Introdução Matemática à Dinâmica de Fluídos Geofísicos

Publicações Matemáticas

Introdução Matemática à Dinâmica de Fluídos Geofísicos

Breno Raphaldini
IAG-USP

Carlos F.M. Raupp
IAG-USP

Pedro Leite da Silva Dias
IAG-USP

impa

31º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

31º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Álgebra e Geometria no Cálculo de Estrutura Molecular - C. Lavor, N. Maculan, M. Souza e R. Alves
- Continuity of the Lyapunov Exponents of Linear Cocycles - Pedro Duarte e Silvius Klein
- Estimativas de Área, Raio e Curvatura para *H*-superfícies em Variedades Riemannianas de Dimensão Três - William H. Meeks III e Álvaro K. Ramos
- Introdução aos Escoamentos Compressíveis - José da Rocha Miranda Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo Rabello dos Anjos
- **Introdução Matemática à Dinâmica de Fluídos Geofísicos - Breno Raphaldini, Carlos F.M. Raupp e Pedro Leite da Silva Dias**
- Limit Cycles, Abelian Integral and Hilbert's Sixteenth Problem - Marco Uribe e Hossein Movasat**i**
- Regularization by Noise in Ordinary and Partial Differential Equations - Christian Olivera
- Topological Methods in the Quest for Periodic Orbits - Joa Weber
- Uma Breve Introdução à Matemática da Mecânica Quântica - Artur O. Lopes

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

ISBN: 978-85-244-0436-8

Conteúdo

1

Introdução

Neste curso abordaremos alguns tópicos matemáticos em dinâmica de fluidos geofísicos. Primeiramente, vamos esclarecer o que é a dinâmica de fluidos geofísicos. Rotulamos por fluidos geofísicos tanto os invólucros fluidos de planetas, tais como a atmosfera e o oceano na Terra, como também o fluido ionizado que compõe o núcleo externo da Terra, embora este último também seja classificado como um plasma, ou seja, um fluído cuja dinâmica também está fortemente acoplada com efeitos eletromagnéticos. Com isso, além dos fluidos geofísicos serem governados pelas leis da hidrodinâmica, que partem do princípio básico da hipótese do contínuo e descrevem a dinâmica de uma parcela elementar deste meio contínuo com base nas leis de conservação de momento, massa e energia, um aspecto peculiar dos fluidos geofísicos é que sua dinâmica sofre grande influência dos efeitos da rotação do planeta. De fato, como veremos mais adiante, principalmente para os movimentos cujas escalas típicas de comprimento são comparáveis à própria dimensão do planeta, o efeito da rotação do referencial (i.e., a rotação do planeta), manifestado principalmente pela força de Coriolis, é predominante na dinâmica desses movimentos do fluido.

Neste sentido, a matemática está, obviamente, fortemente presente na construção dos modelos que descrevem esses movimentos, tais como os modelos atmosféricos de previsão de tempo e clima.

Isto porque uma das etapas do processo de modelagem consiste em expressar as leis físicas que governam a dinâmica dos movimentos do fluido em termos de equações matemáticas, neste caso representadas basicamente por equações diferenciais parciais. A matemática também está presente na busca por soluções dessas equações, que no caso das equações completas só é possível através de métodos de aproximação numérica, dada a complexidade do sistema de equações de derivadas parciais (EDPs) que descreve a dinâmica dos fluidos em geral. De fato, as chamadas equações de Navier-Stokes que governam a dinâmica dos fluidos (fluidos newtonianos) constituem talvez o principal desafio matemático do milênio, que consiste em demonstrar a existência de uma solução forte dessas equações. Neste curso, abordaremos a construção dos modelos matemáticos da dinâmica de fluidos geofísicos utilizando três diferentes formulações: a formulação Euleriana, a formulação Lagrangeana e a formulação Hamiltoniana. A partir do sistema de equações de Navier-Stokes (incluindo o efeito da força de Coriolis associada com a rotação do planeta), derivaremos também diversos modelos bastante utilizados em estudos relacionados à atmosfera e ao oceano através de aproximações tanto de cunho físico quanto de cunho matemático. A solução dessas equações por métodos numéricos está fora do escopo deste curso.

Além da importância da matemática na construção dos modelos da dinâmica dos fluidos geofísicos e na solução numérica das equações governantes desses modelos, a matemática também está fortemente presente numa forma de análise dessas equações que consiste na aplicação de métodos assintóticos, que visem obter equações simplificadas que descrevam certos mecanismos físicos, que estão presentes nas equações completas, mas de forma isolada. Tais equações matemáticas simplificadas são comumente referidas como “toy models”. Estes “toy models” obviamente são incapazes de descrever a dinâmica dos movimentos do fluido em questão da forma mais completa possível e, consequentemente, não são utilizados com o intuito de fazer previsões do comportamento do fluido. No entanto, esses modelos simplificados obtidos através de aproximações assintóticas têm uma importância crucial em proporcionar um maior entendimento dos processos físicos que ocorrem nos modelos completos, mas que dada a complexidade destes modelos não podem ser claramente distinguíveis nas equações completas. Logo, a função básica desses modelos simplificados é elucidar mecanismos ou processos físicos que não são claramente elucidados na dinâmica completa.

Os "toy models" descritos acima, por serem mais simples, proporcionam um tratamento mais analítico de suas equações governantes e, em alguns casos, até soluções analíticas são possíveis. Inclusive, os "toy models" são comumente utilizados na validação de modelos numéricos, para que estes possam posteriormente ser utilizados tanto na previsão do tempo e clima quanto na simulação de certos fenômenos atmosféricos ou oceânicos. Neste procedimento de validação dos modelos numéricos das equações completas da dinâmica atmosférica ou oceânica, os parâmetros dos modelos numéricos são configurados de modo que o modelo opere exatamente ou muito próximo do regime em que as equações do "toy model" são válidas. Com isso, a solução analítica do modelo simplificado pode ser usada como referência para análise das saídas do modelo numérico das equações completas. Um exemplo de métodos matemáticos assintóticos empregados para obter soluções simplificadas das equações completas é a teoria ondulatória (ou seja, a busca dos chamados modos normais de um sistema físico), tanto a teoria linear quanto a fracamente não linear, que serão abordadas neste curso. A teoria ondulatória, como veremos mais adiante, consiste em analisar a dinâmica do sistema num regime particular válido nas proximidades de certas soluções de equilíbrio do sistema. Neste caso, as pequenas amplitudes dessas perturbações permitem que estes distúrbios sejam descritos, numa primeira aproximação, pela versão linearizada das equações governantes. Como EDPs e sistemas de EDPs lineares têm sido estudados durante vários séculos, soluções analíticas são possíveis via métodos de separação de variáveis, somados a expansões em séries de potências, expansão em séries de funções ortogonais, etc. Neste caso, as chamadas ondas são determinadas como soluções características das equações lienarizadas.

Além da destacada importância da teoria ondulatória em constituir um "toy model" na elucidação de mecanismos físicos, a relevância da teoria ondulatória reside também no fato de que as equações governantes dos modelos da dinâmica de fluidos geofísicos têm natureza hiperbólica, permitindo, portanto, que qualquer distúrbio inicial

se propague. Ademais, outro aspecto que reforça a importância da teoria de ondas como ferramenta poderosa no entendimento dos processos dinâmicos nos modelos de dinâmica de fluidos geofísicos é a observação na atmosfera e no oceano de fenômenos que envolvem propagação coerente de distúrbios. Um exemplo disso é a propagação dos sistemas convectivos de meso-escala responsáveis por causar tempestades em diferentes regiões em intervalos de tempo de algumas horas a um dia. Outro exemplo é a propagação dos distúrbios de grande-escala na atmosfera de latitudes médias e subtropicais, que causam o deslocamento de sequências alternadas de ciclones e anticiclones em períodos de tempo da ordem de alguns dias a uma semana, que apresentam um grau relativamente alto de coerência espacial. Outra manifestação evidente de distúrbios ondulatórios na atmosfera é a estrutura coerente de disposição das nuvens altas em situações de estabilidade da atmosfera, que reflete a atividade das ondas de gravidade.
Além dessas manifestações evidentes da atividade de ondas que permitem até sua identificação visual, evidências na atmosfera de distúrbios ondulatórios descritos de forma teórica têm sido obtidas através de métodos de análise de sinais, que contempla a eliminação de ruídos e a extração de espectros de fundo de forma a isolar picos espectrais altamente significativos do ponto de vista estatístico e que possuem surpreendente coincidência com a relação de dispersão de alguns tipos de ondas permitidas pelas equações governantes de modelos atmosféricos. Assim, a teoria ondulatória será bastante explorada neste curso, tanto do ponto de vista linear quanto fracamente não linear.

Os capítulos posteriores são organizados como segue. Primeiramente, no Capítulo 2, abordaremos a mecânica de sistemas físicos mais simples que os fluidos, tais como o pêndulo elástico e um sistema discreto de partículas, de modo a apresentar de forma mais simplificada as diferentes formulações da mecânica clássica a serem posteriormente aplicadas na descrição da dinâmica de fluidos. No Capítulo 3 utilizaremos essas diferentes formulações para obter as equações governantes da dinâmica dos fluidos geofísicos. No Capítulo 4 derivaremos, a partir das equações obtidas no Capítulo 3, alguns modelos simplificados da dinâmica de fluidos geofísicos através de aproximações, tanto aproximações físicas quanto aproximações assintóticas. No Capítulo 5 abordaremos a teoria de ondas no regime linear para o caso das ondas imersas num estado de referência estacionário em repouso e homogêneo, no qual as ondas são estáveis e neutras. No Capítulo 6 estenderemos a análise das ondas iniciada no Capítulo 5 para o regime fracamente não linear, no qual as soluções características do problema linear ainda descrevem os efeitos dominantes da dinâmica do sistema, porém a não linearidade promove correções relevantes numa escala de tempo mais longa em comparação com os períodos característicos das mesmas. Finalmente, no Capítulo 7 abordaremos a formulação hamiltoniana da dinâmica dos fluidos, onde aplicamos esta formulação para o estudo da estabilidade de escoamentos estacionários, além da aplicação da formulação para a determinação das quantidades conservadas do sistema.

2

Mecânica de um sistema de partículas

2.1 Mecânica Newtoniana

Consideremos um sistema de N partículas descritas por suas posições $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, ..., N$.

Definição: A trajetória de uma partícula indexada por i na posição $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ é uma curva $\gamma(t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Definição: A velocidade $\mathbf{v}_i$ de uma partícula indexada por i na posição $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ e tempo $t = t_0$ é um vetor tangente à trajetória desta partícula, dada por:

$$\mathbf{v}_i(t_0) = \frac{d}{dt} q_i(t)|_{t=t_0} = \dot{q}(t)|_{t=t_0} \tag{2.1}$$

Definição: A aceleração $\mathbf{a}_i$ de uma partícula indexada por i na posição $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ e velocidade $\mathbf{v}_i$, no tempo $t = t_0$, é um vetor que mede a taxa de variação da velocidade neste dado tempo:

$$\mathbf{a}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}_i|_{t=t_0} = \ddot{q}_i(t)|_{t=t_0} \tag{2.2}$$

Suporemos aqui válida a **segunda lei de Newton**: *sob a ação de uma dada força* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ *uma partícula de massa* m *é acelerada de acordo com* $m\ddot{\boldsymbol{q}}_i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$. Note que restringimos a função força às dependências apenas nas posições e velocidades.

Definição:

- A energia cinética é definida por $T = \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{v}_i|^2$
- O momento da partícula indexada por i é dado por $\mathbf{p}_i = \partial T / \partial \dot{\mathbf{q}}_i$
- Uma força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ dependente apenas das posições é dita conservativa se existe $U(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla U$. Neste caso U é chamada energia potencial.

2.2 Mecânica Lagrangeana

Uma abordagem distinta da mecânica devido à Lagrange e Hamilton é baseada na minimização do funcional ação

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \tag{2.3}$$

Lema (Teorema fundamental do cálculo das variações): Seja f uma função contínua definida no intervalo real $[t_0, t_1]$ a valores em $\mathbb{R}$. Se a relação

$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(t)h(t)dt = 0 \tag{2.4}$$

é válida para toda função contínua $h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, então f é identicamente nula em $[t_0, t_1]$.

Demonstração: Suponhamos que exista um ponto $\bar{t}$ tal que $f(\bar{t}) > 0$. Como f é contínua, existem $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tal que $f(t) > C$ para $t \in [\bar{t} - 2\epsilon, \bar{t} + 2\epsilon]$. Escolhemos então uma função $h(t)$ tal que $h(t) = 1$ para $t \in [\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon]$ e $h(t) = 0$ para $t \in [t_0, \bar{t} - 2\epsilon] \cup [\bar{t} + 2\epsilon, t_1]$. Temos então:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} f(t)h(t)dt \geq \int_{\bar{t}-\epsilon}^{\bar{t}+\epsilon} f(t)h(t)dt \geq 2\epsilon C \geq 0 \tag{2.5}$$

A relação acima contradiz a hipótese de a integral ser nula no intervalo $[t_0, t_1]$.

Princípio de Hamilton:

Se tomarmos variações nas posições e velocidades, representada por $\delta \mathbf{q}$ e $\delta \dot{\mathbf{q}}$, respectivamente, um extremal (máximo, mínimo ou ponto de inflexão) do funcional ação satisfaz à equação de Euler-Lagrange: .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{2.6}$$

Para mostrarmos este fato calculemos a variação de A:

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}, t) - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \tag{2.7}$$

Podemos então expandir a lagrangeana $\mathcal{L}$ em série de Taylor nas variáveis $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}+\delta\dot{\mathbf{q}},t)=\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}}, \tag{2.8}$$

de onde tiramos

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}}dt \tag{2.9}$$

Efetuamos então uma integral por partes no termo que multiplica

$\delta\dot{\mathbf{q}}$. Como nos restringimos à variações que se anulam nos extremos $t=t_1$ e $t=t_2$, os termos de bordo da integral por partes se anulam. Assim, segue que

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\right)\delta\mathbf{q}dt=0 \tag{2.10}$$

Pelo teorema fundamental do cálculo das variações, como $\delta\mathbf{q}$ é uma função arbitrária, vale a equação de Euler-Lagrange. Tomemos agora $\mathcal{L}=T-U$, onde T é a energia cinética e U a energia potencial. Pela definição de momento,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)=-\frac{dp}{dt} \tag{2.11}$$

e pela definição de energia potencial, segue que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=\mathbf{F}, \tag{2.12}$$

de onde recuperamos a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}$.

Equações de Hamilton

Definimos a função hamiltoniana por:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{p}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{2.13}$$

A partir da relação, calculemos as derivadas parciais da hamiltoniana

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\dot{p}_i \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{2.17}$$

de onde obtemos as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.18}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.19}$$

Proposição Suponha que a hamiltoniana H não dependa explicitamente do tempo, ou seja, $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Então, H é constante ao longo das orbitas.

Demonstração

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = \dot{q}_i\dot{p} - \dot{q}_i\dot{p} = 0 \tag{2.20}$$

□

2.3 Sistemas com vínculos

Suponha que estamos interessados em um sistema mecânico descrito por suas coordenadas generalizadas $(q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$. Contudo, suponha que as 2n coordenadas não sejam independentes, mas que exista uma relação entre elas.

Definição: Uma relação entre as coordenadas generalizadas de um sistema mecânico do tipo $\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, onde Φ é uma função diferenciável, é dito um vínculo do sistema.

Definição: Um vínculo é chamado holonômico se ele não realiza trabalho.

O caso mais simples e ao qual nos restringiremos é o caso holonômico cujo vínculo é uma relação de dependência apenas entre as coordenadas de posição $(q_1, ..., q_n)$. Queremos então achar o ponto extremal do funcional ação, A, sujeito ao vínculo $\Phi(q_1, ..., q_n) = 0$. Para tanto, utilizamos o teorema dos multiplicadores de Lagrange.

Teorema: Seja $F, \Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ duas funções suaves definidas num espaço de Banach, sendo 0 um valor regular de Φ, $\mathcal{B}$ e $C = \Phi^{-1}(0)$ a pré imagem de $x = 0$. Então x_0 é extremo de F restrita a C se e somente se $\exists\lambda_0$ tal que (x_0, λ_0) é ponto crítico de $\overline{F}(x, \lambda) = F(x) - \lambda\Phi$.

Seguindo os mesmos passos da derivação da equação de Euler Lagrange, obtemos a equação de Euler-Lagrange sujeita a um vínculo holonômico $\Phi(q_1, ..., q_n) = 0$, dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \tag{2.21}$$

A generalização para M vínculos, $\Phi_1(q_1, ..., q_n) = 0, ..., \Phi_M(q_1, ..., q_n) =$

0, é imediata:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} \tag{2.22}$$

2.4 O Pêndulo Elástico

Como exemplo das diferentes formulações da mecânica clássica estudaremos o modelo do pêndulo elástico. Apesar da relativa simplicidade, quando comparado com as equações da atmosfera, este é um modelo que apresenta forte analogia com o fenômeno de interações triádicas entre ondas de Rossby atmosféricas, conforme demonstrado por [*Holm*(2008)] e [*Lynch*(2009)]. O sistema em questão é composto por um pêndulo no qual a corda ou a haste que prende uma partícula de massa m ao ponto de fixação é elástica, ou ainda que, ao invés de uma corda, a partícula seja sustentada por uma mola. A abordagem Newtoniana, baseada na segunda lei de Newton, consiste em analisar as forças agindo sobre o sistema com o intuito de escrever a equação diferencial $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}$. Neste sistema há duas forças agindo: a força da gravidade, que puxa a partícula para baixo na direção vertical, e a força de restauração da mola, que tenta a puxar/empurrar a partícula de forma a restaurar o tamanho natural da mola (o tamanho da mola sem que nenhuma força esteja sendo aplicada sobre a mesma). Assumiremos que esta força de restauração seja linear com a amplitude da deformação da mola. Neste contexto, escrevemos:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} = -mg\widehat{z} + K(l - \mathbf{q}), \tag{2.23}$$

sendo K a constante elástica da mola e l o comprimento da mesma. Na abordagem lagrangeana, temos que escrever a função lagrangeana em termos das energias cinética e potencial $\mathcal{L} = T - V$. Aqui, temos que $T = m|\dot{\mathbf{q}}|^2$. A energia potencial, por sua vez, tem duas contribuições: a energia potencial gravitacional, $V_g = -mg\widehat{z}.\dot{\mathbf{q}}$, e a energia potencial elástica da mola, dada por $V_m = \frac{K}{2}(r - l_0)^2$. Portanto,

$$\mathcal{L} = T - V = m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - mg\widehat{z}.\dot{\mathbf{q}} - \frac{K}{2}(l - |\mathbf{q}|)^2 \tag{2.24}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - l)^2}$ é o comprimento da mola num dado instante e l_0 o comprimento da mesma no estado de equilíbrio. Escrevamos então a equação de Euler-Lagrange para o sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \mathbf{F} = -mg\widehat{z} + K(r - l_0) \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{q}} \tag{2.26}$$

Igualando os dois termos da equação recuperamos a lei de Newton:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_E^2(r - l_0)\frac{x}{r} \tag{2.27}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_E^2(r - l_0)\frac{y}{r} \tag{2.28}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_E^2(r - l_0)\frac{z}{r} - g \tag{2.29}$$

Fazendo uma mudança de variáveis da posição vertical para a perturbação da posição vertical com relação à posição de repouso $Z = z - l$, além da expansão da raiz quadrada em série de Taylor e computando até a ordem cúbica, obtemos

$$r \cong l\Big(1 - \frac{Z}{l} + \frac{x^2}{2l^2} + \frac{x^2 Z}{2l^3}\Big) \tag{2.30}$$

Substituindo a aproximação em (2.24), obtemos uma lagrangeana aproximada:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}(\omega_R^2(\ x^2 + y^2) + \omega_E^2 Z^2) - \frac{m\omega_E^2}{2l}(\ x^2 + y^2)Z \tag{2.31}$$

dnde $\omega_R = \sqrt{g/l}$ é a frequência do pêndulo simples e $\omega_R = \sqrt{K/m}$ a frequência da mola.

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, chegamos às equações do pêndulo elástico para pequenas oscilações:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_R x + \frac{\omega_E^2}{l} xZ \tag{2.32}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_R y + \frac{\omega_E^2}{l} yZ \tag{2.33}$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\omega_E Z + \frac{\omega_E^2}{2l}(\ x^2 + y^2) \tag{2.34}$$

Chamaremos estas equações de *equações fracamente não lineares*, pelo motivo de que expandimos os termos não lineares em série de Taylor e truncamos a expansão em uma dada ordem. Este procedimento será o mesmo a ser seguido no estudo da interação não linear entre ondas no Capítulo 6. Linearizando as equações acima ao redor do equilíbrio $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, os termos não lineares são descartados:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_R x \tag{2.35}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_R y \tag{2.36}$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\omega_E Z \tag{2.37}$$

As soluções das equações linearizadas do pêndulo elástico são dadas da seguinte forma:

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_R t} \tag{2.38}$$

$$y(t) = y_0 e^{i\omega_R t} \tag{2.39}$$

$$Z(t) = Z_0 e^{i\omega_E t} \tag{2.40}$$

com a condição inicial sendo dada por $(x(0), y(0), Z(0)) = (x_0, y_0, Z_0)$. Notamos que há dois tipos de oscilação, uma devido à força restauradora da gravidade que faz o pêndulo oscilar horizontalmente com frequência ω_R e uma oscilação vertical devido à força elástica da mola com frequência ω_R. No regime linear, não há troca de energia entre estes dois modos de oscilação. Em contrapartida, mantendo os termos não lineares (por exemplo, nas equações fracamente não lineares do pêndulo elástico) haverá troca de energia entre os dois modos, especialmente em casos em que há ressonância (por exemplo quando $\omega_E = 2\omega_R$). Este fenômeno de transferência de energia entre os modos de oscilação tem análogo na interação não linear entre ondas, que veremos no Capítulo 6.

O método de múltiplas escalas: No modelo do pêndulo elástico nota-se que no regime de pequenas amplitudes a amplitude dos movimentos elástico e rotacional variam muito mais lentamente do que a fase da oscilação, que varia com as frequências lineares de oscilação. Assim, é de interesse derivar uma equação para a modulação dos movimentos na escala de tempo lenta. Para tanto, utilizaremos aqui o método de múltiplas escalas, que também será utilizado no capítulo 6 no estudo da interação não linear de ondas.

Seja $f(t, T, \epsilon)$ uma função que varia em duas escalas distintas: na escala rápida t e na escala lenta $T = \epsilon t$, onde assumimos que f é analítica no parâmetro $\epsilon << 1$. A derivada temporal de f neste caso é dada por:

$$\frac{df(t,T)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial}{\partial T} \tag{2.41}$$

Assim, como supomos que $f(t, T, \epsilon)$ é analítica no parâmetro ϵ:, podemos expandi-la em série de potências em termos desse parâmetro:

$$f(t, T, \epsilon) = f_0(t, T) + \epsilon f_1(t, T) + \epsilon^2 f_2(t, T) + ... \tag{2.42}$$

O método das múltiplas escalas para uma equação diferencial consiste em inserir a expansão da função f acima na equação diferencial e coletar os termos de mesma ordem em ϵ, obtendo assim uma equação diferencial para os coeficientes de cada potência de ϵ. Apliquemos este procedimento para as equações do pêndulo elástico com $f = x, y, Z$. Primeiramente, multiplicaremos os termos não lineares pelo parâmetro ϵ, que pode ser justificado por um processo de adimensionalização nas equações, aliado ao fato de supormos oscilações de pequena amplitude. Nos restringiremos ao caso ressonante $\omega_E = 2\omega_R$, onde as funções serão assumidas na forma $x(t, T) = X(T)exp(\omega_R t)$, $y(t, T) = Y(T)exp(\omega_R t)$, $z(t, T) = V(T)exp(2\omega_R t)$. Neste caso, a expansão é feita nas amplitudes $X(T) = X_0(T) + \epsilon X_1(T) + \epsilon^2 X_2(T) + ...$, e $x_j(t, T) = X_j(T)exp(\omega_R t)$, para $j = 0, 1, 2....$ Assim, substituímos estas relações nas equações (2.32)-(2.34), com os termos não lineares multiplicados por ϵ, e agrupamos os termos associados às mesmas potências de ϵ. Agrupando os termos de ordem ϵ^0, obtemos:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} = -\omega_R X_0 \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} = -\omega_R Y_0 \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} = -4\omega_R V_0 \tag{2.45}$$

Agrupando agora os termos de ordem ϵ^1, segue que:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + \omega_R X_1 = -2\frac{\partial^2 X_0}{\partial t \partial T} + \lambda X_0 V_0 \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \omega_R Y_1 = -2\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial T} + \lambda X_0 V_0 \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + 4\omega_R V_1 = -2\frac{\partial^2 V_0}{\partial t \partial T} + \frac{\lambda}{2}(X_0^2 + Y_0^2) \tag{2.48}$$

onde nas equações acima introduzimos o parâmetro $\lambda = \omega_r/l$. Temos para a ordem ϵ uma equação diferencial ordinária linear não homogênea, onde o termo não homogêneo é função das variáveis de ordem 0. Como as variáveis de ordem zero são conhecidas, pelo menos em relação à dependência na escala rápida de tempo, o termo não homogêneo constitui uma forçante harmônica para as variáveis do problema de $O(\epsilon)$. No caso ressonante, esta forçante fará com que a solução do sistema de equações (2.46)-(2.48) acima apresente um crescimento linear (ilimitado) no tempo, sendo estas soluções chamadas de soluções seculares. Por outro lado, para que a expansão assintótica seja uniformemente válida, deve-se garantir que a solução de ordem 0 (ou seja, a solução de (2.43) - (2.45)) represente, de fato, os efeitos dominantes. Para tanto, as soluções de ordens maiores devem permanecer limitadas. Consequentemente, para garantir a validade da expansão assintótica, é necessário eliminar as soluções seculares. A eliminação das soluções seculares, por sua vez, requer que os termos não homogêneos (forçantes) no lado direito das equações acima sejam nulos, e esta condição de solubilidade nos leva ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{dX_0}{dT} = \frac{\lambda}{2\omega_R} X_0 V_0 \tag{2.49}$$

$$2\frac{dY_0}{dT} = \frac{\lambda}{2\omega_R} X_0 V_0 \tag{2.50}$$

$$\frac{dV_0}{dT} = \frac{\lambda}{4\omega_R}(X_0^2 + Y_0^2) \tag{2.51}$$

As equações acima descrevem a modulação da amplitude das oscilações na escala de tempo lenta T. Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$A = -\frac{X_0 + iY_0}{2} \tag{2.52}$$

$$B = -\frac{X_0 - iY_0}{2} \tag{2.53}$$

$$C = -V_0 \tag{2.54}$$

chega-se finalmente às equações:

$$\frac{dA}{dT} = \frac{\lambda}{2\omega_R}B^*C \tag{2.55}$$

$$2\frac{dB}{dT} = \frac{\lambda}{2\omega_R}A^*B \tag{2.56}$$

$$\frac{dC}{dT} = \frac{\lambda}{2\omega_R}AB \tag{2.57}$$

Estas equações são exatamente as mesmas equações que descrevem a evolução das amplitudes de ondas em interação fracamente não linear a partir de um termo não linear quadrático, as chamadas equações dos tripletos, que estudaremos no Capítulo 6.

