

Introdução aos Escoamentos Compressíveis

Publicações Matemáticas

**Introdução aos Escoamentos
Compressíveis**

José da Rocha Miranda Pontes
UERJ

Norberto Mangiavacchi
UERJ

Gustavo Rabello dos Anjos
UERJ



31^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2017 by José da Rocha M. Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo R. dos Anjos

Direitos reservados, 2017 pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

31^o Colóquio Brasileiro de Matemática

- Álgebra e Geometria no Cálculo de Estrutura Molecular - C. Lavor, N. Maculan, M. Souza e R. Alves
- Continuity of the Lyapunov Exponents of Linear Cocycles - Pedro Duarte e Silvius Klein
- Estimativas de Área, Raio e Curvatura para H -superfícies em Variedades Riemannianas de Dimensão Três - William H. Meeks III e Álvaro K. Ramos
- **Introdução aos Escoamentos Compressíveis** - **José da Rocha Miranda Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo Rabello dos Anjos**
- Introdução Matemática à Dinâmica de Fluidos Geofísicos - Breno Raphaldini, Carlos F.M. Raupp e Pedro Leite da Silva Dias
- Limit Cycles, Abelian Integral and Hilbert's Sixteenth Problem - Marco Uribe e Hossein Movasati
- Regularization by Noise in Ordinary and Partial Differential Equations - Christian Olivera
- Topological Methods in the Quest for Periodic Orbits - Joa Weber
- Uma Breve Introdução à Matemática da Mecânica Quântica - Artur O. Lopes

Distribuição:

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

ISBN: 978-85-244-0435-1

Conteúdo

Apresentação	iii
1 Equações Básicas dos Escoamentos Compressíveis	1
1.1 Introdução	1
1.2 Equação da Continuidade	1
1.3 Acumulação e Transporte de um Escalar	7
1.4 Equação da Quantidade de Movimento	8
1.5 Propriedades do Tensor de Tensões	12
1.6 Decomposição do Tensor de Tensões: Pressão e Tensor Desviatório	14
1.7 Equação de Euler	16
1.8 Equação de Bernoulli	17
1.9 Fluidos de Stokes e Fluidos Newtonianos	19
1.10 Equação de Navier-Stokes	23
1.11 Os Números de Reynolds e de Froude	24
1.12 Equação da Vorticidade	25
1.13 Equação da Circulação	27
1.14 Equação da Energia Total ($e + v^2/2$)	31
1.15 Equação da Entalpia de Estagnação ($h_0 = h + v^2/2$)	34
1.16 Nota sobre a Forma Integral das Equações da Entalpia	37
2 Escoamentos Compressíveis Quase-Unidimensionais	41
2.1 Introdução	41
2.2 Escoamento Quase-unidimensional Isoentrópico	42
2.3 Ondas Fracas: Velocidade do Som	51
2.4 Ondas Fortes: Compressão por Choque	54

2.5	As Linhas de Rayleigh e de Fanno	61
2.6	Analogia com a Hidráulica de Canal Aberto	74
2.7	Problemas	77
3	Escoamentos Potenciais	81
3.1	Introdução	81
3.2	Escoamentos Potenciais Compressíveis	82
3.3	Uma Classificação das Equações a Derivadas Parciais	87
4	Escoamentos Supersônicos	91
4.1	Introdução	91
4.2	Ondas de Choque Oblíquo	92
4.3	Escoamento Supersônico sobre Diedros e Cunhas	96
4.4	Problemas de Riemann para a Equação de Euler	97
5	Solução numérica das equações de ondas acústicas	103
5.1	Introdução	103
5.2	Formulação no domínio da frequência	104
5.3	Formulação do problema de autovalor real em 1D	105
5.4	Formulação do problema de autovalor real em 2D	112
5.5	Solução com forçaçgem	118
5.6	Formulação discreta do problema no domínio da frequência forçado por Elementos Finitos em 1D	119
5.7	Solução no domínio do tempo	121
5.8	Conclusões	125
6	Dinâmica dos fluidos computacional	127
6.1	Introdução	127
6.2	Formulação de variáveis primitivas conservativas	127
6.3	Formulação do problema em 1d	128
6.4	Solução por diferenças finitas de sistemas de equações de conservação hiperbólicos não-lineares em 1d	129
6.5	Formulação do problema em 2d	132
6.6	Solução por diferenças finitas de sistemas de equações de conservação hiperbólicos não-lineares em 2D	133

Apresentação

Este texto contém o material de apoio ao curso introdutório “Introdução aos escoamentos Compressíveis”, ministrado durante o 31º Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado no IMPA de 30 de julho a 5 de agosto de 2017. O texto está dividido em seis capítulos, que compreendem, inicialmente, uma revisão das equações básicas da Mecânica dos Fluidos.

O texto aborda a seguir os escoamentos quase unidimensionais isentrópicos, incluindo a equação de ondas acústicas fracas e o cálculo da velocidade do som no ar. Aborda a seguir os escoamentos quase unidimensionais com adição de calor (linha de Rayleigh) e os escoamentos sob efeitos viscosos entre as paredes de um duto e o fluido (linha de Fanno). Aborda ainda o fenômeno de choque normal.

O capítulo seguinte (Cap. 3) apresenta a dedução da equação que rege o potencial associado a escoamentos irrotacionais, compressíveis e tridimensionais, e discute alguns casos particulares de aplicação da mesma, incluindo a generalização da equação de ondas acústicas para três dimensões.

O capítulo seguinte estuda a formação de choques oblíquos e escoamentos supersônicos sobre cunhas e diedros, assim como a construção de um problema de Riemann. A resolução numérica da equação de ondas acústicas nos domínios da frequência e do tempo, em uma e em duas dimensões é tratada a seguir. O texto aborda por fim, a resolução numérica de problemas hiperbólicos não lineares e a propagação de ondas fortes.

Os caps. 1, 3 e parte do Cap. 2 compreendem material já publicado no livro “Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia” (SBM 2016, ISBN 978-85-8337-107-6), de nossa autoria [13]. O material é aqui reproduzido com autorização

da editora.

Capítulo 1

Equações Básicas dos Escoamentos Compressíveis

1.1 Introdução

Este capítulo apresenta as equações fundamentais da mecânica dos fluidos, que se originam da aplicação a meios contínuos, do princípio de conservação da massa, das leis de Newton a respeito da quantidade de movimento de um corpo, e do princípio de conservação da energia.

1.2 Equação da Continuidade

Consideremos um volume de controle V , fixo no espaço, simplesmente conexo, através do qual um fluido com massa específica ρ escoar, sendo \mathbf{v} o campo de velocidades do escoamento. Sejam S a superfície externa que delimita o volume e \mathbf{n} o vetor unitário (de comprimento igual a 1), perpendicular à superfície em cada ponto da mesma e orientado para fora, conforme mostrado na Fig. 1.1. O princípio de

conservação da massa estabelece que:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de} \\ \text{massa dentro do volume,} \\ \text{isto é, a quantidade de} \\ \text{massa acumulada dentro} \\ \text{do volume por unidade de} \\ \text{tempo} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de massa} \\ \text{para fora do volume} \end{array} \right). \quad (1.1)$$

Expressemos de forma matemática a igualdade acima. A taxa de acumulação de massa dentro do volume V pode ser expressa como a integral sobre todo o volume, da variação da quantidade de massa em cada ponto do mesmo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm.$$

Por outro lado, a quantidade infinitesimal de massa dm pode ser expressa como $dm = \rho dV$. Substituindo essa última expressão na integral acima e observando que os volumes dV não variam com o tempo, temos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.2)$$

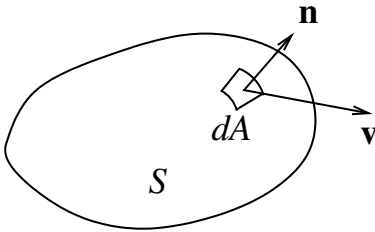


Figura 1.1: Volume de controle ao qual se aplica o princípio de conservação da massa. \mathbf{n} é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície, e \mathbf{v} , a velocidade no elemento de superfície considerado.

Para darmos forma matemática ao fluxo líquido de massa para fora do volume V , consideramos inicialmente uma pequena parte da superfície S conforme mostrado na Fig. 1.2. Seja ΔV um elemento de volume do fluido que cruza a superfície em um intervalo de tempo Δt . Sejam \mathbf{n} o vetor unitário perpendicular à superfície, e \mathbf{v} , a velocidade do elemento de fluido considerado. Essa

velocidade pode ser decomposta em duas componentes, uma delas paralela a \mathbf{n} , que denominamos v_n , e outra perpendicular a \mathbf{n} , que denominamos v_p .

A contribuição do elemento de fluido para o fluxo de massa que cruza a superfície é dada por $\rho \Delta V / \Delta t$. O elemento de volume ΔV pode ser escrito como o produto de seu comprimento Δx por sua área transversal ΔA , que consideramos paralela à superfície S . Assim, $\Delta V = \Delta x \Delta A$ e podemos reescrever o fluxo de massa que cruza a superfície como:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta A.$$

O termo $\Delta x / \Delta t$ é precisamente a componente da velocidade do elemento de fluido paralelo a \mathbf{n} . Apenas essa componente contribui para o fluxo de massa que cruza a superfície. Essa componente pode ser escrita como $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Dessa forma, a contribuição do elemento dV para o fluxo de massa toma a forma:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta A.$$

Se a componente v_n tiver o mesmo sentido da normal \mathbf{n} , isto é, se o elemento de volume dV estiver cruzando a superfície para fora da mesma, o produto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ será positivo, e se a componente v_n tiver sentido oposto a \mathbf{n} o produto escalar será negativo.

Ao integrarmos a expressão acima ao longo de toda a superfície S fazemos automaticamente o balanço do fluxo de massa que sai, menos o que entra no volume V . Assim, o fluxo líquido para fora do volume é:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (1.3)$$

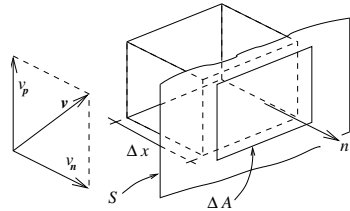


Figura 1.2: Volume de fluido cruzando um elemento da superfície de controle S . v_n e v_p são, respectivamente, as componentes de velocidade perpendicular e paralela à superfície S .

Substituindo as eqs. 1.2, e 1.3 no balanço de massa (Eq. 1.1) obtemos a forma integral da equação de conservação da massa [9, 8, 4, 3, 14, 7, 16, 5]:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (1.4)$$

Essa equação relaciona a taxa de acumulação de massa em um volume finito com o balanço dos fluxos de massa que cruzam a superfície. Trata-se de uma equação integral. Procuramos agora uma expressão local, isto é, uma equação diferencial que traduza o princípio de conservação da massa. Lembrando que, de acordo com o teorema de Gauss:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

ou

$$\int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA,$$

utilizamos esse teorema para reescrever a eq. 1.4:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV$$

ou

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0.$$

Como essa equação deve ser válida para quaisquer volumes de controle, devemos ter, para um volume infinitesimal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.5)$$

que é a equação da continuidade [9, 8, 4, 3, 14, 7, 16]. Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.6)$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho r v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.7)$$

Em coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0. \quad (1.8)$$

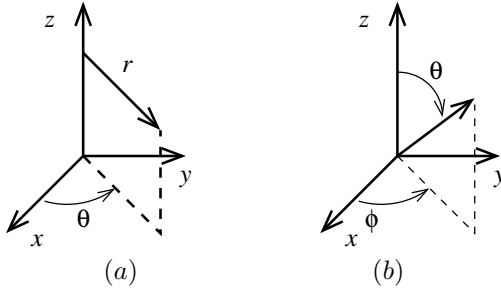


Figura 1.3: Sistemas de coordenadas cilíndricas (a) e esféricas (b). A definição das coordenadas curvilíneas acima mostrada é a usada em todo esse trabalho.

Podemos reescrever a equação da continuidade (coordenadas cartesianas) como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) &= \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Essa equação pode também ser escrita como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \right) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.9)$$

Na notação dos tensores cartesianos, a equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \quad (1.10)$$

Em resumo, a equação da continuidade pode ser escrita em qualquer das formas abaixo:

Tabela 1.1: Formas da equação da continuidade.

Forma vetorial	Forma tensorial cartesiana
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$
$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0$	$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$

A não linearidade inerente aos fenômenos que ocorrem em fluidos já se manifesta na equação da continuidade, onde o termo $\text{div } \rho \mathbf{v}$ é não linear pois contém o produto de duas incógnitas: a massa específica e a própria velocidade. Em alguns casos, no entanto, a equação da continuidade torna-se linear:

1. $\partial \rho / \partial t = 0$ e $\mathbf{grad} \rho = 0$, que é o caso de fluidos incompressíveis. Nesse caso, a equação da continuidade reduz-se a:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

2. escoamento estratificado, isto é, em camadas de fluidos imiscíveis. Nesse caso, $\partial \rho / \partial t = 0$ e $\mathbf{grad} \rho \perp \mathbf{v}$. A equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

3. Acústica: Trata-se do caso em que a massa específica do fluido está sujeita a variações pequenas em torno de um valor médio, ρ_0 . Escrevemos $\rho = \rho_0 + \rho'$, onde ρ_0 não depende nem do tempo nem da posição no espaço. A equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\rho_0 + \rho') + (\rho_0 + \rho') \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Essa equação simplifica-se se considerarmos que ρ_0 não depende nem do tempo nem da posição, que $(\rho_0 + \rho') \approx \rho_0$ e que $\mathbf{v} \ll \partial \rho' / \partial t$. A equação da continuidade reduz-se a:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

que é uma equação linear.

1.3 Acumulação e Transporte de um Escalar

As integrais dadas pelas eqs. 1.2 e 1.3 representam, respectivamente, a taxa de acumulação em um volume de controle, da quantidade escalar massa, e o fluxo da mesma grandeza através das fronteiras. A quantidade do escalar contida em cada elemento do volume de controle é obtida pelo produto da densidade local—no caso, da massa específica do fluido transportado, pelo volume do elemento. A densidade do escalar tem, nesse caso, a dimensão de massa por unidade de volume do meio.

Quanto ao fluxo do escalar através das fronteiras do volume de controle, é obtido integrando-se, ao longo da superfície que delimita o volume, o produto da densidade local do escalar pela vazão volumétrica que cruza a superfície. As integrais dadas pelas eqs. 1.2 e 1.3 podem então ser generalizadas para caracterizar não apenas a taxa de acumulação, e o fluxo de massa através da superfície que delimita um volume, mas também, de uma grandeza escalar genérica θ , cuja dimensão física é a de um escalar (massa, componente da quantidade de movimento em uma direção, energia interna, energia cinética, entropia etc.). Representamos por c a densidade de θ . Se θ referir-se à

componente da quantidade de movimento em uma direção genérica, associada à massa contida no volume, e à massa cruzando a fronteira do mesmo, a densidade c será dada por $c = \rho v_i$. Se referir-se à energia cinética c será dada por $c = \rho v_i v_i / 2$. Se o acúmulo de θ for igual à taxa líquida de transferência de θ para dentro do volume, o princípio de conservação da grandeza traduz-se, na forma integral, por:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint c v_j n_j dA.$$

Utilizando o teorema de Gauss obtém-se a equação de conservação de θ em forma diferencial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.11)$$

O princípio de conservação acima é utilizado a seguir para a obtenção da equação da quantidade de movimento de um meio contínuo compressível.

1.4 Equação da Quantidade de Movimento

Seja um volume fixo no campo de velocidades de um meio contínuo. A taxa de variação da quantidade de movimento desse volume deve incluir, além da resultante das forças aplicadas, o balanço do fluxo de quantidade de movimento através das fronteiras do volume [9, 8, 4, 3, 14, 7, 16]. Esquemáticamente (ver Fig. 1.4):

$$\left(\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de} \\ \text{quantidade de movimento} \\ \text{dentro do volume de con-} \\ \text{trele, isto é, variação da} \\ \text{quantidade de movimento} \\ \text{dentro do volume por uni-} \\ \text{dade tempo} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de quan-} \\ \text{tidade de movimento} \\ \text{para fora do volume} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Resultante das forças apli-} \\ \text{cadas à superfície de con-} \\ \text{trele} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Resultante das forças} \\ \text{de volume} \end{array} \right) \quad (1.12)$$

Expressemos cada uma das parcelas acima em forma matemática. A taxa de acumulação no volume de controle, da componente da

quantidade de movimento na direção genérica do vetor unitário \mathbf{e}_i , é dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) dV$$

Vimos, na Sec. 1.2, que o fluxo de massa através de um elemento de área dA da superfície de controle é dado por $\rho v_j n_j dA$. Se o multiplicarmos pela componente na direção genérica i da quantidade de movimento por unidade de massa, isto é, pela componente do vetor velocidade nessa direção, temos uma expressão para o fluxo daquela componente da quantidade de movimento que cruza o elemento de área: $\rho v_i v_j n_j dA$. Integrando

esse termo ao longo de toda a superfície de controle, temos o fluxo líquido dessa componente da quantidade de movimento para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho v_i v_j n_j dA.$$

No que se refere às forças que atuam na superfície do elemento, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Admitimos que possam ser expressas como uma combinação linear das componentes do vetor \mathbf{n} normal ao elemento da superfície considerado. Sejam n_1 , n_2 e n_3 as componentes do vetor \mathbf{n} . Sendo a força $d\mathbf{F}$, que age no elemento de área, proporcional a uma combinação linear das componentes de \mathbf{n} , $d\mathbf{F}$ não tem, de forma geral, a direção do vetor normal;
2. O fator de proporcionalidade acima mencionado é a área do elemento de superfície à qual a força é aplicada, isto é, admitimos que a magnitude da força é proporcional à área do elemento.

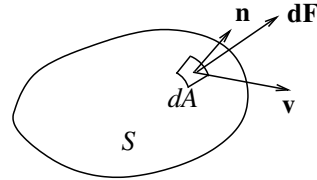


Figura 1.4: Volume de controle ao qual se aplicam as leis da quantidade de movimento. \mathbf{n} é o vetor de comprimento unitário perpendicular à superfície no elemento de área considerado, \mathbf{v} , a velocidade do fluido nesse ponto e $d\mathbf{F}$, a força de superfície agindo no mesmo.

Com base nas hipóteses acima, representamos a força atuando sobre o elemento de área por:

$$d\mathbf{F} = \sigma \mathbf{n} dA.$$

Como $d\mathbf{F}$ e \mathbf{n} não têm, de forma geral, a mesma direção, é necessário que σ seja uma matriz 3×3 , de modo que, aplicado ao vetor \mathbf{n} , resulte em um vetor com outra direção.

Sendo a área um objeto vetorial, os elementos de área da superfície de controle podem ser projetados nas direções dos eixos de coordenadas. Assim, a força que age na direção x de um elemento de área expressa-se como:

$$dF_x = (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dA, \quad (1.13)$$

onde $n_x dA$, $n_y dA$, $n_z dA$ são as projeções da área elemental na direção de cada um dos eixos. Na direção genérica, do eixo x_i :

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dA, \quad (1.14)$$

onde σ pode ser representado, em um dado referencial, por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

As eqs. 1.13 e 1.14 estão baseadas na hipótese de que a força agindo sobre o elemento de área expressam-se como uma combinação linear das projeções do vetor unitário \mathbf{n} . E, sendo esse vetor multiplicado por uma matriz, o vetor força resultante não tem necessariamente a direção normal à superfície, o que ocorre efetivamente quando a partícula do meio está sujeita a tensões de cisalhamento.

A resultante das forças que atuam sobre a superfície de controle é obtida pela integração da Eq. 1.13 ao longo daquela:

$$F_i = \oint_S \sigma_{ij} n_j dA. \quad (1.16)$$

Por fim, a resultante das forças de volume é dada por:

$$\int_V \rho g_i dV.$$

Reagrupando os quatro termos, obtemos a forma integral da equação de conservação da quantidade de movimento:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = - \oint_S \rho v_i v_j n_j dA + \oint_S \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho g_i dV. \quad (1.17)$$

Em notação vetorial:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \oint_S \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (1.18)$$

O passo seguinte consiste em transformar as integrais de superfície em integrais de volume por intermédio do teorema de Gauss, de forma que possamos obter a equação de conservação da quantidade de movimento na forma diferencial. Observamos que o termo $\rho v_i v_j$ representa o elemento geral de um tensor de segunda ordem. O divergente desse tensor é obtido da mesma forma que o do tensor de tensões. Reescrevendo a Eq. 1.17 com todos os termos na forma de integrais de volume, temos para a taxa de variação da quantidade de movimento na direção x_i dentro do volume de controle:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho g_i dV.$$

Essa equação deve ser válida para volumes de controle de qualquer dimensão, inclusive para volumes infinitesimais. Considerando um volume infinitesimal e dividindo a equação resultante por dV , encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i.$$

Reagrupando os termos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (1.19)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \text{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{g}.$$

O membro esquerdo da Eq. 1.19 simplifica-se conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) v_i + v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) &= \\ \rho \frac{Dv_i}{Dt} + v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

A expressão que se encontra dentro do último par de parênteses acima é igual a zero em virtude da equação da continuidade (Eq. 1.10). A Eq. 1.19 toma portanto a forma:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (1.20)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}.$$

1.5 Propriedades do Tensor de Tensões

1.5.1 Simetria do tensor de tensões

Fluidos nos quais os torques internos resultam do momento de forças aplicadas externamente ao fluido apenas denominam-se fluidos apolares. As partículas de um fluido polar são capazes de transmitir e de resistir a torques. Enquadram-se nessa classe alguns fluidos poliatômicos e alguns fluidos não newtonianos.

Para o caso de fluidos apolares ou fazemos a hipótese de que as partículas do meio não resistem a torque, o que resulta na simetria do tensor de tensões, ou admitimos a simetria do tensor e concluímos que as partículas do fluido não resistem a torque. Admitimos aqui a primeira hipótese e mostramos que $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico. O tratamento apresentado nessa secção segue, em linhas gerais, o proposto por Aris (1990) [2].

Em virtude da hipótese de serem os torques aplicados ao fluido resultantes apenas das forças externas, temos que a taxa de acúmulo

de quantidade de movimento angular em um volume V , delimitado por uma superfície S , é dada por:

$$\int_V \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV = \oint_S \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{g} dV.$$

Em notação tensorial cartesiana:

$$\int_V \frac{D}{Dt} (\epsilon_{ijk} \rho x_j v_k) dV = \oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp} n_p dA + \int_V \rho \epsilon_{ijk} x_j g_k dV. \quad (1.21)$$

Desenvolvemos o integrando do membro esquerdo da Eq. 1.21:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\epsilon_{ijk} \rho x_j v_k) &= \epsilon_{ijk} \frac{Dx_j}{Dt} \rho v_k + \epsilon_{ijk} x_j \frac{D\rho v_k}{Dt} = \\ \epsilon_{ijk} v_j \rho v_k + \epsilon_{ijk} x_j \rho \frac{Dv_k}{Dt} &= \epsilon_{ijk} x_j \rho \frac{Dv_k}{Dt}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

O desenvolvimento acima leva em conta que $\mathbf{v} \times \mathbf{v} \equiv 0$ e que, pela equação da continuidade:

$$\frac{D\rho \mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

O termo contendo a integral de superfície pode ser transformado em uma integral de volume, resultando em:

$$\oint_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp} n_p dA = \int_V \frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp}) dV.$$

Desenvolvendo o integrando do membro direito da equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kp}) &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_p} \sigma_{kp} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} = \epsilon_{ijk} \delta_{jp} \sigma_{kp} + \\ \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} &= \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} = \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} - \epsilon_{ikj} \sigma_{kj}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Inserindo os resultados dados pelas eqs. 1.22 e 1.23 na Eq. 1.21, rearranjando os termos e aplicando essa equação a um elemento de fluido, obtemos:

$$\epsilon_{ijk} x_j \left(\rho \frac{Dv_k}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{kp}}{\partial x_p} - \rho g_k \right) = -\epsilon_{ikj} \sigma_{kj}.$$

A expressão entre parênteses é igual a zero o que implica que $\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}$ seja o elemento geral de um vetor nulo. Os elementos desse vetor são $\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$, $\sigma_{31} - \sigma_{13} = 0$ e $\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$, o que mostra que o tensor σ é simétrico.

1.6 Decomposição do Tensor de Tensões: Pressão e Tensor Desviatório

Decompomos o tensor de tensões σ na soma de dois outros, o primeiro representado por uma matriz cujos elementos da diagonal principal são idênticos, de valor $\text{tr } \sigma/3$ e cujos elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Representamos os elementos do segundo tensor da decomposição por τ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.24)$$

Em notação vetorial:

$$\sigma = \frac{1}{3}\text{tr } \sigma \mathbf{1} + \tau,$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade. O tensor $(\text{tr } \sigma/3)\mathbf{1}$ tem as seguintes propriedades:

1. $\text{tr } \sigma/3$ é o valor médio das tensões normais agindo nas faces perpendiculares às três direções do referencial utilizado;
2. Como o tensor $\mathbf{1}$, aplicado ao vetor \mathbf{n} (e a qualquer outro vetor), resulta no mesmo vetor sobre o qual atua, a força:

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{3}\sigma \mathbf{n} dA$$

tem a mesma direção que \mathbf{n} , isto é, é perpendicular ao elemento de área;

3. Sendo o traço um invariante de σ , e o tensor identidade representado pela mesma matriz em qualquer referencial, a força gerada por $\text{tr } \sigma/3$ tem o mesmo valor algébrico em qualquer direção e é sempre perpendicular à superfície do elemento.

Definimos então o escalar pressão como:

$$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma,$$

e o tensor de segunda ordem pressão como o de componentes:

$$P_{ij} = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma \delta_{ij} = p \delta_{ij}.$$

Sendo o tensor de componentes δ_{ij} representado pela mesma matriz identidade em qualquer sistema de coordenadas, a força gerada pela pressão tem a mesma magnitude em qualquer direção, é perpendicular à superfície e de sentido contrário ao do vetor normal \mathbf{n} . Cabe notar que a pressão assim definida coincide com a pressão termodinâmica no caso de fluidos em repouso, sem efeitos elásticos e gravitacionais e para gases monoatômicos.

Decorre da definição de pressão que:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij},$$

e que o tensor τ é simétrico. Seus invariantes são dados por:

$$I_{\tau} = 0 \quad (1.25)$$

$$II_{\tau} = \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (1.26)$$

$$III_{\tau} = \frac{1}{3} \tau_{ij} \tau_{jk} \tau_{ki}. \quad (1.27)$$

O tensor τ recebe o nome de desviatório por abrir a possibilidade da existência de tensões normais à superfície de valores diferentes em diferentes direções e por permitir que a força que atua na superfície do elemento tenha direção diferente da normal, isto é, que contenha componentes de cisalhamento. No caso de fluidos, esse tensor contém as componentes das tensões viscosas.

