MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA Nº 36

THÉORIE SPECTRALE

F. JAVIER THAYER

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
RIO DE JANEIRO
1982

DEPARTAMENTO DE INFORMAÇÃO CIENTÍFICA (DIC)

MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA

1) Alberto Azevedo & Renzo Piccinini - Introdução à Teoria dos Grupos
2) Nathan M. Santos - Vetores e Matrizes (esgotado)
3) Manfredo P. Carmo - Introdução à Geometria Diferencial Global
4) Jacob Palis Jr. - Sistemas Dinâmicos
5) João P. de Carvalho - Introdução à Álgebra Linear (esgotado)
6) Pedro J. Fernandez - Introdução à Teoria das Probabilidades
7) R.C. Robinson - Lectures on Hamiltonian Systems
8) Manfredo P. Carmo - Notas de Geometria Riemanniana
9) Chain S. Hönig - Análise Funcional e o Problema de Sturn-Liouville
10) Welington de Melo - Estabilidade Estrutural em Variedades de Dimensão 2
11) Jaime Lesmes - Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais
12) Clóvis Vilanova - Elementos da Teoria dos Grupos e da Teoria dos Anéis
13) Jean Claude Douai - Cohomologie des Groupes
14) H. Blaine Lawson Jr. - Lectures on Minimal Submanifolds, V.1
15) Elon L. Lima - Variedades Diferenciáveis
16) Pedro Mendes - Teoremas de Ω-estabilidade e Estabilidade Estrutural em Variedades Abertas
17) Herbert Amann - Lectures on Some Fixed Point Theorems
18) Exercícios de Matemática - IMPA
19) Djairo G. de Figueiredo - Números Irracionais e Transcendentes
20) C.E. Zeeman - Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies
21) Manfredo P. Carmo - Notas de um curso de Grupos de Lie
22) A. Prestel - Lectures on Formally Real Fields
23) Aron Simis - Introdução à Álgebra
24) Jaime Lesmes - Seminário de Análise Funcional
25) Fred Brauer - Some Stability and Perturbation Problem for Differential and Integral Equations
26) Lucio Rodriguez - Geometria das Subvariedades
27) Mario Miranda - Frontiere Minime
28) Fernando Cardoso - Resolubilidade Local de Equações Diferenciais Parciais
29) Eberhard Becker - Hereditarily-Pythagorean Fields and Orderings of Higher Level
30) Hyman Bass - Projective Modules and Symmetric Algebras
31) J. Neyman - Probabilidade Freqüentista e Estatística Freqüentista
32) Freddy Dumortier - Singularities of Vector Fields
33) T.M. Viswanathan - Introdução à Álgebra e Aritmética
34) F. Javier Thayer - Notes on Partial Differential Equations
35) Edward Bierstone - The Structure of Orbit Spaces and the Singularities of Equivariant Mappings
36) F. Javier Thayer - Théorie Spectrale

À mes parents

Introduction

Ce livre constitue le contenu du cours (d'un semestre) de théorie spectrale que j'ai fait à l'IMPA pendant les années 1981 et 1982. Il presuppose une connaissance des éléments d'analyse fonctionnelle, notamment des Théorèmes de Hahn-Banach, de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte.

TABLE DES MATIÈRES

$1^{ère}$ Partie: Théorie de Gelfand

$2^{ième}$ Partie: Opérateurs Autoadjoints

$3^{ième}$ Partie: Transformée de Fourier et Opérateurs Différentiels à Coefficients Constants

1. THÉORIE DE GELFAND

§1. Algèbres de Banach

Soit A un espace vectoriel complexe ayant

1. La structure d'une algèbre associative
2. La structure d'un espace de Banach sur $\mathbb{C}$

Alors A est une algèbre de Banach ssi

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad x,y \in A$$

A possède un élément unité ssi il existe un element $1 \in A$ tel que

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \qquad x \in A$$

$$\|1\| = 1.$$

Une algèbre de Banach involutive est une algèbre de Banach munie d'une application $x \mapsto x^*$ telle que

(a) $x \mapsto x^*$ est anti linéaire

(b) $[xy]^* = y^* x^*$

(c) $x^{**} = x$

(d) $\|x^*\| = \|x\|$

Si en outre

(e) $\|x^* x\| = \|x\|^2$

A est une C^*-algèbre.

Si A, B sont des algèbres de Banach involutives, un <u>morphisme involutif</u> est une application linéaire continue

$$\pi : A \to B$$

telle que

(i) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \qquad x,y \in A$

(ii) $\pi(x^*) = \pi(x)^*$

<u>Exemple 1</u>. Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ l'espace des operateurs linéaires continus $H \to H$.

Definissons T^* par

$$\langle T^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle \qquad T \in \mathcal{L}(H), \quad \xi,\eta \in H.$$

Alors $\mathcal{L}(H)$ est une C^*-algèbre.

Les propriétés (a), (b), (c) sont triviaux. Pour prouver (d), il suffit de démontrer $\|T^*\| \le \|T\|$. Or

$$|\langle T^*\xi, \eta\rangle| \le \|T\|\|\xi\|\|\eta\| \qquad \xi,\eta \in H$$

et donc $\|T^*\xi\| \le \|T\|\|\xi\|$ pour $\xi \in H$.

(d). Evidemment

$$\|T^*T\| \le \|T\|^2.$$

Dans le sens inverse

$$\sup_{\substack{\|\xi\|=1\\ \|\eta\|=1}} |\langle T^*T\xi, \eta\rangle| \ge \sup_{\|\xi\|=1} |\langle T\xi, T\xi\rangle$$

$$= \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\|^2$$

$$= \|T\|^2 .$$

2. Soit X un espace compact; alors $C(X)$ [= fonctions continues $X \to \mathbb{C}$] est une C^*-algèbre.

<u>Définition</u>. Un <u>caractère</u> d'une algèbre de Banach A est un morphisme algébrique non nul $\omega: A \to \mathbb{C}$ [A priori, ω n'est necessairement pas continu].

Le <u>spectre de A</u>, $\hat{A}$ est l'espace de caractères muni de la topologie de convergence ponctuel: Si $\{\omega_\lambda\}$ est une suite généralisée alors $\omega_\lambda \to \omega$ ssi $\omega_\lambda(x) \to \omega(x)$ quel que soit $x \in A$.

La <u>transformée de Gelfand</u> est l'application $x \mapsto \hat{x}$

$$A \to C(\hat{A})$$

définie par

$$\hat{x}(\omega) = \omega(x).$$

Il est évident que $\hat{x} \in C(\hat{A})$ et que $x \mapsto \hat{x}$ est un morphisme algébrique.

Voici le théorème principale de la théorie de Gelfand dont la démonstration sera achevée dans la Section 3:

<u>Théorème</u>. Soit A une C^*-algèbre commutative avec unité. Alors

1. $\hat{A}$ est un espace de Hausdorff compact.
2. La transformée de Gelfand est un isomorphisme involutif isométrique $A \to C(\hat{A})$.

<u>Proposition</u>. Soit A une algèbre de Banach avec unité, ω un caractère de A. Alors $\omega(1) = 1$ et si $x \in A$ est inversible $\omega(x) \neq 0$. En outre si $\|x\| \leq 1$, $|\omega(x)| \leq 1$.

Notons que

$$\omega(x) = \omega(x\cdot 1) = \omega(x)\omega(1).$$

Donc si $\omega(x) \neq 0$, on en déduit $\omega(1) = 1$. Si x est inversible

$$1 = \omega(1) = \omega(x)\cdot\omega(x^{-1})$$

et donc $\omega(x) \neq 0$. Finalement si $\|x\| \leq 1$ et $|\lambda| > 1$

$$x-\lambda\cdot 1 = \lambda[\lambda^{-1} x-1]$$

est inversible puisque $\|\lambda^{-1}x\| < 1$. [Voir lemme ci-dessous].

Donc

$$\omega(x-\lambda\cdot 1) \neq 0$$

et par conséquent $\omega(x) \neq \lambda$. □

Corollaire 1. Tout caractère est une fonctionelle linéaire continue sur A de norme ≤ 1.

Corollaire 2. La topologie sur $\hat{A}$ est celle induite par l'inclusion canonique $\hat{A} \to A^*$.

Corollaire 3. $\hat{A}$ est un espace de Hausdorff compact.

$\hat{A}$ est un sous-espace de la boule unitaire de A^*. Par la Proposition 1, $\hat{A}$ est fermé dans A^*. Le corollaire suit par Banach-Alaouglu.

Lemme. Soit A une algèbre de Banach avec unité. Si $x \in A$ et $\|x\| < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ est absolûment convergente dans A et

$$(1-x)\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)(1-x) = 1.$$

Puisque

$$\sum_{n\geq 0} \|x^n\| \leq \sum_{n\geq 0} \|x\|^n = (1-\|x\|)^{-1} < \infty$$

$\sum_{n\geq 0} x^n$ est absolûment convergente. Par les propriétés basiques de séries absolûment convergentes

$$(1-x)(\sum_{n\geq 0} x^n) = \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 1} x^n = 1$$

$$(\sum_{n\geq 0} x^n)(1-x) = 1. \quad \square$$

La série $\sum x^n$ est appelée <u>série de Neumann</u>.

§2. <u>Spectre et rayon spectral</u>

<u>Proposition 1.</u> Soit A une algèbre de Banach ayant un élément unité.

1. L'ensemble A^{-1} des elements inversibles de A est normiquement ouvert.

2. L'application $\lambda \mapsto (x-\lambda\cdot 1)^{-1}$ definie dans l'ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C}: (x-\lambda\cdot 1) \in A^{-1}\}$ est analytique à valeurs dans A.

1. Soit $x_o \in A^{-1}$. Alors

$$x = x_o - h = x_o[1-x_o^{-1}h]$$

sera inversible si $1 - x_o^{-1}h$ est inversible. Or si $\|x_o^{-1}h\| < 1$, $1-x_o^{-1}h$ est inversible et son inverse est donné par la série de Neumann

$$[1-x_o^{-1}h]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [x_o^{-1}h]^n. \qquad [1]$$

Donc $x_o - h$ sera inversible dès que $\|h\| < \|x_o^{-1}\|^{-1}$ et son inverse est $[\sum_{n=0}^{\infty} (x_o^{-1}h)^n] x_o^{-1}$.

2. Remarquons qu'en vertu de 1 $\{\lambda \in \mathbb{C}: (x-\lambda\cdot 1) \in A^{-1}\}$ est un ouvert Ω dans $\mathbb{C}$. Si $\lambda_o \in \Omega$ et $h \in \mathbb{C}$, l'élément $x - (\lambda_o+h)\cdot 1 = [x-\lambda_o\cdot 1] - h\cdot 1$ est inversible pour h petit et son inverse s'obtient en appliquant [1]:

$$[(x-\lambda_o\cdot 1)-h\cdot 1]^{-1} = [\sum_{n=0}^{\infty} (x-\lambda_o\cdot 1)^{-1} h^n](x_o-\lambda_o\cdot 1)^{-1}$$

ce qui demontre l'analyticité. □

<u>Définition</u>. L'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $x-\lambda\cdot 1$ soit non inversible s'appel le <u>spectre de x</u> et est denoté par $\mathrm{Sp}\, x$.

<u>Proposition 2</u>. $\mathrm{Sp}\, x$ est un ensemble fermé non-vide de $\mathbb{C}$.

La proposition precedente entraîne que $\mathrm{Sp}\, x$ est fermé. Si $\mathrm{Sp}\, x = \emptyset$, alors $\lambda \mapsto (x-\lambda\cdot 1)^{-1}$ serait une fonction analytique $\mathbb{C} \to A$. Si $|\lambda| > 2\|x\|$ on a que $\|\lambda^{-1}x\| < 1/2$. Donc

$$(x-\lambda\cdot 1)^{-1} = -\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}x)^{-1}$$

existe et est donné par $-\lambda^{-1}\sum \lambda^{-n}x^n$. Par conséquent

$$\|[x-\lambda\cdot 1]^{-1}\| \le 2^{-1}\|x\|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \|x\|^{-1}$$

pour $|\lambda| > 2\|x\|$. Ceci et le théorème de Liouville impliquent que $\lambda \mapsto (x-\lambda\cdot 1)^{-1}$ est constante, ce qui est absurde. □

<u>Corollaire 1</u>. Supposons que l'algèbre de Banach A soit un corps. [C'est à dire que tout element non-nul de A est inversible]. Alors $A = \mathbb{C}\cdot 1$.

Si $x \in A$ il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x-\lambda\cdot 1$ soit non inversible. Par conséquent $x-\lambda\cdot 1 = 0$. □

<u>Corollaire 2</u>. Soit A une algèbre de Banach commutative avec un élément unité. Si $I \subseteq A$ est un idéal maximal, alors I est fermé et $A/I \cong \mathbb{C}$.

Si $I \subseteq A$ est un idéal, alors $\bar{I}$ est aussi un idéal. Puisque $I \cap A^{-1} = \emptyset$ on a que $\bar{I} \cap A^{-1} = \emptyset$, mais comme I est maximal $I = \bar{I}$. Or A/I est un corps; [pour voir ceci, soit $x/I \in A/I \neq 0$. Donc $x \notin I$. Or $Ax + I$ est un idéal de A strictement plus grand que I et par conséquent $Ax + I = A$. Il existe donc $y \in A$ tel que $1 \in y\cdot x + I$, c'est à dire $1/I = x/I\cdot y/I$]. En plus A/I est une algèbre de Banach avec la norme

$$\|x/I\| = \inf\{\|x+y\| : y \in I\}.$$

Par le corollaire precédent on a que $A/I = \mathbb{C}$. □

<u>Proposition 3</u>. Soit A une algèbre de Banach commutative avec unité. Alors

$$\mathrm{Sp}\, x = \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \hat{A}\} \qquad x \in A$$

Notons d'abord que $x \in A$ est non inversible ssi il existe un idéal maximal $I \subseteq A$ tel que $x \in I$. Or les ideaux maximaux sont par le Corollaire 2 les noyaux des $\omega \in \hat{A}$. Donc x est non inversible ssi il existe $\omega \in \hat{A}$ tel que $\omega(x) = \hat{x}(\omega) = 0$. En particulier si $\lambda \in \mathbb{C}$ on a les equivalences:

$\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$, ssi $(x-\lambda\cdot 1) \notin A^{-1}$ ssi il existe $\omega \in \hat{A}$ tel que $\omega(x-\lambda\cdot 1) = \omega(x)-\lambda = 0$ ssi λ est une valeur de la fonction $\hat{x}$.

□

<u>Proposition 4</u>. Soit A une algèbre de Banach ayant un élément unité. Alors $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x)$ existe et est egale à

$$\inf\{r \in \mathbb{R}: \operatorname{Sp} x \subseteq \bar{B}(0,r)\}.$$

Supposons que la limite existe; Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \rho(x)$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > r > \rho(x)$ et donc

$$|\lambda| > r > \|x^n\|^{1/n} \quad n \geq n_o, \quad n_o \text{ suffisamment grand}$$

c'est à dire que $[|\lambda|^{-1} r]^n > \|[\lambda^{-1} x]^n\|$ $n \geq n_o$. Par conséquent $\sum_{n\geq 0} [\lambda^{-1}x]^n$ est absolûment convergent dans A et

$$\sum_{n\geq 0} [\lambda^{-1}x]^n = [1-\lambda^{-1}x]^{-1}.$$

On en déduit que $\lambda \notin \operatorname{Sp} x$. Donc

$$\operatorname{Sp} x \subseteq \bar{B}(0,\rho(x)).$$

Supposons maintenant que $r < \rho(x)$. Il faut démontrer que $\operatorname{Sp} x \not\subseteq \bar{B}(0,r)$; Autrement dit, qu'il existe $\lambda \in \operatorname{Sp} x$, $|\lambda| > r$. Sinon la fonction $\lambda \longmapsto (\lambda\cdot 1-x)^{-1}$ serait definie dans l'ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > r\}$ et elle y serait analytique. Or l'expansion en série convergente

$$(\lambda\cdot 1-x)^{-1} = \lambda^{-1}[1-\lambda^{-1}x]^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda^{-1}x]^n$$

est valable toujours lorsque $|\lambda| > \|x\|$, et par conséquent serait valable pour tout $|\lambda| > r$. Par conséquent la suite $\{\|\lambda^{-n}x^n\|\}_{n\geq 0}$ serait borné pour tout $|\lambda| > r$. Choisissons $s, s_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\rho(x) > s > s_1 > r$. Par définition

$$\|x^n\| > s^n > s_1^n \quad n \geq n_o, \quad n_o \text{ suffisamment grand}$$

et $\|[s_1^{-1}x]^n\| > [s_1^{-1}s]^n$ qui est evidemment une suite non-bornée.

Il reste à demontrer que la limite $\lim \|x^n\|^{1/n}$ existe. Soit $m \in \mathbb{N}$; Par l'algorithme d'Euclide il existe pour tout $n \in N$ $p(n), q(n) \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq q(n) < m$ et

$$n = p(n)m + q(n).$$

Posons $\alpha_k = \|x^k\|$. Alors $\alpha_{k+\ell} \leq \alpha_k \alpha_\ell$ et par conséquent

$$\alpha_n \leq [\alpha_m]^{p(n)} \alpha_{q(n)}$$

$$[\alpha_n]^{1/n} \leq [\alpha_m]^{p(n)/n} [\alpha_{q(n)}]^{1/n} .$$

Puisque $0 \leq q(n) < m$, on a que $[\alpha_{q(n)}]^{1/n} \to 1$. On en déduit que

$$\lim \operatorname{Sup} [\alpha_n]^{1/n} \leq \lim [\alpha_m]^{p(n)/n} = \alpha_m^{1/m}$$

pour n'importe quel $m \in \mathbb{N}$. Par conséquent

$$\lim \operatorname{Sup} [\alpha_n]^{1/n} \leq \inf [\alpha_m^{1/m}] \leq \lim \inf [\alpha_m^{1/m}]. \quad \square$$

<u>Définition</u>. On appel $\rho(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ le <u>rayon spectral</u> de x.

Il se peut que $\rho(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Si c'est le cas on dit que x est un élément <u>nilpotent generalisé</u>.

<u>Corollaire</u>. Si A est une algèbre de Banach commutative ayant un element unité. Alors

$$\rho(x) = \operatorname{Sup} \{ |\hat{x}(\omega)| : \omega \in \hat{A}\} \qquad x \in A.$$

Ceci est une conséquence immediate du fait que pour telles algèbres

$$\operatorname{Sp} x = \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \hat{A}\}. \quad \square$$

En particulier $x \in A$ est un element nilpotent generalisé ssi la transformée de Gelfand $\hat{x}$ de x est nul.

Exercices

Soient G un groupe discret commutatif (denoté additivement) et

$$\alpha : G \to [0,\infty[$$

une fonction telle que $\alpha(0) = 1$ et

$$\alpha(x+y) \leq \alpha(x)\alpha(y) \qquad x,y \in G.$$

Une telle fonction s'appel <u>fonction de poids</u>.

$\ell^1_\alpha(G)$ est l'espace de fonctions $\phi : G \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sum_{x \in G} |\phi(x)|\alpha(x) < \infty.$$

Si $\phi \in \ell^1_\alpha(G)$ posons

$$\|\phi\|_\alpha = \Sigma|\phi(x)|\alpha(x).$$

Definissons

$$\phi * \psi(x) = \sum_y \phi(y)\psi(x-y) \qquad x \in G \qquad [1]$$

<u>Exercice 1</u>. $\ell^1_\alpha(G)$ est une algèbre de Banach avec élément unité, [où la multiplication est ⟨⟨ $*$ ⟩⟩].

<u>Définition</u>. Une fonction $\omega : G \to \mathbb{C}-\{0\}$ est un α-<u>caractère</u> ssi

(a) $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y) \qquad x,y \in G$

(b) $|\omega(x)| \leq \alpha(x) \qquad x \in G$

$\hat{G}^{\alpha}$ est l'ensemble de α-caractères de G.

<u>Exercice 2</u>. Si ω est un α-caractère de G alors

$$\tilde{\omega}(\phi) = \sum_{x\in G} \phi(x)\omega(x)$$

est bien défini et $\tilde{\omega}$ est un caractère de $\ell^1_\alpha(G)$. En outre $\omega \mapsto \tilde{\omega}$ est une bijection $\hat{G}^{\alpha} \to \ell^1_\alpha(G)\hat{}$.

Definir une application $\omega \to \bar{\omega}$ $\ell^1_\alpha(G)\hat{} \to \hat{G}^{\alpha}$ par

$$\bar{\omega}(x) = \omega(\delta_x) \qquad x \in G$$

et montrer que $\omega \to \bar{\omega}$ et $\omega \to \tilde{\omega}$ sont inverses l'une de l'autre. δ_x est la fonction

$$\delta_x(y) = 0 \qquad \text{si} \quad x \neq y$$

$$\delta_x(x) = 1$$

<u>Exercice 3a</u>. Si $\phi \in \ell^1_\alpha(G)$ alors ϕ est inversible dans $\ell^1_\alpha(G)$ ssi

$$\tilde{\omega}(\phi) \neq 0$$

quel que soit l'α-caractère ω de G.

<u>Exercice 3b</u>. Si $\phi \in \ell^1_\alpha(G)$ est tel que

$$\tilde{\omega}(\phi) \neq 0 \qquad \omega \in \hat{G}^{\alpha}$$

alors l'espace vectoriel engendré par les translations de ϕ est dense dans $\ell^1_\alpha(G)$.

<u>Exercice 4</u>. Soit $G = \mathbb{Z}$, α une fonction poids. Il existe $\beta^+, \beta^- > 0$ [qui dependent de α] tels que

$$\hat{G}^{\alpha} \cong \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \beta^+ \geq |\lambda| \geq \beta^-\}.$$

Montrer que $\omega \mapsto \omega(1)$ est un homeomorphisme.

Dans le cas $G = \mathbb{Z}$ on identifie $\ell^1_\alpha(\mathbb{Z})$ à l'anneau

$$\Gamma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \beta^+ \geq |\lambda| \geq \beta^-\}.$$

Si $\lambda \in \Gamma_\alpha$ alors

$$\lambda(\phi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \phi(x)\lambda^x$$

et donc

$$\hat{\phi}(\lambda) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \phi(x)\lambda^x.$$

<u>Exercice 5</u>. La transformée de Gelfand applique $\ell^1_\alpha(\mathbb{Z})$ sur un espace de fonctions analytiques dans l'interieur de l'anneau Γ_α.

Soit $\mathbb{T}$ le groupe $\{\theta \in \mathbb{C}\colon |\theta| = 1\}$. D'après 5, $\mathbb{T}$ est naturellement l'espace de 1-caractères [ou simplement caractères] de $\mathbb{Z}$. Donc si $\theta \in \mathbb{T}$ on associe le caractère

$$\theta(x) = \theta^x .$$

<u>Definition</u>. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$; la <u>série de Fourier de</u> f est la fonction $f^\vee\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$f^\vee(x) = [2\pi]^{-1} \int_{\mathbb{T}} f(\theta)\theta^{-x}\, d\theta \qquad [2]$$

$$= [2\pi]^{-1} \int_0^{2\pi} f(\exp is)\exp{-isx}\,ds \qquad [3]$$

[La valeur de l'integrale dans [2] est par définition donnée par [3]].

Si $\phi \in \ell^1(\mathbb{Z})$ on definit

$$\hat{\phi}(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \phi(x)\theta^x \qquad \in C(\mathbb{T}).$$

On utilise les resultats suivants

(i) $f \mapsto f^{\vee}$ est une application isométrique surjective

$$L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$

(ii) $\phi \mapsto \phi^{\wedge}$ admet une extension continue

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$$

(iii) Si $f \in C(\mathbb{T})$ [de façon que $f \in L^2(\mathbb{T})$ et que $f^{\vee} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ par (i)] alors

$$f = [f^{\vee}]^{\wedge} .$$

<u>Exercice 6</u>. Si $f \in C(\mathbb{T})$ est telle que $f(\theta) \neq 0$ si $\theta \in \mathbb{T}$ et

$$f^{\vee} \in \ell^1(\mathbb{Z})$$

alors

$$[1/f]^{\vee} \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

[Par (iii)

$$f = [f^{\vee}]^{\wedge} .$$

Conclure par l'exercices 3a et 4 que $f^{\vee} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est inversible].

