

Geometria Lipschitz das singularidades

Lev Birbrair
Edvalter Sena



33^o Colóquio
Brasileiro de
Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades

Geometria Lipschitz das singularidades

Primeira impressão, julho de 2021

Copyright © 2021 Lev Birbrair e Edvalter Sena.

Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-56-6

MSC (2020) Primary: 14P10, Secondary: 11F06

Coordenação Geral

Carolina Araujo

Produção Books in Bytes

Capa Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro RJ

[www.impa.br](http://wwwimpa.br)

editora@impa.br



Dedicado à memória da Marina Sobolevsky, professora de UECE e colaboradora de Lev Birbrair no "Realização de Complexos de Hölder." A vida e o trabalho de Marina foram fundamentais para construir a Teoria Métrica de Singularidades.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Curvas | 4 |
| 1.1 | Semicomplexo de Hölder | 4 |
| 1.2 | Curvas semialgêbricas e semicomplexos de Hölder | 5 |
| 1.3 | Semicomplexo de Hölder como invariante bi-Lipschitz | 8 |
| 1.4 | O Teorema da Realização | 11 |
| 2 | Superfícies | 13 |
| 2.1 | Aplicação bi-Lipschitz | 13 |
| 2.2 | Complexo de Hölder | 14 |
| 2.3 | Triângulo de Hölder | 16 |
| 2.4 | Cones e Cornetas | 21 |
| 2.5 | Existência do Complexo de Hölder | 24 |
| 2.6 | Simplificação de Complexos de Hölder | 26 |
| 2.7 | Complexo de Hölder Canônico – Teorema de Classificação | 29 |
| 2.8 | Semicomplexo de Hölder e Complexo de Hölder | 31 |
| 2.9 | Teorema de Realização | 34 |
| 3 | Mergulho Normal | 36 |
| 3.1 | Mergulho normal de subconjuntos semialgêbricos | 36 |
| 3.2 | Métrica da panqueca | 39 |
| 3.3 | Tenda e procedimento de tenda | 41 |

| | |
|--------------------------------------|-----------|
| 4 Metric Knots | 45 |
| 4.1 Equivalência ambiental | 45 |
| 4.2 Nós Métricos | 49 |
| Bibliografia | 57 |
| Índice Remissivo | 62 |

Introdução

A Geometria Lipschitz das singularidades é uma teoria relativamente nova, em comparação com outras partes da teoria das singularidades. O primeiro resultado nesta direção foi obtido por Frédéric Pham e Bernard Teissier em 1969. Eles investigaram a estrutura de germe de uma curva plana complexa no ponto de vista métrico. O descobrimento deles pode ser formulado na seguinte forma:

Teorema *Dois germes das curvas planas X e Y são equivalentes bi-Lipschitz respeito à métrica outer se e somente se eles são ambientalmente topologicamente equivalentes.*

Este resultado, sendo isolado na época, não era tão impressionante como mereceria. Na época era difícil de descobrir, que o resultado é bem frutífero por que os espertos não sabiam, que existe uma diferença muito grande entre Geometria Lipschitz e Topologia. Por outro lado, as demonstrações dos resultados eram mais algébricas e bastante complicadas. Neste ponto começaremos. De fato, trabalharemos com conjuntos semialgébricos, subanalíticos (ou conjuntos definíveis nas estruturas o-minimais) com singularidades. Vamos dedicar-se para estudos locais, i.e., estudos dos germes destes conjuntos em pontos singulares.

Na visão moderna da Geometria Lipschitz das singularidades temos três direções: 1) Geometria Lipschitz intrínseca; 2) Geometria Lipschitz outer ou extrínseca; 3) Geometria Lipschitz ambiental. Toda geometria está baseada na relação de equivalência correspondente. Métrica intrínseca ou métrica do comprimento está definida como o comprimento mínimo do arco semialgébrico, ligando dois pontos.

A equivalência Lipschitz intrínseca de par dos conjuntos X e Y é existência

de uma aplicação bi-Lipschitz, com respeito à métrica intrínseca entre eles. Equivalência extrínseca está definida como existência de uma aplicação bi-Lipschitz, com respeito à métrica outer – a métrica de espaço ambiente. E finalmente equivalência ambiental, que é a existência da uma aplicação bi-Lipschitz outer, que pode ser estendida para aplicação bi-Lipschitz, definida no espaço ambiente.

O livro recente de Walter Neumann e Anne Pichon (ver Neumann e Pichon 2020) está cobrando vários aspectos de geometria Lipschitz das singularidades. A maior parte do livro está dedicada a teoria complexa. Nosso curso está mais dedicado a parte do Geometria Real.

Neste trabalho, queremos explicar para os leitores, alguns resultados que achamos importantes sobre todos as três Geometrias Lipschitz de dimensão baixa – geometria das curvas e superfícies. De fato, a equivalência ambiental implica equivalência outer e equivalência outer implica equivalência intrínseca.

No Capítulo 1, estamos descrevendo a Geometria Lipschitz outer das curvas semialgêbricas. O caso das curvas é “trivial” no sentido da Geometria intrínseca. Mas no ponto de vista de métrica outer este caso é primeiro caso interessante. Os resultados do Capítulo 1 são baseados no trabalho conjunto de Birbrair e A. C. Fernandes (2000). Definimos ordem de contato ou ordem de tangência de par dos arcos. O resultado principal deste capítulo é seguinte: O tabelo das ordens do contato (semicomplexo) dos ramos das curvas é um invariante completo.

No Capítulo 2, consideramos o caso das superfícies no ponto de vista de Geometria intrínseca. Aqui definimos o objeto principal complexo de Hölder. O teorema principal desse capítulo é o teorema de existência do complexo de Hölder. Provamos que a superfície pode ser localmente triangulada de tal jeito que todo triângulo é equivalente de bi-Lipschitz a um triângulo de Hölder padrão. Esta triangulação bi-Lipschitz não é única, mas pode ser modificada para ser única e canônica. Complexo de Hölder é um objeto combinatória, descrevendo esta triangulação canônica. No final do capítulo provamos que o Complexo de Hölder canônico apresenta um invariante completo de bi-Lipschitz, respeito a métrica de comprimento (intrínseca).

No Capítulo 3, apresentaremos uma diferença entre a Geometria Lipschitz intrínseca e Geometria Lipschitz extrínseca. Mas, realmente, existe uma série especial dos conjuntos semialgêbricos, para as quais a métrica de comprimento e a métrica ambiental são equivalentes. Este tipo de conjuntos é chamado conjuntos normalmente mergulhados. O resultado principal do capítulo é o teorema de existência do mergulho normal de Birbrair e Mostowski (ver Birbrair e Mostowski 2000a), que todo conjunto semialgêbrico será equivalente bi-Lipschitz intrínseco a um conjunto semialgêbrico normalmente mergulhado.

No Capítulo 4, apresentamos um tema bastante recente, relacionada à Geometria Ambiental das Superfícies Semialgéblicas, chamada “Metric Knot Theory”. Alexandre Fernandes estudou os germes das curvas complexas como germes das superfícies reais e concluiu que a teoria dos nós topológicos das curvas complexas está bem ligada com a teoria métrica destas curvas, veja A. Fernandes (2003). Seria interessante estudar a equivalência Lipschitz ambiental de conjuntos X e Y no caso que os conjuntos são topologicamente equivalentes. Além disso, eles são outer bi-Lipschitz equivalentes. Provaremos um resultado, chamado Teorema de Universalidade, dizendo basicamente que toda Knot Theory está mergulhada em problema de classificação bi-Lipschitz ambiental somente no caso que o link de superfície está desnodado em S^3 .

O texto é baseado nos trabalhos com Alexandre Fernandes, Tadeusz Mostowski, Andrei Gabrielov e Michael Brandeanbursky.

I

Curvas

1.1 Semicomplexo de Hölder

Definição 1.1.1. *Um grafo finito completo Γ com uma função de valor racional $\alpha : E_\Gamma \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ definida no conjunto das arestas E_Γ de Γ é chamada de semicomplexo de Hölder se α satisfaz a seguinte propriedade:*

Propriedade Não-Arquimediana. Para cada três vértices $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma$, nos temos: se $\alpha(a_1, a_2) \leq \alpha(a_2, a_3) \leq \alpha(a_1, a_3)$, então $\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_2, a_3)$. Note que, como Γ é um grafo completo, qualquer aresta é determinado por dois vértices.

Observação 1.1.2. *O semicomplexo de Hölder pode ser definido de uma maneira equivalente. Seja A um conjunto finito com uma função simétrica $\alpha : A \times A - \text{diag}(A \times A) \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$. Se α satisfaz a propriedade isósceles, então o par (A, α) é identificado como o semicomplexo de Hölder.*

Observação 1.1.3. *Considere a função $d : A \times A \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que:*

$$d(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } a_1 = a_2 \\ \frac{1}{\alpha(a_1, a_2)}, & \text{se } a_1 \neq a_2 \end{cases}$$

Então (A, d) é um espaço ultramétrico se, e somente se, (A, α) é um semicomplexo de Hölder.

Definição 1.1.4. Dois semicomplexos de Hölder (Γ_1, α_1) e (Γ_2, α_2) são chamados isomorfos (ou combinatorialmente equivalentes) se existir um isomorfismo de grafo $h : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ tal que, para cada par de vértices $a_1, a_2 \in \Gamma_1$, tivermos:

$$\alpha_2(h(a_1), h(a_2)) = \alpha_1(a_1, a_2).$$

Definição 1.1.5. Um morfismo de (A_1, α_1) em (A_2, α_2) é uma aplicação $m : A_1 \rightarrow A_2$ tal que, para todo $a_1, a_2 \in A_1$,

$$\alpha_1(a_1, a_2) \leq \alpha_2(m(a_1), m(a_2)) \quad \text{se} \quad m(a_1) \neq m(a_2).$$

Assim, obtemos que o conjunto de todos os semicomplexos de Hölder é uma categoria, o isomorfismo definido na Definição 1.1.4 é um isomorfismo nessa categoria e a Observação 1.1.3 define um functor dessa categoria para a categoria de espaços métricos.

1.2 Curvas semialgébricas e semicomplexos de Hölder

Consideramos primeiramente dois arcos semialgébricos X_1 e X_2 . Suponhamos, que os arcos são parametrizados pelo distância até origem, isto é, $|X_i(t)| = t$. Seja $f(t) = |X_1(t) - X_2(t)|$. Pelo teorema de Newton–Puiseux, temos o seguinte:

$$f(t) = br^\alpha + o(r^\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{R}$$

O número α vamos chamar ordem de tangência de X_1 e X_2 . Usamos a notação $tord(X_1, X_2)$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^4$ uma curva semialgébrica e $x_0 \in X$. Pelo teorema da estrutura cônica padrão, temos a seguinte declaração: Existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 em

\mathbb{R}^n tal que $X \cap U_{x_0} = \bigcup_{i=1}^k X_i$ onde os conjuntos X_i têm as seguintes propriedades:

1. X_i é subconjunto semialgébrico de \mathbb{R}^n e homeomorfo ao segmento $[1, 0)$ pelo homeomorfismo $h_i : [1, 0) \rightarrow X_i$ tal que $h_i(0) = x_0$;
2. Para todo $i \neq j$, temos $X_i \cap X_j = \{x_0\}$;
3. Existe um número r_0 tal que, para todo i e $0 \leq r < r_0$, $\#(X_i \cap S_r(x_0)) = 1$, para todo i . $S_r(x_0)$ representa a esfera centrada em x_0 de raio r .

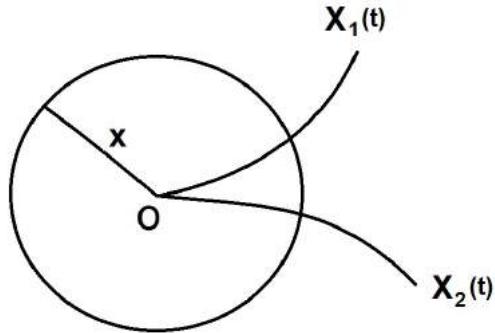


Figura 1.1: Definição de Tord

Observação 1.2.1. A coleção $\{X_i\}_{i=1}^k$ é uma versão 1-dimensional da chamada decomposição em panqueca de (X, x_0) , ver Birbrair e Mostowski (2000b), Kurdyka (1992a) e Parusiński (1988). Os elementos dessa decomposição chamaremos de ramos (da mesma forma que a geometria algébrica complexa) ou panquecas (da mesma forma que a geometria algébrica real).

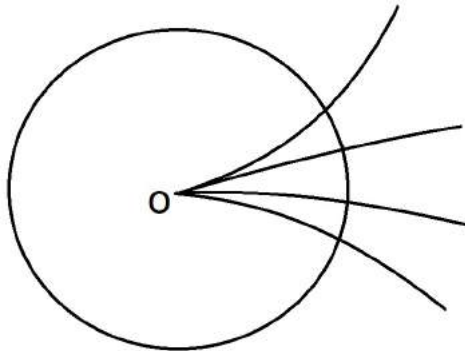


Figura 1.2: Germes de curva com K ramos

Seja A um conjunto de k -elementos $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Iremos definir o semi-complexo de Hölder em A da seguinte maneira. Considere a aplicação $X_i(r) = X_i \cap S_r(x_0)$ (para r suficientemente pequeno essa função está bem definida, sendo semialgébrica). Seja $f_{ij}(r) = \|X_i(r) - X_j(r)\|$. Pelo teorema de Newton-Puiseux, obtemos, para r suficientemente pequeno,

$$f_{ij}(r) = b_{ij}r^{\alpha_{ij}} + o(r^{\alpha_{ij}}), \alpha_{ij} \in \mathbb{Q}, b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Definimos $\alpha(a_i, a_j) = \text{tord}(X_i, X_j)$.

Proposição 1.2.2. *(A, α) é um semicomplexo de Hölder.*

Demonstração. Como $X_i(r)$ e $X_j(r)$ pertencem a $S_r(x_0)$, obtemos $f_{ij}(r) \leq 2r$. Por isso, $1 \leq \alpha(a_i, a_j)$. Iremos provar a propriedade isósceles. Seja X_1, X_2 e X_3 três ramos diferentes de X . Seja $\alpha(a_1, a_2) \leq \alpha(a_2, a_3) \leq \alpha(a_1, a_3)$. Considere três pontos $X_1(r), X_2(r)$ e $X_3(r)$. Temos:

$$\begin{aligned} C_1 r^{\alpha(a_1, a_2)} + o(r^{\alpha(a_1, a_2)}) &= \|X_1(r) - X_2(r)\| \\ &\leq \|X_1(r) - X_3(r)\| + \|X_2(r) - X_3(r)\| \\ &= C_2 r^{\alpha(a_2, a_3)} + o(r^{\alpha(a_2, a_3)}) \end{aligned}$$

para algumas constantes positivas C_1, C_2 . Por isso, $\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_2, a_3)$. \square

O semicomplexo de Hölder (A, α) construído acima é chamado de semicomplexo de Hölder associado a (X, x_0) . Denotaremos por $sh(X, x_0)$. Vamos definir outra estrutura associada a X no ponto x_0 . Seja X_i e X_j dois ramos de X . Coloque

$$g_{ij}(r) = \text{dist}(X_i - B_r(x_0), X_j - B_r(x_0))$$

($B_r(x_0)$ é a bola centrada em x_0 de raio r .) Pela definição de $g_{ij}(r)$ e a versão de eliminação do quantificador do Teorema de Tarski–Seidenberg, obtemos que g_{ij} é uma função semialgébrica. Por isso, pelo Teorema de Newton–Puiseux,

$$g_{ij}(r) = c_{ij}r^{\beta_{ij}} + o(r^{\beta_{ij}}).$$

Coloque $\beta(a_i, a_j) = \beta_{ij}$.

Observação 1.2.3. *Note que $g_{ij}(r)$ não é necessariamente igual a $f_{ij}(r)$. Considere o conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ definido como união dos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x^3$ no ponto $x_0 = (0, 0)$.*

Lema 1.2.4 (Lema de Comparação de Ordem). *Para todo i, j , temos $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_0 = 0$. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor tal que $\|v\| = 1$. Defina o cone

$$C_\varepsilon(v) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \angle(u, v) < \varepsilon\}$$

Suponha que dois ramos X_i e X_j tenham diferentes vetores tangentes em 0. Seja v_i o vetor tangente unitário de X_i em 0 e v_j o vetor tangente unitário de X_j em 0. Então existe $r_0 > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para $r \leq r_0$, $X_i \cap B_r(0) \subset C_\varepsilon(v_i) \cap B_r(0)$; $X_i \cap B_r(0) \subset C_\varepsilon(v_i) \cap B_r(0)$; $C_\varepsilon(v_i) \cap C_\varepsilon(v_j) = \{0\}$.

Assim, $g_{ij} \geq \text{dist}(C_\varepsilon(v_i) - B_r(0), C_\varepsilon(v_j) - B_r(0)) \geq cr$, para algum $c > 0$. Significa que $\beta_{ij} = \alpha_{ij} = 1$.

Agora suponha que X_i e X_j tenham o mesmo vetor tangente unitário v_0 em 0. Claramente, $\alpha_{ij} \geq \beta_{ij}$. Suponha que $\alpha_{ij} < \beta_{ij}$. Observe que, para r suficientemente pequeno, podemos escolher pontos $y_i(r) \in X_i$ e $y_j(r) \in X_j$ tais que $g_{ij} = \|y_i(r) - y_j(r)\|$ dependa semialgebricamente e continuamente de r . Observe que ou $y_i(r) = x_i(r)$ ou $y_j(r) = x_j(r)$, para r suficientemente pequeno (caso contrário, a função $g_{ij}(r)$ tem que ser localmente constante, o que contradiz a semialgebricidade). Suponha que $y_i(r) = x_i(r)$. Considere o triângulo com os vértices $x_i(r)$, $y_i(r)$ e $x_j(r)$. Como $\beta_{ij} > \alpha_{ij}$, temos

$$\|x_i(r) - y_j(r)\| \ll \|x_i(r) - x_j(r)\|,$$

para r pequeno. Assim, o ângulo entre $x_i(r) - x_j(r)$ e $y_j(r) - x_j(r)$ tende a zero quando r tende a 0. Mas,

$$\frac{y_j(r) - x_j(r)}{\|y_j(r) - x_j(r)\|} \rightarrow v_0, \text{ quando } r \rightarrow 0,$$

obtemos que $\angle(x_i(r) - x_j(r), v_0) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Por outro lado, X_i e X_j tem o mesmo vetor tangente v_0 em 0. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $r_0 > 0$ tal que, para cada $r < r_0$, teremos $x_i(r) \in C_\varepsilon(v_0) \cap S_r(v_0)$ e $x_j(r) \in C_\varepsilon(v_0) \cap S_r(v_0)$. Significa que,

$$\angle(x_i(r) - x_j(r), v_0) \geq \frac{\pi}{2} - \delta(\varepsilon)$$

onde $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto é uma contradição. \square

1.3 Semicomplexo de Hölder como invariante bi-Lipschitz

Definição 1.3.1. *Dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ são ditos equivalentes em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, quando existir uma vizinhança aberta $Z \subset \mathbb{R}^n$ onde $x_0 \in Z$ e $X \cap Z = Y \cap Z$. Iremos denotar germe de X em x_0 (X, x_0) como a classe de equivalência do conjunto X nessa relação.*

Definição 1.3.2. *Sejam X e Y dois conjuntos semialgébricos. A aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ é dita bi-lipschitz se:*

1. ϕ é um homeomorfismo.
2. Existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que, para todo $x, y \in X$,

$$C_1 d(x, y) \leq d(\phi(x), \phi(y)) \leq C_2 d(x, y)$$

onde d é alguma métrica escolhida.

Diremos que o germe $\tilde{\phi} : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é um germe de aplicação bi-lipschitz se, para todo $\phi \in \tilde{\phi}$, existir vizinhanças $V_{x_0} \subset X$ e $V_{y_0} \subset Y$ dos pontos x_0 e y_0 respectivamente, tal que $\phi|_{V_{x_0}} : V_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$ é uma aplicação bi-lipschitz.

