MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA N.º 28

RESOLUBILIDADE LOCAL DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

FERNANDO CARDOSO
(UFPe)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

RIO DE JANEIRO
1977

DEPARTAMENTO DE INFORMAÇÃO CIENTÍFICA (DIC)

MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA

1) Alberto Azevedo & Renzo Piccinini - Introdução à Teoria dos Grupos
2) Nathan M. Santos - Vetores e Matrizes (esgotado)
3) Manfredo P. Carmo - Introdução à Geometria Diferencial Global
4) Jacob Palis Jr. - Sistemas Dinâmicos
5) João Pitombeira de Carvalho - Introdução à Álgebra Linear (esgotado)
6) Pedro J. Fernandez - Introdução à Teoria das Probabilidades
7) R.C. Robinson - Lectures on Hamiltonian Systems
8) Manfredo P. do Carmo - Notas de Geometria Riemanniana
9) Chain S. Hönig - Análise Funcional e o Problema de Sturn-Liouville
10) Welington de Melo - Estabilidade Estrutural em Variedades de Dimensão 2
11) Jaime Lesmes - Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais
12) Clóvis Vilanova - Elementos da Teoria dos Grupos e da Teoria dos Anéis
13) Jean Claude Douai - Cohomologie des Groupes
14) H. Blaine Lawson Jr. - Lectures on Minimal Submanifolds, Vol.1
15) Elon L. Lima - Variedades Diferenciáveis
16) Pedro Mendes - Teoremas de Ω-estabilidade e Estabilidade Estrutural em Variedades Abertas
17) Herbert Amann - Lectures on Some Fixed Point Theorems
18) Exercícios de Matemática - IMPA
19) Djairo G. de Figueiredo - Números Irracionais e Transcendentes
20) C.E. Zeeman - Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies
21) Manfredo P. do Carmo - Notas de um curso de Grupos de Lie
22) A. Prestel - Lectures on Formally Real Fields
23) Aron Simis - Introdução à Álgebra
24) Jaime Lesmes - Seminário de Análise Funcional
25) Fred Brauer - Some Stability and Perturbation Problem for Differential and Integral Equations
26) Lucio Rodriguez - Geometria das Subvariedades
27) Mario Miranda - Frontiere Minime
28) Fernando Cardoso - Resolubilidade Local de Equações Diferenciais Parciais

APRESENTAÇÃO

Estas notas contêm essencialmente o material apresentado pelo autor, numa série de três palestras, durante o IV Seminário Brasileiro de Análise, realizado na Universidade de Brasília, no período 09-11 de setembro de 1976.

Elas têm duplo objetivo. Primeiro, e mais importante, tentar despertar em estudantes pós-graduados, interesse pelo assunto. Segundo, informar os não especialistas sobre algumas técnicas e resultados recentes de uma teoria que vem tendo grande desenvolvimento, desde meados da década de 1950.

O autor manteve, durante a redação das mesmas, um esforço deliberado e permanente para não fugir dos propósitos limitados de um curso introdutório. Em primeiro lugar, poderia, sem muito trabalho adicional, ter considerado questões, também relevantes, de hipoeliticidade, hipoeliticidade analítica, estimativas subelíticas, unicidade do problema de Cauchy, etc., que são de certa forma próxima e/ou relacionadas com a resolubilidade local. Em segundo lugar, poderia, como seria desejável, abordar também a resolubilidade local das equações pseudodiferenciais.

Finalmente, o autor agradece à Comissão Organizadora, o convite que lhe foi formulado para ministrar este curso.

Brasília, setembro de 1976

Fernando Cardoso

ÍNDICE

Capítulo 0.

Os Espaços Locais de Sobolev

Denotaremos por $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$, s real, o espaço das distribuições temperadas $u \in \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cujas transformadas de Fourier $\hat{u}$ são funções mensuráveis, tais que

$$(0.1) \qquad (2\pi)^{-n/2} (1+|\xi|^2)^{s/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) .$$

Munido do produto escalar

$$(0.2) \qquad (u,v)_s = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\, \overline{\hat{v}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi$$

(e correspondente norma $||u||_s = (u,u)_s^{1/2}$), H^s se torna um espaço de Hilbert. De fato, H^s é uma cópia canônica de $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2 = H^0$ (esta igualdade é o teorema de Plancherel). Chamando $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ respectivamente a transformada de Fourier e sua inversa, definimos

$$(0.3) \qquad (1-\Delta)^\theta u = \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^\theta \mathcal{F}u \quad (\Delta = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x^j})^2, \text{ o Laplaceano}).$$

Quando θ é um inteiro não negativo, $(1-\Delta)^\theta$ é a potência θ-ésima de $(1-\Delta)$. Para qualquer s real, $(1-\Delta)^{s/2}$ é uma isometria de H^s sobre L^2. Quando θ varia sobre os reais, $(1-\Delta)^\theta$ forma um grupo (a um parâmetro) de automorfismos de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{S}'$. Desde que $\mathcal{S}$ é denso em L^2, segue que é também denso em qualquer H^s. A injeção natural $\mathcal{S} \hookrightarrow H^s$ (cuja imagem é densa) pode ser transposta em uma injeção $(H^s)' \hookrightarrow \mathcal{S}'$, cuja imagem é exatamente H^{-s}: assim, o dual de H^s pode ser canonicamente identificado a H^{-s}. Com esta identificação, a isometria antilinear canônica do espaço de Hilbert H^s sobre seu dual, H^{-s}, é precisamente $(1-\Delta)^s$. Quando s é um inteiro não negativo, H^s é o espaço de funções L^2 cujas derivadas (no sentido de distribuições) de ordem $\leq s$, pertencem a L^2; H^{-s} é o espaço de distribuições em $\mathbb{R}^n$ iguais a somas (finitas) de derivadas (no sentido de distribuições) de ordem $\leq s$ de funções de L^2.

<u>Definição 0.1</u> - <u>Seja</u> Ω <u>um aberto de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>e seja</u> s <u>um número real</u>. <u>Denotaremos por</u> $H^s_{loc}(\Omega)$ <u>o espaço das distribuições</u> $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ <u>tais que</u> $\varphi u \in H^s$, <u>para toda</u> $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$.

Munido da topologia localmente convexa, a menos fina, tal que as aplicações

$$u \in H^s_{loc}(\Omega) \longrightarrow \varphi u \in H^s \qquad (*)$$

sejam contínuas, $H^s_{loc}(\Omega)$ se torna um espaço de Frechet (reflexivo).

De fato, seja (K_j) uma sequência crescente de

(*) Indicaremos sempre por $\longrightarrow$ aplicações lineares contínuas.

conjuntos compactos tais que $\overset{o}{K}_j \neq \phi$, $K_j \subset \Omega$ e $\bigcup_j \overset{o}{K}_j = \Omega$. Seja (β_j) uma sequência de funções de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\beta_j = 1$ em K_j, e supp $\beta_j \subset K_{j+1}$. É fácil ver que $u \in H^s_{loc}(\Omega)$ se e somente se $\beta_j u \in H^s$, $\forall j$. Por outro lado, se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e se K_j é tal que $K_j \supset$ $\supset$ supp φ, então $\varphi u = \beta_j \varphi u$. Como o produto por uma função de C_c^∞ é uma operação contínua em H^s, obtemos

$$||\varphi u||_s \leq ||\varphi\beta_j u||_s \leq C||\beta_j u||_s.$$

Isto acarreta que toda vizinhança do zero em $H^s_{loc}(\Omega)$ contém alguma vizinhança do zero definida pela multiplicação por β_j, $j=1,2,\ldots$. Logo $H^s_{loc}(\Omega)$ é um <u>espaço metrisável</u>.

Seja, agora, (u_k) uma sequência de Cauchy em $H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$. A cada índice j, existe $v_j \in H^s$ tal que $\beta_j u_k \longmapsto v_j$ em H^s. Como supp $\beta_j \subset K_{j+1}$, temos supp $v_j \subset K_{j+1}$. Como $\beta_j = 1$ em K_j, segue-se que $v_{j+1} \equiv v_j$ em $\overset{o}{K}_j$. Por outro lado, $\Omega = \bigcup \overset{o}{K}_j$. Assim sendo, por uma propriedade bem conhecida de distribuições, existe $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $v|_{\overset{o}{K}_j} = v_j$. É fácil ver que $v \in H^s_{loc}(\Omega)$, logo este espaço é <u>completo</u>.

Seja K um compacto contido em Ω. Diremos que

$u \in H^s_K(\Omega)$ se e somente se $u \in H^s$ e $\operatorname{supp} u \subset K$. Muniremos $H^s_K(\Omega)$ da topologia induzida por H^s. Como $H^s_K(\Omega)$ é subespaço fechado de H^s, segue-se que $H^s_K(\Omega)$ é um espaço de Frechet.

Definição 0.2 - Denotaremos por $H^s_c(\Omega)$ a reunião de todos os espaços $H^s_K(\Omega)$, quando K percorre o conjunto dos compactos contidos em Ω. Muniremos $H^s_c(\Omega)$ com a topologia localmente convexa, limite indutivo dos espaços $H^s_K(\Omega)$.

$H^s_c(\Omega)$ é então um espaço $\mathcal{LF}$ (reflexivo). É fácil verificar que $C^\infty_c(\Omega)$ é denso em ambos, $H^s_c(\Omega)$ e $H^s_{loc}(\Omega)$.

Teorema 0.5 - Sejam Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e s um número real qualquer. Temos,

$$(H^s_c(\Omega))' = H^{-s}_{loc}(\Omega) .$$

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que todo elemento $v \in H^{-s}_{loc}(\Omega)$ define um funcional linear contínuo sobre $H^s_c(\Omega)$. Pela definição de limite indutivo, basta demonstrar que, para todo compacto $K \subset \Omega$, v define um funcional linear contínuo sobre $H^s_K(\Omega)$. Seja $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ com $\varphi = 1$ em K e ponhamos

$$\langle u,v\rangle = \langle u,\varphi v\rangle, \quad \forall\, u \in H^s_K(\Omega) . \tag{0.4}$$

Como $u \in H^s$ e $\varphi v \in H^{-s}$, o segundo membro de (0.4) está bem definido e temos

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||\varphi v||_{-s}||u||_s \leq C||u||_s \ ;$$

logo v é um funcional linear contínuo sobre $H^s_K(\Omega)$. Portanto, $H^{-s}_{loc}(\Omega) \subset (H^s_c(\Omega))'$.

Em seguida, seja $u \in (H^s_c(\Omega))'$, seja φ um elemento arbitrário de $C^\infty_c(\Omega)$ e ponhamos $K = \text{supp}\ \varphi$. Para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\langle \varphi u,v\rangle = \langle u,\varphi v\rangle.$$

Como $\varphi v \in H^s_K(\Omega)$ e $u \in (H^s_c(\Omega))'$, o segundo membro está bem definido e temos:

$$|\langle \varphi u,v\rangle| = |\langle u,\varphi v\rangle| \leq C||\varphi v||_s \leq C'||v||_s.$$

Logo, $\varphi u \in H^{-s}$ e, portanto, $(H^s_c(\Omega))' \subset H^{-s}_{loc}(\Omega)$.

Finalmente, verifica-se que a identificação $(H^s_c(\Omega))' = H^{-s}_{loc}(\Omega)$ preserva as topologias desses espaços,

q.e.d.

Dos <u>teoremas de imersão de Sobolev</u> resultam as seguintes importantes propriedades::

(0.5) $$C^\infty_c(\Omega) = \bigcap_s H^s_c(\Omega), \quad C^\infty(\Omega) = \bigcap_s H^s_{loc}(\Omega).$$

Por outro lado, os teoremas de <u>estrutura local</u> de distribuições acarretam que

(06) $$\mathcal{E}'(\Omega) = \bigcup_s H^s_c(\Omega), \quad \mathcal{D}'_F(\Omega) = \bigcup_s H^s_{loc}(\Omega) ,$$

onde $\mathcal{E}'(\Omega)$ denota as distribuições em Ω, com suporte compacto e $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ as distribuições em Ω, de ordem finita. As fórmulas (0.6) e a segunda fórmula de (0.5) são válidas no sentido vetorial topológico; a inclusão de $C^\infty_c(\Omega)$ em $\bigcap_s H^s_c(\Omega)$ é contínua.

REFERÊNCIAS BÁSICAS

Barros Neto, J., An introduction to the theory of distributions, Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.

Hörmander, L., Linear partial differential equations, Springer Verlag, 2nd ed., 1964.

Treves, F., Topological vector spaces, distributions and Kernels, Academic Press, New York.

Capítulo 1

Operadores Pseudodiferenciais

§0. Introdução

Operadores pseudodiferenciais, OpPsD, são extensões naturais dos operadores diferenciais, OpD; eles possuem muitas propriedades importantes em comum com os OpD, porém eles não têm, em geral, a propriedade local. Um operador L atuando em funções (ou distribuições) $u(x)$ é chamado local se o valor de Lu no ponto x, depende apenas dos valores de u na vizinhança deste ponto (i.e. L faz decrescer o suporte de u; os únicos operadores locais são, de acordo com Peetre, os OpD). Apesar dos OpPsD não possuirem, em geral, esta propriedade (OpPsD são pseudolocais, i.e., eles fazem decrescer o suporte singular de uma função ou distribuição), eles têm muitas propriedades em comum com os OpD.