<u>Exercice 7</u>. Soit A une algèbre de Banach commutative avec unité. Si l'espace vectoriel engendré par $\{x^n\}_{n\geq 0}$ est dense dans A alors l'application $\hat{A} \to \mathrm{Sp}\, x$ donnée par

$$\omega \mapsto \omega(x)$$

est un homeomorphisme.

<u>Exercice 8</u>. Soit $D = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq 1\}$ et $A \subseteq C(D)$ l'algèbre des fonctions continues qui sont analytiques dans l'interieur de D. Determiner $\hat{A}$.

Appendice - Fonctions analytiques.

Définition. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, E un espace de Banach complexe. Une fonction $f\colon U \to \mathbb{C}$ est analytique au point $\lambda_o \in U$ ssi il existe une série

$$\sum_{n\geq 0} (\lambda-\lambda_o)^n a_n$$

$a_n \in E$ telle que

1. $\sum_{n\geq 0} (\lambda-\lambda_o)^n a_n$ est absolûment convergente dans une boule ouverte $B(\lambda_o,r)$.

2. Pour $\lambda \in B(\lambda_o,r)$

$$f(\lambda) = \sum_{n\geq 0} (\lambda-\lambda_o)^n a_n .$$

Une fonction f definie dans $\{\eta\colon |\eta| > r\}$ est analytique à l'infini ssi

$$\lambda \longmapsto f(\lambda^{-1})$$

possède une extension analytique à 0. Autrement dit il existe une série

$$\sum_{n\geq 0} \lambda^{-n} a_n$$

$a_n \in E$ telle que

1. $\sum_{n\geq 0} \lambda^{-n} a_n$ est absolûment convergent dans $|\eta| > r$.

2. $f(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^{-n} a_n \qquad |\eta| > r.$

Nous utiliserons les deux resultats suivants:

Théorème A. Soi $f\colon \mathbb{C} \to E'$ une fonction analytique bornée. Alors f est constante.

Théorème B. Soit $\sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n$ une série dans E absolûment convergente dans la boule ouverte $B(0,r)$. Si $R > r$ et

$$f: B(0,R) \to E$$

est une fonction analytique telle que

$$f(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n \qquad |\lambda| < r$$

alors $\sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n$ est absolûment convergente dans $B(0,R)$ et

$$f(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n .$$

Un resultat analogue est valablre autour du point ∞ de l'esphère de Riemann.

On va réduire ces deux resultats "Banachiques au resultats scalaires correspondants.

Démonstration du Théorème A: Si $y \in E^*$ alors

$$f_y: \lambda \to \langle f(\lambda),y\rangle$$

est analytique $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et bornée. Par le théorème de Liouville f_y est constante. Or ceci entraîne que f est constante.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tou $y \in E^*$

$$\langle f(\lambda)-f(0),y\rangle = f_y(\lambda) - f_y(0) = 0.$$

Donc por Hahn Banch:

$$f(\lambda) = f(0).$$

Démonstration du Théorème B: Quel que soit $y \in E^*$,

$$f_y(\lambda) = \langle f(\lambda),y\rangle = \sum_{n\geq 0} \lambda^n \langle a^n,y\rangle$$

pour $|\lambda| < r$. Donc

$$f_y(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n \langle a_n, y\rangle$$

pour $|\lambda| < R$ la série étant absolûment convergente.

En particulier si $y \in E^*$

$$|\lambda^n \langle a_n, y\rangle| = |\langle \lambda^n a_n, y\rangle|$$

est une suite bornée. Par Banach Steinhaus

$$\sup_{n\geq 0} \|\lambda^n a_n\| < \infty$$

quel que soit $|\lambda| < R$. Ceci entraîne que la série $\sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n$ est absolûment convergente dans $B(0,R)$. Par hypothèse si $|\lambda| < r$

$$f_y(\lambda) = \langle \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n, y\rangle$$

$$= \sum_{n\geq 0} \lambda^n \langle a_n, y\rangle .$$

Donc pour $|\lambda| < R$

$$f_y(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n \langle a_n, y\rangle$$

$$= \langle \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n, y\rangle .$$

Par Hahn-Banach

$$f(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n .$$

§3. Le Théorème d'isomorphisme.

Proposition 1. Soit A une C^*-algèbre commutative ayant un element unité. Alors la transformée de Gelfand $x \mapsto \hat{x}$ est un $*$-morphisme.

Supposons que $x = x^*$, et $\omega \in \hat{A}$. On va montrer que $\hat{x}(\omega) = \omega(x) \in \mathbb{R}$. Soit $\omega(x) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ posons $z = x + i\lambda \cdot 1$. Donc

$$\omega(z) = \alpha + i\beta + i\cdot\lambda$$

$$|\omega(z)|^2 = \alpha^2 + (\beta+\lambda)^2 .$$

Or

$$|\omega(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|zz^*\| = \|(x^2+\lambda^2)\|$$

$$\leq \|x\|^2 + \lambda^2$$

et par conséquent pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\lambda \leq \|x\|^2$$

ce qui entraîne que $\beta = 0$, et $\omega(x) = \alpha \in \mathbb{R}$.

On en déduit que si $z = x+iy$, $x = x^*$, $y = y^*$:

$$\omega([x+iy]^*) = \omega(x-iy) = \omega(x) - i\omega(y) = [\overline{\omega(x)+i\omega(y)}]$$

puisque $\omega(x), \omega(y) \in \mathbb{R}$. Autrement dit, ω est un $*$-morphisme. □

<u>Théorème</u>. La transformée de Gelfand est un isomorphisme isométrique

$$A \to C(\hat{A}).$$

Soit $x \in A$; alors si $y = xx^*$ il est clair que $y = y^*$, et donc $\|y^2\| = \|y\|^2$. Par induction on démontre

$$\|y^m\| = \|y\|^m \qquad m = 2^n$$

ce qui implique par la formule du rayon spectral que

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y^m\|^{\frac{1}{m}} = \|\hat{y}\|_\infty .$$

Donc

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| = \|\widehat{xx^*}\|_\infty = \|\hat{x}\hat{x}^*\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2$$

et $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$.

Par conséquent l'image de A sous $\wedge$ est une sous-algèbre involutive normiquement fermée. En plus cette algebra contient $1_{\hat{A}} = 1^\wedge$ et separe les points de $\hat{A}$. Par Stone-Weierstrass elle est $C(\hat{A})$. □

<u>Exemple</u>. Supposons que X soit un espace compact, et posons $A = C(X)$. Alors il existe une application naturelle $\omega \mapsto T_\omega$ de X à $\hat{A}$ donnée par

$$T_\omega(x) = x(\omega).$$

<u>Lemme</u>. T est bijective et bicontinue.

Si $\omega_\lambda \to \omega$ alors

$$T_{\omega_\lambda}(x) = x(\omega_\lambda) \to x(\omega) = T_\omega(x) \qquad x \in A$$

et donc $T_{\omega_\lambda} \to T_\omega$. Si $\omega \neq \omega_1$ alors il existe $x \in A$ tel que $x(\omega) \neq x(\omega_1)$. Autrement dit $T_\omega(x) \neq T_{\omega_1}(x)$ et d'où que $T_\omega \neq T_{\omega_1}$. L'image de T est un ensemble compact K. Si $K \neq \hat{A}$, il existe $f \neq 0$, $f \in C(\hat{A})$ tel que $f|K = 0$. Soit $f = \hat{x}$, $x \in A$. Or si $\omega \in X$

$$x(\omega) = T_\omega(x) = \hat{x}(T_\omega) = f(T_\omega) = 0,$$

et donc $x = 0$, qui contradit $x \neq 0$. □

Soient X, Y des espaces compactes, $p: X \to Y$ une application continue $p_*: C(Y) \to C(X)$ donné par $p_*(f) = f \circ p$ est evidemment un $*$-morphisme unitaire [c'est à dire qui applique l'élément unité de $C(Y)$ sur celui de $C(X)$].

Proposition 2. L'application $p \mapsto p_*$ est une bijection entre les applications continues $X \to Y$ et les $*$-morphismes unitaires $C(Y) \to C(X)$. En plus p_* est injectif ssi p est surjectif.

Injectivité: Si $p \neq p_1$, il existe $\omega \in X$ tel que $p(\omega) \neq p_1(\omega)$ et $f \in C(Y)$ tel que $fp_1(\omega) = 1$, $fp(\omega) = 0$. Donc

$$p_{1*}(f) \neq p_*(f).$$

Surjectivité: Soit $\pi: C(Y) \to C(X)$ un $*$-morphisme unitaire. Il existe une seule application $p: X \to Y$ telle que

$$\pi(f)(\omega) = f(p(\omega)) \qquad \omega \in X, \quad f \in C(Y) \qquad [1]$$

[$f \mapsto \pi(f)(\omega)$ est un caractère de $C(Y)$ quel que soit $\omega \in X$. Donc il existe un seul $p(\omega) \in Y$ satisfaisant à [1]]. Si $\omega_\lambda \to \omega$ dans Y alors $\pi(f)(\omega_\lambda) \to \pi(f)(\omega)$ [$f \in C(Y)$] et par conséquent

$$f(p(\omega_\lambda)) \to f(p(\omega)) \quad \text{pour} \quad f \in C(Y).$$

Il s'ensuit que $p(\omega_\lambda) \to p(\omega)$ dans Y [par le lemme anterieur]. Or la condition [1] est exactement la condition

$$\pi(f) = p_*(f) \qquad f \in C(Y).$$

Finalement $p(X) \neq Y$ ssi il existe une fonction continue complexe f sur Y, telle que $f \neq 0$ et $f|p(X) = 0$, c'est à dire $f \circ p = p_*(f) = 0$. Donc $p(X) \neq Y$ ssi le morphisme $p_*: C(Y) \to C(X)$ n'est pas injectif.

Corollaire. Soit A une C^*-algèbre commutative, $B \subseteq A$ une sous C^*-algèbre et $x \in B$. Alors le spectre de x en tant qu'élément de A est le même qu'en tant que élément de B.

On peut supposer $A = C(X)$, $B = C(Y)$. L'inclusion $B \hookrightarrow A$ est composition avec une surjection $p: X \to Y$. Or le spectre de $f \in C(Y)$ est l'ensemble de valeurs de f qui est identique à l'ensemble de valeurs de $p_*(f)$. $\square$

En particulier $x \in B$ est inversible en tant qu'élément de B ssi il l'est en tant qu'élément de A.

Exemple. Supposons qu'il existe $x \in A$ tel que les sommes finies $\sum_{k,\ell} x^k(x^*)^\ell$ soient denses dans A; Autrement dit A est la C^*-algèbre engendrée par x et 1. Alors il existe une application canonique $S: \hat{A} \to \mathbb{C}$ donné par

$$S(\omega) = \omega(x) \qquad \omega \in \hat{A}$$

Lemme. S est un homeomorphisme $\hat{A} \to \mathrm{Sp}\, x$.

$\mathrm{Sp}\, x$ est l'ensemble des valeurs prises par $\hat{x}$, c'est à dire l'image de S; Donc S est surjective. Pour montrer que S est injective, supposons $S(\omega) = S(\omega_1)$. Donc $\omega(x) = \omega_1(x)$ et par conséquent

$$\omega\Big(\sum_{k,\ell} x^k(x^*)^\ell\Big) = \sum_{k,\ell} \omega(x)^k\, \overline{\omega(x)}^\ell = \omega_1\Big(\sum_{k,\ell} x^k(x^*)^\ell\Big).$$

On en deduit par densité que $\omega = \omega_1$. Finalement, S est continue car si $\omega_\lambda \to \omega$ on a que $\omega_\lambda(x) \to \omega(x)$; Autrement dit $S(\omega_\lambda) \to S(\omega)$. Donc S est continue et puisque $\hat{A}$ est compact $S: \hat{A} \to \mathrm{Sp}\, x$ est un homeomorphisme.

Exercices

Définition. Soit X un espace topologique. Une compactification de X est un espace (de Hausdorff) compact Y et une application continue $\gamma: X \to Y$ telle que $\gamma(X)$ est dense dans Y.

Exercice 1a. Si $\gamma: X \to Y$ est une compactification alors

$$\gamma_*[C(Y)] = \{f\circ\gamma: f \in C(Y)\}$$

est une sous-C^*-algèbre de $C^b(X)$. Toute sous-C^*-algèbre $B \subseteq C^b(X)$ est de cette forme.

Exercice 1b. Si $\gamma: X \to Y$, $\gamma': X \to Y'$ sont des compactifications alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\gamma'"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\ & Y' \end{tikzcd}$$

ssi $\gamma'_*[C(Y')] \subseteq \gamma_*[C(Y)]$. L'application α si elle existe est unique.

Exercice 1c. X possède une compactification universelle; Definir explicitement cette notion.

Exercice 2. Soit X un espace discret, Y la compactification universelle de X. Il existe une bijection entre les points de Y et les ultrafiltres dans X.

Exercice 3. Soit A une C^*-algèbre. Si $x \in A$ est autoadjoint $[x=x^*]$ alors $\mathrm{Sp}\, x \subseteq [0,\infty[$ ssi il existe $y \in A$ tel que

$$x = y^2, \quad y = y^*.$$

Exercice 4. Soit $x \in A$ autoadjoint; Alors $\|x-1\| \leq 1$ entraîne que $\mathrm{Sp}\, x \subseteq [0,\infty[$.

Exercice 5. Soit A une C^*-algèbre commutative. Les conditions suivantes sont equivalentes:

1. $\hat{A}$ est un espace topologique eparpillé [les parties à la fois ouvertes et fermées de $\hat{A}$ separent les points de $\hat{A}$].

2. A est engendrée comme C^*-algèbre par les projections autoadjointes de A.

3. Il existe une suite croissante $\{A_n\}$ de sous-C^*-algèbres de dimension finie telle que $\bigcup A_n$ est dense dans A.

§4. Representations.

Soit A une C^*-algèbre ayant un élément unité, H un espace de Hilbert. Une représentation de A dans H est un morphisme involutif $\pi: A \to \mathcal{L}(H)$ tel que $\pi(1) = 1_H$. En particulier si $x \in A$, $\xi,\eta \in H$ on a que

$$\langle \pi(x)\xi,\eta\rangle = \langle \xi,\pi(x^*)\eta\rangle .$$

Deux représentations π, π_1 de A dans H, H_1 resp. sont unitairement equivalentes ssi il existe un operateur unitaire $U: H \to H_1$ tel que

$$U\pi(x)U^* = \pi_1(x) \qquad x \in A.$$

Un sous espace fermé $H_1 \subseteq H$ est invariante ssi $\eta \in H_1$

et $x \in A$ entraînent $\pi(x)\eta \in H_1$.

Un sous espace invariante H_1 est <u>monogène</u> ssi il existe un vecteur $\xi \in H_1$ appelé <u>vecteur totalisateur</u> tel que $\{\pi(x)\xi : x \in A\}$ soit dense dans H_1.

<u>Proposition</u>. Soit π une représentation de la C^*-algèbre A dans H. Alors il existe une famille $\{H_i\}_{i\in I}$ de sous-espaces fermés monogènes et deux-à-deux orthogonaux telle que

$$H = \bigoplus_{i\in I} H_i.$$

Par le lemme de Zorn, il existe une famille $\{H_i\}_{i\in I}$ de sous-espaces monogènes et deux-à-deux orthogonaux, qui est maximale parmi les familles ayant ces proprietes. $H_o = \bigoplus_{i\in I} H_i$ est invariant; Si $H_o \neq H$, alors $H_o^\perp$ est invariant et $H_o^\perp \neq \{0\}$. Si $\xi_o \in H_o$ alors

$$H_1 = \{\pi(x)\xi : x \in A\}^-$$

est monogène. Mais ceci contradit la maximalité de la famille $\{H_i\}$. □

<u>Exercices</u>

<u>Definition</u>. Soit A une C^*-algèbre ayant un élément unité. Un <u>état</u> de A est une fonctionnelle linéaire $\phi: A \to \mathbb{C}$ telle que

1. $\phi(x^*x) \geq 0$
2. $\phi(1) = 1$.

Posons

$$\langle x,y\rangle^{\sim} = \phi(y^*x)$$

$$\|x\|^{\sim} = [\langle x,x\rangle^{\sim}]^{1/2}$$

$$N_{\sim} = \{x \in A : \|x\|^{\sim} = 0\}.$$

<u>Exercice 1a</u>. $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme sesquilinéaire non-negative et $\|\ \ \|^{\sim}$ est une seminorme sur A.

<u>Exercice 1b</u>. $N_{\sim}$ est un espace vectoriel et

$$\|x/N_{\sim}\|_{\phi} = \|x\|^{\sim} \qquad x \in A$$

definit une norme sur l'espace quotient $A/N_{\sim}$. Par ailleurs

$$\langle x/N_{\sim},\ y/N_{\sim}\rangle_{\phi} = \langle x,y\rangle^{\sim} \qquad x,y \in A$$

est une forme sesquilinéaire non-degenerée sur $A/N_{\sim}$ et

$$\|x/N_{\sim}\|_{\phi} = \langle x/N_{\sim},\ x/N_{\sim}\rangle_{\phi}^{1/2}.$$

Si $x \in A$, $\tilde{\pi}(x): A \to A$ est l'operateur linéaire

$$\tilde{\pi}(x)\cdot y = x\cdot y\ .$$

<u>Exercice 1c</u>. $\|\tilde{\pi}(x)y\|^{\sim} \leq \|x\|\ \|y\|^{\sim}$

$x,y \in A$.

[Demontrer que quel que soit $y \in A$, il existe $h \in A$ tel que

$$\|y\|^2\cdot 1 - y^*y = h^*h$$

et donc

$$\|y\|^2\ x^*x - x^*y^*yx = x^*h^*hx].$$

<u>Exercice 1d</u>. Si $x \in A$, $\tilde{\pi}(x)N_{\sim} \subseteq N_{\sim}$. En particulier il existe un operateur

$$\pi(x) : A/N_\sim \to A/N_\sim$$

tel que

$$\pi(x)y/N_\sim = [\tilde{\pi}(x)y]/N_\sim$$

$\pi(x)$ est un operateur borné.

Soit H_ϕ le completé de $A/N_\sim$ par rapport à la norme $\| \ \|_\phi$.

<u>Exercice 1e</u>. Si $x \in A$, $\pi(x)$ possède une extension continue $\pi_\phi(x)$

$$\pi_\phi(x) : H_\phi \to H_\phi$$

π_ϕ est une représentation de A.

<u>Exercice 1f</u>. π_ϕ est monogène.

<u>Exercice 2</u>. Toute représentation monogène de A est unitairement equivalente à une représentation π_ϕ, ϕ un état.

[Soit π une représentation de A dans H et ϕ l'état

$$\phi(x) = \langle \pi(x)\xi_o, \xi_o \rangle$$

où ξ_o est un vecteur totalisateur. Definir une application

$$U : H_\phi \to H$$

par la condition

$$U[\pi_\phi(x)1/N_\sim] = \pi(x)\xi_o. \quad]$$

<u>Définition</u>. La représentation π_ϕ s'appel la <u>représentation GNS</u> [Gelfand-Naimark-Segal] associée à l'état ϕ.

§5. Représentations spectrales.

Définition. Soient

1. X un espace compact, Y un espace localement compact
2. $p: Y \to X$ une application continue
3. ν une mesure de Radon sur Y.

Alors la <u>représentation spectrale</u> de $C(X)$ associée à (p,Y,ν) est la représentation π_1 agissant sur $L^2_\nu(Y)$ définie par

$$[\pi_1(f)\psi](\omega) = f\circ p(\omega)\psi(\omega) \qquad f \in C(X), \quad \psi \in L^2_\nu(Y).$$

Remarques (i). La mesure σ-additive ν dans cette définition est l'extension regulier de la mesure de Radon ν à la σ-algèbre borelienne. $L^2_\nu(Y)$ est l'espace construit à partir de cette mesure.

(ii) On vérifie que $\pi_1(f)$ est effectivement un opérateur borné sur $L^2_\nu(Y)$:

$$\|\pi_1(f)\psi\|^2_{L^2_\nu(Y)} = \int_Y |f\circ p(\omega)|^2 \ |\psi(\omega)|^2 \ d\nu(\omega)$$
$$\leq \sup_{x\in X} |f(x)|^2 \ \|\psi\|^2_{L^2_\nu(Y)} .$$

De même π_1 est une représentation de $C(X)$.

Théorème. Soient X un espace compact, $A = C(X)$ et π une représentation de A dans l'espace de Hilbert H. Alors il existe un espace localement compact Y, une application continue $p: Y \to X$ et une mesure de Radon ν sur Y tels que la représentation spectrale π_1 associée à (p,Y,ν) agissant sur $L^2_\nu(Y)$ soit unitairement equivalent à π.

Soit $\{H_i\}$ une famille d'espaces fermés invariants, monogènes et deux-à-deux orthogonaux telle que $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$. Soit ξ_i un vecteur totalisateur dans H_i; Posons $X_i = X$ pour $i \in I$ et soit $Y = \sum_{i\in I} X_i$ c'est-à-dire la somme disjointe des X_i. Il existe une application canonique $p: Y \to X$ telle que $p|X_i = h_i$ où h_i est l'identification $X_i \to X$. Finalement on définit une mesure de Radon ν sur Y de la façon suivante:

$$\nu(f) = \sum_{i\in I} \langle \pi(f|X_i)\xi_i, \xi_i\rangle \qquad f \in C_o(Y). \qquad [1]$$

D'abord si $f \in C_o(Y)$, $f|X_i = 0$ pour presque tout indice $i \in I$. Donc la somme dans [1] est en realité une somme finie. Deuxièmement on identifie $C(X)$ à $C(X_i)$ par h_i.

Si π_1 est la représentation de l'enoncé du théorème alors π_1 et π sont unitairement equivalents.

Soit $f \in C_o(Y)$. Posons

$$Uf = \sum_{i\in I} \pi(f|X_i)\xi_i .$$

(i) L'application U est isométrique et possède une image dense.

En effet

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2_\nu(Y)} &= \int_Y |f(\omega)|^2 \, d\nu(\omega) = \sum_{i\in I} \langle \pi(|f|X_i|^2)\xi_i, \xi_i\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \|\pi(f|X_i)\xi_i\|^2 = \Big\| \sum_{i\in I} \pi(f|X_i)\xi_i\Big\|^2 \\ &= \|Uf\|^2. \end{aligned}$$

L'image de U contient les vecteurs $\pi(f)\xi_i$, $f \in C(X)$, $i \in I$ qui sont totaux dans H. Donc U a une image dense.

Puisque $C_o(Y)$ est dense dans $L^2_\nu(Y)$ il s'ensuit de (i) que U possède une extension continue unique $L^2_\nu(Y) \to H$. Denotons cette extension par $\bar{U}$. $\bar{U}$ est unitaire puisque son image est fermée et dense.

(ii) $\bar{U}$ est un opérateur entrelaçant.

Pour démontrer ceci, supposons que $\psi \in C_o(Y)$ et $f \in C(X)$:

$$[U\,\pi_1(f)\psi] = U \sum_{i\in I} f\circ h_i[\psi|X_i]$$

$$= \sum_{i\in I} \pi(f\circ h_i[\psi|X_i])\xi_i = \pi(f) \sum_{i\in I} \pi([\psi|X_i])\xi_i$$

$$= \pi(f)U\psi.$$

Par continuité il s'ensuit que

$$U\,\pi_1(f)\psi = \pi(f)U\psi$$

pour tout $\psi \in L^2_\nu(Y)$. □

Il suit de la démonstration que si π est monogène alors on peut prendre $Y = X$ et $p = id$.

<u>Appendice</u> - <u>Compléments de la Théorie de la mesure</u>.

Soit Z un espace localement compact.

La σ-<u>algèbre de Borel</u> dans Z est la σ-algèbre engendrée par les parties ouvertes de Z.

