(\omega') \subset \mathbb{Q}$ e, logo, para um múltiplo inteiro $k \cdot \omega'$, teremos $\text{Per}(k\omega') \subset \mathbb{Z}$. Evidentemente $k \cdot \omega' = dg$ para alguma submersão $g: M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

9.24 Exercícios do Capítulo 9

Exercício 9.24.1. Seja M variedade diferenciável de classe C^r . No produto $M \times M$ definimos o subconjunto $\Delta := \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$. Prove que Δ é subvariedade C^r de $M \times M$, difeomorfa a M .

Exercício 9.24.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenha difeomorfismo $(TS^n) \times \mathbb{R} \cong S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Exercício 9.24.3. Sejam $f: M \rightarrow N$ aplicação C^r e $G(f) \subset M \times N$ o seu gráfico. Prove que $G(f)$ é subvariedade C^r de $M \times N$ difeomorfa a M .

Exercício 9.24.4. Seja $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o gráfico de $y = |x|^{\frac{1}{3}}$. Prove que G possui estrutura de variedade C^∞ , que faz da inclusão $G \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ .

Exercício 9.24.5 (O espaço tangente com espaço de derivações). Seja M variedade C^r , $r \geq 1$. Dado ponto $p \in M$, denotamos por $A(p)$ o conjunto de todas as aplicações reais $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r definidas em uma vizinhança aberta $\text{Dom}(f)$ de p em M . O *espaço de germes de funções* de classe C^r em p é o quociente $\mathcal{E}_p(M) := A(p)/\sim$ onde \sim é a relação de equivalência: $(f, \text{Dom}(f)) \sim (g, \text{Dom}(g)) \Leftrightarrow \exists W \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, $p \in W$ tal que $f|_W = g|_W$.

1. Coloque em $\mathcal{E}_p(M)$ estrutura de Álgebra Real (espaço vetorial real com multiplicação).
2. Uma *derivação* em $\mathcal{E}_p(M)$ é uma aplicação linear $X: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ (com respeito à estrutura de espaço vetorial) tal que $X(f \cdot g) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$, $\forall f, g \in \mathcal{E}_p(M)$. Prove que o espaço das derivações em $\mathcal{E}_p(M)$ é um espaço vetorial.
3. Prove que cada vetor tangente $v_p \in T_p(M)$ define de modo natural uma derivação em $\mathcal{E}_p(M)$.

4. Conclua que existe isomorfismo natural entre o espaço tangente $T_p(M)$ e o espaço das derivações em $\mathcal{E}_p(M)$.

Exercício 9.24.6. Denotemos por $G_{n,k}$ o subconjunto dos subespaços afins de dimensão n em \mathbb{R}^k (lembramos que $V \subset \mathbb{R}^k$ é um subespaço afim se existe $b \in \mathbb{R}^k$ tal que $V - b$ é um subespaço vetorial). Prove que $G_{n,k}$ possui estrutura de variedade diferenciável C^∞ e calcule sua dimensão. Chamamos $G_{n,k}$ a *variedade Grassmanniana* dos n -planos em \mathbb{R}^k .

Exercício 9.24.7. Em \mathbb{R}^n , consideramos $G_{2,n}^o$ como a Grassmanniana dos 2-planos orientados em \mathbb{R}^n . Prove que existe difeomorfismo entre $G_{2,n}^o$ e a quádrlica complexa $\sum_{j=1}^n z_j^2 = 0$ no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P(n-1)$ de dimensão complexa $n-1$.

Exercício 9.24.8. Existe difeomorfismo natural $G_{2,3}^o \cong S^2$.

Exercício 9.24.9. Sejam M, N variedades C^r , $r \geq 1$ e $f: M \rightarrow N$ imersão. Coloque estrutura de variedade diferenciável C^{r-1} em $(Tf)^\perp$ definida por

$$(Tf)^\perp := \{(p, v) : p \in M, v \in T_{f(p)}(N)/f'(p) \cdot T_p(M)\}$$

(nota: E/F significa o espaço vetorial quociente de E pelo subespaço $F \subset E$.)

Exercício 9.24.10. Sejam $S_1 \subset S_2$ e $S_2 \subset S_3$ subvariedades. Prove que $S_1 \subset S_3$ é subvariedade.

Exercício 9.24.11. Sejam R e S subvariedades orientáveis da variedade orientável M . Prove que se $R \pitchfork S$, então $R \cap S$ é subvariedade orientável de M .

Exercício 9.24.12. Sejam M, N variedades C^k e S subvariedade C^k de M . Se $f: S \rightarrow N$ é C^k e $p \in S$, então existem $F: M \rightarrow N$ de classe C^k e vizinhança W de p em S tais que $F|_W = f|_W$.

Exercício 9.24.13. Seja $\{U_j\}_{j \in J}$ cobertura localmente finita de M variedade C^k . Dada família de números reais positivos $\epsilon_j > 0$, $j \in J$, mostre que existe $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que se $x \in U_j$, então $0 < f(x) < \epsilon_j$.

Exercício 9.24.14. O espaço das matrizes simétricas de tamanho m é transversal ao espaço das matrizes antissimétricas de mesmo tamanho.

Exercício 9.24.15. Sejam $R \subset S$ e $T \subset S$ subvariedades com $R \pitchfork T$. Mostre que $T_x(R \cap T)$ se identifica naturalmente com $T_x(R) \cap T_x(T)$ dentro de $T_x(S)$.

Exercício 9.24.16. Seja $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ hipersuperfície compacta orientada com aplicação normal de Gauss $N: M \rightarrow S^m$. Defina para $v \in S^m$ a aplicação $h_v: M \rightarrow \mathbb{R}$, $h_v(x) = \langle x, v \rangle$. Então $p \in M$ é ponto crítico de h_v se e somente se $v \perp T_p(M)$. Também, se v é valor regular de N , então os pontos críticos de h_v são não degenerados.

Exercício 9.24.17. Dadas variedades M, N de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ e aplicação $f: M \rightarrow N$ diferenciável, denotamos por $\text{Reg}(f) \subset N$ o conjunto dos $y \in N$ tal que y é valor regular de f . Prove que o conjunto $\{f \in C^r(M, N); y_0 \in \text{Reg}(f)\}$ é aberto e denso em $C_S^r(M, N)$.

Exercício 9.24.18. Dadas variedades M e N de classe C^r , dado $y_0 \in N$ e dadas aplicação $f_0: M \rightarrow N$, vizinhança \mathcal{N} de f_0 em $C_S^r(M, N)$ e vizinhança $W \subset M$ de $f^{-1}(y_0)$, existe $g \in \mathcal{N}$ tal que g é transversal a y_0 e $g = f_0$ em $M \setminus W$.

Exercício 9.24.19. Sejam M variedade e $K \subset M$ fechado. Toda vizinhança $U \subset M$ de K contém vizinhança fechada \overline{W} de K que é subvariedade de M (sugestão: tome função auxiliar $\xi: M \rightarrow [0, 1]$, com $\xi = 1$ em K e $\xi = 0$ fora de U e y_0 valor regular de ξ , ponha, então, $\overline{W} = \xi^{-1}([0, y_0])$).

Exercício 9.24.20. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ subvariedade mergulhada. Um *caminho de vetores normais* a M é uma aplicação $\alpha: (-1, 1) \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$, de classe C^∞ , da forma $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ com $\alpha_2(t) \in (T_{\alpha_1(t)}(M))^\perp, \forall t$. Definimos $\hat{\alpha}(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)$. Um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é dito *ponto focal* de M se existe caminho α de vetores normais a M de modo que $\hat{\alpha}(0) = q$ e $(\hat{\alpha})'(0) = 0$. Prove que o conjunto dos pontos focais de M tem medida nula.

Exercício 9.24.21. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ imersão onde $\dim M = m$. Considere a aplicação $F: TM \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ dada por $F(x, v) = df_x(v)$ e tome $a \in \mathbb{R}^{2m} \setminus 0$ valor regular de F . Seja π a projeção ortogonal sobre a reta determinada por $a \in \mathbb{R}^{2m}$. Prove que $\pi \circ f$ é uma imersão de M em \mathbb{R}^{2m-1} exceto por um conjunto discreto de pontos.

Exercício 9.24.22. Prove que $C_S^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $C_S^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ são espaços homeomorfos.

Exercício 9.24.23. Prove que existe vizinhança $\mathcal{N} \subset C_S^r((0, 1), \mathbb{R})$ da aplicação constante $\lambda(t) = 0$ tal que se $f_0 \in \mathcal{N}$, a aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 0$ se $t \in \mathbb{N} - (0, 1)$ e $f(t) = f_0(t)$ se $t \in (0, 1)$, é de classe C^r .

Exercício 9.24.24. Seja $f_\nu \rightarrow g$ sequência convergente em $C_S^0(M, N)$. Mostre que existe um compacto $K \subset M$ tal que se ν é suficientemente grande, então $f_\nu = g$ em $M \setminus K$.

Exercício 9.24.25. Estude a continuidade da aplicação de restrição $C_S^r(M, N) \rightarrow C_S^r(V, N)$, $a, f \mapsto f|_V$ onde $V \subset M$ é um subconjunto aberto.

Exercício 9.24.26. Seja M variedade diferenciável. Prove que M é um *espaço topológico normal*, ou seja, dados fechados $F, G \subset M$ com $F \cap G = \emptyset$ existem abertos U, V em M com $F \subset U, G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Exercício 9.24.27. O conjunto das aplicações de recobrimento de classe C^1 de uma variedade sobre outra é aberto na topologia forte.

Exercício 9.24.28. Dada variedade M de classe C^r , $r \geq 0$ temos:

1. Se M é não compacta, então existe função $\epsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva de classe C^r tal que $\inf_{x \in M} \epsilon(x) = 0$ em M .
2. Conclua que se M é não compacta, o subconjunto das aplicações constantes é discreto em $C_S^r(M, \mathbb{R})$.

Exercício 9.24.29 (Teorema de Titze diferenciável). Dada variedade M e subconjunto $A \subset M$, uma aplicação $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^r se dado ponto $a \in A$ existe vizinhança U de a em M na qual se define uma aplicação $f_U: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r tal que $f_U = f$ em $A \cap U$. Prove que nesse caso existe de fato uma aplicação F de classe C^r definida em uma vizinhança W de A em M tal que $F = f$ em A .

Exercício 9.24.30. Prove que toda variedade compacta C^r admite funções de Morse de classe C^r (sugestão: após mergulhar a variedade em um espaço euclidiano, considere para um ponto genérico fora dessa, a função distância até a variedade. Use, então, a noção de ponto focal.)

Exercício 9.24.31. Sejam M, N variedades C^r , $r \geq 1$ e $f: M \rightarrow N$ tal que $f \circ g: P \rightarrow N$ é de classe C^r para toda aplicação $g: P \rightarrow M$ de classe C^r . Prove que f é de classe C^r .

Exercício 9.24.32. Seja $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear simétrica positiva definida. Prove que $B^{-1}(r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade difeomorfa à esfera S^{n-1} , $\forall r > 0$.

Exercício 9.24.33. Prove que se M^m admite m campos de vetores C^1 linearmente independentes em cada ponto, então M é orientável. Dê exemplos de variedades orientáveis para as quais isso não ocorre.

Exercício 9.24.34. Seja $f: M \rightarrow U \subset M$ uma retração C^1 de M sobre um subconjunto $U \subset M$. Prove que U é uma subvariedade de M .

Exercício 9.24.35 (Teorema de Globalização).

Exercício 9.24.36. Construa um mergulho de $\mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(m)$ em algum espaço projetivo $\mathbb{R}P(\ell)$.

Exercício 9.24.37. Seja M variedade de dimensão 1. Prove que existe difeomorfismo $M \cong \mathbb{R}$ ou $M \cong S^1$.

Exercício 9.24.38. Construa mergulho $S^n \times S^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$.

Exercício 9.24.39. Prove que o fibrado tangente unitário da esfera S^2 é difeomorfo ao grupo ortogonal especial $SO(3)$, isto é, $T_1(S^2) \cong SO(3)$.

Exercício 9.24.40 (Vizinhança tubular). Seja $M^m \subset N^{m+k}$ subvariedade C^r , $r \geq 2$. Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em N induz métrica Riemanniana em M , fazendo da inclusão $M \rightarrow N$ uma *imersão isométrica*.

1. Prove que, dado ponto $p \in M$, há decomposição natural $T_p(N) = T_p(M) \oplus T_p(M)^\perp$, com $T_p(M) \subset T_p(N)$.
2. Prove que $\nu(M) := \{(p, v^\perp) : p \in M, v^\perp \in T_p(M)^\perp\}$ define um fibrado vetorial de dimensão $(m+k)$, classe C^{r-1} e posto k sobre M . Tal fibrado é chamado *fibrado normal* de M em N .
3. Seja agora $E := \bigcup_{p \in M} T_p(M)^\perp$. Prove que E é uma variedade de dimensão k sobre M , isto é, que existe atlas para E com *parametrizações* locais partindo de $M \times \mathbb{R}^k$.
4. Prove que existe difeomorfismo natural $E \cong \nu(M)$.
5. Determine $\nu(S^n)$, onde S^n é a esfera de dimensão n em \mathbb{R}^{n+1} .
6. Suponhamos agora M compacta. Dado $\epsilon > 0$, definimos $U_\epsilon(M) := \{q \in N : d(q, M) < \epsilon\}$, o conjunto dos pontos de N que distam menos do que ϵ de M , distância calculada com o ínfimo dos comprimentos das curvas

suaves em N , ligando q a algum ponto de M , comprimentos calculados via a métrica Riemanniana em N . Seja também $\nu_\epsilon(M) := \{v^\perp \in \nu(M) : \|v^\perp\| < \epsilon\}$. Prove que $\nu_\epsilon(M)$ é variedade C^{r-1} . Prove que se $\epsilon > 0$ é pequeno o suficiente, então $U_\epsilon(M)$ e $\nu_\epsilon(M)$ são difeomorfas via a *aplicação exponencial* em N , partindo de M .

7. Prove o seguinte lema auxiliar: *Dados espaço métrico compacto X e subconjunto fechado $X_0 \subset X$, dado homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ tal que $f|_{X_0}$ é injetivo, ainda existe uma vizinhança aberta U de X_0 em X tal que $f|_U$ é injetiva.*
8. Prove o *Teorema da Vizinhança Tubular*: *Dada subvariedade compacta $M \subset N$ de classe C^∞ então existe uma vizinhança U de M em N equipada com uma projeção $\pi : U \rightarrow M$ sobre M tal que U é equivalente a um aberto $\nu_\epsilon(M)$, com estrutura fibrada.*

Exercício 9.24.41. Seja N uma variedade com bordo compacto $\partial N = M$. Prove que existem vizinhanças V arbitrariamente pequenas de M em N para as quais há retratos de deformação $\pi_V : V \rightarrow M$.

Exercício 9.24.42. O conjunto das imersões injetivas não é aberto em $C_S^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Exercício 9.24.43. Sejam $E \mapsto X$ e $F \mapsto X$ fibrados vetoriais C^∞ e $\Phi : E \rightarrow F$ um morfismo de fibrados vetoriais que cobre a identidade (i.e., uma aplicação diferenciável (de classe C^1) de E em F , que leva fibra de $E \mapsto X$ à fibra de $F \mapsto X$, sendo que a composta dessa com a projeção de $F \mapsto X$ coincide com a projeção de $E \mapsto X$). Prove que se $\Phi_p : E_p \rightarrow F_p$ tem posto constante para todo $p \in X$, então $\text{Núcleo}(\Phi) = \bigcup_{p \in X} \text{Núcleo}(\Phi_p)$ é um subfibrado de E .

