

**MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA N.º 26**

**GEOMETRIA DAS SUBVARIEDADES**

**LUCIO RODRÍGUEZ**

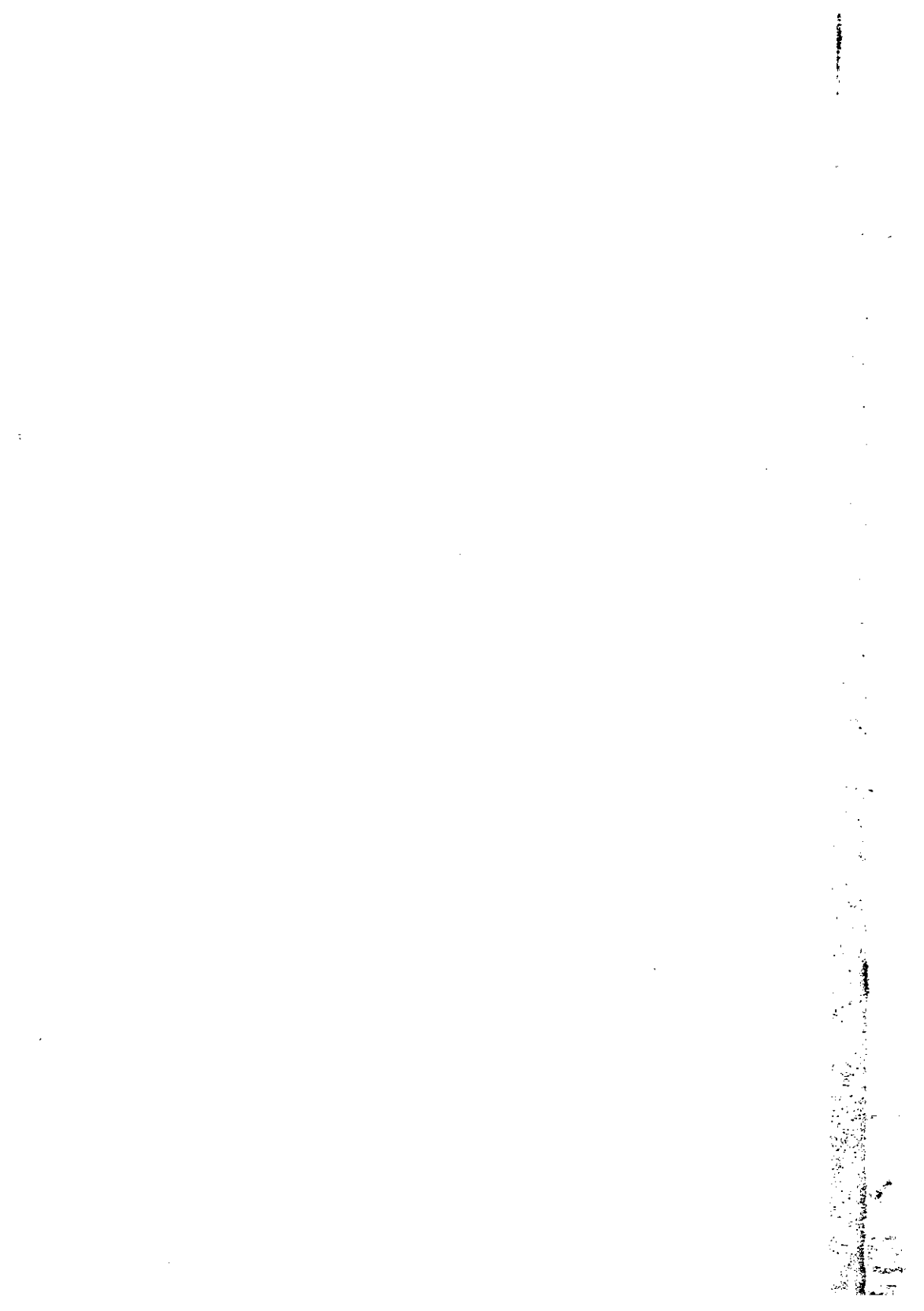
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

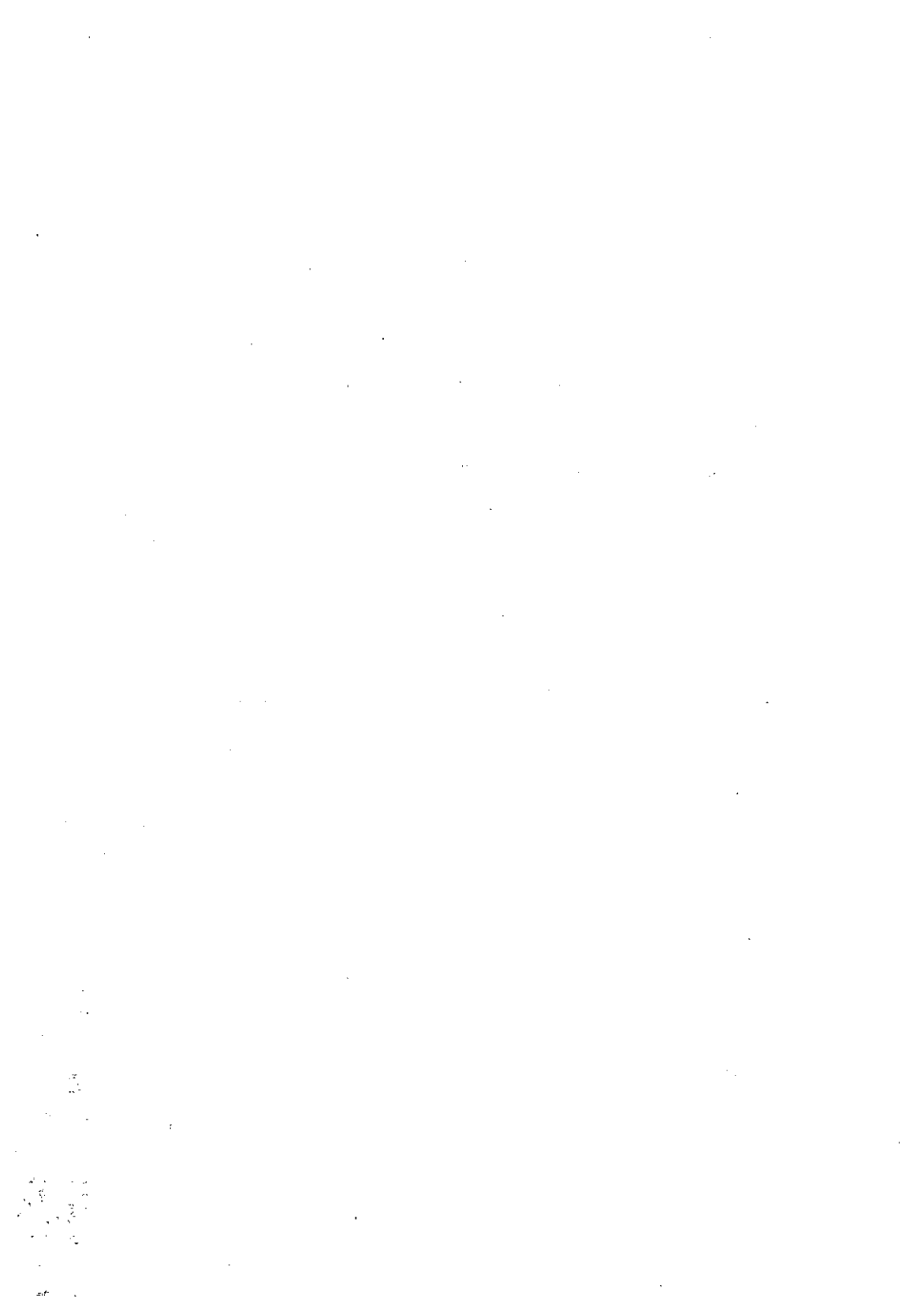
**RIO DE JANEIRO**

**1976**

**DEPARTAMENTO DE INFORMAÇÃO CIENTÍFICA (DIO)**







## PREFÁCIO

Estas notas estão baseadas num curso dado no IMPA nos meses de janeiro e fevereiro de 1975. Elas têm o propósito de dar uma visão de resultados interessantes e importantes da geometria das imersões de subvariedades ao mesmo tempo que introduzem muitas das técnicas básicas usadas nesta área.

Tentamos chegar rapidamente aos resultados, introduzindo os conhecimentos básicos somente à medida que os necessitamos. Alguns fatos da geometria intrínseca de variedades Riemannianas e de topologia diferencial são admitidos (por exemplo, fatos sobre geodésicas e sobre teoria de Morse).

Ao final de cada seção damos uma lista de referências e apresentamos sugestões de outros assuntos e problemas relacionados com o conteúdo da seção. Em certos casos, também damos uma idéia de como demonstrar uma generalização de um resultado já visto. Como as referências bibliográficas não estão todas juntas, o índice alfabético contém também um índice de autores.





Finalmente, no apêndice, desenvolvemos uma fórmula que é usada no teorema de Gauss-Bonnet. Esta fórmula relaciona uma curvatura intrínseca da variedade Riemanniana com a média das curvaturas de Lipschitz-Killing nas direções normais (curvaturas extrínsecas).

O excelente trabalho de datilografia e de preparação do texto foi feito por Adalberto do Outeiro.

Lucio Rodriguez.

Rio de Janeiro, junho de 1976.



ÍNDICE

	pag.
Prefácio .....	i
1. Variedade Diferenciáveis .....	1
2. Conexões e Imersões Isométricas .....	15
3. O Teorema de Hadamard .....	29
4. Imersões com Curvaturas Seccionais Não Positivas	41
5. Imersões com Curvaturas Seccionais Nulas ....	55
6. Curvatura Total Absoluta e Imersões Justas. Teorema de Gauss-Bonnet .....	75
7. Os Axiomas dos $r$ -planos e das $r$ -esferas .....	121
8. Curvatura Média Absoluta Total de Subvariedades	137
9. Apêndice - A Classe Característica de Euler de um Ponto de Vista Extrínseco .....	151
Índice Alfabético .....	161



## 1. VARIETADES DIFERENCIÁVEIS

Nesta seção definimos as noções básicas de variedades diferenciáveis. Nosso objetivo não será o de dar uma visão completa sobre o assunto senão o de ver rapidamente o que realmente precisaremos mais adiante. O leitor com menos experiência, poderá consultar as referências sugeridas ao final desta seção.

Um espaço topológico de Hausdorff  $M$  é chamado uma variedade topológica de dimensão  $n$  se para todo  $p$  em  $M$  existe uma vizinhança  $U$  e um homeomorfismo  $\varphi: U \rightarrow V$  sobre um aberto  $V$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . O par  $(\varphi, U)$  é chamado um sistema local de coordenadas.

DEFINIÇÃO - Um atlas de  $M$  é uma coleção  $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha : \alpha \in L)\}$  de sistemas de coordenadas de  $M$  tal que

$$1) \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha = M$$

2) Se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  então  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ .

Um atlas é completo se não está contido num atlas maior.

DEFINIÇÃO - Uma estrutura diferenciável é um atlas completo de  $M$ . A variedade topológica  $M$  com uma estrutura diferenciável é chamada uma variedade diferen-

ciável.

Dada uma função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  dizemos que ela é diferenciável em  $p$  se existe um sistema de coordenadas  $(\varphi, U)$  tal que  $p \in U$  e  $f|_U = F \circ \varphi$  onde  $F: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ . Verifica-se que a definição não depende do sistema de coordenadas. Acostuma-se escrever  $\varphi$  como  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ou  $(x_1, \dots, x_n)$ , e  $f(q) = F(x_1(q), \dots, x_n(q))$ . Denotamos como  $\mathfrak{F}(M)$  o conjunto de todas as funções reais definidas sobre  $M$  que são diferenciáveis de classe  $C^\infty$  em todos os pontos de  $M$ .

EXERCÍCIO 1.1 - Dado  $p \in M$  e  $W$  um aberto de  $M$  contendo  $p$ , existe  $f \in \mathfrak{F}(M)$  tal que  $f(p) = 1$  e  $f(q) = 0$  para todo  $q \notin W$ .

Observamos que  $\mathfrak{F}(M)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , definindo  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  e  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ,  $\lambda$  em  $\mathbb{R}$ .

### Vetores Tangentes

DEFINIÇÃO - Dado  $p$  em  $M$ , um vetor tangente a  $M$  em  $p$  é uma aplicação linear  $X_p: \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- 1)  $X_p$  é linear sobre  $\mathbb{R}$
- 2)  $X_p(fg) = g(p)(X_p f) + f(p)(X_p g)$

Denotamos por  $TM_p$  o conjunto de todos os vetores tangentes em  $p$ .  $TM_p$  é um espaço vetorial,  $(X_p + \lambda Y_p)f = X_p f + \lambda(Y_p f)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e é chamado o espaço tangente de  $M$  em  $p$ .

PROPOSIÇÃO 1.1 - 1) Se  $f$  é constante então  $X_p f = 0$ .

2) Se  $f = g$  numa vizinhança  $U$  de  $p$ , então  $X_p f = X_p g$ .

Demonstração: 1)  $X_p(\lambda) = \lambda X_p(1) = \lambda X_p(1 \cdot 1) = \lambda \cdot 1 X_p(1) + \lambda \cdot 1 X_p(1) = 2X_p(\lambda)$ , se  $f \equiv \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2) Basta demonstrar que se  $h = 0$  em  $U$  então  $X_p h = 0$ , pois  $X_p(f-g) = X_p f - X_p g$ .

Mas seja  $k: M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $k(p) = 0$  e  $k(M-U) = 1$  (vide exercício 1.1). Então  $h = h \cdot k$ . Logo  $X_p h = X_p(h \cdot k) = k(p)X_p h + h(p)X_p k = 0$ .

C.Q.D.

Dado um sistema de coordenadas  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  definido numa vizinhança de  $p$ , temos uns vetores tangentes especiais que definiremos a seguir. Sabemos que  $f = F \circ \varphi$  onde  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^\infty$ ; definimos  $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p f = (\frac{\partial}{\partial x_i} F)_{\varphi(p)}$  onde a derivada parcial a direita é a usual. Os  $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são linearmente independentes pois se  $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$  então  $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = a_j =$

$= 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . A seguir veremos que eles formam uma base de  $TM_p$ .

PROPOSIÇÃO 1.2 - A dimensão de  $TM_p$  é  $n$ .

Na demonstração desta proposição precisaremos do seguinte lema.

LEMA 1.3 - Seja  $f$  uma função  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ . Então existem  $n$  funções  $C^\infty$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$  tal que  $f(x_1, \dots, x_n) = f(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_1, \dots, x_n)$  e  $f_i(0, 0, \dots, 0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0, 0, \dots, 0)$ .

Demonstração:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n) dt$   
 $= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$ . Logo basta tomar  $f_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$ .

Demonstração de 1.2: Seja  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  um sistema de coordenadas ao redor de  $p$  com  $x_i(p) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se  $f \in \mathcal{F}(M)$ , podemos expressar  $f$  na vizinhança coordenada de  $p$  como  $f = F(x_1, \dots, x_n)$ , onde  $F$  está definida numa vizinhança de  $(0, 0, \dots, 0)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Pelo lema,  $F = F(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $U$ . Dado  $X \in TM_p$ ,

$$\begin{aligned} Xf &= \sum_{i=1}^n F_i(0, \dots, 0)X(x_i) + x_i(p)X(F_i(x_1, \dots, x_n)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \dots, 0)X(x_i) = \sum_{i=1}^n X(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f. \text{ Logo} \end{aligned}$$

$X = \sum_{i=1}^n X(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$ . Já tínhamos visto que os  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são linearmente independentes, logo eles formam uma base de  $TM_p$ . C.Q.D.

Uma curva  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $c(0) = p$  é diferenciável em  $p$  se  $\varphi \circ c$  é diferenciável em  $p$ . Podemos definir o vetor tangente à curva em  $p$ ,  $c'(0)$ , da seguinte maneira  $c'(0)(f) = \frac{d}{dt}f(c(t))_{t=0}$ .

EXERCÍCIO 1.2 - Dado um vetor tangente em  $p$ ,  $X_p$ , existe uma curva passando por  $p$  tal que  $c'(0) = X_p$ .

Um campo vetorial  $X$  é uma regra que associa a cada ponto  $p$  em  $M$  um vetor  $X_p$  em  $TM_p$ . Um campo vetorial  $X$  atua nas funções de  $\mathfrak{F}(M)$  da seguinte maneira  $Xf$  e a função  $(Xf)(p) = X_p f$ . Dizemos que  $X$  é diferenciável se  $Xf \in \mathfrak{F}(M)$  para todo  $f \in \mathfrak{F}(M)$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}(M)$  o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis.

Observação: Cada campo vetorial  $X$  é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear de  $\mathfrak{F}(M)$  em  $\mathfrak{F}(M)$  tal que  $X(fg) = gXf + fXg$ . Inversamente toda aplicação com esta proprie

dade é um campo vetorial diferenciável.

Observação:  $\mathcal{X}(M)$  é um módulo sobre o anel de funções  $\mathcal{F}(M)$ .

Dado um sistema de coordenadas

$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  definidos em  $V$ , temos os campos vetoriais diferenciáveis  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em  $\mathcal{X}(V)$ , que em cada ponto formam uma base do espaço tangente nesse ponto. Logo se  $X \in \mathcal{X}(V)$ ,  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  onde os  $a_i$ 's são funções diferenciáveis.

EXERCÍCIO 1.3 - Um campo vetorial é  $C^\infty$  se e somente se para todo sistema de coordenadas locais  $(\varphi = (x_1, \dots, x_n), V)$ ,  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  em  $V$  onde as funções  $a_i$  são  $C^\infty$ .

Se quisermos definir um campo vetorial  $X$  que seja só  $C^r$  exigiríamos só que  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , com os  $a_i$ 's diferenciáveis de classe  $C^r$ .

Dados campos vetoriais  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{X}(M)$  podemos definir o colchete deles, denotado  $[X, Y]$ , como  $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ . Verifica-se que  $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ . Se  $(\varphi = (x_1, \dots, x_n), V)$  é um sistema de coordenadas locais, temos que  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]f = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j} f) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial x_i} f) = 0$ .



EXERCÍCIO 1.4 - Verifique a identidade de Jacobi,

$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ , para todo  $X, Y$  e  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

EXERCÍCIO 1.5 - Usando coordenadas locais verifique que

$[X, Y]$  é diferenciável se  $X$  e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

### Aplicações Diferenciáveis

Dizemos que uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  entre variedades diferenciáveis é diferenciável se para todo  $g$  em  $\mathfrak{F}(N)$  temos que  $g \circ f$  é um elemento de  $\mathfrak{F}(M)$ . Usando coordenadas locais  $(\psi, U)$  e  $(\phi, V)$  de  $p \in M$  e  $f(p) \in N$  respectivamente também podemos definir  $f$  como diferenciável em  $p$  se  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}: \psi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável de classe  $C^\infty$  como função de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ . Verifica-se que esta definição não depende do sistema de coordenadas e que é equivalente à primeira definição.

Se  $f: M \rightarrow N$  é diferenciável, então para todo  $p \in M$  temos uma aplicação linear, a derivada de  $f$  em  $p$ :  $f_{*p}: TM_p \rightarrow TN_{f(p)}$  definida como  $[f_{*p}(X_p)]g = X_p(g \circ f)$  para todo  $g \in \mathfrak{F}(N)$ . Daremos agora uma expressão desta derivada em coordenadas locais. Se  $((x_1, \dots, x_n), U)$  e

$((y_1, \dots, y_m), V)$  são sistemas locais de coordenadas ao redor de  $p$  e  $f(p)$  respectivamente, então

$\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$  e  $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\}$  formam bases de  $TM_p$  e  $TN_{f(p)}$  como vimos antes. Agora veremos a derivada em

termos destas bases. Temos que  $[f_*p(\frac{\partial}{\partial x_i})]y_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ f)$ .

Se  $f_*(\frac{\partial}{\partial x_i})_p = \sum_{j=1}^m a_{ji} \frac{\partial}{\partial y_j}$  então  $\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ f) = f_*(\frac{\partial}{\partial x_i})y_j =$

$= (\sum_{k=1}^n a_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k})y_j = a_{ji}$ . Logo os coeficientes da matriz de

$f_*$  nestas bases são  $a_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} y_j \circ f$ . Essa matriz  $m \times n$  é chamada a matriz jacobiana  $J_p$  de  $f$  em  $p$ . Se escre-

vemos  $y_j \circ f = f_j$  temos que

$$J_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIO 1.4 - Veja como  $J_p$  muda quando fazemos uma mudança de coordenadas ao redor de  $p$  e  $f(p)$ .

## Subvariedades

Dizemos que uma aplicação diferenciável  $f: M \rightarrow N$  é regular em  $p$  se  $f_{*p}$  é injetiva.

EXERCÍCIO 1.5 - Se  $f$  é regular em  $p$  então  $f$  é também regular numa vizinhança de  $p$ , e  $f$  é um homeomorfismo local.

Dizemos que  $f$  é uma imersão se  $f$  é regular em todo ponto de  $M$ . Neste caso chamamos o par  $(M, f)$  uma subvariedade imersa de  $N$ . Se  $f$  é uma imersão que é um homeomorfismo de  $M$  com sua imagem  $f(M)$  considerada com a topologia induzida por  $N$ , então  $f$  é chamado um mergulho; nestas circunstâncias podemos identificar  $M$  com  $f(M) \subset N$ .

Estaremos especialmente interessados nas subvariedades de  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Neste caso podemos identificar  $TM_p$  com  $f_*(TM_p)$  que poderemos considerar ainda como um subespaço afim de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $f(p)$ .

Uma maneira de obter exemplos de subvariedades consiste em empregar o seguinte teorema de cálculo que enunciaremos sem demonstração.

Teorema da função implícita - Seja  $D$  um aberto de  $\mathbb{R}^{n+p}$   
e  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , funções reais diferenciáveis definidas em  $D$  tal que  $f_i(a, b) = 0$ ,  
 $i = 1, \dots, p$ , onde  $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p) \in D$ .  
Se  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=n+1, \dots, n+p}}(a, b) \neq 0$ , então existem vizinhanças  $U$  de  $a$   
em  $\mathbb{R}^n$  e  $V$  de  $b$  em  $\mathbb{R}^p$  e  $\varphi: U \rightarrow V$  diferenciável  
tal que (1)  $f_i(x, \varphi(x)) = 0$ , para todo  $x$  em  $U$ ,  $i=1, \dots, p$ .  
(2) Se  $f_i(x_0, y_0) = 0$ ,  $i=1, \dots, p$ , com  $x_0 \in U$ , e  
 $y_0 \in V$  então  $y_0 = \varphi(x_0)$ .

Este teorema se aplica observando que

$g: U \rightarrow f^{-1}(0) \cap U \times V$ ,  $g(x) = (x, \varphi(x))$  é um homeomorfismo, onde  $f = (f_1, \dots, f_p)$ ; daí segue-se que  $g^{-1}$  é um sistema local de coordenadas de  $f^{-1}(0) \subset D \subset \mathbb{R}^{n+p}$ . Um caso especial acontece quando consideramos uma aplicação diferenciável  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com a propriedade de que para todo ponto  $p \in M = f^{-1}(0)$  existe pelo menos uma derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  diferente de zero; do teorema segue-se que  $M$  é uma subvariedade mergulhada de dimensão  $n-1$ . Uma imersão de uma variedade de dimensão  $n-1$  numa variedade de dimensão  $n$  é chamada uma hipersuperfície.

EXEMPLO -  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) =$

$= \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 - 1$ . Temos que os  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i$  não são todos iguais a zero na esfera  $S^n = f^{-1}(0)$ . Logo vemos que a esfera  $S^n$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

EXERCÍCIO 1.6 - Seja  $SL(n, \mathbb{R})$  o conjunto das matrizes  $n \times n$  com determinante igual a 1. Demonstre que  $SL(n, \mathbb{R})$  é uma hipersuperfície de  $GL(n, \mathbb{R})$ , o espaço das matrizes  $n \times n$  com determinante diferente de zero, que pode ser considerado como um aberto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Sugestão: Usando o fato de que  $f = \det$  é homogênea de grau  $n$ , i.e.,  $f(\lambda x_{11}, \lambda x_{12}, \dots, \lambda x_{nn}) = \lambda^n f$ , verifique

que  $\sum_{i,h=1}^n x_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_{ik}}(\lambda x_{11}, \dots, \lambda x_{nn}) = n\lambda^{n-1} f$  e bote  $\lambda = 1$ .

### Métricas Riemannianas

Definiremos uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável  $M$  das duas seguintes maneiras equivalentes:

(1) como uma aplicação  $g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$  bilinear sobre o anel  $\mathfrak{F}(M)$ , simétrica e positiva definida, i.e., para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $g(X,X) \geq 0$  e  $g(X,X) = 0$  se e somente se  $X = 0$ .

(2) como uma regra que associa um produto interno positivo definido  $g_p$  a cada espaço tangente  $TM_p$ , que é diferenciável no sentido de que para qualquer sistema de coordenadas  $((x_1, x_2, \dots, x_n), U)$  temos que  $x \rightarrow g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é diferenciável. As funções  $g_{ij}$  são os coeficientes de  $g$  com relação ao sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . A matriz  $(g_{ij})$  é positiva definida e simétrica. Verifica-se que a definição de diferenciabilidade não depende do sistema de coordenadas.

O seguinte teorema, que enunciamos sem demonstração, garante a existência de métricas Riemannianas para as variedades diferenciáveis mais comuns.

TEOREMA - As seguintes condições são equivalentes para uma variedade diferenciável  $M$

- 1)  $M$  tem base enumerável,
- 2)  $M$  é paracompacto,
- 3)  $M$  é metrizável,
- 4)  $M$  admite uma métrica Riemanniana.

O leitor poderá ver demonstrações destes fatos e mais detalhes sobre este assunto em [1], vol.1, apêndice 2 e [2], capítulo 7. (As referências encontram-se ao final da seção.)

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana. Dada uma imersão  $f: M \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  numa variedade  $\tilde{M}$  com métrica Riemanniana  $\tilde{g}$  podemos induzir uma métrica Riemanniana  $g$  em  $M$  pela seguinte fórmula,  $g_p(X_p, Y_p) = \tilde{g}_{f(p)}(f_*X_p, f_*Y_p)$ . Se  $(M, g)$  e  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  são variedades Riemannianas então diz-se que  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  é uma aplicação isométrica se  $g(X, Y) = \tilde{g}(f_*X, f_*Y)$ , para todo  $X, Y \in TM_x$ , e para todo  $x \in M$ . Ser isométrica implica ser uma imersão. Dizer que  $f$  é isométrica é equivalente a dizer que  $g$  é a métrica induzida por  $f$ .

#### REFERÊNCIAS

Nesta primeira seção temos introduzido só alguns conceitos básicos de variedades diferenciáveis, só o essencial para começar a falar na geometria das imersões. Outros conceitos aparecerão assim que forem necessários em outras seções. Para quem quiser maiores esclarecimentos sobre estes tópicos recomendamos que consulte alguns livros que tratam especialmente desta matéria, como, por exemplo,

- [1] LIMA, E. - Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática, Nº 15, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

- [2] AUSLANDER, L. e MACKENZIE, R. - Introduction to  
Differentiable Manifolds, Mc Graw-Hill,  
New York, 1963.

Muitos livros de geometria diferencial ou topologia diferencial possuem um primeiro capítulo dedicado a variedades diferenciáveis, como os seguintes:

- [3] WALLACE, A. - Differential Topology: First Steps,  
W.A.Benjamin, New York, 1968.
- [4] BISHOP, R. e CRITTENDEN, R. - Geometry of Manifolds,  
Academic Press, New York, 1964.
- [5] KOBAYASHI S. e NOMIZU, K. - Foundations of Differential  
Geometry, vol. I, Interscience Publishers,  
New York, 1963.
- [6] WARNER, F.W. - Foundations of Differentiable Manifolds  
and Lie Groups, Scott Foresman, Glenview,  
Illinois, 1971.



## 2. CONEXÕES E IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Nesta seção estudamos conexões em variedades Riemannianas. Começamos com as relações entre a conexão de uma variedade e a conexão de uma subvariedade, e obtemos as fórmulas de Gauss e de Weingarten. Depois estudamos em detalhe o caso de subvariedades de  $\mathbb{R}^{n+p}$  e em particular hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Finalmente obtemos as propriedades básicas da aplicação de Gauss.

**DEFINIÇÃO** - Uma conexão de uma variedade diferenciável  $M$  é uma regra  $\nabla$  que associa a um par de campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  um outro campo vetorial  $\nabla_X Y$  em  $\mathfrak{X}(M)$ , chamado de derivada covariante de  $Y$  na direção de  $X$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

$$1) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$2) \nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$3) \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

onde  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$  e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

Se  $(\varphi = (x_1, \dots, x_n), U)$  é um sistema de coordenadas locais então temos campos vetoriais  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$  e  $\nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ , onde as  $\Gamma_{ij}^k$  são funções di

ferenciáveis em  $U$ . Estas funções são chamadas de simbolos de Christoffel da conexão; eles determinam a conexão totalmente em  $U$ .

EXERCÍCIO 2.1 - Demonstre que  $(\nabla_X Y)_p$  depende só do valor de  $X$  em  $p$ . Sugestão: localize primeiro usando o exercício 1.1.

A aplicação  $T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida como  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  é chamada de tensor torsão. Esta aplicação  $T$  é chamada de tensor porque o valor de  $T(X, Y)_p$  depende só do valor de  $X$  e  $Y$  em  $p$ , e  $T$  induz uma aplicação bilinear  $T_p: TM_p \times TM_p \rightarrow TM_p$  em cada ponto  $p$  de  $M$ . Estas propriedades equivalem a exigir que  $T$  seja uma aplicação bilinear considerando  $\mathfrak{X}(M)$  um módulo sobre  $\mathfrak{F}(M)$ . Já vimos que a métrica Riemanniana  $g$  tem esta propriedade. Mais adiante teremos a oportunidade de estudar outros tensores.

EXERCÍCIO 2.2 - (a) Verifique que  $T$  é bilinear considerando  $\mathfrak{X}(M)$  um módulo sobre  $\mathfrak{F}(M)$ .

(b) Demonstre que (a) implica que  $T(X, Y)_p$  depende só de  $X_p$  e  $Y_p$ . Sugestão: primeiro localize, i.e., veja que  $T(X, Y)_p$  depende só dos valores de  $X$  e  $Y$  numa vizinhança de  $p$  e depois use a expressão em coordenadas locais.

(c) Veja que  $T \equiv 0$  se e somente se  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  para qual quer sistema de coordenadas.