Teorema 1.3.3. *Germes de curvas semialgébricas (X_1, x_1) e (X_2, x_2) são bi-Lipschitz equivalentes se, e somente se, os semicomplexos de Hölder $(A_1, \alpha_1) = sh(X_1, x_1)$ e $(A_2, \alpha_2) = sh(X_2, x_2)$ são combinatorialmente equivalentes.*

Demonstração. \Rightarrow Seja $\Phi : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$ uma aplicação bi-Lipschitz dada. Sejam $\{X_i^1\}_{i=1}^{k_1}$ e $\{X_j^2\}_{j=1}^{k_2}$ decomposições em panquecas de (X_1, x_1) e (X_2, x_2) respectivamente. Como Φ é um homeomorfismo, temos $k_1 = k_2 = k$ e $\Phi(X_i^1) = X_i^2$ para cada i (podemos escolher outra renumeração se necessário). Sejam (A, α_1) e (A_2, α_2) os semicomplexos de Hölder correspondentes a (X_1, x_1) e (X_2, x_2) . Sejam $A_1 = \{a_i^1\}_{i=1}^k$, $A_2 = \{a_i^2\}_{i=1}^k$, e coloque $h(a_i^1) = a_i^2$. Provaremos que $\alpha_1(a_i^1, a_j^1) = \alpha_2(a_i^2, a_j^2)$ para cada i, j . Como Φ é uma aplicação bi-Lipschitz, existe $K > 0$ tal que, para r suficientemente pequeno, temos:

$$\Phi(X_i^1 - B_r(x_1)) \subset X_i^2 - B_{Kr}(x_2) \quad (1.1)$$

$$\Phi(X_j^1 - B_r(x_1)) \subset X_j^2 - B_{Kr}(x_2) \quad (1.2)$$

Sejam $y_i^1(r) \in X_i^1 - B_r(x_1)$ e $y_j^1(r) \in X_j^1 - B_r(x_1)$ pontos tais que

$$\|y_i^1(r) - y_j^1(r)\| = \text{dist}(X_i^1 - B_r(x_1), X_j^1 - B_r(x_1)),$$

Assim, por (1.1) e (1.2) obtemos:

$$\|\Phi(y_i^1(r)) - \Phi(y_j^1(r))\| \geq g_{ij}^2(Kr)$$

(onde g_{ij}^1, g_{ij}^2 significa a função g_{ij} definida para X_1 e X_2 respectivamente, ver Seção 1.2). Como Φ é uma aplicação bi-Lipschitz, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$g_{ij}^1(r) = \|y_i^1(r) - y_j^1(r)\| \geq L \|\Phi(y_i^1(r)) - \Phi(y_j^1(r))\|.$$

Assim,

$$g_{ij}^1(r) \geq Lg_{ij}^2(Kr).$$

Usando o Teorema de Newton–Puiseux e o Lema de Comparação de Ordem, obtemos que $\alpha_1(a_i^1, a_j^1) \leq \alpha_2(a_i^2, a_j^2)$. Usando o fato que Φ^{-1} é também uma aplicação bi-Lipschitz, temos também que $\alpha_1(a_i^1, a_j^1) \leq \alpha_2(a_i^2, a_j^2)$. A, primeira, parte do teorema foi provada!

[\Leftarrow Sejam (A_1, α_1) e (A_2, α_2) combinatorialmente equivalentes. Suponhamos que o isomorfismo preserve a enumeração. Sejam $\{X_i^1\}_{i=1}^{k_1}$ e $\{X_i^2\}_{i=1}^{k_2}$ decomposição de panquecas de (X_1, x_1) e (X_2, x_2) . Seja $r_0 > 0$ um número tal que $x_i^1(r)$ e $x_i^2(r)$ são funções semialgéblicas bem definidas, para todo $r < r_0$ e todo i . Considere a função semialgéblica $r : X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$r(x) = \begin{cases} \|x - x_1\|, & \text{se } x \in X_1 \\ \|x - x_2\|, & \text{se } x \in X_2 \end{cases}$$

Defina $\Phi : X_1 \cap B_{r_0}(x_1) \rightarrow X_2 \cap B_{r_0}(x_2)$ por $\Phi(x) = x_i^2(r(x))$, para $x \in X_i^1$.

Afirmção 1.3.4. *Existe $\delta > 0$ tal que $\Phi|_{X_1 \cap B_\delta(x_1)}$ é uma aplicação bi-Lipschitz.*

Demonstração da Afirmção 1.3.4. Cada X_i^1 e X_i^2 tem vetor tangente em x_1 e x_2 , respectivamente. Para algum $\delta > 0$, temos: $\Phi|_{X_1 \cap B_\delta(x_1)}$ é uma aplicação bi-Lipschitz, para todo i . É suficiente provarmos que, para cada para (X_i^1, X_j^1) , a aplicação $\Phi|_{(X_i^1 \cup X_j^1) \cap B_{\delta_1}(x_1)}$ é bi-Lipschitz, para algum $\delta_1 > 0$.

Sejam $x \in X_i^1$ e $y \in X_j^1$ dois pontos suficientemente próximos de x_1 . Suponhamos que $r(x) \leq r(y)$. Seja $z \in X_j^1$ tal que $r(z) = r(x)$. Considere os triângulos (x, y, z) e $(\Phi(x), \Phi(y), \Phi(z))$. Como as curvas $X_i^1, X_j^1, X_i^2, X_j^2$ são conjuntos semialgéblicas, para r suficientemente pequeno, eles estão próximos o suficiente de seus vetores tangentes. Assim, o ângulo no vértice z do triângulo (x, y, z) e o ângulo no vértice $\Phi(z)$ do triângulo $(\Phi(x), \Phi(y), \Phi(z))$ são limitados próximos de zero. Usando esse fato, obtemos que existem $K_1, K_2 > 0$ tais que:

$$K_1 \max \left(r(y) - r(x), f_{ij}^1(r(x)) \right) \leq \|y - x\| \quad (1.3)$$

$$\|y - x\| \leq K_2 \max \left(r(y) - r(x), f_{ij}^1(r(x)) \right) \quad (1.4)$$

(onde f_{ij}^1, f_{ij}^2 significa funções f_{ij} definidas para X_1 e X_2 respectivamente, ver Seção 1.2). Da mesma forma, obtemos que existem $L_1, L_2 > 0$ tais que

$$L_1 \max \left(r(\Phi(y)) - r(\Phi(x)), f_{ij}^2(r(\Phi(x))) \right) \leq \| \Phi(y) - \Phi(x) \| \quad (1.5)$$

$$\| \Phi(y) - \Phi(x) \| \leq K_2 \max \left(r(\Phi(y)) - r(\Phi(x)), f_{ij}^2(r(x)) \right) \quad (1.6)$$

Como $\alpha_1(a_i^1, a_j^1) = \alpha_2(a_i^2, a_j^2)$, existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que:

$$M_1 f_{ij}^1(r) \leq f_{ij}^2(r) \leq M_2 f_{ij}^1(r) \quad (1.7)$$

Usando as desigualdades (1.3), (1.4), (1.5), (1.7) e o fato que $r(y) = r(\Phi(y))$ e $r(x) = r(\Phi(x))$, obtemos que Φ é uma aplicação bi-Lipschitz. Assim, a Afirmação 1.3.4 foi provada! Portanto, o Teorema 1.3.3 foi provado! \square

1.4 O Teorema da Realização

Teorema 1.4.1. *Seja (A, α) um semicomplexo de Hölder. Seja $\#A = k$. Então existe um subconjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^2$ com $\dim X = 1$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. (A, α) é um semicomplexo de Hölder correspondente a $(X, 0)$.
2. $(X, 0)$ tem a decomposição em uma decomposição $\{X_i\}_{i=1}^k$ tal que todo X_i é o gráfico de função algébrica $\psi_i : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\psi_i(0) = 0$.

Observação 1.4.2. *Esse teorema significa que cada semicomplexo de Hölder pode ser realizada como uma curva semialgébrica plana. X é chamada de realização de (A, α) .*

Demonstração do Teorema 1.4.1. Provaremos usando indução em k . Para $k = 1$, a demonstração está provada. Suponhamos que esteja provado, para algum k . Seja (A, α) o semicomplexo de Hölder tal que $\#A = k + 1$. Seja $\alpha_0 = \max_{i,j} \alpha(a_i, a_j)$.

Podemos supor que $\alpha_0 = \alpha(a_k, a_{k+1})$. Coloque $\tilde{A} = A - \{a_{k+1}\}$ e $\tilde{\alpha} = \alpha|_{\tilde{A} \times \tilde{A}}$. Seja \tilde{X} a realização de $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$. Seja \tilde{X}_i a panqueca correspondente a a_i

($i = 1, \dots, k$). Pela hipótese de indução, temos que \widetilde{X}_i é o gráfico de alguma função algébrica $\widetilde{\psi}_i : [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\psi}_i(0) = 0$. Coloque

$$\psi_{k+1}(x) = sx^{\alpha_0} + \widetilde{\psi}_k(x).$$

Como \widetilde{X} contém um número finito de ramos, existem s e $\varepsilon < \varepsilon_0$ tais que $\psi_{k+1}(x) \neq \widetilde{\psi}_i(x)$, para todo $i = 1, \dots, k$ se $x \neq 0$. Coloque $\psi_i = \widetilde{\psi}_i|_{[0, \varepsilon]}$.

Sejam X_i o gráfico de ψ_i e $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} X_i$. Por cálculos simples obtemos que (A, α)

é o semicomplexo de Hölder correspondente a $(X, 0)$. □

Corolário 1.4.3. *Todo subconjunto semianalítico $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\dim X = 1$ é localmente bi-Lipschitz equivalente a algum subconjunto semialgébrico $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^2$.*

2

Superfícies

2.1 Aplicação bi-Lipschitz

Seja X um subconjunto semialgébrico, conexo e fechado de \mathbb{R}^n . Conhecemos a dimensão do conjunto X , ver Bochnak e Risler (1975a), a dimensão da parte suave de X (conjunto de todos os pontos suaves de X). Definimos a métrica de comprimento (métrica inner) d_l em X por $d_l = \inf_{\lambda \in \Gamma(x_1, x_2)} l(\lambda)$, onde $\Gamma(x_1, x_2)$

é o conjunto de todas as curvas suaves por partes $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$, conectando os pontos x_1 e x_2 (isto é, $\lambda(0) = x_1, \lambda(1) = x_2$); $l(\lambda)$ significa o comprimento de λ .

Observação 2.1.1. *Claramente d_l cumpre todas as propriedades de métrica.*

Observação 2.1.2. *Às vezes, estaremos considerando a métrica induzida d_{ind} definida como a métrica induzida pelo espaço ambiente.*

Sejam X_1, X_2 dois conjuntos semialgébricos. Diremos que os conjuntos são (semialgebricamente) bi-Lipschitz equivalente se existir uma aplicação (semialgébrica) bi-Lipschitz $\Phi : X_1 \rightarrow X_2$.

Dois germes de conjuntos semialgébricos (X_1, x_1) e (X_2, x_2) são chamados bi-Lipschitz (semialgebricamente) equivalentes se existir um germe de aplicação

bi-Lipschitz (semialgébrica) $\tilde{\Phi} : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$. Este trabalho é dedicado à classificação Lipschitz (mais precisamente, bi-Lipschitz) de germes de conjuntos semialgébricos bidimensionais.

2.2 Complexo de Hölder

Nesta seção, lidamos com a equivalência bi-Lipschitz com relação à métrica comprimento. Quando dizemos que dois conjuntos são bi-Lipschitz equivalentes, isso significa que são bi-Lipschitz equivalentes com relação à métrica de comprimento.

Seja Γ um grafo finito sem laço (um laço é quando uma aresta conecta um vértice a ele mesmo). Seja E_Γ o conjunto das arestas e seja V_Γ o conjunto dos vértices de Γ .

Definição 2.2.1. O complexo de Hölder é o par (Γ, β) , onde $\beta : E_\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma função de valor racional definida em E_Γ tal que $\beta(g) \geq 1$, para todo $g \in E_\Gamma$.

Definição 2.2.2. Dois complexos de Hölder (Γ_1, β_1) e (Γ_2, β_2) são chamados combinatoriamente equivalentes (ou isomorfos) se existir um isomorfismo de grafo $i : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ tal que, para todo $g \in E_{\Gamma_1}$, temos: $\beta_2(i(g)) = \beta_1(g)$.

Definição 2.2.3. Um triângulo β -Hölder padrão T_β ($\beta \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$) é um subconjunto semialgébrico de \mathbb{R}^2 definido por:

$$T_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^\beta, 0 \leq x \leq 1\}$$

Definição 2.2.4. Um subconjunto (semialgébrico) X de \mathbb{R}^n é chamado de triângulo β -Hölder com vértice principal $a \in X$ se o germe (X, a) é bi-Lipschitz (semialgébricamente) equivalente ao germe $(T_\beta, 0)$ (triângulo β -Hölder T_β padrão pode ser considerado um espaço métrico com a métrica induzida de \mathbb{R}^2).

Definição 2.2.5. Seja (Γ, β) um complexo de Hölder. O conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de correspondente geométrico do complexo de Hölder (Γ, β) com respeito ao vértice principal $a \in X$ se:

1. Existir um homeomorfismo $\Psi : C\Gamma \rightarrow X$ (onde $C\Gamma$ é um cone topológico sobre Γ).
2. Seja $A \subset C\Gamma$ o vértice de $C\Gamma$. Então $\Psi(A) = a$.

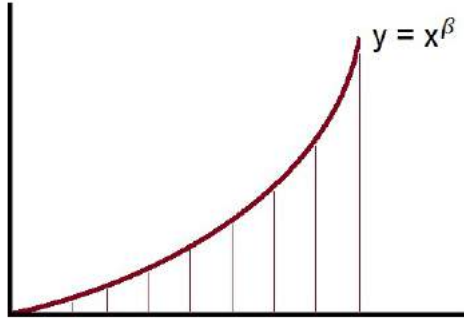


Figura 2.1: Triângulo de Hölder Padrão

3. Para cada $g \in E_\Gamma$, o conjunto $\Psi(C_g)$ é um triângulo $\beta(g)$ -Hölder (semialgêbrico) com respeito ao vértice principal a (onde $C_g \subset C\Gamma$ é um subcone sobre g). Chamaremos Ψ de aplicação representação.

Proposição 2.2.6. *Seja $\beta_1 \neq \beta_2$. Então os germes $(T_{\beta_1}, 0)$ e $(T_{\beta_2}, 0)$ não são bi-Lipschitz equivalentes. Em outras palavras, T_{β_1} não é um triângulo β_2 -Hölder.*

Demonstração. Observe que o triângulo padrão de Hölder, com a métrica comprimento, é bi-Lipschitz equivalente à métrica induzida (T_β é normalmente mergulhada, ver Birbrair e Mostowski (2000b)), logo é suficiente para provar que os germes $(T_{\beta_1}, 0)$ e $(T_{\beta_2}, 0)$ não são bi-Lipschitz equivalentes com respeito à métrica induzida. Suponha $\beta_1 > \beta_2$ e considere $\tilde{\Phi} : (T_{\beta_1}, 0) \rightarrow (T_{\beta_2}, 0)$ um germe de aplicação bi-Lipschitz. Seja $\Phi \in \tilde{\Phi}$. Então, para uma vizinhança suficientemente pequena U de 0, temos que $\Phi(\partial T_{\beta_1} \cap U) \subset \partial T_{\beta_2}$. Teremos duas possibilidades.

1. A linha $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \geq 0\} \cap U$ é mapeada por Φ para o mesmo lado do triângulo: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \geq 0\}$.

2. A linha $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \geq 0\} \cap U$ é mapeada para a curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^{\beta_2}, x \geq 0\}$.

Consideremos o primeiro caso. O segundo caso é tratado da maneira análoga. Como Φ é uma aplicação bi-Lipschitz e leva 0 em 0, então existe $K > 0$ tal que, para x suficientemente pequeno, obtemos $\Phi(x, 0) = (\tilde{x}, 0)$ (onde $\tilde{x} > Kx$) e $\Phi(x, x^{\beta_1}) = (x^*, c^{\beta_2})$, onde $x^* > Kx$). Logo, temos que $d_{ind}(\Phi(x, 0), \tilde{\Phi}(x, x^{\beta_1}))$. Portanto, como Φ é bi-Lipschitz, para x pequeno, existe um $C > 0$ tal que $Cx^{\beta_1} \geq K^{\beta_2}x^{\beta_2}$. Como $\beta_1 > \beta_2$, temos uma contradição. \square

2.3 Triângulo de Hölder

Proposição 2.3.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ o seguinte conjunto semialgébrico $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), x \geq 0\}$, onde f é uma função semialgébrica com a seguinte expansão de Newton–Puiseux em 0:*

$$f(x) = a_1 x^{\beta_1} + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i x^{\beta_i} \text{ onde } \beta_i > \beta_1 \text{ (} i \geq 2 \text{) e } a_1 > 0$$

Então X é um triângulo β_1 -Hölder.

Demonstração. Claramente, X é bi-Lipschitz equivalente a $\tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \tilde{f}, x \geq 0\}$, onde a expansão de Newton–Puiseux de \tilde{f} em 0 é a seguinte:

$$\tilde{f}(x) = x^{\beta_1} + \sum_{i=2}^{+\infty} \tilde{a}_i x^{\beta_i} \text{ onde } \tilde{a}_i = \frac{a_i}{a_1}$$

Seja $\Phi : \tilde{X} \rightarrow T_{\beta_1}$ uma aplicação definida por:

$$\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)) = \begin{cases} \left(x, \frac{y x^{\beta_1}}{\tilde{f}} \right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0), & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calculando a derivada de Φ , obtemos

$$D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{y}{x^{\beta_1}} \frac{\sum_{i=2}^{+\infty} \tilde{a}_i (\beta_i - \beta_1) x^{\beta_i - 1}}{\left(\frac{\tilde{f}(x)}{x^{\beta_1}}\right)^2} \\ 0 & \frac{x^{\beta_1}}{\tilde{f}(x)} \end{pmatrix}.$$

Como $(x, y) \in \tilde{X}$ temos que existe $a > 0$ tal que $y < ax^{\beta_1}$. Por cálculos diretos, temos que, para (x, y) suficientemente próximos de 0, a norma de $D\Phi$ (norma usual da matriz) é limitada próximo do zero. Ou seja, temos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x)}{x^{\beta_1}} =$

1. Assim, para $(x, y) \in \text{Int } \tilde{X}$ suficientemente próximos de $(0, 0)$,

$$\left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right| < \left| \sum_{i=2}^{+\infty} \tilde{a}_i (\beta_i - \beta_1) x^{\beta_i - 1} \right| < \left| 2\tilde{a}_2 (\beta_2 - \beta_1) x^{\beta_2 - 1} \right|$$

Mas $\tilde{a}_2 (\beta_2 - \beta_1) x^{\beta_2 - 1}$ tende a zero, quando x tende a zero. Portanto, existe $K > 0$ tal que a aplicação

$$\Phi|_{Int(\tilde{X} \cap \{(x,y); |x| < K\})} : Int(\tilde{X} \cap \{(x,y); |x| < K\}) \rightarrow Int(T_\beta \cap \{(x,y); |x| < K\})$$

é bi-Lipschitz. Assim, o germe Φ em 0 é um germe de aplicação bi-Lipschitz. \square

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um triângulo β -Hölder semialgébrico e $\tilde{\Phi} : (X, a) \rightarrow (T_\beta, 0)$ um germe de aplicação bi-Lipschitz. Considere os conjuntos $\partial_1 T_\beta = \{(x, y) \in T_\beta \mid y = 0\}$ e $\partial_2 T_\beta = \{(x, y) \in T_\beta \mid y = x^\beta\}$ e sejam $\gamma_1 = \Phi^{-1}(\partial_1 T_\beta)$, $\gamma_2 = \Phi^{-1}(\partial_2 T_\beta)$, para algum $\Phi \in \tilde{\Phi}$. Chamaremos os germes de γ_1 e γ_2 no ponto a de curvas limites de X . (Às vezes, identificaremos os conjuntos γ_1 e γ_2 com seus germes em a).