A investigação sobre os OpPsD teve suas origens com o estudo de uma classe de operadores integrais, chamados Operadores Integrais Singulares, OpSI. Neste particular, os trabalhos de Giraud, Mikhlin, Calderon e Zygmund devem ser mencionados. O OpSI mais simples possível é a transformada de Hilbert, H, que transforma uma função suficientemente regular u(x), de uma variável, na função

$$Hu(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x'-x} u(x')dx' ,$$

onde o <u>valor principal de Cauchy</u> deve ser tomado. Mais geralmente, OpSI transformam funções u(x) em funções

$$Gu(x) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{k(x,x')}{x-x'} u(x')dx',$$

onde <u>k</u> deve satisfazer certas condições de regularidade. O tratamento dos OpSI é um tanto delicado, devido à singularidade do núcleo. Uma importante e decisiva ilustração da utilidade dos OpSI é o teorema de Calderón sobre <u>unicidade local do problema de Cauchy</u>.

Alguns anos atrás, foi observado que os OpSI podem ser considerados como representações particulares de operadores de uma certa classe, que podem ser representados de uma maneira mais conveniente para a sua investigação. Esta sugestão foi feita por Lax em 1963; foi sequenciada por Kohn e Nirenberg que introduziram uma representação ainda mais adequada para estes operadores, que eles chamaram OpPsD, e para os quais desenvolveram uma extensa teoria, apropriada para o estudo de problemas elíticos. Em particular, eles mostraram que a classe dos OpPsD que eles introduziram, forma uma <u>álgebra</u>. Esta maneira de considerar os OpPsD foi utilizada por Lax e Friedrichs no tratamento de problemas de contorno para OpD, com a ajuda dos OpPsD. Um pouco mais tarde, em 1967, Hörmander introduziu uma classe mais ampla de OpPsD, utilizando-a amplamente no tratamento de problemas hipoelíticos. Mais recentemente, em 1973, Beals e Fefferman definiram uma, ainda mais sofisticada, classe de OpPsD que lhes possibilitou provar a suficiência da propriedade (P) de Nirenberg e Treves, para a solubilidade local de equações diferenciais parciais, de tipo principal, com coeficientes C^{∞}, e também uma forma "sharp" da desigualdade de Gårding. É importante lembrar que os OpPsD de Kohn e Nirenberg já eram indispensáveis para a obtenção de microlocalizações (i.e localizações no fibrado cotangente) necessárias no estudo da teoria local (resolubilidade local, propagação de singularidades, estimativas subelíticas, etc.) das equações diferenciais parciais de tipo principal e, mais recentemente, de características múltiplas (via o teorema de Weierstrass-Malgrange). Neste sentido, são significativas as contribuições de Nirenberg, Treves e Egorov.

Não há dúvida, que classes, cada vez mais amplas de OpPsD, desempenharão um papel, cada vez mais relevante, em futuras pesquisas. É importante acrescentar todavia, que muitos operadores que aparecem no estudo de equações diferenciais, não são pseudolocais (e portanto não são

OpPsD). Por exemplo, o problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = o; \; u\Big|_{t=o} = o, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=o} = f$$

possue uma "solução fundamental" (inverso à direita) P (aplicando os dados de Cauchy, u e $\frac{\partial u}{\partial t}$, para t=o, na solução u, no tempo t) da seguinte forma:

$$P(\{o\},f)(x,t)=u(x,t)=$$

$$=O_s^{-}(2\pi)^{-n}\iint\{e^{i(x.\xi+t|\xi|)}-e^{i(x.\xi-t|\xi|)}\}(2i|\xi|)^{-1}e^{-ix'.\xi}f(x')dx'd\xi,$$

onde "O_s" significa que os valores são determinados no sentido de integrais oscilatórias. Mostra-se que P não é pseudolocal. Em 1968, Hörmander introduziu uma classe (que inclui os OpPsD) de operadores (chamados operadores integrais de Fourier), não mais pseudolocais, a fim de estudar problemas hiperbólicos, como o acima.

A idéia de Lax utilizava series de Fourier; a de Kohn e Nirenberg é baseada na transformada de Fourier. Uma boa motivação para a última, é a construção de parametrizes para operadores elíticos. Dela se depreende que os OpPsD desempenham para os OpD, com coeficientes variáveis, o mesmo e relevante papel que a transformada de Fourier desempenha no estudo dos OpD com coeficientes constantes.

Finalmente uma nota histórica: a designação de um operador $f(\frac{d}{dx})$ a uma função $f(\xi)$ já tinha sido feita por Lagrange e Cauchy, e amplamente usada por Heaviside no tratamento de problemas de transmissão eletromagnética. A questão de fazer corresponder um operador $G = g(x,D_x)$ a uma função $g(x;\xi)$ de ambas variáveis, x e ξ, surgiu em ligação com mecânica quântica, em 1926. Naquele tempo, não existia uma teoria matemática para tais operadores. Um ano mais tarde, H. Weyl propôs uma tal teoria, dando uma definição para esses operadores porém, então, eles já não eram de importância vital para os propósitos da mecânica quântica. Seria desejável que o interesse matemático atual pelos OpPsD, fizesse ressurgir o interesse dos físicos pelos mesmos.

§1. Parametrizes de Operadores Elíticos

A fim de motivar a construção que faremos adiante, consideremos a seguinte equação

$$(1.1) \qquad P(D)u = f ,$$

onde $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $P = P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ é um OpD, linear, com coeficientes constantes, $a_\alpha \in C$. Usamos a notação habitual:

$$D = (D_1,\ldots D_n),\ D_j = \sqrt{-1}\ \partial/\partial x^j (j=1,\ldots n),\ \alpha=(\alpha_1,\ldots\alpha_n) ,$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n .$$

$P(\xi)$ é um polinômio com coeficientes complexos em n variáveis (reais) $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Podemos reduzir o problema (1.1) ao problema de divisão:

$$P(\xi)\hat{u} = \hat{f} \tag{1.2}$$

onde $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\, x\cdot\xi} u(x)dx$, $(x\cdot\xi = x^1\xi_1+\ldots+x^n\xi_n$, $dx = dx^1\ldots dx^n)$ denota transformada de Fourier; tirando então partido da fórmula de Inversão de Fourier, obtemos (formalmente)

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi\ , \tag{1.3}$$

que devia ser a solução (1.1).

A grande obstrução ao que fizemos é que, em geral, a integral (1.3) não tem sentido, devido aos zeros de $P(\xi)$. Há casos porém, onde uma pequena modificação dos argumentos acima, conduz a uma solução aproximada de (1.1). O mais importante de todos é quando o operador P é <u>elítico</u>, i.e:

$$P_m(\xi) \neq 0 \quad \text{se} \quad 0\neq\xi \in \mathbb{R}_n\ , \tag{1.4}$$

onde $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$, é o <u>símbolo principal de</u> P.

São consequências imediatas de (1.4):

(1.5) <u>O conjunto dos zeros de</u> $P(\xi)$ <u>em</u> $\mathbb{R}_n$, <u>é compacto</u>.

(1.6) $|P(\xi)| > 1$ <u>para valores de</u> $|\xi|$ <u>suficientemente grandes</u>.

Assumindo então, que P é elítico, seja $\rho > 0$, tal que os zeros de $P(\xi)$ estejam contidos na bola centrada na origem e de raio ρ. Podemos então considerar a integral

$$v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \chi(\xi)d\xi \ , \tag{1.7}$$

onde $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_n)$, $\chi(\xi) = 0$ se $|\xi| \leq \rho$, $\chi(\xi) = 1$ se $|\xi| > \rho' > \rho$. É fácil verificar que v não difere <u>substancialmente</u> de uma solução de (1.1). Com efeito,

$$P(D)v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\chi(\xi)d\xi = f(x)-Sf(x), \tag{1.8}$$

onde

$$Sf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\{1-\chi(\xi)\}d\xi.$$

A função $\chi(\xi)/P(\xi)$ pertence a $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e, por causa de (1.6), é <u>limitada</u>. Consequentemente, define uma <u>distribuição</u> <u>temperada</u> em $\mathbb{R}_n$ que é a transformada de Fourier de uma distribuição temperada k_x, em $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$v = k*f \text{ (convolução)}. \tag{1.9}$$

Por outro lado,

$$(1.10) \qquad Sf = h*f$$

onde h é a transformada inversa de Fourier de $1-\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_n)$. Pelo teorema de Paley-Wiener-Schwartz, h pode ser estendida a $\mathbb{C}^n$ como uma função inteira de tipo exponencial. Sua restrição a $\mathbb{R}^n$, pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço de Schwartz das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ rapidamente decrescentes no infinito. Fórmulas (1.9) e (1.10) têm sentido, mesmo que $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, espaço das distribuições de suporte compacto. Em qualquer caso, $Sf \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (e pode ser estendida a $\mathbb{C}^n$ como uma função inteira de tipo exponencial). Podemos reescrever (1.8) da seguinte maneira:

$$(1.11) \qquad P(D)k = \delta - h, \quad \delta = \text{a distribuição de Dirac},$$

ou de forma equivalente (denotando por K o operador de Convolução $k*$):

$$(1.12) \qquad P(D)K = I-S, \quad I = \text{O operador identidade},$$

onde S é um operador contínuo de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Uma distribuição como k (ou um operador como K) é chamada (chamado) uma parametriz de $P(D)$. Apesar de não ser uma solução fundamental i.e. uma solução de

$$(1.13) \qquad P(D)E = \delta ,$$

k é quase tão útil quanto uma solução fundamental. Aliás, não é difícil obter, neste caso, uma solução fundamental, a partir de k. Com efeito, podemos mostrar (e.g. utilizando o teorema de Cauchy-Kovalevska) que a equação

$$(1.14) \qquad P(D)w = h$$

possue sempre uma solução w que é uma função inteira em $\mathbb{C}^n$. Então $E = k+w$ satisfaz (1.13). Uma solução exata de (1.1) é então $u = E*f$.

O nosso interesse agora, é investigar se podemos estender alguns dos argumentos precedentes ao caso em que P é um OpD linear, elítico, com coeficientes variáveis. Começaremos definindo o que isso significa. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto e

$$(1.15) \qquad P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^\alpha$$

onde $C_\alpha = C_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, a valores complexos. O __símbolo principal__ de $P(x,D)$ é o polinômio homogêneo de grau m, relativamente a ξ, com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$,

$$(1.16) \qquad P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Dizemos que o operador $P(x,D)$ é __elítico__ se:

$$(1.17) \qquad P_m(x,\xi) \neq 0 \quad \forall\, x \in \Omega \quad \text{e} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}_n.$$

Assumindo que $P(x,D)$ é elítico, tentaremos construir uma solução __aproximada__ da equação

(1.18) $$P(x,D)u = f ,$$

modificando a fórmula (1.7), de tal sorte que

(1.19) $$P(x,D)v = f-Sf ,$$

onde, como antes,

(1.20) $$S: \mathcal{E}'(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$$

é uma aplicação linear contínua.

Tentaremos a seguinte generalização de (1.7)

(1.21) $$v(x) = Kf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} k(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Faremos, de início, uma determinação formal do símbolo $k(x,\xi)$ de forma a obter

(1.22) $$P(x,D)K = I,$$

e, em seguida, modificaremos (1.21) de tal forma que a integral tenha sentido. Esta modificação conduzirá a uma solução, não da Equação (1.22), porém de

(1.23) $$P(x,D)K = I-S$$

onde S satisfaz (1.20).

Temos:

$$P(x,D)v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} P(x,D_x+\xi)k(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi ,$$

desde que $P(x,D_x)(e^{ix\cdot\xi}w(x)) = e^{ix\cdot\xi}P(x,D_x + \xi)w(x)$.

Devido à fórmula de inversão de Fourier, é suficiente resolver a equação:

$$P(x,D_x+\xi)k(x,\xi) = 1. \tag{1.24}$$

Podemos escrever

$$P(x,D_x+\xi) = P_m(x,\xi) + \sum_{j=1}^{m} P_j(x,\xi,D_x) \ ,$$

onde $P_j(x,\xi,D_x)$ é um operador diferencial relativamente a x (em Ω), de ordem j, com coeficientes polinômios homogêneos relativamente a ξ, de grau $m-j$. A idéia é então escrever o símbolo $k(x,\xi)$ como soma de funções de (x,ξ), homogêneas relativamente a ξ. Devido ao uso da transformada de Fourier e o fato de que K atua sobre distribuições, o símbolo $k(x,\xi)$ deve ser <u>temperado</u> em ξ e, portanto, os graus de homogeneidade das várias componentes deverão permanecer limitados.

Poremos

$$k(x,\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} k_j(x,\xi) \tag{1.25}$$

onde $k_j(x,\xi)$ é homogêneo relativamente a ξ, de grau $d_j \searrow -\infty$ (os d_j são inteiros negativos). Determinaremos então os k_j, identificando os termos de mesmo grau de homogeneidade relativamente a ξ, nos dois membros de (1.24). Obtemos assim, (1.26) $$P_m(x,\xi)k_o(x,\xi) = 1$$

e

(1.27) $$P_m(x,\xi)k_j(x,\xi) = - \\ = - \sum_{\substack{j'=0 \\ j'\geq j-m}}^{j-1} P_{j-j'}(x,\xi,D_x)k_{j'}(x,\xi), \quad j > 0.$$

É, portanto, possível a sucessiva determinação dos k_j, uma vez que o membro direito de (1.27) depende somente de $k_{j'}$, com $j' < j$. De (1.26) segue que $d_o = -m$ e de (1.27) obtemos, mais geralmente, que $d_j = -(m+j)$.