Exercício 9.24.44. Seja $G_a \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o gráfico de $f(x) = x^a$, $a > 0$. Prove que se $n < a < n + 1$ com $n \in \mathbb{N}$, então o gráfico de f é subvariedade C^n , mas não é C^{n+1} .

Exercício 9.24.45. Uma variedade que possui um aberto difeomorfo à faixa de Möbius não é simplesmente conexa.

Exercício 9.24.46 (O Teorema de Globalização). Seja X um conjunto equipado com uma relação de ordem, não necessariamente total. Um functor estrutural \mathcal{F} em X é dito *contínuo* se para toda família simplesmente ordenada $\{A_j\}_{j \in J}$ em \mathcal{F} temos o seguinte: o *limite inverso* das aplicações $\mathcal{F}_{A_j, A} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(A_j)$ (onde

$A = \bigcup j \in J A_j \in \mathcal{F}$ é uma aplicação bijetiva $\mathcal{F}(A) \rightarrow \lim_{\leftarrow} \mathcal{F}(A_j)$ (note que a família é simplesmente ordenada). O functor é dito *localmente extensível* se todo ponto $x_0 \in X$ pertence a algum conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\forall B \in \mathcal{F}$ a aplicação $\mathcal{F}_{A, A \cup B}: \mathcal{F}(A \cup B) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ é sobrejetora. Estude quanto à continuidade e extensibilidade local os seguintes funtores:

1. X variedade C^∞ , N variedade C^∞ e \mathcal{F} =coleção dos abertos de X . Para cada $A \in \mathcal{F}$, definimos $\mathcal{F}(A) := C^\infty(A, N)$. Dados $A \subset B$ ambos em \mathcal{F} definimos $\mathcal{F}_{AB}: C^\infty(B, N) \rightarrow C^\infty(A, N)$, $f \mapsto f|_A$ (restrição).
2. X, N variedades C^∞ , $f: X \rightarrow N$ de classe C^r , $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f)$ vizinhança de f em $C_S^r(M, N)$, \mathcal{F} := coleção dos abertos de X e dado $A \in \mathcal{F}$ pomos $\mathcal{F}(A) := \{g: A \rightarrow N, g \in C^\infty, g|_A \in \mathcal{N}(f)\}$.

O Teorema de Globalização afirma que se (\mathcal{F}, X) é um functor estrutural contravariante, contínuo e localmente extensível e se $\mathcal{F}(A) \neq \emptyset$, para algum $A \in \mathcal{F}$, então $\mathcal{F}_{AX}: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ é sobrejetivo. Para demonstrar este teorema, sugerimos o seguinte roteiro:

- (i) Se $\mathcal{F}(A) \neq \emptyset$ escolhemos $a_0 \in \mathcal{F}(A)$ e definimos \mathcal{X} como o conjunto das duplas (B, b) onde $B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ e $b \in \mathcal{F}(B)$ é tal que $\mathcal{F}_{AB}(b) = a_0$.
- (ii) Ordene parcialmente \mathcal{X} por $(B', b') \leq (B, b) \Leftrightarrow B' \subset B$ e $\mathcal{F}_{B'B}(b) = b'$.
- (iii) Prove que \mathcal{X} possui elemento maximal (tome uniões) digamos (B_{\max}, b_{\max}) .
- (iv) Prove que $B_{\max} = X$ usando a extensibilidade local. Prove também que $\mathcal{F}_{AX}(b_{\max}) = a_0$.

10

Classificação de superfícies

10.1 Superfícies

Neste capítulo, uma *superfície* de classe C^k será uma variedade diferenciável de dimensão dois e classe C^k . Exemplos de essas superfícies são: abertos de \mathbb{R}^2 , superfícies regulares de dimensão dois em \mathbb{R}^m e alguns exemplos mais elaborados como os que passamos a descrever:

Começamos com uma superfície M^2 e um mergulho $f : \{-1, 1\} \times \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow M$ de duas cópias disjuntas do disco fechado $\overline{\mathbb{D}^2}$ em M^2 . Pomos $D^\pm := f(\{\pm 1\} \times \overline{\mathbb{D}^2}) \subset M$. Seja M_1 obtida de M , retirando-se o interior de D^+ e o interior de D^- . Tomamos agora M_2 como obtida de M_1 adjuntando-se (colando-se) o cilindro $[0, 1] \times S^1$ de forma que $\{-1\} \times S^1$ vá sobre ∂D_- , e $\{1\} \times S^1$ vá sobre ∂D^+ . Dizemos, então, que M_2 é obtida de M por *cirurgia* ou ainda se pondo uma *alça* em M via f . Prova-se que o espaço topológico assim obtido possui estrutura natural de superfície C^k se M é de classe C^k . Escrevemos $M[f]$ para denotar essa nova superfície. Prova-se também que se $f_1, f_2 : \{-1, 1\} \times \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow M$ são aplicações *isotópicas* (i.e., se existe uma aplicação diferenciável C^k $F : [-1, 1] \times \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow M$ tal que $F_t := F|_{\{t\} \times \overline{\mathbb{D}^2}}$ é mergulho com $F_{-1} = f_1, F_1 = f_2$), então as variedades $M[f_1]$ e $M[f_2]$ são difeomorfas.

Definição 10.1.1. Uma superfície compacta orientável M sem bordo tem gênero $g \geq 0$ quando é obtida da esfera S^2 pela adjunção sucessiva de alças em número total de g alças.

Dessa forma, existe uma sequência de superfícies $S^2 = M_0, \dots, M_g = M$ com $M_{j+1} = M_j[f_j]$ obtida de M_j pela adjunção de uma alça via $f_j : \{-1, 1\} \times \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow M_j$.

O resultado central que propomos para demonstrar neste capítulo é o seguinte:

Teorema 10.1.1 (Teorema de Classificação de Superfícies Compactas Orientadas). *Uma superfície compacta conexa orientável tem um gênero g . Ou seja, toda superfície compacta conexa e orientável é difeomorfa a uma única superfície tipo esfera com alças.*

Representamos pictorialmente abaixo a superfície esfera com g alças modelo:

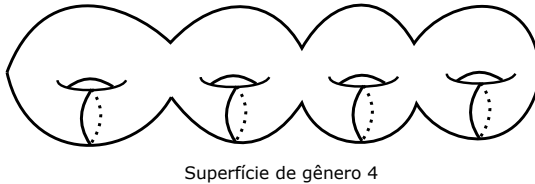
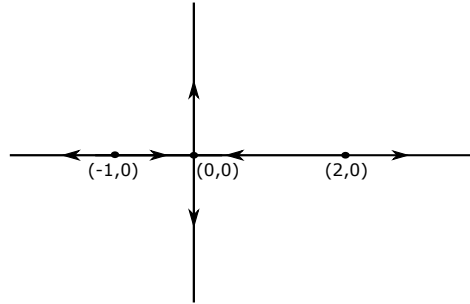
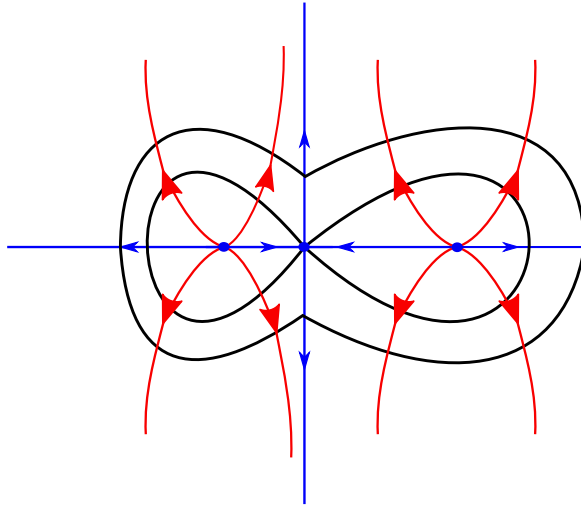


Figura 10.1: O teorema de classificação de superfícies

Antes de provar o teorema central precisamos do seguinte resultado chave:

Teorema 10.1.2. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em M , superfície compacta conexa com bordo ∂M , tal que f tem exatamente três pontos críticos dois pontos de mínimo e um ponto de sela. Então M é difeomorfa ao disco unitário fechado $\overline{\mathbb{D}^2} \subset \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que M é difeomorfa ao disco unitário fechado $\overline{\mathbb{D}^2} \subset \mathbb{R}^2$. Para isto, buscaremos conjugação F entre $(f, \nabla f)$ e $(g, \nabla g)$ sendo $g : \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow \mathbb{R}$ função de Morse do mesmo tipo (i.e., com pontos críticos do mesmo tipo) que f . Para o modelo g , tomamos $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x, y) = x^4/4 - x^3/3 - x^2 + y^2$ cujas curvas de nível e linhas de campo gradiente estão representadas abaixo:

Figura 10.2: Singularidades do campo ∇g Figura 10.3: Curvas de nível de g e linhas do campo ∇g

Então g é função de Morse que admite restrição a “um” disco fechado $\overline{\mathbb{D}^2} \subset \mathbb{R}^2$ do mesmo tipo que f (Exercício !!!).

Vamos agora construir conjugação entre $(f, \nabla f)$ e $(g, \nabla g)$. Começamos organizando os pontos críticos $a, b, c \in M$ de f de modo que a, c sejam mínimos locais e b seja uma sela e com valores $f(b) > f(a) > f(c)$.

Tomamos agora um difeomorfismo $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\theta(f(a)) = g(-1, 0)$, $\theta(f(b)) = g(0, 0)$ e $\theta(f(c)) = g(2, 0)$. Então a aplicação $\tilde{f} := \theta \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}$

é de Morse do mesmo tipo que f e com $\tilde{f}(a) = g(-1, 0)$, $\tilde{f}(b) = g(0, 0)$ e $\tilde{f}(c) = g(2, 0)$. Portanto, podemos assumir que $f(a) = g(-1, 0)$, $f(b) = g(0, 0)$ e $f(c) = g(2, 0)$.

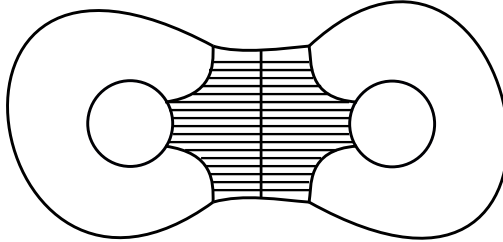
Lema 10.1.1. *Temos que ∂M é conexo.*

Demonstração. Seja $\alpha = f(\partial M)$. Então $\alpha > 0$ é o valor máximo de f , e temos que $f^{-1}(\alpha) = \partial M$. A fim de provarmos que ∂M é conexo é, então, suficiente provar que $f^{-1}(\tilde{\alpha})$ é conexo para algum $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$ uma vez que pela Teoria de Morse temos difeomorfismo $\partial M \cong f^{-1}(\tilde{\alpha})$. Agora observamos que o fluxo φ_t do campo gradiente ∇f é definido para todo tempo $t \geq 0$ e que, dado um ponto $x \in M$, o conjunto limite $x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x)$ é um dos pontos críticos a, b, c . Introduzimos agora os conjuntos estáveis $W_a := \{x \in M; x_\infty = a\}$ e $W_c := \{x \in M; x_\infty = c\}$. A forma local de f em uma vizinhança de c dada pelo Lema de Morse nos diz que existem duas trajetórias de ∇f convergindo para b (separatrizes estáveis) e que dado $\tilde{\alpha} > 0$ a curva de nível $f^{-1}(\tilde{\alpha})$ corta essas duas trajetórias em dois pontos q_1, q_2 tais que $\{q_1, q_2\}$ é o bordo comum em $f^{-1}(\tilde{\alpha}) \cap W_b$. Se alguma componente de $f^{-1}(\tilde{\alpha})$ estivesse contida em W_a , então W_a seria ela mesma uma componente de M e, logo, igual a M por conexidade, absurdo, pois M contém outras singularidades de f . O mesmo vale para W_b . Assim, cada componente de $f^{-1}(\tilde{\alpha})$ contém q_1 e q_2 e, logo, $f^{-1}(\tilde{\alpha})$ tem uma única componente para $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$ provando o lema. \square

Seja agora $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo tal que $\psi(0, 0) = (0, 0)$ e $g \circ \psi^{-1}$ está na forma do Lema de Morse. Tomemos também $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^2$ carta de M tal que $\phi(b) = (0, 0)$, e $f \circ \phi^{-1}$ está na forma do Lema de Morse, sendo que $H = \phi^{-1} \circ \psi: V \rightarrow M$ preserva as linhas do gradiente ∇f (basta tomar ϕ de modo que $H = \phi^{-1} \circ \psi$ seja uma isometria entre o aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ e o aberto $U \subset M$ com a métrica de M (Exercício!)).

Por comodidade, tomamos ϕ e ψ de modo que $\phi(U) = \psi(V)$. Note que então $H = \phi^{-1} \circ \psi: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset M$ é um difeomorfismo tal que $f \circ H = g$, preservando as curvas de nível e órbitas dos gradientes, i.e., que conjuga $(g, \nabla g)$ e $(f, \nabla f)$. Escolhendo a vizinhança V pequena o suficiente, temos que cada órbita de ∇g intersecta V em um conjunto conexo e podemos, então, estender H a uma conjugação $\tilde{H}: \text{Sat}_g(V) \rightarrow \text{Sat}_f(U)$ entre $(g, \nabla g)$ e $(f, \nabla f)$, onde $\text{Sat}_f(U) := \bigcup_{x \in U} \varphi_t^g(x)$. Escreveremos $\tilde{H} = H$ por simplicidade. Podemos ainda obter H de modo que se $p \in \text{Sat}_g(V)$ é tal que a trajetória de ∇g por p tende a $(-1, 0)$ (respectivamente $(2, 0)$) quando $t \rightarrow -\infty$, então a trajetória de ∇f por $H(p)$ tende ao ponto a (respectivamente c) quando $t \rightarrow -\infty$. Tomamos

agora $\lambda \in \mathbb{R}$ com $g(2, 0) < g(-1, 0) < \lambda < g(0, 0) = 0$. Seja $R_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ a região $g^{-1}(]-\infty, \lambda])$. Então R_λ evita uma vizinhança da sela $(0, 0) \in \text{sing } g$ e se divide em duas componentes D e D' que são (difeomorfas a) discos. Os bordos ∂D e $\partial D'$ são componentes de curvas de nível de g . Dado $\delta > 0$ pequeno, denotemos por $\Delta(\delta) \subset \mathbb{R}^2$ o quadrado $|x| \leq \delta$, $|y| \leq \delta$ e ponha $P_\delta := [\text{Sat}_g(\Delta(\delta)) \setminus \text{Int}(D \cup D')] \cap g^{-1}(]-\infty, \delta])$, então P_δ está representada abaixo.



O disco com dois buracos

Figura 10.4: Representação do conjunto P_δ

Tomando $\delta > 0$ pequeno o bastante, temos $\Delta(\delta) \subset V$ e $P_\delta \subset \text{Sat}_g(V)$ e também $P_\delta \cap D = P_\delta \cap \partial D = A$, $P_\delta \cap D' = P_\delta \cap \partial D' = A'$ como arcos compactos. A conjugação $H: \text{Sat}_g(V) \rightarrow \text{Sat}_f(U)$ mergulha os arcos A , A' nos círculos $\partial\Gamma$ e $\partial\Gamma'$ respectivamente.