Introduzindo as definições de pressão e do tensor desviatório na Eq. 1.19, obtemos:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (1.28)$$

Em notação vetorial:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(p\mathbf{1}) + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}. \quad (1.29)$$

Desenvolvemos a seguir o termo $\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij})$:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(p\delta_{i1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(p\delta_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(p\delta_{i3}).$$

Como $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, apenas o termo em que j toma o valor particular atribuído a i é diferente de zero, o que faz com que a soma acima se reduza a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (1.30)$$

Mas $\partial p/\partial x_i$ é uma das componentes de $\mathbf{grad} p$, o que nos permite escrever, em notação vetorial:

$$-\operatorname{div}(p\mathbf{1}) = -\mathbf{grad} p.$$

Levando o resultados obtido com a Eq. 1.30 à Eq. 1.28 obtemos:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i. \quad (1.31)$$

Em notação vetorial:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}. \quad (1.32)$$

1.7 Equação de Euler

No caso de fluido com coeficiente de viscosidade nulo, a Eq. 1.32 reduz-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad} p + \mathbf{g} \quad (1.33)$$

ou

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (1.34)$$

Tabela 1.2: Formas da equação conservação da quantidade de movimento.

Forma vetorial	Forma tensorial cartesiana
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} =$ $-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \tau + \mathbf{g}$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$ $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \mathbf{div} \tau + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i$

que é a equação de Euler (1775).

A equação de Euler pode ser reescrita sem a pressão, utilizando-se a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (1.35)$$

onde $v^2/2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2$. Combinando a eqs. 1.32 e 1.35 obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

Tomamos agora o rotacional da equação acima. Os termos que contêm o operador gradiente se anulam, pois $\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = 0$. O termo \mathbf{g} também se anula ao calcularmos o rotacional, pois as derivadas de uma constante são iguais a zero. Temos então:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}). \quad (1.36)$$

1.8 Equação de Bernoulli

Sabe-se do cálculo vetorial, que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

Substituindo o termo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$ da equação de Euler pela expressão acima, obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}.$$

Consideramos o caso de um escoamento incompressível e estacionário ($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$) e escrevemos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} / 2 = v^2 / 2$. Obtemos:

$$\mathbf{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{g} = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}.$$

O termo \mathbf{g} pode ser incorporado ao que contém o gradiente multiplicando-o por z , pois $\mathbf{grad} gz = -\mathbf{g}$, onde $g = |\mathbf{g}|$. Obtemos:

$$\mathbf{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \quad (1.37)$$

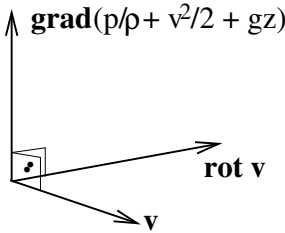


Figura 1.5: A equação de Bernoulli: se o campo for irrotacional, $(p/\rho + v^2/2 + gz)$ é constante ao longo da superfície cujo plano tangente é definido, em cada ponto do espaço, pelos vetores \mathbf{v} e $\mathbf{rot} \mathbf{v}$. Observar que o ângulo entre esses dois vetores pode ser diferente de $\pi/2$.

perpendicular à superfície cujo plano tangente é definido, em cada ponto do espaço, pelos vetores \mathbf{v} e $\mathbf{rot} \mathbf{v}$. Ao longo dessa superfície, tem-se a forma mais conhecida da equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C^{te}, \quad (1.38)$$

que é a equação de Bernoulli [8]. Essa equação mostra a importância dos escoamentos irrotacionais: Se o campo de velocidades tiver essa característica $\mathbf{grad} (p/\rho + v^2/2 + gz) = 0$, isto é, $p/\rho + v^2/2 + gz = C^{te}$ em todo o campo. Se $\mathbf{rot} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$ é perpendicular ao vetor velocidade. Consequentemente, $\mathbf{grad} (p/\rho + v^2/2 + gz)$ é perpendicular

que é válida no campo todo se o escoamento for irrotacional. Nessa forma, a constante da equação é medida em unidades de $[v^2/2]$. Outras formas possíveis são:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = C^{te} \quad [N/m^2] \quad (\text{Aerodinâmica}) \quad (1.39)$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H \quad [m] \quad (\text{Hidráulica}) \quad (1.40)$$

A equação de Bernoulli é usada em tubos de corrente, nos escoamentos unidimensionais permanentes.

1.9 Fluidos de Stokes e Fluidos Newtonianos

Para incluirmos o tensor desviatório e as novas variáveis que esse objeto matemático introduz nas equações de evolução já obtidas, necessitamos de hipóteses adicionais, além dos princípios de conservação. Fazem-se tais hipóteses especificando-se o meio, suas propriedades físicas, e as relacionando aos elementos do tensor desviatório. Além da dependência de propriedades físicas do meio, o tensor desviatório depende também do estado de deformação e do campo de velocidades. As equações adicionais, que resultam da especificação do meio e dos campos de deformação e velocidades, denominam-se *equações constitutivas*.

No presente caso, excluimos a dependência do estado de deformação do meio, o que implica não considerar efeitos de elasticidade, e fazemos a hipótese de que as componentes de τ dependem da distribuição de velocidades apenas nas proximidades do elemento de fluido, isto é, de $\partial v_i / \partial x_j$. A hipótese é válida para água, ar, sangue, acima de certo valor do cisalhamento entre camadas adjacentes, mas não se aplica a muitos casos onde o meio constitui-se de fluido com cadeia molecular longa.

Definimos, então, nas seções que se seguem, o que entendemos por fluido de Stokes e obtemos a equação constitutiva aplicável ao caso particular de fluido newtoniano, que se constitui de um fluido de Stokes linear.

1.9.1 Fluidos de Stokes

Fluidos de Stokes são, por definição, os que atendem aos seguintes requisitos (Aris 1990 [2]):

1. O tensor de tensões, de componentes σ_{ij} , é função contínua do gradiente de velocidades e do estado termodinâmico local, mas independente de outras grandezas cinemáticas. Essa hipótese implica que a relação entre tensão e deformação é local. Nessa etapa, admitimos que σ_{ij} dependa não apenas da taxa de deformação, mas também da parcela antissimétrica do gradiente da velocidade;
2. O fluido é homogêneo, isto é a relação entre σ_{ij} e $\partial v_i/\partial x_j$ é a mesma em todos os pontos do meio;
3. O fluido é isotrópico, isto é, não existem direções preferenciais que alterem a relação tensão-gradiente de velocidades. A hipótese é válida para fluidos como água, ar, vários óleos, mas não para certo fluidos com cadeia molecular longa, para os quais um mesmo valor da taxa de deformação dá origem a tensões diferentes, segundo a orientação da deformação.
4. Na ausência de deformações ($e_{ij} = 0$), as tensões são apenas hidrostáticas ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$).

Mostramos na seção seguinte que as direções principais dos tensores σ_{ij} e $\partial v_i/\partial x_j$ coincidem.

1.9.2 Fluidos newtonianos

O desenvolvimento apresentado nessa seção segue raciocínio proposto por Drakos, Moss e Angelidis (2004) [6].

Fluidos newtonianos são fluidos de Stokes em que a relação entre τ_{ij} e $\partial v_i/\partial x_j$ é linear, isto é:

$$\tau_{ij} = T_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l},$$

onde T_{ijkl} deve satisfazer às hipóteses de homogeneidade e de isotropia do meio. Fazemos o produto interno do tensor T com quatro

vetores \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , de modo a obter o escalar S , como segue:

$$S = T_{ijkl}A_iB_jC_kD_l.$$

Esse escalar depende linearmente da magnitude de cada um dos vetores. No entanto, sendo T isotrópico, o valor de S não depende da direção absoluta dos vetores, mas apenas da orientação de cada um com relação aos demais. S depende, portanto, da magnitude e do ângulo entre os vetores ou, de forma equivalente, do produto escalar entre os mesmos. Portanto:

$$\begin{aligned} S &= T_{ijkl}A_iB_jC_kD_l \\ &= \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) + \beta(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + \gamma(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Outros produtos como $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ não acrescentam mais informação à já contida na equação acima. Reescrevendo essa equação em notação tensorial cartesiana:

$$\begin{aligned} T_{ijkl}A_iB_jC_kD_l &= \alpha A_iB_iC_jD_j + \beta A_iC_iB_jD_j + \gamma A_iD_iC_jB_j \\ &= (\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}) A_iB_jC_kD_l. \end{aligned}$$

Como essa equação deve ser satisfeita independentemente dos quatro vetores, tem-se que:

$$T_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (1.42)$$

que é a forma mais geral dos componentes de um tensor isotrópico de quarta ordem. Como cada delta de Kronecker é invariante sob ação de uma transformação de coordenadas ortogonal, T é também invariante sob essa transformação. Adicionalmente, em virtude da simetria do tensor de tensões, temos:

$$\tau_{ij} = T_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \tau_{ji} = T_{jikl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}.$$

Impondo essa condição à Eq. 1.42 obtemos:

$$\beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} = \beta\delta_{jk}\delta_{il} + \gamma\delta_{jl}\delta_{ik},$$

o que implica:

$$(\beta - \gamma)\delta_{ik}\delta_{jl} = (\beta - \gamma)\delta_{il}\delta_{jk}$$

e $\beta = \gamma$. Os elementos do tensor de quarta ordem T são portanto:

$$T_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Levando em conta a pressão escrevemos o tensor de tensões na forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + T_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = -p\delta_{ij} + [\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \\ &= -p\delta_{ij} + \alpha \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \beta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Usando os símbolos usuais μ em vez de β e λ em vez de γ , obtemos:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{kk}. \quad (1.43)$$

O tensor de tensões depende somente da pressão e da parcela simétrica do gradiente de velocidades e não da antissimétrica, que representa a vorticidade.

Líquidos cuja estrutura molecular é relativamente simples obedecem em geral a essa relação. As tensões de cisalhamento agindo em líquidos com estrutura molecular mais complexa, em particular os de cadeia molecular muito longa, em certas emulsões e em misturas, assim como em líquidos com comportamento elástico, não são descritas pela relação acima. Em alguns casos, como o do sangue, o fluido comporta-se como não newtoniano abaixo de certo valor da taxa de deformação, e como newtoniano acima desse valor. Tais fluidos são encontrados com certa frequência em problemas de engenharia química e de solidificação de materiais fundidos. Tratamos aqui somente de fluidos newtonianos.

Observamos, por fim, que as direções principais dos tensores de tensão e de taxa de deformação são as mesmas, no caso de fluidos newtonianos. Como ao longo das direções principais do tensor de tensões não há tensões de cisalhamento, e para haver deformação de cisalhamento em fluidos newtonianos é necessário haver tensão, essas últimas não existem ao longo das direções principais do tensor de tensões. As direções principais de ambos os tensores coincidem.

1.10 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes é obtida substituindo-se o tensor de tensões τ da equação do movimento, (Eq. 1.29), pela equação constitutiva dos fluidos newtonianos. Consideramos apenas o caso de fluido incompressível, em que se pode escrever o divergente do tensor de tensões τ como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \\ &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i, \end{aligned}$$

pois, pela equação da continuidade $\partial v_j / \partial x_j = 0$. O coeficiente μ/ρ é denominado como coeficiente de viscosidade cinemática do fluido, ν (ou viscosidade cinemática, de forma abreviada). A Tab. 1.3 apresenta o valor da viscosidade cinemática de alguns fluidos a $20^\circ C$.

Tabela 1.3: Viscosidade cinemática e dinâmica de alguns fluidos a $20^\circ C$.

Fluido	Viscosidade dinâmica $\mu - kg/s\ m$	Viscosidade cinemática $\nu - m^2/s$
Água	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-6}$
Ar	$1,8 \times 10^{-5}$	$1,5 \times 10^{-5}$
Álcool	$1,1 \times 10^{-3}$	1.34×10^{-6}
Azeite de oliva	$8,4 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-4}$
Glicerina	$1,42 \times 10^{-1}$	$3,68 \times 10^{-4}$
Mercúrio	$1,70 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-6}$

Substituindo a definição da viscosidade cinemática e levando em conta que $\partial v_j / \partial x_j = 0$ na Eq. 1.31 obtemos a equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i + g_i. \quad (1.44)$$

A equação de Navier-Stokes, aplicável a fluidos incompressíveis, pode ser escrita de uma das seguintes formas, em coordenadas cartesianas:

Tabela 1.4: Formas da equação de Navier-Stokes aplicável a fluidos incompressíveis.

Forma vetorial	Forma tensorial cartesiana
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} =$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} =$
$-\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$
$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$	$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i$

1.11 Os Números de Reynolds e de Froude

Frequentemente, trabalham-se com as variáveis da mecânica dos fluidos na forma adimensional. Surgem então alguns grupos adimensionais, como os números de Reynolds e de Froude, conforme mostrado abaixo.

Consideremos o escoamento de um fluido sobre um corpo de comprimento d , e sejam p_0 e U_0 a pressão e a velocidade do escoamento longe do mesmo. A equação de Navier-Stokes toma a forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}.$$

Sejam:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U_0 \mathbf{v}^* & x_i &= x_i^* d \\ t &= t^* d / U_0 & p &= p^* \rho U_0^2, \end{aligned}$$

onde as variáveis adimensionais identificam-se pelo asterisco. Substituindo as expressões acima na equação de Navier-Stokes encontramos:

$$\frac{U_0^2}{d} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* \right) = -\frac{U_0^2}{d} \mathbf{grad} p^* + \frac{U_0}{d^2} \nu \nabla^2 \mathbf{v}^* + \mathbf{g}.$$

Multiplicando essa equação por d/U_0^2 , obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}^* = -\mathbf{grad} p^* + \frac{1}{U_0 d / \nu} \nabla^2 \mathbf{v}^* + \frac{gd}{U_0^2} \frac{\mathbf{g}}{g}.$$

O grupo adimensional $Re = U_0 d / \nu$ denomina-se número de Reynolds do problema. Depende das propriedades físicas do fluido e de características geométricas do corpo sobre o qual o fluido escoar. O número de Reynolds existe quando o problema tem uma velocidade (ou velocidade angular) imposta como parâmetro.

O grupo adimensional $Fr = (U_0^2 / gd)^{1/2}$ chama-se número de Froude. Usando a definição dos números de Reynolds e de Froude e representando as variáveis adimensionais sem os asteriscos reescrevemos a equação de Navier-Stokes na forma adimensional:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\mathbf{g}}{g}. \quad (1.45)$$

A adimensionalização dessa equação e a introdução do conceito de número de Reynolds permitem identificar a importância relativa de alguns termos. O termo $(1/Re)\nabla^2 \mathbf{v}$ representa os efeitos viscosos do escoamento. Vê-se que tais efeitos são menos importantes quando o número de Reynolds do escoamento é elevado, como é o caso dos escoamentos compressíveis. Tomando como exemplo um escoamento em torno de um corpo no ar, com velocidade de $100m/s$, e sendo a dimensão característica do ar igual a $5m$, e a viscosidade do ar, $\nu = 10^{-5}m^2/s$, temos um número de Reynolds $Re = 5 \times 10^7$ e um número de Froude tal que $Fr^2 = 204$. Esse resultado mostra que, em muitos casos, os efeitos gravitacionais e os viscosos podem ser desprezados em escoamentos de alta velocidade.

1.12 Equação da Vorticidade

A equação de Navier-Stokes pode ser escrita sem a pressão, seguindo-se o mesmo procedimento que usamos na dedução da Eq. 1.36. Obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{rot} \mathbf{v}. \quad (1.46)$$

O rotacional da velocidade recebe o nome de *vorticidade*. A equação acima também pode ser escrita sob a forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (1.47)$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$. Demonstramos essa última, que é conhecida como equação da vorticidade [12]. Aplicando o operador rotacional à equação de Navier-Stokes com o termo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$ escrito, em notação tensorial, na forma $\mathbf{grad} v^2/2 + \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v_p v_p}{2} + \epsilon_{kpq} \omega_p v_q \right) = \\ \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_p \partial x_p} + g_k \right), \end{aligned}$$

onde ω_p é a componente geral de $\mathbf{rot} \mathbf{v}$. O rotacional de um gradiente e o de uma constante são iguais a zero. Em consequência, os termos contendo o gradiente de $v^2/2$, da pressão, e o termo contendo a aceleração da gravidade anulam-se. Adicionalmente, trocamos a ordem de derivação de alguns termos e obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) + \epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} \left(v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_p} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right).$$

O primeiro termo do lado esquerdo e o do lado direito da equação acima são, respectivamente, os elementos gerais de $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t$ e de $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$. Fazendo essa substituição e a de $\epsilon_{kij} \epsilon_{kpq} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$ obtemos:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \left(v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \nu \nabla^2 \omega_i.$$

Desenvolvendo o segundo termo do lado esquerdo da equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \left(v_q \frac{\partial \omega_p}{\partial x_j} + \omega_p \frac{\partial v_q}{\partial x_j} \right) = \\ v_q \frac{\partial \omega_i}{\partial x_q} - v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} + \omega_i \frac{\partial v_q}{\partial x_q} - \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_q \frac{\partial \omega_i}{\partial x_q} - \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Reagrupando os termos chega-se a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_q \frac{\partial}{\partial x_q} \right) \omega_i = \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \omega_i,$$

o que completa a demonstração da Eq. 1.47.

Observamos que, no caso de escoamentos bidimensionais, a vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade. As linhas do tensor $\mathbf{grad} \mathbf{v}$ contêm o gradiente de cada componente da velocidade e são perpendiculares à vorticidade. Consequentemente, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = 0$. A Eq. 1.47 reduz-se a:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}.$$

Cabe também mencionar a relação existente entre vorticidade e efeitos viscosos. Utilizamos a identidade vetorial:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Levando em conta que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ para fluidos incompressíveis, tem-se que:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = -\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}.$$

Essa equação pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}. \quad (1.48)$$

O resultado acima mostra que, havendo desbalanceamento das forças viscosas, o rotacional naquele ponto será diferente de zero. Escoamentos incompressíveis e isentrópicos nos quais a vorticidade é diferente de zero estão, ou estiveram no passado, sob ação de efeitos viscosos. Como regra geral, efeitos viscosos produzem vorticidade.

Os resultados dessa seção aplicam-se ao caso de fluidos incompressíveis. Efeitos de compressibilidade ou variações de entropia são outros fatores de produção de vorticidade, como será visto na Sec. 1.13.

1.13 Equação da Circulação

Nesta seção identificamos os mecanismos que dão origem à *vorticidade*, isto é, ao movimento de rotação de massas de um fluido. Consideremos uma superfície A do espaço, delimitada por uma curva C conforme Fig. 1.6, e seja $d\mathbf{l}$ um elemento de arco desta curva. O *fluxo* Γ do vetor vorticidade através da superfície A é definido como:

$$\Gamma = \int_A \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}.$$

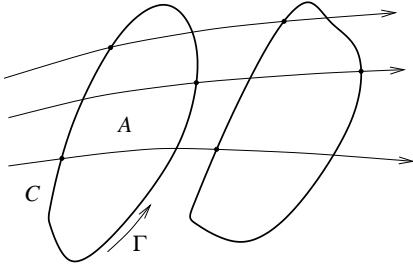


Figura 1.6: Circulação em torno de uma massa de fluido que desloca.

Esse fluxo é igual à circulação do vetor velocidade ao longo da curva que delimita a região considerada, de acordo com o teorema de Stokes. A existência de uma circulação indica que a velocidade média ao longo da curva é diferente de zero, e o teorema de Stokes

assegura que nesse caso o valor médio do rotacional na região interna à curva também é diferente de zero. Identifiquemos os fatores que influem na evolução da circulação ao longo de uma curva que se desloca de forma solidária a uma massa de fluido, isto é, determinemos $D\Gamma/Dt$. Podemos escrever:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C \frac{D}{Dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{D}{Dt} v_i dx_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i d\frac{Dx_i}{Dt}$$

ou então

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C v_i dv_i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i + \oint_C \frac{1}{2} dv^2,$$

onde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. A última integral representa a soma das variações de uma função ao longo de uma curva fechada. Como o ponto final da integração coincide com o inicial, o valor da função nos dois pontos é o mesmo, e a integral acima é igual a zero. Temos então:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i$$

Levando em conta que, pela equação da quantidade de movimento:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

temos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

ou ainda

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i. \quad (1.49)$$

Sabe-se da termodinâmica que:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho},$$

donde obtém-se que:

$$-\frac{dp}{\rho} = T ds - dh.$$

Substituindo o resultado acima na primeira integral do membro direito da Eq. 1.49 obtemos:

$$- \oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds - \oint_C dh.$$

A segunda integral do membro direito da igualdade acima representa a soma de variações de uma função ao longo de uma curva fechada. A integral é igual a zero, conforme discutido acima. Portanto:

$$- \oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds.$$

A Eq. 1.49 pode, portanto, ser escrita na forma:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C T ds + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i.$$

Como a temperatura é um número sempre positivo, a primeira integral do membro direito da equação acima se anula nos processos isoentrópicos, e em alguns casos onde haja variações para mais e para menos na entropia do fluido ao longo da curva sobre a qual a circulação é calculada. A circulação é, em geral, diferente de zero quando a entropia varia ao longo da curva, quer devido a processos reversíveis, como o de aquecimento, quer devido a irreversibilidades que ocorrem,

por exemplo, na mistura de massas de ar de temperaturas diferentes, ou de massas de água do mar com salinidades diferentes. A segunda integral da Eq. 1.49 caracteriza variações da circulação em virtude da ação de efeitos viscosos.

A Eq. 1.49 apresenta um resultado completamente geral, que dá origem a dois teoremas sobre a formação de vórtices. O primeiro é o *Teorema de Bjerknes*, que afirma que, na ausência de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_C \frac{dp}{\rho}. \quad (1.50)$$

Esse resultado mostra que, de forma geral, as irreversibilidades termodinâmicas geram circulação.

O segundo resultado é conhecido como *Teorema de Kelvin*, que afirma que, na ausência de variações de entropia e de efeitos viscosos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (1.51)$$

Esse último resultado ressalta a importância dos escoamentos irrotacionais, pois mostra que, quando os efeitos viscosos e de variação de entropia são desprezíveis, e o campo é irrotacional, em um dado ponto, o escoamento será sempre irrotacional. Por outro lado, se uma determinada massa de fluido apresenta circulação diferente de zero em um dado instante, essa circulação conserva-se à medida que a massa se desloca.

Um mecanismo de geração de vorticidade nos sistemas naturais provém, portanto, das irreversibilidades viscosas ou de misturas de massas de fluido com características distintas. Se, em um instante inicial, a vorticidade contiver um modo da forma:

$$v_x = \exp(i\kappa x) + \dots$$

o termo não linear da equação de Navier dará origem, progressivamente, a modos com vetores de onda maiores, pois:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots = -\exp(i\kappa x) i\kappa \exp(i\kappa x) + \dots \\ &= -i\kappa \exp(2i\kappa x) + \dots, \end{aligned}$$

isto é, os vórtices quebram-se progressivamente, até que atinjam números de Reynolds suficientemente baixos para que os efeitos dissipativos manifestem-se e o vórtice desfaça-se por efeito da viscosidade.

1.14 Equação da Energia Total ($e + v^2/2$)

A equação da energia total é obtida através de procedimento semelhante ao adotado quando deduzimos as equações da continuidade e da quantidade de movimento: considera-se um volume de controle fixo no espaço e iguala-se a taxa de variação da energia dentro do mesmo com o balanço dos diversos fatores que contribuem para que a energia total contida dentro do volume varie. Obtém-se a forma integral da equação de energia. Com o auxílio do teorema de Gauss passa-se à forma diferencial.

Consideremos um volume fixo no espaço. A taxa de variação da energia total por unidade de massa ($e + v^2/2$) dentro desse volume deve incluir o balanço do fluxo de energia através das paredes do volume, o trabalho das forças de superfície e de volume, o balanço do fluxo de calor através da superfície de controle e o calor eventualmente gerado dentro do volume por reações químicas, efeito Joule, ou de outra forma [4, 5].

Esquemáticamente:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de } (e + v^2/2) \text{ dentro do volume} \\ \text{de controle, isto é, variação de } (e + v^2/2) \text{ dentro do} \\ \text{volume por unidade de tempo} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \\
 & - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de } (e + v^2/2) \\ \text{para fora do volume} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Trabalho das forças apli-} \\ \text{cadas à superfície de} \\ \text{controle por unidade de} \\ \text{tempo} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \\
 & \left(\begin{array}{l} \text{Trabalho das forças de} \\ \text{volume por unidade de} \\ \text{tempo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de calor} \\ \text{para fora do volume} \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad + \\
 & \left(\begin{array}{l} \text{Taxa de geração de calor dentro do volume} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Essa equação exclui algumas formas de transferência de energia entre o meio e o volume de controle, como, por exemplo, o trabalho fornecido ao volume de controle através de um eixo, que é o caso de motores, geradores ou turbinas. Esse caso é tratado na Sec. 1.16. Expressemos cada uma das parcelas acima em forma matemática. A

taxa de acumulação de $(e + v^2/2)$ dentro do volume de controle é dada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV.$$

Para calcularmos o fluxo líquido de $(e + v^2/2)$ para fora do volume, lembramos que o fluxo de massa através de um elemento de área dA da superfície de controle é dado por $\rho v_j n_j dA$. Se o multiplicarmos pela energia total por unidade de massa, isto é, por $(e + v^2/2)$, teremos uma expressão para o fluxo de energia total que cruza o elemento de área: $\rho(e + v^2/2)v_j n_j dA$. Integrando esse termo ao longo de toda a superfície de controle teremos o fluxo líquido de energia para fora da superfície de controle:

$$\oint_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA.$$

O trabalho por unidade de tempo das forças de superfície é dado pelo produto escalar da força pela velocidade local. O elemento de força de superfície é, por sua vez, dado por $\sigma_{ij} n_j dA$, conforme visto no capítulo anterior. O trabalho elementar por unidade de tempo das forças de superfície é então dado por $v_i \sigma_{ij} n_j dA$.

O trabalho elementar por unidade de tempo das forças de volume é dado pelo produto escalar das forças de volume, que no caso presente é a força gravitacional, com o vetor velocidade: $\rho v_i g_i dV$.

Integrando o termo referente ao trabalho das forças de superfície ao longo de toda a superfície de controle e o das forças de volume em todo o volume, obtemos:

$$\oint_S v_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho v_i g_i dV.$$

O fluxo de calor para fora do volume de controle através de um elemento de área dA da superfície é dado por $q_j n_j dA$.