Existem, entretanto, duas obstruções ao argumento precedente. Primeiro, cada termo $k_j(x,\xi)$ pode ser escrito como uma função racional cujo denominador é da forma $P_m(x,\xi)^{r_j}$, com $r_j > 0$. Consequentemente, os zeros de $P_m(x,\xi)$ (que são pontos da forma $(x,0)$ desde que $P(x,D)$ é elítico) causarão alguns problemas. Segundo, é a questão da convergência da série (1.25). Felizmente, podemos atacar simultaneamente as duas dificuldades, introduzindo uma sequência de funções de "corte", da maneira seguinte: seja $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(t) = 0$ se $t < 1/2$, $\chi(t) = 1$ se $t > 1$ e defina

(1.28) $$\chi_j(\xi) = \chi(\rho_j^{-1}|\xi|), \quad j = 0,1,\ldots$$

onde ρ_j é uma sequência estritamente crescente de números positivos, tendendo para $+\infty$. Seja

(1.29) $$k(x,\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \chi_j(\xi)k_j(x,\xi),$$

onde as k_j são definidas, como antes, por (1.26) e (1.27). Sabemos que cada $k_j \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}_n \setminus \{0\}))$ é homogênea de grau $-(m+j)$ relativamente a ξ. Consequentemente, se $\mathcal{K}$ é um compacto arbitrário de Ω e p, q n-uplas quaisquer, existe uma constante $C^j = C^j_{p,q}(\mathcal{K}) > 0$ tal que

(1.30) $$|D_x^q D_\xi^p k_j(x,\xi)| < C^j(1+|\xi|)^{-(m+j+|p|)}, \quad x \in \mathcal{K}, \; 0 \neq \xi \in \mathbb{R}_n.$$

Note que no suporte de χ_j, temos $|\xi| > \rho_{j/2}$. Segue então, facilmente, que escolhendo os ρ_j de forma conveniente, podemos assegurar a convergência da série (1.29) em $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n)$, com sua topologia natural, e também da estimativa

(1.31) $$|D_x^q D_\xi^p k(x,\xi)| < C_{p,q}(\mathcal{K})(1+|\xi|)^{-m-|p|}, \quad x \in \mathcal{K}, \quad \xi \in \mathbb{R}_n.$$

Observe que $k(x,\xi) \equiv 0$ se $|\xi| < \rho_{0/2}$.

A pergunta agora é se $k(x,\xi)$ definida por (1.29), satisfaz (1.24). A resposta é evidentemente negativa, devido aos "erros" introduzidos pelas funções de corte $\chi_j(\xi)$. O que se obtém é o seguinte:

(1.32) $$P(x,D_x + \xi)\, k(x,\xi) = 1 - S(x,\xi).$$

onde

$$S(x,\xi) = 1-\chi_o(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x,\xi) \tag{1.33}$$

e

$$S_j(x,\xi) = \sum_{\substack{i=1 \\ (i\leq m)}}^{j} (\chi_{j-i}-\chi_j)P_i(x,\xi,D_x)k_{j-i}(x,\xi). \tag{1.34}$$

O ξ-suporte de cada $S_j(x,\xi)$ é compacto (está contido na bola $|\xi| \leq \rho_j$). Desse fato e de propriedades da série (1.29) e da equação (1.32), prova-se que o operador S, definido por

$$Sf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} S(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \ , \tag{1.35}$$

satisfaz (1.20). De (1.32) obtém-se imediatamente (1.23). O operador K é, portanto, uma parametriz de $P(x,D)$. Embora não seja uma solução fundamental (i.e. uma solução de (1.22) ele é quase tão útil quanto esta e, a partir dele, pode-se obter uma solução fundamental local (i.e. quando se considera distribuições com suporte bastante pequenos).

Os operadores pseudodiferenciais (classe de Kohn e Nirenberg) foram introduzidos como uma generalização dos operadores diferenciais e de operadores como K e S, acima. Eles podem ser representados da seguinte maneira:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{1.36}$$

(observe que se A é um OpD., $P(x,D)$, fórmula (1.36) é verdadeira com $a(x,\xi) = P(x,\xi)$, o símbolo total de $P(x,D)$).

Parametrizes de operadores elíticos e OpD lineares têm muitas propriedades em comum. Assumindo que ambos estejam definidos num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, eles definem aplicações lineares contínuas de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$; eles são pseudolocais ($A: \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é dito <u>pseudolocal</u> se $\forall\, u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\forall\, U \subset \Omega$, aberto, $u \in C^\infty(U) \Rightarrow Au \in C^\infty(U)$). Operadores diferenciais são também locais. Aliás, como já foi salientado, OpD são os únicos operadores locais (parametrizes de operadores elíticos de ordem > 0 não possuem a propriedade local). Um aspecto comum a OpD e a parametrizes como K (e também a operadores como S), é que os correspondentes símbolos $a(x,\xi)$ podem ser representados por séries cujos termos são funções homogêneas de graus decrescentes, relativamente a ξ (para valores grandes de $|\xi|$). A série é finita no caso de OpD: $P(x,\xi)$ é simplesmente um polinômio em ξ; é infinita no caso da parametriz K (e também de S). Desigualdades do tipo (1.31) desempenham um papel relevante na obtenção de muitas das propriedades dos OpPsD; elas são o ponto de partida para a definição e teoria dos OpPsD (pelo menos da classe de Kohn e Nirenberg). Classes mais gerais (e.g a classe de Hörmander e a classe de Beals e Fefferman) são definidas, a partir de generalizações de (1.31).

Portanto OpPsD em Ω são (geralmente) definidos por (1.36) onde $a(x,\xi) \in S^m(\Omega)$:

Definição 1.1 - Seja m um número real. Denota-se por $S^m(\Omega)$ o subespaço vetorial de $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n)$, formado por funções $a(x,\xi)$, que possuem a seguinte propriedade:

(1.37) Quaisquer que sejam o compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ e n-uplas p, q, existe uma constante $C = C_{p,q}(\mathcal{K}) > 0$ tal que

$$(1.38) \qquad |D_x^q D_\xi^p \, a(x,\xi)| \leq C \, (1+|\xi|)^{m-|p|}, \; \forall \, x \in \mathcal{K}, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}_n.$$

Dizemos então que $a(x,\xi)$ é um símbolo de ordem $\leq m$ e que o operador A, definido por (1.36), é um OpPsD de ordem $\leq m$ em Ω. O ínfimo (caso exista) de todas as ordens m tais que (1.38) é válido, é então chamado a (verdadeira) ordem de A. Observe que quando A é um OpD a ordem (verdadeira) de A, definida acima, coincide com sua ordem como OpD. Não é óbvio, mas pode ser mostrado, que o símbolo $h(\xi)$ da transformada de Hilbert H é $h(\xi) = \xi/|\xi|$, i.e. H é um operador de ordem zero.

O espaço $S^m(\Omega)$ possue uma topologia localmente convexa natural definida pela família de seminormas $p_{\mathcal{K};p,q}(a) = \inf C_{p,q}(\mathcal{K})$ tais que (1.38) é verdadeiro (quando $\mathcal{K}$ varia sobre a coleção dos compactos de Ω e p,q sobre as n-uplas de inteiros não negativos). Com esta topologia, $S^m(\Omega)$ é um espaço de Frechet.

Denotaremos por $\Psi^m(\Omega)$, o espaço dos OpPsD de ordem $\leq m$, em Ω. A interseção dos espaços $\Psi^m(\Omega)$ (resp. $S^m(\Omega)$), m real, será denotada por $\Psi^{-\infty}(\Omega)$ (resp. $S^{-\infty}(\Omega)$). Os OpPsD pertencentes a $\Psi^{-\infty}(\Omega)$ são ditos de ordem $-\infty$.

De (1.38) segue imediatamente que $a(x,\xi)$ é uma função C^∞ de x em Ω, com valores no espaço $\mathcal{S}'_\xi$ das distribuições temperadas de $\xi \in \mathbb{R}_n$. Seja então $A_o(x,z)$, $z \in \mathbb{R}^n$, sua transformada de Fourier inversa (na variável ξ). $A_o(x,z)$ é uma função C^∞ de x em Ω, com valores em $\mathcal{S}'_z$. Podemos então definir a seguinte distribuição em $\Omega\times\Omega$:

(1.39) $$A(x,y) = A_o(x,x-y).$$

Por sua vez, $A(x,y)$ define (via o teorema dos núcleos de L. Schwartz) uma aplicação linear contínua $A: C_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, através da fórmula

(1.40) $$Au(x) = \langle A(x,y),u(y)\rangle$$

onde o colchete indica a dualidade entre distribuições e funções testes em Ω. Usando, por conveniência, a notação dos físicos, obtemos

(1.41) $$Au(x) = \int A(x,y)u(y)dy$$

(1.42) $$A(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x.\xi)d\xi$$

e, finalmente,

(1.43) $$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)u(y)dyd\xi.$$

A integral (1.43) é uma integral de Riemann, contanto que a integração relativamente a y seja efetuada em primeiro lugar. Concluimos então que:

a) $$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi ,$$

isto é, A é um OpPsD.

b) OpPsD correspondem (via o teorema dos núcleos de L. Schwartz) a <u>núcleos distribuições</u> dados por (1.42).

Embora a obtenção de (1.42) tenha sido puramente formal, é possível dar um significado à integral (1.42) a fim de que ela tenha sentido (a maneira correta de interpretar (1.42) é como uma <u>integral oscilatória</u>, no sentido de Hörmander).

Uma das propriedades importantes dos OpPsD é que eles não são apenas contínuos de $C_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ porém que eles aplicam $C_c^\infty(\Omega)$ continuamente em $C^\infty(\Omega)$ e podem ser estendidos como aplicações lineares contínuas de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, é válido o seguinte (mais preciso) resultado. (Os resultados anunciados aqui, sem provas, podem ser encontrados nas referências dadas no final do Capítulo):

<u>Teorema 1.1</u> - <u>Seja</u> $A \in \Psi^m(\Omega)$. <u>Qualquer que seja o real</u> s, $u \mapsto Au$ <u>pode ser estendida como uma aplicação linear contínua de</u> $H_c^s(\Omega)$ <u>em</u> $H_{loc}^{s-m}(\Omega)$.

<u>Corolário 1.1</u> - <u>Todo</u> OpPsD A <u>em</u> Ω, <u>define uma aplicação linear contínua de</u> $C_c^\infty(\Omega)$ <u>em</u> $C^\infty(\Omega)$, <u>que se estende como uma aplicação linear contínua de</u> $\mathcal{E}'(\Omega)$ <u>em</u> $\mathcal{D}'(\Omega)$.

O corolário segue do Teorema 1.1 e das observações no final do Capítulo 0 sobre as fórmulas (0.5) e (0.6).

<u>Corolário 1.2</u> - <u>Seja</u> $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$. <u>Então</u> A <u>é regularizante</u>, i.e., <u>aplica</u> $\mathcal{E}'(\Omega)$ <u>continuamente em</u> $C^\infty(\Omega)$.

Prova evidente.

<u>Corolário 1.3</u> - <u>Seja</u> $A \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$. <u>O núcleo</u> $A(x,y)$ <u>de</u> A <u>é uma função</u> C^∞ <u>em</u> $\Omega\times\Omega$.

Segue do Corolário 1.2 e do teorema dos núcleos de L. Schwartz que assegura que o núcleo de uma aplicação linear contínua de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$, pertence a $C^\infty(\Omega\times\Omega)$.

A seguir, estabeleceremos a propriedade pseudolocal.

<u>Teorema 1.2</u> - <u>O núcleo</u> $A(x,y)$ <u>de um</u> OpPsD A <u>em</u> Ω, <u>é uma função</u> C^∞ <u>fora da diagonal em</u> $\Omega\times\Omega$, <u>e</u> A <u>é pseudolocal</u>.

Seja A um OpPsD em Ω. Sabemos que A define uma aplicação linear contínua de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Consequentemente (por dualidade), o mesmo é verdade de seu transposto ${}^tA$, definido por

$$(1.44) \qquad \langle {}^tAu,v\rangle = \langle u,Av\rangle, \quad u,v \in C_c^\infty(\Omega) ,$$

e do seu adjunto A^* $(A^*u = \overline{{}^tA\bar{u}}, \quad u \in \mathcal{E}'(\Omega))$.

<u>Teorema 1.3</u> - <u>Seja</u> $A \in \Psi^m(\Omega)$. <u>Então</u> ${}^tA$ <u>e</u> $A^* \in \Psi^m(\Omega)$.

Queremos agora definir a <u>composição</u> $A\circ B$ de dois OpPsD de ordens $\leq m$, m' respectivamente, em Ω. Isso não é sempre possível. De fato, em geral, A está definido em $\mathcal{E}'(\Omega)$ enquanto a imagem de B consiste de distribuições em Ω que não possuem necessariamente suporte compacto.

Imporemos, portanto, a seguinte condição:

(1.45) B <u>é um operador linear contínuo de</u> $\mathcal{E}'(\Omega)$ <u>em</u> $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Não é difícil mostrar que (1.45) é equivalente a

(1.46) B <u>é um operador linear contínuo de</u> $C_c^\infty(\Omega)$ <u>em</u> $C_c^\infty(\Omega)$.

