

**Estimativas de Área, Raio e Curvatura
para H -superfícies em Variedades
Riemannianas de Dimensão Três**

Publicações Matemáticas

**Estimativas de Área, Raio e Curvatura
para H -superfícies em Variedades
Riemannianas de Dimensão Três**

William H. Meeks III
Massachusetts University

Álvaro K. Ramos
UFRGS



31^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2017 by William H. Meeks III e Álvaro K. Ramos
Direitos reservados, 2017 pela Associação Instituto
Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

31º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Álgebra e Geometria no Cálculo de Estrutura Molecular - C. Lavor, N. Maculan, M. Souza e R. Alves
- Continuity of the Lyapunov Exponents of Linear Cocycles - Pedro Duarte e Silvius Klein
- **Estimativas de Área, Raio e Curvatura para H -superfícies em Variedades Riemannianas de Dimensão Três - William H. Meeks III e Álvaro K. Ramos**
- Introdução aos Escoamentos Compressíveis - José da Rocha Miranda Pontes, Norberto Mangiavacchi e Gustavo Rabello dos Anjos
- Introdução Matemática à Dinâmica de Fluidos Geofísicos - Breno Raphaldini, Carlos F.M. Raupp e Pedro Leite da Silva Dias
- Limit Cycles, Abelian Integral and Hilbert's Sixteenth Problem - Marco Uribe e Hossein Movasati
- Regularization by Noise in Ordinary and Partial Differential Equations - Christian Olivera
- Topological Methods in the Quest for Periodic Orbits - Joa Weber
- Uma Breve Introdução à Matemática da Mecânica Quântica - Artur O. Lopes

Distribuição:

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

ISBN: 978-85-244-0434-4

Resumo.

Esse livro cobre alguns tópicos da teoria de superfícies de curvatura média constante H em variedades homogêneas de dimensão 3; essas superfícies são chamadas de H -superfícies. A primeira parte do material desse livro diz respeito ao trabalho em conjunto do primeiro autor com Giuseppe Tinaglia, o qual inclui a existência de estimativas uniformes de raio e de curvatura para $(H > 0)$ -discos mergulhados em \mathbb{R}^3 , com um dos resultados principais sendo que uma $(H > 0)$ -superfície completa e simplesmente conexa, mergulhada em \mathbb{R}^3 é uma esfera redonda. A segunda parte do livro é sobre o trabalho do primeiro autor com Pablo Mira, Joaquín Pérez e Antonio Ros sobre a classificação de H -esferas em um espaço homogêneo M de dimensão 3, com um dos resultados principais sendo que duas H -esferas em M com a mesma curvatura constante H diferem apenas por uma isometria de M .

Conteúdo

1	Introdução.	5
2	Preliminares.	11
2.1	A segunda variação da área.	11
2.2	Limitações uniformes da norma da segunda forma fundamental.	16
3	Variedades homogêneas de dimensão três.	21
3.1	Produtos semidiretos métricos de dimensão três.	26
3.2	Grupos de Lie métricos unimodulares.	31
3.3	Grupos de Lie métricos não unimodulares.	34
3.4	Propriedades de grupos de Lie métricos	37
3.5	O Teorema de Representação	42
4	Estimativas de raio e de curvatura	46
5	Estimativas de área em um toro flat	52
5.1	A geometria local em torno de pontos singulares.	55
5.2	Propriedades globais geradas por pontos singulares	63
5.3	Limitando o número de pontos singulares.	66
5.4	A contradição final.	67
5.5	Estimativas de área para superfícies desconexas	70
6	O problema de Hopf em variedades homogêneas de dimensão três.	72
7	Estimativas de área para H-esferas em $SU(2)$.	90
	Índice	97

Capítulo 1

Introdução.

Os principais tópicos desse livro são a existência, representação, classificação e geometria das superfícies de curvatura média constante imersas em uma variedade Riemanniana homogênea de dimensão 3. Por simplicidade, vamos chamar uma superfície de curvatura média constante H , orientada e imersa em uma variedade Riemanniana de dimensão 3 uma H -superfície. Uma H -superfície será chamada um H -disco se for homeomorfa a um disco fechado do plano euclidiano e será chamada uma H -esfera se for homeomorfa à esfera de dimensão dois, \mathbb{S}^2 . No Capítulo 3, nós apresentamos a classificação e a geometria de variedades Riemannianas simplesmente conexas, homogêneas e de dimensão 3 que será necessária para os demais capítulos. Incluímos, também no Capítulo 3, a teoria básica das H -superfícies nesses espaços.

Hopf [20] em 1951 e Alexandrov [4] em 1956 apresentaram as seguintes caracterizações para a esfera redonda.

Teorema 1.1 (Hopf, [20]). *Uma H -esfera imersa em \mathbb{R}^3 é uma esfera redonda.*

Teorema 1.2 (Alexandrov, [4]). *Uma H -superfície, compacta e mergulhada em \mathbb{R}^3 é uma esfera redonda.*

Observe as diferentes hipóteses nos dois teoremas acima; enquanto no Teorema 1.1 não se assume que a superfície seja mergulhada, se

tem uma restrição na topologia da superfície. Por outro lado, o Teorema 1.2 assume que a H -superfície é fechada e mergulhada para obter a caracterização de esfera redonda.

Um dos objetivos do Capítulo 4 é provar que as conclusões dos teoremas acima permanecem válidas diante da nova hipótese de que a H -superfície é completa, simplesmente conexa e mergulhada em \mathbb{R}^3 , com curvatura média positiva.

Teorema 1.3 (Meeks-Tinaglia, [40]). *Superfícies completas, simplesmente conexas, mergulhadas em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante não nula são compactas, e portanto são esferas redondas.*

A demonstração do Teorema 1.3 depende da obtenção de estimativas de raio e de curvatura para discos mergulhados com curvatura média constante não nula. Essas estimativas estão enunciadas nos Teoremas 1.4 e 1.5 abaixo.

Teorema 1.4 (Estimativas de Curvatura, Meeks-Tinaglia [40]). *Dados $\delta, \mathcal{H} > 0$, existe uma constante $K(\delta, \mathcal{H}) \geq \sqrt{2}\mathcal{H}$ tal que qualquer H -disco Σ mergulhado em \mathbb{R}^3 com $H \geq \mathcal{H}$ satisfaz*

$$\sup_{\{p \in \Sigma \mid d_{\Sigma}(p, \partial\Sigma) \geq \delta\}} |A_{\Sigma}|(p) \leq K(\delta, \mathcal{H}),$$

onde $|A_{\Sigma}|$ é a norma da segunda forma fundamental e d_{Σ} é a função distância intrínseca de Σ .

Gostaríamos de enfatizar que as estimativas de curvatura para H -discos mergulhados dadas no Teorema 1.4 dependem unicamente em uma limitação *inferior* positiva \mathcal{H} para as suas curvaturas média, e em seguida explicaremos uma simples, porém importante consequência dessa observação. Lembre que o *raio* de uma superfície Riemanniana compacta com bordo é a distância intrínseca máxima entre pontos da superfície até o bordo; nós afirmamos que o raio de um 1-disco mergulhado em \mathbb{R}^3 deve ser menor do que $K(1, 1)$, onde $K(1, 1)$ é a constante dada no teorema acima com $\delta = 1, \mathcal{H} = 1$. Para ver isso, seja Σ um 1-disco mergulhado e seja $\widehat{\Sigma} = \frac{1}{K(1,1)} \cdot \Sigma$ a superfície dada por uma homotetia na métrica de Σ pelo fator de $\frac{1}{K(1,1)}$. Note que a curvatura média de $\widehat{\Sigma}$ é exatamente $K(1, 1)$, que, pelo Teorema 1.4 satisfaz $K(1, 1) \geq \sqrt{2}$, pois $\mathcal{H} = 1$. Portanto, a desigualdade clássica

$\text{tr}(A) \leq \sqrt{2} |A|$, que vale para qualquer matriz simétrica A , 2×2 e com entradas reais, nos dá que

$$\inf_{p \in \widehat{\Sigma}} |A_{\widehat{\Sigma}}|(p) \geq \sqrt{2} \cdot K(1, 1) > K(1, 1). \quad (1.1)$$

Isso nos dá que o raio de $\widehat{\Sigma}$ deve ser menor que 1 pois, de outra forma teríamos $\{p \in \widehat{\Sigma} \mid d_{\widehat{\Sigma}}(p, \partial\widehat{\Sigma}) \geq 1\} \neq \emptyset$, e então o Teorema 1.4 com $\delta = 1$, $\mathcal{H} = 1$ implicaria que

$$\sup_{\{p \in \widehat{\Sigma} \mid d_{\widehat{\Sigma}}(p, \partial\widehat{\Sigma}) \geq 1\}} |A_{\widehat{\Sigma}}|(p) \leq K(1, 1),$$

contradizendo (1.1). Essa contradição implica no fato que o raio de $\Sigma = K(1, 1) \cdot \widehat{\Sigma}$ é menor que a constante $K(1, 1)$, o que prova a nossa afirmação. Com tais considerações em mente, talvez não seja demasiado surpreendente que a demonstração das estimativas de curvatura do Teorema 1.4 está interligada com a prova do próximo resultado, que nos dá a existência de estimativas de raio para $(H > 0)$ -discos.

Observe que o próximo teorema também implica que não existe $(H > 0)$ -planos completos mergulhados em \mathbb{R}^3 , pois tal plano conteria discos topológicos compactos com raio arbitrariamente grande, e isso demonstra o Teorema 1.3.

Teorema 1.5 (Estimativas de Raio, Meeks-Tinaglia [40]). *Existe uma constante $\mathcal{R} \geq \pi$ tal que qualquer H -disco mergulhado em \mathbb{R}^3 com $H > 0$ tem raio menor do que \mathcal{R}/H .*

As estimativas acima, de raio e de curvatura para discos mergulhados com curvatura média constante não nula, são o assunto do Capítulo 4. Em uma pesquisa em andamento, Meeks e Tinaglia foram capazes de generalizar as estimativas de curvatura do Teorema 1.4 para o caso onde o espaço ambiente é uma variedade homogênea de dimensão 3; isso pode ser visto, juntamente com algumas aplicações, no final do Capítulo 4. No Capítulo 5, como uma aplicação dos Teoremas 1.4 e 1.5, nós provamos a validade da seguinte estimativa de área.

Teorema 1.6 (Estimativas de Área, Meeks-Tinaglia [36]). *Seja N um toro flat¹ de dimensão três e seja M uma superfície mergulhada em N , possivelmente desconexa, fechada, de gênero g e com curvatura média constante $H \in [a, b]$, para dados $b > a > 0$. Então, existe uma constante $A(N, a, b, g)$ tal que*

$$\text{Área}(M) \leq A(N, a, b, g).$$

No que segue dessa introdução, M denotará uma variedade Riemanniana homogênea e de dimensão três, X denotará o seu recobrimento universal Riemanniano e $\text{Ch}(X)$ denota a constante de Cheeger de X (veja (3.14)). Por uma *esfera* em M , queremos dizer uma imersão $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ da esfera de dimensão dois \mathbb{S}^2 em M , juntamente com um campo de vetores unitários normal à imersão. Em particular, estamos assumindo que esferas estão sempre orientadas, quando M estiver orientado. No Capítulo 6, explicaremos a prova do seguinte resultado (veja o Teorema 6.1), que dá a classificação de esferas de curvatura média constante em variedades homogêneas de dimensão três.

Teorema 1.7 (Meeks-Mira-Pérez-Ros). *Quaisquer duas esferas em M com a mesma curvatura média constante, em valor absoluto, diferem, como conjuntos, por uma isometria de M . Além disso:*

- (1) *Se X não é difeomorfo a \mathbb{R}^3 , então, para todo $H \in \mathbb{R}$, existe uma esfera de curvatura média constante H em M .*
- (2) *Se X é difeomorfo a \mathbb{R}^3 , então os valores $H \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma esfera de curvatura média constante H em M são exatamente aqueles que $|H| > \text{Ch}(X)/2$.*

Esse teorema e sua demonstração são motivadas por trabalhos anteriores de Hopf [20], Abresch e Rosenberg [1, 2], Daniel e Mira [15] e Meeks [26]. Abresch e Rosenberg provaram que esferas de curvatura média constante em variedades homogêneas de dimensão três que possuem um grupo de isometrias com dimensão quatro são esferas de revolução, de onde pode se mostrar que Teorema 1.7 vale nesse

¹Uma variedade Riemanniana é dita *flat* se sua curvatura seccional for identicamente nula

contexto; a prova por eles apresentada requer a construção de uma diferencial holomorfa que vem para generalizar a diferencial de Hopf de [20]. Quando X é isométrico ao grupo de Lie solúvel Sol_3 com uma de suas métricas invariantes à esquerda que admita planos de simetria reflexiva, então (2) segue dos resultados combinados de Daniel e Mira e de Meeks, demonstrando que o Teorema 1.7 é válido nesse caso.

O Capítulo 6 está dedicado aos 10 passos da demonstração de um resultado mais geral, Teorema 6.1, que inclui algumas propriedades adicionais sobre H -esferas listadas como Teorema 1.8 abaixo. Esse perfil da prova do Teorema 6.1 é bastante completo, com a exceção do Passo 7, onde são obtidas estimativas de área para H -esferas de índice 1 (veja o enunciado desse passo para o sentido preciso de *estimativas de área*). No Capítulo 7, discutimos alguns resultados chave para provar as estimativas de área do Passo 7. Tal resultado chave descreve a geometria de certos limites S_∞ de uma sequência de H_n -esferas S_n em X , quando as áreas dessas esferas divergem ao infinito e os valores $|H_n|$ estão uniformemente limitados; veja o Teorema 7.2 para essa análise de limites. Em especial, o Capítulo 7 é onde nós esboçamos a demonstração da Proposição 7.1, que diz que quando X for difeomorfo a \mathbb{S}^3 , então o conjunto das áreas de todas as esferas de curvatura média constante é um intervalo semi-aberto da forma $(0, A]$. Daí obtemos que o Teorema 6.1 vale nesse caso especial quando X é difeomorfo a \mathbb{S}^3 ; nós referimos o leitor a [27] para a existência de estimativas de área quando X não é difeomorfo a \mathbb{S}^3 .

Teorema 1.8. *Seja S uma H -esfera em M e seja \tilde{S} um levantamento de S em X . Então:*

1. *Se X é um produto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2(\kappa)$ é uma esfera de curvatura constante $\kappa > 0$ e $H = 0$, então*
 - (a) *S é totalmente geodésica, estável e o seu operador de Jacobi tem nulidade 1.*
 - (b) *S representa um elemento não trivial no segundo grupo de homologia de M .*
2. *Caso contrário, S tem índice 1 e nulidade 3 para o seu operador de Jacobi e a imersão de S em X se estende como a fronteira de uma imersão isométrica $F: B \rightarrow X$ de uma bola Riemanniana de dimensão três B , que é convexa em média.*

3. *Existe um ponto $p_S \in M$ tal que toda isometria de M que deixa p_S fixo deixa S invariante.*

Capítulo 2

Preliminares.

Nesse capítulo, vamos apresentar resultados preliminares que serão necessários para alguns dos resultados principais do livro. Começaremos dando aplicações para a fórmula da segunda variação do funcional área com respeito a variações que preservam o volume, o que acaba gerando os conceitos de superfícies com curvatura média constante, operador de Jacobi e índice de estabilidade.

2.1 A segunda variação da área.

Seja $\psi: \Sigma \rightarrow N$ uma imersão isométrica de uma superfície em uma variedade Riemanniana N de dimensão três. Assuma que $\psi(\Sigma)$ é de *dois lados*, i.e., que existe um campo unitário normal η sobre Σ , globalmente definido. Dado um domínio compacto e suave (possivelmente com fronteira) $\Omega \subset \Sigma$, consideraremos variações de Ω com respeito a aplicações diferenciáveis $\Psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \rightarrow N$, $\varepsilon > 0$, tais que

$$\Psi(0, p) = \psi(p) \text{ e } \Psi(t, p) = \psi(p) \text{ para } p \in \partial\Omega \text{ e } |t| < \varepsilon.$$

O *campo variacional* sobre Ω é $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0}$ e a norma com sinal da sua componente normal é $u = \langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0}, \eta \rangle$. Note que, para t suficientemente pequeno, a aplicação $\psi_t = \Psi|_{t \times \Omega}$ é uma imersão. Portanto,

pode-se associar a Ψ o *funcional área* $\text{Area}(t) = \text{Area}(\psi_t)$ e o *funcional volume* $\text{Vol}(t)$ dado por

$$\text{Vol}(t) = \int_{[0,t] \times \Omega} \text{Jac}(\Psi) dV,$$

onde dV é o elemento de volume em N . A função $\text{Vol}(t)$ mede o volume (com sinal) da região limitada entre $\psi_0 = \psi$ e ψ_t .

As fórmulas da primeira variação de volume e de área são

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(t) = -2 \int_{\Sigma} H u dA, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(t) = - \int_{\Sigma} u dA, \quad (2.1)$$

onde dA é o elemento de área em Σ com a métrica induzida por ψ e H é a função curvatura média de Σ com respeito a η , ou seja, para um ponto $p \in \Sigma$, $H(p)$ é a soma das curvaturas principais de Σ em p , dividido por 2. As equações em (2.1) implicam que Σ é um ponto crítico do funcional $\text{Area} - 2c \text{Vol}$ para uma dada constante $c \in \mathbb{R}$ se, e somente se, Σ tem curvatura média constante $H = c$. Nesse caso, podemos considerar o *operador de Jacobi* em Σ ,

$$L = \Delta + |A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}(\eta), \quad (2.2)$$

onde $\text{Ric}(\eta)$ é a curvatura de Ricci de N na direção do vetor unitário η da imersão. Quando Σ é uma H -superfície, a fórmula da segunda variação do funcional $\text{Area} - 2H \text{Vol}$ é dada por (veja, por exemplo [5, 47])

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} [\text{Area}(t) - 2H \text{Vol}(t)] &= - \int_{\Sigma} u L u dA \\ &= \int_{\Sigma} [|\nabla u|^2 - (|A_{\Sigma}|^2 + \text{Ric}(\eta))u^2] dA. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A fórmula (2.3) pode ser interpretada como uma forma quadrática $Q(u, u)$ associada ao operador linear elíptico L^2 -autoadjunto dado pelo operador de Jacobi L definido em (2.2).

Observação 2.1. Para uma variação normal ψ_t de uma superfície $\psi: \Sigma \rightarrow N$ com campo variacional associado $u\eta$, $L(u)(p)$ é igual a $-2H'(t)|_{t=0}$ em p , onde $H(t)(p)$ é a curvatura média da superfície imersa $\psi_t(\Sigma)$ em $\psi_t(p)$.

Definição 2.2. Uma função $u: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 e satisfazendo $Lu = 0$ em Σ é chamada de *função de Jacobi*. Nós denotaremos o espaço linear das funções de Jacobi em Σ por $\mathcal{J}(\Sigma)$.

A teoria clássica de operadores elípticos implica que para um certo subdomínio $\Omega \subset \Sigma$ com fecho compacto, o problema de Dirichlet para o operador de Jacobi em Ω possui um espectro discreto e infinito $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ de autovalores com $\lambda_k \nearrow +\infty$ quando k tende ao infinito, e cada autoespaço é um subespaço de dimensão finita de $C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, onde $H_0^1(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev das funções de classe L^2 cujas derivadas parciais fracas são também de classe L^2 e que valem zero na fronteira no sentido do traço.

Definição 2.3. Seja $\Omega \subset \Sigma$ um subdomínio de Σ com fecho compacto. O *índice de estabilidade* de Ω é a quantidade de autovalores negativos para o problema de Dirichlet associado a L em Ω . A *nulidade* de Ω é a dimensão de $\mathcal{J}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ω é dito *estável* se o seu índice de estabilidade é zero e *estritamente estável* se ambos seu índice de estabilidade e nulidade são zero.

Quando $N = \mathbb{R}^3$, (2.2) se reduz a $L = \Delta - 2K$, onde K denota a curvatura Gaussiana. Neste caso, como a aplicação de Gauss de um H -gráfico definida em um domínio de um plano Π tem sua imagem contida em um hemisfério aberto, a função produto interno do vetor normal unitário à superfície com o vetor normal do plano Π produz uma função de Jacobi positiva, de onde se conclui que qualquer H -gráfico é estável.

Voltando ao caso geral de uma H -superfície de dois lados $\psi: \Sigma \rightarrow N$ em uma variedade Riemanniana N de dimensão três, a estabilidade também faz sentido no caso não compacto de Σ , como explicaremos a seguir.

Definição 2.4. Uma H -superfície $\psi: \Sigma \rightarrow N$ em uma variedade Riemanniana N de dimensão três é dita *estável* se qualquer subdomínio $\Omega \subset \Sigma$ com fecho compacto for estável segundo a Definição 2.3. Estabilidade é equivalente a existência de uma função de Jacobi positiva em Σ (veja, por exemplo, Fischer-Colbrie [17, Proposition 1]). Dizemos que Σ possui *índice finito* se fora de um subconjunto compacto Σ for estável. O *índice de estabilidade* de Σ é o supremo dos índices de estabilidade de subdomínios de Σ com fecho compacto.

Para H -superfícies, é natural considerarmos uma versão mais fraca de estabilidade, associada ao problema isoperimétrico.

Definição 2.5. Dizemos que uma H -superfície $\psi: \Sigma \rightarrow N$ em uma variedade Riemanniana N de dimensão três é *fracamente estável* se

$$\int_M [|\nabla u|^2 - (|A_\Sigma|^2 + \text{Ric}(\eta))u^2] dA \geq 0,$$

para toda $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ com $\int_\Sigma u dA = 0$.

Exemplo 2.6. Seja Σ uma H -superfície de dois lados imersa em uma variedade Riemanniana N de dimensão três e seja F um campo de Killing em N . Se η denota um campo unitário orientando Σ , podemos definir a função $u: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ como $u = \langle \eta, F \rangle$. Então, se L é o operador de Jacobi de Σ dado por (2.2), $L(u) = 0$. Em particular, se Σ é transversal ao campo F , u não muda de sinal, e podemos escolher η de modo que $u > 0$. Isso nos dá que u é uma função de Jacobi positiva para Σ , o que mostra que Σ é estável.

Por definição, superfícies estáveis têm índice zero. O próximo teorema nos mostra o quão restritiva é essa propriedade para H -superfícies completas de \mathbb{R}^3 . No caso $H = 0$, a primeira afirmação nele foi provada independentemente por Fischer-Colbrie e Schoen [18], do Carmo e Peng [16] e Pogorelov [50] para o caso orientável. Após esses resultados, Ros [52] provou que uma superfície mínima (ou seja, uma 0 -superfície) completa e não orientável em \mathbb{R}^3 não pode ser estável. A segunda afirmação do teorema a seguir possui aplicações importantes para o estudo de propriedades de regularidade de H -laminações em \mathbb{R}^3 que possuem um ponto puncionado na origem.

Teorema 2.7. *Se $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma H -superfície completa, imersa e estável, então Σ é um plano. Mais geralmente, se $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$ é uma H -superfície estável que é completa fora da origem do \mathbb{R}^3 (no sentido que cada caminho divergente em Σ com comprimento finito possui a origem como ponto limite), então Σ é um plano.*

Uma prova curta e elementar do Teorema 2.7 pode ser vista em [32, Lemma 6.4]. O caso $H = 0$ da segunda afirmação do teorema também foi obtida por Colding e Minicozzi [10, Lemma A.26].

Para a discussão que se segue, precisaremos da definição da função raio de injetividade de uma variedade Riemanniana.

Definição 2.8 (Função raio de injetividade). Seja N uma variedade Riemanniana. A função raio de injetividade de N é a função $I_N: N \rightarrow (0, \infty]$ dada, em cada ponto $p \in N$, por

$$I_N(p) = \sup\{r > 0 \mid \exp_p|_{B(0,r)} \text{ é um difeomorfismo}\}.$$

Além disso, definimos o *raio de injetividade* de N como

$$\text{Inj}(N) = \inf_N I_N \in [0, \infty].$$

Um importante resultado na teoria das H -superfícies é que H -superfícies estáveis, com bordo, imersas em variedades homogeneamente regulares (veja Definição 2.9 abaixo) de dimensão três possuem estimativas de curvatura até a sua fronteira. Tais estimativas foram primeiramente obtidas por Schoen para 0-superfícies de dois lados e, em seguida melhoradas para o caso de 0-superfícies de um lado, e são uma simples consequência do Teorema 2.7, após um argumento de reescala.

Definição 2.9. Uma variedade Riemanniana de dimensão três N é *homogeneamente regular* se existe um $\varepsilon \in (0, \text{Inj}(N))$, tal que ε -bolas em N são uniformemente próximas de ε -bolas em \mathbb{R}^3 na norma C^2 .

Segue da definição que qualquer variedade homogeneamente regular possui raio de injetividade positivo e curvatura seccional limitada. Observe que um espaço de recobrimento de qualquer variedade Riemanniana fechada de dimensão três é sempre homogeneamente regular.

Teorema 2.10 (Schoen [54], Ros [52]). *Seja N uma variedade Riemanniana homogeneamente regular de dimensão três. Então existe uma constante universal $c > 0$ tal que qualquer H -superfície estável Σ imersa em N satisfaz*

$$|A_\Sigma(p)| d_N(p, \partial\Sigma)^2 \leq c \quad \text{para todo } p \in \Sigma,$$

onde d_N denota a distância em N e $\partial\Sigma$ é a fronteira de Σ .

Também observamos que Rosenberg, Souam e Toubiana [53] obtiveram a seguinte versão do Teorema 2.10, válida para H -superfícies de dois lados imersas em um espaço ambiente de dimensão três com uma limitação na sua curvatura seccional.

Teorema 2.11 (Rosenberg, Souam e Toubiana [53]). *Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão três cujo valor absoluto de sua curvatura seccional esteja limitado por uma dada constante k_0 . Existe uma constante universal $c > 0$, dependendo de k_0 , tal que qualquer H -superfície estável Σ de dois lados e imersa em N satisfaz*

$$|A_\Sigma(p)| d_N(p, \partial\Sigma)^2 \leq c \quad \text{para todo } p \in \Sigma.$$

2.2 Limitações uniformes da norma da segunda forma fundamental.

Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão 3 e seja Σ uma H -superfície imersa em N . Se η é um campo de vetores unitário orientando Σ e $H \neq 0$, assumiremos que η aponta na direção do vetor curvatura média de Σ , \vec{H} , ou seja, que η é tal que $H > 0$.

Um resultado clássico sobre superfícies imersas em variedades homogeneamente regulares de dimensão três é que uma limitação uniforme na norma da segunda forma fundamental da superfície nos dá uma constante $\varepsilon > 0$ tal que bolas intrínsecas de raio ε da superfície são gráficos sobre o seu plano tangente no centro de tais bolas, com função de gráfico tendo norma de seu gradiente no máximo 1 em todos os pontos. Para uma demonstração desse resultado, nós sugerimos [48, Lemma 4.1.1].

Proposição 2.12 (Lema do gráfico uniforme). *Seja M uma variedade homogeneamente regular e seja $C > 0$ dado. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que toda hipersuperfície Σ , completa e imersa em M com norma de sua segunda forma fundamental $|A_\Sigma| \leq C$ satisfaz: para cada $p \in \Sigma$, a bola intrínseca $B_\Sigma(p, \varepsilon)$ de centro p e raio ε é um gráfico, em coordenadas exponenciais, sobre uma vizinhança $0 \in U \subset T_p\Sigma$, com função de gráfico tendo norma de seu gradiente no máximo 1. Além disso, o raio de injetividade de Σ é no mínimo ε .*

Uma importante aplicação do resultado acima é a que segue:

Teorema 2.13. *Seja M uma variedade homogeneamente regular de dimensão três e seja $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de H -superfícies*

immersas em M , com $|A_{\Sigma_n}| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e alguma constante $C > 0$. Então, se existe uma sequência de pontos $p_n \in \Sigma_n$, $p_n \rightarrow p \in M$, após passarmos a uma subsequência, a sequência de bolas intrínsecas $\{B_{\Sigma_n}(p_n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a uma H -superfície completa Σ , imersa em M .