2.5 Sistemas em rotação

Suponhamos que descrevemos um sistema mecânico originalmente em um sistema de coordenadas S. Tomemos outro sistema de coordenadas S' que se move com relação à S, sendo $\mathbf{r}$ o vetor posição do sistema S' descrito nas coordenadas S. Se o movimento de um sistema de coordenadas for acelerado com relação ao outro, surgirá uma força, chamada força inercial, devido à aceleração de um sistema de coordenadas com relação ao outro, $\mathbf{F} = -m\ddot{\mathbf{r}}$. Este é o caso de sistemas de coordenadas em rotação, que são convenientes, por exemplo, quando estudamos movimentos no planeta Terra.

Primeiramente notemos que toda matriz anti-simétrica M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ pode ser representada como um vetor no seguinte sentido: $\exists!\Omega \in \mathbb{R}^3$ tal que $Mv = \Omega \times v$ $Mu = \forall v \in \mathbb{R}^3$. De fato, o conjunto das matrizes anti-simétricas em $\mathbb{R}^3$ constitui um espaço vetorial de dimensão 3. A operação produto escalar $\Omega\times$ é linear e anti-simétrica, e tem dimensão 3. Podemos, de fato, apresentar explicitamente essa representação: consideremos uma matriz anti-simétrica M

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Então, $\forall v \in \mathbb{R}^3$ vale $Mv = \omega \times v$, onde

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Teorema: Seja M_t uma rotação de um sistema de coordenadas S' com relação a um sistema de coordenadas fixo S. Considere uma partícula com posição $\mathbf{X}(t)$ no sistema em rotação (e, portanto, com posição $M_t\mathbf{X}(t)$ no sistema fixo), sendo Ω a velocidade angular do sistema de coordenadas em rotação. Então, se no sistema S age sobre a partícula uma força $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m\ddot{\mathbf{x}}$, no sistema de coordenadas em rotação a força atuando sobre a partícula será dada por:

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_c e - \mathbf{F}_{co} - \mathbf{F}_P \tag{2.60}$$

onde $\mathbf{F}$ é a força original $\mathbf{f}$, escrita no sistema de coordenadas em rotação $M_t\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(M_t\mathbf{x}, \dot{\mathbf{M_t}}\mathbf{x})$. Os demais termos são:

- Força de Poincaré. $F_{ce} = m\dot{\Omega} \times \mathbf{X}$
- Força de Coriolis. $F_{co} = m\Omega \times \dot{\mathbf{X}}$
- Força centrífuga. $F_P = m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{X})$

Prova: $\dot{M}\mathbf{X} = M(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X}) = (M\mathbf{\Omega}) \times (M\mathbf{X})$. O vetor posição $\mathbf{x} = M\mathbf{X}$, e a velocidade é dada por $\dot{\mathbf{x}} = \dot{M}\mathbf{X} + M\dot{\mathbf{X}} = M(\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X}))$. Diferenciando esta expressão, obtemos:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{M}(\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X})) + M(\ddot{\mathbf{X}} + (\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{X}) + (\dot{\mathbf{\Omega}} \times \dot{\mathbf{X}})) \tag{2.61}$$

$$= M((\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X})) + \ddot{\mathbf{X}} + (\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{X}) + (\dot{\mathbf{\Omega}} \times \dot{\mathbf{X}})) \tag{2.62}$$

$$= M(\ddot{\mathbf{X}} + (\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{X}) + 2(\dot{\mathbf{\Omega}} \times \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{X})) \tag{2.63}$$

□

2.6 Sugestões de leitura

Há uma vasta literatura em mecânica básica, um livro clássico com tratamento elementar, sem fazer uso da linguagem da geometria diferencial sugerimos [*Lanczos*(1949)]. Para uma introdução mais matemática, já fazendo uso da linguagem de formas diferenciais e e geometria simplética sugerimos [*Arnold*(1989)]. Para uma introdução também fazendo uso da liguagem da geometria diferencial e com uma análise detalhada do exemplo do pêndulo elástico há o livro [*Holm*(2008)]. Como referência bastante completa da abordagem geométrica à mecânica há o livro [*Abraham*(1980)]. Para uma introdução aos métodos de teoria de perturbações sugerimos [*Ablowitz*(2011)].

3

Equações do movimento

Um fluído é um corpo cujo formato pode ser alterado quando uma força lhe é aplicada, mais especificamente, fluídos não resistem a forças de cisalhamento. Consideremos um fluído como um contínuo de massa que no tempo $t = 0$ ocupa uma região simplesmente conexa de $\mathbb{R}^3$, Ω_0, onde cada ponto com posição inicial $\mathbf{a} = \mathbf{x}(0) = (x(0), y(0), z(0)) \in \Omega_0$ evolui temporalmente de forma a ocupar no tempo t a posição $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. O domínio Ω_0 é mapeado no tempo t no domínio Ω_t. Chamaremos de $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação que leva o domínio Ω_0, em $t = 0$, a Ω_t no tempo t, ou seja,

$$\phi_t(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{3.1}$$

$$\phi_t(\Omega_0) = \Omega_t \tag{3.2}$$

Neste contexto, faremos algumas suposições sobre a transformação ϕ_t:

- ϕ_t é bijetora $\forall t$.

- ϕ_t é de classe C^∞ em todo ponto $x(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \Omega_t$, $\forall t$.

- a família de transformações ϕ_t é suave (de classe C^∞) em t.

Obs: Tais suposições vem de imposições físicas de que partículas materiais do fluído não podem se fundir, e de que as trajetórias das partículas em um fluído são suaves. Esta ultima suposição pode ser eventualmente violada, e neste caso as equações de movimento do fluído tem que ser consideradas em sua forma integral. Este caso é particularmente relevante nos fenômenos chamados de choque, que não serão considerados neste texto.

Definição: A velocidade $\mathbf{u}(t) = (u(0), v(0), w(0)) \in \mathbb{R}^3$ da partícula inicialmente no ponto $\mathbf{x}(0) = (x(0), y(0), z(0))$ é dada pela equação diferencial

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \phi_t(\mathbf{a})}{\partial t} \tag{3.3}$$

Note que podemos descrever de duas formas o campo de velocidades. A primeira descreve, a cada tempo t, a velocidade da partícula inicialmente na posição $\mathbf{a}$. Já a segunda forma, dada uma posição $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, consiste em descrever a cada tempo t a velocidade da partícula que passa neste ponto. A primeira abordagem é conhecida como descrição *lagrangeana*, enquanto a segunda abordagem é chamada de descrição *euleriana* de um fluído.

Descrição Lagrangeana: Dada a posição inicial de uma partícula $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, encontrar a trajetória desta partícula.

Descrição Euleriana: Consiste em proporcionar, a cada momento, o campo de velocidades do fluído.

Assim, a trajetória de uma partícula pode ser determinada resolvendo o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \end{cases} \tag{3.4}$$

Frequentemente, quando descrevemos o movimento do fluído em uma dessas duas formas, utilizaremos as expressões *"em coordenadas lagrangeanas"* e *"em coordenadas euleriana"* para especificar a descrição utilizada. Consideramos agora uma função arbitrária $g(\mathbf{a}, t)$, definida em coordenadas lagrangeanas, expressa em coordenadas eulerianas pela expressão

$$g(\mathbf{a}, t) = h(\phi_t(\mathbf{a}, t)) \tag{3.5}$$

Proposição: A derivada temporal de $g(\mathbf{a}, t)$ é dada por

$$\frac{\partial g(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla h \tag{3.6}$$

Demonstração: Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial g(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(\phi_t(\mathbf{a}, t))}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla h \tag{3.7}$$

Definição: A derivada material de uma função diferenciável $h(\mathbf{x}, t)$ é definida por

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla h \tag{3.8}$$

Agora demonstraremos um lema bastante utilizado neste capítulo, que se refere à derivada do determinante de uma matriz cujos elementos são funções do tempo.

Lema: Seja $M(t)$ uma matriz quadrada e inversível cujos elementos são funções diferenciáveis do tempo, então

$$\frac{d}{dt}det(M(t)) = det(M(t)).Tr(\frac{dM(t)}{dt}.M^{-1}(t)) \tag{3.9}$$

Demonstração: Consideremos uma matriz $X(t) = I$ a matriz identidade para dado t. O determinante é uma função multi-linear dos vetores linha da matriz $X(t)$, denotados por $x_1(t), x(2), ...x_n(t)$. Chamemos de $D(m_1(t), m_2(t), ..., m_n(t))$ esta função. Pela regra do produto da derivação, vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)) = \\ D(\dot{x}_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) + D(x_1(t), \dot{x}_2(t), ..., x_n(t)) + ... \\ +D(x_1(t), x_2(t), ..., \dot{x}_n(t)) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para este valor t em particular, vale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D(x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)) = \\ = D(\dot{x}_1(t), e_2, ..., e_n) + D(e_1, \dot{x}_2(t), ..., e_n) + ... \\ +D(e_1, e_2, ..., \dot{x}_n(t)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde os vetores e_j são os versores na direção j. Vale então para este

t:

$$\frac{d}{dt}det(X(t)) = Tr(\frac{dX(t)}{dt}) \tag{3.12}$$

Tomamos agora $X(t) = M(t)^{-1}M(t+h)$. Então, $detX(t) = detM(t)^{-1}detM(t+h)$ e, consequentemente:

$$\frac{d}{dh}det(M(t+h))\Big|_{h=0} = \frac{d}{dt}det(M(t)) = det(M(t)).Tr(\frac{dM(t)}{dt}.M^{-1}(t)) \tag{3.13}$$

$\square$

A seguir enunciaremos um resultado fundamental da mecânica do contínuo: o *Teorema do Transporte de Reynolds*.

Teorema: Sejam $f(\mathbf{x},t)$ e $\mathbf{u(x,t)}$ funções de classe C^1, para $x \in \Omega_t$ no tempo t. Então, vale:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \big(\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\mathbf{u})\big)d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t}d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} f\mathbf{u}.\mathbf{n}dS \tag{3.14}$$

onde $\partial\Omega_t$ é o bordo da região Ω_t com vetor normal unitário $\mathbf{n}$.

Demonstração: Note que o domínio sobre o qual a integral está sendo efetuada não é constante com o tempo. Portando, não podemos simplesmente comutar a derivação com a integração sobre o domínio Ω_t. O que faremos é uma mudança de variáveis dependente do tempo de forma que o domínio fique fixo e possamos passar a derivada para dentro do sinal de integração e, em seguida, aplicaremos a transformação inversa para voltarmos ao domínio inicial de integração. Lembremos que a função ϕ_t é uma bijeção para cada t e $\phi_t(\Omega_0) = \Omega_t$. Logo, $(\phi_t)^{-1}(\Omega_0) = \Omega_0$, e então ϕ_t pode ser utilizada para tanto.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} f(\phi_t(\mathbf{a},t),t).J(t)d\mathbf{a} \tag{3.15}$$

onde,

$$J(t) = det[\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial a_j}] \tag{3.16}$$

Agora, com o domínio fixo, podemos finalmente passar a derivada para dentro do sinal de integração:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\Big(f(\phi_t(\mathbf{a},t),t).J(t)\Big)d\mathbf{a} = \int_{\Omega_0} [\frac{Df}{Dt}.J(t) + f\frac{d}{dt}J(t)]d\mathbf{a} \quad (3.17)$$

Aplicando agora o lema (3.9)

$$\frac{dJ(t)}{dt} = Jdiv\mathbf{u} \quad (3.18)$$

e voltando para o domínio original Ω_t, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} [\frac{Df}{Dt}.J(t) + f\frac{d}{dt}J(t)]d\mathbf{a} = \int_{\Omega_t} \Big(\frac{Df}{Dt} + fdiv\mathbf{u}\Big)d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega_t} (\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\mathbf{u})\big)d\mathbf{x}\end{aligned} \quad (3.19)$$

$\square$

O teorema do transporte de Reynolds será utilizado como base para derivar leis de conservação e balanço em um meio contínuo em movimento.

Conservação de Massa: A massa de um fluído é uma propriedade de um conjunto de partículas do mesmo. Faremos a hipótese que existe uma medida de massa μ_t que é carregada pela aplicação ϕ_t. Assumiremos ainda que esta medida é regular (com relação à medida de Lebesgue), de forma que exista uma densidade associada à medida (Teorema de Radon-Nikodym).

$$d\mu_t = \rho(x,t)d\mathbf{x} \tag{3.20}$$

Hipótese: Para qualquer tempo t, vale:

$$d\mu_t = \rho((\phi_t)^{-1}(x,0))d\mathbf{x} \tag{3.21}$$

Definição: A massa total do sistema é dada pela integral

$$m = \int_{\Omega_t} d\mu_t = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)d\mathbf{x} \tag{3.22}$$

Analogamente, podemos definir a massa de algum subconjunto de $V \subset \Omega_t$ como a integral acima sobre V (consideraremos apenas conjuntos mensuráveis).

Teorema: Considerando um sistema sob as hipóteses acima, vale para todo tempo t:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{3.23}$$

Demonstração: Pelas hipóteses acima, m é carregada pela aplicação ϕ. Portanto

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} d\mu_t = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \tag{3.24}$$

Pelo Teorema 1, concluímos que vale:

$$\int_{\Omega_t} \big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u})\big) d\mathbf{x} = 0 \tag{3.25}$$

Como este raciocínio vale para qualquer subconjunto aberto de Ω_t, então deve também valer localmente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{3.26}$$

$\square$

A equação acima é chamada equação de Liouville. Esta equação define como medidas são transportadas por grupos de transformações a um parâmetro.

Definição: Dado um campo de velocidades $\mathbf{u}$, dizemos que este campo é incompressível se vale

$$div(\mathbf{u}) = 0 \tag{3.27}$$

Neste caso, a equação de Liouville pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho) = 0 \tag{3.28}$$

Observação: Se considerarmos ρ como uma densidade de medida qualquer definida num espaço de fase de uma equação diferencial, o Teorema 2 diz como esta medida é transportada pelo fluxo da equação diferencial e, ainda, que se o campo vetorial for conservativo, a medida é conservada pelo sistema.

Definição: O volume específico α é definido por:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \tag{3.29}$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} J(t) \tag{3.30}$$

Teorema 3: Para qualquer função diferenciável de ρ , H(ρ), vale:

$$\frac{\partial H(\rho)}{\partial t} + div(H(\rho)\mathbf{u}) = 0 \tag{3.31}$$

Demonstração: Pela regra da cadeia, vale

$$\frac{\partial H(\rho)}{\partial t} + div(H(\rho)\mathbf{u}) = H'(\rho)\Big(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\Big) = 0 \tag{3.32}$$

$\square$

Corolário: A seguinte equação é válida para o volume específico α:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \alpha div(\mathbf{u}) \tag{3.33}$$

Balanço de Momento: A conservação de momento, ou mais precisamente o balanço de momento em um fluído, decorre da segunda lei de Newton aplicada ao fluído. A segunda lei de Newton afirma que

A taxa de variação de momento numa porção do fluído é igual à soma das forças a ele aplicadas.

Em outras palavras, é válida a chamada **equação balanço de momento**:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{3.34}$$

Suponhamos que $F(\mathbf{x}, t)$ seja um campo de forças suave de forma que exista uma densidade do campo de forças

$$\int_{\Omega_t} f d\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{3.35}$$

Neste caso, a **equação balanço de momento** na forma local pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} div(\mathbf{u}) = \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + \rho \mathbf{u} div(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \tag{3.36}$$

Usando a equação de conservação de massa, podemos reescrever a equação acima como:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} \tag{3.37}$$

As forças que atuam em um fluído podem ser de dois tipos. As forças de **stress** são internas e decorrem da interação de porções distintas do fluído, como por exemplo dois volumes adjacentes no fluído que interagem. Neste caso, a força de interação entre eles atuam na superfície que separa estes volumes adjacentes. As forças externas, por outro lado, são devidas a um agente externo ao fluído, por exemplo a força gravitacional, ou a força magnética no caso de fluídos magnetizados. Estas duas forças atuam sobre volumes do fluído.

Definição: Um fluído ideal é aquele no qual para qualquer movimento existe uma função $p(\mathbf{x}, t)$, chamada pressão, tal que, sendo σ uma superfície material do fluído com normal $\mathbf{n}$, então a força por unidade de área exercida nesta superfície no ponto $\mathbf{x}$ e no tempo t é dada por $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$.

A força de stress $\mathbf{F}_{in}$, exercida numa região Ω_t do fluído, é dada por:

$$\mathbf{F}_{in} = -\int_{\partial\Omega_t} p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}d\mathbf{S} = -\int_{\Omega_t} \nabla p(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} \tag{3.38}$$

onde a última igualdade decorre do teorema da divergência de Gauss. Por outro lado, forças externas $\mathbf{F}_{ex}$ geradas por um campo externo $\mathbf{b}$ são dadas, por unidade de massa, da seguinte forma

$$\mathbf{F}_{ex} = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}d\mathbf{x} \tag{3.39}$$

Tomando a força total atuando sobre uma região do fluído como $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{ex} + \mathbf{F}_{ex}$, temos:

$$\int_{\Omega_t} \rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} \nabla p(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} \tag{3.40}$$

Como o raciocínio acima vale para qualquer subconjunto aberto de

Ω_t, vale a seguinte equação também na forma local:

Equação de Euler

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{b} - \nabla p(\mathbf{x},t) \tag{3.41}$$

3.1 Derivação via princípio de Hamilton

Fluído barotrópico: Consideremos um funcional ação dado por:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}(x,y,z,t) d\mathbf{a} dt \tag{3.42}$$

descrito em coordenadas lagrangeanas, onde a densidade lagrangeana

$\mathcal{L}(x,y,z,t)$ é dada da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(x,y,z,t) = T(x,y,z,t) + V(x,y,z,t) \tag{3.43}$$

Em (3.43) acima, a densidade de energia cinética $T(x,y,z,t)$ é dada

por

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \tag{3.44}$$

enquanto a densidade de energia potencial $T(x,y,z,t)$ é dada por

$$V(x,y,z,t) = E_{in}(\alpha) + \Phi(\mathbf{x}) \tag{3.45}$$

Em (3.45), α é o volume específico. No caso de um fluido barotrópico aqui considerado, a densidade de energia interna $E_{in}(\alpha)$

depende apenas da compressão do fluído. O princípio de Hamilton da ação extremal afirma que a trajetória percorrida pelo sistema A é estacionária para variações arbitrárias em $\mathbf{x}(a,b,c,\tau)$. Calculemos então δA:

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}(x,y,z,t) d\mathbf{a} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V [\frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial \tau} . \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} - \frac{dE}{d\alpha}\delta J - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta \mathbf{x}] d\mathbf{a} dt \tag{3.46}$$

Calculemos então δJ. Denotemos por J as variações infinitesimais de volume do tempo inicial t = 0 até um tempo t qualquer:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Assim, considerando uma função diferenciável arbitrária denotada por G, vale:

$$\int_V G\delta J . d\mathbf{a} = \int_V G\Big(\frac{\partial(\delta x,y,z)}{\partial(a,b,c)} + \frac{\partial(x,\delta y,z)}{\partial(a,b,c)} + \frac{\partial(x,y,\delta z)}{\partial(a,b,c)}\Big) d\mathbf{a} \tag{3.48}$$

Mudando para coordenadas Eulerianas, obtemos

$$\int_V G\Big(\frac{\partial(\delta x,y,z)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,\delta y,z)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,y,\delta z)}{\partial(x,y,z)}\Big) d\mathbf{x} = \int_V G\nabla(\delta \mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.49}$$

Integrando por partes, segue que:

$$\int_V G\nabla(\delta\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_V -\nabla G\delta\mathbf{x}d\mathbf{x} + \int_{\partial V} G\delta\mathbf{x}.\mathbf{n}dS \tag{3.50}$$

.

Definimos então a pressão por:

$$p = -\frac{dE}{d\alpha} \tag{3.51}$$

.

Como no ponto estacionário a integral se anula para $\delta\mathbf{x}$ arbitrário vale:

$$\frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial\tau^2} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi \tag{3.52}$$

3.2 Circulação e vorticidade

Seja $C(0)$ uma curva no tempo inicial $t = 0$. Suporemos que esta curva seja suave e fechada e que esteja imersa no fluído. Suporemos ainda que a curva seja material, isto é, que seja carregada pelo fluxo ϕ_t do campo de velocidades do fluído $\mathbf{v}$. Dessa forma, denotamos a imagem da curva $C(0)$ pelo fluxo como $C(t) = \phi_t(C(0))$.

Definição: A circulação de um campo de velocidades $\mathbf{v}$ ao longo da curva $C(t)$ é definida por:

$$\oint_{C(t)} \mathbf{v}\cdot ds \tag{3.53}$$

Teorema: A derivada temporal da circulação é dada por:

$$\frac{d}{dt}\oint_{C(t)} \mathbf{v}\cdot ds = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot ds \tag{3.54}$$

Demonstração: Consideremos uma parametrização da curva $C(0)$ dada por $\mathbf{x}(s)$, com $0 \leq s \leq 1$. Tomaremos naturalmente a parametrização da curva $C(t)$ no tempo t pela imagem do fluxo $\phi_t(\mathbf{x}(s))$. Neste caso, a derivada da circulação é dada por:

$$\frac{d}{dt}\oint_{C(t)} \mathbf{v}\cdot dl = \frac{d}{dt}\int_0^1 \mathbf{v}(\phi_t(x(s)),t).\frac{\partial}{\partial s}\phi_t(x(s))ds =$$
$$\int_0^1 [\frac{D}{Dt}\mathbf{v}(\phi_t(x(s)),t).\frac{\partial}{\partial s}\phi_t(x(s)) + \mathbf{v}(\phi_t(x(s)),t).\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\phi_t(x(s))]ds =$$
$$\int_0^1 [\frac{D}{Dt}\mathbf{v}(\phi_t(x(s)),t).\frac{\partial}{\partial s}\phi_t(x(s)) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|\mathbf{v}|^2]ds =$$
$$\oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot ds \tag{3.55}$$

.

Consideremos agora um fluído ideal (conservativo) sem aplicação de forças externas, com a dinâmica regida pela equação:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{v} = -\nabla p \tag{3.56}$$

Teorema da circulação de Kelvin: Sob as condições acima, a circulação do escoamento de um fluído ao longo de uma curva material é constante ao longo do tempo.

Demonstração:

$$\frac{d}{dt}\oint_{C(t)} \mathbf{v}\cdot dl = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot dl = -\oint_{C(t)} \nabla p\cdot dl = 0 \tag{3.57}$$

já que o campo ∇p é conservativo e a curva $C(t)$ fechada.

Corolário: Seja $S(t)$ uma superfície material com bordo $C(t)$. Vale, então:

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \omega \cdot ds = 0 \tag{3.58}$$

.

onde $\omega = rot\mathbf{v}$ é a chamada vorticidade associada ao campo de velocidades. A demonstração deste corolário é imediata aplicando-se o teorema de Stokes ao teorema da circulação de Kelvin. A equação de evolução para a vorticidade pode ser deduzida tomando-se o rotacional da equação de balanço de momento:

$$rot\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D\omega}{Dt} - \omega \cdot \nabla\mathbf{v} = 0 \tag{3.59}$$

3.3 Forma local de um escoamento incompressível

Dado um campo de velocidades suave $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, podemos expandi-lo em série de Taylor ao redor de um ponto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$ do domínio:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}, t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x_0}, t_0) + \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x_0}, t_0)\mathbf{h} + O(|\mathbf{h}|^2) \tag{3.60}$$

.

onde

$$[\nabla\mathbf{v}]_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{3.61}$$

.

com $i, j = 1, 2, 3$. Suponhamos ainda que o campo de velocidades é incompressível, o que corresponde a:

$$div\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = Tr[\nabla \mathbf{v}_{ij}] = 0 \tag{3.62}$$

.