Une mesure σ-additive sur la σ-algèbre des boreliens est <u>regulier</u> ssi

(i) Si $K \subseteq Z$ est compact, $\nu(K) < \infty$

(ii) Si $E \subseteq Z$ est borelien alors

$$\nu(E) = \inf\{\nu(G) : G \supseteq E,\ G \text{ ouvert}\}$$

(iii) Si $E \subseteq Z$ est borelien et $\nu(E) < \infty$ alors

$$\nu(E) = \operatorname{Sup}\{\nu(K) : K \subseteq E,\ K \text{ compact}\}.$$

Pour les démonstration du théorème suivant on renvoie le lecteur à Rudin, [[4], Théorème 2.14].

<u>Théorème A</u>. Soit Z un espace localement compact, ν une fonctionnelle linéaire sur $C_o(Z)$ telle que $\nu(f) \geq 0$ si $f \geq 0$. Alors il existe une mesure σ-additive regulier sur les boreliens de Z denoté aussi par ν telle que

$$\int f(\omega)d\nu(\omega) = \nu(f)$$

pour tout $f \in C_o(Z)$. ν avec ces propriétés est unique.

<u>Définition</u>. Une fonctionnelle non-negative ν sur $C_o(Z)$ est appellée <u>mesure de Radon</u>.

<u>Théorème B</u>. Soit ν une mesure regulier sur l'espace localement compact Z. Alors $C_o(Z)$ est dense dans $L^2_\nu(X)$.

Evidemment il suffit de démontrer que si $E \subseteq X$ est borelien avec $\nu(E) < \infty$ et $\varepsilon > 0$ il existe $f \in C_o(Z)$ tel que $\|\chi_E - f\|_{L^2_\nu(Z)} \leq \varepsilon$. Or par (ii) et (iii) il existe G ouvert, K compact avec

$$K \subseteq E \subseteq G$$

$$\nu(G-K) \leq \varepsilon\ .$$

Soit $f \in C_o(Z)$ tel que

$$0 \le f \le 1$$

$$f(\omega) = 1 \qquad \omega \in K$$

$$\operatorname{supp} f \subseteq G \; .$$

Alors $|f - \chi_E| \le \chi_G - \chi_K = \chi_{G-K}$ et donc

$$\|f-\chi_E\|_{L^2_\nu(Z)} \le \nu(G-K) \le \varepsilon . \qquad \square$$

La σ-algèbre de Baire est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle les fonctions $f \in C_o(Z)$ sont mesurables; Autrement dit la σ-algèbre de Baire est engendrée par les ensembles

$$\{\omega \in Z: f(\omega) \ge \alpha\}$$

où $f \in C_o(Z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème C. Supposons que Z soit compact et ν, ν_1 des mesures σ-additives finies sur la σ-algèbre de Baire. Si

$$\int_Z f(\omega)d\nu(\omega) = \int_Z f(\omega)d\nu_1(\omega)$$

pour tout $f \in C(Z)$ alors $\nu = \nu_1$.

Définition. Soit (X,ν) un espace mesuré. Un ensemble mesurable $E \subseteq X$ est localement ν-nul ssi $F \subseteq E$ mesurable entraîne $\nu(F) = +\infty$ ou $\nu(F) = 0$.

Si P est une fonction propositionelle sur X, alors P est valable localement presque partout ssi $\{\omega: P(\omega)$ est faux$\}$ est localement ν-nul.

Proposition. Soit E un ensemble mesurable σ-fini [réunion denombrable d'ensembles mesurables de mesure finie]. Alors E est localement ν-nul ssi E est ν-nul.

En particulier si $\phi \in L^p_\nu(X)$, $1 \le p < \infty$ $\phi(\omega) = 0$ presque partout ssi $\phi(\omega) = 0$ localement presque partout.

§6. Operateurs normaux.

Un operateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal ssi

$$T^*T = TT^*.$$

Evidemment T est normal ssi la C^*-algebra $C^*(T)$ engendrée par T et 1 est commutative.

Exemple. Soit (Y,ν) un espace mesuré, $g\colon Y \to C$ une fonction mesurable bornée. Alors l'opérateur

$$[\mathfrak{m}_g\psi](\omega) = g(\omega)\psi(\omega)$$

agissant sur $L^2_\nu(Y)$ est normal.

En effect $\mathfrak{m}_g\mathfrak{m}_g^* = \mathfrak{m}_{g\bar{g}} = \mathfrak{m}_g^*\cdot\mathfrak{m}_g$.

Théorème. Soit T un opérateur normal dans un espace de Hilbert. Alors il existe un espace localement compact Y, une mesure de Radon ν sur Y et une fonction continue $g\colon Y \to \mathrm{Sp}\, T$ [en particulier borné] tels que T soit unitairement equivalent à l'opérateur $\mathfrak{m}_g$ agissant sur $L^2_\nu(Y)$.

On dit que les opérateurs T et T_1 sont unitairement

<u>equivalents</u> ssi il existe un opérateur unitaire U tel que

$$T_1 = UTU^*.$$

<u>Lemme</u>. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal alors le spectre de T comme élément de $C^*(T)$ est identique à celui de T comme élément de $\mathcal{L}(H)$.

Il faut démontrer que $S = T-\lambda\cdot 1$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$ ssi il est inversible dans $C^*(T)$. Evidemment S inversible dans $C^*(T)$ entraîne S inversible dans $\mathcal{L}(H)$. Supposons S inversible dans $\mathcal{L}(H)$. Or la C^*-algèbre A engendrée par S^{-1}, S et 1 est commutative car

$$S^{-1}S^* - S^*S^{-1} = S^{-1}[S^*S-SS^*]S^{-1} = 0.$$

Puisque S est inversible dans A, il est inversible dans $C^*(T)$ [Corollaire de la proposition 2, §3]. $\square$

<u>Démonstration du théorème</u>:

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, $A = C^*(T)$ et h la transformé de Gelfand de T. h est donc une fonction continue $\hat{A} \to \mathbb{C}$ et par [Proposition 3, §2] et le lemme précedant h est une application continue $\hat{A} \to \operatorname{Sp} T$. Soit π: $C(\hat{A}) \to A \subseteq \mathcal{L}(H)$ l'inverse de la transformée de Gelfand. π est un $*$-morphisme; Autrement dit π est une représentation de $C(\hat{A})$ dans H. Par le théorème spectral il existe un espace localement compact Y, une mesure de Radon ν sur Y et une application continue p: $Y \to \hat{A}$ telle que π soit unitairement equivalent à π_1

$$[\pi_1(f)\psi](\omega) = f\circ p(\omega)\psi(\omega) \qquad \omega \in Y$$

$\omega \in Y$, $\psi \in L^2_\nu(Y)$. C'est-à-dire il existe un unitaire U tel que

$$\pi_1(f) = U\pi(f)U^*.$$

En particulier

$$\pi_1(h) = U\pi(h)U^* = UTU^*$$

où

$$[\pi_1(h)\psi](\omega) = h\circ p(\omega)\psi(\omega). \quad \square$$

Exercices

Soit U l'opérateur de translation dans $\ell^2(Z)$

$$[U\psi](x) = \psi(x-1).$$

U est unitaire et donc normal.

Soit $\psi \mapsto \psi^\wedge$ l'application

$$\ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$$

donnée par

$$\psi^\wedge(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \psi(x)\theta^x \qquad \theta \in \mathbb{T}.$$

On sait que $\psi \mapsto \psi^\wedge$ est bien defini et unitaire.

Exercice 1a. Si $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ alors

$$[U\psi]^\wedge(\theta) = \theta\psi^\wedge(\theta).$$

Exercice 1b. Determiner explicitement un opérateur de multiplication unitairement equivalent à U.

Exercice 1c. Faire la même chose pour l'opérateur

$$U^N: \ell^2(\mathbb{Z},H^N) \to \ell^2(\mathbb{Z},H^N)$$

défini par

$$[U^N\psi](x) = \psi(x-1) \qquad x \in \mathbb{Z}$$

[H^N est l'espace

$$\begin{array}{lll} \mathbb{C}^N & \text{si} & N < \infty \\ \ell^2(\mathbb{N}) & \text{si} & N = +\infty \end{array}$$

et $\ell^2(\mathbb{Z},H^N)$ sont les suites $\psi\colon \mathbb{Z} \to H^N$ de carré integrable.]

Soit U, H, U', H' des unitaires ayant les propriétés suivantes:

Il existe des sous-espaces fermés $H_o \subseteq H$, $H'_o \subseteq H'$ tels que

(i) $U\,H_o \subseteq H_o$

(ii) $\bigcap\limits_n U^n\,H_o = \{0\}$

(iii) $\bigcup\limits_n U^n\,H_o$ est dense dans H

[et les propriétés respectives pour U', H', H'_o].

Par la suite $H \ominus H_1 = H \cap H_1^{\perp}$.

<u>Exercice 2a</u>. Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $U^{n+1}H_o \subseteq U^nH_o$; Si $m \neq n$

$$U^nH_o \ominus U^{n+1}H_o \perp U^mH_o \ominus U^{m+1}H_o \;.$$

Finalement

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} [U^nH_o \ominus U^{n+1}H_o]$$

<u>Exercice 2b</u>. Si $\dim H_o \ominus UH_o = \dim H'_o \ominus U'H'_o$ il existe une suite W_n d'oérateurs unitaires

$$W_n\colon U^nH_o \ominus U^{n+1}H_o \to U'^{\,n}H'_o \ominus U'^{\,n+1}H'_o$$

telle que

$$\begin{array}{ccc} U^nH_o \ominus U^{n+1}H_o & \xrightarrow{W_n} & U'^nH'_o \ominus U'^{n+1}H'_o \\ \downarrow U & & \downarrow U' \\ U^{n+1}H_o \ominus U^{n+2}H_o & \xrightarrow{W_{n+1}} & U'^{n+1}H'_o \ominus U'^{n+2}H'_o \end{array}$$

<u>Exercice 2c</u>. Si $\dim H_o \ominus UH_o = \dim H'_o \ominus U'H_o$, alors U et U' sont unitairement equivalents.

<u>Exercice 2d</u>. U est unitairement equivalent à U^N où

$$N = \dim H_o \ominus UH_o .$$

<u>Exercice 3</u>. Soit $\{T_\lambda\}$ une famille d'opérateurs normaux dans H telle que

$$T_\lambda T_\mu = T_\mu T_\lambda$$
$$T_\lambda T_\mu^* = T_\mu^* T_\lambda \; .$$

Alors il existe un espace localement compact Y, une mesure de Radon ν sur Y et des fonctions continues $g_\lambda : Y \to \mathrm{Sp}\, T_\lambda$ tels que la famille d'opérateurs $\{T'_\lambda\}$ définie par

$$[T'_\lambda \psi](\omega) = g_\lambda(\omega)\psi(\omega) \qquad \psi \in L^2_\nu(Y)$$

est unitairement équivalent à la famille $\{T_\lambda\}$.

[Il faut definir la notion d'équivalence unitaire de <u>familles</u> d'opérateurs].

§7. Homorphismes Spectraux.

Définition. Soit X un espace compact. Un homorphisme spectral est une application $\pi: L^{\infty}(X,\text{Baire}) \to \mathcal{L}(H)$ [H un espace de Hilbert] telle que

(i) π est une représentation de $L^{\infty}(X,\text{Baire})$

(ii) Si $\xi \in H$ alors la fonction

$$\nu_{\xi}(E) = \langle \pi(\chi_E)\xi,\xi\rangle$$

est une mesure σ-additive sur la σ-algèbre de Baire.

Proposition 1. Soit X un espace compact, π une représentation de $C(X)$ dans H. Alors il existe un homorphisme spectral $\tilde{\pi}$ et un seul

$$\tilde{\pi}: L^{\infty}(X,\text{Baire}) \to \mathcal{L}(H)$$

qui prolonge π.

Existence du prolongement. Par le théorème de représentation spectrale on peut supposer que π soit la représentation spectrale de $C(X)$ associé à (p,Y,X). En particulier

$$[\pi(f)\psi](\omega) = f\circ p(\omega)\psi(\omega)$$

pour $f \in C(X)$. Si $f \in L^{\infty}(X,\text{Baire})$, $\psi \in L^2_{\nu}(Y)$ posons

$$[\tilde{\pi}(f)\psi](\omega) = f\circ p(\omega)\psi(\omega). \qquad [1]$$

Puisque $f \in L^{\infty}(X,\text{Baire})$, $f\circ p: Y \to \mathbb{C}$ est borelienne bornée et donc [1] definit effectivement un opérateur borné sur $L^2_{\nu}(Y)$. On démontre sans peine que $\tilde{\pi}$ est une représentation de $L^{\infty}(X,\text{Baire})$.

Pour démontrer (ii), soit $E \subseteq X$ de Baire. Alors,

$$\nu_\xi(E) = \langle \tilde{\pi}(\chi_E)\xi, \xi \rangle = \int_Y \chi_E(p(\omega))|\xi(\omega)|^2 \, d\nu(\omega)$$
$$= \int_{p^{-1}(E)} |\xi(\omega)|^2 \, d\nu(\omega).$$

Par conséquent ν_ξ est une mesure σ-additive sur la σ-algèbre de Baire et (ii) est demontré.

Unicité: Soient $\tilde{\pi}^i$, $i = 1,2$ des prolongements de π qui satisfont aux conditions (i) et (ii). Par (ii) si $\xi \in H$

$$\nu_\xi^i(E) = \langle \tilde{\pi}^i(\chi_E)\xi, \xi \rangle \qquad i=1,2 \qquad [2]$$

sont des mesures σ-additives sur la σ-algèbre de Baire. Or si $f \in L^\infty(X,\text{Baire})$ on va démontrer que

$$\langle \tilde{\pi}^i(f)\xi, \xi \rangle = \int_X f(\omega) d\nu_\xi^i(\omega) \qquad i=1,2 \qquad [3]$$

Si $f = \chi_E$

$$\int_X \chi_E(\omega) d\nu_\xi^i(\omega) = \nu_\xi^i(E) = \langle \tilde{\pi}^i(f)\xi, \xi \rangle$$

par [2]. Par linéarité on conclut que [3] est valable pour tout f en escalier. Puisque ces fonctions sont denses dans $L^\infty(X,\text{Baire})$ [3] est valable pour tout $f \in L^\infty(X,\text{Baire})$.

Par ailleurs $\tilde{\pi}^1$, $\tilde{\pi}^2$ prolongent π. Par [3]

$$\int_X f(\omega) d\nu_\xi^1(\omega) = \int_X f(\omega) d\nu_\xi^2(\omega)$$

pour tout $f \in C(X)$. Par le Théorème C, [Appendice §5] il s'ensuit que les mesures de Baire ν_ξ^1, ν_ξ^2 sont identiques.

Donc

$$\langle \tilde{\pi}^1(f)\xi,\xi\rangle = \langle \tilde{\pi}^2(f)\xi,\xi\rangle \qquad [4]$$

quel que soit $f \in L^\infty(X,\text{Baire})$. Par polarisation on sait que $T \in \mathcal{L}(H)$ est nul ssi $\langle T\xi,\xi\rangle = 0$ pour tout $\xi \in H$. On en conclut que

$$\tilde{\pi}^1(f) = \tilde{\pi}^2(f)$$

quel que soit $f \in L^\infty(X,\text{Baire})$.

Corollaire. Soient $\pi^i\colon L^\infty(X,\text{Baire}) \to \mathcal{L}(H)$, $i=1,2$ des homorphismes spectraux. Si

(1) $C(X)$ est engendré comme C^*-algèbre par 1 et f

(2) $\pi^1(f) = \pi^2(f)$

Alors $\pi^1 = \pi^2$.

On conclut par la continuité de π^1, π^2 dans la norme $\| \ \|_\infty$ de $L^\infty(X,\text{Baire})$ que $\pi^1 = \pi^2$ dans $C(X)$. Or par l'affirmation d'unicité de la Proposition 1, $\pi^1 = \pi^2$ dans $L^\infty(X,\text{Baire})$.

Définition. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Un calcul fonctionnel de Baire pour T est une application $\sigma(T)\colon L^\infty(\text{Sp } T) \to \mathcal{L}(H)$ [que nous denotons par $f \mapsto f(T)$] ayant les propriétés

1. $\sigma(T)$ est un homorphisme spectrale
2. $\sigma(T)(z) = T$ où $z\colon \text{Sp } T \to \mathbb{C}$ est l'application identité.

Proposition 2. Il existe un calcul fonctionnel de Baire et un seul pour T.

Existence. Par le théorème spectral, on peut supposer que

T est l'opérateur $\mathfrak{m}_g$ agissant sur $L^2_\nu(X)$ où X est un espace localement compact, ν une mesure de Radon sur X et $g: X \to \mathrm{Sp}\,T$ est mesurable. Posons

$$\sigma(T)(f) = \mathfrak{m}_{f\circ g}$$

pour $f \in L^\infty(\mathrm{Sp}\,T)$. Evidemment $f\circ g$ est mesurable et donc ceci definit un opérateur borné. On verifie aisément que $\sigma(T)$ est une représentation de $L^\infty(\mathrm{Sp}\,T)$. En outre si $E \subseteq \mathrm{Sp}\,T$ est de Baire

$$\begin{aligned}\langle \sigma(T)(\chi_E)\xi, \xi \rangle &= \langle \mathfrak{m}_{\chi_E \circ g}\xi, \xi \rangle = \\ &= \int_{g^{-1}(E)} |\xi(\omega)|^2 \, d\nu(\omega)\end{aligned}$$

Donc $E \mapsto \langle \sigma(T)(\chi_E)\xi, \xi \rangle$ est une mesure σ-additive sur la σ-algèbre de Baire. En outre

$$\sigma(T)(z) = \mathfrak{m}_{z\circ g} = \mathfrak{m}_g = T.$$

Ceci vérifie 2.

Unicité. Si σ, σ' satisfont 1 et 2 on conclut que $\sigma = \sigma'$ par le corollaire de la Proposition 1 et le fait que 1 et z engendrent $C(\mathrm{Sp}\,T)$ comme C^*-algèbre [ceci est une conséquence de Weierstrauss-Stone]. □

2. OPERATEURS AUTOADJOINTS

§8. Opérateurs Symétriques.

Soit A: dom $A \to H$ un opérateur. On dit que A est <u>symétrique</u> ssi $\xi, \eta \in$ dom A entraîne que

$$\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A\eta\rangle .$$

Si A est un opérateur tel que dom A est dense A^* est défini par:

dom $A = \{\eta \in H$: $\xi \mapsto \langle A\xi, \eta\rangle$ est une application linéaire continue $f_\eta\}$

et $A^*\eta$ est le seul vecteur dans H tel que

$$f_\eta(\xi) = \langle \xi, A^*\eta\rangle \qquad \xi \in \text{dom } A.$$

Un opérateur A est <u>autoadjoint</u> ssi $A = A^*$.

Un opérateur W défini dans un sous-espace dom W [non-necessairement fermé] est une <u>isométrie partielle</u> ssi $\|W\xi\| = \|\xi\|$, $\xi \in$ dom W.

On va etablir un rapport entre les isométries partielles et les opérateurs symétriques.

<u>Lemme 1</u>. Soit A un opérateur symétrique. Alors si $\xi \in$ dom A

$$\|[A \pm i]\xi\|^2 = \|A\xi\|^2 + \|\xi\|^2. \quad \square$$

En particulier il existe un opérateur U

$$U: \operatorname{Ran}[A+i] \to \operatorname{Ran}[A-i]$$

tel que $U[A+i]\xi = [A-i]\xi$, $\xi \in \operatorname{dom} A$. U est une isométrie partielle; On appel U la <u>transformée cayleyenne</u> de A.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant:

<u>Théorème</u>. (a) La transformée cayleyenne est une bijection entre l'ensemble des opérateurs symétriques A de domaine dense et l'ensemble des isométries partielles U telles que $\operatorname{Ran}[1-U]$ soit dense.

(b) Un opérateur A est autoadjoint ssi sa transformée cayleyenne est unitaire.

Considerons les opérateurs suivants dans $H \oplus H$. Definissons

$$\left.\begin{aligned} J(\xi,\eta) &= (-\eta,\xi) \\ \Phi(\xi,\eta) &= (i\xi+\eta,\ -i\xi+\eta) \\ \Phi^{-1}(\xi,\eta) &= ((1/2i)(\xi-\eta),\ 1/2(\xi+\eta)) \end{aligned}\right\} \quad (\xi,\eta) \in H \oplus H$$

Remarques: a) Si A est un opérateur symetrique et U sa transformée cayleyenne alors $\Phi(G(A)) = G(U)$.

b) Un opérateur linéaire A dans H est symétrique ssi

$$\langle J(\xi,\eta),(\xi,\eta)\rangle = 0$$

quel que soit $(\xi,\eta) \in G(A)$.

Le lemme suivant établit une correspondence bijective entre les isométries partielles U dans H et les sous-espaces $G \subseteq H \oplus H$ tels que $G \perp J(G)$.

Lemme 2. (1) Soit A: dom $A \to H$ avec dom A dense. Alors

$$G(A^*) = [JG(A)]^{\perp}$$

où $G(A)$ est le graphe de A.

(ii) Soit $G \subseteq H \oplus H$ un sous-espace tel que $G \perp J(G)$. Alors $\Phi(G)$ est le graphe d'une isométrie partielle.

(iii) Si U est une isométrie partielle, alors $G' = \Phi^{-1}(G(U))$ satisfait à $G' \perp J(G')$.

(i) $(\xi,\eta) \in G(A^*)$ ssi pour tout $\phi \in$ dom A

$$\langle A\phi,\xi\rangle = \langle \phi,\eta\rangle$$

ssi $\langle(-A\phi,\phi),(\xi,\eta)\rangle = 0$ pour tout $\phi \in$ dom A

ssi $\langle J(\phi,A\phi),(\xi,\eta)\rangle = 0$ pour tout $\phi \in$ dom A

ssi $(\xi,\eta) \in [JG(A)]^{\perp}$.

(ii) $\Phi(G)$ est le graphe d'une isométrie partielle si

$$\|i\xi+\eta\|^2 = \|-i\xi+\eta\|^2 \qquad \xi,\eta \in G$$

c'est à dire si $\langle\xi,\eta\rangle = \langle\eta,\xi\rangle$ $(\xi,\eta) \in G$. Or cette condition veut dire que $(\xi,\eta) \perp J(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in G$.

(iii) Supposons que $(\xi,\eta),(\xi',\eta') \in G(U)$. Alors

$$\langle((1/2i)(\xi-\eta),1/2(\xi+\eta)),\ J((1/2i)(\xi'-\eta'),1/2(\xi'+\eta'))\rangle$$

$$= \langle((1/2i)(\xi-\eta),1/2(\xi+\eta)),\ (-1/2(\xi'+\eta'),(1/2i)(\xi'-\eta'))\rangle$$

$$= -1/4i\langle(\xi-\eta),(\xi'+\eta')\rangle - 1/4i\langle(\xi+\eta),(\xi'-\eta')\rangle$$

$$= -1/2i\langle\xi,\xi'\rangle + 1/2i\langle\eta,\eta'\rangle.$$

Ce sera nul pour tout (ξ,η), $(\xi',\eta') \in G(U)$ ssi

$$\langle\xi,\xi'\rangle = \langle U\xi,U\xi'\rangle \qquad \xi,\xi' \in \text{dom } U. \qquad \square$$

Lemme 3. Soit U une isométrie partielle. Alors

(i) L'ensemble $\Phi^{-1}(G(U))$ est le graphe d'un opérateur A ssi $1-U$ est injectif. A est symétrique de domaine $\mathrm{Ran}(1-U)$.

(ii) Si $\mathrm{Ran}(1-U)$ est dense alors $1-U$ est injectif et donc A est un opérateur de domaine dense.

(i) $\Phi^{-1}(G(U))$ est le graphe d'une fonction ssi pour $(\xi,\eta) \in G(U)$, $\xi-\eta = 0$ entraine $\xi+\eta = 0$. C'est-à-dire

$$\text{ssi } \xi - U\xi = 0 \text{ entraine } \xi + U\xi = 0 \qquad (\xi \in \text{dom } U)$$

$$\text{ssi } \xi - U\xi = 0 \text{ entraine } \xi = 0 \qquad (\xi \in \text{dom } U)$$

Donc il existe un opérateur linéaire A de domaine $\mathrm{Ran}(1-U)$ tel que

$$\Phi^{-1}(G(U)) = G(A).$$

Par (iii) du Lemme 2, $G(A) \perp JG(A)$. En particulier A est symétrique.