Demonstração. A limitação uniforme na norma de segunda forma fundamental de cada Σ_n nos dá a existência de vizinhanças $U_n \subset \Sigma_n$, $p_n \in U_n$, que são gráficos sobre $T_{p_n}\Sigma_n$, para funções de gradiente uniformemente limitado. Como $p_n \rightarrow p$, uma subsequência dos planos $T_{p_n}\Sigma_n$ convergirá a um plano $\Pi \subset T_pM$. Após passarmos a tal subsequência, vamos assumir que $T_{p_n}\Sigma_n \rightarrow \Pi$. Em particular, para n suficientemente grande, todas as vizinhanças U_n são gráficos sobre a mesma vizinhança $V \subset \Pi$. Agora, um argumento padrão usando a teoria das equações diferenciais parciais e o Teorema de Arzela-Ascoli, nos diz que uma subsequência dos gráficos U_n convergirá a um gráfico U sobre V , com U tendo curvatura média constante H .

Para obtermos uma superfície limite completa e imersa, observamos que a Proposição 2.12 nos diz que o tamanho da vizinhança V é uniforme; daí, podemos utilizar um argumento de diagonal para obter que uma subsequência de $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, em subconjuntos compactos, para uma superfície completa Σ de curvatura média constante H que estende U . \square

Observação 2.14. Uma modificação do argumento acima nos permite enfraquecer as suas hipóteses. Ao invés de fixarmos um espaço ambiente M , podemos considerar uma sequência de variedades homogeneamente regulares $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergindo a uma variedade homogeneamente regular M . Também, ao invés de assumirmos que toda Σ_n possui a mesma curvatura média constante H , podemos pedir que cada Σ_n tenha curvatura média constante H_n , com $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H \in \mathbb{R}$. Sobre essas circunstâncias, se toda Σ_n possuir a mesma limitação para a norma da sua segunda forma fundamental e houver uma sequência $p_n \in \Sigma_n$ convergindo a um ponto $p \in M$, então, após possivelmente substituir por uma subsequência, a sequência das bolas intrínsecas $\{B_{\Sigma_n}(p_n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá a uma H -superfície Σ , completa e imersa em M .

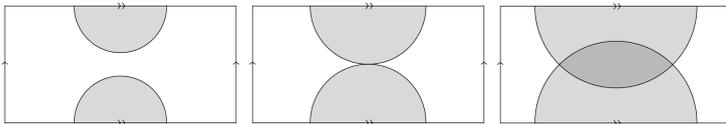
Uma outra propriedade importante dada por uma limitação uni-

forme na norma da segunda forma fundamental é a existência de uma *vizinhança regular* no lado convexo em média¹ de dadas ($H > 0$)-superfícies Σ imersas em uma variedade homogeneamente regular M . Para precisarmos o enunciado deste resultado, primeiro precisamos introduzir a noção de uma H -superfície *fortemente mergulhada à Alexandrov*.

Definição 2.15 (Superfície mergulhada à Alexandrov). Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão três.

1. Dizemos que uma H -superfície compacta e imersa em N $f: \Sigma \rightarrow N$ é *mergulhada à Alexandrov* se existir uma imersão $F: W \rightarrow N$ de uma variedade Riemanniana compacta W de dimensão três, convexa em média, com $\partial W = \Sigma$, tal que $F|_{\Sigma} = f$.
2. Dizemos que uma H -superfície, propriamente imersa em N $f: \Sigma \rightarrow N$ é *fortemente mergulhada à Alexandrov* se existir uma imersão própria $F: W \rightarrow N$ de uma variedade Riemanniana completa W de dimensão três, convexa em média, com $\partial W = \Sigma$, tal que F é injetora no interior de W e $F|_{\Sigma} = f$.

Um bom exemplo para se ter em mente é o seguinte, mostrado nas figuras abaixo: seja N um toro flat de dimensão três e seja $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow N$ a sua aplicação de recobrimento universal. Considere, para $r > 0$, as esferas geodésicas de \mathbb{R}^3 , $\partial\mathbb{B}(\vec{0}, r)$, e defina $S(r) = \pi(\partial\mathbb{B}(\vec{0}, r))$ a projeção dessas esferas em N . Se $r < \text{Inj}(N)$, a esfera $S(r)$ é mergulhada (figura da esquerda). Se $r = \text{Inj}(N)$, então a esfera $S(r)$ não é mergulhada, mas é fortemente mergulhada à Alexandrov (centro). Finalmente, se $r > \text{Inj}(N)$, a esfera $S(r)$ é apenas mergulhada à Alexandrov (direita). A região sombreada abaixo representa a bola convexa em média imersa em N com fronteira $S(r)$.



¹Uma variedade Riemanniana M com fronteira não vazia ∂M é chamada de *convexa em média* se a função curvatura média de ∂M for não negativa com respeito ao vetor unitário normal apontando para dentro de M . Em particular, a bola fechada unitária $B_{\mathbb{R}^3}(\vec{0}, 1)$ do \mathbb{R}^3 é convexa em média.

Também usaremos a seguinte notação no próximo resultado. Seja N uma variedade Riemanniana de dimensão três e seja Σ uma superfície fortemente mergulhada à Alexandrov em N . Para $r > 0$, seja $N_r(\Sigma)$ o subconjunto aberto do fibrado normal de Σ composto pelos vetores normais a Σ de norma estritamente menor que r . Quando $H > 0$, definimos ainda $N_r^+(\Sigma) \subset N_r(\Sigma)$ como o subconjunto de vetores de $N_r(\Sigma)$ cujo produto interno com o vetor curvatura média de Σ é não negativo. Para uma ideia da demonstração do Teorema 2.16 abaixo, veja a Figura 2.1.

Teorema 2.16 (Vizinhança regular de um lado [43]). *Seja N uma variedade homogeneamente regular de dimensão três com curvatura seccional limitada, em valor absoluto, por uma constante $S_0 > 0$. Seja Σ uma superfície fortemente mergulhada à Alexandrov com curvatura média constante $H_0 > 0$ e norma da sua segunda forma fundamental $|A_\Sigma| \leq A_0$, para algum $A_0 > 0$. Então, valem as seguintes propriedades.*

1. *Existe uma constante positiva $\tau \in (0, \pi/S_0)$, dependendo unicamente de A_0, H_0, S_0 , tal que a restrição da aplicação exponencial $\exp: N_\tau^+(\Sigma) \rightarrow N$ é um mergulho suave no interior de $N_\tau^+(\Sigma)$.*
2. *Existe $C > 0$, dependendo apenas das constantes A_0, H_0, S_0 , tal que a área de Σ em bolas de raio 1 em N é sempre menor que C .*

Observação 2.17. Seja Σ uma superfície fortemente mergulhada à Alexandrov em uma variedade homogeneamente regular N de dimensão três. Sempre que $\exp|_{N_r(\Sigma)}$ (respectivamente $\exp|_{\text{Int}(N_r^+(\Sigma))}$) for um mergulho, a imagem $\exp(N_r(\Sigma)) \subset N$ (resp. $\exp(N_r^+(\Sigma)) \subset N$) é chamada uma *vizinhança regular* de raio r de Σ (respectivamente uma *r -vizinhança regular de um lado* de Σ).

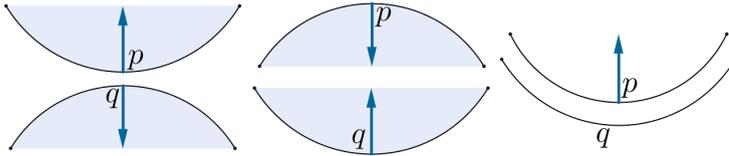


Figura 2.1: Seja Σ uma $(H > 0)$ -superfície com norma da segunda forma fundamental uniformemente limitada em uma variedade Riemanniana N de dimensão três, homogeneamente regular. As três figuras acima descrevem as maneiras que dois pontos interiores $p, q \in \Sigma$ podem estar próximos extrinsecamente, enquanto longe intrinsecamente. As figuras da esquerda e do centro descrevem a situação de quando Σ é mergulhada à Alexandrov, com a região sombreada no seu lado convexo em média. Se os pontos p, q correspondem ao caso da figura central, eles não podem chegar arbitrariamente próximos um ao outro, o que implica a existência de uma vizinhança regular de um lado. Note que a figura da direita não pode representar uma superfície fortemente mergulhada à Alexandrov.

Capítulo 3

Variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três.

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades de variedades homogêneas¹ simplesmente conexas de dimensão três. Como muitos dos exemplos de variedades homogêneas são grupos de Lie munidos de uma métrica invariante à esquerda (veja, por exemplo, o Teorema 3.2 abaixo), começaremos dando as seguintes definições.

Definição 3.1.

1. Um *grupo de Lie* Z é uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo, e cuja operação de grupo $*$: $Z \times Z \rightarrow Z$ satisfaz que $(x, y) \mapsto x^{-1} * y$ é uma aplicação diferenciável da variedade produto $Z \times Z$ em Z .
2. Dois grupos de Lie são *isomorfos* se existe um isomorfismo de grupos suave entre eles.

¹Uma variedade Riemanniana M é chamada *homogênea* se para cada par de pontos $p, q \in M$ existe uma isometria $\varphi: M \rightarrow M$ tal que $\varphi(p) = q$.

3. Seja $y \in Z$. Definimos, respectivamente, as translações à esquerda e à direita por y , por

$$\begin{aligned} l_y: Z &\rightarrow Z & r_y: Z &\rightarrow Z \\ x &\mapsto y * x, & x &\mapsto x * y. \end{aligned}$$

4. Uma métrica Riemanniana em um grupo de Lie Z é dita *invariante à esquerda* se as translações l_x forem isometrias para todo $x \in Z$. Um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda é chamado de *grupo de Lie métrico*.
5. Um campo de vetores E em um grupo de Lie Z é dito *invariante à esquerda* se for invariante por translações à esquerda, i.e., se $d(l_x)_y(E(y)) = E(l_x(y))$ para todos $x, y \in Z$. Uma propriedade bem conhecida de campos invariantes à esquerda é que se E_1, E_2 são dois campos invariantes à esquerda em um grupo de Lie Z , então o seu colchete $[E_1, E_2]$ é também invariante à esquerda.
6. O conjunto dos campos de vetores em Z invariantes à esquerda é a chamada *álgebra de Lie* de Z . Como um campo invariante à esquerda fica unicamente determinado pelo seu valor em um dado ponto, existe uma identificação canônica entre a álgebra de Lie de Z e $T_e Z$, o espaço tangente a Z na sua identidade e .
7. Analogamente ao item 5 acima, dizemos que um campo F em um grupo de Lie Z é *invariante à direita* se F for invariante por translações à direita. Se denotamos por $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o subgrupo a um parâmetro de difeomorfismos de Z que correspondem ao fluxo de um campo invariante à direita F , temos que $\varphi_t(x) = r_x(\varphi_t(e)) = l_{\varphi_t(e)}(x)$, ou seja, o fluxo de um campo invariante à direita no grupo de Lie Z age em Z por translações à esquerda. Em particular, se $X = (Z, \langle, \rangle)$ for um grupo de Lie métrico, qualquer campo invariante à direita é um campo de Killing. Observe que podemos fazer a identificação de $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ com o subgrupo a um parâmetro de Z dado por $\Gamma = \{\varphi_t(e) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Das definições acima, fica fácil ver que qualquer grupo de Lie métrico $X = (Z, \langle, \rangle)$ é uma variedade homogênea: se $x, y \in X$ são

dois dados elementos, a aplicação $l_{yx^{-1}}$ é uma isometria de X que leva x em y .

Note que a esfera de dimensão dois $\mathbb{S}^2(\kappa)$ com a sua métrica *redonda* de curvatura constante $\kappa > 0$ é homogênea. Agora, se $\mathbb{S}^2(\kappa)$ fosse isométrica a um grupo de Lie métrico, então qualquer vetor não nulo tangente a $\mathbb{S}^2(\kappa)$ daria origem a um campo invariante à esquerda, globalmente definido e com norma não nula em todos os pontos da esfera de dimensão dois \mathbb{S}^2 , contradizendo o teorema do índice de Hopf; portanto $\mathbb{S}^2(\kappa)$ não é isométrico a um grupo de Lie métrico. Além disso, como o segundo grupo de homotopias de qualquer grupo de Lie é trivial, a variedade homogênea de dimensão três dada pelo produto Riemanniano $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ não é isométrica a um grupo de Lie métrico. De fato, pelo resultado apresentado no próximo teorema, as variedades $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, para $\kappa > 0$, são as únicas variedades homogêneas simplesmente conexas de dimensão três que não são isométricas a um grupo de Lie métrico.

Teorema 3.2. *Uma variedade homogênea Y , simplesmente conexa e de dimensão três ou é isométrica ao produto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2(\kappa)$ é uma esfera de curvatura constante $\kappa > 0$, ou Y é isométrico a um grupo de Lie métrico.*

Ideia da demonstração. Seja Y uma variedade homogênea simplesmente conexa de dimensão três e seja $I(Y)$ o seu grupo de isometrias. Tome $p \in Y$ e defina $I_p(Y) = \{\varphi \in I(Y) \mid \varphi(p) = p\}$ como o grupo de isotropias de p .

Como $I_p(Y)$ atua em T_pY por isometrias que fixam a origem, segue que $I_p(Y)$ é isomorfo a um subgrupo suave do grupo ortogonal $O(3)$. As dimensões possíveis para subgrupos suaves de $O(3)$ são zero, um ou três, e daí segue que a dimensão de $I(Y)$ é três, quatro ou seis, e agora a prova é dividida nesses três casos.

Se $I(Y)$ tem dimensão seis, então Y possui curvatura seccional constante e, após uma homotetia da métrica, Y é um dentre \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 ou \mathbb{H}^3 com suas métricas canônicas, que são invariantes à esquerda para certas estruturas de grupo, veja os Exemplos 3.5 e 3.6 abaixo.

Se $I(Y)$ tem dimensão quatro, então Y é isométrico a um fibrado Riemanniano $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ sobre uma superfície completa, simplesmente conexa e de curvatura constante $\kappa \in \mathbb{R}$, com curvatura de fibrado $\tau \in \mathbb{R}$; veja, por exemplo, Abresch e Rosenberg [2] ou Daniel [14]

para uma discussão sobre esses espaços. Cada um desses espaços possui a estrutura de algum grupo de Lie métrico, com a exceção de $\mathbb{E}(\kappa, 0)$, $\kappa > 0$, que é isométrico a $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$.

Agora, assumamos que a dimensão de $I(Y)$ é três e seja $I_0(Y)$ a componente conexa de $I(Y)$ contendo a identidade. Tome um ponto base $p_0 \in Y$ e considere a aplicação $\phi: I_0(Y) \rightarrow Y$ dada por $\phi(h) = h(p_0)$. Afirmamos que ϕ é um difeomorfismo. De fato, considere o estabilizador de p_0 em $I_0(Y)$,

$$S = \{h \in I_0(Y) \mid h(p_0) = p_0\},$$

que é um subgrupo discreto de $I_0(Y)$. O quociente $I_0(Y)/S$ é uma variedade de dimensão três, recoberta por $I_0(Y)$, e a aplicação ϕ se fatora através de $I_0(Y)/S$ produzindo uma aplicação de recobrimento $I_0(Y)/S \rightarrow Y$. Como Y é simplesmente conexo, então ambas as aplicações de recobrimento $I_0(Y) \rightarrow I_0(Y)/S$ e $I_0(Y)/S \rightarrow Y$ são triviais; em particular, S é o grupo trivial. Decorre que ϕ é um difeomorfismo, e que Y pode ser munido com a estrutura de grupo de Lie isomorfa a estrutura de $I_0(Y)$. Como Y é homogênea, a métrica original de Y é apenas a extensão invariante à esquerda do produto interno no espaço tangente $T_{p_0}Y$, e nessa estrutura de grupo o ponto p_0 têm o papel do elemento neutro. \square

Observação 3.3. Tomando o Teorema 3.2 como base, fixaremos a notação a ser utilizada ao longo das próximas seções. Y denotará uma variedade homogênea de dimensão três, e X denotará um grupo de Lie métrico, simplesmente conexo e de dimensão três, cuja estrutura de grupo será denotada por Z .

A seguir, vamos exibir alguns exemplos de grupos de Lie métricos. Utilizaremos $M_n(\mathbb{K})$ para denotar o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e denotaremos o subconjunto das matrizes invertíveis de $M_n(\mathbb{K})$ por $\text{Gl}(n, \mathbb{K})$.

Exemplo 3.4 (Espaço Euclidiano n dimensional). O conjunto de números reais \mathbb{R} com a sua métrica usual e operação de grupo $+$ é um grupo de Lie métrico. Mais geralmente, o espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n com a sua métrica plana é um grupo de Lie métrico, com estrutura de grupo dada pelo produto direto de n fatores \mathbb{R} .

Exemplo 3.5 (Espaço hiperbólico n dimensional). Para $n \geq 2$, o espaço hiperbólico de dimensão n \mathbb{H}^n é naturalmente um grupo de Lie métrico não comutativo: ele pode ser visto como o grupo de *similaridades* de \mathbb{R}^{n-1} , através do isomorfismo

$$(\mathbf{a}, a_n) \in \mathbb{H}^n \mapsto \phi_{(\mathbf{a}, a_n)}: \begin{array}{l} \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \mathbf{x} \mapsto a_n \mathbf{x} + \mathbf{a}, \end{array}$$

onde nós utilizamos o modelo do semiespaço superior $\{(\mathbf{a}, a_n) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1}, a_n > 0\}$ para \mathbb{H}^n . Pode-se mostrar que **toda** métrica invariante à esquerda em \mathbb{H}^n é de curvatura constante negativa. Nós vamos voltar a tratar deste exemplo, como um produto semidireto no Exemplo 3.9 na Seção 3.1.

Exemplo 3.6 (Grupo especial unitário). Esse é o grupo

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(2) &= \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A^{-1}} = A^t, \det A = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

com operação de grupo dada pela multiplicação de matrizes. $\mathrm{SU}(2)$ é isomorfo ao grupo de quatérnios unitários $\{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ (aqui $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), com isomorfismo de grupos

$$\begin{pmatrix} a - di & -b + ci \\ b + ci & a + di \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \mapsto a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Portanto, $\mathrm{SU}(2)$ é difeomorfo a esfera unitária \mathbb{S}^3 de \mathbb{R}^4 . Como a multiplicação à esquerda por um quatérnio unitário é uma isometria de \mathbb{R}^4 com sua métrica usual, a restrição da métrica de \mathbb{R}^4 a \mathbb{S}^3 , que é de curvatura constante 1, é uma métrica invariante à esquerda.

Exemplo 3.7 (Grupo especial ortogonal).

$$\mathrm{SO}(3) = \{A \in \mathrm{Gl}(3, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = I_3, \det A = 1\},$$

onde I_3 é a matriz identidade 3×3 , é o grupo de rotações em torno de eixos passando pela origem de \mathbb{R}^3 , com a estrutura natural de multiplicação. $\mathrm{SO}(3)$ é isomorfo ao quociente de $\mathrm{SU}(2)$ pelo seu centro $\{\pm I_2\}$; em particular, $\mathrm{SO}(3)$ é difeomorfo ao espaço projetivo real de dimensão três.

Exemplo 3.8 (Grupo especial linear). O grupo especial linear $SL(2, \mathbb{R})$ é o grupo de matrizes reais 2×2 com determinante 1. O quociente $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ é isomorfo ao subgrupo das transformações de Möbius que deixam invariante o semiplano superior do plano complexo \mathbb{C} , de acordo com o homomorfismo induzido por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \mapsto \left(z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{C} \right).$$

Denotamos $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ por $PSL(2, \mathbb{R})$. Em particular, $PSL(2, \mathbb{R})$ pode ser identificado com o grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 que preservam a orientação que, por sua vez pode ser identificado de maneira natural com o fibrado tangente unitário de \mathbb{H}^2 , $U\mathbb{H}^2$, que é topologicamente o fibrado trivial $\mathbb{H}^2 \times S^1$. Portanto, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, o recobrimento universal tanto de $SL(2, \mathbb{R})$ quanto de $PSL(2, \mathbb{R})$, é difeomorfo a \mathbb{R}^3 . Mais ainda, a identificação de $PSL(2, \mathbb{R})$ com $U\mathbb{H}^2$ nos dá um \mathbb{R} -fibrado

$$\Pi: \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$$

de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ sobre \mathbb{H}^2 .

3.1 Produtos semidiretos métricos de dimensão três.

Essa seção usa algumas das construções e notações introduzidas pelo primeiro autor do livro e J. Pérez [30] para produtos semidiretos de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R} , uma abordagem que, de certa forma, unifica o estudo de diversos grupos de Lie métricos simplesmente conexos de dimensão três (veja o Teorema 3.13). Para mais detalhes sobre os resultados aqui apresentados, nós sugerimos ao leitor [30].

Generalizando produtos diretos, um produto semidireto é uma maneira de produzir um grupo a partir de dois subgrupos, um dos quais é normal. No nosso caso, o subgrupo normal será \mathbb{R}^2 e o outro fator será \mathbb{R} . Como um conjunto, um produto semidireto não é nada além do produto cartesiano de \mathbb{R}^2 por \mathbb{R} , mas a operação de grupo não é a de produto direto. Considere um homomorfismo de grupos

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2) = \text{Gl}(2, \mathbb{R})$, o qual denotaremos por

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \varphi_z: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{p} &\mapsto \varphi_z(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

para cada $z \in \mathbb{R}$. A operação $*$ do produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{R}$ será definida por

$$(\mathbf{p}_1, z_1) * (\mathbf{p}_2, z_2) = (\mathbf{p}_1 + \varphi_{z_1}(\mathbf{p}_2), z_1 + z_2). \quad (3.1)$$

No que segue, vamos concentrar nossa atenção ao caso onde φ é dada pela exponencial de uma certa matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$, i.e., $\varphi_z(\mathbf{p}) = e^{zA}\mathbf{p}$. O grupo correspondente será denotado por $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. Com esta construção, é possível obter todos grupos de Lie simplesmente conexos de dimensão três, com as exceções de $\text{SU}(2)$ (que não é difeomorfo a \mathbb{R}^3) e $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ (que não possui subgrupo normal de dimensão dois).

Exemplo 3.9. Vamos enfatizar alguns casos particulares dependendo da escolha da matriz A :

- $A = 0 \in M_2(\mathbb{R})$ nos dá o produto direto usual de grupos, que, no nosso caso, é $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.
- Tomando $A = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade 2×2 , então $e^{zA} = e^z I_2$ e se pode recuperar o grupo \mathbb{H}^3 de similaridades de \mathbb{R}^2 , conforme o Exemplo 3.5. Para uma dimensão a menos, essa construção nos leva a \mathbb{H}^2 por simplesmente considerar A como a matriz identidade 1×1 , $A = (1)$, e a operação não comutativa $*$ em $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \rtimes_{(1)} \mathbb{R}$ é

$$(x, y) * (x', y') = (x + e^y x', y + y').$$

- Uma consequência simples desse modelo de produto semidireto para \mathbb{H}^2 é que $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ pode ser visto como o produto $(\mathbb{R} \rtimes_{(1)} \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Porém, o grupo formado pelo produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ também pode ser construído como o produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A relação entre esses dois modelos de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é

apenas uma permutação entre a segunda e terceira componentes, ou seja, a aplicação

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} \mapsto (x, z, y) \in (\mathbb{R} \rtimes_{(1)} \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

é um isomorfismo de grupos de Lie.

- Se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então $e^{zA} = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z \\ \sin z & \cos z \end{pmatrix}$ e temos que $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \tilde{E}(2)$, é o recobrimento universal do grupo de movimentos rígidos do plano Euclidiano que preservam a orientação.
- Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $e^{zA} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}$ e temos que $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \text{Sol}_3$ é o grupo solúvel Sol_3 , também conhecido como o grupo $E(1, 1)$ de movimentos rígidos do plano de Lorentz-Minkowski que preservam a orientação.
- Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então $e^{zA} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e temos que $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = \text{Nil}_3$, é isomorfo ao grupo de Heisenberg de matrizes nilpotentes da forma $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Resumindo, as escolhas acima de A geram as estruturas de grupo conforme a seguinte tabela:

$\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$	\mathbb{R}^3	\mathbb{H}^3	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
A	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$	$\tilde{E}(2)$	Sol_3	Nil_3
A	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por enquanto, nos referimos mais às estruturas de grupo do que às métricas invariantes à esquerda que cada estrutura de grupo possui. Uma métrica invariante à esquerda é determinada através da escolha de uma base da álgebra de Lie para ser um conjunto ortonormal, embora bases distintas possam gerar métricas isométricas. Nosso próximo objetivo é determinar uma base canônica para o conjunto de campos de vetores invariantes à esquerda (respectivamente à direita) de um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, para qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Colocando coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$, considere os campos coordenados $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$. A *métrica canônica* de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ é a métrica invariante à esquerda na qual os vetores $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ formam uma base ortonormal na origem $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. A extensão invariante à esquerda dos campos coordenados é dada, em cada ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z) &= a_{11}(z)\partial_x + a_{21}(z)\partial_y, \\ E_2(x, y, z) &= a_{12}(z)\partial_x + a_{22}(z)\partial_y, \\ E_3(x, y, z) &= \partial_z, \end{aligned}$$

onde denotamos a aplicação exponencial $e^{zA} = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix}$. Agora, se A estiver escrita como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então o colchete de Lie de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ é dado pelas relações

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_3, E_1] = aE_1 + cE_2, \quad [E_3, E_2] = bE_1 + dE_2. \quad (3.2)$$

A mudança da base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ para a base de campos coordenados $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ produz a seguinte expressão para a métrica canônica de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$:

$$ds^2 = Q_{11}(z)dx^2 + Q_{22}(z)dy^2 + dz^2 + Q_{12}(z)(dx \otimes dy + dy \otimes dx),$$

onde os coeficientes Q_{ij} dependem unicamente da coordenada z e são

definidos por (aqui, $\text{tr}(A)$ denota o traço da matriz A)

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= \langle \partial_x, \partial_x \rangle = e^{-2z \text{tr}(A)} [a_{21}(z)^2 + a_{22}(z)^2] \\ Q_{22}(z) &= \langle \partial_y, \partial_y \rangle = e^{-2z \text{tr}(A)} [a_{11}(z)^2 + a_{12}(z)^2] \\ Q_{12}(z) &= \langle \partial_x, \partial_y \rangle = -e^{-2z \text{tr}(A)} [a_{11}(z)a_{21}(z) + a_{12}(z)a_{22}(z)]. \end{aligned}$$

Em particular, a partir desta expressão da métrica de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, podemos obter algumas propriedades sobre este grupo de Lie métrico que apresentamos abaixo (e sugerimos [30] como referência para suas demonstrações).

Proposição 3.10.

1. A conexão Riemanniana ∇ de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ satisfaz

$$\begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_1 = a E_3 \\ \nabla_{E_2} E_1 = \frac{b+c}{2} E_3 \\ \nabla_{E_3} E_1 = \frac{c-b}{2} E_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_2 = \frac{b+c}{2} E_3 \\ \nabla_{E_2} E_2 = d E_3 \\ \nabla_{E_3} E_2 = \frac{b-c}{2} E_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \nabla_{E_1} E_3 = -a E_1 - \frac{b+c}{2} E_2 \\ \nabla_{E_2} E_3 = -\frac{b+c}{2} E_1 - d E_2 \\ \nabla_{E_3} E_3 = 0. \end{array} \quad (3.3)$$

2. Retas verticais $\{(x_0, y_0, z) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{R}\}$ são geodésicas.
3. A curvatura média de planos horizontais $\{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ com respeito ao campo normal E_3 é constante $H = \text{tr}(A)/2$. Além disso, cada plano horizontal possui curvatura seccional identicamente zero, ou seja, é *flat*.
4. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a aplicação $(x, y, z) \xrightarrow{\phi} (-x + 2x_0, -y + 2y_0, z)$ é uma isometria de $(\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \langle, \rangle)$. Observe que ϕ é a rotação de ângulo π em torno da linha $\gamma = \{(x_0, y_0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, e possui como conjunto de pontos fixos exatamente a geodésica γ .
5. Para uma reta L em $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$, defina P_L como o plano vertical $\{(x, y, z) \mid (x, y, 0) \in L, z \in \mathbb{R}\}$. Então P_L é regradado por geodésicas verticais. Mais ainda, como rotações de ângulo π por qualquer uma dessas geodésicas em P_L é uma isometria que leva P_L nele mesmo, então a curvatura média de P_L é identicamente nula. Ou seja, planos verticais de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ são superfícies mínimas.