De fato, de (1.45) segue que B aplica $C_c^\infty(\Omega)$ continuamente em $C^\infty(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$. Por outro lado, se (1.46) é válido, então ${}^tB: \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$. Consequentemente (devido à pseudolocalidade), ${}^tB\ C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, o que implica que o transposto de ${}^tB$, i.e B, satisfaz (1.45).

<u>Teorema 1.4</u> - <u>Seja</u> $A \in \Psi^m(\Omega)$, $B \in \Psi^{m'}(\Omega)$. <u>Suponha que</u> B <u>satisfaz</u> (1.45). <u>Então</u> $A \circ B \in \Psi^{m+m'}(\Omega)$.

<u>Definição 1.2</u> - <u>Um</u> OpPsD B <u>em</u> Ω <u>é dito propriamente suportado se ambos</u>, B <u>e</u> ${}^tB$, <u>satisfazem</u>, (1.45).

<u>Proposição 1.1</u> - <u>Seja</u> A <u>um</u> OpPsD <u>propriamente suportado</u>. <u>Então</u> A <u>pode ser estendido como</u>

uma aplicação linear contínua de $C^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e de $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ademais, ${}^tA$ e A^* são também propriamente suportados e se B é outro OpPsD propriamente suportado, o mesmo é verdade de $A\circ B$.

Prova. A primeira parte segue por um argumento de dualidade; a segunda parte é óbvia.

Proposição 1.2 - Seja $A \in \Psi^m(\Omega)$. Então existe um OpPsD propriamente suportado $\tilde{A} \in \Psi^m(\Omega)$ tal que $A-\tilde{A} \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$.

Prova. Seja $A(x,y)$ o núcleo distribuição de A. Seja $\varphi(x,y) \in C^\infty(\Omega\times\Omega)$ com a seguinte propriedade:

(1.47) Qualquer que seja $g \in C_c^\infty(\Omega)$, $g(x)\,\varphi(x,y)$ e $\varphi(x,y)\,g(y)$ têm suporte compacto em $\Omega\times\Omega$.

Suponhamos ainda, que φ é identicamente igual a um, numa vizinhança da diagonal em $\Omega\times\Omega$. Seja $\tilde{A}(x,y) = \varphi(x,y)\,A(x,y)$. Pelo Teorema 1.2, $A(x,y) - \tilde{A}(x,y) \in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. Mostra-se então que $A-\tilde{A} \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ e que $\tilde{A} \in \Psi^m(\Omega)$, é propriamente suportado.

O significado da Proposição 1.2 é "grosso modo" o seguinte: módulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$, OpPsD em Ω, correspondem a núcleos distribuições concentrados ao longo da diagonal em $\Omega \times \Omega$.

Os OpPsD propriamente suportados, mais simples, são os OpD.

Mostraremos a seguir o que acontece com um OpPsD quando se faz uma mudança de coordenadas; ou melhor quando se considera um difeomorfismo $x \mapsto y = \phi(x)$, do aberto Ω sobre outro aberto Ω' (ϕ é uma aplicação C^∞, bijetiva de Ω sobre Ω' cuja matriz Jacobiana J_ϕ é invertível em todo ponto).

O difeomorfismo ϕ induz um isomorfismo $\phi_*: C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega')$, pela fórmula

$$(\phi_* u)(y) = u(\phi^{-1}(y))$$

e, por transposição, um isomorfismo $\phi^*: \mathcal{D}'(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\langle \phi^* F, u \rangle = \langle F, \phi_* u \rangle, \quad u \in C_c^\infty(\Omega), \quad F \in \mathcal{D}'(\Omega').$$

Observe que a restrição de ϕ^* a $C_c^\infty(\Omega')$ não coincide com $(\phi^{-1})_*$ pois, quando uma distribuição em Ω' é definida por uma função localmente integrável $f(y)$, sua ϕ^*-imagem é também definida por uma função localmente ingrável, a saber

$$(\phi^* f)(x) = f(\phi(x))|\det J_\phi(x)|.$$

Observe também que a restrição de ϕ^* a $\mathcal{E}'(\Omega')$ é um isomorfismo deste espaço sobre $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Seja A um OpPsD e seja

$$A^{\phi} = (\phi^*)^{-1} \circ A \circ \phi^* : \mathcal{E}'(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega').$$

<u>Teorema 1.5</u> - <u>Seja</u> ϕ <u>um difeomorfismo de</u> Ω <u>sobre</u> Ω'. <u>Para todo real</u> m, $A \mapsto A^{\phi}$ <u>é uma bijeção de</u> $\Psi^m(\Omega)$ <u>sobre</u> $\Psi^m(\Omega')$.

O Teorema 1.5 torna possível a definição de OpPsD em variedades C^{∞}.

Denotaremos por $\dot{S}^m(\Omega)$ (resp. $\dot{\Psi}^m(\Omega)$) o espaço vetorial cociente $S^m(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$ (resp. $\Psi^m(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega)$).

Indicaremos agora como uma série formal infinita do tipo (1.25) representa uma classe de equivalência.

<u>Exemplo 1.1</u>. Seja $a_j(x,\xi) \in S^{m_j}(\Omega)$ onde m_j é uma sucessão estritamente decrescente de reais, convergindo para $-\infty$. Então a série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x,\xi) \tag{1.48}$$

define um elemento de $\dot{S}^{m_0}(\Omega)$ (que denotaremos por (1.48)) da seguinte maneira: como antes, seja $\chi(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, igual a 1 para $t > 1$ e a 0 para $t < 1/_2$. Seja $\chi_j(\xi) = \chi(\rho_j^{-1}\xi)$, onde a sucessão (estritamente crescente) de números $\rho_j > 0$, converge para $+\infty$. Não é difícil mostrar que os ρ_j podem ser escolhidos de tal forma que a série

$$(1.49) \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x,\xi)\, \chi_j(\xi)$$

converge absolutamente no espaço de Fréchet $S^{m_o}(\Omega)$.

A classe módulo $S^{-\infty}(\Omega)$ de (1.49) será, por definição, o símbolo definido por (1.48). Mostra-se ainda que o símbolo definido por (1.48) não depende da escolha das funções χ_j, contanto que a série (1.49) seja convergente em $S^{m_o}(\Omega)$.

<u>Exemplo 1.2.</u> Por causa do uso das funções χ_j, podemos supor, no exemplo anterior, que, ao invés de $a_j(x,\xi) \in S^{m_j}(\Omega)$, $a_j(x,\xi)\cdot\chi_j(\xi) \in S^{m_j}(\Omega)$. Isto permite que os $a_j(x,\xi)$ não sejam funções C^∞ de ξ, perto da origem. Uma situação bastante importante (veja a construção da parametriz k, (1.25)) é quando se considera $a_j(x,\xi) \in C^\infty(\Omega\times(\mathbb{R}_n\setminus\{0\}))$, homogênea de grau m_j relativamente a ξ, ou positivamente homogênea de grau m_j relativamente a ξ.

O resultado seguinte é a base do <u>cálculo simbólico</u> dos OpPsD.

<u>Teorema 1.6 - A aplicação</u> $a(x,\xi) \to A$ <u>de</u> $S^m(\Omega)$ <u>em</u> $\Psi^m(\Omega)$, <u>definida pela fórmula</u> (1.36), <u>induz uma sobrejeção</u> (linear) <u>de</u> $\dot{S}^m(\Omega)$ <u>sobre</u> $\dot{\Psi}^m(\Omega)$.

O Teorema 1.6 não responde a questão da injetivi dade da aplicação $\dot{S}^m(\Omega) \to \dot{\Psi}^m(\Omega)$, i.e, se $a(x,\xi) \in S^m(\Omega)$ define um OpPsD A de ordem $-\infty$, então necessariamente $a(x,\xi) \in S^{-\infty}(\Omega)$? É possível provar este fato quando $\Omega = \mathbb{R}_n$ ou quando A é propriamente suportado. Assim, se $a(x,\xi) \in S^m(\Omega)$ define um OpPsD propriamente suportado A, então $a(x,\xi)$ é único, módulo $S^{-\infty}(\Omega)$. Convém observar que a falta de injetividade da aplicação $\dot{S}^m(\Omega) \to \dot{\Psi}^m(\Omega)$ deve-se à existência de símbolos, não pertencentes a $S^{-\infty}(\Omega)$, que definem OpPsD de ordem $-\infty$. Deixando de lado estes casos "patológicos", chamaremos a classe de $a(x,\xi)$ módulo $S^{-\infty}(\Omega)$, o <u>símbolo</u> da classe de A módulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$.

As noções de transposto, adjunto, composição podem ser definidas, de maneira natural, para as classes (módulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$) de OpPsD em Ω. De fato, se A e B são congruentes módulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$, o mesmo é verdade de seus transpostos ${}^tA$ e ${}^tB$, e também de seus adjuntos A^* e B^*. O composto $\dot{A}\circ\dot{B}$ de $\dot{A} \in \dot{\Psi}^m(\Omega)$ e $\dot{B} \in \dot{\Psi}^{m'}(\Omega)$ pode ser definido como a classe (módulo $\Psi^{-\infty}(\Omega)$) do composto de dois representantes propriamente suportados de $\dot{A}$ e $\dot{B}$. É claro que esta definição independe da escolha dos representantes.

<u>Teorema 1.7 - Seja</u> $\dot{A} \in \dot{\Psi}^m(\Omega)$ <u>com símbolo</u> $\dot{a}(x,\xi) \in \dot{S}^m(\Omega)$. <u>Então o símbolo do transposto</u> ${}^t\dot{A}$ <u>de</u> $\dot{A}$,

é dado por

(1.50) $$\sigma({}^t\dot{A}) = \sum_p (-1)^{|p|} \frac{1}{p!} (\partial_\xi^p D_x^p a)(x,-\xi),$$

e o símbolo do adjunto $\dot{A}^*$, por

(1.51) $$\sigma(A^*) = \sum_p \frac{1}{p!} \partial_\xi^p D_x^p \overline{a(x,\xi)} .$$

Teorema 1.8 - Sejam $\dot{A} \in \dot{\Psi}^m(\Omega)$, $\dot{B} \in \dot{\Psi}^{m'}(\Omega)$ com símbolos $\dot{a}(x,\xi)$ e $\dot{b}(x,\xi)$ respectivamente. Então o símbolo de $\dot{A}\circ\dot{B}$ é dado por

(1.52) $$\sigma(\dot{A}\circ\dot{B}) = \sum_p \frac{1}{p!} \partial_\xi^p a(x,\xi)\, D_x^p b(x,\xi).$$

O Teorema 1.8 tem como consequência importante, o seguinte fato:

Corolário 1.4 - O comutador $[\dot{A},\dot{B}] = \dot{A}\circ\dot{B} - \dot{B}\circ\dot{A}$ pertence a $\dot{\Psi}^{m+m'-1}(\Omega)$ e

(1.53) $$\sigma([\dot{A},\dot{B}]) - \frac{1}{\sqrt{-1}} \{a(x,\xi),\, b(x,\xi)\} \in \dot{S}^{m+m'-2}(\Omega),$$

onde $\{a,b\}$ denota o colchete de Poisson de a e b, i.e,

(1.54) $$\{a,b\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x^j} - \frac{\partial a}{\partial x^j} \frac{\partial b}{\partial \xi_j} .$$

Finalmente, mencionaremos um resultado sobre o símbolo do operador A^ϕ, transformado de A pelo difeomorfismo $\phi: \Omega \mapsto \Omega'$. Pelo Teorema 1.5, $A \mapsto A^{\phi}$ é uma bijeção de $\Psi^m(\Omega)$ sobre $\Psi^m(\Omega')$; portanto induz um isomorfismo de $\Psi^{-\infty}(\Omega)$ sobre $\Psi^{-\infty}(\Omega')$ e, consequentemente, também um isomorfismo de $\dot{\Psi}^m(\Omega)$ sobre $\dot{\Psi}^m(\Omega')$. Isto define o ϕ-transformado $\dot{A}^{\phi}$ de $\dot{A}$. A propósito, se A é propriamente suportado, o mesmo acontece com A^{ϕ}.

Teorema 1.9 - Se $\dot{A} \in \dot{\Psi}^m(\Omega)$ tem símbolo $\dot{a}(x,\xi)$, então

$$\phi(\dot{A}^{\phi}) - \dot{a}(\phi^{-1}(y), {}^t\mathcal{J}^{-1}(y)\eta) \in \dot{S}^{m-1}(\Omega'), \tag{1.55}$$

onde $\mathcal{J}$ denota a matriz Jacobiana do difeomorfismo $\phi^{-1}: \Omega' \to \Omega$.

REFERÊNCIAS BÁSICAS

Kohn, J.J. e Nirenberg, L., An algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. vol. 17, pp. 269-305, 1965.

Friedrichs, K.O., Pseudodifferential operators, an introduction, lectures notes, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., 1968.

Treves, F., An introduction to pseudodifferential operators and Fourier integral operators, publicação do Departamento de Matemática da Univ. Fed. de Pernambuco, 1973.

Capítulo 2

Resolubilidade Local de Equações Diferenciais Parciais

§0. Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto e

$$P = P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{2.0.1}$$

um operador diferencial, de ordem $m > 0$, cujos coeficientes a_α são funções C^∞, em Ω, a valores complexos. Denotaremos por $p_m = p_m(x,\xi)$, o símbolo principal de P (ver (1.16)) e por $p = p(x,\xi)$ o seu símbolo (total).