(ii) Supposons $\mathrm{Ran}(1-U)$ est dense. Alors si $\xi \in \ker(1-U)$

$$\langle\xi-U\xi,\ \eta-U\eta\rangle = \langle\xi,\eta\rangle - \langle\xi,U\eta\rangle - \langle U\xi,\eta\rangle + \langle U\xi,U\eta\rangle$$

$$= \langle\xi,\eta\rangle - \langle\xi,U\eta\rangle - \langle\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\eta\rangle = \langle\xi,\eta-U\eta\rangle = 0$$

pour tout $\eta \in \text{dom } U$. Puisque $\mathrm{Ran}(1-U)$ est dense $\xi = 0$. $\square$

Ce lemme suffit pour démontrer l'assertion (a) du théorème: En effet si A est un opérateur symétrique $\Phi(G(A))$ est le graphe de la transformée cayleyenne U de A:

$$\Phi(G(A)) = G(U).$$

En plus $\mathrm{Ran}(1-U) = \mathrm{dom}\, A$ par (i), ce qui implique que $\mathrm{Ran}(1-U)$ est dense. Inversement, si U est une isométrie partielle telle que $\mathrm{Ran}(1-U)$ est dense,

$$\Phi^{-1}(G(U)) = G(A)$$

où A est symétrique et de domaine dense. Donc

$$G(U) = \Phi(G(A))$$

autrement dit U est la transformée cayleyenne de A.

<u>Lemme 4</u>. Si U est la transformée cayleyenne de l'opérateur symétrique densement défini A, A est autoadjoint ssi

$$G(U)^{\perp} = K(G(U)) \quad \text{où} \quad K(\xi,\eta) = (-\xi,\eta).$$

Notons d'abord que J, Φ, Φ^{-1} preservent la relation d'orthogonalité. [Pour J c'est une conséquence du fait qu'il est unitaire et pour Φ que $1/\sqrt{2}\,\Phi$ est unitaire.] Or A est autoadjoint ssi

$$G(A) = G(A^*) = [JG(A)]^{\perp}$$

ssi $\Phi^{-1}G(U) = [J\Phi^{-1}G(U)]^{\perp} = [J\Phi^{-1}(G(U))^{\perp}]$

ssi $\Phi J\Phi^{-1}[G(U)] = [G(U)]^{\perp}$

or

$$\Phi J\Phi^{-1}(\xi,\eta) = \Phi J((1/2i)(\xi-\eta),\ 1/2(\xi+\eta))$$
$$= \Phi(-1/2(\xi+\eta),\ (1/2i)(\xi-\eta))$$
$$= (1/2i\ [\xi+\eta+\xi-\eta],\ \ 1/2i[-\xi-\eta+\xi-\eta])$$
$$= (1/i\xi,\ -1/i\eta) = i(-\xi,\eta) = iK(\xi,\eta)\ .$$

Puisque $G(U)$ est un espace vectoriel $\subseteq H \oplus H$ le lemme est montré.

Pour montrer l'assertion (b) du théorème il est donc suffisant de montrer le lemme suivant:

Lemme 5. Une isométrie partielle U est unitaire ssi $G(U)^{\perp} =$ $= K[G(U)]$.

Supposons que U est unitaire; Alors $(\xi,\eta) \in G(U)^{\perp}$ ssi

$$\langle(\xi,\eta),(\psi,U\psi)\rangle = \langle\xi,\psi\rangle + \langle\eta,U\psi\rangle = \langle\xi+U^*\eta,\psi\rangle = 0$$

pour tout $\psi \in \mathrm{dom}\ U$, c'est-à-dire pour tout $\psi \in H$. Alors $(\xi,\eta) \in G(U)^{\perp}$ ssi

$$\xi + U^*\eta = 0 \ \text{ ssi } \ -U\xi = \eta \ \text{ ssi } \ (\xi,\eta) = K(-\xi,U(-\xi))$$

ssi $(\xi,\eta) \in K[G(U)]$.

Inversement, supposons que $G(U)^{\perp} = K[G(U)]$. En particulier $G(U)$ est fermé ce qui implique que $\mathrm{dom}\ U$ et $\mathrm{Ran}\ U$ sont fermés. Par conséquent il suffit de montrer que $\mathrm{dom}\ U$ et $\mathrm{Ran}\ U$ sont denses dans H. Supposons $\xi \in [\mathrm{dom}\ U]^{\perp}$. Donc $(\xi,0) \perp (\eta,U\eta)$ pour tout $\eta \in \mathrm{dom}\ U$. Autrement dit, $(\xi,0) \in G(U)^{\perp} = K[G(U)]$. D'où qu'il existe $\psi \in \mathrm{dom}\ U$ tel que

$$(\xi,0) = (-\psi,U\psi).$$

Puisque U est isométrique sur $\operatorname{dom} U$, $\psi = 0$ et donc $\xi = 0$. On en déduit que $[\operatorname{dom} U]^{\perp} = \{0\}$ et $\operatorname{dom} U = H$. On démontre de la même façon que $\operatorname{Ran} U = H$. □

__Remarque__. Si U est la transformée cayleyenne de A alors $G(A) = \Phi^{-1}[G(U)]$ et donc

$$\operatorname{dom} A = \operatorname{Ran}(1-U)$$

$$A\eta = i(1+U)(1-U)^{-1}\eta \qquad \eta \in \operatorname{dom} A.$$

§9. __Extensions d'un Opérateur Symétrique__.

Dans cette section A est un opérateur symétrique tel que $\operatorname{dom} A$ soit dense dans H, U la transformé cayleyenne de A. Donc $G(A) = \Phi^{-1}(G(U))$. La proposition suivante est une conse- quence immediate du théorème principale de la section anterieure:

__Proposition__. 1. Soit U_1 une isométrie partielle qui prolonge U. Alors l'opérateur A_1 de domaine $\operatorname{dom} A_1 = \operatorname{Ran}(1-U_1)$ et

$$A_1\eta = i(1+U_1)(1-U_1)^{-1}\eta \qquad \eta \in \operatorname{Ran}(1-U_1)$$

est un opérateur symétrique qui prolonge A. Cette correspondence est une bijection entre les prolongements isométriques de U et les prolongements symétriques de A.

2. U_1 est fermé [resp. unitaire] ssi A_1 est fermé [resp. autoadjoint].

Donc en principe pour determiner les extensions symétriques fermés de A il suffit de determiner les isométries partielles fermées qui prolongent U. Or

$$H = \mathrm{dom}\ U \oplus [\mathrm{dom}\ U]^{\perp} = \mathrm{Ran}\ U \oplus [\mathrm{Ran}\ U]^{\perp}$$

Il est donc clair qu'une isométrie partielle qui prolonge U sera determinée par sa restriction à $[\mathrm{dom}\ U]^{\perp}$ qui sera une isométrie partielle V d'image $\mathrm{Ran}\ V \subseteq [\mathrm{Ran}\ U]^{\perp}$.

<u>Corollaire 1</u>. Les prolongements de U par des isométries partielles fermées sont en correspondence bijective avec les isométries partielles fermées $V: [\mathrm{dom}\ U]^{\perp} \to [\mathrm{Ran}\ U]^{\perp}$.

<u>Corollaire 2</u>. A possède des extensions autoadjointes ssi

$$\dim[\mathrm{dom}\ U]^{\perp} = \dim[\mathrm{Ran}\ U]^{\perp} .$$

<u>Définition</u>. Les nombres

$$n_- = \dim[\mathrm{dom}\ U]^{\perp} \qquad n_+ = \dim[\mathrm{Ran}\ U]^{\perp}$$

son appellés les <u>indices de defaut de</u> A.

L'opérateur A est <u>essentiellement autoadjoint</u> ssi $n_+ = n_- = 0$. Autrement dit, ssi la fermeture de A est autoadjointe.

<u>Définition</u>. Soit A un opérateur autoadjoint. Un sous-espace $V \subseteq \mathrm{dom}\ A$ est un <u>coeur</u> pour A ssi A est la fermeture de $A|V$.

Exercices

Exercice 1. Soit A un opérateur symétrique sur H. Supposons qu'il existe une base orthogononale $\{e_i\}_{i\in I}$ de H telle que

1. $e_i \in \operatorname{dom} A$
2. $Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$.

Alors A est essentiellement autoadjoint.

[Démontrer que $\operatorname{Ran}[A\pm i\cdot 1]$ sont des espaces denses]

Exercice 2a. Soient $H = L^2[0,1]$ et A_1 l'opérateur

$$\operatorname{dom} A_1 = \{\phi \in C^2[0,1] : \phi(0) = \phi(1) = 0\}.$$

Si $\phi \in \operatorname{dom} A_1$

$$[A_1\phi](t) = \phi''(t) \qquad t \in [0,1]$$

A_1 est un opérateur symétrique.

Exercice 2b. Soit

$$e_k(t) = \operatorname{Sin} \pi kt \qquad k > 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\{e_k\}$ est une base orthogonale de $L^2[0,1]$, $e_k \in \operatorname{dom} A_1$ et

$$A_1 e_k = -k^2 e_k .$$

Conclure que A_1 est essentiellement autoadjoint.

Exercice 3a. Soient $H = L^2[0,1]$ et A_2 l'opérateur

$$\operatorname{dom} A_2 = \{\phi \in C^2[0,1] : \text{ tels que } \begin{array}{l} \phi(0) = \phi(1) \\ \phi'(0) = \phi'(1) \end{array} \}.$$

Si $\phi \in \text{dom } A_2$

$$[A_2\phi](t) = \phi''(t) \qquad t \in [0,1]$$

A_2 est un opérateur symétrique.

Exercice 3b. Soit

$$e_k(t) = \text{Cos } 2\pi kt \qquad k \geq 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$e_k(t) = \text{Sin } 2\pi kt \qquad k < 0 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Calculer A_2e_2 et démontrer que A_2 est essentiellement autoadjoint.

Soit A un opérateur autoadjoint. Sur $\text{dom } A$ definissons la norme du graphe

$$\|\phi\|_A^2 = \|\phi\|^2 + \|A\phi\|^2$$

$\|\cdot\|_A$ est une norme complète parce-que A est un opérateur fermé.

Exercice 4. Un sous espace vectoriel $V \subseteq \text{dom } A$ est dense dans $\text{dom } A$ par rapport à $\| \ \|_A$ ssi $A|V$ est un opérateur essentiellement autoadjoint.

Soient $\bar{A}_i$ les extensions autoadjointes de A_i, $i=1,2$.

Exercice 5a. $\text{dom } A_i \subseteq C^1[0,1]$ avec inclusion continue. Autrement dit il existe $K > 0$ tel que

$$|\phi(t)| \leq K\|\phi\|_{\bar{A}_i} \qquad t \in [0,1]$$

$$|\phi'(t)| \leq K\|\phi\|_{\bar{A}_i} \qquad t \in [0,1]$$

Exercice 5b. Conclure que

$$\text{dom } \bar{A}_i \subseteq C^1[0,1]$$

avec inclusion continue.

<u>Exercice 6</u>. Si $\phi \in \operatorname{dom} \bar{A}_1$ alors $\phi \in C^1[0,1]$ et

$$\phi(0) = \phi(1) = 0.$$

Si $\phi \in \operatorname{dom} \bar{A}_2$ alors $\phi \in C^1[0,1]$ et

$$\phi(0) = \phi(1)$$

$$\phi'(0) = \phi'(1).$$

Conclure que $\bar{A}_1 \neq \bar{A}_2$.

<u>Exercice 7</u>. Trouver un sous espace $V \subseteq C^2[0,1]$ dense dans $L^2[0,1]$ tel que $A_1|V = A_2|V$ ne soit pas essentiellement auto-adjoint.

§10. <u>Le Théorème Spectral pour opérateurs autoadjoints</u>.

<u>Définition</u>. Soit (X,ν) un espace mesuré, $g: X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. <u>L'opérateur de multiplication par</u> g, denoté $\mathfrak{m}_g$ est l'opérateur défini par

$$\operatorname{dom} \mathfrak{m}_g = \{\psi \in L^2_\nu(X) : g\psi \in L^2_\nu(X)\}$$

et pour $\psi \in \operatorname{dom} \mathfrak{m}_g$

$$[\mathfrak{m}_g \psi](\omega) = g(\omega)\psi(\omega) \qquad \omega \in X.$$

Il est évident que $\mathfrak{m}_g$ est un opérateur symétrique; En plus $\mathfrak{m}_g$ est borné ssi $\operatorname{ess\,sup} |g| < \infty$.

<u>Proposition</u>. dom $\mathfrak{m}_g$ est dense dans $L^2_\nu(X)$ et $\mathfrak{m}_g$ est un opérateur autoadjoint.

Soit $\psi \in L^2_\nu(X)$; Alors si $n \in \mathbb{N}$

$$\psi_n = \chi_{g^{-1}[-n,n]}\psi$$

appartient à dom $\mathfrak{m}_g$: Car $|g\psi_n| \leq n|\psi_n|$. En outre, par convergence dominé, il s'ensuit que $\psi_n \to \psi$ dans $L^2_\nu(X)$. Pour achever la démonstration il suffit de démontrer que la transformée cayleyenne de $\mathfrak{m}_g$ est unitaire:

<u>Lemme 1</u>. La transformée cayleyenne de $\mathfrak{m}_g$ est l'opérateur $\mathfrak{m}_f$ où $f: X \to \mathbb{T}$ est la fonction

$$f(\omega) = -[i+g(\omega)]^{-1}[i-g(\omega)] \qquad [1]$$

En particulier $\mathfrak{m}_f$ est unitaire.

Reciproquement, si $f: X \to \mathbb{T}$ est telle que $\mathfrak{m}_f$ est la transformée cayleyenne d'un opérateur alors $\mathfrak{m}_f$ est la transformée cayleyenne d'un opérateur $\mathfrak{m}_g$, $g: X \to \mathbb{R}$ mesurable.

Si f est donnée par [1], evidemment $f(\omega) \in \mathbb{T}$ pour $\omega \in X$. En outre

$$|g(\omega)[i+g(\omega)]^{-1}|, \quad |[i+g(\omega)]^{-1}| \leq 1.$$

Par conséquent, si $\phi \in L^2_\nu(X)$ la fonction ψ

$$\psi(\omega) = [i+g(\omega)]^{-1}\phi(\omega)$$

appartient à $L^2_\nu(X)$, $g\psi$ appartient à $L^2_\nu(X)$ et $[i+\mathfrak{m}_g]\psi = \phi$. Donc $\mathrm{Ran}\,[i+\mathfrak{m}_g] = L^2_\nu(X)$. Si U est la transformée cayleyenne de $\mathfrak{m}_g$ alors

$$U\phi = U[i+\mathfrak{m}_g]\psi = [i-\mathfrak{m}_g]\psi = [i-\mathfrak{m}_g][i+\mathfrak{m}_g]^{-1}\phi = \mathfrak{m}_f\phi.$$

Si $\mathfrak{m}_f$ est la transformée cayleyenne de A alors $[1-\mathfrak{m}_f]$ est injectif; Il s'ensuit que $\{\omega \in X: f(\omega) = 1\}$ est localement ν-nul [Sinon, il existe $A \subseteq \{\omega \in X: f(\omega) = 1\}$ de ν-mesure $\in]0,\infty[$. Donc $\chi_A \in L^2_\nu(X) - \{0\}$ et $[\mathfrak{m}_f-1]\chi_A = 0]$. Par conséquent il existe une fonction $g: X \to \mathbb{R}$ mesurable telle que [1] soit valable localement presque partout. Donc $\mathfrak{m}_f$ est la transformée cayleyenne de $\mathfrak{m}_g$. □

<u>Définition</u>. Soient T, T_1 des opérateurs $T: \text{dom } T \to H$, $T_1: \text{dom } T_1 \to H_1$. T, T_1 sont <u>unitairement equivalents</u> ssi il existe un opérateur unitaire $W: H \to H_1$ tel que

$$W: \text{dom } T \to \text{dom } T_1$$

bijectivement et

$$WT\eta = T_1 W\eta \qquad \eta \in \text{dom } T.$$

<u>Théorème</u>. Un opérateur $A: \text{dom } A \to H$ autoadjoint est unitairement equivalent à un opérateur de multiplication $\mathfrak{m}_g$.

Ceci est une consequence du théorème spectral pour les opérateurs unitaires, le Lemme 1 et le lemme suivant:

<u>Lemme 2</u>. Deux opérateurs symétriques A, A_1 sont unitairement equivalents ssi leurs transformées cayleyennes U, U_1 son unitairement equivalentes.

En effet si $W: H \to H_1$ est unitaire et $W U W^* = U_1$, alors W est une bijection $\text{Ran}(1-U) \to \text{Ran}(1-U_1)$ et

$$A_1 W\eta = i(1+U_1)(1-U_1)^{-1} W\eta$$

$$= W[i(1+U)(1-U)^{-1}\eta] = WA\eta \qquad \eta \in \text{dom } A$$

La démonstration dans l'autre sens est pareille. □

§11. Calcul fonctionnel pour les opérateurs autoadjoints.

Soit A un opérateur autoadjoint borné ou non. On se propose de définir $f(A)$ quelle que soit la fonction borelienne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour ce faire on se servira de la transformée cayleyenne Φ et de son inverse Φ^{-1}. Posons aussi

$$\phi(t) = [t-i][t+i]^{-1} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\phi^{-1}(z) = i[1+z][1-z]^{-1} \qquad z \in \mathbb{T}-\{1\}$$

ϕ est une bijection bicontinue $\mathbb{R} \to \mathbb{T}-\{1\}$

<u>Définition</u>. Si f est une fonction borelienne $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors

$$f(A) = \Phi^{-1}[f_1(\Phi(A))] \tag{1}$$

où $f_1\colon \mathbb{T}-\{1\} \to \mathbb{T}-\{1\}$

$$f_1(z) = \phi f \phi^{-1}(z) \qquad z \in \mathbb{T}-\{1\}.$$

Il faut justifier cette définition:

<u>Lemme</u>. Soit U la transformée cayleyenne de l'opérateur autoadjoint A. Alors si $g, g' \in L^\infty(\mathbb{T})$ et

$$g|\mathbb{T}-\{1\} = g'|\mathbb{T}-\{1\}$$

on a que $g(U) = g'(U)$. En outre si $g(\mathbb{T}-\{1\}) \subseteq \mathbb{T}-\{1\}$, $g(U)$ est unitaire et la transformée cayleyenne d'un opérateur autoadjoint A_1.

On peut supposer sans perte de generalité que $A = \mathfrak{m}_h$ $h: X \to \mathbb{R}$ une fonction borelienne. Donc U est l'opérateur

$$[U\psi](\omega) = [h(\omega)-i][h(\omega)+i]^{-1}\,\psi(\omega) = \sigma(\omega)\psi(\omega).$$

Or $\sigma(\omega) \neq 1$ pour tout $\omega \in X$; il est donc clair que $g(\sigma(\omega)) = g'(\sigma(\omega))$ pour tout $\omega \in X$ et par conséquent $g(U) = g'(U)$.
Si g applique $\mathbb{T}-\{1\}$ dans $\mathbb{T}-\{1\}$, alors $g(\sigma(\omega)) \subseteq \mathbb{T}-\{1\}$ pour tout $\omega \in X$. Il s'ensuit que $g(U)$ est la transformée cayleyenne de l'opérateur $\mathfrak{m}_{h_1}$ où

$$h_1(\omega) = i[1+g(\sigma(\omega))][1-g(\sigma(\omega))]^{-1}$$

On peut justifier la formule [1]. D'abord on prolonge f_1 à une fonction borelienne $\tilde{f}_1: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $\tilde{f}_1(\Phi(A))$ ne dependera que de f_1. En plus $\tilde{f}_1(\Phi(A))$ sera la transformée d'un opérateur autoadjoint; Donc $\Phi^{-1}[\tilde{f}_1(\Phi(A)]$ a un sens.

Cette définition est invariante; toutefois la propriété la plus importante s'exprime dans la représentation spectrale:

<u>Proposition</u>. Soit $H = L^2_\nu(X)$ et $g: X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borelienne

$$f(\mathfrak{m}_g) = \mathfrak{m}_{f\circ g}\,.$$

Pour démontrer ceci il suffit de démontrer que ces opérateurs ont les mêmes transformées cayleyennes. Celle du côté gauche est par [1] l'opérateur

$$[f_1(\Phi(\mathfrak{m}_g))\psi](\omega) = \phi f \phi^{-1}(\phi(g(\omega)))\psi(\omega) = \phi f(g(\omega))\psi(\omega)$$

qui est la transformée cayleyenne du côté droit par Lemme 1, [§10]. □

§12. Mesures spectrales.

Soit A un opérateur autoadjoint dans H.

Si $\phi \in H$ alors μ_ϕ est la mesure définie sur la σ-algèbre des parties boreliennes de $\mathbb{R}$ par

$$\mu_\phi(E) = \|\chi_E(A)\phi\|^2 = \langle \chi_E(A)\phi, \phi\rangle$$

où $E \subseteq \mathbb{R}$ est borelien. μ_ϕ est appelé <u>mesure spectrale</u>.

Il est clair que μ_ϕ est en effet une mesure σ-additive finie [et non-negative].

Le vecteur $\phi \in H$ est dit <u>continue</u> [resp. <u>absolûment continue</u>] ssi la mesure μ_ϕ est continue [resp. absolûment continue]. Autrement dit, ϕ est un vecteur continue ssi quel que soit $t \in \mathbb{R}$

$$\mu_\phi(\{t\}) = \|\chi_{\{t\}}(A)\phi\|^2 = 0$$

soit $\chi_{\{t\}}(A)\phi = 0$. ϕ est un vecteur absolûment continu ssi quel que soit $E \subseteq \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle

$$\mu_\phi(E) = \|\chi_E(A)\phi\|^2 = 0$$

soit $\chi_E(A)\phi = 0$.

Evidement ϕ absolûment continue entraîne ϕ continu.

On denote par $H(A)_c$ [resp. $H(A)_{a.c.}$] l'ensemble des vecteurs continus [resp. absolûment continus].

<u>Proposition</u>. $H(A)_c$ et $H(A)_{a.c.}$ sont des espaces vectoriels fermés.

Évidemment $H(A)_{a.c.}$ est un espace vectoriel. Soit $\{\phi_i\}$ une suite dans $H(A)_{a.c.}$ telle que $\phi_i \to \phi \in H$ normiquement.

Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est une partie borelienne bornée de mesure de Lebesgue nulle alors

$$\chi_E(A)\phi = \lim \chi_E(A)\phi_i = 0.$$

On en conclut que quel soit $E \subseteq R$ borelien de mesure nulle

$$\chi_E(A)\phi = 0.$$

Donc $\phi \in H(A)_{a.c.}$

La démonstration pour $H(A)_c$ est pareille. □

§13. Générateurs Infinitesimaux.

Soit E un espace de Banach. Un semigroupe à 1-paramètre est une application $T: [0,\infty[\to \mathcal{L}(E)$ telle que

1. Si $\eta \in E$, $t \mapsto T_t\eta$ est continue $[0,\infty[\to E$.
2. $T_{t+s} = T_tT_s$ où $s,t \geq 0$, $T_o = 1$

Si en outre

3. $\|T_t\| \leq 1 \quad t \in [0,\infty[$

le semigroupe est dit contractif.

Soit $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigroupe à 1-paramètre. Le générateur infinitesimal de T est l'opérateur B défini par

$$\text{dom } B = \{\xi \in E: \; h^{-1}[T_h-1]\xi$$

est convergent lorsque $h \to 0\}$

$$B\xi = \lim_{h\to 0} h^{-1}[T_h-1]\xi$$

pour $\xi \in$ dom B.