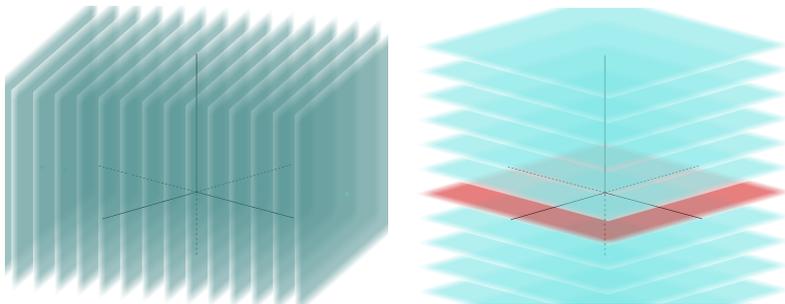


Figura 3.1: Em produtos semidiretos $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, todo plano vertical é uma superfície mínima (ou seja, uma 0-superfície). Planos horizontais (quando orientados segundo E_3) possuem curvatura média constante $H = \text{tr}(A)/2$, e o plano $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$ (destacado na figura acima da direita) é um subgrupo normal de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$.

6. Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são *similares* (i.e., $B = P^{-1}AP$ para uma matriz invertível $P \in Gl(2, \mathbb{R})$), então, a aplicação $\psi: \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ definida por $\psi(\mathbf{p}, t) = (P^{-1}\mathbf{p}, t)$ é um isomorfismo de grupos de Lie.
7. Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são *congruentes* (i.e., $B = P^{-1}AP$ para alguma matriz ortogonal $P \in O(2)$), então a aplicação ψ definida acima é também uma isometria entre as métricas canônicas de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$.

A seguir, descreveremos brevemente quais são os possíveis grupos de Lie X simplesmente conexos de dimensão três. Quanto à estrutura de grupo de X , existem duas possibilidades, ou X é *unimodular* ou X é *não unimodular*.

3.2 Grupos de Lie métricos unimodulares.

Dentre todos grupos de Lie simplesmente conexos de dimensão três, os casos $SU(2)$, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, $\widetilde{E}(2)$, Sol_3 , Nil_3 e \mathbb{R}^3 compreendem os gru-

pos *unimodulares*². Como observado anteriormente, com as exceções de $SU(2)$ e $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, todas as outras estruturas de grupo unimodulares podem ser obtidas através de um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ para alguma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$, veja o Exemplo 3.9.

Suponha que X é um grupo de Lie unimodular, simplesmente conexo e de dimensão três, munido de uma métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sempre é possível encontrar um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$ e tais que

$$[E_2, E_3] = c_1 E_1, \quad [E_3, E_1] = c_2 E_2, \quad [E_1, E_2] = c_3 E_3, \quad (3.4)$$

para certas constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, entre as quais no máximo uma é negativa. A tripla de números (c_1, c_2, c_3) e de campos $\{E_1, E_2, E_3\}$ são chamadas respectivamente de *constantes estruturais* e *base canônica* (ou *base unimodular*) do grupo de Lie métrico X . As constantes associadas à tripla (c_1, c_2, c_3) que apresentamos a seguir são úteis para a descrição da geometria dos grupos de Lie métricos, simplesmente conexos, unimodulares e de dimensão três:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3), \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3). \quad (3.5)$$

Por exemplo, a conexão de Levi-Civita associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dada por

$$\nabla_{E_i} E_j = \mu_i E_i \times E_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.6)$$

onde \times denota o produto cruzado associado à métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e à orientação de X definida quando declaramos que a base canônica $\{E_1, E_2, E_3\}$ é positiva. A partir da equação (3.6), é direto checar que o tensor de Ricci associado à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é diagonalizado na base $\{E_1, E_2, E_3\}$ com autovalores (veja Milnor [46] para maiores detalhes)

$$\text{Ric}(E_1) = 2\mu_2\mu_3, \quad \text{Ric}(E_2) = 2\mu_1\mu_3, \quad \text{Ric}(E_3) = 2\mu_1\mu_2. \quad (3.7)$$

Dependendo dos sinais das constantes estruturais c_i , obtemos seis possibilidades distintas para as estruturas de grupo de Lie, que estão

²Mais geralmente, um grupo de Lie (conexo) G é chamado de *unimodular* se para cada elemento x na sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , o endomorfismo $\text{ad}_x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dado por $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ possui traço zero. Isso é equivalente à propriedade que a medida de Haar invariante à esquerda de G é também invariante à direita.

listadas na tabela abaixo, juntamente com as possíveis dimensões do grupo de isometrias $I(X)$ para uma dada métrica invariante à esquerda em X .

Sinais de c_1, c_2, c_3	$\dim I(X) = 3$	$\dim I(X) = 4$	$\dim I(X) = 6$
+, +, +	$SU(2)$	$\mathbb{S}_{\text{Berger}}^3 = \mathbb{E}(\kappa > 0, \tau)$	$\mathbb{S}^3(\kappa)$
+, +, -	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$	$\mathbb{E}(\kappa < 0, \tau)$	\emptyset
+, +, 0	$\widetilde{E}(2)$	\emptyset	$(\widetilde{E}(2), \text{flat})$
+, -, 0	Sol_3	\emptyset	\emptyset
+, 0, 0	\emptyset	$Nil_3 = \mathbb{E}(0, \tau)$	\emptyset
0, 0, 0	\emptyset	\emptyset	\mathbb{R}^3

Grupos de Lie métricos **unimodulares** simplesmente conexos de dimensão três. Cada linha horizontal na tabela acima corresponde a uma única estrutura de grupo; quando todas as constantes estruturais são diferentes, o grupo de isometrias de X é de dimensão três. Se duas ou mais constantes coincidem, então o grupo de isometrias de X tem dimensão quatro ou seis. Aqui, utilizamos a notação padrão $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ para o espaço total da submersão Riemanniana com curvatura de fibrado τ sobre uma superfície completa, simplesmente conexa, com curvatura constante κ . Observamos que quando $SU(2)$ está equipado com uma métrica invariante à esquerda cujo grupo de isometrias tem dimensão quatro, ele é chamado de uma *esfera de Berger*.

Fixando um grupo de Lie métrico unimodular $X = (Z, \langle, \rangle)$, podemos tomar E_1, E_2, E_3 a base canônica de X (com respeito a \langle, \rangle). Agora, escolha valores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ e declare que o comprimento de E_i é λ_i , mantendo a ortogonalidade de $\{E_1, E_2, E_3\}$. Isso define unicamente uma nova métrica invariante à esquerda \langle, \rangle' em Z , e **qualquer** métrica invariante à esquerda do grupo Z pode ser obtida através deste procedimento (veja, por exemplo, a discussão que segue o Corolário 4.4 de [46]). Os vetores E_1, E_2, E_3 são autovetores do tensor de Ricci para qualquer métrica \langle, \rangle' , embora os autovalores de Ricci associados dependam das constantes λ_i e, portanto, da métrica \langle, \rangle' .

A próxima proposição nos dá algumas propriedades sobre as curvas integrais Γ_i de E_i , $i = 1, 2, 3$, que passam pelo elemento neutro $e \in Z$. Cada Γ_i é um subgrupo a 1 parâmetro de Z que gera E_i pela ação à direita de Γ_i em Z .

Proposição 3.11. *Na situação acima, cada Γ_i é o conjunto de pontos fixos de um isomorfismo de ordem dois $\phi_i: Z \rightarrow Z$, que preserva a orientação de Z . Diremos que cada ϕ_i é uma π -rotação por Γ_i . Além disso, valem as seguintes propriedades:*

- (1) ϕ_i deixa invariante cada uma das classes residuais à esquerda de Γ_j , $j = 1, 2, 3$.
- (2) Para cada métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ de Z , Γ_i é uma geodésica e ϕ_i é uma isometria.

Demonstração. Na Proposição 2.21 de [30], fica provado que, nas condições acima, existem isomorfismos de ordem dois $\phi_i: Z \rightarrow Z$, $i = 1, 2, 3$, que preservam a orientação e tais que $(d\phi_i)_e((E_i)_e) = (E_i)_e$, para os quais a métrica dada pelo *pull-back* $\phi_i^* \langle \cdot, \cdot \rangle'$ é igual a $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ para qualquer métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ em Z . Agora, (3.6) implica que a curva integral Γ_i de E_i é uma geodésica de $(Z, \langle \cdot, \cdot \rangle')$ (para toda métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle'$). Como $(d\phi_i)_e((E_i)_e) = (E_i)_e$, concluímos, da unicidade de geodésicas, que Γ_i consiste inteiramente de pontos fixos de ϕ_i . Além disso, como ϕ_i possui ordem dois e preserva a orientação, então $d(\phi_i)_e((E_j)_e) = \pm(E_j)_e$, e daí ϕ_i deixa cada Γ_j invariante, o que demonstra a Proposição 3.11. \square

3.3 Grupos de Lie métricos não unimodulares.

Os grupos de Lie métricos, simplesmente conexos de dimensão três não unimodulares correspondem aos produtos semidiretos $X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ com $\text{tr}(A) \neq 0$, conforme explicaremos a seguir.

Lema 3.12 ([30, Lemma 2.11]). *Um grupo de Lie simplesmente conexo de dimensão três Z é não unimodular se e somente se ele é isomorfo a um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ com $\text{tr}(A) \neq 0$.*

Demonstração. Seja \mathfrak{z} a álgebra de Lie de um grupo Z como acima. Então, o núcleo \mathfrak{u} da aplicação linear $x \in \mathfrak{z} \mapsto \text{tr}(\text{ad}_x) \in \mathbb{R}$ tem dimensão igual a dois. Após escolher uma métrica invariante à esquerda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Z , tome uma base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ de \mathfrak{z} tal que $\{E_1, E_2\}$ gere \mathfrak{u} . Tomando o traço na *identidade de Jacobi*

$$\text{ad}_{[x,y]} = \text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x, \quad \forall x, y \in \mathfrak{z},$$

segue que

$$[x, y] \in \ker(\varphi) = \mathfrak{u} \quad \forall x, y \in \mathfrak{z}, \quad (3.8)$$

de onde obtemos que $[E_1, E_3], [E_2, E_3]$ são ortogonais a E_3 . Decorre, portanto, que

$$0 = \text{tr}(\text{ad}_{E_1}) = \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle, \quad 0 = \text{tr}(\text{ad}_{E_2}) = \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle,$$

e daí $[E_1, E_2] = 0$. Ainda mais, existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= aE_1 + cE_2, \\ [E_3, E_2] &= bE_1 + dE_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

com $\text{tr}(\text{ad}_{E_3}) = a + d \neq 0$, pois $E_3 \notin \mathfrak{u}$. Para terminarmos a demonstração do lema, seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Comparando (3.9) e (3.2), obtemos que as álgebras de Lie de Z e de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ são isomorfas. Como ambos os grupos Z e $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ são simplesmente conexos, isso implica que existe um isomorfismo entre as estruturas de grupo de Z e de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. \square

Pela explicação no início da Seção 3.2 e pelo Lema 3.12, temos o seguinte resultado de classificação:

Teorema 3.13. *Seja X um grupo de Lie métrico, simplesmente conexo e de dimensão três. Então, uma das seguintes afirmações vale:*

1. X é compacto; então X é difeomorfo a \mathbb{S}^3 e é isométrico e isomorfo a $\text{SU}(2)$ munido de uma métrica invariante à esquerda. Em particular, X é unimodular.
2. X is não compacto; então X is difeomorfo a \mathbb{R}^3 e, além disso,

- (a) se X é unimodular, então ou X é isomorfo e isométrico a $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, munido de uma métrica invariante à esquerda, ou X é isomorfo e isométrico a um produto semidireto métrico $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, com $A \in M_2(\mathbb{R})$ tendo $\text{tr}(A) = 0$;
- (b) se X é não unimodular, então X é isomorfo e isométrico a um produto semidireto métrico $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, com $A \in M_2(\mathbb{R})$ tendo $\text{tr}(A) \neq 0$.

Quando X for um grupo de Lie métrico não unimodular, então após uma homotetia da métrica de X , podemos assumir que $\text{tr}(A) = 2$. **Essa normalização $\text{tr}(A) = 2$ no caso não unimodular será assumida até o fim do livro.** Após uma mudança ortogonal da base invariante à esquerda, podemos expressar a matriz A de maneira única por

$$A = A(a, b) = \begin{pmatrix} 1 + a & -(1 - a)b \\ (1 + a)b & 1 - a \end{pmatrix}, \quad a, b \in [0, \infty). \quad (3.10)$$

A base canônica do grupo de Lie métrico X é, por definição, o referencial ortonormal invariante à esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$ dado em (3.4) pela matriz A de (3.10). Em outras palavras, todo grupo de Lie métrico não unimodular, simplesmente conexo e de dimensão 3 é isomorfo e isométrico (após possivelmente uma homotetia da métrica) a um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ com sua métrica canônica, e onde A está escrita como em (3.10). Mais ainda, nesta métrica as direções E_1, E_2, E_3 são precisamente aquelas que diagonalizam o tensor de Ricci associado à métrica canônica de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, com curvaturas principais de Ricci dadas por (veja [30, Section 2.5])

$$\begin{aligned} \text{Ric}(E_1) &= -2(1 + a(1 + b^2)) \\ \text{Ric}(E_2) &= -2(1 - a(1 + b^2)) \\ \text{Ric}(E_3) &= -2(1 + a^2(1 + b^2)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pelo Exemplo 3.9, se $A = I_2$ for a matriz identidade 2×2 (ou seja, se tomarmos $a = 0, b = 0$ em (3.10)), então a estrutura de grupo de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ é aquela do espaço hiperbólico de dimensão três \mathbb{H}^3 . Ainda mais, a métrica canônica de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ é aquela de curvatura constante -1 . Se tomarmos $a = 1, b = 0$, obtemos o espaço produto $\mathbb{H}^2(-4) \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{H}^2(-4)$ tem curvatura constante -4 .

Com as hipóteses da normalização de A segundo (3.10) e supondo que $A \neq I_2$, então o determinante de A determina unicamente a estrutura de grupo de Lie (veja, por exemplo, [30, Section 2.5]). Esse valor é o chamado *invariante D de Milnor* de $X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$:

$$D = (1 - a^2)(1 + b^2) = \det(A). \quad (3.12)$$

É importante observar que, quando $A \neq I_2$, então, embora o invariante D determine unicamente a estrutura de grupo, sempre existe uma família a um parâmetro de métricas não isométricas para a mesma estrutura de grupo de Lie. Essa família aparece naturalmente quando resolvemos a equação (3.12) para a em termos de b e um certo D fixado, e definimos $X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ com A descrita por (3.10).

Todo grupo não unimodular $X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ admite uma π -rotação sobre qualquer curva integral do campo $\partial_z = E_3$, com propriedades similares àquelas das π -rotações apresentadas na Proposição 3.11 para o caso unimodular. A demonstração da próxima proposição decorre diretamente do item 4 da Proposição 3.10.

Proposição 3.14. *Seja $X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ um produto semidireto não unimodular munido de sua métrica canônica. Então, o eixo $z \{0\} \rtimes_A \mathbb{R}$ é uma geodésica e é o conjunto de pontos fixos da isometria $\phi: X \rightarrow X$, $\phi(x, y, z) = (-x, -y, z)$, que é um isomorfismo de ordem dois que preserva a orientação. Em particular, dado qualquer ponto $p \in X$, o subgrupo das isometrias de X que preservam a orientação e fixam p contém o subgrupo $\{1_X, l_p \circ \phi \circ l_p^{-1}\} \cong \mathbb{Z}_2$.*

3.4 Propriedades de grupos de Lie métricos, simplesmente conexos, de dimensão três.

Nesta seção, X denotará um grupo de Lie métrico, simplesmente conexo, de dimensão três e $e \in X$ denota o seu elemento neutro. Denotamos por $I(X)$ o grupo de isometrias de X e, para $p \in X$, $I_p(X)$ será o grupo de isotropia de X em p , i.e., os elementos $\varphi \in I(X)$ tais que $\varphi(p) = p$. Ainda mais, definimos $I_p^+(X)$ como o grupo de

isometrias que preservam a orientação de X e que fixam p . A seguir, apresentaremos algumas propriedades de X que serão utilizadas mais adiante no texto. Começaremos com uma propriedade crucial de $I_e(X)$.

Proposição 3.15. *Seja X um grupo de Lie métrico, simplesmente conexo de dimensão três cuja dimensão do grupo de isometrias é 3 ou 4. Então, existe um vetor unitário $E \in T_e X$ e uma isometria $\phi \in I_e^+(X)$ de ordem dois tal que $d\phi_e(E) = E$. Mais ainda, E pode ser escolhido de modo que a diferencial em e de qualquer isometria $\phi \in I_e(X)$ leva E em $\pm E$.*

Demonstração. Se $I(X)$ tem dimensão quatro, então X é isométrico a um dos espaços $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, que pode ser descrito através de uma submersão Riemannianas $\Pi: \mathbb{E}(\kappa, \tau) \rightarrow \mathcal{Q}(\kappa)$ sobre uma superfície completa, simplesmente conexa $\mathcal{Q}(\kappa)$ de curvatura constante $\kappa \in \mathbb{R}$ e torção $\tau \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a proposição pode ser checada diretamente, onde E é escolhido como um dos dois vetores unitários de $T_e \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ tangentes à fibra $\Pi^{-1}(\{\Pi(e)\})$.

No restante da demonstração, assumiremos que a dimensão de $I(X)$ é três. Primeiramente, as Proposições 3.11 e 3.14 nos dão a existência de uma isometria ϕ e um vetor E como afirmado; ou E é um dos vetores da base $\{E_1, E_2, E_3\}$ que diagonaliza o tensor de Ricci, quando X é unimodular, ou $E = E_3$ é a direção do campo coordenado ∂_z , quando X é não unimodular e escrito como um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, munido de sua métrica canônica.

Para demonstrar a proposição, precisamos mostrar que qualquer outra isometria que fixa o elemento neutro e também satisfaz que sua diferencial ou deixa E invariante ou leva E em $-E$. Seja, portanto, $\phi \in I_e(X)$ uma isometria de X que fixa e . Como E foi escolhido como um autovetor do tensor de Ricci, temos que $d\phi_e(E)$ também será um autovetor do tensor de Ricci, associado ao mesmo autovalor. Agora, como a dimensão de $I(X)$ é igual a 3, (3.11) (no caso não unimodular) e (3.7) (no caso unimodular) nos dão que os três autovalores do tensor de Ricci são distintos, portanto, como $d\phi_e(E)$ é unitário, $d\phi_e(E) = E$ ou $d\phi_e(E) = -E$, conforme afirmado. \square

Observação 3.16. Note que se E é dado pela Proposição 3.15 e $\phi \in I_e(X)$, então o grupo a 1 parâmetro Γ gerado por E é invariante

pela ação de ϕ .

Seja Y uma variedade homogênea, simplesmente conexa de dimensão três. Dada uma superfície compacta Σ imersa em Y , denotamos por $\|H\|_\infty(\Sigma)$ o valor absoluto máximo da função curvatura média de Σ , $|H|: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Associado a Y , temos a seguinte constante não negativa, denominada a *curvatura média crítica* de Y :

$$H(Y) = \inf\{\|H\|_\infty(\Sigma) \mid \Sigma \text{ é uma superfície compacta imersa em } Y\}. \quad (3.13)$$

Em seguida, ilustraremos essa noção de curvatura média crítica com alguns exemplos. Em \mathbb{R}^3 , a curvatura média de qualquer esfera redonda de raio R é $\frac{1}{R} \searrow 0$, e portanto $H(\mathbb{R}^3) = 0$. No espaço hiperbólico de dimensão três \mathbb{H}^3 , a curvatura média de esferas geodésicas de raio R é $\coth(R)$, que converge por cima a 1 quando $R \rightarrow \infty$, portanto $H(\mathbb{H}^3) \leq 1$. Por outro lado, se Σ for uma superfície compacta imersa em \mathbb{H}^3 , podemos tomar um ponto base $p \in \mathbb{H}^3$ e considerar bolas geodésicas fechadas $B_{\mathbb{H}^3}(p, r)$ de raio $r > 0$ e centro p ; como Σ é compacta, existe um raio máximo $r_0 > 0$ tal que Σ intersecta $\partial B_{\mathbb{H}^3}(p, r)$ em um ponto $q \in \Sigma \cap \partial B_{\mathbb{H}^3}(p, r_0)$. O princípio do máximo aplicado a Σ e $\partial B_{\mathbb{H}^3}(p, r_0)$ em q dá que $H_\Sigma(q) \geq \coth(r_0) > 1$. Em particular, $\|H\|_\infty(\Sigma) > 1$, de onde segue que $H(\mathbb{H}^3) = 1$.

Lembrando que toda variedade homogênea simplesmente conexa de dimensão três Y ou é $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ou um grupo de Lie métrico (Teorema 3.2), vamos analisar a curvatura média crítica desses casos. Quando $Y = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, existem esferas mínimas imersas em Y , portanto $H(Y) = 0$. A existência de esferas mínimas também é conhecida quando Y é um grupo de Lie métrico não difeomorfo a \mathbb{R}^3 , i.e., quando Y é isométrico a $SU(2)$ munido de uma métrica invariante à esquerda, portanto nesse caso $H(Y)$ é novamente zero. De fato, Simon [55] demonstrou que para qualquer métrica Riemanniana em \mathbb{S}^3 , existe uma esfera mínima, mergulhada e de índice um nessa variedade.

Se X for um grupo de Lie não unimodular, após uma reescala da métrica de X , ele é isomorfo e isométrico a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ para uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ com $\text{tr}(A) = 2$; nesse caso, $H(X) \geq 1$ pelo princípio da comparação da curvatura média aplicado às folhas da folheação $\{\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{z\} \mid z \in \mathbb{R}\}$, que possuem curvatura média constante 1. No

Teorema 3.20 abaixo, vamos ver, entre outras propriedades, que nesse caso vale de fato a igualdade $H(X) = 1$.

Definição 3.17. Seja Y uma variedade Riemanniana completa de dimensão três e volume infinito. A *constante de Cheeger* de Y é definida como

$$\text{Ch}(Y) = \inf \left\{ \frac{\text{Área}(\partial\Omega)}{\text{Volume}(\Omega)} \mid \bar{\Omega} \subset Y \text{ compacto, } \partial\Omega \text{ suave} \right\}. \quad (3.14)$$

Exemplo 3.18 ($\text{Ch}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$). Vamos calcular a constante de Cheeger de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{S}^2 é a esfera de dimensão dois e curvatura constante 1. Considere os domínios $\Omega_n = \mathbb{S}^2 \times [0, n]$, para $n \in \mathbb{N}$. Como $\partial\Omega_n = (\mathbb{S}^2 \times \{0\}) \cup (\mathbb{S}^2 \times \{n\})$, temos que

$$\text{Volume}(\Omega_n) = n \frac{\text{Área}(\partial\Omega_n)}{2},$$

de onde obtemos que $\text{Ch}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = 0$.

Considere agora um produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ para alguma $A \in M_2(\mathbb{R})$. Um simples cálculo nos dá que o elemento de volume dV para a métrica canônica de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ é

$$dV = e^{-z \text{tr}(A)} dx \wedge dy \wedge dz, \quad (3.15)$$

de onde decorre que o volume de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ com sua métrica canônica é infinito, e portanto a Definição 3.17 se aplica. O objetivo do próximo resultado é calcular a constante de Cheeger para essa variedade Riemanniana; ele é um caso particular de um resultado mais geral de Peyerimhoff e Samiou [49], que demonstraram esse resultado para o caso do ambiente ser um grupo de Lie simplesmente conexo e solúvel³. Para uma prova do caso particular tratado abaixo, veja [30, Theorem 3.22].

Teorema 3.19. *Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ uma matriz com $\text{tr}(A) \geq 0$. Então*

$$\text{Ch}(\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}) = \text{tr}(A).$$

³Um grupo de Lie X é chamado de *solúvel* se existe uma série de subgrupos $\{e\} = X_0 \leq X_1 \leq \dots \leq X_k = X$ tais que X_{j-1} é normal em X_j e o quociente X_j/X_{j-1} for abeliano, para todo $j = 1, \dots, k$. Tomando $X_1 = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$ e $k = 2$, segue que todo produto semidireto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ é um grupo solúvel.

Conforme mostrado no próximo teorema por Meeks, Mira, Pérez e Ros [29], a curvatura média crítica de um grupo de Lie métrico simplesmente conexo de dimensão três pode ser obtida em termos da sua constante de Cheeger.

Teorema 3.20 ([29, Theorem 1.4]). *Seja X um grupo de Lie métrico, simplesmente conexo de dimensão três e com volume infinito. Então*

$$H(X) = \frac{1}{2} \text{Ch}(X).$$

Em particular, se $A \in M_2(\mathbb{R})$ for uma matriz com $\text{tr}(A) \geq 0$ e $X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, então

$$\text{Ch}(\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}) = \text{tr}(A) = 2H(\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}).$$

Observação 3.21. A estratégia da prova do Teorema 3.20 utilizada em [29] é a seguinte. Seja X como no enunciado do teorema e seja $V_n \subset X$ uma sequência de domínios isoperimétricos de X com volume tendendo ao infinito. Então, valem as seguintes propriedades para a sequência $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a curvatura média constante H_n de ∂V_n é maior que $\frac{1}{2} \text{Ch}(X)$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \frac{1}{2} \text{Ch}(X)$.
3. Os raios R_n de V_n satisfazem $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$.

Em particular, itens 1 e 2 nos dão que $H(X) \leq \frac{1}{2} \text{Ch}(X)$. Por outro lado, o item 3 implica que podemos assumir que qualquer superfície compacta Σ , imersa em X , está contida em V_n , para n suficientemente grande. Ainda mais, após uma translação de Σ , podemos assumir também que Σ intersecta ∂V_n . Portanto, se $\|H\|_\infty(\Sigma)$ for a curvatura média máxima de Σ , temos que o princípio da comparação da curvatura média aplicado em um ponto de $\Sigma \cap \partial V_n$ implica que $\|H\|_\infty \geq H_n > \frac{1}{2} \text{Ch}(X)$, onde a segunda desigualdade vale pelo item 1. Isso tem como consequência que $H(X) = \frac{1}{2} \text{Ch}(X)$ e, além disso, que *não existe uma superfície compacta de curvatura média constante $H(X)$ em X .*

3.5 O Teorema de Representação

Ao longo desta seção, X denotará um grupo de Lie métrico simplesmente conexo de dimensão três. O objetivo aqui será o de obter uma representação analítica para toda superfície simplesmente conexa imersa em X e com curvatura média constante H , para um H fixado. Essa representação depende da aplicação de Gauss invariante à esquerda da superfície e de invariantes de X que vêm de sua álgebra de Lie métrica. Tais invariantes serão codificados por funções $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, onde estamos pensando em $\overline{\mathbb{C}}$ como a projeção estereográfica da esfera unitária \mathbb{S}^2 de $T_e X$, pelo seu polo sul⁴ (veja as Definições 3.23 e 3.24 abaixo).