O calor gerado em um elemento de volume por unidade de tempo é dado por $\dot{Q} dV$.

Integrando o primeiro termo ao longo de toda a superfície de controle e o segundo em todo o volume obtemos:

$$- \oint_S q_j n_j dA + \int_V \dot{Q} dV.$$

Cabe notar que a primeira integral acima, com o sinal negativo à frente, calcula a taxa líquida de transferência de calor para dentro do volume de controle. Reagrupando todos os termos obtemos a equação da energia total na forma integral:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \oint_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA + \oint_S v_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_V \rho v_i g_i dV - \oint_S q_j n_j dA + \int_V \dot{Q} dV. \quad (1.52)$$

Os termos que multiplicam o fator $\mathbf{n} dA$ nas integrais de superfície são grandezas vetoriais. O teorema de Gauss aplica-se, portanto, e essas integrais podem ser transformadas em integrais de volume. A forma integral da equação da energia total pode então ser reescrita como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j dV + \int_V \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho v_i g_i dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV + \int_V \dot{Q} dV.$$

A equação acima deve se aplicar para volumes de qualquer tamanho, particularmente, para volumes infinitesimais dV . Considerando esse último caso, suprimindo o sinal de integração, e dividindo a equação resultante por dV e passando o primeiro termo do lado direito da equação acima para o esquerdo, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial v_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \dot{Q}. \quad (1.53)$$

Os dois termos do membro esquerdo da equação acima se simplificam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \\ \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) &= \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right), \end{aligned}$$

pois $\partial \rho / \partial t + \partial(\rho v_j) / \partial x_j = 0$ (equação da continuidade).

Reescrevemos o termo de $\partial(v_i\sigma_{ij})/\partial x_j$ e $-\partial q_j/\partial x_j$ da Eq. 1.53, lembrando que $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ (Eq. 1.24):

$$\frac{\partial v_i\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) = -\frac{\partial v_i p \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial v_i p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

O fluxo de calor é substituído por sua expressão, dada pela lei de Fourier:

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (1.54)$$

Em notação vetorial:

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T. \quad (1.55)$$

Essa equação é dada, em coordenadas cilíndricas e esféricas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\kappa \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial q_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ \mathbf{q} &= -\kappa \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right). \end{aligned}$$

Obtemos para o divergente do fluxo de calor:

$$-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \kappa \nabla^2 T.$$

Reagrupando os termos e dividindo por ρ , obtemos a equação da energia total:

$$\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}. \quad (1.56)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}. \quad (1.57)$$

1.15 Equação da Entalpia de Estagnação

$(h_0 = h + v^2/2)$

A equação da entalpia de estagnação é obtida a partir da equação da energia total, que surge ao transformarmos essa última, da forma

integral para a forma diferencial, empregando o teorema de Gauss [9]. Substituindo as eqs. 1.24 e 1.54 na Eq. 1.53 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j - \frac{\partial v_j p}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}. \end{aligned}$$

Agrupando os dois primeiros termos do membro direito da equação acima e passando-os para o membro esquerdo, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \\ \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}. \end{aligned}$$

Somando o termo $\partial p/\partial t$ aos dois membros da última equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}. \end{aligned}$$

O termo $\partial p/\partial t$ do membro esquerdo da equação acima pode ser incorporado a $\partial(e + v^2/2)/\partial t$, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j = \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \dot{Q}. \end{aligned}$$

Como $h_0 = e + p/\rho + v^2/2$ por definição, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_0 v_j = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + \rho v_i g_i + \kappa \nabla^2 T + \dot{Q}.$$

Desenvolvendo os termos do membro esquerdo dessa última equação, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho h_0 + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_0 v_j &= \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} + h_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) = \\ \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h_0}{\partial x_j} &= \rho \frac{Dh_0}{Dt},\end{aligned}$$

pois $\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_j / \partial x_j = 0$ (equação da continuidade). A equação da entalpia de estagnação toma, portanto, a forma:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}. \quad (1.58)$$

Na forma vetorial:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}. \quad (1.59)$$

No caso de um escoamento permanente sem efeitos viscosos, sem fontes internas de calor e desprezando efeitos gravitacionais, a equação da entalpia de estagnação torna-se:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T,$$

o que mostra que a adição de calor através da superfície da partícula de fluido faz aumentar a entalpia de estagnação da mesma.

Pode-se incorporar o termo $v_i g_i$, da Eq. 1.58, ao membro esquerdo dessa equação, o que resulta adicionar à entalpia de estagnação um termo referente à energia potencial. De fato, considerando um referencial com o eixo z na direção vertical e orientado para cima, tem-se que:

$$\frac{Dh_0}{Dt} - v_i g_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) h_0 + \rho v_z g.$$

Pode-se escrever também, que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) gz = g \frac{\partial z}{\partial t} + g v_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = g v_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = g v_z \frac{\partial z}{\partial z} = g v_z,$$

pois:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x,y,z=c^t e} = 0.$$

Portanto:

$$\frac{Dh_0}{Dt} - v_i g_i = \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right)$$

e a Eq. 1.58 pode ser reescrita como:

$$\frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}. \quad (1.60)$$

1.16 Nota sobre a Forma Integral das Equações da Entalpia

A forma integral da equação da energia total simplifica-se no caso em que algumas hipóteses podem ser feitas. Consideramos o campo de velocidades em que os termos viscosos possam ser desprezados e na condição em que não há geração de calor, \dot{Q} , dentro do volume de controle. Não havendo efeitos viscosos, o trabalho das forças de superfície reduz-se ao das forças de pressão. Substituindo a Eq. 1.24 em 1.52 e levando em conta as hipóteses acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= - \oint_S \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA - \\ &\oint_S p v_j n_j dA + \int_V \rho g_j v_j dV - \oint_S q_j n_j dA. \end{aligned}$$

O integrando do segundo termo do membro esquerdo da equação, $p v_j n_j dA$, representa o trabalho por unidade de tempo da força de pressão ($p n_j dA$) multiplicada escalarmente pela velocidade do escoamento naquele ponto, isto é, o trabalho realizado por unidade de tempo para que um elemento de volume $dx dA$ entre (ou saia) do volume de controle. Esse termo pode ser incorporado ao primeiro, resultando em:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= - \oint_S \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA + \\ &\int_V \rho g_j v_j dV - \oint_S q_j n_j dA. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Considerando um referencial com o eixo z na direção vertical e orientado para cima, reescrevemos o segundo termo do membro direito dessa equação, na forma:

$$\begin{aligned} \int_V \rho g_j v_j dV &= - \int_V \rho v_j \frac{dgz}{dz} dV = - \int_V \rho v_j \frac{\partial gz}{\partial x_j} dV = \\ &- \int_V \frac{\partial \rho v_j gz}{\partial x_j} dV + \int_V gz \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} dV. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Substituindo a Eq. 1.62 na Eq. 1.61 e somando

$$\int_V \frac{\partial \rho gz}{\partial t} dV$$

aos dois membros da equação resultante, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho gz}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV &= \\ - \oint_S \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) v_j n_j dA - \int_V \frac{\partial \rho v_j gz}{\partial x_j} dV + \\ \int_V \frac{\partial \rho gz}{\partial t} dV + \int_V gz \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} dV - \oint_S q_j n_j dA. \end{aligned}$$

O terceiro e o quarto termo do membro direito da última equação anulam-se, em virtude da equação da continuidade. Agrupamos os dois termos do membro esquerdo, reescrevemos o penúltimo termo do membro direito na forma de uma integral de superfície usando o teorema de Gauss, e o agrupamos ao primeiro termo desse membro. Obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV &= \\ - \oint_S \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) v_j n_j dA - \oint_S q_j n_j dA. \end{aligned}$$

O volume de controle pode produzir ou receber trabalho mecânico por unidade de tempo, que não é devido a forças viscosas, nem de pressão ou ao peso. É o caso de máquinas rotatórias em geral, como bombas, turbinas, ventiladores etc., que recebem ou produzem trabalho

através de um eixo. Acrescentando o termo \dot{W} , que representa esse trabalho por unidade de tempo, produzido pelo sistema, obtemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV = - \oint_S \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) v_j n_j dA - \oint_S q_j n_j dA - \dot{W}. \quad (1.63)$$

Essa equação reduz-se a formas semelhantes às da primeira lei da termodinâmica, normalmente apresentadas nos livros introdutórios da disciplina. Por exemplo, no caso de sistemas fechados, que não trocam massa com o meio:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV = - \oint_S q_j n_j dA - \dot{W}.$$

No caso de sistemas abertos, que não produzem trabalho, como o de trocadores de calor, obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV = - \oint_S \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) v_j n_j dA - \oint_S q_j n_j dA.$$

Em regime permanente:

$$\oint_S q_j n_j dA = - \oint_S \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) v_j n_j dA.$$

Essa equação mostra que a taxa de transferência de calor para fora do volume de controle é igual ao fluxo líquido de entalpia total para dentro do mesmo.

No caso de sistemas abertos, em regime permanente, que não trocam calor com o meio, como é o caso de bombas e de turbinas:

$$\dot{W} = - \oint_S \rho \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) v_j n_j dA.$$

Essa equação mostra que o trabalho produzido é igual à diferença entre o fluxo de entalpia total que entra e o que sai do volume de controle.

Capítulo 2

Escoamentos Compressíveis Quase-Unidimensionais

2.1 Introdução

Este capítulo trata do escoamento *quase-unidimensional*, de um fluido compressível [9]. A Sec. 2.2 aborda o escoamento isoentrópico em bocais de área transversal variável. Define-se o número de Mach, obtém-se a relação área-velocidade e as equações que relacionam temperatura, pressão e massa específica em um ponto do bocal ao número de Mach do escoamento no mesmo ponto. Estuda-se a propagação isoentrópica de ondas de pequena intensidade, isto é, do som (Sec. 2.3) e de ondas fortes, incluindo compressão por choque, fenômeno que ocorre com produção de entropia (Sec. 2.4). Estuda-se por fim a analogia entre o escoamento isoentrópico em bocais convergentes-divergente, e discute-se a analogia com o escoamento de líquidos com superfície livre em canais de área transversal variável.

2.2 escoamento Quase-unidimensional Isoentrópico

Consideremos o escoamento quase-unidimensional, permanente, de um gás perfeito, através de um bocal convergente-divergente conforme Fig. 2.1. Por quase-unidimensional entendemos o escoamento em que a componente de velocidade u é muito maior do que as componentes v e w , e estas últimas podem ser desprezadas. Nesse caso redefinimos a velocidade u como a relação entre a vazão volumétrica Q e a área A da seção transversal do bocal ($u = Q/A$).

Desprezando-se os efeitos gravitacionais, o balanço dos fluxos da componente x da quantidade de movimento entrando e saindo em uma seção de espessura dx , perpendicular ao escoamento, é obtido a partir da equação de Euler (Eq. 1.33). Desprezando efeitos gravitacionais e viscosos, e consideramos o escoamento em um duto de área transversal variável. A equação da componente da velocidade perpendicular à seção transversal do duto reduz-se a:

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

A velocidade u , utilizada na equação acima pode ser considerada como a relação entre vazão volumétrica e área transversal do duto, desde que a velocidade seja uniforme ao longo da seção, que é o caso considerado.

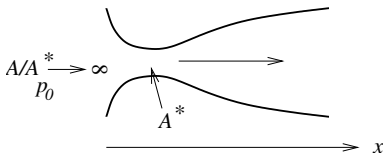


Figura 2.1: Esquema de um bocal convergente-divergente.

Multiplicando essa equação por dx obtemos:

$$u du = -\frac{dp}{\rho}$$

Essa relação mostra que, na ausência de efeitos viscosos e gravitacionais, a pressão sempre diminui quando a velocidade aumenta. Além de desprezar os efeitos viscosos, consideramos que não haja transferência de calor entre as partículas do fluido nem geração interna de calor.

Consequentemente, a equação da entropia,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \tau : \mathbf{grad} v + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho},$$

simplifica-se e toma a forma:

$$T \frac{Ds}{Dt} = 0,$$

isto é, o escoamento é *isoentrópico*. Em cada ponto do campo temos que:

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, s) \\ dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho, \end{aligned}$$

pois $ds = 0$. Nos casos em que os efeitos viscosos não são desprezíveis, em que haja transferência de calor ou, de forma geral, em processos onde a entropia varie, $p = p(\rho, s)$. Nesses casos a equação de Euler passa a conter um termo em que a variação de entropia, $\partial s / \partial x$, aparece explicitamente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x}.$$

No caso isoentrópico, a equação de Euler escreve-se como:

$$u du = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho.$$

O termo $(\partial p / \partial \rho)_s$ tem dimensões de uma velocidade ao quadrado. De fato:

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right] = \left[\frac{F}{L^2 \times \rho} \right] = \left[\frac{M \times L}{t^2} \right] \left[\frac{1}{L^2} \right] \left[\frac{L^3}{M} \right] = \left[\frac{L^2}{t^2} \right].$$

Denominemos essa velocidade por a , isto é, $(\partial p / \partial \rho)_s = a^2$. Veremos adiante que a é a velocidade do som. Substituindo $(\partial p / \partial \rho)_s$ por a^2 , na equação da quantidade de movimento, obtemos:

$$u du = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.1)$$

Essa relação mostra que a massa específica sempre cai quando a velocidade aumenta, pois a^2 é positivo. Além disso, vemos que quanto maior for a velocidade, maior será a queda da massa específica. Acima de um determinado valor da velocidade, a queda da massa específica é tão acentuada que se torna necessário que a seção transversal do bocal *aumente* para que a velocidade aumente. A variação da massa específica com a velocidade é responsável pela diferença qualitativa entre os escoamentos compressíveis e incompressíveis.

Expressemos a em função das demais variáveis do escoamento. Para um processo isoentrópico, temos que $p/\rho^\gamma = C^{te}$, onde γ é a relação entre os calores específicos a pressão e a volume constante do gás, respectivamente C_p e C_v . Portanto:

$$\begin{aligned} p &= C^{te} \rho^\gamma \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s &= C^{te} \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

Como $p/\rho = RT$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT. \quad (2.2)$$

O termo dp/ρ da Eq. 2.1 pode ser substituído utilizando-se a equação da continuidade, $\rho Au = C^{te}$, de modo a obtermos uma relação entre a velocidade do escoamento e a área da seção transversal do bocal. A equação da continuidade também pode ser escrita como:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} = 0,$$

pois integrando-se esta última obtém-se:

$$\log \rho + \log A + \log u = C^{te}$$

ou $\rho Au = C^{te}$. Substituindo-se:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \left(\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \right)$$

na Eq. 2.1 obtemos:

$$u du = a^2 \left(\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \right).$$

Remanejando os termos, obtemos:

$$\frac{u}{a^2} du - \frac{du}{u} = \frac{dA}{A}.$$

Definimos o número de Mach, como sendo:

$$M = \frac{u}{a}. \quad (2.3)$$

Trata-se da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no ponto considerado. Utilizando essa definição e pondo em evidência o termo du/u do membro esquerdo da equação acima, obtemos finalmente:

$$(M^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{dA}{A}. \quad (2.4)$$

Várias conclusões depreendem-se da Eq. 2.4: em primeiro lugar, a equação indica que, para números de Mach menores do que 1, o coeficiente do termo du/u é *negativo*. Em consequência, a velocidade aumenta quando a área transversal do bocal diminui. Para números de Mach menores do que 1, o comportamento do escoamento é portanto, qualitativamente o mesmo dos escoamentos incompressíveis. Entretanto, quando o número de Mach é maior do que 1 o coeficiente de du/u é positivo, indicando que a área da seção transversal deve *aumentar* para que a velocidade aumente. $M = 1$ é o valor além do qual a massa específica passa a cair mais depressa do que a velocidade aumenta, alterando qualitativamente o comportamento do escoamento. Velocidades maiores do que essa só são obtidas se a área transversal do bocal também aumentar. Por fim, a Eq. 2.4 indica que o escoamento isoentrópico só atinge a velocidade sônica ($M = 1$) em locais do canal, onde a área da seção transversal não varia ($dA/A = 0$), como, por exemplo em uma *garganta*. Nesse ponto, tanto o escoamento pode se acelerar ($du > 0$), quanto desacelerar ($du < 0$).

Portanto, para que um escoamento isoentrópico alcance velocidade supersônica, é necessário que o mesmo se faça através de um bocal convergente-divergente e que atinja $M = 1$ na garganta. Para que o escoamento passe ao regime supersônico na parte divergente do bocal, há condições de pressão a serem satisfeitas, que estudamos a seguir.

Cabe por fim notar que a passagem do regime subsônico ao supersônico pode ser feita sem bocal convergente-divergente, como é o caso de explosões, em que a condição de escoamento isoentrópico não é satisfeita.

Relacionamos agora a temperatura, pressão e massa específica com o número de Mach em um ponto do escoamento. Para isso, utilizaremos a equação da entalpia de estagnação, h_0 , sendo $h_0 = h + u^2/2$:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \tau_{ij} + v_i g_i + \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}}{\rho}.$$

Na ausência de efeitos viscosos, gravitacionais, sem transferência de calor e em condições de regime permanente, essa equação toma a forma:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = 0,$$

isto é, $h_0 = C^{te}$. Temos então que:

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = C^{te}.$$

Como a entalpia de um gás perfeito é dada por $h = C_p T$, podemos escrever:

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2} = C^{te}, \quad (2.5)$$

onde T_0 é a *temperatura de estagnação*, isto é, a temperatura absoluta do fluido em condições de velocidade nula.

Eliminamos os calores específicos da equação acima, lembrando que

$$C_p - C_v = R:$$

$$\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v} \quad \implies \quad \frac{R}{C_v} = \gamma - 1.$$

Por outro lado:

$$a^2 = \gamma R T = \frac{C_p}{C_v} R T \quad \implies \quad C_p T = \frac{a^2}{R/C_v} = \frac{a^2}{\gamma - 1}.$$

Podemos então reescrever a Eq. 2.5 na forma:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = C^{te}, \quad (2.6)$$

onde a_0 e a são os valores da velocidade do som nas temperaturas de estagnação e local, respectivamente, T_0 e T . Multiplicando a equação acima por $(\gamma - 1)/a^2$, obtemos:

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{a^2}.$$

Mas $a_0^2/a^2 = \gamma RT_0/\gamma RT = T_0/T$ e $u^2/a^2 = M^2$. Obtemos uma equação que relaciona a temperatura de estagnação do escoamento com a temperatura local e o correspondente número de Mach:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad (2.7)$$

Usando as relações:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(\gamma-1)} e^{\frac{p_0}{p}} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

obtemos:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.8)$$

e

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (2.9)$$

Diz-se que no ponto em que o número de Mach é igual a 1, o escoamento encontra-se em *condições críticas* e representa-se as propriedades do mesmo, nessas condições, com um asterisco (ρ^* , p^* , T^* etc.). A velocidade do som na temperatura T^* é representada por a^* . Determinamos a relação entre a temperatura crítica e a temperatura de estagnação, massa específica crítica e a massa específica de estagnação e entre a pressão crítica e a pressão de estagnação para o caso

do ar ($\gamma = 1,4$), utilizando as eqs. 2.7, 2.8, e 2.9

$$\begin{aligned}\frac{T^*}{T_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1} = 0,833 \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = 0,634 \\ \frac{p^*}{p_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} = 0,528.\end{aligned}$$

Exprimamos agora a relação entre a área de uma seção qualquer onde o número de Mach é M e a área crítica do bocal em função de M , isto é, procuraremos uma relação da forma $A/A^* = f(M)$. Para isso utilizaremos a equação da continuidade em regime permanente, $\rho Au = C^{te}$. Em particular:

$$\rho Au = \rho^* A^* u^*.$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* a^*}{\rho u} = \frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} \frac{1}{M^*},$$

onde M^* é o número de Mach obtido dividindo-se a velocidade local do escoamento pelo valor da velocidade do som onde $u = a$.

As relações ρ^*/ρ_0 e ρ_0/ρ podem ser obtidas da Eq. 2.8:

$$\begin{aligned}\frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{-1/(\gamma-1)} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) M^2\right]^{1/(\gamma-1)}$$

e

$$\left(\frac{A}{A^*}\right) = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{1/(\gamma-1)} \frac{1}{M^*}. \quad (2.10)$$

Expressemos $1/M^{*2} = f(M)$. Utilizando a Eq. 2.6, podemos escrever:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{a^{*2}}{2},$$

ou

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2}.$$

Dividindo essa última equação por u^2 , obtemos:

$$\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{1}{M^{*2}}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^{*2}} &= \left(\frac{1}{M^2} \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} = \frac{2}{M^2(\gamma + 1)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ &= \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{(\gamma + 1)M^2} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2}{\frac{\gamma + 1}{2}M^2}. \end{aligned}$$

Conclui-se dessa última que:

$$\frac{1}{M^{*2}} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \frac{1}{M^2}. \quad (2.11)$$

Levando esse resultado à Eq. 2.10, encontramos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{A^*} \right)^2 &= \\ \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{2/(\gamma - 1)} &\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \frac{1}{M^2}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(\frac{A}{A^*} \right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}.$$

Essa equação relaciona a área da seção em que o número de Mach do escoamento é M , com a área da garganta na condição de que

o número de Mach na mesma seja igual a 1. A Fig. 2.2 mostra os perfis do número de Mach, da relação p/p_0 e de T/T_0 ao longo de um bocal quando o escoamento na região divergente encontra-se, respectivamente, em regime subsônico e supersônico.

Cabe observar que, para que o escoamento seja isentrópico e supersônico na região divergente, é necessário que a pressão na saída do mesmo tenha um valor bem determinado, que é sensivelmente menor do que a pressão de saída no regime subsônico, com $M = 1$ na garganta.

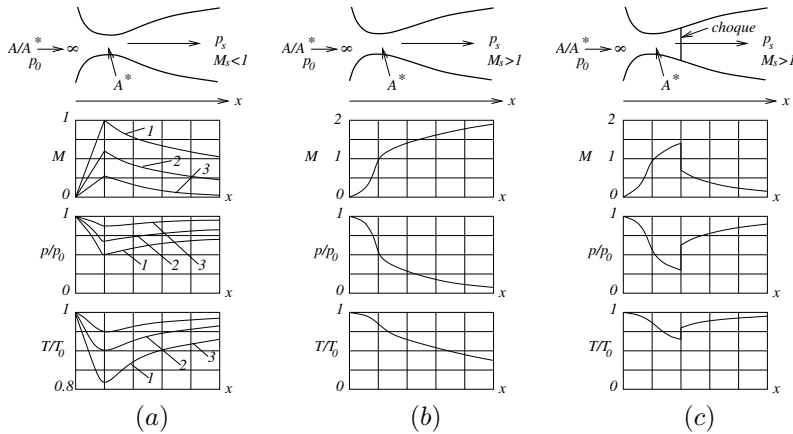


Figura 2.2: Representação esquemática da distribuição do número de Mach, de pressões e de temperaturas em um bocal convergente-divergente, nos regimes subsônico (a) e supersônico (b), com o escoamento isentrópico em todo o bocal, em ambos os casos. Número de Mach, distribuição de pressões e de temperaturas em (c) com uma onda de choque estacionária na parte divergente (diagramas fora de escala).

Caso especifique-se um valor intermediário entre os dois acima para a pressão na saída do bocal, não há solução totalmente isentrópica para o escoamento. Uma onda de choque estacionária estabelece-se na parte divergente, conforme mostrado na Fig. 2.2 (c). O escoamento volta ao regime subsônico e isentrópico após a onda de choque; a velocidade diminui a partir desse ponto, e a pressão au-

menta até o valor imposto na saída do bocal. O choque é um processo irreversível, com produção de entropia (ver Sec. 2.4.3).

2.3 Ondas Fracas: Velocidade do Som

Vimos, na seção anterior, que a velocidade do som em um gás perfeito – a – é dada por:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = (\gamma RT)^{1/2}.$$

Justificamos agora a afirmativa acima. As hipóteses para o desenvolvimento que se segue são:

1. A perturbação que se propaga é fraca;
2. A propagação se faz em uma única direção;
3. O processo é adiabático e reversível, isto é, isoentrópico. Consequentemente os efeitos viscosos são desprezíveis;
4. O meio onde a perturbação propaga-se é um gás perfeito;
5. Os efeitos gravitacionais são desprezíveis.

Com base nas hipóteses acima, as equações da continuidade e de Euler simplificadas escrevem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Como o processo é adiabático e reversível, podemos escrever:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma RT \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

As equações da continuidade e de Euler tornam-se então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \tag{2.12}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{2.13}$$

Passemos à linearização das duas equações. Consideramos que a propagação da perturbação faz-se em um meio cuja massa específica é ρ_0 em todos os pontos. Sobre esse valor superpomos uma pequena perturbação, ρ' , dependente do tempo e da posição. Supomos também que, na ausência da perturbação, o campo de velocidades seja identicamente nulo. Assim sendo temos que:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho' \\ u &= u_0 + u',\end{aligned}$$

onde $u'_0 = 0$. Levando as expressões acima à Eq. 2.12 temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 + \rho')u' = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u') = 0.$$

O termo $\partial(\rho' u')/\partial x$ contém o produto de duas variáveis com valores pequenos, sendo portanto desprezível diante dos demais. A equação da continuidade resulta então:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

Substituindo as expressões da velocidade e da massa específica perturbadas na Eq. 2.13 temos:

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 + \rho').$$

O fator $\rho_0 + \rho'$ que multiplica os dois termos do lado esquerdo dessa equação pode ser substituído por ρ_0 , pois $\rho_0 + \rho' \approx \rho_0$. Lembrando também que ρ_0 é constante, temos:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_0 u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}.$$

Espera-se que as derivadas da equação acima sejam todas da mesma ordem de grandeza. Nesse caso, o segundo termo do membro esquerdo é muito menor do que os demais, pois está multiplicado pela perturbação de velocidade u' , que é pequena por hipótese. Desprezando esse termo chegamos então à equação linearizada da quantidade de movimento:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}.$$

Temos então o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0. \quad (2.15)$$

Trata-se de um sistema de duas equações a duas incógnitas. Podemos eliminar uma das incógnitas de modo a obtermos uma única equação. Para eliminarmos a perturbação de velocidade u' , observamos que, se derivarmos a primeira equação em relação a t e a segunda em relação a x , ambas as equações conterão o termo $\partial^2 \rho' / (\partial t \partial x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} + a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

que é a equação de propagação de ondas fracas.