Lema 2.3.2 (Primeiro Lema Estrutural). *Sejam X_1 um triângulo β_1 -Hölder semialgébrico e X_2 um triângulo β_2 -Hölder semialgébrico. Sejam γ_1^1, γ_2^1 duas curvas limites de X_1 e sejam γ_1^2, γ_2^2 duas curvas limites de X_2 . Caso X_1 e X_2 satisfaçam as condições abaixo:*

1. *Se X_1 e X_2 tenham o mesmo vértice principal a .*
2. *Os germes (γ_1^2, a) e (γ_2^1, a) forem iguais.*
3. *$(X_1, a) \cap (X_2, a) = (\gamma_1^2, a)$. (Isto é, a interseção dos germes de conjuntos é o germe da curva limite).*

Então $X_1 \cup X_2$ é um triângulo β -Hölder semialgébrico, onde $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$.

Demonstração. Sejam $\tilde{\Phi}_1 : (X_1, a) \rightarrow (T_{\beta_1}, 0)$ e $\tilde{\Phi}_2 : (X_2, a) \rightarrow (-T_{\beta_2}, 0)$ dois germes de aplicações bi-Lipschitz semialgébricos, tais que $\tilde{\Phi}_1(\gamma_2^1, a)$ e $\tilde{\Phi}_2(\gamma_1^2, a)$ são os germes do eixo x . (Note que $-T_{\beta_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^{\beta_2} \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ - A imagem de T_{β_2} pela simetria do espelho). Defina $r_1(x) = d_{ind}(\Phi_1^{-1}(x, 0), a)$ e $r_2(x) = d_{ind}(\Phi_2^{-1}(x, 0), a)$, onde $\Phi_1 \in \tilde{\Phi}_1$ e $\Phi_2 \in \tilde{\Phi}_2$. Os germes de r_1 e r_2 em 0 são germes de funções bi-Lipschitz semialgébricas.

Sejam $R_1, R_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ (onde \mathbb{R}_+^2 é o semiplano $x \geq 0$) duas aplicações definidas da seguinte maneira: $R_1(x, y) = (r_1(x), y)$, $R_2(x, y) = (r_2(x), y)$. Defina $\Psi : X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\Psi(z) = \begin{cases} R_1 \circ \Phi_1(z), & \text{se } z \in X_1 \\ R_2 \circ \Phi_2(z), & \text{se } z \in X_2 \end{cases}$$

Afirmção 2.3.3. $\widetilde{\Psi}$ (germe de Ψ em a) é um germe incorporando bi-Lipschitz semialgébrico.

Demonstração da Afirmção 2.3.3 Observe que Ψ está bem definida e continua em $\gamma_1^2 = \gamma_2^1$. Pela definição, Ψ é uma aplicação semialgébrica. Provaremos que Ψ é bi-Lipschitz. Tome $z_1 \in X_1$ e $z_2 \in X_2$ dois pontos suficientemente próximos de a . Então existe uma curva γ conectando z_1 e z_2 tal que $l(z) = d_l(z_1, z_2)$. Seja $p = \gamma_2^1 \cap \gamma$. Então teremos:

$$d_l(z_1, z_2) = d_l(z_1, p) + d_l(z_2, p)$$

Como Ψ é bi-Lipschitz em X_1 e X_2 , existe uma constante $K > 0$ tal que

$$d_l(z_1, p) \geq K \cdot d_{ind}((\Psi(z_1), \Psi(p)), d_l(z_2, p)) \geq K \cdot d_{ind}(\Psi(z_2), \Psi(p))$$

(Escreveremos d_{ind} ao invés de d_l para os conjuntos $R_1(T_{\beta_1})$ e $R_2(-T_{\beta_2})$ porque estão localmente normalmente mergulhados numa vizinhança de 0, ver Birbrair e Mostowski (2000b)). Assim, obtemos

$$d_l(z_1, z_2) \geq K \cdot d_{ind}((\Psi(z_1), \Psi(p)) + K \cdot d_{ind}((\Psi(z_2), \Psi(p)) \geq K \cdot d_{ind}(\Psi(z_2), \Psi(p))$$

Consequentemente, Ψ é uma aplicação Lipschitz. A prova que Ψ^{-1} é também uma aplicação Lipschitz é análoga. Portanto, Ψ é uma aplicação bi-Lipschitz. \square

Temos $\Psi(X_1 \cup X_2) = R_1(T_{\beta_1}) \cup R_2(-T_{\beta_2})$. Pela Proposição 2.3.1 e Proposição 2.2.6, obtemos que $R_1(T_{\beta_1}) \cup R_2(-T_{\beta_2})$ é um conjunto semialgébrico definido por: $-g_2(x) \leq y \leq g_1(x)$, onde

$$g_1(x) = b_1 x^{\beta_1} + \sum_{i=2}^{+\infty} b_i x^{\beta_i} \quad \text{e} \quad g_2(x) = c_1 x^{\beta_2} + \sum_{j=2}^{+\infty} c_j x^{\beta_j}$$

com $\beta_i > \beta_1$; $\beta_j > \beta_2$; $b_1, c_1 > 0$. Seja $L : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ uma aplicação definida por $L(x, y) = (x, y + g_2(x))$. Observe que o germe de L em 0 é uma

aplicação bi-Lipschitz semialgébrica. Assim, $L \circ \Psi(X_1 \cup X_2)$ é um conjunto definido pela seguinte desigualdade: $0 \leq y \leq g_1(x) + g_2(x)$, $x \geq 0$. Pela Proposição 2.3.1, temos que é um triângulo β -Hölder, onde $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$. \square

Lema 2.3.4 (Segundo Lema Estrutural). *Seja $\{X_i \mid X_i \subset \mathbb{R}^n\}_{i=1}^k$ um conjunto finito de subconjuntos de \mathbb{R}^n satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Todo X_i é um triângulo semialgébrico β_i -Hölder com as curvas limites γ_1^i e γ_2^i .*
2. *Todos os X_i têm o mesmo vértice principal a .*
3. *$X_i \cap X_{i+1} = \gamma_2^i = \gamma_1^{i+1}$.*
4. *$X_i \cap X_j = a$ se $j \neq i + 1$, $j \neq i$, $j \neq i - 1$.*

Então, $\bigcup_{i=1}^k X_i$ é um triângulo semialgébrico β -Hölder, onde $\beta = \min\{\beta_i \mid i = 1, \dots, k\}$.

Demonstração. Pode ser deduzido pelo Lema 2.3.2, usando indução em i . \square

O próximo lema é tipo um corolário do Lema 2.3.2.

Lema 2.3.5. *Seja X um triângulo semialgébrico β -Hölder com curvas limites γ_1 , γ_2 e vértice principal a . Então:*

1. *Existe um germe de aplicação semialgébrica bi-Lipschitz $\Psi : (X, a) \rightarrow (T_\beta, 0)$ tal que, para $z \in \gamma_1$ suficientemente próximo de a , temos $\Psi(z) = (d_{ind}(z, a), 0)$.*
2. *Existe um germe de aplicação semialgébrica bi-Lipschitz $\Phi : (X, a) \rightarrow (T_\beta, 0)$ tal que, para $z \in \gamma_1$ suficientemente próximo de a , temos $\Phi(z) = (x, x^\beta)$, onde $x = d_{ind}(z, a)$.*

Demonstração. 1) Está provado pelo Lema 2.3.2. 2) Seja $A, B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicações definidas por $A(x, y) = (x, -y)$; $B(x, y) = (x, y + x^\beta)$. Defina $\Phi = B \circ A \circ \Psi$, onde Ψ é a aplicação construída em 1). \square

Lema 2.3.6. *Seja X um triângulo semialgébrico β -Hölder com vértice principal a e curvas limites γ_1 e γ_2 . Seja $\Phi : X \rightarrow T_\beta$ uma aplicação satisfazendo a condição 2) do Lema 2.3.5. Seja $r(x) = d_{ind}(\Phi^{-1}(x, 0), a)$. Então a expansão de Newton–Puiseux de $r(x)$ é a seguinte*

$$r(x) = x + cx^\beta + o(x^\beta), \text{ onde } c \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Pela desigualdade triangular, obtemos

$$d_{ind}(\Phi^{-1}(x, 0), \Phi^{-1}(x, x^\beta)) \geq |d_{ind}(\Phi^{-1}(x, 0), a) - d_{ind}(\Phi^{-1}(x, x^\beta), a)|$$

Como $d_{ind}(\Phi^{-1}(x, x^\beta), a) = x$, $d_{ind}(\Phi^{-1}(x, 0), a) = r(x)$ e Φ é uma aplicação bi-Lipschitz, onde $K > 0$ e que $Kx^\beta \geq |r(x) - x|$. \square

Lema 2.3.7 (Lema d-parametrização). *Seja X um triângulo semialgébrico β -Hölder com vértice principal a e curvas limitadas γ_1 e γ_2 . Então, existe um germe de aplicação semialgébrica bi-Lipschitz $Q : (X, a) \rightarrow (T_\beta, 0)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. Para $z \in \gamma_1$ suficientemente próximo de a , $Q(z) = (x, x^\beta)$.
2. Para $z \in \gamma_2$ suficientemente próximo de a , $Q(z) = (x, 0)$.

onde $x = d_{ind}(z, a)$.

Demonstração. Seja $\Phi : (X, a) \rightarrow (T_\beta, 0)$ uma aplicação satisfazendo a condição 2) do Lema 2.3.5. Seja $\phi : (T_\beta, 0) \rightarrow (T_\beta, 0)$ uma aplicação definida por:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} (r(x) \cdot (1 - \frac{y}{x^\beta}) + x(\frac{y}{x^\beta}), y), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$r(x) = d_{ind}(\Phi^{-1}(x, 0), a)$ é do Lema 2.3.6. Pela definição, ϕ é uma aplicação semialgébrica. Calculando $D\phi$, obtemos

$$D\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 1 \end{pmatrix}$$

onde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= r'(1 - \frac{y}{x^\beta}) + r\beta y x^{-\beta-1} + y x^{-\beta} - y\beta x^{-\beta} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{x - r(x)}{x^\beta}\end{aligned}$$

Obtemos, por cálculos simples, que existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que, para (x, y) suficientemente próximos de $(0, 0)$, temos; $K_1 < \frac{\partial \phi_1}{\partial x} < K_2$. Usando o Lema 2.3.6, temos $|\frac{\partial \phi_1}{\partial y}| < K_3$ para algum $K_3 > 0$. Por isso, $\|D\phi\|$ é limitado bem longe do 0 e do ∞ , portanto, ϕ é uma aplicação bi-Lipschitz. Defina $Q = \phi \circ \Phi$. Como $\phi = id$, para $y = x^\beta$, Q satisfaz as condições exigidas. \square

Chamaremos a aplicação Q construída acima como a aplicação d -parametrização.

2.4 Cones e Cornetas

Definição 2.4.1. *O β -Corneta padrão é um conjunto semialgébrico $H_\beta \subset \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$H_\beta = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1^2 + x_2^2)^p = y^{2q}, y \geq 0\}$$

onde $\beta = \frac{p}{q}$ (p e q são números naturais).

Lema 2.4.2 (Lema da Corneta).

1. *A β -corneta padrão pode ser representado pela união de conjuntos T_β^1 e T_β^2 ($H_\beta = T_\beta^1 \cup T_\beta^2$), onde T_β^1 e T_β^2 são triângulos semialgébricos β -Hölder com o mesmo vértice principal e as curvas limitadas γ_1^1, γ_2^1 de T_β^1 e γ_1^2, γ_2^2 de T_β^2 tais que $\gamma_1^1 = \gamma_2^2, \gamma_2^1 = \gamma_1^2$ e $X_1 \cap X_2 = \gamma_1^1 \cup \gamma_2^1$.*
2. *Sejam X_1, X_2, \dots, X_k conjuntos semialgébricos tais que:*
 - 2.1 *Todo X_i é um triângulo semialgébrico β_i -Hölder com a curva limitada γ_1^i, γ_2^i .*
 - 2.2 *Todos os X_i têm o mesmo vértice principal $a \in \mathbb{R}^n$.*

2.3 Se $k = 2$, então $X_1 \cap X_2 = \gamma_1^1 \cup \gamma_2^1$, $\gamma_1^1 = \gamma_2^2$, $\gamma_2^1 = \gamma_1^2$.

2.4 Se $k > 2$, então $X_i \cap X_{i+1} = \gamma_2^i = \gamma_1^{i+1}$, $X_1 \cap X_k = \gamma_1^1 = \gamma_2^k$ e, para $i, j \neq 1$ ou $k, j \neq i, i-1$ ou $i+1$, $X_i \cap X_j = a$.

Então o germe (X, a) , onde $X = \cup_{i=1}^k X_i$, é semialgebricamente bi-Lipschitz equivalente ao germe padrão β -corneta em 0, onde $\beta = \min_i \beta_i$.

Demonstração. 1) Vamos dividir o β -corneta H_β padrão em quatro triângulos curvilíneos pelas seguintes curvas

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left\{ (x_1, x_2, y) \mid x_1 = x_2 = \frac{y^\beta}{\sqrt{2}} \right\} \\ \sigma_2 &= \left\{ (x_1, x_2, y) \mid x_1 = -\frac{y^\beta}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{y^\beta}{\sqrt{2}} \right\} \\ \sigma_3 &= \left\{ (x_1, x_2, y) \mid x_1 = -\frac{y^\beta}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{y^\beta}{\sqrt{2}} \right\} \\ \sigma_4 &= \left\{ (x_1, x_2, y) \mid x_1 = \frac{y^\beta}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{y^\beta}{\sqrt{2}} \right\}\end{aligned}$$

Definimos triângulos curvilíneos $T_i^j \subset H_\beta$ ($i, j = 1, 2$) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\{\sigma_1, \sigma_2\} &\subset \partial T_1^1 & \text{e} & \sigma_{3,4} \cap T_1^1 = (0, 0, 0) \\ \{\sigma_1, \sigma_3\} &\subset \partial T_1^2 & \text{e} & \sigma_{1,4} \cap T_1^2 = (0, 0, 0) \\ \{\sigma_3, \sigma_4\} &\subset \partial T_2^1 & \text{e} & \sigma_{1,2} \cap T_2^1 = (0, 0, 0) \\ \{\sigma_4, \sigma_1\} &\subset \partial T_2^2 & \text{e} & \sigma_{2,3} \cap T_2^2 = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Todos os triângulos T_i^j são bi-Lipschitz equivalentes (a equivalência bi-Lipschitz é dada pela rotação do ângulo $\pi/2$). Considere o triângulo T_1^1 . Seja $P_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $P_1(x_1, x_2, y) = (x_1, y)$. Em cada ponto interno $x = (x_1, x_2, y) \in T_1^1$, o ângulo entre o plano tangente $T_x T_1^1$ e o plano coordenado $\{(x_1, x_2, y) \mid x_2 = 0\}$ é limitado por $\frac{\pi}{2}$. Então, a aplicação $P_1|_{T_1^1}$ é bi-Lipschitz. Pela definição, $P_1(T_1^1) = \{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{\sqrt{2}}y^\beta \leq x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}y^\beta; 0 \leq y \leq 1\}$. O conjunto $P_1(T_1^1)$ é bi-Lipschitz equivalente a T_β . Então, T_1^1 é bi-Lipschitz equivalente a

T_β . Coloque $T_\beta^1 = T_1^1 \cup T_1^2$, $T_\beta^2 = T_1^2 \cup T_2^2$. Pelo Primeiro Lema Estrutural, T_β^1 e T_β^2 são bi-Lipschitz equivalentes ao triângulo β -Hölder T_β padrão. T_β^1 e T_β^2 são chamados de semicornetas.

2) Podemos assumir que $\beta = \beta_1$. Por isso, X_1 é um triângulo β -Hölder com o vértice principal a . Observe que X_1 pode ser representado pela união de conjuntos Y_1 e Y_2 (isto é, $X_1 = Y_1 \cup Y_2$) onde Y_1 e Y_2 são triângulos semialgêbricos β -Hölder com vértice principal em a e $Y_1 \cap Y_2$ tem uma curva limite comum. Considere a aplicação semialgêbrica bi-Lipschitz $\Phi : (X_1, a) \rightarrow (T_\beta, 0)$. O triângulo β -Hölder padrão T_β pode ser dividido em dois triângulos β -Hölder da seguinte maneira:

$$T'_\beta = \{(x, y) \in T_\beta \mid y \geq \frac{x^\beta}{2}\}, \quad T''_\beta = \{(x, y) \in T_\beta \mid y \leq \frac{x^\beta}{2}\}$$

Defina $Y_1 = \Phi^{-1}(T'_\beta)$, $Y_2 = \Phi^{-1}(T''_\beta)$. Agora $\{Y_1, X_2, \dots, X_k\}$ é um conjunto finito de triângulos semialgêbricos de Hölder satisfazendo as condições do Segundo Lema Estrutural (Lema 2.3.4). Por isso, $Y' = Y_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^k X_i \right)$ é um triângulo semialgêbrico β -Hölder com vértice principal a . Sejam $Q_\beta^j : T_\beta^j \rightarrow T_\beta$ (onde $j = 1, 2$ e T_β^1, T_β^2 - semicornetas), $Q_1 : Y_1' \rightarrow T_\beta$, $Q_2 : Y_2 \rightarrow T_\beta$ as aplicações d -parametrização. Defina $Q : X \rightarrow H_\beta$ por:

$$Q(z) = \begin{cases} (Q_\beta^1)^{-1}(Q_1(z)), & \text{se } z \in Y_1' \\ (Q_\beta^2)^{-1}(Q_2(z)), & \text{se } z \in Y_2 \end{cases}$$

Pelas propriedades da aplicação d -parametrização, para z suficientemente próximo de a , Q está bem definida e é bi-Lipschitz. O Lemma da Corneta está provado! \square

Definição 2.4.3. O conjunto (semialgêbrico) $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de β -corneta geométrica (semialgêbrico) com respeito ao vértice a se o germe (X, a) é (semialgêbricamente) bi-Lipschitz equivalente ao germe $(H_\beta, 0)$. Se $\beta = 1$, o conjunto X será chamado de Cone Geométrico (semialgêbricamente) com respeito ao vértice a .

2.5 Existência do Complexo de Hölder

Teorema 2.5.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto 2-dimensional, fechado, semialgébrico e $a \in X$. Então existe um número $\delta > 0$ e um Complexo de Hölder (Γ, β) tal que $\overline{B}_{a,\delta} \cap X$ (onde $\overline{B}_{a,\delta}$ é a bola fechada centrada em a , de raio δ) é um complexo de Hölder geométrico, semialgébrico correspondente a (Γ, β) com vértice principal a .*

Observação 2.5.2. *O teorema pode ser obtido pelo corolário de decomposição de “L-conjuntos”, ver Parusiński (1994), ou a decomposição em “panquecas”, ver Kurdyka (1992a, 2000). A versão 2-dimensional é relatada no resultado de Bochnak e Risler (1975a).*

Aqui apresentamos uma prova do teorema. Na verdade, o resultado é um pouco diferente do resultado de Kurdyka (1992a, 2000). Precisamos que as “panquecas” (ou o triângulo de Hölder) sejam subconjuntos fechados de X , e a decomposição tem que ser uma triangulação.

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal em \mathbb{R}^n ; $R_{ij}^2 = \text{span}\{e_i, e_j\}$ e $P_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow R_{ij}^2$ uma projeção ortogonal. Considere a aplicação de Gauss $G : X - \text{Sing}X \rightarrow G(2, n)$ (onde $G(x) = T_x X \in G(2, n)$). Seja

$$U_{ij}^\varepsilon = \left\{ m \in G(2, n) \mid \text{ângulo}(m, R_{ij}^2) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}$$

□

Lema 2.5.3. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\bigcup_{1 \leq i, j \leq n} U_{ij}^{\varepsilon_0} = G(2, n)$.*

Demonstração. É claro que $\{U_{ij}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0, 1 \leq i, j \leq n}$ é uma cobertura aberta de $G(2, n)$.