Dizemos que a conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$  de uma variedade Riemanniana  $M$  se  $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

PROPOSIÇÃO 2.1 - Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  existe uma única conexão  $\nabla$ , chamada a conexão Riemanniana de  $M$ , tal que

- (1)  $T$  é identicamente nulo (simétria)
- (2)  $\nabla$  é compatível com a métrica ( $\nabla_X g \equiv 0$ )

Demonstração: Basta definir  $\nabla_X Y$  pela seguinte equação

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) \quad \text{C.Q.D.}$$

### A segunda forma fundamental

Consideremos uma imersão  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  onde  $\tilde{M}$  é uma variedade com conexão  $\tilde{\nabla}$ . Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais de  $M$ . Dados  $x$  em  $M$  e  $U$  uma vizinhança de  $x$  onde  $f$  é injetiva, temos que  $f^*X$  e  $f^*Y$  são campos

vetoriais definidos ao longo de  $f(U)$ . Podemos estende-los a campos vetoriais  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  definidos numa vizinhança de  $f(x)$  em  $\tilde{M}$ . Definimos  $(\tilde{\nabla}_X Y)_x$  como  $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_x$ . Como  $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_x$  depende só de  $\tilde{X}_x = X_x$  e de  $\tilde{Y}$  ao longo de uma curva em  $f(U)$ , temos que a definição não depende da extensão.

Suponhamos agora que  $f: M, g \rightarrow \tilde{M}, \tilde{g}$  é uma imersão isométrica. Podemos escrever  $T\tilde{M}_{f(p)}$  como  $f_* TM_p \oplus N_p$ , onde  $N_p (= TM_p^\perp)$  é o complemento ortogonal de  $f_* TM_p$  em  $T\tilde{M}_{f(p)}$  determinado pelo produto escalar  $\tilde{g}_{f(p)}$ . O subespaço  $N_p$  é chamado o espaço normal de  $M$  no ponto  $p$ . Se  $\tilde{\nabla}$  é a conexão Riemanniana de  $\tilde{M}$  podemos escrever, se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\tilde{\nabla}_X Y = f_*(\nabla_X Y) + \alpha(X, Y)$$

onde  $f_*(\nabla_X Y) \in f_* TM_p$  é o componente tangente e  $\alpha(X, Y) \in N_p$  é o componente normal. A aplicação  $\alpha$  é chamada a segunda forma fundamental da imersão.

PROPOSIÇÃO 2.2 - (a)  $\nabla$  assim definida é a conexão compatível com a métrica  $g$  de  $M$  e com torção nula; i.e., é a conexão Riemanniana de  $M$ .

(b)  $\alpha: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  é simétrica e bilinear sobre  $\mathfrak{X}(M)$ ; logo  $\alpha(X, Y)_p$  depende só de  $X_p$  e  $Y_p$ .

Demonstração: 1) Se  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  temos que

$$\begin{aligned} f_*(\nabla_X(Z+W)) + \alpha(X, Z+W) &= \tilde{\nabla}_X(Z+W) = \\ &= \tilde{\nabla}_X Z + \tilde{\nabla}_X W = f_*\nabla_X Z + \alpha(X, Z) + f_*(\nabla_X W) + \alpha(X, W). \end{aligned}$$

Dáí, agrupando as componentes tangentes, temos que

$$\nabla_X(Z+W) = \nabla_X Z + \nabla_X W,$$

pois  $f_*$  é linear; e agrupando as componentes normais te mos que

$$\alpha(X, Z+W) = \alpha(X, Z) + \alpha(X, W).$$

De maneira análoga verificamos as outras propriedades da conexão  $\nabla$  e obtemos também que  $\alpha$  é bilinear.

2) Como  $\tilde{\nabla}$  é compatível com a métrica  $\tilde{g}$  temos que

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= X\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, f_*Z) + \tilde{g}(f_*Y, \tilde{\nabla}_X Z) = \\ &= \tilde{g}(f_*\nabla_X Y + \alpha(X, Y), f_*Z) + \tilde{g}(f_*Y, f_*\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) = \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Logo  $\nabla$  é compatível com  $g$ .

3)  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$  implica que  $f_*\nabla_X Y + \alpha(X, Y) - f_*\nabla_Y X - \alpha(Y, X) = f_*[X, Y]$ , ou seja,  $\nabla$  tem torção zero e  $\alpha$  é simétrica. Como  $\alpha(X, Y)$  depende só de  $X_p$  e  $\alpha(Y, X)$  só de  $Y_p$  demonstramos a parte (b). Como existe uma única conexão compatível com a métrica e com torção

nula,  $\nabla$  é a conexão procurada. C.Q.D.

Um campo vetorial normal  $\xi$  é uma regra que a cada ponto  $p$  em  $M$  associa um vetor  $\xi_p$  em  $N_p \subset TM_f(p)$ . Denotemos por  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  o conjunto de todos os campos vetoriais normais diferenciáveis da imersão  $f$ . Então a segunda forma fundamental pode ser considerada como uma aplicação  $\alpha: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  simétrica e bilinear sobre  $\mathfrak{X}(M)$ .

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, se  $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tem sentido falar em  $\tilde{\nabla}_X \xi$ . Seja  $-A_\xi X$  a componente tangente e  $\nabla_X^\perp \xi$  a componente normal de  $\tilde{\nabla}_X \xi$ .

**PROPOSIÇÃO 2.3** - (a) A aplicação  $(X, \xi) \rightarrow A_\xi X$  é bilinear sobre  $\mathfrak{X}(M)$ , logo  $(A_\xi X)_X$  depende só de  $\xi_X$  e de  $X_X$ .

(b) Se  $X$  e  $Y \in TM_X$  e  $\xi \in TM_X^\perp$ , temos  $\tilde{g}(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(\alpha(X, Y), \xi)$ , logo  $A_\xi$  é uma aplicação linear e simétrica.

**Demonstração:** (a) Análoga a da proposição 2.2.

(b) Como  $\tilde{g}(Y, \xi) = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 &= X\tilde{g}(Y, \xi) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X \xi) \\ &= \tilde{g}(\alpha(X, Y), \xi) - \tilde{g}(Y, A_\xi X) \end{aligned} \quad \text{C.Q.D.}$$

Resumindo, temos as seguintes formulas

$$(2.1) \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

$$(2.2) \quad \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ . A primeira é a fórmula de Gauss e a segunda é a formula de Weingarten.

EXERCÍCIO 2.3 - Verifique que  $\nabla^\perp$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$1) \quad \nabla_{fX+Y}^\perp \xi = f \nabla_X^\perp \xi + \nabla_Y^\perp \xi$$

$$2) \quad \nabla_X^\perp (f\xi + \eta) = f \nabla_X^\perp \xi + (Xf)\xi + \nabla_X^\perp \eta \quad \text{onde } X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ \xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp \text{ e } f \in \mathfrak{F}(M).$$

Dizemos que  $\nabla^\perp$  é a conexão normal.

### $\mathbb{R}^n$ como variedade Riemanniana

No caso em que  $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$  as coordenadas retangulares normais formam um sistema de coordenadas global, e uma métrica Riemanniana  $\langle, \rangle$ , a usual, define-se como  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \delta_j^i$ . Qualquer campo vetorial pode ser expresso globalmente como  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , onde  $a_i \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ , e  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são as coordenadas retangulares. A conexão compatível com a métrica usual tem uma expressão sim

ples nessas coordenadas: se  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  temos que  $\tilde{\nabla}_X Y = \sum_{i=1}^n X(b_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n a_j \left( \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Os simbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  com relação às coordenadas retangulares são todos identicamente nulos.

Consideremos agora uma imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , isto é, uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $((x_1, x_2, \dots, x_n), U)$  um sistema de coordenadas de  $M$ . Podemos identificar o campo vetorial com a função com valores em  $\mathbb{R}^{n+1}$   $f_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} f = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ ; na realidade  $f_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \in T \mathbb{R}_{f(p)}^{n+1}$ , mas podemos identificar via deslocamento paralelo todos os espaços tangentes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $T \mathbb{R}_0^{n+1} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ . Como a conexão de  $\mathbb{R}^{n+1}$  é trivial, temos  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \tilde{\nabla}_{f_* \frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ . Logo a fórmula de Gauss pode ser escrita como

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + h_{ij} \xi, \end{aligned}$$

onde os  $\Gamma_{ij}^k$  são os simbolos de Christoffel da conexão de  $M$  e  $h_{ij} = \langle \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \xi \rangle$ , com  $\xi_x \in TM_x^\perp$ . Observe que



$(h_{ij})$  é uma matriz simétrica que representa a segunda forma fundamental. Similarmente, tem-se para a fórmula de Weingarten a seguinte expressão

$$(2.4) \quad \tilde{\nabla}_{\partial/\partial x_i} \xi = \frac{\partial}{\partial x_i} \xi = -A_{\xi} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n -h_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k} .$$

O determinante da matriz  $(h_{ij})$  não depende da escolha de vetor normal quando  $n$  é par, e é chamado a curvatura de Gauss-Kronecker  $K_n$  da hipersuperfície. Para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , ela coincide com a curvatura Gaussiana.

### A aplicação de Gauss

Consideremos agora uma imersão  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  em que  $M$  é uma variedade orientável de dimensão  $n$ . Podemos escolher então um campo vetorial diferenciável de vetores de norma 1  $\xi$  em  $\mathcal{X}(M)$ . Definimos a aplicação normal de Gauss  $\phi: M \rightarrow S^n$  de  $M$  na esfera unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pela regra  $\phi(x) = \xi_x$ .

Queremos agora calcular a derivada diferencial de  $\phi$  no ponto  $x$ . Observe primeiro que o isomorfismo linear natural (por deslocamento paralelo em  $\mathbb{R}^{n+1}$ )  $p_x$  de  $T\mathbb{R}^{n+1}_x$  em  $T\mathbb{R}^{n+1}_{\phi(x)}$  leva  $f_*TM_x$  em  $TS^n_{\phi(x)}$ ; em outras palavras  $f_*TM_x$  e  $TS^n_{\phi(x)}$  são paralelos.

PROPOSIÇÃO 2.4 - Via a identificação através de  $p_x$  temos que  $-(A\xi)_x$  é igual a jacobiana da aplicação de Gauss no ponto  $x, (\phi_x)_*$ .

Demonstração: Temos que  $(\phi_x)_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \tilde{\nabla}_{\partial/\partial x_i} \xi = -A\xi \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ , pela expressão da fórmula de Weingarten obtida acima, identificandó vetores paralelos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . C.Q.D.

A seguir daremos uma expressão da segunda forma fundamental em termos de coordenadas locais especiais. Faremos os cálculos para uma imersão numa variedade de dimensão arbitrária  $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$ . Sejam  $Y_1, \dots, Y_{n+p}$  uma base ortonormal de  $T\tilde{M}_{f(x)}^{n+p}$  tal que  $Y_1, \dots, Y_n$  sejam tangentes a  $M$ . Vamos assumir sem demonstrar aquí a existência de um sistema de coordenadas em torno de  $f(x)$  tal que  $\left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right) f(x) = Y_i$  e que  $\left( \tilde{\nabla}_{\partial/\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) f(x) = 0$ . Um sistema de coordenadas que satisfaz essas condições é um sistema de coordenadas normais (veja, por exemplo, [8], [9] e [10]). Localmente  $f$  é um mergulho dado por funções  $f_i = y_i \circ f, i = 1, \dots, n+p$ . Temos que  $f_* \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^{n+p} \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}$ , logo  $\tilde{\nabla}_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \left( \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} + \right.$

+  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j} (\tilde{v}_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k})$ . Pela escolha do sistema de coordenadas especiais temos no ponto  $f(x)$  que  $(\tilde{v}_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}) f(x) =$

Logo a componente normal é

$$(2.5) \quad \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}) f(x) \frac{\partial}{\partial y_k} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} (\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}) Y_k .$$

No caso de uma hipersuperfície temos que  $Y_{n+1} = \xi_x$  e

$(h_{ij})_x = (\frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial x_i \partial x_j})_x$ . Quando  $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $f_k = \langle Y_k, f \rangle$ ; dado um vetor unitário fixo  $v \in \mathbb{R}^{n+p}$ , a função  $h_v(x) = \langle v, f(x) \rangle$  é chamada a função altura na direção  $v$ . A matriz Hessiana de segundas derivadas de  $h_v$  é  $\frac{\partial^2 h_v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \langle v, f \rangle =$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v, \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle = \langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \rangle$$
. Em resumo temos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.5 - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é uma imersão isométrica e  $v$  é um vetor unitário em  $TM_x^n$  então a matriz da segunda forma fundamental na direção  $v$  é dada pela matriz Hessiana da função altura  $h_v$ , i.e.

$$\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \cdot v = \frac{\partial^2 h_v}{\partial x_i \partial x_j} .$$

COROLÁRIO 2.6 - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão isométrica de uma variedade orientável  $M$ , então a matriz Jacobiana da aplicação de Gauss  $\phi$  em  $x$  é igual à  $\begin{pmatrix} -\partial^2 h_v \\ \partial x_i & \partial x_j \end{pmatrix}$ , onde  $h_v$  é a função altura na direção  $v = \xi_x = \phi(x)$ .

Demonstração: O corolário segue-se da proposição 2.4.

EXERCÍCIO 2.4 - Demonstre que se a aplicação de Gauss é um difeomorfismo então  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é um mergulho.

EXERCÍCIO 2.5 - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tem a segunda forma fundamental positiva definida em  $x$ , então  $f$  é localmente convexa em  $x$ , i.e., existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \cap \exp_x TM_x = \{x\}$ .

#### REFERENCIAS

Nesta seção estudamos as conexões valendo-nos da derivada covariante. Pode-se estudá-las também usando formas diferenciais; este ponto de vista é explorado em

[7] DO CARMO, M. - Método do Referencial Móvel, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

Outra maneira mais geral de estudar as conexões é o que é feito em espaços fibrados principais. Nestas notas temos evitado este método porque ele requer maiores conhecimentos do leitor (por exemplo, de grupos de Lie). Quem estiver interessado em olhar este método pode consultar.

[8] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K. - Foundations of Differential Geometry, vol. I, Interscience Publishers, New York, 1963.

[9] BISHOP, R. e CRITTENDEN, R. - Geometry of Manifolds, Academic Press, New York, 1974.

Usamos certos fatos de geometria Riemanniana sem demonstração, como a existência de coordenadas normais e da aplicação exponencial. O leitor poderá consultar o capítulo 3 de [8], o capítulo 6 de [9], e a seção 1.3 de

[10] DO CARMO, M. - Notas de Geometria Riemanniana, Monografias de Matemática, Nº 8, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.



### 3. O TEOREMA DE HADAMARD

Nesta seção demonstraremos a convexidade de hipersuperfícies cujas curvaturas de Gauss-Kronecker são positivas.

Primeiro precisamos demonstrar a seguinte proposição, que também será útil em outras situações posteriores.

PROPOSIÇÃO 3.1 - Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta e  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  uma imersão isométrica. Existe um ponto  $x_0 \in M$  e um vetor  $v \in TM_{f(x_0)}^\perp$  tal que  $\langle \alpha(X, X), v \rangle < 0 \quad \forall X \in TM_{x_0}, X \neq 0$ . Em particular  $\alpha(X, X) \neq 0 \quad \forall X \in TM_{x_0}, X \neq 0$ .

Demonstração: Considere a função  $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ ,  $\varphi(x) =$

$$= \langle f(x), f(x) \rangle. \text{ Ela tem um máximo } x_0 \in M.$$

Logo  $X\varphi = 0 \quad \forall X \in TM_{x_0}$ ; daí temos que  $0 = X\langle f(x), f(x) \rangle = 2\langle (Xf)_{x_0}, f(x_0) \rangle$ . Observamos que da mesma maneira que para  $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Xf_i = (f_i)_*X$ , obtemos que  $Xf$  é igual ao vetor  $f_*(X)$ . Consequentemente temos que o vetor  $v = f(x_0)$  é normal a  $M$  em  $x_0$ . Como  $x_0$  é um máximo de  $\varphi$ ,  $XX\varphi \leq 0 \quad \forall X \in TM_{x_0}$ , ou  $0 \geq 2X\langle X, f \rangle = 2\langle \nabla_X X, f \rangle + 2\langle X, X \rangle$ .

Como  $\langle X, X \rangle > 0$  se  $X \neq 0$ , obtemos que  $\langle \tilde{\nu}_X X, f(x_0) \rangle = \langle \alpha(X, X), \nu \rangle < 0$ . C.Q.D.

Dada uma imersão  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  de uma hipersuperfície dizemos que ela é convexa em  $x$  se existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f(U)$  esteja contido num dos semiplanos fechados determinados por  $f_* TM_x$ . A imersão é estritamente convexa em  $x$  se  $f(x)$  é o único ponto de  $f(U) \cap f_* TM_x$ .

Dizemos que uma hipersuperfície mergulhada  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é convexa, se ela é o bordo de um conjunto convexo  $B$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , (no sentido de que  $p, q \in B \Rightarrow$  o segmento de reta  $\overline{pq} \subset B$ ).

**TEOREMA 3.2** - Seja  $M^n$  compacta e conexa e  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica.

As seguintes condições são equivalentes:

- 1) A segunda forma fundamental é definida em todo ponto (i.e.,  $\alpha(X, X) \neq 0$  para todo  $X \neq 0$ ).
- 2)  $M$  é orientável e a aplicação de Gauss é um difeomorfismo.
- 3) A curvatura de Gauss-Kronecker é sempre diferente de zero.

E qualquer uma destas condições implica que a



imersão é convexa.

Demonstração: (1)  $\Rightarrow$  (2) Em cada ponto  $x$  escolha um vetor normal unitário  $\xi_x$  tal que  $\alpha = h\xi$  onde  $h$  é negativa definida. Como  $\alpha$  é sempre definida temos que  $\xi$  existe e é contínua, logo  $M$  é orientável. Consideremos a aplicação de Gauss  $\phi: M \rightarrow S^n$ . Sendo  $\alpha$  não degenerada temos que a aplicação  $A_\xi$  é não singular e daí, pela proposição 2.4 temos que  $(\phi_x)_*$  é injetiva e  $\phi$  é localmente um difeomorfismo. Como  $M$  é compacta,  $\phi$  é um espaço de recobrimento. Mas a esfera é simplesmente conexa, logo é seu próprio recobrimento universal, daí segue-se que  $\phi$  é um difeomorfismo. Temos usado e usaremos certos fatos de topologia algébrica que não demonstraremos. O leitor poderá consultar, por exemplo [11].

(2)  $\Rightarrow$  (3) O fato de que  $(\phi_x)_*$  é não singular implica, pela proposição 2.4, que  $A_{\xi_x}$  é não singular, logo a curvatura de Gauss-Kronecker  $K_n = \det A_\xi \neq 0$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Como  $K_n \neq 0$ ,  $\alpha$  é não degenerada, ou seja 
$$h_{ij} = \left\langle \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \xi \right\rangle$$
 é uma matrix não degenerada para todo  $x \in M$  e varia continuamente em  $M$ . Sendo  $M$  compacta, pela proposição 3.1 existe  $x_0$  tal que  $\alpha$  é definida em  $x_0$  e  $h$  é negativa definida. Mas em  $x_0$

existe um sistema de coordenadas locais tal que  $h_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Logo se  $h_{ii}(x_0) < 0$ ,  $h_{ii} < 0$  numa vizinhança de  $x_0$ . Daí temos que o conjunto onde  $h$  é negativa é aberto. Similarmente o conjunto onde  $h$  é positiva definida é aberto. Como  $x_0$  está no primeiro conjunto e  $M$  é conexa, o segundo conjunto é vazio.

Vamos agora demonstrar que a imersão é convexa.

Como a aplicação de Gauss é um difeomorfismo, pelo exercício 2.4 temos que  $f$  é um mergulho de uma esfera topológica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pelo teorema de separação de Jordan-Brower,  $f(M)$  separa  $\mathbb{R}^{n+1}$  em dois conjuntos conexos por arcos,  $L$  e  $I$ , tais que fronteira  $(L) =$   
 $=$  fronteira  $(I) = f(M)$ .

Seja  $L$  a parte limitada. Queremos mostrar que  $L$  é um conjunto convexo.

(a) Primeiro faremos uma análise local: Podemos assumir que  $f(x) = 0$  e que  $\{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}$  são coordenadas retangulares tais que  $\frac{\partial}{\partial y_{n+1}} = v \in TM_x^+$ . Existem coordenadas locais  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , em uma vizinhança  $U$  de  $x$ , tais que  $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f_{n+1})$ , com  $x_i(U) = (-\epsilon, \epsilon)$ . Podemos assumir que  $h = \langle \alpha, v \rangle$  é negativa definida. Pela proposição 2.5 temos que a matrix da  $h$

é dada pela matriz Hessiana  $(\frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial x_i \partial x_j})$ . Logo existem  $\epsilon_1$  e  $\delta$  tais que  $-\delta/2 < f_{n+1}(x) < 0$  se  $x \neq 0$  e  $|x_i| < \epsilon_1$ . Podemos assumir, como  $f$  é um mergulho, que  $f(M-U)$  não intersecta  $V = [-\epsilon_1, \epsilon_1] \times \dots \times [-\epsilon_1, \epsilon_1] \times [-\delta, \delta]$ . Logo  $V$  é dividido por  $f(U)$  em duas componentes conexas

$$V_1 = \{z \in V ; z_{n+1} > f_{n+1}(z_1, \dots, z_n)\}$$

e

$$V_2 = \{z \in V ; z_{n+1} < f_{n+1}(z_1, \dots, z_n)\}$$

Temos que um deles está contido em  $L$  e o outro em  $I$  pois se os dois estivessem contidos em  $L$  ou em  $I$ ,  $f(x)$  estaria contido na fronteira de um mas não na do outro, contradizendo o teorema de Jordan-Brouwer. Afirmando que  $V_2 \subset L$  (veja a figura 3.1)

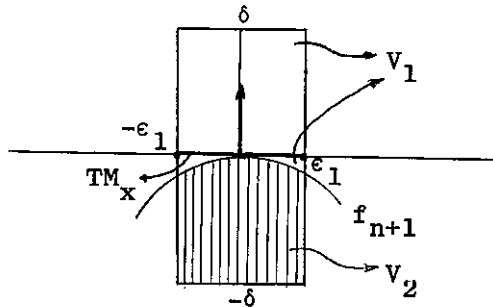


figura 3.1

Seja  $\xi \in \mathbb{X}(M)^\perp$  tal que  $\xi_x = v$ . Se  $V_1 \subset L$  teriamos pontos  $z \in V_1$  tais que

$$\langle z, v \rangle > \langle f(x), v \rangle = 0.$$

Mas como  $L$  é limitada existe um ponto  $z_1$  tal que  $z_1$  é um máximo para a função altura  $h_v(w) = \langle w, v \rangle$  no fecho de  $L$ ; temos que  $z_1$  pertence a fronteira de  $L$ ,  $f(M)$ , logo existe  $x_1$  tal que  $f(x_1) = z_1$ . Como  $x_1$  é um máximo em  $\bar{L}$ ,  $x_1$  é um máximo em  $M$  e  $(Xh_v)_{x_1} = X\langle f, v \rangle : \langle X, v \rangle_{x_1} = 0$ , logo  $v \in TM_{x_1}^\perp$ . Do fato de que  $h_v(f(x_1)) = h_v(z_1) > 0$  concluímos que  $x_1 \neq x$ . Temos também que existe um ponto  $x_2 \in U$  tal que  $h_v(f(x_2)) < h_v(f(x)) = 0$  logo o mínimo de  $h_v : M \rightarrow \mathbb{R}$  é atingido em um ponto  $x_2$  diferente de  $x_1$  e  $x$ . Daí segue-se que  $\phi(x) = v$ ,  $\phi(x_1) = \pm v$ ,  $\phi(x_2) = \pm v$  o que contradiz o fato de que a aplicação de Gauss é biunívoca. Em resumo temos que

$$f_* TM_x \cap f(M) \cap V = \{x\} \quad \text{e} \quad f_* TM_x \cap L \cap V = \emptyset.$$

(b) Vamos agora obter a convexidade global usando a convexidade local.

Observamos que esta última parte vale sem ter que assumir a diferenciabilidade da imersão; nesse caso  $f_* TM_x$  seria substituído por um hiperplano afim com as propriedades obtidas em (a).

Sendo  $L$  conexo e aberto,  $L$  é conexo por caminhos poligonais. Dados pontos  $c, d \in L$  existem pontos

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^{n+1}$  tais que os  $n+1$  segmentos  $\overline{cc_1}$ ,  $\overline{c_1c_2}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{c_{n-1}c_n}$ ,  $\overline{c_nd}$  estão todos contidos em  $L$ . Se demonstrarmos que podemos reduzir os números de segmentos a  $n$ , podemos concluir nosso resultado por indução. O segmento  $\overline{c_1c_2}$  está descrito por  $\{d(t) = tc_2 + (1-t)c_1 : t \in [0,1]\}$ . Queremos demonstrar que  $\overline{cc_2} \subset L$ . Senão, seja

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] , \overline{cd(t)} \subset L\};$$

este valor existe pois  $\overline{cd(0)} = cc_1 \subset L$ .

Se  $t_0 < 1$  então teremos que  $\overline{cd(t_0)} \cap f(M) \neq \emptyset$  pois  $t_0$  é o sup e  $L$  é aberto. O segmento  $\overline{cd(t_0)}$  é igual ao conjunto  $\{e(t) = td(t_0) + (1-t)c : t \in [0,1]\}$ . Seja  $t_1$  o ínfimo dos  $t \in [0,1]$  tais que  $e(t) \in f(M)$ . Como  $\overline{cd(t_0)} \cap f(M) \neq \emptyset$ , o ínfimo existe e é maior do que zero. O ponto  $e(t_1) \in f(M)$  pois  $f(M)$  é fechado. Agora,  $\overline{cd(t_0)} \cap I = \emptyset$  pois  $\overline{cd(t_0)} \subset \bar{L}$  e  $\bar{L} \cap I = \emptyset$ . Logo temos que  $\overline{cd(t_0)}$  é tangente a  $M$  no ponto  $e(t_1)$ , pois, qualquer linha passando por  $e(t_1) \in f(M)$  e não tangente, intersectaria  $I$ . Mas, então teríamos pontos  $e(t)$  em  $f_*TM_x$ ,  $t < t_1$ , arbitrariamente próximos de  $e(t_1) = f(x)$ , mas dentro de  $L$ , contrariando as conclusões de convexidade local obtidas em (a). C.Q.D.

REFERENCIAS

Nesta seção introduzimos e usamos certos conceitos topológicos sem maiores esclarecimentos, como orientabilidade, espaços de recobrimentos, variedades simplesmente conexas; também usamos o teorema de separação de Jordan-Brouwer. O leitor pode consultar as seguintes referências:

- [11] GREENBERG, M.J. - Lectures on Algebraic Topology, W.A.Benjamin, New York, 1967.
- [12] SPANIER, E. - Algebraic Topology, Mc Graw-Hill, New York, 1966.
- [13] CARVALHO, JOÃO BOSCO PITOMBEIRA F. DE - Topologia Algebrica, IMPA (8º Colóquio Brasileiro de Matemática), Rio de Janeiro, 1971.
- [14] LYRA, CARLOS B. DE - Grupo Fundamental e Revestimentos, IMPA (7º Colóquio Brasileiro de Matemática), Rio de Janeiro, 1969.

O teorema de Hadamard exige que a curvatura de Gauss-Kronecker  $K_n$  seja sempre positiva (ou sempre negativa). Chern e Lashof em [15] deram um exemplo de uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que não é convexa mas tem  $K_n \geq 0$

em todo ponto. Mas, nesse mesmo artigo, eles demonstraram que para uma superfície compacta em  $\mathbb{R}^3$ ,  $K_2 \geq 0$  implica na convexidade da imersão, (neste caso,  $K_2$  é igual a curvatura Gaussiana). Este fato será demonstrado na seção 6 de uma forma mais geral. Outra maneira de generalizar este resultado é a de considerar superfícies completas, não necessariamente compactas. Pode-se demonstrar que se uma superfície é completa mas não compacta, e tem curvatura Gaussiana positiva em todo ponto, então ela é homeomorfa ao plano  $\mathbb{R}^2$  e é o bordo de um corpo convexo em  $\mathbb{R}^3$ . Uma demonstração deste resultado acha-se no capítulo 8 de [16]. Na verdade, um resultado de Sacksteder em [17] generaliza todos estes resultados; ele demonstra que uma hipersuperfície completa  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas seccionais (a ser definida na próxima seção) não-negativas é convexa se pelo menos uma dessas curvaturas seccionais (que generalizam a curvatura Gaussiana) é positiva.

[15] CHERN, S.S. e LASHOF, R. - On the total curvature of immersed manifolds, Amer. J. Math. 79(1957), 306-318.

[16] STOKER, J. - Differential Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1969.

- [17] SACKSTEDER, R. - On hypersurfaces with no negative sectional curvatures, Amer. J. Math. 89(1960), 609-630.

Uma propriedade interessante de superfícies compactas convexas em  $\mathbb{R}^3$  é a delas serem únicas ou rígidas. Mais precisamente, dizemos que uma imersão isométrica  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  é rígida se dada outra imersão isométrica  $g: M \rightarrow \mathbb{R}^k$  existe uma isometria  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $g = \alpha \circ f$ . Uma demonstração deste fato acha-se no capítulo 10 de [16]. O teorema V de Sacksteder [18] generaliza este resultado para o caso de hipersuperfícies convexas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com a condição de que o posto da segunda forma fundamental seja maior ou igual a três em algum ponto; esta condição é satisfeita pelas hipersuperfícies do teorema de Hadamard, pois o posto nesse caso é sempre  $n$ . Observamos que neste teorema de Sacksteder as hipersuperfícies só tem que ser completas. Ele obtem também este resultado de rigidez para superfícies completas convexas com 
$$\int_M K = 2\pi.$$

- [18] SACKSTEDER, R. - The rigidity of hypersurfaces, J.Math. Mech. 11(1962), 929-939.