A equação de evolução de u' é obtida de forma semelhante: Partindo-se das eqs. 2.14 e 2.15 procura-se fazer com que o termo que contém ρ' seja o mesmo em ambas as equações. Subtraindo-se então uma da outra, obtém-se a equação procurada:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}. \quad (2.17)$$

As eqs. 2.16 e 2.17 são satisfeitas por qualquer função suficientemente regular de $x - at$, ou de $x + at$, isto é, qualquer função cujas derivadas presentes na Eq. 2.17 existam. Justifiquemos essa afirmação: seja por exemplo $u' = f_1(x - at)$. Definimos $\xi = x - at$. Nesse caso, $\partial \xi / \partial x = 1$

e $\partial\xi/\partial t = -a$. Utilizando esse resultado e definindo $df_1/d\xi = f'_1$ temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t} &= f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} &&= -a f'_1 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} &= \frac{d}{d\xi}(-a f'_1) f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} &&= a^2 f''_1 \\ a^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= a^2 f'_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} &&= a^2 f'_1 \\ a^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} &= a^2 \frac{df'_1}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} &&= a^2 f''_1,\end{aligned}$$

o que mostra que $f(x - at)$ é de fato solução da Eq. 2.17. O tipo de argumento de f_1 é característico dos fenômenos de propagação: f_1 permanece invariante para substituições de x por $x - at$, ou $x + at$, isto é, para valores crescentes ou decrescentes de x , respectivamente, pois o tempo sempre aumenta. Em outras palavras, u' propaga-se sem atenuação e com velocidade a , que é portanto a velocidade de propagação das pequenas perturbações ou do som.

2.4 Ondas Fortes: Compressão por Choque

2.4.1 Equações básicas

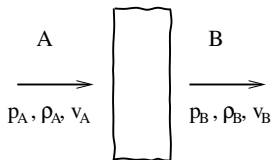


Figura 2.3: Escoamento através de uma onda de choque com seção transversal constante.

Esta seção aborda o problema da compressão de um gás perfeito ao passar por uma onda de choque estacionária. Mostramos que o processo é irreversível, com a entropia do escoamento sendo maior após o choque do que antes, o que define a direção em que o processo ocorre.

Consideremos uma onda de choque estacionária, unidimensional, em um gás perfeito cuja constante é R (ver Fig. 2.3). Ao passar pela onda, a velocidade do escoamento reduz-se de u_1 para u_2 , ao passo que a massa específica e a pressão aumentam, de ρ_1 para ρ_2 e de p_1 para p_2 , respectivamente. Como a espessura da onda de choque é muito pequena em relação à dimensão característica do canal ou do corpo onde ocorre, a área transversal da seção imediatamente após a onda é praticamente igual à da seção imediatamente antes da mesma. Nessas condições, as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e de conservação da energia na forma integral (eqs. 1.4, 1.17 e 1.63), aplicadas a um volume de controle de seção transversal constante que envolve a onda de choque, e desprezando os efeitos gravitacionais e as forças viscosas, escrevem-se na forma:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.18)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.19)$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (2.20)$$

2.4.2 A relação de Rankine-Hugoniot

A entalpia de um gás perfeito pode ser escrita sob a forma:

$$\begin{aligned} h &= e + \frac{p}{\rho} = C_v T + \frac{p}{\rho} = C_v \frac{p}{\rho R} + \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{C_v}{R} + 1 \right) \\ &= \frac{p}{\rho} \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Levando esse resultado à Eq. 2.20 obtemos:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}, \quad (2.21)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_2}.$$

Rearranjando os termos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_1 + \rho_1 u_1^2 \right] = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_2 + \rho_2 u_2^2.$$

Dividindo os dois membros da equação acima por p_1 , obtemos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1}. \quad (2.22)$$

Da Eq. 2.19:

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} - 1 \qquad \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} = 1 - \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1}.$$

Substituindo os resultados acima na Eq. 2.22, encontramos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1 + \frac{p_2}{p_1} + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_1} \right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} + 1 + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1}.$$

Rearranjando novamente os termos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1} \right] = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1 - \frac{\rho_2^2 u_2^2}{\rho_1 p_1} + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1}.$$

Observando que, pela Eq. 2.18, $\rho_2^2 u_2^2 = \rho_1^2 u_1^2$. Por isso, os dois últimos termos da equação acima se cancelam e obtém-se a relação de Rankine-Hugoniot, que descreve o processo de compressão de um gás perfeito, ao passar por uma onda de choque:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_1}{p_2}}. \quad (2.23)$$

Essa equação pode ser reescrita como a relação entre as temperaturas imediatamente depois e antes do choque, levando em conta a lei dos gases perfeitos. Obtém-se:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_1}{p_2}}. \quad (2.24)$$

A diferença entre a compressão irreversível, que se tem na passagem através de uma onda de choque, e a compressão isoentrópica entre os

mesmos valores inicial e final de pressão, é mostrada na Fig. 2.4. Vê-se que, quando a relação entre as pressões depois e antes do choque são inferiores a 2, a variação de massa específica segue aproximadamente o comportamento da compressão isentrópica. Para valores maiores da relação de pressões, como no caso de detonações, o comportamento da massa específica e, conseqüentemente, da entropia, afastam-se do isentrópico. Esse ponto é mais discutido na Sec. 2.4.3.

2.4.3 Irreversibilidade das ondas de choque

Da Eq. 2.19, obtemos:

$$\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = p_2 - p_1.$$

Levando em conta que $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, obtemos, da equação acima:

$$u_2 - u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}.$$

Como, pela Eq. 2.2 $p/\rho = a^2/\gamma$:

$$u_2 - u_1 = \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1}. \quad (2.25)$$

A Eq. 2.21 pode ser reescrita, levando em conta a Eq. 2.2 e a definição de a^* , na forma:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a^{*2},$$

de onde tem-se que:

$$u_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a^{*2}}{u_1} - \frac{a_1^2}{u_1} \frac{2}{\gamma - 1} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a^{*2}}{u_2} - \frac{a_2^2}{u_2} \frac{2}{\gamma - 1}.$$

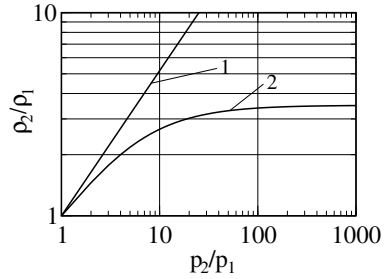


Figura 2.4: Comparação entre o aumento da massa específica em uma compressão isentrópica (curva N.º. 1) e em uma onda de choque (curva N.º. 2), conforme Eq. 2.23.

Subtraindo a segunda equação acima, da primeira, e multiplicando o resultado por γ , encontramos:

$$\frac{u_2 - u_1}{\gamma} = \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} a^{*2} \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} - \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{a_1^2}{\gamma u_1} - \frac{a_2^2}{\gamma u_2} \right).$$

Levando em conta a Eq. 2.25, reescrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} a^{*2} \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} &= -\frac{u_2 - u_1}{\gamma} - \frac{2}{\gamma - 1} (u_1 - u_2) \\ &= \frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} (u_2 - u_1), \end{aligned}$$

de onde conclui-se que:

$$u_1 u_2 = a^{*2} \quad (\text{relação de Prandtl-Meyer}). \quad (2.26)$$

Da Eq. 2.11, obtemos:

$$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}. \quad (2.27)$$

A relação entre as velocidades a montante e a jusante da onda de choque podem ser escritas, utilizando-se a relação de Prandtl-Meyer:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}.$$

Da relação de Prandtl-Meyer, obtém-se:

$$\frac{u_1}{a^*} \frac{u_2}{a^*} = M_1^* M_2^* = 1, \quad (2.28)$$

o que mostra que, se $M_1^* > 1$, têm-se, necessariamente, que $M_2^* < 1$ e vice-versa. Cabe notar que $M_1^* > 1$ implica que $M_1 > 1$ e que $M_2^* < 1$ implica $M_2 < 1$. Portanto, se de um lado da onda de choque o escoamento for supersônico, ele será subsônico do outro.

Obtém-se a relação entre os números de Mach dois dois lados substituindo-se a expressão de M_1^{*2} e de M_1^{*2} , obtidas da Eq. 2.11 na Eq. 2.28:

$$\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} = \frac{(\gamma + 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}.$$

Dessa equação obtém-se:

$$(\gamma + 1)^2 M_1^2 M_2^2 = [2 + (\gamma - 1) M_1^2] [2 + (\gamma - 1) M_2^2]$$

e a expressão para o número de Mach após o choque:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1} \quad (2.29)$$

A relação entre as massas específicas depois e antes da onda de choque é obtida da relação entre velocidades, levando em conta a equação da continuidade (Eq. 2.18):

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}. \quad (2.30)$$

A relação entre as pressões é obtida partindo-se das equações da continuidade e da quantidade de movimento (eqs. 2.18 e 2.19):

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2).$$

A intensidade do choque é obtida reescrevendo-se a equação acima na forma adimensional:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right).$$

Lembrando que $a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$ e utilizando a Eq. 2.30 obtemos:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \gamma \frac{u_1^2}{a_1^2} \left[1 - \frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{(\gamma + 1) M_1^2}\right] = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1), \quad (2.31)$$

de onde se obtém:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1). \quad (2.32)$$

A relação entre as temperaturas dos dois lados do choque pode ser obtida observando-se que $T_2/T_1 = (p_2/p_1) (\rho_1/\rho_2)$. Obtém-se:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M_1^2 + 1}{M_1^2} (M_1^2 - 1) \quad (2.33)$$

A variação de entropia através da onda de choque pode ser expressa em função das variações de pressão e da massa específica. A variação de entropia de um gás perfeito é dada por:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right].$$

Substituindo as eqs. 2.32 e 2.30 na equação acima, obtemos:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{1/(\gamma-1)} \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \right\} \quad (2.34)$$

Definindo: $M_1^2 - 1 = m$, reescrevemos a última equação:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} m \right)^{1/(\gamma-1)} (1+m)^{-\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} m + 1 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right]. \quad (2.35)$$

Pode-se simplificar essa equação para o caso em que $M_1 \approx 1$, observando-se que os termos dentro dos três pares de parênteses são da forma $1 + b\varepsilon$, com $\varepsilon \ll 1$. Lembrando que $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/3 + \dots$, identificamos os termos em ε , ε^2 , ε^3 etc. O coeficiente dos termos em ε e em ε^2 anulam-se, o que conduz a:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{m^3}{3} + \text{termos de ordem mais alta.}$$

Pode-se escrever essa equação na forma:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3}.$$

Como a entropia não pode decrescer no processo adiabático da passagem pela onda choque, é necessário que $M_1 > 1$, isto é, a a passagem no choque faz-se do regime supersônico para o subsônico. Outra conclusão importante é que a produção de entropia é de terceira ordem,

sendo portanto pequena se o número de Mach do escoamento a montante do choque não for muito maior do que 1.

Pode-se expressar a variação de entropia em termos da variação de pressão no choque, utilizando-se a Eq. 2.32. Obtém-se:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^3.$$

Portanto uma pequena variação de pressão no choque, que resulta em variações da mesma ordem de grandeza de velocidade e de massa específica, resulta em variações de entropia de terceira ordem. Os choques fracos são, portanto, quase isoentrópicos.

2.5 As Linhas de Rayleigh e de Fanno

Esta seção aborda os escoamentos unidimensionais, compressíveis, de gases ideais, em dutos de seção transversal constante, em duas condições:

1. Com adição ou remoção de calor, e sem considerar os efeitos viscosos entre o escoamento e as paredes do duto. A adição de calor tem, nesse caso, efeitos contrários sobre a velocidade, conforme o escoamento se encontre inicialmente em regime subsônico, ou em regime supersônico. A quantidade $p + \rho u^2$ se conserva, enquanto a quantidade $C_p + u^2/2$ se altera em virtude da adição ou remoção de calor. Por isso, denominamos a quantidade por *entalpia total*, e não, por entalpia de estagnação. Da mesma forma, a quantidade $p + \rho u^2/2$ não se conserva mais, e recebe o nome de *pressão total*. O processo termodinâmico que o escoamento descreve ao ser aquecido ou resfriado é descrito por uma curva no plano (h, s) , parametrizada pelo número de Mach, e denominada *Linha de Rayleigh*.
2. Sem adição de calor, o que resulta em entalpia total constante, mas considerando-se a perda da quantidade $p + \rho u^2$. Seguindo-se o mesmo procedimento, O processo termodinâmico é descrito por uma curva no plano (h, s) , por uma curva parametrizada pelo número de Mach, e denominada *Linha de Fanno*.

As duas subseções abaixo abordam a construção das curvas de Rayleigh e de Fanno. O material abaixo apresentado baseia-se nas referências [1, 9, 10].

2.5.1 Linha de Rayleigh

Escoamentos com adição de calor e não sujeitos a efeitos viscosos entre o gás e as paredes do duto de seção constante que o contém obedecem às equações da quantidade de movimento e da continuidade, sob a forma:

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_1 u_2^2 \quad (2.36)$$

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \quad (2.37)$$

A adição de uma quantidade de calor Q por unidade de massa do gás em escoamento resulta em um aumento da temperatura total, de T_{01} para T_{02} , tal que:

$$Q = C_p (T_{02} - T_{01}).$$

Obtemos a seguir as relações entre as propriedades do escoamento entre os pontos em que os números de Mach são, respectivamente, M_1 e M_2 . A expressão ρu^2 pode ser rescrita como:

$$\rho u^2 = \rho a^2 M^2 = \rho \frac{\gamma p}{\rho} M^2 = \gamma p M^2.$$

Levando esse resultado à Eq. 2.36 obtemos:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \gamma p_1 M_1^2 - \gamma p_2 M_2^2,$$

de onde resulta:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (2.38)$$

Para um gás perfeito, e usando-se a Eq. 2.37, têm-se que:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \frac{p_2 u_2}{p_1 u_1} = \frac{p_2 M_2 a_2}{p_1 M_1 a_1} = \frac{p_2 M_2}{p_1 M_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}.$$

Substituindo-se a expressão de p_2/p_1 , dada pela Eq. 2.38, na equação acima, obtemos:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2. \quad (2.39)$$

Como $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)(T_1/T_2)$, obtemos, usando as eqs. 2.38 e 2.39:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2. \quad (2.40)$$

A relação entre as pressões totais é obtida com as eqs. 2.9 e 2.38:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}. \quad (2.41)$$

A relação entre as temperaturas totais é obtida a partir das eqs. 2.7 e 2.38:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2. \quad (2.42)$$

Por uma questão de conveniência adota-se $M_1 = 1$ e representa-se $p_1 = P^*$, $\rho_1 = \rho^*$, $T_1 = T^*$, etc. Usando-se o estado crítico como referência, têm-se as seguintes relações entre as propriedades desse estado e as de outro, em que o valor do número de Mach é M :

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \quad (2.43)$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2 M^2 \quad (2.44)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \frac{1}{M^2} \quad (2.45)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{1 + \gamma} \right]^{\gamma/(\gamma - 1)} \quad (2.46)$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{(1 + \gamma) M^2}{1 + \gamma M^2} [2 + (\gamma - 1) M^2]. \quad (2.47)$$

O comportamento do gás sob efeito da adição de calor é mostrado no diagrama da Fig. 2.5 em que plota-se a relação $(s - s^*)/R \times T/T^*$, tendo como parâmetro o número de Mach correspondente a cada valor

do par daquelas variáveis. A curva apresenta dois ramos, sendo o escoamento no ramo inferior supersônico, o no superior, subsônico. A entropia do escoamento tem um valor máximo, em que $M = 1$. Como a entropia aumenta de forma monotônica com o fornecimento de calor, há um limite à quantidade de calor que pode ser fornecida ao gás, que conduz o número de Mach do escoamento ao valor $M = 1$. Algumas características do escoamento com fornecimento de calor são [1]:

Em regime supersônico, com adição de calor:

1. O número de Mach diminui;
2. A pressão aumenta;
3. A temperatura aumenta;
4. A temperatura total aumenta;
5. A pressão total diminui;
6. A velocidade diminui.

Em regime subsônico, com adição de calor:

1. O número de Mach aumenta;
2. A pressão diminui;
3. A temperatura aumenta para $M < \gamma^{-1/2}$ e diminui para $M > \gamma^{-1/2}$;
4. A temperatura total aumenta;
5. A pressão total diminui;
6. A velocidade aumenta.

No caso de extração de calor, os efeitos acima se invertem. A adição de calor conduz o escoamento à condição limite $M = 1$. Nessa condição, diz-se que o escoamento está *obstruído* (“*choked*”). Nenhuma adição de calor é possível sem drástica alteração das condições a montante. Em regime supersônico, caso o regime seja obtido pela

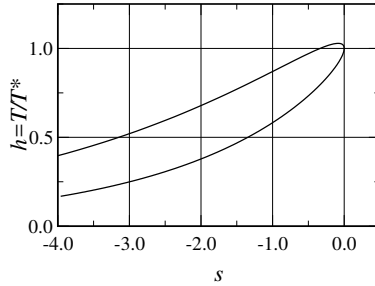


Figura 2.5: Linha de Rayleigh. O eixo vertical contém a entalpia específica normalizada, $h = T/T^*$ e o horizontal, a entropia específica normalizada, definida como $(s - s^*)/R$, onde s e s^* são, respectivamente, a entropia específica do escoamento em um ponto da curva, e no ponto onde $M = 1$. Adota-se $s^* = 0$ como referência. R é a constante de gases perfeitos do ar. O escoamento é subsônico no ramo superior da curva, e subsônico no superior. A adição de calor no ramo subsônico acelera o escoamento até fazê-lo atingir $M = 1$ e o desacelera até o mesmo número de Mach, no regime supersônico. O fornecimento de calor depois de atingida a condição crítica $M = 1$ implica em mudança nas propriedades do escoamento na entrada do duto de seção constante.

expansão em um bocal convergente divergente, uma onda de choque estabelece-se no difusor, trazendo o escoamento para o regime subsônico.

No ramo do regime subsônico, o acréscimo de calor ao escoamento resulta na propagação de ondas de pressão para montante, e em uma redução da número de Mach na entrada do duto, de modo que $M = 1$ seja atingido com a nova quantidade total de calor fornecida ao gás.

Cabe notar que é possível desacelerar um gás escoando em um duto de seção constante, do regime supersônico para o regime subsônico, adicionando-se inicialmente calor até levá-lo à condição de $M = 1$, e retirando-se calor a partir desse ponto. O procedimento inverso permite acelerar um gás do regime subsônico ao supersônico.

Por fim, cabe notar que o fornecimento de calor, quer em regime subsônico, quer em supersônico, conduz sempre a uma redução da pressão total.

2.5.2 Linha de Fanno

O escoamento unidimensional de um gás perfeito, sob efeito de atrito viscoso com as paredes de um duto de secção transversal constante, D , e isolado termicamente, caracteriza-se pelo estado do fluido, definido pelo número de Mach, e por duas propriedades termodinâmicas, convenientemente escolhidas. Usa-se em geral como propriedades a entalpia h e a entropia s do gás. A curva descrita pelo estado do gás no plano (h, s) denomina-se *Linha de Fanno*. Considera-se que o efeito do atrito viscoso entre o escoamento e as paredes do duto é caracterizado pelo fator de atrito de Fanning, f , considerado constante.

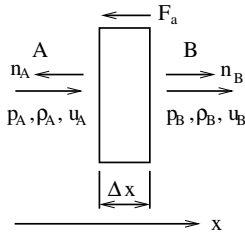


Figura 2.6: Balanço de forças e de fluxos de quantidade de movimento em uma secção de duto com área transversal constante onde escoo um gás perfeito.

Seja uma elemento de fluido, de comprimento dx , confinado no duto, conforme Fig. 2.6. O balanço de quantidades de movimento e de forças de pressão e de atrito, F_a , atuando no elemento de fluido, resulta na seguinte equação:

$$\left(-p_B - \rho u_B^2 + p_A - \rho u_A^2\right) \frac{\pi D^2}{4} = F_a \quad (2.48)$$

onde D é o diâmetro do duto. A força de atrito viscoso exercida pelas paredes sobre o elemento de fluido é dada por:

$$F_a = -\tau_{xr} \pi D \Delta x = -\frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D \Delta x. \quad (2.49)$$

Obtemos a seguir uma equação relacionando os números de Mach em duas secções do duto, separadas por uma distância L . O escoamento obedece às equações da continuidade, quantidade de movimento, da entalpia total, que se conserva, e à equação da continuidade.

Substituindo-se a expressão de F_a , dada pela Eq. 2.49 na Eq. 2.48 e passando ao limite $\Delta x \rightarrow dx$, obtemos:

$$dp + d(\rho u^2) = -\frac{1}{2}\rho u^2 \frac{4f}{D} dx.$$

Observando que o produto ρu é constante, a equação acima toma a forma:

$$dp + \rho u du = -\frac{1}{2}\rho u^2 \frac{4f}{D} dx$$

ou

$$\frac{dp}{\rho u^2/2} + \frac{\rho u du}{\rho u^2/2} = -\frac{4f}{D} dx. \quad (2.50)$$

A equação da entalpia total se escreve como:

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{u^2}{2}.$$

Na forma diferencial:

$$C_p dT + \frac{1}{2} du^2 = 0.$$

Fazendo a substituição $C_p = \gamma R/(\gamma - 1)$ encontramos:

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT + \frac{1}{2} du^2 = \frac{a^2}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{1}{2} du^2 = 0,$$

De onde se obtém:

$$\frac{dT}{T} + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{du^2}{u^2} = 0 \quad (2.51)$$

Da definição de número de Mach, escrevemos:

$$u^2 = a^2 M^2.$$

Na forma diferencial:

$$du^2 = a^2 dM^2 + M^2 da^2.$$

Dividindo a última equação por u^2 , obtemos

$$\frac{du^2}{u^2} = \frac{dM^2}{M^2} + \frac{da^2}{a^2} = \frac{dM^2}{M^2} + \frac{dT}{T}. \quad (2.52)$$

A equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0$$

ou então:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du^2}{2u^2} = 0. \quad (2.53)$$

Para um gás perfeito, têm-se que:

$$dp = \rho R dT + RT d\rho$$

e também:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.54)$$

Das eqs. 2.51 e 2.54 obtemos:

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{du^2}{u^2} = 0. \quad (2.55)$$

Utilizando a Eq. 2.53 substituímos o termo $d\rho/\rho$ da Eq. 2.55, e encontramos:

$$\frac{dp}{p} + \frac{du^2}{2u^2} + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{du^2}{u^2} = 0$$

ou ainda:

$$\frac{dp}{p} + \left[\frac{1 + (\gamma - 1) M^2}{2} \right] \frac{du^2}{u^2} = 0. \quad (2.56)$$

O termo $(\rho u^2)/2$ pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} \rho R T M^2 = \frac{\gamma}{2} p M^2.$$

Substituindo esse último resultado na Eq. 2.50 encontramos:

$$\frac{2}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} + \frac{du^2}{2} = -\frac{4f}{D} dx.$$

Substituímos o termo dp/p da equação acima pela expressão obtida da Eq. 2.55 obtemos:

$$-\frac{2}{\gamma M^2} \left[\frac{1 + (\gamma - 1) M^2}{2} \right] \frac{du^2}{u^2} + \frac{du^2}{2} = -\frac{4f}{D} dx.$$

Reagrupando os termos:

$$\left[1 - \frac{1 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma M^2}\right] \frac{du^2}{u^2} = -\frac{4f}{D} dx$$

e ainda:

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \frac{du^2}{u^2} = -\frac{4f}{D} dx. \quad (2.57)$$

Substituindo a expressão de dT/T , obtida da Eq. 2.51, na Eq. 2.52 obtemos:

$$-\frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{du^2}{u^2} + \frac{dM^2}{M^2} = \frac{du^2}{u^2},$$

de onde se obtém a equação para du^2/u^2 :

$$\frac{du^2}{u^2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM^2}{M^2}.$$

Substituindo-se a expressão de du^2/u^2 dada pela equação acima na Eq. 2.57 obtemos uma equação que, integrada, relaciona os números de Mach entre dois trechos de um duto de comprimento L :

$$\frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM^2}{M^2} = \frac{4f}{D} dx. \quad (2.58)$$

Em termos de dM/M :

$$2 \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM}{M} = \frac{4f}{D} dx. \quad (2.59)$$

Procedemos à integração da Eq. 2.58:

$$\int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{1 - M^2}{\gamma M^4 [1 + M^2 (\gamma - 1) / 2]} dM^2 = 4f \frac{L}{D}. \quad (2.60)$$

Somamos e subtraímos uma expressão ao numerador do integrando da equação acima, obtendo:

$$\begin{aligned} 1 - M^2 &= 1 - M^2 + \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \\ &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 - \frac{\gamma + 1}{2} M^2. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $1 - M^2$ acima no integrando da Eq. 2.60 obtemos:

$$\int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{1 - M^2}{\gamma M^4 [1 + M^2 (\gamma - 1) / 2]} dM^2 = \int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{dM^2}{\gamma M^4} - \int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{\gamma + 1}{2\gamma M^2 [1 + M^2 (\gamma - 1) / 2]} dM^2. \quad (2.61)$$

Definindo:

$$y = \frac{M^2}{1 + M^2 (\gamma - 1) / 2}$$

temos:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dM^2}{1 + M^2 (\gamma - 1) / 2} - \frac{1 + M^2 (\gamma - 1) / 2}{[1 + M^2 (\gamma - 1) / 2]^2} dM^2 \\ &= \frac{dM^2}{[1 + M^2 (\gamma - 1) / 2]^2}, \end{aligned}$$

e

$$\frac{dy}{y} = \frac{dM^2}{M^2 [1 + M^2 (\gamma - 1) / 2]}. \quad (2.62)$$

Usando a expressão de dy/y , dada pela Eq. 2.62, e a decomposição dada pela Eq. 2.61, da integral indicada na Eq. 2.60 obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} 4f \frac{L}{D} &= \frac{1}{\gamma} \int_{M_1^2}^{M_2^2} \frac{dM^2}{M^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \frac{y_1}{y_2}, \end{aligned}$$

e

$$4f \frac{L}{D} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + M_2^2 (\gamma - 1) / 2}{1 + M_1^2 (\gamma - 1) / 2} \right].$$

O comprimento crítico do duto, L^* , ao fim do qual, tendo partido de um número de Mach M o escoamento atinge o número de Mach $M = 1$, é dado por:

$$4f \frac{L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}. \quad (2.63)$$

Obtemos a seguir, as relações entre as propriedades entre os pontos em que os números de Mach são M_1 e M_2 , respectivamente. A relação entre as temperaturas nos dois pontos é obtida a partir da Eq. 2.7:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2 T_0}{T_0 T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}. \quad (2.64)$$

A relação entre as pressões é obtida a partir da equação da continuidade, $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ e da definição de número de Mach. Obtém-se:

$$\frac{\gamma p_1}{a_1^2} = \frac{\gamma p_2}{a_2^2}.$$

A partir dessa equação obtemos para a reação de pressões:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1 a_2}{M_2 a_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}.$$

Usando a expressão da relação de temperaturas entre dois pontos, dada pela Eq. 2.64, obtemos:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2} \right]^{1/2}. \quad (2.65)$$

A relação entre as massas específicas é obtida notando-se que:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}.$$

Substituindo-se a expressão das relações de pressão e de temperatura encontramos:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{1/2}. \quad (2.66)$$

A relação entre as pressões totais é obtida a partir das eqs. 2.9 e 2.65. Obtém-se:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_2^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}. \quad (2.67)$$

As relações entre as propriedades em qualquer ponto e as do ponto em que $M = 1$ são dadas abaixo:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (2.68)$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]^{1/2} \quad (2.69)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \quad (2.70)$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M^2}{\gamma + 1} \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}. \quad (2.71)$$

As curvas de Rayleigh e de Fanno são mostradas na Fig. 2.7. Os eixos contêm as mesmas variáveis usadas na Fig. 2.5. Nas duas curvas, o ramo superior corresponde a escoamento subsônico, e o inferior, a supersônico. Os pontos de interseção das duas curvas satisfazem às condições de choque normal. O choque se faz com a passagem do escoamento supersônico para o subsônico, de modo a respeitar as condições postas pela segunda lei da termodinâmica.