Autrement dit:

$\xi \in$ dom B ssi $t \mapsto T_t\xi$ est derivable à droit au point $t=0$. Dans ce cas

$$B\xi = [d/dt]^+ \, T_t\xi \Big|_{t=0} .$$

<u>Proposition 1</u>. Soit B le générateur infinitesimal du semigroupe $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Alors

1. dom B est invariant par les opérateurs T_t, $t \geq 0$.
2. Si $\eta \in$ dom B, $t \mapsto T_t\eta$ est une fonction normiquement differentiable $]0,\infty[\to E$ et

$$d/dt \, [T_t\eta] \Big|_{t=t_o} = BT_{t_o}\eta .$$

Supposons que $\eta \in$ dom B, $t_o > 0$ et $h > 0$. Alors

$$h^{-1}[T_h-1]T_{t_o}\eta = T_{t_o}[h^{-1}(T_h-1)\eta] \to T_{t_o}B\eta$$

lorsque $h \to 0$. Donc $T_{t_o}\eta \in$ dom B et

$$[d/dt]^+ \, T_t\eta \Big|_{t=t_o} = T_{t_o}B\eta.$$

Or $t \mapsto T_t\eta$, $t \mapsto T_tB\eta$ sont continus $]0,\infty] \to E$. Il s'ensuit que $t \mapsto T_t\eta$ est une application de classe C^1 [voir le lemme ci-dessous]. Finalement

$$h^{-1}[T_{t_o+h} - T_{t_o}]\eta = h^{-1}[T_h-1]T_{t_o}\eta \to BT_{t_o}\eta$$

lorsque $h \to 0$ par la définition de générateur infinitesimal et le fait déjà demontré que $T_{t_o}\eta \in$ dom B. $\square$

Lemme. Soit E un espace de Banach et $f: [a,b[\to E$ une fonction continue qui possède une derivée a droite continue. Alors f est C^1. $\square$

Soit $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semi groupe contractif. La resolvente de $\{T_t\}$ est la famille d'opérateurs

$$R_\lambda \xi = \int_0^\infty e^{-t\lambda} T_t \xi \, dt \qquad \lambda > 0.$$

Cette integrale est prise au sens de Bochner. L'integrale est finie car

$$\int_0^\infty \| e^{-t\lambda} T_t \xi \| dt \leq \|\xi\| \int_0^\infty e^{-t\lambda} dt$$
$$\leq \lambda^{-1} \|\xi\| \qquad \lambda > 0.$$

En particulier

$$\|R_\lambda \xi\| \leq \lambda^{-1} \|\xi\| \qquad \lambda > 0.$$

Proposition 2. Soit B le genérateur infinitesimal du semigroupe contractif $\{T_t\}$ dans l'espace de Banach E. Alors

1. $[\lambda \cdot 1 - B]: \mathrm{dom}\, B \to E$ est inversible pour $\lambda > 0$ et
$$[\lambda \cdot 1 - B]^{-1} = R_\lambda .$$

2. Si $\xi \in E$ alors
$$\lambda R_\lambda \xi \to \xi \qquad \text{normiquement}$$
lorsque $\lambda \to +\infty$.

Supposons $\xi \in E$. Alors

$$h^{-1}[T_h-1]R_\lambda\xi = h^{-1}[T_h-1]\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s\xi\, ds =$$

$$= h^{-1}\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_{s+h}\,\xi\, ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds\Big] =$$

$$= h^{-1}\Big[\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}\, T_s\,\xi\, ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds\Big] =$$

$$= h^{-1}\Big[e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds -$$

$$- e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds\Big] =$$

$$= h^{-1}[e^{\lambda h}-1]\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds - h^{-1}\, e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda s}\, T_s\,\xi\, ds$$

$$\to \lambda\, R_\lambda\xi - \xi$$

lorsque $h \to 0$. Donc $R_\lambda\xi \in \text{dom } B$ et

$$B\, R_\lambda\, \xi = \lambda\, R_\lambda\, \xi - \xi.$$

En particulier

$$\xi = (\lambda - B)R_\lambda\xi \qquad \xi \in E.$$

Si $\xi \in \text{dom } B$

$$R_\lambda[h^{-1}(T_h-1)\xi] = h^{-1}[T_h-1]R_\lambda\xi\ .$$

Puisque R_λ est continu, $\xi \in \text{dom } B$ et $R_\lambda\xi \in \text{dom } B$ on a

$$R_\lambda\, B\,\xi = B\, R_\lambda\,\xi.$$

Par conséquent

$$\xi = R_\lambda[\lambda 1 - B]\xi \qquad \xi \in \text{dom } B.$$

Ceci démontre 1.

Démonstration de 2:

$$\|\lambda R_\lambda \xi - \xi\| \leq \int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} \|T_t\xi - \xi\| dt.$$

2. est donc une conséquence de l'affirmation suivante:

Soit g continue bornée $[0,\infty[\to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} g(t)dt \to g(0)$$

lorsque $\lambda \to +\infty$.

En effet par changement de variables

$$\int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-t} g(\lambda^{-1}t)dt.$$

Par le théorème de convergence dominée cette integrale converge vers $g(0)$ lorsque $\lambda \to +\infty$. □

Corollaire. Le générateur infinitesimal d'un semigroupe contractif est un opérateur fermé densement défini.

§14. Groupes Unitaires et Théorème de Stone.

Soit H un espace de Hilbert. Un groupe unitaire à 1 paramètre est une application $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$ telle que

1. Si $\xi \in E$, $t \mapsto T_t\xi$ est continue $\mathbb{R} \to H$.
2. $U_tU_s = U_{t+s}$ pour $t,s \in \mathbb{R}$ et $U_0 = 1$.
3. U_t est unitaire.

Si $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire, $\{U_t\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe contractif. Soit B son générateur infinitesimal.

Proposition. dom B est un sous-espace invariant par U_t, $t \in \mathbb{R}$. Si $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto U_t\xi$ satisfait à l'équation

$$d/dt\, [U_t\xi]\Big|_{t=t_o} = B\, U_{t_o}\, \xi . \qquad [1]$$

Si $t_o > 0$, la Proposition 1 [§13] implique que $t \mapsto U_t\xi$ est differentiable au point $t = t_o$. La formule

$$U_t\xi = U_{-s}\, U_{t+s}\xi$$

montre que $t \mapsto U_t\xi$ est differentiable à un point quelconque t_o. En effet il faut choisir s tel que $t_o+s > 0$. Par conséquent, si $\xi \in$ dom A et $h > 0$

$$h^{-1}[U_{t_o+h}\xi - U_{t_o}\xi] = h^{-1}[U_h-1]U_{t_o}\xi$$

qui est convergente lorsque $h \to 0$. Donc $U_{t_o}\xi \in$ dom B. L'équation [1] est une conséquence des définitions. □

Exemple. Soit A un opérateur autoadjoint dans H. Alors $U_t = \exp -it\, A$ est un groupe unitaire à un paramètre. Le générateur infinitesimal B de $\{U_t\}$ est $-iA$.

Pour démontrer ceci, on peut supposer que A est l'opérateur $\mathbb{m}_g$ agissant sur $L^2_\nu(X)$ où $g: X \to \mathbb{R}$ est une fonction borelienne. Donc

$$[\exp -itA\, \psi](\omega) = \exp -it\, g(\omega)\psi(\omega) \qquad \omega \in X.$$

Il est clair que U_t est unitaire et $U_{t+s} = U_tU_s$. Pour $\xi \in L^2_\nu(X)$

la continuité normique de $t \mapsto U_t\xi$ est une conséquence du théorème de la convergence dominée. Supposons que $\psi \in \mathrm{dom}\, \mathfrak{M}_g$. Alors

$$|\partial_t \exp -it\omega\, g(\omega)\psi(\omega)| \leq |g(\omega)\psi(\omega)| \qquad \omega \in X.$$

Par conséquent $t \mapsto \exp -itA\, \psi$ est différentiable normiquement et

$$d/dt\, [\exp -itA\, \psi]\Big|_{t=t_o} = -iA \exp -it_oA\, \psi \qquad t_o \in \mathbb{R}.$$

Donc $\psi \in \mathrm{dom}\, B$ et $B\psi = -iA\psi$. Inversement supposons que $\psi \in \mathrm{dom}\, B$. Donc si $h_n \to 0$,

$$h_n^{-1}\, [U_{h_n} - 1]\psi \to B\psi.$$

Or il existe une sous-suite $\{h'_n\}$ telle que

$$h'^{-1}_n\, [\exp -ih'_n\, g(\omega) - 1]\psi(\omega)$$

est convergent p.p.; la limite est forcément $-ig(\omega)\psi(\omega)$. Donc $g\psi \in L^2$ ce qui implique que $\psi \in \mathrm{dom}\, \mathfrak{M}_g$. Par conséquent $\mathrm{dom}\, B = \mathrm{dom}\, \mathfrak{M}_g$ et $B = -iA$. □

<u>Théorème</u>. La correspondence $A \mapsto \{\exp -itA\}_{t\in\mathbb{R}}$ est une correspondence bijective entre les opérateurs autoadjoints A dans H et les groupes unitaires à un paramètre.

Étant donné un groupe unitaire $\{U_t\}$ l'opérateur autoadjoint A correspondent est i fois le générateur infinitesimal de $\{U_t\}_{t\geq 0}$.

Par l'exemple précédent la correspondence du théorème est au moins injective. Supposons que $\{U_t\}$ soit un groupe unitaire; D'abord on démontre que le générateur infinitesimal B de

$\{U_t\}_{t\geq 0}$ est antisymétrique. En effet si $\xi,\eta \in$ dom B

$$\langle B\xi,\eta\rangle = \lim_{h\to 0} \langle h^{-1}[U_h-1]\xi,\eta\rangle =$$

$$= \lim_{h\to 0} \langle \xi, h^{-1}[U_{-h} - 1]\eta\rangle = -\langle \xi, B\eta\rangle.$$

En particulier $A = iB$ est symétrique. A est autoadjoint: En effet $A+i$, $A-i$ sont surjectifs: D'abord,

$$A-i = -i[1-B]$$

qui est surjectif en vertu du Lemme 1; En ce qui concerne $A+i$, $A+i = i[1+B]$; Mais $-B$ est le générateur infinitesimal de $\{U_{-t}\}_{t\geq 0}$. Donc $\operatorname{Ran}[1+B] = H$.

On a que $U_t = \exp -itA$; Pour démontrer ceci soit $\xi \in$ dom A

$$d/dt \langle U_t\xi, \exp -itA\ \eta\rangle = \langle BU_t\xi, \exp -itA\ \eta\rangle$$
$$+ \langle U_t\xi, B \exp -itA\ \eta\rangle = 0$$

puisque B est antisymétrique. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle \exp itA\ U_t\xi,\eta\rangle = \langle \xi,\eta\rangle \qquad \xi,\eta \in \text{dom } B.$$

Par conséquent $\exp itA\ U_t = 1$ et $U_t = \exp -itA$. $\square$

Ce théorème est connu comme le <u>Théorème de Stone</u>.

<u>Corollaire</u>. Soit $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe unitaire fortement continue dans un espace hilbertien quelconque. Alors il existe un espace localement compact X, une mesure de Radon ν sur X et une fonction borelienne $g: X \to \mathbb{R}$ tels que U soit unitairement equivalent au group unitaire

$$[W_t\psi](\omega) = \exp -it\ g(\omega)\psi(\omega) \qquad [2]$$

agissant sur l'espace $L^2_\nu(X)$.

Soit B le générateur infinitesimal de $\{U_t\}$, $A = iB$. A est unitairemente equivalent à un opérateur $\mathfrak{m}_g$ agissant sur $L^2_\nu(X)$. Definissons W_t par la formule [2]; Si $V: H \to L^2_\nu(X)$ est unitaire et tel que $VAV^* = \mathfrak{m}_g$, alors il est clair que le générateur infinitesimal de $\{VU_tV^*\}_{t\in\mathbb{R}}$ et $VBV^* = -i\mathfrak{m}_g$. Par conséquent on démontre comme dans le théorème que

$$VU_tV^* = \exp -it\ \mathfrak{m}_g = W_t.$$

Exercices

Une fonction continue bornée $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est <u>définie positive</u> ssi quels que soient $\lambda_1,\dots,\lambda_s \in \mathbb{C}$, $t_1,\dots,t_s \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i,j} \lambda_i\bar{\lambda}_j\ \phi(t_i-t_j) \geq 0.$$

<u>Exercice 1a</u>. L'ensemble de fonctions définies positives est un cône convexe qui contient les fonctions $\phi(x) = \exp ix\ \theta$.

V est l'espace de fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ayant support fini.

Si $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie positive, posons

$$\langle f,g\rangle^\sim = \sum_{x,y} f(x)g(y)\phi(x-y)$$

$$\|f\|^\sim = [\langle f,f\rangle^\sim]^{1/2}$$

$$N_\sim = \{f \in V: \|f\|^\sim = 0\}.$$

<u>Exercice 1b</u>. $\langle\ ,\ \rangle_\sim$ est une forme sesquilineaire sur V, $\|\ \|_\sim$

est une semi-norme et $\underset{\sim}{N}$ est un sous-espace vectoriel. Definir une forme sesquilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_\phi$ sur $V/\underset{\sim}{N}$ telle que

$$\langle x/\underset{\sim}{N},\ y/\underset{\sim}{N}\rangle_\phi = \langle x,y\rangle^\sim .$$

Si $x \in V$ soit $U_x^\sim : V \to V$ l'opérateur

$$[U_x^\sim f](y) = f(y-x).$$

__Exercice 1c.__ $U_x^\sim \underset{\sim}{N} \subseteq \underset{\sim}{N}$ et l'opérateur

$$U_x = U_x^\sim/\underset{\sim}{N}$$

est unitaire $V/\underset{\sim}{N} \to V/\underset{\sim}{N}$.

Soit H_ϕ le completé de $V/\underset{\sim}{N}$.

__Exercice 1d.__ Si $x \in \mathbb{R}$ U_x possède une extension continue U_x^ϕ

$$U_x^\phi : H_\phi \to H_\phi$$

$\{U_x^\phi\}_{x\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire à 1-paramètre.

__Exercice 1e.__ Soit ξ_o l'image de δ_o dans H_ϕ. Montrer que

$$\phi(x) = \langle U_x^\phi\, \xi_o, \xi_o\rangle.$$

Par le théorème spectral et le théorème de Stone, il existe un espace mesuré (X,ν) et une fonction mesurable $g: X \to \mathbb{R}$ telle que le groupe $\{U_x^\phi\}_{x\in\mathbb{R}}$ soit unitairement equivalent au groupe $\{\exp ix\, \mathbb{m}_g\}_{x\in\mathbb{R}}$.

__Exercice 2a.__ Il existe une mesure ≥ 0 finie μ sur R telle que

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp ix\,\theta\ d\mu(\theta). \qquad [1]$$

[Par les remarques précédentes, il existe $\psi \in L^2_\nu(X)$ tel que

$$\phi(x) = \int_X \exp it\, g(\omega)\,|\psi(\omega)|^2\, d\nu(\omega).$$

Soit μ la mesure

$$\mu(A) = \int_{g^{-1}(A)} |\psi(\omega)|^2\, d\nu(\omega). \quad]$$

Exercice 2b. Caracterizer l'ensemble de fonctions définies positives sur $\mathbb{R}$. [Utiliser la représentation [1]].

3. TRANSFORMÉE DE FOURIER ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS CONSTANTS

§15. L'espace de Schwartz.

Notation. Soit $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in [\mathbb{Z}^+]^n$. On utilisera par la suite la notation suivante:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots . x_n^{\alpha_n} .$$

En outre si $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\partial^\alpha \phi = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \phi.$$

En utilisant cette notation on a la formule de Leibniz:

Si $\phi, \psi \in C^\infty$

$$\partial^\alpha[\phi\psi] = \sum_{\beta \leq \alpha} C[{}^\alpha_\beta]\, \partial^{\alpha-\beta}\phi\, \partial^\beta \psi$$

où $\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i \quad i = 1,\ldots,n$ et

$$C[{}^\alpha_\beta] = \alpha_1! \ldots \alpha_n! / \beta_1! \ldots \beta_n!\ (\alpha_1-\beta_1)! \ldots (\alpha_n-\beta_n)!$$

L'espace de Schwartz est l'espace de $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $\alpha,\beta \in [\mathbb{Z}^+]^n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty .$$

Pour $\alpha,\beta \in [\mathbb{Z}^+]^n$ la fonctionnelle réelle

$$p_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\, \partial^\beta\, \phi(x)|$$

est une semi-norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous munissons $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie définie par la famille de seminormes $\{p_{\alpha,\beta}\}$.

Proposition 1. $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\psi \equiv 1 \quad \text{sur} \quad \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\phi_r(x) = \psi(rx)\phi(x)$$

on a que $\phi_r \to \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $r \to 0$. En effet

$$x^\alpha \partial^\beta[\phi(x) - \phi_r(x)] = \\ = x^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} c_{\gamma,\beta}\, \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)\, r^{|\gamma|}\, [\partial^\gamma(1-\psi)](rx) \qquad [1]$$

par la règle de Leibniz. Or il existe $M > 0$ tel que

$$|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $\gamma \leq \beta$ et $|x| \geq M$. Donc si $r \leq M^{-1}$ et $r \leq 1$

$$|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x) r^{|\gamma|}[\partial^\gamma(1-\psi)](rx)| \leq \\ \leq \varepsilon \sup_x |[\partial^\gamma(1-\psi)](x)|$$

pour $|x| \geq M$ et

$$|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma}\phi(x) r^{|\gamma|}[\partial^\gamma(1-\psi)](rx)| = 0$$

si $|x| \leq M \leq r^{-1}$. Donc [1] converge uniformement vers zero lorsque $r \to 0$. $\square$

Proposition 2. Les opérateurs

$$\phi \mapsto x^\alpha \phi \qquad [1]$$

$$\phi \mapsto \partial^\beta \phi \qquad [2]$$

sont continus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En outre si $\phi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle \partial^\alpha \phi, \psi \rangle = (-1)^\alpha \langle \phi, \partial^\alpha \psi \rangle.$$

La continuité de [1] et [2] suit des définitions en appliquant la règle de Leibniz. Pour démontrer la deuxième il suffit de la démontrer pour $\phi,\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. En outre par induction on peut supposer que $|\alpha| = 1$.

Donc il faut démontrer que

$$\langle \partial_{x_k} \phi, \psi \rangle = -\langle \phi, \partial_{x_k} \psi \rangle \qquad \phi,\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\partial_{x_k} \phi(x)\overline{\psi(x)} + \phi(x)\overline{\partial_{x_k}\psi(x)}]\,dx = 0$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_k} [\phi(x)\overline{\psi(x)}]\,dx = 0.$$

Or $g = \phi\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc par Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_k} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_k} g(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)dx_k]\cdot dx_1 \ldots \widehat{dx_k} \ldots dx_n$$

$$= 0.$$

§16. La transformée de Fourier.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de f, denotée par $\mathfrak{F}f$ est la fonction

$$\mathfrak{F}f(\theta) = [2\pi]^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp -i\langle x,\theta\rangle dx.$$

Cette integrale a un sens puisque la fonction

$$x \longmapsto f(x)\exp -i\langle x,\theta\rangle$$

est integrable.

Proposition 1. 1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{F}f(\theta)$ est une fonction continue et

$$|\mathfrak{F}f(\theta)| \leq [2\pi]^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \theta \in \mathbb{R}^n.$$

2. Si f et $x_k f$ sont integrables alors $\mathfrak{F}f$ possède une derivée partielle $\partial_{x_k}\mathfrak{F}f$ et

$$\partial_{x_k}\mathfrak{F}f = (-i)\mathfrak{F}_x[x_k f(x)].$$

1. suit de l'inégalité de Hölder et du théorème de la convergence dominée.

2. est une conséquence du théorème de differentiation dominée. □

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. 1. La transformée de Fourier est une application continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. $\mathcal{F}^2 = J$ où $J\psi(x) = \psi(-x)$. En particulier $\mathcal{F}$ est bijective.

3. $\mathcal{F}$ est isométrique

$$\langle \mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \qquad \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

<u>Corollaire</u>. $\mathcal{F}$ possède un prolongement unitaire unique

$$L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

qui l'on denote aussi par $\mathcal{F}$ et qui satisfait $\mathcal{F}^2 = J$.

Ce résultat est le <u>Théorème de Plancherel</u>:

Pour démontrer le Théorème 1 il nous faut quelques lemmes:

<u>Lemme 1</u>. Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

(a) $\partial^\alpha \mathcal{F}\phi(\theta) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}_x[x^\alpha \phi(x)](\theta)$

(b) $\theta^\beta [\mathcal{F}\phi](\theta) = (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}[\partial^\beta \phi](\theta)$.

(a) Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $x_k\phi$ est integrable et donc on peut appliquer la Proposition 1:

$$\partial_{x_k} \mathcal{F}\phi(x) = (-i)\mathcal{F}_x[x_k\phi(x)].$$

On en déduit (a) par induction.

(b) $[2\pi]^{n/2}\, \theta_k \mathcal{F}\phi(\theta) =$

$$\theta_k \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \exp -i\langle x, \theta\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) i\, \partial_{x_k} \exp -i\langle x, \theta\rangle dx$$

$$= -i \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_k} \phi(x) \exp -i\langle x, \theta\rangle dx$$

$$= -[2\pi]^{n/2}\, i\, \mathcal{F}[\partial_{x_k}\phi](\theta)$$

(b) suit par induction.

Démonstration de 1. du Théorème 1: Par (a) et (b) du lemme

$$x^{\beta}\partial^{\alpha}\mathcal{F}\phi(x) = i^{-|\beta|-|\alpha|}\ \mathcal{F}_{\theta}[\partial^{\beta}\theta^{\alpha}\phi(\theta)](x) \qquad [1]$$

or $\partial^{\beta}\theta^{\alpha}\phi$ est integrable; Donc

$$\mathcal{F}_{\theta}[\partial^{\beta}\theta^{\alpha}\phi(\theta)](x)$$

est bornée. Il s'ensuit que $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Continuité de $\mathcal{F}$: Par [1]

$$\begin{aligned} p_{\beta,\alpha}(\mathcal{F}\phi) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\beta}\partial^{\alpha}\mathcal{F}\phi(x)| \\ &\leq [2\pi]^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^{\beta}x^{\alpha}\phi(x)|dx \\ &\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [1+|x|^2]^N\ |\partial^{\beta}x^{\alpha}\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-N}\ dx. \end{aligned}$$

Pour $N > n/2$, $(1+|x|^2)^{-N}$ est une fonction integrable; En outre par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}^n} [1+|x|^2]^N\ |\partial^{\beta}x^{\alpha}\phi(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [1+|x|^2]^N \sum_{\gamma\leq\beta} C_{\gamma,\beta}|x^{\alpha-\gamma}\ \partial^{\beta-\gamma}\ \phi(x)|. \end{aligned}$$

Ceci montre evidemment la continuité de $\mathcal{F}$.

<u>Lemme 2</u>. Si $\phi,\psi \in L^1(R^n)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathcal{F}\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\phi(x)\psi(x)dx.$$

La démonstration est une application triviale du théorème de Fubini.