Definição 2.0.1 - *Diremos que P é localmente solúvel em $x_0 \in \Omega$, se existe uma vizinhança U de x_0 em Ω, tal que $P\,\mathcal{D}'(U) \supset C_c^\infty(U)$.*

O operador P é dito localmente resolúvel num subconjunto $S \subset \Omega$ se é localmente resolúvel em todo ponto de S; note que P é então localmente resolúvel em algum subconjunto aberto de Ω contendo S pois, por definição, a resolubilidade local em $x_0 \in \Omega$ equivale à resolubilida de local em todo ponto de uma vizinhança de x_o.

Todos os OpD com coeficientes constantes são localmente resolúvel. Isto é uma consequência trivial do teorema de Malgrange-Ehrenpreis sobre a existência de soluções fundamentais para tais operadores (ver (1.13)).

Um contraexemplo devido a H. Lewy, que mencionaremos adiante, mostra que, ao contrário, quando P possue coeficientes variáveis, mesmo analíticos (ou polinômios), não se pode obter resolubilidade local sem restrições a P, exceto naturalmente no caso $N=1$, de um operador diferencial ordinário, que como sabemos, possue sempre soluções. Quando P é elítico (ver (1.17)), a resolubilidade local é uma consequência imediata da existência de parametrizes.

O método (de Korn) que consiste em considerar localmente um operador com coeficientes variáveis como uma pequena perturbação de um operador com coeficientes constantes, permitiu a Peetre provar em sua tese a resolubilidade local de operadores de <u>força constante</u>. Estes operadores são definidos da seguinte maneira: ao símbolo p se associa um novo símbolo $\tilde{p}(x,\xi)^2=\sum_\beta |D_\xi^\beta p(x,\xi)|^2$. Então P é dito de força constante se o cociente $\tilde{p}(x,\xi)/\tilde{p}(y,\xi)$ permanece limitado quando $\xi \in \mathbb{R}_N$ e $(x,y) \in K\times K$, onde K é um compacto qualquer de Ω. Para um tal operador, verifica-se que se E_o é uma solução fundamental de $P(x_o,D)$, a norma em $L^2(V)$, V uma vizinhança de x_o em Ω, do operador $f \mapsto \{P(x,D)-P(x_o,D)\}E_o*f$, converge para zero quando o diâmetro de V tende para zero. Este fato implica a resolubilidade local de P. Entre os operadores de força constante, podemos mencionar os operadores elíticos e os operadores cujo símbolo principal, p_m, independe de x e $\mathrm{grad}_\xi\, p_m(\xi)\neq 0$, $\xi\neq 0$. Esta observação leva a considerar os operadores com características reais simples ou operadores de tipo principal.

<u>Definição 2.0.2</u> - <u>O operador</u> P <u>é dito de tipo principal em</u> Ω, <u>se</u> $\mathrm{grad}_\xi\, p_m(x,\xi) \neq 0 \quad \forall\, x \in \Omega$ <u>e</u> $0 \neq \xi \in \mathbb{R}_N$.

Observe que, pela relação de Euler, $mp_m(x,\xi) = \xi.\mathrm{grad}_\xi\, p_m(x,\xi)$ e, portanto, qualquer zero de $\mathrm{grad}_\xi\, p_m(x,.)$ seria, pelo menos, um zero duplo de $p_m(x,.)$. Recordando que a <u>variedade característica</u> de P é o conjunto cônico (i.e invariante por homotetias $(x,\xi) \to (x,\lambda\xi)$, $\lambda \neq 0$) V_{p_m}, dos zeros de $p_m(x,\xi)$ em $\Omega\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$, concluimos que P é de tipo principal se e somente se suas <u>características reais</u> (i.e zeros de p_m) são simples. Os OpD elíticos (i.e V_{p_m} é vazio) e os

OpD hiperbólicos (e.g. o operador da onda) são de tipo principal; os OpD parabólicos (e.g. o operador do calor) não o são. Os OpD de 1ª ordem cujo símbolo principal não se anula identicamente em nenhum ponto, são de tipo principal. Os OpD de tipo principal são, do ponto de vista da multiplicidade das características reais, os mais simples, após os elíticos. Os primeiros resultados importantes sobre a resolubilidade local dos OpD de tipo principal foram obtidos por L. Hörmander e H. Lewy. Em sua tese, L. Hörmander provou que se $p_m(x,\xi)$ é real, então P é localmente resolúvel em Ω. Em 1957, H. Lewy surpreendeu os especialistas no assunto, dando o seu (famoso) exemplo de um pD, em $\mathbb{R}^3$, não localmente resolúvel em ponto algum de $\mathbb{R}^3$. De fato, ele mostrou que para a "maioria" dos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, a equação (de tipo principal)

$$-iD_1u+D_2u-2(x_1+ix_2)D_3u = f \tag{2.0.2}$$

não possue solução (distribuição) em qualquer subconjunto aberto, não vazio de $\mathbb{R}^3$. Observe que dois coeficientes do operador de Lewy são constantes, o terceiro é linear. Naturalmente não são todos reais. Hoje, com o progresso alcançado pela teoria, sabe-se que o exemplo de Lewy está no limite da não resolubilidade. Uma extensão deste exemplo, devida a Hörmander (1959), dá uma condição necessária para a resolubilidade local de uma equação diferencial Pu=f:

<u>Se</u> P <u>é localmente solúvel em</u> Ω, <u>então</u>

$$\{Rep_m, Imp_m\}(x,\xi) = 0 \quad \text{em} \quad V_{p_m}. \tag{2.0.3}$$

(Aqui, $\{\ ,\ \}$ designa o colchete de Poisson, definido em (1.54); e Rep_m e Imp_m, as partes real e imaginária de p_m, respectivamente). Em particular, (2.0.3) é sempre verificado quando p_m possue coeficientes reais ou constantes.

Seja $A(x,\xi) = Rep_m(x,\xi)$ e $B(x,\xi) = Imp_m(x,\xi)$. Com um símbolo real como $A(x,\xi)$, podemos associar um campo vetorial em $\Omega \times (\mathbb{R}_N \setminus \{0\})$, o Hamiltoniano de A:

$$H_A = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial A}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}. \tag{2.0.4}$$

As curvas integrais de H_A são chamadas <u>faixas bicaracterísticas</u> de A; elas são definidas pelo sistema de $2N$ equações diferenciais ordinárias não lineares (o sistema de Hamilton-Jacobi):

$$\dot{x} = \operatorname{grad}_{\xi} A(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -\operatorname{grad}_{x} A(x,\xi). \tag{2.0.5}$$

Note que, ao longo de qualquer faixa, $A(x,\xi) =$ $=$ constante. Chamaremos aquelas nas quais $A = 0$, de <u>faixas bicaracterísticas nulas</u> de A. Sob a hipótese de tipo principal, $\operatorname{grad}_{\xi} A(x,\xi) \neq 0$, as faixas bicaracterísticas são curvas regulares (no sentido da Geometria Diferencial) em $\Omega\times(R_N\setminus\{0\})$, e suas projeções em Ω (chamadas *curvas bicaracterísticas*) são também curvas regulares (não apenas um ponto). Observe que o símbolo principal do comutador $[A(x,D),\ B(x,D)]$, que é um OpD de ordem $\leq 2m-1$, é (ver (1.53)) $\frac{1}{\sqrt{-1}}H_A B(x,\xi) = -\frac{1}{\sqrt{-1}}H_B A(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\{A,B\}(x,\xi)$. A condição (2.0.3) pode então ser reformulada da seguinte maneira:

(2.0.6) *Suponha que para algum* $(x_o,\xi^o)\in V_{p_m}$, *o seguinte é verdade: a restrição de* $B(x,\xi)$ *à faixa bicaracterística nula de* $A(x,\xi)$ *que passa no ponto* (x_o,ξ^o), *se anula neste ponto ao passo que sua derivada primeira, ao longo da faixa, é diferente de zero em* (x_o,ξ^o). *Então a equação* $Pu=f$ *não é localmente resolúvel no ponto* x_o.

A condição de Hörmander, revela o papel do comutador do símbolo principal com o seu complexo conjugado (note que $\{A,B\} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\{p_m,\overline{p}_m\}$). Ela também indica a importância das bicaracterísticas.

§1. Um exemplo de 1ª Ordem

Como exemplo e motivação para os parágrafos seguintes, consideremos a equação (de tipo principal)

$$(2.1.1) \qquad L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(t)\frac{\partial}{\partial x}$$

onde x e t são variáveis reais e $b(t)$ uma função real, C^∞ em algum intervalo aberto $-T<t<T$ $(T>0)$. O estudo da resolubilidade local de L (digamos na origem $(0,0)$) e, portanto, em pontos da forma $(x,0)$, uma vez que L é invariante por translações paralelas ao eixo dos x) é bastante instrutivo: ele fornecerá as principais idéias para a resolubilidade local de um OpD de tipo principal, de ordem qualquer, em um número qualquer de variáveis.

Para resolver $Lu=f$, onde f é, por exemplo, uma função C^∞ com suporte compacto em $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2; |t|<T\}$, é natural tomar a transformada de Fourier relativamente a x (que denotaremos por $\wedge$). Obtemos

$$(2.1.2) \qquad \hat{u}_t - b(t)\xi\hat{u} = \hat{f}(\xi,t).$$

As soluções de (2.12) são conhecidas. Cada uma é a soma de uma solução da equação homogênea e de uma solução da equação não-homogênea, da forma

$$(2.1.3) \qquad \hat{u}(\xi,t) = \int_{t_o}^{t} e^{B(t,t')\xi}\hat{f}(\xi,t')dt'$$

onde

$$(2.1.4) \qquad B(t,t') = \int_{t'}^{t} b(s)ds.$$

Estamos porém interessados em resolver $Lu=f$ e não (2.1.2) e, portanto, devemos tomar a transformada inversa de Fourier relativamente a x. Como estamos aceitando soluções distribuições, segue-se que $\hat{u}$ deve ser <u>temperada</u> relativamente a ξ. Observe que o limite de integração t_o em (2.13) pode depender de ξ. A questão é então: podemos escolher $t_o = t_o(\xi)$ de tal maneira que $\hat{u}(\xi,t)$ seja de <u>crescimento lento</u> relativamente a ξ? É claro que isto requer

(2.1.5) $$B(t,t')\xi \leq 0$$

qualquer que seja t, $|t| < T$ e qualquer que seja t' no intervalo que liga t_o a t. Desde que somente o sinal de $\xi \neq 0$ interessa, podemos tomar $\xi = \pm 1$. Nossa pergunta pode então ser reformulada do seguinte modo: podemos escolher t_o, $|t_o| \leq T$, de tal forma que $B(t,t') \leq 0$ (respect. $B(t,t') \geq 0$) para todo t, $|t| < T$, e para todo t' entre t_o e t? O leitor facilmente se convencerá de que isto é possível se e somente se $B(t,t')$ é uma função monotônica de t ou de t', em outras palavras, se

(2.1.6) $b(t)$ <u>não muda de sinal no intervalo</u> $|t| < T$.

Suponha, por exemplo, que $b \geq 0$ em $)-T,T($.

Então podemos tomar $t_o = T$ quando $\xi > 0$ e $t_o = -T$ quando $\xi < 0$ e (tomando a transformada inversa de Fourier) obtemos a seguinte solução de $Lu=f$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-T}^{t} e^{ix\xi+B(t,t')\xi}\hat{f}(\xi,t')dt'd\xi - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{t}^{T} e^{ix\xi+B(t,t')\xi}\hat{f}(\xi,t')dt'd\xi \ .
\end{aligned} \tag{2.1.7}
$$

Suponhamos agora que (2.1.6) não é verdade. Pode acontecer, então, que não possamos obter uma solução do tipo (2.1.7) porém estamos seguros que a equação $Lu=f$ não é mais resolúvel? Que este é o caso, é uma consequência do seguinte lema (de análise funcional) de Hormander, válido, mais geralmente, para um OpD P definido num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (ver 2.0.1).

<u>Lema 2.1</u> - <u>Suponha que</u> $P\mathcal{D}'(U) \supset C_c^\infty(U)$, <u>onde</u> $U \subset \Omega$, <u>é um aberto e seja</u> U' <u>um aberto relativamente compacto de</u> U. <u>Então existem constantes</u> C, K <u>e</u> K' <u>tais que</u>

$$
\left|\int fvdx\right| \le C\Big(\sum_{|\alpha|\le k}\sup|D^\alpha f|\Big)\Big(\sum_{|\beta|\le k'}\sup|D^\beta {}^tPv|\Big); \quad f,\ v \in C_c^\infty(U'). \tag{2.1.8}
$$

Aqui ${}^tP$ denota o adjunto formal de P definido por

$$\int v\, Pu\, dx = \int ({}^tPv)u\, dx, \quad v \text{ ou } u \text{ com suporte compacto.}$$

Prova. Consideremos a seguinte forma bilinear $\int fvdx$ definida quando $f \in C_c^\infty(\overline{U}')$ e $v \in C_c^\infty(U')$. O primeiro é um espaço de Frechet com a topologia definida pelas seminormas $\sup|D^\alpha f|$. O segundo é um espaço metrizável com a topologia definida pelas seminormas $\sup|D^\beta\, {}^tPv|$. É óbvio que a forma bilinear é contínua relativamente a f, para v fixo. Por outro lado, quando f é fixo, podemos por hipótese escolher $u \in \mathcal{D}'(U)$ tal que $Pu=f$. Portanto,

$$\int fvdx = \langle Pu,v\rangle = \langle u,{}^tPv\rangle ,$$

o que prova a continuidade em v, para f fixo. Desde que uma forma bilinear definida no produto de um espaço de Frechet por um espaço metrizável, é contínua se, e somente se, for separadamente contínua (teorema de Banach--Steinhaus), (2.1.8) é válido. Q.E.D.