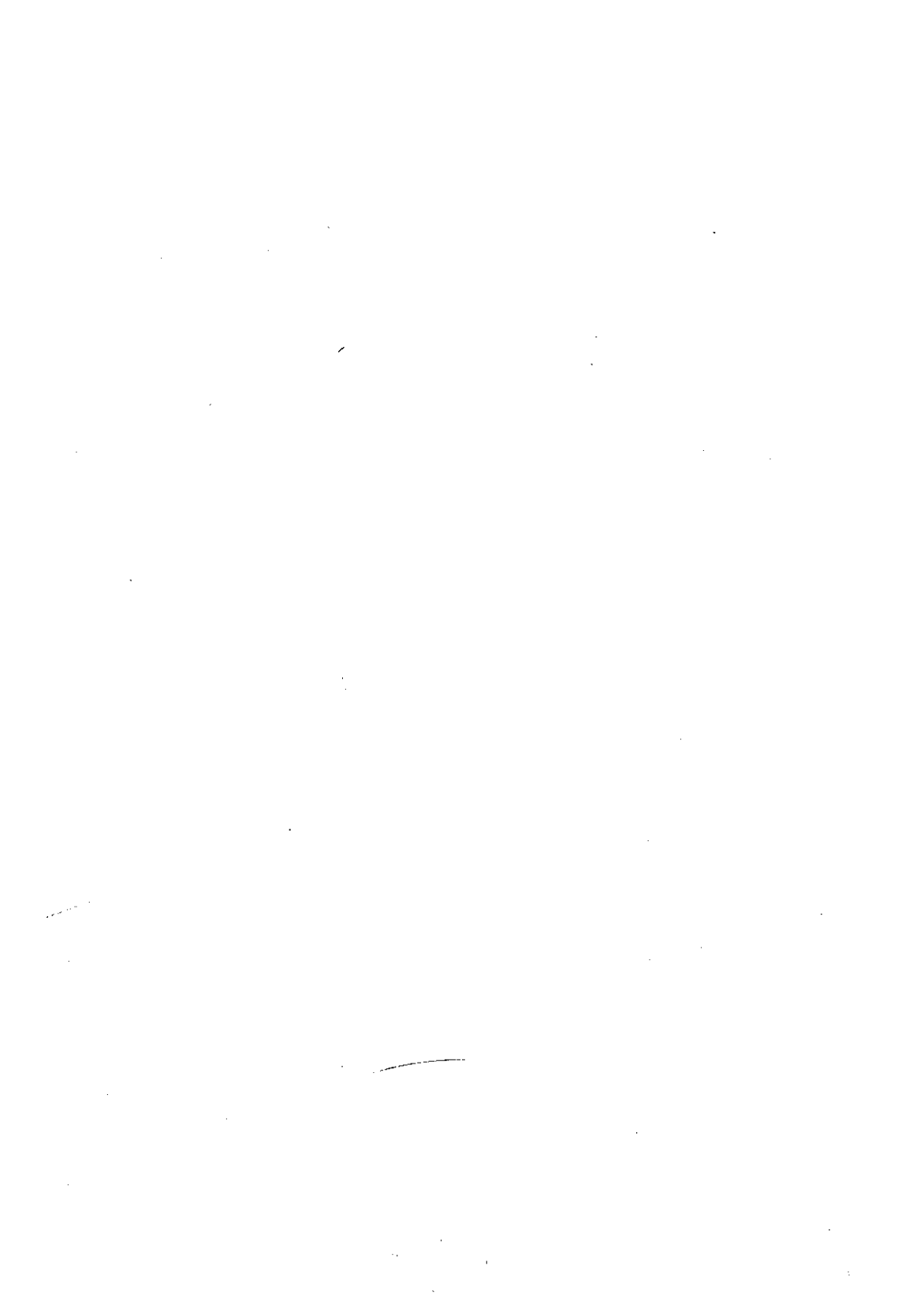
Um fato interessante do teorema de Hadamard é que a curvatura positiva implica que imersão é na verdade



um mergulho. Observamos que este fato não é verdade para curvas no plano; uma curva fechada no plano com curvatura  $k \neq 0$  não é necessariamente convexa. Neste caso, precisamos exigir que não tenha pontos duplos para garantir a convexidade.

Dadas duas superfícies convexas compactas em  $\mathbb{R}^3$ , pode-se colocar uma dentro da outra? Esta pergunta interessante e geométrica tem a seguinte resposta: Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies compactas com segundas formas fundamentais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tal que  $K_1(x) > K_2(x) > 0$  e  $\alpha_1(v,v) \geq \alpha_2(v,v)$ ,  $\forall v \in TM_x$ , e todo  $x \in M$ . Se elas são tangentes num ponto então  $M_1$  esta dentro de  $M_2$  (i.e.,  $M_1$  esta contido no corpo convexo limitado por  $M_2$ ). Sobre este assunto veja

- [19] RAUCH, JEFFREY - An inclusion theorem for ovaloids  
with comparable second fundamental forms,  
J. Differential Geometry, 9(1974), 501-505.



#### 4. IMERSÕES COM CURVATURAS SECCIONAIS NÃO POSITIVAS

Nesta seção introduzimos os conceitos de tensor curvatura e curvatura seccional de uma variedade Riemanniana. Depois damos condições necessárias para a existência de imersões de variedades compactas com curvaturas seccionais não positivas em  $R^{n+p}$ . No fim da seção demonstramos algumas desigualdades entre a nulidade e a nulidade relativa de uma imersão.

Dada uma conexão  $\nabla$  numa variedade diferenciável, consideramos a aplicação  $R(X,Y): \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida como

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z ,$$

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Afirmamos que a aplicação  $(X,Y,Z) \rightarrow R(X,Y)Z$  é 3-linear sobre  $\mathfrak{X}(M)$ . É fácil verificar que é aditiva nas tres variáveis. Também temos que

$$\begin{aligned} R(X,Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X,Y]} fZ = \\ &= \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Z + f\nabla_X Z) - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (XYf)Z + Yf\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z - (YXf)Z - Xf\nabla_Y Z - (Xf)\nabla_X Z - \\ &\quad - f\nabla_Y \nabla_X Z - ([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z = \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z = \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Analogamente podemos verificar que

$$R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z = R(X,fY)Z$$

Consequentemente, temos uma aplicação

$R_x: TM_x \times TM_x \rightarrow \text{Hom}(TM_x, TM_x)$  para cada ponto  $x$  de  $M$ .  
 $R_x$  é um campo tensorial do tipo  $(1,3)$ . Ele é chamado o tensor curvatura da conexão.

Seja  $(M, g, \nabla, R)$  uma variedade Riemanniana.  
Dado  $x \in M$  e um plano  $P$  em  $TM_x$  gerado por vetores ortonormais  $X$  e  $Y$ , definimos a curvatura seccional de  $P$  como

$$K_P = g(R(X,Y)Y, X).$$

EXERCÍCIO 4.1 - Demonstre que  $K_P$  não depende da escolha dos vetores  $X$  e  $Y$  que geram o plano  $P$ .

Consideremos agora uma imersão  $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$  entre variedades Riemannianas com tensores curvaturas  $R$  e  $\tilde{R}$  respectivamente. Sejam  $X, Y, Z$  campos vetoriais tangentes a  $M$ . Vamos deduzir uma fórmula relacionando os tensores  $R$  e  $\tilde{R}$ . Como o argumento é local, consideremos  $p$  campos vetoriais locais ortonormais  $\xi_1, \dots, \xi_p$  que em cada ponto geram o espaço normal da imersão  $f$ . A segunda forma fundamental terá a expressão  $\alpha(X, Y) = \sum_{i=1}^p h_i(X, Y)\xi_i$ , onde os  $h_i$  são funções bilineares simétricas com valores reais. Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ; temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \sum_{i=1}^p h_i(Y, Z)\xi_i) = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \sum_{i=1}^p h_i(\nabla_Y Z, X)\xi_i + \sum_{i=1}^p X(h_i(Y, Z))\xi_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^p h_i(Y, Z)(\nabla_X^\perp \xi_i - A_{\xi_i} X) \end{aligned}$$

Sua componente tangente é

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \sum_{i=1}^p h_i(Y, Z)A_{\xi_i} X$$

Analogamente a componente tangente de  $\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \sum_{i=1}^p h_i(X, Z)A_{\xi_i} Y$ . Temos também que

$$\tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z + \sum_{i=1}^p h_i([X, Y], Z)\xi_i.$$

Logo a componente tangente de  $\tilde{R}(X,Y)Z$  é igual a

$$R(X,Y)Z + \sum_{i=1}^p (h_i(X,Z)A_{\xi_i} Y - h_i(Y,Z)A_{\xi_i} X)$$

Daí obtemos que se  $W$  é tangente a  $M$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= \tilde{g}(R(X,Y)Z,W) + \tilde{g}\left(\sum_{i=1}^p h_i(X,Z)A_{\xi_i} Y, W\right) - \tilde{g}\left(\sum_{i=1}^p h_i(Y,Z)A_{\xi_i} X, W\right) = \\ &= \tilde{g}(R(X,Y)Z,W) + \sum_{i=1}^p h_i(X,Z)\tilde{g}(A_{\xi_i} Y, W) - \sum_{i=1}^p h_i(Y,Z)\tilde{g}(A_{\xi_i} X, W) = \\ &= \tilde{g}(R(X,Y)Z,W) + \tilde{g}(\alpha(X,Z), \alpha(Y,W)) - \tilde{g}(\alpha(Y,Z), \alpha(X,W)). \end{aligned}$$

A equação (4.2) é chamada de equação de Gauss.

Como consequência, obtemos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 4.1 - Se  $P \subset TM_X$  é um plano gerado pelos vetores ortonormais  $X$  e  $Y$  temos que

$$(4.3) \quad K_P = \tilde{K}_P + \tilde{g}(\alpha(Y,Y), \alpha(X,X)) - \tilde{g}(\alpha(X,Y), \alpha(Y,X)).$$

No caso em que  $\tilde{M} = \mathbf{R}^{n+p}$  temos que  $\tilde{R}(X,Y) \equiv 0$  logo,

$$R(X,Y)Z = \sum_{i=1}^p \{h_i(Y,Z)A_{\xi_i} X - h_i(X,Z)A_{\xi_i} Y\}$$

Se  $p = 1$ ,  $R(X,Y)Z = h(Y,Z)AX - h(X,Z)AY = \langle AY, Z \rangle AX - \langle AX, Z \rangle AY.$

EXERCÍCIO 4.2 - Seja  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade com curvaturas seccionais identicamente nulas. Mostre que a aplicação de Gauss tem posto  $\leq 1$  em todo ponto.

No estudo das superfícies em  $\mathbb{R}^3$  se conclui que não existe uma superfície compacta com curvatura não positiva em todo ponto. Tompkins [24] demonstrou que não existe imersão  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  de uma variedade compacta com curvaturas seccionais todas nulas se  $p < n$ . Demonstraremos um resultado de Chern e Kuiper que generaliza o resultado de Tompkins para curvaturas seccionais  $K_p \leq 0$ .

TEOREMA 4.2 (Chern-Kuiper) - Seja  $M^n$  uma variedade compacta tal que em todo ponto  $x \in M$  existe um subespaço  $B_x$  de  $TM_x$  de dimensão  $m$ , com curvaturas seccionais  $K_p \leq 0$ . Se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é uma imersão isométrica então  $p \geq m$ .

Demonstração: Pela Proposição 3.1, existe um ponto  $x_0$  tal que  $\alpha(X,X) \neq 0 \forall X \in TM_{x_0}, X \neq 0$ . Para  $X$  e  $Y \in B_{x_0}$  ortonormais temos que

$$\langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle - \langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y) \rangle \leq 0$$

Se  $Z$  e  $W$  formam uma base arbitrária do pla-

no  $P$  temos que

$$Z' = \frac{Z}{\langle Z, Z \rangle^{1/2}} \quad \text{e} \quad W' = \frac{\langle Z, Z \rangle W - \langle Z, W \rangle Z}{\langle Z, Z \rangle^{1/2} [\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z, W \rangle^2]^{1/2}}$$

formam uma base ortonormal de  $P$  e

$$(4.4) \quad K_p = \langle \alpha(Z', Z'), \alpha(W', W') \rangle - \langle \alpha(Z', W'), \alpha(Z', W') \rangle \\ = \frac{\langle \alpha(Z, Z), \alpha(W, W) \rangle - \langle \alpha(Z, W), \alpha(Z, W) \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z, W \rangle^2}$$

Como  $\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle - \langle Z, W \rangle^2 > 0$ , temos, para todo  $Z, W$  em  $B_{x_0}$ ,

$$\langle \alpha(Z, Z), \alpha(W, W) \rangle - \langle \alpha(Z, W), \alpha(Z, W) \rangle \leq 0.$$

Logo o teorema segue do seguinte lema algébrico:

LEMA 4.3 (Otsuki) - Se  $\alpha_{x_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma forma bilinear simétrica tal que

$$\langle \alpha(v, v), \alpha(w, w) \rangle - \langle \alpha(v, w), \alpha(v, w) \rangle \leq 0$$

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \alpha(v, v) \neq 0 \quad \forall v \neq 0, v \in \mathbb{R}^n,$$

então  $p \geq n$ .

Demonstração: Consideremos uma aplicação  $\varphi: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  de finida por

$$\varphi(v) = \langle \alpha(i(v), i(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle,$$



onde  $i: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a inclusão. Sendo  $S^{n-1}$  compacta  $\varphi$  assume um mínimo, isto é, existe  $v \in S^{n-1}$  tal que  $w\varphi = 0$  e  $ww\varphi \geq 0$ ,  $\forall w \in TS_V^{n-1}$ . Temos que:

$$\begin{aligned} w\varphi &= w\langle \alpha(i(v), i(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle = \\ &= 2\langle w\alpha(i(v), i(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle = \\ &= 2\langle 2\alpha(w(i(v)), i(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle \end{aligned}$$

Mas  $wi = i_*w = w$ , logo

$$(4.5) \quad w\varphi = 4\langle \alpha(w, i(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle = 0$$

e

$$\begin{aligned} ww\varphi &= 4\langle w\alpha(w, i(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle + \\ &\quad + 4\langle \alpha(w, i(v)), w\alpha(i(v), i(v)) \rangle = \\ &= 4\langle \alpha(\tilde{\nabla}_w w, i(v)) + \alpha(w, wi(v)), \alpha(i(v), i(v)) \rangle + \\ &\quad + 4\langle \alpha(w, i(v)), 2\alpha(wi(v), i(v)) \rangle. \end{aligned}$$

Devemos encontrar um  $w_0$  perpendicular a  $v$  tal que  $\alpha(v, w_0) = 0$ . Para isto vamos considerar  $L: TS_V^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação linear definida por  $L(w) = \alpha(v, w)$ ; pela equação (4.5) temos  $\langle L(w), \alpha(v, v) \rangle = 0$ , logo a imagem de  $L$  está contida num subespaço de dimensão  $p-1$ . Então, se  $p < n$ , existe  $w_0 \neq 0$ ,  $w_0 \perp v$  tal que  $L(w_0) = 0$ , isto é,  $\alpha(v, w_0) = 0$ .

Escolhemos um campo vetorial unitário  $w$  definido ao redor de  $v$  tal que  $w_v = w_0$  e tal que a curva integral de  $w$  passando por  $v$  é uma geodésica da esfera. Nesse caso,  $\tilde{\nabla}'_w w = \nabla'_w w + \alpha'(w, w) = -v$  em  $v$ , onde  $\tilde{\nabla}'$ ,  $\nabla'$  e  $\alpha'$  referem-se as conexões e segunda forma fundamental da inclusão da esfera  $S^{n-1}$  em  $R^n$ ; então, temos

$$\begin{aligned} w_0 w_0 \varphi &= 4 \langle -\alpha(v, v) + \alpha(w_0, w_0), \alpha(v, v) \rangle + \\ &+ 8 \langle \alpha(v, w_0), \alpha(v, w_0) \rangle = \\ &= 4 [ -\langle \alpha(v, v), \alpha(v, v) \rangle + \langle \alpha(w_0, w_0), \alpha(v, v) \rangle ] \end{aligned}$$

pois  $\alpha(v, w_0) = L(w_0) = 0$ .

Logo,  $w_0 w_0 \varphi = 4 [ K_{(v, w)} - \|\alpha(v, v)\|^2 ] < 0$ , onde  $K_{(v, w)}$  é a curvatura seccional do plano gerado por  $v$  e  $w$ , contra dizendo o fato de que  $v$  é um mínimo de  $\varphi$ . C.Q.D.

### Índices de nulidade e de nulidade relativa

Dada uma imersão isométrica  $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$  definimos em cada ponto  $x$  de  $M$  dois subespaços de  $TM_x$ ,  $A_x = \{X \in TM_x : R(X, Y) = \tilde{R}(X, Y) \mid TM_x, \text{ para todo } Y \in TM_x\}$ , e  $B_x = \{X \in TM_x : \alpha(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \text{ em } TM_x\}$ . Definimos o índice de nulidade de  $f$   $\eta(x)$  como a dimensão

de  $A_x$ , e o índice de nulidade relativa  $\nu(x)$  como a dimensão de  $B_x$ . Usando a equação de Gauss, (4.2), vemos que  $B_x \subset A_x$ ; logo  $\nu(x) \leq \mu(x)$ . Usando o lema anterior, vamos demonstrar a seguinte proposição que será aplicada em outra seção.

PROPOSIÇÃO 4.4 - Para qualquer imersão isométrica

$$f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p} \quad \underline{\text{temos}}$$

$$(4.6) \quad \nu(x) \leq \mu(x) \leq \nu(x) + p \quad \text{para todo } x \text{ em } M.$$

Demonstração: Seja  $S$  o subespaço de  $A_x$  ortogonal a  $B_x$ .

O que temos que demonstrar é que a dimensão de  $S$  é maior ou igual a  $p$ . Basta demonstrar que  $\alpha_x | S \times S$  satisfaz as hipóteses do lema 4.3. Observamos primeiro que para todo  $X$  em  $A_x$ , e qualquer  $Y$  em  $TM_x$ , temos, pela equação de Gauss, que  $g(\alpha(X,X), \alpha(Y,Y)) - \tilde{g}(\alpha(X,Y), \alpha(X,Y)) = 0$  pois  $g(R(X,Y)Y, X) = \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Y, X)$ . Por outro lado, afirmamos que  $\alpha(X,X) \neq 0$  se  $X \in S$ ,  $X \neq 0$ . De fato, se tivéssemos  $\alpha(X,X) = 0$  então teríamos que  $-g(\alpha(X,Y), \alpha(X,Y)) = 0$  ou seja  $\alpha(X,Y) = 0$  para todo  $Y \in TM_x$ ; mas então  $X \in B_x$ , contradizendo o fato de que  $X \in S$  e  $X \neq 0$ . C.Q.D.

Observação: Na realidade o lema 4.3 garante a existência de um  $v \in S$  tal que a aplicação  $L: S \rightarrow TM_x^{\perp}$

que manda  $w$  em  $L(w) = \alpha(v, w)$  seja injetiva.

EXERCÍCIO 4.3 - Considere uma variedade Riemanniana  $\tilde{M}$  de três dimensões e um plano de duas dimensões  $H \subset T\tilde{M}_p$ . Seja  $V$  uma vizinhança de zero em  $H$  onde a restrição da exponencial em  $p$ ,  $\exp_p$  é um difeomorfismo. Neste caso  $U = \exp_p(V)$  é um pedaço de superfície em  $\tilde{M}$ . Demonstre que a curvatura Gaussiana de  $U$  em  $p$ ,  $(K_U)_p$ , é zero, e que  $(K_U)_q \leq (\tilde{K}_{\tilde{M}})_q$  para todo  $q$  em  $U$ , onde  $(\tilde{K}_{\tilde{M}})_q$  é a curvatura seccional de  $\tilde{M}$  com relação ao plano tangente de  $U$  em  $q$ .

EXERCÍCIO 4.4 - Seja  $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica tal que  $K_\sigma > \tilde{K}_\sigma$  para todo plano  $\sigma$  em  $TM$ . Demonstre que  $f$  é estritamente localmente convexa (isto é, que para todo ponto  $p \in M$  existem vizinhanças  $W$  de  $p$  em  $M$  e  $V$  de zero em  $TM_p$  tal que  $f(W) \cap \exp_p(V) = \{f(p)\}$ , onde  $\exp_p$  é a aplicação exponencial de  $\tilde{M}$  em  $p$ ; em outras palavras, queremos demonstrar que  $M$  está localmente de um lado do "plano tangente" a  $p$ .)

EXERCÍCIO 4.5 - Seja  $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$  uma imersão isométrica tal que  $K_\sigma > \tilde{K}_\sigma$  para todo plano  $\sigma$  em  $TM_p$ . Demonstre que nenhuma curva de  $M$  pode ser uma

geodésica de  $\tilde{M}$ .

EXERCÍCIO 4.6 - Uma curva  $c(t)$  numa subvariedade com segunda fórmula fundamental diz-se assintótica se  $\alpha(c'(t), c'(t)) = 0$  para todo  $t$ . Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  duas hipersuperfícies de  $\tilde{M}^{n+1}$  tal que  $(TM_1)_{c(t)} = (TM_2)_{c(t)}$  ao longo de uma curva assintótica  $c(t)$ . Demonstre que  $(K_1)_\sigma = (K_2)_\sigma$  para todo plano  $\sigma$  que contem  $c'(t)$ . Pode-se tirar a hipótese de que  $M_1$  e  $M_2$  são hipersuperfícies.

#### REFERÊNCIAS

Temos introduzido e usado o tensor curvatura sem entrar em muitos detalhes. Para ver outras de suas propriedades básicas sugerimos os seguintes livros; advertimos o leitor para o fato de que o tensor curvatura definido em algumas destas referencias difere do nosso por um sinal negativo.

- [20] DO CARMO, M. - Notas de Geometria Riemanniana, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.
- [21] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K. - Foundations of Differential Geometry, vols. 1 e 2,

Interscience Publishers, New York, 1963 e  
1969.

[22] MILNOR, J. - Lectures on Morse Theory, Ann. Math.  
Studies Nº 51, Princeton University Press,  
New Jersey, 1963.

[23] BISHOP, R. e CRITTENDEN, R. - Geometry of Manifolds,  
Academic Press, New York, 1964.

Em [24], Tompkins demonstrou que uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n$  com curvaturas seccionais todas nulas não pode ser imersa isometricamente num espaço Euclideo de dimensão  $2n-1$ . Depois Chern e Kniper em [25] demonstraram o teorema 4.2 para  $n = 2$  ou  $3$ ; finalmente Otsuki resolveu o problema para todo  $n$  dando uma demonstração do Lema 4.3. O artigo [25] também contém a fórmula (4.6).

[24] TOMPKINS, C. - Isometric Embedding of Flat Manifolds  
in Euclidean Space, Duke Math. J. 5(1934),  
58-61.

[25] CHERN, S.S. e KUIPER, N.H. - Some Theorems on the  
Isometric Embedding of Compact Riemann  
Manifolds in Euclidean Space, Ann. of Math.

56(1952), 422-430.

[26] OTSUKI, T. - On the Existence of Solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application, Proc. Japan Acad. 29(1953), 99-100.

Depois O'Neill em [27] demonstrou a seguinte generalização do teorema de Chern-Kuiper.

TEOREMA - Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta de dimensão  $n$ , e seja  $\tilde{M}$  uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de dimensão menor a  $2n$ . Se as curvaturas seccionais  $K_\sigma$  e  $\tilde{K}_\sigma$  satisfazem a condição  $K_\sigma \leq \tilde{K}_\sigma \leq 0$  para todo plano  $\sigma$ , então não existe imersão isométrica de  $M$  em  $\tilde{M}$ .

A demonstração deste teorema difere da demonstração do teorema 4.2 só na demonstração da proposição 3.1. A idéia da demonstração da proposição 3.1 neste caso continua sendo a mesma: fixamos um ponto  $p \in \tilde{M}$  e consideramos o ponto  $f(m)$  de  $f(M)$  que está a maior distancia de  $p$ ; existe uma única geodésica  $\sigma: [a, b] \rightarrow \tilde{M}$  que une  $p$  a  $f(m)$ , pois  $\tilde{K} \leq 0$  em  $\tilde{M}$  que é simplesmente conexa. O vetor  $v = \sigma'(b)$  é normal a  $f(M)$  em  $f(m)$ . Finalmente, para demonstrar que  $\langle \alpha(X, X), v \rangle < 0$  para todo  $X \neq 0$ ,

usa-se a fórmula da segunda variação de geodésicas sem muitas dificuldades. (Com referência para a fórmula da segunda variação, veja, por exemplo, o capítulo 2 de [20], e o capítulo 8 de [21]).

No caso especial do teorema acima, em que  $\tilde{M}$  tem curvaturas seccionais todos iguais a uma constante negativa, Stiel [28] demonstra que o resultado vale exigindo somente que as curvaturas da variedade compacta  $M$  satisfazem  $K_{\sigma} \leq 0$ , para todo plano  $\sigma$  em  $M$ .

Gray [29] demonstra outros teoremas nesta linha. Nas referências da seção 5 veremos também outros resultados sobre a inexistência de certas imersões isométricas.

[27] O'NEILL, B. - Immersion of Manifolds of Non-Positive Curvature, Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960), 132-134.

[28] STIEL, E. - Immersions into Manifolds of Constant Negative Curvature, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967), 713-715.

[29] GRAY, A. - Isometric Immersions in Symmetric Spaces, J. Differential Geometry, 3(1969), 237-244.



## 5. IMERSÕES COM CURVATURAS SECCIONAIS NULAS

No teorema de Hadamard vimos imersões de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas seccionais estritamente maior do que zero. Depois consideramos imersões de variedades compactas com curvaturas seccionais menor ou igual a zero. Nesta seção vamos estudar hipersuperfícies com curvaturas seccionais identicamente nulas. No caso de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  temos dois casos em que a curvatura é zero: ou temos um ponto parabólico ( $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ ) ou um ponto planar ( $k_1 = k_2 = 0$ ). Faremos um estudo de como estes casos se misturam na mesma imersão para concluir que a imersão tem que ser um cilindro. Demonstraremos o seguinte.

TEOREMA 5.1 (Hartman-Nirenberg) - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão isométrica de uma variedade completa, simplesmente conexa e com curvaturas seccionais identicamente nulas, então  $M$  é isométrico a  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  é um cilindro, isto é,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i v_i + b(x_n)$ , onde  $b(x_n)$  é uma curva contida num plano de duas dimensões e os  $v_i$ 's são vetores constantes perpendiculares a

esse plano e perpendiculares também entre eles.

Primeiro veremos o que a hipótese sobre as curvaturas seccionais diz a respeito dos autovalores da segunda forma fundamental, e, conseqüentemente, sobre a aplicação de Gauss. Num ponto  $x$  em  $M$ , podemos diagonalizar o operador auto-adjunto  $A_{\xi}$  com relação a uma base ortonormal  $X_1, \dots, X_n$  de  $TM_x$ , de tal maneira que  $A_{\xi} X_i = \lambda_i X_i$ ; os autovalores  $\lambda_i$  são chamados de curvaturas principais da hipersuperfície e os  $X_i$  de direções principais, como no caso de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . A curvatura seccional do plano gerado por  $X_i$  e  $X_j$  é igual a

$$\begin{aligned}(5.1) \quad K_{ij} &= \langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle - \langle \alpha(X_i, X_j), \alpha(X_i, X_j) \rangle \\ &= \langle A_{\xi} X_i, X_i \rangle \langle A_{\xi} X_j, X_j \rangle - \langle A_{\xi} X_i, X_j \rangle \langle A_{\xi} X_i, X_j \rangle \\ &= \lambda_i \lambda_j.\end{aligned}$$

Como na presente situação todas as curvaturas seccionais são nulas, temos que no máximo um dos  $\lambda_i$ 's é diferente de zero. Por outro lado, vimos que a derivada da aplicação de Gauss  $\phi$  é  $\phi_* = -A_{\xi}$ ; logo, se  $K_{\sigma} = 0$  para todo plano  $\sigma$ , então o posto da aplicação de Gauss é zero ou um, em todo ponto de  $M$ . Neste caso o kernel de  $(\phi_*)$  é igual ao subespaço  $B_x = \{X \in TM_x; \alpha(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \text{ em } TM_x\}$  definido ao fim da última seção.

O que acontece quando a dimensão desses subespaços é constante num aberto de  $M$  será da máxima importância na demonstração do teorema de Hartman-Nirenberg e em outras seções posteriores. Primeiro vamos demonstrar um resultado no contexto mais geral em que  $M$  é uma subvariedade de uma variedade Riemanniana  $\tilde{M}$  com curvaturas seccionais todas iguais a uma constante  $c$ . Precisamos lembrar que uma variedade  $\tilde{M}$  de curvatura constante  $c$  tem a propriedade de que seu tensor curvatura pode-se expressar como

$$(5.2) \quad \tilde{R}(Z,W)Y = c[\tilde{g}(Z,Y)W - \tilde{g}(W,Y)Z]$$

para  $Z, W, Y \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ , onde  $\tilde{g}$  é a métrica Riemanniana de  $\tilde{M}$ . Este fato, que não é difícil de verificar, não será demonstrado nestas notas; o leitor pode consultar o capítulo 5 de [32].

PROPOSIÇÃO 5.2 - Seja  $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$  uma imersão isométrica de  $M$  numa variedade  $\tilde{M}$  de curvatura constante  $c$ . Se a dimensão do subespaço  $B_x$  (isto é, o índice de nulidade relativa  $\nu(x)$ ) é igual a uma constante  $\ell$  num aberto  $U$  de  $M$ , então esses subespaços formam uma distribuição integrável (involutiva) cujas folhas são  $\ell$ -subvariedades totalmente geodésicas.

Demonstração: Sejam  $X$  e  $Y$  campos vetoriais, definidos em  $U$ , tangentes a distribuição  $B_x$ ; precisamos demonstrar que  $[X, Y]_x \in B_x$  para todo  $x \in U$ . Basta demonstrar que  $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$  e  $\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X$  estão em  $B_x$  pois  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ . Observamos primeiro que  $X \in B_x$  se e somente se  $\tilde{\nabla}_X Z$  é tangente a  $M$  para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ; logo, queremos demonstrar que  $\tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y} Z \in TM$  para todo  $Z$  em  $\mathfrak{X}(M)$ . Mas, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_X Y} Z &= \tilde{\nabla}_Z \tilde{\nabla}_X Y + [\tilde{\nabla}_X Y, Z] \\ &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Z Y + \tilde{R}(Z, X)Y + \tilde{\nabla}_{[Z, X]} Y + [\tilde{\nabla}_X Y, Z] \\ &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \tilde{\nabla}_X([Z, Y]) + \tilde{R}(Z, X)Y + \tilde{\nabla}_{[Z, X]} Y + [\tilde{\nabla}_X Y, Z] \\ &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \tilde{\nabla}_X([Z, Y]) + c(\tilde{g}(Z, Y)X - \tilde{g}(Z, X)Y) + \tilde{\nabla}_{[Z, X]} Y + \\ &\quad + [\tilde{\nabla}_X Y, Z], \end{aligned}$$

é tangente a  $M$  pois cada um dos termos é. Logo a distribuição é involutiva e, pelo teorema de Frobenius (veja [31]), temos que por cada ponto  $x$  de  $U$  passa uma única variedade maximal  $P_x$  de dimensão  $l$ , uma folha da distribuição, tal que  $(TP_x)_y = B_y$ .

Ainda mais, temos que essa subvariedade  $P_x$  é

totalmente geodésica em  $\tilde{M}$ ; de fato, vimos que se  $X$  e  $Y \in \mathfrak{X}(P_x)$  então  $\tilde{\nabla}_X Y$  está em  $TP_x$ , ou seja, a segunda forma fundamental de  $P_x$  em relação a  $\tilde{M}$  é identicamente nula. C.Q.D.

Quando  $\tilde{M}^{n+p}$  é o espaço Euclideo  $\mathbb{R}^{n+p}$  temos que  $f(P_x)$  é um  $\ell$ -plano afim. Este fato motiva a seguinte definição.

DEFINIÇÃO - Dizemos que uma  $\ell$ -subvariedade  $P$  de  $M$  é uma  $\ell$ -seção planar de um subconjunto aberto e conexo  $U$  de  $M$  se  $f|_P$  é uma imersão num  $\ell$ -plano afim  $H$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tal que se  $P'$  é outra  $\ell$ -seção planar com  $f(P') \subset H$  então  $P' = P$  ou  $P' \cap P = \emptyset$ .

Seja  $V_\ell = \{x \in M: \text{dimensão } B_x = \ell\}$ . Voltando a situação original de hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^{n+1}$  demonstraremos o seguinte lema primeiro demonstrado por Chern e Lashof [33], usando formas diferenciais, e depois por Hartman e Nirenberg [34], cuja demonstração nós adotaremos. Este lema pode ser generalizado para espaços de curvatura constante; veja O'Neill [38] e do Carmo [37]. Quem achar a demonstração oferecida aqui, usando coordenadas locais, muito complicada pode consultar as outras fontes citadas neste parágrafo.