Algumas características de escoamentos compressíveis sob efeito de atrito viscoso com as paredes do duto são [1]:

Em regime supersônico:

1. O número de Mach diminui;
2. A pressão aumenta;
3. A temperatura aumenta;
4. A pressão total diminui;
5. A velocidade diminui.

Em regime subsônico:

1. O número de Mach aumenta;
2. A pressão diminui;
3. A temperatura diminui;

4. A pressão total diminui;
5. A velocidade aumenta.

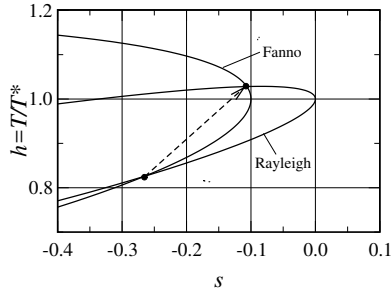


Figura 2.7: Linhas de Rayleigh e de Fanno. O eixo vertical contém a entalpia específica normalizada, $h = T/T^*$ e o horizontal, a entropia específica normalizada, definida como $(s - s^*)/R$, onde s e s^* são, respectivamente, a entropia específica do escoamento em um ponto da curva, e no ponto onde $M = 1$. Adota-se $s^* = 0$ como referência para a linha de Rayleigh, e $s^* = -0,1$ para a de Fanno. R é a constante de gases perfeitos do ar. O ramo superior de cada curva corresponde ao regime subsônico, e o inferior, ao supersônico. O atrito viscoso, assim como o fornecimento de calor, desacelera escoamentos inicialmente supersônicos e acelera os subsônicos até o ponto crítico, em que $M = 1$. Os pontos de interseção das duas curvas satisfazem às condições de choque normal. O choque se faz com a passagem do escoamento supersônico para o subsônico, de modo a respeitar as condições postas pela segunda lei da termodinâmica.

O atrito viscoso, assim como o fornecimento de calor desacelera escoamentos inicialmente supersônicos e acelera os subsônicos até o ponto crítico, em que $M = 1$, depois de percorrida uma distância crítica L^* , dada pela Eq. 2.63. Em regime supersônico, têm-se uma situação semelhante à do fornecimento adicional de calor, depois de atingida a condição crítica: caso o regime seja obtido pela expansão em um bocal convergente divergente, uma onda de choque estabelece-se no difusor, trazendo o escoamento para o regime subsônico. Caso o regime seja subsônico, o acréscimo de um comprimento do duto além

do valor crítico resulta em diminuição do número de Mach e da vazão de entrada.

Cabe observar que, ao contrário do que ocorre em escoamentos com adição de calor, não é possível desacelerar um escoamento supersônico até $M = 1$ e prosseguir desacelerando-o até um regime subsônico, sob efeito de atrito com as paredes do duto.

2.6 Analogia com a Hidráulica de Canal Aberto

Esta seção aborda a analogia entre o escoamento compressível quase-unidimensional estudado nas secs. 2.2 e 2.3 e o escoamento permanente, sem viscosidade, de fluidos incompressíveis com superfície livre, em canais de pequena profundidade e largura variável, conforme Fig. 2.8.

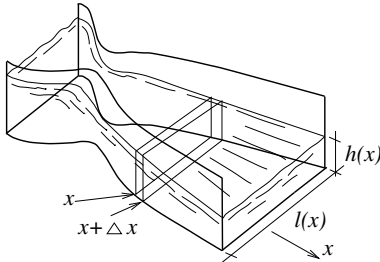


Figura 2.8: Escoamento em um canal de largura variável, com superfície livre.

considerando o escoamento quase-unidimensional, desprezamos as componentes v_y e v_z . De fato, definimos a velocidade do escoamento $u = Q/A$, onde Q é a vazão volumétrica e A , a área da seção transversal do canal. Nessas condições, a componente da equação da quantidade de movimento na direção y escreve-se como $dp = -\rho g dy$. Essa equação, integrada, fornece a distribuição vertical de pressões na forma $p = \rho g(h - y)$. A constante de integração é determinada de modo a que a pressão anule-se na superfície livre, onde $y = h$.

A hipótese de que o escoamento faz-se com superfície livre é utilizada ao admitirmos que a pressão na superfície é constante e independente da espessura h , da lâmina de fluido. Definimos como sendo igual a zero, a pressão na superfície livre. Como estamos

Seja um volume de controle de comprimento Δx , perpendicular à direção do escoamento, e sejam l e h a largura do canal e a espessura da lâmina de fluido na seção considerada, respectivamente. A equação da continuidade em regime permanente escreve-se $Q = C^{te}$ ou $uhl = C^{te}$. Da mesma forma que no caso de escoamentos compressíveis, essa última equação pode ser escrita na forma diferencial, como:

$$\frac{du}{u} + \frac{dl}{l} + \frac{dh}{h} = 0$$

ou

$$\frac{dh}{h} = -\frac{du}{u} - \frac{dl}{l}. \quad (2.72)$$

A taxa de variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle elementar escreve-se:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de mo-} \\ \text{vimento dentro do vo-} \\ \text{lume de controle} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de} \\ \text{quantidade de movi-} \\ \text{mento para fora do} \\ \text{volume de controle} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Resultante das forças} \\ \text{aplicadas} \end{array} \right).$$

Aplicamos esse princípio à componente da quantidade de movimento na direção do eixo do canal. Como o escoamento faz-se em regime permanente, a taxa de acumulação de quantidade de movimento dentro do volume de controle é igual a zero. O fluxo da componente axial da quantidade de movimento para dentro do volume de controle é dado por:

$$\int_0^h \rho u^2 l \, dy = \rho u^2 l h = f(x).$$

O fluxo de quantidade de movimento que sai do volume de controle em $x + \Delta x$ é dado por:

$$-f(x + \Delta x) = - \left[f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x \right] = - \left[\rho u^2 l h + \frac{d}{dx} (\rho u^2 l h) \Delta x \right].$$

O fluxo líquido de quantidade de movimento para dentro do volume de controle é dado pela diferença entre os fluxos entrando e saindo da seção:

$$-\frac{d}{dx} (\rho u^2 l h) \Delta x.$$

Como a massa específica é constante e como pela equação da continuidade uhl também o é, podemos passá-los para fora do operador de derivação da expressão acima, que se torna:

$$-\frac{d}{dx}(\rho u^2 l h) \Delta x = -\rho u l h \frac{du}{dx} \Delta x.$$

As forças que atuam sobre o volume de controle são devidas à pressão que atua sobre cada lado do mesmo. A força $F(x)$, que atua na seção considerada, é dada pela integral da pressão em cada cota, $\rho g(h-y)$, multiplicada pelo elemento de área $l dy$:

$$F(x) = \int_0^h \rho g(h-y) l dy = \rho g l \left(h y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h = \rho g l \frac{h^2}{2}.$$

A força atuando em $x+\Delta x$ é dada por $F(x+\Delta x) = -[F(x) + dF/dx \Delta x]$ e a resultante é portanto:

$$-\frac{d}{dx} F(x) \Delta x = -\rho g \frac{d}{dx} \left(l \frac{h^2}{2} \right) \Delta x.$$

O balanço de quantidades de movimento torna-se portanto:

$$0 = -\rho u l h \frac{du}{dx} \Delta x - \rho g \frac{d}{dx} \left(l \frac{h^2}{2} \right) \Delta x$$

ou

$$ulh \frac{du}{dx} = -g \frac{d}{dx} \left(l \frac{h^2}{2} \right) = -gl \frac{d}{dx} \frac{h^2}{2} = -glh \frac{dh}{dx} - g \frac{h^2}{2} \frac{dl}{dx}.$$

Multiplicando essa última equação por $dx/(glh^2)$, obtemos:

$$\frac{u}{gh} du = -\frac{dh}{h} - \frac{1}{2} \frac{dl}{l}.$$

Substituindo dh/h pela expressão dada pela Eq. 2.72 obtemos:

$$\frac{u}{gh} du = \frac{du}{u} + \frac{dl}{l} - \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

ou

$$\frac{u}{gh} du - \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}.$$

Pondo em evidência o termo du/u do membro esquerdo, obtemos:

$$\left(\frac{u^2}{gh} - 1\right) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}.$$

O termo u^2/gh é o número de Froude ao quadrado, Fr^2 . Utilizando essa definição, temos:

$$(Fr^2 - 1) \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}. \quad (2.73)$$

Comparando essa equação com a Eq. 2.4 vê-se a analogia entre o comportamento dos escoamentos de líquidos em canais abertos e os escoamentos compressíveis: a largura l do canal desempenha o mesmo papel da área A , da seção transversal do duto, enquanto a espessura l da lâmina de fluido tem seu equivalente na massa específica ρ do gás. O número de Froude é o equivalente do número de Mach. Para números de Froude inferiores a 1 (escoamentos subcríticos), o alargamento do canal resulta em diminuição da velocidade e em aumento da espessura da lâmina de líquido. Para números de Froude maiores do que 1 (escoamentos supercríticos), a velocidade aumenta e a espessura da lâmina de fluido diminui com o alargamento do canal. Escoamentos críticos, em que $Fr = 1$, somente ocorrem em seções onde $dl/dx = 0$, analogamente ao que ocorre com os escoamentos compressíveis, em que a velocidade sônica só ocorre onde $dA/dx = 0$.

2.7 Problemas

1. Mostrar que, para um gás perfeito:

$$M = \frac{u}{a_0} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u}{a_0} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

e que essa equação reduz-se, no caso de baixos números de Mach, a:

$$M = \frac{u}{a_0} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u}{a_0} \right)^2 \right].$$

2. Mostrar que a relação entre a temperatura local em um escoamento compressível e a temperatura de referência (escoamento não perturbado), é dada por:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left[\left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 - 1 \right].$$

3. Mostrar que a velocidade máxima que o escoamento de um gás perfeito oriundo de um reservatório pode atingir é dada por:

$$u_{max}^2 = 2h_0 = \frac{2}{\gamma - 1} a_0^2.$$

Quais são os valores correspondentes da temperatura e do número de Mach? Interpretar o resultado.

4. Mostrar que, para um choque normal fraco $\left(\frac{\Delta p}{p} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \ll 1 \right)$:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \approx -\frac{\Delta u}{u_1} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_1}$$

$$M_1^2 = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_1} \quad (\text{exata})$$

$$M_2^2 \approx 1 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_1}$$

$$\frac{\Delta p_0}{p_0} \approx \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^3.$$

5. O campo eletromagnético obedece às equações da Maxwell, que são:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético, ρ é densidade local de cargas elétricas, σ , a condutividade

elétrica do meio, μ e ε , a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio, respectivamente. Mostrar que os campos elétrico e magnético satisfazem às equações de ondas na forma:

$$\begin{aligned}\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla^2 \mathbf{E} - \mathbf{grad} (\text{div } \mathbf{E}) \\ \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla^2 \mathbf{B}\end{aligned}$$

e que as expressões dos campos elétrico e magnético, dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \exp [i (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + cc \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \exp [i (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + cc,\end{aligned}$$

satisfazem às equações de onda para meios sem cargas elétricas. Nas equações acima, \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 são duas constantes, $\boldsymbol{\kappa}$ e ω são o vetor de onda e a frequência da perturbação eletromagnética que se propaga, \mathbf{r} é o vetor de posição no campo, e cc indica o complexo conjugado de um número complexo.

Capítulo 3

Escoamentos Potenciais

3.1 Introdução

Este capítulo trata de escoamentos irrotacionais, aos quais pode-se associar um potencial de velocidades. Nessa classe de escoamento, os efeitos viscosos são sempre desprezados. Inicia-se pela obtenção da equação do potencial tridimensional, compressível e dependente do tempo (Sec. 3.2). Dessa equação decorrem as do potencial associado a vários casos particulares como o de ondas fracas, o associado ao campo tridimensional compressível de corpos esbeltos alinhados ou quase alinhados ao escoamento e, ainda, a equação de Laplace, do potencial de escoamentos permanentes sob $M \ll 1$. A Sec. 3.3 discute a classificação das equações diferenciais a derivadas parciais em elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Outra classe de fenômenos ocorre no escoamento de fluidos pouco viscosos como o ar ou a água, em torno de corpos de qualquer forma. No caso de corpos esbeltos, os efeitos viscosos confinam-se em uma fina camada que se forma em torno do corpo (camada limite) e na esteira deixada a jusante do corpo, para onde a vorticidade gerada na camada limite é transportada. Fora da camada limite e da esteira, o escoamento não está sujeito a efeitos viscosos nem, em muitos casos, a efeitos termodinâmicos. Adicionalmente, é comum que o escoamento que incide sobre o corpo seja uniforme, isto é, $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ no escoamento incidente não perturbado. Fora da camada limite e da esteira,

o teorema de Kelvin (Eq. 1.51) aplica-se: a circulação sobre qualquer curva traçada sobre o escoamento incidente se conserva. Sendo nula, o escoamento incidente é irrotacional e assim permanece em toda a região, onde se aplica o teorema de Kelvin. Obtém-se o mesmo resultado a partir da equação da vorticidade (Eq. 1.47) sem o termo viscoso. A equação toma a forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}.$$

Essa equação mostra que, sendo a vorticidade nula $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$, isto é, sendo o campo inicialmente irrotacional, assim permanece.

Em escoamentos irrotacionais o campo de velocidades admite um potencial ϕ , tal que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi.$$

Adicionalmente, a equação de Bernoulli, na forma dada pela Eq. 1.38, aplica-se no campo todo, no caso de escoamentos incompressíveis.

3.2 Escoamentos Potenciais Compressíveis

Escoamentos irrotacionais caracterizam-se pela existência de um potencial ϕ , cujo gradiente é o campo de velocidades \mathbf{v} . De forma geral, o potencial é função do tempo e da posição, isto é, $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$. Obtemos a seguir uma equação de evolução para o potencial ϕ .

A equação de Euler pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p,$$

onde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. No caso de um campo irrotacional de velocidades, esta equação torna-se:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Exprimindo a componente de velocidade em função do potencial, $v_i = \partial\phi/\partial x_i$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} = 0.$$

Integrando essa última equação obtém-se:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \int \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v^2}{2} dx_i = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = F(t).$$

A função $F(t)$ pode ser incorporada ao potencial, o que resulta em:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Derivando-se essa última equação com relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

O termo que contém a integral na equação acima pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{a^2}{\rho} d\rho = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho = \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

onde $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ é a velocidade do som. Substituindo o termo acima na Eq. 3.1 obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = 0. \quad (3.2)$$

Multiplicando a equação de Euler por v_i e lembrando que $v_i \partial v_i / \partial t = 1/2 \partial v^2 / \partial t$, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{v_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

ou:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{a^2}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i},$$

uma vez que $\partial p / \partial x_i = a^2 \partial \rho / \partial x_i$, nas condições vistas na Sec. 2.3. Utilizando a equação da continuidade, substituímos o termo $v_i \partial \rho / \partial x_i$ da equação acima por:

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$$

e obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{a^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right).$$

Utilizando a Eq. 3.2, substituímos o termo $(a^2/\rho)(\partial\rho/\partial t)$ na equação acima:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}.$$

Substituindo $1/2 \partial v^2/\partial t = v_i \partial v_i/\partial t$ obtemos:

$$2v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Substituindo $v_i = \partial\phi/\partial x_i$ temos:

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

e, finalmente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right). \quad (3.3)$$

Em notação vetorial:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \left(\nabla \phi \otimes \nabla \phi : \nabla \nabla \phi + 2 \nabla \phi \cdot \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right). \quad (3.4)$$

A equação potencial dos escoamentos compressíveis é representada nas formas tensorial cartesiana e vetorial pelas eqs. 3.3 e 3.4. A equação é válida em regiões onde não haja produção de entropia, desde que o escoamento incidente sobre a região considerada seja também irrotacional.

Condições de contorno para o potencial ϕ :

1. Sobre sólidos estacionários:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0,$$

onde n é a coordenada ao longo da direção \mathbf{n} , perpendicular à superfície do sólido. A condição é equivalente a $\mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{n} = 0$.

2. Sobre sólidos em movimento permanente com velocidade \mathbf{U} :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U},$$

Essa condição também pode ser escrita como $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U}) = 0$, onde \mathbf{v} é a velocidade local.

Consideremos agora alguns casos limite da equação potencial dos escoamentos compressíveis.

Notação: indicamos a operação de derivação por um índice contendo a variável em relação à qual o potencial ϕ é derivado: $\partial \phi / \partial t = \phi_t$, $\partial^2 \phi / \partial x^2 = \phi_{xx}$ etc.

1. Escoamento bidimensional permanente:

$$(\phi_x^2 - a^2)\phi_{xx} + (\phi_y^2 - a^2)\phi_{yy} + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} = 0 \quad (3.5)$$

ou

$$(v_x^2 - a^2)\phi_{xx} + (v_y^2 - a^2)\phi_{yy} + 2v_xv_y\phi_{xy} = 0.$$

2. Escoamento tridimensional permanente, $v_x \gg v_y$, $v_x \gg v_z$ (corpos esbeltos sob baixo ângulo de ataque, fora da região transônica):

$$(1 - M^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0.$$

Nesse caso, a presença de um corpo esbelto, alinhado ou quase alinhado ao escoamento, gera pequenas componentes de velocidade nas direções perpendiculares ao campo uniforme incidente, introduzindo ao mesmo tempo pequenas perturbações na direção da velocidade incidente.

3. Escoamento tridimensional permanente, com todas as componentes de velocidade pequenas em relação à velocidade do som. Nesse caso, $1/a^2 \rightarrow 0$ e obtemos:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0.$$

Essa última, conhecida como equação de Laplace, pode ser obtida a partir da equação da continuidade para fluidos incompressíveis e usando a condição de que escoamentos irrotacionais

aditem um potencial tal que $v_i = \partial\phi/\partial x_i$. Substituindo essa equação na da continuidade temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla^2 \phi = 0. \quad (3.6)$$

Cabe mencionar que a hipótese de escoamento incompressível é equivalente à de velocidade do som infinita. O membro direito da Eq. 3.3 anula-se. Portanto, a Eq. 3.6 aplica-se a qualquer escoamento potencial incompressível e não apenas para o caso em $v_x \gg v_y$ e $v_x \gg v_z$. Problemas aos quais essa equação se aplica constituem-se de uma classe consideravelmente mais simples do que os não potenciais. Tem-se na realidade uma única incógnita, o potencial ϕ , que satisfaz à equação de Laplace. Uma vez conhecido, as componentes da velocidade são obtidas através do gradiente do potencial. O gradiente de pressões é determinado a partir da equação de Navier-Stokes.

Outro aspecto importante da Eq. 3.6 é sua linearidade. Em consequência dessa linearidade, a soma de duas soluções para o potencial ϕ é solução da mesma. As soluções para cada componente do campo de velocidades satisfaz à equação de Laplace, assim como a soma de dois campos de velocidade potenciais. O princípio de superposição aplica-se.

4. Escoamento unidimensional não permanente:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} (\phi_x^2 \phi_{xx} + \phi_{tt} + 2\phi_x \phi_{tx})$$

ou

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} (v_x^2 \phi_{xx} + \phi_{tt} + 2v_x \phi_{tx}).$$

5. Escoamento unidimensional não permanente, $v_x^2 \ll a^2$, $v_x \partial v_x / \partial t \ll a^2$:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a^2} \phi_{tt}.$$

Tem-se neste caso, a equação de ondas fracas, caracterizadas como pequenas perturbações que se propagam no meio (ver também a Sec. 2.3).

3.3 Uma Classificação das Equações a Derivadas Parciais

Seja o caso de um campo potencial bidimensional. Suponhamos que sejam dados ϕ e $\mathbf{grad} \phi$ sobre uma curva Σ . Reescrevemos a Eq. 3.5 sob a forma:

$$A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D = 0,$$

com variáveis independentes x e y , variável dependente ϕ e os coeficientes A , B , C e D , funções de a , x , y , ϕ , ϕ_x e ϕ_y . Suponhamos que $x = x(\sigma)$ e $y = y(\sigma)$. Adotamos a notação:

$$\begin{aligned} p &= \phi_x & r &= \phi_{xx} \\ q &= \phi_y & s &= \phi_{xy} & t &= \phi_{yy}. \end{aligned}$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} Ar + Bs + Ct &= -D \\ \frac{dp}{d\sigma} &= \frac{d\phi_x}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}r + \frac{dy}{d\sigma}s \\ \frac{dq}{d\sigma} &= \frac{d\phi_y}{d\sigma} = \frac{dx}{d\sigma}s + \frac{dy}{d\sigma}t. \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema de equações acima, sob a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \frac{dx}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ \frac{dp}{d\sigma} \\ \frac{dq}{d\sigma} \end{pmatrix}.$$

Identifiquemos as condições para que as derivadas da velocidade sejam descontínuas e, conseqüentemente, para que as derivadas de ordem mais alta ϕ_{xx} , ϕ_{xy} e ϕ_{yy} divirjam. Seja σ o parâmetro de uma curva característica ao longo da qual as derivadas de ordem mais alta, isto é, as derivadas da velocidade, são descontínuas. Impõe-se a condição de descontinuidade exigindo-se que o determinante da matriz de coeficientes do sistema acima se anule. Essa condição traduz-se por:

$$A \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - B \left(\frac{dx}{d\sigma} \right) \left(\frac{dy}{d\sigma} \right) + C \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 = 0$$

ou dividindo a última equação por $(dx/d\sigma)^2$:

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0,$$

donde se obtém:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

As derivadas do campo de velocidades serão contínuas se as raízes da equação forem imaginárias, e descontínuas se forem reais. A Eq. 3.5 pode ser classificada em três grupos, dependendo de seus parâmetros:

1. Parabólica, se $B^2 - 4AC = 0$;
2. Hiperbólica, se $B^2 - 4AC > 0$;
3. Elíptica, se $B^2 - 4AC < 0$ (não há características no campo, ao longo das quais as derivadas da velocidade são descontínuas);

Alguns exemplos:

1. A equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

não tem características reais. Todas as derivadas são contínuas. Campos rigidos pela equação de Laplace são uniformes.

2. A equação da temperatura em regime não permanente e unidimensional,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

apresenta uma família de características. Trata-se de uma equação parabólica.

3. A equação de ondas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

apresenta duas famílias de características ao longo das retas $dx/dt = \pm a$. Essa equação sempre apresenta uma região de descontinuidade. Trata-se de uma equação hiperbólica.

4. No caso da Eq. 3.5, reescrita sob a forma:

$$(u^2 - a^2) \phi_{xx} + 2uv\phi_{xy} + (v^2 - a^2) \phi_{yy} = 0,$$

$$\text{onde } u = \phi_x, v = \phi_y, A = (u^2 - a^2), B = 2uv \text{ e } C = (v^2 - a^2),$$

tem-se que:

$$B^2 - 4AC = a^2 [(u^2 + v^2) - a^2].$$

Se $|\mathbf{v}|^2 = (u^2 + v^2) < a^2$, isto é, se o regime do escoamento for subsônico, a equação é elíptica e não há descontinuidades nas derivadas da velocidade.

Se $|\mathbf{v}|^2 = (u^2 + v^2) > a^2$, isto é se o regime for supersônico, $B^2 - 4AC > 0$, a equação é hiperbólica. Nesse caso:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv \pm \sqrt{a^2(u^2 + v^2 - a^2)}}{u^2 - a^2} = \frac{\frac{v}{u} \pm \frac{a^2}{u^2} \sqrt{M^2 - 1}}{1 - \frac{a^2}{u^2}} = \tan(\alpha \pm \theta), \quad (3.7)$$

onde:

$$M = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{a} \quad \tan \alpha = \frac{v}{u} \quad \text{sen } \theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{M}.$$

Se $v = 0$ a Eq. 3.7 reduz-se a:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\pm\theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

onde θ é o ângulo que as características formam com a velocidade de um ponto que se desloca no campo. Tem-se também que:

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{u} = \frac{1}{M} \quad \text{e:} \quad \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}.$$

Vê-se, da Fig. 3.1 (c), que, ao fim de um intervalo de tempo igual a 1, uma perturbação emitida por um ponto que se desloca com velocidade u terá percorrido uma distância numericamente igual a a , enquanto a distância que o ponto percorreu será numericamente igual a u . Da mesma figura conclui-se que $\text{sen } \theta = a/u = 1/M$.

Para um ponto que se desloca com $v = u$, as características ao longo das quais as derivadas da velocidade são descontínuas e as regiões que recebem sinal de pequenas perturbações emitidas pelo ponto encontram-se ilustradas na Fig. 3.1. A região interna às características, que recebem sinais das perturbações emitidas pelo ponto em deslocamento, denomina-se *cone de Mach*.

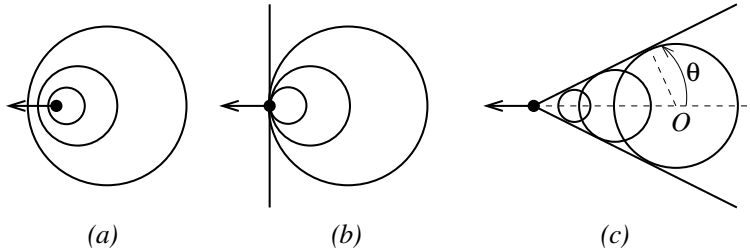


Figura 3.1: Características de um escoamento bidimensional, permanente, compressível. (a): O ponto que se desloca com velocidade subsônica emite pequenas perturbações que se propagam acima de sua velocidade; não há descontinuidades nas derivadas da velocidade. A equação potencial do escoamento é elíptica. (b): O ponto desloca-se com a velocidade do som. Há uma família de características ao longo da qual as derivadas da velocidade são descontínuas. A região à frente (à esquerda) da característica encontra-se na zona de silêncio e não recebe sinais de perturbação emitidos pelo ponto. A equação potencial do escoamento é parabólica. (c): O ponto desloca-se com velocidade acima da velocidade do som. O campo tem duas famílias de características, ao longo das quais as derivadas da velocidade são descontínuas. Pontos à frente das características encontram-se na zona de silêncio. A equação potencial é hiperbólica. Uma pequena perturbação localizada inicialmente no ponto O encontra-se sobre a característica que delimita o Cone de Mach e avança na direção perpendicular à mesma, enquanto a partícula que a gerou avança sempre sobre o vértice do cone.