Voltando ao nosso exemplo de 1ª ordem, L, seja U um retângulo em $\mathbb{R}^2$ da forma $|x| < r$, $|t| < T$. Se $\forall f \in C_c^\infty(U)$ existisse uma distribuição u, em U, satisfazendo $Lu = f$, então para todo compacto $K \subset U$, existiriam constantes $C, M, M' > 0$ tais que, $\forall f,v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, com suporte contido em K, (2.1.9) $\quad \left|\iint fv\,dx\,dt\right| \leq C\left(\sup_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|\leq M} |D^\alpha f|\right)\left(\sup_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\beta|\leq M'} |D^\beta (Lv)|\right)$

(observe que o adjunto formal de L é ${}^tL = -L$; $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1)$, $\beta = (\beta_0,\beta_1)$ são pares de inteiros não negativos).

A prova da necessidade de (2.1.6) para a resolubilidade local de L na origem, consiste em mostrar que se (2.1.6) não é válido, então (2.1.9) é falso, para apropriados f e v, quaisquer que sejam as escolhas de U, C, M e M'. Com efeito, suponhamos que $B(t,t')$ não seja uma função monotônica de t para todo t'; por exemplo, que, para algum t', $t \mapsto B(t,t')$ possue um mínimo ($|t|<T, |t'|<T$). Isto é equivalente a dizer que existem $t_1 < t_o < t_2$, tais que $B(t,t_o) \geq 0$ para $t \in)t_1,t_2($ e $B(t_1,t_o) > 0$, $B(t_2,t_o) > 0$. Seja $z = x-iB(t,t_o)$ e observe que qualquer função analítica de $z, h(z)$, satisfaz $Lh = 0$. Em particular, isto é verdade para $w = z - i\theta z^2$ e para $e^{i\xi w}$, onde ξ e θ são números reais. Seja $g_o \in C_c^\infty( )-T,T(;\mathbb{R})$, igual a um numa vizinhança de t_o e tal que $B(t,t_o) \geq 0$ no suporte de g_o e $B(t,t_o) > 0$ no suporte de g_o'. Seja $g_1 \in C_c^\infty( )-r,r(;\mathbb{R})$, igual a um numa vizinhança da origem e $g(x,t) = g_o(t)g_1(x)$. Escolhemos, em (2.1.9), $v = g\,e^{i\xi w}$ onde $\theta > 0$ é bastante pequeno, de tal forma que, $\theta B(t,t_o)^2 \leq \frac{1}{2}B(t,t_o)$, no suporte de g. Portanto, no suporte de g, temos:

$$\operatorname{Im} w = -B(t,t_o)-\theta x^2+\theta B(t,t_o)^2 \leq -\frac{1}{2}B(t,t_o)-\theta x^2 .$$

Como $Lv = (Lg)\, e^{i\xi w}$, existe uma constante $c > 0$ tal que no suporte de Lg (que está contido no suporte de grad g), obtemos, para todo $\xi < 0$, $\operatorname{Re}(i\xi w) \leq -c|\xi|$.

Daí, concluimos que, para algum $C' > 0$ e para todo $\xi > 0$,

$$(2.1.10) \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\beta|\leq M'} |D^\beta(Lv)| \leq C'|\xi|^{M'} e^{-c|\xi|} .$$

Tomando então,

$$f(x,t) = F(|\xi|x, |\xi|(t-t_o)), \qquad F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) ,$$

obtemos

$$(2.1.11) \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|\leq M} |D^\alpha f| \leq C''|\xi|^M ,$$

e

$$(2.1.12) \quad |\xi|^2 \iint e^{i\xi w} fg\; dxdt \to \iint e^{-iy} F(y,s)dyds = \hat{\hat{F}}(1,0)$$

quando $\xi \to -\infty$ ($\hat{\hat{F}}$ denota a transformada de Fourier de $F(y,s)$ relativamente a ambas as variáveis y e s). Escolhendo F de tal forma que $\hat{\hat{F}}(1,0) = 1$ e notando que, para $|\xi|$ suficientemente grande, o suporte de f está contido numa viznhança de $(0,t_o)$, por exemplo no suporte de g, chegamos à conclusão (tendo em vista (2.1.10), (2.1.11) e (2.1.12), que (2.1.9) não é verdade, i.e que $Lu = f$ não pode ser resolúvel em U. Resumindo, mostramos que a equação $Lu=f$ é resolúvel em U (vizinhança arbitrária da origem) se e somente se (2.1.6) é válido; neste caso, uma solução é obtida pela fórmula (2.1.7).

§2. Utilização dos OpPsD no Estudo da Resolubilidade Local dos OpD; Microlocalizações

Mostraremos agora como a teoria dos OpPsD permite reduzir o estudo da resolubilidade local de um operador diferencial parcial linear qualquer, P (ver (2.0.1)), de tipo principal, ao caso de um operador pseudodiferencial de 1ª ordem. O leitor notará que não teríamos dificuldades adicionais em abordar o caso em que P é, ele próprio, um OpPsD (de tipo principal, naturalmente), como no Exemplo 1.2. A idéia é utilizar (de forma essencial) a teoria dos OpPsD para obter microlocalizações (este termo é usado comumente para indicar localizações no fibrado cotangente $T^*(\Omega)$, aqui identificado com o produto $\Omega \times \mathbb{R}_N$).

Seja $(x_o, \xi^o) \in \Omega \times (\mathbb{R}_N \setminus \{0\})$ e suponha que $p_m(x_o, \xi^o) = 0$.

Sabemos que para algum j, $1 \leq j \leq N$, $\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x_o, \xi^o) \neq 0$ e, portanto, pelo teorema da função implícita, podemos escrever, numa vizinhança $\mathcal{U}$ de (x_o, ξ^o) em $\Omega \times \mathbb{R}_N$,

$$(2.2.1) \qquad p_m(x,\xi) = q(x,\xi)(\xi_j - \lambda(x,\xi'))$$

onde $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_N)$ e onde q e λ são funções C^∞ em $\mathcal{U}$. Devido à homogeneidade de $p_m(x,\xi)$ relativamente a ξ, podemos supor que $\mathcal{U}$ é cônica, i.e $(x,\xi) \in \mathcal{U} \Rightarrow (x,\rho\xi) \in \mathcal{U}$, $\forall\, \rho > 0$. De fato, tomaremos $\mathcal{U} \doteq V \times \Gamma$ onde V é uma vizinhança aberta de x_o em Ω, e Γ um cone aberto de $\mathbb{R}_N$, que contém ξ^o. Por causa da unicidade no teorema da função implícita, assumiremos que q é homogênea em ξ, de grau m-1, e que λ é homogênea em ξ', de grau 1. Ademais, temos $q(x_o,\xi^o) \neq 0$ e podemos obviamente supor que $q \neq 0$ em $\mathcal{U}$, e mesmo que, para algum $c > 0$:

$$(2.2.2) \qquad |q(x,\xi)| \geq c|\xi|^{m-1} \quad \forall\, (x,\xi) \in \mathcal{U}.$$

Em outras palavras, q é um símbolo (uniformemente)elítico no conjunto cônico $\mathcal{U}$.

É claro então que podemos cobrir $\{x_o\} \times (R_N \setminus \{0\}) \subset \Omega \times \mathbb{R}_N$ com um número finito de conjuntos $V_k \times \Gamma_k$ (k=0, 1,...,r), V_k uma vizinhança de x_o, Γ_k um cone aberto em $\mathbb{R}_N$, de tal forma que o seguinte é verdade: primeiro, em $V_o \times \Gamma_o$, $p_m(x,\xi)$ é uniformemente elítico, i.e, existe $c > 0$ tal que

$$(2.2.3) \qquad |p_m(x,\xi)| \geq c|\xi|^m \quad \forall\ x \in V_o,\ \xi \in \Gamma_o.$$

Segundo, para $k>0$, temos em $V_k \times \Gamma_k$ uma fatorização do tipo (2.2.1). Claro que o índice j pode variar com k. Podemos substituir cada vizinhança V_k pela interseção de todos os V_k, $k = 0,1\ldots,r$, que denotamos por U. Temos pois uma cobertura de $U\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$ por conjuntos $U\times\Gamma_k \subset U\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$. Uma observação útil é que podemos diminuir os cones $\Gamma_k (k > 0)$ contanto que aumentemos r e/ou o "tamanho" de Γ_o (diminuir um cone Γ_k, significa decrescer o diâmetro de sua interseção com a esfera unitária S_{2N-1}). Esta operação pode ser feita um número finito de vezes. A próxima etapa é introduzir uma partição da unidade $\{g_k\}_{0\leq k\leq r}$ subordinada à cobertura $\{U\times\Gamma_k\}$ de $U\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$. As funções g_k devem ser C^∞, não negativas em $U\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$. positivamente homogêneas de grau zero (i.e., $g_k(x,\rho\xi) = g_k(x,\xi)\ \forall\ x,\ \xi$ e $\rho>0$), iguais a um em alguma vizinhança do ponto "central" $(x_o,\xi^k) \in U\times\Gamma_k$; para cada k, o suporte de g_k deve ser um sub-conjunto (relativamente) fechado de $U\times\Gamma_k$.

Na região elítica, i.e., quando $k = 0$, podemos resolver aproximadamente a equação microlocalizada

(2.2.4) $$P(x,D)u_o = g_o(x,D)f \ ,$$

onde

$$g_o(x,D)f = (2\pi)^{-N} \int e^{ix\cdot\xi} g_o(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

(tomaremos $f \in C_c^\infty(U)$, o que pode sempre ser conseguido por uma redefinição de U e f).

O método de resolver (2.2.4) foi descrito no Cap. 1 e é, em resumo, o seguinte:

Definimos o operador E_o, pela fórmula

$$E_o f(x) = (2\pi)^{-N} \int e^{ix\cdot\xi} e_o(x,\xi)\, g_o(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

onde $e_o(x,\xi)$ deve satisfazer

(2.2.5) $$P(x,D_x+\xi)e_o(x,\xi)-1 = \rho_o(x,\xi), \quad x \in U, \ \xi \in \Gamma_o.$$

Aqui $\rho_o(x,\xi)$ é tal que $\rho_o(x,\xi)g_o(x,\xi)$ é o símbolo de um operador regularizante R_o. Como consequência, obtemos

(2.2.6) $$P(x,D)E_o f = g_o(x,D)f+R_o f$$

que fornece a solução aproximada $v_o = E_o f$ de (2.2.4).

A solução de (2.2.5) foi feita com detalhes no Cap. 1 (ver os argumentos que seguem (1.25)).

Claro que o sucesso do método é devido ao fato que (2.2.3) é válido.

Consideremos agora a situação onde (2.2.3) não é válido, isto é, os casos $k > 0$, onde uma decomposição do tipo (2.2.1) é verdadeira. Para simplificar a notação omitiremos todos os índices k. Não é difícil mostrar que, módulo um OpPsD de orem $-\infty$, temos:

$$g(x,D)P(x,D) = g(x,D)\, q(x,D)L(x,D) \tag{2.2.7}$$

onde

$$L(x,D) = D_j - \lambda(x,D') - c(x,D), \tag{2.2.8}$$

com $c(x,D)$ um OpPsD (em Ω) de ordem zero, no máximo. Pela técnica de inversão de OpPsD elíticos (descrita acima), podemos resolver aproximadamente a equação

$$q(x,D)w = \tilde{g}(x,D)f, \tag{2.2.9}$$

e, então, tentar resolver (novamente aproximadamente) a equação

$$L(x,D)v = \approx{g}(x,D)w. \tag{2.2.10}$$

As funções $\tilde{g}$ e $\approx{g}$ são exatamente como g, exceto que $\tilde{g} \equiv 1$ numa vizinhança em $\Omega \times (\mathbb{R}_N \backslash \{0\})$ do suporte de g, enquanto $\approx{g} \equiv 1$ numa vizinhança do suporte de $\tilde{g}$ (todos os suportes devem estar contidos em $U \times \Gamma$). Combinando as equações (2.2.9) e (2.2.10), obtemos uma solução aproximada de

$$P(x,D)v = g(x,D)f. \tag{2.2.11}$$

Definimos agora

$$u = \sum_{k=0}^{r} v_k. \tag{2.2.12}$$

É fácil verificar que u é uma solução da equação

$$P(x,D)u = f+R_f , \tag{2.2.13}$$

onde R é um OpPsD de ordem -1. Ademais, podemos expressar u na forma $u=Kf$, onde K é um operador limitado em $L^2(U)$ (podemos inclusive mostrar que K é um operador linear limitado de $L^2(U)$ em $H^{m-1}(U)$ cuja norma tende para zero com o diâmetro de U). Quanto a R, é um operador linear limitado em $L^2(U)$, cuja norma também tende para zero com o diâmetro de U. Assim, se este é suficientemente pequeno, o operador $I+R$ é invertível, e obtemos uma solução (exata) de $Pu=f$, em U, da forma

$$u = K(I+R)^{-1}f \tag{2.2.14}$$

Em resumo, a teoria dos OpPsD possibilitou reduzir o problema da resolubilidade local da equação $Pu = f$ ao caso das equações pseudodiferenciais de primeira ordem (2.2.10).