Definição 3.22. Dada uma superfície imersa e orientada $f: \Sigma \rightarrow X$ com campo normal unitário $N: \Sigma \rightarrow TX$ (onde TX é o fibrado tangente a X), definimos a *aplicação de Gauss invariante à esquerda* da superfície imersa como a aplicação $G: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset T_e X$ que associa a cada $p \in \Sigma$ o vetor unitário tangente a X no elemento neutro e dado por $(df_{f(p)})_e(G(p)) = N_p$. Observamos que a aplicação de Gauss invariante à esquerda de um subgrupo de dimensão dois de X é constante.

Após projetar estereograficamente a aplicação de Gauss invariante à esquerda G de uma H -superfície em X pelo polo sul da esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset T_e X$, a função resultante $g: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ satisfaz uma EDP elíptica conforme que pode ser expressa em termos do *H-potencial* do espaço X , o qual definimos a seguir:

Definição 3.23. Seja X um grupo de Lie métrico não unimodular. Reescale a métrica de X de modo que ele se torne isométrico e isomorfo a $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ com sua métrica canônica, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ é dada por (3.10) para certas constantes $a, b \geq 0$. Dado $H \in \mathbb{R}$, definimos o *H-potencial* de X como a aplicação $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$R(q) = H(1 + |q|^2)^2 - (1 - |q|^4) - a(q^2 - \bar{q}^2) - ib(2|q|^2 - a(q^2 + \bar{q}^2)), \quad (3.16)$$

onde \bar{q} denota o complexo conjugado a $q \in \overline{\mathbb{C}}$.

⁴Definimos o polo sul de \mathbb{S}^2 em termos da base canônica $\{E_1, E_2, E_3\}$ de X .

Definição 3.24. Seja X um grupo de Lie métrico unimodular com constantes estruturais c_1, c_2, c_3 definidas pela equação (3.4) e sejam $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ as constantes definidas em termos de c_1, c_2, c_3 em (3.5). Dado $H \in \mathbb{R}$, definimos o H -potencial de X como a aplicação $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$R(q) = H(1 + |q|^2)^2 - \frac{i}{2}(\mu_2|1 + q^2|^2 + \mu_1|1 - q^2|^2 + 4\mu_3|q|^2). \quad (3.17)$$

Note que $R(q)/|q|^4$ possui um limite finito quando $q \rightarrow \infty$ (em particular, $R(q)$ diverge quando $q \rightarrow \infty$). Diremos que o H -potencial R de X tem um zero em $q_0 = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ se $\lim_{q \rightarrow \infty} R(q)/|q|^4 = 0$.

Uma análise dos zeros do H -potencial R em (3.16) e em (3.17) nos dá o seguinte lema (observe que no caso não unimodular estamos assumindo a normalização $\text{tr}(A) = 2$ que, pelos Teoremas 3.19 e 3.20 implicam que $H(X) = 1$).

Lema 3.25. *Seja X um grupo de Lie métrico e seja $H \in \mathbb{R}$ dado. Então, o H -potencial de X é uma função que não possui zeros em $\overline{\mathbb{C}}$ se e somente se*

- (1) X é isomorfo a $\text{SU}(2)$, ou
- (2) X não é isomorfo a $\text{SU}(2)$, é unimodular e $H \neq 0$, ou
- (3) X é não unimodular com D -invariante $D \leq 1$ e $|H| > 1$, ou
- (4) X é não unimodular com D -invariante $D > 1$ e $|H| \neq 1$.

A seguir, utilizaremos o Lema 3.25 para provar o próximo resultado, que será utilizado no Capítulo 6 na demonstração do seu teorema principal.

Proposição 3.26. *Se existe uma H -superfície compacta Σ em X , então, o H -potencial de X não possui zeros em $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Se X for não unimodular, os planos horizontais $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{z_0\} \subset X = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ produzem uma folheação de X por folhas de curvatura média constante 1, observando que a matriz A é dada por (3.10). Aplicando o princípio do máximo para Σ e as folhas

desta folheação, obtemos que $|H| > 1$. Então, pelo Lema 3.25, o H -potencial de X não possui zeros nesse caso.

Suponha agora que X é unimodular. Se X for isomorfo a $SU(2)$, então a proposição vale pelo Lema 3.25. Assim, para terminarmos a demonstração, podemos assumir que X é difeomorfo a \mathbb{R}^3 . Nesse caso, o item 2 do Lema 3.25, nos diz que é suficiente provar que $H \neq 0$. Por absurdo, suponha que $\hat{\Sigma}$ é uma superfície mínima compacta em X , e vamos obter uma contradição com o princípio do máximo através do próximo argumento.

Após uma translação à esquerda, podemos assumir que $e \in \hat{\Sigma}$. Escolha $\varepsilon > 0$ tal que a exponencial de grupo de Lie \exp , quando restrita à bola $\mathbb{B}(\vec{0}, \varepsilon) \subset T_e X$ de raio ε centrada na origem $\vec{0} \in T_e X$, seja um difeomorfismo em $B = \exp(\mathbb{B}(\vec{0}, \varepsilon))$. Seja p um ponto em $(\hat{\Sigma} \cap B) - \{e\}$ e seja $\Gamma = \exp(\mathbb{R}v)$ o subgrupo a 1-parâmetro de X gerado pelo único $v \in \mathbb{B}(\vec{0}, \varepsilon) - \{\vec{0}\}$ tal que $\exp v = p$. Como o arco Γ é próprio e $\hat{\Sigma}$ é compacta, existe um valor máximo $t_0 \in [1, \infty)$ tal que $l_{\Gamma(t_0)}(\hat{\Sigma}) \cap \hat{\Sigma} \neq \emptyset$, onde $\Gamma(t) = \exp(tv)$, $t \in \mathbb{R}$. Aplicando o princípio do máximo para as superfícies mínimas $\hat{\Sigma}$ e $l_{\Gamma(t_0)}(\hat{\Sigma})$, obtemos que $\hat{\Sigma} = l_{\Gamma(t_0)}(\hat{\Sigma})$. Agora, aplicando novamente a translação à esquerda $l_{\Gamma(t_0)}$, temos que $\hat{\Sigma} = l_{\Gamma(2t_0)}(\hat{\Sigma})$, contradizendo a propriedade que definia t_0 . Essa contradição implica que $H \neq 0$, que termina a prova da Proposição 3.26. \square

Se $z = x + iy$ é uma variável complexa, denotamos suas derivadas parciais por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

No próximo teorema, chamado de Teorema da Representação, R denotará o H -potencial de um grupo de Lie métrico X , como dado pelas Definições 3.23 e 3.24. A variável complexa de R será denotada por $q = x + iy$ e suas derivadas serão denotadas por subíndices $R_q, R_{\bar{q}}$.

Teorema 3.27 (Meeks, Mira, Pérez e Ros, [28]). *Sejam Σ uma superfície de Riemann com parâmetro conforme z , X um grupo de Lie métrico, e $H \in \mathbb{R}$.*

Seja $g: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ uma solução da EDP elíptica complexa

$$g_{z\bar{z}} = \frac{R_q}{R}(g) g_z g_{\bar{z}} + \left(\frac{R_{\bar{q}}}{R} - \frac{\overline{R_q}}{R} \right) (g) |g_z|^2, \quad (3.18)$$

tal que $g_z \neq 0$ sempre⁵, e tal que o H -potencial R de X não se anula em $g(\Sigma)$ (por exemplo, isso ocorre se H satisfizer as condições do Lema 3.25). Então, existe uma H -superfície imersa $f: \Sigma \rightarrow X$, que é única a menos de translações à esquerda, cuja aplicação de Gauss é g .

Reciprocamente, se $g: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ for a aplicação de Gauss de uma H -superfície imersa $f: \Sigma \rightarrow X$ em um grupo de Lie métrico X , e o H -potencial R de X não se anula em $g(\Sigma)$, então g satisfaz a equação (3.18), e, além disso, $g_z \neq 0$ sempre.

Uma aplicação do Teorema 3.27 é o próximo corolário, que será utilizado no Capítulo 6. Este corolário é o Corolário 3.8 de [28], e sua prova, assim como a prova do Teorema 3.27, pode ser encontrada em [28].

Corolário 3.28. *Seja $f: \Sigma \rightarrow X$ uma H -superfície imersa em X com aplicação de Gauss $g: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Assuma que o H -potencial de X não se anula em $g(\Sigma)$. Então a diferencial de g tem posto no máximo 1 em toda Σ se e somente se f for invariante pelo fluxo de um campo de vetores invariante à direita em X . Além disso, se f for invariante pelo fluxo de um campo invariante à direita, então o posto da diferencial de g é 1 em todos os pontos de Σ e a imagem da aplicação de Gauss $g(\Sigma)$ é uma curva regular em $\overline{\mathbb{C}}$.*

Observação 3.29. *Seja X um grupo de Lie métrico, simplesmente conexo, unimodular e não isomorfo a $SU(2)$ e seja K um subgrupo de dimensão dois. Se a curvatura média constante H de K fosse diferente de zero, então o Lema 3.25, diz que o H -potencial de X nunca se anula. Em particular, a aplicação de Gauss invariante à esquerda g de K satisfaz $g_z \neq 0$, uma contradição com o fato que g é constante. Isso demonstra que todo subgrupo de dimensão dois de X é mínimo.*

⁵Observamos que $g_z \neq 0$ sempre significa que $g_z(z_0) \neq 0$ se $g(z_0) \in \mathbb{C}$ e que $\lim_{z \rightarrow z_0} (g_z/g^2)(z) \neq 0$ se $g(z_0) = \infty$.

Capítulo 4

As estimativas de raio e de curvatura de Meeks-Tinaglia.

Um problema clássico na teoria de superfícies é o de classificar H -superfícies simplesmente conexas mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Quando a superfície é simplesmente conexa e compacta, essa classificação segue ou pelo trabalho de Hopf [20] em 1951 ou de Alexandrov [4] em 1956, que apresentaram provas distintas de que a esfera redonda é a única possibilidade. Pelo próximo teorema, uma $(H > 0)$ -superfície completa e simplesmente conexa é compacta.

Teorema 4.1 (Meeks-Tinaglia [40]). *Uma $(H > 0)$ -superfície completa e simplesmente conexa em \mathbb{R}^3 é compacta, e portanto é uma esfera redonda.*

Os dois ingredientes principais na prova do Teorema 4.1 (Teorema 1.1 em [40]) são as estimativas de raio¹ dadas pelo Teorema 1.5 e as estimativas de curvatura do Teorema 1.4 da Introdução. Por conveniência, vamos re-enunciar tais resultados a seguir.

¹O *raio* de uma superfície Riemanniana compacta com bordo é a distância intrínseca máxima de pontos da superfície até o seu bordo.

Teorema 4.2 (Estimativas de Raio, Meeks-Tinaglia [40]). *Existe uma constante $\mathcal{R} \geq \pi$ tal que qualquer H -disco mergulhado em \mathbb{R}^3 com $H > 0$ tem raio menor do que \mathcal{R}/H .*

Teorema 4.3 (Estimativas de Curvatura, Meeks-Tinaglia [40]). *Dados $\delta, \mathcal{H} > 0$, existe uma constante $K(\delta, \mathcal{H}) \geq \sqrt{2}\mathcal{H}$ tal que qualquer H -disco Σ mergulhado em \mathbb{R}^3 com $H \geq \mathcal{H}$ satisfaz*

$$\sup_{\{p \in \Sigma \mid d_{\Sigma}(p, \partial\Sigma) \geq \delta\}} |A_{\Sigma}| \leq K(\delta, \mathcal{H}),$$

onde d_{Σ} é a função distância intrínseca de Σ .

Como cada ponto de uma H -superfície Σ em \mathbb{R}^3 de raio de injetividade positivo r_0 é o centro de um H -disco geodésico em Σ com raio r_0 , as estimativas de curvatura do Teorema 4.3 têm como consequência imediata o seguinte resultado.

Corolário 4.4. *Seja Σ uma $(H > 0)$ -superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 com raio de injetividade positivo r_0 . Então*

$$\sup_{\Sigma} |A_{\Sigma}| \leq K(r_0, H).$$

Pelo Corolário 4.4, $(H > 0)$ -superfícies mergulhadas em \mathbb{R}^3 com raio de injetividade positivo têm curvatura uniformemente limitada. Pelo trabalho do primeiro autor com Rosenberg [35, Theorem 2.1], segue que tais superfícies são próprias.

Corolário 4.5. *Uma $(H > 0)$ -superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 com raio de injetividade positivo é propriamente mergulhada.*

Observe que, pelo Lema do gráfico uniforme (Proposição 2.12), existe um $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $C > 0$, toda superfície imersa Σ em \mathbb{R}^3 com $\sup_{\Sigma} |A_{\Sigma}| < C$ possui raio de injetividade maior que ε/C . Então o Corolário 4.4 também demonstra que uma condição necessária e suficiente para que uma $(H > 0)$ -superfície em \mathbb{R}^3 tenha curvatura limitada é que ela tenha raio de injetividade positivo.

Corolário 4.6. *Uma $(H > 0)$ -superfície completa de \mathbb{R}^3 tem raio de injetividade positivo se e somente se tem curvatura limitada.*

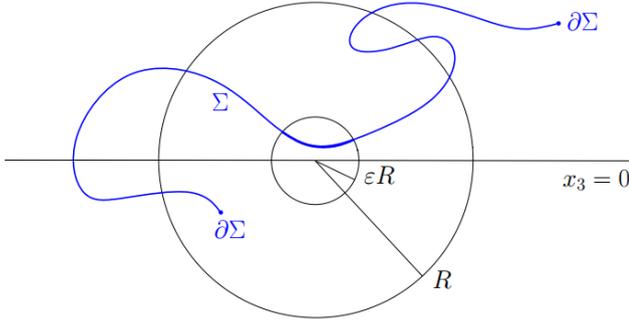


Figura 4.1: Σ como nas hipóteses do Teorema 4.7. Em $\mathbb{B}(\varepsilon R) \cap \{x_3 > 0\}$, Σ tem curvatura uniformemente limitada.

Lembre que o Teorema 4.2 segue do Teorema 4.3, conforme explicado na Introdução deste livro. Portanto é suficiente demonstrar as estimativas de curvatura do Teorema 4.3. Porém, a demonstração completa deste resultado foge do escopo desse livro, e referimos o leitor a [40].

Dois resultados chave utilizados na prova do Teorema 4.3 são as estimativas de curvatura de um lado e as estimativas fracas de arco de corda para H -superfícies mergulhadas dadas pelos próximos dois teoremas.

Teorema 4.7 (Estimativas de curvatura de um lado para H -discos [42]).

Existem $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ e $C \geq 2\sqrt{2}$ tais que para qualquer $R > 0$, vale o seguinte. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ um H -disco mergulhado em \mathbb{R}^3 tal que (veja a Figura 4.1) $\Sigma \cap \mathbb{B}(R) \cap \{x_3 = 0\} = \emptyset$ e $\partial\Sigma \cap \mathbb{B}(R) \cap \{x_3 > 0\} = \emptyset$. Então,

$$\sup_{x \in \Sigma \cap \mathbb{B}(\varepsilon R) \cap \{x_3 > 0\}} |A_\Sigma|(x) \leq \frac{C}{R}. \quad (4.1)$$

Em particular, se $\Sigma \cap \mathbb{B}(\varepsilon R) \cap \{x_3 > 0\} \neq \emptyset$, então $H \leq \frac{C}{R}$.

Teorema 4.7 generaliza o enunciado e os argumentos do caso $H = 0$ que foi tratado anteriormente por Colding e Minicozzi [8, Theorem 0.2].

Definição 4.8. Para um ponto p em uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, denotamos por $\Sigma(p, R)$ o fecho da componente conexa de $\Sigma \cap B_{\mathbb{R}^3}(p, R)$ contendo p .

O próximo teorema generaliza a Proposição 1.1 de [9] para o contexto de $H > 0$.

Teorema 4.9 (Estimativa fraca de arco de corda [37]). *Existe um $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ para o qual vale o seguinte. Dado um H -disco Σ mergulhado em \mathbb{R}^3 e uma bola fechada intrínseca $\overline{B}_\Sigma(x, R)$ contida em $\Sigma - \partial\Sigma$, temos que*

1. $\Sigma(x, \delta_1 R)$ é um disco com $\partial\Sigma(x, \delta_1 R) \subset \partial\mathbb{B}(\delta_1 R)$.
2. $\Sigma(x, \delta_1 R) \subset B_\Sigma(x, \frac{R}{2})$.

O Teorema 4.9 nos permite obter uma estimativa de curvatura de um lado para H -superfícies que generalizam o Teorema 4.7. No caso $H = 0$, essa estimativa intrínseca implica na estimativa de curvatura de um lado de Colding e Minicozzi em [9, Corollary 0.8].

Em [40], Meeks e Tinaglia também obtiveram estimativas de curvatura para $(H > 0)$ -anéis. Porém, embora essas estimativas de curvatura sejam análogas ao caso tratado no Teorema 4.3 para H -discos, elas necessariamente dependem do comprimento do vetor fluxo do gerador do primeiro grupo de homologia do anel dado, o qual definimos a seguir (veja, por exemplo [22, 23, 58] para uma discussão mais aprofundada desse invariante, incluindo a propriedade fundamental que ele é um invariante homológico).

Definição 4.10 (Fluxo CMC). Seja γ um 1-ciclo suave por partes em uma H -superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. O vetor fluxo de Σ ao longo de γ é

$$F(\gamma) = \int_\gamma (H\gamma + \eta) \times \gamma', \quad (4.2)$$

onde η é o vetor unitário normal a Σ e γ' é o vetor velocidade de γ .

Se Σ é um anel e γ é um gerador do seu grupo fundamental, utilizamos a notação:

$$F(\Sigma) = |F(\gamma)|.$$

Teorema 4.11 (Estimativas de curvatura para H -anéis, [40]). *Dados $\rho > 0$ e $\delta \in (0, 1)$, existe uma constante positiva $A_0(\rho, \delta)$ tal que se E for um 1-anel mergulhado em \mathbb{R}^3 com $F(E) \geq \rho$ ou com $F(E) = 0$, então*

$$\sup_{\{p \in E \mid d_E(p, \partial E) \geq \delta\}} \|A_E\| \leq A_0(\rho, \delta).$$

Uma consequência imediata destas estimativas de curvatura para anéis com curvatura média constante 1 é o próximo Teorema 4.12, que dá que $(H > 0)$ -superfícies de topologia finita completas e mergulhadas em \mathbb{R}^3 são próprias. No contexto de superfícies mínimas de topologia finita, completas e mergulhadas em \mathbb{R}^3 , esse resultado foi demonstrado por Colding e Minicozzi [9].

Teorema 4.12 ([40]). *Uma H -superfície de topologia finita, mergulhada em \mathbb{R}^3 com bordo (possivelmente vazio) compacto e suave possui curvatura limitada e é propriamente mergulhada.*

Os argumentos no caso do \mathbb{R}^3 também produzem ferramentas essenciais para o entendimento da geometria dos $(H > 0)$ -discos mergulhados em uma variedade Riemanniana de dimensão três M , especialmente no caso quando M é completa e localmente homogênea. Primeiramente, temos a seguinte generalização do Teorema 4.3.

Teorema 4.13 (Estimativas de curvatura, Meeks-Tinaglia [38]). *Seja Y uma variedade homogênea de dimensão três. Dados $\delta, \mathcal{H} > 0$, existe uma constante $K(\delta, \mathcal{H}, X) \geq \sqrt{2}\mathcal{H}$ tal que qualquer H -disco Σ mergulhado em Y com $H \geq \mathcal{H}$ satisfaz*

$$\sup_{\{p \in \Sigma \mid d_\Sigma(p, \partial \Sigma) \geq \delta\}} \|A_\Sigma\| \leq K(\delta, \mathcal{H}, X).$$

Para o contexto de um ambiente homogeneamente regular, Meeks e Tinaglia obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 4.14. *Uma $(H > 0)$ -superfície mergulhada em uma variedade homogeneamente regular de dimensão três tem raio de injetividade positivo se e somente se possuir norma da segunda forma fundamental limitada. Mais geralmente, dado $H_0 > 0$, então as estimativas de curvatura são uniformes para qualquer $H \geq H_0$, fixado o ambiente homogeneamente regular de dimensão três.*

Uma aplicação do Teorema 4.13, é a que segue.

Teorema 4.15 (Meeks-Tinaglia [39]). *Seja $H \geq 1$. Então, uma H -superfície de topologia finita mergulhada em uma variedade hiperbólica de dimensão três é própria.*

Conforme apresentado no próximo teorema, Teorema 4.15 é optimal quando a variedade hiperbólica é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 :

Teorema 4.16 (Coskunuzer-Meeks-Tinaglia [13]). *Para todo $H \in [0, 1)$, existe uma H -superfície completa, simplesmente conexa, estável, mergulhada em \mathbb{H}^3 que não é propriamente mergulhada.*

Teorema 4.17 (Coskunuzer-Meeks-Tinaglia [12]). *Para todo $H \in (0, 1/2)$, existe uma H -superfície completa, simplesmente conexa, estável, mergulhada em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que não é propriamente mergulhada.*

Veja também Coskunuzer [11] e Rodríguez e Tinaglia [51] para exemplos de superfícies mínimas completas, simplesmente conexas, mergulhadas mas não propriamente mergulhadas respectivamente em \mathbb{H}^3 e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Capítulo 5

A prova do Teorema 1.6: estimativas de área para H -superfícies fechadas em um toro flat de dimensão três.

Neste capítulo, apresentamos a prova do Teorema 1.6. Começaremos lembrando algumas propriedades geométricas de H -superfícies mergulhadas em variedades Riemannianas flat de dimensão três que necessitaremos nas seções mais adiante. Daremos referências de onde encontrar as demonstrações destes resultados para o leitor interessado.

Teorema 5.1 (Meeks-Tinaglia [36, Theorem 3.1]). *Seja N uma variedade Riemanniana flat, completa, conexa e de dimensão três com recobrimento universal $\Pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow N$ e seja Σ uma $(H > 0)$ -superfície completa, mergulhada em N . Então, os seguintes resultados valem:*

1. Se Σ tem raio de injetividade positivo, então a norma da segunda forma fundamental de Σ é limitada, Σ é propriamente mergulhada em N e é a fronteira orientada de um subdomínio G_Σ , suave, convexo em média e possivelmente desconexo. O domínio convexo em média G_Σ possui raio no máximo $1/H$, e $\Sigma = \partial G_\Sigma$ possui uma ε -vizinhança regular de um lado em G_Σ para algum $\varepsilon > 0$.
2. Se Σ tem topologia finita, então Σ tem raio de injetividade positivo. Além disso, cada fim anular E de Σ é levantado por Π para um anel $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^3$, onde \tilde{E} é assintótico ao fim de um ondulóide (uma superfície de revolução de Delaunay mergulhada).

Nas próximas seis seções, N denotará um toro flat de dimensão três. O Teorema 1.6 seguirá do Teorema 5.2 abaixo. Observe que assumimos que a H -superfície M do próximo teorema é *conexa*, enquanto a superfície tratada no Teorema 1.6 pode ser desconexa. De fato, o próximo teorema também é verdadeiro na situação mais geral onde M é permitida ser desconexa. Isso segue do fato que o número de componentes conexas de M pode ser limitado em termos do gênero e da geometria de N ; veja a Seção 5.5.

Teorema 5.2. *Seja N um toro flat de dimensão três. Dados $a, b \in (0, \infty)$, com $a \leq b$, e $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe uma constante $A(N, a, b, g)$ tal que se M é uma H -superfície fechada e conexa, mergulhada em N e de gênero g com $H \in [a, b]$, então*

$$\text{Área}(M) \leq A(N, a, b, g).$$

Demonstração. Por contradição, suponha que $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência de H_n -superfícies conexas, com $H_n \in [a, b]$, mergulhadas em N de gênero g e tais que

$$\text{Área}(M_n) > n.$$

Agora, a demonstração do Teorema 5.2 se divide em dois passos com a contradição final aparecendo no final da Seção 5.4.

Pelo item 1 do Teorema 5.1, cada M_n separa N em duas regiões, com uma delas, denotada por G_{M_n} , convexa em média.

Afirmção 5.3. *Os raios de injetividade $I(M_n)$ convergem a zero quando n tende ao infinito.*

Demonstração. Argumentando por contradição, suponha que exista certo $\delta > 0$ tal que, após passarmos a uma subsequência, $I(M_n) > \delta$ para todo n . Então, pelo Teorema 1.4, o conjunto das funções $\{|A_{M_n}|\}_n$ fica limitado por cima por uma constante independente de n . Como as superfícies M_n são H_n -superfícies com $H_n \geq a > 0$, então Teorema 2.16 nos dá a existência de constantes $\varepsilon, A_0 > 0$ tais que as superfícies M_n possuem uma ε -vizinhança regular de um lado $N_\varepsilon^+(M_n) \subset G_{M_n}$ e a área de cada M_n é no máximo $A_0 \cdot \text{Volume}(N_\varepsilon^+(M_n))$. Portanto,

$$\text{Área}(M_n) \leq A_0 \text{Volume}(N_\varepsilon^+(M_n)) \leq A_0 \text{Volume}(N),$$

contradizendo o fato que as áreas das superfícies M_n estão ficando arbitrariamente grande. \square

Por causa da Afirmção 5.3, introduzimos as seguintes definições.

Definição 5.4. Seja U um aberto de N .

1. Dizemos que uma sequência de superfícies $T_n \subset U$ possui *norma da segunda forma fundamental localmente limitada em U* se para cada bola compacta B em U , as normas da segunda forma fundamental das superfícies $T_n \cap B$ estão uniformemente limitadas.
2. Dizemos que uma sequência de superfícies $T_n \subset U$ possui *raio de injetividade localmente positivo em U* se para cada bola compacta B em U as funções raio de injetividade das superfícies T_n estão limitadas inferiormente em $T_n \cap U$ por uma constante positiva.

O nosso próximo objetivo é provar que, após escolhermos uma subsequência, existe um conjunto finito Δ de pontos em N tal que as superfícies M_n possuem norma da segunda forma fundamental localmente limitada em $N - \Delta$.

Suponha que as funções raio de injetividade I_n de M_n assumem seus valores mínimos em pontos $p_{1,n} \in M_n$. Pela Afirmção 5.3,

podemos assumir que $I_n(p_{1,n}) < 1/n$. Após escolhermos uma subsequência e fazermos uma reindexação, obtemos uma sequência $M_{1,n}$ tal que os pontos $p_{1,n} \in M_{1,n}$ convergem a um ponto $q_1 \in N$. Suponha que a sequência de superfícies $M_{1,n}$ não tenha raio de injetividade localmente positivo em $N - \{q_1\}$. Seja $q_2 \in N - \{q_1\}$ um ponto o mais longe de q_1 e que, após passarmos a uma subsequência $M_{2,n}$, exista uma sequência de pontos $p_{2,n} \in M_{2,n}$ convergindo a q_2 e com $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(p_{2,n}) = 0$.

Prosseguindo indutivamente e utilizando um processo diagonal, obtemos, após uma nova reindexação, uma nova subsequência M_n (denotada da mesma forma que a sequência original) e um conjunto enumerável (possivelmente finito) não vazio $\Delta' := \{q_1, q_2, q_3, \dots\} \subset N$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos um inteiro $N(k)$ tal que para $n \geq N(k)$, existem pontos $p(n, q_k) \in M_n \cap B_N(q_k, 1/n)$ onde $I_{M_n}(p(n, q_k)) < 1/n$. Seja Δ o fecho de Δ' em N . Decorre da construção de Δ que a sequência M_n possui raio de injetividade localmente positivo em $N - \Delta$.

Definimos Δ como o *conjunto singular de convergência* e $q \in \Delta$ um *ponto singular*. Note que, pelo Teorema 1.4, M_n possui raio de injetividade localmente positivo em $N - \Delta$ se e somente se M_n possuir norma da segunda forma fundamental localmente limitada em $N - \Delta$. Nas seções que se seguem, vamos trocar a sequência M_n por subsequências; uma propriedade chave que segue da nossa construção de M_n é que Δ continua sendo o conjunto singular de convergência para essa nova subsequência.