Como $G(2, n)$ é um espaço compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_{ij}^{\varepsilon_k}\}_{1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k \leq K}$

dele. Seja $\varepsilon_0 = \min_{1 \leq k \leq K} \varepsilon_k$. Então $\bigcup_{k=1}^K \bigcup_{ij} U_{ij}^{\varepsilon_k} = \bigcup_{ij} U_{ij}^{\varepsilon_0}$ (porque $U_{ij}^{\varepsilon_1} \subset U_{ij}^{\varepsilon_2}$, se

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$). Por isso, $G(2, n) = \bigcup_{1 \leq i, j \leq n} U_{ij}^{\varepsilon_0}$. Lema provado! □

Seja $X_{ij} = G^{-1}(U_{ij}^{\varepsilon_0})$. Pelo Lema 2.5.3, $\{X_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma cobertura de $X - \text{Sing}X$. Se $a \in \text{Smooth}X$, então existe um par (i, j) tal que $a \in X_{ij}$.

Seja δ um número tal que $P_{ij}|_{X_{ij} \cap \overline{B}_{a,2\delta}}$ é uma aplicação bi-Lipschitz. (Esse número existe pelo Lema 2.5.3, $\angle(T_a X, R_{ij}^2) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$). Por isso, $P_{ij}(X \cap B_{a,2\delta})$ é um conjunto aberto contendo $P_{ij}(a)$. Significa que $P_{ij}(X \cap \overline{B}_{a,\delta})$ pode ser dividido em quatro triângulos 1-Hölder (quadrantes). Finalmente, $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é o complexo de Hölder geométrico, semialgébrico correspondente a (Γ, β) , onde Γ é um “retângulo” (com vértices: a_1, a_2, a_3, a_4 e bordas: (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , (a_3, a_4) , (a_4, a_1) e $\beta(g) = 1$, para cada $g \in E_\Gamma$).

Considere agora o caso: $a \in \text{Sing} X$. Seja (i_0, j_0) o menor par lexicograficamente tal que $a \in \overline{X}_{i_0 j_0}$. Seja $X_{i_0 j_0}^k$ (onde $k = 1, \dots, K$) um subconjunto de $\overline{X}_{i_0 j_0}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Todo $X_{i_0 j_0}^k$ são conjuntos semialgébricos fechados.
2. Para cada $k, a \in X_{i_0 j_0}^k$.
3. Existe um $\delta_1 > 0$ tal que $B_{a,\delta_1} \cap \overline{X}_{i_0 j_0} \subset \bigcup_k X_{i_0 j_0}^k$

4. Para cada k , existe um $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $\delta < \delta_2$, temos: $X_{ij}^k \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um triângulo curvilíneo. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *triângulo curvilíneo* com os vértices a_1, a_2, a_3 se: a) A é uma subvariedade topológica 2-dimensional com borda; b) A fronteira ∂A de A é a união dos pontos a_1, a_2, a_3 e as curvas suaves conectando esses pontos, chamados de *bordas do triângulo*; c) $\text{Int} A$ é suave, ver Birbrair e Sobolevsky (1999a). O ponto a é um vértice desse triângulo e outros vértices pertencem a $S_{a,\delta}$ (a esfera de centro a e raio δ).

5. Para $k_1 \neq k_2$, existem as seguintes possibilidades para $X_{i_0 j_0}^{k_1} \cap X_{i_0 j_0}^{k_2} \cap \overline{B}_{a,\delta} = Y$;

- 5.1 $Y = a$.
 - 5.2 Y é a borda comum desses triângulos curvilíneos.
 - 5.3 Y é a união de duas arestas comuns desses triângulos curvilíneos.
6. Para cada $k, P_{i_0 j_0}|_{X_{i_0 j_0}^k}$ é um homeomorfismo para a imagem.

A existência de uma decomposição que satisfaça as propriedades acima é um corolário do Teorema de Tarski–Seidenberg e do segundo Teorema Estrutural de Benedetti e Risler (1990a) (ver também Kurdyka (2000)).

Afirmção 2.5.4. Para cada k , existe $\beta(k)$ tal que $X_{i_0 j_0}^k \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um triângulo $\beta(k)$ -Hölder semialgébrico.

Demonstração da Afirmação 2.5.4. Podemos assumir que $P_{i_0j_0}(a) = (0, 0)$ e $P_{i_0j_0}(X_{i_0j_0}^k)$ (numa vizinhança suficientemente próxima de $(0, 0)$) é delimitado por dois gráficos de funções semialgébricas $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Usando a mesma técnica da Seção 2.3 (Proposição 2.3.1 e Lema 2.3.2) podemos obter a afirmação.

Considere o conjunto $X_N = Cl(X - X_{i_0j_0})$ e repetindo a construção acima, obtemos uma decomposição de $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ (onde δ é suficientemente pequeno) em uma união de triângulos de Hölder X_{ij}^k semialgébricos e (possivelmente) alguns conjuntos l_s 1-dimensional (onde $s = 1, \dots, S$) tais que $a \in l_s$, para cada s , e l_s é homeomórfico a um segmento fechado. Vamos construir um gráfico Γ da seguinte maneira:

1. V_Γ é o conjunto de todos os vértices do triângulo curvilíneo $X^k \cap \overline{B}_{a,\delta}$.

2. E_Γ é o conjunto de arestas de triângulos curvilíneos $X_{ij}^k \cap \overline{B}_{a,\delta}$ não conectados com a .

Pela construção, $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um cone topológico sobre Γ . Iremos definir uma função β da seguinte maneira. Considere $g \in E_\Gamma$, assim, g é uma borda de algum $X_{ij}^k \cap \overline{B}_{a,\delta}$. Sabemos que $X_{ij}^k \cap \overline{B}_{a,\delta}$, para algum β , é um triângulo β -Hölder semialgébrico (ver Afirmação 2.5.4). Coloque $\beta(g) = g$. O teorema está provado. \square

2.6 Simplificação de Complexos de Hölder

Sejam Γ um gráfico sem laço e b_0 um vértice de Γ .

Definição 2.6.1. Dizemos que b_0 é um vértice não crítico de Γ se for incidente com exatamente duas arestas diferentes g_1 e g_2 e essas arestas conectam dois vértices diferentes b_1 e b_2 com b_0 .

Se este vértice b_0 é conectado com g_1 e g_2 com apenas um outro vértice $\widetilde{b_0}$ dizemos que b_0 é um vértice do laço.

Outros vértices de Γ (que não são críticos e nem laços) são chamados de vértices críticos de Γ .

Se b_0 é um vértice não crítico de Γ nos podemos definir uma cirurgia Ω_{b_0} da seguinte maneira. Seja $\Omega_{b_0}(\Gamma)$ o grafo sem vértice b_0 e as arestas g_1 e g_2 , mas com uma nova aresta, g conectando b_1 e b_2 .

Definição 2.6.2. Dizemos que Γ é um grafo simplificado se houver apenas vértices críticos e de laço de Γ .

Definição 2.6.3. Dizemos que Γ' é simplificação de Γ se:

1. Γ' é grafo simplificado.
2. Γ' é obtida de Γ usando uma família finita de cirurgias Ω_b .

que pode ser obtido da AAA, usando uma família finita de cirurgias AAA.

Proposição 2.6.4. Cada grafo finito tem sua simplificação. A simplificação é única a menos de um isomorfismo.

Demonstração. A prova é direta! □

Teorema 2.6.5 (Teorema de Simplificação de Grafos). *Sejam Γ_1 e Γ_2 dois grafos homeomorfos a espaços topológicos na topologia de grafos naturais. Sejam Γ'_1 a simplificação de Γ_1 e Γ'_2 a simplificação de Γ_2 . Então Γ'_1 é isomorfo a Γ'_2 .*

Demonstração. Pela definição de simplificação (a saber, da cirurgia Ω_b), o grafo é homeomorfo a sua simplificação:

$$\Gamma_1 \underset{\sim}{\text{homeo}} \Gamma'_1; \quad \Gamma_2 \underset{\sim}{\text{homeo}} \Gamma'_2$$

Uma vez $\Gamma_1 \underset{\sim}{\text{homeo}} \Gamma_2$, temos que Γ'_1 é homeomorfo a Γ'_2 . Seja $h : \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma'_2$ o homeomorfismo. Γ_1 e Γ_2 são grafos simplificados, portanto, eles têm apenas vértices críticos ou em laços. Sejam $\{a_1^1, a_2^1, \dots, a_k^1\}$ o conjunto dos vértices críticos de Γ'_1 e $\{a_1^2, a_2^2, \dots, a_m^2\}$ o conjunto dos vértices críticos de Γ'_2 . Γ'_1 e Γ'_2 não são variedades topológicas 1-dimensionais apenas nas vizinhanças desses pontos. Portanto, $k = m$ e $h(\{a_1^1, a_2^1, \dots, a_k^1\}) = \{a_1^2, a_2^2, \dots, a_k^2\}$. Vamos definir a aplicação l , no conjunto de vértices críticos, da seguinte maneira:

$$l \mid_{\{a_1^1, a_2^1, \dots, a_k^1\}} = h \mid_{\{a_1^2, a_2^2, \dots, a_k^2\}}$$

Isto é, $l(a_i^1) = h(a_i^2)$. Vamos considerar uma aresta $g^1 \in E_{\Gamma'_1}$. Temos as seguintes opções:

1. A aresta g^1 conecta dois vértices críticos $a_{i_1}^1$ e $a_{i_2}^1$ de Γ'_1 . Pelo fato de h ser um homeomorfismo, existe uma aresta $g^2 \in E_{\Gamma'_2}$ conectando os vértices $h(a_{i_1}^1) = l(a_{i_1}^1)$ e $h(a_{i_2}^1) = l(a_{i_2}^1)$ do grafo Γ'_2 . Por $l(g^1) = g^2$.

2. A aresta $g^1 \in E_{\Gamma'_1}$ conecta o vértice crítico a_i^1 e o vértice do laço b_s^1 de Γ'_1 . Pela definição do vértice do laço, existe outra aresta \tilde{g}^1 conectando b_s^1 e a_i^1 . Como

h é homeomorfismo e não existe laço no grafo Γ'_2 , temos um vértice de laço $b_t^2 = h(b_s^1)$ conectado com $h(a_s^1)$ pelas arestas g^2 e \tilde{g}^2 . Note $l(b_s^1) = b_t^2$, $l(g^1) = g^2$ e $l(\tilde{g}^1) = \tilde{g}^2$.

3. A aresta g^1 conecta dois vértices de laço b_s^1 e b_r^1 do grafo Γ'_1 . Consequentemente, existe outra aresta \tilde{g}^1 conectando b_s^1 e b_r^1 . O homeomorfismo h leva o círculo isolado de Γ'_1 ao círculo isolado Γ'_2 . Uma vez que Γ'_2 é um grafo sem laço, existem dois vértices b_t^2 e b_u^2 nesse círculo isolado. Esses vértices dividem o círculo em duas partes. Chamaremos uma delas g^2 e a segunda \tilde{g}^2 . Coloque $l(b_s^1) = b_t^2$, $l(b_r^1) = b_u^2$, $l(g^1) = g^2$, $l(\tilde{g}^1) = \tilde{g}^2$. A aplicação construída g é um isomorfismo de grafo. O teorema está provado! \square

Observação 2.6.6. Dizemos que o isomorfismo l é induzido pelo homeomorfismo h .

Agora vamos construir uma simplificação do Complexo de Hölder.

Operação Ω_{b_0}

Considere o grafo Γ que não é simplificado. Seja (Γ, β) o complexo de Hölder. Seja Γ_1 um grafo obtido de Γ por uma cirurgia Ω_{b_0} . Defina $\beta_1(g) = \min\{\beta(g_1), \beta(g_2)\}$. Assim, definimos a função β_1 no conjunto de todas as arestas do grafo Γ_1 (outras arestas de Γ diferentes de g_1 e g_2 não mudam e $\beta_1 = \beta$). Coloque $(\Gamma_1, \beta_1) = \Omega_{b_0}(\Gamma, \beta)$.

Operação Δ_{b_0}

Suponha que b_0 é um laço do vértice de Γ : é um incidente com exatamente duas arestas diferentes g_1 e g_2 , que conectam b_0 com outro vértice \tilde{b}_0 . Coloque $\tilde{\beta}(g_1) = \tilde{\beta}(g_2) = \min\{\beta(g_1), \beta(g_2)\}$ e $\tilde{\beta}(g) = \beta(g)$ se $g \neq g_1$ ou g_2 .

Definição 2.6.7. Dizemos que o complexo de Hölder (Γ, β) é simplificado se as operações Ω_{b_0} e Δ_{b_0} não podem ser aplicadas a (Γ, β) . Isso significa que existem apenas vértices críticos e de laços em Γ , b_0 é o vértice de laço e g_1, g_2 são duas arestas conectando b_0 com \tilde{b}_0 , então $\beta(g_1) = \beta(g_2)$.

Definição 2.6.8. Dizemos que o complexo de Hölder (Γ', β') é a simplificação de (Γ, β) se

1. (Γ', β') é simplificado.
2. (Γ', β') pode ser obtido de (Γ, β) , usando operações Γ_b e Δ_c várias vezes (para diferentes b e c).

Proposição 2.6.9. *Cada Complexo de Hölder possui uma simplificação. Duas simplificações do mesmo Complexo de Hölder são combinatorialmente equivalentes.*

Demonstração. A parte da existência é óbvia. Seja (Γ'_1, β'_1) e (Γ'_2, β'_2) duas simplificações de (Γ, β) . Pela Proposição 2.6.4, os grafos Γ'_1 e Γ'_2 são isomorfos. Considere as arestas $g_1 \in E_{\Gamma'_1}$ e a aresta correspondente $g_2 \in E_{\Gamma'_2}$. Pelas definições das operações Ω_b e Δ_b , $\beta'_1(g_1) = \beta'_2(g_2)$. A proposição está provada! \square

2.7 Complexo de Hölder Canônico – Teorema de Classificação

Nesta seção, formularemos e demonstraremos o resultado mais importante deste trabalho, o Teorema de Classificação.

Lema 2.7.1 (Lema de Simplificação). *Seja X um subconjunto semialgébrico, 2-dimensional de \mathbb{R}^n e $a \in X$. Seja (Γ, β) o Complexo de Hölder tal que, para algum $\delta > 0$, $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondendo a (Γ, β) , com o vértice principal a . Seja $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta})$ a simplificação de (Γ, β) . Então $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é o Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondente a $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta})$ com o vértice principal a .*

Demonstração. Observe que basta provar as afirmações abaixo para os seguintes casos:

1. $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta}) = \Omega_{b_0}(\Gamma, \beta)$, para algum vértice não crítico b_0 .
2. $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta}) = \Delta_{b_0}(\Gamma, \beta)$, para algum laço do vértice b_0 .

Considere o caso 1). Seja b_0 um vértice incidente não crítico com arestas g_1, g_2 de Γ . Os conjuntos $\Psi(C_{g_1})$ e $\Psi(C_{g_2})$ (definidos na Seção 2.2) são triângulos de Hölder satisfazendo as condições do Primeiro Lema Estrutural (Seção 2.3). Seja \tilde{g} uma aresta de $\tilde{\Gamma}$ obtida pela operação Ω_{b_0} . Por isso, $\Psi(C_{g_1})$ e $\Psi(C_{g_2})$ são triângulos $\tilde{\beta}(\tilde{g})$ -Hölder semialgébricos com vértice principal a . Significa que $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondente a $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta})$.

Considere o caso 2). Seja $b_0 \in V_\Gamma$ um vértice do laço e $b_1 \in V_\Gamma$ um outro vértice tal que b_0 e b_1 são conectadas pelas arestas g_1 e g_2 . Então, pelo Lema das Cornetas, $\Psi(C_{g_1}) \cup \Psi(C_{g_2})$ é $\tilde{\beta}$ -corneta Geométrica semialgébrica (onde

$\tilde{\beta} = \min\{\beta_1, \beta_2\}$). Sejam $\tilde{\beta}_0 = \Delta_{b_0}(b_0)$, $\tilde{g}_1 = \Delta_{b_0}(g_1)$ e $\tilde{g}_2 = \Delta_{b_0}(g_2)$. Podemos definir $\tilde{\Psi}(C\tilde{g}_1)$ e $\tilde{\Psi}(C\tilde{g}_2)$ como é feito na prova do Lema das Cornetas. Por isso, $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondente a $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta})$. \square

Esse lema motiva a seguinte definição:

Definição 2.7.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico 2-dimensional e $a \in X$. Seja (Γ, β) um Complexo de Hölder tal que, para algum $\delta > 0$, $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondente a (Γ, β) . Então a simplificação $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta})$ de (Γ, β) é chamada de Complexo de Hölder Canônico de X em a .*

Observação 2.7.3. *Pelo Lema 2.7.1, $X \cap \overline{B}_{a,\delta}$ é um Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondente a $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\beta})$ com vértice principal a .*

Teorema 2.7.4 (Teorema de Classificação). *Sejam $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico 2-dimensional, $a_1 \in X_1$ e $a_2 \in X_2$. Então os germes (X_1, a_1) e (X_2, a_2) são bi-Lipschitz equivalente se e somente se os Complexos de Hölder Canônicos de X_1 em a_1 e de X_2 em a_2 são combinatorialmente equivalentes.*

Observação 2.7.5. *Uma vez que a identidade é um aplicação bi-Lipschitz, a singularidade de um Complexo de Hölder Canônicos é um corolário imediato do Teorema 2.7.4. A estrutura de um Complexo de Hölder obtido na seção não é canônica, mas, após o procedimento de simplificação, obtemos um objeto canônico.*

Demonstração do Teorema 2.7.4. \Rightarrow] Sejam (X_1, a_1) e (X_2, a_2) germes bi-Lipschitz equivalentes. Sejam (Γ_1, β_1) e (Γ_2, β_2) dois Complexos de Hölder Canônicos de X_1 em a_1 e X_2 em a_2 respectivamente. Então, pelo Teorema de Simplificação de Grafos, Γ_1 é isomorfo a Γ_2 . Seja $\tilde{\Phi} : (X_1, a_1) \rightarrow (X_2, a_2)$ um germe de aplicação bi-Lipschitz $\Phi \in \tilde{\Phi}$. Seja i o isomorfismo de grafos Γ_1 e Γ_2 induzido por Φ (ver Seção 2.6). Seja $g \in E_{\Gamma_1}$ uma aresta de Γ_1 não conectada com vértice do laço. Então $\tilde{\Phi} : (\Psi(Cg), g_1) \rightarrow (\Psi_2(C(i(g))), a_2)$ (onde Φ_1, Φ_2 são aplicações de apresentação (ver Seção 2.2) e $\beta_1(g) = \beta_2(i(g))$) (pela Proposição 2.2.6). Seja g uma aresta conectada com algum vértice de laço b_0 . Seja g' outra aresta conectada com b_0 . Então o germe do conjunto $\Psi(Cg \cup Cg')$ é aplicado por $\tilde{\Phi}$ ao germe do conjunto $\Psi_2(C(i(g)) \cup C(i(g')))$. Da mesma forma, obtemos que $\beta_1(g) = \beta_2(i(g))$. Por isso, (Γ_1, β_1) e (Γ_2, β_2) são combinatorialmente equivalentes.