Por outro lado, qualquer matriz quadrada M pode ser decomposta em sua parte simétrica e antissimétrica, dadas respectivamente por:

$$S = \frac{M + M^T}{2} \tag{3.63}$$

.

e

$$A = \frac{M - M^T}{2} \tag{3.64}$$

.

Se tomarmos $M = \nabla \mathbf{v}$, temos:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big) \tag{3.65}$$

.

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big) \tag{3.66}$$

.

Com isto, temos que campo de velocidades pode ser escrito localmente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h},t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x_0},t_0) + S\mathbf{h} + A\mathbf{h} + O(|\mathbf{h}|^2) = \\ \mathbf{v}(\mathbf{x_0}+\mathbf{h},t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x_0},t_0) + S\mathbf{h} + \frac{1}{2}\omega\times\mathbf{h} + O(|\mathbf{h}|^2) \end{aligned} \tag{3.67}$$

Como a matriz S é simétrica, ela é diagonalizável por uma trans-

formação ortogonal O, podendo dessa forma ser expressa por $S = ODO^{-1}$, com a matriz diagonal D dada por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

.

Lembrando que o traço da matriz é invariante por transformações de similaridade. Assim, temos que $TrD = 0$ e, portanto, $\lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda_3$. Logo, se a ação do campo de velocidades é de distorcer um volume inicial, esticando-o em duas direções, necessariamente o volume terá que ser comprimido na outra direção de forma a compensar este efeito para preservar o volume. Já que A é uma matriz de rotação, o vetor ω é dado por:

$$\omega = \Big(\frac{\partial v_3}{x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big) = rot\mathbf{v} \tag{3.69}$$

.

Da expressão acima notamos que um campo de velocidades pode ser localmente escrito como a soma de uma translação $\mathbf{v}(\mathbf{x_0}, t_0)$, uma rotação devido à matriz A, e a uma deformação devido à matriz S.

3.4 Escoamentos 2D

Consideremos um escoamento bi-dimensional incompressível. No caso bi-dimensional, a equação da vorticidade é dada por:

$$\frac{D}{Dt}\omega = 0 \tag{3.70}$$

já que neste caso o termo de estiramento da vorticidade se anula, ou seja, $\omega \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$, pois a vorticidade é ortogonal ao campo de velocidades. Devido à incompressibilidade do campo de velocidades, $div\mathbf{v} = 0$, existe uma função escalar $\psi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada função de corrente, tal que:

$$\mathbf{v} = \nabla^{\perp}\psi \tag{3.71}$$

Assim, o campo de vorticidade neste caso é dado por:

$$\omega = rot\nabla^{\perp}\psi = -\nabla^2\psi \tag{3.72}$$

Assim, podemos então reescrever a equação da vorticidade (3.70)como:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = 0 \tag{3.73}$$

onde J representa o determinante da matriz jacobiana de ψ e ω:

$$J(\psi, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{\partial\omega}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

3.5 Equações de Maxwell e a força magnética

O núcleo externo terrestre é constituído por uma liga formada basicamente por ferro no estado líquido devido às altas temperaturas. Este fluído é bom condutor de correntes elétricas e por este motivo é afetado pelos campos magnéticos presentes no núcleo terrestre. Reciprocamente, o próprio movimento do fluído presente no núcleo externo terrestre altera o campo magnético da Terra. Derivaremos aqui a equação de evolução para um campo magnético num fluido condutor.

Equações de Maxwell

Partindo das equações de Maxwell que descrevem a evolução de campos magnéticos:

$$div\mathbf{B} = 0 \tag{3.75}$$

Não existência de dipolo magnético

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.76}$$

Lei de Gauss

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot\mathbf{E} \tag{3.77}$$

Lei da indução de Faraday

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} = rot\mathbf{B} \tag{3.78}$$

Lei de Ampère-Maxwell

onde as incógnitas são os seguintes campos: **E**, o campo elétrico, **B**, o campo magnético e **J**, a densidade de corrente. Já os seguintes parâmetros são dados: ρ, a densidade de carga elétrica, ϵ_0, a capacidade do vácuo, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ a velocidade da luz, e μ_0, a permeabilidade magnética do vácuo. Para os propósitos desta seção, desconsideraremos o termo $1/c^2(\partial \mathbf{E}/t)$, que por estar multiplicado por um coeficiente muito pequeno (a velocidade da luz no vácuo no denominador é $c = 299.792.458 m/s$), este termo se torna pequeno comparado aos demais. A lei de Ampère-Maxwell, sem o termo da derivada temporal do campo elétrico, é chamada *Lei de Ampère.* Temos ainda uma equação para a densidade de corrente em um meio condutor:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3.79}$$

Lei de Ohm

onde $\mathbf{v}$ é velocidade do meio condutor e σ a condutividade elétrica do meio. Um material é dito *condutor perfeito* se $\sigma \to \infty$.

Equação de indução magnética

Introduziremos a equação da lei de Ohm para $\mathbf{J}$ na lei de Ampère:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta rot \mathbf{B} \tag{3.80}$$

Lei de Ohm

onde

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \tag{3.81}$$

é a chamada difusividade magnética do meio. Para um condutor perfeito, a difusividade magnética do meio tende a 0. Agora, tomamos o rotacional da equação acima e, utilizando a lei de indução de Faraday, obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta rot \mathbf{B}) \tag{3.82}$$

Utilizando a seguinte identidade de cálculo vetorial, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) =$

$\nabla(div\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$, válida para qualquer campo de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^3$ (demonstre esta identidade!), onde em coordenadas cartesianas

$$\Delta\mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z} \tag{3.83}$$

é o operador *laplaciano*, obtemos a equação de indução magnética:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}). \tag{3.84}$$

Provemos agora um importante resultado em magnetohidrodinâmica: a propriedade chamada de *fluxo congelado* das linhas de um campo magnético em um fluído condutor perfeito.

Teorema:(Fluxo congelado) Suponha que um fluído é condutor perfeito($\sigma = 0$). Então, para qualquer superfície material $S(t)$ compacta no fluído e delimitada por uma curva fechada e suave $C(t)$, vale:

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \mathbf{B} ds = 0 \tag{3.85}$$

Demonstração: Primeiramente notemos que se $S(t)$ e $S'(t)$ são duas superfícies orientadas com mesmo bordo $C(t)$, o Teorema de Stokes garante que o fluxo do campo magnético através e $S(t)$ e através de $S'(t)$ são iguais:

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \mathbf{B} ds = \frac{d}{dt}\int_{C(t)} \mathbf{A} d\mathbf{r} \tag{3.86}$$

onde $\mathbf{A}$ é o potencial vetor do campo magnético, ou seja, $rot\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Portanto, o fluxo é uma propriedade da curva que delimita a superfície $S(t)$. Por suposição, o bordo da superfície material também é carregado pelo fluído e, portanto, é uma curva material. Consideremos uma parametrização de $C(0)$ com parâmetro $s(a,b,c) \in [0,1]$ que depende apenas da posição inicial $(a,b,c) \in C(0)$ e consideremos que $C(t)$ seja parametrizado pelo mesmo s. Portanto, o fluxo que passa pela curva no instante t, $F[C(t)]$ pode ser calculado como:

$$F[C(t)] = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \mathbf{A} ds \tag{3.87}$$

A variação do fluxo é dada, então, por:

$$\frac{d}{dt} F[C(t)] = \int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\frac{d}{dt}\mathbf{A} ds = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\frac{d\mathbf{A}}{dt} ds \tag{3.88}$$

Mas pela equação de indução magnética:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi - \mathbf{u} \times rot\mathbf{A} \tag{3.89}$$

onde $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável arbitrária. Agora, inserindo a derivada do potencial vetor na integral, temos:

$$\frac{d}{dt}F[C(t)] = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\big(-\nabla\phi - \mathbf{u}\times rot\mathbf{A}\big)ds \tag{3.90}$$

$$\frac{d}{dt}F[C(t)] = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\mathbf{A} + \big(-\frac{\partial \phi}{\partial s} + \mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s}\big)ds = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\big(\mathbf{u}.\mathbf{A} - \phi\big)ds \tag{3.91}$$

Integrando a expressão acima, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}F[C(t)] = \big(\mathbf{u}.\mathbf{A} - \phi\big)\big|_0^1 = 0 \tag{3.92}$$

já que a curva é fechada. Assim, concluímos a demonstração.

3.6 Sugestões de leitura

Uma referência básica para a derivação das equações da dinâmica dos fluídos é [*Marsden*(1993)]. Para a mecânica do contínuo em geral há ainda as referências [*Temam*(1993)], que inclui tratamento de mecânica dos sólidos, elasticidade e magnetohidrodinâmica e [*Backus*(1997)] que inclui um tratamento bastante cuidadoso de cálculo tensorial. Este livro está disponível gratuitamente na internet.

4

Modelos da Dinâmica de Fluídos Geofísicos

O movimento dos fluídos geofísicos (ou seja, dos invólucros fluidos do planeta Terra, bem como de outros planetas e estrelas, etc ...) é descrita pela equação de Navier-Stokes, porém com a inclusão das forças devido à aceleração da gravidade e à rotação do referencial (planeta). A rotação do referencial gera dois efeitos: a força centrífuga e a força de Coriolis. A primeira pode ser escrita como o gradiente de um potencial e, portanto, pode ser incorporada à força da gravidade. Neste caso, a força externa atuando no fluído é dada por:

$$F_{ex} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} - \mathbf{g} \tag{4.1}$$

onde o primeiro termo representa a força de Coriolis e o segundo a força efetiva da gravidade, incluindo a priori a correção devido ao efeito da força centrífuga. O vetor velocidade angular de rotação do referencial pode ser decomposto em suas componentes vertical e horizontal $\mathbf{\Omega} = (0, \Omega_h, \Omega_v)$. Da mesma forma, o campo de velocidades, como descrito anteriormente, é dado por $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Assim, as equações do movimento podem ser escritas em termos das componentes u, v e w. Somando essas equações à equação do balanço de massa, temos as equações governantes da dinâmica de fluidos geofísicos:

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega_v v + 2\Omega_h w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.2}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega_v u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.3}$$

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega_h u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{4.5}$$

Para os escoamentos de fluídos geofísicos, no caso de movimentos de grande-escala, ou seja, aqueles movimentos cuja escala de comprimento horizontal é comparável à própria dimensão do planeta, observa-se que movimentos horizontais são muito mais significativos que os verticais. Por isso, faremos aproximações bi-dimennsionais destas equações ao longo do texto. Algumas aproximações que faremos, baseadas na comparação das ordens de grandeza dos termos envolvidos nas equações para esses movimentos ditos de grande-escala, são:

- Descartar os termos correspondentes à componente horizontal da rotação Ω_h, na força de Coriolis.
- Desprezar as variações horizontais do gradiente vertical de pressão, ou seja, $\partial_x(\partial_z p) \approx 0$ e $\partial_y(\partial_z p) \approx 0$.

4.1 Aproximação do plano beta

Suponhamos que estamos em um dado ponto na superfície da Terra descrito por suas coordenadas latitude e longitude (θ, ϕ), e queremos escrever as equações de movimento válidas num sistema de coordenadas cartesianas local ao redor deste ponto. Uma estratégia comum no estudo das equações do oceano e da atmosfera é a de expandir em série de Taylor o termo da velocidade angular de rotação da Terra Ω. Definimos o parâmetro de Coriolis por $f = 2\Omega_v$, onde Ω_v é a projeção na coordenada vertical local de Ω:

$$\Omega_v = \Omega \text{sen}\theta \tag{4.6}$$

Expandindo *sen*θ em série de Taylor em torno de uma latitude de referência θ_0, temos:

$$f = 2\Omega \text{sen}\theta = 2\Omega \text{sen}(\theta_0 + \theta') \approx 2\Omega \text{sen}\theta_0 + 2\Omega \cos\theta_0 \theta' \tag{4.7}$$

Adicionalmente, sendo R o raio médio da Terra e denotando pela coordenada meridional y os pequenos deslocamentos latitudionais em torno da latitude de referência , ou seja, considerando $y = R\theta'$, podemos escrever o parâmetro de Coriolis como:

$$f = f_0 + \beta y \tag{4.8}$$

onde $f_0 = 2\Omega\text{sen}\theta_0$ e $\beta = \frac{2\Omega\cos\theta_0}{R}$.

Se utilizarmos apenas o termo constante da expansão em série de Taylor, f_0, as equações são ditas *"no plano f*

. Em contrapartida, caso utilizemos o termo constante e o termo linear da expansão, as equações são ditas escritas *"no plano beta*

. As equações no plano beta são capazes de reproduzir muitos aspectos da dinâmica na esfera, contudo mantendo a simplicidade de se trabalhar em coordenadas cartesianas. Note que, trabalhando na região equatorial, temos que $f_0 = 0$ e, consequentemente, sobra apenas o termo linear da expansão da força de Coriolis. Neste caso, as equações são ditas no *"no plano beta equatorial*

.

4.2 Aproximação hidrostática

Consideremos a equação do balanço de momento na direção vertical:

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega_h u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{4.9}$$

Analisando a ordem de grandeza de cada termo desta equação para movimentos de grande-escala (ou seja, considerando valores típicos das variáveis na atmosfera e nos oceanos e estimando com isso a ordem de grandeza dos termos da equação em situações típicas para esses movimentos), é possível verificar que os termos dominantes desta equação são: o termo do gradiente vertical de pressão e o termo da força da gravidade. Com isso, é comum simplificar esta equação por uma versão aproximada:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \tag{4.10}$$

Esta é a chamada *aproximação hidrostática* da equação do movimento vertical.

4.3 Aproximação geostrófica

Similarmente à aproximação hidrostática da equação vertical do balanço de momento, podemos buscar uma solução aproximada das equações do momento horizontal que seja estacionária, ou seja, não varie no tempo. Assim, reescrevendo as equações do balanço horizontal de momento, já descartando os termos correspondentes à componente horizontal da rotação Ω_h na força de Coriolis, temos:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.11}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.12}$$

Inclusive, é importante notar que, fazendo a aproximação hidrostática na equação do balanço de momento na vertical, torna-se necessário também desprezar o termo $2\Omega_h w$ em (4.2) de modo a manter a consistência física do modelo, no qual a força de Coriolis deve sempre permanecer ortogonal ao campo de velocidades. Nas equações (4.11) e (4.12) acima, é possível mostrar que os termos dominantes para os movimentos de grande escala dos oceanos e da atmosfera são aqueles relacionados às forças de Coriolis e do gradiente de pressão. Assim, mantendo apenas estes termos, tem-se:

$$-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.13}$$

$$fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.14}$$

ou na forma vetorial:

$$f\mathbf{u}^{\perp} = -\frac{\nabla_h p}{\rho} \tag{4.15}$$

onde $\nabla_h = (\partial_x, \partial_y)$ e $\mathbf{u}^{\perp} = (-v, u)$. Estas são as equações da *aproximação geostrófica* ou *balanço geostrófico*. Note que, juntando as equações do balanço hidrostático e do balanço geostrófico, temos um estado estacionário, ou seja, um estado que não varia com o tempo, constituindo portanto um ponto de equilíbrio das equações da dinâmica de fluídos geofísicos. Em outras palavras, o estado do sistema caracterizado pelos balanços geostrófico e hidrostático é dito constituir uma solução das equações governantes (sem forçantes e dissipação), tais que:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = 0 \tag{4.16}$$

No último capítulo forneceremos técnicas para analisar a estabilidade destes estados de equilíbrio das equações da atmosfera e oceanos.

4.4 Equações de Boussinesq

É observado que variações de densidade na atmosfera e nos oceanos são pequenas em relação ao seu valor médio de referência, o que sugere separarmos a densidade em um valor médio somado a um desvio em torno do valor médio:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \tag{4.17a}$$
$$\rho_0(z) = \rho_b + \overline{\rho}(z) \tag{4.17b}$$

onde $\rho_b = \text{const}$. Assumiremos daqui em diante que a flutuação ρ' é pequena se comparada ao estado básico $\rho_0(z)$. Com isso, podemos escrever a equação da continuidade como:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' + \rho_0 div(\mathbf{u}) + \rho' div(\mathbf{u}) = -w \frac{d\rho_0}{dz} \tag{4.18}$$

Agora, usamos a hipótese que $|\rho|' << |\rho_0|$, o que sugere que descartar o último termo do lado esquerdo de (4.18) já seria uma boa aproximação. Porém, é possível observar ainda que, para os movimentos de grande-escala da atmosfera e dos oceanos, os efeitos de compressibilidade podem ser considerados secundários para a dinâmica desses movimentos, de tal maneira que, em primeira aproximação, podemos utilizar a condição de incompressibilidade (3.27) para o campo de velocidades para representar a equação de conservação da massa. Neste caso, usando (3.27) e a hipótese $|\rho'| << |\rho_0|$, podemos reescrever a equação da flutuação do campo da densidade da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' = -w \frac{d\rho_0}{dz} \tag{4.19}$$

Analisemos agora como fica a componente vertical da equação do balanço de momento no contexto da hipótese (4.17a). Conforme destacado na Seção 4.2, o balanço hidrostático representa os efeitos dominantes na equação do momento vertical. Assim, considerando novamente a equação do balanço de momento na direção vertical, já com os termos correspondentes à componente horizontal da velocidade angular de rotação Ω_h na força de Coriolis descartados,

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{4.20}$$

separamos também o campo da pressão em uma componente hidrostática, $p_0(z)$, dependente apenas da coordenada vertical, somada a uma flutuação $p'(x,y,z,t)$ em torno da solução hidrostática:

$$p = p_0(z) + p'(x,y,z,t) \tag{4.21a}$$
$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g \tag{4.21b}$$

Substituindo (4.17) e (4.21) em (4.20), é possível escrever a equação de balanço de momento vertical da seguinte forma:

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0}g \tag{4.22}$$

Na equação acima, usamos a hipótese $\frac{|\rho'|}{|\rho_0|} << 1$ para justificar o truncamento da expansão binomial de modo a considerar apenas os primeiros dois termos, ou seja, $(1+\frac{\rho'}{\rho_0})^{-1} \approx 1 - \frac{\rho'}{\rho_0}$. Dessa forma, chegamos às:

Equações de Boussinesq: As chamadas equações de Boussinesq são compostas pelas seguintes EDPs:

Equações de balanço de momento horizontal:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.23}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.24}$$

Equação de balanço de momento vertical:

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0}g \tag{4.25}$$

Condição de incompressibilidade na equação da continuidade:

$$div(\mathbf{u}) = 0 \tag{4.26}$$

Equação da continuidade para as perturbações de densidade:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' = -w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \tag{4.27}$$

No caso do oceano, a variação de densidade com a coordenada vertical é pequena quando comparada com o valor absoluto da densidade, ou seja, $|\Delta \rho_0| = |\rho_0(z_2) - \rho_0(z_2)| << |\rho_0|$. Isto justifica considerar a densidade como constante, ou seja, $\rho_0 \approx \rho_b$. No caso da atmosfera, por outro lado, o ar é um fluido mais compressível e, por isso, sua densidade varia consideravelmente com a altura (a densidade do ar na alta troposfera é cerca da metade da densidade do ar na superfície da Terra). Por esta razão, é comum para a atmosfera utilizar a aproximação anelástica como uma forma aproximada da equação da contuniidade, ao invés da aproximação de incompressibilidade, de modo a descrever a dinâmica dos movimentos de grande-escala na troposfera. Contudo, através de uma mudança de coordenadas, é possível transformar as equações da atmosfera para o mesmo formato das equações do oceano. Isto será feito na próxima seção. Antes disso, porém, derivaremos um importante resultado para as equações de Boussinesq (com densidade de referência constante): o Teorema de Ertel.

Teorema de Ertel: A vorticidade absoluta $\omega = rot\mathbf{u} + f.e_3 = \xi + \Omega$ satisfaz:

$$\frac{D(\omega \cdot \nabla \rho)}{Dt} = 0 \tag{4.28}$$

Demonstração:
Tomemos o gradiente da equação de continuidade:

$$\nabla \frac{D\rho}{Dt} = 0 = \frac{D\nabla\rho}{Dt} + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla\rho \tag{4.29}$$

onde

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{4.30}$$

sendo que T denota a transposta da matriz e $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (u, v, w)$. Para calcularmos a derivada material da vorticidade absoluta, tomamos o rotacional da equação do balanço de momento:

$$rot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = 0 = \frac{D\zeta}{Dt} - (\nabla \mathbf{u})\zeta \tag{4.31}$$

sendo $\zeta = rot\mathbf{u}$ a vorticidade relativa. Para o termo de Coriolis, temos:

$$rot(\Omega \times \mathbf{u}) = 0 = (\nabla \cdot \mathbf{u})\Omega - (\nabla \mathbf{u})\Omega \tag{4.32}$$

Logo, a equação para a vorticidade absoluta é obtida juntando-se os termos calculados:

$$\nabla \frac{D\omega}{Dt} + (\nabla \mathbf{u})\omega + \frac{g}{\rho_b} \nabla_H^{\perp} \rho \tag{4.33}$$

com

$$\nabla_H^\perp \rho = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Juntando as equações (4.29) e (4.33), temos:

$$\frac{D(\omega.\nabla\rho)}{Dt} - \nabla\rho(\nabla\mathbf{u})\cdot\omega - \frac{g}{\rho_b}\nabla\rho\cdot\nabla_H^\perp\rho + (\nabla\mathbf{u})^T\nabla\rho\cdot\omega = 0 \tag{4.35}$$

Na equação acima, tem-se que $\nabla\rho\cdot\nabla_H^\perp\rho = 0$. Adicionalmente, os temos envolvendo o gradiente do campo de deformações são iguais, já que constituem uma forma quadrática e $(\nabla\mathbf{u})^T$ é a adjunta de $(\nabla\mathbf{u})$, de onde concluímos que:

$$\frac{D(\omega\cdot\nabla\rho)}{Dt} = 0 \tag{4.36}$$

e terminamos a prova do teorema.

4.5 Coordenadas de pressão

Assumir que o fluído é incompressível não é uma boa aproximação para a atmosfera, já que a densidade do ar varia consideravelmente com a altitude. Há, contudo, uma forma de contornar este fato escrevendo as equações da dinâmica atmosférica em coordenadas de pressão ao invés de coordenadas de altura. Como a pressão é uma função monotônica da altura, o teorema da função implícita permite que façamos uma mudança de coordenadas $(x, y, z) \to (x, y, p)$. Queremos então escrever as equações nestas novas coordenadas. Primeiramente, definimos o geopotencial como $\phi = gz$, onde g é a aceleração efetiva da gravidade. Com isto, escrevemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{4.37}$$

Usando então a equação hidrostática, temos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{4.38}$$

Analogamente para y:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{4.39}$$

Com isto, as equações do balanço de momento horizontal podem ser escritas em função do geopotencial como:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{4.40}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{4.41}$$

Nas equações acima, a derivada material $\frac{D}{Dt}$ é definida da seguinte forma para uma função arbitrária F:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{D_H F}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{Dp}{Dt} \tag{4.42}$$

onde $\frac{D_H F}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y}$. Da equação acima, definimos a velocidade vertical em coordenadas de pressão como:

$$\omega = \frac{Dp}{Dt} \tag{4.43}$$

A equação hidrostática é naturalmente escrita nas novas coordenadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \tag{4.44}$$

onde α é a densidade específica, dada pela jacobiana da transformação de coordenadas lagrangeana para euleriana:

$$\alpha = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} \tag{4.45}$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y,p)}\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)} = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)} = \frac{-\alpha}{g}\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)} \tag{4.46}$$

segue que

$$\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)} = -g \tag{4.47}$$

Tomando a derivada temporal em coordenadas lagrangenas desta Jacobiana, mostramos no capitulo anterior que esta derivada temporal resulta no divergente do campo de velocidades:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)} = div_p\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} \tag{4.48}$$

com o qual escrevemos as equações na forma incompressível nas coordenadas de pressão.

4.6 Equações da água rasa

4.6.1 Derivação

Partiremos do sistema composto pelas equações (4.2)-(4.5), descartando as componentes da força de Coriolis devido à componente horizontal da velocidade angular de rotação do planeta. Além disso, na equação do balanço de momento vertical assumiremos o balanço hidrostático, além de assumirmos a incompressibilidade do fluído. Além dessas hipóteses, suporemos aqui que as variações horizontais do gradiente vertical de pressão são desprezíveis, ou seja, $\partial_x(\partial_z p) \approx 0$ e $\partial_y(\partial_z p) \approx 0$. Esta última hipótese é similar à hipótese de homogeneidade do fluido, e resulta que, se o campo de velocidades horizontal não depender da altura inicialmente, este continuará sem depender de z para todo t. Assim, com as hipóteses descritas acima, segue que:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{u}^{\perp} = -\frac{1}{\rho}\nabla_h p \tag{4.49}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g \tag{4.50}$$

$$div\mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4.51}$$

onde $\mathbf{u} = (u, v)$ é o campo de velocidades horizontal, $\mathbf{u}^{\perp} = (-v, u)$, w é a componente vertical do campo de velocidades, p é a pressão e ρ a densidade do fluído, suposta constante; $f = f_0 + \beta y$ é o parâmetro de Coriolis, com a aproximação do plano-β.