5.1 A geometria local em torno de pontos singulares.

Nesta seção vamos estudar a geometria de M_n em torno de pontos de Δ . Se $q \in \Delta$, então, por construção, após possivelmente substituir as superfícies M_n por uma subsequência, existe uma sequência de pontos $p_n \in M_n$ tal que $d_N(p_n, q) < 1/n$, onde d_N é a função distância em N , e ainda

$$\frac{1}{nI_n(p_n)} > n.$$

De fato, considere as funções contínuas $h_n : M_n \cap \overline{B}_N(p_n, 1/n) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h_n(x) = \frac{d_N(x, \partial B_N(p_n, 1/n))}{I_{M_n}(x)}.$$

Como h_n se anula em $M_n \cap \partial B_N(p_n, 1/n)$ então existe um ponto $p'_n \in M_n \cap B_N(p_n, 1/n)$ no qual h_n assume seu valor máximo. Tal ponto é chamado de um ponto com *raio de injetividade quase-mínimo*.

Seja $\sigma_n := d_N(p'_n, \partial B_N(p_n, 1/n))$. Então

$$\frac{\sigma_n}{I_{M_n}(p'_n)} = h_n(p'_n) \geq h_n(p_n) = \frac{1}{nI_{M_n}(p_n)} > n. \quad (5.1)$$

Seja M'_n a superfície compacta $M_n \cap \overline{B}_N(p'_n, \sigma_n/2)$. Observe que σ_n tende a zero quando n tende ao infinito e que, como M_n é compacta com curvatura média constante $H \leq b$, então, para n suficientemente grande, M'_n é uma superfície compacta com fronteira não vazia contida em $\partial B_N(p'_n, \sigma_n/2)$. Mais ainda, dado $q \in M'_n$ temos que

$$\frac{\sigma_n/2}{I_{M_n}(q)} \leq h_n(q) \leq h_n(p'_n) = \frac{\sigma_n}{I_{M_n}(p'_n)},$$

portanto

$$I_{M_n}(q) \geq \frac{I_{M_n}(p'_n)}{2}. \quad (5.2)$$

Seja I_0 o raio de injetividade de N . Considerando coordenadas exponenciais nas bolas de N , vamos identificar as bolas fechadas de N , $\overline{B}_N(p'_n, r)$, $r \leq I_0$, com a bola fechada $\mathbb{B}(r) = B_{\mathbb{R}^3}(\vec{0}, r) \subset \mathbb{R}^3$ de \mathbb{R}^3 com raio r e centrada na origem. Colocando $\lambda_n = \frac{1}{I_{M_n}(p'_n)}$, definimos

$$\widetilde{M}_n := \lambda_n M'_n \subset \mathbb{B}(\lambda_n \frac{\sigma_n}{2}) \subset \mathbb{R}^3, \quad \partial \widetilde{M}_n \subset \partial \mathbb{B}(\lambda_n \frac{\sigma_n}{2}).$$

Então temos que $I_{\widetilde{M}_n}(\vec{0}) = 1$. Como $H_n \leq b$, a curvatura média constante de \widetilde{M}_n tende a zero quando n vai para o infinito. Então, pela equação (5.1), decorre que $\lambda_n \frac{\sigma_n}{2}$ também tende ao infinito quando $n \rightarrow \infty$. Pela equação (5.2), a sequência de superfícies \widetilde{M}_n possui raio de injetividade localmente positivo em \mathbb{R}^3 ; de fato, dado um compacto B de \mathbb{R}^3 , temos que, para n suficientemente grande, para

qualquer $q \in \widetilde{M}_n \cap B$ nós temos $I_{\widetilde{M}_n}(q) \geq 1/2$. Porém, como a curvatura média constante de \widetilde{M}_n está tendendo a zero quando n vai a infinito, poderia ser falsa para \widetilde{M}_n a equivalência entre raio de injetividade localmente positivo e norma da segunda forma fundamental localmente limitada em \mathbb{R}^3 .

Agora, temos dois casos a considerar. Ou a sequência \widetilde{M}_n possui norma da segunda forma fundamental localmente limitada em \mathbb{R}^3 ou, após passarmos a uma subsequência, podemos assumir que existe um $r > 0$ e pontos $p_n \in \widetilde{M}_n$ todos com distância da origem menor que r e tais que $\|A_{\widetilde{M}_n}\|(p_n) > n$. Neste segundo caso, o Teorema 1.5 em [41] dá que, após passarmos novamente a uma subsequência, as superfícies \widetilde{M}_n vão convergir, em compactos de \mathbb{R}^3 , para uma *estrutura de edifício-garagem* mínima de \mathbb{R}^3 com duas colunas com orientações opostas, veja a Figura 5.1 e, por exemplo, [31] para uma descrição detalhada deste objeto.

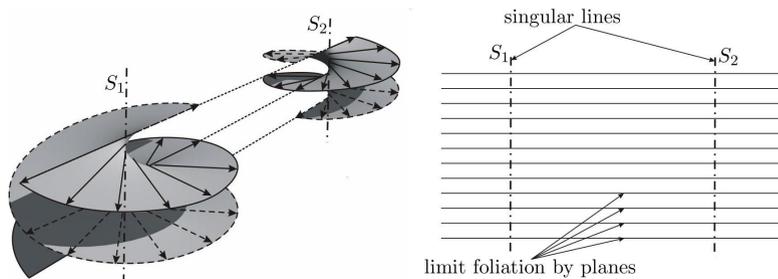


Figura 5.1: Estrutura de edifício-garagem: nessa figura, a sequência de superfícies a esquerda convergem suavemente, fora da união de duas retas horizontais $S_1 \cup S_2$ ortogonais a folheação por planos horizontais descrita na figura da direita.

Agora, se \widetilde{M}_n possui norma da segunda forma fundamental localmente limitada em \mathbb{R}^3 , então podemos aplicar o Teorema 1.3 de [41] e, após substituímos por uma subsequência, as superfícies \widetilde{M}_n convergem, com multiplicidade um ou dois em compactos de \mathbb{R}^3 , para uma superfície mínima \widetilde{M}_∞ , propriamente mergulhada em \mathbb{R}^3 , com a

convergência sendo no sentido que qualquer vizinhança normal suficientemente pequena de qualquer domínio compacto Ω da superfície limite deve intersectar \widetilde{M}_n em uma ou duas componentes que são gráficos normais sobre Ω para n suficientemente grande. Ainda mais, \widetilde{M}_∞ tem norma da segunda forma fundamental limitada, gênero no máximo g e o seu raio de injetividade na origem é um. A superfície \widetilde{M}_∞ ou possui gênero zero ou gênero positivo, limitado por g por hipótese.

Se \widetilde{M}_∞ tiver gênero zero e um fim, então \widetilde{M}_∞ seria ou um plano ou um helicóide, veja [34] e também [6]. Como $I_{\widetilde{M}_\infty}(\vec{0}) = 1$, essa possibilidade fica excluída, e portanto se o gênero de \widetilde{M}_∞ for zero, então ela deve ter mais de um fim e temos dois casos: ou \widetilde{M}_∞ é um catenóide (no caso de topologia finita [24]), ou \widetilde{M}_∞ é um exemplo mínimo de Riemann (no caso de topologia infinita [33]); veja a Figura 5.2 e, por exemplo [33] para uma descrição detalhada dessa família de exemplos mínimos de Riemann.



Figura 5.2: Um exemplo mínimo de Riemann.

Em resumo, no limite podemos obter um dos exemplos listados abaixo:

1. um catenóide ou um exemplo mínimo de Riemann;
2. uma estrutura de edifício-garagem com duas colunas com orientações opostas;

3. uma superfície mínima propriamente mergulhada com gênero positivo e no máximo g .

Proposição 5.5. *As superfícies \widetilde{M}_n convergem, com multiplicidade um ou dois em compactos de \mathbb{R}^3 , a um catenóide ou a uma superfície mínima propriamente mergulhada com gênero positivo no máximo g .*

Demonstração. De acordo com a nossa discussão prévia, para provar a proposição precisamos eliminar a ocorrência de um limite que seja um exemplo mínimo de Riemann ou uma estrutura de edifício-garagem mínima com duas colunas com orientações opostas. Primeiro, vamos eliminar o caso do exemplo mínimo de Riemann, e uma discussão análoga elimina a possibilidade da estrutura de edifício-garagem; esse argumento pode ser visto em [36, Remark 5.2].

Suponha que um exemplo mínimo de Riemann (denotado \mathcal{R}) surja como um limite da sequência \widetilde{M}_n . Após uma rotação, \mathcal{R} é um domínio planar¹ mínimo propriamente mergulhado em \mathbb{R}^3 de topologia infinita que é folheado por círculos e linhas em uma família de planos paralelos.

Dado $R > 0$, seja $\Omega(R) := \mathbb{B}(R) - \mathcal{R}$. Então, dado $m \in \mathbb{N}$, existe $R > 0$ tal que $\mathbb{B}(R) \cap \mathcal{R}$ possui ao menos $2m$ componentes conexas em seu bordo $\partial\mathbb{B}(R)$ e tal que o seguinte vale. No mínimo m destas componentes do bordo não limitam um disco de \mathcal{R} no interior de $\Omega(R)$ e cada par de curvas nessa subcoleção de componentes não limita um anel de \mathcal{R} com interior em $\Omega(R)$, veja a Figura 5.3.

Portanto, pela convergência das \widetilde{M}_n , uma situação geometricamente similar a descrita acima para \mathcal{R} vale para as superfícies \widetilde{M}_n para n suficientemente grande. A saber, seja $\widetilde{M}_n(R)$ a componente conexa de $\widetilde{M}_n \cap \mathbb{B}(R)$ contendo a origem. Então, dado $m \in \mathbb{N}$, existe um $R > 0$ tal que, para n suficientemente grande, $\partial\widetilde{M}_n(R)$ contem no mínimo m curvas simples e fechadas

$$\{\Gamma_1(n), \dots, \Gamma_m(n)\} \tag{5.3}$$

¹Um *domínio planar* é uma superfície conexa que pode ser mergulhada no plano. Equivalentemente, se define um domínio planar como uma superfície não compacta, conexa e com gênero zero. Os únicos domínios planares mínimos propriamente mergulhados em \mathbb{R}^3 são o plano, o catenóide, o helicóide ou a família a um parâmetro dos exemplos de Riemann, veja [33].



Figura 5.3: Duas curvas homotopicamente não triviais que não limitam um anel em \mathcal{R} .

e o seguinte vale.

- Cada $\Gamma_i(n)$, $i = 1, \dots, m$ não limita um disco em \mathcal{R} com interior contido em $\mathbb{B}(R) - \widetilde{M}_n(R)$.
- Cada par de curvas $\{\Gamma_i(n), \Gamma_j(n)\}$, $i \neq j$, não limita um anel em \mathcal{R} com interior contido em $\mathbb{B}(R) - \widetilde{M}_n(R)$.

Agora, considere $\{\gamma_1(n), \dots, \gamma_m(n)\}$ uma coleção de curvas em M_n correspondendo às curvas $\{\Gamma_1(n), \dots, \Gamma_m(n)\}$ em $\partial\widetilde{M}_n(R)$.

Afirmção 5.6. *Para n suficientemente grande, as curvas $\gamma_i(n)$, $i = 1, \dots, m$, não são homotopicamente triviais em M_n e cada par de curvas $\{\gamma_i(n), \gamma_j(n)\}$, $i \neq j$, não limita um anel em M_n .*

Demonstração. Lembre que a origem de \mathbb{R}^3 corresponde a pontos $p'_n \in M_n$ e denote por $B(\varepsilon)$ bolas de raio ε em N centradas em p'_n . Pelo item 1 do Teorema 5.1, M_n separa N em duas regiões fechadas, das quais uma delas, denotada por G_{M_n} , é convexa em média. Pela discussão anterior, existem números $\varepsilon_n > 0$ tais que para $i = 1, \dots, m$, $\gamma_i(n) \subset \partial B(\varepsilon_n)$, $\gamma_i(n)$ é homotopicamente não trivial em $\overline{B}(\varepsilon_n) \cap G_{M_n}$ e cada par de curvas $\{\gamma_i(n), \gamma_j(n)\}$, $i \neq j$, não limita um anel em $\overline{B}(\varepsilon_n) \cap G_{M_n}$. Ainda mais, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Suponha agora que $\gamma_i(n)$ é homotopicamente trivial em M_n , ou seja, que $\gamma_i(n)$ é a fronteira de um disco em M_n . Então, pelos resultados de [45], podemos resolver o problema de Plateau com fronteira $\gamma_i(n)$ em G_{M_n} para produzir um disco mergulhado $D_n \subset G_{M_n}$ de menor área e com fronteira $\partial D_n = \gamma_i(n) \subset \partial B(\varepsilon_n)$. Por construção, ∂D_n é homotopicamente não trivial em $B(\varepsilon_n) \cap G_{M_n}$, portanto D_n não pode estar contido em $B(\varepsilon_n) \cap G_{M_n}$. Isso nos dá que o disco D_n é levantado para um disco mínimo em \mathbb{R}^3 que não está contido em $\mathbb{B}(\varepsilon_n)$, mas com bordo contido em $\partial \mathbb{B}(\varepsilon_n)$. Isso é uma contradição com o princípio da envoltória convexa para superfícies mínimas, que demonstra que $\gamma_i(n)$ é homotopicamente não trivial em M_n .

Para terminar a demonstração, suponhamos que exista um par de curvas $\{\gamma_i(n), \gamma_j(n)\}$, com $i \neq j$, que limite um anel em M_n . Como as curvas γ_i são homotopicamente não triviais, podemos resolver o problema de Plateau em G_{M_n} (veja o Lema de Dehn para domínios planares em [44] e a sua versão adaptada para condições de fronteira mais gerais em [45]) na classe de homologia do anel limitado por $\{\gamma_i(n), \gamma_j(n)\}$, para encontrar um anel de área mínima $A_n \subset G_{M_n}$, mergulhado e com fronteira $\partial A_n = \gamma_i(n) \cup \gamma_j(n) \subset \partial B(\varepsilon_n)$.

Por construção, A_n não está contido em $B(\varepsilon_n) \cap G_{M_n}$. Seja $\mathbb{B}(z_k, \varepsilon_n)$ um levantamento de $B(\varepsilon_n)$ em \mathbb{R}^3 e observe que, se $k_1 \neq k_2$, então $d_{\mathbb{R}^3}(z_{k_1}, z_{k_2}) \geq I_0$. Mas como $\varepsilon_n < I_0$ e $\gamma_i(n), \gamma_j(n) \subset \partial B(\varepsilon_n)$, cada uma dessas curvas fechadas se levanta a uma curva fechada em $\partial \mathbb{B}(z_k, \varepsilon_n)$. Por um abuso de notação, denote tal levantamento de $\gamma_i(n)$ para \mathbb{R}^3 por $\gamma_i(n) \subset \mathbb{B}(z_1, \varepsilon_n)$.

Seja \tilde{A}_n o anel dado pelo levantamento de A_n tendo $\gamma_i(n)$ como uma de suas componentes de fronteira; note que \tilde{A}_n não está contido em $\mathbb{B}(z_1, \varepsilon_n)$. Suponha que a outra componente de fronteira de \tilde{A}_n está contida em uma certa $\mathbb{B}(z_k, \varepsilon_n)$, onde $z_k \neq z_1$. Se esse for o caso, a fronteira de \tilde{A}_n consiste de duas componentes $\gamma_i(n)$ e $\gamma_j(n)$ com $\gamma_i(n) \subset \mathbb{B}(z_1, \varepsilon_n)$, $\gamma_j(n) \subset \mathbb{B}(z_k, \varepsilon_n)$, $d_{\mathbb{R}^3}(z_1, z_k) \geq I_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Agora, podemos tomar n suficientemente grande para que possamos passar uma família de catenóides paralelos entre as bolas $\mathbb{B}(z_1, \varepsilon_n)$, $\mathbb{B}(z_k, \varepsilon_n)$. Como \tilde{A}_n é conexo, existiria um primeiro ponto de contato entre um dos catenóides dessa família e \tilde{A}_n , tal ponto sendo interior a ambas e violando o princípio do máximo. Esse argumento nos mostra que a outra componente da fronteira de

\tilde{A}_n deve também estar contida em $\mathbb{B}(z_1, \varepsilon_n)$. Nesse caso, o fato que \tilde{A}_n não está contida em $\mathbb{B}(z_1, \varepsilon_n)$ é novamente uma contradição com a propriedade da envoltória convexa para superfícies mínimas, e essa contradição completa a demonstração da afirmação. \square

Para finalizarmos a prova da proposição, é suficiente mostrar que se um exemplo mínimo de Riemann ocorre, então existem duas curvas $\gamma'_1(n)$ e $\gamma'_2(n)$ conforme descritas na Afirmação 5.6, limitando um anel em M_n . Isso será uma consequência do próximo lema.

Lema 5.7. *Seja Σ uma superfície fechada, possivelmente desconexa e de gênero positivo g . Seja Γ uma coleção de curvas simples fechadas em Σ que são homotopicamente não triviais e disjuntas duas a duas. Se a quantidade de curvas em Γ for maior do que $3g - 2$, então existe um par de curvas em Γ que limita um anel em Σ .*

Demonstração. Seja $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_g, \dots, \gamma_{g+k}\}$, $k > 2g - 2$, uma coleção de curvas fechadas, simples e duas a duas disjuntas em Σ , todas homotopicamente não triviais. Sem perda de generalidade, podemos assumir que todas as componentes conexas de Σ contém um elemento de Γ ; em particular, podemos assumir que nenhuma componente conexa de Σ tem a topologia de uma esfera. Se cada componente conexa de Σ tem gênero 1, ou seja, se for um toro de dimensão dois, então, como $g + k > g$, o número de curvas em Γ é maior do que o número de componentes conexas. Portanto, no mínimo uma dessas componentes irá conter dois elementos de Γ e o lema fica demonstrado nesse caso. Uma argumentação similar à feita anteriormente mostra que para demonstrar o lema, basta fazê-lo supondo que nenhuma das componentes conexas de Σ que contem apenas um elemento de Γ é um toro, pois, de outra forma, removemos uma componente conexa de Σ (diminuindo seu gênero em um) e um elemento da coleção.

Vamos denotar $\Sigma - [\bigcup_{i=1}^{g+k} \gamma_i] = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$, onde cada Σ_i é uma componente conexa de $\Sigma - [\bigcup_{i=1}^{g+k} \gamma_i]$. Pela definição de gênero, $\Sigma - [\bigcup_{i=1}^{g+k} \gamma_i]$ consiste de no mínimo $k + 1$ componentes conexas, portanto $n \geq k + 1$. Suponha agora que nenhuma dessas componentes é um anel. Então, para cada $i = 1, \dots, n$, $\chi(\Sigma_i) \leq -1$, onde χ denota

a função característica de Euler. Portanto

$$2 - 2g \leq \chi(\Sigma) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i\right) = \sum_{i=1}^n \chi(\Sigma_i) \leq -n.$$

Isso nos dá que $n \leq 2g - 2$, de onde segue que $g + k \leq g + n - 1 \leq 3g - 3$. Como a quantidade de curvas em Γ é $g + k$, que, por hipótese é maior que $3g - 2$, obtemos uma contradição que mostra que ao menos uma componente conexa de $\Sigma - [\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma]$ é um anel, e, pela nossa discussão anterior, a fronteira de tal anel é formada por dois elementos distintos de Γ , provando a afirmação. \square

Pelo Lema 5.7, se um exemplo mínimo de Riemann ocorrer, podemos tomar n suficientemente grande para que a quantidade de curvas na equação (5.3) seja maior que $3g - 2$. Agora, pela Afirmação 5.6 tais curvas são homotopicamente não triviais em M_n e portanto, usando o Lema 5.7, obtemos que no mínimo duas destas curvas limita um anel em M_n , contradizendo a Afirmação 5.6 e finalizando a demonstração da Proposição 5.5. \square

5.2 Propriedades globais geradas por pontos singulares

Seja Δ , conforme definido anteriormente, o conjunto singular de convergência da sequência M_n . Nesta seção, vamos estudar quais as implicações da presença de pontos em Δ na geometria global das superfícies M_n , em pontos próximos de um dado ponto em Δ .

Seja $q \in \Delta$ um ponto singular. Pelos resultados obtidos na Seção 5.1 (veja a discussão após a equação (5.2)) e após passarmos a uma subsequência, existe uma sequência de pontos $p'_n \in M_n$ convergindo a q e sequências de valores δ_n, ρ_n , ambas convergindo a zero, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{\delta_n} = \infty$, e tais que $\widetilde{M}_n = \frac{1}{\delta_n} [\mathbb{B}(\rho_n) \cap M_n]$ converge (com multiplicidade um ou dois) em compactos de \mathbb{R}^3 para ou um catenóide \mathcal{C} ou uma superfície mínima, propriamente mergulhada em \mathbb{R}^3 e com gênero positivo. Quando apenas a primeira situação descrita acima ocorre, dizemos que q é um *ponto singular do tipo catenoidal*. Observe que como o gênero de superfícies é aditivo e o gênero de M_n

está limitado por g independentemente de n , após passarmos a uma subsequência de M_n , o número de pontos singulares que não são do tipo catenoidal é no máximo g . No que segue da seção, vamos nos concentrar nos pontos singulares do tipo catenoidal e assumiremos que existem no máximo g pontos singulares em Δ que não são deste tipo.

Seja $q \in \Delta$ um ponto singular do tipo catenoidal e seja \mathcal{C} o catenóide limite relacionado a q , com respectivos pontos p'_n convergindo a q conforme descrito acima. Seja $l_{\mathcal{C}}$ a reta de \mathbb{R}^3 que forma o eixo de rotação sob o qual \mathcal{C} é invariante e seja $\Pi_{\mathcal{C}}$ o plano perpendicular a $l_{\mathcal{C}}$ que é um plano de simetria de \mathcal{C} . Seja ainda $\gamma_{\mathcal{C}}$ a geodésica fechada de \mathcal{C} que é dada pelo círculo formado pela intersecção $\Pi_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C}$ e seja $c_{\mathcal{C}}$ o centro de tal círculo. Podemos associar a $\gamma_{\mathcal{C}}$ uma sequência de curvas fechadas simples $\gamma_n(q) \subset M_n$ que correspondem a curvas em $\widetilde{M}_n \cap \Pi_{\mathcal{C}}$ convergindo a $\gamma_{\mathcal{C}}$ (se a multiplicidade de convergência for 2, fazemos uma escolha de um dos quase-círculos em $\widetilde{M}_n \cap \Pi_{\mathcal{C}}$ que geram o limite \mathcal{C}). Chamamos cada curva $\gamma_n(q)$ um *laço singular por* q e denotamos os pontos de N que correspondem a $c_{\mathcal{C}}$ por $c_n(q)$, e nos referimos a cada $c_n(q)$ como o *centro* de $\gamma_n(q)$.

Lembre que, dado um catenóide \mathcal{C} , o fluxo de $\gamma_{\mathcal{C}}$ é não nulo (use (4.2) com $H = 0$). Portanto, pela convergência das curvas $\gamma_n(q)$ temos que para n suficientemente grande esse fluxo também é não nulo. Como o fluxo é um invariante homológico, isso implica que cada $\gamma_n(q)$ é homotopicamente não trivial em M_n .

Suponha que $q_1, q_2 \in \Delta$ são dois pontos singulares catenoidais que são limites de sequências $p'_n(1), p'_n(2) \in M_n$, conforme descrito acima. Sejam $\gamma_n(q_1), \gamma_n(q_2)$ sequências de laços singulares em q_1 e q_2 . *Adicionalmente, suponha que $\gamma_n(q_1) \cup \gamma_n(q_2)$ é a fronteira de um anel $\widetilde{A}_n(q_1, q_2)$ em M_n .* Como os comprimentos de $\gamma_n(q_1)$ e $\gamma_n(q_2)$ estão convergindo a zero, esses laços singulares se levantam a curvas fechadas em \mathbb{R}^3 e o anel $\widetilde{A}_n(q_1, q_2)$ se levanta a um anel $A_n(q_1, q_2)$ em \mathbb{R}^3 .

Por um abuso de notação, denotamos a fronteira de $A_n(q_1, q_2)$ por $\gamma_n(q_1) \cup \gamma_n(q_2)$ e definimos $c_n(q_1)$ e $c_n(q_2)$ como os pontos de \mathbb{R}^3 correspondendo aos centros de $\gamma_n(q_1)$ e $\gamma_n(q_2)$, relativos aos levantamentos escolhidos. Seja $l_n(q_1, q_2)$ a reta contendo $c_n(q_1)$ e $c_n(q_2)$ e seja $C_n(q_1, q_2, R)$ o cilindro de raio R ao redor de $l_n(q_1, q_2)$. Por cons-

trução, para n suficientemente grande, $\gamma_n(q_1) \cup \gamma_n(q_2) \subset C_n(q_1, q_2, \delta_n)$ mas $A_n(q_1, q_2)$ não está contido em $C_n(q_1, q_2, \delta_n)$. Agora, o princípio de comparação da curvatura média nos mostra que $A_n(q_1, q_2)$ tampouco está contido em $C_n(q_1, q_2, \frac{1}{2H_n})$.

Seja z_n um ponto de $A_n(q_1, q_2)$ o mais distante da reta $l_n(q_1, q_2)$. Para simplificarmos a notação, após aplicarmos uma sequência de translações de \mathbb{R}^3 , vamos assumir que a origem $\vec{0} \in l_n(q_1, q_2)$ e que a projeção de z_n em $l_n(q_1, q_2)$ é a origem. Seja r_{z_n} o raio $\{s \frac{z_n}{|z_n|} \mid s > 0\}$ e, para $t \in (0, |z_n|]$, seja $\Pi(z_n)_t$ o plano perpendicular a r_{z_n} pelo ponto $t \frac{z_n}{|z_n|}$.

Observe que o vetor curvatura média em z_n é $-H_n \frac{z_n}{|z_n|}$. Novamente por um abuso de notação, considere $A_n(q_1, q_2)$ a componente conexa de $A_n(q_1, q_2) - \Pi(z_n)_{\delta_n}$ que contem z_n e seja \mathcal{H}_n o semi-espaço de \mathbb{R}^3 que contem z_n e possui como fronteira $\Pi(z_n)_{\delta_n}$. Como \mathcal{H}_n é simplesmente conexo e $\partial A_n(q_1, q_2)$ está contido em $\Pi(z_n)_{\delta_n}$, $A_n(q_1, q_2)$ separa \mathcal{H}_n em duas componentes conexas. Uma destas é limitada, e denotamos o seu fecho por G_{A_n} . Como o vetor curvatura média em z_n é $-H_n \frac{z_n}{|z_n|}$ e z_n é um ponto de $A_n(q_1, q_2)$ o mais longe possível de $\Pi(z_n)_{\delta_n}$, então G_{A_n} é convexo em média. Agora, de acordo com o Teorema 5.1 e a sua demonstração, a componente M'_n de $\Pi^{-1}(M_n)$ em \mathbb{R}^3 que contem $A_n(q_1, q_2)$ separa \mathbb{R}^3 em duas componentes conexas. Uma destas componentes é convexa em média e denotamos o seu fecho por $G_{M'_n}$. Seja $W_n = G_{A_n} \cap G_{M'_n}$. Observe que $z_n \in \partial W_n$ é um ponto de W_n com distância máxima de $\Pi(z_n)_{\delta_n}$.

Aplicando o princípio da reflexão de Alexandrov para a região compacta e convexa em média W_n via a família de planos $\Pi(z_n)_t$, obtemos que a componente conexa $A_n^+(q_1, q_2)$ de $A_n(q_1, q_2) - \Pi(z_n)_{\frac{\delta_n + |z_n|}{2}}$ que contem z_n é um gráfico sobre a sua projeção em $\Pi(z_n)_{\frac{\delta_n + |z_n|}{2}}$, e a imagem refletida $A_n^-(q_1, q_2)$ de $A_n^+(q_1, q_2)$ no plano $\Pi(z_n)_{\frac{\delta_n + |z_n|}{2}}$ intersecta M'_n apenas ao longo da fronteira de $A_n^+(q_1, q_2)$. Como os valores δ_n convergem a zero quando n tende ao infinito e $|z_n| \geq \frac{1}{2H_n} \geq \frac{1}{2b}$, então podemos assumir que

$$|z_n| - \frac{1}{6b} > \frac{\delta_n + |z_n|}{2}, \quad (5.4)$$

ou seja, que a distância de z_n até o plano $\Pi(z_n)_{\frac{\delta_n + |z_n|}{2}}$ é no mínimo

$\frac{1}{6b}$.