Afirmção 10.1.1. *Existem difeomorfismos entre D e Γ e entre D' e Γ' que coincidem com H em A e A' respectivamente.*

Demonstração. Primeiro identificamos D e Γ com o disco unitário \mathbb{D}^2 via difeomorfismos de modo que $H|_A$ seja transformado em um mergulho H_0 (preservando a orientação) de um arco $B \subset \partial\mathbb{D}^2$ em $\partial\mathbb{D}^2$. Por isotopia de discos, H_0 é isotópico à inclusão do arco B em $\partial\mathbb{D}^2$ de modo que, pelo Teorema de Extensão Isotópica, H se estende a um difeomorfismo entre D e Γ e da mesma forma para D' e Γ' . \square

Sejam Γ e Γ' as componentes conexas de $f^{-1}(]-\infty, \lambda])$ em M . Então Γ e Γ' são discos disjuntos e obtemos difeomorfismo $G: D \cup D' \rightarrow \Gamma \cup \Gamma'$ com $G(D) = \Gamma$ e $G(D') = \Gamma'$, que se estende às saturações como um difeomorfismo $F: \text{Sat}_g(\partial D \cup \partial D') \rightarrow \text{Sat}_f(\partial\Gamma \cup \partial\Gamma')$ como uma conjugação entre $(g, \nabla g)$ e $(f, \nabla f)$. Observe que F e H coincidem em $A \cup A'$ e, logo, (como ambos são conjugações) coincidem também em $\text{Sat}_g(\partial D \cup \partial D') \cap P_\delta$. Isto nos permite

definir aplicação $K: g^{-1}(]-\infty, \alpha]) \rightarrow M$ pondo $K = G$ em $D \cup D \cup D'$, $K = H$ em P_δ e $K = F$ no restante de $g^{-1}(]-\infty, \alpha])$. Tal aplicação será, então, bem definida e é um homeomorfismo que mapeia $D \cup D'$ difeomorficamente sobre $g^{-1}(]-\infty, \alpha]) \setminus \text{Int}(D \cup D')$. Segue do Teorema de Suavização que $g^{-1}(]-\infty, \alpha])$ e M são difeomorfas. Como por sua vez $g^{-1}(]-\infty, \alpha])$ é difeomorfa a \mathbb{D}^2 segue que M é difeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 . Isto conclui a prova do Teorema 10.1.2. \square

10.2 Singularidades de Morse em dimensão dois - o disco com dois buracos

Nesta seção, estudaremos vizinhanças de um nível crítico de uma função de Morse admissível em uma superfície compacta. Sejam, então, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse admissível na superfície compacta conexa M , $p \in M$ um ponto crítico tipo sela com $f(p) = 0$ e seja $\delta > 0$ tal que $N = f^{-1}(]-\delta, \delta])$ é conexa e não contém outro ponto crítico além de p . Pomos $C_0 = f^{-1}(0)$, $C_+ = f^{-1}(\delta)$, $C_- = f^{-1}(-\delta)$. Suponhamos que N é orientável. Então temos o seguinte:

1. C_- é um círculo: de fato, C_- é uma subvariedade compacta sem bordo em N e, além disso, C_- é conexa como mostra a forma local dada pelo Lema de Morse.
2. C_+ é a união disjunta de duas componentes que são subvariedades compactas sem bordo, logo C_+ é a união de dois círculos disjuntos.
3. Temos que $\partial N = C_- \cup C_+$. Como N é conexa, temos, então, que C_0 é conexo, e daí, pelo observado acima, C_0 é a união conexa de dois círculos de modo que C_0 é uma “figura oito”. Em particular
4. ∂N tem três componentes conexas.

Proposição 10.2.1. *Nas condições acima, para f e N , temos que N é difeomorfa a um disco com dois buracos.*

Demonstração. De fato, basta usar que o bordo ∂N tem três componentes. Podemos supor que C_+ tem duas componentes e C_- uma. Colamos discos D_+^1, D_+^2 em N ao longo de cada componente de $\partial C_+ \subset \partial N$, de modo a obter superfície compacta M com bordo, e equipamos M com função de Morse admissível $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g = f$ em N , e em cada disco D_+^1, D_+^2 identificado com

o disco unitário \mathbb{D}^2 pomos $g = x^2 + y^2 - 1 - \epsilon$. Assim, pelo Teorema Teorema 10.1.2, concluimos que M é difeomorfa a \mathbb{D}^2 e N é difeomorfa ao um disco com dois buracos. □

Corolário 10.2.1. *Seja M uma superfície conexa orientável e compacta admitindo função de Morse com único ponto crítico tipo sela e eventualmente outros tipo centro. Então M é difeomorfa a uma das superfícies: S^2 , \mathbb{D}^2 , $S^1 \times [0, 1]$ ou a um disco com dois buracos.*

Demonstração. Exercício! □

Prova do Teorema de Classificação das Superfícies Compactas. Seja $k \geq 0$ o número de singularidades tipo sela da função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Provaremos o teorema usando indução sobre k . Se $k = 0$, então f não tem selas, apenas centros. Como M é compacta sem bordo, f tem pelo menos um centro correspondendo a um ponto de mínimo $p \in M$ e pelo menos um centro correspondendo a um ponto de máximo $q \in M$. Sejam W_p e W_q as bacias de repulsão e atração de p e q respectivamente. Então W_p e W_q são abertos não vazios. Por sua vez, cada órbita de ∇f converge no futuro para um ponto de máximo de f e no passado para um ponto de mínimo de f . Como M é conexa, segue que M possui um único ponto de máximo e um único ponto de mínimo de modo que $M = W_p \cup W_q$. Uma vez mais, a conexidade de M implica que $W_p \cap W_q \neq \emptyset$, de modo que cada órbita não singular de ∇f em M converge no futuro para q e no passado para p como na figura abaixo. Isto nos diz que M é resultado da colagem (via o fluxo de ∇f) de dois discos D_p, D_q centrados em p e q respectivamente com $\partial D_p, \partial D_q$ sendo curvas de nível de f (a colagem é feita por meio de um cilindro de bordo $\partial D_p \cup \partial D_q$). Logo, M é (homeomorfa e portanto) difeomorfa à esfera S^2 . Suponha agora o teorema válido para variedades, admitindo funções de Morse com menos do que k selas. Tomando função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ separando pontos singulares, existe uma sela $p \in M$ tal que $a = f(p) < f(q)$ para toda outra sela $q \in \text{sing } f$. Tomamos um número real $b > a$ de modo que p é único ponto crítico de f na faixa $f^{-1}([a, b])$. Dada a região $R := f^{-1}([-\infty, b]) \subset M$, denotamos por $V \subset R$ a componente conexa que contém o ponto p . Então $\partial V = f^{-1}(b)$ e a restrição f_0 de f a V têm uma única sela em V , como o bordo de V é não vazio, pelo Corolário 10.2.1, concluimos que V é difeomorfa ao disco unitário \mathbb{D}^2 ou V é difeomorfa ao cilindro $S^1 \times [0, 1]$: de fato, f_0 é constante no bordo de V , logo não podemos ter V difeomorfa ao disco com dois buracos. Caso V seja

difeomorfa ao disco \mathbb{D}^2 , podemos substituir f_0 em V por uma nova função de Morse com um único centro como conjunto singular e colando g com a restrição de f a $M \setminus V$, obtemos nova função de Morse em M com $k - 1$ selas. Pela hipótese de indução, segue que o teorema vale para M . Suponha finalmente que V é difeomorfa ao cilindro $S^1 \times [0, 1]$. Nesse caso, podemos construir superfície \hat{M} a partir de $M \setminus V$ em cobrindo $\partial V = S^1 \times \{0, 1\}$ com dois discos D_1, D_2 e obtendo função de Morse \hat{f} em \hat{M} , tendo um único centro como singularidade em cada disco D_j ($j = 1, 2$) e coincidindo com f em $\hat{M} \setminus (D_1 \cup D_2) \cong M \setminus V$.

Então \hat{M} admite função de Morse com menos do que k selas e por indução o resultado vale para \hat{M} , isto é, \hat{M} é uma superfície orientável compacta de gênero \hat{g} para algum $\hat{g} \in \mathbb{N}$. Observe que M é obtida de \hat{M} por adjunção de uma alça (correspondendo a V) e, logo, M tem gênero $g = \hat{g} + 1$ e o Teorema Teorema 10.1.1 está provado. □

11

Introdução à teoria das folheações

A teoria geométrica das folheações teve sua origem nos trabalhos de C. Ehresmann (1947) e G. Reeb (1945), Reeb (1947), Reeb (1948). Sua diversidade de aplicações e riqueza de técnicas utilizadas, congregando diversas áreas da Matemática como Topologia, Geometria, Análise e Sistemas Dinâmicos, têm sido fundamentais no avanço das soluções de diversos problemas em Matemática. Mencionamos, por exemplo, o estudo e classificação de 3-variedades diferenciáveis reais. Nesta linha de abordagem, podemos citar alguns dos resultados centrais, hoje clássicos, da Teoria Geométrica das Folheações:

1. Teoremas de Estabilidade local e global, devidos a Reeb.
2. Teorema de Tischler.
3. Teorema de Haefliger sobre existência de círculos transversais a folheações de codimensão 1.
4. Teorema de Novikov sobre existência de folha compacta em S^3 .
5. Teorema do Posto de E. Lima sobre o posto de S^3 .
6. Teoremas sobre folheações com estrutura transversal homogênea.

7. Trabalhos de J. Plante sobre crescimento de folheações e existência de folhas compactas.
8. Trabalhos de Epstein e D. Sullivan sobre estabilidade de folheações com todas as folhas compactas.

Vamos nos deter aqui com o alerta de que a lista acima é apenas uma escolha entre várias possíveis, mas que contempla os objetivos deste texto.

A noção de folheação complexa (holomorfa), por sua vez, é oficialmente mais recente, embora já esteja presente em espírito nos trabalhos de P. Painlevé Painlevé (1897). Seu grande desenvolvimento, sobretudo nas últimas duas décadas, deve-se também ao uso bem sucedido de técnicas modernas de Geometria Complexa e Várias Variáveis Complexas.

11.1 A noção de folheação

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m , $m \in \mathbb{N}$. Denotemos por D^k a bola aberta unitária de \mathbb{R}^k , onde $k \in \mathbb{N}$ e seja $0 \leq n \leq m$ fixado.

Definição 11.1.1. Uma *folheação regular de classe C^r e codimensão $m - n$* em M é um atlas maximal $\mathcal{F} = \{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$ de M , satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $X_i(U_i) = D^n \times D^{m-n}$.
2. Para todo $i, j \in I$, a aplicação $X_j \circ X_i^{-1}: X_i(U_i \cap U_j) \rightarrow X_j(U_i \cap U_j)$ é de classe C^r e tem a forma

$$X_j \circ X_i^{-1}(x, y) = (f_{i,j}(x, y), g_{i,j}(y)).$$

Observação 11.1.1.

1. O número n é chamado *dimensão* de \mathcal{F} .
2. Uma *placa* de \mathcal{F} é o conjunto $\alpha = X_i^{-1}(\{y = C\})$ para algum $C \in \mathbb{R}^{m-n}$.
3. As placas de \mathcal{F} definem uma relação \approx em M como segue: Se $x, y \in M$, então $x \approx y$ se e só se existe uma coleção de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $x \in \alpha_1$, $y \in \alpha_k$ e $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq k - 1$. Claramente \approx é uma relação de equivalência e, então, podemos considerar a classe de equivalência \mathcal{F}_x de \approx contendo $x \in M$.

4. Uma *folha* de \mathcal{F} é definida como uma classe de equivalência $L = \mathcal{F}_x$ de \approx (para algum $x \in M$). Pode-se facilmente provar que cada folha de \mathcal{F} é uma subvariedade imersa de M .
5. Do ponto de vista da equivalência \approx , pode-se definir \mathcal{F} como uma partição de M por subvariedades imersas L tal que, para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U difeomorfa a $D^{m-n} \times D^n$ tal que as folhas da partição interceptam U na folheação trivial $\{D^n \times \{y\}; y \in D^{m-n}\}$ em $D^{m-n} \times D^n$.

Temos a seguinte definição equivalente de folheação.

Definição 11.1.2. Uma folheação de classe C^r e codimensão $m - n$ em M é uma partição \mathcal{F} de M , consistindo em subvariedades $F \subset M$ imersas de classe C^r disjuntas com a seguinte propriedade: para cada ponto $x \in M$, existem uma vizinhança U de x e um difeomorfismo $X: U \rightarrow D^n \times D^{m-n}$ tal que, para todo $y \in D^{m-n}$, existe $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo

$$X^{-1}(D^n \times \{y\}) \subset F.$$

Os elementos da partição \mathcal{F} são chamadas as *folhas* de \mathcal{F} . O elemento \mathcal{F}_x de \mathcal{F} contendo $x \in M$ é chamado a *folha de \mathcal{F} contendo x* .

A terceira definição de folheação usa a noção de aplicações distinguidas. Seja $\mathcal{F} = \{(U_i, X_i)\}$ uma folheação de uma variedade M no sentido da Definição 11.1.1. Então, para todo i, j , a aplicação de transição $X_j \circ X_i^{-1}$ tem a forma

$$X_j \circ X_i^{-1}(x, y) = (f_{i,j}(x, y), g_{i,j}(y)).$$

A aplicação $g_{i,j}$ é um difeomorfismo em seu domínio de definição. Segue-se que do fato de que a derivada $D(X_j \circ X_i^{-1})(x, y)$ tem determinante diferente de zero igual a $\partial_x f_{i,j}(x, y) \cdot g_{i,j}(y)$. Definimos para todo i a aplicação $g_i = \Pi_2 \circ X_i$, onde Π_2 é a projeção na segunda coordenada $(x, y) \in D^n \times D^{m-n} \rightarrow y$. Como $(\Pi_2 \circ X_j) \circ X_i^{-1} = g_{i,j}$, então $g_{i,j}^{-1} \circ g_j = X_i$ conseqüentemente $\Pi_2 \circ g_{i,j}^{-1} \circ g_j = \Pi_2 \circ X_i = g_i$ portanto $g_j = g_{i,j} \circ g_i$ desde que Π_2 é a identidade em D^{m-n} . Concluimos que a folheação \mathcal{F} de classe C^r e codimensão $m - n$ em uma variedade M^m é equipada com uma cobertura $\{U_i\}$ de M e submersões $g_i: U_i \rightarrow D^{m-n}$ de classe C^r de modo que para todo i, j existe um difeomorfismo $g_{i,j}: D^{m-n} \rightarrow D^{m-n}$, satisfazendo as relações de cociclo

$$g_j = g_{i,j} \circ g_i, \quad g_{i,i} = I.$$

As g_i 's são *aplicações distinguidas* de \mathcal{F} .

Por outro lado, suponha que M^m admite uma cobertura aberta $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que para cada $i \in I$ existe uma submersão $g_i: U_i \rightarrow D^{m-n}$ tal que para todo i, j existe um difeomorfismo $g_{i,j}$ satisfazendo as relações de cociclo acima. Pela Forma Local das Submersões podemos assumir que para cada $i \in I$ existe um difeomorfismo $X_i: U_i \rightarrow D^n \times D^{m-n}$ tal que

$$g_i = \Pi_2 \circ X_i$$

desde

$$(\Pi_2 \circ X_j) \circ X_i^{-1} = g_j \circ X_i^{-1} = g_{i,j} \circ g_i \circ X_i^{-1} = g_{i,j} \circ \Pi_2,$$

temos que o atlas

$$\mathcal{F} = \{(U_i, X_i)\}$$

define uma folheação de classe C^r e codimensão $m - n$ de M .

Assim, sugere-se a seguinte definição equivalente à folheação.

Definição 11.1.3. Uma folheação de classe C^r e codimensão $m - n$ de M é uma cobertura $\{U_i; i \in I\}$ de M tal que para todo $i \in I$ existe uma submersão $g_i: U_i \rightarrow D^{m-n}$ de classe C^r tal que para todo $i, j \in I$ existe um difeomorfismo $g_{i,j}: D^{m-n} \rightarrow D^{m-n}$, satisfazendo as relações do cociclo

$$g_j = g_{i,j} \circ g_i, \quad g_{i,i} = I.$$

As g_i 's são *aplicações distinguidas* de \mathcal{F} .