⌊⇐ Sejam (Γ_1, β_1) e (Γ_2, β_2) combinatorialmente equivalentes. Seja $i : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ um isomorfismo tal que, para cada $g \in E_{\Gamma_1}$, $\beta_1(g) = \beta_2(i(g))$. Seja $g \in E_{\Gamma_1}$ e considere o conjunto $\Psi_1(Cg)$. O triângulo $\beta_1(g)$ -Hölder é semialgébrico. Sejam $\tilde{\Phi}_g^1 : (\Psi_1(Cg), a_1) \rightarrow (T_{\beta_1(g)}, 0)$ e $\tilde{\Phi}_{i(g)}^2 : (\Psi_2(Ci(g)), a_2) \rightarrow (T_{\beta_1(g)}, 0)$ os germes das aplicações d -parametrização (ver Seção 2.3). Defina a aplicação $F : (X_1, a_1) \rightarrow (X_2, a_2)$ por

$$F(z) = \Phi_{i(g)}^2 \circ \Phi_g^1, \text{ para } z \in Cg \text{ (onde } \Phi_g^1 \in \tilde{\Phi}_g^1, \Phi_{i(g)}^2 \in \tilde{\Phi}_{i(g)}^2 \text{)}$$

Usando o mesmo argumento da prova do Primeiro Lema Estrutural e o Lema das Cornetas, podemos provar que o germe F em a_1 é um germe de aplicação bi-Lipschitz. \square

Observação 2.7.6. *Observe que a aplicação construída é semialgébrica.*

Corolário 2.7.7. *Sejam (X_1, a_1) e (X_2, a_2) germes de conjuntos semialgébricos 2-dimensionais. Se eles forem equivalentes bi-Lipschitz, então eles são semialgêbricamente bi-Lipschitz equivalentes.*

2.8 Semicomplexo de Hölder e Complexo de Hölder

Aqui vamos comparar os invariantes bi-Lipschitz de germes de curvas semialgébricas definidos neste trabalho com invariantes bi-Lipschitz de germes de superfícies semialgébricas, ver Birbrair (1999). Um invariante bi-Lipschitz intrínseco completo de conjuntos semialgébricos 2-dimensionais é chamado de Complexo de Hölder.

O Complexo de Hölder é o par (Γ, β) , onde Γ é um grafo finito e β é uma função de valor racional definida no conjunto de arestas de Γ . Todas as definições e resultados relacionados a esse assunto podem ser encontrados em Birbrair (1999) e Birbrair e Sobolevsky (1999b).

Seja (Γ, β) um Complexo de Hölder. Um vértice $a \in \Gamma$ é chamado essencial se, para toda vizinhança U_a de a , temos: U_a não é uma variedade topológica 1-dimensional (em outras palavras, a não é artificial nem um vértice de laço de Γ , ver Birbrair (1999)). Iremos definir o Semicomplexo de Hölder $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ correspondente a (Γ, β) da seguinte maneira:

1. O conjunto $V_{\tilde{A}}$ dos vértices de \tilde{A} é o conjunto de todos os vértices essenciais de Γ .

2. Sejam a_1, a_2 vértices de \tilde{A} . Seja P o conjunto de todos os caminhos finitos $\gamma = \{g_1, \dots, g_s\}$ (onde $g_1, \dots, g_s \in E_\Gamma$) conectando a_1 a a_2 . Definamos

$$\tilde{\alpha}(a_1, a_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_1, a_2 \text{ pertencem à componente conexas diferentes de } \Gamma; \\ \max_{\gamma \in P} \min_{g_k \in \gamma} \beta(g_k). & \end{cases}$$

Proposição 2.8.1. $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ é um Semicomplexo de Hölder.

Demonstração. Iremos provar a propriedade isósceles. Sejam a_1, a_2, a_3 três vértices de \tilde{A} tais que $\tilde{\alpha}(a_1, a_2) \leq \tilde{\alpha}(a_2, a_3) \leq \tilde{\alpha}(a_1, a_3)$. Suponhamos que a_1, a_2, a_3 pertençam a uma mesma componente conexa de Γ . (Caso contrário, a proposição é trivial). Sejam $\{g_1, \dots, g_k\}$ um caminho em Γ conectando a_1 e a_2 , $\{g'_1, \dots, g'_s\}$ um caminho em Γ conectando a_2 e a_3 . Assim, $\tilde{\alpha}(a_2, a_3) \leq \min\{\tilde{\alpha}(a_1, a_2), \tilde{\alpha}(a_1, a_3)\}$. Como $\tilde{\alpha}(a_1, a_2) \leq \tilde{\alpha}(a_1, a_3)$, obtemos que $\tilde{\alpha}(a_2, a_3) = \tilde{\alpha}(a_1, a_2)$. \square

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico 2-dimensional. Seja $Y = Y^0 \cup Y^1 \cup Y^2$ uma estratificação de Y , obtida da seguinte maneira: Seja Y^2 o conjunto de todos os pontos $y \in Y$ tais que exista uma vizinhança $U_y \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $U_y \cap Y$ é uma variedade topológica 2-dimensional. Seja Y^1 o conjunto dos pontos de $Y - Y^2$ tais que, todo $\tilde{y} \in Y^1$, existe uma vizinhança $U_{\tilde{y}}$ onde $U_{\tilde{y}} \cap (Y - Y^2)$ é uma variedade topológica 1-dimensional. Defina $Y^0 = Y - Y^2 - Y^1$. Por Benedetti e Risler (1990a), Y^0, Y^1 e Y^2 são conjuntos semialgébricos e, assim, Y^0 é finito, ver também King (1985).

Sejam $y_0 \in Y^0$ e $y_0 \in Cl(Y^1)$ (onde $Cl(Y^1)$ significa o fecho de Y^1). Então o germe de $Cl(Y^1)$ em y_0 é o germe de um conjunto semialgébrico 1-dimensional. Seja (A, α) o Semicomplexo de Hölder associado a $(Cl(Y^1), y_0)$ (isto é, $(A, \alpha) = sh(Cl(Y^1), y_0)$). Seja (Γ, β) um Complexo de Hölder canônico de Y em y_0 , ver Birbrair (1999). Seja $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ o Semicomplexo de Hölder correspondente a (Γ, β) definida acima.

Teorema 2.8.2. 1. Existe um morfismo $m : (\tilde{A}, \tilde{\alpha}) \rightarrow (A, \alpha)$.

2. Se y está localmente normalmente mergulhado em y_0 , ver Birbrair e Mostowski (2000a), então $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ e (A, α) são isomorfos.

Demonstração. 2). Sejam Y_i^1 e Y_j^1 dois ramos (panquecas) de $Cl(Y^1)$. Sejam a_i e a_j dois vértices em (Γ, β) . Suponha que a_i e a_j pertençam a uma mesma componente conexa de Γ . Seja $\gamma = \{g_1, \dots, g_s\}$ um caminho “maximal” em

Γ conectando a_i e a_j (significa que $\tilde{\alpha}(a_i, a_j) = \min_{g_k \in \mathcal{Y}} \beta(g_k)$). Pelos resultados de Birbrair (1999), a união dos triângulos curvilíneos correspondentes às arestas g_1, \dots, g_s é bi-Lipschitz equivalente ao triângulo de $\tilde{\alpha}(a_i, a_j)$ -Hölder padrão. Sejam $a_i(r) \in Y_i^1$ e $a_j(r) \in Y_j^1$ pontos tais que

$$d_{ind}(a_i(r), y_0) = d_{ind}(a_j(r), y_0) = r.$$

Usando os resultados de Birbrair (ibid.) ou Kurdyka e Orro (1997), obtemos que existem duas constantes K_1 e K_2 tais que

$$K_1 d_l(a_i(r), y_0) \leq r^{\tilde{\alpha}(a_i, a_j)} \leq K_2 d_l(a_i(r), y_0)$$

(onde d_l é a métrica comprimento). Como Y é localmente normalmente mergulhado em y_0 , obtemos (usando os resultados das Seções 1.1 a 1.3) que $\alpha(a_i, a_j) = \tilde{\alpha}(a_i, a_j)$. Se a_i e a_j pertencem a componentes conexas diferentes de Γ , então $\alpha(a_i, a_j) = 1$ (porque Y é localmente normalmente mergulhado).

1). Se Y não for localmente normalmente mergulhado em y_0 . Seja \tilde{Y} a “normalização” obtida em Birbrair e Mostowski (2000a). Seja $\tilde{Y}^0 \cup \tilde{Y}^1 \cup \tilde{Y}^2$ a estratificação topológica canônica de \tilde{Y} . Seja $\Phi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ uma aplicação semi-algébrica satisfazendo as seguintes condições:

a) Φ é uma aplicação bi-Lipschitz com respeito à métrica comprimento.

b) Φ é uma aplicação Lipschitz com respeito à métrica induzida. A existência desta aplicação é mostrada em Birbrair e Mostowski (ibid.). Claramente $\Phi(\tilde{Y}^1 \cup \tilde{Y}^0) = Y^1 \cup Y^0$. Sejam \tilde{Y}_i^1 e \tilde{Y}_j^1 dois ramos de \tilde{Y}^1 e seja $\tilde{y}_0 = \Phi^{-1}(y_0)$. Sejam $\tilde{a}_i(r) \in \tilde{Y}_i^1$ e $\tilde{a}_j(r) \in \tilde{Y}_j^1$ dois pontos tais que

$$d_{ind}(\tilde{a}_i(r), \tilde{y}_0) = d_{ind}(\tilde{a}_j(r), \tilde{y}_0) = r.$$

Por Birbrair e Mostowski (ibid.), temos

$$d_{ind}(\tilde{a}_i(r), \tilde{a}_j(r)) \geq d_{ind}(a_i(r), a_j(r)),$$

para r suficientemente pequeno. Como \tilde{Y} é normalmente mergulhada, obtemos que $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ é um Semicomplexo de Hölder associado a $(Cl(\tilde{Y}^1), \tilde{y}_0)$. Como

$$\begin{aligned} d_{ind}(\tilde{a}_i(r), \tilde{a}_j(r)) &= r^{\tilde{\alpha}(a_i, a_j)} + o(r^{\tilde{\alpha}(a_i, a_j)}), \\ d_{ind}(a_i(r), a_j(r)) &= r^{\alpha(a_i, a_j)} + o(r^{\alpha(a_i, a_j)}), \end{aligned}$$

temos que

$$\tilde{\alpha}(a_i, a_j) \leq \alpha(a_i, a_j). \quad (2.1)$$

Defina $m(a_i) = a_i$, para todo i . Pela inequação (2.1), m é um morfismo de Semicomplexo de Hölder. \square

Observação 2.8.3. *Se Y não estiver normalmente mergulhado (A, α) e $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$ não são necessariamente isomorfismos.*

Exemplo 2.8.4. *Seja (Γ, β) o Complexo de Hölder tal que Γ tem mais de um vértice essencial. Seja a_1 e a_2 dois vértices essenciais. Seja Γ' um novo grafo obtido por Γ adicionando uma nova aresta h conectando a_1 e a_2 . Defina $\beta'(h) > \max_{g \in E_\Gamma} \beta(g)$. Então (Γ', β') é um Complexo de Hölder. Usando o algoritmo de Birbrair e Sobolevsky (1999b) construímos um conjunto Y e um ponto y_0 de modo que, (Y, y_0) é um Complexo de Hölder Geométrico correspondente a (Γ, β) . Suponhamos que Y é normalmente mergulhado (caso contrário, podemos obtê-lo usando Birbrair e Mostowski (2000a)). Considere agora um conjunto semialgébrico Y' obtido por Y cortando o triângulo correspondente a aresta h . Para este conjunto, os Semicomplexos de Hölder considerado acima não são isomórficos.*

Proposição 2.8.5. *Sejam (Y_1, y_1) e (Y_2, y_2) dois germes de conjuntos semialgébricos 2-dimensionais tais que (Y_1, y_1) e (Y_2, y_2) são bi-Lipschitz equivalentes com respeito a métrica induzida. Então o Semicomplexo de Hölder correspondente (A_1, α_1) e (A_2, α_2) são isomórficos.*

Demonstração. A prova é direta! \square

2.9 Teorema de Realização

Em Birbrair e Sobolevsky (1999a), provamos o seguinte Teorema.

Teorema 2.9.1 (Teorema de Realização). *Seja (Γ, β) um Complexo de Hölder. Então existe um conjunto fechado, 2-dimensional, semialgébrico X e $a \in X$, tal que, para algum $\delta > 0$, $X \cap B_{a, \delta}$ é um Complexo de Hölder Geométrico semialgébrico correspondente a (Γ, β) com o vértice principal a .*

Observação 2.9.2. *Todos os resultados das seções de 1 a 7 permanecem verdadeiros se substituirmos a palavra “semialgébrica” pela palavra “subanalítica” (e o Teorema de Tarski–Seidenberg pelo Teorema de Gabrielov em todas as provas).*

Corolário 2.9.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado, subanalítico, 2-dimensional e $a \in X$. Então existe um conjunto fechado, semialgébrico, 2-dimensional $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $b \in Y$ tais que o germe X em a , é subanaliticamente bi-Lispchitz equivalente ao germe Y em b , com respeito à métrica comprimento.*

3

Mergulho Normal

3.1 Mergulho normal de subconjuntos semialgéblicos

Seja X um subconjunto semialgéblico conexo de \mathbb{R}^n . Como todo conjunto semialgéblico conexo é conexo por caminhos, podemos definir as duas seguintes métricas em X . A primeira é a *métrica induzida* de \mathbb{R}^n , que denotaremos por d_{ind} . A segunda é a *métrica do comprimento*, definida como segue. Dados $x_1, x_2 \in X$, seja Γ o conjunto de todas as curvas suaves por partes γ ligando x_1 e x_2 (i.e., $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$); defina $d_l(x_1, x_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma)$, onde $l(\gamma)$ denota o comprimento de γ .

Definição 3.1.1. O conjunto X diz-se *normalmente mergulhado* em \mathbb{R}^n se as métricas d_{ind} e d_l forem equivalentes. Isto significa que existe uma constante $C > 0$ tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, temos $d_l(x_1, x_2) \leq C d_{ind}(x_1, x_2)$.

Observação 3.1.2. De modo análogo, podemos definir mergulho normal em qualquer subconjunto estratificado conexo por arcos $Y \subset \mathbb{R}^n$. Observe que se X é normalmente mergulhado em Y e Y é normalmente mergulhado em X , então X é normalmente mergulhado em Z .

Definição 3.1.3. O conjunto X diz-se localmente normalmente mergulhado no ponto $x_0 \in X$ se existe uma bola $B_{x_0, r}$ centrada em x_0 de raio r tal que $B_{x_0, r} \cap X$ é normalmente mergulhado. Em outras palavras, dizemos que o germe de X em x_0 é normalmente mergulhado ou que o par (X, x_0) é normalmente mergulhado.

Definição 3.1.4. Sejam X um conjunto semialgêbrico e $Y \subset X$. Dizemos que Y é *relativamente normalmente mergulhado em X* se existe uma constante $C > 0$ tal que, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, temos $d_l(x, y) \leq C d_{ind}(x, y)$.

Observação 3.1.5. Seja $X = \bigcup_{i=1}^k Y_i$ onde cada Y_i é relativamente normalmente mergulhado em X . Então X é normalmente mergulhado.

Proposição 3.1.6. *Seja X um conjunto compacto localmente normalmente mergulhado em cada ponto $x \in X$. Então X é normalmente mergulhado.*

Exemplo 3.1.7. Toda subvariedade suave compacta X de \mathbb{R}^n é normalmente mergulhada.

Exemplo 3.1.8. A cúspide usual $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 = x_2^2\}$ não é normalmente mergulhada em 0. Para ver isso, considere a sequência $t_i = \frac{1}{i}$ e os pontos $x^i = (t_i, t_i^{\frac{3}{2}})$ e $y^i = (t_i, -t_i^{\frac{3}{2}})$. Tem-se que $d_l(x^i, y^i) = 2t_i + o(t_i)$, enquanto que $d_{ind}(x^i, y^i) = 2t_i^{\frac{3}{2}}$. Isto implica que $d_l(x^i, y^i)$ não pode ser superiormente limitada por $C d_{ind}(x^i, y^i)$.

Exemplo 3.1.9. A β -corneta usual ($\beta \geq 1$), vide Birbrair (1999).

$$H_\beta = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1^2 + x_2^2)^q = y^{2p}; y \geq 0; \beta = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}\}$$

é normalmente mergulhada.

Exemplo 3.1.10. O β -triângulo de Hölder ($\beta \geq 1$), vide Birbrair (ibid.).

$$T_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^\beta; 0 \leq x \leq 1\}$$

é normalmente mergulhado. (A demonstração deste fato é trivial.) O duplo β -triângulo de Hölder

$$DT_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^\beta, 0 \leq x \leq 1\}$$

é também normalmente mergulhado.

Exemplo 3.1.11. Considere o subconjunto X de \mathbb{R}^3 definido da seguinte maneira. Seja H_β a β -corneta usual e seja $P_{x_1}: H_\beta \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $P_{x_1}(x_1, x_2, y) = (x_2, y)$. Claramente, $P_{x_1}(H_\beta) = DT_\beta$. Seja $\beta_1 > \beta$; então $DT_{\beta_1} \subset DT_\beta$. Defina $X = H_\beta - \text{Int}(P_{x_1}^{-1}(DT_{\beta_1}))$. Pelos mesmos argumentos usados no Exemplo 3.1.8, obtemos que X não é normalmente mergulhado.

Proposição 3.1.12. (Decomposição em panquecas) [Kurdyka (1992a, 2000) e Parusiński (1994)] *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico fechado. Então existe um conjunto finito de subconjuntos $\{X_i\}$ tal que:*

1. cada X_i é um semialgébrico fechado contido em X .
2. $X = \bigcup_i X_i$.
3. $\dim(X_i \cap X_j) < \min(\dim X_i, \dim X_j)$ para cada $i \neq j$.
4. cada X_i é normalmente mergulhado em \mathbb{R}^n .

Os subconjuntos X_i são chamados de *panquecas* e uma decomposição satisfazendo (1)–(4) é dita uma *decomposição em panquecas*.

Observação 3.1.13. Esse resultado deve-se a A. Parusiński. Outra demonstração foi dada em Kurdyka (1992a), apresentada (para X aberto sendo o caso essencial) em Kurdyka (2000). Em geral, conjuntos L -regulares de Parusiński (1994) possuem propriedades adicionais. Nomeadamente, cada conjunto L -regular é normalmente mergulhado, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Aqui nós usaremos as propriedades (1)–(4) descritas acima.

Nosso resultado principal é o seguinte:

Teorema 3.1.14. *Seja X um subconjunto semialgébrico compacto e conexo de \mathbb{R}^n . Então, para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto semialgébrico $X^\epsilon \subset \mathbb{R}^m$ tal que:*

1. X^ϵ é semialgebricamente bi-Lipschitz equivalente a X com relação à métrica do comprimento.
2. X^ϵ é normalmente mergulhado em \mathbb{R}^m .
3. A distância de Hausdorff entre X e X^ϵ é menor do que ϵ .

3.2 Métrica da panqueca

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto semialgébrico fechado. Seja $\{X_j\}_{j=1}^N$ uma decomposição de X em panquecas. Considere $x_1, x_2 \in X$ e seja $\{y_1, \dots, y_k\}$ uma sequência de pontos satisfazendo as seguintes condições:

1. $y_1 = x_1$ e $y_k = x_2$.
2. Cada par y_i, y_{i+1} está em uma mesma panqueca X_j .
3. Se $y_i, y_{i+1} \in X_j$, então $y_s \notin X_j$ para todo $s \neq i, s \neq i + 1$.

Denotemos por Y_{x_1, x_2} o conjunto de todas as sequências finitas satisfazendo as condições (1)-(3) acima. Para cada sequência $\{y_1, \dots, y_k\} \in Y_{x_1, x_2}$, definimos $l(y) = \sum_{i=2}^k d_{ind}(y_i, y_{i-1})$ e (finalmente)

$$d_p(x_1, x_2) = \inf_{y \in Y_{x_1, x_2}} l(y).$$

Note que X , sendo semialgébrico e conexo, é conexo por arcos; por isso, $d_p(x_1, x_2)$ está bem definido para cada par (x_1, x_2) (vide a demonstração do Teorema 3.2.5). Nós chamamos d_p a *métrica da panqueca*.