Seja $A_n^*(q_1, q_2)$ a componente conexa de $A_n^+(q_1, q_2) - \Pi(z_n)_{|z_n| - \frac{1}{12b}}$ contendo z_n . Por construção, um ponto de $A_n^*(q_1, q_2)$ é um ponto de $A_n^+(q_1, q_2)$ com distância no mínimo $\frac{1}{12b}$ da fronteira de $A_n^+(q_1, q_2)$. Portanto, aplicando as estimativas de curvatura uniformes de [53] para gráficos orientados com curvatura média constante (observando que gráficos são estáveis, com estimativas de curvatura longe da fronteira), temos que pontos de $A_n^*(q_1, q_2)$ satisfazem uma estimativa de curvatura uniforme.

Além disso, a mesma aplicação do princípio da reflexão de Alexandrov implica no seguinte. Seja $G(q_1, q_2)$ a região limitada de \mathbb{R}^3 contida entre $A_n^*(q_1, q_2)$ e a sua reflexão pelo plano $\Pi(z_n)_{|z_n| - \frac{1}{12b}}$. Então $G(q_1, q_2)$ está contida no interior de W_n e existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\text{Volume}(G(q_1, q_2)) > \varepsilon_1$, independentemente de n (para n suficientemente grande). Em particular, se $\tilde{G}(q_1, q_2)$ denota a imagem de $G(q_1, q_2)$ em N via a aplicação de recobrimento universal, então $\tilde{G}(q_1, q_2)$ está contido em G_{M_n} , que é o fecho da componente conexa convexa em média de $T - M_n$, e $\text{Volume}(\tilde{G}(q_1, q_2)) > \varepsilon_1$. Ainda mais, se $\tilde{G}(q_1, q_2)$ e $\tilde{G}(p_1, p_2)$ são regiões de N relacionadas a anéis distintos, então essas regiões são disjuntas.

5.3 Limitando o número de pontos singulares.

Nesta seção, vamos limitar o número de pontos de Δ . Como o número de pontos singulares que não são do tipo catenoidal é no máximo g , é suficiente obter uma limitação para o número de pontos singulares catenoidais.

Seja $\{q_1, \dots, q_m\} \in \Delta$ uma coleção de pontos singulares catenoidais. É importante ressaltar que no que segue o inteiro $n \in \mathbb{N}$ é escolhido grande o suficiente para que as estimativas das seções anteriores, tais quais aquelas que aparecem em (5.4), façam sentido em cada um dos pontos em $\{q_1, \dots, q_m\}$. Por definição, e de acordo com a argumentação das seções anteriores, a cada q_i corresponde uma sequência de laços singulares $\gamma_n(q_i)$ e cada um destes laços é homotopicamente não trivial. Portanto, aplicando a Afirmação 5.7, se

$m > k(3g - 2)$ obtemos no mínimo k anéis A_1, \dots, A_k com pares de laços singulares como fronteira. Observe que se $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ então a sua intersecção deve também ser um anel com um par de laços singulares como fronteira. Assim, após possivelmente substituírmos a coleção de anéis A_1, \dots, A_k , podemos assumir que tais anéis são dois a dois disjuntos.

Para $i = 1, \dots, k$, seja $\tilde{G}_i \subset G_{M_n}$ a região de N relacionada com A_i e obtida através do princípio da reflexão de Alexandrov, conforme descrito no último parágrafo da seção anterior. Lembrando da existência de $\varepsilon_1 > 0$, independente de n e i tal que $\text{Volume}(\tilde{G}_i) \geq \varepsilon_1$ e que $\tilde{G}_i \cap \tilde{G}_j = \emptyset$ se $i \neq j$, temos a seguinte desigualdade:

$$k\varepsilon_1 \leq \sum_{i=1}^k \text{Volume}(\tilde{G}_i) = \text{Volume}\left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{G}_i\right) \leq \text{Volume}(N).$$

Portanto

$$k \leq \frac{\text{Volume}(N)}{\varepsilon_1}$$

o que implica que

$$m \leq \frac{\text{Volume}(N)}{\varepsilon_1}(3g - 2).$$

Agora, também utilizando a cota superior g para o número de pontos singulares que não são catenoidais, a desigualdade anterior nos dá que o número de pontos singulares está limitado por

$$\frac{\text{Volume}(N)}{\varepsilon_1}(3g - 2) + g.$$

Observação 5.8. Observe que na prova que o número de pontos singulares é limitado não foi utilizado o fato de que a área das superfícies M_n está se tornando arbitrariamente grande.

5.4 A contradição final.

Nesta seção vamos provar que a área de M_n está uniformemente limitada por cima. Isso contradiz a suposição que $\text{Área}(M_n) > n$, o que por sua vez termina a demonstração do Teorema 5.2.

Seja $\Delta := \{q_1, \dots, q_m\}$ o conjunto de pontos singulares. Então os resultados demonstrados anteriormente nos dão que

$$m \leq \frac{\text{Volume}(N)}{\varepsilon_1} (3g - 2) + g.$$

Observe que, como cada M_n separa N e a norma da segunda forma fundamental de M_n está uniformemente limitada independentemente de n em compactos de $N - \Delta$, os argumentos na demonstração da Afirmação 5.3 se generalizam para mostrar o que segue. Se $p \in N - \Delta$ e $\varepsilon > 0$ são tais que $B_N(p, \varepsilon) \cap \Delta = \emptyset$, então existe uma constante $T(\varepsilon)$ tal que $\text{Área}(M_n \cap B_N(p, \frac{\varepsilon}{2})) < T(\varepsilon)$. O Teorema 2.13 e Observação 2.14 por sua vez dão que existe uma superfície M_∞ propriamente imersa em $N - \Delta$ e tal que, passando a uma subsequência, $M_n - \Delta$ converge a M_∞ em subconjuntos compactos de $N - \Delta$. A superfície M_∞ tem curvatura média constante H , para um certo $H \in [a, b]$. Como Δ é finito, existe um $r > 0$ tal que para qualquer $q \in \Delta$, $B_N(q, r) \cap \Delta = q$ e $B_N(q, \tau) \cap M_\infty \neq \emptyset$, para qualquer $\tau \in (0, r]$.

Afirmação 5.9. *A sequência $M_n - \Delta$ converge a M_∞ com multiplicidade um e M_∞ é fortemente mergulhada à Alexandrov em $N - \Delta$.*

Demonstração. Lembre que cada M_n separa N em duas regiões, uma delas, denotada por G_{M_n} , convexa em média. Dado $p \in M_\infty$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que a componente conexa de $B_N(p, \varepsilon) \cap M_\infty$ que contem p , a qual denotamos por $\Omega(p)$, é um gráfico sobre o plano tangente a M_∞ em p , $T_p M_\infty$, e é o limite de uma sequência de gráficos $U_n(p) \subset M_n$ sobre $T_p M_\infty$. Observe que $\Omega(p)$ possui um vetor curvatura média bem definido, que é obtido como o limite dos vetores curvatura média de $U_n(p)$. Se M_n contivesse mais que um gráfico sobre $T_p M_\infty$ convergindo a $\Omega(p)$, como M_n separa N , então os vetores curvatura média teriam orientações opostas em gráficos consecutivos em M_n , e o vetor curvatura média de $\Omega(p)$ não estaria bem definido. Isso prova que $M_n - \Delta$ converge a M_∞ com multiplicidade um.

Pelo argumento anterior e pelo fato que as superfícies $M_n - \Delta$ convergem a M_∞ com multiplicidade um, então as regiões abertas, conexas de $\text{Int}(G_{M_n}) - \Delta$ convergem a uma região aberta W em $N - \Delta$ com $\partial W = M_\infty$. Isso mostra que M_∞ é fortemente mergulhada à

Alexandrov em $N - \Delta$, o que termina a demonstração da afirmação. \square

Pela convergência com multiplicidade um, e como M_∞ é propriamente imersa em $N - \Delta$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $K(\varepsilon)$ tal que o limite das áreas de $(M_n \cap [N - \cup_{i=1}^m B_N(q_i, \varepsilon)])$ quando n vai ao infinito, que é igual a área de $(M_\infty \cap [N - \cup_{i=1}^m B_N(q_i, \varepsilon)])$, é menor que $K(\varepsilon)$.

Fixemos $\varepsilon > 0$ tal que $4e^{-\varepsilon b} \geq 2$, onde b é a cota superior para a curvatura média de M_n , $B_N(q_i, 2\varepsilon)$ é uma bola aberta em N e para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, m\}$ com $i \neq j$, vale $B_N(q_i, 2\varepsilon) \cap B_N(q_j, 2\varepsilon) = \emptyset$. Então, pelo argumento apresentado acima, para cada $i = 1, \dots, m$ e n suficientemente grande,

$$\text{Área} \left(M_n \cap \left[N - \bigcup_{i=1}^m B_N(q_i, \varepsilon) \right] \right) < K(\varepsilon) + 1.$$

Lembre que $H_n \leq b$. Pela fórmula da monotonicidade para H_n -superfícies, (veja, por exemplo [56]), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, 2\varepsilon))}{4\varepsilon^2} &\geq e^{-\varepsilon H_n} \frac{\text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon))}{\varepsilon^2} \\ &\geq e^{-\varepsilon b} \frac{\text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon))}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Isso nos dá que

$$\begin{aligned} \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, 2\varepsilon)) &\geq 4e^{-\varepsilon b} \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon)) \\ &\geq 2 \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Portanto, para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon)) &\leq \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, 2\varepsilon)) - \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon)) \\ &= \text{Área}(M_n \cap [B_N(q_i, 2\varepsilon) - B_N(q_i, \varepsilon)]) \\ &< K(\varepsilon) + 1. \end{aligned}$$

Finalmente, isso implica que para n grande,

$$\begin{aligned} \text{Área}(M_n) &= \text{Área}(M_n \cap [N - \bigcup_{i=1}^m B_N(q_i, \varepsilon)]) + \sum_{i=1}^m \text{Área}(M_n \cap B_N(q_i, \varepsilon)) \\ &< (m+1)(K(\varepsilon) + 1). \end{aligned}$$

Como ε está fixado independente de n , e m é no máximo

$$\frac{\text{Volume}(N)}{\varepsilon_1} (3g - 2) + g,$$

isso contradiz o fato que $\text{Área}(M_n) > n$. Tal contradição finaliza a demonstração do Teorema 5.2. \square

5.5 A demonstração do Teorema 1.6 da Introdução.

A seguir, explicaremos porque o Teorema 5.2 vale ao escolhermos uma outra constante $A'(N, a, b, g)$ quando M como no seu enunciado não é necessariamente conexa, conseqüentemente demonstrando o Teorema 1.6 da Introdução deste livro.

Se M é uma superfície desconexa de gênero g , observamos que o Teorema 5.2 se aplica para cada uma de suas componentes conexas, cada qual possuindo gênero menor ou igual a g . Sem perda de generalidade, podemos assumir que as constantes $A(N, a, b, g)$ dadas pelo Teorema 5.2 são crescentes como uma função do gênero g , e daí para encontrar uma constante $A'(N, a, b, g)$ acima, basta limitarmos uniformemente (em termos de a, b, g e N) a quantidade de componentes conexas de uma H -superfície M de gênero g .

Observe que o número de componentes conexas de gênero positivo de qualquer superfície M de gênero g é sempre menor ou igual a g ; portanto, para encontrarmos uma limitação uniforme do número de componentes conexas de M basta limitarmos uniformemente a quantidade de componentes esféricas (ou seja, de gênero zero), o que faremos a seguir.

Considere uma coleção de H -esferas mergulhadas em N , duas a duas disjuntas e com $H \in [a, b]$. Então essa família limita uma família

de bolas duas a duas disjuntas em N , cada qual com volume no mínimo $\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{b})^3$, e a soma destes volumes é limitada por $\text{Volume}(N)$. Em particular, o número de H -esferas duas a duas disjuntas com $H \in [a, b]$ fica limitado por uma constante $S(b)$.

Finalmente, se M é uma superfície possivelmente desconexa satisfazendo as hipóteses do Teorema 5.2, o número de componentes conexas de M é no máximo $S(b) + g$, de onde decorre que a área de M é no máximo

$$A'(N, a, b, g) = [S(b) + g] \cdot A(N, a, b, g),$$

o que prova o teorema.

Observação 5.10. Considere a superfície limita propriamente imersa M_∞ em N_Δ . Em [36] se mostra que o fecho $\overline{M}_\infty \subset N$ é uma superfície suave fortemente mergulhada à Alexandrov em N tal que os pontos em Δ estão contidos no conjunto de pontos onde a superfície não é mergulhada, e nesses pontos M_∞ possui densidade de área igual a 2. Como superfícies mínimas propriamente mergulhadas em \mathbb{R}^3 com gênero finito e positivo possuem densidade de área no infinito no mínimo 3, segue da fórmula da monotonicidade que pontos singulares de convergência em Δ com gênero positivo possuem densidade de área maior que 2. Portanto: *Todos os pontos de Δ são do tipo catenoidal.* Esses resultados estão resumidos no Teorema da Compacidade [36, Theorem 1.2]. Usando as estimativas de curvatura mais gerais dadas no Teorema 4.14, Meeks e Tinaglia demonstraram um resultado de compacidade similar para sequências de H_n -superfícies mergulhadas, conexas e fechadas de um dado gênero fixado em qualquer variedade Riemanniana fechada de dimensão três, quando as superfícies separam o espaço ambiente; esse resultado mais geral é ainda trabalho em desenvolvimento.

Capítulo 6

O problema de Hopf em variedades homogêneas de dimensão três.

Seja M uma variedade Riemanniana homogênea de dimensão três, seja X o seu recobrimento universal com a métrica de recobrimento, e seja $\text{Ch}(X)$ a constante de Cheeger de X , dada por (3.14). Denotaremos por **esfera** uma superfície fechada de gênero zero imersa em M e equipada com um campo normal unitário.

O objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema, que resolve completamente o problema da classificação de esferas de curvatura média constante em variedades homogêneas de dimensão três. Conforme discutido na Introdução, esse próximo resultado foi motivado por trabalhos prévios de Hopf [20], Abresch e Rosenberg [1, 2], Daniel e Mira [15] e Meeks [26].

Teorema 6.1 (Meeks-Mira-Pérez-Ros). *Quaisquer duas esferas em M com a mesma curvatura média constante, em valor absoluto, diferem, como conjuntos, por uma isometria de M . Além disso:*

- (1) *Se X não for difeomorfo a \mathbb{R}^3 , então para cada $H \in \mathbb{R}$, existe uma esfera de curvatura média constante H em M .*

- (2) Se X for difeomorfo a \mathbb{R}^3 , então os valores $H \in \mathbb{R}$ para os quais existe uma esfera de curvatura média constante H em M são precisamente aqueles que $|H| > \text{Ch}(X)/2$.
- (3) Seja S uma H -esfera em M e seja \tilde{S} um levantamento de S em X . Então:
- (a) Se X é o produto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^2(\kappa)$ é uma esfera de curvatura constante $\kappa > 0$, e $H = 0$, então
 - i. S é totalmente geodésica, estável e possui nulidade 1 para o seu operador de Jacobi.
 - ii. S representa um elemento não trivial no segundo grupo de homologia de M .
 - (b) Caso contrário, S possui índice 1 e nulidade 3 para o seu operador de Jacobi e a imersão de S em M se estende como a fronteira de uma imersão isométrica $F: B \rightarrow M$ de uma bola Riemanniana B de dimensão três, que é convexa em média.
 - (c) Existe um ponto $p_S \in M$ tal que toda isometria de M que deixa p_S invariante, também deixa M invariante.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2, essa prova se divide em dois casos, dependendo se X é isométrico a um grupo de Lie métrico ou a um produto $\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$.

Caso 1 X é isométrico a um grupo de Lie métrico.

Demonstração do Caso 1. Nesse caso quando X é isométrico a um grupo de Lie métrico, podemos fazer uma escolha da métrica neste grupo de Lie ao qual X é isométrico.

Definição 6.2. Definimos $\mathcal{M}(X)$ como o espaço, *a menos de translações à esquerda*, de H -esferas imersas em X de índice 1. Por abuso de notação, na demonstração do Teorema 6.1 vamos nos referir a *elementos* de $\mathcal{M}(X)$ como H -esferas em vez de tratá-los por suas classes de equivalência.

Passo 1. *Existe alguma $\Sigma \in \mathcal{M}(X)$ que é mergulhada. Além disso, Σ é a fronteira de uma bola convexa em média B_Σ em X , e a curvatura média constante de Σ pode ser escolhida arbitrariamente grande.*

Demonstração. Um fato bem conhecido é que para ε suficientemente pequeno, a solução do problema isoperimétrico em X que limita um volume de $4\pi\varepsilon^3/3$ é uma bola *quase redonda* limitada por uma esfera convexa em média Σ de curvatura média constante H , com $H \in (1/2\varepsilon, 2/\varepsilon)$. Mais ainda, tal esfera Σ é fracamente estável, e portanto tem índice 1, portanto $\Sigma \in \mathcal{M}(X)$. \square

Passo 2. Σ possui nulidade igual a 3.

Demonstração. Seja F um campo invariante à direita não nulo em X ; afirmamos que F não é sempre tangente a Σ . De fato, se F fosse sempre tangente a Σ , teríamos que Σ estaria admitindo um campo de vetores tangente que não se anula em nenhum ponto, o que não é possível devido ao teorema do índice de Hopf. Seja η um campo unitário orientando Σ . Então, como F é de Killing, a função $\langle F, \eta \rangle$ é uma função de Jacobi para Σ que não é identicamente nula devido ao fato observado acima que F não pode ser sempre tangente a Σ . Isso nos dá que a aplicação linear do espaço tridimensional de campos invariantes à direita no espaço das funções de Jacobi em Σ é injetora, o que prova que a nulidade de Σ é no mínimo três. Porém, o Teorema 3.4 de Cheng [7] implica que a dimensão do núcleo de qualquer operador do tipo Schrodinger em uma esfera Riemanniana de dimensão dois de índice 1 não pode ser maior que 3, e isso prova o Passo 2. \square

Passo 3. $\mathcal{M}(X)$ é uma variedade analítica de dimensão 1 localmente parametrizada pelos valores da curvatura média de seus elementos.

Demonstração. Essa demonstração é uma aplicação padrão do Teorema da Função Implícita; a ideia aqui é usar que a nulidade do operador de Jacobi de Σ é igual a 3 e é gerada por movimentos do ambiente. Para maiores detalhes, veja a demonstração do Passo 3 de [28, Theorem 4.1]. \square

Passo 4. A aplicação de Gauss invariante à esquerda de qualquer H -esfera de índice 1 em X é um difeomorfismo que preserva a orientação.

Demonstração. Seja S_H uma H -esfera de índice 1 em X , a qual vamos considerar como uma imersão conforme $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow X$, onde $\overline{\mathbb{C}}$ é a esfera de Riemann. Seja $g: S_H \equiv \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ a projeção estereográfica da aplicação de Gauss invariante à esquerda de Σ . Observe que a Proposição 3.26 nos dá que o H -potencial R para X não se anula.

Primeiramente, vamos provar que g é um difeomorfismo. Pela teoria de espaços de recobrimento, basta demonstrar que g é um difeomorfismo local. Agora, por contradição, vamos assumir que tal condição falha em um ponto $z_0 \in S_H$, portanto dg_{z_0} não é sobrejetora. Pelo Teorema 3.27, temos que g não é antiholomorfa¹ em nenhum ponto, então $dg_{z_0} \neq 0$. Isso nos dá a existência de um sistema de coordenadas conformes $z = x + iy$ em uma vizinhança de z_0 tal que $g_x(z_0) = 0$ e $g_y(z_0) \neq 0$. Podemos assumir, a menos de uma reparametrização conforme de S_H , que $z_0 = 0$.

Considere a EDO de segunda ordem dada por especificando (3.18) para funções que dependem unicamente da variável real y , i.e.,

$$\hat{g}_{yy} = \frac{R_q}{R} (\hat{g})(\hat{g}_y)^2 + \left(\frac{R_{\bar{q}}}{R} - \frac{\overline{R_q}}{R} \right) (\hat{g}) |\hat{g}_y|^2. \quad (6.1)$$

Seja $\hat{g} = \hat{g}(y)$ a (única) solução de (6.1) com condições iniciais $\hat{g}(0) = g(0)$, $\hat{g}_y(0) = g_y(0)$. Pelo Teorema 3.27, existe uma H -superfície \hat{f} conformalmente imersa em X com aplicação de Gauss invariante à esquerda \hat{g} , e tal que $f(0) = \hat{f}(0)$. Pelo Corolário 3.28, \hat{f} é invariante pelo fluxo de um campo de Killing invariante à direita F em X . Em particular, a função $\hat{u} = \langle \hat{N}, F \rangle$ é identicamente nula, onde \hat{N} é o vetor unitário normal a \hat{f} .

Agora, observe que as aplicações de Gauss invariantes à esquerda g, \hat{g} de f, \hat{f} satisfazem $g(0) = \hat{g}(0)$ e $g_z(0) = \hat{g}_z(0)$, $g_{\bar{z}}(0) = \hat{g}_{\bar{z}}(0)$. Além disso, pelo Teorema 3.27 pode ser visto que a primeira e segunda formas fundamentais de uma H -superfície conformalmente imersa em X em um dado ponto qualquer ficam determinadas pelos valores de \tilde{g} , \tilde{g}_z e $\tilde{g}_{\bar{z}}$ nesse ponto, onde \tilde{g} é a aplicação de Gauss invariante à esquerda da superfície em questão. Portanto, segue que f, \hat{f} possuem um contato de no mínimo segunda ordem em $z = 0$. Denotando $u =$

¹Dizemos que uma função complexa g é antiholomorfa em um ponto quando ela preserva ângulos absolutos mas reverte a orientação. Isso é equivalente a $g_z = 0$.

$\langle N, F \rangle: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$, concluímos que $u(0) = \widehat{u}(0) = 0$ e $u_z(0) = \widehat{u}_z(0) = 0$, mas u não é identicamente zero em $\overline{\mathbb{C}} \equiv S_H$ (pois não existem campos tangentes que não se anulam em uma esfera de dimensão dois).

Note que, como u é uma solução da EDP elíptica $Lu = 0$, um argumento clássico devido a Bers (veja, por exemplo, Teorema 2.5 em Cheng [7]) demonstra que a condição $u(0) = u_z(0) = 0$ implica que o conjunto nodal $u^{-1}(0)$ de u em torno de 0 consiste em $n \geq 2$ arcos analíticos que se intersectam transversalmente em 0. Isso é uma contradição com [7, Corollary 3.5], que diz que na nossa situação em que a esfera S_H possui índice 1, então $u^{-1}(0)$ é necessariamente uma curva simples e analítica em S_H . Essa contradição completa a demonstração que a aplicação de Gauss invariante à esquerda de S_H é um difeomorfismo.

Como já foi observado, o Teorema 3.27 implica que a aplicação g não é antiholomorfa em nenhum ponto. Porém, uma consequência simples do teorema do índice de Hopf aplicado a campos de linhas na esfera é que todo difeomorfismo F da esfera de Riemann nela mesmo é que existe algum ponto onde F ou é holomorfo (quando F preserva a orientação) ou antiholomorfo (quando F inverte a orientação). Isso nos mostra que o difeomorfismo g preserva a orientação, o que completa a demonstração do Passo 4. \square

Passo 5. *Seja $H \in \mathbb{R}$ dado e sejam S_1, S_2 duas H -esferas tais que a aplicação de Gauss de S_1 é um difeomorfismo. Então S_2 é uma translação à esquerda de S_1 . Em particular, se S é uma H -esfera em X com índice 1, então ela é a única H -esfera em X a menos de translações à esquerda.*

Demonstração. Seja $f_1: S_1 \rightarrow X$ uma H -esfera imersa cuja aplicação de Gauss invariante à esquerda $g_1: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é um difeomorfismo da esfera de Riemann nela mesma. Seja $L: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação definida implicitamente em termos de g_1 e do H -potencial R de X (que não se anula, devido a Proposição 3.26) por

$$L(g_1(z)) = -\frac{\overline{g_{1z}}}{R(g_1(z))g_{1z}}.$$

Dada uma H -superfície $f: \Sigma \rightarrow X$ conformalmente imersa em X com aplicação de Gauss invariante à esquerda g , defina a diferencial quadrática complexa

$$Q_H(dz)^2 = \left(L(g)g_z^2 + \frac{1}{R(g)}g_z\bar{g}_z \right) (dz)^2.$$

Pela equação da aplicação de Gauss invariante à esquerda (3.18) e pelo fato que g_1 é um difeomorfismo, pode-se provar (veja o Passo 2 de [28, Theorem 4.1] e também Daniel-Mira [15]) que:

- (1) Se Q_H não é identicamente nula para f , então os zeros de Q_H são isolados e de índice negativo (veja, por exemplo Alencar, do Carmo e Tribuzy [3] ou Jost [21]).
- (2) $Q_H \equiv 0$ para f se, e somente se, f for, a menos de translações à esquerda, um subdomínio aberto de S_1 .

Os itens acima demonstram o Passo 5 como explicaremos a seguir. Seja $f_2: S_2 \rightarrow X$ uma outra H -esfera imersa em X e seja Q_H a diferencial quadrática relacionada a f_2 . Como a característica de Euler de S_2 é zero, o item 1 não pode ocorrer, portanto $Q_H \equiv 0$ para f_2 , e o item 2 implica que S_2 é uma translação à esquerda de S_1 , como afirmado. \square

Passo 6 (Estimativas de curvatura). *Dado qualquer $H_1 > 0$, existe uma constante $C = C(H_1)$ tal que para qualquer $H \in \mathbb{R}$ com $|H| \leq H_1$ e para qualquer H -esfera Σ de índice 1, a norma da segunda forma fundamental de Σ está uniformemente limitada por C .*

Demonstração. Essa prova é por contradição, portanto fixamos $H_1 > 0$ e assumimos que existe uma sequência de esferas $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de índice 1, com cada Σ_n tendo curvatura média constante $H_n \in [-H_1, H_1]$, e admitindo pontos $p_n \in \Sigma_n$ tais que a norma da segunda forma fundamental de Σ_n em p_n é $\lambda_n = \|A_{\Sigma_n}\|(p_n) \geq n$. Como cada Σ_n é compacta, nós assumimos que $\lambda_n = \sup_{\Sigma_n} \|A_{\Sigma_n}\|$ e, após uma translação à esquerda, que $e = p_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Agora, definimos $X_n = \lambda_n X$ como a variedade homogênea dada pela reescala da métrica de X por λ_n . Se denotarmos a reescala de Σ_n por $S_n = \lambda_n \Sigma_n$, temos que S_n é uma (H_n/λ_n) -esfera imersa em X_n de índice 1, e a norma da segunda forma fundamental de cada S_n é tal que

$$\|A_{S_n}\| \leq 1, \quad \|A_{S_n}\|(e) = 1.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, X_n converge para o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 com sua métrica plana, e um argumento padrão (veja o Teorema 2.13 e Observação 2.14) implica que, a menos de subsequência, vizinhanças de um tamanho fixo das superfícies S_n contendo e convergem a uma superfície mínima S em \mathbb{R}^3 , passando pela origem $\vec{0}$, e cuja norma da segunda forma fundamental satisfaz $\|A_S\| \leq 1$, $\|A_S\|(\vec{0}) = 1$. Como a estrutura de grupo de X_n também converge para a estrutura de grupo abeliana de \mathbb{R}^3 , as respectivas aplicações de Gauss invariante à esquerda $G_n: S_n \rightarrow \mathbb{S}^2$, definidas pelas estruturas de grupo de X_n , convergem para a aplicação de Gauss $G: S \rightarrow \mathbb{S}^2$ da superfície limite S (uma explicação detalhada dessa convergência pode ser encontrada na prova do Passo 4 do Teorema 4.1 em [28]). Agora, observe que S possui curvatura Gaussiana estritamente negativa em $\vec{0}$, pois S é uma superfície mínima não plana de \mathbb{R}^3 . Isso implica que G reverte a orientação de uma vizinhança de S contendo $\vec{0}$. Porém, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que G_n é um difeomorfismo que preserva a orientação, conforme demonstrado no Passo 4, uma contradição que demonstra o Passo 6. \square

Passo 7 (Estimativas de área).