Exemplo 11.1.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $X \in \mathcal{X}^r(U)$ ($r \geq 1$) não singulares. Considere a equação diferencial associada $w' = X(w)$. Graças ao Teorema do Fluxo Tubular as curvas integrais da equação definem uma folheação regular local de dimensão 1 em U , denotada por \mathcal{F}_X e é chamada folheação gerada pelo campo X .

Exemplo 11.1.2. Seja $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)$ uma 1-forma diferencial de classe C^r , $r \geq 1$ definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, $\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in U$. O campo de vetores não singular associado à equação diferencial $\omega = 0$ está dado por:

$$X(x, y) = -b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

As soluções de $w' = X(w)$ são soluções da equação $\omega = 0$. Logo, as curvas integrais de X determinam sobre U uma folheação regular local de dimensão 1 e desde que elas são também subvariedades integrais de $\omega = 0$ temos que a folheação \mathcal{F}_ω gerada por ω coincide com \mathcal{F} em U .

Exemplo 11.1.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma submersão de classe C^r , $r \geq 1$. As componentes conexas de $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$ definem uma folheação regular de codimensão 1 em U graças ao Teorema da Forma Local das Submersões.

Exemplo 11.1.4. Uma variedade real M^{2n} é uma variedade complexa de dimensão n se M , como variedade real, admite um atlas diferenciável $\{\varphi_j: U_j \subset M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{j \in I}$, chamado atlas holomorfo, tal que as correspondentes mudanças de coordenadas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$$

são aplicações holomorfas.

Devido ao homeomorfismo natural de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n$, todas as definições básicas de variedades diferenciáveis, tais como espaço tangente, fibrado tangente, curvas etc; são trazidos de modo natural a variedades complexas.

Definição 11.1.4. Uma *folheação holomorfa* \mathcal{F} de dimensão complexa k é uma variedade complexa M dada por um atlas holomorfo $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- (ii) $\varphi_i(U_i) = P_i \times Q_i$, sendo P_i e Q_i polidiscos abertos de \mathbb{C}^k e \mathbb{C}^{n-k} respectivamente.
- (iii) Se $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então as mudanças de coordenadas $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_{ij}) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \varphi_j(U_{ij}) \subset \mathbb{C}^n$ são biholomorfismos da forma

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z, w) = (A_{ij}(z, w), B_{ij}(w)).$$

Exemplo 11.1.5. Como no Exemplo 11.1.1, dado $U \subset \mathbb{C}^2$ aberto e $Z: U \rightarrow \mathbb{C}^2$ campo de vetores holomorfo, as equações diferenciais complexas da forma $z' = Z(z)$ definem uma folheação holomorfa \mathcal{F}_Z de dimensão complexa 1 no aberto $V = U \setminus \text{Sing}(Z)$, sendo $\text{Sing}(Z) = \{z \in U; Z(z) = 0\}$. As folhas de \mathcal{F}_Z são as curvas integrais de Z em V . Nesse caso, as folhas são superfícies de Riemann imersas em \mathbb{C}^2 .

Definição 11.1.5. Sejam M, N variedades complexas e \mathcal{F} uma folheação em N de codimensão k . Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é transversal \mathcal{F} quando é transversal a todas as folhas de \mathcal{F} , ou seja, para todo $p \in M$, temos

$$Df(p)(T_p M) + T_q \mathcal{F} = T_q N$$

sendo $q = f(p)$.

Exemplo 11.1.6. Sejam M, N variedades complexas e \mathcal{F} uma folheação em N de codimensão k . Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação holomorfa transversal à folheação \mathcal{F} , então as componentes conexas das imagens inversas por f , $f^{-1}(L)$, com $L \in \mathcal{F}$, determinam uma folheação em M , denotada por $f^*(\mathcal{F})$, da mesma codimensão de \mathcal{F} . A folheação $f^*(\mathcal{F})$ é chamada *pull-back* ou *imagem inversa* de \mathcal{F} por f .

11.2 Holonomia

O conceito de holonomia de uma folheação é motivado pelo conceito de aplicação de primeiro retorno ou aplicação de Poincaré de uma órbita periódica de um campo de vetores.

A “aplicação” $P: (\sigma, x_0) \rightarrow (\sigma, x_0)$, $x \mapsto P(x)$, como ilustrada acima será, sobre condições adequadas de diferenciabilidade, um germe de difeomorfismo.

Assim, se γ é uma órbita periódica de um fluxo ϕ e Σ é uma seção transversal a ϕ que corta γ num único ponto $p \in \Sigma$, a holonomia de γ relativa a Σ será um difeomorfismo $f_\gamma: \Sigma^1 \rightarrow \Sigma$, onde Σ^1 é uma seção contida em Σ tal que $p \in \Sigma^1$ e para todo ponto $q \in \Sigma^1$ a órbita positiva de q por ϕ corta Σ pelo menos uma vez. Podemos, então, definir f por

$$f(q) = \text{“primeiro ponto em que a órbita positiva de } \phi \text{ por } q \text{ corta } \Sigma\text{”}.$$

Se Σ^1 for uma seção suficientemente pequena contida em Σ , então f será um difeomorfismo sobre $f(\Sigma^1)$ com um ponto fixo em p . Ocorre que, em alguns casos, é necessário considerar-se os retornos seguintes as órbitas dos pontos de Σ , o que consiste em obter o n -ésimo iterado de f , denotado por $f^{(n)}$, definido indutivamente por:

$$f^{(1)} = f \quad \text{e} \quad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}.$$

Ora, em geral, para $n \geq 2$, $f^{(n)}$ não pode ser definida em todos os pontos de Σ^1 , o que nos obriga a tomar domínios cada vez menores $\Sigma^1 \supset \Sigma^2 \supset \dots \supset \Sigma^n$.

Analogamente, quando desejamos considerar os retornos sucessivos das órbitas negativas, que consiste em obter os iterados negativos de f ,

$$f^{(-1)} = f^{-1} \quad \text{e} \quad f^{(-n)} = (f^{-1})^n,$$

somos obrigados a tomar domínios diferentes $\Sigma^{-1} \supset \dots \supset \Sigma^{-n}$. Observe que o único ponto de Σ no qual podemos garantir que f^n está definida para todo $n \in \mathbb{Z}$, é o ponto p , ponto fixo de todos os f^n . Com objetivo de permitir a composição de difeomorfismos que tenham um ponto fixo em comum, sem ficar a todo momento especificando os domínios, utilizamos a noção de germe.

Como veremos em seguida, a holonomia de uma folha L de uma folheação holomorfa \mathcal{F} é uma representação do grupo fundamental de L no grupo de germes de biholomorfismos de uma seção Σ transversal a \mathcal{F} , que deixam um ponto de Σ fixo.

Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão k em M . Fixemos uma folha L de \mathcal{F} e uma curva contínua $\gamma: [0, 1] \rightarrow L$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais a \mathcal{F} de dimensão k tais que $p_0 = \gamma(0) \in \Sigma_0$ e $p_1 = \gamma(1) \in \Sigma_1$. As seções Σ_0 e Σ_1 podem ser obtidas através de cartas distinguidas U_0 e U_1 em p_0 e p_1 , de tal forma que Σ_j corte cada placa de U_j exatamente uma vez.

Em seguida, consideremos uma cobertura finita de $\gamma([0, 1])$ por cartas distinguidas de \mathcal{F} , digamos V_0, \dots, V_m , tais que:

- (i) $V_0 = U_0$ e $V_m = U_1$.
- (ii) Para todo $j = 1, \dots, m$, $V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$.
- (iii) Para todo $j = 1, \dots, m$, existe uma carta trivializadora U de \mathcal{F} tal que $V_{j-1} \cup V_j \subset U$.
- (iv) Existe uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1\}$ de $[0, 1]$ tal que $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$ para $j = 0, \dots, m$.

Para cada $j = 1, \dots, m$, seja Σ'_j uma seção transversal a \mathcal{F} tal que $\gamma(t_j) \in \Sigma'_j \subset U_{j-1} \cup U_j$ e Σ'_j corta cada placa de U_{j-1} e cada placa de U_j no máximo em um ponto. Coloquemos também $\Sigma'_0 = \Sigma_0$ e $\Sigma'_{m+1} = \Sigma_1$.

Utilizando (ii) e (iii), não é difícil ver que se $q \in \Sigma'_j$, então a placa de V_j , que contém q , corta Σ'_{j+1} no máximo em um ponto, sendo que se q está numa pequena vizinhança, digamos A_j , de $\gamma(t_j)$ em Σ'_j , então essa placa corta de fato Σ'_{j+1} num ponto, digamos $f_j(q)$. Com isso, podemos definir uma aplicação $f_j: A_j \rightarrow$

Σ'_j tal que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Se as seções consideradas são subvariedades holomorfas, o que suporemos de agora em diante, então f_j será também. De fato, f_j será um biholomorfismo sobre sua imagem, já que podemos definir a sua inversa de maneira análoga.

Observe que, em geral, não é possível compor f_{j+1} com f_j , mas podemos compor os seus germes, já que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Denotando o germe de f_j em $\gamma(t_j)$ por $[f_j]$, podemos considerar o germe composto:

$$[f]_\gamma = [f_m] \circ \dots \circ [f_0]$$

que será um germe de biholomorfismo em p_0 , onde, em princípio, $[f]_\gamma$ depende da cobertura V_0, \dots, V_m e das seções intermediárias consideradas. O resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em Camacho e Lins Neto (1979), mostra que de fato $[f]_\gamma$ não depende das construções auxiliares.

Lema 11.2.1. O germe $[f]_\gamma$ depende somente de γ de Σ_0 e de Σ_1 .

O germe $[f]_\gamma$ é chamado de *holonomia de γ com respeito às seções Σ_0 e Σ_1* . No caso em que γ é uma curva fechada em L , ou seja, $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, $[f]_\gamma$ é um elemento do grupo $\text{Diff}(\Sigma_0, p_0)$ e é chamado de *holonomia de γ com respeito a Σ_0* ou simplesmente *holonomia de γ* .

Veremos em seguida como se calcula a holonomia de uma curva obtida pela adjunção de duas outras. Sejam $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow L$ duas curvas em L tais que $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = \delta(0) = p_1$ e $\delta(1) = p_2$. A *adjunção* de γ e δ é por definição a curva $\alpha: [0, 1] \rightarrow L$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \delta(2t - 1), & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

A curva α definida acima será denotada por $\delta \star \gamma$.

Observação 11.2.1. Na maioria dos textos de Teoria da Homotopia, a adjunção é definida ao contrário, isto é, o que para nós é definido como $\delta \star \gamma$, nesses textos é definido como $\gamma \star \delta$. Adotamos essa convenção para que a representação de holonomia seja um homomorfismo de grupos e não um anti-homomorfismo.

O resultado seguinte decorre diretamente das definições:

Lema 11.2.2. Sejam γ, δ, p_0, p_1 e p_2 como anteriormente. Fixemos seções transversais a $\mathcal{F}, \Sigma_0, \Sigma_1$ e Σ_2 por p_0, p_1 e p_2 respectivamente. Então

$$[f]_{\gamma \star \delta} = [f]_{\gamma} \circ [f]_{\delta}$$

onde os germes acima são obtidos como holonomias nas seções Σ_0, Σ_1 e Σ_2 .

O resultado a seguir nos permitirá definir o “grupo de holonomia” de uma folha de \mathcal{F} .

Lema 11.2.3 (Teorema 4.2 em Camacho e Lins Neto (ibid.)). Sejam $M, \mathcal{F}, L, p_0, p_1 \in L, \Sigma_0$ e Σ_1 como anteriormente. Se $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow L$ são duas curvas tais que $\gamma(0) = \delta(0) = p_0, \gamma(1) = \delta(1) = p_1$ e γ e δ são homotópicas em L com extremos fixos, então $[f]_{\gamma} = [f]_{\delta}$.

Convém lembrar aqui que duas curvas γ e δ , como no enunciado do lema, são *homotópicas* em L com *extremos fixos* se existe uma aplicação contínua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow L$ tal que

- (i) $H(t, 0) = \gamma(t)$ e $H(t, 1) = \delta(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.
- (ii) $H(0, s) = p_0$ e $H(1, s) = p_1$ para todo $s \in [0, 1]$.

Usaremos, então, a notação $\gamma \sim \delta$. No caso em que $p_0 = p_1$ é sabido que \sim é uma relação de equivalência (veja **L3**). A classe de equivalência (ou homotopia) de uma curva γ com extremos em p_0 é denotada por $[\gamma]$. O conjunto das classes de equivalência de \sim é, nesse caso, chamado de *grupo fundamental* ou de *homotopia de L com base em p_0* . A notação geralmente utilizada para esse grupo é $\pi_1(L, p_0)$. A lei de composição desse grupo, que será denotada por \star , é definida da seguinte maneira:

Dadas duas classes de homotopia $[\gamma]$ e $[\delta]$ em $\pi_1(L, p_0)$, fixemos representações os mesmos γ e δ . Definimos, então, $[\delta] \star [\gamma] = [\delta \star \gamma]$.

É possível demonstrar que a operação \star está bem definida (isto é, $[\delta] \star [\gamma]$ não depende dos representantes escolhidos) e que $\pi_1(L, p_0)$ é um grupo com essa operação. No caso, o elemento unitário é a classe de equivalência da curva constante $e(t) \equiv p_0, t \in [0, 1]$. Para mais detalhes, recomendamos a referência **L3**. Levando-se em conta o Lema 11.2.3, a seguinte definição é natural:

Definição 11.2.1. Sejam M uma variedade complexa, \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão k em M, L uma folha de $\mathcal{F}, p \in L$ e Σ uma seção holomorfa transversal a \mathcal{F} tal que $p \in \Sigma$. A *representação de holonomia de L*

com respeito a p e a Σ é, por definição, a aplicação $H = H_{L,p,\Sigma}: \pi_1(L, p) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, p)$, definida por:

$$H([\gamma]) = [f]_\gamma$$

onde γ é um representante de $[\gamma]$ e $[f]_\gamma$ é o germe de holonomia de γ com respeito a Σ . O Lema 11.2.3 implica que H está bem definida, isto é, não depende do representante γ de $[\gamma]$.

O grupo de holonomia de L com respeito a p e a Σ é, por definição a imagem $H(\pi_1(L, p))$.

Usaremos a notação $\text{Hol}(L, p, \Sigma)$ para este conjunto. O seguinte resultado, que decorre o Lema 11.2.2, é fundamental:

Proposição 11.2.1. A representação de holonomia é um homomorfismo de grupos. Mais precisamente, se $a, \in \pi_1(L, p)$, então

$$H(a \star b) = H(a) \circ H(b).$$

Outro fato, cuja prova poder ser encontrada em Camacho e Lins Neto (1979), é o seguinte:

Proposição 11.2.2 (Teorema 4.2 em Camacho e Lins Neto (ibid.)). Sejam L folha de uma folheação holomorfa \mathcal{F} de codimensão k , $p_0, p_1 \in L$ e Σ_0, Σ_1 seções transversais a \mathcal{F} que contêm p_0 e p_1 respectivamente. Fixemos uma curva $\alpha: [0, 1] \rightarrow L$ tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$. Seja $[f]_\alpha$ o germe em p_0 de holonomia de α entre as seções Σ_0 e Σ_1 . Então $[f]_\alpha$ conjuga $\text{Hol}(L, p_1, \Sigma_1)$, isto é:

$$\text{Hol}(L, p_0, \Sigma_0) = ([f]_\alpha)^{-1} \circ \text{Hol}(L, p_1, \Sigma_1) \circ [f]_\alpha.$$

Em particular, $\text{Hol}(L, p_0, \Sigma_0)$ e $\text{Hol}(L, p_1, \Sigma_1)$ são isomorfos.