É conveniente fazer uma mudança de coordenadas. Antes de tudo, vamos supor que o índice j em (2.2.1) é igual a N. Então escrevendo $t = x^N-x_o^N$, $y^j=x^j$ para $1 \leq j \leq N-1 = n$ (as covariáveis ξ_j, $j < N$, serão denotadas por η_j e ξ_N por τ), nossa equação (2.2.10) é do tipo

(2.2.15) $\qquad D_t u - \lambda(y,t,D_y)u - c(y,t,D_y,D_t)u = f$

onde $\lambda(y,t,\eta)$ é homogênea de grau 1 em η e $c(y,t,\eta,\tau)$ é um símbolo de ordem ≤ 0. Ambas as funções λ e c podem ser consideradas C^∞ relativamente a todas as variáveis em $\mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}_{n+1} \setminus \{0\})$ (isto presupõe que estendemos ambas ao espaço inteiro e as multiplicamos por funções de "corte" apropriadas; este fato não afeta os argumentos precedentes pois introduz, apenas, alguns erros, expressos por OpPsD de ordem $-\infty$). Podemos inclusive supor que as (y,t)-projeções dos suportes de $\lambda(y,t,\eta)$ e $c(y,t,\eta,\tau)$ são compactas. Então sabemos que o OpPsD $c(y,t,D_y,D_t)$ define um operador linear limitado de cada espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^{n+1})$ em si próprio, e pode, por conseguinte, ser facilmente eliminado do panorama. Podemos pois concentrar nossa atenção sobre a equação.

(2.2.16) $\qquad Lu = D_t - \lambda(y,t,D_y)u = f.$

Escrevemos $\lambda = a + \sqrt{-1}\, b$, onde a e b são funções <u>reais</u> C^∞ de (y,t,η), $\eta \neq 0$, homogêneas de grau um em η. Observe que os OpPsD $a(y,t,D_y)$ e $b(y,t,D_y)$ são operadores nas distribuições nas váriáveis y, dependendo de forma C^∞ de t. Substituindo f por $\sqrt{-1}\, f$, obtemos de (2.2.16)

$$(2.2.17) \qquad \partial_t u - \sqrt{-1}\, a(y,t,D_y)u + b(y,t,D_y)u = f.$$

A teoria dos Operadores Integrais de Fourier (ver apêndice) permite que nos livremos do termo $\sqrt{-1}\, a(y,t,D_y)$, de tal maneira que nosso problema original se transforma em resolver uma equação do tipo (esta operação corresponde ao alinhamento das faixas bicaracterísticas de $\operatorname{Re} L(y,t,\eta,\tau) = \tau - a(y,t,\eta)$, paralelas ao eixo dos t)

$$(2.2.18) \qquad \partial_t u + b^{\#}(y,t,D_y)u = f,$$

onde $b^{\#}(y,t,\eta)$ é (como $b(y,t,\eta)$) uma função <u>real</u> C^∞ de (y,t,η), $\eta \neq 0$, homogênea de grau um em η. Associamos à equação pseudodiferencial (2.2.18), a seguinte equação diferencial ordinária, dependendo dos parâmetros (y,η):

$$(2.2.19) \qquad \partial_t w + b^{\#}(y,t,\eta)w = \hat{f}(y,t,\eta) .$$

Supomos que t varia no intervalo fechado $|t| \leq T$, e (y,η) em uma vizinhança cônica $\mathcal{V}' = U \times \mathcal{V}_o$ de (y_o,η^o) em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n \setminus \{0\})$, onde U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo y_o e $\mathcal{V}_o$ um cone aberto em $\mathbb{R}_n \setminus \{0\}$ contendo η^o (U e $\mathcal{V}_o$ com fronteiras regulares). Seja $\mathcal{E}$ o espaço das funções $\hat{f}(y,t,\eta)$ que são C^∞ em $\overline{U} \times [-T,T] \times \overline{\mathcal{V}}_o$

e temperadas em η (em $\mathcal{V}_o$); seja $\mathcal{D}'$ o espaço de distribuições numa vizinhança de $\overline{U}\times[-T,T]$, temperadas (e mensuráveis) relativamente a $\eta \in \mathcal{V}_o$. Introduzimos a propriedade

(2.2.20) $\forall\ \hat{f} \in \mathcal{E}, \exists\ w \in \mathcal{D}'$ <u>satisfazendo</u> (2.2.19).

A equação (2.2.19) é de 1ª ordem e linear. Todas as soluções são conhecidas. Elas podem ser escritas na forma:

$$w(y,t,\eta) = \int_{T(y,\eta)}^{t} e^{-B(y,t,t',\eta)} \hat{f}(y,t',\eta)dt' , \tag{2.2.21}$$

onde

$$B(y,t,t',\eta) = \int_{t'}^{t} b^{\#}(y,s,\eta)ds.$$

É fácil verificar que (2.2.20) é válido se e somente se podemos escolher $T(y,\eta)$ (para cada $(y,\eta)\in\mathcal{V}'$) tal que o seguinte é verdade:

(2.2.22) $\forall t \in [-T,T]$, $\forall t'$ <u>no intervalo com extremidades</u> t e $T(y,\eta)$, $B(y,t,t',\eta) \geq 0$.

O leitor se convencerá facilmente que (2.2.22) é equivalente à seguinte condição:

$(\Psi)^{\#}$ <u>Se, para</u> $|t_o| \leq T$, $b^{\#}(y,t_o,\eta) < 0$ <u>então</u> $b^{\#}(y,t,\eta) \leq 0$ <u>para todo</u> t, $t_o < t \leq T$.

Podemos traduzir $(\Psi)^{\#}$ em termos de $b(y,t,\eta)$ (ver no apêndice a relação entre b e $b^{\#}$):

(Ψ) Se $b(y,t,\eta)$ é < 0 em algum ponto sobre qualquer faixa bicaracterística de $\tau-a(y,t,\eta)$ (numa vizinhança do ponto $(y_o,0,\eta^o,\tau))$, permanece ≤ 0 em qualquer ponto posterior da mesma faixa (faixas bicaracterísticas são curvas orientadas).

Suponha porém que $b(y,t,\eta)$, restrita a uma faixa bicaracterística Γ de $\tau-a(y,t,\eta)$, muda de sinal em algum ponto (y_1,t_1,η^1,τ^1) de Γ. Se (Ψ) é válido, a mudança de sinal deve ser de + para −. Se consideramos agora a "simetria" $(y,t,\eta,\tau) \mapsto (y,t,-\eta,-\tau)$, e observamos o comportamento de b ao longo da faixa bicaracterística de $\tau-a(y,t,\eta)$ que passa no ponto $(y_1,t_1,-\eta^1,-\tau^1)$, vemos que b muda de sinal, neste ponto, de − para + e, portanto, viola (Ψ). Assim devido à homogeneidade de grau um em η, vemos que (Ψ) é equivalente a

(P) A restrição de $b(y,t,\eta)$ a qualquer faixa bicaracterística de $\tau-a(y,t,\eta)$ (numa vizinhança de $(y_o, 0, \eta^o,\tau^o))$, não muda de sinal.

Esta é, em essência, a condição de resolubilidade local (P) de Nirenberg e Treves (ver o próximo parágrafo). Vimos que ela implica que a equação diferencial ordinária

(2.2.19) possue uma solução temperada (em η) quando o segundo membro é temperado.

§3. Hipóteses, Conjecturas e Resultados no Caso Geral

O problema agora, é estender os resultados do Cap. 2, Secção 1, ao caso geral de um OpD P (ver (2.0.1)), de tipo principal. Este problema tem dois aspectos: Primeiro, como formular a condição que deve generalizar (2.1.6)? Segundo, como provar a equivalência da condição geral com a propriedade que estamos estudando, resolubilidade local? A resposta à primeira pergunta já foi iniciada na Introdução ao Cap. 2. Se as hipóteses de (2.0.6) são verdadeiras, a restrição de $B(x,\xi)$ à faixa bicaracterística nula de $A(x,\xi)$ que passa em (x_0,ξ^0), deve mudar de sinal neste ponto. Isto, inevitavelmente, faz recordar a condição (2.1.6). De fato, se considerarmos o operador (2.1.1), ou melhor, $P = -iL$, vemos que $A=\tau$ e $B = b(t)\xi$ (notação obvia para as covariáveis). As faixas bicaracterísticas de A são os segmentos de reta em $\Omega\times\mathbb{R}^2$, paralelas ao eixo dos t, e a condição (2.1.6) pode ser escrita da seguinte maneira.

(2.3.1) <u>A restrição de</u> B <u>a qualquer faixa bicaracterística nula de</u> A <u>não muda de sinal</u>.

Por causa da forma e A e B neste caso, (2.3.1) é equivalente a dizer que B não muda de sinal ao longo de qualquer faixa bicaracterística de A, seja ela nula ou não; de fato, estas faixas são distinguidas somente pelo valor de $\tau = A$ e B é independente de τ. A formulação (2.3.1) tem duas grandes vantagens sobre (2.1.6): é passível de generalização; é invariante por mudança de coordenadas em Ω. Existe ainda, entretanto, uma dificuldade em (2.3.1). É claro que a propriedade que estamos investigando, resolubilidade local, não é apenas invariante por mudança de coordenadas em Ω, porém também por multiplicação de P por uma função complexa C^∞, diferente de zero em todos os pontos (símbolo elítico) ou mais geralmente, por composição com um operador elítico. Qualquer condição que pretenda caracterizar resolubilidade local deve, portanto, possuir tal invariância para poder ser útil; em particular, não haverá, neste caso, ambiguidade na escolha das partes real e imaginária de p_m.

<u>Definição 2.3.1</u> - <u>Dizemos que a propriedade</u> $(\mathcal{P})$ <u>é válida no ponto</u> $(x_o,\xi^o) \in \Omega\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$ <u>se existe uma vizinhança</u> $\mathcal{O}$ <u>de</u> (x_o,ξ^o) <u>em</u> $\Omega\times(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$ <u>tal que, qualquer que seja o número complexo</u> z <u>satisfazendo</u>

$$(2.3.2)\qquad \operatorname{grad}_{\xi} \operatorname{Re}(zp_m)(x,\xi)\neq 0 \quad \forall\ (x,\xi)\in\mathcal{O}\ ,$$

o seguinte é verdade:

(2.3.3) a restrição de $\mathrm{Im}zp_m$ a qualquer faixa bicaracterística nula de $\mathrm{Re}zp_m$, em Θ, não muda de sinal.

A Definição 2.3.1 é aceitávvel do ponto de vista de invariância porém leva a novas dificuldades, uma vez que (2.3.3) deve, em princípio, ser verificado para todo númeor complexo z tal que (2.3.2) é válido. Felizmente, é suficiente verificar (2.3.3) para apenas um z satisfazendo (2.3.2): (2.3.3) é então automaticamente verdadeiro para todos os demais z's.

Uma observação importante é que a propriedade $(\mathcal{P})$ é mais forte do que (2.0.3), apenas nos pontos onde p_m se anula e grad $\mathrm{Re}p_m$ e grad $\mathrm{Im}p_m$ não são linearmente independentes. Isto é, suponha que $p_m(x_o,\xi^o)=0$, e que grad $\mathrm{Re}p_m$ e grad $\mathrm{Im}p_m$ são linearmente independentes em (x_o,ξ^o). Se (2.0.3) é satisfeito numa vizinhança de (x_o,ξ^o), então p_m satisfaz $(\mathcal{P})$ numa vizinhança de (x_o,ξ^o). Com efeito, seja $p_m = A+iB$, A e B reais. Numa vizinhança de (x_o,ξ^o), o conjunto dos ponto onde B se anula é uma hipersuperfície regular S que contém (x_o,ξ^o). Desde que $H_A B = 0$ quando $A+iB=0$, conclue-se facilmente que a faixa bicaracterística nula de A que passa no ponto (x_o,ξ^o) está integralmente contida em S e portanto $B \equiv 0$ sobre ela i.e $(\mathcal{P})$ é válida.

Passemos agora à Conjectura (devida a L. Nirenberg e F. Treves), que generaliza os fatos estabelecidos no Cap. 2., Secção 1. Natualmente que o operador P é suposto de tipo principal; caso contrário, as afirmações acima não teriam, em geral, sentido (note que, em geral, o conceito de bicaracterística não possue significado se a multiplicidade das características é superior a um).

Conjectura 2.3.1 - O OpD P é localmente resolúvel em Ω. se e somente se a propriedade $(\mathcal{P})$ é válida em todos os pontos de Ω $(\mathbb{R}_N\setminus\{0\})$.

R. Beals e C. Fefferman deram duas provas distintas (embora essencialmente a mesma) da suficiência de $(\mathcal{P})$ na Conjectura 2.3.1 (Antes disso, L. Nirenberg e F. Treves demonstraram o mesmo resultado nas seguintes situações: 1) $m=1$; 2) $N=2$; 3) p_m analítico). A primeira prova usa os resultados de Caderón-Vaillancourt sobre a continuidade, em L^2, dos OpPsD de ordem zero e tipo $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Para a segunda prova, eles definiram um cálculo simbólico mais sofisticado (a classe de símbolos $S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$) e seguiram as idéias de Nirenberg e Treves no caso analítico (a prova de Nirenberg e Treves para o caso analítico não podia ser estendida ao caso C^∞; a obstrução está ligada a um certo contraexemplo de J. Mather).