Teorema 3.2.1. *A função $d_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é semialgébrica e define uma métrica em X .*

Isso foi provado em Kurdyka e Orro (1997), que relembremos o argumento por conveniência. Precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 3.2.2. *Existe $K > 0$ tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, tem-se*

$$d_p(x_1, x_2) \geq K d_l(x_1, x_2).$$

Demonstração. Seja $K = \min K_j$, onde K_j é a constante correspondente a panqueca X_j (vide Seção 2). Assim, para cada $y = \{y_1, \dots, y_k\}$ temos

$$d_{ind}(y_i, y_{i-1}) \geq K d_l(y_i, y_{i-1}).$$

Portanto,

$$d_p(x_1, x_2) \geq \sum_{i=2}^k K d_l(y_i, y_{i-1}) \geq K d_l(x_1, x_2),$$

e o lema está provado. □

Lema 3.2.3. Para cada $x_1, x_2 \in X$, existe $y \in Y_{x_1, x_2}$ tal que $d_p(x_1, x_2) = l(y)$.

Demonstração. Uma subsequência de panquecas $\{X_i\} \subset \{X_j\}_{j=1}^N$ é dita *admissível* (para x_1, x_2) se existe $y = \{y_1, \dots, y_k\} \in Y_{x_1, x_2}$ tal que $y_i \in X_i$. É suficiente provarmos que, para qualquer subsequência de panquecas admissível $\{X_i\}$, existe $\tilde{y} \in Y_{x_1, x_2}$ tal que $\tilde{y}_i \in X_i$ e $l(\tilde{y}) = \min\{l(y) \mid y \in Y_{x_1, x_2}, y_i \in X_i\}$. Considere uma bola fechada $B_{x_1, 2d_p(x_1, x_2)} = B$ centrada no ponto de x_1 e de raio $2d_p(x_1, x_2)$. Seja $\tilde{X}_i = X_i \cap X_{i+1} \cap B$ (aqui $i = 2, \dots, k-1$; $\{X_i\}$ é uma subsequência de panquecas admissível fixada). Definimos a função $\tilde{l}: \tilde{X}_2 \times \dots \times \tilde{X}_{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\tilde{l}(y_2, \dots, y_{k-1}) = l(y)$, onde $y = \{x_1, y_2, \dots, y_{k-1}, x_2\}$. A função \tilde{l} é contínua e definida no compacto $\tilde{X}_2 \times \dots \times \tilde{X}_{k-1}$. Assim, existe $\tilde{y} \in Y_{x_1, x_2}$ tal que $\tilde{y}_i \in \tilde{X}_i$ e $l(\tilde{y}) = \min\{l(y) \mid y \in Y_{x_1, x_2}, y_i \in \tilde{X}_i\}$ ($i = 2, \dots, k-1$). \square

A sequência $y \in Y_{x_1, x_2}$ tal que $d_p(x_1, x_2) = l(y)$ é chamada *sequência minimizante* correspondente a x_1, x_2 .

Corolário 3.2.4. A métrica da panqueca é uma função semialgébrica definida em $X \times X$.

Isto segue do Teorema de Eliminação de Quantificadores de Tarski–Seidenberg e do fato de que o gráfico de l é semialgébrico.

Demonstração do Teorema 3.2.1. Vamos agora provar que d_p é uma métrica. Os primeiros axiomas de uma métrica seguem imediatamente da definição de d_p e do Lema 3.2.2.

Para provarmos a desigualdade triangular, consideremos três pontos $x_1, x_2, x_3 \in X$. Sejam $y^1 = \{y_1^1, \dots, y_{k_1}^1\} \in Y_{x_1, x_2}$, $y^2 = \{y_1^2, \dots, y_{k_2}^2\} \in Y_{x_2, x_3}$ e $y^3 = \{y_1^3, \dots, y_{k_3}^3\} \in Y_{x_1, x_3}$ as sequências minimizantes correspondentes a x_1 e x_2 , x_2 e x_3 , respectivamente. Assim, a sequência $z = \{y_1^3, \dots, y_{k_3}^3, y_1^2, \dots, y_{k_2}^2\} = \{z_1, \dots, z_{k_3+k_2}\}$ satisfaz as condições da definição da métrica da panqueca $d_p(x_1, x_2)$, exceto, possivelmente, a condição 3). Para simplificar, usamos o seguinte procedimento. Se dois pontos não consecutivos da sequência y^3 pertencem a mesma panqueca X_j , então excluimos todos os pontos da sequência que estão entre eles. Repetindo esse procedimento um número finito de vezes, obtemos uma sequência minimizante $z \in Y_{x_1, x_3}$ correspondente a x_1, x_3 . Pela desigualdade triangular da distância induzida, temos

$$d_p(x_1, x_3) \leq l(z) \leq l(y^3) = l(y^1) + l(y^2) = d_p(x_1, x_2) + d_p(x_2, x_3).$$

Isto prova o Teorema 3.2.1. \square

Teorema 3.2.5. *A métrica da panqueca é bi-Lipschitz equivalente à métrica do comprimento.*

Demonstração. Seja $y \in Y_{x_1, x_2}$ a sequência minimizante correspondente a x_1, x_2 . Seja $\{X_i\}_{i=1}^{k-1}$ uma sequência de panquecas admissível correspondente a y . Uma vez que cada X_i é uma panqueca, existe um caminho suave por partes $\eta_i : [0, 1] \rightarrow X_i$ tal que $\eta_i(0) = y_i, \eta_i(1) = y_{i+1}$ e $l(\eta_i) \leq K(X_i)d_{ind}(y_i, y_{i+1})$, onde $l(\eta_i)$ denota o comprimento de η_i . Seja $\eta = \eta_1\eta_2 \cdots \eta_{k-1}$ (a concatenação usual dos caminhos), então $l(\eta) = \sum_{i=1}^{k-1} l(\eta_i)$. Seja $K = \max_i K(X_i)$. Portanto,

$$d_l(x_1, x_2) \leq l(\eta) \leq K \sum_{i=1}^{k-1} d_{ind}(y_i, y_{i+1}) = K d_p(x_1, x_2).$$

Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho suave por partes conectando x_1 e x_2 . Defina a seguinte sequência de pontos $y_i \in Y_{x_1, x_2}$. Ponha $y_1 = x_1$. O ponto y_1 pertence a alguma panqueca X_{i_1} . Defina $t_2 = \sup\{t \mid \gamma(t) \in X_{i_1}\}$. Se $x_2 \notin X_{i_1}$, então $t_2 \neq 1$. Seja $y_2 = \gamma(t_2)$ e suponha que $y_2 \in X_{i_1} \cap X_{i_2}$. Defina $t_3 = \sup\{t \mid \gamma(t) \in X_{i_2}\}$ e $y_3 = \gamma(t_3)$. Como o número de panquecas é finito, o procedimento acima para para algum $y_k = x_2$. Claramente $y = \{y_1, \dots, y_k\} \in Y_{x_1, x_2}$ e $l(\gamma) \geq l(y)$. Como γ é uma curva escolhida arbitrariamente, segue que

$$d_l(x_1, x_2) \geq d_p(x_1, x_2).$$

Logo o Teorema 3.2.5 está provado. \square

3.3 Tenda e procedimento de tenda

Seja X um conjunto semialgébrico conexo e compacto e seja $\{X_i\}_{i=1}^N$ uma decomposição de X em panquecas. Considere a função $\rho_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho_i(x) = d_p(x, X_i)$, onde d_p é a distância da panqueca. Denotemos por $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de ρ_i e definamos

$$\mu_i(x) = (x, \rho_i(x)).$$

Proposição 3.3.1. *A aplicação $\mu_i : X \rightarrow \Gamma_i$ possui as seguintes propriedades:*

1. μ_i é uma aplicação bi-Lipschitz com relação à métrica do comprimento em X (respectivamente, em Γ_i).
2. $\mu_i(X_j)$ é uma panqueca em $\mu_i(X)$; em outras palavras, $\{\mu_i(X_j)\}_{j=1}^N$ é uma decomposição de $\mu_i(X)$ em panquecas.
3. $\mu_i(X_i)$ é relativamente normalmente mergulhado em $\mu_i(X)$.

Demonstração. 1). Relembre que, em espaços métricos, a distância a um ponto fixado é uma função Lipschitz. Deste modo, ρ_i é Lipschitz com relação à métrica da panqueca e, pelo Teorema 3.2.5, é também Lipschitz com relação à métrica do comprimento. Portanto, μ_i é Lipschitz com relação à métrica do comprimento. Note que $\mu_i^{-1} = (\pi|_{\Gamma_i})$, onde π é a projeção nas n primeiras coordenadas. Logo, μ_i^{-1} é Lipschitz com relação à métrica do comprimento.

(2) Existe uma constante B , dependendo apenas de n , tal que

$$\max\{d_{ind}(x_1, x_2), |\rho_i(x_1) - \rho_i(x_2)|\} \leq B d_{ind}(\mu_i(x_1), \mu_i(x_2))$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X_j$. Como X_j é uma panqueca, obtemos

$$d_l(x_1, x_2) \leq L d_{ind}(\mu_i(x_1), \mu_i(x_2))$$

para algum $L > 0$. Por (1), a aplicação μ_i é bi-Lipschitz; logo

$$d_l(\mu_i(x_1), \mu_i(x_2)) \leq K d_{ind}(\mu_i(x_1), \mu_i(x_2))$$

para algum $K > 0$ e quaisquer $x_1, x_2 \in X_j$.

(3) Provaremos que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$d_l(x, y) \leq K d_{ind}(\mu_i(x), \mu_i(y))$$

para quaisquer $x \in X_i$ e $y \in X$. De fato, por (1), é suficiente encontrarmos um $K_1 > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq K_1 d_{ind}(\mu_i(x), \mu_i(y)).$$

Suponha que $\rho_i(y) \leq d_{ind}(x, y)$ e considere $\tilde{x} \in X_i$ tal que $\rho_i(y) = d_p(\tilde{x}, y)$. Pela definição da métrica da panqueca, temos

$$d_p(x, y) \leq d_{ind}(x, \tilde{x}) + d_p(y, \tilde{x}).$$

Como $d_p(y, \tilde{x}) = \rho_i(y) \leq d_{ind}(x, y)$, obtemos, pela Desigualdade Triangular,

$$d_{ind}(x, \tilde{x}) \leq 2d_{ind}(x, y)$$

e assim

$$d_p(x, y) \leq 3d_{ind}(x, y).$$

Por isso, pelo 3.2.5, segue que

$$d_l(x, y) \leq 3Cd_{ind}(\mu_i(x), \mu_i(y)),$$

onde $C > 0$ é uma constante satisfazendo $d_l \leq Cd_p$.

Suponha agora que $\rho_i(y) > d_{ind}(x, y)$. De fato, para $\tilde{x} \in X_i$ onde $\rho_i(y) = d_p(\tilde{x}, y)$, temos

$$d_p(x, y) \leq d_p(y, \tilde{x}) + d_{ind}(x, y) + d_{ind}(\tilde{x}, y) \leq 3d_p(\tilde{x}, y).$$

Por outro lado,

$$\rho_i(y) \leq \max\{d_{ind}(x, y), \rho_i(y)\} \leq Bd_{ind}(\mu_i(x), \mu_i(y))$$

para algum $B > 0$ dependendo apenas de n . Deste modo,

$$d_p(x, y) < 3Bd_{ind}(\mu_i(x), \mu_i(y)).$$

Pelas equivalências entre as métricas da panqueca e do comprimento, de modo análogo, obtemos

$$d_l(x, y) < Kd_{ind}(\mu_i(x), \mu_i(y))$$

para algum $K_1 = 3C \max\{1, B\}$. □

O conjunto $\mu_i(X)$ diz-se uma *i-tenda sobre X* e a aplicação μ_i chama-se um *i-ésimo procedimento de tenda*.

A seguinte proposição é simples; a prova é a similar a do item (2) da Proposição 3.3.1.

Proposição 3.3.2. *Seja $Y \subset X$ relativamente normalmente mergulhado em X . Então, $\mu_i(Y)$ é relativamente normalmente mergulhado em $\mu_i(X)$.*

Demonstração do Teorema 3.1.14. Defina o conjunto $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ como segue.

1. Fixe uma decomposição $\{X_i\}_{i=1}^k$ de X em panquecas.
2. Aplique o 1-ésimo procedimento de tenda a X e defina $\tilde{X}^0 = X$ e $\tilde{X}^1 = \mu_1(X)$.

(2') Defina $\tilde{X}_j^1 = \mu_1(X_j)$; assim, tem-se que $\{\tilde{X}_j^1\}_{j=1}^k$ é uma decomposição de \tilde{X}^1 (pela Proposição 3.3.1).

(i+1) Defina $\tilde{X}^i = \mu_i(\tilde{X}^{i-1})$.

(i+1)' Defina $\tilde{X}_j^i = \mu_i(\tilde{X}_j^{i-1})$.
Tome $\tilde{X} = \tilde{X}^k$.

No último passo, obtemos uma decomposição $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^k \tilde{X}_j^k$. Pela Proposição 3.3.2, todos os \tilde{X}_j^k são relativamente normalmente mergulhados. Logo, pela Observação 3.1.5, \tilde{X} é normalmente mergulhado em \mathbb{R}^{n+k} . Segue da Proposição 3.3.1 que \tilde{X} é semialgebricamente bi-Lipschitz equivalente a X com relação à métrica do comprimento.

Para provarmos que \tilde{X} pode ser tomado perto de X (no sentido da distância de Hausdorff), é suficiente substituímos ρ_i (na construção das tendas) por $\delta\rho_i$ com δ pequeno. Por exemplo, $\delta = \epsilon/k \cdot \text{diam}_{d_p} X$, onde k é o número de panquecas e $\text{diam}_{d_p} X$ é o diâmetro de X com relação à métrica da panqueca. \square

4

Metric Knots

4.1 Equivalência ambiental

Consideramos os germes na origem das superfícies semialgébricas (ou definíveis em uma estrutura o-minimal delimitada polinomialmente) (conjuntos bidimensionais) em \mathbb{R}^4 . A superfície X pode ser considerada como um espaço métrico, equipado com a métrica externa $d(x, y) = \|x - y\|$ ou a métrica interna $d_{inder}(x, y)$, definida como o comprimento mínimo de um caminho em X conectando x e y .

O link na origem de X é o conjunto $L_X = \{X \cap S_{0,\varepsilon}^3\}$ para um ε pequeno positivo. Escrevemos “o link na origem” usando a noção de link da Teoria da Singularidade, reservando a palavra “link” para a noção de link na Teoria do Nó. Se X tem singularidade isolada na origem, então cada componente conexa de L_X é um nó em S^3 .

O cone tangente de X em origem pode ser definido assim. Seja $X^\varepsilon = X \cup S_\varepsilon^n$. O limite de Hausdorff da família dos conjuntos $1/\varepsilon * X^\varepsilon$, quando ε está indo para zero, é chamado link tangente $L(0, X)$. O cone em origem sobre $L(0, X)$ é chamado cone tangente de X em origem, com a notação $C(O, X)$

Definição 4.1.1. *Dois germes de superfícies $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ são chamados bi-Lipschitz equivalentes externos se existir um homeomorfismo bi-Lipschitz com*

respeito à métrica outer $H : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$. Os germes são chamados bi-Lipschitz equivalente ambientalmente se existir um homeomorfismo bi-Lipschitz preservando a orientação $\tilde{H} : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, tal que $\tilde{H}(X) = Y$.

Uma boa ferramenta para estudar equivalência Lipschitz Ambiental é o teorema de Sampaio, para a demonstração veja Sampaio (2016).

Teorema 4.1.2 (Teorema de Sampaio). *Se dois germes $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ são ambientalmente bi-Lipschitz equivalentes, então os cones tangentes $C(O, X)$ e $C(O, Y)$ também são ambientalmente bi-Lipschitz equivalentes. Em particular, eles são topologicamente ambientalmente equivalentes.*

Um arco no conjunto X é um germe de aplicação na origem $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = 0$. A menos que especificado de outra forma, os arcos são parametrizados pela distância até a origem, isto é, $\|\gamma(t)\| = t$.

Definição 4.1.3. *Seja $f \not\equiv 0$ (um germe na origem) uma função definida no arco γ . A ordem α de f em γ (notação $\alpha = \text{ord}_\gamma f$) é o valor $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $f(\gamma(t)) = ct^\alpha + o(t^\alpha)$ com $t \rightarrow 0$, onde $c \neq 0$. Se $f \equiv 0$ em γ , diremos que $\text{ord}_\gamma f = \infty$.*

Para quaisquer dois arcos γ_1 e γ_2 , pode-se definir duas ordens de contato: interno e externo.

Definição 4.1.4. *A ordem de contato externa $\text{tord}_{\text{outer}}(\gamma_1, \gamma_2)$ é definida como a $\text{ord}_{\gamma_1}(\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|)$. A ordem de contato interna $\text{tord}_{\text{inner}}(\gamma_1, \gamma_2)$ é definida como a $\text{ord}_{\gamma_1}(d_p(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$, onde d_p é a métrica panqueca, (ver Birbrair e Mendes (2018)), equivalente à métrica interna. Essas duas ordens de contato são números racionais (ou elementos do campo de expoentes de uma estrutura o -minimal), $1 \leq \text{tord}_{\text{inner}}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \text{tord}_{\text{outer}}(\gamma_1, \gamma_2)$.*

Seja $\beta > 1$ um número racional. Considere o espaço \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, t) . Para $t \geq 0$ fixado, definimos os subconjuntos W_t^\pm do quadrado com o lado $2t$ no plano (x, y) , limitado pelos segmentos de linha $I_t^\pm = \{|x| \leq t, y = \pm t\}$ e os segmentos de linha conectando os pontos finais de I_t^\pm com os pontos $(0, \pm t^\beta)$, respectivamente (áreas sombreadas na 4.1a)). Seja $W_t = W_t^+ \cup W_t^-$ e seja $W = \bigcup_{t \geq 0} W_t \subset \mathbb{R}^3$. Note que o cone tangente de W é o cone sobre o conjunto $\{(x, y) : |x| \leq |y| \leq 1\}$.

Definição 4.1.5. *Dado um número racional $\beta > 1$, a parte do limite do conjunto W pertencente ao interior do cone sobre o quadrado é chamada de β -ponte.*

Sejam $1 < \beta_1 \leq \beta_2$ dois números racionais no plano xy $\{t = \text{constante}\}$ (ver 4.1).

$$p_1(t) = (-t, t), \quad p_2(t) = (-t^{\beta_1}, t^{\beta_2}), \quad p_3(t) = (t^{\beta_1}, t^{\beta_2}), \quad p_4(t) = (t, t),$$

$$p'_1(t) = (-t, -t), \quad p'_2(t) = (-t^{\beta_1}, -t^{\beta_2}), \quad p'_3(t) = (t^{\beta_1}, -t^{\beta_2}), \quad p'_4(t) = (t, -t),$$

Vamos conectar $p_1(t)$ com $p_2(t)$, $p_2(t)$ com $p_3(t)$, $p_3(t)$ com $p_4(t)$ por segmentos de linhas e defina U_t^+ como o quadrilátero limitado por esses segmentos. Da mesma forma, conecte $p'_1(t)$ com $p'_2(t)$, $p'_2(t)$ com $p'_3(t)$, $p'_3(t)$ com $p'_4(t)$ por segmentos de linhas e defina U_t^- como o quadrilátero limitado por esses segmentos. Seja V_t a união desses segmentos e deixe $V = \bigcup_{t \geq 0} V_t \subset \mathbb{R}^3$. Seja $U_t = U_t^+ \cup U_t^-$ (área sombreada da Seção 4.1) e seja $U = \bigcup_{t \geq 0} U_t \subset \mathbb{R}^3$. Note que U e W têm o mesmo cone tangente na origem.