- (A) *Se X for isomorfo a $SU(2)$, então as áreas das esferas em $\mathcal{M}(X)$ estão uniformemente limitadas.*
- (B) *Se X não for isomorfo a $SU(2)$, então para qualquer $\delta > 0$ as áreas de H -esferas em $\mathcal{M}(X)$ com $|H| \in [\text{Ch}(X)/2 + \delta, \infty)$ estão uniformemente limitadas. Além disso, não existem H -esferas em X com $|H| = \text{Ch}(X)/2$.*

Observamos que a última afirmação do item (B) do Passo 7 segue pela Observação 3.21. Porém, as outras propriedades necessitam uma demonstração bastante técnica, cujos passos principais apresentaremos separadamente no Capítulo 7.

Passo 8. *Cada componente conexa \mathcal{C} de $\mathcal{M}(X)$ fica parametrizada pela curvatura média dos elementos de \mathcal{C} , por um intervalo $I_{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}$. Além disso, $I_{\mathcal{C}} = \mathbb{R}$ se X for isomorfo a $SU(2)$; caso contrário, temos que $I_{\mathcal{C}}$ ou é $(H(X), \infty)$ ou $(-\infty, -H(X))$.*

Demonstração. Seja \mathcal{C} uma componente conexa de $\mathcal{M}(X)$. Pelo Passo 3, \mathcal{C} fica parametrizada por um intervalo aberto $I_{\mathcal{C}}$, o qual podemos assumir, sem perda de generalidade, que contem algum valor real positivo. Primeiro, vamos mostrar que $I_{\mathcal{C}}$ não admite uma cota superior mostrando que se o supremo $\widehat{H} = \sup I_{\mathcal{C}}$ fosse finito, então $\widehat{H} \in I_{\mathcal{C}}$, o que contradiz o fato que $I_{\mathcal{C}}$ é aberto.

Considere uma sequência $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H_n -esferas em \mathcal{C} com $H_n \nearrow \widehat{H}$. As estimativas de área do Passo 7 e as estimativas de curvatura do Passo 6 implicam que, a menos de passar a subsequência, S_n converge (suavemente como imersões) para uma \widehat{H} -esfera imersa S .

A seguir, vamos mostrar que S tem índice 1, e portanto $S \in \mathcal{C}$ e $\widehat{H} \in I_{\mathcal{C}}$, como afirmado. Observe que a mesma prova do Passo 2 implica que S não pode ser estável, portanto o índice de S é no mínimo 1. Porém, a existência de duas autofunções distintas associado a dois autovalores negativos distintos (note que o primeiro autoespaço é sempre de dimensão um) para o operador de Jacobi de S implica que, para n suficientemente grande, S_n possui dois autovalores negativos distintos para o seu operador de Jacobi, o que é uma contradição. Portanto, $I_{\mathcal{C}}$ é ilimitado superiormente.

Para terminarmos a demonstração do Passo 8, seja H' o ínfimo de $I_{\mathcal{C}}$ e, por absurdo, suponha que $H' > -\infty$, no caso quando X é isomorfo a $SU(2)$, e que $H' > \text{Ch}(X)/2$ na outra situação. Considere uma sequência $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H_n -esferas em \mathcal{C} com $H_n \searrow H'$. Nossa suposição sobre H' implica que as estimativas de área do Passo 7 e as estimativas de curvatura do Passo 6 se aplicam para a sequência $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, e, pelos mesmos argumentos utilizados acima, segue que a menos de passarmos a uma subsequência, S_n converge suavemente para uma H' -esfera em \mathcal{C} ; portanto $H' \in I_{\mathcal{C}}$, novamente contradizendo o fato que $I_{\mathcal{C}}$ é aberto. \square

Passo 9. *Toda H -esfera de X está em $\mathcal{M}(X)$. Além disso:*

1. *Se X é isomorfo a $SU(2)$, então $\mathcal{M}(X)$ é conexo e $I_{\mathcal{M}(X)} = \mathbb{R}$.*
2. *Se X não for isomorfo a $SU(2)$, então $\mathcal{M}(X)$ possui exatamente duas componentes conexas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, com $I_{\mathcal{C}_1} = (H(X), \infty)$ e $I_{\mathcal{C}_2} = (-\infty, -H(X))$.*

Em particular, itens (1) e (2) do Teorema 6.1 valem e a afirmação

principal do Teorema 6.1 vale no caso quando M é simplesmente conexo.

Demonstração. Observe que o Passo 1 nos dá que $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$. Seja Σ uma H -esfera em X . Primeiramente, vamos mostrar que Σ tem índice 1, e portanto $\Sigma \in \mathcal{M}(X)$. Se X for isomorfo a $SU(2)$, então Passo 8 nos diz que existe uma H -esfera S em X de índice 1. Por sua vez, o Passo 5 garante que Σ e S diferem por uma translação à esquerda de X , então $\Sigma \in \mathcal{M}(X)$, como afirmamos. O caso de quando X não é isomorfo a $SU(2)$ segue analogamente, observando que qualquer H -esfera em X necessariamente satisfaz $|H| > H(X)$ (veja a Observação 3.21).

Para demonstrar os itens remanescentes desse passo, primeiramente nós assumimos que X é isomorfo a $SU(2)$ e demonstramos que $\mathcal{M}(X)$ é conexo. Sejam, portanto, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ duas componentes conexas de $\mathcal{M}(X)$, cada qual parametrizada pela curvatura média de seus elementos $I_{\mathcal{C}_1} = \mathbb{R} = I_{\mathcal{C}_2}$. Em particular, para um $H \in \mathbb{R}$ fixado, existem H -esferas $S_1 \in \mathcal{C}_1, S_2 \in \mathcal{C}_2$. Como mostrado pelo Passo 5, segue que S_1 e S_2 representam o mesmo elemento de $\mathcal{M}(X)$, portanto as componentes \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 têm intersecção não vazia, e daí segue que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. O segundo caso a ser tratado fica demonstrado por um argumento análogo, demonstrando o Passo 9. \square

Nesse ponto da demonstração do Caso 1 quando X é um grupo de Lie métrico e simplesmente conexo, faz sentido escolhermos um representante canônico para cada classe de equivalência em $\mathcal{M}(X)$. O Passo 4 implica que cada H -esfera S admite um único ponto q_S no qual o normal unitário a Σ é igual a E_3 . Após transladarmos tal S à esquerda por q_S^{-1} , obtemos uma nova esfera Σ_H tal que o ponto q_{Σ_H} é a identidade de X ; note que Σ_H e S representam o mesmo elemento em $\mathcal{M}(X)$ e que Σ_H fica unicamente determinada por H . Seja $\widehat{\mathcal{M}}(X)$ essa família a 1 parâmetro de esferas definidas dessa maneira. Passo 9 implica que qualquer H -esfera em X é uma translação à esquerda do único elemento Σ_H em $\widehat{\mathcal{M}}(X)$ com curvatura média constante H .

Passo 10. *Cada H -esfera em $\widehat{\mathcal{M}}(X)$ é a fronteira de uma bola Riemanniana de dimensão três $F_H: B_H \rightarrow X$ isometricamente imersa em X , onde B_H é convexa em média. Em particular, H -esferas são mergulhadas à Alexandrov. Além disso, a família de imersões F_H*

varia suavemente com respeito a H , para H em qualquer intervalo que não contenha 0 como um ponto interior.

Demonstração. Primeiro, apresentaremos a demonstração no caso quando X é isomorfo a $SU(2)$.

Simon [55] provou que para qualquer métrica Riemanniana em S^3 existe uma esfera mínima mergulhada. Em particular, a 0-esfera $\Sigma_0 \in \widehat{\mathcal{M}}(X)$ é mergulhada e limita duas bolas convexas em média em X . Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $H \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $H \neq 0$, a esfera $\Sigma_H \in \widehat{\mathcal{M}}(X)$ também é mergulhada e limita uma única bola convexa em média B_H em X . Em particular, para $H \in [0, \varepsilon]$, a família de imersões $F_H: B_H \rightarrow X$ pode ser definida pelas aplicações de inclusão.

Seja Λ o conjunto de todos os valores não negativos $t \geq 0$ tais que existe uma família de bolas imersas $\{F_H: B_H \rightarrow X\}_{H \in [0, t]}$, convexas em média, que estende suavemente $\{F_H\}_{H \in [0, \varepsilon]}$ e com as restrições das imersões $F_H|_{\partial B_H}: \partial B_H \rightarrow X$ correspondendo às H -esferas $\Sigma_H \in \widehat{\mathcal{M}}(X)$.

Observe que Λ é um subconjunto aberto de $[0, \infty)$. Para ver isso, escolha $t_0 \in \Lambda$ e $t > t_0$. A família de esferas imersas $\{\Sigma_H\}_{H \in [0, t]} \subset \widehat{\mathcal{M}}(X)$ varia suavemente com H e estende $\{\Sigma_H\}_{H \in [0, t_0]}$. Agora, como $F_{t_0}: B_{t_0} \rightarrow X$ é uma bola imersa cuja fronteira possui curvatura média constante positiva, para um $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, podemos deformar a imersão F_{t_0} suavemente a uma imersão $F_t: B_t \rightarrow X$ com a fronteira desejada Σ_t .

Considere agora $b > \varepsilon$ tal que $[0, b) \subset \Lambda$. A seguir, vamos demonstrar que $b \in \Lambda$, e portanto $\Lambda = [0, \infty)$, o que prova o Passo 10 no caso quando X é isomorfo a $SU(2)$. Considere $\Sigma_b \in \widehat{\mathcal{M}}(X)$ e, para $H \in [\varepsilon, b)$, seja η_H o campo unitário normal apontando para fora com respeito à imersão F_H . Após escolhermos um $\delta > 0$ pequeno, podemos assumir que a aplicação exponencial normal de Σ_H ,

$$\begin{aligned} N_H: \quad \partial B_H \times [-\delta, \delta] &\rightarrow X \\ (p, t) &\mapsto \exp_{F_H(p)}(t\eta_H), \end{aligned}$$

é uma submersão, para todo $H \in [\varepsilon, b]$. Agora, considere as bolas

$$\widehat{B}_H = [B_H \cup (\partial B_H \times [0, \delta])] / \equiv,$$

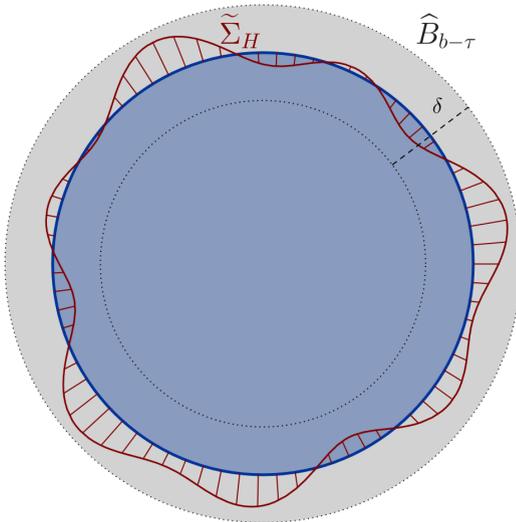
onde \equiv é a relação de equivalência

$$p \in \partial B_H \equiv (p, 0) \in (\partial B_H \times [0, \delta]).$$

Defina também aplicações $\widehat{F}_H: \widehat{B}_H \rightarrow X$ por

$$\widehat{F}_H(x) = \begin{cases} F_H(x), & \text{se } x \in B_H \\ N_H(p, t), & \text{se } x = (p, t) \in \partial B_H \times [0, \delta]. \end{cases}$$

Como imersões, as esferas Σ_H convergem a Σ_b quando $H \nearrow b$, portanto existe um $\tau > 0$ tal que, para $H \in [b - \tau, b]$, todas as esferas Σ_H são gráficos normais em torno de Σ_b . Após possivelmente escolhermos um valor menor para τ , podemos também assumir que para quaisquer dois $H_1, H_2 \in [b - \tau, b]$, as esferas Σ_{H_1} e Σ_{H_2} são gráficos normais uma sobre a outra, e com as funções que definem tais gráficos tendo norma C^1 menor que δ . Com essa escolha de τ , decorre que podemos levantar as esferas imersas Σ_H , $H \in [b - \tau, b]$, para uma família suave de H -esferas $\widetilde{\Sigma}_H \subset \widehat{B}_{b-\tau}$, que são todas gráficos sobre $\widetilde{\Sigma}_{b-\tau} = \partial B_{b-\tau} \subset \widehat{B}_{b-\tau}$, veja a figura abaixo.



$B_{b-\tau} \subset \widehat{B}_{b-\tau}$ é a região mais escura acima, com $\partial B_{b-\tau} = \widetilde{\Sigma}_{b-\tau}$. Cada $\widetilde{\Sigma}_H$, para $H \in [b - \tau, b]$, é um gráfico normal sobre $\widetilde{\Sigma}_{b-\tau}$, limitando uma bola $\widetilde{B}_H \subset \widehat{B}_{b-\tau}$.

Como $\partial B_{b-\tau} \times [-\delta, \delta]$ nos dá um sistema de coordenadas de $\widehat{B}_{b-\tau}$ em torno de $\widetilde{\Sigma}_{b-\tau} = \partial B_{b-\tau}$, segue que cada $\widetilde{\Sigma}_H$ é mergulhada em $\widehat{B}_{b-\tau}$, e portanto é a fronteira de uma bola $\widetilde{B}_H \subset \widehat{B}_{b-\tau}$.

Agora, como $B_{b-\tau} = \widetilde{B}_{b-\tau}$ e $\widehat{F}_{b-\tau}|_{\widetilde{B}_{b-\tau}} = F_{b-\tau}$, podemos definir

$$\widetilde{F}_H = \begin{cases} F_H, & \text{if } H \in [0, b - \tau], \\ \widehat{F}_{b-\tau}|_{\widetilde{B}_H}, & \text{if } H \in [b - \tau, b], \end{cases}$$

e temos que a família $\{\widetilde{F}_H\}_{H \in [0, b]}$ estende $\{F_H\}_{H \in [0, \varepsilon]}$ continuamente. Mais ainda, como os valores de fronteira das imersões \widetilde{F}_H estão variando de maneira suave, segue que toda a família $\{\widetilde{F}_H\}_{H \in [0, b]}$ varia suavemente com respeito a H , mostrando que $b \in \Lambda$ e demonstrando o Passo 10 quando X é isomorfo a $SU(2)$.

Para demonstrar o caso quando X não é isomorfo a $SU(2)$, após uma mudança de orientação basta mostrar a afirmação para $H > H(X)$. Agora, pelo Passo 1, existe um $H_0 > H(X)$ e um mergulho isométrico $F_{H_0} : B_{H_0} \rightarrow X$ de uma bola Riemanniana que é convexa em média. A seguir, podemos aplicar os mesmos argumentos de deformação do caso anterior para estender F_{H_0} para uma família de imersões isométricas $\{F_H\}_{H \in (H(X), \infty)}$, completando a demonstração deste passo. \square

Lema 6.3. *Dada uma H -esfera Σ em X , existe um único ponto $p_\Sigma \in X$ tal que toda isometria de X que deixa p_Σ fixo deixa Σ invariante. O ponto p_Σ é o chamado **centro de simetria** de Σ . Além disso, se duas esferas da mesma curvatura média constante possuem o mesmo centro de simetria, elas coincidem.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar o lema no caso quando X tem curvatura constante. No caso quando X tem curvatura constante *não positiva*, se Σ é uma H -esfera, então Σ é a fronteira de uma única bola geodésica em X . Nesse caso, podemos tomar p_Σ como o centro de tal bola. Quando X é topologicamente \mathbb{S}^3 , com uma métrica de curvatura constante positiva, então Σ é a fronteira de duas bolas geodésicas B_1, B_2 , que se intersectam exatamente em Σ . Se $H \neq 0$, então exatamente uma entre B_1, B_2 é convexa em média, e podemos tomar p_Σ como o centro desta bola. Finalmente, se Σ é uma esfera mínima em \mathbb{S}^3 com o seu campo normal unitário

apontando para dentro de B_1 (uma das duas bolas geodésicas limitadas por Σ) então escolhermos p_Σ como o centro de B_1 . Em todos os casos mencionados acima, observando que uma esfera é uma imersão de \mathbb{S}^2 em X juntamente com um campo normal, é direta a verificação que o ponto p_Σ satisfaz as condições do Lema 6.3.

A seguir, assumimos que X não tem curvatura constante, e portanto o grupo de isometrias de X tem dimensão 3 ou 4. Seja e a identidade de X . Considere a isometria $\varphi: X \rightarrow X$ e o vetor unitário $E \in T_e X$ dados pela Proposição 3.15, i.e., φ é uma isometria de ordem dois que preserva a orientação tal que $\varphi(e) = e$ e $d\varphi_e(E) = E$ e ainda vale que $d\phi_e(E) = \pm E$ para qualquer $\phi \in I_e(X)$.

Seja Σ uma H -esfera em X . Como a aplicação de Gauss de Σ é um difeomorfismo, conforme dado pelos Passos 9 e 4, podemos assumir, após uma translação à esquerda, que $e \in \Sigma$ e que a aplicação de Gauss de Σ em e é E . Decorre, então, que Σ é invariante por φ . Seja agora $F_H: B_H \rightarrow X$ a imersão dada pelo Passo 10, onde no caso mínimo $H = 0$ escolhemos B_0 de modo que o campo normal de $\Sigma = \partial B_0$, aponta para dentro (veja a demonstração do Passo 10 no caso mínimo, onde é feita essa escolha para B_0). Considere $\tilde{\varphi}: \partial B_H \rightarrow \partial B_H$ como o levantamento induzido por $\varphi|_\Sigma$ para ∂B_H . Como B_H é simplesmente conexa e localmente homogênea, então um argumento de monodromia prova que $\tilde{\varphi}$ se estende para uma isometria (denotada da mesma forma) $\tilde{\varphi}: B_H \rightarrow B_H$ e tal que $F_H \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ F_H$.

Agora, pela teoria de Smith [57], o conjunto de pontos fixos de $\tilde{\varphi}$ é um arco γ com extremidades $p, q \in \partial B_H$; além disso, como uma isometria ambiente deixa γ fixo, então esse arco é uma geodésica. Podemos assumir, após uma mudança de notação, que $F_H(p) = e$ e definir $x = F_H(q) \in \Sigma$. A imagem de γ por F_H está contida no subgrupo a um parâmetro Γ de X gerado por E (veja a Observação 3.16). Como e é fixo e $d\varphi_e(E) = E$, segue que a aplicação de Gauss de Σ em x é $-E$. Isso mostra que x fica definido como o único ponto de Σ cuja imagem da aplicação de Gauss é $-E$. Finalmente, definimos p_Σ como o ponto médio do arco determinado por e e x em Γ .

Agora, seja ϕ uma isometria de X que fixa p_Σ . Novamente, a Proposição 3.15 nos dá que $d\phi_{p_\Sigma}(E) = \pm E$, e portanto ϕ leva Γ em si mesma, e decorre que ou $\phi(e) = e$ e $\phi(x) = x$ ou $\phi(e) = x$ e $\phi(x) = e$; em ambos os casos decorre de argumentos similares aos utilizados na demonstração do Passo 9 que ϕ deixa Σ invariante,

provando a primeira afirmação do Lema 6.3.

A seguir, vamos provar que se S_1, S_2 são duas esferas com o mesmo centro de simetria p e a mesma curvatura média constante não nula, então $S_1 = S_2$ como conjuntos e, além disso, os seus campos normais unitários coincidem. Os Passos 9 e 5 nos dão que existe $y \in X$ tal que S_2 é a translação à esquerda de S_1 por y , e a aplicação de Gauss invariante à esquerda de S_2 é a composição da aplicação de Gauss de S_1 com $(l_y)^*$, a derivada translação l_y . Seja agora \tilde{p} o centro de simetria de $l_y(S_1)$, então, por definição de centro de simetria, temos que $\tilde{p} = p$. Agora, como translações à esquerda de S_1 preservam o centro de simetria, $p = l_y(p)$, $y = e$ e $S_1 = S_2$, com a mesma aplicação de Gauss. Isso demonstra o lema no caso quando a curvatura média de S_1 é diferente de zero. A demonstração no caso quando S_1 e S_2 são esferas mínimas é similar, apenas observando que nesse caso necessariamente temos que X é isomorfo a $SU(2)$ e os centros de simetria de S_1 e S_2 estão na mesma bola mergulhada $B_0 \subset X$, para o qual os campos normais unitários de S_1 e S_2 estão apontando. \square

Observação 6.4. No caso quando X é isomorfo a $SU(2)$, então toda esfera mínima (e só existe uma a menos de translações à esquerda, pelo Passo 9) é invariante pela translação à esquerda por $-I \in SU(2)$. Para ver isso, observe que como $-I$ está no centro de $SU(2)$, basta demonstrar que a esfera mínima S em $\widehat{\mathcal{M}}(X)$ é invariante por l_{-I} . Sejam B_0, B'_0 as duas bolas limitadas por S , onde B_0 é a bola para a qual o campo unitário normal a S aponta. Nesse caso, o campo invariante à esquerda definido por E utilizado na demonstração do Lema 6.3 pode ser tomado como o campo E_3 , onde E_1, E_2, E_3 forma a base unimodular de X . Note que E_3 é gerado pela ação a direita do subgrupo “circular” a um parâmetro Γ_3 de $SU(2)$, onde Γ_3 é uma curva integral de E_3 , além de ser uma geodésica. Seja $p_S \in \Gamma_3 \subset B_0$ o centro de simetria de S e seja $p'_S \in \Gamma_3 \subset B'_0$ o centro de simetria de S com o campo normal unitário oposto; denotamos por S' essa esfera com o campo normal oposto. Como p_S e p'_S são pontos médios dos dois arcos geodésicos $\Gamma_3 \cap B_0, \Gamma_3 \cap B'_0$, respectivamente, então no grupo abeliano Γ_3 , onde utilizamos $+$ para a operação de grupo, temos que

$$p_S + p'_S = -I$$

é o elemento $-I$ de ordem dois em Γ_3 . Então, após fazermos translações à esquerda de ambos os lados da equação acima por $-I$, obtemos que

$$-Ip_S - Ip'_S = (-I)^2 = e.$$

Portanto, considerando que $e \in \Gamma_3$ é o elemento identidade 0, temos que $-I(p_S) = p'_S$. Como os centros de simetria das esferas $l_{-I}(S)$ e S' são ambos iguais a p'_S , segue do Lema 6.3 que $l_{-I}(S) = S'$. Isso demonstra que, como conjuntos, $S = l_{-I}(S)$, demonstrando que S é invariante pela isometria l_{-I} .

A seguir, aplicaremos o Lema 6.3 para demonstrar a afirmação principal do Teorema 6.1 no Caso 1 de X ser isométrico a um grupo de Lie métrico. Seja M uma variedade homogênea de dimensão três, com recobrimento universal $\pi: X \rightarrow M$, onde X não é difeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, e sejam Σ_1, Σ_2 duas esferas imersas em M com a mesma curvatura média constante H , que, após uma mudança de orientação, vamos considerar sendo não negativa.

Sejam $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2$ os respectivos levantamentos de Σ_1, Σ_2 para X com respectivos centros de simetria $p_1 = p_{\Sigma_1}, p_2 = p_{\Sigma_2}$ determinados pelo Lema 6.3. Sejam ainda q_1, q_2 as projeções de p_1, p_2 em M e seja $\varphi: M \rightarrow M$ uma isometria de M que leva q_1 em q_2 , preservando a orientação. Seja $\tilde{\varphi}: X \rightarrow X$ a isometria de X tal que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$, com $\tilde{\varphi}(p_1) = p_2$. Então $\tilde{\varphi}(\tilde{\Sigma}_1)$ e $\tilde{\Sigma}_2$ são duas esferas imersas com a mesma curvatura média constante e o mesmo centro de simetria em X , e, portanto, pelo Lema 6.3, elas coincidem. Em particular, $\pi(\tilde{\varphi}(\tilde{\Sigma}_1)) = \Sigma_2$, o que nos dá que $\varphi(\Sigma_1) = \Sigma_2$, provando a afirmação principal do Teorema 6.1 neste Caso 1.

Para terminarmos a prova do Caso 1, observe que os itens (1) e (2) do teorema seguem diretamente do Passo 9. Portanto, vamos assumir que S é uma H -esfera em M e vamos tomar \tilde{S} um levantamento de S para X , onde estamos assumindo que X é isométrico a um grupo de Lie métrico. Vamos demonstrar a seguir os itens (b) e (c) de (3), pois as nossas hipóteses eliminam diretamente o item (a) de (3).

Pelos Passos 2 e 9, temos que \tilde{S} tem nulidade 3 e índice 1 para o seu operador de Jacobi. Como os operadores de Jacobi de S e \tilde{S} são os mesmos, temos que a primeira afirmação de (b) vale, e a segunda segue do Passo 10 aplicado para \tilde{S} e depois projetado em M . Para demonstrar o item (c), defina o ponto p_S como a projeção de $p_{\tilde{S}}$

para M . A afirmação agora segue dos mesmos argumentos utilizados na demonstração da afirmação principal, o que completa a prova do Caso 1 do Teorema 6.1. \square

Caso 2 O recobrimento universal $\pi: X \rightarrow M$ de M é isométrico a um produto Riemanniano $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{S}^2 é a esfera de curvatura constante $K > 0$.

Demonstração do Caso 2. Note que nesse caso, M é isométrico a uma das variedades produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{S}^1$, onde \mathbb{S}^1 é um círculo Riemanniano e \mathbb{P}^2 é o quociente de \mathbb{S}^2 pela aplicação antípoda, ou M é isométrico a $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)/\sigma$, onde $\sigma: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ é dada por $\sigma(x, t) = (-x, t + \delta)$, onde $\delta \in \mathbb{S}^1$ é o elemento de ordem dois. Em todos os casos possíveis para M , o grupo de isometrias de M tem dimensão quatro, e M admite uma folheação por superfícies totalmente geodésicas, as quais chamamos de *fatias*.

Primeiro, vamos tratar do caso $H = 0$. Seja S uma esfera de dimensão dois mínima em M e seja \tilde{S} um levantamento de S para X . Pelo princípio do máximo, temos que $\tilde{S} = \mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ e, portanto, S é uma superfície totalmente geodésica de M , estável e com nulidade 1 para o operador de Jacobi. Ainda mais, S representa um elemento não trivial em $H_2(M)$, o que prova o item (a) de (3). Note que o item (c) agora segue quando escolhemos p_S como qualquer ponto de S . Além disso, a afirmação principal do Teorema 6.1 também vale trivialmente no caso mínimo.

Para provar as demais afirmações do Teorema 6.1, após uma mudança do campo unitário normal, novamente assumiremos que $H > 0$. Vamos aplicar os resultados de correspondência de Daniel [14] para utilizarmos as propriedades já demonstradas de H -esferas no grupo de Lie métrico $SU(2)$ munido de uma métrica invariante à esquerda com grupo de isometrias tendo dimensão quatro. Um dos principais resultados de Daniel é o que segue.