Capítulo 4

Escoamentos Supersônicos

4.1 Introdução

Este capítulo aborda a questão do escoamento supersônico estacionário e bidimensional sobre corpos em forma de cunhas. Adota-se um referencial fixo em relação à cunha. As perturbações do escoamento que ocorrem nas proximidades do corpo são transmitidas a outras regiões do mesmo através de ondas. Sendo o escoamento supersônico nenhuma onda pode se propagar para montante da cunha e o sistema de ondas que se forma desloca-se com o corpo de forma estacionária. Estudamos então as condições em que um sistema de ondas forma-se e identificamos a geometria do corpo adjacente às ondas. A influência limitada do corpo permite a análise do campo aerodinâmico com o uso de metodologia que não se aplica ao caso subsônico. Finalmente é apresentada a técnica de construção de problemas de Riemann para a Equação de Euler, que descrevem o escoamento em um tubo de choque.

4.2 Ondas de Choque Oblíquo

Consideramos inicialmente, as condições para a formação de um choque oblíquo em relação à direção do escoamento incidente. Essa configuração pode ser tratada de forma semelhante à de um choque normal (Sec. 2.4) acrescentando-se ao escoamento uma componente de velocidade paralela ao choque. Seja o escoamento através de uma onda

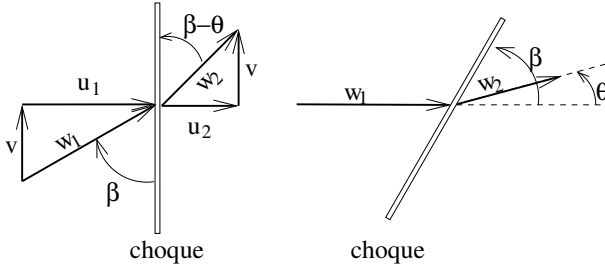


Figura 4.1: Escoamento através de uma onda de choque oblíquo. À esquerda: Onda de choque com superposição de uma componente de velocidade v , paralela ao choque. A existência de uma componente de velocidade paralela ao choque pode ser atribuída à adoção de um referencial que se move com velocidade v , paralela ao choque, e em sentido contrário ao de v , conforme indicado no diagrama à esquerda. À direita: choque oblíquo.

de choque, cuja velocidade w_1 incide sobre a mesma formando um ângulo β , como mostrado na Fig. 4.1. Pode-se decompor a velocidade em uma componente normal ao choque, u_1 , e outra paralela, v . O ângulo de incidência é dado por $\beta = \tan^{-1} u_1/v$. A componente paralela ao choque passa pela onda sem ser afetada, enquanto a componente perpendicular reduz-se abruptamente ao valor u_2 ao passara pela onda. em consequência, o escoamento é de um ângulo θ , que faz sempre o escoamento defletir-se em direção à onda de choque.

As relações entre as propriedades do escoamento dos dois lados do choque podem então ser facilmente identificadas, pois a superposição da componente v ao escoamento perpendicular ao choque não altera a pressão estática e demais paraâmetros estáticos dos dois lados. O número de Mach é definido por $M_1 = w_1/a_1$ e a componente u_1 que se altera ao passar pelo choque, é dada por $u_1 = w_1 \sin \beta$.

As relações entre as propriedades do escoamento entre os dois lados do choque são então obtidas a partir das eqs. 2.30, 2.31, 2.33 e 2.34, substituindo-se u_1/a_1 por $M_1 \sin \beta$. Obtém-se:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}. \quad (4.1)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1), \quad (4.2)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta + 1}{M_1^2 \sin^2 \beta} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (4.3)$$

$$M_2^2 \sin^2 (\beta - \theta) = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \gamma + 1} \quad (4.4)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left\{ \left[1 + 2 \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right]^{1/(\gamma-1)} \times \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta} \right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \right\}. \quad (4.5)$$

As equações acima mostram que a relação entre propriedades antes e depois do choque dependem apenas da componente perpendicular ao choque, da velocidade incidente. Essa componente deve ser supersônica, isso é $M_1 \sin \beta \geq 1$, o que define uma inclinação mínima do escoamento incidente, com relação ao choque. A inclinação máxima é $\pi/2$. O ângulo de inclinação de um escoamento que incide sobre uma onda de choque deve portanto, situar-se dentro da faixa:

$$\sin^{-1} \frac{1}{M_1} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.6)$$

O número de Mach M_2 após o choque pode ser obtido notando-se $M_2 = w_2/a_2$, e que $u_2/a_2 = M_2 \sin (\beta - \theta)$. Substituindo-se essas relações nas Eq. 2.29 obtemos:

$$M_2^2 \sin^2 (\beta - \theta) = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - \gamma + 1}. \quad (4.7)$$

Para cada valor do ângulo de incidência β corresponde um ângulo de deflexão θ . A relação entre β e θ pode ser obtida observando-se que:

$$\tan \beta = \frac{u_1}{v} \quad \text{e} \quad \tan (\beta - \theta) = \frac{u_2}{v}.$$

Eliminando-se v e usando as equações da continuidade e 4.1 obtemos:

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan\beta} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2\beta + 2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2\beta} \quad (4.8)$$

Remanejando os termos:

$$\tan\theta = 2 \cot\beta \frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2}. \quad (4.9)$$

A última expressão anula-se para $\beta = \pi/2$ e para $\beta = \sin^{-1}1/M_1$, que são os limites para a faixa admissível de valores de β , conforme definido pela Eq. 4.6. Dentro dessa faixa θ é positivo e deve portanto atingir um valor máximo.

Para valores de $\theta < \theta_{max}$ e do número de Mach M_1 há duas soluções possíveis, com diferentes valores de β . O maior valor de β caracteriza um choque forte. Nele, o escoamento é subsônico após o choque. O menor valor de β caracteriza um choque fraco, após o qual o escoamento é supersônico, exceto em uma pequena faixa de valores de θ ligeiramente inferiores a θ_{max} .

A relação entre β e θ pode ser reescrita em outra forma igualmente útil rearranjando-se a Eq. 4.8. Divide-se ao numerador e o denominador da expressão do membro direito da equação por $M_1^2 \sin^2\beta$ de forma a se obter:

$$\frac{1}{M_1^2 \sin^2\beta} = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan\beta} - \frac{\gamma - 1}{2}$$

e ainda:

$$M_1^2 \sin^2\beta - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{\sin\beta \sin\theta}{\cos(\beta - \theta)}. \quad (4.10)$$

Esta equação pode ser reescrita, de forma aproximada, para pequenos valores de θ , como:

$$M_1^2 \sin^2\beta - 1 = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \tan\beta \right) \theta. \quad (4.11)$$

Para valores elevados de M_1 , têm-se que $\beta \ll 1$, mas $M_1\beta \gg 1$. A Eq. 4.11 reduz-se a:

$$\beta \simeq \frac{\gamma + 1}{2} \theta.$$

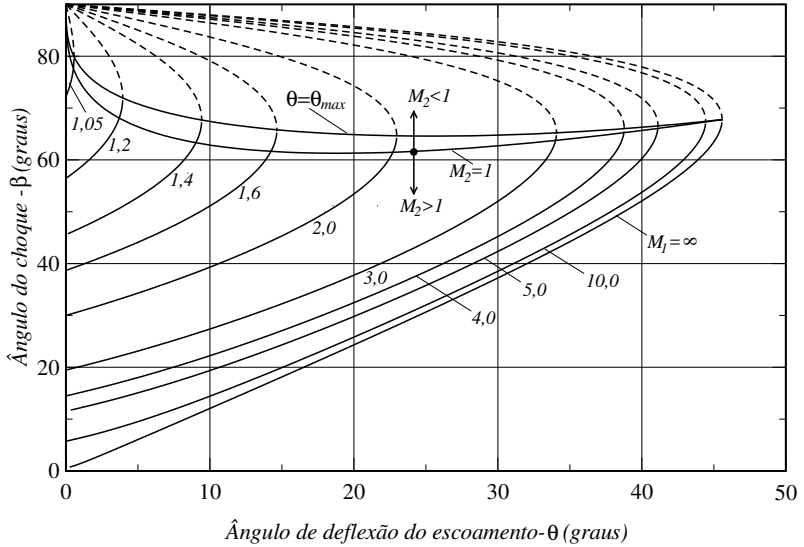


Figura 4.2: Ângulo β da onda de choque oblíquo, que se forma quando um escoamento supersônico com número de Mach M_1 é defletido de um ângulo θ e emerge do choque com número de Mach M_2 . O ângulo β é medido em relação à direção do escoamento incidente. β é função de M_1 e de θ . Pode-se interpretar os fenômenos que ocorrem em torno do choque como os do escoamento supersônico sobre um diedro de ângulo θ , em cujo vértice forma-se um choque oblíquo. Escoamentos supersônicos que incidem com número de Mach M_1 sobre diedros cujo ângulo θ é maior do que o valor de θ_{max} associado ao correspondente M_1 desenvolvem choques curvos, destacados do vértice do diedro, como mostrado na Fig. 4.3. As linhas tracejadas referem-se a *choques fortes*, em que o ângulo de deflexão do escoamento é menor do que θ_{max} e o escoamento que emerge do choque é subsônico. As linhas cheias referem-se a *choques fracos*, em que o ângulo de deflexão da cunha é igualmente inferior a θ_{max} e o escoamento que emerge do choque é supersônico, exceto em uma pequena região delimitada pelas curvas de $\theta = \theta_{max}$ e $M_2 = 1$.

O ângulo β da onda de choque oblíquo, que se forma quando um escoamento supersônico com número de Mach M_1 é defletido de um ângulo θ e emerge do choque com número de Mach M_2 é representado

graficamente na Fig. 4.2.

4.3 escoamento Supersônico sobre Diedros e Cunhas

No caso de escoamentos não viscosos, qualquer linha de corrente pode ser substituída por uma parede sólida. O escoamento através de um choque oblíquo, descrito na Sec. 4.2 é então, uma solução para o escoamento supersônico sobre um diedro, como mostrado na Fig. 4.3. Para um dado ângulo de deflexão θ do diedro os dois valores pos-

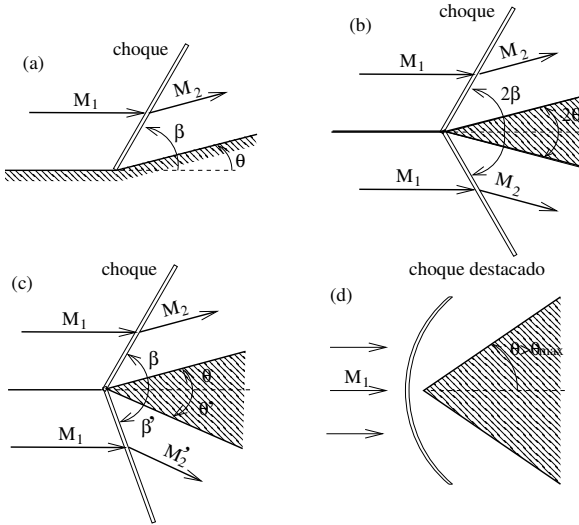


Figura 4.3: Escoamento supersônico sobre um diedro, sobre uma cunha com ângulo de ataque nulo, e com ângulo de ataque não nulo. Os campos de velocidade acima e abaixo da linha de corrente que encontra o vértice da cunha são independentes entre si. Se $\theta > \theta_{max}$ não há solução para o escoamento supersônico sobre uma cunha, com um choque oblíquo exendendo-se a partir do vértice. Forma-se um choque destacado da cunha, como esquematizado em (d).

síveis do ângulo β do choque com relação à direção do escoamento incidente, e de M_2 ficam determinados. Consideramos apenas o caso de choque fraco, em que $M_2 > 1$. Essa restrição impõe que $\theta < \theta_{max}$. O escoamento supersônico que incide sobre a uma cunha cujas faces formam um ângulo 2β é obtido por simetria. Os campos aerodinâmicos que se formam acima e abaixo da linha de simetria da cunha são independentes entre si. Configurações em que a linha de simetria da cunha forma um ângulo de ataque não nulo com o escoamento incidente são igualmente possíveis, como mostrado na Fig. 4.3.

4.4 Problemas de Riemann para a Equação de Euler

O objetivo desta seção é apresentar a construção do chamado Problema de Riemann para a equação de Euler. O problema de Riemann é o problema de valor inicial para lei de conservação, quando os dados iniciais consistem em dois estados constantes U_L e U_R separados por uma descontinuidade de salto em $x = 0$.

O problema de Riemann para as equações de Euler em uma dimensão constitui o problema do tubo de choque, em que densidade e pressão são inicialmente uniformes e constantes em cada um dos lados do tubo separados por uma membrana. Quando a membrana se rompe, ondas se propagam para as duas direções ao longo do tubo de choque, e a solução do problema de Riemann determina exatamente como serão essas ondas. O problema de Riemann é utilizado na construção de soluções mais gerais para leis de conservação, assim como para construção de métodos numéricos para simulação de escoamentos compressíveis.

Ondas simples fornecem a solução do problema de Riemann em regiões onde as ondas são expansivas, produzindo as chamadas *ondas de rarefação*. Porém quando as soluções são compressivas, dão origem a *ondas de choque*.

Vamos considerar o problema de Riemann para as equações de Euler em uma dimensão, que podem ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0; \quad \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \quad (4.12)$$

O vetor de variáveis conservativas \mathbf{U} e o vetor de fluxos \mathbf{F} são dados por

$$\mathbf{U} = \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ u \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \rho u \begin{Bmatrix} 1 \\ u \\ e \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Para o problema de valor inicial de Riemann temos

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} U_L, \text{ para } x < 0, \\ U_R, \text{ para } x > 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

Para a equação de ondas (Cap. 3) foi mostrado que existem duas famílias de características ao longo das retas $\lambda = dx/dt = \pm c$. As equações de Euler compressíveis possuem três campos característicos [11]:

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

Para demonstrar este fato, as equações de Euler podem ser re-escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \quad (4.15)$$

onde $A_{ij} = \partial \mathbf{U}_i / \partial \mathbf{U}_j$. Este sistema pode ser diagonalizado multiplicando pela esquerda por \mathbf{L} , que é a matriz dos autovetores à esquerda de \mathbf{A}

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

Pode-se verificar que $\mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ satisfaz

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0 \quad (4.19)$$

ou seja \mathbf{V} é constante sobre as curvas características, e é denominado invariante de Riemann.

Os campos λ_1 e λ_3 são genuinamente não lineares, e possuem ondas não lineares (choque/rarefação) enquanto que o campo λ_2 é linearmente degenerado e possui apenas uma onda de contato.

Choques

Nos choques valem as relações:

$$p - p_0 = \pm \rho_0 c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)} (u - u_0) \quad (4.20)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p}{p_0}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p}{p_0}} \quad (4.21)$$

Estas relações podem ser obtidas diretamente das relações de Rankine-Hugoniot. A velocidade do choque é dada por:

$$V_s = u_0 \pm c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)}. \quad (4.22)$$

Rarefações

Nas rarefações valem as relações :

$$u \pm \frac{2}{\gamma - 1} c = u_0 \pm \frac{2}{\gamma - 1} c_0, \quad (4.23)$$

$$p - p_0 = \pm \rho_0 c_0 \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{1 - (p/p_0)}{1 - (p/p_0)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} (u - u_0), \quad (4.24)$$

Estas equações são obtidas a partir das relações isentropicas e o invariante de Riemann $u + \frac{2c}{\gamma-1} = \text{constante}$. A equação 4.24 define uma curva no espaço (p, u) que é denominada *curva de Poisson*. Através da onda de rarefação, u e c variam linearmente, e p e ρ são dadas por

$$p = p_0 \frac{c^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{c_0^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}$$

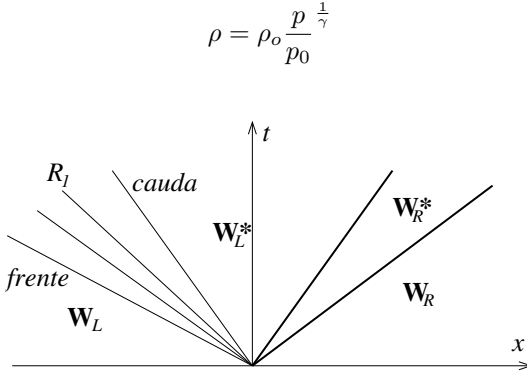


Figura 4.4: Construção de um problema de Riemann: um tubo de choque. Choque λ_3 S_3 ; contato C_2 , e rarefação λ_1 (R_1).

A construção de um problema de Riemann pode ser feita seguindo uma sequência de passos. Por exemplo, se for desejado construir um problema cuja solução é um escoamento com um choque se trasladando para a direita, uma onda de contato seguindo para a direita, e uma onda de rarefação se trasladando para a esquerda (veja Fig. 4.4), pode ser construída da seguinte forma:

1. Especificar o estado do lado direito $\mathbf{W}_R = [\rho_R, u_R, p_R]^t$
2. Especificar p^* ($> p_R$), e determinar u^* pela equação 4.20, ou seja

$$u^* = u_R + \frac{p^* - p_R}{\rho_R c_R \sqrt{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_R} - 1 \right)}} \quad (4.25)$$

e determinar ρ_R^* por 4.21, ou seja

$$\rho_R^* = \rho_R \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p^*}{p_R}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p^*}{p_R}} \quad (4.26)$$

3. Especificar ρ_L^* . A velocidade e a pressão não se alteram através do contato: $u_L^* = u_R^* = u^*$ e $p_L^* = p_R^* = p^*$.
4. Especificar $p_L (> p^*)$, e determinar ρ_L por

$$\rho_L = \rho_L^* \frac{p_L}{p^*}^{\frac{1}{\gamma}}$$

e a velocidade por 4.24

$$u_L = u^* + \frac{2\gamma}{(\gamma - 1)\rho_L c_L} \frac{1 - (p^*/p_L)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{1 - (p^*/p_L)} (p^* - p_L), \quad (4.27)$$

O problema de Riemann fica desta forma construído.

Para o problema de Riemann assim criado, a velocidade do choque é dada por

$$V_{S3} = u_R + c_R \sqrt{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_R} - 1 \right)} \quad (4.28)$$

e a velocidade do contato por

$$V_{C2} = u^* \quad (4.29)$$

e as velocidades da cauda e da frente da rarefação por

$$V_{R1}^{cauda} = u_L^* - c_L^* \quad (4.30)$$

$$V_{R1}^{frente} = u_L - c_L \quad (4.31)$$

Estas velocidades de onda podem ser úteis quando escolhemos quantidades como p^* de forma a criar um problema com uma velocidade de choque desejada, por exemplo. Para calcular a solução dentro da onda de rarefação, inicialmente calculamos a velocidade, que varia linearmente, e depois calculamos as outras grandezas:

$$u(\xi) = (1 - \xi)u_L + \xi u^* \quad (4.32)$$

$$c(\xi) = (1 - \xi)c_L + \xi c^* \quad (4.33)$$

$$p(\xi) = p_L \left(\frac{c(\xi)}{c_L} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.34)$$

$$\rho(\xi) = \rho_L \left(\frac{p(\xi)}{p_L} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.35)$$

onde $\xi = (x - x_{Frente}) / (x_{Cauda} - x_{Frente})$.

Observa-se que é possível construir diversos tipos de problemas de Riemann. É possível, por exemplo, após determinar \mathbf{W}_R^* , especificar $\mathbf{W}_L = \mathbf{W}_R^*$ e definir um problema de Riemann com um único choque, ou se $\rho_L^* = \rho_R^*$, então não ocorrem ondas de contato. Soluções exatas para problemas de Riemann são utilizadas nos capítulos 5 e 6 como exemplos para demonstração dos métodos computacionais. A Figura 4.5 ilustra a solução exata do problema de Riemann associado a um tubo de choque, construído com $\mathbf{W}_R = [\rho_R, u_R, p_R]^t = [0.125, 0, 0.1]^t$, e $\mathbf{W}_L = [\rho_L, u_L, p_L]^t = [1, 0, 1]^t$. Observa-se que a solução é *similar*, de forma que $\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{W}(\eta)$, onde $\eta = x/t$.

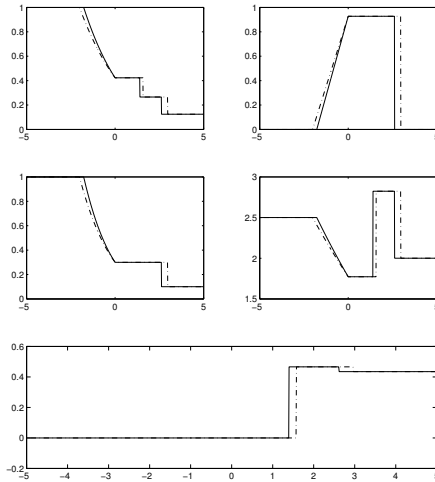


Figura 4.5: Solução exata do problema de Riemann associado a um tubo de choque, construído com $\mathbf{W}_R = [\rho_R, u_R, p_R]^t = [0.125, 0, 0.1]^t$, e $\mathbf{W}_L = [\rho_L, u_L, p_L]^t = [1, 0, 1]^t$. São plotados ρ , u , p , $e - u^2/2$, e $1/(\gamma - 1) \log(p/\rho^\gamma)$, em $t = 1.5$ (linha sólida) e em $t = 1.7$ (linha pontilhada).

Capítulo 5

Solução numérica das equações de ondas acústicas

5.1 Introdução

Neste capítulo será mostrada a solução numérica para o problema de propagação de ondas de pressão de pequena amplitude. Será mostrada a implementação da metodologia para problemas unidimensionais e bidimensionais no domínio da frequência e no domínio do tempo, utilizando o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos lineares. São abordados os problemas de ressonância, assim como de resposta forçada. A imposição das condições de contorno é descrita de forma detalhada, incluindo as condições de contorno sem reflexão. São apresentados resultados de testes computacionais, incluindo resultados de alguns testes de validação da metodologia.

5.2 Formulação no domínio da frequência

No capítulo anterior foi mostrado que, para materiais isotrópicos lineares com propriedades constantes podemos escrever as equações de onda como

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p \quad (5.1)$$

onde p é a correção da pressão, e a constante

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

No caso de estarmos interessados em soluções harmônicas, periódicas no tempo, o problema pode ser formulado no domínio da frequência, como descrito a seguir.

Assumimos implicitamente que a solução pode ser descrita como a superposição de modos harmônicos: $\hat{p} = p e^{j\omega t}$, onde \hat{p} é o campo escalar de pressão no domínio do tempo, p no domínio da frequência, e $j = \sqrt{-1}$.

Para realização de análises de resposta de sistemas sujeitos a uma excitação periódica no tempo, é interessante considerar soluções associadas a uma frequência determinada. Substituindo o ansatz acima e dividindo por $e^{j\omega t}$ resulta em uma expressão idêntica à eq. 1.1 onde as derivadas no tempo são substituídas por $j\omega$, logo obtemos

$$-\frac{1}{c_0^2} \omega^2 p = \nabla^2 p \quad (5.2)$$

$$\kappa^2 p + \nabla^2 p = 0; \quad (5.3)$$

onde $\kappa^2 = \frac{1}{c_0^2} \omega^2$ é o número de onda ao quadrado. Para ondas acústicas adiabáticas propagando em ar a 0°C próximo ao nível do mar, $\gamma = 1.4$, $\rho_0 = 1,29 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, e $P_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ [n/m}^2\text{]}$, que resulta em $c_0 = 330 \text{ [m/s]}$.

5.3 Formulação do problema de autovalor real em 1D

No caso unidimensional, a equação se reduz a:

$$\kappa^2 p + D^2 p = 0$$

onde $D = \frac{d}{dx}$

Na próximas seções iremos discutir a implementação da discretização baseada na formulação em uma dimensão usando a forma forte e o método de diferenças finitas, assim como usando a forma fraca e o método de elementos finitos.

Vamos considerar o caso em que temos uma cavidade fechada em um extremo e aberta no outro, e pretendemos encontrar a frequência de ressonância (próxima a uma frequência de interesse $\omega_0 = 2\pi f_0$) e o modo ou modos associados. Temos que, na forma dimensional, $\kappa^* = 2\pi f_0^*$ onde $f_0^* = \frac{f}{f_0}$ é a frequência de ressonância adimensional. Eliminando os * e abusando da notação, o problema de autovalor-autofunção é dado por:

$$D^2 p = -\omega^2 p \quad (5.4)$$

Os autovalores $\omega = \frac{\kappa}{c_0}$ representam as frequências (angulares) de ressonância adimensionais da cavidade. As auto-funções correspondem aos modos naturais do operador Laplaciano em uma dimensão na cavidade, que estão associadas a ondas estacionárias da solução transiente.

Sobre uma superfície rígida, com direção normal \mathbf{n} as condições de contorno podem ser expressas em notação vetorial como:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (5.5)$$

No caso 1d, como no caso de um extremo de um tubo fechado em $x = 0$ as condições de contorno se reduzem a

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0) = 0$$

Para um extremo aberto em $x = L$ para a atmosfera podemos considerar

$$p(L) = 0$$

5.3.1 Formulação discreta do problema de autovalor real 1D por diferenças finitas

A discretização do problema de autovalor real por diferenças finitas se obtém pela substituição da derivada espacial por uma aproximação consistente por diferenças finitas. Considerando pontos igualmente espaçados, uma aproximação para a segunda derivada no ponto $x_i = x_0 + \Delta x * i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n_x$ é dada por

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (5.6)$$

Substituindo a aproximação acima para a segunda derivada, obtém-se o seguinte sistema linear, expresso na forma matricial:

$$Ap^h = -\kappa^2 Mp^h$$

onde as matrizes A e M , que possuem elementos não nulos dados por:

$$A(i, i-1) = \frac{1}{\Delta x^2};$$

$$A(i, i) = -\frac{2}{\Delta x^2};$$

$$A(i, i+1) = \frac{1}{\Delta x^2};$$

$$M(i, i) = -1;$$

são matrizes associadas a rigidez e de massa, respectivamente e p^h representa a pressão nos nós computacionais. Primeiramente é necessário definir a malha computacional, constituída de nós, incluindo informações sobre as condições de contorno e as propriedades dos materiais.