LEMA 5.3 - Seja  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $W$  uma componente conexa do interior de  $V_\ell$ . Se  $x \in W$ , então passa por  $x$  uma única  $\ell$ -seção planar  $P$  de  $W$ , sobre a qual a aplicação de Gauss é constante e de maneira tal que o seu fecho  $\bar{P}$ , está contido ainda em  $V_\ell$ .

Demonstração: A existência e unicidade da  $\ell$ -seção planar esta garantida pela proposição anterior. Temos também que a aplicação de Gauss restrita a  $P$ ,  $\phi|_P$ , é constante pois  $\phi_*TP_x = \phi_*(B_x) = \phi_*(\ker \phi_*) = 0$ .

Falta demonstrar a última parte, ou seja, que  $\bar{P} \subset V_\ell$ . Como  $P \subset V_\ell$ , se  $p \in P$  então  $\dim \ker \phi_*p$  é sempre maior ou igual a  $\ell$ . Logo, o que precisamos demonstrar é que o posto de  $\phi_*p$  é maior ou igual a  $n-\ell$ .

Como  $f(P)$  está contido em um  $\ell$ -plano  $H$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que podemos assumir dado pelas equações  $x_1 = \dots = x_{n+1-\ell} = 0$ , é possível escolher uma vizinhança  $U$  de  $P$  e coordenadas locais  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tais que  $(0, \dots, 0, x_{n-\ell+1}, \dots, x_n, 0) | P = f|_P$  é a inclusão de  $P$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Estas coordenadas podem ser escolhidas tais que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  correspondam à projeção de  $f(U)$  em  $f_*TM_x$ ,  $x \in P$ . Observe que  $f_*TM_x = f_*TM_y$  como planos

afins para todo  $x, y \in P$ . Sejam  $\{w_1, \dots, w_n\}$  as coordenadas numa vizinhança  $V$  de  $\phi(x)$  obtidas projetando  $\phi(V)$  no plano tangente  $TS_{\phi(x)}^n$ . Como  $\phi$  é constante em  $P$  podemos assumir que  $\phi(U) \subset V$ . Nessas coordenadas  $\phi$  está dada por funções  $\phi_1, \dots, \phi_n, \phi_i: f(U) \subset \mathbb{R}^n = TM_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , pois  $(\phi_*)_x$  é um operador simétrico.

EXERCÍCIO 5.1 - Mostre esta última afirmação.

Podemos assumir que  $U \subset \text{Int } V_\ell$ . Olhando a demonstração do teorema do posto constante em Lima [30], páginas 20 e 28, vemos que se  $x \in P$  então existe um sistema de coordenadas  $h$  definida em uma vizinhança  $w$  de  $f(x)$  com  $\bar{w} \subset \text{Int } V_\ell$  tal que

$$\begin{aligned}\phi'(y_1, \dots, y_n) &= \phi \circ h(y_1, \dots, y_n) = \\ &= (y_1, \dots, y_{n-\ell}, \lambda(y_1, \dots, y_{n-\ell})),\end{aligned}$$

e podemos ainda assumir que

$$h(y_1, \dots, y_n) = (\tilde{h}(y_1, \dots, y_n), y_{n-\ell+1}, \dots, y_n);$$

logo  $\frac{\partial h_j}{\partial y_i} = \delta_{ij}$  se  $j \geq n-\ell+1$ .

Temos que  $d\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j$  e que  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^n d\phi_i \wedge dx_i = 0.$$

Pela mudança de coordenadas dada por

$(x_1, \dots, x_n) = h(y_1, \dots, y_n)$ , obtemos a seguinte igualdade equivalente:

$$0 = \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} dy_j \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j \right) \right\}.$$

O coeficiente de  $dy_\alpha \wedge dy_j$ ,  $\alpha \leq n-l < j \leq n$ ,

é

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} - 0, \end{aligned}$$

pois  $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial h_i}{\partial y_\alpha} = 0$ , se  $i \geq n-l+1$  e  $\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}$  se  $i \leq n-l$ . Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-l} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \sum_{k=n-l+1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-l} \delta_{i\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \sum_{k=n-l+1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial y_\alpha} \delta_{kj} \\ &= \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_\alpha}, \end{aligned}$$

pois  $x_k = h_k = y_k$ , se  $k \geq n-l$ .



Vimos acima que as funções  $\phi_j^i$ 's não dependem das variáveis  $y_{n-l+1}, \dots, y_n$ ; logo o mesmo acontece com  $\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j} = -\frac{\partial \phi_j^i}{\partial y_\alpha}$ ,  $\alpha \leq n-l$ .

Deste fato segue-se que

$$x_\alpha(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=n-l+1}^n y_i \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_{n-l}, 0, \dots, 0) + x_\alpha(y_1, \dots, y_{n-l}, 0, \dots, 0)$$

Se  $0 \leq \alpha, \beta \leq n-l$ , temos que  $\delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \phi_\alpha^i}{\partial y_\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n-l} \frac{\partial \phi_\alpha^i}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\beta}$ ,

pois se  $\gamma > n-l$ ,  $x_\gamma = h_\gamma = y_\gamma$  e  $\frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\beta} = 0$ . Logo a matriz identidade  $I_{n-l}$  é igual ao produto das matrizes

$$\left( \frac{\partial \phi_\alpha^i}{\partial x_\gamma} \right)_{1 \leq \alpha, \gamma \leq n-l} \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\beta} \right)_{1 \leq \gamma, \beta \leq n-l}$$

Dai segue-se que

$$\det \left( \frac{\partial \phi_\alpha^i}{\partial x_\gamma} \right)_{1 \leq \alpha, \gamma \leq n-l} = \frac{1}{\det \left( \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_\beta} \right)_{1 \leq \gamma, \beta \leq n-l}} .$$

Mas,  $\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = \sum_{i=n-\ell+1}^n a_i y_i + b$ , onde  $b$  e  $a_i$ ,

$i = n-\ell+1, \dots, n$ , são funções que dependem só de

$y_1, \dots, y_{n-\ell}$ . Como  $y_i = \phi'_i$ , se  $1 \leq i \leq n-\ell$ , e  $\phi$  é constante em  $P$ , as funções  $a_i$ 's e  $b$  são constantes em  $P$ . Por outro lado,  $y_j = h_j = x_j$  se  $n-\ell+1 \leq j \leq n$ ,

logo  $\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} = \sum_{i=n-\ell+1}^n a_i x_i + b$ , e

$\det \left( \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n-\ell} (x_1, \dots, x_n)$ , com  $x \in P$ , é um polinômio  $T$  nas variáveis  $x_{n-\ell+1}, \dots, x_n$ . Esse polinômio não depende, consequentemente, das coordenadas  $\{y_1, \dots, y_n\}$

e está bem definido em todo  $P$ . Temos que

$\det \left( \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\gamma} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n-\ell} (x) = \frac{1}{T(x_{n-\ell+1}, \dots, x_n)}$ . Se  $p \in \partial P$ ;

seja  $W$  uma vizinhança compacta de  $p$ ; então  $T|_{W \cap P}$  é

limitado; logo  $\frac{1}{T}$  é diferente de zero em  $W \cap P$  o que im

plica que  $\det \left( \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\gamma} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n-\ell} \neq \phi$ , isto é,  $p \in V_\ell$ . C.Q.D.

Denotamos o posto de  $\phi$  em  $x$  por  $r(x)$ . Definimos  $r^*(x)$  como o maior inteiro  $k$  tal que toda vizinhança  $U$  de  $x$  tem um ponto  $x_U$  tal que  $r(x_U) = k$ . Como o posto só pode crescer numa vizinhança de  $x$ ,  $r^*(x) \geq r(x)$ . Se  $r^*(x) = r(x) = k$  então  $x \in \text{Int } V_{n-k}$ .

**COROLÁRIO 5.4** - Se  $r^*(x) = n-\ell$  então existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e uma  $\ell$ -seção planar de  $U$

onde  $\phi$  é constante e  $r^* \geq n-l$ .

Demonstração: Podemos assumir que  $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ , com

$$r^*(x_i) = r(x_i) = n-l. \text{ Pelo lema anterior por}$$

cada ponto  $x_i$  passa uma  $l$ -seção  $P_{x_i}$  que está contida num  $l$ -plano  $H_i$ . Usando uma subsequencia, se for necessário, podemos assumir que os  $H_i$  convergem a um  $l$ -plano  $H$  passando por  $x$ , pois o espaço dos  $l$ -planos passando por  $x$  é compacto.

Afirmamos que existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e um inteiro  $N$  tal que se  $i \geq N$  então  $\partial P_{x_i} \cap U = \emptyset$ . Do contrário,  $x = \lim_{i \rightarrow \infty} y_n$  com  $y_n \in \partial P_{x_{i_n}}$ . Mas  $y_n \in \partial P_{x_{i_n}}$  implica que  $r^*(y_n) > r(y_n) = n-l$ . Do contrário,  $y_n \in \text{Int } V$  e passaria uma  $l$ -seção planar  $P_{y_n}$  por  $y_n$ , mas como é única,  $P_{y_n} \cap P_{x_{i_n}} \neq \emptyset$  o que contradiz as propriedades da  $l$ -seção  $P_{x_{i_n}}$ . Agora, a seção que queremos é  $U \cap H = P$ .

Como  $\partial P_{x_i} \cap U = \emptyset$  temos que  $P_{x_i} \cap U = H_i \cap U$ . Como  $H_i$  converge para  $H$  temos que todo ponto  $y \in P$ :  $H \cap U$  é igual a um limite de pontos  $y_i \in H_i \cap U$ ; logo  $y_i \in P_{x_i}$  e  $\ker \phi_{*y_i} = TP_{x_i} = H_i$ , o que implica que  $TP_y = H = \lim_{i \rightarrow \infty} \ker \phi_{*y_i} \subset \ker \phi_{*y}$ . Isto acontece para todo  $y \in P$ , logo  $\phi$  é constante em  $P$  e  $r^*(y) \geq n-l$ .

C.Q.D.

Demonstração do Teorema 5.1: O fato de que  $M$  é simples-

mente conexa e tem curvaturas seccionais todas nulas implica que  $M$  é isométrica a  $\mathbb{R}^n$ . Em nosso caso temos que  $r(x) \leq 1$ , para todo  $x$  em  $M$ . Se  $r \equiv 0$  em  $M$  então  $f$  é uma imersão totalmente geodésica e o teorema segue trivialmente. Logo, assumimos que existe um ponto

$x_0 \in M$  com  $r^*(x_0) = r(x_0) = 1$ , o que implica, pelo lema 5.3 que existe uma única  $(n-1)$ -seção planar  $P_{x_0}$  de  $\text{Int } V_{n-1}$ , e que no bordo de  $\partial P_{x_0}$   $r(x) = r^*(x) = 1$ . Temos que  $f|_{P_{x_0}}$  é uma isometria num  $(n-1)$ -plano  $H$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Como  $M$  é isométrica a  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $P_{x_0}$  é um aberto de um  $(n-1)$ -plano (na métrica euclidiana de  $M$ )

$L_{x_0} \subset M$ . Mas se  $x_1 \in \partial P_{x_0}$ , vimos que  $r^*(x_1) = r(x_1) = 1$ , o que implica que por  $x_1$  passa um único  $(n-1)$ -plano  $L_{x_1}$ . Como  $L_{x_1} = \ker \phi_{*x_1}$ ,  $L_{x_1} = L_{x_0}$  o que implica que  $\partial P_{x_0} = \emptyset$  e  $P_{x_0} = L_{x_0}$ . Em resumo, temos uma  $(n-1)$ -seção planar  $P_{x_0} = L_{x_0}$  que é completa.

Se  $r^*(x) = 1$ , pelo corolário do lema 5.3, passa por  $x$  uma  $(n-1)$ -seção planar  $P_x \subset L \subset M$ , onde  $L$  é um hiperplano de  $M \approx \mathbb{R}^n$ . Como neste caso os  $P_{x_i}$ 's da demonstração são iguais aos hiperplanos  $L_i$  temos que  $P_x = L_x$ ,  $\phi$  é constante em  $P_x$  e  $r^*(y) = 1, \forall y \in P_x = L_x$ . Além do mais, esta  $(n-1)$ -seção  $P_x$  é única; se tivermos

outra  $(n-1)$ -seção planar  $Q$  de uma vizinhança  $U$  de  $x$  passando por  $x$ ,  $Q \subset L' \neq L$ , teríamos, pela demonstração do corolário que  $P_x = \lim_{x_i} P_{x_i}$   $P_{x_i} \subset L_i$ ,  $L_i$  hiperplano de  $M$ . Como dois hiperplanos ou são paralelos ou se intersectam, temos que, para  $i$  suficientemente grande,  $P_{x_i} \cap Q \neq \emptyset$  e  $L_{x_i} \neq L'$ . Mas como  $x_i \in \text{Int } V_{n-1}$ , por  $x_i$  passa uma única  $(n-1)$ -seção planar, o que implica que  $P_{x_i} \cap U = Q \cap U$ , ou seja, que  $Q \subset P_{x_i}$ , o que contradiz que  $L_{x_i} \neq L'$ . Logo se  $r^*(x) = 1$ , passa por  $x$  uma única  $(n-1)$ -seção  $P_x = L$ . (Observe que não precisamos assumir que na outra seção  $Q$  a aplicação  $\phi$  era constante para concluir que  $Q \subset P_{x_i}$ .

Em resumo temos que se  $r^*(x) = 1$ , passa por  $x$  um único hiperplano  $L_x$ . Logo se  $r^*(y) = 1$ , temos que  $L_y = L_x$  ou  $L_y \cap L_x = \emptyset$ , ou seja, eles são paralelos ao hiperplano fixo  $L_{x_0}$ . Se  $r^*(x) = 0$ , seja  $L_x$  o hiperplano passando por  $x$  paralelo a  $L_{x_0}$ . Temos que  $r^* \equiv 0$  em  $L_x$ . Do contrário teríamos um ponto  $y \in L_x$  com  $r^*(y) = 1$ . Mas pela unicidade teríamos  $L_y = L_x$  contradizendo o fato que  $r^*(x) = 0$ . O fato de que  $r^* \equiv 0$  em  $L_x$  implica que  $r = 0$  numa vizinhança de  $L_x$ , e isto por sua vez implica que  $\phi$  é constante em  $L_x$ . Concluímos que por cada ponto passa um hiperplano paralelo a

$L_{x_0}$  e  $\phi$  é constante em cada um desses hiperplanos.

Escolha coordenadas retangulares  $x_1, \dots, x_n$  tal que  $L_{x_0}$  é paralelo ao plano  $x_n = 0$ .

Logo,  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$  pois os  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  são paralelos na conexão  $\tilde{\nabla}$  de  $M = \mathbb{R}^n$ .

Mas se  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} \langle \alpha \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle, \xi \rangle &= \langle A_\xi \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle \\ &= -\langle \phi_* \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ , se  $1 \leq i \leq n-1$ , e isto impli que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + b(x_n)$$

onde

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial b}{\partial x_n}$$

Logo os  $a_i$ 's e  $\frac{\partial b}{\partial x_n}$  são ortonormais pois  $f$  é uma iso

metria. Como  $\frac{\partial^2 b}{\partial x_i \partial x_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} = 0$  se  $i = 1, \dots, n-1$ , temos que  $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial b}{\partial x_n} \rangle = 0$ , logo  $b(x_n)$  está contido num plano perpendicular ao hiperplano gerado pelos  $a_i$ 's.  
C.Q.D.

#### REFERENCIAS

Nesta seção usamos alguns fatos de variedades diferenciáveis que o leitor poderá rever nas seguintes referencias. A uma certa altura usamos uma parte da demonstração do teorema do posto constante a qual se encontra na página 20, observação (4), e na página 28 de

[30] LIMA, ELON L. - Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.

Depois nos referimos ao teorema de Frobenius. Uma demonstração encontra-se na página 42 de

[31] WARNER, FRANK W. - Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

De variedades Riemannianas usamos a expressão simples do tensor curvatura de variedades com curvaturas

seccionais constantes. Ela é desenvolvida no capítulo 5 de

- [32] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K. - Foundations of Differential Geometry, vol. I, Interscience Publishers, New York, 1963.

O Lema 5.3 foi demonstrado primeiro como o Lema 2 em

- [33] CHERN, S.S. e LASHOF, R.K. - On the Total Curvature of Immersed Manifolds, Amer. J. Math. 79 (1957), 306-318.

A demonstraçãõ aqui dada desse lema é de

- [34] HARTMAN, P. e NIRENBERG, L. - On Spherical Image Maps Whose Jacobians do not Change Sign, Amer. J. Math. 81(1959), 901-920.

Onde se encontra também a demonstraçãõ do teorema 5.1.

Este lema foi generalizado para o caso de imersões de maior codimensãõ  $f: M^n \rightarrow R^{n+k}$  por

- [35] HARTMAN, P. - On Isometric Immersions in Euclidean Space of Manifolds with Non-Negative Sectional Curvatures, Trans. Amer. Math. Soc. 115(1965), 94-109.



Usando esta generalização, Hartman demonstrou o seguinte teorema.

TEOREMA - Suponha que (i)  $M^n$  é uma variedade Riemanniana completa com curvaturas seccionais não negativas, (ii)  $f: M^n \rightarrow R^{n+p}$  uma imersão isométrica, com  $p > 0$ , e (iii) a nulidade relativa  $\nu(x)$  seja sempre maior do que zero. Seja  $m = \min \nu(x)$  para  $x \in M^n$ . Então  $f(M^n)$  é  $m$ -cilindrica; isto é, existe uma variedade Riemanniana completa  $M_1^{n-m}$  tal que  $M$  é isométrica ao produto  $M_1 \times R^m$ , e existe uma imersão  $f_1: M_1 \rightarrow R^{n-n+p}$  tal que  $f(x_1, r) = (f_1(x_1), r)$  para todo  $(x_1, r) \in M_1 \times R^m = M$ . Além do mais,  $f(M)$  não é  $(m+1)$ -cilindrica.

Este teorema foi demonstrado em

[36] HARTMAN, P. - On the Isometric Immersions in Euclidean Space of Manifolds with Non-negative Sectional Curvatures. II, Trans. Amer. Math. Soc. 147(1970), 529-540.

Observe que no Teorema 5.1 podíamos ter expressado a conclusão do teorema dizendo que  $f$  era  $(n-1)$ -cilindrica.

Outra generalização do Lema 5.3 é a de considerar hipersuperfícies em variedades de curvatura constante.

O enunciado neste caso seria igual ao do Lema 5.3; veja a demonstração em

[37] DO CARMO, MANFREDO P. - Método do Referencial Móvel, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

No caso em que temos uma imersão  $f: M_C^n \rightarrow M_C^{n+p}$  entre variedades de curvaturas constantes O'Neill e Stiel demonstraram que o lema análogo vale. Veja

[38] O'NEILL, B. e STIEL, E. - Isometric Immersions of Constant Curvature Manifolds, Michigan Math. J. 10(1963), 335-339.

Usando este lema podemos demonstrar facilmente o seguinte teorema interessante que aparece também em [38].

TEOREMA - Seja  $f: M^n \rightarrow M^{n+k}$  uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas com curvaturas seccionais constantes iguais a um número positivo  $c$ . Se  $2k \leq n$ , então  $f$  é totalmente geodésica.

Demonstração: Voltando a situação estudada ao final da seção 4 vemos que neste caso, para todo  $x \in M$ ,  $\mu(x) = n$ . Logo, pela proposição 4.4,  $\nu(x) + k \geq \mu(x) = n$ , ou  $\nu(x) \geq n - k \geq k$ . Seja  $\nu = \min \nu(x)$  para  $x \in M$ . Obser

ve que  $V_\nu$  é aberto por ser  $\nu$  o mínimo; logo usando o lema vemos que por cada ponto  $y \in V_\nu$  passa uma única subvariedade de dimensão  $\nu$  completa que é totalmente geodésica em  $\tilde{M}$  (e, conseqüentemente de  $M$ ). Mas se  $\nu < n$  então tomando dois pontos distintos  $y_1$  e  $y_2$  em  $V_\nu$  teríamos duas subvariedades  $S_1$  e  $S_2$  totalmente geodésicas completas de  $M$  de dimensão  $\nu \geq \frac{1}{2}n$  que não se interseam, o que não pode acontecer pois  $M$  tem curvatura constante positiva e é recoberta isometricamente pela esfera de raio  $\frac{1}{\sqrt{c}}$  (Os levantamentos de  $S_1$  e  $S_2$  seriam duas esferas de dimensão  $\nu \geq \frac{1}{2}n$  que não se interseam, o que é um absurdo). C.Q.D.

Também temos o seguinte teorema sobre a codimensão de uma imersão isométrica

TEOREMA - Seja  $f: M^n \rightarrow R^{n+k}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa) de dimensão  $n$  noutra de dimensão  $n+k$ . Se para todo plano  $\sigma$  tangente à  $M$  temos que  $K_\sigma < \tilde{K}_\sigma$ , então  $k \geq n-1$ .

Demonstração: Suponha que  $k < n-1$ . Fixemos um ponto

$x \in M$ . Pelo Lema 4.3, existe  $X \in TM_x$ ,  $\|X\| = 1$ , tal que  $\alpha(X,X) = 0$ , onde  $\alpha$  é a segunda forma

fundamental de  $f$  em  $x$ . O espaço complementar à  $X$  em  $TM_x$  tem dimensão  $n-1 > k$ ; logo, existe  $Y \in TM_x$ , perpendicular à  $X$  e de norma 1 tal que  $\alpha(X, Y) = 0$ . Pela equação de Gauss, então teríamos  $K_G - \tilde{K}_G = \tilde{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) - \tilde{g}(\alpha(X, Y), \alpha(X, Y)) = 0$ , contradizendo nossa hipótese.

C.Q.D.

## 6. CURVATURA TOTAL ABSOLUTA E IMERSÕES JUSTAS.

### TEOREMA DE GAUSS-BONNET.

Nesta seção consideraremos imersões isométricas  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  de variedades Riemannianas compactas e conexas. Certas curvaturas induzidas pela imersão serão integradas sobre toda a variedade  $M$  para obter resultados globais. Estudaremos o conceito de curvatura total absoluta de uma imersão, o qual será relacionado com a noção de uma imersão ser justa; com relação a esta última noção precisaremos introduzir fatos básicos sobre a teoria de Morse de funções reais diferenciáveis definidas sobre uma variedade  $M$ . Usando as técnicas desenvolvidas no início da seção, demonstraremos o teorema de Gauss-Bonnet.

Na seção 3 estudamos o teorema de Hadamard que garantia a convexidade de uma imersão compacta com curvaturas seccionais positivas em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nesta seção demonstraremos o resultado de Sacksteder que generaliza o de Hadamard para hipersuperfícies com curvaturas seccionais não-negativas. Este último será uma consequência do teorema de Chern-Lashof que relaciona a curvatura total abso

luta com a convexidade da imersão. Também obteremos certos resultados gerais sobre imersões justas, como a limitação da codimensão da imersão.

Seja  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  uma imersão de uma variedade de dimensão  $n$  em um espaço Euclidiano de dimensão  $n+p$ . Consideremos o espaço fibrado normal unitário de  $f$ , definido como  $B = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^{n+p} : \|v\| = 1 \text{ e } v \text{ é perpendicular a } f_*TM_x\}$ , e a aplicação de Gauss generalizada  $\phi: B \rightarrow S^{n+p-1}$ , de  $B$  na esfera unitária  $S^{n+p-1}$  de  $\mathbb{R}^{n+p}$ , definida como  $\phi((x, v)) = v$ . Seja  $c_m$  o volume da esfera unitária  $S^m$  em  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

DEFINIÇÃO - A curvatura total absoluta da imersão  $f$  é

$$\tau(f) = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B |\phi_* dS^{n+p-1}| = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B |\det \phi_*| dB.$$

Dizemos que  $f$  tem curvatura total absoluta mínima se

$\tau(f) = \inf\{\tau(g) : g: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p} \text{ é uma imersão diferenciável de } M \text{ em } \mathbb{R}^{n+p}\}$ .

Observe que este infimum é tomado sobre todas as imersões diferenciáveis de  $M$  em  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Nesta situação  $M$  não é considerado, a priori, com uma métrica Riemanniana específica. O caminho a seguir será o de primeiro achar uma imersão com curvatura total absoluta mínima,

e depois botar em  $M$  a métrica Riemanniana induzida pela imersão, o que nos dará condições de obter conclusões geométricas sobre a imersão.

Para ajudar a intuição geométrica podemos pensar em  $B$  como difeomorfo ao bordo de uma vizinhança tubular de  $f(M)$ , pelo menos localmente se  $f$  não é um mergulho; assim,  $B$  seria uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+p}$  e  $\phi$  seria igual a aplicação de Gauss definida anteriormente para hipersuperfícies.

Agora vamos ver a relação entre a derivada da aplicação de Gauss e a geometria da imersão (botando em  $M$  a métrica induzida pela imersão). O determinante de  $\phi_*(x, v)$ , quando a matriz Jacobiana é dada em relação a bases ortonormais, é chamado de curvatura de Lipschitz-Killing de  $x$  na direção  $v$ , que denotaremos como  $G(x, v)$ . Como o espaço fibrado  $B$  é localmente um produto  $U \times S^{p-1}$ , onde  $U$  é uma vizinhança coordenada de  $M$ , temos que

$$\tau(f) = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_M \left( \int_{S_x^{p-1}} |G(x, v)| dS_x^{p-1} \right) dM.$$

A seguir vamos dar uma interpretação mais geométrica do determinante  $G(x, v)$ . Seja  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  um sistema de coordenadas locais numa vizinhança  $U$  de  $x$ , e  $v_1, \dots, v_p$ , campos de vetores normais, ortonormais em-

tre eles, definidos ao longo de  $U$  tal que  $v_p = v$ . Então o espaço tangente a  $B$  no ponto  $(x, v)$  é gerado por  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  e  $v_1, v_2, \dots, v_{p-1}$ ; e  $\phi_*(x, v)$  está representado pela matriz Jacobiana

$$(6.1) \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle \\ i, j = 1, \dots, n \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, v_j \rangle \\ i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p-1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \langle \frac{\partial \phi}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle \\ i = 1, \dots, p-1 \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \langle \frac{\partial \phi}{\partial v_i}, v_j \rangle \\ i, j = 1, \dots, p-1 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

se identificamos os espaços tangentes  $TS_{\phi(x, v)}^{n+p-1}$  e  $TB_{(x, v)}$ , como no caso da aplicação de Gauss de uma hiper superfície. O produto interno  $\langle \tilde{\nabla}_{v_i} v, v_j \rangle = -\langle v, \tilde{\nabla}_{v_i} v_j \rangle$  depende só dos valores dos  $v_j$ 's em  $x$ . Fixando  $x$  temos que  $\phi|_{S_x^{p-1}}: S_x^{p-1} \rightarrow S^{n+p-1}$  é a inclusão de  $S_x^{p-1}$  como uma  $(p-1)$ -esfera totalmente geodésica da esfera  $S^{n+p-1}$ , logo podemos assumir que  $(\tilde{\nabla}_{v_i} v_j)_x = -\delta_{ij} v$ , pois  $v$  é normal a  $S_x^{p-1}$  em  $v$  (aqui  $\tilde{\nabla}$  é a derivada covariante do espaço ambiente  $\mathbb{R}^{n+p}$ ). Segue-se que  $\langle \frac{\partial \phi}{\partial v_i}, v_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{v_i} v, v_j \rangle = -\langle v, \tilde{\nabla}_{v_i} v_j \rangle = \delta_{ij}$ . Também temos que  $\langle \frac{\partial \phi}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{v_i} v, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = 0$ , pois podemos assumir que  $v$  e  $v_i$  são campos vetoriais em  $S_x^{p-1}$  o que implica que



$\tilde{\nabla}_{v_i} v$  está em  $(f_* TM_x)^\perp$ , o espaço normal a imersão  $f$  em  $x$ .

$$\begin{aligned} & \text{Por outro lado acontece que } \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \\ & = \left\langle \frac{\tilde{\nabla}_\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = -\langle v, \tilde{\nabla}_\partial / \partial x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = -\langle v, \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \rangle. \end{aligned}$$

Assim sendo, a matriz (6.1) tem a seguinte expressão simplificada

$$(6.2) \quad \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} -\langle v, \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \rangle \\ i, j = 1, \dots, n \end{array} \right) & * \\ 0 & \left( \begin{array}{c} \delta_{ij} \\ i, j = 1, \dots, p-1 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

Em resumo, temos o seguinte resultado.

**PROPOSIÇÃO 6.1** - Seja  $\phi: B \rightarrow S^{n+p-1}$  a aplicação de Gauss generalizada da imersão  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ , com  $M$  tendo a métrica Riemanniana induzida pela imersão. Se  $(x, v) \in B$ , então:

- (i)  $\det \phi_{*(x,v)} = (-1)^n \det(\langle \alpha, v \rangle) = (-1)^n \det A_v$
- (ii)  $\det \phi_{*(x,v)} = (-1)^n \det \left( \frac{\partial^2 h_v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_x$ , o determinante

da Hessiana da função altura  $h_v(y) = \langle f(y), v \rangle$ .

Demonstração: A primeira afirmação segue das observações anteriores, e a segunda segue da Proposição 2.5. C.Q.D.

Então temos que

$$(6.3) \quad \tau(f) = \frac{1}{C_{n+p-1}} \int_M \int_{S_x^{p-1}} |\det A_v| dS_x^{p-1} dM,$$

que é uma expressão em termos mais geométricos. De fato o termo  $\det A_v$  pode ser interpretado da seguinte maneira. Inicialmente observamos que dado  $(x, v) \in B$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que a projeção de  $f(U)$  no  $(n+1)$ -plano gerado por  $f_*TM_x$  e  $v$  é uma imersão de  $U$  como hipersuperfície. Além disso, temos que o determinante de  $A_v$ ,  $G(x, v)$ , é a curvatura de Gauss-Kronecker desta hipersuperfície. Também observamos, usando a proposição 2.5, que o operador  $A_v$  dá informações sobre em quantas direções  $f(U)$  esta na parte de "cima" do hiperplano perpendicular a  $v$ . Em particular, no caso de um hipersuperfície  $G(x, v) = (-1)^n G(x, -v)$  é a curvatura de Gauss-Kronecker, a qual não depende do vetor normal escolhido se a dimensão  $n$  for par. Temos que

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \tau(f) &= \frac{1}{C_n} \int_M |G(x, v)| + |G(x, -v)| dM \\ &= \frac{2}{C_n} \int_M |\det A_v| dM \end{aligned}$$

onde  $C_n$  é o volume da esfera unitária de dimensão  $n$ . No caso especial da superfície no espaço Euclidiano de três dimensões temos

$$(6.3) \quad \tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| dM$$

o que justifica melhor o nome de curvatura total absoluta.

### Pontos críticos da função altura

Queremos dar uma interpretação da curvatura total absoluta em termos das funções alturas e seus pontos críticos. Lembramos que um ponto crítico de uma função diferenciável  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  é um ponto  $x$  tal que  $Xh = 0$  para todo  $X$  em  $TM_x$ . (Para maiores detalhes sobre teoria de Morse veja Milnor [53]).