No modelo de água-rasa pretendemos obter uma aproximação bidimensional das equações dinâmicas (4.2)-(4.5) que seja válida para movimentos de grande-escala na atmosfera e nos oceanos. Supomos então que o fluído ocupa um domínio com fundo $z = b$ e topo $z = b+h$ e integramos a equação da continuidade na coordenada vertical:

$$\int_b^{b+h} div\mathbf{u}dz = hdiv\mathbf{u} + [w]_b^{b+h} \tag{4.52}$$

Utilizando as seguintes condições de contorno

$$w(b+h) = \frac{D(b+h)}{Dt} \tag{4.53}$$

e

$$w(b) = \frac{D(b)}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla b \tag{4.54}$$

obtemos:

$$w(b+h) = \frac{Dh}{Dt} = -hdiv\mathbf{u} \tag{4.55}$$

$$w(b) = \frac{Db}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla b = -bdiv\mathbf{u} \tag{4.56}$$

Portanto, subtraindo (4.55) e (4.56), obtemos:

$$\frac{Dh}{Dt} = -hdiv\mathbf{u} \tag{4.57}$$

Integrando a equação do balanço hidrostático entre a superfície livre e uma altura arbitrária z, temos:

$$p = \rho g[h(x, y, t) - z)] \tag{4.58}$$

Introduzindo esta equação na equação do balanço horizontal de momento (4.49), temos:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{u}^{\perp} = -g\nabla_h h \tag{4.59}$$

4.6.2 Derivação via princípio de Hamilton

Faremos aqui uma derivação alternativa das equações da água rasa via princípio variacional. Esta derivação traz algum *insight* sobre a natureza física das equações em questão. Suponhamos que um fluído seja incompressível. Neste caso, o fluido pode ser descrito como tendo um volume específico constante:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \alpha = cste \tag{4.60}$$

Suponhamos ainda que este fluído mova-se em colunas, ou seja, suas coordenadas horizontais não dependem da posição vertical inicial do fluído, o que nos leva à:

$$x = x(a, b, \tau) \tag{4.61}$$

$$y = y(a, b, \tau) \tag{4.62}$$

Substituindo estas expressões na jacobiana, temos:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}\frac{\partial z}{\partial c} = \alpha \tag{4.63}$$

Integrando na coordenada vertical c, obtemos:

$$z = \frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)}\alpha c \tag{4.64}$$

Tomamos agora a coordenada lagrangeana c como $c = 0$ no fundo da camada de fluído e $c = H_0$ no topo. Assim, a altura da camada de fluído é escrita então como segue:

$$h = \frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)}\alpha H_0 \tag{4.65}$$

Logo:

$$z = \frac{c}{H_0}h \tag{4.66}$$

Considerando apenas a energia cinética devido aos movimentos horizontais, podemos escrever a Lagrangeana como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 - gh \right\} dadb \tag{4.67}$$

Tomando variações arbitrárias com extremos t_0, t_1 fixos na ação

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}dt \tag{4.68}$$

obtemos:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla h \tag{4.69}$$

A derivada temporal da definição de h leva à:

$$\frac{Dh}{Dt} = hdiv\mathbf{u} \tag{4.70}$$

Para escrever a equação num sistema de coordenadas em rotação, introduzimos duas funções $R(x, y)$ e $P(x, y)$, tais que o parâmetro de Coriolis $f(x, y)$ é dado por:

$$f(x, y) = \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \tag{4.71}$$

Portanto, a Lagrangeana se torna

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int \left\{(u - R)\frac{\partial x}{\partial \tau} + (v + P)\frac{\partial y}{\partial \tau} - gh\right\}dadb \tag{4.72}$$

e recuperamos a equação de momento da água rasa em rotação:

$$\frac{Du}{Dt} + f\mathbf{u}^{\perp} = -g\nabla_h h \tag{4.73}$$

4.6.3 Conservação da vorticidade potencial

No modelo de água-rasa governado pelas equações (4.70) e (4.73), definimos a vorticidade relativa como o rotacional (neste caso, o rotacional bi-dimencional) do campo de velocidades horizontal

$$\zeta = rot\mathbf{u} = \nabla \times (u, v, 0) \cdot \widehat{z} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.74}$$

Assim, para derivar uma equação para a vorticidade, tomamos o rotacional da equação de evolução do campo de velocidades horizontal do modelo de água rasa. Assim, calculando o rotacional termo a termo:

$$rot\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D\zeta}{Dt} + \zeta div\mathbf{u} \tag{4.75}$$

$$rot(f\mathbf{u}^{\perp}) = div(fu) = fdiv\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla f = fdiv\mathbf{u} + \frac{Df}{Dt} \tag{4.76}$$

onde usamos o fato que $f = f(y)$ e, portanto, $\mathbf{u}\cdot\nabla f = v\frac{df}{dy} = \frac{Df}{Dt}$.

Somando os termos nos quais calculamos o rotacional acima, e usando o fato que $rot\nabla h = 0$, temos:

$$\frac{D(f+\zeta)}{Dt} + (f+\zeta)div\mathbf{u} = 0 \tag{4.77}$$

Multiplicando esta equação por h:

$$h\frac{D(f+\zeta)}{Dt} + h(f+\zeta)div\mathbf{u} = 0 \tag{4.78}$$

e a equação (4.70) para h por $(f+\zeta)$, obtém-se

$$(\zeta+f)\frac{Dh}{Dt} + (\zeta+f)hdiv\mathbf{u} = 0 \tag{4.79}$$

Fazendo a subtração das duas últimas equações e dividindo por h^2,

temos:

$$\frac{1}{h^2}\Big((\zeta+f)\frac{Dh}{Dt} - h\frac{D(f+\zeta)}{Dt}\Big) = 0 \tag{4.80}$$

Usando a regra para derivação de um quociente obtemos:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{f+\zeta}{h}\right)=0 \tag{4.81}$$

A quantidade

$$\left(\frac{f+\zeta}{h}\right) \tag{4.82}$$

é chamada vorticidade potencial. O que este resultado diz é que a vorticidade potencial é conservada ao longo das trajetórias do sistema. Daremos uma interpretação física para ilustrar a importância deste teorema. Suponhamos que a trajetória de movimento do fluído se dê sobre uma curva com $f = cste$. Uma situação física em que isto ocorre é a de jatos zonais, bastante comuns na atmosfera e oceanos. Neste caso, apenas h e ζ podem variar na vorticidade potencial, mas sabemos que a vorticidade potencial tem que ser conservada. Logo, se a espessura da camada de fluído diminui ao longo da trajetória, a vorticidade relativa ζ é forçada a aumentar de forma a manter a vorticidade potencial constante, mudando a rotação do fluído. Neste caso, se a vorticidade relativa for nula inicialmente, o fluido passará a girar no sentido anti-horário. Analisamos agora o outro caso, em que o movimento se dá em uma situação na qual a espessura da camada de fluído é constante, mas o parâmetro de Coriolis f varia. Isto acontece, por exemplo, em movimentos meridionais nos oceanos e na atmosfera com fundo plano (por exemplo, sem montanhas).

Neste caso, se movimentarmos o fluído na direção norte, f aumentará e, para conservar a vorticidade potencial, uma vez que a altura da coluna de vórtice não varia, se a vorticidade for nula na posição original a parcela de fluído passará a "girar"no sentido horário. Por outro lado, movendo o fluído na direção sul o parâmetro f diminuirá, logo a vorticidade do fluído deve aumentar para compensar este efeito. Se inicialmente o fluído não tivesse rotação passaria a "girar"no sentido anti-horário.

4.7 Modelo quase-geostrófico

Um dos mais importantes modelos no estudo da dinâmica de fluídos geofísicos é o modelo quase-geostrófico. Este modelo descreve bem a dinâmica dos movimentos de grande escala no oceano e na atmosfera em médias latitudes. A vantagem desse modelo em relação ao sistema de equações da água-rasa, por exemplo, é que a aproximação quase-geostrófica filtra do sistema as chamadas ondas de gravidade, que são soluções das equações da água rasa (ver no próximo capítulo) que têm a característica de serem dominantes energeticamente nas pequenas escalas e altas frequências do espectro dos movimentos atmosféricos e oceânicos. Por outro lado, os movimentos de grande-escala do oceano e da atmosféra, em médias latitudes, são dominados pelas chamadas ondas de Rossby, que são soluções tanto das equações quase geostróficas quanto das equações da água rasa num plano beta. Este modelo foi introduzido pelo meteorologista americano Jule Charney [*Charney*(1949)], e também foi uma das primeiras equações a serem resolvidas numericamente num computador, numa tentativa de Charney conjuntamente com o matemático húngaro Jon Von Neumann e o meteorologista norueguês Ragnar Fjortoft de realizar uma previsão de tempo [*Charney*(1950)]. Para derivar as equações quase-geostróficas, é mais conveniente trabalhar com as equações na forma adimensional (ou seja, dividindo cada uma das variáveis por sua dimensão característica). Não faremos a adimensionalização da equações aqui, mas apresentaremos diretamente as equações em sua forma adimensional, onde definiremos os números adimensionais associados e faremos algumas suposições a respeito das ordens de grandeza desses números adimensionais necessárias para a validade do modelo quase-geostrófico. Assim, em sua forma adimensional, as equações da água rasa podem ser escritas como:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + Ro^{-1}\mathbf{u}^{\perp} = -Fr^{-1}\nabla_h h \tag{4.83}$$

$$\frac{Dh}{Dt} - \Theta^{-1}\nabla(\frac{h_b}{H_0}) + \Theta^{-1}\big(1 + \Theta h - \frac{h}{H_0}\big)div\mathbf{u} = 0 \tag{4.84}$$

Da mesma maneira, o princípio da conservação da vorticidade potencial pode ser escrito na forma adimensional como segue:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1 + Ro\zeta}{1 + \Theta h - \frac{h}{H_0}}\right) = 0 \tag{4.85}$$

Nas equações acima:

- $Ro = \frac{U}{Lf}$ é o chamado número de Rossby, que mede a importância relativa da aceleração do movimento em relação à força de Coriolis, sendo U e L, respectivamente, as escalas características de velocidade e de comprimento associadas aos distúrbios;

- $\Theta = \frac{N_0}{H_0}$ representa a medida adimensional da amplitude das perturbações da altura do fluido em relação ao valor referente ao estado não perturbado representado por H_0. Nesta adimensionalização das equações, supomos também que variações de topografia são da mesma ordem de grandeza das variações da altura, logo Θ também representa uma medida adimensional das variações topográficas;

- $Fr = \frac{U}{\sqrt{gH_0}}$ é o chamado número de Froude, que mede a razão entre a velocidade característica dos distúrbios e a velocidade das ondas de gravidade puras, $c_g = \sqrt{gH_0}$;

Para garantir a consistência do ponto de vista energético das equações quase geostróficas, assumiremos as seguintes relações:

- O número de Rossby é um parâmetro pequeno, ou seja, $Ro << 1$.

- Há um balanço aproximado entre as forças de Coriolis e do gradiente de pressão, expresso por:

$$\Theta Fr^{-1} \cong Ro^{-1} \tag{4.86}$$

- As perturbações na altura de fundo (topografia) h_b são da mesma ordem que as perturbações na altura h.

- A escala característica de comprimento das perturbações aqui consideradas é da mesma ordem de grandeza do raio de deformação de Rossby local, que representa a escala de comprimento que distingue a escala espacial dos movimentos na atmosfera e no oceano que sofrem significativa influência da força de Coriolis. Matematicamente, supõe-se que $\left(\frac{L}{L_d}\right)^2 = F$, onde $F = O(1)$, sendo $L_d = \frac{\sqrt{gH_0}}{f}$ o raio de deformaçao de Rossby.

Por facilidade de notação, façamos $Ro = \epsilon << 1$. Então, seguindo as suposições acima, reescrevemos nosso sistema como:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \epsilon^{-1}\mathbf{u}^{\perp} = -\epsilon^{-1}\nabla_h h \tag{4.87}$$

$$(1+\epsilon F(h-h_b))^{-1}\Big(\frac{Dh}{Dt} + \mathbf{u}\cdot\nabla h_b\Big) + \epsilon^{-1} div\mathbf{u} = 0 \tag{4.88}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1+\epsilon\zeta}{1+\epsilon F(h-h_b)}\right) = 0 \tag{4.89}$$

Prosseguiremos fazendo uma expansão assintótica no parâmetro ϵ, ou seja, suporemos que para cada ϵ existe uma solução das equações acima:

$$\mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{u}(x, y, t, \epsilon) \tag{4.90}$$

$$h_\epsilon = h(x, y, t, \epsilon) \tag{4.91}$$

$$\zeta_\epsilon = \zeta(x, y, t, \epsilon) \tag{4.92}$$

Suporemos ainda que cada função acima seja analítica em ϵ, de forma a podermos expandi-las em séries de potências de ϵ:

$$\mathbf{u}_\epsilon = \mathbf{u}_0 + \epsilon\mathbf{u}_1 + \epsilon^2\mathbf{u}_2 + ... \tag{4.93}$$

$$h_\epsilon = h_0 + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + ... \tag{4.94}$$

$$\zeta_\epsilon = \zeta_0 + \epsilon\zeta_1 + \epsilon^2\zeta_2 + ... \tag{4.95}$$

Substituindo as expansões em série acima nas equações (4.87), (4.88) e (4.89) e coletando primeiramente os termos multiplicados por coeficientes ϵ^{-1}, obtemos:

$$\mathbf{u}_0 = \nabla^{\perp} h_0 \tag{4.96}$$

$$div\mathbf{u}_0 = 0 \tag{4.97}$$

Este é o sistema geostrófico descrito nas seções anteriores. Na próxima ordem da expansão, agrupando os termos multiplicados por $\epsilon^0 = 1$, temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\right)(\zeta_0 - F(h_0 - h_b)) = 0 \tag{4.98}$$

$$\mathbf{u}_0 = \nabla^{\perp} h_0 \tag{4.99}$$

$$\zeta_0 = \nabla^2 h_0 \tag{4.100}$$

Este é o sistêma quase-geostrófico. Como veremos no proximo capítulo, a importância das equações quase-gesostróficas acima é que elas descrevem a evolução das ondas de Rossby, que dominam as grandes escalas dos moviemntos nos oceanos e na atmosfera, ao mesmo tempo que elas filtram as ondas de gravidade que também são soluções das equações completas e das equações da água rasa. Contudo, é computacionalmente custoso resolver simultaneamente a evolução temporal das ondas de gravidade e das ondas de Rossby, já que as ondas de gravidade evoluem numa escala de tempo muito mais rápida que as ondas de Rossby, requerendo portanto um passo de tempo menor. A interação entre ondas de Rossby e ondas de gravidade ainda é tema de pesquisa, contudo há resultados rigorosos [*Majda*(2003)] garantindo que no limite assintótico de rápidas rotações ($Ro = \epsilon \to 0^+$), a evolução das ondas de Rossby independe das ondas de gravidade, num processo chamado ajuste geostrófico.

4.8 Modelo quase-geostrófico estratificado

Assim como derivamos a equação quase-geostrófica, na seção anterior, a partir das equações da água-rasa, podemos também derivar uma equação análoga a partir das equações de Boussinesq: as chamadas equações quase-geostróficas continuamente estratificadas. Para tanto, partiremos das equações de Boussinesq na forma adimensional:

$$\frac{D_H \mathbf{u}_H}{Dt} + w\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial z} + Ro^{-1}\mathbf{u}_H^{\perp} = -E\nabla_H p \tag{4.101}$$

$$\frac{D_H w}{Dt} + w\frac{\partial w}{\partial z} = E\frac{\partial p'}{\partial z} - X\rho \tag{4.102}$$

$$div(\mathbf{u}) = 0 \tag{4.103}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = X^{-1}Fr^{-2}w \tag{4.104}$$

Tomando o divergente da equação de balanço de momento, obtemos

uma equação elíptica para a pressão:

$$\nabla^2 p + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{g}{\rho_b} + f\omega_v \tag{4.105}$$

Nas equações acima temos os seguintes números admensionais: $Ro =$

U/Lf é o número de Rossby, que mede a razão (importância relativa) entre as forças inerciais e de Coriolis, (U é valor típico da velocidade horizontal e L uma escala espacial característica do fenômeno de interesse), $Fr = U/\sqrt{gL}$ é o chamado número de Froude, que mede a importância da estratificação no movimento, $E = p/\rho_b U^2$ é o número de Euler, que mede a razão entre a pressão e as forças inerciais, e o número adimensional $X = gL/U^2$mede a razão entre a energia potencial e a energia cinética devido a movimentos verticais. Faremos então as seguintes hipóteses: $Ro = \epsilon << 1$, $Fr = F\epsilon$, para uma constante F =O(1), $E = \epsilon^{-1}$ e $X = (F\epsilon)^{-1}$.

Neste contexto, podemos ainda reescrever as equações de Boussinesq como:

$$\frac{D_H \mathbf{u}_H}{Dt} + w\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial z} + \epsilon^{-1}\mathbf{u}_H^{\perp} = -\epsilon_{-1}\nabla_H p \tag{4.106}$$

$$\frac{D_H w}{Dt} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon^{-1}\Big(\frac{\partial p'}{\partial z} - F^{-1}\rho\Big) \tag{4.107}$$

$$div(\mathbf{u}) = 0 \tag{4.108}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \epsilon^{-1}F^{-1}w \tag{4.109}$$

Podemos, ainda, escrever na forma adimensional a equação de Ertel para a vorticidade:

$$\frac{D}{Dt}\left\{\omega_v - F\frac{\partial \rho}{\partial z} - \epsilon F(\omega_H.\nabla\rho + \omega_v\frac{\partial \rho}{\partial z})\right\} \tag{4.110}$$

além da equação e Poisson para a pressão:

$$\nabla^2 p = \epsilon Tr(\nabla \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{u}_h^T) - \omega_v + F_{-1}\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{4.111}$$

Fazemos então a expansão assintótica, substituindo as variáveis por famílias de variáveis análiticas no parâmetro ϵ:

$$u_\epsilon(x,y,z,t) = u_0(x,y,z,t) + \epsilon u_1(x,y,z,t) + ... \tag{4.112}$$

$$w_\epsilon(x,y,z,t) = w_0(x,y,z,t) + \epsilon w_1(x,y,z,t) + ... \tag{4.113}$$

$$p_\epsilon(x,y,z,t) = p_0(x,y,z,t) + \epsilon p_1(x,y,z,t) + ... \tag{4.114}$$

$$\rho_\epsilon(x,y,z,t) = \rho_0(x,y,z,t) + \epsilon \rho_1(x,y,z,t) + ... \tag{4.115}$$

Coletando os termos de ordem 0 na equação (ou seja, multiplicados por ϵ^0), temos as equações quase-geostróficas:

$$u_H^{\perp}(x, y, z, t) = -\nabla_H P \tag{4.116}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho}{F} \tag{4.117}$$

$$w = 0 \tag{4.118}$$

$$\frac{D_H}{Dt}\left\{\omega_v - F^2\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right\} = 0 \tag{4.119}$$

4.9 Outros modelos

4.9.1 Modelo QG de duas camadas

O modelo quase-geostrófico (QG) de duas camadas, ou de forma mais geral de múltiplas camadas, pode ser visto como um modelo intermediário entre as equações quase-geostróficas de uma camada (também chamadas barotrópicas) e as equações quase-geostróficas continuamente estratificadas descritas na seção anterior. Este modelo é capaz de descrever alguns aspectos da estratificação (também chamados efeitos baroclínicos), sem contudo resolver a estrutura vertical do modelo continuamente estratificado. Este modelo pode ser derivado das equações continuamente estratificadas via truncamento de Garlekin, retendo apenas dois modos verticais (ou, de forma mais geral, N modos num modelo de N camadas). Assim, as equações do modelo quase-geostrófico de duas camadas são dadas por:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + J(\psi_1, q_1) = 0 \tag{4.120}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + J(\psi_2, q_2) = 0 \tag{4.121}$$

onde

$$q_1 = \nabla^2\psi_1 + f + F_1(\psi_2 - \psi_1) \tag{4.122}$$

$$q_2 = \nabla^2\psi_2 + f + F_1(\psi_1 - \psi_2) \tag{4.123}$$

$$F_i = \frac{f^2}{H_i g'} \tag{4.124}$$

Nas equações acima, H_i é a espessura da camada $i = 1, 2$, e a chamada gravidade reduzida é dada por

$$g' = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2'} \tag{4.125}$$

onde ρ_i é a densidade da i-ésima camada.

4.9.2 Modelo quase-geostrófico de 1 e 1/2 camadas

É comum em muitas aplicações o caso em que a camada inferior é muito mais espessa que a camada superior. Este é o caso, por exemplo, da dinâmica de Júpiter, onde há uma camada superior fina cuja dinâmica pode ser observada diretamente, e abaixo desta camada há uma camada mais espessa que não pode ser observada diretamente (ou cuja observação é mais difícil) e, portando, tem um comportamento pouco conhecido. Nestes casos, é comum usar uma simplificação do modelo quase-geostrófico de duas camadas: o modelo quase geostrófico de uma camada e meia, obtido tomando o limite em que $H_2 \to \infty$. Neste caso, a dinâmica da camada inferior se torna independente da camada superior. A camada superior, por outro lado, continuará dependendo da camada inferior. As equações do modelo quase-geostrófico de uma camada e meia são:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + J(\psi_1, q_1 + F_1 q_2) = 0 \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + J(\psi_2, q_2) = 0 \tag{4.127}$$

onde

$$q_1 = \nabla^2 \psi_1 + f - F_1 \psi_1 \tag{4.128}$$

$$q_2 = \nabla^2 \psi_2 + f - F_2 \psi_2 \tag{4.129}$$

4.9.3 Modelo de água rasa MHD

Uma importante região na dinâmica solar é a chamada *tacoclina*, que constitui uma região transicional entre a zona radioativa (que gira como um corpo sólido) e a zona convectiva, que como o próprio nome diz é caracterizada pela convecção do plasma aquecido por baixo. A tacoclina é situada em aproximadamente 0.7 R, sendo R o raio solar, dado aproximadamente por R=695700 no equador. Em comparação com o raio solar, a tacoclina é relativamente fina, tendo uma espessura de aproximadamente 0.04 R. Isto sugere que sua dinâmica pode ser modelada de forma semelhante ao modelo de água rasa para o oceano e atmosfera, porém incluindo os efeitos do campo magnético. O modelo de água rasa magnetohidrodinâmico foi primeiramente introduzido em [*Gilman*(2000)], enquanto a derivação das soluções da versão linearizada destas equações é encontrada em [*Zeitlin*(2013)]. Já as soluções fracamente não lineares dessas equações foram estudadas em [*Raphaldini*(2015)].

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + f\mathbf{v}^{\perp} = -g'\nabla h + \mathbf{b}\nabla\mathbf{b} \tag{4.130}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + div(\mathbf{b}h) = 0 \tag{4.131}$$

$$\frac{\partial(h\mathbf{b})}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla(h\mathbf{b}) = -(h\mathbf{b})\nabla(\mathbf{v} \tag{4.132}$$

4.9.4 Modelo quase-geostrófico magnetohidrodinâmico

Assim como no caso hidrodinâmico, no caso magnetohidrodinâmico é possível também derivar um modelo que elimina as "ondas rápidas"de gravidade, descrevendo apenas a dinâmica de ondas de Rossby magnetohidrodinâmicas. Este é o modelo quase-geostrófico magnetohidrodinâmico:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi_1, q) = J(A, j) \tag{4.133}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + J(\psi, j) = 0 \tag{4.134}$$

$$div(h\mathbf{b}) = 0 \tag{4.135}$$

onde $(h\mathbf{b}) = \nabla^{\perp} A$, A é o chamado potencial vetor, $j = \nabla^2 A$ é a corrente, h a espessura da camada e $q = \nabla^2\psi + f - F\psi$ é a vorticidade potencial.

4.10 Sugestões de leitura

Para uma introdução à dinâmica dos fluídos geofísicos em nível elementar temos o livro [*Cushman-Roisin*(2010)], em nível mais avançado há o livro [*Pedlosky*(1987)]. Um também mais avançado que incluí abordagens lagrangeana(variacional) e hamiltoniana em dinâmica de fluídos geofísicos é [*Salmon*(1998)], para uma introdução mais matemática ao assunto incluindo demosntrações rigorosas de convergencia da dinâmica de água rasa e Boussinesq para a quase geostrófica no limite de rápidas rotações há o livro [*Majda*(2003)].