Como podemos supor que as seções transversais são biholomorfas a abertos de \mathbb{C}^k , segue a seguinte definição natural:

Definição 11.2.2. Seja L um folha de uma folheação holomorfa de codimensão k . O grupo de holonomia de L , denotado por $\text{Hol}(L)$, é a coleção de todos os grupos de germes em $q \in \mathbb{C}^k$ de homeomorfismos de \mathbb{C}^k , que deixam q fixo e que são conjugados a $\text{Hol}(L, p, \Sigma)$, onde $p \in L$ e Σ é uma seção transversal a \mathcal{F} passando por p .

Diremos que o grupo de holonomia de L é conjugado a um grupo dado, digamos G , se $G \in \text{Hol}(L)$. Assim, por exemplo, diremos que $\text{Hol}(L)$ é *trivial* se $\{id\} \in \text{Hol}(L)$, onde id é a aplicação identidade.

11.3 Teoremas de Estabilidade de Reeb Simplificado

Seja L_0 uma folha de uma folheação \mathcal{F} de uma variedade M . Como se relacionam L_0 e as folhas vizinhas? Obviamente, a fim de tornarmos a pergunta acima razoável, vamos fazer algumas hipóteses simplificadoras. Vamos, então, supor L_0 é compacta. A partir daí, sabemos que $\pi_1(L_0)$ e, portanto, o seu grupo de holonomia $\text{Hol}(L_0)$ são finitamente gerados. Entretanto, $\text{Hol}(L_0)$ pode ser selvagem o bastante para impedir qualquer uniformidade na distribuição das folhas de \mathcal{F} vizinhas a L_0 . Pede-se, então, o seguinte: $\text{Hol}(L_0)$ é finito.

Obtemos, assim, o seguinte resultado fundamental na teoria (ver Godbillon (1991), Camacho e Lins Neto (1979)):

Teorema 11.3.1 (Teorema de Estabilidade Local de Reeb). Seja \mathcal{F} folheação C^1 de codimensão q de uma variedade M tendo uma folha L_0 compacta com grupo de holonomia finito. Então existe um sistema fundamental de vizinhanças saturadas V_j , ($j = 1, \dots, \infty$) de L_0 com as seguintes propriedades:

- (a) $\bigcap V_j = L_0$, $V_{j+1} \subset V_j$.
- (b) Cada vizinhança V_j é união de folhas compactas, cada folha tendo grupo de holonomia finito.

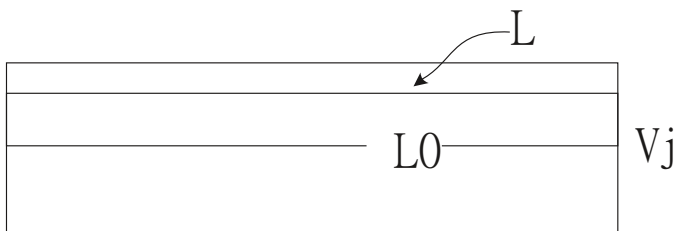


Figura 11.1: Vizinhança saturada por folhas compactas

De fato, podemos escolher uma vizinhança saturada V de L_0 na qual se define uma retração $\pi: V \rightarrow L_0$ tal que $\pi^{-1}(p) = D_p$ é um disco transversal a \mathcal{F} , para todo $p \in L_0$. Além disso, para cada folha $L \subset V$, a restrição $\pi|_L: L \rightarrow L_0$ é uma aplicação de recobrimento finita cujo grupo de transformações corresponde a um subgrupo de $\pi_1(L_0)$ e isomorfo a um subgrupo de $\text{Hol}(L_0)$.

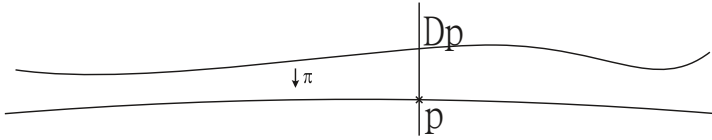


Figura 11.2: Recobrimento de L_0 por folhas vizinhas

Como consequência imediata desse teorema, conclui-se que o conjunto das folhas compactas com holonomia finita é um aberto da variedade M . Outra consequência interessante é a seguinte:

Corolário 11.3.1. Seja \mathcal{F} folheação C^1 de codimensão q de M tendo uma folha L_0 compacta e com grupo fundamental finito. Existe então vizinhança saturada V de L_0 com todas as folhas compactas com grupo fundamental finito.

De fato, todo recobrimento finito $L \rightarrow L_0$ de L_0 (folha) compacta, com grupo fundamental finito também é compacto com $\pi_1(L)$ finito. Observe que $\pi_1(L_0)$ finito \Rightarrow $\text{Hol}(L_0)$ finito.

Em codimensão 1, o Teorema de Estabilidade assume a seguinte forma, bem mais precisa:

Teorema 11.3.2 (Teorema de Estabilidade Global de Reeb). Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^1 e codimensão 1 de uma variedade compacta (e conexa) M . Se \mathcal{F} possui uma folha compacta L_0 com grupo fundamental finito, então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas com grupo fundamental finito. Caso \mathcal{F} seja ainda transversalmente orientável, então basta supor que L_0 é compacta com $H_1(L_0; \mathbb{R}) = 0$ e, nesse caso, \mathcal{F} é dada por uma submersão $f: M \xrightarrow{C^1} S^1$.

Adendos ao enunciado:

1. Caso \mathcal{F} não seja transversalmente orientável existe recobrimento duplo $\sigma: \widehat{M} \rightarrow M$ com \widehat{M} compacta, equipado com folheação $\widehat{\mathcal{F}} = \sigma^*\mathcal{F}$ de classe C^1 e codimensão 1, tal que $\widehat{\mathcal{F}}$ é transversalmente orientável e possui folha $\widehat{L}_0 \subset \sigma^{-1}(L_0)$ compacta com grupo fundamental finito.
2. Pelo Teorema de Ehresmann, toda submersão própria de classe C^2 $f: M \rightarrow N$ é uma fibração localmente trivial, assim, se \mathcal{F} no teorema é de classe C^2 então a submersão $f: M \rightarrow S^1$ define \mathcal{F} como fibração de M sobre S^1 .

3. O resultado para $H_1(L_0, \mathbb{R}) = 0$ é devido a W. Thurston (ver Thurston (1974)). Obviamente temos $\pi_1(L_0)$ finito $\Rightarrow H_1(L_0; \mathbb{R}) = 0$.
4. Como Corolário do Teorema de Estabilidade Global, conclui-se que se L_0 é folha compacta com $\pi_1(L_0)$ finito de folheação \mathcal{F} de classe C^1 e codimensão 1, então $\#\text{Hol}(L_0) \leq 2$, sendo que $\text{Hol}(L_0) = \{\text{Id}\}$ caso \mathcal{F} seja transversalmente orientável, o mesmo valendo para qualquer folha de L de \mathcal{F} . Também, no caso transversalmente orientável, conclui-se que todas as folhas de \mathcal{F} são difeomorfas.

Em particular, podemos enunciar:

Corolário 11.3.2. *Não existe folheação \mathcal{F} de classe C^1 e codimensão 1 da esfera S^n , $n \geq 3$, tendo alguma folha L_0 difeomorfa a S^{n-1} .*

Com efeito, sabemos que não existe fibração $S^n \rightarrow S^{n-1}$ com fibra S^{n-1} ; o que segue da sequência exata de homotopia de uma fibração (ver Steenrod (1951)).

12

Equações diferenciais e sistemas dinâmicos complexos

Muitos fenômenos naturais são melhor explicados com a introdução de variáveis complexas e, conseqüentemente, de equações diferenciais com coeficientes e tempo complexos. Daremos agora uma bastante breve introdução ao tema, mas com uma aplicação ao final à teoria de centros de campos de vetores planos com coeficientes reais analíticos, o teorema de Poincaré–Lyapunov. Começamos com alguns conceitos e resultados básicos de geometria complexa.

12.1 Complexificação de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial de dimensão real dois, o conjunto denotado por $V_{\mathbb{C}}$ e dado por

$$V_{\mathbb{C}} = \{u + iv; u, v \in V\}$$

com as operações de soma

$$(u + iv) + (u' + iv') = (u + u') + i(v + v')$$

e produto por um número complexo

$$(\alpha + i\beta) \cdot (u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v),$$

define um espaço vetorial complexo de dimensão (complexa) dois, chamado *complexificação de V* .

Observação 12.1.1.

1. $V \subset V_{\mathbb{C}}$.
2. Dado um \mathbb{R} -operador linear $T: V \rightarrow V$, estende-se naturalmente a um \mathbb{C} -operador linear $T_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ dado por

$$T_{\mathbb{C}}(u + iv) = T(u) + iT(v).$$

O operador $T_{\mathbb{C}}$ é chamado *complexificação de T* .

3. Toda base do espaço vetorial V é também base de $V_{\mathbb{C}}$.
4. Relativa a essa base, a matriz associada de $T_{\mathbb{C}}$ é igual à matriz associada de T .
5. Os polinômios característicos de T e $T_{\mathbb{C}}$ coincidem. Portanto, as raízes características de ambos polinômios são iguais.
6. O complexificado de \mathbb{R}^2 é \mathbb{C}^2 .

12.2 Equações diferenciais complexas

Retomamos ao estudo das equações diferenciais complexas, ou seja, EDOs com coeficientes dados por funções analíticas complexas (ditas holomorfas), para as quais a variável “tempo” é também complexa, usualmente denotada por z . Vejamos a principal definição nesse caso:

Definição 12.2.1. Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto. Um *campo de vetores holomorfo* em U é uma função

$$\begin{aligned} Z: U &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto Z(z) = (Z_1(z), Z_2(z), \dots, Z_n(z)) \end{aligned}$$

que satisfaz:

1. $Z_j: U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções holomorfas em U para todo $j = 1, 2, \dots, n$. As funções Z_1, Z_2, \dots, Z_n são chamadas *funções coordenadas* de Z .
2. Se $z \in U$, então $Z(z) \in \mathbb{C}^n$ é um vetor cujo ponto de aplicação é z .

O vetor $Z(z)$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base canônica $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$ de \mathbb{C}^n , isto é,

$$Z(z) = Z_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + Z_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + Z_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n}$$

para todo $z \in U$. Dessa maneira, o campo de vetores Z escreve-se na forma:

$$Z = Z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + Z_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

ou simplesmente (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) .

Como cada Z_j é holomorfa, então, em cada ponto $z_0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in U$, existe uma vizinhança aberta $z_0 \in W \subset U$ tal que Z_j tem expansão em séries de potências

$$Z_j(z) = \sum_{q_1+q_2+\dots+q_n=0}^{\infty} a_{j,(q_1,q_2,\dots,q_n)} (z_1 - z_1^0)^{q_1} (z_2 - z_2^0)^{q_2} \dots (z_n - z_n^0)^{q_n},$$

onde $a_{j,(q_1,q_2,\dots,q_n)} \in \mathbb{C}$ para $j = 1, 2, \dots, n$; a qual converge para qualquer $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in W$.

Usando notação multi-índice, escrevemos

$$Z_j(z) = \sum_{|Q|=0}^{\infty} a_{j,Q} (z - z_0)^Q,$$

onde $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $|Q| = q_1 + q_2 + \dots + q_n$, $a_{j,Q} = a_{j,(q_1,q_2,\dots,q_n)}$ e $(z - z_0)^Q = (z_1 - z_1^0)^{q_1} (z_2 - z_2^0)^{q_2} \dots (z_n - z_n^0)^{q_n}$.

Definição 12.2.2. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $Z: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ um campo de vetores holomorfo e $p \in U$. Dizemos que p é *ponto singular* de Z se e só se $Z(p) = 0$. Os pontos de U que não são singulares são chamados *pontos regulares* de Z .

Observação 12.2.1.

1. O conjunto de todos os pontos singulares de Z é denotado por $\text{Sing}(Z)$.
2. Denotemos por $\mathcal{Z}(U)$ o conjunto de todos os campos de vetores holomorfos em U .

Exemplo 12.2.1. Denotemos por $\mathbb{C}^{n \times n}$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas complexas. Dada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definimos

$$\begin{aligned} Z: \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto Z(z) = Az \end{aligned}$$

é claro que $Z \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}^n)$. Nesse caso, dizemos que Z é um *campo linear*.

Definição 12.2.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $Z \in \mathcal{Z}(U)$.

1. A *equação diferencial ordinária (EDO)* associada ao campo Z é dada por

$$z' = Z(z). \quad (12.1)$$

2. Uma *solução da EDO* (12.1) é uma função holomorfa $\varphi: D \rightarrow U$ onde $D \subset \mathbb{C}$ é um disco aberto tal que $\varphi'(T) = Z(\varphi(T))$ para todo $T \in D$.

Observação 12.2.2.

1. A derivada que aparece na definição anterior é em relação a uma variável complexa.
2. As soluções de (12.1) são caminhos holomorfos.
3. Se $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, então (12.1) é equivalente ao sistema

$$z'_1 = Z_1(z), \quad z'_2 = Z_2(z), \quad \dots, \quad z'_n = Z_n(z).$$

4. Se $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ é solução de (12.1) então,

$$\varphi'_1(T) = Z_1(\varphi(T)), \quad \varphi'_2(T) = Z_2(\varphi(T)), \quad \dots, \quad \varphi'_n(T) = Z_n(\varphi(T))$$

para todo $T \in D$.

Definição 12.2.4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $Z \in \mathcal{Z}(U)$, $T_0 \in \mathbb{C}$ e $z_0 \in U$.

1. O problema de valor inicial (PVI) associado ao campo Z é dada por

$$\begin{cases} z' & = Z(z) \\ z(T_0) & = z_0 \end{cases} \quad (12.2)$$

2. Uma *solução do PVI* (12.2) é uma função holomorfa $\varphi: D \rightarrow U$ onde $D \subset \mathbb{C}$ tal que

- (a) $T_0 \in D$.
- (b) $\varphi'(T) = Z(\varphi(T))$ para todo $T \in D$.
- (c) $\varphi(T_0) = z_0$.

Denotemos por $\Delta(a, r)$ (respectivamente $\Delta[a, r]$) o polidisco aberto (respectivamente fechado) centrado em $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ e polirraio $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$:

$$\Delta(a, r) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| < r_j, 1 \leq j \leq n\}$$

(respectivamente,

$$\Delta[a, r] = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j - a_j| \leq r_j, 1 \leq j \leq n\}).$$

Teorema 12.2.1 (Picard–Lindelöf). Seja $Z: \Delta[z_0, r] \rightarrow \mathbb{C}^n$ um campo de vetores holomorfo em $\Delta(z_0, r)$ e Lipschitz em $\Delta[z_0, r]$, então para qualquer $T_0 \in \mathbb{C}$ existe uma única solução do PVI (12.2) definida em $D_\alpha[T_0]$, onde

$$\alpha = \min \left\{ \frac{r_1}{N}, \frac{r_2}{N}, \dots, \frac{r_n}{N} \right\} \quad \text{e} \quad N = \max\{|Z(z)|; z \in \Delta[z_0, r]\}.$$

Corolário 12.2.1 (Teorema de existência e unicidade). Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto e $Z \in \mathcal{Z}(U)$. Então para todo $z_0 \in U$ e todo $T_0 \in \mathbb{C}$ existe uma única solução do PVI (12.2) a qual está definida numa vizinhança de T_0 .