Teorema 6.5 (Daniel, [14]). *Sejam \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 duas variedades homogêneas de dimensão três com grupo de isometrias com dimensão 4, com curvaturas da base κ_1 e κ_2 e curvatura de fibrado τ_1 e τ_2 , respectivamente, e tais que*

$$\kappa_1 - 4\tau_1^2 = \kappa_2 - 4\tau_2^2. \quad (6.2)$$

Sejam H_1 e H_2 dois números reais tais que

$$\tau_1^2 + H_1^2 = \tau_2^2 + H_2^2. \quad (6.3)$$

Então existe uma correspondência isométrica entre superfícies simplesmente conexas de curvatura média constante H_1 em \mathbb{E}_1 e superfícies simplesmente conexas de curvatura média constante H_2 em \mathbb{E}_2 . Essa correspondência é chamada de correspondência das superfícies irmãs.

Como explicaremos a seguir, vamos aplicar o Teorema 6.5 para demonstrar o Caso 2 do Teorema 6.1. Seja $X = \mathbb{E}_1 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ um produto com curvatura base $\kappa_1 = K$ e curvatura de fibrado $\tau_1 = 0$. Para demonstrar o item (1), após uma composição com $\pi: X \rightarrow M$, é suficiente provar que para qualquer $H > 0$ existe uma esfera de curvatura média constante H em X . Escolha $\kappa_2, \tau_2, H_2 > 0$ tais que as equações abaixo se cumpram:

$$\begin{aligned} K &= \kappa_2 - 4\tau_2^2 \\ H^2 &= \tau_2^2 + H_2^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Seja $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}(\kappa_2, \tau_2)$ a variedade homogênea simplesmente conexa de dimensão três com grupo de isometrias de dimensão 4 que se escreve como um fibrado sobre a esfera \mathbb{S}^2 de curvatura constante κ_2 e curvatura de fibrado τ_2 . \mathbb{E}_2 é isométrica a um grupo de Lie métrico isomorfo a $SU(2)$. Portanto, pelo já demonstrado Caso 1, existe uma H_2 -esfera S_{H_2} em \mathbb{E}_2 . Agora, o Teorema 6.5 garante a existência de uma H -esfera em X que é isométrica a S_{H_2} , o que completa a demonstração do item (1) do Teorema 6.1.

Reciprocamente, se Σ_1, Σ_2 forem duas ($H > 0$)-esferas em M , então a correspondência acima gera duas ($H_2 > 0$)-esferas em \mathbb{E}_2 , que são uma a translação à esquerda da outra; em particular, elas são intrinsecamente isométricas. Como translações à esquerda preservam as fibras em \mathbb{E}_2 e a orientação da base, segue de [14, Theorem 5.2] que as imersões Σ_1 e Σ_2 diferem por uma isometria de M . Isso demonstra a afirmação principal do Teorema 6.1 no Caso 2.

Falta demonstrar (b) e (c) do item (3) do Teorema 6.1. Suponha que S é uma ($H > 0$)-esfera em M e que \tilde{S} seja um levantamento

de S para X . Novamente, sejam $\kappa_2, \tau_2, H_2 > 0$ constantes satisfazendo (6.4). Como discutido anteriormente, existe uma imersão isométrica f_{H_2} da esfera Riemanniana S no espaço relacionado \mathbb{E}_2 com curvatura média constante H_2 . Por [14, Proposition 5.12], o operador de Jacobi da imersão f_{H_2} coincide com o operador de Jacobi de S . Portanto, pelos resultados do Caso 1, S tem índice 1 e nulidade 3 para o operador de Jacobi.

A demonstração de que quando $H > 0$ a imersão se estende como a fronteira de uma bola imersa $F: B \rightarrow M$, convexa em média, segue dos mesmos argumentos utilizados no Passo 10 do Caso 1, após observado que as soluções para o problema isoperimétrico para volumes pequenos dão origem a bolas mergulhadas com fronteira tendo curvatura média constante positiva.

A parte final da demonstração do Teorema 6.1 é mostrar a existência de um ponto p_S como descrito pelo item (c) de (3). Assim como na prova desse item no Caso 1, é suficiente considerar o caso em que $M = X$, portanto tomamos uma $(H > 0)$ -esfera S em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Agora, trocando a identidade e por qualquer ponto dado de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e E pelo campo de Killing ∂_t , a prova do Lema 6.3 pode ser reconstruída, observando que um resultado similar ao dado pela Proposição 3.15 vale nesse contexto. Isso completa a prova do Caso 2. \square

Como demonstramos que o Teorema 6.1 vale nos dois Casos 1 e 2, isso finaliza a sua demonstração. \square

Observação 6.6. Seja M uma variedade homogênea de dimensão três com grupo de isometrias $I(M)$ e considere $I_p(M)$ o subgrupo de $I(M)$ que deixa fixo um ponto $p \in M$. O Lema 6.3 implica que qualquer H -esfera Σ em M com centro de simetria p é invariante pela ação de $I_p(M)$. Em particular, se $I(M)$ tem dimensão 4, $I_p(M)$ tem dimensão 1 e Σ é invariante por um subgrupo a um parâmetro do grupo de isometrias; esse resultado foi demonstrado anteriormente por Abresch e Rosenberg [1, 2].

Capítulo 7

Estimativas de área: Prova da parte (A) do Passo 7.

Neste capítulo, X denota um grupo de Lie métrico simplesmente conexo. Aqui, explicaremos a validade das estimativas de área dadas pela parte (A) do Passo 7, na demonstração do Caso 1 do Teorema 6.1.

Proposição 7.1. *Se X é isomorfo a $SU(2)$, então as áreas de esferas em X de curvatura média constante e índice 1 formam um intervalo semi aberto $(0, A(X)]$.*

Para demonstrar essa proposição, primeiro apresentaremos algumas propriedades dos possíveis limites não compactos de seqüências de esferas $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}(X)$, quando as suas respectivas áreas estão divergindo para o infinito. Como esferas de índice 1 em $\mathcal{M}(X)$ com curvatura média grande em X são esferas quase redondas de área pequena, segue que o valor absoluto das curvaturas médias das esferas $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está limitado por cima e portanto as esferas na seqüência $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possuem norma da segunda forma fundamental uniformemente limitada, de acordo com o Passo 6. Consideraremos tais esferas como **imersões** $f_n: S_n \rightarrow X$ **com ponto base** (nós suprimiremos a

notação dos pontos base dessas esferas) com imagens desses pontos base sendo sempre o elemento identidade e . Nesse contexto (veja, por exemplo, a demonstração do Passo 6) um argumento padrão demonstra que uma subsequência converge a uma imersão

$$F: \Sigma \rightarrow X$$

com curvatura média constante e passando por e , onde Σ é uma superfície compacta, conexa de gênero zero, proveniente de subdomínios compactos e suaves da sequência S_n .

O próximo resultado é o Corolário 5.4 de [28] e aqui apresentaremos um esboço de sua demonstração. Esse resultado também tem um papel importante na demonstração das estimativas de área dadas pela parte (B) do Passo 7, e portanto está enunciado no caso geral de X sendo um grupo de Lie métrico. Salientamos que o H -potencial de X dado pelas Definições 3.23 e 3.24 e que aparece no Teorema da Representação, Teorema 3.27, nunca se anula para um dado H descrito nas condições do Lema 3.25.

Teorema 7.2 ([28, Corollary 5.4]). *Seja $F: \Sigma \rightarrow X$ uma imersão limite com curvatura média constante H e construída conforme descrito acima com imagem do ponto base sendo a identidade e . Seja $\Delta(F)$ o conjunto de todas as imersões limites obtidas a partir de translações à esquerda de F pelo inverso da imagem de seqüências de pontos em Σ que são intrinsecamente divergentes. Então $\Delta(F)$ é não vazio e cada imersão $(f: S \rightarrow X) \in \Delta(F)$ pode ser obtida como um limite da seqüência original $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que produziu F . Além disso, cada tal imersão f é estável e tem ponto base passando por e . Mais ainda, se o H -potencial de X nunca se anula, então:*

- (1) *Existe um campo de vetores não nulo invariante à direita K_f em X que é tangente a $f(S)$ e a imagem $G(S)$ da aplicação de Gauss G de S é uma curva completa mergulhada em \mathbb{S}^2 com valor absoluto da curvatura geodésica limitada; o fecho $\overline{G(S)} \subset \mathbb{S}^2$ é uma laminação de \mathbb{S}^2 .*
- (2) *$f(S)$ é topologicamente um plano, anel ou toro imerso em X . Além disso, se X for isomorfo a $SU(2)$, então $f(S)$ é topologicamente a imersão de um anel ou toro.*

(3) S é difeomorfo a um plano ou a um anel.

Demonstração. Suponha que $f: S \rightarrow X$ é uma superfície limite de F e a seguir demonstraremos que a afirmação principal do teorema vale. Por construção, a superfície limite passa pela identidade e . A propriedade que a superfície limite f é um limite da sequência original de imersões f_n segue diretamente da aplicação usual da desigualdade triangular que demonstra que limites de pontos limite de um subconjunto de um espaço métrico são pontos limite deste subconjunto. Nesse caso ainda temos, por construção, que a imagem do ponto base de f é e .

Se f não fosse estável, então existiria um domínio compacto, suave $D \subset S$ estritamente instável. Então, como f foi gerada por translações de F por seqüências intrinsecamente divergentes, existiriam ao menos dois domínios suaves, compactos e disjuntos $D_1, D_2 \subset \Sigma$, cada qual estritamente instável. Por sua vez, para n suficientemente grande, os domínios D_1, D_2 seriam aproximados por dois domínios suaves, compactos e disjuntos $\widehat{D}_1(n), \widehat{D}_2(n) \subset S_n$ estritamente estáveis; isso contradiz o fato que S_n possui índice 1, e prova que f é estável.

Vamos supor agora que o H -potencial de X não se anula e vamos provar os itens (1), (2) e (3) do teorema. Sem perda de generalidade, assumamos que a seqüência de imersões f_n converge em subconjuntos compactos de S_n , para a imersão F . Considere $G_n: S_n \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $G: S \rightarrow \mathbb{S}^2$ as aplicações de Gauss invariante à esquerda relacionadas. Observe que o Teorema de Representação, Teorema 3.27, sob a condição de que o H -potencial de X não se anula, nos dá que o posto da aplicação de Gauss é no mínimo 1 em todos os pontos de S . Afirmamos que o posto da aplicação de Gauss G é no máximo 1 em cada ponto de S , o que implica que ele de fato é igual a 1 em todos os pontos de S ; após essa demonstração, utilizaremos o Corolário 3.28 para demonstrar o item (1).

Por absurdo, vamos supor que existe um ponto $\widehat{p} \in S$ onde o posto de G é exatamente 2. Por um argumento similar ao utilizado na demonstração de que f é estável, por aproximação teríamos um $\varepsilon > 0$ e uma seqüência divergente $\{\widehat{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que as bolas intrínsecas $B_\Sigma(\widehat{p}_n, 1) \subset \Sigma$ aproximam arbitrariamente a geometria das bolas $B_S(\widehat{p}, 1)$, são duas a duas disjuntas e as áreas das imagens

$G_n(B(\hat{p}_n, 1)) \subset \mathbb{S}^2 \subset T_e X$ são maiores do que ε ; tal $\varepsilon > 0$ existe, pois em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto regular para a aplicação de Gauss G da superfície limite $f: S \rightarrow X$, a restrição de G nesta vizinhança é um difeomorfismo sobre sua imagem, que é um subconjunto aberto de \mathbb{S}^2 . Novamente por aproximação, para qualquer $k > 8\pi/\varepsilon$ e para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existem pontos relacionados

$$\{q_1(n), q_2(n), \dots, q_k(n)\} \subset S_n$$

tais que os discos $\{B_{S_n}(q_1, 1), \dots, B_{S_n}(q_k, 1)\}$ são dois a dois disjuntos e as áreas dos domínios $G_n(B(q_n, 1))$ é maior do que $\varepsilon/2$. Então segue do fato que G_n é um difeomorfismo que a área de \mathbb{S}^2 é maior do que $k \cdot \varepsilon/2 > 4\pi$, uma contradição, sendo que a área de \mathbb{S}^2 é 4π . Isso prova que o posto da aplicação de Gauss de f é exatamente 1 em todos os pontos de S , e portanto sua imagem é uma curva imersa.

Agora, pelo Corolário 3.28, existe um campo de vetores invariante à direita K_f que é sempre tangente a $f(S)$. A prova que a curva imersa é completa segue novamente tomando limites; de outra forma, poderíamos criar uma imersão limite S' de $f: S \rightarrow X$ com a mesma curvatura média e com posto 0 no seu ponto base, o que é um absurdo. Se a curva não fosse mergulhada, então ou ela iria se autointersectar, o que não é possível devido à unicidade da imersão a menos de translações à esquerda dada pelo Teorema 3.27 (veja a prova de [28, Corollary 5.4] para mais detalhes). Isso completa a prova de (1).

Seja Γ o subgrupo a um parâmetro que gera K_f . Segue do item (1) que S pode ser vista como um fibrado orientado sobre a curva completa, orientada e mergulhada $G(S) \subset \mathbb{S}^2$ com fibra Γ , e essa aplicação se fatora através da aplicação quociente $Q: S \rightarrow S/\Gamma$, onde S/Γ é o conjunto das órbitas da ação à esquerda de Γ em S (aqui, se usa a orientação de S e de X para obter uma orientação da curva imagem, uma vez definida uma orientação para Γ). Em particular, podemos ver S como um Γ -fibrado trivial sobre um círculo ou uma reta, portanto Γ é topologicamente o círculo \mathbb{S}^1 ou a reta \mathbb{R} . Isso implica que $f(S)$ é a imersão de um plano, anel ou toro em X . Ainda mais, se X for isomorfo a $SU(2)$, então a única possibilidade para Γ é que seja homeomorfa a \mathbb{S}^1 , portanto $f(S)$ é topologicamente um anel ou toro imerso, provando (2).

Para demonstrar (3), como já foi observado que $f(S)$ é topologicamente um plano, anel ou toro imerso, o fato que S é não compacto implica, pela teoria de espaços de recobrimento, que S é difeomorfo ou a um plano ou a um anel, e isso demonstra (3) e termina a prova do teorema. \square

A seguir, vamos fazer a demonstração da Proposição 7.1.

Demonstração da Proposição 7.1. Conforme explicado antes do enunciado do Teorema 7.2, a não existência de estimativas de área como na Proposição 7.1 produziria uma superfície imersa limite $F: \Sigma \rightarrow X$, passando pela identidade e . Pelo item (1) do Teorema 7.2, existe um campo de vetores não nulo invariante à direita K_f em X , tangente a uma $f(S)$, onde $(f: S \rightarrow X) \in \Delta(F)$.

Agora, pelo item (2) do Teorema 7.2, a imagem de $f(S)$ ou é um cilindro imerso ou um toro imerso. Como f é estável e $f: S \rightarrow f(S)$ pode ser vista como um recobrimento regular sobre o anel ou toro $f(S)$, com fibra sendo trivial \mathbb{Z} ou $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, concluímos, pela Proposição 2.5 de [32], que $f(S)$ é uma H -superfície estável.

Se $f(S)$ for um toro imerso, podemos considerar um campo de vetores invariante à direita V em $SU(2)$ tal que $V(e)$ é tangente a f em e e linearmente independente com $K_S(e)$. Como $SU(2)$ não possui subgrupos de dimensão dois e K_S é sempre tangente a $f(S)$, segue que V não pode ser sempre tangente a $f(S)$. Seja η um campo normal unitário ao longo de f e considere a função $u = \langle V, \eta \rangle$. Temos que u é uma função de Jacobi limitada no toro $f(S)$, mas u troca de sinal, e isso contradiz a estabilidade de $f(S)$.

Suponha agora que $f(S)$ é um anel imerso. Usando o fato que $f(S)$ tem norma da segunda forma fundamental limitada, e portanto curvatura de Ricci limitada, e que é folheado pelas curvas integrais de K_f , que possuem comprimento uniformemente limitado, pois $SU(2)$ é compacto, não é difícil mostrar que o crescimento de área de bolas intrínsecas de raio R no anel imerso $f(S)$ está limitado por cR , para uma constante universal c que depende apenas de $f(S)$, veja a Seção 6 de [28] para a prova. Em particular, o anel imerso é parabólico (veja, por exemplo Grigor'yan [19]).

Agora, podemos terminar a demonstração de maneira similar ao caso de quando $f(S)$ era um toro. Escolha um campo de vetores

invariante à direita V de X que é tangente a $f(S)$ em e mas não sempre tangente a $f(S)$. Seja $u = \langle V, \eta \rangle$ a função ângulo entre V e um campo normal unitário a $f(S)$, η . Então u é uma função de Jacobi limitada em \tilde{S} que muda de sinal, contradizendo o resultado principal de Manzano, Pérez e Rodríguez [25]. Essa contradição prova que as áreas de H -esferas em X estão limitadas uniformemente.

Finalmente, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as soluções do problema isoperimétrico em X com volume ε têm como fronteira esferas de curvatura média constante de área menor que ε . Agora, o Passo 9 no Capítulo 6 e o teorema do valor intermediário implicam que o conjunto das áreas de H -esferas em X é um intervalo semi aberto da forma $(0, A(X)]$. Isso completa a demonstração da Proposição 7.1. \square

Índice

- H -potencial, 40
- Álgebra de Lie, 20
- Aplicação de Gauss invariante
 - à esquerda, 40
- Base unimodular, 30
- Centro de simetria, 81
- Conjunto singular de convergência,
 - 53
- Constante de Cheeger, 38
- Constantes estruturais, 30
- Curvatura média crítica, 37
- Domínio planar, 57
- Esferas de Berger, 31
- Espaço $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$, 31
- Estabilidade, 11
 - índice de, 11
 - fraca, 12
- Estimativas
 - de área, 6, 50, 76, 88
 - de curvatura, 4, 45, 48, 75
 - de um lado, 46
 - de raio, 5, 45
 - fraca de arco de corda, 47
- Estrutura de edifício-garagem,
 - 55
- Fluxo CMC, 47
- Função antiholomorfa, 73
- Grupo de Lie, 19
 - métrico, 20
 - solúvel, 38
 - unimodular, 30
- Invariante D de Milnor, 35
- Jacobi
 - função de, 11
 - operador de, 10
- Laço singular, 62
- Nulidade, 11
- Ponto singular, 53
 - do tipo catenoidal, 61
- Produto semidireto, 25
- Raio de injetividade, 13
 - função, 13
 - localmente positivo, 52
 - quase-mínimo, 54
- Raio de uma superfície, 4, 44
- Superfície
 - H -superfície, 3

estável, 11
fracamente estável, 12
mínima, 12
mergulhada à Alexandrov,
16

Teorema
da representação, 42

Variedade
convexa em média, 16
flat, 6
homogênea, 19
homogeneamente regular,
13

Vetor fluxo, 47

Vizinhança regular, 17
de um lado, 17

Bibliografia

- [1] U. Abresch and H. Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Acta Math.*, 193(2):141–174, 2004. MR2134864 (2006h:53003), Zbl 1078.53053.
- [2] U. Abresch and H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.*, 28:1–28, 2005. MR2195187, Zbl 1118.53036.
- [3] H. Alencar, M. do Carmo, and R. Tribuzy. A theorem of Hopf and the Cauchy-Riemann inequality. *Comm. Anal. Geom.*, 15(2):283–298, 2007. MR2344324, Zbl 1134.53031.
- [4] A. D. Alexandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large I. *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, 11(19):5–17, 1956. MR0150706.
- [5] J. L. Barbosa, M. do Carmo, and J. Eschenburg. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197:123–138, 1988. MR0917854, Zbl 0653.53045.
- [6] J. Bernstein and C. Breiner. Helicoid-like minimal disks and uniqueness. *J. Reine Angew. Math.*, 655:129–146, 2011. MR2806108, Zbl 1225.53008.
- [7] S.Y. Cheng. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51(1):43–55, 1976. MR0397805, Zbl 0334.35022.
- [8] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold IV; Locally simply-

- connected. *Ann. of Math.*, 160:573–615, 2004. MR2123933, Zbl 1076.53069.
- [9] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II. The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces. *Ann. of Math.*, 167:211–243, 2008. MR2373154, Zbl 1142.53012.
- [10] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold V; Fixed genus. *Ann. of Math.*, 181(1):1–153, 2015. MR3272923, Zbl 06383661.
- [11] B. Coskunuzer. Non-properly embedded minimal planes in hyperbolic 3-space. *Comm. Contemp. Math.*, 13:727–739, 2011. MR2847226, Zbl 1232.53010.
- [12] B. Coskunuzer, W. H. Meeks III, and G. Tinaglia. Non-properly embedded H-planes in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Preprint at <http://arxiv.org/pdf/1609.08568>.
- [13] B. Coskunuzer, W. H. Meeks III, and G. Tinaglia. Non-properly embedded H-planes in \mathbb{H}^3 . To appear in *J. Differential Geometry*. Preprint at <http://arxiv.org/pdf/1503.04641.pdf>.
- [14] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 82(1):87–131, 2007. MR2296059, Zbl 1123.53029.
- [15] B. Daniel and P. Mira. Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in Sol_3 . *Crelle: J Reine Angew Math.*, 685:1–32, 2013. MR3181562, Zbl 1305.53062.
- [16] M. do Carmo and C. K. Peng. Stable complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes. *Bulletin of the AMS*, 1:903–906, 1979. MR0546314, Zbl 442.53013.
- [17] D. Fischer-Colbrie. On complete minimal surfaces with finite Morse index in 3-manifolds. *Invent. Math.*, 82:121–132, 1985. MR0808112, Zbl 0573.53038.
- [18] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 33:199–211, 1980. MR0562550, Zbl 439.53060.

- [19] A. Grigor'yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. of A.M.S.*, 36(2):135–249, 1999. MR1659871, Zbl 0927.58019.
- [20] H. Hopf. *Differential Geometry in the Large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1989. MR1013786, Zbl 0669.53001.
- [21] J. Jost. *Two-dimensional geometric variational problems*. J. Wiley and Sons, Chichester, N.Y., 1991. MR1100926, Zbl 0729.49001.
- [22] N. Korevaar, R. Kusner, and B. Solomon. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geom.*, 30:465–503, 1989. MR1010168, Zbl 0726.53007.
- [23] R. Kusner. *Global geometry of extremal surfaces in three-space*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1988. MR2636899.
- [24] F. J. López and A. Ros. On embedded complete minimal surfaces of genus zero. *J. Differential Geom.*, 33(1):293–300, 1991. MR1085145, Zbl 719.53004.
- [25] M. Manzano, J. Pérez, and M. M. Rodríguez. Parabolic stable surfaces with constant mean curvature. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 42:137–152, 2011. MR2819632, Zbl 1228.53009.
- [26] W. H. Meeks III. Constant mean curvature spheres in Sol_3 . *American J. of Math.*, 135(3):763–775, 2013. MR3068401, Zbl 1277.53057.
- [27] W. H. Meeks III, P. Mira, J. Pérez, and A. Ros. Constant mean curvature spheres in homogeneous 3-manifolds. Work in progress.
- [28] W. H. Meeks III, P. Mira, J. Pérez, and A. Ros. Constant mean curvature spheres in homogeneous three-spheres. Preprint at <http://arxiv.org/abs/1308.2612>.

- [29] W. H. Meeks III, P. Mira, J. Pérez, and A. Ros. Isoperimetric domains of large volume in homogeneous three-manifolds. *Advances in Math.*, 264:546–592, 2014. MR3250293, Zbl 1296.53027.
- [30] W. H. Meeks III and J. Pérez. Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups. In *Geometric Analysis*, volume 570, pages 25–110. Contemporary Mathematics, edited by J. Galvez, J. Pérez, 2012. MR2963596, Zbl 1267.53006.
- [31] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros. The local picture theorem on the scale of topology. To appear in *J. Differential Geometry*. Preprint at <https://arxiv.org/abs/1505.06761>.
- [32] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros. Stable constant mean curvature surfaces. In *Handbook of Geometrical Analysis*, volume 1, pages 301–380. International Press, edited by Lizhen Ji, Peter Li, Richard Schoen and Leon Simon, ISBN: 978-1-57146-130-8, 2008. MR2483369, Zbl 1154.53009.
- [33] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros. Properly embedded minimal planar domains. *Ann. of Math.*, 181(2):473–546, 2015. MR3275845, Zbl 06399442.
- [34] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. The uniqueness of the helicoid. *Ann. of Math.*, 161:723–754, 2005. MR2153399, Zbl 1102.53005.
- [35] W. H. Meeks III and H. Rosenberg. Maximum principles at infinity. *J. Differential Geom.*, 79(1):141–165, 2008. MR2401421, Zbl 1158.53006.
- [36] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. Area estimates for triply-periodic constant mean curvature surfaces. Work in progress.
- [37] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. Chord arc properties for constant mean curvature disks. Preprint at <http://arxiv.org/pdf/1408.5578.pdf>.
- [38] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. Constant mean curvature surfaces in homogeneous three-manifolds. Work in progress.

- [39] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. Embedded Calabi-Yau problem in hyperbolic 3-manifolds. Work in progress.
- [40] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. The geometry of constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 . Preprint available at <http://arxiv.org/pdf/1609.08032v1.pdf>.
- [41] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. Limit lamination theorem for H -surfaces. To appear in *J. Reine Angew. Math.* Preprint available at <http://arxiv.org/pdf/1510.07549.pdf>.
- [42] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. One-sided curvature estimates for H -disks. Preprint available at <http://arxiv.org/pdf/1408.5233.pdf>.
- [43] W. H. Meeks III and G. Tinaglia. Existence of regular neighborhoods for H -surfaces. *Illinois J. of Math.*, 55(3):835–844, 2011. MR3069286, Zbl 1269.53014.
- [44] W. H. Meeks III and S. T. Yau. The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. *Topology*, 21(4):409–442, 1982. MR0670745, Zbl 0489.57002.
- [45] W. H. Meeks III and S. T. Yau. The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness. *Math. Z.*, 179:151–168, 1982. MR0645492, Zbl 0479.49026.
- [46] J. W. Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*, 21:293–329, 1976. MR0425012, Zbl 0341.53030.
- [47] J. C. C. Nitsche. *Lectures on Minimal Surfaces*, volume 1. Cambridge University Press, 1989. MR1015936, Zbl 0688.53001.
- [48] J. Pérez and A. Ros. Properly embedded minimal surfaces with finite total curvature. In *The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces*, pages 15–66. Lecture Notes in Math 1775, Springer-Verlag, 2002. G. P. Pirola, editor. MR1901613, Zbl 1028.53005.

- [49] N. Peyerimhoff and E. Samiou. The Cheeger constant of simply connected, solvable Lie groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(5):1525–1529, 2004. MR2053361, Zbl 1045.53033.
- [50] A. V. Pogorelov. On the stability of minimal surfaces. *Soviet Math. Dokl.*, 24:274–276, 1981. MR0630142, Zbl 0495.53005.
- [51] M. M. Rodríguez and G. Tinaglia. Non-proper complete minimal surfaces embedded in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Int Math Res Notices*, 2015(12), 2015. Available at arXiv:1211.5692.
- [52] A. Ros. One-sided complete stable minimal surfaces. *J. Differential Geom.*, 74:69–92, 2006. MR2260928, Zbl 1110.53009.
- [53] H. Rosenberg, R. Souam, and E. Toubiana. General curvature estimates for stable H -surfaces in 3-manifolds and applications. *J. Differential Geom.*, 84(3):623–648, 2010. MR2669367, Zbl 1198.53062.
- [54] R. Schoen. *Estimates for Stable Minimal Surfaces in Three Dimensional Manifolds*, volume 103 of *Ann. of Math. Studies*. Princeton University Press, 1983. MR0795231, Zbl 532.53042.
- [55] L. Simon. On the existence of embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with an arbitrary metric. To appear.
- [56] L. Simon. Lectures on geometric measure theory. In *Proceedings of the Center for Mathematical Analysis*, volume 3, Canberra, Australia, 1983. Australian National University. MR0756417, Zbl 546.49019.
- [57] P. A. Smith. Transformations of finite period II. *Annals of Math. Second Series*, 40:690–711, 1992. MR0000177.
- [58] B. Smyth and G. Tinaglia. The number of constant mean curvature isometric immersions of a surface. *Comment. Math. Helv.*, 88(1):163–183, 2013. MR3008916, Zbl 1260.53023.