Démonstration de 2. du Théorème 1: Si $\phi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int \phi(\lambda^{-1}x)\mathcal{F}\psi(x)dx = \int [\mathcal{F}_\theta\phi(\lambda^{-1}\theta)](x)\psi(x)dx$$
$$= \lambda^n\int [\mathcal{F}\phi](\lambda x)\psi(x)dx = \int \mathcal{F}\phi(x)\psi(\lambda^{-1}x)dx \ .$$

Si $\lambda \to +\infty$, alors

$$\phi(\lambda^{-1}x) \to \phi(0)$$
$$\psi(\lambda^{-1}x) \to \psi(0)$$

pour tout x. Appliquant convergence dominée on obtient que

$$\phi(0)\int \mathcal{F}\psi(x)dx = \psi(0)\int \mathcal{F}\phi(x)dx.$$

En particulier si $\psi(x) = \exp-(-1/2|x|^2)$ alors $\mathcal{F}\psi = \psi$ et

$$\phi(0) = [2\pi]^{-n/2}\int \mathcal{F}\phi(x)dx.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int \exp i\langle x,\theta\rangle\mathcal{F}\phi(\theta)d\theta = \int [\mathcal{F}_y\phi(y+x)](\theta)d\theta$$
$$= [2\pi]^{n/2}\ \phi(x).$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}^2\phi(-x) = \phi(x).$$

Démonstration de 3. du Théorème 1:

$$\langle\mathcal{F}\phi,\mathcal{F}\psi\rangle = \int \mathcal{F}\phi(x)\overline{\mathcal{F}\psi(x)}dx = \int \mathcal{F}\phi(x)\mathcal{F}J\bar{\psi}(x)dx$$
$$= \int \phi(x)\mathcal{F}^2J\bar{\psi}(x)dx = \int \phi(x)\overline{\psi(x)}dx. \quad \square$$

Démonstration du Corollaire:

$$\mathcal{F}[L^2(\mathbb{R}^n)] \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Or $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}$ est d'après le Théorème 1 une isométrie. Donc $\mathcal{F}$ est surjectif. □

Proposition. L'opérateur symétrique $i^{|\alpha|}\partial^\alpha$ agissant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est unitairement équivalent à x^α agissant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En effet

$$\mathcal{F}^{-1}[i^{|\alpha|}\partial^\alpha]\mathcal{F} = x^\alpha$$

où par abus de notation x^α denote l'opérateur de multiplication par x^α sur le domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On dénote par D^α l'opérateur $i^{|\alpha|}\partial^\alpha$.

§17. Extensions autoadjointes d'opérateurs differentiels.

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction borelienne: On définit l'opérateur $f(D)$ comme suit:

$$\operatorname{dom} f(D) = \mathcal{F}[\operatorname{dom} \mathfrak{M}_f]$$

et pour $\psi \in \operatorname{dom} f(D)$

$$f(D)\psi = \mathcal{F}\mathfrak{M}_f\, \mathcal{F}^{-1}\psi.$$

Exemple. Soit $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha .$$

Alors $\operatorname{dom} P(D) \supseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$P(D)\psi = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \psi \qquad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

D'abord, il est evident que dom $\mathfrak{m}_p \supseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Donc

$$\operatorname{dom} P(D) \supseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

suit de l'invariance de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par $\mathcal{F}$. En outre

$$\mathcal{F}\,\mathfrak{m}_p\,\mathcal{F}^{-1}\psi = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\,\mathcal{F}\,x^\alpha\,\mathcal{F}^{-1}\psi$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha\,D^\alpha\psi\ .$$

<u>Exemple</u>. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, alors il est évident que $f(D)$ est un opérateur borné.

<u>Théorème</u>. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction à croissance polynomiale: Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{Z}^+$ tels que

$$|f(\theta)| \le C[1+|\theta|]^m\ . \qquad [1]$$

Alors dom $f(D) \supseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $f(D)$ est essentiellement autoadjoint sur tout domain $V \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque

$$\mathcal{F}^{-1}f(D)\mathcal{F} = \mathfrak{m}_f$$

il suffit de démontrer que dom $\mathfrak{m}_f \supseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathfrak{m}_f$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{F}^{-1}V = V_1$.

La première affirmation est une conséquence de [1]. En ce qui concerne la deuxième remarquons d'abord que V_1 est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Or

<u>Lemme</u>. Soit $g\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, ν une mesure sur X. Alors $\mathfrak{m}_g$ est essentiellement autoadjoint sur tout espace V ayant la propriété suivante: Si $\nu_1 = (g^2+1)\nu$ alors $V \subseteq L^2_{\nu_1}(X)$ et V est dense dans $L^2_{\nu_1}(X)$.

Remarquons que dom $\mathfrak{m}_g = L^2_{\nu_1}(X)$; Donc $V \subseteq$ dom $\mathfrak{m}_g$ ssi $V \subseteq L^2_{\nu_1}(X)$. En outre $\mathfrak{m}_g|V$ est essentiellement autoadjoint ssi $[i\pm\mathfrak{m}_g](V)$ sont denses dans $L^2_\nu(X)$. Or si $\psi \in L^2_{\nu_1}(X)$,

$$\|[i\pm\mathfrak{m}_g]\psi\|^2_{L^2_\nu} = \|\psi\|^2_{L^2_\nu} + \|\mathfrak{m}_g\psi\|^2_{L^2_\nu}$$

$$= \int_X [1+|g(\omega)|^2]\,|\psi(\omega)|^2 d\nu(\omega) = \|\psi\|^2_{L^2_{\nu_1}} .$$

Autrement dit, $[i\pm\mathfrak{m}_g]: L^2_{\nu_1}(X) \to L^2_\nu(X) \to L^2_\nu(X)$ sont des opérateurs unitaires. Par conséquent V est dense dans $L^2_{\nu_1}(X)$ ssi $[1\pm\mathfrak{m}_g](V)$ est dense dans $L^2_\nu(X)$. $\square$

Pour achéver la démonstration du théorème remarquons que $C_o(R^n)$ est dense dans $L^2_{\nu_1}(\mathbb{R})$ pour n'importe quelle mesure de Radon ν_1 sur $\mathbb{R}^n$, et en particulier pour

$$\nu_1 = (f^2+1)\nu \qquad [\nu \text{ mesure de Lebesgue}].$$

Par le théorème de Weierstrass-Stone on en déduit que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2_{\nu_1}(\mathbb{R}^n)$. Par hypothèse V_1 est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entraîne convergence dans $L^2_{\nu_1}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 d\nu_1(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 [1+|x|]^{2m}\, d\nu(x)$$

$$\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2\, [1+|x|]^{2m+K} \int_{\mathbb{R}^n} [1+|x|]^{-K}\, d\nu(x)$$

$$\leq C' \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2\, [1+|x|]^{2m+K}$$

pour K suffisamment grand. Par conséquent V_1 est dense dans $L^2_{\nu_1}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 1. Supposons que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soit à croissance polynomiale; Alors $f(D)$ est essentiellement autoadjoint sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2. Soit $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha .$$

Alors $P(D)$ est la fermeture de l'opérateur symétrique

$$\psi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \psi$$

agissant sur $C_o^\infty(R^n)$.

Proposition. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$[f(D)\psi](x) = [2\pi]^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{F} f](x-\theta)\psi(\theta)d\theta .$$

Puisque $\mathcal{F} f$ est borné, l'integrale est absolument convergente. Par définition

$$[f(D)\psi](x) = [\mathcal{F}\, \mathfrak{m}_f\, \mathcal{F}^{-1}\psi](x)$$

$$= [2\pi]^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} f(y)\Big[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y,\theta\rangle} \psi(\theta)d\theta\Big]dy$$

$$= [2\pi]^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-\theta ,y\rangle} f(y)\psi(\theta)d\theta dy$$

$$= [2\pi]^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{F} f](x-\theta)\psi(\theta)d\theta . \qquad \square$$

Exercices

Soit W un espace de Hilbert complexe de dimension finie.

Exercice 1. Definir la transformée de Fourier comme opérateur

$$L^2(\mathbb{R}^n,W) \to L^2(\mathbb{R}^n,W)$$

et démontrer

1. La formule d'inversion.
2. Le théorème de Plancherel.

Exercice 2. Soit $\mathcal{L}_s(W)$ l'ensemble d'opérateurs autoadjoints dans W. Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_s(W)$ est une fonction borelienne définir l'opérateur $f(D)$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n,W)$.

Exercice 3. Soient $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{L}_s(W)$. Alors il existe une fonction linéaire

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_s(W)$$

telle que $f(D)$ soit la fermeture de

$$P = \sum_{j=1}^{n} A_i D_{e_i}$$

agissant sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n,W)$.

[Soit f telle que

$$f(e_i) = A_i \;]$$

Soient V une algèbre de Lie réelle, $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire défini positif tels que

$$\langle adx\cdot y,z\rangle + \langle y,adx\cdot z\rangle = 0 \qquad [2]$$

où adx est l'opérateur linéaire

$$\mathrm{ad}x \cdot y = [x,y].$$

On considère $\mathrm{ad}x$ comme un opérateur agissant sur l'espace complexifié W de V. D'après [2] $\mathrm{ad}x$ est un opérateur antisymétrique dans W.

<u>Définition</u>. Rot_V est l'opérateur anti-autoadjoint $\mathrm{ad}(D)$ agissant sur $L^2(W)$. Autrement dit si

$$f(x) = \mathrm{ad}x$$

alors

$$\mathrm{Rot}_V = f(D).$$

<u>Exercice 4</u>. Cette définition à un sens, même si f est antisymétrique.

<u>Exercice 5</u>. Soit "$\times$" le produit croisée usuel dans $\mathbb{R}^3$. Alors

$$[x,y] = x \times y$$

est un crochet de Lie qui satisfait [2]. Calculer explicitement Rot dans ce cas.

<u>Exercice 6</u>. L'opérateur

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Rot}_V \\ \mathrm{Rot}_V & 0 \end{bmatrix}$$

agissant sur

$$L^2(V, W \oplus W) = L^2(V,W) \oplus L^2(V,W)$$

est autoadjoint.

<u>Exercice 7</u>. Soient W un espace de Hilbert complexe de dimen-

sion finie,

$$E\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_s(W)$$

une application borelienne telle que

$$a\|\eta\|_W^2 \geq \langle E(x)\eta,\eta\rangle_W \geq b\|\eta\|_W^2$$

[où $a,b > 0$] pour $\eta \in W$, $x \in \mathbb{R}^n$, et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_s(W)$ une application borelienne quelconque.

Alors

$$L_1 = E^{-1} f(D)$$

$$\operatorname{dom} f(D) \to L^2(\mathbb{R}^n, W)$$

est autoadjoint par rapport au produit scalaire

$$\langle \phi,\psi\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle E(x)\phi(x),\psi(x)\rangle dx.$$

[Utiliser et démontrer le lemme suivant:

Soit H un espace hilbertien, $L\colon \operatorname{dom} L \to H$ un opérateur autoadjoint et $E \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrique tel que

$$a\|\eta\|^2 \geq \langle E\eta,\eta\rangle \geq b\|\eta\|^2 .$$

Alors

$$\langle \xi,\eta\rangle_1 = \langle E\xi,\eta\rangle$$

est un produit scalaire sur H qui définit une norme $\| \;\|_1$ equivalent à la norme $\| \;\|$ et

$$L_1 = E^{-1} L\colon \operatorname{dom} L \to H$$

est un opérateur autoadjoint sur H muni du produit scalaire $\langle \;,\; \rangle_1$.]

§18. La fonction $z \mapsto \exp -z\, P_M(D)$.

Soit M définie positive et P_M la fonction quadratique

$$P_M(x) = \Sigma\, m_{k,\ell}\, x_k x_\ell \ .$$

En particulier $P_M(D)$ est un opérateur autoadjoint non-negatif.

<u>Proposition 1</u>. Soit A un operateur autoadjoint non-negatif dans l'espace H. Alors pour $\xi \in H$ la fonction

$$z \mapsto \exp -z\, A\xi$$

est continue dans le demi plan fermé $\{z\colon \operatorname{Re} z \geq 0\}$ et analytique dans $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

Appliquer le théorème spectral et differentiation dominée. □

On conclut par cette proposition que le groupe unitaire $\{\exp -itA\}_{t\in\mathbb{R}}$ est determiné par le semigroupe contractif $\{\exp -tA\}_{t\geq 0}$. Or l'essentiel de la proposition suivante est que si $A = P_M(D)$, il existe une expression integrale pour $\exp -tA$, $t > 0$.

<u>Proposition 2</u>. 1. L'application $\psi \mapsto \exp -1/2\, P_M(D)\psi$ est continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$[\exp -1/2\, P_M(D)]\psi(x) =$$

$$= [(2\pi)^n \det M]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp -1/2 \langle M^{-1}(x-y), (x-y)\rangle\, \psi(y)\, dy.$$

Puisque $\mathfrak{F}$ diagonalise l'opérateur $P_M(D)$ on a la formule

$$\exp -1/2\ P_M(D) = \mathfrak{F}\ \exp -1/2\ P_M(x)\mathfrak{F}^{-1}$$

où $\exp -1/2\ P_M(x)$ represente un opérateur de multiplication. Il s'ensuit que $\exp -1/2\ P_M(D)[\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)] \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\exp -1/2\ P_M(D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est continu.

Par ailleurs $\exp -1/2\ P_M(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc par la proposition de §17:

$$[\exp -1/2\ P_M(D)\psi](x) = [2\pi]^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathfrak{F}_y \exp -1/2\ P_M(y)](x-\theta)\psi(\theta)d\theta$$

or

$$[\mathfrak{F}_y \exp -1/2\langle My,y\rangle](x) = [\det M]^{-1/2} \exp -1/2\langle M^{-1}x,x\rangle. \quad \square$$

Théorème. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$[\exp -it/2\ P_M(D)\phi](x) =$$
$$[(2\pi)^n \det M]^{-1/2}(it)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp -1/2it\langle M^{-1}(x-y),(x-y)\rangle\phi(y)dy.$$

D'abord les deux cotés de [1] sont continues en $x \in \mathbb{R}^n$: Pour le coté droit, ceci decoule du théorème de convergence dominée. Pour le coté gauche on a que

$$\exp -it/2\ P_M(D)\phi = \mathfrak{F}\ \exp -it/2\ P_M(x)\mathfrak{F}^{-1}\phi.$$

Or si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\exp -it/2\ P_M(x)\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ceci étant, il suffit de démontrer [1] pour presque tout x. En particulier, il suffit de démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}-\{0\}$

et $\phi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \exp{-it/2}\ P_M(D)\phi,\psi\rangle =$$
$$[(2\pi)^n \det M]^{-1/2}(it)^{-n/2}\int \exp{-1/2it}\langle M^{-1}(x-y),(x-y)\rangle\phi(x)\psi(y)dxdy.$$

On va montrer que quel que soit z avec $\operatorname{Re} z \geq 0$ et $z \neq 0$

$$\langle \exp{-z/2}\ P_M(D)\phi,\psi\rangle =$$
$$[(2\pi)^n \det M]^{-1/2} z^{-n/2}\int \exp{-1/2z}\langle M^{-1}(x-y),(x-y)\rangle\phi(x)\psi(y)dxdy. \qquad [2]$$

Les deux côtes de [2] sont continues en z pour $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq 0$ et analytiques en $\operatorname{Re} z > 0$.

Pour le côté gauche ceci decoule da la Proposition 1; Pour le côté droit, c'est une conséquence de differentiation dominée. Or par la Proposition 2, les deux côtés sont identiques lorsque z est réel positif. Donc ils sont égales pour tout z, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z \neq 0$. □

<u>Corollaire</u>. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$|[\exp{-it/2}\ P_M(D)\phi](x)| \leq [(2\pi t)^n \det M]^{-1/2}\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

§19. <u>L'echelle d'un opérateur autoadjoint</u>.

<u>Définition</u>. Soit A un opérateur autoadjoint dans H et $s \geq 0$. $H^s(A)$ est l'espace $\operatorname{dom}(1+|A|)^{s/2}$ muni de la norme (hilbertienne)

$$\|\phi\|_{H^s(A)} = \|(1+|A|)^{s/2}\phi\|.$$

__Exemple__. Soit $H = L^2_\nu(X)$ et $A = \mathfrak{m}_g$ où $g: X \to \mathbb{R}$ est borelien. Alors $H^s(A) = L^2_{\nu_s}(X)$ où $\nu_s = (1+|g|)^s\nu$.

En effet $\phi \in \operatorname{dom}(1+|A|)^{s/2}$ ssi $(1+|g|)^{s/2}\phi \in L^2_\nu(X)$ ssi $\phi \in L^2_{\nu_s}(X)$. En outre pour $\phi \in H^s(A)$,

$$\|\phi\|^2_{H^s(A)} = \int_X (1+|g(\omega)|)^s|\phi(\omega)|^2 d\nu(\omega) = \|\phi\|^2_{L^2_{\nu_s}(X)} .$$

__Proposition 1__. 1. $H^2(A) = \operatorname{dom} A$ et la norme $\|\ \|_{H^2(A)}$ est equivalente à la norme du graphe: $|\!|\!|\phi|\!|\!|^2 = \|\phi\|^2 + \|A\phi\|^2$.

2. Si $s_1 \geq s_2 \geq 0$, alors $H^{s_1}(A) \subseteq H^{s_2}(A) \subseteq H$ avec des inclusions continues de norme ≤ 1.

1. Supposons $A = \mathfrak{m}_g$. $\phi \in \operatorname{dom}(1+|A|)$ ssi $(1+|g|)\phi \in L^2_\nu(X)$ ssi $\phi \in \operatorname{dom} A$. En plus

$$\|\phi\|^2_{H^2(A)} = \|(1+|A|)\phi\|^2 = \int_X (1+|g(\omega)|)^2|\phi(\omega)|^2 d\nu(\omega)$$

$$\leq 2\int_X (1+|g(\omega)|^2)|\phi(\omega)|^2 d\nu(\omega) = 2[\|\phi\|^2 + \|A\phi\|^2]$$

$$\leq 2\int_X [1+|g(\omega)|]^2|\phi(\omega)|^2 d\nu = 2\|\phi\|^2_{H^2(A)} .$$

Le cas général en découle par le théorème spectral. Les mêmes considérations démontrent 2. $\square$

__Définition__. $H^\infty(A) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(A)$.

__Proposition 2__. Soit A un opérateur autoadjoint dans H. Alors

1. Si $s \geq 2$ A applique $H^s(A)$ continûment dans $H^{s-2}(A)$.
2. $A[H^\infty(A)] \subseteq H^\infty(A)$.

Evidemment 1 ⇒ 2. Pour démontrer 2 on peut supposer que $A = \mathfrak{m}_g$ agissant dans $L^2_\nu(X)$. Dans ce cas 1. découle des définitions et de l'inegalité

$$[1+|g|]^{s-2/2}\ |g\psi| \le [1+|g|]^{s/2}\ |\psi|. \qquad \square$$

On remarque que $H^\infty(A)$ est dense dans $H^s(A)$, $s \ge 0$.

§20. Équations d'évolution.

Théorème. Soit A un opérateur autoadjoint dans H, $u_o \in H^s(A)$, $s \ge 2$ et

$$f \in L^1(]-T,T[\,,\ H^s(A)) \cap C(]-T,T[\,,\ H^{s-2}(A)). \qquad [1]$$

Alors la fonction

$$u(t) = \exp{-itA} \int_0^t \exp i\theta A\ f(\theta)d\theta + \exp{-itA}\ u_o \qquad [2]$$

est

(i) normiquement continue $]-T,T[\ \to H^s(A)$

(ii) normiquement differentiable $]-T,T[\ \to H^{s-2}(A)$

(iii) solution du problème à valeur initiale

$$u(0) = u_o$$

$$u'(t) = -iAu(t) + f(t).$$

En plus u est la seule fonction ayant ces propriétés.

Remarque: La condition [1] a un sens car $H^s(A) \subseteq H^{s-2}(A)$.

Supposons d'abord que $u_o = 0$.

La condition $f \in L^1(]-T,T[, H^s(A))$ entraîne que la fonction $\theta \mapsto \exp i\theta A\, f(\theta) \in L^1(]-T,T[, H^s(A))$ et donc que

$$w(t) = \int_0^t \exp i\theta A\, f(\theta)d\theta$$

est continue dans $H^s(A)$. La condition $f \in C(]-T,T[, H^{s-2}(A))$ entraîne de même que w est C^1 à valeur dans $H^{s-2}(A)$.

Il est donc clair que $u(t) = \exp\text{-}itA\, w(t)$ est continue dans $H^s(A)$. Supposons $\eta \in H^\infty(A)$. Alors

$$d/dt\langle \exp\text{-}itA\, w(t),\eta\rangle_s = d/dt\langle w(t),\exp itA\eta\rangle_s$$

$$= \langle w'(t),\exp itA\eta\rangle_s + \langle w(t),(iA)\exp itA\eta\rangle_s$$

$$= \langle \exp itA\, f(t),\exp itA\eta\rangle_s - \langle iA \exp\text{-}itA\, w(t),\eta\rangle_s$$

$$= \langle [f(t)\text{-}iAu(t),\eta\rangle_s \qquad [\text{où } \langle\ ,\ \rangle_s = \langle\ ,\ \rangle_{H^s(A)}].$$

Il s'ensuit que pour tout $\eta \in H^\infty(A)$

$$\langle \exp\text{-}i\theta A\, w(\theta)\Big|_0^t,\eta\rangle_s = \int_0^t \langle [f(\theta)\text{-}iAu(\theta)],\eta\rangle_s\, d\theta$$

$$= \langle \int_0^t [f(\theta)\text{-}iAu(\theta)]d\theta,\eta\rangle_s \qquad [3]$$

Par densité on conclut que [3] est valable pour tout $\eta \in H^s(A)$ et donc par Hahn-Banach:

$$u(\theta)\Big|_o^t = \exp\text{-}i\theta A\, w(\theta)\Big|_o^t = \int_0^t [f(\theta)\text{-}iAu(\theta)]\,d\theta$$

Or $\theta \mapsto f(\theta) - iAu(\theta)$ est continue dans $H^{s-2}(A)$; On conclut de ceci et du théorème fondamental du calcul que

$$u'(t) = f(t) - iAu(t).$$

Ceci montre le résultat dans le cas $u_o = 0$. Dans le cas général on a que $t \mapsto \exp -itAu_o$ est C^1 à valeurs dans $H^{s-2}(A)$ et

$$d/dt \exp -itA\, u_o = -iA \exp -itA\, u_o$$

par la proposition §14. Il s'ensuit que la fonction donnée par la formule [2] satisfait aux conditions (i), (ii), (iii).

Pour démontrer l'unicité de u on peut supposer par linéarité que $f = 0$ et $u_o = 0$. Par (iii)

$$d/dt\langle u(t),u(t)\rangle = 2\ \mathrm{Re}\langle u'(t),u(t)\rangle$$

$$= -2\ \mathrm{Re}\langle iAu(t),u(t)\rangle = 0$$

et donc $\|u(t)\|^2$ est constante. Par conséquent, pour $t \in \,]-T,T[$

$$\|u(t)\| = \|u(0)\| = 0.$$

Exercices

Soit W un espace de Hilbert complexe de dimension finie, $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{L}_s(W)$ et P la fermeture de

$$\sum_{i=1}^{n} A_i D_{e_i}$$

agissant sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n,W)$.

<u>Exercice 1</u>. Determiner $H^s(P)$ pour $s \geq 0$.

<u>Exercice 2a</u>. Formuler un théorème d'existence et unicité pour l'équation differentielle

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{e_i} u(t,x).$$

[Définir convenablement les derivées $\partial_t u$, $\partial_{e_i} u$.]

Exercice 2b. Faire la même chose pour

$$E(x)\partial_t u(t,x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{e_i} u(t,x)$$

où $E\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_s(W)$ est une application borelienne telle que

$$a\|\eta\|_W^2 \geq \langle E(x)\eta,\eta\rangle_W \geq b\|\eta\|_W^2$$

[où $a,b > 0$] pour $\eta \in W$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 3. Soit A un opérateur autoadjoint borné inferieurement. C'est à dire il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle A\xi,\xi\rangle \geq \beta\|\xi\|^2 \qquad \xi \in \text{dom } A.$$

Si $u_o \in H$ il existe une fonction $u\colon]0,\infty[\to H^2(A)$ ayant les propriétés suivantes:

1. u est de classe C^1 à valeurs dans $H^2(A)$
2. $u(t)$ converge vers u_o dans H lorsque $t \to 0$
3. u est solution de l'équation

$$u'(t) = -Au(t).$$

La fonction u ayant ces propriétés est unique, et en outre

$$u(t) \in H^\infty(A)$$

pour $t > 0$.

§21. Interpolation hilbertienne.