Dados $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $r' = (r'_1, r'_2, \dots, r'_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ escrevemos:

$$r < r' \Leftrightarrow r_1 < r'_1, r_2 < r'_2, \dots, r_n < r'_n.$$

Teorema 12.2.2. Seja $Z: \Delta[z_0, r] \rightarrow \mathbb{C}^n$ um campo de vetores holomorfo em $\Delta(z_0, r)$ e Lipschitz em $\Delta[z_0, r]$, denotemos por $\varphi_{z_0}: D_\alpha[T_0] \rightarrow \Delta[z_0, r]$ (onde α é como no Teorema 12.2.1) à única solução do PVI (12.2). Então existe um polirraio $r' < r$ e existe $0 < \alpha' < \alpha$ tal que para todo $z \in \Delta[z_0, r']$ existe uma única solução $\varphi_z: D_{\alpha'}[T_0] \rightarrow \Delta[z_0, r]$ do PVI

$$\begin{cases} w' &= Z(w) \\ w(T_0) &= z. \end{cases}$$

Definição 12.2.5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $Z \in \mathcal{Z}(U)$ e $p \in U$. Um *fluxo local* de Z no ponto p é uma aplicação holomorfa $\varphi_Z: D_\varepsilon(0) \times \Delta(p, \delta) \rightarrow U$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) $\varphi_Z(0, z) = z$ para todo $z \in \Delta(p, \delta)$.
- (b) $\frac{\partial \varphi_Z}{\partial T} = Z(\varphi_Z(T, z))$ para todo $(T, z) \in D_\varepsilon(0) \times \Delta(p, \delta)$.
- (c) $\varphi_Z(T_2, \varphi_Z(T_1, z)) = \varphi_Z(T_1 + T_2, z)$ sempre que ambos membros estejam definidos, isto é, se $z, \varphi_Z(T_1, z) \in \Delta(p, \delta)$ e $T_1, T_2, T_1 + T_2 \in D_\varepsilon(0)$.
- (d) Fixado $p \in U$, a função holomorfa $\varphi_p: D_\varepsilon(0) \rightarrow U$ dada por $\varphi_p(T) = \varphi_Z(T, p)$ é solução local de

$$\begin{cases} w' &= Z(w) \\ w(0) &= p. \end{cases}$$

Definição 12.2.6. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $Z \in \mathcal{Z}(U)$ e $p \in U$. A *órbita* de p associada a Z , denotada por $\mathcal{O}_Z(p)$, define-se como

$$\mathcal{O}_Z(p) = \{\varphi_Z(T, p); T \in D_\varepsilon(0)\}$$

onde $\varphi_Z: D_\varepsilon(0) \times \Delta(p, \delta) \rightarrow U$ é o fluxo associado a Z no ponto p .

Assim, como no caso real, a dinâmica local em torno de um ponto regular de um campo holomorfo está caracterizado pelo Teorema do Fluxo Tubular para campos holomorfos.

Definição 12.2.7. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $Z \in \mathcal{Z}(U)$ e $p \in U$. Uma *seção transversal local ao campo Z , no ponto p* , é uma função holomorfa $\sigma: D \rightarrow U$ definida em um domínio $D \subset \mathbb{C}^{n-1}$, tal que $p \in \sigma(D)$ e satisfaz:

- (i) σ é uma imersão.
- (ii) Se $\Sigma = \sigma(D)$, então $\sigma: D \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo.
- (iii) Para todo $q \in D$, os subespaços $\sigma'(q)(\mathbb{C}^{n-1})$ e $Z(\sigma(q))$ geram o espaço \mathbb{C}^n .

Proposição 12.2.1. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $Z \in \mathcal{Z}(U)$ e $p \in U$ um ponto regular de Z . Então existe uma seção transversal local $\sigma: D \subset \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow U$ ao campo Z no ponto p tal que $\sigma(0) = p$.

Definição 12.2.8. Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}^n$ abertos e $Z_1 \in \mathcal{Z}(U_1)$, $Z_2 \in \mathcal{Z}(U_2)$. Dizemos que Z_1 e Z_2 são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo $h: U_1 \rightarrow U_2$, chamado *conjugação topológica*, tal que,

$$h(\varphi_1(T, p)) = \varphi_2(T, h(p))$$

para todo $(T, p) \in D_{\varepsilon_1}(0) \times \Delta(p, \delta_1)$, onde $\varphi_1: D_{\varepsilon_1}(0) \times \Delta(p, \delta_1) \rightarrow U_1$ e $\varphi_2: D_{\varepsilon_2}(0) \times \Delta(h(p), \delta_2) \rightarrow U_2$ são os fluxos associados a Z_1 em $p \in U_1$ e Z_2 em $h(p) \in U_2$ respectivamente.

Teorema 12.2.3 (Teorema do Fluxo Tubular para campos holomorfos). Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, $Z \in \mathcal{Z}(U)$ e $p \in U$ um ponto regular de Z . Dada uma seção transversal local $\sigma: V \subset \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \Sigma$ ao campo Z em p com $0 \in V$ e $\sigma(0) = p$, então existe uma vizinhança aberta $W_p \subset U$ de p e existe um biholomorfismo $h: D_\varepsilon(0) \times \Delta' \rightarrow W_p$ onde $\Delta' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ polidisco com centro $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, tal que:

- (i) $h(\{0\} \times \Delta') = \Sigma \cap W_p$.
- (ii) h é uma conjugação entre $Z|_{W_p}$ e o campo constante

$$\begin{aligned} Y: D_\varepsilon(0) \times \Delta' &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\mapsto Y(z) = (1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

12.3 O Teorema de Briot–Bouquet

Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto contendo $(0, 0)$ e $Z \in \mathcal{Z}(U)$ com uma única singularidade $(0, 0)$. Consideremos o sistema de equações diferenciais associado a Z da forma

$$\left| \begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + \phi_1(z_1, z_2) \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + \phi_2(z_1, z_2) \end{aligned} \right. \quad (12.3)$$

onde $\phi_j(z) = \sum_{|Q| \geq 2} a_{j,Q} z^Q$ para $j = 1, 2$ são convergentes em uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Definição 12.3.1.

1. Dizemos que o par $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, está no *domínio de Siegel* se e só se $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}^-$. Usaremos a seguinte notação:

$$\mathcal{D}_S = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*; \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}^- \right\}.$$

2. Dizemos que a singularidade $(0, 0)$ de Z está *contida no domínio de Siegel* se $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{D}_S$.

Teorema 12.3.1 (Teorema de Briot–Bouquet). Suponhamos que a singularidade do Z está contida no domínio de Siegel. Então existe uma mudança de coordenadas holomorfas $z = \xi(w)$

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{1,Q} w^Q \\ z_2 = w_2 + \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{2,Q} w^Q \end{cases}$$

que transformam (12.3) em

$$\begin{cases} w'_1 = \lambda_1 w_1 + w_1 w_2 \psi_1(w_1, w_2) \\ w'_2 = \lambda_2 w_2 + w_1 w_2 \psi_2(w_1, w_2) \end{cases}$$

onde $\psi_j(w) = \sum_{|Q| \geq 2} b_{j,Q} w^Q$ para $j = 1, 2$ são convergentes em uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Neste sistema de coordenadas, $w_1 = 0$ e $w_2 = 0$ são curvas invariantes.

12.4 1-formas holomorfas, integral primeira e noção de germe

Uma equação diferencial autônoma escrita como $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$ pode também ser reescrita formalmente como $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$. Essa última escrita, em termos de diferenciais, pode ser finalmente posta na forma de equação envolvendo uma 1-forma diferencial, a saber:

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0$$

Se estamos interessados “somente” na geometria das soluções e na existência de um controle das mesmas, podemos considerar a equação diferencial como sendo dada por $\omega = 0$, sendo ω a 1-form $Q(x, y)dx - P(x, y)dy$, ou ainda qualquer múltiplo por função não nula dessa mesma forma, $\omega = g(Q(x, y)dx - P(x, y)dy)$ sendo $g \neq 0$ em todo lugar. Isto se faz especialmente interessante quando consideramos equações diferenciais com coeficientes analíticos ou, quando migramos para dimensão mais alta, no caso da teoria das folheações. Vejamos o que temos no caso de objetos complexos holomorfos (analíticos complexos).

Definição 12.4.1. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto e $p \in U$. Uma 1-forma holomorfa definida em U é uma função

$$\begin{aligned} \omega: U &\rightarrow (T_q U)^* = (\mathbb{C}^n)^* \\ q &\mapsto \omega(q) \end{aligned}$$

onde $(\mathbb{C}^n)^* = \{f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é linear}\}$. Portanto, $\omega(q)$ é um operador linear.

Toda 1-forma holomorfa ω em U escreve-se na forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dz_i$$

onde $a_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ são funções holomorfas em U .

Definição 12.4.2. Sejam ω e η duas 1-formas holomorfas em U dados por

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dz_i \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{i=1}^n b_i dz_i.$$

O produto exterior de ω e η é definido por

$$\omega \wedge \eta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_j dz_i \wedge dz_j.$$

Observação 12.4.1. Sejam ω, η e θ 1-formas holomorfas em U , tem-se as seguintes propriedades:

1. $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$.
2. $\omega \wedge \omega = 0$.
3. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.
4. $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta$.

Definição 12.4.3. Seja ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em U . Uma *solução* da equação $\omega = 0$ é uma função holomorfa $\varphi: D_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow U$ que satisfaz

$$\omega(\varphi(t))[\varphi'(t)] = 0.$$

Seja ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em U . Denotemos por $\text{Sing}(\omega)$ ao conjunto singular de ω , isto é, $\text{Sing}(\omega) = \{q \in U; \omega(q) = 0\}$. A cada ponto $q \in U$ tal que $\omega(q) \neq 0$ fazemos corresponder o operador linear $\omega(q): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. O conjunto

$$\text{Ker}(\omega(q)) = \{v \in \mathbb{C}^n; \omega(q)[v] = 0\}$$

é um subespaço vetorial de \mathbb{C}^n de dimensão $n - 1$. Neste caso, ω induz um campo de hiperplanos L no aberto $V = U \setminus \text{Sing}(\omega)$, definidos por $L_q = \text{Ker}(\omega(q))$.

Observação 12.4.2.

1. Sejam $U \subset \mathbb{C}^2$ aberto e $Z \in \mathcal{Z}(U)$ não singular. Podemos substituir o campo Z por um “campo de linhas” definido por uma 1-forma holomorfa. Escrevendo o campo Z em coordenadas, temos

$$Z = Z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}. \quad (12.4)$$

Definamos a 1-forma holomorfa em U sem singularidades e associada ao campo Z dada por

$$\omega = Z_2(z_1, z_2) dz_1 - Z_1(z_1, z_2) dz_2 = 0. \quad (12.5)$$

A relação que existe entre o campo (12.4) e a 1-forma diferencial (12.5) é

$$\omega(Z) = 0. \quad (12.6)$$

2. Devido à (12.6) pode-se dizer que toda solução do campo (12.4) é solução da 1-forma (12.5) associado ao campo. A recíproca não é verdade.

Definição 12.4.4. Sejam $U \subset \mathbb{C}^2$ aberto e $\omega = a(z, w)dz + b(z, w)dw$ uma 1-forma diferencial holomorfa em U . Denotemos por $\mathcal{O}(U)$ ao conjunto das funções holomorfas em U , isto é,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é holomorfa}\}.$$

Seja $f \in \mathcal{O}(U)$ não constante. Dizemos que f é uma *integral primeira* de ω em U se verifica-se que

$$\omega \wedge df = 0.$$

Exemplo 12.4.1. Seja $\omega = \mu w dz + \lambda z dw$ uma 1-forma holomorfa em \mathbb{C}^2 , onde $\mu, \lambda \in \mathbb{N}$ primos entre si. Note que, $f(z, w) = z^\mu w^\lambda$ é uma integral primeira holomorfa para ω . De fato,

$$\begin{aligned} \omega \wedge df &= (\mu w dz + \lambda z dw) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial w} dw \right) \\ &= (\mu w dz + \lambda z dw) \wedge (\mu z^{\mu-1} w^\lambda dz + \lambda z^\mu w^{\lambda-1} dw) \\ &= (\mu \lambda z^\mu w^\lambda - \lambda \mu z^\mu w^\lambda) dz \wedge dw = 0. \end{aligned}$$

Definição 12.4.5. Seja $p \in \mathbb{C}^n$, e consideremos la família

$$F_p = \{f : V_p \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa definida em alguma vizinhança aberta } V_p \text{ de } p\}.$$

Definimos em F_p , a seguinte relação de equivalência: dados $f : V_p \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : W_p \rightarrow \mathbb{C}$ dois elementos de F_p , dizemos que $f \sim g$ se e só se existe uma vizinhança aberta $U \subset V_p \cap W_p$ de p tal que $f|_U = g|_U$. A classe de equivalência de f por esta relação será denotada por $[f]_p$ e chamada de *germe* de f em p .

Definição 12.4.6. Sejam ω e η 1-formas holomorfas definidas nas vizinhanças U e V respectivamente de um ponto $p \in \mathbb{C}^n$, isto é,

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dz_i \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{i=1}^n b_i dz_i,$$

onde $a_i \in \mathcal{O}(U)$ e $b_i \in \mathcal{O}(V)$. Dizemos que $\omega \sim \eta$ se e só se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de p tal que $\omega|_W = \eta|_W$ ($a_i|_W = b_i|_W$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$). A classe de equivalência de ω por esta relação será chamada de *germe* de ω em p .

12.5 O Blow-up na origem de \mathbb{R}^2 e \mathbb{C}^2

Seja M uma variedade complexa de dimensão n e $p \in M$. O Blow-up de M em p é uma variedade complexa \widetilde{M} a qual é obtida substituindo o ponto p pelo espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}(n-1)$, deixando os outros pontos de M invariantes num certo sentido holomorfo. Para uma leitura mais precisa, recomendamos Lins Neto e Scárdua (2015).

Definição 12.5.1. Seja $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. O *Blow-up de \mathbb{C}^2 em $(0, 0)$* é o par $(\widetilde{\mathbb{C}^2}, \pi)$, onde $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ é uma variedade complexa holomorfa de dimensão dois, definida por

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} = \left\{ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}(1); z_1 x_2 = z_2 x_1 \right\}$$

e $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma aplicação holomorfa (a projeção na primeira coordenada).

Lembrando que $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ é uma variedade holomorfa de dimensão um com atlas holomorfo dado por $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ onde

$$U_1 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}(1); x_1 \neq 0\}, \quad U_2 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}(1); x_2 \neq 0\}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1: \quad U_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ [x_1 : x_2] &\mapsto \varphi_1([x_1 : x_2]) = \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \varphi_2: \quad U_2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ [x_1 : x_2] &\mapsto \varphi_2([x_1 : x_2]) = \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$

A variedade holomorfa $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ é determinada pelo atlas holomorfo $\{(\widetilde{U}_1, \widetilde{\varphi}_1), (\widetilde{U}_2, \widetilde{\varphi}_2)\}$ onde

$$\widetilde{U}_1 = \left\{ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) \in \mathbb{C}^2 \times U_1; z_2 = \varphi_1([x_1 : x_2])z_1 \right\},$$

$$\widetilde{U}_2 = \left\{ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) \in \mathbb{C}^2 \times U_2; z_1 = \varphi_2([x_1 : x_2])z_2 \right\},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1: \quad \widetilde{U}_1 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) &\mapsto \widetilde{\varphi}_1 \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) = (z_1, \varphi_1([x_1 : x_2])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \widetilde{\varphi}_2: \quad \widetilde{U}_2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) &\mapsto \widetilde{\varphi}_2 \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) = (\varphi_2([x_1 : x_2]), z_2). \end{aligned}$$

Observação 12.5.1.