A Hessiana da função  $h$  no ponto crítico  $x$  é a matriz  $(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1,\dots,n}$ , onde  $(U, (x_1, \dots, x_n))$  é um sistema local de coordenadas ao redor de  $x$ . O ponto crítico é chamado não-degenerado se a matriz Hessiana é não-singular. Como a matriz é simétrica pode-se diagonalizar, e o número  $k$  de autovalores negativos é chamado o índice do ponto crítico.

Para uma função altura  $h_v$ , em particular, temos que  $x$  é um ponto crítico se e somente se  $Xh_v = \langle Xf, v \rangle = \langle f_*X, v \rangle = 0$ , para todo  $X$  em  $TM_x$ , ou seja, se e somente se  $v$  é normal a  $f$  em  $x$ . Logo o conjunto dos pontos críticos de  $h_v$  é  $\phi^{-1}(v)$ . Por outro lado, vimos na proposição 6.1 que o determinante da Hessiana de  $h_v$  no ponto  $x$  é igual a  $(-1)^n \det \phi_{*(x,v)}$ . Em resumo temos o seguinte fato.

PROPOSIÇÃO 6.2 - O ponto  $x$  é um ponto crítico não-degenerado da função altura  $h_v$  se e somente se  $(x,v)$  é um elemento do espaço fibrado normal unitário da imersão  $f$ ,  $B$ , que é também um ponto regular de  $\phi$ .

Lembramos que  $v$  é um valor regular da aplicação diferenciável  $\phi$  se  $\phi^{-1}(v)$  consiste de pontos regulares. Uma função diferenciável  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  que só tem pontos críticos não-degenerados é chamada uma função de Morse.

COROLÁRIO 6.3 - Dada uma imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  existe um conjunto  $D \subset S^{n+p-1}$  tal que

- (i) seu complemento  $S^{n+p-1} - D$  tem medida de Lebesgue zero; consequentemente  $D$  é denso em  $S^{n+p-1}$ .

(ii) D é um aberto de  $S^{n+p-1}$ .

(iii) para todo  $v \in D$ , a função altura  $h_v$  é uma função de Morse.

Demonstração: Pelo teorema de Sard (veja Milnor [71]) o conjunto dos valores críticos da aplicação de Gauss  $\phi$  tem medida de Lebesgue zero; logo o seu complementar, o conjunto dos valores regulares de  $\phi$  que chamaremos de  $D$ , satisfaz (i). Mas a proposição 6.2 nos garante que se  $v \in D$ , isto é, se  $v$  é um valor regular de  $\phi$ , então  $h_v$  só tem pontos críticos não-degenerados. Falta verificar (ii); suponhamos que existe  $v \in D$  tal que  $v = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$  onde os  $v_i$  são valores críticos, isto é, existem pontos  $y_i = (x_i, v_i)$  em  $B$  tal que  $\det \phi_{*y_i} = 0$ . Mas  $B$  é compacto logo podemos assumir que a sequência  $y_i$  converge para um ponto  $y \in B$ . Por continuidade temos que  $\det \phi_{*y} = 0$ ; finalmente, pela continuidade de  $\phi$ , temos que  $\phi(y) = v$ , o que implicaria que  $v$  não podia ter sido um valor regular. C.Q.D.

Observação: Pelo corolário temos que existem muitas funções de Morse em qualquer variedade diferenciável  $M$ , pois, pelo teorema de imersão de Whitney, ela pode ser imersa em algum espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+p}$ .

O que vamos fazer agora é contar o número de pontos críticos de  $h_v$ , para todo  $v$  em  $S^{n+p-1}$ , e integrar essas informações sobre toda a esfera  $S^{n+p-1}$ . Se  $U$  é um subconjunto de  $B$  e  $0 \leq k \leq u$ , definimos  $\mu_k(U, v)$  como o número de pontos  $x$  em  $M$  tais que  $(x, v) \in U$  e que  $x$  seja um ponto crítico não-degenerado de índice  $k$  da função altura  $h_v$ . Seja  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$  uma coleção de abertos conexos de  $B$  tal que  $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$  é igual, exceto por um conjunto de medida zero, ao conjunto dos pontos regulares de  $\phi$ , e tal que  $\phi|_{U_\lambda}$  seja injetiva para todo  $\lambda$  em  $L$ ; essa coleção existe porque o conjunto dos pontos regulares é um aberto de  $M$ . Então temos que

$$\int_{\phi(U_\lambda)} 1 \, dS^{n+p-1} = \int_{U_\lambda} |\phi^*| \, dS^{n+p-1} = \int_{U_\lambda} |\det \phi_*| \, dM$$

pelo teorema de mudança de variáveis.

Pela escola dos  $U$ 's temos que  $\det \phi_{*(x,v)} \neq 0$  para todo  $(x, v)$  em  $U_\lambda$ . Por outro lado, pela proposição 6.1, temos que  $\det \phi_{*(x,v)} = (-1)^n \det \left( \frac{\partial^2 h_v}{\partial x_i \partial y_j} \right)$ , o que implica que o índice de  $x$ , como ponto crítico de  $h_v$ , é uma constante  $k$  para todo  $(x, v) \in U_\lambda$ , pois  $U_\lambda$  é conexo. Também podemos concluir que  $|\det \phi_{*(x,v)}| = (-1)^{k+n} \det \phi_{*(x,v)}$  e temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{U_\lambda} (-1)^n \det \phi_* \, dB &= \int_{\phi(U_\lambda)} (-1)^k \, dS^{n+p-1} = \int_{\phi(U_\lambda) \cap D} (-1)^k \, dS^{n+p-1} \\
 (6.4) \qquad &= \int_{\phi(U_\lambda) \cap D} (-1)^k \mu_k(U_\lambda, \cdot) \, dS^{n+p-1} = \\
 &= \int_{\phi(U_\lambda) \cap D} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_i(U_\lambda, \cdot) \, dS^{n+p-1} = \\
 &= \int_D \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_i(U_\lambda, \cdot) \, dS^{n+p-1},
 \end{aligned}$$

pois, como  $\phi U_\lambda$  é injetiva,  $\mu_\ell(U_\lambda, \omega) = 1$  se e somente se  $(x, \omega)$  em  $U_\lambda$  e  $x$  é um ponto crítico de índice  $\ell$  de  $h_\omega$ , o que também implica que  $\mu_\ell(U_\lambda, \omega) = 0$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n$ , se  $\omega \notin \phi(U_\lambda)$ . Esta fórmula será usada na demonstração do teorema de Gauss-Bonnet que daremos mais tarde. A seguinte fórmula análoga será de grande utilidade no tratamento dos problemas de curvatura total absoluta.

$$\begin{aligned}
 \int_{U_\lambda} |\det \phi_*| \, dB &= \int_{\phi(U_\lambda) \cap D} dS^{n+p-1} = \int_{\phi(U_\lambda) \cap D} \mu_k(U_\lambda, \cdot) \, dS^{n+p-1} = \\
 (6.5) \qquad &= \int_{\phi(U_\lambda) \cap D} \sum_{i=0}^n \mu_i(U_\lambda, \cdot) \, dS^{n+p-1} = \int_D \sum_{i=0}^n \mu_i(U_\lambda, \cdot) \, dS^{n+p-1}
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, podemos expressar a curvatura total absoluta de uma imersão da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
 \tau(f) &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B |\det \phi_*| dB = \\
 (6.6) \quad &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \sum_{\lambda \in L} \int_{U_\lambda} |\det \phi_*| dB = \\
 &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \sum_{\lambda \in L} \int_D \sum_{i=0}^n \mu_i(U_\lambda, \cdot) dS^{n+p-1}
 \end{aligned}$$

Observe que a soma tem sentido pois a integral é finita; observe também que basta integrar sobre  $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$ , pois  $\det \phi_*(x, v) = 0$  se  $(x, v) \notin \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$ .

Agora definimos  $\mu_\ell(v)$  como o número de pontos críticos  $x$  em  $M$  de  $h_v$  de índice  $\ell$ , e  $\mu(v) = \sum_{\ell=0}^n \mu_\ell(v)$ . Estes números são finitos pois os pontos críticos são sempre isolados e  $M$  é uma variedade compacta. Temos também que  $\mu_\ell(U_\lambda, v) = 0$  exceto para um número finito de  $\lambda$ 's. Logo temos que

$$\begin{aligned}
 \tau(f) &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in D} \sum_{i=1}^n \sum_{\lambda \in L} \mu_i(U_\lambda, v) dv \\
 (6.7) \quad &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in D} \sum_{i=0}^n \mu_i(v) dv = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in D} \mu(v) dv
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula (6.4) obtemos



$$\begin{aligned}
 \int_B (-1)^n \det \phi_* \, dB &= \sum_{\lambda \in L} \int_{U_\lambda} (-1)^n \det \phi_* \, dB = \\
 &= \sum_{\lambda \in L} \int_{v \in D} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_i(U_\lambda, v) \, dv = \\
 (6.8) \quad &= \int_{v \in D} \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{\lambda \in L} \mu_\lambda(U_\lambda, v) \, dv = \\
 &= \int_{v \in D} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_i(v) \, dv
 \end{aligned}$$

Lembramos agora as desigualdades de Morse que relacionam o número de pontos críticos de uma função real sobre a variedade com a topologia da variedade; veja Milnor [53], páginas 28 à 31. Seja  $\beta_k(F)$  igual à dimensão do  $k$ -ésimo grupo de homologia de  $M$  com coeficientes num corpo  $F$ ;  $\beta_k(F)$  é chamado o  $k$ -ésimo número de Betti com relação ao corpo  $F$ . Se  $h$  é uma função de Morse, temos que

$$(6.9) \quad \mu_k(h) \geq \beta_k(F) \quad , \quad \text{para todo } k \text{ e } F$$

$$(6.10) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \mu_k(h) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k(F) = \chi(M),$$

onde  $\chi(M)$  denota a característica de Euler.

O teorema de Gauss-Bonnet

Primeiro precisamos falar um pouco sobre as formas de curvatura. Olharemos elas de nosso ponto-de-vista. Para maiores esclarecimentos sobre o uso de formas diferenciais e do método do referencial móvel de Cartan e Chern em geometria, recomendamos as notas de do Carmo [73] (Observamos que as formas de curvatura definida lá diferem das nossas por um sinal negativo.)

Numa vizinhança  $U$  de  $M$  escolhemos  $n$  campos vetoriais diferenciáveis  $X_1, \dots, X_n$  tal que eles são ortonormais em cada ponto. Em  $U$ , definimos as formas de curvatura  $\Omega_j^i$ , que são duas-formas diferenciáveis, pela fórmula

$$(6.11) \quad \Omega_j^i(X_k, X_\ell) = g(R(X_i, X_j)X_\ell, X_k)$$

Vemos que a matriz  $a_{kl} = \Omega_j^i(X_k, X_\ell)$  representa o operador linear  $R(X_i, X_j)$ . Observe também que  $\Omega_j^i(X_i, X_j)$  é igual a curvatura seccional  $K_{ij}$  do plano  $(X_i, X_j)$ . Sejam  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , as formas duais de  $X_1, \dots, X_n$ , isto é,  $\varphi_i(X_j) = \delta_j^i$ . Como em nosso caso,  $\tilde{R} \equiv 0$ , usando a equação (4.2), a equação de Gauss, temos que

$$(6.12) \quad \Omega_j^i = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^n (\alpha_{ik} \cdot \alpha_{j\ell} - \alpha_{i\ell} \cdot \alpha_{jk}) \varphi_k \wedge \varphi_\ell .$$

No que segue vamos assumir que  $M$  é uma variedade compacta conexa e orientada de dimensão par  $n = 2s$ . Consideramos a seguinte  $n$ -forma diferencial fechada (que representa a classe característica de Euler) definida em  $M$ .

$$(6.13) \quad \gamma = \frac{1}{2^{2s} \pi^s s!} \sum_{\phi \in P} \epsilon_{\phi} \Omega_{\phi(1)}^{\phi(2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\phi(2s-1)}^{\phi(2s)}$$

onde  $P$  é o grupo de permutações sobre  $n$  elementos e  $\epsilon_{\phi}$  é o sinal da permutação  $\phi$ . Embora as formas de curvatura  $\Omega_j^i$  dependam dos campos  $X_1, \dots, X_n$ , a forma diferencial  $\gamma$  não depende dessa escolha, se os  $X_i$ 's nessa ordem dão a orientação de  $M$ . Tomando outros campos ortonormais  $Y_1, \dots, Y_n$ , e suas formas de curvaturas correspondentes, poderíamos verificar que a expressão (6.13) só muda pela multiplicação do determinante da aplicação ortogonal que manda os  $X_1, \dots, X_n$  nos  $Y_1, \dots, Y_n$ . Se estes induzem a mesma orientação (a de  $M$ ), então esse determinante é igual a  $+1$ .

Já estamos em condições de enunciar o seguinte teorema

**TEOREMA 6.4 (Gauss-Bonnet)** - Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta orientada de dimensão par  $n = 2s$ . Temos que

$$(6.14) \quad \int_M \gamma = \chi(M)$$

Demonstração: Nós daremos uma demonstração extrínseca deste teorema. Ela dependerá do teorema de Nash [69] que diz que toda variedade Riemanniana compacta pode ser mergulhada isometricamente em algum  $\mathbb{R}^{n+p}$  (de fato,  $p = \frac{1}{2} n(3n + 9)$ ). Fixamos uma tal imersão  $f$ , que terá seu espaço fibrado unitário normal  $B$ . Agora, combinando as fórmulas (6.8) e (6.10) e lembrando que  $n$  é par, vemos que

$$(6.15) \quad \int_B \det \phi_* \, dB = \int_{v \in D} \chi(M) \, dv = \chi(M) \int_{v \in D} dv \\ = \chi(M) c_{n+p-1} ,$$

pois  $S^{n+p-1} - D$  tem medida de Lebesgue zero na esfera  $S^{n+p-1}$ . Por outro lado, da mesma maneira que fizemos para  $\tau(f)$ , temos que

$$\int_B \det \phi_* \, dB = \int_M \left( \int_{S_x^{p-1}} \det A_v \, dS_x^{p-1} \right) dM,$$

usando o item (i) da proposição 6.1, pois  $(-1)^n = (-1)^{2s} = 1$ . A  $n$ -forma  $dM$  é a forma de volume de  $M$  compatível com a orientação de  $M$ .

A forma diferencial  $\gamma$  é uma  $n$ -forma, logo  $\gamma_x = K_n(x) dM_x$ , onde  $K_n(x)$  é um número que é um invariante geométrico da variedade Riemanniana, pois vimos que  $\gamma$

depende só da métrica Riemanniana. O teorema segue da seguinte proposição que relaciona essa curvatura intrínseca  $K_n(x)$  com a medida das curvaturas nas direções normais.

PROPOSIÇÃO 6.5 - Temos que

$$(6.16) \quad K_n(x) = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in S_x^{p-1}} \det A_v \, dv$$

Esta proposição será demonstrada no apêndice.

Ela diz que, embora as curvaturas de Lipschitz-Killing nas direções normais  $v$  dependam fortemente da imersão, a média delas é uma quantidade intrínseca da variedade Riemanniana  $M$ .

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} \int_M \gamma &= \int_M K_n \, dM = \int_M \left( \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in S_x^{p-1}} \det A_v \, dv \right) dM \\ &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B \det \phi_* \, dB = \chi(M) \quad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

COROLÁRIO 6.5 - No caso em que  $M$  é uma superfície compacta orientada de duas dimensões, temos  
que

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \, dM = \chi(M)$$

Demonstração: Neste caso  $s = 1$ , logo

$$\gamma = \frac{1}{2^2 \pi 1!} (\Omega_2^1 - \Omega_1^2) = \frac{1}{2\pi} \Omega_2^1 = \frac{1}{2\pi} K \, dM$$

C.Q.D.

Observe que se  $n$  é ímpar  $\det A_v = (-1) \det A_v$ ; logo,  $\int_{v \in S_x^{p-1}} \det A_v = 0$ . E, usando outra vez as fórmulas (6.8) e (6.10), concluímos o seguinte.

PROPOSIÇÃO 6.6 - Se  $M$  é uma variedade compacta de dimensão ímpar, então  $\chi(M) = 0$ .

Observação: O espaço fibrado normal unitário  $B$  da imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$

pode ser imersa em  $\mathbb{R}^{n+p}$  como o bordo de uma vizinhança tubular de  $f$ . Em  $B$  podemos escolher em cada ponto um vetor normal de uma maneira natural; num ponto  $(x, v) \in B$ , o vetor  $v$  é normal a  $B$ . Como esta escolha de vetores normais é contínua,  $B$  é orientável. O interessante é que  $B$  será orientável mesmo que  $M$  não o seja. Logo podemos pensar em  $\phi: B \rightarrow S^{n+p-1}$  como a aplicação de Gauss usual. Usando a definição de grau topológico em termos de integrais vemos que o grau de  $\phi$  é  $\frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B \det \phi_* \, dB = \chi(M)$ , pela fórmula 6.15; ou seja  $\chi(M)$  é o número de vezes, contendo orientações locais, que cada pedaço de esfera é coberto por  $\phi$ . De fato, este ponto de vista apare

ce claramente na demonstração da fórmula (6.4).

### Desigualdades da curvatura total absoluta

Observamos que o grau de aplicação de Gauss generalizada  $\phi$  mede o número de vezes que  $\phi$  cobre a esfera  $S^{n+p-1}$ , só que contamos negativamente os pedaços onde  $\phi$  reversa orientações (onde  $\det \phi_* < 0$ ). Por outro lado a curvatura total absoluta  $\tau(f)$  mede quantas vezes a esfera é recoberta por  $\phi$  independentemente da orientação de  $\phi$  em cada vizinhança  $U_\lambda$ ; isto pode-se verificar olhando a demonstração da fórmula 6.6. Só que neste caso um pedaço da esfera é recoberto um número de vezes diferente de que outro. Agora queremos obter alguns limites inferiores sobre esse número  $\tau(f)$ .

TEOREMA 6.7 - Se  $f: M^n \rightarrow R^{n+p}$  é uma imersão de uma variedade compacta  $M$ , então

(i)  $\tau(f) \geq \sum_{i=0}^n \beta_i(F)$ , para qualquer corpo  $F$

(ii)  $\tau(f) \geq 2$

(iii) se  $\tau(f) < 3$ , então  $M$  é uma variedade homeomorfa a esfera  $S^n$ .

Demonstração: Pelas fórmulas (6.7) e (6.9)

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in D} \mu(v) dv \geq \\ &\geq \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in D} \sum_{i=0}^n \beta_i(F) dv = \sum_{i=0}^n \beta_i(F). \end{aligned}$$

Como  $M$  é compacta, toda função  $h_v$  deve ter um máximo e um mínimo, logo  $\mu(v) \geq \mu_0(v) + \mu_n(v) \geq 2$ , e  $\tau(f) \geq 2$ . Finalmente, se  $\mu(v)$  fosse maior ou igual a três para todo  $v \in D$  então teríamos que  $\tau(f) \geq 3$ . Logo, se  $\tau(f) < 3$ , então existe uma função de Morse  $h_v$  com exatamente dois pontos críticos. O item (iii) segue agora do teorema de Reeb (veja Milnor [53], página 25) que declara precisamente que uma variedade compacta que admite uma função de Morse que tenha apenas dois pontos críticos é topologicamente equivalente a uma esfera. C.Q.D.

### Imersões justas e curvatura total absoluta mínima

Agora vamos definir uma noção equivalente a curvatura total absoluta mínima.

DEFINIÇÃO - Dizemos que uma imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é

k-justa se  $\mu_j(v) = \beta_j(F)$ ,  $0 \leq j \leq k$ , para todo  $v \in D$  e algum corpo  $F$ . Dizemos simplesmente que  $f$



é justa se  $f$  é  $n$ -justa.

TEOREMA 6.8 - Seja  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  uma imersão de uma variedade compacta  $M$  de dimensão  $n$  num espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Temos que

- (i) se  $f$  é justa então  $f$  tem curvatura total absoluta mínima.
- (ii) se o  $\inf\{\tau(g): g: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}\} = \sum_{i=0}^n \beta_i(F)$  para algum corpo  $F$ , e se  $f$  tem curvatura absoluta total mínima então  $f$  é justa.

Demonstração: Se  $f$  é justa, então  $\mu(v) = \sum \beta_i(F)$  para todo  $v \in D$ , logo, pela fórmula (6.7),

$\tau(f) = \sum_{i=0}^n \beta_i(F)$ . Pelo item (i) do teorema 6.7, temos que  $\inf\{\tau(g): g: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}\} \geq \sum_{i=0}^n \beta_i(F)$ ; logo  $f$  tem curvatura absoluta total mínima.

Inversamente, se  $\tau(f) = \sum_{i=0}^n \beta_i(F)$ , então temos que  $\int_{v \in D} [\mu(v) - \sum_{i=1}^n \beta_i(F)] dv = 0$  o que implica que  $f$  é justa, pois se  $\mu(v) \geq \sum_{i=0}^n \beta_i(F) + 1$  para algum  $v \in D$ , teríamos que  $\mu(w) = \mu(v) \geq \sum_{i=0}^n \beta_i(F) + 1$ , para todo  $w$  numa vizinhança  $W \subset D$  de  $v$ , pois a função  $\mu(z)$  é localmente constante. Mas isto implicaria que

$\int_D [\mu(v) - \sum_{i=0}^n \beta_i(F)] dv \geq \int_W [\mu(v) - \sum_{i=0}^n \beta_i(F)] dv > 0$ , o que

contradiz nossas hipoteses.

C.Q.D.

Observação: A condição de que o  $\inf\{\tau(g): g: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}\}$  é igual a  $\sum_{i=0}^n \beta_i(F)$ , para algum corpo  $F$ , é satisfeita para variedades de dimensão 2, com  $F = \mathbb{Z}_2$ , e para muitas outras, como, por exemplo, o toro  $T^n$  e a esfera  $S^n$ . Mas, isto não acontece para todos, pois isto implicaria que existe uma função de Morse  $h_v$  tal que  $\mu(v) = \sum \beta_i(F)$  o que as vezes não acontece por razões topológicas. De fato para ver qual é o problema, basta olhar uma variedade tal que  $\beta_i(\mathbb{Z}_2) \neq 0$ ,  $\beta_i(\mathbb{Z}_3) = 0$  e  $\beta_j(\mathbb{Z}_2) = 0$ ,  $\beta_j(\mathbb{Z}_3) \neq 0$ .

### Redução da codimensão

Vamos demonstrar agora que a codimensão essencial de uma imersão justa não pode ser muito arbitrária. Dizemos que uma imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é substancial se não existe um hiperplano afim  $H$  de  $\mathbb{R}^{n+p}$  tal que  $f(M) \subset H$ . Temos o seguinte lema

LEMA 6.9 - Seja  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  uma imersão o-justa de uma variedade compacta e conexa. Suponhamos que existe um ponto  $x$  em  $M$ , um vetor  $z \in TM_x^1$  e um subes-

paço  $L$  de  $TM_x^\perp$  de dimensão  $l$ , tal que

(i) se  $v \in TM_x$  é diferente de zero, então

$$\langle \alpha(v, v), z \rangle < 0$$

(ii)  $\alpha(v, w) \in L$ , para todo  $v$  e  $w$  em  $TM_x$ ,

então  $f(M) \subset TM_x \oplus L$ , que consideramos como um

subespaço afim de  $\mathbb{R}^{n+p}$  de dimensão  $n+l$ .

Demonstração: Se  $w$  é um vetor em  $TM_x^\perp$  que é ao mesmo tempo perpendicular a  $w$ , e  $\epsilon < 0$ , temos que  $\langle w + \epsilon z, \alpha(v, v) \rangle = \epsilon \langle z, \alpha(v, v) \rangle > 0$  para todo  $v$  diferente de zero em  $TM_x$ . Pela proposição 6.1, os autovalores da Hessiana da função altura  $h_{w_\epsilon}$  são todos positivos, onde  $w_\epsilon = (w + \epsilon z) / \|w + \epsilon z\|$ . Isto implica que  $x$  é um ponto crítico não degenerado da função altura  $h_{w_\epsilon}$ ; mas pode acontecer que  $h_{w_\epsilon}$  não seja uma função de Morse, pois ela pode ter outros pontos críticos que sejam degenerados.

Usando a proposição 6.1 outra vez, vemos que  $\phi_*(x, w_\epsilon)$  não é singular o que implica, pelo teorema da função inversa, que  $\phi$  é regular numa vizinhança de  $(x, w_\epsilon)$ . Deste fato decorre que existem  $w'_\epsilon \in D$  e  $x'_\epsilon$  à distância no máximo  $2\epsilon$  de  $w_\epsilon$  e  $x_\epsilon$ , respectivamente, tal que  $x'_\epsilon$  é um ponto crítico de índice zero de  $h_{w'_\epsilon}$ , pois  $D$  é denso em  $S^{n+p-1}$ . Ser um ponto crítico de índice zero implica ser um mínimo estrito local. Como  $M$  é conexa  $\beta_0(F) = 1$ ;

logo como  $f$  é  $\epsilon$ -justa e  $\omega'_\epsilon \in D$ ,  $\mu_0(h_{\omega'_\epsilon}) = p_0(F) = 1$ , o que implica que o mínimo local  $x'_\epsilon$  é um mínimo global de  $h_{\omega'_\epsilon}$ . Em outras palavras  $\langle f(y), \omega'_\epsilon \rangle \geq \langle f(x'_\epsilon), \omega'_\epsilon \rangle$ , para todo  $y$  em  $M$ . Logo, fazendo  $\epsilon$  tender a zero, temos que  $\langle f(y), \omega \rangle \geq \langle f(x), \omega \rangle$  para todo  $x$  em  $M$ , por continuidade. Mas, o mesmo argumento é válido para o vetor  $-\omega$ , isto é,  $\langle f(y), -\omega \rangle \geq \langle f(x), -\omega \rangle$ , para todo  $y$  em  $M$ . Esta desigualdade junto com a correspondente a  $\omega$  implica que  $\langle f(y) - f(x), \omega \rangle = 0$ , para todo  $y$  em  $M$ . Logo,  $f(M)$  está contido no hiperplano afim  $f(x) + \omega^\perp$ . Como isto vale para todo  $\omega$  perpendicular a  $f_*TM_x$  e a  $L$ , temos que  $f(M) \subset f_*TM_x \oplus L$ . C.Q.D.

**COROLÁRIO 6.1** - Se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é  $\epsilon$ -justa e substancial então  $p \leq \frac{1}{2} n(n+1)$ .

Demonstração: Pela proposição 3.1 existe um ponto  $x \in M$  e um vetor  $z \in TM_x^\perp$  tal que  $\langle \alpha(v, v), z \rangle < 0$ ,  $\forall v \in TM_x$ ,  $v \neq 0$ . Seja  $v_1, \dots, v_n$  uma base de  $TM_x$ ; como  $\alpha$  é bilinear temos que qualquer  $\alpha(v, \omega)$  é uma combinação linear dos vetores  $\alpha(v_i, v_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Mas como  $\alpha(v_i, v_j) = \alpha(v_j, v_i)$ , no máximo  $\frac{1}{2} n(n+1)$  deles são linearmente independentes, ou seja, eles estão contidos num subespaço de dimensão  $\frac{1}{2} n(n+1)$  de  $TM_x^\perp$ . Agora aplicamos o lema 6.9. C.Q.D.

COROLÁRIO 6.11 - Se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é justa e substancial e toda função altura só tem pontos críticos do tipo máximo ou mínimo, então  $p = 1$ .

Demonstração: Pela Proposição 3.1 existe um ponto  $x \in M$  e um vetor  $z \in TM_x^\perp$  tal que  $\langle \alpha(v,v), z \rangle < 0$  para todo vetor tangente  $v$  diferente de zero. Afirmamos agora que os vetores  $\alpha(v,w)$  estão contidos numa linha de  $TM_x^\perp$ . Do contrário, teríamos que existem  $v$  e  $w$  tais que  $\alpha(v,v) \neq \lambda \alpha(w,w)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Podemos assumir que  $\|\alpha(v,v)\| = \|\alpha(w,w)\| = 1$ . Tomemos

$$z_1 = \frac{\alpha(v,v) - \alpha(w,w)}{\|\alpha(v,v) - \alpha(w,w)\|} ;$$

então

$$\langle z_1, \alpha(v,v) \rangle = \frac{\|\alpha(v,v)\|^2 - \langle \alpha(v,v), \alpha(w,w) \rangle}{\|\alpha(v,v) - \alpha(w,w)\|}$$

e

$$\langle z_1, \alpha(w,w) \rangle = \frac{\langle \alpha(v,v), \alpha(w,w) \rangle - \|\alpha(w,w)\|^2}{\|\alpha(v,v) - \alpha(w,w)\|^2} .$$

Como  $\alpha(v,v)$ ,  $\alpha(w,w)$  são linearmente independentes, temos que

$$\langle \alpha(v,v), \alpha(w,w) \rangle < \|\alpha(v,v)\| \|\alpha(w,w)\| = 1,$$

ou seja  $\langle z_1, \alpha(v,v) \rangle > 0$  e  $\langle z_1, \alpha(w,w) \rangle < 0$ . Deslocan-

do  $z_1$  levemente, se for necessário, podemos assumir que se  $v, w, w_1, \dots, w_{n-2}$  formam uma base de  $TM_x$  então

$$\langle z_1, \alpha(w_i, w_i) \rangle \neq 0, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Isto implicaria que o índice de  $h_{x_1}$  em  $x$  não é zero ou  $n$ ; mas isto implicaria, usando o mesmo argumento da demonstração do lema 6.9, que existe  $z_2$  perto de  $z_1$  tal que  $z_2 \in D$  e  $h_{z_2}$  tem um ponto crítico  $x_2$  perto de  $x$  de índice igual ao de  $x$ , isto é, diferente de zero ou  $n$ , o que contradiz a hipótese de que todos os pontos críticos são do tipo de máximo ou mínimo. C.Q.D.

**TEOREMA 6.12 (Chern-Lashof)** - Se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é uma imersão substancial de uma variedade compacta com curvatura absoluta total  $\tau(f) = 2$  então  $M$  é uma esfera,  $p = 1$ , e  $f$  é convexa.

Demonstração: O fato de que  $\tau(f) = 2$  implica pelo teorema 6.7 que  $M$  é homeomorfa a uma esfera  $S^n$ . Também, segue-se que se  $\tau(f) = 2$ , então, para todo  $v \in D$ ,  $h_v$  só tem dois pontos críticos, um máximo e um mínimo. Logo, pelo corolário 6.11, temos que  $p = 1$ .