5

Teoria Linear de Ondas

Neste capítulo iniciaremos a abordagem da teoria ondulatória no contexto da dinâmica de fluídos geofísicos analisando a teoria linear, onde as perturbações com estrutura de onda serão assumidas possuírem amplitudes infinitesimais. Neste contexto, os termos de ordem quadrática e, eventualmente, de ordem ainda mais alta em termos das perturbações em torno de um estado estacionário de referência, serão desprezados, e somente os termos lineares em relação a essas perturbações serão mantidos. Consequentemente, o estudo das ondas neste capítulo será feito analisando versões linearizadas de alguns modelos deduzidos no Capítulo 4. Além disso, neste capítulo restringiremos a análise para ondas imersas num estado de referência estacionário (daqui a diante referido como estado básico ou estado não perturbado) no qual os campos vetoriais que o caracterizam são homogêneos. Mais especificamente, mas sem grande perda de generalidade, consideraremos um estado básico em repouso, isto é, um estado de referência no qual o campo de velocidade é identicamente nulo, e também caracterizado por campos nos quais o perfil resultante dos parâmetros que medem a estabilidade estática são homogêneos e positivos. Em tal contexto, as soluções características das equações linearizadas para as perturbações representam ondas neutras, isto é, ondas cujas oscilações apresentam amplitudes constantes no tempo. Em outras palavras, analisaremos neste capítulo perturbações estáveis. Analisaremos primeiro as soluções do tipo onda no modelo quase-geostrófico da água-rasa obtido na Seção (4.7) do capítulo anterior. Neste caso, o modelo é governado por uma única EDP, dada pela conservação da vorticidade potencial quase-geostrófica (i.e., uma versão simplificada da conservação da vorticidade potencial (4.81)). Consequentemente, somente um tipo de onda é permitido. Em seguida, abordaremos as soluções do tipo onda no modelo de água-rasa descrito pelas equações (4.70) e (4.73). Neste caso, trata-se de um exemplo de um sistema de EDPs, no qual a relação de dispersão possui mais de um ramo, ou seja, mais de um tipo de onda é permitido. Por fim, analisaremos as soluções das equações da dinâmica atmosférica estratificada em coordenadas isobáricas (4.40), (4.41), (4.44) e (4.48) via separação de variáveis, onde mostraremos que tanto o modelo quase-geostrófico da água-rasa quanto a própria versão linearizada das equações da água-rasa representam a evolução temporal da estrutura horizontal correspondente a um particular modo vertical dessas equações.

5.1 Ondas no modelo quase-geostrófico

Consideraremos aqui o modelo quase-geostrófico deduzido na Seção (4.7) como limite assintótico das equações da água-rasa no regime de forte rotação, ou seja, para $Ro << 1$. Por simplicidade, vamos considerar o caso sem topografia, ou seja, $h_b(x, y) = 0$. No entanto, consideraremos aqui a variação meridional do parâmetro de Coriolis explicitamente, com a chamada aproximação do plano β de latitudes médias, onde o parâmetro de Coriolis é dado por $f = f_0 + \beta y$, sendo $f_0 = f(y = y_0)$ o parâmetro de Coriolis calculado numa latitude de referência e y representa neste caso os desvios da posição meridional da parcela de fluido em relação à posição referência y_0; $\beta = \frac{2\Omega cos\varphi_0}{a_T}$ é o chamado parâmetro de Rossby, sendo Ω a velocidade angular de rotação da Terra e $a_T \approx 10^7 m$ o raio médio da mesma.
Como veremos mais adiante, esta representação explícita da variação latitudinal do efeito da força de Coriolis é importante para o nosso objetivo nesta seção, pois é exatamente esta variação meridional do parâmetro de Coriolis (i.e., o efeito β) que constitui o mecanismo restaurador que causa as ondas planetárias na atmosfera e no oceano: as chamadas ondas de Rossby.
Nas circunstâncias discutidas acima, a forma dimensional das equa-

ções quase-geostróficas (4.96), (4.97) e (4.98) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\partial_t q + J(\psi, q) = 0 \tag{5.1}$$

onde $\psi = \frac{gh}{f_0}$ é a função corrente, sendo h a perturbação da altura da superfície livre do fluido em relação ao valor referente ao estado não perturbado H_0; $J(\psi, q)$ é o determinante da matriz jacobiana entre ψ e q, ou seja,

$$J(\psi, q) = \det \begin{bmatrix} \partial_x \psi & \partial_y \psi \\ \partial_x q & \partial_y q \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

e q é a vorticidade potencial quase-geostrófica, dada por

$$q = f_0 + \beta y + \nabla^2 \psi - \frac{\psi}{L_d^2} \tag{5.3}$$

sendo $L_d = \frac{\sqrt{gH_0}}{f_0}$ o raio de deformação de Rossby e $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ refere-se ao operador laplaciano.

Para obter as equações linearizadas para as perturbações em torno de um estado básico em repouso, consideramos

$$\psi = \frac{gH_0}{f_0} + \delta\psi' \tag{5.4}$$

com $\delta << 1$. Note que o estado básico $\psi_0 = \frac{gH_0}{f_0}$ é uma solução exata de ((5.1)) e a vorticidade potencial quase-geostrófica neste caso é dada por

$$q = \beta y + \delta(\nabla^2 \psi' - \frac{f_0^2}{gH_0}\psi') \tag{5.5}$$

Assim, substituindo (5.4) e (5.5) em (5.1) e retendo somente os termos $O(\delta)$, obtemos:

$$\partial_t(\nabla^2 \psi' - \frac{f_0^2}{gH_0}\psi') + \beta \partial_x \psi' = 0 \tag{5.6}$$

A equação acima corresponde à versão linearizada de (5.1) e governa, em primeira aproximação, a evolução de pequenas perturbações em torno de um estado básico em repouso e homogêneo. A homogeneidade do estado básico se reflete nos coeficientes constantes da equação (5.6), o que permite o uso da transformada de Fourier para analisar soluções de ondas nesta EDP. Alternativamente, para o caso particular de um domínio limitado e/ou de soluções periódicas, podemos utilizar o método da série de Fourier para determinar a solução de (5.6). No entanto, como se trata de uma EDP linear e com coeficientes constantes, vale o princípio da superposição, onde cada harmônico que deve compor a solução geral de (5.6) deverá evoluir de forma independente dos demais. Logo, sem perda de generalidade, vamos considerar o seguinte ansatz de ondas planas:

$$\psi'(x, y, t) = Ae^{ikx+ily-i\omega t} \tag{5.7}$$

onde A é uma constante arbitrária, $\mathbf{k} = (k, l)$ é o vetor número de onda e ω é a frequência temporal de oscilação do modo $\mathbf{k}$. Substituindo (5.7) em (5.6) segue que (5.7) é uma solução exata de (5.6) desde que ω e $\mathbf{k}$ satisfaçam

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{-\beta k}{|\mathbf{k}|^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}} \tag{5.8}$$

A equação acima, que relaciona a frequência temporal de oscilação com o vetor número de onda, é chamada relação de dispersão, e a onda em questão é chamada de onda de Rossby. São estas ondas responsáveis pela propagação dos sistemas de tempo de grande-escala em médias latitudes, por exemplo. Logo, tais ondas desempenham um papel fundamental na evolução da atmosfera numa escala de alguns dias a uma semana. Para períodos mais longos, tais ondas ainda são importantes, porém outros efeitos devem ser incluídos em (5.6), como por exemplo os termos de segunda ordem (não lineares) em termos das perturbações, como veremos no Capítulo 6.

A equação (5.8) mostra que, no regime linear, a frequência de oscilação dos harmônicos que compõem a onda em questão independe da amplitude de oscilação, e cada harmônico evolui sem depender de outro harmônico, ou seja, os harmônicos evoluem no tempo de forma desacoplada. Além disso, uma onda é dita dispersiva se o hessiano de $\omega(\mathbf{k})$ for diferente de zero exceto para um conjunto de medida nula em $\mathbf{k}$. Esta propriedade pode ser facilmente verificada computando o determinante da matriz hessiana de $\omega(\mathbf{k})$ a partir de (5.8). Deixamos para o leitor este exercício.

Vamos, contudo, computar a velocidade de grupo das ondas de Rossby para mostrar como essas ondas podem explicar os aspectos essenciais relacionados à evolução dos sistemas de tempo. Dos cursos básicos de ondulatória sabemos que a velocidade de grupo refere-se à velocidade na qual a energia de um pacote ou um grupo de ondas se propaga a partir de uma fonte localizada, sendo matematicamente dada por $\mathbf{C_g} = \nabla_k \omega$. Para o caso das ondas de Rossby, a partir de (5.8) obtém-se:

$$\mathbf{C_g} = (C_{g_x}, C_{g_y}) \tag{5.9a}$$

$$C_{g_x} = \frac{\beta[k^2 - (l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0})]}{(|\mathbf{k}|^2 + \frac{f_0^2}{gH_0})^2} \tag{5.9b}$$

$$C_{g_y} = \frac{2\beta k l}{(|\mathbf{k}|^2 + \frac{f_0^2}{gH_0})^2} \tag{5.9c}$$

A relação (5.9b) mostra que a velocidade de grupo zonal é negativa (positiva) para $k^2 < l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}$ ($k^2 > l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}$), enquanto o módulo da velocidade de grupo meridional é maior quanto maior o número de onda zonal. Logo, para uma fonte de energia localizada, as ondas mais longas dispersarão a energia pata oeste da fonte, enquanto as ondas mais curtas dispersarão a energia para leste da fonte. Além disso, no setor leste da fonte onde as ondas mais curtas agem na dispersão da energia, a propagação da energia na direção norte-sul será mais intensa do que no setor oeste.

Este caráter bastante não isotrópico da dispersão da energia pelas ondas de Rossby constitui um aspecto bastante característico dessas ondas de grande-escala. Inclusive, para estados básicos mais realistas, como por exemplo caracterizado por um escoamento zonal geostrófico, a propagação meridional da energia somente ocorre nas latitudes em que on vento é de oeste. Assim, para uma fonte localizada em latitudes médias, onde o vento é predominantemente de oeste, a energia propaga na direção norte-sul em direção ao equador até ser absorvida na latitude onde inicia o regime de leste nos trópicos. A propagação de ondas de Rossby em meios não homogêneos tem sido estudada em diversos trabalhos (ver, por exemplo, [*Hoskins*(1981)]; [*Hoskins*(1993)]).

5.2 Ondas no modelo de água-rasa

Abordaremos agora a teoria linear de ondas num meio homogêneo no modelo de água-rasa obtido na Seção 4.6 do capítulo anterior. Por simplicidade, vamos considerar agora a aproximação do plano-f, onde o parâmetro de Coriolis é suposto constante ($f = f_0$). Isto significa desprezar o termo βy na expansão em Taylor do parâmetro de Corilois $f(y)$ em torno da latitude de referência $y = y_0$. Faremos isso porque o efeito β não é essencial para o tipo de onda que enfatizaremos nesta seção, as ondas de gravidade-inerciais ou ondas de Poincaré.

Neste contexto, assumindo pequenas perturbações em torno de um estado básico em repouso, ou seja,

$$\begin{aligned} u &= \delta u' \\ v &= \delta v' \\ h &= H_0 + \delta h' \end{aligned} \tag{5.10}$$

com $0 < \delta << 1$, substituindo (5.10) em (4.70) e (4.73) e retendo somente os termos $O(\delta)$, obtemos a versão linearizada das equações da água-rasa com rotação:

$$\partial_t u - f_0 v + g\partial_x h = 0 \tag{5.11a}$$

$$\partial_t v + f_0 u + g\partial_y h = 0 \tag{5.11b}$$

$$\partial_t h + H_0(\partial_x u + \partial_y v) = 0 \tag{5.11c}$$

Nas equações acima, o sobre-índice "' "das variáveis u, v e h foi omitido por simplicidade. De forma alternativa, podemos escrever as equações (5.11) na forma vetorial:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{5.12}$$

Em (5.12), $\mathbf{u} = (u, v, h)$ representa o vetor estado do modelo, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ representa o vetor nulo e $\mathcal{L}$ é o operador diferencial linear do modelo, dado por

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & -f_0 & g\partial_x \\ f_0 & 0 & g\partial_y \\ H_0\partial_x & H_0\partial_y & 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Como pode ser notado nas equações acima, os coeficientes do sistema de EDPs (5.12) são constantes. Logo, as soluções de ondas se propagando neste meio homogêneo podem ser analisadas usando a transformada de Fourier, no caso geral, ou a série de Fourier, no caso de soluções periódicas e/ou de um domínio limitado. Alternativamente, como fizemos na seção anterior, podemos ainda, de forma mais simples, supor um ansatz de ondas planas, que, dada a independência entre os os modos nesse regime linear, não implica em perda de generalidade. Vamos, assim, supor que:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = A\mathbf{R}e^{ikx+ily-i\omega t} \tag{5.14}$$

onde A é uma constante arbitrária e $\mathbf{k} = (k, l)$ é o vetor número de onda. Substituindo o ansatz (5.14) em (5.12) resulta no seguinte problema de autovalor/autovetor para determinar ω e $\mathbf{R}$:

$$[-i\omega I + M]\mathbf{R} = \mathbf{0} \tag{5.15}$$

onde I é a matriz identidade e M = $\mathcal{L}_{i\mathbf{k}}$ é a matriz dada pelo símbolo do operador $\mathcal{L}$, obtida substituindo ∂_x por ik e ∂_y por il. Assim, os autovalores ω são determinados como raízes da equação característica:

$$det[-i\omega I + M] = 0 \tag{5.16}$$

ou, mais especificamente, calculando o determinante, temos:

$$\omega(\omega^2 - f_0^2 - |\mathbf{k}|^2 g H_0) = 0 \tag{5.17}$$

Assim, para cada harmônico $\mathbf{k} = (k, l)$, a relação de dispersão das equações da água-rasa com rotação possui três ramos, que são definidos pelas três raízes da equação algébrica (5.17). Tais raízes são:

$$\omega^{(0)} = 0 \tag{5.18a}$$

$$\omega^{(\pm 1)} = \pm\sqrt{f_0^2 + g H_0 |\mathbf{k}|^2} \tag{5.18b}$$

O ramo $\omega^{(0)}$ representa o modo geostrófico, posto que, como pode ser notado a partir de (5.15), os campos de velocidade e de altura estão em balanço geostrófico exato, em consequência da frequência temporal nula. Da mesma forma, como o parâmetro de Coriolis é suposto constante, a geostrofia implica na não divergência do campo do vento horizontal, o que também pode ser facilmente verificado em (5.15) para este modo. Consequentemente, o campo de velocidade horizontal para este modo é puramente rotacional, com o vetor velocidade sendo sempre tangente às isolinhas do campo de altura. Por esta razão, este modo é também muitas vezes rotulado como modo vortical.
O modo vortical constitui a chamada variedade lenta da dinâmica atmosférica e oceânica e é este modo que tem um papel mais diretamente relevante para à previsão numérica de tempo. Com efeito, se relaxássemos a hipótese do parâmetro de Coriolis constante e considerássemos o efeito β (i.e., $f = f_0 + \beta y$), os modos geostróficos seriam substituídos pelas ondas de Rossby discutidas na seção anterior. Neste caso, ao invés da frequência temporal nula, esses modos teriam frequência temporal pequena, de forma aos campos de velocidade e altura estarem num balanço geostrófico aproximado, sendo governados pela dinâmica quase-geostrófica.

Já os ramos $\omega^{(\pm 1)}$ referem-se às ondas de gravidade-inerciais ou às ondas de Poincaré. A frequência negativa representa a onda com propagação para oeste, enquanto a frequência positiva refere-se à onda com propagação para leste. É interessante notar que a menor frequência dessas ondas refere-se à frequência inercial, que ocorre para $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, onde $|\omega^{(\pm 1)}| = |f_0|$. Para $\varphi_0 = 45^0$, tem-se que $|\omega^{(\pm 1)}| = \sqrt{2}\Omega$, sendo Ω a velocidade angular de rotação da Terra. Logo, a menor frequência das ondas de Poincaré é, ainda assim, maior que a frequência diurna. Dessa forma, notamos que as ondas de Poincaré têm frequência temporal rápida, sendo portanto relevantes para fenômenos atmosféricos que ocorrem dentro da escala de tempo de um dia, tais como fenômenos de mesoescala e com escala de nuvens cumulus isoladas.

Como consequência da alta frequência de oscilação desses modos, as ondas de Poincaré têm uma estrutura completamente ageostrófica, com uma considerável e expressiva divergência horizontal associada ao campo de velocidade dessas ondas. Por esta razão, essas ondas estão diretamente relacionadas com a convecção profunda e a formação e propagação de tempestades.
As ondas de Poincaré também desempenham um papel importante no chamado ajuste geostrófico. Neste processo, uma perturbação inicial com estrutura ageostrófica (como por exemplo, uma fonte de calor impulsiva devido a um conjunto de células convectivas) projeta grande parte de sua energia nesses modos de gravidade-inerciais. Esta energia projetada nos modos de Poincaré, por sua vez, é rapidamente dispersada para longe da região da fonte, de modo que após um determinado tempo prevalece sobre a região da fonte e sua vizinhança a estrutura quase-geostrófica resultante da atividade dos modos lentos (geostróficos). Este problema do ajuste geostrófico será novamente discutido no próximo capítulo, onde mostraremos que no regime fracamente não linear os modos geostróficos não são afetados pelas ondas de gravidade-inerciais.

Os autovetores à direita correspondentes aos autovalores definidos por (5.18) são dados por:

$$\mathbf{R}_{k,l}^{(0)} = \begin{pmatrix} -ilg \\ ikg \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{5.19a}$$

$$\mathbf{R}_{k,l}^{(\pm 1)} = \begin{pmatrix} k\omega^{(\pm 1)} + ilf_0 \\ l\omega^{(\pm 1)} - ikf_0 \\ |\mathbf{k}|^2 H_0 \end{pmatrix} \tag{5.19b}$$

Os autovetores definidos acima formam uma base ortogonal no espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ em relação ao produto interno

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbb{C}^3} = \bar{f}_1 g_1 + \bar{f}_2 g_2 + \bar{f}_3 g_3 \tag{5.20}$$

onde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ e $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ representam dois elementos quaisquer do espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ e a barra sobre as componentes indicam o complexo conjugado. Fica como exercício para o leitor verificar a ortogonalidade mútua entre os autovetores.

Dado que os autovetores (5.19) constituem uma base ortogonal em $\mathbb{C}^3$ e as funções $e^{ikx+ily}$ formam uma base ortogonal em $L^2(\mathbb{T}^2)$ (espaço das funções de quadrado integrável no toro bi-dimensional), a solução geral de (5.12) pode ser escrita como

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\alpha=-1}^{1} A_{k,l}^{(\alpha)} \mathbf{R}_{k,l}^{(\alpha)} e^{ikx+ily-i\omega_{k,l}^{(\alpha)} t} \tag{5.21}$$

onde $A_{k,l}^{(\alpha)}$ é uma constante que depende da projeção do dado inicial nos modos:

$$A_{k,l}^{(\alpha)} = \langle \mathbf{R}_{k,l}^{(\alpha)}, \mathbf{u}_{k,l}(t=0) \rangle_{\mathbb{C}^3} \tag{5.22}$$

onde

$$\mathbf{u}_{k,l}(t=0) = \int\int_{\mathbb{T}^2} \mathbf{u}(x, y, t=0) e^{-ikx-ily} dxdy \tag{5.23}$$

5.3 Dinâmica atmosférica estratificada

Até agora temos estudado os modos normais de modelos da dinâmica de fluidos geofísicos de uma única camada, representados pelas equações da água-rasa bem como pelo limite dessas equações num regime de forte rotação, representado pelo modelo quase-geostrófico de água-rasa. Vamos agora analisar os modos normais de modelos com estratificação vertical. Como exemplo, abordaremos o modelo hidrostático da atmosfera que usa a pressão atmosférica como coordenada vertical, representado pelas equações (4.40), (4.41), (4.44) e (4.48). Escrevendo novamente essa equações, temos:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + \omega\partial_p u - fv + \partial_x \phi = 0 \tag{5.24a}$$
$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + \omega\partial_p v + fu + \partial_y \phi = 0 \tag{5.24b}$$
$$\partial_p \phi = -\alpha \tag{5.24c}$$
$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_p \omega = 0 \tag{5.24d}$$

sendo $\alpha = \frac{1}{\rho}$ o volume específico. As equações (5.24a)-(5.24b), (5.24c) e (5.24d) referem-se, respectivamente, às equações do momento horizontal, do momento vertical (aproximada pelo balanço hidrostático) e à equação da continuidade (conservação de massa). Para fechar o sistema, é necessário ainda incluir a equaçao de conservação da energia termodinâmica, além da equação do estado para um gás ideal. Assim, a equação do estado para o ar seco e a primeira lei da termodinâmica podem ser escritas como segue:

$$p\alpha = RT \tag{5.25}$$

$$C_v \frac{DT}{Dt} + p\frac{D\alpha}{Dt} = Q \tag{5.26}$$

onde C_v é a capacidade térmica do ar seco a volume constante e R a constante dos gases para o ar seco; Q refere-se a uma forçante diabática, que tipicamente representa os processos de aquecimento e/ou resfriamento na atmosfera por: (i) calor latente associado com a condensação do vapor d'água nas nuvens e a consequente precipitação, (ii) calor sensível associado com o fluxo de calor da superfície para a atmosfera pelos turbilhões na camada limite planetária e (iii) transferência radiativa. Lembrando que na equação (5.26),

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + \omega\partial_p \tag{5.27}$$

sendo $\omega = \frac{Dp}{Dt}$ a velocidade vertical em coordenadas isobáricas ($\omega \approx -\rho g w$). Combinando (5.25) e (5.26), podemos reescrever a primeira lei da termodinâmica como:

$$C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha\omega = Q \tag{5.28}$$

Para obter os modos normais do sistema de EDPs formado pelas equações (5.24), (5.25) e (5.26), vamos analisar o caso sem forçante, ou seja, adiabático ($Q = 0$) e linearizar as equações em torno de um estado básico em repouso. Neste contexto, vamos considerar o seguinte ansatz:

$$u = \delta u'(x, y, p, t) \tag{5.29a}$$
$$v = \delta v'(x, y, p, t) \tag{5.29b}$$
$$\omega = \delta\omega'(x, y, p, t) \tag{5.29c}$$
$$\phi = \phi_0(p) + \delta\phi'(x, y, p, t) \tag{5.29d}$$
$$\alpha = \alpha_0(p) + \delta\alpha'(x, y, p, t) \tag{5.29e}$$
$$T = T_0(p) + \delta T'(x, y, p, t) \tag{5.29f}$$

com $0 < \delta << 1$ e $T_0(p)$, $\phi_0(p)$ e $\alpha_0(p)$ satisfazendo

$$\frac{d\phi_0}{dp} = -\alpha_0 \tag{5.30a}$$
$$p\alpha_0 = RT_0 \tag{5.30b}$$

Dessa forma, substituindo o ansatz (5.29) em (5.24) e (5.28), usando (5.30), e retendo os termos $O(\delta)$ segue que:

$$\partial_t u - fv + \partial_x \phi = 0 \tag{5.31a}$$
$$\partial_t v + fu + \partial_y \phi = 0 \tag{5.31b}$$
$$\partial_p \phi = -\alpha \tag{5.31c}$$
$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_p \omega = 0 \tag{5.31d}$$
$$\partial_t T - S_p \omega = 0 \tag{5.31e}$$

onde $S_p = \frac{\alpha_0}{C_p} - \frac{dT_0}{dp}$ é o parâmetro de estabilidade estática, i.e., $S_p > 0$ para uma atmosfera com estratificação estável. Nas equações acima, novamente omitimos o sobre-índice "' "por simplicidade. Combinando (5.31c) e (5.31e) podemos reescrever a equação da termodinâmica linearizada (5.31e) em termos da espessura diferencial:

$$\partial_t \partial_p \phi + \sigma_0 \omega = 0 \tag{5.32}$$

onde $\sigma_0 = S_p \frac{R}{p} = \frac{R}{p}(\frac{\alpha_0}{C_p} - \frac{dT_0}{dp})$ também mede a estabilidade estática da atmosfera. Podemos ainda eliminar ω em (5.32) usando a equação da continuidade (5.31d):

$$\partial_t \partial_p (\sigma_0^{-1} \partial_p \phi) - (\partial_x u + \partial_y v) = 0 \tag{5.33}$$