1. $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\} \times \widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}(1)$. Chamaremos o conjunto $D = \pi^{-1}(0, 0)$ o *divisor* de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$.
2. $(\widetilde{\mathbb{C}^2}, D, E, \mathbb{C})$ é um \mathbb{C} -fibrado vetorial de posto um sobre D onde $E: \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ é a projeção na segunda coordenada.
3. $\pi|_{\widetilde{\mathbb{C}^2 \setminus D}: \widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}}$ é um biholomorfismo.

Desde que \mathbb{R}^2 é mergulhado em \mathbb{C}^2 naturalmente, quando fazemos o Blow-up do ponto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, estamos fazendo simultaneamente um Blow-up em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e, como vimos antes, é obtido uma nova variedade, que denotaremos por $\widetilde{\mathbb{R}^2}$.

Definição 12.5.2. Seja $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. O *Blow-up de \mathbb{R}^2 em $(0, 0)$* é o par $(\widetilde{\mathbb{R}^2}, \pi)$, onde $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ é uma variedade diferenciável de dimensão dois, definida por

$$\widetilde{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathbb{P}(1); z_1 x_2 = z_2 x_1 \right\}$$

e $\pi: \widetilde{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável (a projeção na primeira coordenada).

Lembre também que $\mathbb{R}\mathbb{P}(1)$ é uma variedade diferenciável de dimensão um com atlas diferenciável dado por $\{(V_1, \phi_1), (V_2, \phi_2)\}$ onde

$$V_1 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathbb{P}(1); x_1 \neq 0\}, \quad V_2 = \{[x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathbb{P}(1); x_2 \neq 0\}$$

$$\begin{aligned} \phi_1: \quad V_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ [x_1 : x_2] &\mapsto \phi_1([x_1 : x_2]) = \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } \phi_2: \quad V_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ [x_1 : x_2] &\mapsto \phi_2([x_1 : x_2]) = \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$

A variedade diferenciável $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ é determinada pelo atlas diferenciável $\{(\widetilde{V}_1, \widetilde{\phi}_1), (\widetilde{V}_2, \widetilde{\phi}_2)\}$ onde

$$\widetilde{V}_1 = \left\{ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) \in \mathbb{R}^2 \times V_1; z_2 = \phi_1([x_1 : x_2])z_1 \right\},$$

$$\widetilde{V}_2 = \left\{ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) \in \mathbb{R}^2 \times V_2; z_1 = \phi_2([x_1 : x_2])z_2 \right\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1: \quad \tilde{V}_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) &\mapsto \tilde{\phi}_1 \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) = (z_1, \phi_1([x_1 : x_2])) \\ \text{e } \tilde{\phi}_2: \quad \tilde{V}_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) &\mapsto \tilde{\phi}_2 \left((z_1, z_2), [x_1 : x_2] \right) = (\phi_2([x_1 : x_2]), z_2). \end{aligned}$$

Observação 12.5.2.

1. $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\} \times \mathbb{RP}(1) \simeq \mathbb{RP}(1)$.
2. $(\widetilde{\mathbb{R}^2}, \widetilde{\mathbb{RP}(1)}, P, \mathbb{R})$ é um \mathbb{R} -fibrado vetorial de posto um sobre $\mathbb{RP}(1)$, onde $P: \widetilde{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{RP}(1)$ é a projeção na segunda coordenada.
3. $\pi|_{\widetilde{\mathbb{R}^2} \setminus \mathbb{RP}(1)}: \widetilde{\mathbb{R}^2} \setminus \mathbb{RP}(1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é um difeomorfismo.
4. $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ é uma variedade diferenciável não orientável.
5. $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ é homeomorfa à faixa de Möbius. De fato, como os únicos \mathbb{R} -fibrados sobre $S^1 \simeq \mathbb{RP}(1)$ são o cilindro e a faixa de Möbius sendo o cilindro orientável, concluímos que $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ é homeomorfa à faixa de Möbius.

12.6 O Blow-up de uma folheação em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$

Consideremos um sistema de equações diferenciais complexas da forma

$$\begin{cases} z' = P(z, w) \\ w' = Q(z, w) \end{cases}$$

Ao sistema acima, associamos o campo de vetores holomorfo

$$X = P(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + Q(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \quad (12.7)$$

ou equivalentemente a 1-forma dual

$$\Omega = Q(z, w)dz - P(z, w)dw = 0. \quad (12.8)$$

Desenvolvemos em séries de Taylor

$$P(z, w) = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(z, w) \quad \text{e} \quad Q(z, w) = \sum_{j=k}^{\infty} Q_j(z, w),$$

onde P_j e Q_j denotam os polinômios homogêneos de grau j de P e Q , respectivamente, com $P_k \neq 0$ ou $Q_k \neq 0$. Suponhamos que $(0, 0)$ é a única singularidade do X numa vizinhança V de $(0, 0)$ (equivalentemente singularidade de Ω). Seja \mathcal{F} a folheação gerada por (12.7) (ou equivalentemente por (12.8)). Veja o que acontece com essa folheação \mathcal{F} após um Blow-up π de V em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Denotaremos por $\pi^*(X)$ (ou equivalentemente $\pi^*(\Omega)$) ao campo (ou 1-forma) obtida após um Blow-up de \mathcal{F} em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Esse campo (ou 1-forma) define sobre $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ uma folheação saturada que denotamos por $\pi^*(\mathcal{F})$ e chamamos o *Blow-up de \mathcal{F} em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$* . As singularidades dessa folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ estão contidas no divisor de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, desde que X é singular somente em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

O campo $\pi^*(X)$ escreve-se na carta $((z, t), \widetilde{U}_1)$ de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ da seguinte maneira:

$$\pi^*(X) = z^k \left[z \left(P_k(1, t) + zP_{k+1}(1, t) + \dots \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left((Q_k(1, t) - tP_k(1, t)) + z((Q_{k+1}(1, t) - tP_{k+1}(1, t)) + \dots) \right) \frac{\partial}{\partial t} \right].$$

A 1-forma diferenciável equivalente a esse campo é:

$$\begin{aligned} \pi^*(\Omega) = z^k \left[\left((Q_k(1, t) - tP_k(1, t)) + z((Q_{k+1}(1, t) - tP_{k+1}(1, t)) \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right) dz - z \left(P_k(1, t) + zP_{k+1}(1, t) + \dots \right) dt \right] = 0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Analogamente, escrevemos $\pi^*(X)$ na carta $((s, w), \widetilde{U}_2)$ de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ como:

$$\begin{aligned} \pi^*(X) = w^k \left[\left((P_k(s, 1) - sQ_k(s, 1)) + w((P_{k+1}(s, 1) - sQ_{k+1}(s, 1)) \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right) \frac{\partial}{\partial s} + w \left(Q_k(s, 1) + wQ_{k+1}(s, 1) + \dots \right) \frac{\partial}{\partial w} \right]. \end{aligned}$$

A 1-forma diferenciável equivalente é:

$$\begin{aligned} \pi^*(\Omega) = w^k \left[w \left(Q_k(s, 1) + wQ_{k+1}(s, 1) + \dots \right) ds - \left((P_k(s, 1) - \right. \right. \\ \left. \left. sQ_k(s, 1)) + w((P_{k+1}(s, 1) - sQ_{k+1}(s, 1)) + \dots) \right) dw \right] = 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Definamos o polinômio homogêneo de grau $k + 1$

$$R(z, w) = zQ_k(z, w) - wP_k(z, w).$$

Esse polinômio é chamado *cone tangente* da folheação \mathcal{F} .

Aqui se apresentam duas situações distintas:

1. Se $R(z, w) \equiv 0$. Nessa situação, dizemos que a singularidade de X é *dicrítica*. Note que

$$R(1, t) = Q_k(1, t) - tP_k(1, t) \equiv 0,$$

agora fatoramos z^{k+1} da 1-forma diferencial (12.9)

$$\tilde{\Omega}_1(z, t) = \frac{\pi^*(\Omega)}{z^{k+1}}$$

||

(12.11)

$$\begin{aligned} & \left((Q_{k+1}(1, t) - tP_{k+1}(1, t)) + z((Q_{k+2}(1, t) - tP_{k+2}(1, t)) \right. \\ & \left. + \dots) \right) dz - \left(P_k(1, t) + zP_{k+1}(1, t) + \dots \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$R(s, 1) = sQ_k(s, 1) - P_k(s, 1) \equiv 0,$$

agora fatoramos w^{k+1} da 1-forma diferencial (12.10)

$$\tilde{\Omega}_2(s, w) = \frac{\pi^*(\Omega)}{w^{k+1}}$$

||

$$\begin{aligned} & \left(Q_k(s, 1) + wQ_{k+1}(s, 1) + \dots \right) ds - \left((P_{k+1}(s, 1) - \right. \\ & \left. sQ_{k+1}(s, 1)) + ((P_{k+2}(s, 1) - sQ_{k+2}(s, 1)) + \dots) \right) dw = 0. \end{aligned}$$

A 1-forma $\widetilde{\Omega}_i$, para $i = 1, 2$, define sobre o aberto \widetilde{U}_i de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ uma folheação $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_i}$. A folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ é representada na primeira carta de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ pela 1-forma $\widetilde{\Omega}_1$ e na outra carta pela 1-forma $\widetilde{\Omega}_2$. Além disso, é satisfeito que

$$\widetilde{\Omega}_2(s, w) = \frac{1}{t^{k+1}} \widetilde{\Omega}_1(z, t), \quad \text{em } \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2.$$

Devido à equação acima, vemos que as curvas solução colam bem na interseção dos abertos \widetilde{U}_1 e \widetilde{U}_2 . Dessa maneira, temos definida uma folheação sobre $\widetilde{\mathbb{C}^2}$. As singularidades de $\pi^*(\mathcal{F})$ na primeira carta de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ são os pontos da forma $(0, t_0)$, que por (12.11) satisfazem as equações

$$P_k(1, t) = 0 \quad \text{e} \quad Q_{k+1}(1, t) - tP_{k+1}(1, t) = 0.$$

Nos pontos do divisor $(z = 0)$, onde $P_k(1, t) = 0$ e $Q_{k+1}(1, t) - tP_{k+1}(1, t) \neq 0$, as folhas de $\pi^*(\mathcal{F})$ são tangentes ao divisor. Os demais pontos do divisor onde $P_k(1, t) \neq 0$ as folhas de $\pi^*(\mathcal{F})$ são transversais ao divisor.

2. Se $R(z, w) \neq 0$. Nessa situação, dizemos que a singularidade de X é *não dicrítica*. Multiplicando por $1/z^k$ e $1/w^k$ as 1-formas (12.9) e (12.10), respectivamente, obtemos

$$\widetilde{\Omega}_1(z, t) = \frac{\pi^*(\Omega)}{z^k}$$

||

$$\left((Q_k(1, t) - tP_k(1, t)) + z((Q_{k+1}(1, t) - tP_{k+1}(1, t)) + \dots) \right) dz$$

$$-z \left(P_k(1, t) + zP_{k+1}(1, t) + \dots \right) dt = 0,$$

(12.12)

e

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}_2(s, w) &= \frac{\pi^*(\Omega)}{w^k} \\ &\parallel \\ w \left(Q_k(s, 1) + w Q_{k+1}(s, 1) + \dots \right) ds - \left((P_k(s, 1) - s Q_k(s, 1)) \right. \\ &\quad \left. + w((P_{k+1}(s, 1) - s Q_{k+1}(s, 1)) + \dots) \right) dw = 0. \end{aligned}$$

Como na situação anterior, as formas $\widetilde{\Omega}_1(z, t)$ e $\widetilde{\Omega}_2(s, w)$ definem sobre \mathbb{C}^2 uma folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ que é bem definida graças à seguinte colagem:

$$\widetilde{\Omega}_2(s, w) = \frac{1}{t^k} \widetilde{\Omega}_1(z, t), \quad \text{em } \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2.$$

As singularidades de $\pi^*(\mathcal{F})$ no divisor ($z = 0$) na primeira carta estão dadas pelos pontos da forma $(0, t_0)$, que por (12.12) satisfazem a equação $R(1, t_0) = 0$. Desde que $R(z, w)$ é um polinômio homogêneo de grau $k + 1$, $\pi^*(\mathcal{F})$ possuirá $k + 1$ singularidades no divisor.

12.7 O Teorema de conjugação de Mattei–Moussu

Dado um campo holomorfo Z com uma singularidade no domínio de Siegel na origem $0 \in \mathbb{R}^2$, tendo tal singularidade duas separatrizes transversais de acordo com o teorema de Briot–Bouquet, podemos de fato assumir que tais separatrizes são dadas pelos eixos coordenados em um sistema de coordenadas locais $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^2, 0)$. Podemos, sem perda de generalidade, assumir que a vizinhança considerada contém o bidisco $\Delta^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 2\}$ e que o disco vertical $\Sigma = \{(1, z_2); |z_2| \leq 1\}$ representa uma seção transversal à folheação considerada. Nesse caso, tomamos a folha L_1 da folheação \mathcal{F}_Z induzida por Z em Δ^2 , contida no eixo $\{z_2 = 0\}$, tal folha corresponde a um disco menos a origem, $\Sigma \approx D \setminus \{0\}$ sendo $D \subset \mathbb{C}$ o disco $|z| < 1$. Desse modo, tal folha possui grupo fundamental gerado por um círculo fechado simples $\gamma \subset L_1$, dado por $z_1(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, partindo do ponto $(1, 0)$. A transformação de homotopia correspondente a essa seção transversal e a esse caminho, com esse ponto base, é denotada por $h_Z: \Sigma \rightarrow \Sigma$, sendo definida como germe de difeomorfismo

complexo analítico (holomorfo), fixando o centro do disco e levando pontos em uma folha de \mathcal{F}_Z na seção transversal Σ , sobre pontos nessa mesma folha e nessa mesma seção transversal. Vejamos como essa transformação de holonomia caracteriza o campo Z em termos de conjugação analítica complexa.

Teorema 12.7.1 (Teorema de Mattei–Moussu, Mattei e Moussu (1980)). Dados os campos de vetores holomorfos

$$Z_j = (\lambda_{1j}z_1 + z_1z_2A_{1j}(z_1, z_2))\frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_{2j}z_1 + z_1z_2A_{2j}(z_1, z_2))\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad j = 1, 2$$

definidos em uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, com $(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}) \in \mathcal{D}_s$ e $\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}$. Sejam h_{Z_1} e h_{Z_2} as aplicações de holonomia de $\Sigma \rightarrow \Sigma$ no ponto $(1, 0)$. Se existe um biholomorfismo local $\tilde{\xi}$ em $0 \in \mathbb{C}$ de modo que $\tilde{\xi} \circ h_{Z_1} = h_{Z_2} \circ \tilde{\xi}$, então existe um biholomorfismo local ξ em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ tal que conjuga \mathcal{F}_{Z_1} com \mathcal{F}_{Z_2} .

Utilizaremos esse resultado na prova abaixo do nosso resultado final.

12.8 Aplicação: O teorema de Poincaré–Lyapunov para linearização de centros

Consideremos uma equação diferencial analítica real

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0 \quad (12.13)$$

definida numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ cujas soluções são todas curvas fechadas em torno desse ponto. Esse tipo de singularidade denomina-se *centro*. Dizemos que o centro é *não degenerado* se a parte linear da equação é não degenerada, isto é, existem coordenadas analíticas de modo que a parte linear da 1-forma ω se escreve como $\omega_1 = \alpha(xdx + ydy)$ para algum $\alpha \neq 0$. A seguinte demonstração que apresentamos é inspirada na de R. Moussu (Moussu (1982)).

Teorema 12.8.1 (Teorema de Poincaré–Lyapunov). Se o centro (12.13) é não degenerado, existe uma função analítica real $g(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$ definida numa vizinhança de $(0, 0)$ de tal maneira que as curvas integrais são as suas curvas de nível.