Testes de validação: Ressonância em um tubo

A metodologia descrita acima foi validada calculando os autovalores e autofunções associadas a uma onda estacionária em um tubo, mostrando a correção do método. O resultado da simulação, mostrando vários modos, está representado na Fig. 5.2.

```

% pre-processamento: Definicao do dominio
clear;clc; Xmin=0; Xmax=1;
% geracao dos nos (coordenadas)
nnodes=100; % numero de nos
dx=(Xmax-Xmin)/(nnodes-1);
x=Xmin:dx:Xmax;
% condicoes de contorno, nos Dirichlet
iccd=[1 nnodes]; uccd=[0 0];
%nos Neumann
iccn=[]; uccn=[];
% montagem das matrizes
for i=2:nnodes-1
    A(i,i-1)=1/dx;
    A(i,i)=-2/dx;
    A(i,i+1)=1/dx;
    M(i,i)=-1;
end
% aplicacão das condições de contorno Dirichlet
A(1,1)=1;
M(1,1)=0;
A(nnodes,nnodes)=1;
M(nnodes,nnodes)=0;
% aplicacão das condições de contorno Neumann
A(nnodes,nnodes)=1;
A(nnodes,nnodes-1)=-1;
M(nnodes,nnodes)=0;
% solução do problema de autovalor
[V,D] = eigs(A,M,6,'sm')
% apresentacão das autofuncoes
plot(x,V(:,1)',x,V(:,2)',x,V(:,3)',x,V(:,4)');

```

Figura 5.1: Algoritmo, em Octave, para definição da malha computacional, montagem das matrizes, incluindo a definição das condições de contorno nos pontos de fronteira, e solução do problema de autovalor associado à eq. 5.4.

5.3.2 Formulação discreta do problema de autovalor por Elementos Finitos em 1D

A formulação de Galerkin da forma (DG) do problema de autovalor consiste em escolher as funções de base e de ponderação em espa-

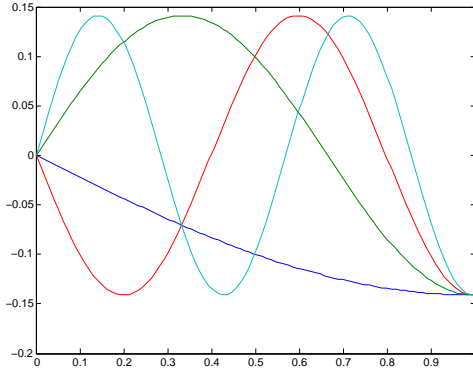


Figura 5.2: Autofunções associadas a uma onda estacionária em um tubo aberto à esquerda e fechado à direita, mostrando a correção do método. Resultado da simulação, mostrando vários modos, mostra que as autofunções são modos de Fourier que satisfazem as condições de contorno Dirichlet homogêneas no contorno à esquerda e de Neumann à direita.

ços de dimensão finita \mathcal{P}^h e \mathcal{W}^h . O problema discretizado se torna: Encontrar $p^h \in \mathcal{P}^h$ e $\omega \in \mathcal{R}$ tal que para todo $w^h \in \mathcal{W}^h$

$$(Dp^h, Dw^h) = (\omega p^h, \omega w^h)$$

Utilizando bases canônicas de Elementos Finitos em coordenadas cartesianas para os espaços acima, obtém-se o seguinte sistema linear, expresso na forma matricial:

$$AP^h = -\omega^2 MP^h$$

onde

$$A_{ij} = -(Dw_i^h, Dw_j^h);$$

$$M = (w_i^h, w_j^h)$$

```

% Processamento: montagem das matrizes
M=zeros(nnodes,nnodes);
K=M;
F=zeros(nnodes,1);
j=sqrt(-1);
k=[1 -1;-1 1]/2;
m=[2 1; 1 2]/3;
for e=1:nele
    J=(x(ien(e,2))-x(ien(e,1)))/2;
    for a=1:2
        A=ien(e,a);
        for b=1:2
            B=ien(e,b);
            K(A,B)=K(A,B)+k(a,b)/J;
            M(A,B)=M(A,B)+kappa*m(a,b)*J;
        end
    end
end
end

```

Figura 5.3: Algoritmo, em Octave, para aplicação das condições de contorno nos pontos de fronteira. O vetor *idbcd* contém os índices dos nós de fronteira de Dirichlet.

são matrizes associadas a rigidez e de massa, respectivamente e P^h representa a pressão nos nós computacionais. Primeiramente é necessário definir a malha computacional, constituída de nós, elementos, incluindo informações sobre as condições de contorno e as propriedades dos materiais.

Para o problema se tornar um problema de autovalor-autovetor generalizado, com autovalor ω^2 e autovetor P^h , é necessário completar a definição do problema aplicando as condições de contorno na forma discreta, como descrito abaixo.

Condições de contorno discretas em 1D

Condições de contorno de Dirichlet devem ser impostas diretamente na formulação de Elementos Finitos, sendo por isso chamadas de

```

% pre-processamento: Definicão do dominio
clear;clc;
kappa=1; Xmin=0; Xmax=1;
% geracao dos nos (coordenadas)
nnodes=100; % numero de nos
dx=(Xmax-Xmin)/(nnodes-1);
x=Xmin:dx:Xmax;
x1=Xmin;
x2=Xmax;
% elementos
nele=nnodes-1;
% matriz de conectividade
ien=zeros(nele,2);
for e=1:nele
    ien(e,1)=e;
    ien(e,2)=e+1;
end
% condicoes de contorno, nos Dirichlet
iccd=[1 nnodes];
uccd=[0 0];
%nos Neumann
iccn=[];
uccn=[];
% graus de liberdade
nccd=size(iccd,2);
nccn=size(iccn,2);

```

Figura 5.4: Algoritmo, em Octave, para definição da malha computacional, incluindo a definição das condições de contorno nos pontos de fronteira. O vetor *iccd* contém os índices dos nós de fronteira de Dirichlet.

essenciais. Em primeiro lugar é necessário identificar todos os nós i que se encontram sobre a fronteira. No caso 1d, correspondem aos nós extremos do domínio: $i = 1$ e $i = nnodes$.

Para um ponto i de contorno temos

- Aplicar a condição de componente nula: $P(i) = 0$, fazendo:

```

% Processamento: montagem das matrizes
M=zeros(nnodes,nnodes);
K=M;
F=zeros(nnodes,1);
j=sqrt(-1);
k=[1 -1;-1 1]/2;
m=[2 1; 1 2]/3;
for e=1:nele
    J=(x(ien(e,2))-x(ien(e,1)))/2;
    for a=1:2
        A=ien(e,a);
        for b=1:2
            B=ien(e,b);
            K(A,B)=K(A,B)+k(a,b)/J;
            M(A,B)=M(A,B)+kappa*m(a,b)*J;
        end
    end
end
end

```

Figura 5.5: Algoritmo, em Octave, para aplicação das condições de contorno nos pontos de fronteira. O vetor *idbcd* contém os índices dos nós de fronteira de Dirichlet.

Zeramos a linha i em A e M , e forçamos que o valor nodal seja nulo fazendo : $A(i, i) = 1$.

Condições de contorno de derivada nula são consideradas implicitamente na formulação de Elementos Finitos, sendo por isso chamadas de condições *naturais*.

Aplicação das condições de contorno em A , M

O seguinte trecho de programa em Octave ilustra a implementação do método para aplicação das condições de contorno nas matrizes K , M .

```

for i=1:nccd
    K(iccd(i),:)=0;

```

```

M(iccd(i),:)=0;
K(iccd(i),iccd(i))=1;
F(iccd(i))=uccd(i);
end;
neigs=5;
[V,d] = eigs(K,M,neigs,1);
sqrt(d/4/pi/pi);

hold off
for i=1:neigs
    plot(x,real(V(:,i)),x,imag(V(:,i)));
    hold on
end

```

5.3.3 Testes de validação

Ressonância no espaço dentro de um tubo com extremidades abertas

A metodologia descrita acima foi validada calculando os autovalores e autofunções associadas a uma onda estacionária dentro de um tubo com extremidades abertas ($p = 0$) mostrando a correção do método. O resultado da simulação, mostrando vários modos, está representado na Fig. 5.6.

5.4 Formulação do problema de autovalor real em 2D

Vamos considerar o caso em que temos uma cavidade fechada e pretendemos encontrar a frequência de ressonância (próxima a uma frequência de interesse $\omega_0 = 2\pi f_0$) e o modo ou modos associados. Temos que, na forma dimensional, $\kappa^* = 2\pi f_0^*$ onde $f_0^* = \frac{f}{f_0}$ é a frequência de ressonância adimensional. Eliminando os * e abusando da notação, o problema de autovalor-autofunção é dado por:

$$\nabla^2 p = -\omega^2 p$$

Os autovalores $\omega = \kappa$ representam as frequências (angulares) de ressonância adimensionais da cavidade. As auto-funções correspon-

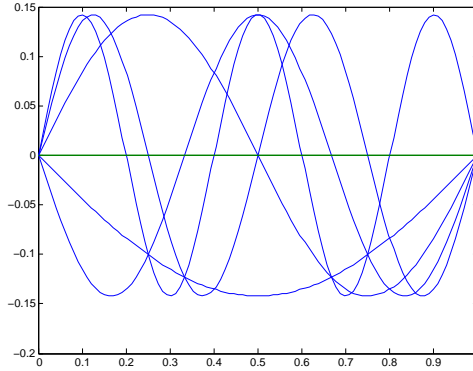


Figura 5.6: Autofunções associadas a uma onda estacionária dentro de um tubo com extremidades abertas ($p = 0$), mostrando a correção do método. Resultado da simulação, mostrando vários modos, mostra que as autofunções são modos de Fourier que satisfazem as condições de contorno Dirichlet homogêneas no contorno.

dem aos modos naturais do operador Laplaciano vetorial na cavidade, que estão associadas a ondas estacionárias da solução transiente.

Sobre uma superfície impermeável, com direção normal \mathbf{n} as condições de contorno podem ser expressas em notação vetorial como:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0 \quad (5.7)$$

5.4.1 Formulação discreta do problema de autovalor por Elementos Finitos em 2D

A formulação de Galerkin da forma 2D do problema de autovalor consiste em escolher as funções de base e de ponderação em espaços de dimensão finita \mathcal{P}^h e \mathcal{W}^h . O problema discretizado se torna: Encontrar $p^h \in \mathcal{P}^h$ e $\omega \in \mathcal{R}$ tal que para todo $W_h \in \mathcal{W}^h$

$$(\nabla p^h, \nabla W^h) = -(\kappa p^h, \kappa W^h)$$

Utilizando bases canônicas de Elementos Finitos em coordenadas cartesianas para os espaços acima, obtém-se o seguinte sistema linear, expresso na forma matricial:

$$AP = -\kappa^2 MP$$

onde

A e M são matrizes associadas a rigidez e de massa, respectivamente e P

representa os valores de p nos nós computacionais. Para o problema se tornar um problema de autovalor-autovetor generalizado, com autovalor κ^2 e autovetor P , é necessário completar a definição do problema aplicando as condições de contorno. No caso de uma cavidade fechada, as condições de contorno são as condições de parede impermeável, que são naturalmente satisfeitas pela formulação variacional no contorno.

Implementação computacional

Abaixo seguem os códigos em Octave do programa principal e das funções que implementam o método descrito acima.

```

%%% - - - - - Main - - - - - %%%
%%% - - - - - Parametros da malha - - - - -
Ly=1; %%% vertical size
Lx=2; %%% horizontal size
Nx=41; Ny=41;
X=zeros(Nx*Ny,1); Y=zeros(Nx*Ny,1);
dx=1/(Nx-1)*Lx; dy=1/(Ny-1)*Ly;
% %%% - - - - - Geracao da malha - - - - -
[TRI,X,Y] = meshing(Nx,Ny,dx,dy,X,Y,1);

% %%% - - - - - Montagem das Matrizes - - - - -
[Ak,Mk,Dx,Dy] = assemblingmatrices(TRI,X,Y);
% %%% - - - - - Solucao do problema de autovalor/autovetor - - -
nmodes=20;
% %%% - - - - - Plotagem de autovalor/autovetor - - -
[V,D]= eigs(Ak,Mk,nmodes,'sm');
```

```

for imode=2:nmodes
subplot(1,2,1); trisurf(TRI,X,Y,V(:,imode)); shading interp
title(['\omega=' num2str(D(imode,imode))]);
u=-Mk\ (Dx*V(:,imode));v=-Mk\ (Dy*V(:,imode));
subplot(1,2,2);quiver(X,Y,u,v);
title(['\omega=' num2str(D(imode,imode))]);drawnow
end

```

```

function [TRI,X,Y] = meshing(Nx,Ny,dx,dy,X,Y)
for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        kk=i+(j-1)*Nx;
        X(kk)=(i-1)*dx;
        Y(kk)=(j-1)*dy;
    end
end
for i=1:(Nx*Ny)
end
TRI=zeros((Nx-1)*(Ny-1)*2,3);
nel=0;
for i=1:Nx-1;
    for j=1:Ny-1;
        kk=i+(j-1)*Nx;
        nel=nel+1;
        TRI(nel,:)=[kk kk+Nx+1 kk+Nx];
        nel=nel+1;
        TRI(nel,:)=[kk kk+1 kk+Nx+1];
    end
end
end
end

```

```

function [Ak,Mk,Dx,Dy] = assemblingmatrices(TRI,X,Y)
%%% - - - - - Montagem das matrizes - - - - - %%%
%%% - - - Rigidez, massa, e derivadas em x e y - - - %%%
numel=size(TRI,1);
numnode=size(X,1);
Ak=zeros(numnode,numnode);

```

```

Mk=zeros(numnode,numnode);Dx=Ak;Dy=Ak;
%%% Matriz de massa do elemento
Mele = [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
MeleL = [4 0 0; 0 4 0; 0 0 4];
%%% Matrizes de rigidez, massa e derivada em x e y
for ie=1:numel
    v1=TRI(ie,1); %%% indice 1 do elemento
    v2=TRI(ie,2); %%% indice 2 do elemento
    v3=TRI(ie,3); %%% indice 3 do elemento
    vv=[v1; v2; v3];
    area=0.5*((X(v2)-X(v1))*(Y(v3)-Y(v1))-(X(v3)-X(v1))...
        *(Y(v2)-Y(v1))); %%% area do elemento
    Bt=[Y(v2)-Y(v3) X(v3)-X(v2); Y(v3)-Y(v1)...
        X(v1)-X(v3); Y(v1)-Y(v2) X(v2)-X(v1)];
    Aele=Bt*Bt';
    Dxe=1/6*[1; 1; 1]*(Bt(:,1))';
    Dye=1/6*[1; 1; 1]*(Bt(:,2))';
    for i=1:3
        for j=1:3
            Ak(vv(i),vv(j))=Ak(vv(i),vv(j))-Aele(i,j)/area/4;
            Mk(vv(i),vv(j))=Mk(vv(i),vv(j))+Mele(i,j)*area/12;
            Dx(vv(i),vv(j))=Dx(vv(i),vv(j))+Dxe(i,j);
            Dy(vv(i),vv(j))=Dy(vv(i),vv(j))+Dye(i,j);
        end
    end
end
end
end

```

5.4.2 Testes de validação

Cavidade retangular

O método implementado pode ser testado em uma cavidade de seção retangular. O domínio retangular possui lados de comprimento adimensional $L_x = 2$, e $L_y = 1$ de forma que a cavidade possui, teoricamente, modos com frequência de ressonância adimensional $f = 0, 1/2$ associadas a um modo modos, e $f = 1, 2, 3$ associadas aos modos unidimensionais, com dois modos para cada frequência, além dos modos bidimensionais $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$.

Os resultados apresentam convergência satisfatória para a solução

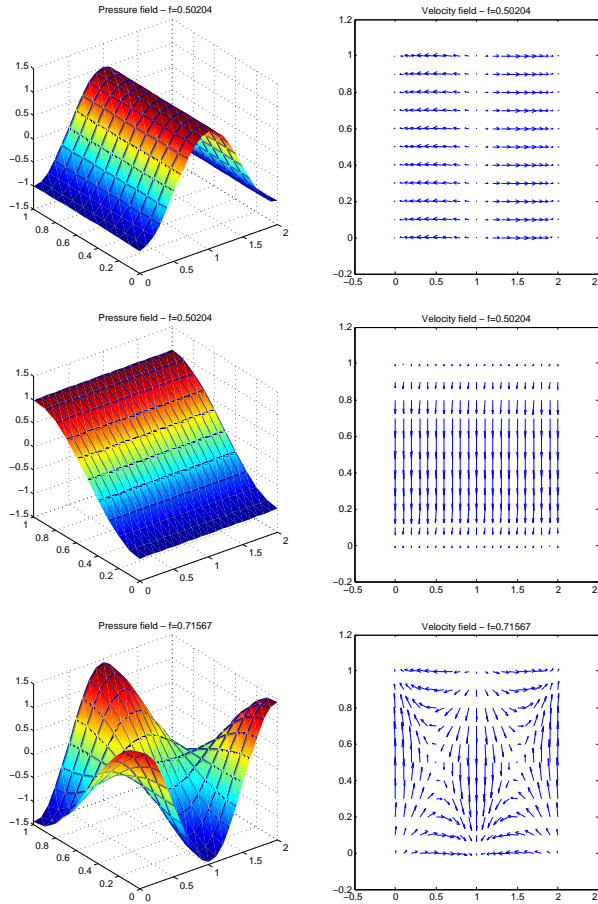


Figura 5.7: Resultados numéricos em malha com apenas 21×11 nós computacionais, mostrando dois modos unidimensionais e um modo bidimensional. Esquerda: campo de pressão, direita: campo de velocidade.

analítica.

Tabela 5.1: Resultados do teste com cavidade de seção retangular $L_x = 2$, $L_y = 1$

n_x	n_y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
11	6	0.2510	0.5080	0.5081	0.5738	0.7398
21	11	0.2503	0.5020	0.5020	0.5628	0.7157
41	21	0.2501	0.5005	0.5005	0.5600	0.709320
81	41	0.2500	0.5001	0.5001	0.5593	0.7077
161	81	0.2500	0.5000	0.5000	0.5591	0.7072
∞	∞	0.25	0.5	0.5	0.5590	0.7071

5.5 Solução com forçamento

Apresentamos aqui a implementação do método para o problema com forçamento. Este problema corresponde á resposta no domínio das frequências de um sistema para uma frequência determinada pelas condições de contorno. Considera-se que uma região da fronteira do domínio se encontra excitada por uma forçamento periódica com amplitude e frequência determinadas.

$$\kappa^2 p + \nabla^2 p = 0$$

onde $\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}$ é o número de onda ao quadrado. Neste caso ω é conhecido e determinado pelas condições no contorno forçado Γ_f , que no domínio do tempo se expressa:

$$\hat{p}(\Gamma_f, t) = p_0 e^{j\omega t}.$$

Na próximas seções iremos discutir os resultados da implementação da discretização de Elementos Finitos em uma e duas dimensões do problema forçado.

5.5.1 Formulação do problema forçado 1D

Vamos considerar o caso em que temos uma cavidade fechada, salvo por uma região onde ocorre a forçamento com frequência fixa, $\omega_0 = 2\pi f_0$. No caso unidimensional, a equação se reduz a:

$$(\kappa^2 + D^2)p = 0$$

com condição de contorno (forçagem)

$$p(0) = 1$$

5.6 Formulação discreta do problema no domínio da frequência forçado por Elementos Finitos em 1D

A formulação de Galerkin da forma (DG) do problema forçado consiste em escolher as funções de base e de ponderação em espaços de dimensão finita \mathcal{E}^h e \mathcal{W}^h . O problema discretizado se torna: Encontrar $P^h \in \mathcal{P}^h$ e $\omega \in \mathcal{R}$ tal que para todo $W_h \in \mathcal{W}^h$

$$(DP^h, DW^h) = -(\kappa P^h, \kappa W^h)$$

Utilizando bases canônicas de Elementos Finitos em coordenadas cartesianas para os espaços acima, obtém-se o seguinte sistema linear, expresso na forma matricial:

$$AP = -M_\kappa P$$

onde

$$A = (DP^h, DW^h);$$

$$M = (\kappa P^h, \kappa W^h)$$

são matrizes associadas a rigidez e de massa, respectivamente e p^h representa a pressão nos nós computacionais. Observa-se que κ é em geral complexo e varia de elemento para elemento. Para o sistema linear acima ter solução única, é necessário completar a definição do problema aplicando as condições de contorno na forma discreta, como descrito abaixo.

Condições de contorno não reflexivas

No caso de um contorno não reflexiva deseja-se que as ondas se propaguem apenas na direção da normal externa, de forma que não ocorra reflexão de ondas para o interior do domínio.

Esta condição pode ser expressa como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{cn} \cdot \nabla p = 0$$

Para o caso da solução no domínio das freqüência, essa condição pode ser expressa como

$$j\omega p + \mathbf{cn} \cdot \nabla p = 0$$

onde c representa a velocidade de propagação da onda no meio. Pode-se generalizar esta condição de contorno para o caso de uma parede parcialmente reflexiva. Neste caso teremos:

$$j\alpha\omega p + \mathbf{cn} \cdot \nabla p = 0$$

Para $\alpha = 1$ obtemos a condição de fronteira não reflexiva, e no caso de $\alpha = 0$ temos uma fronteira totalmente reflexiva (parede rígida). Valores intermediários de α correspondem a fronteiras parcialmente reflexivas (ou parcialmente absorventes). Esta condição de contorno corresponde a uma condição mista (tipo Robin). A implementação computacional em Octave, no caso 2D de uma parede com normal na direção x é mostrada abaixo:

A seguir é ilustrado o resultado da simulação numa cavidade com forçagem e fronteira parcialmente reflexiva em duas geometrias em função da freqüência de excitação. A primeira geometria é um canal retangular com $Lx = 1$ e $Ly = 0.1$, de modo que a resposta é essencialmente idêntica ao caso unidimensional. A segunda geometria corresponde a um canal com largura variável, produzido por um mapeamento descrito por: $Y = Y_0 * (1 + 0.5 * \sin(X * 2 * \pi))$.

Observa-se que na cavidade retangular as freqüências de ressonância são igualmente espaçadas, se encontram em $f = 0.25, 0.75, 1.25$. Os máximos das respostas para todas as freqüências de ressonância é $p_{max} = \frac{P_0}{\alpha}$, onde P_0 é a intensidade da forçagem. Ja no caso da cavidade mapeada, observa-se o deslocamento das freqüências de ressonância, assim como a variação dos valores dos máximos.


```

b=zeros(Nx*Ny,1);
b(bn1)=1;
MM=-(Ak+omega2*Mk);
for ii=1:size(bn1)
    i=bn1(ii);
MM(i,:)=0;
MM(i,i)=1;
end
for ii=1:size(bn2,1)
    i=bn2(ii);
MM(i,:)=Dx(i,:)+ Mk(i,:)*alpha*sqrt(-1)*omega;
end
P=MM\b;
end

```

Figura 5.8: Algoritmo, em Octave, para aplicação das condições de contorno nos pontos de fronteira tipo parede não reflexiva. O vetor *bn1* contém os índices dos nós da fronteira forçada e o vetor *bn2* contém os índices dos nós de fronteira não reflexiva.

5.7 Solução no domínio do tempo

A solução no domínio do tempo pode ser obtida seja discretizando diretamente as equações de onda no domínio do tempo, ou por superposição de soluções obtidas no domínio das frequências.

Por motivos didáticos, para permitir posteriormente a comparação com o método solução das equações de Euler, vamos apresentar a solução do problema no domínio do tempo como a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla p &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para o caso unidimensional, podemos escrever este sistema como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T_{max}] \quad (5.9)$$

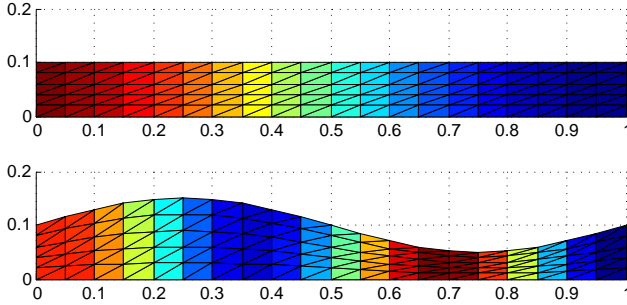


Figura 5.9: Geometrias e malhas utilizadas nos testes com forçagem. A primeira geometria é um canal retangular com $Lx = 1$ e $Ly = 0.1$, de modo que a resposta é essencialmente idêntica ao caso unidimensional. A segunda geometria corresponde a um canal com largura variável, produzido por um mapeamento descrito por: $Y = Y_0 * (1 + 0.5 * \sin(X * 2 * \pi))$.

onde $\Omega \subset \mathbf{R}$ e $t \in [0, T_{max}]$. O vetor de variáveis conservativas \mathbf{U} e o vetor de fluxos \mathbf{F} são dados por

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} p \\ \rho u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} c_0^2 \rho u \\ p \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

No caso 1d, como no caso de um extremo de um tubo fechado em $x = 0$ as condições de contorno se reduzem a

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0) = 0$$

Para um extremo aberto em $x = L$ para a atmosfera podemos considerar

$$p(L) = 0$$

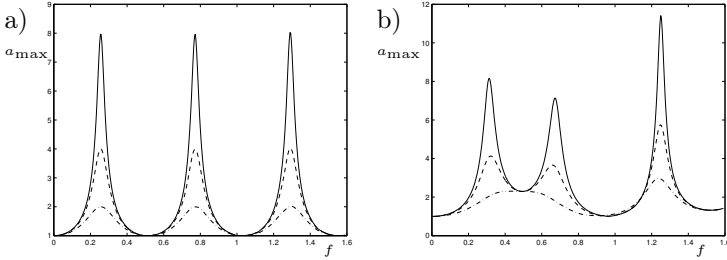


Figura 5.10: Resposta em frequência para cavidades forçadas, com forçagem na fronteira da esquerda e uma fronteira semi-reflexiva à direita. Resultados numéricos em malha com apenas 21×6 nós computacionais. À esquerda (a), resultado com geometria retangular. À direita (b), geometria modificada. As curvas traçadas com linha sólida, linha tracejada e traço-ponto representam resultados para uma fronteira semi-reflexiva com $\alpha = 0.125$, 0.250 e 0.5 respectivamente.