Agora demonstraremos que  $f(M)$  está de um lado do plano tangente em todo ponto. Isto é, para todo  $x \in M$ , existe  $z \in TM_x^\perp$  tal que  $z \cdot f(x) \geq z \cdot f(y), \forall y \in M$ . Se  $x$  é um

ponto tal que a aplicação de Gauss  $\phi$  é não singular nele, então perto de  $x$  existe  $x'$  tal que  $z' = \phi(x')$  está em  $D$ , o que implica que  $x'$  é um ponto crítico de  $h_{z'}$ . Mas  $x'$  tem que ser um máximo global ou um mínimo global. Assumamos que é um máximo; do contrário considere  $-z'$ . Então,  $z' \cdot f(x') > z' \cdot f(y)$ ,  $\forall y \in M$ ,  $y \neq x'$ . Fazendo  $x'$  tender a  $x$  temos que  $\phi(x) \cdot f(x) \geq \phi(x) \cdot f(y)$ ,  $\forall y \in M$ . Seja  $A = \{x \in M; \exists z \in TM_x^\perp \text{ e } y \in M; z \cdot f(x) < z \cdot f(y)\}$ , o conjunto  $A$  é aberto; queremos demonstrar que  $A$  é va zio. Seja  $x \in A$  tal que  $k = r(x) \geq r(y)$ ,  $\forall y \in A$ . Logo  $k < n$  e  $r^*(x) = k$ , pois  $A$  é aberto. Mas pelo lema 5.2 temos que por  $x$  passa uma  $(n-k)$ -seção planar  $P$  de  $V_{n-k}$  onde  $\phi$  é constante (veja na seção 5 as definições de  $r$ ,  $r^*$  e de uma  $l$ -seção planar.) Isto implica que  $\phi(w) = \phi(x)$ ,  $\forall w \in \bar{P}$  e que  $\phi(w) \cdot f(w) = \phi(x) \cdot f(x)$   $\forall w \in \bar{P}$ , ou seja  $\phi(w) \cdot f(w) = \phi(x) \cdot f(x) < \phi(x) \cdot f(y) = \phi(w) \cdot f(y)$  para algum  $y \in M$ . Segue-se que  $\bar{P} \subset A$ . Mas se  $x' \in \partial P$  então pelo lema 5.2 temos que  $r^*(x') > > r(x') = k$ . Como  $A$  é aberto,  $\exists x'' \in A$  tal que  $r(x'') > k$  contradizendo a definição de  $k$ . Logo,  $A$  é va zio demonstrando nossa afirmação.

Seja  $\mathbb{H}(f(M))$  a envolvente convexa de  $f(M)$ ; é conhecido que a fronteira desse corpo convexo,  $\partial(\mathbb{H}f(M))$ , é homeomorfo a uma esfera. Pelo que demonstramos anterior

mente,  $f(x) \in \partial(\mathbb{H}f(M)) \quad \forall x \in M$ . A imersão  $f$  é um homeomorfismo local, logo  $f$  é sobre pois  $\partial(\mathbb{H}f(M))$  é conexa. Daí segue-se que  $f$  é um espaço de recobrimento da esfera  $\partial\mathbb{H}f(M)$ ; como a esfera é simplesmente conexa todo recobrimento é um difeomorfismo, o que implica que  $f$  é um mergulho, que divide  $\mathbb{R}^{n+1}$  em duas componentes conexas, uma das quais  $\mathbb{H}(f(M))$  é convexa. C.Q.D.

Se  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e tem curvatura Gaussiana  $K \geq 0$  então

$$\tau(f) = \frac{1}{4\pi} \int_M 2|K| dM = \frac{1}{2\pi} \int_M K dM = \chi(M) = 2,$$

pelo teorema de Gauss-Bonnet; mas  $\tau(f)$  é sempre  $\geq 2$ , logo  $f$  satisfaz as condições do teorema de Chern-Lashof e é consequentemente convexa. Mais geralmente, temos o seguinte

**TEOREMA 6.13 (Sacksteder)** - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão isométrica de uma variedade compacta e conexa com curvaturas seccionais não-negativas então  $f$  é convexa.

Demonstração: Se  $v$  é normal a  $M$  em  $x$  então

$\det A_v \neq 0$  se e somente se todas as curvaturas principais  $\lambda_i$ 's são diferentes de zero. Mas se todas as curvaturas seccionais são maiores do que zero temos



que todos os produtos  $\lambda_i \lambda_j > 0$ , o que implica que todos os  $\lambda_i$ 's têm o mesmo sinal. Daí segue, pela proposição 6.1, que  $x$  é um ponto crítico de índice zero ou  $n$ . Como todas as funções alturas  $h_v$  só tem pontos críticos de índice zero ou  $n$ , então temos que  $0 = \mu_k \geq \beta_k \geq 0$  se  $k = 1, \dots, n-1$ . As desigualdades de Morse mais gerais dizem que  $\mu_\ell - \mu_{\ell-1} + \dots \pm \mu_0 \geq \beta_\ell - \beta_{\ell-1} + \dots \pm \beta_0$ . Daí segue-se que  $\mu_1 - \mu_0 \geq \beta_1 - \beta_0$  ou  $\beta_0 \geq \mu_0$ . Como  $\mu_0 \geq \beta_0 = 1$ , temos que toda função só tem um mínimo. Finalmente como  $\mu_n(z) = \mu_0(-z)$ , obtemos que toda função só tem um máximo também. Desse fato segue-se que  $\tau(f) = 2$  e o teorema segue do teorema de Chern-Lashof. C.Q.D.

#### REFERENCIAS

Nesta seção demonstramos varios teoremas de S.S. Chern e R. Lashof, que apareceram em

- [39] CHERN, S.S. e LASHOF, R. - On the total curvature of immersed manifolds, Amer. J. Math. 79 (1957) 306-318; II. Michigan Math.J. 5(1958), 5-12.

O teorema de Sacksteder que demonstramos aqui pode ser generalizado da seguinte maneira: uma hipersuper

fície completa de  $\mathbb{R}^{n+1}$  com curvaturas seccionais não negativas é convexa. No caso em que a hipersuperfície não é compacta é interessante observar que a curvatura total absoluta da imersão é menor ou igual a 1, ao contrário do caso em que a hipersuperfície é compacta e a curvatura total absoluta é igual a 2. Estes teoremas encontram-se em

- [40] SACKSTEDER, R. - On hypersurfaces with non-negative sectional curvatures, Amer. J. Math. 82 (1960), 609-630.

Uma demonstração mais simples destes resultados acha-se em

- [41] DO CARMO, M. e LIMA, E. - Immersions of manifolds with non-negative sectional curvatures, Bol. Soc. Bras. Mat. 2(1971), 9-22.

Uma generalização destes resultados aparece em

- [42] DO CARMO, M. e WARNER, F.W. - Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres, J. Differential Geometry, 4(1970), 133-144.

Eles demonstram o seguinte

TEOREMA - Seja  $f: M^n \rightarrow S^{n+1}$  uma imersão isométrica de

uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientável com curvaturas seccionais maiores ou iguais a 1 na esfera de curvaturas constantes igual a 1. Então,

i)  $f$  é um mergulho,  $M^n$  é difeomorfa a esfera  $S^n$ , e  $f$  é totalmente geodésica ou  $f(M^n)$  é o bordo de um corpo convexo contido num hemisfério de  $S^{n+1}$ .

ii)  $f$  é rígida, isto é, se  $g: M^n \rightarrow S^{n+1}$  é outra imersão isométrica, então existe uma isometria  $\alpha$  de  $S^{n+1}$  tal que  $g = \alpha \circ f$ .

Os autores fazem diversas observações sobre o teorema análogo no espaço hiperbólico de curvatura constante negativa.

O conceito de imersão justa foi introduzido e explorado por Nicolaas Kuiper. Ele deu exemplos de imersões justas de todas as superfícies compactas sem bordo em  $\mathbb{R}^3$  com característica de Euler menor ou igual a  $-2$ . No seguinte artigo ele demonstra que não existe imersão justa do plano projetivo ou da garrafa de Klein em  $\mathbb{R}^3$ ;

[43] KUIPER, N.H. - On surfaces in Euclidean three-space, Bull. Soc. Math. Belg. 12(1960), 5-22.

Fica em aberto a existência de uma imersão justa de uma superfície compacta sem bordo não orientável

com característica de Euler igual a  $-1$ . Este artigo e o próximo podem ser recomendados como uma primeira leitura para quem estiver interessado no estudo de imersões justas mas tiver experiência exclusivamente em superfícies de  $\mathbb{R}^3$ .

- [44] KUIPER, N.H. - Convex immersions of closed surfaces in  $E^3$ , Comment. Math. Helv. 35(1961), 85-92.

Kobayashi deu muitos exemplos de imersões justas de espaços homogêneos. Tai deu exemplos de imersões justas de todos os espaços projetivos. Veja

- [45] KOBAYASHI, S. - Imbeddings of homogeneous spaces with minimum total curvature, Tohoku Math. J. 19(1967), 63-74.

- [46] TAI, S. - On minimum imbeddings of compact symmetric spaces of rank 1, J. Differential Geometry 2(1968), 55-66.

Nesta seção demonstramos que a codimensão de uma imersão  $o$ -justa é sempre menor que  $\frac{1}{2} n(n+1)$ . No seguinte artigo Kuiper mostra que com certas hipóteses topológicas a codimensão tem que ser mais baixa ainda. Este artigo dá uma visão histórica dos problemas de curvatura total absoluta e imersões justas; ele também possui uma bibliografia extensa.

- [47] KUIPER, N.H. - Minimal total absolute curvature for immersions, *Inventiones Math.* 10(1970), 209-238.

Um exemplo em que a codimensão máxima é atingida é a superfície de Veronese (um plano projetivo) em  $\mathbb{R}^5$ . Kuiper demonstrou que este era essencialmente o único exemplo de imersões justas em  $\mathbb{R}^5$ . Mais tarde Little and Pohl demonstraram que uma imersão o-justa de  $M^n$  em  $\mathbb{R}^{1/2[n(n+3)]}$  é uma variedade de Veronese, o que é surpreendente, pois, esta variedade é algébrica e justa; veja

- [48] KUIPER, N.H. - On convex maps, *Nieuw archief voor Wisk* 10(1962), 147-164.

- [49] LITTLE, J. e POHL, W. - Smooth tight embeddings of high codimension, *Invent. Math.* 13(1971), 179-204.

Uma imersão  $f$  de uma variedade compacta conexa é o-justa se e somente se ela tem a Propriedade dos Dois Pedacos (P.D.P.): para todo hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^{n+p}$ ,  $f^{-1}(\mathbb{R}^{n+p} - H)$  tem no máximo dois componentes conexos. Esta propriedade tem a vantagem de ter uma expressão geométrica simples e de ter sentido para aplicações que não são necessariamente diferenciáveis, como veremos mais adiante.

Esta propriedade foi introduzida por T. Bauchhoff. Já vimos que ela tem fortes implicações em alguns casos. Por outro lado, temos que existem exemplos de hipersuperfícies que tem a P.D.P. mas não são justas; em particular, uma esfera  $S^3$  em  $R^4$  que tem a P.D.P. mas não é justa (logo não é convexa). Primeiro Bauchhoff deu um exemplo polihédrico desta situação; e depois Kuiper deu um exemplo diferenciável deste fenómeno; veja [47] e

[50] BANCHOFF, T. - High codimensional o-tight maps on spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 29(1971), 133-135.

O exemplo mais simples de um toro justo em  $R^3$  é o toro de revolução. O toro de Clifford  $S^1 \times S^1 \subset R^4$  também é justo. Todos os dois são mergulhos. Recentemente, Kuiper deu um exemplo de uma imersão de um toro em  $R^3$  que, simplesmente, não é um mergulho (ainda não publicado).

Uma superfície convexa é rígida. Mais geralmente Nirenberg demonstrou o seguinte resultado

TEOREMA - Seja  $f: M \rightarrow R^3$  uma superfície compacta orientável conexa de  $R^3$  com curvatura absoluta total mínima. Se o gradiente da curvatura  $K$  é diferente de zero quando  $K = 0$ , e se  $M$  não tem curva assintótica fe

chada na região onde  $K < 0$ , então  $f$  é rígida (isto é, se  $g: M^2 \rightarrow R^3$  é outra imersão isométrica, então  $g = \alpha \circ f$ , onde  $\alpha$  é uma isometria de  $R^3$ .)

[51] NIRENBERG, L. - Rigidity of a class of closed surfaces, Nonlinear problems, Proc. Symp. Madison Wisconsin 1962, 177-193.

Nas referencias da seção 3 falamos sobre a rigidez de hipersuperfícies convexas, mesmo das que não são estritamente convexas como as obtidas nesta seção. O seguinte artigo de Sacksteder dá uma boa visão sobre os resultados clássicos e novos nestes problemas de rigidez.

[52] SACKSTEDER, R. - The rigidity of hypersurfaces, J. Math. Mech. 11(1967), 929-939.

Agora vamos ver algumas variações das noções de curvatura total absoluta e imersões justas. Dada uma imersão  $f: M^n \rightarrow R^{n+p}$ , nós temos considerado as funções alturas; mas, poderíamos também considerar as funções distâncias ao quadrado de  $M$  a um ponto  $p \in R^{n+p} - f(M)$ ,  $d(f(x), p)^2$ . Estudando seus pontos críticos podemos obter informações geométricas; de fato,  $x$  é um ponto crítico desta função se e somente se o vetor  $p - f(x)$  é normal a  $f(M)$  e se  $p$  é um ponto focal de  $f(M)$ . Por outro lado,

os pontos focais tem uma relação estreita com as curvaturas principais da imersão nas direções normais. Recomendamos o seguinte livro que faz um estudo claro destes fatos básicos.

- [53] MILNOR, J. - Lectures on Morse Theory, Am. Math. Studies nº. 51, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.

Demonstra-se o seguinte resultado de Nomizu e Rodriguez

TEOREMA - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é uma imersão substancial de uma variedade completa tal que, para todo  $p$  num conjunto  $D$  de  $\mathbb{R}^{n+p}$ , a função  $d(f(x), p)^2$  tem no máximo dois pontos críticos então ou  $p = 0$  e  $f(M^n)$  é  $\mathbb{R}^n$ , ou  $p = 1$  e  $f(M^n)$  é uma esfera geométrica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

- [54] NOMIZU K. e RODRÍGUEZ, L. - Umbilical submanifolds and Morse functions, Nagoya Math. J., 48(1972), 197-201.

Como a função  $d(f(x), p)^2$  pode ser definida quando a variedade grande  $\tilde{M}$  é uma variedade Riemanniana arbitrária, este tipo de problema tem sentido em condições



mais gerais. T. Cecil obteve generalizações deste teorema nos casos em que  $\tilde{M}$  é um espaço hiperbólico ou um espaço projetivo complexo; veja

[55] CECIL, T. - A characterization of metric spheres in hyperbolic space by Morse theory, *Tohoku Math. J., Second Ser.* 26(1974), 341-351.

[56] CECIL, T. - Geometric applications of critical point theory to submanifolds of complex projective space, *Nagoya Math. J.* 55(1974), 5-31.

No caso de  $M^2$  em  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto de  $\mathbb{R}^3$  onde  $d(y,p)^2$  é constante é uma esfera; o índice do ponto crítico  $x$  de  $d(f(x), p)^2$  vai ser o número de direções independentes em  $x$  em que  $M$  vai para dentro da esfera de centro  $p$  tangente a  $M$  em  $f(x)$ . Por esta razão há uma certa relação entre o teorema enunciado acima e o conceito de Propriedade Esférica dos Dois Pedacos (P.E.D.P.):  $f$  tem esta propriedade se  $f^{-1}(\mathbb{R}^3 - S)$  tem no máximo dois componentes conexos qualquer que seja a esfera  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ . No seguinte artigo Banchoff demonstra que as únicas superfícies que têm esta propriedade são a esfera geométrica e os cicloides de Dupin (toros que são obtidos via projeção estereográfica do toro de Clifford  $T^2 \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ).

[57] BANCHOFF, T.F. - The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres, J.Differential Geometry 4(1970), 193-205.

Como observamos anteriormente a propriedade dos dois pedaços (P.D.P.) tem sentido mesmo que a aplicação  $f$  seja só polihédrica ou contínua. Nesta seção demonstramos a equivalência das noções de imersão justa e de curvatura absoluta total mínima. Para variedades de dimensão dois a P.D.P. é equivalente a estas duas noções. Mas, como vimos acima, a P.D.P. não é equivalente para variedades de dimensão maior ou igual a três. A seguir vamos dar uma maneira equivalente de olhar as imersões justas que generaliza o conceito para aplicações contínuas e para variedades com bordo. Dado um  $z \in \mathbb{R}^{n+p}$  e  $c \in \mathbb{R}$ , seja  $M_{z,c}$  o conjunto  $\{x \in M: z \cdot f(x) \leq c\}$  e  $i: M_{z,c} \rightarrow M$  a inclusão natural de  $M_{z,c}$  em  $M$ . Dado um espaço topológico  $Z$  e um corpo  $F$ , denotamos por  $H_j(Z, F)$  o  $j$ -ésimo grupo de homologia de  $Z$  com coeficientes em  $F$ . As imersões com a nova propriedade serão chamadas também de imersões justas. A definição equivalente de imersões justas é a seguinte:  $f$  é uma aplicação  $k$ -justa se existe um corpo  $F$  tal que o homomorfismo  $i_*: H_j(M_{z,c}, F) \rightarrow H_j(M)$  é injetivo para todo  $z \in S^{n+p-1}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $j \leq k$ . Esta definição tem a

vantagem de que se aplica a qualquer aplicação e a qualquer espaço topológico. Kuiper deu uma demonstração da equivalência desta definição e a original para superfícies compactas sem bordo em [48]. Mas, esta demonstração vale para variedades diferenciáveis de qualquer dimensão, como pode ser visto em

[58] RODRÍGUEZ, L. - Convexity and tightness for manifolds with boundary (a ser publicado)

Usando esta definição Kuiper em [47] generaliza o teorema de Chern-Lashof (teorema 6.12) para imersões contínuas da esfera  $S^n$ . Recentemente Kuiper e Pohl demonstraram que uma imersão continua justa substancial do plano projetivo em  $\mathbb{R}^5$  tem que ser uma superfície (algébrica) de Veronese.

[59] KUIPER, N. e POHL, W. - Tight projective planes in  $E^5$  (a ser publicado).

Podemos também considerar imersões contínuas ou diferenciáveis de superfícies com bordo. Banchoff deu um exemplo de uma fita de Moebius justa em  $\mathbb{R}^4$ : se  $e_1, e_2, \dots, e_5$  são 5 vetores em posição geral em  $\mathbb{R}^4$ , então a reunião dos 5 triangulos  $e_1e_2e_3$ ,  $e_2e_3e_4$ ,  $e_3e_4e_5$ ,  $e_4e_5e_1$  e  $e_5e_1e_2$  é uma fita de Moebius justa.

Kuiper demonstrou que toda imersão contínua e justa da fita de Moebius em  $\mathbb{R}^4$  é o exemplo de Banchoff; veja

[60] KUIPER, N. - Tight embeddings of the Moebius band,  
J. Differential Geometry 6(1972), 271-283.

Para uma imersão diferenciável do disco  $D^2$  com o círculo como bordo em  $\mathbb{R}^n$ , ser justa implica que é um corpo convexo em  $\mathbb{R}^2$ ; logo um hemisfério de  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$  não é justa, mas tem a P.D.P. Por outro lado podemos pensar que um hemisfério é convexo no seguinte sentido: i) seu bordo é uma variedade fechada convexa, e ii) está mergulhada no bordo de um corpo convexo. Com esta definição mais ampla temos que se  $M^2$  é homeomorfo à esfera  $S^2$  menos alguns discos (por exemplo, um disco ou um cilindro) então  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2+p}$  tem a P.D.P. e é substancial se e somente se  $p \leq 1$  e  $f$  é convexa; veja

[61] RODRIGUEZ, L. - The two-piece-property and convexity  
for surfaces with boundary, (a ser publicado no J. Differential Geometry, june 1976)

Para variedades  $M^n$  que são topologicamente uma esfera  $S^n$  menos alguns discos de dimensão  $n$ ,  $n > 2$ , a P.D.P. não é suficiente para caracterizar a convexidade da imersão. Mas, temos o seguinte resultado:  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é

substancial e  $(n-2)$ -justa se e somente se  $p \leq 1$  e  $f$  é convexa; veja [58]. Neste artigo demonstra-se também que se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um mergulho de uma variedade  $M^n$  com bordo  $\partial M^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $f$  é justa se e somente se  $f|_{\partial M^n}$  é justa; este resultado é uma generalização de um teorema que é demonstrado de uma maneira muito geométrica na seguinte referencia.

[62] BANCHOFF, T. - The two-piece-property and tight  $n$ -manifolds with boundary in  $E^n$ , Trans. Amer. Math. Soc. 161(1971), 259-267.

N. Grossman definiu uma noção de curvatura absoluta total para variedades com bordo  $M$  mergulhada em  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Ele considerou o conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^{n+p}$  que estão a distancia  $\epsilon$  de  $M$ ,  $M^\epsilon$ , e disse que  $M$  tem curvatura absoluta total mínima se a variedade sem bordo  $M^\epsilon$  a tem, no sentido normal. Ele demonstrou que se  $M^n$  é um disco e a imersão tem curvatura absoluta total mínima então  $M^n$  é um corpo convexo em  $\mathbb{R}^n$ . Usando esta definição, J. White demonstrou que se uma superfície orientável diferenciável de genero  $g$  com só uma curva diferenciável como bordo tem curvatura absoluta total mínima, então  $g=0$  e  $M$  é um corpo convexo em  $\mathbb{R}^2$ ; veja

[63] GROSSMAN, N. - Relative Chern-Lashof theorems,  
J. Differential Geometry 7(1972), 611-618.

[64] WHITE, J. - Minimal total absolute curvature for  
orientable surfaces with boundary, Bull.  
Amer. Math. Soc. 80(1974), 361-362.

Recentemente Kuiper tem estudado aplicações es  
táveis  $C^\infty$  e justas de superfícies compactas sem bordo.  
Elas podem ter singularidades isoladas onde a aplicação  
 $f$  deixa de ser uma imersão. Nestes pontos a curvatura po  
de tender a infinito; mas mesmo assim, a curvatura total  
absoluta esta bem definida e satisfaz a desigualdade

$$\tau(f) \geq \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 2 + \beta_1 = 2 + (-\chi(M) + 2) = 4 - \chi(M),$$

satisfeita por imersões diferenciáveis. Ele demonstra que  
existem aplicações estáveis  $C^\infty$  e justas de qualquer su-  
perfície compacta em  $\mathbb{R}^3$ ; como vimos, isto não acontece se  
exigimos que as aplicações sejam imersões. Veja

[65] KUIPER, N. - Stable surfaces in Euclidean three-  
space, Math. Scand. 36(1975), 83-96.

Banchoff tem dado muitos exemplos de superfí-  
cies polihédricas que tem a P.D.P.. Por exemplo, ele deu  
exemplos de superfícies polihédricas com a P.D.P. substan

cialmente mergulhadas em  $\mathbb{R}^n$ , para qualquer  $n$ ; veja

- [66] BANCHOFF, T. - Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds, Amer. J. Math. 87(1965), 462-472.

Banchoff demonstrou o teorema de Gauss- Bonnet para variedades polihedricas; veja

- [67] BANCHOFF, T. - Critical points and curvature for embedded polyhedra, J. Differential Geometry, 1(1967), 245-256.

Uma demonstração intrínseca do teorema de Gauss- Bonnet foi dada em

- [68] CHERN, S.S. - A simple intrinsic proof of the Gauss- Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. of Math. 45(1944), 747-752.

Nossa demonstração foi extrínseca no sentido de que dependem do fato de que toda variedade Riemanniana completa pode ser mergulhada em algum  $\mathbb{R}^{n+p}$ ; veja

- [69] NASH, J. - The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. 63(1956), 20-63.

Rubens L. de Andrade estuda propriedades de hi-

persuperfícies convexas em espaços de Hilbert no seguinte artigo

- [70] ANDRADE, RUBENS LEÃO DE - Complete convex hypersurfaces of a Hilbert space, J. Diff. Geometry, 10(1975), 491-499.

Para os fatos usados sobre teoria das funções de Morse a melhor referencia é Milnor [53] .

A demonstração do teorema de Sard sobre aplicações diferenciáveis encontra-se em

- [71] MILNOR, J. - Topology from the Differential Viewpoint, Univ. Virginia Press, 1965.

e em

- [72] STERNBERG, S. - Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

Um desenvolvimento das formas de curvatura  $\Omega_j^i$  acha-se em

- [73] DO CARMO, M.P. - Método do Referencial Móvel, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.



A respeito dos fatos básicos de integração sobre variedades, consulte [69].



## 7. OS AXIOMAS DOS $r$ -PLANOS E DAS $r$ -ESFERAS.

Sabemos que para todo ponto  $x$  de uma variedade Riemanniana  $\tilde{M}$  e toda direção  $X$  em  $T\tilde{M}_x$ , existe uma geodésica  $\sigma$  passando por  $x$  tal que seu vetor velocidade em  $x$  seja o vetor  $X$ . É natural fazer a seguinte pergunta: dado um subespaço vetorial de dimensão  $r$ ,  $r \geq 2$ , de  $T\tilde{M}_x$ ,  $L$ , existe uma  $r$ -subvariedade totalmente geodésica  $V$  de  $\tilde{M}$  passando por  $x$  tal que  $TV_x = L$ ? A resposta a esta pergunta é em geral negativa, mesmo localmente. De fato, demonstraremos um resultado de Elie Cartan [74] garantindo que quando a resposta à pergunta acima é positiva para todo  $x$  e todo  $L$  numa variedade  $\tilde{M}$  de dimensão maior ou igual a três, então a curvatura seccional desta variedade é sempre igual a uma constante  $c$ .

Também demonstraremos uma generalização de Leung e Nomizu deste resultado; eles exigem somente que a subvariedade  $V$  seja umbilica e que seu vetor curvatura média seja paralelo na conexão normal.

Primeiro daremos as definições dos conceitos de geometria Riemanniana que usaremos, e desenvolveremos as

fórmulas básicas de Codazzi e de Ricci.

### Fatos básicos

Lembramos que uma subvariedade  $V$  de  $\tilde{M}$  é geodésica no ponto  $p$  se as geodésicas de  $V$  partindo de  $p$  são geodésicas de  $\tilde{M}$  também. Uma subvariedade é chamada totalmente geodésica quando ela for geodésica em todos seus pontos. Uma subvariedade  $V$  é totalmente geodésica se e somente se sua segunda forma fundamental  $\alpha$  é identicamente nula; este fato é demonstrado em [76], seção 1.6. Observamos que dado um  $r$ -subespaço  $L$  de  $T\tilde{M}_x$ , sempre existe localmente uma subvariedade  $V$  geodésica em  $x$  com  $TV_x = L$ . Basta considerar a imagem de  $L$  pela aplicação exponencial  $\exp_x: T\tilde{M}_x \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\exp_x L = V$  (veja [76]); mas esta subvariedade  $V$  pode deixar de ser geodésica em outros pontos.

O vetor curvatura média de uma imersão  $f: V \rightarrow \tilde{M}$  no ponto  $x$  é um vetor normal a  $V$  em  $x$ , definido como  $\mu_x = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \alpha(X_i, X_i)$ , onde  $\{X_1, \dots, X_r\}$  é um referencial ortonormal tangente a  $V$  em  $x$ , e  $\alpha$  é a segunda forma fundamental. Dizemos que uma subvariedade é mínima se  $\mu_x = 0$  para todo  $x$  em  $V$ . Estas subvariedades não

serão estudadas nestas notas; um estudo amplo delas é feito por G. Colares [79] e B. Lawson [80]. Dizemos que  $V$  é uma subvariedade umbílica de  $\tilde{M}$  se  $\alpha(X,Y) = \tilde{g}(X,Y)\mu$  para todo  $X,Y$  tangentes a  $V$ , ou, equivalentemente, se  $A_\xi = \tilde{g}(\xi,\mu)I$  para todo  $\xi$  normal a  $V$ , onde  $I$  é a transformação identidade e  $\tilde{g}$  é o tensor que define a métrica Riemanniana de  $M$ . Observe que a noção de subvariedade umbílica generaliza a noção de subvariedade totalmente geodésica, pois uma subvariedade umbílica é totalmente geodésica se e somente se  $\mu \equiv 0$ .

Dada uma subvariedade  $V$  de  $\tilde{M}$ , temos as derivadas covariantes  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$ , e os tensores curvaturas  $R$  e  $\tilde{R}$  de  $V$  e de  $\tilde{M}$ , respectivamente, dos quais já temos falado em seções anteriores. Também temos a derivada covariante  $\nabla^\perp$  da conexão normal. Suas propriedades de derivação foram obtidas no exercício 2.3; ele apareceu também na fórmula de Weingarten (fórmula 2.2). Como para qualquer conexão, podemos definir o tensor curvatura da conexão normal da seguinte maneira

$$(7.1) \quad R^\perp(X,Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla^\perp [X,Y] \xi,$$

onde  $X$  e  $Y$  são tangentes a  $V$  e  $\xi$  é um campo vetorial normal a  $V$ .

Lembramos que se  $\tilde{M}$  tem curvatura seccional constante igual a  $c$ , então o tensor curvatura  $\tilde{R}$  tem uma expressão simples

$$(7.2) \quad \tilde{R}(X, Y)Z = c[\tilde{g}(Y, Z)X - \tilde{g}(X, Z)Y]$$

onde  $X, Y, Z$  estão em  $\tilde{z}(\tilde{M})$  e  $\tilde{g}$  é o tensor da métrica de  $\tilde{M}$ .