Assim, (5.31a), (5.31b) e (5.33) constituem um sistema de três EDPs a três incógnitas u, v e ϕ. Supondo a seguinte separação de variáveis

$$\begin{pmatrix} u(x,y,p,t) \\ v(x,y,p,t) \\ \phi(x,y,p,t) \end{pmatrix} = G(p) \begin{pmatrix} \hat{u}(x,y,t) \\ \hat{v}(x,y,t) \\ \hat{\phi}(x,y,t) \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

segue que a estrutura vertical da solução satisfaz à seguinte EDO

$$\frac{d}{dp}(\sigma_0^{-1} \frac{dG}{dp}) + \frac{1}{c^2} G = 0 \tag{5.35}$$

enquanto a estrutura horizontal é governada pelo sistema de equações da água-rasa linearizado:

$$\partial_t \hat{u} - f\hat{v} + \partial_x \hat{\phi} = 0 \tag{5.36a}$$

$$\partial_t \hat{v} + f\hat{u} + \partial_y \hat{\phi} = 0 \tag{5.36b}$$

$$\partial_t \hat{\phi} + c^2(\partial_x \hat{u} + \partial_y \hat{v}) = 0 \tag{5.36c}$$

onde c^2 é a constante de separação, que é determinada em termos dos autovalores do problema da estrutura vertical, como veremos a seguir. Para analisar melhor a estrutura vertical da solução, vamos supor como condições de fronteira na vertical $\omega = 0$ em $p = 0$ e em $p = p_0$, onde $p_0 \approx 1000hPa$ corresponde ao valor padrão da pressão atmosférica na superfície da Terra. Fisicamente, essas condições significam que o fluxo vertical de massa deve ser nulo na superfície da Terra e no topo da atmosfera. De (5.32) segue que tais condições implicam que

$$\frac{dG}{dp} = 0 \text{ em } p = 0 \tag{5.37a}$$

$$\frac{dG}{dp} = 0 \text{ em } p = p_0 \tag{5.37b}$$

A equação (5.35), juntamente com as condições de fronteira (5.37a) e (5.37b), constitui um problema de Sturm-Liouville, com autovalor $\lambda = \frac{1}{c^2}$ e autofunções $G(p)$. Logo, este problema não é unicamente determinado, havendo um conjunto enumerável de autovalores $\lambda_n = \frac{1}{c_n^2}$ que constitui uma sequência crescente e ilimitada para $n = 0, 1, 2, 3.....$ Além disso, as autofunções correspondentes a estes autovalores são mutuamente ortogonais, constituindo uma base no espaço das funções de quadrado integrável no intervalo $[0, p_0]$ ($L^2[0, p_0]$). Logo, qualquer função $f(p)$ tal que $\int_0^{p_0} f(p)^2 dp < \infty$ pode ser escrita como uma série de Fourier generalizada do tipo

$$f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_n(p), \tag{5.38}$$

com

$$c_n = \frac{\int_0^{p_0} f(p) G_n(p) dp}{\int_0^{p_0} G_n(p)^2 dp} \tag{5.39}$$

Para determinar os autovalores λ_n e as correspondentes autofunções $G_n(p)$, vamos supor que o parâmetro de estabilidade estática $\sigma_0(p)$ seja constante. Esta suposição tem como intuito simplificar a análise matemática. Neste caso, para σ_0 =const, podemos reescrever a equação (5.35) como:

$$\frac{d^2G}{dp^2} + \frac{\sigma_0}{c^2}G = 0 \tag{5.40}$$

A solução geral de (5.40) é dada por

$$G(p) = A\cos\lambda p + B\sin\lambda p \tag{5.41}$$

com $\lambda = \frac{\sqrt{\sigma_0}}{c}$. Substituindo (5.41) na condição de fronteira (5.37a) segue que $B = 0$. Da mesma forma, substituindo (5.41) na condição de fronteira (5.37b) tem-se que

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{p_0}\ , \text{ n = 0, 1, 2, 3 ...} \tag{5.42}$$

e as correspondentes autofunções são dadas por

$$G_n(p) = \cos\frac{n\pi}{p_0}p, \text{ n = 0, 1, 2, 3 ...} \tag{5.43}$$

Consequentemente, a constante de separação c, que aparece como velocidade característica das ondas lineares nas equações da água-rasa (5.36), que governam a evolução temporal da estrutura horizontal dos modos, é dada por

$$c_n = \frac{\sqrt{\sigma_0}}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{\sigma_0}p_0}{n\pi} \tag{5.44}$$

para n = 0, 1, 2, 3 ... . Para $n = 0$, tem-se que $G_0(p) = 1$. Logo, este modo apresenta uma estrutura vertical para os campos de velocidade e geopotencial constantes ao longo de toda a coluna atmosférica. Por esta razão, este modo vertical é denominado modo barotrópico. Da equação acima, segue que $c_0 \to \infty$ para este modo. Consequentemente, de (5.36c) segue que $\partial_x\hat{u}_0 + \partial_y\hat{v}_0 = 0$, i.e., a divergência horizontal do campo de velocidade associada a este modo vertical deve ser nula. Consequentemente, as equações (5.36) para este modo barotrópico não permitem ondas de gravidade como soluções características, existindo portanto somente o modo geostrófico, no caso da aproximação do plano-f, ou as ondas de Rossby, no caso da inclusão do efeito-β ($f = f_0 + \beta y$). Logo, a estrutura horizontal dos campos de vento e geopotencial para este modo é governada pelas equações

$$\partial_t \hat{u}_0 - f\hat{v}_0 + \partial_x \hat{\phi}_0 = 0 \tag{5.45a}$$

$$\partial_t \hat{v}_0 + f\hat{u}_0 + \partial_y \hat{\phi}_0 = 0 \tag{5.45b}$$

$$\partial_x \hat{u}_0 + \partial_y \hat{v}_0 = 0 \tag{5.45c}$$

Alternativamente, tomando o rotacional das equações acima, podemos reescrever as equações de evolução da estrutura horizontal do modo barotrópico como:

$$\partial_t \zeta_0 + \beta \hat{v}_0 = 0 \tag{5.46}$$

com $\zeta_0 = \partial_x \hat{v}_0 - \partial_y \hat{u}_0$. Usando a função corrente ψ:

$$\hat{u}_0 = -\partial_y \psi \tag{5.47a}$$

$$\hat{v}_0 = \partial_x \psi \tag{5.47b}$$

podemos reescrever (5.46) como

$$\partial_t \nabla^2 \psi + \beta \partial_x \psi = 0 \tag{5.48}$$

Note que (5.48) pode ser obtida a partir da equação quase-geostrófica (5.6) para $H_0 \to \infty$. A equação (5.48) é a versão linearizada do chamado modelo barotrópico não divergente. As soluções características de (5.48) correspondem às ondas de Rossby barotrópicas não divergentes. A relação de dispersão dessas ondas é dada de acordo com (5.8) para $H_0 \to \infty$, ou seja,

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{-\beta k}{|\mathbf{k}|^2} \tag{5.49}$$

As ondas de Rossby barotrópicas não divergentes dadas por (5.49) são responsáveis pelos chamados padrões de teleconexões existentes na atmosfera. São essas ondas que fazem com que forçantes na atmosfera associadas com anomalias de águas quentes no Pacífico equatorial causem perturbações na atmosfera responsáveis por anomalias climáticas em médias e altas latitudes dos Estados Unidos, por exemplo.

Os modos verticais com $n \geq 1$ são chamados modos baroclínicos ou modos internos da atmosfera. Esses modos apresentam uma estrutura oscilatória na vertical. O modo $n = 1$ é denominado primeiro modo baroclínico, $n = 2$ o segundo modo baroclínico e assim por diante. A estrutura horizontal dos modos baroclínicos é governada pelo sistema de equações da água-rasa (5.11), com altura equivalente dada por

$$H_0^{(n)} = \frac{\sigma_0 p_o^2}{g\pi^2 n^2}, \text{ n} = 1,\ 2,\ 3,\ ... \tag{5.50}$$

Para valores típicos do parâmetro de estabilidade estática na atmosfera e da pressão atmosférica na superfície da Terra, $\sigma_0 \approx 2 \times 10^{-6} m^4 s^2 Kg^{-2}$ e $p_0 \approx 1000 hPa$, tem-se que $H_0^{(1)} \approx 200m$, $H_0^{(2)} \approx 50m$, $H_0^{(3)} \approx 20m$, $H_0^{(4)} \approx 12m$, e assim por diante.

Dessa forma, as soluções características das equações da dinâmica atmosférica estratificada, representada pelas equações (5.31), são dadas pelas ondas de Rossby barotrópicas não divergentes somadas às soluções características das equações da água-rasa representadas por (5.36) referente a cada modo baroclínico.

5.4 Sugestões de leitura

Referência clássica para o estudo dos modos normais na atmosfera é o livro de [*Pedlosky*(1987)]. Uum tratamento mais matemático pode ser encontrado em [*Majda*(2003)], incluindo um importante tema aqui omitido, o dos modos normais para a dinâmica equatorial.

6

Teoria Não Linear de Ondas

No capítulo anterior abordamos a teoria de ondas em alguns modelos da dinâmica de fluídos geofísicos obtidos no Capítulo 4 no regime no qual as perturbações com estrutura de onda em torno de um estado de referência estacionário possuem amplitudes infinitesimais, de tal forma que somente os termos de primeira ordem em relação à amplitude das perturbações são considerados nas equações governantes. Neste caso, as ondas são obtidas como soluções características da versão linearizada do modelo em questão. Neste capítulo estenderemos essa análise para o regime fracamente não linear. Neste regime, a amplitude das ondas ainda é considerada pequena o suficiente de modo às soluções características do problema linear ainda estarem presentes e representarem os efeitos dominantes na dinâmica do sistema. Porém, ao contrário do regime linear, neste regime dito fracamente não linear os efeitos de ordem mais alta até então desconsiderados, representados pelos termos advectivos não lineares das equações governantes, constituem correções significativas nas soluções características do problema linear, especialmente quando olhamos para a evolução do modelo em escalas mais longas de tempo comparadas com os períodos característicos das ondas lineares. Vamos neste capítulo restringir nossa análise para o caso das ondas imersas num estado básico em repouso e homogêneo. Neste caso, as correções acima mencionadas na dinâmica das ondas devido aos efeitos não lineares levam às amplitudes das ondas a variarem no tempo numa escala longa comparada com o período característico das mesmas. Neste contexto, a independência entre os diferentes modos é quebrada, levando os mesmos a trocarem energia entre si.

Na Seção 6.1 analisaremos a dinâmica fracamente não linear das ondas no modelo quase-geostrófico da água-rasa. Já na Seção 6.2 abordaremos a teoria fracamente não linear de ondas no modelo de água-rasa com rotação. No caso das equações da dinâmica atmosférica com estratificação cuja teoria linear foi explorada na Seção 5.3 do capítulo anterior, a teoria fracamente não linear de ondas foi analisada por ([*Raupp*(2006)]) para o caso da geometria do plano β equatorial.

6.1 Ondas não lineares: modelo QG

Vamos considerar novamente o modelo quase-geostrófico (QG) de água-rasa representado pelas equações (5.1)-(5.3). A partir dessas equações vamos novamente obter as equações que governam a evolução temporal das perturbações em torno de um estado básico em repouso e homogêneo. Porém, ao contrário da Seção 5.1 do capítulo anterior, vamos agora restaurar os termos não lineares de segunda ordem em termos das perturbações. Para tanto, vamos considerar novamente perturbações de pequena amplitude em torno de um estado básico em repouso e homogêneo caracterizado por $\psi_0 = \frac{H_0 g}{f_0}$. Assim, consideramos:

$$\psi = \frac{gH_0}{f_0} + \psi' \tag{6.1a}$$

$$q = \beta y + \nabla^2 \psi' - \frac{\psi'}{L_d^2} \tag{6.1b}$$

com $|\psi'| << \frac{gH_0}{f_0}$ e $|\nabla^2 \psi' - \frac{\psi'}{L_d^2}| << |\beta y|$. Inserindo (6.1) em (5.1) e retendo agora também os termos se segunda ordem em termos de

ψ', temos:

$$\partial_t(\nabla^2\psi' - \frac{\psi'}{L_d^2}) + \beta\partial_x\psi' + J(\psi', \nabla^2\psi' - \frac{\psi'}{L_d^2}) = 0 \qquad (6.2)$$

onde $L_d = \frac{\sqrt{gH_0}}{f_0}$ é o raio de deformação de Rossby. Para analisar a solução de (6.2) no regime fracamente não linear, é conveniente escrever esta equação na forma adimensional, pois neste caso fica mais clara a ordem de magnitude de cada termo da equação acima. Assim, usando o raio de deformação de Rossby $L_d = \frac{gH_0}{f_0}$ como escala de comprimento, o inverso do termo dominante do parâmetro de Coriolis f_0^{-1} como escala temporal e considerando U como sendo a escala característica das perturbações do campo de velocidade (i.e., $\psi' = L_d U \psi$), podemos reescrever (6.2) na forma adimensional como segue:

$$\partial_t(\nabla^2\psi - \psi) + \hat{\beta}\partial_x\psi + \epsilon J(\psi, \nabla^2\psi - \psi) = 0 \qquad (6.3)$$

Em (6.3) acima, $\hat{\beta} = \frac{\beta L_d}{f_0} = O(1)$ refere-se ao parâmetro de Rossby na escala adimensional, enquanto $\epsilon = Fr = \frac{U}{\sqrt{gH_0}}$ é o número de Froude. Para movimentos de grande-escala na atmosfera, temos que $U \approx 10ms^{-1}$ e $H_0 \approx 10Km$ (altura típica da troposfera), resultando em $Fr \approx 3 \times 10^{-2}$. Da mesma maneira, para movimentos de meso-escala na camada ativa do oceano, $U \approx 1ms^{-1}$ e $H_0 \approx 100m$, resultando no mesmo valor típico do número de Froude.

Logo, tanto para os movimentos de grande-escala na troposfera quanto para os movimentos de meso-escala na camada ativa do oceano, os termos não lineares tem magnitude pequena em comparação com os termos lineares. Logo, para analisar a solução de (6.3) no regime fracamente não linear, vamos utilizar o método assintótico de múltiplas escalas temporais introduzido na análise da solução da equação do pêndulo elástico abordada no Capítulo 2. Assim, no limite $\epsilon \to 0^+$ vamos buscar soluções de (6.3) da seguinte forma:

$$\psi^\epsilon = \psi^{(0)}(x, y, t, \epsilon t) + \epsilon\psi^{(1)}(x, y, t, \epsilon t) + O(\epsilon^2) \qquad (6.4)$$

Substituindo o ansatz (6.4) em (6.3) e agrupando os termos de mesma potência de ϵ, segue que os termos de ordem dominante (i.e., os termos de $O(1)$) resultam na versão linearizada de (6.3):

$$\partial_t(\nabla^2\psi^{(0)} - \psi^{(0)}) + \hat{\beta}\partial_x\psi^{(0)} = 0 \tag{6.5}$$

Como vimos na Seção 5.1 do capítulo anterior, as soluções características de (6.5) são dadas pelas ondas de Rossby, e a solução geral é como uma superposição dessas ondas, i.e.,

$$\psi^{(0)}(x, y, t, \epsilon t) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} A_{\mathbf{k}}(\epsilon t)e^{ikx+ily-i\omega(\mathbf{k})t} + \text{c.c.} \tag{6.6}$$

onde "c.c."representa o complexo conjugado do termo precedente, $\mathbf{k} = (k, l)$ é o vetor número de onda e $\omega(\mathbf{k})$ é a frequência temporal de oscilação, que satisfaz à seguinte relação de dispersão:

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{-\hat{\beta}k}{|\mathbf{k}|^2 + 1} \tag{6.7}$$

Em (6.6), a amplitude de cada modo, ao invés de constante como no regime linear, é permitida evoluir na escala longa de tempo. A evolução temporal das amplitudes harmônicas $A_{\mathbf{k}}$ será determinada a partir da condição de solubilidade do problema de $O(\epsilon)$. De fato, agrupando os termos de $O(\epsilon)$, obtém-se:

$$\partial_t(\nabla^2\psi^{(1)}-\psi^{(1)})+\hat{\beta}\partial_x\psi^{(1)} = -\partial_T(\nabla^2\psi^{(0)}-\psi^{(0)})-J(\psi^{(0)}, \nabla^2\psi^{(0)}-\psi^{(0)}) \tag{6.8}$$

onde $T = \epsilon t$ representa a escala longa de tempo. Antes de discutir a solução da equação acima, um fato importante acerca do nosso ansatz (6.4) é que, para que tal expansão assintótica seja útil para nosso propósito, é necessário que a solução $\psi^{(0)}$ represente de fato os efeitos de ordem dominante. Para que isto aconteça no limite $\epsilon \to 0^+$, é necessário que o coeficiente $\psi^{(1)}$ da expansão assintótica cresça sub-linearmente na escala rápida de tempo t (Majda 2003), ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\psi^{(1)}|}{|t|} = 0 \tag{6.9}$$

De fato, se o coeficiente $\psi^{(1)}$ da expansão assintótica crescer linearmente em t, i.e., se $\psi^{(1)} \approx |t|$, para t suficientemente grande, o termo $\epsilon\psi^{(1)}$ da série (6.4) seria dado por $\epsilon\psi^{(1)} \approx \epsilon|t| \approx |T|$. Logo, para t suficientemente grande, o termo $\epsilon\psi^{(1)}$ teria mesma ordem de magnitude do termo $\psi^{(0)}$. Consequentemente, a condição (6.9) é de fato necessária para a validade da expansão assintótica (6.4).

Uma vez que $\psi^{(0)}$ em (6.8) é conhecido, representado por (6.6), a equação (6.8) constitui um problema linear não homogêneo para $\psi^{(1)}$. Além disso, a solução homogênea de (6.8) é idêntica à solução de ordem dominante $\psi^{(0)}$ em sua dependência espacial e na escala rápida de tempo t. Com isso, o termo não homogêneo no lado direito de (6.8) constitui uma forçante harmônica para $\psi^{(1)}$. Se a frequência dessa forçante harmônica coincidir com alguma frequência natural do sistema, ocorre o fenômeno conhecido como *ressonância*. Essa ressonância associada ao casamento da frequência da forçante com uma das frequências naturais do sistema dadas por (6.7) leva ao crescimento linear com o tempo da amplitude do modo ressonante com a forçante. As componentes da solução $\psi^{(1)}$ que crescem linearmente com a escala rápida de tempo em função da ressonância com a forçante são conhecidas como soluções seculares. Tais soluções seculares fazem com que a expansão assintótica (6.4) colapse, pois levam o termo $\epsilon\psi^{(1)}$ a possuir a mesma ordem de magnitude do termo $\psi^{(0)}$ para t suficientemente grande, conforme discutido anteriormente. Logo, para garantir a validade de (6.4) é necessário eliminar essas soluções seculares, ou seja, é necessário garantir que essas soluções seculares sejam nulas. Para tanto, o termo forçante deve ser ortogonal ao modo ressonante, e tal condição é conhecida como **alternativa de Fredholm**. Assim, substituindo (6.6) em (6.8) e aplicando a alternativa de Fredholm para todos os modos ressonantes com o termo não homogêneo de (6.8) leva à seguinte equação de evolução da amplitude de um dado harmônico $\mathbf{k} = (k, l)$ devido à interação desse harmônico com todos os possíveis modos ressonantes:

$$(|\mathbf{k}|^2 + 1)\frac{dA_{\mathbf{k}}}{dT} = \sum_{\mathbf{k_1}\in\mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{k_2}\in\mathbb{Z}^2} A_{\mathbf{k_1}} A_{\mathbf{k_2}} \sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}} \tag{6.10}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$. Em (6.10) acima, $\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}}$ é o coeficiente de interação ou de acoplamento entre os modos $\mathbf{k}$, $\mathbf{k_1}$ e $\mathbf{k_2}$, dado por:

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}} = \mathbf{k_1}^{\perp} \cdot \mathbf{k_2}(|\mathbf{k_2}|^2 + 1) - \mathbf{k_2}^{\perp} \cdot \mathbf{k_1}(|\mathbf{k_1}|^2 + 1) \tag{6.11}$$

O coeficiente de interação representa uma medida do grau de acoplamento intrínseco entre esses três modos e descreve o quanto a advecção de vorticidade potencial de um modo devido ao campo de velocidade de outro modo do tripleto projeta no terceiro modo $\mathbf{k}$. Assim, toda a informação da não linearidade do modelo original (6.3) está contida nesses coeficientes. Assim, a equação (6.10) acima governa a evolução na escala lenta da amplitude do harmônico $\mathbf{k}$ devido a todos os harmônicos cujos números de onda e frequências características satisfazem às seguintes relações de ressonância com o modo $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} \tag{6.12a}$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k_1}) + \omega(\mathbf{k_2}) \tag{6.12b}$$

Os harmônicos cujos números de onda e frequências temporais satisfazem às condições (6.12) constituem um chamado *tripleto ressonante*. No regime fracamente não linear aqui analisado, somente os tripletos ressonantes contribuem para a não linearidade do sistema. A natureza triádica dessas interações não lineares entre os modos resulta do fato de os termos não lineares das equações governantes do modelo quase-geostrófico serem quadráticos, representados pelos termos de advecção de vorticidade potencial. Na dinâmica de fluídos geofísicos, os modelos possuem não linearidades quadráticas, pelo menos na mais baixa ordem, devido aos termos advectivos. Um aspecto interessante, característico do modelo quase-geostrófico, é que um único harmônico $\mathbf{k}$, ou seja, uma única onda de Rossby monocromática, constitui uma solução exata do modelo não linear completo representado por (6.3), uma vez que um único harmônico $\mathbf{k}$ anula o jacobiano, como pode ser notado através de (6.11). Logo, para se ter uma dinâmica não linear no modelo quase-geostrófico é preciso que o dado inicial contenha, pelo menos, dois modos. Neste caso, a interação não linear entre os dois harmônicos irá excitar um ou mais modos que constituem tripletos ressonantes com esses dois modos iniciais.

Dessa forma, a solução de (6.3) no limite $\epsilon \to 0^+$ é dada por:

$$\psi(x, y, t, \epsilon t) = Re[\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} A_{\mathbf{k}}(\epsilon t) e^{ikx+ily-i\omega(\mathbf{k})t}] + O(\epsilon) \tag{6.13}$$

com $\omega(\mathbf{k})$ satisfazendo (6.7) e as amplitudes harmônicas variando lentamente no tempo de acordo com (6.10).

Logo, vimos até aqui que o papel da não linearidade na dinâmica das ondas de Rossby é quebrar a independência entre os harmônicos, permitindo que suas amplitudes variem no tempo numa escala longa comparada com seus períodos característicos, em função do acoplamento triádico ressonante com outros harmônicos. Em função da não linearidade se manifestar somente numa escala de tempo longa comparada aos períodos característicos dos modos, no regime fracamente não linear as ondas preservam suas características de propagação durante um período típico de interação não linear.
Para entender um pouco melhor a dinâmica não linear dessa interação entre os harmônicos descrita por (6.10), vamos a seguir rever as leis de conservação do modelo não linear representado por (6.3) e analisar como essas quantidades conservadas restringem as interações não lineares onda-onda.