5.7.1 Solução no domínio do tempo por diferenças finitas de sistemas de equações de conservação hiperbólicos lineares em 1d

Nesta seção iremos esboçar o método de solução das equações de onda lineares no domínio do tempo como um sistema de equações de conservação hiperbólico linear e apresentar um exemplo computacional utilizando o método de MacCormack com adição do termo de viscosidade artificial de Lapidus. Este mesmo método será utilizado no Cap. 6 para a solução das equações de Euler.

Método de MacCormack

O método de MacCormack é um método de segunda ordem, de dois passos, que pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_i^{\overline{n+1}} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \quad (5.11)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{\overline{n+1}}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_i^{\overline{n+1}} - \mathbf{F}_{i-1}^{\overline{n+1}}) \quad (5.12)$$

Estes dois passos definem o método de MacCormack. Usualmente, um termo de viscosidade artificial é adicionado como um passo fracionário adicional, conforme proposto por Lapidus:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} + \frac{\nu \Delta t}{2\Delta x} \Delta' \left(\|\Delta' \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1}\| \cdot \Delta' \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} \right) \quad (5.13)$$

onde $\Delta' \tilde{\mathbf{U}}_i^n = \tilde{\mathbf{U}}_i^n - \tilde{\mathbf{U}}_{i-1}^n$

Um código para implementação do método é apresentado a seguir:

```

nx=101;Lx=1;dx=Lx/(nx-1);
CFL=0.8;nuA=1;tend=0.15;
gamma=1.4;p0=1;rho0=1;
c0=sqrt(gamma*p0./rho0); dt=CFL*dx/c0;

X=0:dx:Lx;
rho=ones(nx,1); rhou=zeros(nx,1);
p=ones(nx,1);p(fix(nx/2):end,1)=0.999;
rhoe=p/(gamma-1)+1/2*rhou.*rhou./rho;
rhon=rho;rhoun=rhou;rhoen=rhoe;pn=p;

Dxp=zeros(nx,nx); Dxr=zeros(nx,nx);
for i=2:nx-1
    Dxp(i,i+1)=1/dx;
    Dxp(i,i)=-1/dx;
    Dxr(i,i)=1/dx;
    Dxr(i,i-1)=-1/dx;
end
kk=0;t=0;
while t<tend
    pn1=p-dt*(Dxp*rhou*c0^2);
    rhoun1=rhou-dt*(Dxp*(p));
    pn=(p+pn1)/2-dt/2*(Dxr*rhoun1*c0^2);
    rhoun=(rhou+rhoun1)/2-dt/2*(Dxr*(pn1));
    pn=pn-dt*dx*dx*nuA*(-Dxr*(abs(Dxp*pn).*(Dxp*pn)));
    rhoun=rhoun-dt*dx*dx*nuA*(-Dxr*(abs(Dxp*rhoun).*(Dxp*rhoun)));
    t=t+dt; kk=kk+1; rhou=rhoun; p=pn;
    rho=gamma*p/c0^2; rhoe=p/(gamma-1);
end

```

A metodologia descrita acima foi validada calculando solução do problema de um tubo de choque linear, usando o método de MacCormack em uma malha regular de 50 pontos e de 1000 pontos e comparando com a solução exata, o que mostra a correção do método. O resultado da simulação, mostrando a solução em $t = 0.15$, está representado na Fig. 5.11.

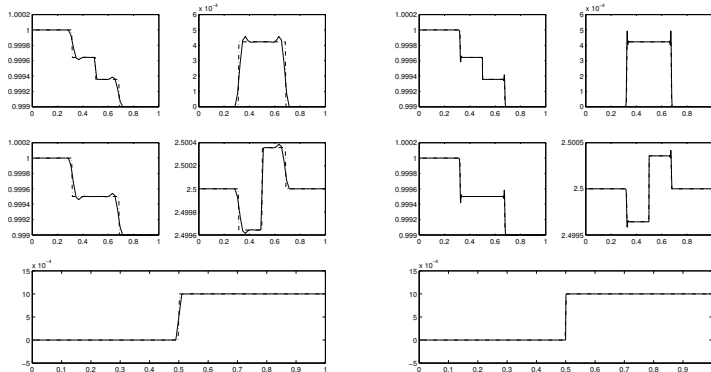


Figura 5.11: Solução do problema de um tubo de choque linear, usando o método de MacCormack em uma malha regular de 50 pontos (esquerda) e de 1000 pontos (direita). Linha sólida: solução numérica. Linha pontilhada: solução exata (Cap. 4). Para cada caso, são plotados ρ , u , p , $e - u^2/2$, e $1/(\gamma - 1)\log(p/\rho^\gamma)$.

5.8 Conclusões

Foram implementados e testados métodos para determinação das frequências e modos de ressonância de cavidades em 1D e 2D, assim como para resposta forçada, por diferenças finitas e elementos finitos. Os resultados mostram que os dois métodos produzem resultados similares e consistentes com os previstos pela teoria. Foi apresentado o método de MacCormack para a solução da equação de onda em 1d no domínio do tempo, por diferenças finitas.

Capítulo 6

Dinâmica dos fluidos computacional

6.1 Introdução

A solução numérica de escoamentos compressíveis pode apresentar oscilações, especialmente perto de regiões de choque. Resultados mais precisos e estáveis podem ser obtidas utilizando formulações estabilizadas, tanto lineares como não lineares. Este capítulo aborda a modelagem computacional de escoamentos compressíveis. É apresentada a formulação de variáveis conservativas, que apresenta vantagens na implementação numérica. Exemplos de implementação computacional em 1 e 2 dimensões são apresentados, com resultados da solução de problemas "benchmark" clássicos.

6.2 Formulação de variáveis primitivas conservativas

As equações de Euler em variáveis conservativas podem ser escritas como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T_{\max}] \quad (6.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ e $t \in [0, T_{max}]$. O vetor de variáveis conservativas \mathbf{U} e o vetor de fluxos \mathbf{F}_i são dados por

$$\mathbf{U} = \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \rho u_i \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \\ u_i \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

onde ρ é a densidade, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ é o vetor velocidade, e é a densidade de energia interna total, p é a pressão, e δ_{ij} é o delta de Kronecker. A equação de estado para um gas ideal

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho v^2) \quad (6.3)$$

permite calcular a pressão a partir das variáveis conservativas.

Adicionalmente

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (6.4)$$

Na próximas seções iremos discutir os resultados da implementação da discretização em uma dimensão e duas dimensões usando a forma forte e o método de diferenças finitas.

6.3 Formulação do problema em 1d

Para o caso de um problema unidimensional, as equações de Euler se restringem a

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T_{max}] \quad (6.5)$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}$ e $t \in [0, T_{max}]$. O vetor de variáveis conservativas \mathbf{U} e o vetor de fluxos \mathbf{F} são dados por

$$\mathbf{U} = \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \rho u_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ e \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

No caso 1d, como no caso de um extremo de um tubo fechado em $x = 0$ as condições de contorno se reduzem a

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0) = 0$$

Para um extremo aberto em $x = L$ para a atmosfera podemos considerar

$$p(L) = 0$$

6.4 Solução por diferenças finitas de sistemas de equações de conservação hiperbólicos não-lineares em 1d

Diversos métodos foram desenvolvidos para a solução de sistemas de equações do tipo descrito por eq. 6.10. Uma excelente revisão é encontrada em Sod [15], que discute a solução pelos métodos de Godunov, Hyman, Lax-Wendroff (2 passos), MacCormack, Rusanov, Upwind, o método híbrido de Harten and Zwas, o método antidifusão de Boris e Book, o método de compressibilidade artificial de Harten, e o método de Glimm. Nesta seção iremos esboçar o método de solução e apresentar um exemplo computacional utilizando o método de MacCormack com adição do termo de viscosidade artificial de Lapidus.

6.4.1 Método de MacCormack

O método de MacCormack é um método de segunda ordem, de dois passos, que pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_i^{\overline{n+1}} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \quad (6.7)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{\overline{n+1}}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_i^{\overline{n+1}} - \mathbf{F}_{i-1}^{\overline{n+1}}) \quad (6.8)$$

Estes dois passos definem o método de MacCormack. Usualmente, um termo de viscosidade artificial é adicionado como um passo fracionário adicional, conforme proposto por Lapidus:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} + \frac{\nu \Delta t}{2\Delta x} \Delta' \left(\|\Delta' \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1}\| \cdot \Delta' \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} \right) \quad (6.9)$$

onde $\Delta' \tilde{U}_i^n = \tilde{U}_i^n - \tilde{U}_{i-1}^n$

Implementação computacional

Primeiramente é necessário definir a malha computacional, constituída de nós, incluindo informações sobre as condições de contorno e os parâmetros da simulação.

```

nx=101;
Lx=1;
dx=Lx/(nx-1);
CFL=0.90;
nuA=1;
tend=0.15;
gamma=1.4;

X=0:dx:Lx;
rho=ones(nx,1); rho(fix(nx/2):end,1)=0.125;
rhoun=zeros(nx,1);
p=ones(nx,1); p(fix(nx/2):end,1)=0.1;
rhoe=p/(gamma-1)+1/2*rhoun.*rhoun;
rhon=rho;rhoun=rhoun;rhoen=rhoe;pn=p;

Dxp=zeros(nx,nx);
for i=2:nx-1
    Dxp(i,i+1)=1/dx;
    Dxp(i,i)=-1/dx;
end

Dxr=zeros(nx,nx);
for i=2:nx-1
    Dxr(i,i)=1/dx;
    Dxr(i,i-1)=-1/dx;
end

```

Figura 6.1: Algoritmo, em Octave, para definição da malha computacional, montagem das matrizes.

```

kk=0;t=0;
while t<tend
    c=sqrt(gamma*p./rho);
    dt=CFL*min(dx/max(abs(rhou./rho)+c));

    rhon1=rho-dt*(Dxp*rhou);
    rhoun1=rhou-dt*(Dxp*(rhou.*rhou./rho+p));
    rhoen1=rhoe-dt*(Dxp*(rhou./rho.*(rhoe+p)));
    pn1=(gamma-1)*(rhoen1-1/2*rhoun1.*rhoun1./rhon1);

    rhon=(rho+rhon1)/2-dt/2*(Dxr*rhoun1);
    rhoun=(rhou+rhoun1)/2-dt/2*(Dxr*(rhoun1.*rhoun1./rhon1+pn1));
    rhoen=(rhoe+rhoen1)/2-dt/2*(Dxr*(rhoun1./rhon1.*(rhoen1+pn1)));

    rhon=rhon-dt*dx*dx*nuA*(-Dxr*(abs(Dxp*rhon).*(Dxp*rhon)));
    rhoun=rhoun-dt*dx*dx*nuA*(-Dxr*(abs(Dxp*rhoun).*(Dxp*rhoun)));
    rhoen=rhoen-dt*dx*dx*nuA*(-Dxr*(abs(Dxp*rhoen).*(Dxp*rhoen)));
    pn=(gamma-1)*(rhoen-1/2*rhoun.*rhoun./rhon);

    t=t+dt; kk=kk+1
    rho=rhon;rhou=rhoun; rhoe=rhoen; p=pn;

    if mod(kk,2)==0
        subplot(1,5,1);plot(X,rho); subplot(1,5,2);plot(X,rhou./rho);
        subplot(1,5,3);plot(X,p); subplot(1,5,4);plot(X,p./rho.^(gamma))
        subplot(1,5,5); plot(X,rhoe./rho-(rhou./rho).^2/2);
        drawnow;
    end
end

```

Figura 6.2: Algoritmo, em Octave, para implementação do método de MacCormack com viscosidade artificial de Lapidus [15].

Solução numérica do problema do tubo de choque

A metodologia descrita acima foi validada calculando solução do problema de um tubo de choque (problema de Riemann) cuja construção foi apresentada no capítulo 4, usando o método de MacCormack em uma malha regular de 101 pontos e de 1001 pontos, mostrando a correção do método. O resultado da simulação, mostrando a solução em

$t = 1.5$, está representado na Fig. 6.3.

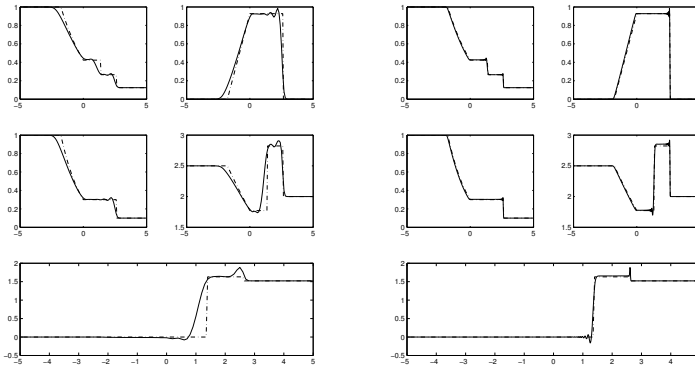


Figura 6.3: Solução do problema de um tubo de choque, usando o método de MacCormack em uma malha regular de 101 pontos (esquerda) e de 1001 pontos (direita). Linha sólida: solução numérica. Linha pontilhada: solução exata (Cap. 4). Para cada caso, são plotados ρ , u , p , e $-u^2/2$, e $1/(\gamma - 1)\log(p/\rho^\gamma)$.

6.5 Formulação do problema em 2d

Para o caso de um problema biidimensional, as equações de Euler se restringem a

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T_{max}] \quad (6.10)$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ e $t \in [0, T_{max}]$. O vetor de variáveis conservativas \mathbf{U} e o vetor de fluxos \mathbf{F} e \mathbf{G} são dados por

$$\mathbf{U} = \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \rho u_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ e \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ u_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \rho u_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ e \end{Bmatrix} + p \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

A definição do problema é completada pela definição das condições iniciais e de contorno adequadas.

6.6 Solução por diferenças finitas de sistemas de equações de conservação hiperbólicos não-lineares em 2D

Nesta seção iremos esboçar o método de solução e apresentar um exemplo computacional 2D utilizando o método de MacCormack com adição do termo de viscosidade artificial de Lapidus.

6.6.1 Método de MacCormack

O método de MacCormack, no caso 2d pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_{ij}^{\overline{n+1}} = \mathbf{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1 j}^n - \mathbf{F}_{ij}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i j+1}^n - \mathbf{G}_{ij}^n) \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^{\overline{n+1}} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathbf{F}_{ij}^{\overline{n+1}} - \mathbf{F}_{i-1 j}^{\overline{n+1}} \right) \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(\mathbf{G}_{ij}^{\overline{n+1}} - \mathbf{G}_{i-1 j}^{\overline{n+1}} \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Estes dois passos definem o método de MacCormack. Usualmente, um termo de viscosidade artificial é adicionado como um passo fracionário adicional, conforme proposto por Lapidus:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ij}^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{ij}^{n+1} + \frac{\nu\Delta t}{2\Delta x} \Delta'_x \left(\|\Delta'_x \tilde{\mathbf{U}}_{i+1,j}^{n+1}\| \cdot \Delta'_x \tilde{\mathbf{U}}_{i+1,j}^{n+1} \right) \\ + \frac{\nu\Delta t}{2\Delta y} \Delta'_y \left(\|\Delta'_y \tilde{\mathbf{U}}_{i,j+1}^{n+1}\| \cdot \Delta'_y \tilde{\mathbf{U}}_{i,j+1}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde $\Delta'_x \tilde{\mathbf{U}}_{ij}^n = \tilde{\mathbf{U}}_{ij}^n - \tilde{\mathbf{U}}_{i-1,j}^n$ e $\Delta'_y \tilde{\mathbf{U}}_{ij}^n = \tilde{\mathbf{U}}_{ij}^n - \tilde{\mathbf{U}}_{i,j-1}^n$

Implementação computacional

Primeiramente é necessário definir a malha computacional, constituída de nós, incluindo informações sobre as condições de contorno e os parâmetros da simulação, que dependem do problema a ser analisado.

6.6.2 Testes de validação

Choque oblíquo

A metodologia descrita acima foi validada calculando a solução do problema de um choque oblíquo, usando o método de MacCormack, mostrando o comportamento do método. Usando a equação de continuidade e o fato de que a componente de velocidade tangencial não muda ao longo do choque, relações trigonométricas levam eventualmente à equação $\theta - \beta - M$ que permite calcular θ como uma função de M_1 , β e γ .

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (6.15)$$

O resultado da simulação está representado na Fig. 6.6. Observa-se que para Mach=2 em uma malha regular de 61×61 pontos, a solução é bastante satisfatória, mas para Mach=3, a solução apresenta oscilações espúrias, mesmo com $\nu = 4$ em uma malha regular de 161×161 pontos.

As condições iniciais e de contorno utilizadas na simulação computacionais são as seguintes.

```

initial_conditions
angle=10;
UU=Mach*cos(angle/360*2*pi)*c0;
VV=-Mach*sin(angle/360*2*pi)*c0;
rho=ones(nx,ny);
rhOU=UU*ones(nx,ny);
rhOV=VV*ones(nx,ny);
rhov(:,1)=0;
p=p0*ones(nx,ny);%*0.17857;
rhoe=p/(gamma-1)+1/2*(rhOU.*rhOU+rhOV.*rhOV)./rho;

boundary_conditions
rho(1,:)=1;
rho(:,end)=1;
rho(2:end,1)=rho(2:end,2);
rhOU(:,end)=UU;
rhOU(1,:)=UU;
rhOU(:,1)=rhOU(:,2);
rhOV(1,:)=VV;
rhOV(:,end)=VV;
rhov(1:end,1)=0;
rhoe(:,end)=p0/(gamma-1)+1/2*(UU^2)*rho0;
rhoe(1,:)=p0/(gamma-1)+1/2*(UU^2)*rho0;

```

```

nx=61;ny=61;
Lx=1;Ly=1;
gamma=1.4;Mach=2;
rho0=1;p0=1;
c0=sqrt(gamma*p0/rho0);

dx=Lx/(nx-1);dy=Ly/(ny-1);
nuA=1;
tend=5;CFL=0.7;

x=0:dx:Lx; y=0:dy:Ly;
X=zeros(nx,ny);Y=X;
for j=1:ny
    X(:,j)=x;
end
for i=1:nx
    Y(i,:)=y;
end
Dxr=zeros(nx,nx);
for i=2:nx
    Dxr(i,i)=1/dx;
    Dxr(i,i-1)=-1/dx;
end
Dxp=zeros(nx,nx);
for i=1:nx-1
    Dxp(i,i)=-1/dx;
    Dxp(i,i+1)=1/dx;
end
Dyr=zeros(ny,ny);
for j=2:ny
    Dyr(j,j)=1/dy;
    Dyr(j,j-1)=-1/dy;
end
Dyp=zeros(ny,ny);
for j=1:ny-1
    Dyp(j,j)=-1/dy;
    Dyp(j,j+1)=1/dy;
end

```

Figura 6.4: Algoritmo, em Octave, para definição da malha computacional e montagem das matrizes.


```

initial_conditions;
while t<tend
    c=sqrt(gamma*p./rho);
    dt=CFL*min(dx/max(max(sqrt((rhov./rho).^2+(rhov./rho).^2+c)));

    rhon1=rho-dt*(Dxp*(rhov)+(rhov)*Dyp');
    rhoun1=rhov-dt*(Dxp*(rhov.*rhov./rho+p)+(rhov.*rhov./rho)*Dyp');
    rhovn1=rhov-dt*(Dxp*(rhov.*rhov./rho)+(rhov.*rhov./rho+p)*Dyp');
    rhoen1=rhoe-dt*(Dxp*((rhoe+p).*rhov./rho)+(rhov./rho.*(rhoe+p))*Dyp');
    pn1=(gamma-1)*(rhoen1-1/2*(rhoun1.*rhoun1+rhovn1.*rhovn1)./rhon1);

    rhon=(rho+rhon1)/2-dt/2*(Dxr*(rhoun1)+(rhovn1)*Dyr');
    rhoun=(rhov+rhoun1)/2-dt/2*...
    (Dxr*(rhoun1.*rhoun1./rhon1+pn1)+(rhoun1.*rhovn1./rhon1)*Dyr');
    rhovn=(rhov+rhovn1)/2-dt/2*...
    (Dxr*(rhoun1.*rhovn1./rhon1)+(rhovn1.*rhovn1./rhon1+pn1)*Dyr');
    rhoen=(rhoe+rhoen1)/2-dt/2*...
    (Dxr*(rhoun1./rhon1.*(rhoen1+pn1)+(rhovn1./rhon1.*(rhoen1+pn1))*Dyr');

    rhon=rhon+dt*dx*dx*nuA*(Dxr*(abs(Dxp*rhon).*(Dxp*rhon)) ...
        +dt*dy*dy*nuA*((abs(rhon*Dyp')).*(rhon*Dyp'))*Dyr');
    rhoun=rhoun+dt*dx*dx*nuA*(Dxr*(abs(Dxp*rhoun).*(Dxp*rhoun)) ...
        +dt*dy*dy*nuA*((abs(rhoun*Dyp')).*(rhoun*Dyp'))*Dyr');
    rhovn=rhovn+dt*dx*dx*nuA*(Dxr*(abs(Dxp*rhovn).*(Dxp*rhovn)) ...
        +dt*dy*dy*nuA*((abs(rhovn*Dyp')).*(rhovn*Dyp'))*Dyr');
    rhoen=rhoe+dt*dx*dx*nuA*(Dxr*(abs(Dxp*rhoe).*(Dxp*rhoe)) ...
        +dt*dy*dy*nuA*((abs(rhoe*Dyp')).*(rhoe*Dyp'))*Dyr');
    pn=(gamma-1)*(rhoen-1/2*(rhoun.*rhoun+rhovn.*rhovn)./rhon);

    t=t+dt; kk=kk+1;
    rho=rhon;rhov=rhoun;rhov=rhovn;rhoe=rhoe; p=pn;
    boundary_conditions;
end

```

Figura 6.5: Algoritmo, em Octave, para implementação do método de MacCormack com viscosidade artificial de Lapidus em 2D [15].

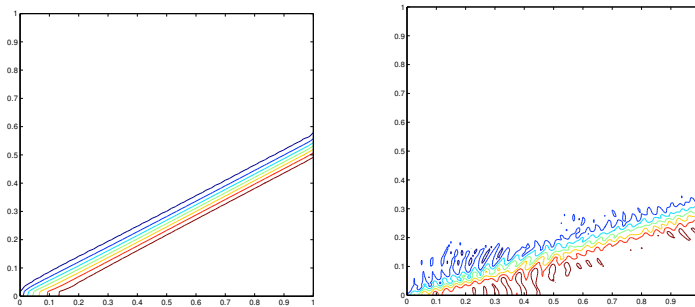


Figura 6.6: Curvas de nível de pressão no choque oblíquo, obtidas pelo código de diferenças finitas (método de MacCormack com viscosidade artificial) descrito no texto. Esquerda: $Mach=2$, usando uma malha de 61×61 pontos. Direita: $Mach=3$, usando uma malha de 161×161 pontos.

Lista de Tabelas

1.1	Formas da equação da continuidade	6
1.2	Formas da equação da quantidade de movimento . . .	17
1.3	Viscosidade de alguns fluidos a $20^{\circ}C$	23
1.4	Formas da equação de Navier-Stokes	23
5.1	Resultados do teste com cavidade de seção retangular	118

Lista de Figuras

1.1	Volume de controle e o princípio de conservação da massa	2
1.2	Volume de fluido cruzando a superfície de controle . . .	3
1.3	Sistema de coordenadas cilíndricas	5
1.4	Volume de controle – quantidade de movimento	9
1.5	A equação de Bernoulli	18
1.6	Circulação em torno de uma massa em movimento . . .	28
2.1	Esquema de um bocal convergente-divergente	42
2.2	Número de Mach, pressões e temperaturas em um bocal	50
2.3	Escoamento através de uma onda de choque	54
2.4	Aumento de massa específica em uma onda de choque	57
2.5	Linha de Rayleigh	65
2.6	Equilíbrio de forças – Linha de Fanno	66
2.7	Linhas de Rayleigh e de Fanno	73
2.8	Escoamento em um canal variável, com superfície livre	74
3.1	Características de escoamentos potenciais compressíveis	90
4.1	Choque oblíquo	92
4.2	Choque oblíquo	95
4.3	Choque oblíquo	96
4.4	Problema de Riemann	100
4.5	Solução exata do problema de Riemann	102
5.1	Algoritmo para solução do problema de autovalor . . .	107
5.2	Autofunções associadas a uma onda estacionária . . .	108

5.3	Algoritmo para aplicação das condições de contorno	109
5.4	Algoritmo para definição da malha computacional	110
5.5	Algoritmo para aplicação das condições de contorno	111
5.6	Autofunções associadas a uma onda estacionária	113
5.7	Resultados numéricos: campos de pressão e velocidade	117
5.8	Algoritmo aplicação das condições de contorno	121
5.9	Geometrias e malhas utilizadas nos testes com forçagem	122
5.10	Resposta em frequência para cavidades forçadas	123
5.11	Solução do problema de um tubo de choque linear	125
6.1	Algoritmo para montagem das matrizes	130
6.2	Algoritmo do método de MacCormack 1D	131
6.3	Solução do problema de um tubo de choque	132
6.4	Algoritmo para montagem das matrizes	136
6.5	Algoritmo do método de MacCormack 2D	137
6.6	Curvas de nível de pressão no choque oblíquo	138

Bibliografia

- [1] J. D. Anderson Jr. *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [2] Rutherford Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover, New York, 1990. ISBN-13 978-0486661100.
- [3] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge, 1994.
- [4] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. Wiley, New York, 1960.
- [5] Alberto Luiz Coimbra. *Mecânica dos Meios Cointínuos*. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1967.
- [6] Nikos Drakos, Ross Moss, and Alexis Angelidis. Reading notes on fluid mechanics. <http://www.cs.otago.ac.nz/postgrads/alexis/FluidMech.html>, April 2015.
- [7] R. W. Fox, A. T. McDonald, and P. J. Pritchard. *Inrtodução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 2006. ISBN-10: 8521614683.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New York, 1959.
- [9] W. H. Liepman and A. Roshko. *Elements of Gas Dynamics*. Wiley, New York, 1957.

- [10] Mathew MacLean. Detailed derivation of Fanno flow relationships. http://wwimeracfd.com/professional/technote/fanno_flow.pdf, October 2013.
- [11] K. Masatsuka. *I do like CFD, VOL.1, Second Edition*. Number v. 1. K. Masatsuka, 2013.
- [12] R. L. Panton. *Incompressible Flow*. Wiley, New York, 2005.
- [13] J. Pontes and N. Mangiavacchi. *Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia – Volume 1: Fundamentos*. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. ISBN 978-85-8337-107-6.
- [14] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer, Berlin, 1999.
- [15] Gary A. Sod. A survey of several finite differences methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *J. Computational Physics*, 27(31):1–31, 1978.
- [16] F. M. White. *Mecânica dos Fluidos*. McGraw-Hill, Lisboa, 2002. ISBN: 868680424X.