Théorème. Soient A, B des opérateurs autoadjoints dans les espaces $H(A)$, $H(B)$ resp. Supposons que

$$T: H^{s_o}(A) \to H^{t_o}(B)$$

soit une application linéaire continue, $s_1 > s_o$, $t_1 > t_o$ tels que

$$T: H^{s_1}(A) \to H^{t_1}(B).$$

Pour $0 \leq \theta \leq 1$ posons

$$s_\theta = (1-\theta)s_o + \theta s_1$$

$$t_\theta = (1-\theta)t_o + \theta t_1 .$$

Alors T applique $H^{s_\theta}(A)$ continûment dans $H^{t_\theta}(B)$ et la norme C_θ de cette application satisfait à

$$C_\theta \leq C_o^{(1-\theta)} C_1^\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Corollaire. Soient A, B des opérateurs autoadjoints dans H. Si dom A = dom B alors $H^s(A) = H^s(B)$ pour $0 \leq s \leq 2$, comme espaces vectoriels et avec equivalence des normes.

En effet appliquer le théorème à

$$T = 1_H: H \to H.$$

Par hypothèse

$$1_H[H^2(A)] \subseteq H^2(B)$$

$$1_H[H^2(B)] \subseteq H^2(A).$$

Le théorème est une conséquence du théorème spectral et du lemme suivant:

Lemme. Soient (X,ν), (Y,μ) des espaces mesurés; g, h des fonctions mesurables $X \to [1,\infty[$, $Y \to [1,\infty[$ resp; et T une application linéaire continue $L^2_\nu(X) \to L^2_\mu(Y)$. Si

$$T[L^2_{g\nu}(X)] \subseteq L^2_{h\mu}(Y)$$

alors T applique $L^2_{g^\theta\nu}(X)$ continûment dans $L^2_{h^\theta\mu}(Y)$ pour $0 \leq \theta \leq 1$. En plus la norme C_θ de T dans $\mathcal{L}(L^2_{g^\theta\nu}(X), L^2_{h^\theta\mu}(Y))$ satisfait $C_\theta \leq C_o^{1-\theta}\, C_1^\theta$.

Par le théorème du graphe fermé on obtient que T est continue comme application $L^2_{g\nu}(X) \to L^2_{h\mu}(Y)$.

Si $\psi \in L^2_{g\nu}(X)$ alors $z \mapsto g^{-z}\psi$ est une fonction bornée continue $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\} \to L^2_{g\nu}(X)$ et analytique $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0\} \to L^2_{g\nu}(X)$. De la même façon si $\phi \in L^2_{h\mu}(Y)$ alors la fonction $z \mapsto h^{\bar{z}-1}\phi$ est bornée et antianalytique $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 1\} \to L^2_{h\mu}(Y)$. En particulier si $\psi \in L^2_{g\nu}(X)$ et $\phi \in L^2_{h\mu}(Y)$, la fonction

$$F(z) = \langle T(g^{-z}\psi), h^{\bar{z}-1}\phi\rangle_{L^2_{h\mu}(Y)} =$$

$$\int_Y T(g^{-z}\psi)\overline{h^{\bar{z}-1}\phi}\; h\, d\mu = \langle h^z\, T(g^{-z}\psi), \phi\rangle_{L^2_\mu(Y)}$$

est analytique dans $0 < \operatorname{Re} z < 1$ et bornée et continue dans $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$.

Or si $\operatorname{Re} z = 0$, on a que

$$|\langle h^z\ T(g^{-z}\psi),\phi\rangle_{L^2_\mu(Y)}| \leq$$

$$\leq \|h^z\ T(g^{-z}\psi)\|_{L^2_\mu(Y)}\ \|\phi\|_{L^2_\mu(Y)} \leq C_o\|\psi\|_{L^2_\nu(X)}\ \|\phi\|_{L^2_\mu(Y)}$$

Si $\operatorname{Re} z = 1/2$

$$|\langle h^z\ T(g^{-z}\psi),\phi\rangle_{L^2_\mu(Y)}| \leq \|h^z\ T(g^{-z}\psi)\|_{L^2_\mu(Y)}\ \|\phi\|_{L^2_\mu(Y)}$$

$$\leq \|T(g^{-z}\psi)\|_{L^2_{h\mu}(Y)}\ \|\phi\|_{L^2_\mu(Y)} \leq C_1\|\psi\|_{L^2_\nu(X)}\ \|\phi\|_{L^2_\mu(Y)}\ .$$

Ceci nous permet d'appliquer le <u>théorème des trois lignes</u> à la fonction F dans la bande $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1/2$: Donc

$$|\langle h^z\ T(g^{-z}\psi),\phi\rangle_{L^2_\mu(Y)}| \leq C_o^{1-2\ \operatorname{Re} z}\ C_1^{2\ \operatorname{Re} z}\ \|\psi\|_{L^2_\nu(X)}\ \|\phi\|_{L^2_\mu(Y)}$$

pour $\psi \in L^2_{g\nu}(X)$ et $\phi \in L^2_{h\mu}(Y)$. Puisque $L^2_{h\mu}(Y)$ est dense dans $L^2_\mu(Y)$ on en conclut que

$$\|T(g^{-s}\psi)\|_{L^2_{h^{2s}\mu}(Y)} = \|h^s T(g^{-s}\psi)\|_{L^2_\mu(Y)} \leq$$

$$\leq C_o^{1-2s}\ C_1^{2s}\ \|\psi\|_{L^2_\nu(X)} \qquad [1]$$

pour $0 \leq s \leq 1/2$ et $\psi \in L^2_{g\nu}(X)$. On démontre maintenant que cette inegalité est valable pour tout $\psi \in L^2_\nu(X)$: Soit $\{\psi_i\}$ une suite de $L^2_{g\nu}(X)$ qui converge vers ψ dans $L^2_\nu(X)$. Par [1] il s'ensuit que $\{T(g^{-s}\psi_i)\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{h^{2s}\mu}(Y)$ et donc convergent dans $L^2_{h^{2s}\mu(Y)}$ vers η. Or $g^{-s}\psi_i \to g^{-s}\psi$ aussi dans $L^2_\nu(X)$ et par hypothèse $T(g^{-s}\psi_i) \to$ $\to T(g^{-s}\psi)$ dans $L^2_\mu(Y)$. Par conséquent $\eta = T(g^{-s}\psi) \in L^2_{h^{2s}\mu}(Y)$ et [1] est valable quel que soit $\psi \in L^2_\nu(X)$.

Or si $\psi \in L^2_{g^{2s}\nu}(X)$, $g^s\psi \in L^2_\nu(X)$ et par conséquent

$$\|T(\psi)\|_{L^2_{h^{2s}\mu}(Y)} \le C_0^{1-2s}\, C_1^{2s}\, \|\psi\|_{L^2_{g^{2s}\nu}(X)} . \qquad \square$$

<u>Appendice</u> - <u>Le Théorème des trois lignes</u>.

<u>Théorème</u>. Soit ϕ une fonction continue et bornée sur $\{z \in \mathbb{C}: 0 \le \text{Re } z \le 1\} = X$, analytique dans int X et qui satisfait

$$|\phi(z)| \le M_0 \qquad \text{Re } z = 0$$

$$|\phi(z)| \le M_1 \qquad \text{Re } z = 1$$

Alors

$$|\phi(z)| \le M_0^{1-\text{Re } z}\, M_1^{\text{Re } z} \qquad z \in X.$$

On suppose d'abord que $M_0 = M_1 = 1$. Supposons en outre que $|\phi(z)| \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$. Donc il existe $R > 0$ tel que

$$|\phi(z)| \le 1 \qquad z \in X,\ \ |z| \ge R.$$

Par le principe du maximum appliqué à $X \cap \{|z| \le R\}$ on conclut que $|\phi(z)| \le 1$ quel que soit $z \in X$.

Dans le cas où ϕ est borné, posons

$$\phi_n(z) = \phi(z)\, \exp([z^2-1]/n).$$

Si $z = x+iy$

$$\exp([(x+iy)^2-1]/n) = \exp([x^2-y^2-1]/n)\, \exp[2ixy/n]$$

qui converge vers 0 lorsque $y \to \infty$. Puisque ϕ est borné dans X on conclut que $|\phi_n(z)| \to 0$ lorsque $z \to +\infty$. Par ailleurs

$$|\phi_n(z)| = \exp([-y^2-1]/n)|\phi(z)| \le 1 \qquad \text{Si} \quad \text{Re } z = x = 0$$

$$|\phi_n(z)| = \exp(-y^2/n)|\phi_n(z)| \le 1 \qquad \text{Si} \quad \text{Re } z = x = 1.$$

Par le cas anterieur

$$|\phi_n(z)| \le 1 \qquad z \in X$$

et donc

$$|\phi(z)| \le 1 \qquad z \in X$$

puisque $\phi_n(z) \to \phi(z)$ lorsque $n \to +\infty$.

Si $M_o, M_1 > 0$ posons

$$\psi(z) = \phi(z) M_o^{z-1} M_1^{-z}.$$

On conclut que $|\psi(z)| \le 1$, $z \in X$ et donc

$$|\phi(z)| \le M_o^{1-\text{Re } z} M_1^{\text{Re } z} \qquad z \in X.$$

Si l'un d'entre M_o, M_1 est nulle, par exemple $M_o = 0$ alors

$$|\phi(z)| \le M_o'^{\,1-\text{Re } z} M_1^{\text{Re } z}, \qquad z \in X$$

pour tout $M_o' > 0$. Par conséquent $|\phi(z)| = 0$ pour $z \in X$. □

§22. Les espaces de Sobolev.

Soit Δ le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$. Alors $H^s(-\Delta)$, $s \ge 0$ est l'espace de Sobolev d'ordre s, denoté par $H^s(\mathbb{R}^n)$.

<u>Proposition 1</u>. Si $s \geq 0$ $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [1+|x|^2]^s \; |\mathfrak{F}u(x)|^2 \, dx < \infty.$$

En outre si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} [1+|x|^2]^s \; |\mathfrak{F}u(x)|^2 \, dx.$$

$u \in \operatorname{dom}(-\Delta)$ ssi $\mathfrak{F}^{-1}u \in \operatorname{dom}(|x|^2)$; Si $u \in \operatorname{dom}(-\Delta)$ on a

$$(-\Delta)u = \mathfrak{F}|x|^2 \mathfrak{F}^{-1} u$$

[où par abus de notation, $|x|^2$ représente l'opérateur de multiplication par $|x|^2$]. Par conséquent,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{F}[H^s(|x|^2)] = \mathfrak{F}^{-1}[H^s(|x|^2)].$$

Or $H^s(|x|^2)$ est l'espace $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$ où $\mu_s = (1+|x|^2)^s \mu$ [μ = mesure de Lebesgue]. Il s'ensuit que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ssi $\mathfrak{F}u \in L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$; il est clair que

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\mathfrak{F}u\|_{L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)} .$$

<u>Proposition 2</u>. 1. $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$.

2. Si $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $s \in \mathbb{Z}^+$ alors

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

où C_α est un entier $\neq 0$.

1. $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la topologie définie par les seminormes $\{p_{\alpha,\beta}\}$ [Proposition 1, §15].

Donc $\mathcal{F}C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la topologie $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$. Or $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$ [μ_s est une mesure borelienne regulière et donc $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$], et donc $\mathcal{F}C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$. Par la Proposition 1 on conclut que $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. Si $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} [1+|x|^2]^s \ |\mathcal{F}u(x)|^2 \ dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le s} C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\mathcal{F}u(x)|^2 \ dx = \sum_{|\alpha|\le s} C_\alpha \|\mathcal{F}\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \sum_{|\alpha|\le s} C_\alpha \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

par définition, Lemme 1 [§16] et Plancherel. □

<u>Proposition 3</u>. Soit $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ [c'est à dire $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\alpha f$ est uniformement borné quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$]. Alors l'opérateur $\mathfrak{m}_f : \psi \longmapsto f\psi$ envoie $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ continûment pour tout $s \ge 0$.

Il est clair que $\mathfrak{m}_f : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est défini et continu. Par interpolation [Théorème, §21], il suffit de montrer que $\mathfrak{m}_f$ envoie $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s \ge 0$ entier. Pour démontrer ceci il suffit de démonter qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\|fu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le K\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \qquad [1]$$

pour $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. [En effet $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\mathfrak{m}_f$ est evidemment continue $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.] Or [1] est une conséquence de 2. de la Proposition 1, de la règle de Leibniz et du fait que $\mathfrak{m}_f$ est continue $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Théorème 1. Soit $s > n/2$. Alors $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_\omega(\mathbb{R}^n)$ [fonctions continues ayant limite 0 à l'infini] avec inclusion continue.

Soit $\mu_s = (1+|x|^2)^s\mu$. Alors $\mathfrak{F}: L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur unitaire. Puisque $\mathfrak{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to C_\omega(\mathbb{R}^n)$ est continue, il suffit de démontrer que pour $s > n/2$

$$L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$$

avec inclusion continue. Supposons donc que $u \in L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|dx \leq$$

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, (1+|x|^2)^s dx\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-s} dx\right]^{1/2}$$

or

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-s} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+r^2)^{-s} \, r^{n-1} \, dr \, d\Omega$$

$$< \int_{r \geq 1} r^{-2s+n-1} \, dr \, d\Omega + \int_{0 \leq r \leq 1} (1+r^2)^{-s} \, r^{n-1} \, dr \, d\Omega < \infty$$

car $-2s+n < 0$. Ceci entraîne qu'il existe un $K_1 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|dx \leq K_1 \|u\|_{L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 2. Supposons que $s > 0$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ soit un ensemble borelien de mesure finie. Alors l'inclusion

$$\{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : u|\mathbb{R}^n - \Omega = 0\} \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

est compacte.

Puisque $\mu(\Omega) < \infty$, l'espace $V = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : u|\mathbb{R}^n - \Omega = 0\}$ est contenu dans $L^1(\mathbb{R}^n)$; En plus l'inclusion est continue. Il s'ensuit que $\mathfrak{F}V \subseteq C^b(\mathbb{R}^n)$ continûment. Par ailleurs $\mathfrak{F}V$ est un sous-espace fermé de $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$. Nous allons montrer que ces deux propriétés entraînent que l'inclusion $\mathfrak{F}V \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte.

Soit donc $\{u_i\}$ une suite de $\mathfrak{F}V$ telle que $\|u_i\|_{L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Par la compacité faible de la boule unitaire de $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$, il existe une sous suite $\{u_i'\}$ faiblement convergente dans $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $\mathfrak{F}V$ est fermé, la limite u appartient à $\mathfrak{F}V$. On peut supposer que $u = 0$. On en deduit que $u_i' \to 0$ faiblement dans $C^b(R^n)$. En particulier $u_i'(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Or

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_i'(x)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_{|x|\leq K} |u_i'(x)|^2 dx + \int_{|x|\geq K} |u_i'(x)|^2 \, (1+|x|^2)^s (1+|x|^2)^{-s} dx.$$

Si K est tel que $(1+K^2)^{-s} \leq \varepsilon/2$, alors

$$\|u_i'\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{|x|\leq K} |u_i'(x)|^2 dx + \varepsilon/2.$$

En plus $u_i'(x)$ est uniformement borné dans $x \in \mathbb{R}^n$ et $u_i'(x) \to 0$ pour tout x; Par convergence dominée

$$\int_{|x|\leq K} |u_i'(x)|^2 dx \to 0$$

lorsque $i \to \infty$. Donc pour k_o suffisamment grand

$$\|u_i'\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \qquad i \geq k_o.$$

Pour compléter la démonstration, remarquons que $\mathcal{F}: V \to \mathcal{F}V$, et $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ sont des isométries (V consideré avec la norme $H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}V$ avec $L^2_{\mu_s}(\mathbb{R}^n)$).

Le Théorème 2 est connu comme le <u>théorème de Rellich</u>.

<u>Corollaire</u>. Soient $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $s > 0$. Alors $\mathfrak{m}_f: \psi \longmapsto f\psi$ est un opérateur compact $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par la Proposition 3, $\mathfrak{m}_f$ envoie $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ de façon continue. En plus l'image de cette application est contenue dans le sous-espace V de $H^s(\mathbb{R}^n)$ où

$$V = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n): u|\mathbb{R}^n - \operatorname{Supp} f = 0\}.$$

Puisque l'inclusion $V \to H^s(\mathbb{R}^n)$ est compacte le résultat suit par composition. □

<u>Exercices</u>

Soit H un espace de Hilbert $K = K(H)$ l'espace des opérateurs compacts $T \in \mathcal{L}(H)$.

<u>Exercice 1</u>. Si $T \in K$, alors

$$\inf\{\|T(1-E)\|: E \text{ une projection de rang fini}\} = 0.$$

<u>Exercice 2</u>. K est un ideal fermé et $\mathcal{L}(H)/K$ est une C^*-algèbre.

[Démontrer:

(a) $\mathcal{L}(H)/K$ est une algèbre de Banach involutive.

(b) Soit $C \in K(H)$. Il existe une suite $\{E_n\}$ de projections de rang fini telle que

$$C = \lim_n C\, E_n$$

(c) Par conséquent

$$\begin{aligned}\|T+C\| &\geq \liminf_n \|(T+C)(1-E_n)\| \\ &= \liminf_n \|T(1-E_n)\| \geq \inf \|T(1-E_n)\|.\end{aligned}$$

(d) Conclure que

$$\|T/K\| = \inf\{\|T(1-E)\| : E \text{ projection de rang fini}\}.$$

(e) Déduire de (d)

$$\begin{aligned}\|T/K\|^2 &= \inf\{\|T(1-F)\|^2 : F \text{ projection de rang fini}\} \\ &\leq \inf\{\|T^*T(1-F)\| : F \text{ projection rang fini}\} \\ &= \|[T^*T]/K\|.\end{aligned}$$

(f) Achéver la démonstration à partir de (e).

<u>Exercice 3</u>. Soit $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\left.\begin{array}{l}\partial_{x_i}\, a(\theta) \to 0 \\ \partial_{x_i}^2\, a(\theta) \to 0\end{array}\right\} \text{lorsque } |\theta| \to \infty. \qquad [1]$$

Alors $\Delta \mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_a \Delta$ sont des opérateurs continus $H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\Delta \mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_a \Delta$$

est compact $H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

[D'abord

$$\partial_{x_i}^2 \mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_a \partial_{x_i}^2 = \mathfrak{m}_{\partial_{x_i}^2 a} + 2\, \mathfrak{m}_{\partial_{x_i} a} \cdot \partial_{x_i}$$

et $\mathfrak{m}_b$ est compact $H^1(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ si $b \in C^\infty_\omega(\mathbb{R}^n)$.]

Exercice 4. Si $a \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ satisfait aux conditions [1] alors

$$[(1-\Delta)^{-1}, \mathfrak{m}_a] \in K(L^2(\mathbb{R}^n)).$$

[Utiliser le fait que

$$(1-\Delta)^{-1}: L^2(\mathbb{R}^n) \to H^2(\mathbb{R}^n)$$

est un homéomorphisme.]

On va considérer les C^*-algèbres suivantes sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. $\mathfrak{a}_1$ est la C^*-algèbre engendrée par les opérateurs $\mathfrak{m}_a$ où $a \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ satisfait aux conditions [1].

2. $\mathfrak{a}_2$ est la C^*-algèbre engendrée par 1 et l'opérateur $[1-\Delta]^{-1}$.

3. $\mathfrak{a}$ est la C^*-algèbre engendrée par $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ et l'algèbre $K(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Exercice 5. $\mathfrak{a}/K \subseteq \mathcal{L}(H)/K$ est une C^*-algèbre commutative avec 1.

Soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{a}/K$. Par le théorème de Gelfand la transformée de Gelfand est un $*$-isomorphisme isométrique

$$\mathfrak{B} \to C(\mathfrak{B}^\wedge).$$

Si $T \in \mathfrak{a}$ le symbole de T, denoté $\mathrm{Smb}(T)$ est la fonction continue $\mathfrak{B}^\wedge \to \mathbb{C}$

$$\mathrm{Smb}(T) = [T/K]^\wedge.$$

Soit A un opérateur autoadjoint dans H. A est associé à $\mathfrak{a}$ denoté par $A \sim \mathfrak{a}$ ssi il existe une fonction continue, strictement monotone et bornée $f: \mathrm{Sp}\, A \to \mathbb{R}$ telle que $f(A) \in \mathfrak{a}$.

Exercice 6. Si $A \sim \mathfrak{a}$ et $g: \text{Sp}\ A \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone continue bornée, alors $g(A) \in \mathfrak{a}$.

[Remarquer que la fonction

$$g \circ f^{-1}: f(\text{Sp}\ A) \to \mathbb{R}$$

est continue monotone et bornée; Donc il existe une extension continue $h: f(\text{Sp}\ A)^{-} \to \mathbb{R}$. Or

$$\text{Sp}\ f(A) \subseteq f(\text{Sp}\ A)^{-}$$

et

$$g(A) = h[f(A)].$$

Si A est autoadjoint associé à $\mathfrak{a}$, alors le symbole de A [Smb A] est défini de façon à ce que

$$f(\text{Smb}\ A) = \text{Smb}\ f(A)$$

pour toute fonction monotone continue bornée f. f est une fonction $\mathfrak{B}^{\wedge} \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Exercice 7. Sm b A est bien défini.

4. PERTURBATIONS D'OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

§23. Théorème de A-domination de Kato.

Soit A un opérateur autoadjoint dans H; Un opérateur $B\colon \operatorname{dom} A \to H$ est A borné ssi il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que

$$\|B\eta\| \leq a\|A\eta\| + b\|\eta\| \qquad \eta \in \operatorname{dom} A \qquad [1]$$

Au cas où B est A borné, on définit $N_A(B)$ comme $\inf\{a \in \mathbb{R}\colon$ il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que [1] est valable$\}$.

Théorème. Supposons que A soit autoadjoint, $B\colon \operatorname{dom} A \to H$ symétrique et A borné avec $N_A(B) < 1$. Alors l'opérateur $A+B\colon \operatorname{dom} A \to H$ est autoadjoint. En outre $A + B$ est essentiellement autoadjoint sur $V \subseteq \operatorname{dom} A$ ssi A est essentiellement autoadjoint sur V.

Evidemment $A+B$ est symmétrique. Par conséquent $A+B$ est autoadjoint ssi il existe $c > 0$ tel que les opérateurs $A+B \pm ic\colon \operatorname{dom} A \to H$ soient surjectifs. Remarquons que par hypothèse les opérateurs $A \pm ic\colon \operatorname{dom} A \to H$ ont des inverses $(A\pm ic)^{-1}\colon H \to \operatorname{dom} A$. En plus il existe $a < 1$, $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\|B\eta\|^2 \leq a\|A\eta\|^2 + b\|\eta\|^2 = a[\|A\eta\|^2 + ba^{-1}\|\eta\|^2]$$

$$= a\|[A\pm iba^{-1}]\eta\|^2 \qquad \text{pour tout } \eta \in \operatorname{dom} A$$

il s'ensuit que

$$\|B(A\pm ic)^{-1}\eta\|^2 \le a\|\eta\|^2 \qquad \eta \in H$$

où $c = ba^{-1}$. Par conséquent $B(A\pm ic)^{-1}$ est un opérateur $H \to H$ continue de norme <1. Par la série de Neumann [Lemme, §1] $1 + B(A\pm ic)^{-1}: H \to H$ est un opérateur inversible; il est evidente que

$$B+A\pm ic = [B(A\pm ic)^{-1} + 1](A\pm ic) \qquad [2]$$

On en déduit que $B+A\pm ic$: dom $A \to H$ est surjectif.

A est essentiellement autoadjoint sur $V \subseteq$ dom A ssi $[A\pm ic](V)$ sont denses dans H. Par [2] il est clair que cette condition est equivalent à ce que $(B+A\pm ic)(V)$ soient denses dans H; Autrement dit, à ce que $B+A$ soit essentiellement autoadjoint sur V. □

Exemple. Supposons que $B: H \to H$ soit un opérateur borné. Alors $B_1 = B \mid$ dom A est A borné et $N_A(B_1) = 0$.

En particulier

Proposition. Soient $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha D^\alpha$ où $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le m$ et $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Alors l'opérateur $P(D)+b$ [b désigne l'opérateur de multiplication par b] est autoadjoint sur dom $P(D)$ et essentiellement autoadjoint sur tout sous-espace dense de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
□

Nous démontrerons une généralisation très importante dans la section suivante.