Agora vamos desenvolver para variedades  $V$  e  $\tilde{M}$  arbitrárias as equações de Codazzi e de Ricci. Sejam  $X$  e  $Y$  tangentes a  $V$  e  $\xi$  normal a  $V$ ; temos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)\xi &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi \\ &= \tilde{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla_Y^\perp \xi) - \tilde{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi) - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi \\ &= \nabla_X(-A_\xi Y) + \alpha(X, -A_\xi Y) - A_{\frac{\nabla_Y^\perp \xi}{\xi}} X + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi + \nabla_Y(A_\xi X) + \\ &\quad + \alpha(Y, A_\xi X) + A_{\frac{\nabla_X^\perp \xi}{\xi}} Y - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi + A_\xi([X, Y]) - \nabla_{[X, Y]}\xi \end{aligned}$$

A componente tangente de (7.3) é

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)\xi)^T &= -(\nabla_X A_\xi)Y - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\frac{\nabla_X^\perp \xi}{\xi}} X + \\ (7.4) \quad &\quad + (\nabla_Y A_\xi)X + A_\xi(\nabla_Y X) + A_{\frac{\nabla_Y^\perp \xi}{\xi}} Y + A_\xi([X, Y]) \\ &= (\nabla_Y A_\xi)X - A_{\frac{\nabla_Y^\perp \xi}{\xi}} X - (\nabla_X A_\xi)Y + A_{\frac{\nabla_X^\perp \xi}{\xi}} Y \end{aligned}$$

usando o fato que  $\nabla$  é simétrica e que a derivada covariante de  $A_\xi$ ,  $\nabla_X A_\xi$  satisfaz  $(\nabla_X A_\xi)Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y)$ ,

(esta fórmula pode ser tomada como a definição da derivada do tensor  $A_\xi$ ). A fórmula (7.4) é a equação de Codazzi na sua forma mais geral. Se  $\tilde{M}$  tem curvatura constante então  $\tilde{R}(X, Y)\xi = c[\tilde{g}(Y, \xi)X - \tilde{g}(X, \xi)Y] = 0$  pois  $\xi$  é normal a  $X$  e  $Y$ . Logo a equação de Codazzi fica mais simples

$$(7.5) \quad (\nabla_Y A_\xi)X - A_{\nabla_Y \xi} X = (\nabla_X A_\xi)Y - A_{\nabla_X \xi} Y.$$

Quando  $V$  é uma hipersuperfície numa variedade  $\tilde{M}$  de curvatura constante, temos ainda que só existe uma linha normal, gerada por  $\xi$ , e  $\nabla_X^\perp \xi = \tilde{g}(\nabla_X^\perp \xi, \xi)\xi = 0$  se  $\tilde{g}(\xi, \xi) = 1$ ; logo temos

$$(7.6) \quad (\nabla_Y A_\xi)X = (\nabla_X A_\xi)Y$$

Por outro lado, a componente normal de (7.3) é

$$(7.7) \quad (\tilde{R}(X, Y)\xi)^N = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y)$$

Esta equação é chamada a equação de Ricci. Tomando o produto interno de (7.7) com um vetor normal  $\xi'$  temos que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi, \xi') &= \tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi, \xi') + \tilde{g}(\alpha(Y, A_\xi X), \xi') - \tilde{g}(\alpha(X, A_\xi Y), \xi') = \\ &= \tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi, \xi') + \tilde{g}(A_\xi Y, A_\xi X) - \tilde{g}(A_\xi X, A_\xi Y) = \\ &= \tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi, \xi') + \tilde{g}(A_\xi, A_\xi X, Y) - \tilde{g}(A_\xi A_\xi, X, Y) \end{aligned}$$

Se denotamos a matrix  $A_\xi, A_\xi - A_\xi A_\xi$ , como o colchete  $[A_\xi, , A_\xi]$ , temos então

$$(7.8) \quad \tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi, \xi') = \tilde{g}([A_\xi, A_\xi, ]X, Y) + \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi, \xi')$$

Quando a curvatura de  $\tilde{M}$  é constante  $\tilde{R}(X,Y)\xi = 0$  e temos

$$(7.9) \quad \tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi, \xi') = \tilde{g}([A_\xi, A_\xi, ]X, Y)$$

O seguinte lema clássico será usado na demonstração dos teoremas desta seção. Se  $X$  e  $Y$  são linearmente independentes denotamos por  $\tilde{K}_{(X,Y)}$  a curvatura seccional do plano  $(X,Y)$  gerado por  $X$  e  $Y$ .

**LEMA 7.1 (F. Schur) -** Seja  $\tilde{M}$  uma variedade Riemanniana conexa de dimensão  $n \geq 3$ . Se para todo ponto  $x$ , as curvaturas seccionais  $\tilde{K}_{(X,Y)}$  de planos de  $TM_x$  são todas iguais a uma constante  $c_x$ , então  $\tilde{M}$  tem curvatura constante, isto é,  $c_x = c$ , para todo  $x \in M$ .

Não daremos uma demonstração deste lema surpreendente; veja [76], p. 187, ou [78], p. 202. O próximo lema diz que basta verificar as curvaturas  $K_{(X_i, X_j)}$  para um



referencial ortonormal em  $x$ .

LEMA 7.2 - Seja  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  um referencial ortonormal de  $TM_x$ . Se as curvaturas seccionais

$K(X_i, X_j)$ ,  $1 \leq i < j \leq \ell \leq n$  são iguais a  $c$  então para todo plano  $\sigma$  contido no subespaço gerado por

$X_1, X_2, \dots, X_\ell$  temos que  $K_\sigma = c$ .

Demonstração: Usaremos indução em  $\ell$ . Quando  $\ell = 2$  só

temos um plano  $\sigma = (X_1, X_2)$ . Assumindo que o resultado vale para  $k = \ell$  demonstraremos que vale para

$k = \ell + 1$ . Seja  $\sigma$  um plano no espaço gerado por

$X_1, \dots, X_{\ell+1}$ . Se  $\sigma$  está contido no espaço gerado por

$X_1, \dots, X_\ell$ , então  $K_\sigma = c$  pela hipótese indutiva. Do

contrário  $\sigma$  intersecta este subespaço numa linha gerada

por um vetor unitário  $Y = \sum_{i=1}^{\ell} a_i X_i$ . Agora seja  $Z$  o vetor unitário perpendicular a  $Y$  que com ele gera  $\sigma$ . Temos

que  $Z = aY' + bX_{\ell+1}$ , onde  $Y' = \sum_{i=1}^{\ell} d_i X_i$  é unitário.

Observe que se  $W = \sum_{i=1}^{\ell} \ell_i X_i$  é um vetor unitário então

$$K_{(W, X_{\ell+1})} = \tilde{g}(\tilde{R}(W, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, W) = \sum_{i,j=1}^{\ell} e_i e_j \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, X_j) =$$

$$(7.10) \quad = \sum_{i=1}^{\ell} e_i^2 \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, X_i) + \sum_{i \neq j} e_i e_j \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, X_j) =$$

$$= c + 0 = c.$$

pois  $e_i e_j \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, X_j) = e_i e_j (-\tilde{g}(\tilde{R}(X_j, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, X_i)) = -e_i e_j \tilde{g}(\tilde{R}(X_j, X_{\ell+1})X_{\ell+1}, X_i)$ . (Esta é uma das propriedades básicas do tensor curvatura  $\tilde{R}$ ; veja, por exemplo [78], p. 198).

Agora temos que  $K_{(Z, Y)} = \tilde{g}(\tilde{R}(Z, Y)Y, Z) = a^2 \tilde{g}(\tilde{R}(Y', Y)Y, Y') + ab[\tilde{g}(\tilde{R}(Y', Y)(Y, X_{\ell+1})) + b^2 \tilde{g}(\tilde{R}(X_{\ell+1}, Y)Y, X_{\ell+1})] = a^2 c + 0 + b^2 c = (a^2 + b^2)c = \langle Z, Z \rangle c = c$ , pela fórmula (7.10) com  $W = Y$ , e pela hipótese indutiva aplicada ao plano gerado por  $Y$  e  $Y'$ . C.Q.D.

O seguinte fato só será usado na próxima seção para caracterizar as subvariedades umbilicas de  $\mathbb{R}^m$ .

PROPOSIÇÃO 7.3 - Seja  $\tilde{M}$  uma variedade Riemanniana com curvatura constante. Se  $V$  é uma subvariedade umbilica de  $\tilde{M}$ , então o seu vetor curvatura media  $\mu$  é paralelo com relação a conexão normal.

Demonstração: Precisamos demonstrar que para qualquer vetor  $X$  temos que  $\nabla_X^\perp \mu = 0$ . Como  $V$  é umbilica,  $A_\xi = \tilde{g}(\xi, \mu)I$ ; logo  $\nabla_X A_\xi = [X\tilde{g}(\xi, \mu)]I = [\tilde{g}(\nabla_X^\perp \xi, \mu) + g(\xi, \nabla_X^\perp \mu)]I = A_{\nabla_X^\perp \xi} + g(\xi, \nabla_X^\perp \mu)I$ . Então, usando a fórmula (7.5) temos que  $\tilde{g}(\xi, \nabla_X^\perp \mu)Y = \tilde{g}(\xi, \nabla_Y^\perp \mu)X$ . Como podemos escolher  $Y$  linearmente independente a  $X$ , e  $\xi$  arbitrariamente, concluímos que  $\nabla_X^\perp \mu = 0$ , qualquer

que seja  $X$ , e  $\mu$  é paralelo com relação a conexão normal.

C,Q.D.

### O axioma dos r-planos

A pergunta feita no começo da seção sugere a seguinte definição.

DEFINIÇÃO - Dizemos que um n-variedade Riemanniana  $\tilde{M}$  satisfaz o axioma dos r-planos, para algum r fixo,  $r \geq 2$ , se para todo  $x$  em  $\tilde{M}$  e todo r-subespaço vetorial  $L$  de  $T\tilde{M}_x$ , existe uma r-subvariedade  $V$  totalmente geodésica passando por  $x$  tal que  $TV_x = L$ .

O problema então é saber que variedades satisfazem o axioma dos r-planos. Elie Cartan [74], (§.212) deu uma resposta completa no seguinte teorema

TEOREMA 7.4 - Se uma variedade Riemanniana  $\tilde{M}$  de dimensão  $n \geq 3$  satisfaz o axioma dos r-planos para algum  $r$ ,  $2 \leq r \leq n-1$ , então ela tem curvatura seccional constante.

Precisaremos também do seguinte lema de Cartan.

LEMA 7.5 - Se  $\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,X) = 0$  para todo trio de vetores ortonormais  $X, Y$  e  $Z$  em  $T\tilde{M}_x$ , então

todas as curvaturas seccionais em x são iguais.

Demonstração: Pelo lema 7.2 basta demonstrar que

$K_{(X_i, X_j)} = K_{(X_i, X_k)}$  para todo  $i, k, j$  diferentes, onde  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  é um referencial ortonormal de  $TM_x$ . Mas considere  $Y = (X_j + X_k)/\sqrt{2}$  e  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j - X_k)$ ; temos que  $X_i, Y$  e  $Z$  são também ortonormais, logo  $\tilde{g}(\tilde{R}(X_i, Y)Z, X_i) = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, (X_j + X_k)/\sqrt{2})(X_j - X_k)/\sqrt{2}, X_i) = \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_j)X_j, X_i) + \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_k)X_j, X_i) - \\ &\quad - \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_j)X_k, X_i) - \tilde{g}(\tilde{R}(X_i, X_k)X_k, X_i)] = \\ &= \frac{1}{2} [K_{(X_i, X_j)} + 0 - 0 - K_{(X_i, X_k)}] \quad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

Demonstração do teorema 7.4: Pelos lemas 7.1 e 7.5, basta verificar que para quaisquer  $X, Y$  e  $Z$  ortonormais em  $x$ ,  $g(\tilde{R}(X, Y)Z, X) = 0$ .

Seja  $L$  um  $r$ -subespaço vetorial de  $TM_x$  contendo  $X$  e  $Y$  tal que  $Z$  é perpendicular a  $L$ . Pelo axioma dos  $r$ -planos, existe uma  $r$ -subvariedade totalmente geodésica  $V$  tal que  $TV_x = L$ . Se  $\alpha$  é a segunda forma fundamental de  $V$  em  $\tilde{M}$  então  $\alpha \equiv 0$ . Agora  $\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z$ , onde  $\tilde{\nabla}$  é a derivada covariante de  $\tilde{M}$ . Como  $g(\tilde{\nabla}_X Z, W) = -\langle \alpha(X, W), Z \rangle = 0$ , se  $W$  é tangente a  $V$ , temos que  $\tilde{\nabla}_X Z$  é normal a  $V$ , para todo  $X$  tangente a  $V$ . Como isto vale numa vizinhança de  $x$ ,  $\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z$  é

também normal. Similarmente  $\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z$  e  $\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$  são normais a  $V$ . Logo  $g(\tilde{R}(X,Y)Z,X) = 0$ . C.Q.D.

O axioma das r-esferas

Como uma generalização do axioma dos r-planos temos a seguinte propriedade.

DEFINIÇÃO - Uma variedade Riemanniana satisfaz o axioma das r-esferas, para um inteiro  $r \geq 2$  fixo, se para qualquer  $x$  em  $\tilde{M}$  e r-subespaço vetorial  $L$  de  $T\tilde{M}_x$ , existe uma r-subvariedade umbilica  $V$  com vetor curvatura média  $\mu$  paralelo com relação a conexão normal tal que  $TV_x = L$ .

Demonstraremos o seguinte resultado de Leung e Nomizu [75] que generaliza o teorema 7.4.

TEOREMA 7.6 - Se uma variedade Riemanniana de dimensão  $n \geq 3$  satisfaz o axioma das r-esferas para algum  $r$ ,  $2 \leq r \leq n-1$ , então ela tem curvatura seccional constante.

Demonstração: Como no teorema 7.4, usando os lemas 7.1 e 7.5, vemos que basta demonstrar que  $\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,X) = 0$  para todo trio  $X, Y$  e  $Z$  de vetores ortonormais de  $T\tilde{M}_x$ , para todo  $x \in \tilde{M}$ . Seja  $L$  um r-su

espaço de  $TM_x$  contendo  $X$  e  $Y$  e perpendicular a  $Z$ .  
 Pelo axioma das  $r$ -esferas existe uma subvariedade umbilica  
 $V$  passando por  $x$  tal que  $TV_x = L$ , e tal que seu vetor  
 de curvatura média  $\mu$  é paralelo. Seja  $U$  uma vizinhan-  
 ça normal de  $x$  em  $V$ . Seja  $\xi$  um campo normal a  $V$  em  
 $U$  definido da seguinte maneira:  $\xi_x = Z$ , e ao longo de geo-  
 désicas emanando de  $x$ ,  $\xi$  é paralelo com relação a cone-  
 xão normal. Como  $V$  é umbilica,  $A_\xi = \tilde{g}(\xi, \mu)I$ , mas ao lon-  
 go de uma geodésica  $\sigma(t)$  emanando de  $x$ , temos que  

$$\frac{d}{dt} \tilde{g}(\xi, \mu) = \tilde{g}(\nabla_{\sigma'(x)}^\perp \xi, \mu) + \tilde{g}(\xi, \nabla_{\sigma'(x)}^\perp \mu) \equiv 0.$$
 Como  $x$  é um ponto comum a todas estas geodésicas temos que  $A_\xi = \lambda I$   
 para alguma constante  $\lambda$ . Logo  $\nabla_X A_\xi = \nabla_X^\perp \xi = 0$  para to-  
 do  $X \in TM_x$ . Então pela fórmula (7.4) a componente tangen-  
 te  $(\tilde{R}(X, Y)Z)^T = (R(X, Y)\xi_x)^T = 0$ . Logo  $\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, X) = 0$ .  
 C.Q.D.

#### REFERÊNCIAS

Nas seções §.211 e §.212 de [74], Cartan demons-  
 tra o teorema 7.4. Em outras seções, §.108 à §.116, ele  
 demonstra a equivalência, para variedades Riemannianas de  
 dimensão 3, entre satisfazer o axioma dos planos e possuir  
 uma de duas propriedades interessantes. Uma delas é a pro-  
riedade da "livre mobilidade"; uma variedade de três di-

mensões tem esta propriedade se dados pontos  $a_1$  e  $a_2$  e pares de vetores ortonormais  $\{v_1, w_1\}$  e  $\{v_2, w_2\}$  tangente à variedade em  $a_1$  e  $a_2$ , respectivamente, existe uma isometria  $F$  da variedade tal que  $F(a_1) = F(a_2)$  e  $F_{*a_1}(v_1) = v_2$  e  $F_{*a_2}(w_1) = w_2$ . A outra é a existência, para cada ponto  $a$  da variedade, de uma vizinhança  $U_a$  e de uma aplicação  $f_a: U_a \rightarrow \mathbb{R}^3$  que manda geodésicas sempre em retas. Tais aplicações chamam-se aplicações de Beltrami. Logo, pelo teorema 7.4, qualquer variedade Riemanniana de dimensão 3 que tem a propriedade de livre mobilidade, ou que possui para cada ponto uma aplicação de Beltrami, é uma variedade de curvatura seccional constante. Mas estas duas propriedades podem ser estendidas a variedades de maior dimensão  $n$ . Por exemplo as aplicações de Beltrami seriam agora de  $U_a$  para  $\mathbb{R}^n$ . Uma aplicação interessante das aplicações de Beltrami é feita por Carmo e Warner [76] na demonstração de que uma hipersuperfície da esfera com curvaturas maiores ou igual a um é convexa; a idéia neste caso é reduzir o problema ao teorema de Sacksteder em  $\mathbb{R}^n$  via uma aplicação de Beltrami. Para variedades de dimensão  $n$  diríamos que a variedade possui a propriedade de livre mobilidade se para dois referenciais ortonormais  $\{a_1, X_1, X_2, \dots, X_n\}$  e  $\{a_2, Y_1, \dots, Y_n\}$  em  $a_1$  e  $a_2$  existe uma isometria  $F$  da variedade tal

que  $F(a_1) = a_2$  e  $F_{*a_1}(X_i) = Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Mesmo quando  $n > 3$ , esta propriedade implica que a variedade tem curvatura constante. De fato, esta propriedade implica que o grupo das isometrias da variedade  $I$  tem dimensão  $\frac{1}{2} n(n+1)$ . Na nota 10, p. 308, de [78] demonstra-se que quando  $\dim I = \frac{1}{2} n(n+1)$ , que é a maior possível, então a variedade não só tem curvatura constante senão que é isométrica ou ao espaço euclideo  $\mathbb{R}^n$ , ou ao espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , ou à esfera, ou ao espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$ .

[74] CARTAN, E. - Leçons sur la Geometrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1946.

[75] LEUNG, D.S. e NOMIZU, K. - The axiom of spheres in Riemannian geometry, J. Differential Geometry 5(1971), 487-489.

[76] DO CARMO, M.P. - Notas de Geometria Riemanniana, Monografia de Matemática, IMPA, 1971.

[77] DO CARMO, M.P. e WARNER, F.W. - Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres, J. Differential Geometry 4(1970), 133-144.

[78] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K. - Foundations of Differential Geometry, I, Interscience Publishers, New York, 1963.



- [79] COLARES, G. - Notas sobre Imersões Mínimas, Monografias de Matemática, IMPA, 1976.
- [80] LAWSON, B. - Lectures on Minimal Submanifolds, Monografias de Matemática, IMPA.



## 8. CURVATURA MÉDIA ABSOLUTA TOTAL DE SUBVARIÉDADES

Nesta seção vamos estudar uma generalização da noção de curvatura absoluta total. Dada uma imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  temos, para cada vetor  $v \in TM_x^\perp$ , a aplicação linear simétrica  $A_v: TM_x \rightarrow TM_x$ . Na seção 6 estudamos as curvaturas de Lipschitz-Killing, ou seja o  $\det A_v$ ; agora veremos outras curvaturas obtidas da aplicação  $A_v$  como a curvatura média, o traço de  $A_v$ . Integrando estas curvaturas obtemos outras curvaturas totais. Vamos demonstrar um teorema de B.Y. Chen [82] que garante que quando a integral dos valores absolutos das curvaturas médias é um mínimo  $f(M)$  é uma esfera métrica mergulhada em  $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+p}$ .

Dada a imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  temos o seu espaço fibrado unitário normal  $B$  (definido na seção 6). Definimos as  $i$ -ésimas curvaturas médias no ponto  $x$  e na direção normal  $v$ ,  $G_i(x,v)$ , pela seguinte fórmula

$$\det(I + tA_v) = 1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} G_i(x,v) t^i,$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ , e  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ . Definimos a  $i$ -ésima curvatura média absoluta total como a seguinte integral

$$\tau_i(f) = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B |G_i(x,v)|^{n/i} dB,$$

onde  $c_{n+p-1}$  é o volume da esfera unitária em  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Como  $G_n(x,v)$  é igual ao  $\det A_v = G(x,v)$  temos que  $\tau_n(f)$  a curvatura absoluta total definida na seção 6.

Primeiro obteremos uma relação entre as diferentes curvaturas médias. Lembramos que a matriz  $A_v$  é simétrica, pode-se diagonalizar, e seus autovalores  $k_i(x,v)$  são chamados de curvaturas principais na direção  $v$ . O seguinte lema algébrico será muito útil

LEMA 8.1 - Sejam  $a_1, \dots, a_n$  números não-negativos e  
 $M_i, i = 1, \dots, n$  definidos pela equação  
 $\det(I + tA) = 1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} M_i t^i$ , onde  $A$  é a matriz diagonal com coeficientes diagonais  $a_1, \dots, a_n$ . Então, temos que

$$(M_1)^n \geq M_2^{n/2} \geq \dots \geq M_i^{n/i} \geq \dots \geq M_n.$$

Além disso, se  $a_1, \dots, a_n$ , são todos positivos, então a igualdade em qualquer estágio implica que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

A demonstração deste lema pode ser encontrada, por exemplo, em [87], p. 52. Mas, o leitor deve tentar demonstrar, pelo menos, que  $M_1^n \geq M_n$ .

COROLÁRIO 8.2 - Se as curvaturas principais  $k_i(x,v)$ ,  $i = 1, \dots, v$ , são todas positivas ou negativas, então

$$|G_1(x,v)|^n \geq |G_2(x,v)|^{n/2} \geq \dots \geq |G_{n-1}(x,v)|^{n/(n-1)} \geq |G(x,v)|.$$

Além disso, se temos igualdade em qualquer estágio, então  $k_1(x,v) = k_2(x,v) = \dots = k_n(x,v)$ , (em outras palavras,  $x$  é um ponto umbílico na direção  $v$ ).

Demonstração: O corolário segue-se imediatamente do lema e do fato que os autovalores da matriz  $A_v$  são exatamente  $k_1(x,v), \dots, k_n(x,v)$ . C.Q.D.

Vamos usar este corolário para demonstrar o seguinte teorema que generaliza o teorema 6.7.

TEOREMA 8.3 - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é uma imersão isométrica de uma variedade compacta, então

$$\tau_i(f) \geq 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demonstração: Seja  $F$  o subconjunto de  $B$  definido como  $\{(x,v) \in B: \text{as curvaturas principais são todas positivas ou todas negativas}\}$ . Lembrando o estudo feito na seção 6 sobre funções alturas, sabemos que para todo  $v$  num conjunto denso e aberto  $D$  da esfera  $S^{n+p-1}$ ,

a função altura  $h_v$  só tem pontos críticos não degenerados; conseqüentemente, os máximos e mínimos são pontos  $x$  tal que  $(x, v) \in F$ , pelas proposições 6.1 e 6.2. Logo temos que

$$\frac{1}{c_{n+p-1}} \int_F |G(x, v)| dF = \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{v \in D} \mu_0(v) + \mu_n(v) dS^{n+p-1} \geq 2,$$

pois toda função definida em  $M$  tem pelo menos um máximo e um mínimo. Finalmente, temos que

$$\tau_i(f) \geq \frac{1}{c_{p+n-1}} \int_F |G_i(x, v)|^{n/i} dF \geq \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_F |G(x, v)| dF \geq 2$$

pelo corolário 8.2.

C.Q.D.

A pergunta natural que nós fazemos agora é: que acontece quando  $\tau_i(f) = 2$ , o menor valor possível? No caso em que  $i = n$ ,  $\tau_n(f) = \tau(f)$ , e o resultado de Chern e Lashof, teorema 6.12, nos garante que  $f$  é uma imersão convexa. Se  $i < n$ , o seguinte teorema obtém uma conclusão mais forte.

**TEOREMA 8.4** - Seja  $f: M^n \rightarrow R^{n+p}$  uma imersão isométrica de uma variedade compacta no espaço Euclidiano  $R^{n+p}$ . Se para algum  $i$ ,  $i < n$ ,  $\tau_i(f) = 2$  então  $f(M)$  é uma esfera métrica num plano de dimensão  $n+1$  em  $R^{n+p}$ .

Demonstração: Na demonstração do teorema 8.3 vimos que

$$\begin{aligned} \tau_i(f) &= \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_B |G_i(x,v)|^{n/i} dB \geq \\ &\geq \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_F |G_i(x,v)|^{n/i} dF \geq \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_F |G(x,v)| dF \geq 2. \end{aligned}$$

Como  $\tau_i(f) = 2$ , todas as desigualdades são igualdades. Segue-se que  $G_i(x,v) = 0$  se  $(x,v) \notin F$ , isto é, se as curvaturas principais não são todas positivas ou negativas; ou seja, se num ponto  $x \in M$  os autovalores de  $A_v$  são todos diferentes de zero, então eles são todos positivos, ou todos negativos. Por outro lado,  $\int_F |G_i(x,v)|^{n/i} dF = \int_F |G(x,v)| dF$  implica que  $|G_i(x,v)|^{n/i} = |G(x,v)|$ , o que implica, pelo corolário 8.2, que  $k_1(x,v) = k_2(x,v) = \dots = k_n(x,v) \neq 0$ , para todo  $(x,v) \in F$ . Seja  $U = \{(x,v) \in B: k_1(x,v) = \dots = k_n(x,v)\}$  temos que  $F \subset U$ .

Fato 1:  $F$  é aberto, pois numa vizinhança de  $(x,v)$  os autovalores continuam sendo todos positivos ou todos negativos. Queremos demonstrar que  $U$  é igual a  $B$ , ou seja, que  $f$  é uma imersão umbílica.

Fato 2: Se  $x \in \pi(F)$  então  $S_x^\perp \subset U = \{(x,v) \in B: k_1(x,v) = \dots = k_n(x,v)\}$ . Se  $x \in \pi(F)$  então existe  $(x,v) \in F$ . Como  $F$  é aberto, existem uma vizinhança  $U_x$  de  $v$  em  $S_x^\perp$  tal que  $U_x \subset F$ . Mas este aberto de  $S_x^\perp$  contém uma base  $v_1, \dots, v_p$  de

$TM_x^\perp$ . Agora, para qualquer  $v \in S_x^\perp$ , temos que  $v = \sum_i \lambda_i v_i$  e  $A_v = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{v_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i I = (\sum_i \lambda_i \beta_i) I$ , o que implica que  $(x, v) \in U$ .

**Fato 3:** Se  $\pi: B \rightarrow M$  é a projeção  $\pi((x, v)) = x$ , então  $\pi(F) = M$ . De fato, pela proposição 3.1,  $F$  é não vazio; seja  $(p, v) \in F$  e  $q$  qualquer outro ponto de  $M$ . Existe uma geodésica  $\sigma: [0, \ell] \rightarrow M$ , tal que  $\sigma(0) = p$  e  $\sigma(\ell) = q$ . Seja  $v_t$  o campo normal unitário ao longo de  $\sigma$ , paralelo com relação a conexão normal, tal que  $v_0 = v$  (isto é, com  $\nabla_{\sigma'(t)}^\perp v_t \equiv 0$ ; veja o exercício 2.3). Seja  $Y_t$  um campo tangente a  $M$  ao longo de  $\sigma$  e ortogonal a  $X_t = \sigma'(t)$ . Seja  $t_0 = \sup \{t \in [0, \ell]: (\sigma(s), v_s) \in F \forall s \in [0, t]\}$ . Como  $F$  é aberto,  $t_0 > 0$ . Queremos demonstrar que  $t_0 = \ell$ . Agora  $k_1(\sigma(t), v_t) = \dots = k_n(\sigma(t), v_t) = \langle A_{v_t} Y_t, Y_t \rangle$  para todo  $t \in [0, t_0)$ . Mas temos que  $X_t \langle A_{v_t} Y_t, Y_t \rangle = \langle (\nabla_{X_t} A_{v_t}) Y_t, Y_t \rangle + \langle A(\nabla_{X_t} Y_t), Y_t \rangle + \langle A_{v_t} Y_t, \nabla_{X_t} Y_t \rangle$ . Como  $\langle \nabla_{X_t} Y_t, Y_t \rangle = 0$  e  $= A_{v_t} Y_t = k_1(\sigma(t), v_t) Y_t$ , temos que  $\langle A_{v_t} Y_t, \nabla_{X_t} Y_t \rangle = \langle Y_t, A_{v_t} (\nabla_{X_t} Y_t) \rangle = 0$ ; logo  $X_t \langle A_{v_t} Y_t, Y_t \rangle = \langle (\nabla_{X_t} A_{v_t}) Y_t, Y_t \rangle$ . Mas pela equação de Codazzi, fórmula 7.5, temos que  $(\nabla_{X_t} A_{v_t}) Y_t = (\nabla_{Y_t} A_{v_t}) X_t - A_{\nabla_{Y_t} v_t}^\perp X_t + A_{\nabla_{X_t} v_t}^\perp Y_t = (\nabla_{Y_t} A_{v_t}) X_t - A_{\nabla_{Y_t} v_t}^\perp X_t + A_{\nabla_{X_t} v_t}^\perp Y_t$ .



Como  $F$  é aberto e em  $F$   $A_{v_t} = k_1(x, v_t)I$ , onde  $I$  é a aplicação identidade temos que  $\nabla_{Y_t} A_{v_t} = (Y_t k)I$ . Logo  $\langle (\nabla_{Y_t} A_{v_t})X_t, Y_t \rangle = 0$ . Por outro lado  $\nabla_{Y_t}^\perp v_t \in S_\sigma^\perp(t)$ , logo em  $U$ , pelo fato 2, e  $A_{\nabla_{Y_t}^\perp v_t} X_t = \lambda X_t$ . Destas duas observações, segue-se que  $X_t \langle A_{v_t} Y_t, Y_t \rangle = X_t k_1(\sigma_t, v_t) \equiv 0$ ; logo, em  $t_0$ ,  $k_1 = k_2 = \dots = k_n \neq 0$  e  $(\sigma(t_0), v_{t_0}) \in F$ . Segue-se que  $t_0 = \ell$ , pois se não  $t_0$  não seria o sup já que  $F$  é aberto; conseqüentemente  $(\sigma(\ell), v_\ell) \in F$  e  $q = \sigma(\ell) \in \pi(F)$ , o que implica o fato 3.

Os fatos 2 e 3 implicam que  $U = B$ , ou seja que  $f$  é uma imersão umbílica. O teorema segue agora do teorema 8.6. C.Q.D.

### Redução da codimensão

Nesta seção precisamos demonstrar que uma imersão umbílica  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  está sempre contida num  $(n+1)$ -plano afim de  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Este fato seguirá de um resultado mais geral que demonstraremos agora.

Dada uma imersão  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  temos, para todo  $x$ , o espaço normal  $TM_x^\perp$ . Seja  $N_0^x = \{\xi \in TM_x^\perp : A_\xi = 0\}$ ;

$N_0^x$  é um subespaço vetorial de  $TM_x^\perp$ . Seu complemento em  $TM_x^\perp$ ,  $N_1^x$ , é chamado de primeiro espaço normal. Um subfibrado normal de dimensão  $\ell$  de  $f$  é uma família  $N_x$ ,  $x \in M$ , de subespaços vetoriais de  $TM_x^\perp$  de dimensão  $\ell$ , com a propriedade de que para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança  $U$  e campos normais diferenciáveis  $\xi_1, \dots, \xi_\ell$ , definidos em  $U$ , tal que para todo  $y \in U$ ,  $\xi_1(y), \dots, \xi_\ell(y)$ , geram  $N_y$ . Dizemos que um subfibrado normal  $N$  é paralelo com relação a conexão normal se dado qualquer campo  $\xi$  paralelo com relação a  $\nabla^\perp$  ao longo de qualquer curva  $\sigma(t)$  em  $M$  com  $\xi_{\sigma(0)} \in N_{\sigma(0)}$ , temos que  $\xi_{\sigma(t)} \in N_{\sigma(t)}$ , para todo  $t$ .

TEOREMA 8.5 (Erbacher [85]) - Seja  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  uma imersão de uma variedade conexa  $M$ . Suponha que  $N$  é um subfibrado normal de dimensão  $\ell$  de  $f$  tal que  $N_x$  contém o primeiro espaço normal  $N_1^x$ , para todo  $x \in M$ . Se  $N$  é paralelo com relação a conexão normal, então  $f(M^n)$  está contido num  $(n+\ell)$ -plano afim de  $\mathbb{R}^{n+p}$ .