6.1.1 Quantidades conservadas e vínculos energéticos das ondas de Rossby

Nesta subseção analisaremos as consequências de alguns vínculos integrais para a dinâmica dos tripletos ressonantes de ondas de Rossby, seguindo o formalismo de [*Ripa*(1981)]. As quantidades conservadas relevantes para a dinâmica das interações não lineares entre ondas são aquelas que possuem uma dependência quadrática em relação às perturbações. Tais quantidades são a pseudoenergia e o pseudomomento. Essas quantidades referem-se à energia e ao momento linear, respetivamente, dos distúrbios, ou seja, a energia e o momento linear totais calculados em termos dos desvios em relação a um estado estacionário de referência. No caso do modelo quse-geostrófico aqui abordado, o pseudo-momento também é frequentemente denominado *enstrofia potencial*. Em geral, a pseudoenergia e o pseudomomento são determinadas usando o formalismo hamiltoniano não canônico das equações da dinâmica de fluídos, no qual a pseudo-energia e o pseudo-momento são obtidos combinando a Hamiltoniana e o momento linear zonal, respetivamente, com os invariantes Casimirs (ver, por exemplo, [*Shepherd*(1990)]). Uma descrição deste formalismo hamiltoniano não canônico e suas aplicações para a análise de estabilidade de sistemas será dada no Capítulo 7. No entanto, como já mencionado, o estado de referência estacionário aqui adotado refere-se a um estado básico em repouso e homogêneo representado por $\psi_0 = \frac{gH_0}{f_0}$ e $q_0 = \beta y$. Assim, a pseudo-energia e a enstrofia totais podem também ser facilmente obtidas diretamente a partir da equação para as perturbações dada por (6.3), como faremos aqui. Com isso, multiplicando (6.3) por ψ e integrando ao longo do toro bi-dimensional $\mathbb{T}^2$, obtemos a conservação da pseudoenergia:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\int [(\nabla\psi)^2 + \psi^2]dxdy = \text{const} \tag{6.14}$$

Agora, se multiplicarmos (6.3) por $(\nabla^2\psi - \psi)$ e integrarmos ao longo de $\mathbb{T}^2$, obtemos a conservação da enstrofia potencial:

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^2}\int [\nabla^2\psi - \psi]^2 dxdy = \text{const} \tag{6.15}$$

Substituindo (6.13) em (6.14)obtemos a identidade de Parseval para o modelo quase-geostrófico de água-rasa:

$$\mathbb{E} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \mathbb{E}_{\mathbf{k}}|A_{\mathbf{k}}|^2 \tag{6.16}$$

com $\mathbb{E}_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^2 + 1$. Analogamente, substituindo (6.13) em (6.15) obtém-se:

$$\mathbb{P} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} \mathbb{P}_{\mathbf{k}}|A_{\mathbf{k}}|^2 \tag{6.17}$$

onde $\mathbb{P}_{\mathbf{k}} = (|\mathbf{k}|^2 + 1)^2 = \mathbb{E}_{\mathbf{k}}^2$. Logo, a enstrofia potencial associada a um dado harmônico é proporcional a sua própria energia. Multiplicando (6.10) por $\bar{A}_{\mathbf{k}}$ (onde "$\bar{()}$"indica o complexo conjugado) e multiplicando a equação análoga à (6.10) para $\bar{A}_{\mathbf{k}}$ por $A_{\mathbf{k}}$ e somando o resultado, obtém-se a equação para a energia de cada harmônico:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{k}}\frac{d|A_{\mathbf{k}}|^2}{dT} = \sum_{\mathbf{k_1}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\mathbf{k_2}\in\mathbb{Z}^2}\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}} Re(\bar{A}_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k_1}}A_{\mathbf{k_2}}) \tag{6.18}$$

Da mesma forma, a evolução temporal da enstrofia potencial de um modo $\mathbf{k}$ é dada por:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{k}}\frac{d|A_{\mathbf{k}}|^2}{dT} = \sum_{\mathbf{k_1}\in\mathbb{Z}^2}\sum_{\mathbf{k_2}\in\mathbb{Z}^2}\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}}\mathbb{E}_{\mathbf{k}} Re(\bar{A}_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k_1}}A_{\mathbf{k_2}}) \tag{6.19}$$

Consequentemente, tomando a derivada temporal de (6.16) e (6.17) e usando (6.18) e (6.19) segue que:

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}}\mathbb{E}_{\mathbf{k}}\frac{d|A_{\mathbf{k}}|^2}{dT} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k_1}}\sum_{\mathbf{k_2}}\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}} Re(\bar{A}_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k_1}}A_{\mathbf{k_2}}) = 0 \tag{6.20a}$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}}\mathbb{P}_{\mathbf{k}}\frac{d|A_{\mathbf{k}}|^2}{dT} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k_1}}\sum_{\mathbf{k_2}}\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}}\mathbb{E}_{\mathbf{k}} Re(\bar{A}_{\mathbf{k}}A_{\mathbf{k_1}}A_{\mathbf{k_2}}) = 0 \tag{6.20b}$$

Dessa forma, para que $\mathbb{E}$ e $\mathbb{P}$ sejam conservados, para cada tripleto de modos $\mathbf{k}$, $\mathbf{k_1}$ e $\mathbf{k_2}$ que satisfazem às condições (6.12), os coeficientes de interação $\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}}$, $\sigma_{\mathbf{k_1}}^{\mathbf{k}\mathbf{k_2}}$ e $\sigma_{\mathbf{k_2}}^{\mathbf{k}\mathbf{k_1}}$ devem satisfazer às seguintes relações:

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}} - \sigma_{\mathbf{k_1}}^{\mathbf{k}\mathbf{k_2}} - \sigma_{\mathbf{k_2}}^{\mathbf{k}\mathbf{k_1}} = 0 \tag{6.21a}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{k}}\sigma_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k_1}\mathbf{k_2}} - \mathbb{E}_{\mathbf{k_1}}\sigma_{\mathbf{k_1}}^{\mathbf{k}\mathbf{k_2}} - \mathbb{E}_{\mathbf{k_2}}\sigma_{\mathbf{k_2}}^{\mathbf{k}\mathbf{k_1}} = 0 \tag{6.21b}$$

Para entendermos melhor o que os vínculos (6.21a)-(6.21b) significam, vamos analisar a dinâmica reduzida de um único tripleto ressonante. Logo, truncando a expansão (6.6) de modo a considerar um único tripleto de modos $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ e $\mathbf{k_3}$ satisfazendo $\mathbf{k_1} = \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3}$ e $\omega(\mathbf{k_1}) = \omega(\mathbf{k_2}) + \omega(\mathbf{k_3})$, a equação (6.10) reduz-se ao seguinte sistema:

$$\mathbb{E}_1 \frac{dA_1}{dT} = \sigma_1^{23} A_2 A_3 \tag{6.22a}$$
$$\mathbb{E}_2 \frac{dA_2}{dT} = \sigma_2^{13} A_1 \bar{A}_3 \tag{6.22b}$$
$$\mathbb{E}_3 \frac{dA_3}{dT} = \sigma_3^{12} A_1 \bar{A}_2 \tag{6.22c}$$

Nas equações acima, por simplicidade utilizamos os índices "1", "2"e "3"para representar os modos $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$ e $\mathbf{k_3}$, respetivamente. O sistema acima é conhecido como problema de três ondas ressonantes ou equações dos tripletos. Para os coeficientes de interação reais e satisfazendo à condição (6.21a), o sistema (6.22) é integrável e a solução analítica é dada em termos das funções elípticas de Jacobi (ver, por exemplo, [*Craik*(1985)] e referências lá contidas).
As equações (6.22) também podem ser escritas em termos das energias dos modos:

$$\mathbb{E}_1 \frac{d|A_1|^2}{dT} = 2\sigma_1^{23} Re(\bar{A}_1 A_2 A_3) \tag{6.23a}$$
$$\mathbb{E}_2 \frac{d|A_2|^2}{dT} = 2\sigma_2^{13} Re(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \tag{6.23b}$$
$$\mathbb{E}_3 \frac{d|A_3|^2}{dT} = 2\sigma_3^{12} Re(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \tag{6.23c}$$

Da equação acima é fácil verificar que o vínculo (6.21a) implica que $\frac{d}{dt}(\mathbb{E}_1|A_1|^2 + \mathbb{E}_2|A_2|^2 + \mathbb{E}_3|A_3|^2) = 0$. Além disso, as equações (6.22) acima mostram que o modo 1 necessariamente recebe energia dos modos 2 e 3 ou cede energia para esses modos. Além disso, a condição (6.21b) implica que o modo 1 necessariamente possui o módulo do número de onda total intermediário, ou seja,

$$\sigma_1 > \sigma_{2,3} \longleftrightarrow |\mathbf{k_{2(3)}}| < |\mathbf{k_1}| < |\mathbf{k_{3(2)}}| \tag{6.24}$$

As relações (6.21) ou (6.24) constituem o chamado *teorema de Fjortoft* ([*Fjortoft*(1953)]). Estes vínculos implicam em restrições fortes para as trocas de energia entre os modos de Rossby. Por exemplo, uma cascata direta de energia em direção aos modos de menor escala espacial não é permitida, pois se um harmônico cede energia para um modo com $|\mathbf{k}|$ maior (onda mais curta), este harmônico necessariamente deverá também transferir energia para outro modo ressonante cujo $|\mathbf{k}|$ é menor (onda mais longa).

A relação de dispersão das ondas de Rossby permite uma abundância de tripletos ressonantes. O problema algébrico de encontrar os harmônicos satisfazendo às condições (6.12), com as frequências dadas por (6.7), tem sido explorado por alguns trabalhos de pesquisa (ver, por exemplo, [*Higgins*(1967)]; [*Lynch*(2003)]; [*Bustamante*(2013)]). Para uma leitura mais avançada sobre ressonâncias triádicas entre ondas em geral, incluindo metodologias para determinar tripletos ressonantes bem como o estudo da dinâmica de sistemas de tripletos acoplados, sugerimos ao leitor a referência ([*Kartashova*(2010)]).

Conforme discutido na Seção 5.1 do capítulo anterior, as ondas de Rossby tipicamente possuem períodos característicos da ordem de alguns dias a uma semana. Com isso, as modulações de amplitude (energia) devido às interações fracamente não lineares tipicamente ocorrem em escalas de tempo da ordem de um mês, ou na chamada escala de tempo intrasazonal ([*Kartashova*(2007)]).

6.2 Ondas não lineares: água-rasa

Nesta seção deste capítulo vamos analisar as interações fracamente não lineares nas equações da água-rasa com rotação, cuja teoria linear foi explorada na Seção (5.2). Trata-se de um exemplo do estudo de ondas fracamente não lineares em um sistema de EDPs, onde a relação de dispersão possui mais de um ramo, ou seja, mais de um tipo de onda é permitido. Consequentemente, além da interação entre diferentes harmônicos de um mesmo ramo da relação de dispersão, *a priori*, podemos ter também harmônicos pertencentes a ramos diferentes do espectro interagindo entre si. Com isso, de modo a estender a teoria linear das equações da água-rasa com rotação abordada na seção (5.2) do capítulo anterior para o caso fracamente não linear, vamos novamente considerar nas equações (4.70) e (4.73) perturbações em torno de um estado básico caracterizado por $u_0 = v_0 = 0$

e $h_{ref} = H_0 = const.$ Porém, ao contrário da abordagem da Seção (5.2), vamos restaurar os termos não lineares envolvendo as perturbações. Neste contexto, supondo

$$\begin{aligned} u &= u' \\ v &= v' \\ h &= H_0 + h', \end{aligned} \tag{6.25}$$

e substituindo as relações acima em (4.70) e (4.73), segue que as equações da água-rasa com rotação agora lê-em-se:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - f_0 v + g\partial_x h = 0 \tag{6.26a}$$
$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + f_0 u + g\partial_y h = 0 \tag{6.26b}$$
$$\partial_t h + H_0(\partial_x u + \partial_y v) + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \tag{6.26c}$$

Nas equações acima, omitimos o sobre-índice "' "para referir-mos às perturbações por simplicidade, além de adotarmos a aproximação do plano -f ($f \approx f_0 = const$). Na forma vetorial, as equações (6.26) são escritas como segue:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u} + \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{6.27}$$

Em (6.27) acima, $\mathbf{u} = (u, v, h)$ refere-se ao vetor estado do modelo, $\mathcal{L}$ é o operador linear dado por (5.13) e $\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ é o operador bi-linear que representa os termos não lineares de (6.26), ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u\partial_x u + v\partial_y u \\ u\partial_x v + v\partial_y v \\ \partial_x(hu) + \partial_y(hv) \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

Conforme demonstrado na seção anterior utilizando o método assintótico de múltiplas escalas temporais para analisar as ondas de Rossby não lineares, a solução de ordem dominante no regime fracamente não linear é ainda dada por uma expansão em termos das soluções características do problema linear, mas com as amplitudes dos modos variando lentamente em comparação com os períodos característicos dos mesmos. Neste caso, o efeito da não linearidade é permitir o acoplamento e a consequente troca de energia entre os modos em tripletos ressonantes. Consequentemente, para analisar a dinâmica fracamente não linear das ondas no sistema (6.27) acima, vamos "chutar"uma solução de (6.27) na forma de uma expansão em termos das soluções características do problema linear, mas com as amplitudes dos modos sendo permitidas a variarem no tempo. Assim, vamos considerar o seguinte ansatz:

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=-1}^{1} A_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(t)\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} e^{ikx+ily-i\omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}t} \tag{6.29}$$

No ansatz acima, $\mathbf{k} = (k, l)$ é o vetor número de onda. Para cada número de onda (k, l), as auto-frequências $\omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ são dadas por (5.18) e indicam três tipos ondas: o modo geostrófico e o par de ondas de gravidade-inerciais, uma propagando para oeste e a outra para leste. Os correspondentes autovetores $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$ são dados por (5.19) e constituem uma base ortogonal em $\mathbb{C}^3$. Substituindo o ansatz (6.29) em (6.27) segue que (6.29) é uma solução de (6.27) desde que as amplitudes dos modos satisfaçam o seguinte sistema de EDOs acopladas:

$$E_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \frac{dA_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}}{dt} = \sum_{\mathbf{k_1},\mathbf{k_2} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\alpha_1,\alpha_2} \bar{A}_{\mathbf{k_1}}^{(\alpha_1)} \bar{A}_{\mathbf{k_2}}^{(\alpha_2)} \sigma_{(\mathbf{k},\alpha)}^{(\mathbf{k_1},\alpha_1)(\mathbf{k_2},\alpha_2)} e^{-i\delta t} \tag{6.30}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ tal que $\mathbf{k} + \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{0}$ e para todo $\alpha_{1,2} = -1, 0, 1$. Na equação acima, $E_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \|\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}\|^2$ refere-se à energia intrínseca do modo $(\mathbf{k}, \alpha)$, dada pelo quadrado da norma do correspondente autovetor; $\delta = \omega_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \omega_{\mathbf{k_1}}^{(\alpha_1)} + \omega_{\mathbf{k_2}}^{(\alpha_2)}$ representa a defasagem entre os modos dos tripletos. Para um tripleto ressonante, tem-se que $\delta = 0$. Em (6.30), $\sigma_{(\mathbf{k},\alpha)}^{(\mathbf{k_1},\alpha_1)(\mathbf{k_2},\alpha_2)}$ é o coeficiente de interação entre os modos dos tripletos, dado por

$$\sigma_{(\mathbf{k},\alpha)}^{(\mathbf{k_1},\alpha_1)(\mathbf{k_2},\alpha_2)} = \langle \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}, \mathcal{B}_{i\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{k_1}}^{(\alpha_1)}, \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{k_2}}^{(\alpha_2)}) \rangle_{\mathbb{C}^3} \tag{6.31}$$

onde $\mathcal{B}_{i\mathbf{k}}$ é o símbolo do operador bi-linear $\mathcal{B}$, obtido a partir da troca de ∂_x por ik e ∂_y por il em (6.28).

Como mostrado na seção anterior, no regime fracamente não linear onde os modos preservam suas características dispersivas ao longo de um período de interação não linear com outros modos, somente os tripletos ressonantes contribuem significativamente para a dinâmica não linear do sistema, ocorrendo neste caso a máxima troca de energia nos tripletos. Logo, vamos dar ênfase novamente aos tripletos ressonantes para os quais $\delta = 0$ em (6.30). Neste contexto, as possibilidades de tripletos ressonantes em (6.30) são: (i)três modos vorticais (geostróficos) interagindo; (ii) três ondas de gravidade-inerciais interagindo e (iii) tripletos constituídos por duas ondas de gravidade e um modo vortical, sendo que neste último caso as duas ondas de Poincaré devem se propagar em sentidos opostos. Os tripletos ressonantes no caso (i) constituem exatamente a classe de tripletos analisada na seção anterior, pois estes modos vorticais obedecem à dinâmica quase-geostrófica. Já com relação à classe (ii), a relação de dispersão das ondas de Poincaré não permite a existência de tripletos que satisfazem às condições de ressonância triádica (Majda, 2003; Capítulo 8). Logo, no limite fracamente não linear no qual somente tripletos ressonantes interagem, não existe troca de energia envolvendo três ondas de Poincaré.

Vamos então analisar mais a fundo a dinâmica dos tripletos ressonantes envolvendo duas ondas de Poincaré e um modo geostrófico. Para tanto, vamos considerar a dinâmica reduzida de três modos ressonantes para um tripleto constituído de um modo geostrófico com número de onda $\mathbf{k_3}$, uma onda de gravidade-inercial para oeste com número de onda $\mathbf{k_2}$ e frequência temporal $\omega_{\mathbf{k_2}}^{(-1)}$ e uma onda de gravidade-inercial para leste com número de onda $\mathbf{k_1}$ e frequência característica $\omega_{\mathbf{k_1}}^{(1)}$. Neste caso, os mdos satisfazem às relações $\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3} = \mathbf{0}$ e $\omega_{\mathbf{k_1}}^{(1)} = -\omega_{\mathbf{k_2}}^{(-1)}$, e o sistema dinâmico (6.30) agora lê-se:

$$E_{\mathbf{k_1}}^{(1)} \frac{dA_{\mathbf{k_1}}^{(1)}}{dt} = \sigma_{(\mathbf{k_1},1)}^{(\mathbf{k_2},-1)(\mathbf{k_3},0)} \bar{A}_{\mathbf{k_2}}^{(-1)} \bar{A}_{\mathbf{k_3}}^{(0)} \tag{6.32a}$$

$$E_{\mathbf{k_2}}^{(-1)} \frac{dA_{\mathbf{k_2}}^{(-1)}}{dt} = \sigma_{(\mathbf{k_2},-1)}^{(\mathbf{k_1},1)(\mathbf{k_3},0)} \bar{A}_{\mathbf{k_1}}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k_3}}^{(0)} \tag{6.32b}$$

$$E_{\mathbf{k_3}}^{(0)} \frac{dA_{\mathbf{k_3}}^{(0)}}{dt} = \sigma_{(\mathbf{k_3},0)}^{(\mathbf{k_1},1)(\mathbf{k_2},-1)} \bar{A}_{\mathbf{k_1}}^{(1)} \bar{A}_{\mathbf{k_2}}^{(-1)} \tag{6.32c}$$

No entanto, para o tipo de interação triádica ressonante representada pelo sistema acima, é possível mostrar que o coeficiente de interação referente ao modo geostrófico é nulo, ou seja, $\sigma^{(\mathbf{k_1},1)(\mathbf{k_2},-1)}_{(\mathbf{k_3},0)} = 0$. Esta propriedade decorre da simetria do operador bi-linear $\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ decorrente da conservação da vorticidade potencial. Da mesma maneira, é possível mostrar que para o tripleto ressonante representado acima, tem-se que $\sigma^{(\mathbf{k_2},-1)(\mathbf{k_3},0)}_{(\mathbf{k_1},1)} = -\sigma^{(\mathbf{k_1},1)(\mathbf{k_3},0)}_{(\mathbf{k_2},-1)}$. Assim, o sistema (6.32) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{d^2 A^{(1)}_{\mathbf{k_1}}}{dt^2} = -\frac{|\sigma^{(\mathbf{k_2},-1)(\mathbf{k_3},0)}_{(\mathbf{k_1},1)}|^2}{E^{(1)}_{\mathbf{k_1}} E^{(-1)}_{\mathbf{k_2}}} |A^{(0)}_{\mathbf{k_3}}|^2 A^{(1)}_{\mathbf{k_1}} \tag{6.33a}$$

$$\frac{d^2 A^{(-1)}_{\mathbf{k_2}}}{dt^2} = -\frac{|\sigma^{(\mathbf{k_2},-1)(\mathbf{k_3},0)}_{(\mathbf{k_1},1)}|^2}{E^{(1)}_{\mathbf{k_1}} E^{(-1)}_{\mathbf{k_2}}} |A^{(0)}_{\mathbf{k_3}}|^2 A^{(-1)}_{\mathbf{k_2}} \tag{6.33b}$$

$$A^{(0)}_{\mathbf{k_3}}(t) = A^{(0)}_{\mathbf{k_3}}(t=0) = const \tag{6.33c}$$

Assim, as equações (6.33) mostram que numa interação triádica ressonante envolvendo dois modos de Poincaré e um modo geostrófico, a amplitude do modo geostrófico não se altera no tempo, enquanto as amplitudes dos dois modos de Poincaré oscilam com uma frequência proporcional à amplitude do modo geostrófico. Logo, o papel do modo geostrófico neste caso é agir como um catalisador para as trocas de energia entre os dois modos de Poincaré, no sentido de que a presença do modo geostrófico permite a interação e a troca de energia entre os dois modos de Poincaré. Além disso, a amplitude do modo geostrófico controla o período da interação entre os dois modos rápidos, ou seja, quanto maior a amplitude do modo geostrófico, mais rápida será a troca de energia entre os dois modos de Poincaré. Isto sugere a importância da dinâmica quase-geostrófica para a estatística das ondas de gravidade-inerciais na atmosfera e no oceano. Além disso, o fato da amplitude do modo geostrófico não se alterar pela presença dos modos rápidos tem consequências importantes para o processo de ajuste geostrófico, pois faz com que a dinâmica quase-geostrófica evolua no tempo de forma independente da presença das ondas de gravidade. Consequentemente, tomando-se uma média temporal para os campos do vento e pressão na atmosfera para um período de um ou mais dias, filtra-se as ondas de gravidade e os campos do vento e pressão ficam em balanço geostrófico. Para uma descrição mais completa deste mecanismo de ajuste geostrófico para um dado inicial não geostroficamente balanceado, sugerimos ao leitor os Capítulos 4 e 8 de Majda (2003).

6.3 Sugestões de leitura

Em [*Craik*(1985)] a teoria de interação não linear de ondas é discutida com extensa lista de referências a trabalhos anteriores. Para um tratamento matemático à interação não linear de ondas sugerimos a leitura de [*Majda*(2003)]. Ainda sugerimos como leitura complementar [*Kartashova*(2010)].

7

Formulação Hamiltoniana e estabilidade

A formulação hamiltoniana da mecânica é baseada no fluxo gerado pelos campos de vetores associados à quantidades conservada pela dinâmica, em especial a energia, que geralmente é usada como a função hamiltoniana do sistêma. Neste contexto torna-se natural a associação de simetrias do sistema com quantidades conservadas. A formulação hamiltoniana da mecânica dos fluídos na descrição euleriana difere da formulação canônica, por exemplo da mecânica de sistemas de partículas, já que o fato de não importar a posição das particulas na descrição euleriana implicará numa simetria, chamada "renomeamento das partículas "do inglês "particle relabeling", que estará associada a novas quantidades conservadas chamadas de Casimirs. A dinâmica será não canônica, como será visto a seguir. Primeiramente lembremo-nos da formulação hamiltoniana para um sistema de partículas. As equações canônicas de Hamilton são escritas como:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = J\nabla H \tag{7.1}$$

onde

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

e

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

é a chamada matriz simplética. Nestas coordenadas o chamado **colchete de Poisson** entre duas funções suaves $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é definido por:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}) \tag{7.4}$$

O colchete de Poisson ainda pode ser escrito como:

$$\{F, G\} = \nabla F J \nabla G \tag{7.5}$$

Pelo formato da matriz J notamos que ela atua como uma rotação nos vetores e de fato $J\nabla G$ perpendicular ao graditente de G, o que o colchete mede portanto é a variação de F na direção em que G é constante. As equações canônicas podem ser escritas em função do colchete de Poisson como:

$$\frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} \tag{7.6}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \tag{7.7}$$

Pela regra da cadeia, vale portando, para qualquer função suave $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ vale:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \tag{7.8}$$

Valem, também, as seguintes propriedades do Colchete de Poisson:

- (i) Para quaisquer funções suaves F e G e independentes (a cada ponto ∇F e ∇G são linearmente independentes) o colchete de Poisson é não degenerado, ou seja dado um aberto A o colchete $\{F, G\}$ não se anula uniformemente em A.
- (ii)O colchete é antisimétrico: $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- (iii) Vale a identidade de Jacobi $\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$

A demonstração destes fatos é deixada como exercício para o leitor, as demonstrações são diretas. Mostraremos apenas a identidade de Jacobi para o caso de a função Hamiltoniana ser uma função arbitrária H, com funções F,G, todas sem dependência explícita do tempo:

$$\frac{d\{F,G\}}{dt} = \{H, \{F,G\}\} \tag{7.9}$$

Porém, como um produto a derivação do colchete de Poisson segue

a regra de Leibniz para derivação:

$$\frac{d\{F,G\}}{dt} = \{\frac{dF}{dt}, G\} + \{F, \frac{dG}{dt}\} \tag{7.10}$$

Usando que:

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\}\,; \qquad \frac{dG}{dt} = \{H, G\} \tag{7.11}$$

e utilizando a regra da antissimetria do colchete chegamos ao resultado.

7.1 Sistemas hamiltonianos não canônicos

A dinâmica de fluídos é mais usualmente usada em coordenadas eulerianas, pelo simples fato de que na maioria das aplicações não é importante saber onde cada partícula se encontra a cada instante de tempo, e sim apenas saber como o campo de velocidade e outras variáveis dinâmicas evoluem no tempo. Existe uma simetria que leva em conta a invariância das equações da dinâmica de fluídos com relação à transformações nas posições lagrangeanas das partículas. Esta é a chamada simetria "*relabeling das partículas", devido a esta simetria é possível reduzir a dimensionalidade das equações. Contudo paga-se um preço, a dinâmica deixa de ser canônica, ou seja os colchetes de Poisson deixam de obedecer a propriedade (i) e passam a ser degenerados. Também associados à esta simetria surgem quantidades conservadas chamadas casimirs que terão importante papel no estudo de estabilidade a seguir.*

Comecemos pela equação de Hamilton para um campo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = J\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{u}} \tag{7.12}$$

onde J é o operador cosimplético, um operador anti-simétrico e em geral singular. Dado um funcional qualquer das variáveis dinâmicas $\mathcal{F}(\boldsymbol{u})$, sua evolução é dada em termos do colchete de Poisson não canônico:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} \tag{7.13}$$

O colchete de Poisson não canônico apresenta as mesmas propriedades do colchete de Poisson canônico da seção anterior exceto pelo fato de ser singular. Ou seja, eventualmente existem funcionais $\mathcal{C}_i$ tais que:

$$\{\mathcal{C}_i, \mathcal{G}\} = 0 \tag{7.14}$$

para quaisquer funcionais $\mathcal{G}$ diferenciáveis. De fato a singularidade do colchete de Poisson advem de o núcleo do operador cosimplético J ser não vazio. A expressão do colchete de Poisson em função do operador cosimplético J é:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{u}}, J\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{u}} \right\rangle \tag{7.15}$$

7.1.1 Exemplos

(1)Modelo Barotrópico não divergente

A hamiltoniana do modelo quase-geostrófico não divergente é dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int |\nabla\psi|^2 dx \tag{7.16}$$

Calculemos a variação de $\mathcal{H}$:

$$\delta\mathcal{H} = \int \nabla\psi\delta\nabla\psi dx \tag{7.17}$$

Integrando por partes temos:

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta q} = -\psi; \tag{7.18}$$

O operador co-simplético J é dado por:

$$J(f,g) = [f,g] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{7.19}$$

Para quaisquer funções suaves f e g. Para obter os casimirs basta encontrar funcionais F tais que $J(q, \delta F/\delta q) = 0$, de onde concluimos que os casimirs deste modelo são dados por:

$$\mathcal{C} = \int C(q) dx dy \tag{7.20}$$

onde C é uma função suave. Com tais funções temos que os casimir são preservados pela dinâmica:

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = 0 \tag{7.21}$$

(2)Modelo quase geostrófico de duas camadas

O modelo quase-geostrófico de duas camadas tem como hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{2}\Big(D_1|\nabla\psi_1|^2 + D_2|\nabla\psi_2|^2 + D_1F_1(\psi_1-\psi_2)^2\Big)dxdy \quad (7.22)$$

As derivadas varicionais da hamiltoniana são:

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta q_1} = -D_1\psi_1; \qquad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta q_2} = -D_2\psi_2 \quad (7.23)$$

O operador co-simplético J do modelo é dado por:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{D_1}[q_1,.] & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D_2}[q_2,.] \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

onde, $[f,g] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$. *Os casimirs são da forma*

$$\mathcal{C} = \int \frac{1}{2}\Big(C_1(q_1) + C_2(q_2)\Big)dxdy \quad (7.25)$$

para duas funções suaves C_1 e C_2.