§24. Opérateurs de Schrödinger.

Théorème. Soient

1. $P_M(D) = -\sum_{j,k} m_{jk}\,\partial_{x_j}\partial_{x_k}$ un opérateur elliptique à coefficients constants.

2. $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ $1 \leq j \leq N$ des applications linéaires surjectives.

3. $b_j \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $1 \leq j \leq N$.

Alors l'opérateur $P_M(D) + \sum_{j=1}^{N} b_j \circ T_j$ est défini et autoadjoint sur dom $P_M(D)$ et essentiellement autoadjoint sur tout coeur de $P_M(D)$.

Exemple. Soient $n = 3s$ et $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3$ (s-fois). Alors

$$[A\phi](x) = [P_M(D)\phi](x) + \sum_{\alpha<\beta} d_{\alpha,\beta}|x_\alpha - x_\beta|^{-1}\,\phi(x)$$

est un opérateur essentiellement autoadjoint sur tout coeur de $P_M(D)$ quels que soient les coefficients $d_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$. En effet soit $T_{\alpha,\beta}(x_1,\ldots,x_s) = x_\alpha - x_\beta$, $\alpha < \beta$. $T_{\alpha,\beta}$ est surjective $\mathbb{R}^{3s} \to \mathbb{R}^3$ et la fonction $|x|^{-1}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

On va d'abord généraliser la Proposition 1 de la §23.

Lemme 1. Soit A un opérateur autoadjoint dans H. Si $s_o > s_1 > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $k(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|\phi\|_{H^{s_1}(A)} \le \varepsilon\|\phi\|_{H^{s_o}(A)} + k(\varepsilon)\|\phi\|_H . \qquad [1]$$

Par le théorème spectral on peut supposer que $H = L^2_\nu(X)$ et $A = \mathfrak{m}_g$ où $g: X \to \mathbb{R}$ est borelien. Alors si $\phi \in H^{s_1}(A)$

$$\|\phi\|^2_{H^{s_1}(A)} = \int_X [1+|g(\omega)|]^{s_1} |\phi(\omega)|^2 d\nu(\omega) \le$$

$$\le \int_X [1+|g(\omega)|]^{s_1} [1+|g(\omega)|]^{-s_o} [1+|g(\omega)|]^{s_o} |\phi(\omega)|^2 d\nu(\omega).$$

Soit $X_\varepsilon = \{\omega \in X: [1+|g(\omega)|]^{s_1-s_o} \le \varepsilon\}$. Puisque $0 < s_1 < s_o$

$$X_\varepsilon = \{\omega \in X: |g(\omega)| \ge M_\varepsilon\}$$

où $M_\varepsilon < \infty$. Par conséquent si $\phi \in H^{s_1}(A)$

$$\|\phi\|^2_{H^{s_1}(A)} \le \varepsilon\|\phi\|^2_{H^{s_o}(A)} + [1+M_\varepsilon]^{s_1} \|\phi\|^2_H$$

ce qui entraîne [1]. $\square$

<u>Proposition 1</u>. Soit A un opérateur autoadjoint et supposons qu'il existe s, $0 \leq s < 2$ tel que $B: H^s(A) \to H$ soit continue. Alors $B_1 = B \mid \text{dom } A$ est A borné et $N_A(B_1) = 0$.

Par le Lemme 1, si $\epsilon > 0$ il existe $k(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|\phi\|_{H^s(A)} \leq \epsilon\|\phi\|_{H^2(A)} + k(\epsilon)\|\phi\|_H \qquad \phi \in H^2(A).$$

Soit $\|B\|$ la norme de B dans $\mathcal{L}(H^s(A),H)$. Alors

$$\|B\phi\| \leq \|B\|\|\phi\|_{H^s(A)} \leq \|B\| \,[\epsilon\|\phi\|_{H^2(A)} + k(\epsilon)\|\phi\|_H]$$

$$= \|B\| \,[\epsilon\|[1+|A|]\phi\|_H + k(\epsilon)\|\phi\|_H]$$

$$\leq \epsilon\|B\|\|A\phi\|_H + [\epsilon+k(\epsilon)]\|B\|\|\phi\|_H \,.$$

Il suffit de choisir ϵ tel que $\epsilon\|B\| < 1$. $\square$

Pour démontrer le théorème on va prendre

$$A = -\sum_{j,k} m_{j,k}\, \partial_{x_j} \partial_{x_k}$$

Or $H^s(A) = H^s(\mathbb{R}^n)$; donc il reste à démonter que les opérateurs

$b_j \circ T_j$ sont continues $H^s(\mathbb{R}^n) \to H$ pour au moins un s, $0 \leq s < 2$.

Lemme 2. Supposons que $s > n/2$. Alors

$$L^2(\mathbb{R}^n) \cdot H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$$

et $(b,\psi) \to b\cdot\psi$ est une application bilinéaire continue.

En effet, si $s > n/2$ par [Théorème 1, §22]

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_\omega(\mathbb{R}^n)$$

et

$$L^2(\mathbb{R}^n) \cdot C_\omega(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$$

continûment. $\square$

En particulier, si $b \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $s > 3/2$ multiplication par b est continue $H^s(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$.

Lemme 3. Soit $\mathbb{R}^n = F_1 \times F_2$ où $\dim F_1 = 3$ et soit $b \in L^2(F_1)$. Alors l'application $\psi \longmapsto b\psi$ donné par

$$b\psi(x_1,x_2) = b(x_1)\psi(x_1,x_2)$$

est continue $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s > 3/2$.

Supposons d'abord que $\psi \in C_o(F_1 \times F_2) = C_o(\mathbb{R}^n)$

$$\|b\psi\|^2 = \int_{F_2} [\int_{F_1} |b(x_1)\psi(x_1,x_2)|^2 \, dx_1] dx_2$$

$$\leq \int_{F_2} \|b\psi(\cdot,x_2)\|^2_{L^2(F_1)} \, dx_2$$

$$\leq K \int_{F_2} \|\psi(\cdot,x_2)\|^2_{H^s(F_1)} \, dx_2$$

$$= K \int_{F_2} [\int_{F_1} [1+|x_1|^2]^s \ |[\mathcal{F}_\theta \psi(\theta,x_2)](x_1)|^2 \ dx_1]dx_2$$

$$= K \int_{F_1} [(1+|x_1|^2)^s \int_{F_2} |[\mathcal{F}_\theta \psi(\theta,x_2)](x_1)|^2 \ dx_2]dx_1$$

$$= K \int_{F_1} [(1+|x_1|^2)^s \int_{F_2} |[\mathcal{F}\psi](x_1,x_2)|^2 \ dx_2]dx_1$$

$$\leq K \int_{F_1} [\int_{F_2} [(1+|x_1|^2+|x_2|^2)^s \ |\mathcal{F}\psi(x_1,x_2)|^2 \ dx_1 dx_2 = K\|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} .$$

Puisque $C_o(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ et b est un opérateur fermé dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ le résultat en découle. □

Proposition 2. Soient $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire surjective, $b \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Alors l'application $\psi \mapsto b'\psi$ où

$$b'\psi(x) = b(Tx)\psi(x)$$

est continue $H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dès que $s > 3/2$.

L'application T a la forme

$$T = T_1 P_F$$

où $P_F\colon \mathbb{R}^n \to F$ est une projection, $T_1\colon F \to \mathbb{R}^3$ est non-singulier. Posons $F_1 = F$, $F_2 = F^\perp$ et

$$b'(x) = b(Tx)$$

$b' \in L^2(F_1)$ et le résultat est une conséquence du Lemme 3. □

§25. Le Spectre d'un opérateur autoadjoint.

Définition. Soit E un espace de Banach, A: dom $A \to E$ un opérateur linéaire. Le spectre de A [denoté Sp A] est l'ensemble de $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A-\lambda\cdot 1$: dom $A \to H$ est non-inversible.

En d'autres termes $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, A$ ssi il existe $B \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Ran}\, B \subseteq \mathrm{dom}\, A$$

$$(A-\lambda\cdot 1)B\eta = \eta \qquad \eta \in E$$

$$B(A-\lambda\cdot 1)\eta = \eta \qquad \eta \in \mathrm{dom}\, A$$

Proposition. Sp A est fermé.

Si $\mathrm{Sp}\, A = \mathbb{C}$ l'assertion est triviale. Supposons que $\lambda_o \notin \mathrm{Sp}\, A$. Alors

$$\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda \in \mathbb{C}-\{\lambda_o\} : (\lambda-\lambda_o)^{-1} \in \mathrm{Sp}(A-\lambda_o)^{-1}\} \qquad [1]$$

En effet si $\lambda \neq \lambda_o$

$$\begin{aligned} A-\lambda &= A - \lambda_o - (\lambda-\lambda_o) \\ &= -[A-\lambda_o][\lambda-\lambda_o][(A-\lambda_o)^{-1} - (\lambda-\lambda_o)^{-1}]. \end{aligned}$$

Or $[A-\lambda_o]$: dom $A \to E$ est inversible; donc si $\lambda \neq \lambda_o$, $A-\lambda$ est inversible ssi $(\lambda-\lambda_o)^{-1} \notin \mathrm{Sp}(A-\lambda_o)^{-1}$. Ceci démontre [1].

Puisque $(A-\lambda_o)^{-1}$ est borné, $\mathrm{Sp}(A-\lambda_o)^{-1}$ est compact [Proposition 4, §2]. Il s'ensuit de [1] que Sp A est fermé. □

<u>Théorème</u>. Soit A un opérateur autoadjoint dans l'espace hilbertien H. Alors $\mathrm{Sp}\, A \subseteq \mathbb{R}$ et les conditions suivantes sont equivalents pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$
2. Si S est un ouvert contenant λ alors $\chi_S(A) \neq 0$.
3. Il existe une suite $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ dans dom A telle que
   $\|\xi_n\| = 1$
   $[A-\lambda]\xi_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

On peut supposer que $A = \mathfrak{m}_g$ agissant dans $L^2_\nu(X)$. On a que $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, A$ ssi $\omega \mapsto [g(\omega)-\lambda]^{-1}$ est localement essentiellement bornée.

ssi il existe $\delta > 0$ tel que $\{\omega: |g(\omega)-\lambda| < \delta\}$ soit localement ν-nul.

Or si $\lambda \notin \mathbb{R}$,

$$|g(\omega)-\lambda| \leq |\mathrm{Im}\, \lambda| \qquad \omega \in X$$

et donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, A$. Par conséquent $\mathrm{Sp}\, A \subseteq \mathbb{R}$

$1 \Leftrightarrow 2$. Par les remarques ci-dessus,

$\lambda \in \mathrm{Sp}\, \mathfrak{m}_g$ ssi pour tout $\delta > 0$, $\{\omega: |g(\omega)-\lambda| < \delta\}$ n'est pas localement ν-nul.

ssi pour tout ouvert $S \subseteq \mathbb{R}$ contenant λ, $\{\omega: g(\omega) \in S\}$ n'est pas localement ν-nul.

ssi pour tout ouvert $S \subseteq \mathbb{R}$ contenant λ, $\chi_S \circ g$ n'est pas localement nulle.

ssi $\mathfrak{m}_{\chi_S \circ g} = \chi_S(\mathfrak{m}_g) \neq 0$ quel que soit l'ouvert $S \subseteq \mathbb{R}$ contenant λ.

$2 \Rightarrow 3$. Si 2 est valable il existe une suite $\{\xi_n\}$ dans H telle que $\|\xi_n\| = 1$ et $\xi_n \in \operatorname{Ran} \chi_{]\lambda-n^{-1},\lambda+n^{-1}[}(m_g)$. En particulier

$$\|[m_g-\lambda]\xi_n\|^2 \le \int_X |g(\omega)-\lambda|^2 \; |\xi_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega)$$

$$\le n^{-2} \int_X |\xi_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

$3 \Rightarrow 2$. Soit $\{\xi_n\}$ une suite comme dans 3; si 2 n'est pas valable, il existe $S \subseteq \mathbb{R}$ ouvert contenant λ tel que

$$\chi_s(m_g) = m_{\chi_s \circ g} = 0.$$

Autrement dit $g(\omega) \notin S$ localement presque partout. Soit $\delta > 0$ tel que $]\lambda-\delta, \lambda+\delta[\subseteq S$. Alors

$$\|[A-\lambda]\xi_n\|^2 = \int_X |g(\omega)-\lambda|^2 \; |\xi_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega) \ge$$

$$\ge \delta^2 \int_X |\xi_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega) = \delta^2.$$

Ceci contradit l'hypothèse que $(A-\lambda)\xi_n \to 0$. $\square$

<u>Corollaire</u>. Soit $P_M(D)$ l'opérateur $-\Sigma\, m_{ij}\, \partial_{x_i}\, \partial_{x_j}$. Alors

$$\operatorname{Sp} P_M(D) = [0,\infty[\; .$$

Par la transformée de Fourier on sait que $P_M(D)$ est unitairement equivalent à multiplication par le polynome $\sum_{j,k} m_{jk}x_jx_k$. Après une rotation on peut supposer que $P_M(D)$ est unitairement equivalent à $\Sigma\, \alpha_j x_j^2$. Il est clair $\operatorname{Sp} P_M(D) \subseteq$ $\subseteq [0,\infty[$. En plus si $0 \le s_1 < s_2$ un calcul direct montre que

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^n: s_1 < P_M(x) < s_2\} \neq 0$$

le corollaire suit de la condition 2 du théorème. □

§26. Spectre essentiel.

Soit A un opérateur dom $A \to H$. $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ est <u>inessentiel</u> ssi

(a) λ est un point isolé de $\mathrm{Sp}\, A$ et

(b) $\dim\{\eta: A\eta = \lambda\eta, \ \eta \in \mathrm{dom}\, A\} < \infty$.

Le complémentaire dans $\mathrm{Sp}\, A$ des points inessentiels de A est le <u>spectre essentiel</u> de A denoté par $\mathrm{Sp}_{ess}(A)$.

<u>Théorème</u>. Soit A un opérateur autoadjoint dans H. Les conditions suivantes sont equivalents pour $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}_{ess}(A)$
2. Si S est un ouvert de R contenant λ, la projection $\chi_S(A)$ est de dimension infinie.
3. Il existe une suite $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ dans dom A telle que: $\|\xi_n\| = 1$ et $\xi_n \to 0$ faiblement lorsque $n \to \infty$ $[A-\lambda]\xi_n \to 0$ normiquement lorsque $n \to \infty$.

$1 \Rightarrow 2$. Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{ess}\, A$; donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ et une des conditions suivantes (a)' ou (b)' est verifiée

(a)' λ n'est pas un point isolé de $\mathrm{Sp}\, A$

(b)' $\dim\{\eta \in \mathrm{dom}\, A: A\eta = \lambda\eta\} = \infty$.

Dans le cas (a)' il existe $\lambda_n \in \mathrm{Sp}\, A$ tel que $\lambda_n \to \lambda$. Soit $\{S_n\}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \in S_n \subseteq S$ $S_n \cap S_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Par la condition 2 du théorème [§25] $\chi_{s_n}(A) \neq 0$. Puisque $\chi_s(A) \geq \chi_{s_n}(A)$ et $\chi_{s_n}(A)\cdot\chi_{s_m}(A) = 0$ il s'ensuit que

$$\dim \mathrm{Ran}\, \chi_s(A) \geq \sum_n \dim \mathrm{Ran}\, \chi_{s_n}(A) = +\infty .$$

Dans le cas (b)', $\{\eta \in \mathrm{dom}\, A\colon\ A\eta = \lambda\eta\} \subseteq \mathrm{Ran}\, \chi_s(A)$ et donc $\dim \chi_s(A) = +\infty$.

$2 \Rightarrow 1$. Si λ vérifie la condition 2 par [Théorème, §25] $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$. On montre que l'une des conditions (a) et (b) n'est pas verifiée. Supposons que λ soit un point isolé de $\mathrm{Sp}\, A$; Donc il existe un ouvert $S \subseteq R$ tel que $\mathrm{Sp}\, A \cap S = \{\lambda\}$. En particulier, si $\theta \in S-\{\lambda\}$ il existe un ouvert S_θ contenant θ tel que $\chi_{S_\theta}(A) = 0$. Soit $\{\theta_i\}_{i\in N}$ une suite de $S-\{\lambda\}$ telle que

$$S-\{\lambda\} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_{\theta_i} .$$

Evidemment pour tout $\phi \in H$

$$\|\chi_{S-\{\lambda\}}(A)\phi\| \leq \Sigma\|\chi_{S_{\theta_i}}(A)\phi\| = 0$$

et donc $\chi_{S-\{\lambda\}}(A) = 0$. Or

$$\chi_S(A) = \chi_{\{\lambda\}}(A) + \chi_{S-\{\lambda\}}(A) = \chi_{\{\lambda\}}(A).$$

Il s'ensuit que $\chi_{\{\lambda\}}(A)$ est une projection de dimension infinie. Si $\eta \in \mathrm{Ran}\, \chi_{\{\lambda\}}(A)$

$$A\eta = \lambda\eta$$

et par conséquent (b) n'est pas verifiée.

2 ⇒ 3. Il existe une suite $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ de dom A ayant les propriétés suivantes: $\|\xi_n\| = 1$, $\xi_n \perp \xi_m = 0$ pour $m \geq n$ et

$$\xi_n \in \operatorname{Ran} \chi_{]\lambda-n^{-1},\lambda+n^{-1}[}(A).$$

[On construit cette suite par induction en utilisant le fait que $\dim \operatorname{Ran} \chi_{]\lambda-n^{-1},\lambda+n^{-1}[}(A) = +\infty$ et la remarque suivante:
Si $K_o \subseteq H$ est de dimension infinie et $\eta_1,\ldots,\eta_k \in H$ il existe $\eta \in K_o$ tel que $\eta \perp \eta_j$ $j=1,\ldots,k$ et $\eta \neq 0$].

Donc $\xi_n \to 0$ faiblement. Prenant $A = \mathfrak{m}_g$

$$\|[\mathfrak{m}_g-\lambda]\xi_n\|^2 \leq \int_X |g(\omega)-\lambda|^2 \, |\xi_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega)$$
$$\leq n^{-2} \|\xi_n\|^2 \to 0.$$

3 ⇒ 2. Supposons que $\{\xi_n\}$ satisfait aux conditions de 3. Si 2. n'est pas verifié, alors il existe un ouvert $S \subseteq R$ tel que $\chi_S(A)$ soit de rang fini. Donc $\chi_S(A)\xi_n \to 0$ normiquement, et par conséquent $\|\xi_n-\chi_S(A)\xi_n\| > 1/2$ pour $n \geq n_o$, n_o suffisament grand. Posons

$$\xi'_n = \|\xi_n-\chi_S(A)\xi_n\|^{-1} [\xi_n-\chi_S(A)\xi_n] \qquad n \geq n_o \, .$$

On a que $\xi'_n \to 0$ faiblement et $\|\xi'_n\| = 1$. En outre

$$\xi'_n \perp \operatorname{Ran} \chi_S(A) \qquad n \geq n_o \, .$$

Soit $\delta > 0$ tel que $]\lambda-\delta,\lambda+\delta[\subseteq S$. Alors prenant $A = \mathfrak{m}_g$

$$\|[A-\lambda]\xi'_n\|^2 = \int_X |g(\omega)-\lambda|^2 \, |\xi'_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega)$$
$$\geq \delta^2 \int_X |\xi'_n(\omega)|^2 \, d\nu(\omega) = \delta^2. \qquad \square$$

§27. Stabilité du Spectre essentiel.

Proposition. Soient A, B des opérateurs autoadjoints tels que

1. dom A = dom B
2. A-B est un opérateur compact dom A $\to$ H [dom A ayant la norme du graphe].

Alors $Sp_{ess}\ A = Sp_{ess}\ B$.

Si $\lambda \in Sp_{ess}\ A$, il existe une suite $\{\xi_n\}$ de dom A telle que $\|\xi_n\| = 1$, $\xi_n \rightharpoonup 0$ faiblement et $[A-\lambda]\xi_n \to 0$ normiquement. Si $\|\!|\ \|\!|$ est la norme du graphe, [= la norme $H^2(A)$]

$$\|\!|\xi_n\|\!|^2 = \|\xi_n\|^2 + \|A\xi_n\|^2 = 1 + \|\lambda\xi_n + (A\xi_n - \lambda\xi_n)\|^2 \to 1+\lambda^2.$$

Donc $\{\xi_n\}$ est borné dans dom A et par conséquent il existe une sous suite $\{\xi_n'\}$ faiblement convergente dans dom A vers $\xi \in$ dom A. Puisque $\xi_n' \rightharpoonup \xi$ faiblement dans H, on conclut que $\xi = 0$. Par la compacité de A-B comme opérateur dom A $\to$ H, on a que

$$\|[A-B]\xi_n\| \to 0$$

et

$$(B-\lambda)\xi_n = (A-\lambda)\xi_n - (A-B)\xi_n \to 0$$

normiquement. Donc $\lambda \in Sp_{ess}\ B$. Pour démontrer l'inclusion contraire $Sp_{ess}\ B \subseteq Sp_{ess}\ A$, remarquons d'abord que les normes du graphe dans dom A et dom B sont equivalents. [Utiliser que dom A et dom B sont espaces de Banach et le théorème du graphe fermé.] D'où que A-B: dom B $\to$ H soit compact et par la première partie de la démonstration $Sp_{ess}\, B \subseteq Sp_{ess}\, A$. $\square$

On va appliquer ce résultat aux opérateurs de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$:

<u>Définition</u>. $L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)_\varepsilon$ est l'espace de fonctions f telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\|f_2\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ et $f = f_1 + f_2$.

<u>Théorème</u>. Soient

1. $P_M(D) = -\sum_{j,k} m_{jk}\, \partial_{x_j} \partial_{x_k}$ un opérateur elliptique à coefficients constants dans $\mathbb{R}^3$

2. $b \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})_\varepsilon$

Alors $Sp_{ess}\,[P_M(D)+b] = [0,\infty[$. En particulier $Sp[P_M(D)+b] = [0,\infty[\,\cup\, \Gamma$ où $\Gamma \subseteq\,]-\infty,0[$ est soit un ensemble fini, soit un ensemble borné inferieurment dont 0 est le seul point d'accumulation.

<u>Lemme</u>. Si $s > 3/2$, et $b \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)_\varepsilon$ l'opérateur de multiplication par b est compact $H^s(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$.

Supposons d'abord que $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^3)$; Dans ce cas par le corollaire du Théorème 2, §22, l'opérateur $\psi \mapsto b\psi$ est compact $H^s(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $b \in L^2(\mathbb{R}^3)$, il existe une suite $\{b_n\}$ dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $b_n \to b$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Ceci entraîne que $m_{b_n} \to m_b$ normiquement dans $\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^3),L^2(\mathbb{R}^3))$. On en déduit que m_b est compact $H^s(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$. Finalement si $b \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)_\varepsilon$ il existe une suite $\{b_n'\}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que $\|b_n'-b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \to 0$. Donc $m_{b_n} \to m_b$ encore dans $\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^3),L^2(\mathbb{R}^3))$.

Par conséquent $\mathfrak{m}_b$ est compact. $\square$

Démonstration du théorème: Par le Théorème 1 de la §26

$$\text{dom } [P_M(D)+b] = \text{dom } P_M(D) = H^2(\mathbb{R}^3).$$

Par le lemme $b: H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ est compact. On conclut par l'invariance du spectre essentiel que

$$\text{Sp } [P_M(D)+b] = \Gamma \cup [0,\infty[$$

où $\Gamma \subseteq]-\infty,0[$ est soit discret fermé, soit discret dont 0 est le seul point d'accumulation. Le fait que Γ soit borné infe-rieurement découle de ce que $P_M(D) + b$ soit un opérateur borné inferieurement. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. Kato, T. Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, New York, 1976.

2. Reed, M. and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics, v. 1, Academic Press, New York, 1972.

3. --------------------- Methods of Modern Mathematical Physics, v. 2, Academic Press, New York, 1975.

4. Rudin, W. Real and Complex Analysis, Mc-Graw Hill, New York, 1966.

5. Weidman, J. Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer Verlag, New York, 1980.