Demonstração: Primeiro vamos demonstrar um resultado local: cada ponto  $x$  tem uma vizinhança  $U$  tal que  $f(U)$  esteja contido num subespaço afim de dimensão  $n+\ell$ . Seja  $U$  uma vizinhança normal de  $x$  e  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ , uma base ortonormal de  $TM_x^\perp$  tal que os

$\xi^\alpha$ ,  $\alpha = \ell+1, \dots, p$ , geram  $N^\perp$ . Observe que como  $N$  é invariante por translação paralela,  $N^\perp$  também o é, e que  $N^\perp \subset N_2$ . Estenda  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ , a todo  $U$  por translado paralelo ao longo das geodésicas que saem de  $x$ . Como  $N$  e  $N^\perp$  são invariantes por translação paralela  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = \ell+1, \dots, p$ , continuam gerando  $N^\perp \subset N_2$ . Queremos demonstrar que  $(\nabla_Y^\perp \xi^\alpha)_y = 0$ ,  $\alpha = \ell+1, \dots, p$ , qualquer que seja  $Y \in TM_Y$  e  $y \in U$ . Dado  $y \in U$  seja  $\sigma(t)$ ,  $0 \leq t \leq s$ , a geodésica que liga  $x$  a  $y$ . Seja  $\{x_1, \dots, x_n\}$  um sistema de coordenadas polares numa vizinhança de  $\sigma(t)$ ,  $0 < t \leq s$ , tal que  $(\frac{\partial}{\partial x_1})_{\sigma(t)} = \sigma'(t) = X$ . Basta demonstrar que  $\nabla_Y^\perp \xi^\alpha = 0$ , onde  $Y = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\alpha = \ell+1, \dots, p$ . Mas pela fórmula de Ricci 7.9 temos que  $\tilde{g}(R^\perp(X, Y) \xi^\alpha, \mu) = \tilde{g}([A_{\xi^\alpha}, A_\mu]X, Y) = 0$ , pois  $\xi^\alpha \in N^\perp \subset N_2$ . Logo  $R^\perp(X, Y)\xi^\alpha = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi^\alpha - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi^\alpha \equiv 0$  em todo ponto  $\sigma(t)$ . Agora,  $\nabla_X^\perp \xi^\alpha \equiv 0$  em  $\sigma(t)$ , logo  $\nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi^\alpha \equiv 0$ . Mas  $(\nabla_Y^\perp \xi^\alpha)_{\sigma(t)} = \sum_{\beta=\ell+1}^k a_\beta(t) \xi^\beta$  e  $\nabla_X^\perp (\nabla_Y^\perp \xi^\alpha)_{\sigma(t)} = \sum_{\beta=\ell+1}^k X a_\beta(t) \xi^\beta \equiv 0 \Rightarrow X a_\beta \equiv 0$  o que implica  $a_\beta = \text{constante}$  ao longo de  $\sigma(t)$ ,  $t > 0$ . Mas  $a_\beta = \langle \nabla_Y^\perp \xi^\alpha, \xi^\beta \rangle$  logo  $\lim_{t \rightarrow 0} a_\beta(t) = \langle \nabla_Y^\perp \xi^\alpha, \xi^\beta \rangle_x = 0$ . Segue-se que  $(\nabla_Y^\perp \xi^\alpha)_y = 0$  qualquer que seja  $y \in U$  e  $Y \in TM_Y$ .

Agora, temos que em  $U$ ,  $\tilde{\nabla}_Z \xi^\alpha = -A_{\xi^\alpha} Z + \nabla_Z^\perp \xi^\alpha = 0$   $\alpha = \ell+1, \dots, p$ , pelo item anterior e pelo fato de que

$\xi^\alpha \in N_2$ . Logo  $\xi^\alpha$  é um vetor de  $\mathbb{R}^{n+p}$  constante em  $U$ .  
 Agora a função  $\langle f(x), \xi^\alpha \rangle$ ,  $\alpha \neq \ell+1, \dots, p$ , é tal que pa  
 ra todo  $Z \in TM$

$$\begin{aligned} Z \langle f(y), \xi_y^\alpha \rangle &= \langle Zf(y), \xi_y^\alpha \rangle + \langle f(y), \tilde{\nabla}_Z \xi_y^\alpha \rangle = \\ &= \langle Z_y, \xi_y^\alpha \rangle + 0 = 0. \end{aligned}$$

Como  $\xi^\alpha$  é constante,  $\alpha = \ell+1, \dots, p$ .  $f(U)$  está conti-  
 do no hiperplano afim  $\mathbb{R}^{n+\ell}$  de dim  $n+\ell$  passando por  
 $f(x)$  e perpendicular a  $\xi^{\ell+1}, \xi^{\ell+2}, \dots, \xi^p$ .

Agora vamos demonstrar o resultado globalmente.

Se  $x$  e  $y$  têm vizinhanças  $U_x$  e  $V_y$  tal que  $f(U) \subset \mathbb{R}_x^{n+\ell}$  e  $f(V) \subset \mathbb{R}_y^{n+\ell}$  e  $U_x \cap V_y \neq \emptyset$ , então existe  $z \in U \cap V$ , e temos que  $\mathbb{R}_x^{n+\ell} = \mathbb{R}_z^{n+\ell} = f(z) + TM_z \oplus N_z = \mathbb{R}_y^{n+\ell}$ . Logo, como  $M$  é conexa,  $f(M^n) \subset \mathbb{R}_x^{n+\ell} = f(x) + TM_x \oplus N_x$ . C.Q.D.

### Imersões umbílicas

Para completar a demonstração do teorema 8.4, precisamos caracterizar as imersões umbílicas compactas como esferas métricas de  $(n+1)$ -planos afins. Na seção anterior definimos imersões umbílicas e obtivemos algumas de suas propriedades que usaremos no seguinte teorema

TEOREMA 8.6 - Se  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é uma imersão isométrica umbilica de uma variedade completa e conexa em  $\mathbb{R}^{n+p}$  então  $f$  é um mergulho isométrico ou

- (i) sobre um (n-plano) afim de  $\mathbb{R}^{n+p}$ , ou
- (ii) sobre uma esfera métrica de algum (n+1)-plano afim de  $\mathbb{R}^{n+p}$ .

Demonstração: Pela Proposição 7.3, o vetor curvatura média  $M$  da imersão é paralelo na conexão normal. Logo sua norma  $\|\mu\|$  é igual a uma constante  $c$ . Como  $f$  é umbilica,  $A_\xi = g(\xi, \mu)I$ , onde  $I$  é o operador identidade. No caso em que  $c = 0$ , então  $\mu = 0$  e o primeiro espaço osculador  $N_1$  é zero em todo ponto e obtemos (i) usando o teorema 8.5. Se  $c \neq 0$ , então  $N_1^x$  é o espaço de dimensão 1 gerado por  $\mu_x$ ; pela proposição 7.3,  $N_1$  é paralelo com relação à conexão normal. E, pelo teorema 8.5 temos que  $f(M)$  está contido num espaço afim de dimensão  $n+1$ , que assumiremos que é o  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Considere a função  $g: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  definida como  $g(x) = cf(x) + \xi_x$ , onde  $\xi_x = \frac{1}{c} \mu_x$ . Temos que,

$$\tilde{\nabla}_X g = cX + \tilde{\nabla}_X \xi_x = cX - A_{\xi_x} X = cX - cX = 0$$

para todo  $X$ , logo  $g$  é igual a um vetor constante  $v$ . Segue-se que  $f(x) - v/c = -\xi_x/c$ . Logo,  $\|f(x) - v/c\| =$

$= \|\xi_x/c\| = \frac{1}{c}$ , pois  $\xi_x$  tem norma 1. Isto é,  $f(M)$  está contido na esfera de centro  $v/c$  e de raio  $1/c$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Como  $f$  é isométrica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , temos também que  $f: M^n \rightarrow S^{n+1}_{1/c}$  é isométrica. Logo  $f$  é uma imersão na esfera. Temos também que  $M$  tem curvatura positiva, e consequentemente é compacta. Logo  $f$  é um recobrimento de  $S^{n+1}_{1/c}$ . Segue-se que  $f$  é um mergulho isométrico pois  $S^{n+1}_{1/c}$  é simplesmente conexa. C.Q.D.

#### REFERENCIAS

Os teorema 8.3 e 8.4 foram demonstrados nos seguintes artigos

- [81] CHEN , B.Y. - On the total curvature of immersed manifolds, I. An inequality of Fenchel-Borsuk, Amer. J. Math. 93 (1971), 148-162.
- [82] CHEN , B.Y. - On a theorem of Fenchel-Borsuk-Willmore-Chern-Lashof, Math. Ann. 194(1971), 19-26.

Nossa demonstração do teorema 8.4 é uma variação da de Chern, obtida em conversações com Rubens Leão de Andrade e Standard Silva. Este teorema tinha sido de-

monstrado no caso clássico de superfícies de  $\mathbb{R}^3$  em

- [83] WILLMORE, T.J. - Mean curvature of immersed surfaces, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza". Iasi Sect. Ia Mat. 14(1968), 99-103.

Neste artigo Willmore conjecturou que se  $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão de um toro em  $\mathbb{R}^3$ , então  $\tau_1(f) \geq \frac{\pi}{2}$ . No seguinte artigo ele demonstrou que ela vale quando o toro é o bordo de uma vizinhança tubular de uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , e que neste caso temos igualdade se e somente se, a curva for um círculo de raio  $a = \sqrt{2} b$ , onde  $b$  é o raio do círculo que está no plano normal a curva.

- [84] WILLMORE, T.J. - Mean curvature of Riemannian immersions, J. London Math. Soc. 3(1971), 307-310.

O teorema de redução da codimensão de Erbacher vale também para imersões na esfera e no espaço hiperbólico. A demonstração destes caso segue facilmente do caso de imersões em  $\mathbb{R}^{n+p}$ ; veja

- [85] ERBACHER, J.A. - Reduction of the codimension of an isometric immersion, J. Differential Geometry 5(1971). 333-340.

O teorema que caracteriza as imersões umbilicas em  $\mathbb{R}^{n+p}$  foi demonstrado originalmente na seção §.210 de

[86] CARTAN, E. - Leçons sur la Geometrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1946.

As desigualdades do lema 8.1 acham-se em

[87] HARDY, G.; LITTLEWOOD, J. e PÓLYA, G. - Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.



9. APENDICE

A classe característica de Euler de um ponto de vista extrínseco.

Agora vamos demonstrar a fórmula (6.16) que relaciona a curvatura intrínseca de Gauss-Kronecker com a média das curvaturas extrínsecas de Lipschitz Killing nas direções normais. Esta fórmula foi usada na demonstração do teorema de Gauss-Bonnet na seção 6.

A classe característica de Euler de uma variedade orientável  $M$  de dimensão  $n = 2p$  é representada pela  $n$ -forma diferencial

$$(9.1) \quad \gamma = \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \sum_{\sigma \in P} \epsilon_{\sigma} \Omega^{\sigma(1)}_{\sigma(2)} \wedge \Omega^{\sigma(3)}_{\sigma(4)} \wedge \dots \wedge \Omega^{\sigma(2p-1)}_{\sigma(2p)}$$

onde  $P$  é o grupo das permutações de  $n$  elementos,  $\epsilon_{\sigma}$  é o sinal da permutação  $\sigma$ , e  $\Omega_j^i$ 's são formas da curvatura de  $M$  com relação a um referencial orientado

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ; temos que

$$(9.2) \quad \gamma_x = K_n(x) dM_x,$$

onde  $dM_x = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$  é o elemento de volume de  $M$  em  $x$ , com  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  sendo o coreferencial associado a  $\{X_1, \dots, X_n\}$  (i.e.  $\varphi_i(X_j) = \delta_j^i$ ). Observamos

que  $\gamma$  e  $dM_x$  independem do referencial.

Consideramos agora uma imersão isométrica  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ . O que queremos demonstrar é a seguinte fórmula

$$(9.3) \quad K_n(x) = \frac{1}{c_{n+k}} \int_{v \in S_x^k} \det A_v \, dv$$

onde  $S_x^k$  é a esfera unitária no espaço normal  $TM_x^\perp$ , e  $c_{n+k}$  é o volume da esfera unitária em  $\mathbb{R}^{n+k+1}$ . A segunda forma fundamental de  $f$  é denotada por  $\alpha$ ; temos que a matriz de  $A_v$  é  $(\alpha_{ij} \cdot v)$ , onde  $(\cdot)$  denota o produto escalar e  $\alpha_{ij} = \alpha(X_i, X_j)$ . Lembramos a fórmula (6.12),

$$(9.4) \quad \Omega_j^i = \frac{1}{2} \sum_{k, \ell} (\alpha_{ik} \cdot \alpha_{j\ell} - \alpha_{i\ell} \cdot \alpha_{jk}) \varphi_k \wedge \varphi_\ell.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \Omega^{\sigma(1)} \wedge \Omega^{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \Omega^{\sigma(2p-1)} = \\ & \quad \Omega^{\sigma(2)} \wedge \Omega^{\sigma(4)} \wedge \dots \wedge \Omega^{\sigma(2p)} = \\ & \quad = \frac{1}{2^p} \sum_{\phi \in P} \prod_{k=1}^p (\alpha_{\sigma(2k-1)\phi(2k-1)} \cdot \alpha_{\sigma(2k)\phi(2k)} - \\ (9.5) \quad & \quad - \alpha_{\sigma(2k-1)\phi(2k)} \cdot \alpha_{\sigma(2k)\phi(2k-1)}) \varphi_{\phi(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\phi(n)} = \\ & \quad = \frac{1}{2^p} 2^p \sum_{\phi \in P} \prod_{k=1}^p (\alpha_{\sigma(2k-1)\phi(2k-1)} \cdot \alpha_{\sigma(2k)\phi(2k)} - \\ & \quad - \alpha_{\sigma(2k-1)\phi(2k)} \cdot \alpha_{\sigma(2k)\phi(2k-1)}) \varphi_{\phi(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\phi(n)}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$(9.6) \quad \sum_{\sigma \in P} \epsilon_{\sigma} \Omega_{\sigma(2)}^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p)}^{\sigma(2p-1)} = \\ = \sum_{\sigma, \phi \in P} \epsilon_{\sigma} \cdot \epsilon_{\phi} \prod_{i=1}^p (\alpha_{\sigma(2i-1)\phi(2i-1)} \cdot \alpha_{\sigma(2i)\phi(2i)}) \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

Esta última fórmula sugere a seguinte definição. Dada uma matriz  $(\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\dots,2p}$  com valores em  $\mathbb{R}^{k+1}$ , definimos seu "determinante" como

$$(9.7) \quad \text{Det}(\alpha_{ij}) = \frac{1}{(2p)!} \sum_{\sigma, \phi \in P} \epsilon_{\phi} \prod_{i=1}^p \alpha_{\sigma(2i-1)\phi(2i-1)} \cdot \alpha_{\sigma(2i)\phi(2i)}$$

Observações: 1) Se  $k = 0$ ,  $\text{Det}(\alpha_{ij}) = \det(\alpha_{ij})$

$$2) \quad \text{Det}(\alpha_{ij}) = \frac{1}{(2p)!} \sum_{\sigma, \phi \in P} \epsilon_{\phi} \epsilon_{\sigma} \prod_{i=1}^p \alpha_{\sigma(2i-1)\phi(2i-1)} \cdot \alpha_{\sigma(2i)\phi(2i)}$$

Para verificar esta igualdade basta botar

$$\phi' = \phi \sigma^{-1} \quad \text{e observar que} \quad \epsilon_{\phi} \epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\phi', \sigma} \epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\phi'} \epsilon_{\sigma} \epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\phi'}$$

$$3) \quad \sum_{\sigma \in P} \epsilon_{\sigma} \Omega_{\sigma(2)}^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2p)}^{\sigma(2p-1)} = (2p)! \text{Det}(\alpha_{ij}) \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

Como o volume da esfera  $S^{2p}$  é  $c_{2p} = \frac{2\pi^p p! 2^{2p}}{(2p)!}$  vemos que para demonstrar a fórmula (9.3), (fórmula 6.16), basta demonstrar o seguinte lema

**LEMA 9.1 -** Para qualquer matriz  $(\alpha_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 2p$ , com valores em  $\mathbb{R}^{k+1}$ , temos

$$(9.8) \quad \text{Det}(a_{ij}) = \frac{1}{2} \frac{c_{2p}}{c_{2p+k}} \int_{v \in S^k} \det(a_{ij} \cdot v) dv$$

Demonstração: Primeiro observamos que seria suficiente de monstrar que para  $\phi$  fixo.

$$\sum_{\sigma \in P} \prod_{i=1}^p a_{\sigma(2i-1)\phi\sigma(2i-1)} \cdot a_{\sigma(2i)\phi\sigma(2i)} = c \int_{v \in S^k} \left( \prod_{i=1}^{2p} a_{i\phi(i)} \cdot v \right) dv$$

onde  $c = \frac{(2p)!}{2} \frac{c_{2p}}{c_{2p+k}}$ , pois então teríamos

$$\begin{aligned} \text{Det}(a_{ij}) &= \frac{1}{(2p)!} \sum_{\phi \in P} \epsilon_{\phi} \sum_{\sigma \in P} \prod_{i=1}^p a_{\sigma(2i-1)\phi\sigma(2i-1)} \cdot a_{\sigma(2i)\phi\sigma(2i)} \\ &= \frac{1}{(2p)!} \sum_{\phi \in P} \epsilon_{\phi} c \int_{v \in S^k} \left( \prod_{i=1}^{2p} a_{i\phi(i)} \cdot v \right) dv = \frac{1}{(2p)!} \cdot c \\ &= c \int_{v \in S^k} \left( \sum_{\phi \in P} \epsilon_{\phi} \prod_{i=1}^{2p} a_{i\phi(i)} \cdot v \right) dv = \\ &= \frac{1}{2} \frac{c_{2p}}{c_{2p+k}} \int_{v \in S^k} \det(a_{ij} \cdot v) dv \end{aligned}$$

Logo, o que precisamos demonstrar, fixando  $\phi$  e botando  $A_i = a_{i\phi(i)}$ , é

$$(9.9) \quad \sum_{\sigma \in P} \prod_{i=1}^p A_{\sigma(2i-1)} \cdot A_{\sigma(2i)} = c \int_{S^k} \left( \prod_{i=1}^{2p} A_i \cdot v \right) dv$$

Se  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^{k+1}$ , então  $A_i = \sum_{j=1}^{k+1} A_i^j v_j$  e  $A_i \cdot A_l = \sum_{j=1}^{k+1} A_i^j A_l^j$ , e  $A_i \cdot v = \sum_{j=1}^{k+1} x_j A_i^j$  se  $v = \sum_{j=1}^{k+1} x_j v_j$ . O lado esquerdo da equação (9.9), denotado LE, é

$$\sum_{\sigma \in P} \prod_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^{k+1} A_{\sigma(2i-1)}^j \cdot A_{\sigma(2i)}^j \right) = \sum_{\sigma \in P} \sum_{\phi \in I''} A_{\sigma}^{\phi} ,$$

onde  $I'' = \{ \phi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k+1\} : \phi(2i) = \phi(2i-1) \}$

e  $A_{\sigma}^{\phi} = A_{\sigma(1)}^{\phi(1)} A_{\sigma(2)}^{\phi(2)} \dots A_{\sigma(2p)}^{\phi(2p)}$ . Como  $A_{\sigma}^{\phi} = A^{\phi\sigma}$ , onde

$$A^{\phi} = A_1^{\phi(1)} A_2^{\phi(2)} \dots A_n^{\phi(n)}, \text{ temos que } LE = \sum_{\substack{\sigma \in P \\ \phi \in I''}} A^{\phi\sigma} .$$

Por outro lado o lado direito de 9.9, L.D., é

$$\begin{aligned} c \int_{S^k} \prod_{i=1}^{2p} \left( \sum_{j=1}^{k+1} x_j A_i^j \right) dS^k &= c \int_{S^k} \left( \sum_{\phi \in P} A^{\phi} x_{\phi} \right) dS^k = \\ &= c \sum_{\phi \in I} A^{\phi} \int_{S^k} x_{\phi} dS^k , \end{aligned}$$

onde  $I = \{ \phi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\} : \phi^{-1}$  é par,  $i = 1, 2, \dots, k+1 \}$ . Então  $LD = c \sum_{\phi \in I'} A^{\phi} \int_{S^k} x_{\phi} dS^k$ ,

pois  $\int_{S^k} x_{\phi} dS^k = 0$  se  $\phi \notin I'$ . Se para todo  $\phi \in I'$ , de definimos  $\lambda(\phi)$  como o número de pares  $(\phi'', \sigma) \in I'' \times P$  tal que  $\phi'' \cdot \sigma = \phi$ , então (9.9) pode-se expressar como

$$\sum_{\phi \in I'} \lambda(\phi) A^{\phi} = \sum_{\phi \in I'} [c \int_{S^k} x_{\phi} dS^k] A^{\phi} .$$

Observamos que  $\lambda(\phi) = \lambda(\phi \cdot \sigma)$ , para todo  $\sigma \in P$ ; logo para demonstrar o lema basta verificar a seguinte equação para  $\phi \in I''$ ,

$$(9.10) \quad \lambda(\phi) = c \int_{S^k} x_\phi \, dS^k$$

Suponha que  $\phi$  assume s valores,  $i_1, i_2, \dots, i_s$ , tal que  $\phi^{-1}(i_r)$  tem  $p_r$  elementos. Se  $\sigma \in P$ , então  $\sigma(2i-1) = \sigma(2i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , se e somente se existe  $\phi'' \in I''$  tal que  $\phi''\sigma = \phi$ . Há  $(\frac{n}{2})!$  permutações deste tipo (i.e. com  $\sigma(2i-1) = \sigma(2i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ ). Temos também que se  $\sigma$  é uma permutação que permuta  $\phi^{-1}(i_\ell)$  e deixa o resto fixo, então  $\phi \cdot \sigma = \phi$ . Há  $p_\ell!$  destas permutações, mas já tínhamos contado  $(\frac{p_\ell}{2})!$  delas. Logo

$$\lambda(\phi) = \frac{(p_1)!}{(p_1/2)!} \frac{(p_2)!}{(p_2/2)!} \dots \frac{(p_s)!}{(p_s/2)!} \left(\frac{n}{2}\right)!$$

Por outro lado, se parametrizamos a esfera  $S^k$  pela aplicação  $\varphi: [-1, 1] \times S^{k-1} \rightarrow S^k$  definida por  $\varphi(x, v) = (\sqrt{1-x^2} v, x) \in S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ , então temos que  $\int_{S^k} f \, dS^k = \int_{I \times S^{k-1}} (f \cdot \varphi) (\sqrt{1-x^2})^{k-2} dx \wedge dS^{k-1}$ , para qualquer função  $f$  definida na esfera. Logo

(9.11)

$$\begin{aligned} \int_{S^k} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} \dots x_s^{p_s} \, dS^k &= \left( \int_{-1}^1 x_1^{p_1} (\sqrt{1-x_1^2})^{k-2+n-p_1} dx \right) \int_{S^{k-1}} x_2^{p_2} \dots x_s^{p_s} \, dS^{k-1} = \\ &= \left( \int_{-1}^1 x_1^{p_1} (\sqrt{1-x_1^2})^{k-2+n-p_1} dx_1 \right) \left( \int_{-1}^1 x_2^{p_2} (\sqrt{1-x_2^2})^{k-3+n-p_1-p_2} dx_2 \right) \int_{S^{k-2}} x_3^{p_3} \dots x_s^{p_s} \, dS^{k-2} = \\ &= \left( \int_{-1}^1 x_1^{p_1} (\sqrt{1-x_1^2})^{k-2+n-p_1} dx_1 \right) \dots \left( \int_{-1}^1 x_s^{p_s} (\sqrt{1-x_s^2})^{k-1+s+n-p_1-\dots-p_s} dx_s \right) c_{k-s} \end{aligned}$$

Agora vamos usar o fato de cálculo de que

$$\int_{-1}^1 x_i^{p_i} (\sqrt{1-x_2^2})^{\ell-2} dx_i = \frac{\Gamma(\frac{p_i+1}{2}) \Gamma(\frac{\ell}{2})}{\Gamma(\frac{p_i+1+\ell}{2})},$$

onde  $\Gamma$  é a função gama, que pode ser definida pela condição que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Usando indução e o fato que  $c_0 = 2$  e a fórmula (9.11) obtemos facilmente que

$$(9.12) \quad c_k = \frac{2 \Gamma(1/2)^{k+1}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}$$

Agora (9.11) fica

$$\begin{aligned} \int_{S^k} x_1^{p_1} \dots x_s^{p_s} dS^k &= \\ (9.13) \quad &= \frac{\Gamma(\frac{p_1+1}{2}) \Gamma(\frac{k+n-p_1}{2})}{\Gamma(\frac{n+k+1}{2})} \dots \frac{\Gamma(\frac{p_s+1}{2}) \Gamma(\frac{k-s+1}{2})}{\Gamma(\frac{p_s+1+k-s+1}{2})} \frac{2 \Gamma(\frac{1}{2})^{k+1-s}}{\Gamma(\frac{k-s+1}{2})} = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p_1+1}{2}) \Gamma(\frac{p_2+1}{2}) \dots \Gamma(\frac{p_s+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+k+1}{2})} 2 \Gamma(\frac{1}{2})^{k+1-s} \end{aligned}$$

Finalmente, usando a definição de  $\Gamma$ , obtemos por indução que se  $\ell$  é par, então

$$(9.14) \quad \Gamma(\frac{\ell+1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (\ell-1)\sqrt{\pi}}{2^{\ell/2}} = \frac{\ell!}{(\ell/2)!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\ell}}.$$

Então, como  $n = 2p$ ,

$$\begin{aligned}
 c \int_{S^k} x_\phi dS^k &= c \int_{S^k} x_1^{p_1} \dots x_s^{p_s} = \frac{(2p)! \Gamma(\frac{p_1+1}{2}) \dots \Gamma(\frac{p_s+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})^{k+1-s}}{\Gamma(\frac{2p+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})^k} = \\
 &= (2p)! \frac{\Gamma(\frac{p_1+1}{2}) \dots \Gamma(\frac{p_s+1}{2})}{\Gamma(\frac{2p+1}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(\sqrt{\pi})^s} = \\
 &= \frac{n!}{\frac{n!}{(n/2)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}} \cdot \frac{\frac{(p_1)!}{(p_1/2)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \dots \frac{(p_s)!}{(p_s/2)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(\sqrt{\pi})^s} = \lambda(\phi)
 \end{aligned}$$

que era o que faltava demonstrar.

C.Q.D.

#### REFERENCIAS

A fórmula (9.3) aparece no seguinte artigo, onde são exploradas várias ligações entre geometria e topologia.

[88] CHERN, S.S. - La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions, Enseignement Math. 40(1951-54), 26-46.

Uma exposição sobre classes características usando geometria diferencial é feita no capítulo XII de



- [89] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K. - Foundations of  
Differential Geometry, II, Interscience  
Publishers, New York, 1969.



ÍNDICE ALFABÉTICO

	pag.
aplicação	
de Beltrami .....	113
diferenciável .....	7
isométrica .....	13
justa .....	94,112
normal de Gauss .....	25
Andrade, Rubens Leão de .....	118
atlas .....	1
Auslander, L. ....	12,14
axioma	
das r-esferas .....	131
dos r-planos .....	129
Banchoff, T. ....	108,112,115,117
Bishop, R. ....	4,27,52
campo vetorial .....	5
do Carmo, M.P. ...	26,27,51,59,72,88,104,118,122,126,134

	pag.
Cartan, E. ....	121,129,132,150
Carvalho, J.B. Pitombeira F. de .....	36
Cecil, T. ....	111
Chern, S.S. ....	37,45,52,59,70,103,117,137,148,158
classe característica de Euler .....	151
Colares, G. ....	123,135
conexão	
linear .....	15
normal .....	21
Riemanniana .....	17
convexa	
envolvente .....	101
imersão .....	105,114
num ponto .....	30
estritamente .....	30
localmente .....	50
Crittenden, R. ....	14,27,52
curva assintótica .....	51

	pag.
curvatura	
constante .....	57
de Gauss-Kronecker .....	23,29,151
de Lipschitz-Killing .....	151
formas de .....	101
média .....	137
principal .....	56,138
seccional .....	42
total absoluta .....	76
total absoluta média .....	137
derivada	
covariante .....	15
de uma função .....	7
direções principais .....	56
Erbacher, J.A. ....	149
equação de Gauss .....	44
espaço	
fibrado normal unitário .....	76
normal .....	18
tangente .....	3

	pag.
estrutura diferenciável .....	2
fórmula	
de Codazzi .....	124,125
de Gauss .....	21
de Ricci .....	124
de Weingarten .....	21
função	
altura .....	27,79
de Morse .....	82
diferenciável .....	2
gama .....	157
geodésica .....	122
Gray, A. ....	54
Greenberg, M. ....	31,36
Grossman, N. ....	116
Hardy, G. ....	150
Hartman, P. ....	55,59,70,71
Hessiana .....	81

	pag.
imersão	
diferenciável .....	9
isométrica .....	13
índice	
de nulidade .....	48,57
de nulidade relativa .....	49
de um ponto crítico .....	81
Kobayashi, S. ....	8,14,51,57,70,106,126,134,159
Kuiper, N.H. ....	45,52,105,106,107,113,114,116
Lashof, R.K. ....	37,59,70,103
Lawson, B. ....	123,135
Leung, D.S. ....	131,134
Lima, E. ....	12,13,69,104
Little, J. ....	107
Littlewood, J. ....	150
$\ell$ -seção planar .....	59
Lyra, Carlos B. de .....	36

	pag.
Mackenzie, R. ....	14
mergulho .....	9
métrica Riemanniana .....	11
Milnor, J. .... 52,81,87,94,110,118	
Nash, J. ....	117
Nirenberg, L. .... 59,70,109	
Nomizu, K. .... 27,51,70,110,131,134,159	
O'Neill, B. .... 54,59,72	
Otsuki, T. .... 46,53	
Pohl, W. .... 107,113	
Polya, G. .... 150	
ponto crítico não degenerado .....	81
primeiro espaço normal .....	144
propriedade	
da livre mobilidade .....	132
dos dois pedaços .....	107



	pag.
esférica dos dois pedaços .....	111
Rauch, J. ....	39
redução da codimensão .....	143
Rodriguez, L. ....	110,113,114
Sacksteder, R. ....	38,104,109
segunda forma fundamental .....	18
sistema local de coordenadas .....	1
Spanier, E. ....	36
Sternberg .....	118
Stiel, E. ....	54,72
Stoker, J. ....	37
subfibrado normal .....	144
subvariedade	
com bordo convexa .....	115
mínima .....	122
totalmente geodésica .....	122
umbilica .....	123,128,146

	pag.
Tai, S. ....	106
tensor	
curvatura .....	41
curvatura da conexão normal .....	123
torção .....	16
teorema de	
Chern-Kuiper .....	45
Chern-Lashof .....	100
Erbacher .....	144
Gauss-Bonnet .....	84,88
Hadamard .....	30
Sacksteder .....	102
Tompkins, C. ....	45,52
valor regular .....	82
variedade	
diferenciável .....	2
Riemanniana .....	13
topológica .....	1

	pag.
vetor	
tangente .....	2
curvatura média .....	122
volumem da esfera .....	157
Wallace, A. ....	14
Warner, F.W. ....	14,58,69,104,134
White, J. ....	116
Willmore, T. ....	149