A necessidade da propriedade $(\mathcal{P})$ na Conjectura 2.3.1 permanece um problema em aberto. O ponto de partida para este tipo de questão é sempre o Lema 2.1.1, uma consequência analítico funcional da resolubilidade local (isto é, (2.1.8) deve ser mostrado falso). Acontece que o sucesso deste método depende de uma hipótese adicional, (FZ), de zeros de ordem finita (somente no ponto onde uma mudança de sinal tem lugar).

Definição 2.3.2 - Dizemos que a propriedade (FZ) é válida no ponto $(x_o,\xi^o) \in \Omega \times (\mathbb{R}_N \setminus \{0\})$, onde p_m se anula $(p_m(x_o,\xi^o) = 0)$, se qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{grad}_\xi \operatorname{Re}(zp_m)(x_o,\xi^o) \neq 0$, a restrição de $\operatorname{Im} zp_m$ à faixa bicaracterística (nula) de $\operatorname{Re} zp_m$ que passa em (x_o,ξ^o), possue um zero de ordem k neste ponto.

Demonstra-se que k independe de tais z's. Note, em particular, que se p_m é analítico, (FZ) é sempre válida. Yu.V. Egorov, L. Nirenberg, F. Treves mostraram que se (FZ) é verdadeira, então $(\mathcal{P})$ é também necessária na Conjectura 2.3.1. Mais precisamente, seja $(x_o,\xi^o) \in \Omega \times (\mathbb{R}_N \setminus \{0\})$, um ponto característico de p_m e Γ_o a faixa bicaracterística (nula) de $\operatorname{Re} p_m$ que passa neste ponto. Vale então o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1 - Suponha que a restrição de Imp_m a Γ_o tem um zero de ordem impar k, no ponto (x_o, ξ^o). Então P não é localmente resolúvel no ponto x_o.

Como as hipóteses do Teorema 2.3.1 Sao invariantes, por passagem ao transposto, obtem-se imediatamente o

Corolário 2.3.1 - Nas mesmas hipóteses do Teorema 2.3.1, ${}^tP$ não é localmente resolúvel no ponto x_o.

Por outro lado, consideremos o seguinte operador

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x} \quad , \tag{2.3.4}$$

onde $b(x,t)$ é uma função real, C^∞ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$. Supoñhamos que a aplicação $t \mapsto b(0,t)$ possue um zero de ordem infinita para $t=0$, e muda de sinal neste ponto. Ninguém conseguiu mostrar ainda que P não é localmente resolúvel na origem, como previsto na Conjectura 2.3.1.

REFERÊNCIAS BÁSICAS

Treves, F. On the existence and regularity of solutions of linear partial differential equations, A.M.S. Summer School on partial differential equations, Berkeley (Calif.), 1971.

Treves, F. Usefulness of pseudodifferential and Fourier integral operators in the study of the local solvability of linear partial differential equations, Functional Analysis and Applications, Symposium Recife, 1972, Lect. Notes in Math., vol. 384. Springer-Verlag, 1974.

APÊNDICE

Explicaremos aqui a passagem de (2.2.17) para (2.2.18). Na verdade, esta é uma das questões mais delicadas da Teoria e, simplesmente admití-la, seria uma espécie de jogo sujo com o leitor. Por outro lado, seu completo esclarecimento depende de uma outra teoria, a dos Operadores Integrais de Fourier, que, com certa relutância, resolvemos não incluir no texto a fim de que ele não perdesse seu caráter introdutório.

Nosso ponto de partida é a equação (2.2.17) que reescreveremos da seguinte maneira

$$\partial_t u - \sqrt{-1}\, A(t)u + B(t)u = f \tag{A.1}$$

onde denotamos por $A(t)$ e $B(t)$ os OpPsD $a(y,t,D_y)$ e $b(y,t,D_y)$ respectivamente. Desde que (ver (1.51)) a e b são reais, os operadores $A(t)$ e $B(t)$, definidos no subconjunto denso $H^1(\mathbb{R}^n_y)$ de $H^o(\mathbb{R}^n_y)$, são, módulo operadores limitados, operadores lineares auto-adjuntos(não limitados) em $H^o(\mathbb{R}^n_y)$. Suponha, por um momento, que A e B não dependem de t. A observação precedente permite resolver o seguinte problema de Cauchy:

(A.2) $\qquad \partial_t U = iAU, \quad U|_{t=0} = I,$ o operador identidade.

De fato, a solução é bem conhecida: $U(t)=\exp(iAt)$, o grupo de operadores unitários em $L^2(\mathbb{R}^n)$ cujo <u>gerador infinitesimal</u> é A (quando A é auto-adjunto; quando A é auto-adjunto, módulo operadores limitados, $U(t)$ é "quase unitário").

Seja $u = U(t)v$, $f = U(t)g$ na Eq. (A.1), onde A e B são independentes de t. Obtemos

(A.3) $$\partial_t v+U(t)^{-1}B\, U(t)v = g\ .$$

Verifica-se que, módulo um operador linear limitado (dependendo C^∞ de t),

(A.4) $$B^{\#}(t) = U(t)^{-1}B\, U(t)$$

é auto-adjunto.

Existe um "substratum" geométrico, no que fizemos.

Suponhamos, por exemplo, que A e B são campos vectoriais reais (multiplicados por $-\sqrt{-1}$)

$$A = \sum_{k=1}^{n} a^k(y)D_{y^k}, \quad B = \sum_{k=1}^{n} b^k(y)D_{y^k}\ .$$

Consideremos então, a solução $z = z(y,t)$ do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dz^k}{dt} = - a^k(z), \quad 1 \leq k \leq n \,, \tag{A.5}$$

com condições iniciais

$$z^k\Big|_{t=0} = y^k, \quad 1\leq k\leq n \,. \tag{A.6}$$

Para valores pequenos de $|t|$, $z=z(y,t)$ define uma mudança C^∞ de váriáveis na vizinhança de qualquer ponto dado. Seja

$$y = Y(z,t) \tag{A.7}$$

a mudança inversa de variáveis. A aplicação $t \mapsto (Y(z,t,),t)$ define um "pedaço" de curva integral do campo vetorial $\partial_t - i\acute{A}$, passando no ponto z. A mudança de variáveis $(y,t) \to (z,t)$ transforma este campo vetorial em ∂_t. Um cálculo simples mostra que

$$B^{\#}(t) = \sum_{k,\ell=1}^{n} b^k(Y(z,t)) \, \frac{dz^\ell}{dy^k} \, D_{z^\ell} \,. \tag{A.8}$$

Observe que $b^k(Y(z,t))$ é o valor de b^k no ponto alcançado, no tempo t, quando nos movemos ao longo da curva $t \to Y(z,t)$ (z é o ponto inicial desta curva, obtido para $t=0$). Note também que o símbolo de $B^{\#}(t)$ é

$$b(Y(z,t), \, {}^t(\tfrac{\partial z}{\partial y})\zeta) \,, \tag{A.9}$$

onde $\frac{\partial z}{\partial y}$ representa a matriz Jacobiana. O símbolo (A.9) é nada mais do que o transformado do símbolo $b(y,\eta)$ de B (ver (1.55)), pela aplicação $(z,\zeta) \mapsto$ $\mapsto (y,\eta)$, onde

$$(A.10) \qquad y = Y(z,t), \quad \eta = {}^t\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y,t) .$$

Esta aplicação é a transformação induzida no fibra do cotangente sobre $\mathbb{R}^n (\approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n)$ ou sobre um conjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^n (\simeq \Omega \times \mathbb{R}_n)$, associada à mudança de coordenadas (A.7), na base. A curva $t \to Y(z,t)$, na base, é a projeção da curva $t \to (Y(z,t), {}^t(\partial z/_{\partial y})\zeta)$ no fibrado cotangente, e o símbolo de $B^{\#}(t)$ é obtido deslocando o de B ao longo desta curva. Isto descreve completamente a transformação de B em $B^{\#}(t)$, e mostra que a introdução do fibrado cotangente não foi simplesmente uma sofisticação, porém tinha que ver com os aspectos importantes do problema.

Voltemos ao caso onde $A(t) = a(y,t,D_y), B(t) =$ $= b(y,t,D_y)$ são OpPsD de 1ª ordem, essencialmente auto-adjuntos. Uma interpretação concreta da situação é então possível, graças aos operadores integrais de Fourier. Formalmente o processo é o mesmo: resolvemos o problema de Cauchy (A.2) e introduzimos o transformado $B^{\#}(t)$

(note que agora $B = B(t)$). Não é difícil mostrar que $U(t)$ é essencialmente unitário (em $L^2(\mathbb{R}^n)$), e que $B^{\#}(t)$, como $B(t)$, é essencialmente auto-adjunto. Porém a questão é se $B^{\#}(t)$ é também um OpPsD de ordem um, ao qual pode ser aplicada uma análise apropriada. A resposta é afirmativa e, ademais, $B^{\#}(t)$ está relacionado com $B(t)$ de uma maneira simples e elegante, generalizando o que acontece quando A e B são campos vetorias. Isto é uma consequência do fato que $U(t)$ pode ser aproximado, módulos operadores que são regularizantes (na variável x e dependem C^∞ de t), por um operador integral de Fourier:

$$(A.11) \qquad K(t)u(y)=(2\pi)^{-n}\int e^{i\varphi(y,t,\eta)}k(y,t,\eta)\hat{u}(\eta)d\eta \quad ,$$

onde $k(y,t,\eta)$, a <u>função-amplitude</u>, é um símbolo de grau zero (dependendo de maneira C^∞ de t) e a <u>função-fase</u> φ é real, C^∞ em (y,t,η), $\eta \neq 0$, homogênea de grau um relativamente a η. De fato, φ é a única solução do seguinte problema de Cauchy (não linear), para a <u>equação eikonal</u>:

$$(A.12) \qquad \varphi_t = a(y,t,\varphi_y), \ \varphi|_{t=0} = y\cdot\eta \quad ,$$

ao passo que $k(y,t,\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j(y,t,\eta)$ deve satisfazer às <u>equações de transporte</u>:

$$\frac{\partial k_\nu}{\partial t} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial a}{\partial \eta_j}(y,t,\varphi_y) \frac{\partial k_\nu}{\partial y^j} + C(y,t;\varphi)k_\nu =$$

$$= F_\nu(y,t;\varphi;\, k_o;\ldots;k_{\nu-1})$$

onde $C(y,t,\eta)$ e $F_\nu(y,t;\eta;k_o;\ldots;k_{\nu-1})$ são funcionais ($F_\nu \equiv 0$ se $\nu = 0$). Ademais, os k_ν são submetidos às condições iniciais:

$$k_o\Big|_{t=0} = 1, \quad k_\nu\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{se} \quad \nu > 0.$$

Assumindo que adicionamos um termo de ordem zero a $a(y,t,D_y)$, de tal forma a torná-lo auto-adjunto, obtemos que $U(t)^{-1}$ é igual, módulo operadores regularizantes, ao adjunto $K(t)^*$ de $K(t)$ e, portanto, módulo operadores regularizantes,

(A.13) $$B^\#(t) \equiv K(t)^* B(t) K(t) .$$

O importante teorema de Egorov assegura-nos então que K^*BK é um OpPsD de mesma ordem que B (aqui um), e que, módulo símbolos de ordem inferior, seu símbolo pode ser obtido do de B, por uma fórmula semelhante (e generalizando) a (A.9). As curvas relevantes no fibrado cotangente são agora as faixas bicaracterísticas de $\tau - a(y,t,\eta)$, isto é, do símbolo de $\frac{1}{i}(\partial_t - iA)$. Estas faixas são as curvas integrais do Hamiltoniano de $\tau - a(y,t,\eta)$, que é o campo vetorial

$$\mathcal{H} = \partial_t - a(y,t,\eta)\cdot\partial_y + a_y(y,t,\eta)\cdot\partial_\eta \ .$$

Elas são curvas descritas pelo ponto $(z(y,t,\eta),t,\zeta(y,t,\eta))$. onde

$$\text{(A.14)} \qquad \begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = -\, a_\eta(z,t,\zeta),\ \frac{d\zeta}{dt} = a_y(z,t,\zeta), \\ &z=y, \quad \zeta = \eta \ \text{ para } \ t = 0 \ . \end{aligned}$$

Para valores pequenos de $|t|$, a aplicação $(y,\eta) \mapsto (z(y,t,\eta),\ \zeta(y,t,\eta))$ é um difeomorfismo; denotemos por

$$\text{(A.15)} \qquad y = Y(z,t,\zeta), \quad \eta = \mathrm{H}(z,t,\zeta) \ ,$$

a transformação inversa. Se $b^{\#}(y,t,\eta)$ denota o símbolo de $B^{\#}(t)$, temos:

(A.16) $b^{\#}(z,t,\zeta) \equiv b(Y(z,t,\zeta),\ t,\mathrm{H}(z,t,\zeta))$ <u>módulo símbolos de grau zero</u>.

Isto generaliza a fórmula (A.8).

Assim, reduzimos o problema original (A.1) à resolubilidade da equação de evolução (ver (2.2.18))

$$\text{(A.17)} \qquad \partial_t u + b^{\#}(y,t,D_y)u = f,$$

onde o símbolo principal $b_o^{\#}(y,t,\eta)$ de $b^{\#}(y,t,D_y)$ é real e definido pela Propriedade (A.16).

REFERÊNCIAS BÁSICAS

Duistermaat, J.J. Fourier integral operators, New York University, Lectures Notes, 1973.