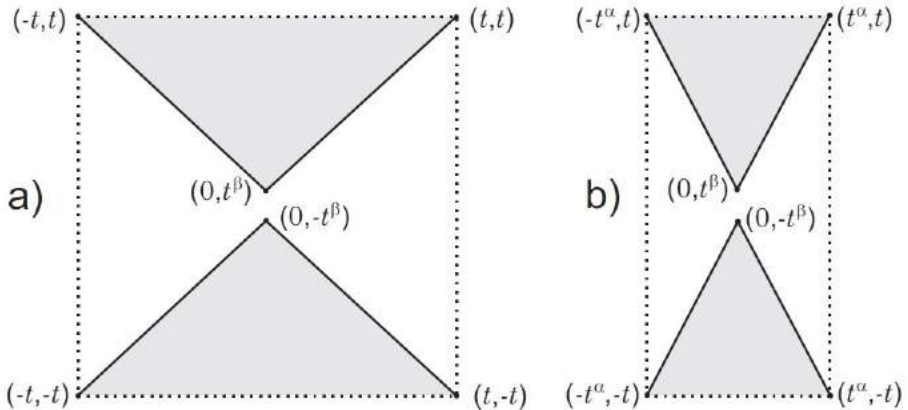


Figura 4.1: a) Conjunto W_t . b) Conjunto $W_t^{\alpha\beta}$

Definição 4.1.6. *Dados dois números racionais $1 < \beta_1 \leq \beta_2$, a parte do limite do conjunto U pertencente ao interior do cone sobre o quadrado é chamada de (β_1, β_2) -ponte. Note que, para $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, o (β_1, β_2) -ponte é bi-Lipschitz equivalente externo ao β -ponte. O germe de uma superfície contendo um subconjunto bi-Lipschitz equivalente externo a uma ponte (β_1, β_2) e metricamente cônico fora dessa parte, é chamado de superfície de uma-ponte.*

Seja $\alpha > 1$, $\beta > 1$ números racionais. Considere o espaço \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, t) . Para $t \geq 0$ fixado, definimos subconjuntos $W_t^{\alpha\beta\pm}$ do retângulo com o lado $2t^\alpha$ no plano (x, y) , limitado pelos segmentos de linha $I_t^{\alpha\pm} = \{|x| \leq$

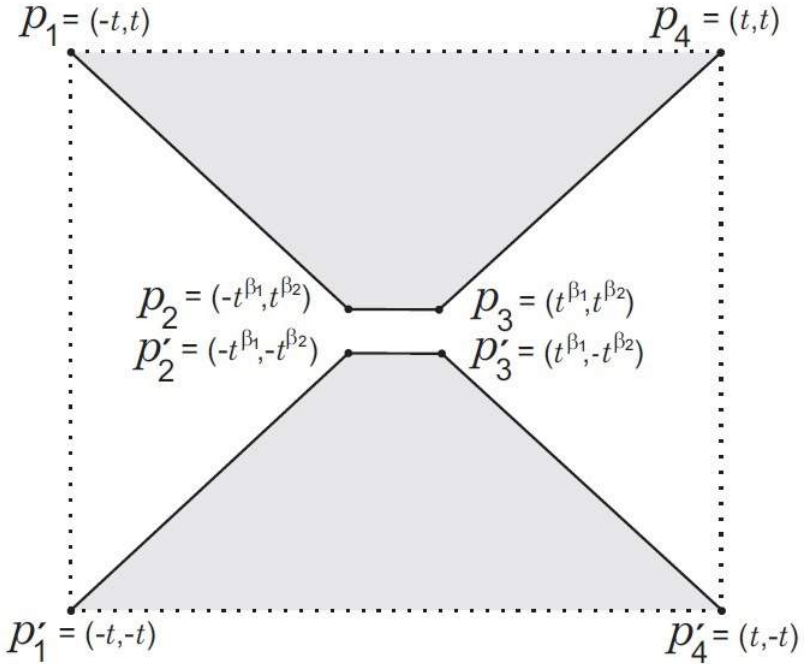


Figura 4.2: Conjunto U_t .

t^α , $y = \pm t$ e os segmentos de linha conectando os pontos finais de $I_t^{\alpha\pm}$ com os pontos $(0, \pm t^\beta)$, respectivamente (áreas sombreadas na 4.1b).

Seja $W_t^{\alpha\beta} = W_t^{\alpha\beta+} \cup W_t^{\alpha\beta-}$ e seja $W_t^{\alpha\beta} = \bigcup_{t \geq 0} W_t^{\alpha\beta} \subset \mathbb{R}^3$. Note que o

cone tangente de $W^{\alpha\beta}$ é o cone sobre o conjunto: $\{(x, y) \mid x = 0, |y| \geq 1\}$. Seja \widetilde{W}^α o conjunto definido como a união sobre $t \geq 0$ de retângulos $\{(x, y) \mid -t^\alpha \geq x \geq t^\alpha, -t \geq y \geq t\}$.

Definição 4.1.7. *Dados dois números racionais $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, a parte do limite do conjunto $W^{\alpha\beta}$ pertence ao interior de \widetilde{W}^α é chamada de (α, β) -wedge.*

4.2 Nós Métricos

Teorema 4.2.1 (Teorema de Universalidade). *Seja $K \subset S^3$ um nó. Então, pode-se associar com K um germe de superfície semialgébrica de uma-ponte $(X_K, 0)$ em \mathbb{R}^4 , para que as afirmações abaixo sejam verdadeiras.*

1. *O link na origem de cada germe X_K é um nó trivial.*
2. *Todos os germes X_K bi-Lipschitz externos equivalentes.*
3. *Dois germes X_{K_1} e X_{K_2} são bi-Lipschitz equivalentes ambientes apenas se os nós K_1 e K_2 são isotópicos.*

Demonstração. Seja $F_K \subset S^3$ uma superfície suave semialgébrica mergulhada difeomórfica a $S^1 \times [0, 1]$, tais que o limite de F_K contenha duas componentes \tilde{K} e \tilde{K}' isomorfos a um mesmo nó K . Sejam \tilde{Y}_K o cone sobre F_K e \tilde{X}_K o cone sobre o limite de F_K .

Seja ξ um ponto interior de F_K . Seja S_K uma fatia de F_K bi-Lipschitz homeomórfica a um quadrado $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ contendo ξ e seja $\varphi : S_K \rightarrow D$ um homeomorfismo bi-Lipschitz tal que $\varphi(\xi) = 0$. Suponha, além disso, que as partes da fronteira de F_K pertencem a S_K e são mapeadas por φ_K para os lados $\{x = \pm\}$ de D e as partes do limite de S_K pertencentes ao interior de F_K são mapeadas para os lados superior e inferior $\{y = \pm 1\}$ de D .

Seja $M_K \subset \mathbb{R}^4$, o cone sobre S_K e seja \tilde{W} um cone sobre D . O conjunto \tilde{W} , construído na seção anterior, pode ser considerado como um subconjunto de \tilde{W} . A aplicação φ_K é naturalmente estendida a uma aplicação $\Phi_K : M_K \rightarrow \tilde{W}$ por $\Phi_K(t_\chi, t) = (t_{\varphi_K(\chi)}, t)$ para $\chi \in S$. Note que Φ_K é uma aplicação bi-Lipschitz.

Sejam $V_K = \Phi^{-1}(W)$ e $Y_K = (Y_K \setminus M_K) \cup V_K$. Defina X_K a fronteira de Y_K . Pela construção de X_K , é uma superfície uma-ponte. Vamos mostrar que X_K satisfaz as condições do teorema.

1. O link de X_K é um nó trivial, porque limita parte de F_K homeomórfico a um disco.

2. Sejam K_1 e K_2 dois nós diferentes. Mostraremos que X_{K_1} e X_{K_2} são bi-Lipschitz equivalentes com respeito a métrica externa, construindo a seguinte aplicação $\Psi : Y_{K_1} \rightarrow Y_{K_2}$. \square

Definimos separadamente as restrições $\Psi|_{M_{K_1}}$ e $\Psi|_{Y_{K_1} \setminus M_{K_1}}$. Temos $\Psi|_{M_{K_1}} = \Phi_{K_2}^{-1} \circ \Phi_{K_1}$. Como Φ_K é uma aplicação bi-Lipschitz para todo K , a composição

é bi-Lipschitz. Como $Y_K \setminus M_K$ é bi-Lipschitz equivalente a um cone sobre o quadrado, o homeomorfismo correspondente $\tilde{\Phi}_K : Y_K \setminus M_K \rightarrow \tilde{W}$ é bi-Lipschitz. O conjunto $\Psi|_{Y_{K_1} \setminus M_{K_1}} = \tilde{\Phi}_{K_2}^{-1} \circ \Phi_{K_1}$. Note que Φ_{K_1} , $\tilde{\Phi}_{K_1}$, Φ_{K_2} e $\tilde{\Phi}_{K_2}$ podem ser escolhidos de forma que Ψ seja contínuo. Como $\Psi(X_{K_1}) = X_{K_2}$ por construção, X_{K_1} e X_{K_2} são bi-Lipschitz equivalentes externos.

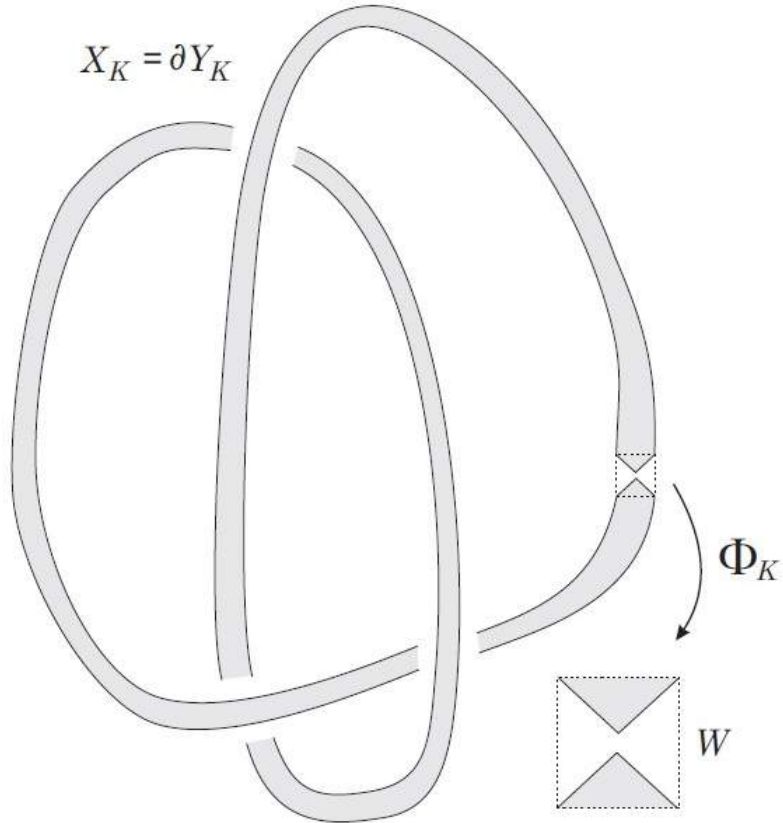


Figura 4.3: Os links dos conjuntos $X_K = \partial Y_K$ e W na prova do Teorema 4.2.1

3. Note que, para todo nó K , o link do cone tangente $C_0 X_K$ do conjunto X_K é a união dos de dois nós isotópicos a K , **pinched** em um ponto. Assim, se K_1 e K_2 não são isotópicos, então os cones tangentes $C_0 X_{K_1}$ e $C_0 X_{K_2}$ não são topologicamente equivalentes ambientes. Isso contradiz o Teorema de Sampaio (ver Sampaio (2016)), que afirma que os cones tangentes da equivalência Lips-

chitz ambiente dos conjuntos semialgébricos também são equivalentes Lipschitz ambientes. Em nosso caso, os links dos cones tangentes não são, nem mesmo, topologicamente ambientalmente equivalentes.

Teorema 4.2.2. *Para todo nó $K \subset S^3$ e qualquer inteiro $i \geq 0$, existem germes de superfícies $(X'_{K,i}, 0)$ em \mathbb{R}^4 tal que:*

1. *O cone tangente na origem de todos os $X'_{K,i}$ são topologicamente equivalentes ao cone sobre duas cópias isotópicas de K pinched em um ponto.*
2. *Todos $X'_{K,i}$ são bi-Lipschitz equivalentes externos.*
3. *$X'_{K,i}$ e $X'_{K,j}$ são bi-Lipschitz equivalentes ambientes apenas quando $i = j$.*

Seja $Y'_{K,0}$ o conjunto obtido pela substituição W com U na construção feita na prova do Teorema 4.2.1 e seja $X'_{K,0}$ sua fronteira (ver Figura 4.4). Então o germe de superfície $(X'_{K,0}, 0)$ satisfaz a condição do Teorema 4.2.1.

Seja $F'_{K,i}$, o conjunto obtido retirando a fatia S_K do F_K , fazendo i rotações completas e colando de volta U (ver Figura 4.5). Seja $Y'_{K,i}$ o conjunto obtido de $F'_{K,i}$ da mesma forma que $Y'_{K,0}$ foi obtido por F_K e seja $X'_{K,i}$ sua fronteira. Os mesmos argumentos da prova do Teorema 4.2.1 mostra que o link de $X'_{K,i}$ é um nó trivial e o cone tangente de $X'_{K,i}$ é o cone sobre a união de dois nós isotópicos a K , pinched em um ponto.

Vamos provar que $X'_{K,i}$ e $X'_{K,j}$ não são equivalentes ambientais bi-Lipschitz se $i \neq j$. Para este propósito, apresentaremos duas definições.

Definição 4.2.3 (Movimento de sela). *Substituir segmentos de linha $[p_2(t), p_3(t)]$ e $[p'_2(t), p'_3(t)]$ em cada seção V_t de U com os segmentos $[p_2(t), p'_2(t)]$ e $[p_3(t), p'_3(t)]$. Seja $S(X'_{K,i})$ uma superfície obtida após esse movimento (ver Figura 4.6a). Esta operação é chamada de Movimento de Sela.*

Definição 4.2.4 (Movimento de Cruzamento). *Considere o espaço \mathbb{R}^3 com coordenadas x, y, t como um subespaço $\{z = 0\}$ de \mathbb{R}^4 com coordenadas x, y, t, z . Substitua segmentos de linhas $[p_2(t), p_3(t)]$ e $[p'_2(t), p'_3(t)]$ em cada seção U_t de U com o segmento de linha $[p_2(t), p'_3(t)]$ e um arco de círculo no meio-espaço $\{z \geq 0\}$, com as extremidades $p'_2(t)$ e $p'_3(t)$, ortogonal ao plano $\{z = 0\}$. Seja $C(X'_{K,i})$ a superfície obtida após esse movimento (ver Figura 4.6b). Esta operação é chamada de Movimento de Sela.*

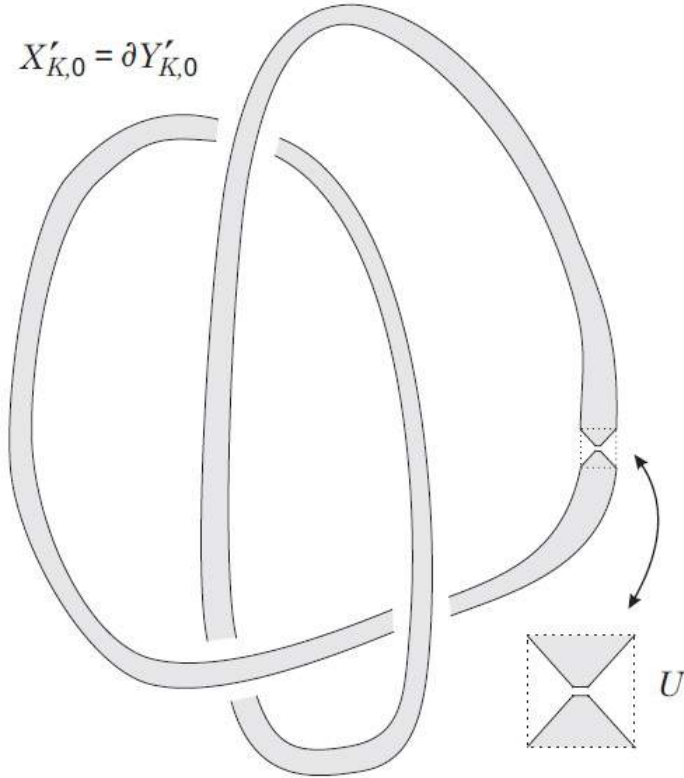


Figura 4.4: Os links das superfícies $X_{K,0}' = \partial Y_{K,0}'$ e U na prova do Teorema 4.2.2

Lema 4.2.5. *Se as superfícies $X'_{K,i}$ e $X'_{K,j}$ são bi-Lipschitz equivalentes ambientes, então os resultados do movimento de sela ou do movimento de cruzamento aplicado a essas duas superfícies são bi-Lipschitz equivalentes ambientes.*

Demonstração. Seja $\tilde{H} : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um germe de aplicação bi-Lipschitz, tal que $\tilde{H}(X'_{K,j}) = X'_{K,i}$. Pelo Teorema de Valett's (ver Valette (2007)), existe outro germe de uma aplicação bi-Lipschitz $H : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, tal que $H(X'_{K,j}) = X'_{K,i}$ e, além disso, H leva às esferas centradas na origem até às esferas centradas na origem.

Seja $p_1(t), p_2(t), p'_2(t), p'_3(t)$ pontos descritos na prova do Teorema 4.2.2 para superfícies $X'_{K,j}$ e $q_1(t), q_2(t), q'_2(t), q'_3(t)$ os pontos correspondentes em $X'_{K,i}$. Note que os pares de arcos (γ_1, γ_2) , tais que $tord_{outer}(\gamma_1, \gamma_2) = \beta_2$ e

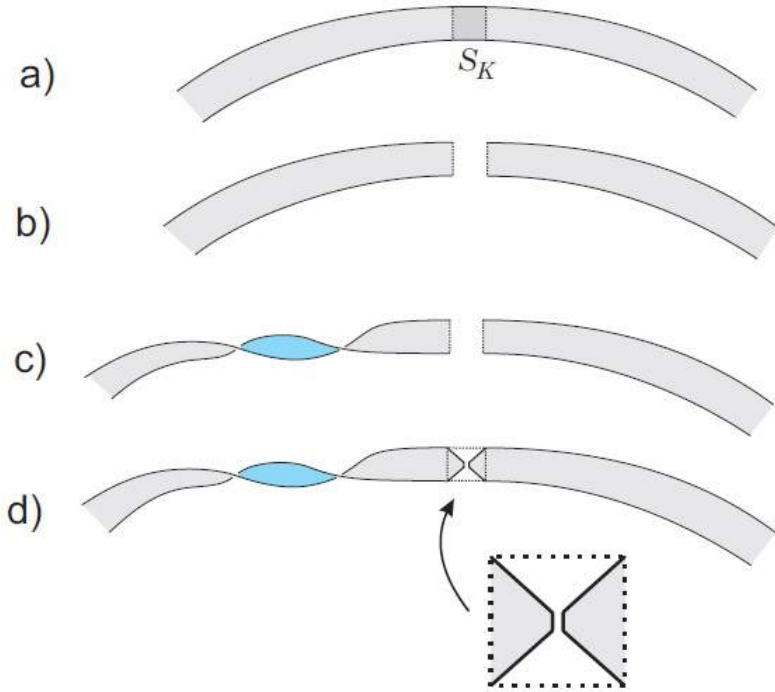


Figura 4.5: Corte e torção na prova do Teorema 4.2.2

$tord_{inner}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2) = 1$. Assim, existe um par de triângulos Hölder T_1 e T_2 em $X'_{K,i}$, tal que sua união é bi-Lipschitz equivalente ambiente à união sobre $t \geq 0$ dos segmentos, conectando $(x = -t^{\beta_1}, y = t^{\beta_2})$ com $(x = t^{\beta_1}, y = t^{\beta_2})$ e $(x = -t^{\beta_1}, y = -t^{\beta_2})$ com $(x = t^{\beta_1}, y = -t^{\beta_2})$ no plano xy $\{t = const, z = 0\}$ (ver Figura 4.7).