(3)Modelo da água rasa

A hamiltoniana do modelo da água rasa é dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int h|\boldsymbol{u}|^2 + g|h|^2 dxdy \tag{7.26}$$

e operador co-simplético dado por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & q & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -q & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

onde q é a vorticidade potêncial, $q = (f+\xi)/h$, ξ a vorticidade, como definida anteriormente. Calculêmos a variação de $\mathcal{H}$:

$$\delta\mathcal{H} = \int (|\boldsymbol{u}|^2 + gh)\delta h + h\boldsymbol{u}\delta\boldsymbol{u}dx \tag{7.28}$$

de onde obtemos as derivadas funcionais de $\mathcal{H}$:

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta h} = \Big(\frac{1}{2}|u|^2 + gh\Big); \qquad \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{u}} = h\boldsymbol{u} \tag{7.29}$$

Aplicando o operado J ao vetor $\delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{v}$, onde $\boldsymbol{v} = (u_1, u_2, h)$, temos:

$$\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 0 & q & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -q & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hu_1 \\ hu_2 \\ \frac{1}{2}|u|^2 + gh \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

De onde segue que

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = qhu_2 - \boldsymbol{u}.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7.31}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = qhu_1 - \boldsymbol{u}.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} - g\frac{\partial h}{\partial y} \tag{7.32}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = div(h\boldsymbol{u}) \tag{7.33}$$

e, portanto, recuperamos as equações da água rasa.

Consideremos agora uma classe de funções:

$$\mathcal{C} = \int hC(q)dx \tag{7.34}$$

para alguma $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, função suave. As derivadas funcionais de* $\mathcal{C}$ *são dadas por(deixamos para o leitor verificar):*

$$\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta h} = C(q) - qC'(q); \qquad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_1} = C''(q)\frac{\partial q}{\partial y}; \qquad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_2} = -C''(q)\frac{\partial q}{\partial x} \tag{7.35}$$

Aplicando o operador co-simplético J *no vetor* $\boldsymbol{w} = (\delta\mathcal{C}/\delta u_1, \delta\mathcal{C}/\delta u_2, \delta\mathcal{C}/\delta h)$*, concluímos que* $\boldsymbol{w} \in KerJ$*. Logo, os funcionais* $\mathcal{C}$ *desta forma,* $\mathcal{C} = \int hC(q)dx$*, constituem casimirs das equações da água rasa, e são quantidades conservadas pela dinâmica.*

(4)Modelo da água rasa magnetohidrodinâmico: *Similarmente consideremos a generalização magnetohidrodinâmica das equações da água rasa. Como mostrado em [Dellar(2002)], as equações de água rasa magnetohidrodinâmicas assumem uma forma particularmente simples ao introduzirmos um potencial para o campo magnético: da condição* $div(h\boldsymbol{B}) = 0$ *existe uma função* A *tal que* $h\boldsymbol{B} = \nabla^{\perp} A$*. Desta forma reduzimos as duas variáveis do campo* *magnético horizontal à uma variável e o problema de cinco para quatro variáveis:*

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ h \\ v \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

Nestas variáveis o problema é escrito na forma hamiltoniana com hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int (h|\boldsymbol{u}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla A|^2 + gh^2)dxdy \tag{7.37}$$

e operador co-simplético:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & q & -\frac{\partial}{\partial x} & -B_2 \\ -q & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & B_1 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ B_2 & -B_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

as equações são dadas por:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = J\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{v}} \tag{7.39}$$

onde as componentes da derivada variacional são dadas por:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \boldsymbol{u}} = h\boldsymbol{u} \tag{7.40}$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A} = \frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} \tag{7.41}$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta h} = gh + \frac{1}{2}(|\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2) \tag{7.42}$$

de onde recuperamos as equações:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -div(h\boldsymbol{u}) \tag{7.43}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}.\nabla \boldsymbol{u} + 2\Omega \times \boldsymbol{u} = -g\nabla h + \boldsymbol{B}.\nabla B \tag{7.44}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{u}.\nabla A = 0 \tag{7.45}$$

Para recuperarmos as equações em termos de $\boldsymbol{B}$*, basta tomar o operador* $\nabla^{\perp}$ *na equação para* A*. As quantidades conservadas (casimirs) para estas equações são da forma:*

$$\mathcal{C} = \int h(f(a) + hqg(A))dxdy \tag{7.46}$$

Para quaisquer funções suaves f, g*.*

7.2 Invariancia por translações

Um dos principais resultados da mecânica clássica é o chamado teorema de Noether. Este teorema afirma que a cada invariancia por um grupo a um parâmeto da hamiltoniana há associada uma lei de conservação associada. Mais precisamente, se a ação de um grupo de transformações a um parâmetro deixa a hamiltoniana invariante então à este grupo existe associada uma quantidade conservada. O primeiro exemplo deste teorema é a invariância da hamiltoniana pelo fluxo hamiltoniano, que como já vimos leva à conservação de energia do sistema:

$$\{H, H\} = 0 \tag{7.47}$$

Aqui mostraremos outro exemplo importante deste teorema que é a invariância por translações. Consideremos uma hamiltoniana $\mathcal{H}$ *invariante por translações, restrigiremo-nos à invariancia na coordenada* x*, mas o resultado é completamente análogo para as demais direções:*

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}(x, y, z, t)) = \mathcal{H}(\boldsymbol{u}(x + \delta x, y, z, t)), \forall \delta x \in \mathbb{R} \tag{7.48}$$

Calculemos a variação de $\mathcal{H}$ *associada à* $\delta_x = (x + \delta x, y, z, t) - (x, y, z, t)$

$$\begin{aligned} 0 = \delta_x \mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{u} + \delta_x \boldsymbol{u}) - \mathcal{H}(\mathbf{u}) = \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{u}}, \delta \boldsymbol{u} \right\rangle + O(\delta \boldsymbol{u}^2) = \\ \delta x \left\langle \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{u}}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \right\rangle + O(\delta \boldsymbol{u}^2) \end{aligned} \tag{7.49}$$

$\forall \delta x$. *Logo vale:*

$$\left\langle \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{u}}, \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x} \right\rangle = 0 \tag{7.50}$$

Com isto provaremos esta versão particular do teorema de Noether:

Teorema:*Suponha que para algum funcional $\mathcal{F}$ vale:*

$$J\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{u}} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x} \tag{7.51}$$

Então, se a hamiltoniana $\mathcal{H}$ é invariante por translações na coordenada x, $\mathcal{F}$ é uma quantidade conservada pelo fluxo de $\mathcal{H}$

Demonstração:

$$\frac{\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = -\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\} = \left\langle \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{u}}, J\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{u}} \right\rangle \tag{7.52}$$

Usando a hipótese do teorema:

$$\left\langle \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{u}}, \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x} \right\rangle = 0 \tag{7.53}$$

Exemplo: *No modelo de água rasa a invariância por translações na coordenada x está associada à conservação do momento zonal:*

$$\mathcal{M} = \int h(u - fy)dxdy \tag{7.54}$$

7.3 Estabilidade

7.3.1 Conceitos de estabilidade

Na atmosfera e oceanos o estudo das estabilidades e instabilidades é de grande importância, em particular a instabilidade baroclínica constitui um importante mecanismo de geração de vortices em grande escala (por exemplo ciclones atmosféricos) via conversão de energia potencial em cinética. Há outras instabilidades importantes como a barotrópica que explica a formação de vortices de grande escala a partir do escoamento médio. A instabilidade simétrica que é um importante processo na formação de nuvens e chuva (ou seja em menor escala espacial). Intuitivamente, a estabilidade de um sistêma deve traduzir a propriedade de que para dada uma solução conhecida do sistema, uma pequena perturbação nas condições iniciais do sistema deve perduzir uma solução que permanece próxima à solução original.

Existem diversas definições de estabilidade diferentes entre si, a escolha de se usar uma definição particular de estabilidade depende, em geral, da situação física. Assumamos que a evolução de um sistêma físico de interesse seja dado por uma equação diferencial de forma genérica:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \tag{7.55}$$

onde $\mathbf{F}$ *é um campo de vetores suave definido em um espaço de Banach* B *conveniente com uma distância definida por sua norma* $d(f,g) = ||f-g||$. *Dizemos que* $\boldsymbol{u}_e$ *é um equilíbrio desta equação se* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_e) = 0$. *Daremos uma definição de estabilidade pra o equilíbrio* $\boldsymbol{u}_e$

Definição: *Dizemos que um equilíbrio* $\boldsymbol{u}_e$ *é estável, se dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se para uma condição inicial* $\boldsymbol{u}(0)$ *vale* $||\boldsymbol{u(0)} -$

$\boldsymbol{u}_e|| < \delta$ *implica que para todo tempo* t *a solução* $\boldsymbol{u}(t)$ *com condição inicial* $\boldsymbol{u}(0)$ *satisfaz* $||\boldsymbol{u(t)} - \boldsymbol{u}_e|| < \epsilon$.

No estudo dos disturbios atmosféricos e oceânicos, a abordagem mais comum para o estudo de instabilidades é a de analisar a dinâmica linearizada ao invés da dinâmica completa, pela facilidade de se estudar equações diferenciais lineares. Consderemos a linearização do campo de vetores F *no equilíbrio* $\boldsymbol{u}_e$*:*

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F'}(\boldsymbol{u}_e)\boldsymbol{v} \tag{7.56}$$

Isto nos leva a outro conceito de estabilidade:

Definição: *Um sistema é dito linearmente estável se ele é estável segundo a dinâmica linear.*

Suponha que podemos decompor o espaço $\boldsymbol{B}$ *em autovetores de* $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{u}_e)$. *Então se* $\boldsymbol{v}_i$ *é um autovetor com autovalor* λ_i *então a solução* $\boldsymbol{v}_i(t)$ *com condição inicial* $\boldsymbol{v}_i$ *é dada por:*

$$\boldsymbol{v}_i(t) = e^{\lambda_i t}\boldsymbol{v}_i \tag{7.57}$$

Logo, perturbações do sistema na direção $\boldsymbol{v}_i$ *crescem exponencialmente se* $Re(\lambda_i) > 0$*, o que leva a outro conceito de estabilidade baseado no espectro do operador (matriz)* $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{u}_e)$.

Definição: *Um sistema é dito espectralmente estável se todos autovalores* λ_i *de* $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{u}_e)$ *tem parte real não positiva.*

Claramente a estabilidade não linear implica em estabilidade espectral, mas o inverso é falso, como ilustraremos a seguir:

Exemplo*: Considere o seguinte sistema mecânico descrito em coordenadas polares* (r, θ)*:*

$$r' = r^3(1 - r^2) \tag{7.58}$$

$$\theta' = 1 \tag{7.59}$$

de onde notamos que o sitema tem a origem como ponto de equilíbrio,

e existe ainda uma orbita periódica atratora em $r = 1$. Portanto condições iniciais na vizinhança da origem vão, com o passar do tempo, tender assintoticamente a esta órbita periódica. Logo o sistêma é instável na origem. Façamos agora uma mudança de coordenadas de polares para cartesianas $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, o que nos leva a:

$$x' = x(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) - y \tag{7.60}$$

$$x' = y(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) + x \tag{7.61}$$

Cuja linearização é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{7.62}$$

e de onde concluimos que os autovalores da matriz do sistema linearizado são $\pm i$ e o sistema é espectralmente estável.

7.3.2 Estabilidade de sistemas hamiltonianos

No caso em que a dinâmica é hamiltoniana e canônica:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = J\nabla H \tag{7.63}$$

Com operador J não singular, vale em um ponto de equilíbrio z_e

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z_e} = J\frac{\partial H(z_e)}{\partial z} = 0 \tag{7.64}$$

Se reduz a estudar as propriedades da função H próximo ao equilíbrio. Como o operador J é não singular vale que:

$$J\frac{\partial H(z_e)}{\partial z} = 0 \iff \frac{\partial H(z_e)}{\partial z} = 0 \tag{7.65}$$

Portando para garantir a estabilidade basta que a matriz hessiana:

$$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}\right] \tag{7.66}$$

seja positivo definida. Contudo, se a dinâmica não é canônica, um ponto de equilíbrio não corresponde necessariamente a um ponto extremal da hamiltoniana, já que o operador J é singular. De fato, se $\mathcal{C}$ é tal que $\nabla\mathcal{C} \in Ker(J)$ então podemos definir

$$I(z) = H(z) + C(z) \tag{7.67}$$

e I é tal que:

$$\left.\frac{dI(z)}{dt}\right|_{z_e} = 0 \tag{7.68}$$

Suponhamos que a perturbação na condição inicial do sistêma na vizinhança do equilíbrio, seja $z = z_e + \Delta z$, definimos a pseudo-energia associada à z por $\Delta I(z) = I(z) - I(z_e)$. Mostraremos que se a função I(z), for "definido positiva"na vizinhança de um equilíbrio z_e então este equilíbrio é estável. Mas antes daremos uma definição precisa para um funcional ser localmente positivo definifo. Aqui usaremos a norma L^2, contudo a princípio outras de espaço de Banach podem *ser usadas e que não levam necessariamente ao mesmo resultado. Em particular pode ser que a dinâmica seja estável segundo uma norma e instável segundo outra norma.*

Definição: *Seja $F : B \to \mathbb{R}$ um funcional de um espaço do Hilbert:L^2 na reta real, dizemos que F é localmente positivo definido na vizinhança de um ponto z_e, se existem constantes reais $R > 0$ e $c > 1$ tais que:*

$$c^{-1}||z - z_e|| \leq F(z - z_e) \leq c||z - z_e|| \tag{7.69}$$

para todo $z \in B$ tal que $||z - z_e|| \leq R$. Agora mostraremos que se F é um funcional preservado pela dinâmica localmente, positivo definido na vizinhança de um equilíbrio z_e então este é um equilíbrio estável.

Teorema: *Seja F um funcional conservado pela dinâmica, ou seja:*

$$\frac{dF(z(t) - z_e)}{dt} = 0, \forall z(0) \in B \tag{7.70}$$

onde $z(t)$ é a solução com condição inicial $z(0)$. Então z_e é um ponto de equilíbrio estável.

Demonstração: *Escolhamos $R = \frac{R_0}{2C}$ de forma que a trajetória com condição inicial $z(0)$ satisfaça $||\delta z(0)|| \leq R$, onde $\delta z(t) = z(t) - z_e$. E tomamos R de forma que o desvio do equilibrio no tempo t, $\delta z(t) = z(t) - z_e$, não saia bola de raio R_0 até o instante T>0. Obtemos então*

$$c^{-1}||\delta z(t)|| \leq F(\delta z(t)) = F(\delta z(0)) \leq c||\delta z(0)|| \tag{7.71}$$

de onde concluímos que

$$||\delta z(t)|| \leq \frac{R_0}{2} \tag{7.72}$$

Logo, o equilíbrio z_e é estável. Então, na prática devemos ter que encontrar um funcional F que seja conservado pela dinâmica e que seja localmente positivo definido. Mas lembremo-nos que o funcionaç pseu-energia I é preservado pela dinâmica, contudo muitas vezes na definição de I temos a liberdade de escolher a função C que define o Casimir.

Exemplo - Modelo quase-geostrófico: *O estádo básico dado pela climatologia da atmosféra é predominantemente zonal (paralelo as linhas de latitude constante), portanto é de interesse verificar a estabilidade de certos escoamentos zonais. Faremos isto no modelo mais simples que representa razoavelmente a física da atmosfera em escalas de tempo longas (por exemplo escala mensal), o modelo quase-geostrófico. Vamos supor que o estado básico é dado por uma função de corrente que dependende apenas da coordenada meridional $\psi_0(y)$. Com isto temos que o campo de velocidades do estado básico é puramente zonal:*

$$\boldsymbol{V(y)} = \begin{bmatrix} -\frac{d\psi_0}{dy} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.73}$$

e com vorticidade potencial associada dada por:

$$Q(y) = -\frac{d^2\psi_0}{dy^2} + \beta = -\Omega + \beta \tag{7.74}$$

Neste caso temos que o funcional definido por:

$$F = \mathcal{C}(q,\psi) + \mathcal{H}(q,\psi) - [\mathcal{C}(Q,\psi_0) + \mathcal{H}(Q,\psi_0)] \tag{7.75}$$

é conservado pela dinâmica, este funcional recebe o nome de pseudo-energia, podemos reescrever F como:

$$F = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla\delta\psi|^2 + \nabla\Psi\nabla\delta\psi + \int_Q^{Q+\delta q} \Psi(s)ds \right) dxdy + O(\delta\psi^3) \tag{7.76}$$

onde definimos $\Psi = \delta\mathcal{C}/\delta q$. Integrando por partes e retendo os termos quadráticos apenas:

$$F = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla\delta\psi|^2 + \Psi\delta\omega + \int_0^{\delta q} \Psi(Q+s)ds \right) dxdy \tag{7.77}$$

de onde obtemos:

$$F = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla\delta\psi|^2 + \int_0^{\delta q} \Psi(Q+s) - \Psi(Q)ds \right) dxdy \tag{7.78}$$

de onde notamos que o primeiro termo é positivo e que o segundo termo é posivito dado que existe $c > 0$ tal que $c^{-1} \leq \Psi'(Q) \leq c$, com isto garantimos que:

$$||\delta\psi(t)|| \leq c^2||\delta\psi(0)|| \tag{7.79}$$

onde definimos a norma como:

$$||\delta\psi(t)||^2 = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla\delta\psi|^2 + c\delta\omega^2\right)dxdy \qquad (7.80)$$

portando o escoamento é estavel sob as condições acima nesta norma.

7.4 Sugestões de leitura

A formulação hamiltoniana da dinâmica de fluídos geofísicos é introduzida em [Salmon(1998)], há ainda as referências básicas no assunto [Shepherd(1990)] e [Shepherd(1994)], que também apresentam aspectos sobre a estabilidade não linear de escoamentos em dinâmica de fluidos geofísicos. O capítulo 4 de [Majda(2006)] introduz a teoria de estabilidade de escoamentos em dinâmica de fluídos geofísicos sem fazer uso da formulação hamiltoniana. Por fim uma referência bastante completa da teoria de estabilidade em fluídos é [Holm(1985)].

8

Apêndice

8.1 Derivadas funcionais

Sejam X e Y espaços de Banach, respectivamente com normas $||.||_X$, $||.||_Y$, $U \subset X$ aberto e $T : X \to Y$ uma transformação.

Definição 1: *Seja $x \in U$, dizemos que a transformação T é Fréchet diferenciável no ponto x se existe uma transformação linear $A : X \in Y$ tal que:*

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||T(x+h) - T(x) - Lh||_Y}{||h||_X} = 0 \tag{8.1}$$

Caso o limite exista a transformação L é denominada diferencial de Frechét da aplicação T no ponto x.

Definição 2: *Seja $x \in U$, dizemos que a transformação T é Gâteaux diferenciável no ponto x se existe uma transformação linear $L : X \in Y$ tal que para todo $h \in X$:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{T(x+\epsilon h) - T(x)}{\epsilon} = Lh \tag{8.2}$$

Caso o limite exista a transformação L é denominada diferencial de Gâteaux da aplicação T no ponto x.

Claramente toda aplicação diferenciável no sentido de Fréchet é diferenciável no sentido de Gâteaux, mas o contrário é falso. Basta lembrarmos de um exemplo de cálculo de várias variáveis cujas derivadas direcional existem, sem contudo ser diferenciável, por exemplo, basta tomar $f : \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = (x^2y)^{1/3}$. Verifique como exercício que esta função possuí derivadas direcionais em todas direções na origem, sem contudo ser diferenciável. Ao longo do texto utilizamos derivadas variacionais (derivadas no sentido de Gâteaux), restrita ao caso de funcionais (ou seja $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$). Sua expressão pode ser obtiva explicitamente tomando o limite da definição 2.

Bibliografia

[Ablowitz(2011)] Ablowitz, M.J., Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons, Cambridge University Press , (2011).

[Abraham(1980)] Abraham, R., Marsden, J.E., Foundations of Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company; 2nd edition (1980).

[Arnold(1989)] Arnold, V.E., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, 1989.

[Backus(1997)] Backus, G.E., Continuum Mechanics, Samizdat Press, (1997).

[Bustamante(2013)] Bustamante, M., Hayat, U., Complete classification of discrete resonant Rossby-drift wave triads on periodic domains, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18, 2402-2419, (2013).

[Charney(1950)] Charney, J. G.; Fjortoft, R. , Von Neumann, J. Numerical integration of the vorticity equation. Tellus, n. 2, p. 237-254, 1950.

[Charney(1949)] Charney, J. G. On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere. Journal of Meteorology, n. 6, p. 371-385, 1949.

[Cushman-Roisin(2010)] Cushman-Roisin, B, Beckers, J-M, Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects, Academic Press, (2010).

[Craik(1985)] Craik, D.D., Wave Interactions and Fluid Flows, Cambridge University Press, (1985).

[Dellar(2002)] Dellar, P., Hamiltonian and symmetric hyperbolic structures of shallow water magnetohydrodynamics, Phys. Plasmas 9 1130-1136 (2002).

[Fjortoft(1953)] Fjortoft, R., On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two dimensional, non divergent flow. Tellus, 5, 225-230,(1953).

[Gilman(2000)] Gilman, P. A., Magnetohydrodynamic "shallow water"equations for the solar tachocline, Astrophysical Journal Letters, 544, L79-82, 2000.

[Holm(2008)] Holm, D., Geometric Mechanics, Part I: Dynamics and Symmetry, Imperial College Press, (2008).

[Higgins(1967)] Longuet-Higgins, M.S., Gill, A., Resonant interactions between planetary waves, Proceedngs of the Royal Society of London, (1967)

[Hoskins(1981)] Hoskins, B., Karoly, D. J., The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. Journal of Atmospheric Sciences, 38, 1179-1196, (1981).

[Hoskins(1993)] Hoskins, B., Ambrizzi, T., Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow, Journal of Atmospheric Sciences, 50, 1661-1671, (1993).

[Holm(1985)] Holm, D. Marsden, J., Ratiu, T., Weinstein,A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, Phys. Rep. 123 (1985) 1-116.

[Kartashova(2010)] Kartashova, E., Nonlinear resonance analysis, Cambridge University Press, (2010)

[Kartashova(2007)] Kartashova, E., L'Vov, V., Model of intraseasonal oscillations in Earth's Atmosphere, Physical Review Letters, 98, 198501, (2007).

[Lynch(2003)] Lynch, P., Resonant Rossby wave triads and the swinging spring, Bulletin of the American Meteorological Society, 84, 605-616, (2003).

[Lynch(2009)] Lynch, P.: On Resonant Rossby-Haurwitz triads. Tellus, 61A, 438-445, (2003).

[Majda(2003)] Majda, A., PDEs and Waves for the Ocean and the Atmosphere, Majda, A., Courant Institute Lecture Notes, (2003).

[Majda(2006)] Majda, A., Wang, X., Nonlinear Dynamics and Statistical Theories for Basic Geophysical Flows in Cambridge University Press, (2006).

[Marsden(1993)] Marsden, J. E., Chorin, A. J., A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer (1993)

[Pedlosky(1987)] Pedlosky, J., Geophysical Fluid Dynamics, Springer, (1987)

[Raphaldini(2015)] Raphaldini, B., Raupp, C.F.M. (2015), Nonlinear dynamics of magnetohydrodynamic Rossby waves and the cyclic nature of solar magnetic activity, The Astrophysical Journal. 799, 78.

[Raupp(2006)] Raupp, C.F.M., Interação não linear entre ondas atmosféricas: um possível mecanismo para a conexão trópicos-extratrópicos em baixa frequencia. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2006.

[Ripa(1981)] Ripa, P., On the Theory of nonlinear interactions among geophysical waves, Journal of Fluid Mechanics, 103, 87-115,(1981).

[Salmon(1998)] Salmon, R., Lectures on geophysical fluid dynamics, Oxford, (1998).

[Shepherd(1990)] Shepherd, T. G., Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics. In: Dmowska, R. (ed.) Advances in Geophysics. Elsevier, pp. 287-338 (1990).

[Shepherd(1994)] Shepherd, T.G., 1994. Applications of Hamiltonian theory to GFD. 1993 GFD Summer School, Woods Hole Oceanographic Institution Technical Report WHOI-94-12, pp. 113- 152.

[Temam(1993)] Temam, R., Miranville, A. , Mathematical Modeling in Continuum Mechanics, Cambridge University Press, (2005).

[Zeitlin(2013)] Zeitlin, V., Remarks on rotating shallow water magnetohydrodynamics, Nonlinear Processes in geophysics, 20, 893-898, (2013).

[Arnold(1989)] Arnold, V.E., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, 1989.

[Lanczos(1949)] Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics, Dover, (1949).