Demonstração. Por hipótese, existe uma mudança de coordenadas tal que a 1-forma (12.13) tem a forma

$$\omega = (x + a_{(2,0)}x^2 + a_{(1,1)}xy + \dots)dx + (y + b_{(2,0)}x^2 + b_{(1,1)}xy + \dots)dy = 0.$$

Agora consideremos a complexificação de $\omega = 0$, a qual definimos como:

$$\Omega = (z + a_{(2,0)}z^2 + a_{(1,1)}zw + \dots)dz + (w + b_{(2,0)}z^2 + b_{(1,1)}zw + \dots)dw = 0 \quad (12.14)$$

onde Ω é um germe de uma 1-forma holomorfa em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, $z, w \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(z) = x$ e $\text{Re}(w) = y$. Essa 1-forma Ω define uma folheação holomorfa \mathcal{F}_Ω de dimensão um em alguma vizinhança U de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Após fazer um Blow-up π de \mathbb{C}^2 no ponto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, obtemos que o cone tangente da folheação \mathcal{F}_Ω nesse caso é um polinômio homogêneo de grau dois dada por:

$$R(z, w) = z^2 + w^2.$$

Desde que $R(z, w) \not\equiv 0$ a singularidade $(0, 0)$ de Ω é não dicrítica e na carta (z, t) em $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, temos que

$$\widetilde{\Omega}_1(z, t) = \frac{\pi^*(\Omega)}{z}$$

||

$$\begin{aligned} & \left[1 + t^2 + z \left((a_{(2,0)} + b_{(2,0)}t) + (a_{(1,1)} + b_{(1,1)}t)t + (a_{(0,2)} + b_{(0,2)}t)t^2 \right) \right. \\ & \left. + \dots \right] dz + z \left[t + z(b_{(2,0)} + b_{(1,1)}t + b_{(0,2)}t^2) + \dots \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Na outra carta (s, w) em $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, obtemos

$$\widetilde{\Omega}_2(s, w) = \frac{\pi^*(\Omega)}{w}$$

||

$$\begin{aligned} & w \left[s + w(a_{(2,0)} + a_{(1,1)}s + a_{(0,2)}s^2) + \dots \right] ds + \left[1 + s^2 + w \left((b_{(2,0)} \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{(2,0)}t) + (b_{(1,1)} + a_{(1,1)}s)s + (b_{(0,2)} + a_{(0,2)}s)s^2 \right) + \dots \right] dw = 0. \end{aligned}$$

As singularidades da folheação $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_1}$ gerada pela 1-forma holomorfa $\widetilde{\Omega}_1$ no divisor D são os pontos $p_1 = (0, i)$ e $p_2 = (0, -i)$. Analogamente, as singularidades da folheação $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_2}$ gerada pela 1-forma holomorfa $\widetilde{\Omega}_2$ no divisor D são os pontos $q_1 = (i, 0)$ e $q_2 = (-i, 0)$. Observe que só temos duas singularidades no divisor D desde que os pontos p_1 e p_2 nas coordenadas (z, t) coincidem com os pontos q_2 e q_1 nas coordenadas (s, w) , respectivamente. Note também que $D \setminus \{p_1, p_2\}$ é uma folha de $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_1}$. Logo, as 1-formas $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_1}(z, t)$ e $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_2}(s, w)$ definem sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ uma folheação sem singularidades que denotada $\pi^*(\mathcal{F}_\Omega)$ e chamada de Blow-up de \mathcal{F}_Ω em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Estudemos agora o comportamento das folhas de $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_1}$ próximas à folha $\widetilde{L}_0 = D \setminus \{p_1, p_2\}$. Faremos o estudo do comportamento do ponto $p_1 = (0, i)$. Para facilitar as contas, utilizaremos a mudança de coordenada $t = u + i$, assim, temos que (12.15) nas coordenadas (z, u) , escreve-se como:

$$\widetilde{\Omega}_1 = (2iu + i\beta z + \text{t.o.s})dz + (iz + \text{t.o.s})du$$

onde $\beta = a_{(1,1)} + b_{(2,0)} - b_{(0,2)} + i[a_{(0,2)} + b_{(1,1)} - a_{(2,0)}]$ e t.o.s significa termos de ordem superior. Fazendo a mudança de variável $v = u + \frac{\beta}{3}z$, obtemos que a parte linear $\widetilde{\Omega}_{10}$ de $\widetilde{\Omega}_1$ no ponto $(0, 0)$ é dada por

$$\widetilde{\Omega}_{10} = i[2vdz + zdv]. \quad (12.16)$$

A folheação gerada por (12.16) é igual à gerada por $2vdz + zdv = 0$. Assim, o campo de vetores holomorfo \widetilde{X}_1 associado à 1-forma holomorfa $\widetilde{\Omega}_1$ tem a forma

$$\widetilde{X}_1(z, v) = (-z + A_1(z, v))\frac{\partial}{\partial z} + (2v + A_2(z, v))\frac{\partial}{\partial v} \quad (12.17)$$

onde as funções A_1, A_2 são holomorfas numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ e $A_1(0, 0) = A_2(0, 0) = 0$. Note em (12.17) que o quociente de autovalores é $-1/2$, logo, a singularidade $p_1 \in D$ de \widetilde{X}_1 está no domínio de Siegel, daí, pelo Teorema 12.3.1, existe uma mudança de coordenadas holomorfas, que continuaremos denotando por (z, v) , que transforma (12.17) em

$$\widetilde{X}_1(z, v) = (-z + zva_1(z, v))\frac{\partial}{\partial z} + (2v + zva_2(z, v))\frac{\partial}{\partial v} \quad (12.18)$$

onde as funções a_1, a_2 são holomorfas numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ e $a_1(0, 0) = a_2(0, 0) = 0$. Além disso, os conjuntos $S_1 = \{z = 0\}$ e $S_2 = \{v = 0\}$ são curvas invariantes de \widetilde{X}_1 (equivalentemente à $\widetilde{\Omega}_1$), sendo $S_1 = D$ o divisor de $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ e $\widetilde{L}_0 = D \setminus \{p_1, p_2\}$ uma folha de $\mathcal{F}_{\widetilde{X}_1}$.

Afirmção 12.8.1. A aplicação de holonomia f de \widetilde{L}_0 é periódica de período dois.

De fato, a “parte real” de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, $\pi^{-1}(\mathbb{R}^2) = \widetilde{\mathbb{R}^2}$ onde $\widetilde{\mathbb{R}^2}$, é a faixa de Moebius, ou seja, a fibra canônica na linha real em $S^1 \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}(1) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}(1)$. A classe de homotopia do mergulho canônico de $\mathbb{R}\mathbb{P}(1)$ em $\widetilde{L}_0 = D \setminus \{p_1, p_2\}$ é um gerador de seu grupo fundamental. Por outro lado, a restrição de π a $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\mathbb{P}(1) = \pi^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ é um difeomorfismo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. As curvas integrais ℓ de ω sendo homeomórficas aos círculos, a interseção $\widetilde{\ell}$ de uma folha \widetilde{L} de $\mathcal{F}_{\widetilde{\Omega}_1}$ com $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ é homeomorfa a um círculo. Mais precisamente, a restrição da projeção canônica de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ a tal interseção $\widetilde{\ell}$ é um recobrimento por duas folhas de $\mathbb{R}\mathbb{P}(1) \simeq S^1$. Assim, conforme acima, a holonomia de \widetilde{L}_0 é periódica com o período dois.

Agora, consideremos a parte linear de (12.18)

$$\widetilde{X}_{10}(z, v) = -z \frac{\partial}{\partial z} + 2v \frac{\partial}{\partial v}.$$

Não é difícil ver que a aplicação de holonomia $l: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ da folha $\widetilde{L}_0 \simeq \{0\} \times \mathbb{C}^*$ de $\mathcal{F}_{\widetilde{X}_1}$ define-se como:

$$l(z) = e^{2\pi i(\frac{-1}{2})} = -z.$$

Temos, assim, que $l(z) = -z$ é a parte linear da aplicação de holonomia f . Desde que $h(z) = \frac{1}{2}(z - f(z))$ é um biholomorfismo que conjuga f com l , já que $h \circ f = l \circ h$, temos que, pelo Teorema 12.7.1, a folheação $\mathcal{F}_{\widetilde{X}_1}$ é equivalente numa vizinhança de $p_1 = (0, i)$ à folheação dada pelo campo linear \widetilde{X}_{10} .

Concluimos que as singularidades p_1 e p_2 são equivalentes às suas partes lineares $2vdz + zdv = 0$. Deduzimos finalmente que as aplicações de holonomias associadas às curvas invariantes S_1 e S_2 são iguais à identidade e, portanto, \mathcal{F}_ω é equivalente por uma mudança de coordenadas holomorfa Φ a sua parte linear $zdz + wdw = 0$, cujas folhas são descritas por $G(z, w) = z^2 + w^2$. Segue-se que a integral primeira procurada para (12.14) será $G \circ \Phi$ e para a equação (12.13), $g = \text{Re}(G \circ \Phi)$. \square

Bibliografia

- R. Benazic (2007). *Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Lima: Universidad Nacional de Ingeniería.
- M. Brunella (1997). «A global stability theorem for transversely holomorphic foliations». *Ann. Global Anal. Geom.* 15.2, pp. 179–186. MR: 1448725. Zbl: 0876.57040.
- C. Camacho e A. Lins Neto (1979). *Teoria geométrica das folheações*. Vol. 9. Projeto Euclides [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, pp. v+238. MR: 642831 (ver pp. 240–243).
- M. P. do Carmo (1979). *Geometria riemanniana*. Vol. 10. Projeto Euclides [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, pp. ix+238. MR: 651516. Zbl: 1412.53001 (ver p. 108).
- J. J. Duistermaat e J. A. C. Kolk (2000). *Lie groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, pp. viii+344. MR: 1738431. Zbl: 0955.22001 (ver p. 166).
- C. Ehresmann (1947). «Sur les sections d'un champ d'éléments de contact dans une variété différentiable». *C. R. Acad. Sci. Paris* 224, pp. 444–445. MR: 19918 (ver p. 233).
- H. M. Farkas e I. Kra (1980). *Riemann surfaces*. Vol. 71. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, pp. xi+337. MR: 583745. Zbl: 0764.30001 (ver p. 170).
- C. Godbillon (1991). *Feuilletages*. Vol. 98. Progress in Mathematics. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb. Birkhäuser Verlag, Basel, pp. xiv+474. MR: 1120547. Zbl: 0724.58002 (ver p. 243).

- M. J. Greenberg (1967). *Lectures on algebraic topology*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, pp. x+235. MR: 0215295 (ver p. 141).
- M. W. Hirsch (1976). *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. x+221. MR: 0448362. Zbl: 0356.57001 (ver p. 208).
- M. W. Hirsch e S. Smale (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, pp. xi+358. MR: 0486784. Zbl: 0309.34001 (ver p. 70).
- V. León e B. Scárdua (s.d.). «Equações Diferenciais: Um Curso Universitário, Parte I: Equações Diferenciais Ordinárias». em preparação.
- E. L. Lima (1993). *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Editora do IMPA.
- E. L. Lima (1961). *Introdução à topologia diferencial*. Notas de Matemática, No. 23. Second edition, revised. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, pp. vi + 161. MR: 0159341 (ver p. 108).
- E. L. Lima (1977). *Espaços métricos*. Vol. 4. Projeto Euclides [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, pp. viii+299. MR: 654506 (ver pp. 11, 45, 46).
- (1981). *Curso de análise*. Vol. 2. Vol. 13. Projeto Euclides [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, pp. ix+547. MR: 654862 (ver pp. 69, 79, 101, 103, 108).
- A. Lins Neto e B. Scárdua (2015). *Folheações algébricas complexas*. Projeto Euclides. [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, pp. iii+316. MR: 3793152. Zbl: 1412.32001 (ver p. 257).
- A. Lyapunov (1893). «Étude d'un cas particulier du problème de la stabilité du mouvement». *Mat. Sbornik* 17, pp. 252–333.
- J.-F. Mattei e R. Moussu (1980). «Holonomie et intégrales premières». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 13.4, pp. 469–523. MR: 608290. Zbl: 0458.32005 (ver p. 264).
- J. Milnor (1963). *Morse theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. vi+153. MR: 0163331 (ver pp. 101, 106).
- R. Moussu (1982). «Une démonstration géométrique d'un théorème de Lyapunov-Poincaré». Em: *Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981)*. Vol. 98. Astérisque. Soc. Math. France, Paris, pp. 216–223. MR: 724449 (ver p. 264).

- P. Painlevé (1897). «Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles» (ver p. 234).
- M. Peixoto (1969). *Teoria Geométrica das Equações Diferenciais*. 7º Colóquio Brasileiro de Matemática. Editora do IMPA (ver p. 129).
- H. Poincaré (1881). «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, I». *Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série* 7, pp. 375–422.
- G. Reeb (1945). «Sur les variétés intégrales des champs d'éléments de contact complètement intégrables». *C. R. Acad. Sci. Paris* 220, pp. 236–237. MR: 14758 (ver p. 233).
- (1947). «Variétés feuilletées, feuilles voisines». *C. R. Acad. Sci. Paris* 224, pp. 1613–1614. MR: 20773. Zbl: 0035.25001 (ver p. 233).
- (1948). «Remarque sur les variétés feuilletées contenant une feuille compacte à groupe de Poincaré fini». *C. R. Acad. Sci. Paris* 226, pp. 1337–1339. MR: 25728. Zbl: 0030.41701 (ver p. 233).
- R. Sacksteder (1965). «Foliations and pseudogroups». *Amer. J. Math.* 87, pp. 79–102. MR: 174061. Zbl: 0136.20903 (ver p. 217).
- B. Scárdua (2015). *Equações Ordinárias e Aplicações*. Textos Universitários. Rio de Janeiro: SBM.
- J. Sotomayor (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Vol. 11. Projeto Euclides [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, pp. xvi+327. MR: 651910 (ver pp. 70, 79).
- M. Spivak (1979). *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. V. Second. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., pp. viii+661. MR: 532834. Zbl: 0439.53005 (ver p. 121).
- N. Steenrod (1951). *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. viii+224. MR: 0039258 (ver p. 245).
- W. P. Thurston (1974). «A generalization of the Reeb stability theorem». *Topology* 13, pp. 347–352. MR: 356087. Zbl: 0305.57025 (ver p. 245).
- D. Tischler (1970). «On fibering certain foliated manifolds over S^1 ». *Topology* 9, pp. 153–154. MR: 256413. Zbl: 0177.52103 (ver p. 217).

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Geometria Lipschitz das singularidades** – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*
- Combinatória** – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*
- Códigos geométricos, uma introdução via corpos de funções algébricas** – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*
- Topologia e geometria de 3-variedades, uma agradável introdução** – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Stejakowski*
- Ciência de dados: algoritmos e aplicações** – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*
- Discovering Poncelet invariants in the plane** – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*
- Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além** – *Victor León e Bruno Scárdua*
- Equações diferenciais e modelos epidemiológicos** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- Differential Equation Models in Epidemiology** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes** – *Sinai Robins*
- PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria** – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*
- First steps into Model Order Reduction** – *Alessandro Alla*
- The Einstein Constraint Equations** – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*
- Dynamics of Circle Mappings** – *Edson de Faria e Pablo Guarino*
- Statistical model selection for stochastic systems with applications to Bioinformatics, Linguistics and Neurobiology** – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*
- Transfer operators in Hyperbolic Dynamics - an introduction** – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*
- A course in Hodge Theory: Periods of Algebraic Cycles** – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*
- A dynamical system approach for Lane-Emden type problems** – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*
- Visualizing Thurston's geometries** – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*
- Scaling problems, algorithms and applications to Computer Science and Statistics** – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*
- An introduction to Characteristic Classes** – *Jean-Paul Brasselet*



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-45-0



9 786589 124450