Então o homeomorfismo H pode ser substituído por outro homeomorfismo $H' : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ tal que $H'(p_2(t)) = q_2(t)$, $H'(p_3(t)) = q_3(t)$, $H'(p'_2(t)) = q'_2(t)$, $H'(p'_3(t)) = q'_3(t)$. Por isso, $H'(S(X'_{K,j})) = S(X'_{K,i})$ e $H'(C(X'_{K,j})) = C(X'_{K,i})$. Isso prova o Lema. \square \square

Demonstração do Teorema 4.2.2. O resultado do movimento de sela de $X'_{K,j}$ é uma superfície tal que o link tangente é a união de duas cópias do nó K . Como o número de ligação das duas cópias é igual ao número de torções completas, $X'_{K,j}$ e $X'_{K,i}$ não são bi-Lipschitz equivalentes ambientes. Observe que a topologia da

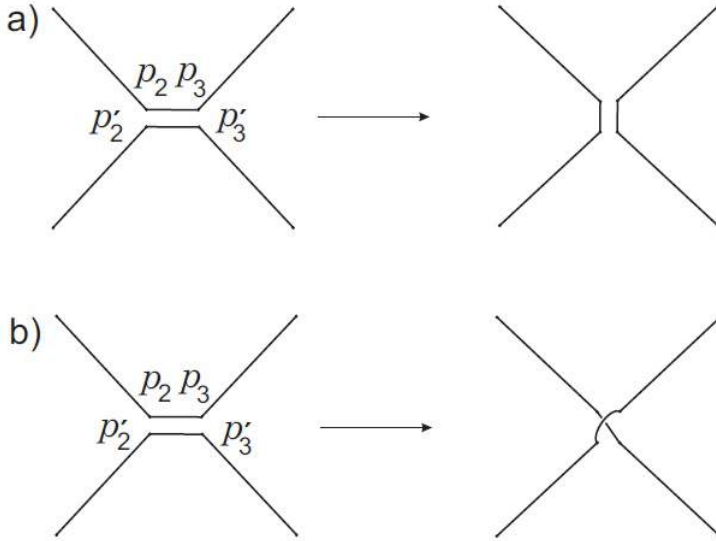


Figura 4.6: Movimento de sela e movimento de cruzamento

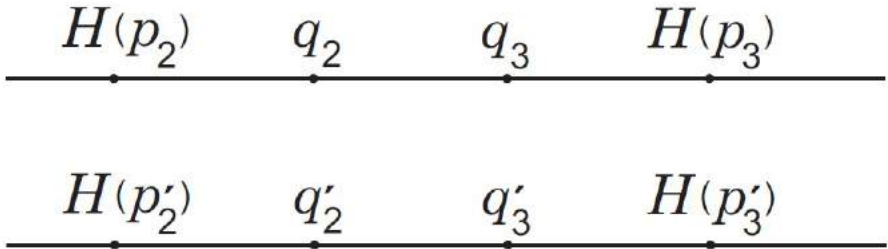


Figura 4.7: A imagem pela aplicação H

link tangente de $X'_{K,j}$ não depende de j . O link tangente é formado por duas cópias de K pinched em um ponto. Isso conclui a prova do Teorema. \square

A próxima afirmação é uma modificação do Teorema da Universalidade.

Teorema 4.2.6. *Para quaisquer dois nós K e L , existe um germe de superfície semialgébrica uma-ponte X_{KL} tal que:*

1. O link de X_{KL} no zero é isotópico a L .

2. Para um nó fixo K , todos os germes de superfície X_{KL} têm links tangentes isotópicos. Em particular, germes de superfícies X_{K_1L} e X_{K_2L} são bi-Lipschitz equivalentes ambientes apenas se os nós K_1 e K_2 são isotópicos.

Demonstração. Considere as superfícies X_K , construída na prova do Teorema 4.2.1 para o nó K . Faça um arco $\gamma \subset X_K$ passando pela origem e situado “longe” do conjunto W , definido na prova do Teorema 4.2.1 (isto é, $\text{tord}_{\text{outer}}(\gamma', \gamma) = 1$ para todo $\gamma' \subset W$). Seja $V(\gamma)$ uma vizinhança cônica de γ em \mathbb{R}^4 . Pode-se incorporar uma superfície singular Z_L dentro de $V(\gamma)$ de tal forma que o link de Z_L é topologicamente equivalente ambiente a L . Em cada nível t , considere a soma conectada do link de X_K e do link de Z_L . O resultado desse movimento é denominado X_{KL} (ver Figura 4.8). \square

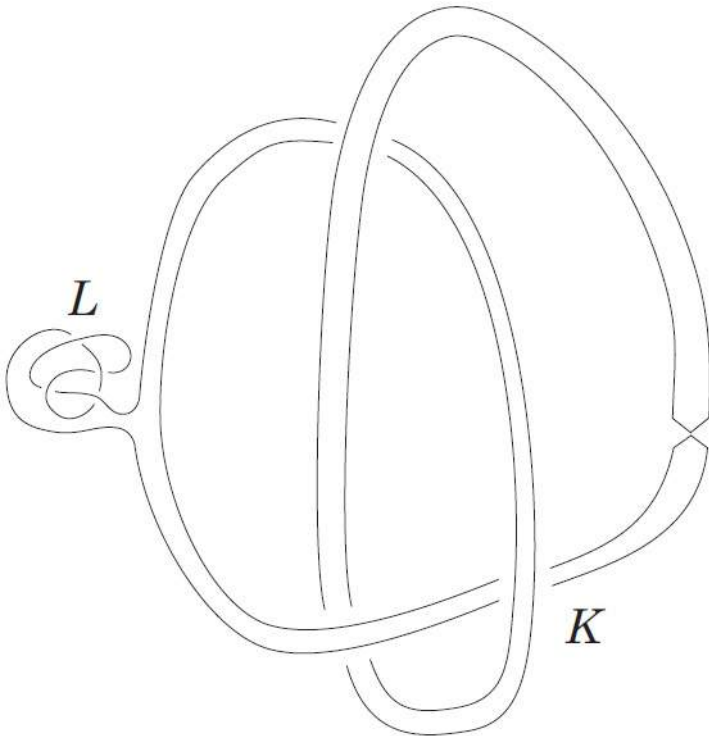


Figura 4.8: Construção de X_{KL}

1. Como X_K tem um link trivial, a soma conectada é isotópica a L .

2. A prova de que as superfícies X_{KL} são bi-Lipschitz equivalentes externas para L , sendo fixas, é a mesma que todas as X_K são bi-Lipschitz equivalentes externas na prova do Teorema 4.2.1.

3. Note que X_{KL} é uma superfície de uma-ponte e, por isso, o link tangente na origem são dois nós, presos em um ponto. Um dos nós é K e o outro é o conectado alguns de K e L . Outro nó é isotópico a K . Isso prova 3.

O próximo resultado é outra modificação do Teorema da Universalidade. Em contraste com os resultados anteriores, a estrutura métrica é mais complicada do que uma-ponte.

Teorema 4.2.7. *Para quaisquer dois nós K e L , existe um germe de uma superfície semialgébrica $X_{KL}^{\alpha\beta}$ tal que:*

1. *O link de $X_{KL}^{\alpha\beta}$ na origem é isotópico a L .*
2. *Para quaisquer α e β , todos germes $X_{KL}^{\alpha\beta}$ são bi-Lipschitz equivalentes externos.*
3. *Para um nó K , sendo fixado o link tangente de $X_{KL}^{\alpha\beta}$, é isotópico a K .*

Demonstração. Tome $1 \leq \alpha$. Seja $F_K \subset S^3$ uma superfície suave, semialgébrica mergulhada difeomorficamente em $S^1 \times [0, 1]$, tal que a fronteira de F_K contém duas componentes \tilde{K} e \tilde{K}' isotópicas a um mesmo nó K . Seja (w, v) as coordenadas em F_K . Seja \tilde{Y}_K o cone sobre F_K e seja \tilde{X}_K o cone sobre a fronteira de F_K . Então (w, v, t) são coordenadas em \tilde{Y}_K , onde t é a distância até a origem. Seja \tilde{Y}_K^α um subconjunto de \tilde{Y}_K definido da seguinte maneira $\tilde{Y}_K^\alpha = \{(w, v, t) \mid 0 \leq v \leq t^\alpha\}$. O conjunto \tilde{Y}_K^β é chamado α -saturação de $F_K \subset S^3$. Note que o link tangente de \tilde{Y}_K^α é isotópico a K .

Tome uma fatia S_K de F_K definida pelas coordenadas $((w, v, t) : (w_0 - r \leq w \leq w_0 + r))$, para algum w_0 e para r suficientemente pequeno. Considere a α -saturação de S_K definida por $((w, v, t) : (w_0 - r \leq w \leq w_0 + r), (0 \leq v \leq t^\alpha))$. Essa α -saturação de S_K pode ser removida e substituída por $W^{\alpha\beta}$, exatamente da mesma maneira, como fizemos na prova do Teorema da Universalidade. Seja $Y_K^{\alpha\beta}$ um conjunto, obtido por esta operação e seja $X_K^{\alpha\beta}$ a fronteira de $Y_K^{\alpha\beta}$.

Tome um arco $\gamma \subset X_K^{\alpha\beta}$ passando pela origem e situado “longe” do conjunto W^β definido acima (isto é, $tord_{outer}(\gamma', \gamma) = 1$ para qualquer $\gamma' \subset W^\alpha$). Seja

$V_\beta(\gamma)$ uma vizinhança semelhante a uma β -corneta de γ em \mathbb{R}^4 . Pode-se incorporar uma superfície singular Z_L dentro de $V_\beta(\gamma)$ de tal forma que o link de Z_L seja topologicamente equivalente ambiente a L .

Em cada nível t , considere a soma conectada do link de $X_K^{\alpha\beta}$ e o link de Z_L . O resultado deste movimento é chamado $X_{KL}^{\alpha\beta}$ (ver Figura 4.8).

1. Como $X_K^{\alpha\beta}$ tem o link trivial, a soma conectada é isotópica a L .
2. A prova do fato de que as superfícies X_{KL} são equivalentes externas bi-Lipschitz para L , sendo fixas é o mesmo que todas as $X_K^{\alpha\beta}$ são equivalentes bi-Lipschitz externas na prova do Teorema 4.2.1.
3. Por outro lado, como Z_L é um subconjunto de uma vizinhança β -corneta de γ , corresponde a um único ponto no link tangente. É por isso que o link tangente de $X_{KL}^{\alpha\beta}$ é o mesmo do cone tangente de $X_K^{\alpha\beta}$, isto é, isotópico a K . □

Bibliografia

- V. I. Arnol'd, S. M. Guseĭn-Zade e A. N. Varchenko (1985). *Singularities of differentiable maps. Vol. I*. Vol. 82. Monographs in Mathematics. The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, pp. xi+382. MR: 0777682.
- R. Benedetti e J.-J. Risler (1990a). *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, p. 340. MR: 1070358. Zbl: 0694.14006 (ver pp. 25, 32).
- (1990b). *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, p. 340. MR: 1070358. Zbl: 0694.14006.
- L. Birbrair (1999). “Local bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets”. *Houston J. Math.* 25.3, pp. 453–472. MR: 1730886. Zbl: 1007.32006 (ver pp. 31–33, 37).
- L. Birbrair, A. Fernandes, V. Grandjean e A. Gabrielov (2017). “Lipschitz contact equivalence of function germs in \mathbb{R}^2 ”. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 17.1, pp. 81–92. MR: 3676041. Zbl: 1397.14072.
- L. Birbrair e A. Gabrielov (2019). “Ambient Lipschitz equivalence of real surface singularities”. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 20, pp. 6347–6361. MR: 4031241. Zbl: 1444.58014.
- L. Birbrair e R. Mendes (2018). “Arc criterion of normal embedding”. Em: *Singularities and foliations. geometry, topology and applications*. Vol. 222. Springer

- ger Proc. Math. Stat. Springer, Cham, pp. 549–553. MR: 3779575. Zbl: 1405.14004 (ver p. 46).
- L. Birbrair e T. Mostowski (2000a). “Normal embeddings of semialgebraic sets”. *Michigan Math. J.* 47.1, pp. 125–132. MR: 1755260. Zbl: 0983.32005 (ver pp. 2, 32–34).
- (2000b). “Normal embeddings of semialgebraic sets”. *Michigan Math. J.* 47.1, pp. 125–132. MR: 1755260. Zbl: 0983.32005 (ver pp. 6, 15, 18).
- L. Birbrair e M. Sobolevsky (1999a). “Realization of Hölder complexes”. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) 8.1, pp. 35–44. MR: 1721582. Zbl: 0954.14039 (ver pp. 25, 34).
- (1999b). “Realization of Hölder complexes”. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) 8.1, pp. 35–44. MR: 1721582. Zbl: 0954.14039 (ver pp. 31, 34).
- L. Birbrair e A. C. Fernandes (2000). “Metric theory of semialgebraic curves”. *Revista Matemática Complutense* 13.2, p. 369. Zbl: 0979.14027 (ver p. 2).
- J. Bochnak e J.-J. Risler (1975a). “Sur les exposants de Lojasiewicz”. *Comment. Math. Helv.* 50.4, pp. 493–507. MR: 0404674. Zbl: 0321.32006 (ver pp. 13, 24).
- (1975b). “Sur les exposants de Lojasiewicz”. *Comment. Math. Helv.* 50.4, pp. 493–507. MR: 0404674. Zbl: 0321.32006.
- J.-P. Brasselet, M. Goresky e R. MacPherson (1991). “Simplicial differential forms with poles”. *Amer. J. Math.* 113.6, pp. 1019–1052. MR: 1137533. Zbl: 0748.55002.
- L. Bröcker, M. Kuppe e W. Scheufler (1997). “Inner metric properties of 2-dimensional semi-algebraic sets”. Em: vol. 10. Special Issue, suppl. Real algebraic and analytic geometry (Segovia, 1995), pp. 51–78. MR: 1485291. Zbl: 0920.14030.
- A. Fernandes (2003). “Topological equivalence of complex curves and bi-Lipschitz maps”. *Michigan Mathematical Journal* 51.3, pp. 593–606. Zbl: 1055.14028 (ver p. 3).
- C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis e E. J. N. Looijenga (1976a). *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, pp. iv+155. MR: 0436203.
- (1976b). *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, pp. iv+155. MR: 0436203.
- M. Goresky e R. MacPherson (1980). “Intersection homology theory”. *Topology* 19.2, pp. 135–162. MR: 0572580. Zbl: 0448.55004.
- (1983). “Intersection homology. II”. *Invent. Math.* 72.1, pp. 77–129. MR: 0696691. Zbl: 0529.55007.

- V. Jones (2014). “Jones polynomial for dummies”.
- L. H. Kauffman (1987). “State models and the Jones polynomial”. *Topology* 26.3, pp. 395–407. MR: 0899057. Zbl: 0622.57004.
- H. C. King (1985). “Topological invariance of intersection homology without sheaves”. *Topology Appl.* 20.2, pp. 149–160. MR: 0800845. Zbl: 0568.55003 (ver p. 32).
- K. Kurdyka (1992a). “On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1”. Em: *Real algebraic geometry (Rennes, 1991)*. Vol. 1524. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, pp. 316–322. MR: 1226263. Zbl: 0779.32006 (ver pp. 6, 24, 38).
- (1992b). “On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1”. Em: *Real algebraic geometry (Rennes, 1991)*. Vol. 1524. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, pp. 316–322. MR: 1226263. Zbl: 0779.32006.
- (2000). “On the gradient conjecture of R. Thom”. Em: *Geometry Seminars, 1998–1999 (Italian) (Bologna, 1997)*. Univ. Stud. Bologna, Bologna, pp. 143–151. MR: 1764479. Zbl: 0959.32012 (ver pp. 24, 25, 38).
- K. Kurdyka e P. Orro (1997). “Distance géodésique sur un sous-analytique”. Em: vol. 10. Special Issue, suppl. Real algebraic and analytic geometry (Segovia, 1995), pp. 173–182. MR: 1485298. Zbl: 0911.32010 (ver pp. 33, 39).
- S. Lojasiewicz (1964). “Triangulation of semi-analytic sets”. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* 18, pp. 449–474. MR: 0173265. Zbl: 0128.17101.
- W. L. Marar e D. Mond (1989). “Multiple point schemes for corank 1 maps”. *J. London Math. Soc. (2)* 39.3, pp. 553–567. MR: 1002466. Zbl: 0691.58015.
- D. Mond (1987). “Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space”. *Topology* 26.3, pp. 361–383. MR: 0899055. Zbl: 0654.32008.
- T. Mostowski (1985). “Lipschitz equisingularity”. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 243, p. 46. MR: 0808226. Zbl: 0578.32020.
- (1988). “Tangent cones and Lipschitz stratifications”. Em: *Singularities (Warsaw, 1985)*. Vol. 20. Banach Center Publ. PWN, Warsaw, pp. 303–322. MR: 1101848. Zbl: 0662.32012.
- W. Neumann e A. Pichon (2020). Vol. 2280. Lecture Notes in Math. Springer, pp. xvi+346. MR: 4200099 (ver p. 2).
- A. Parusiński (1988). “Lipschitz properties of semi-analytic sets”. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 38.4, pp. 189–213. MR: 0978246 (ver p. 6).
- (1994). “Lipschitz stratification of subanalytic sets”. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 27.6, pp. 661–696. MR: 1307677. Zbl: 0819.32007 (ver pp. 24, 38).

- J. E. Sampaio (2016). “Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-Lipschitz homeomorphic tangent cones”. *Selecta Math. (N.S.)* 22.2, pp. 553–559. MR: 3477329. Zbl: 1338.32008 (ver pp. 46, 50).
- D. Trotman (1997). “Espaces stratifiés réels”. Em: *Stratifications, singularities and differential equations, II (Marseille, 1990; Honolulu, HI, 1990)*. Vol. 55. *Travaux en Cours*. Hermann, Paris, pp. 93–107. MR: 1473246. Zbl: 0883.32025.
- G. Valette (2007). “The link of the germ of a semi-algebraic metric space”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 135.10, pp. 3083–3090. MR: 2322737. Zbl: 1123.14030 (ver p. 52).
- S. Weinberger (1994). *The topological classification of stratified spaces*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, pp. xiv+283. MR: 1308714. Zbl: 0826.57001.

Índice Remissivo

A

aplicação bi-Lipschitz, 13

B

bordas do triângulo, 25

C

complexo de Hölder, 14
combinatoriamente
equivalentes, 14
isomorfos, 14

conjunto

localmente normalmente
mergulhado no ponto, 37
normalmente mergulhado, 36

conjunto semialgébrico

relativamente normalmente
mergulhado, 37

β -Corneta padrão, 21

D

decomposição em panquecas, 38

M

mergulho normal, 36
morfismo, 5

P

panquecas, 38

R

relativamente normalmente
mergulhado, 37

S

semicomplexo de Hölder, 4
semicomplexos de Hölder
combinatorialmente
equivalentes, 5
isomorfos, 5
subconjunto semialgébrico, 5

T

triângulo curvilíneo, 25
triângulo β -Hölder, 14

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Geometria Lipschitz das singularidades** – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*
- Combinatória** – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*
- Códigos Geométricos** – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*
- Topologia e geometria de 3-variedades** – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*
- Ciência de Dados: Algoritmos e Aplicações** – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*
- Discovering Euclidean Phenomena in Poncet Families** – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*
- Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além** – *Victor León e Bruno Scárdua*
- Equações diferenciais e modelos epidemiológicos** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- Differential Equation Models in Epidemiology** – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*
- A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes** – *Sinai Robins*
- PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria** – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*
- First steps into Model Order Reduction** – *Alessandro Alla*
- The Einstein Constraint Equations** – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*
- Dynamics of Circle Mappings** – *Edson de Faria e Pablo Guarino*
- Statistical model selection for stochastic systems** – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*
- Transfer Operators in Hyperbolic Dynamics** – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*
- A Course in Hodge Theory Periods of Algebraic Cycles** – *Hossein Movasati e Roberto Villafior Loyola*
- A dynamical system approach for Lane–Emden type problems** – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*
- Visualizing Thurston’s Geometries** – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*
- Scaling Problems, Algorithms and Applications to Computer Science and Statistics** – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*
- An Introduction to Characteristic Classes** – *Jean-Paul Brasselet*



Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-56-6



9 786589 124566