COHOMOLOGIE DES GROUPES

JEAN CLAUDE DOUAI

DEPARTAMENTO DE INFORMAÇÃO CIENTÍFICA (DIC)

MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA

1) Alberto Azevedo & Renzo Piccinini - Introdução à Teoria dos Grupos
2) Nathan M. Santos - Vetores e Matrizes
3) Manfredo P. Carmo - Introdução à Geometria Diferencial Global
4) Jacob Palis Jr. - Sistemas Dinâmicos
5) João Pitombeira de Carvalho - Introdução à Álgebra Linear
6) Pedro Fernandez - Introdução à Teoria das Probabilidades
7) R.C. Robinson - Lectures on Hamiltonian Systems
8) Manfredo P. Carmo - Notas de Geometria Riemaniana
9) Chaim S. Hönig - Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville
10) Welington de Melo - Estabilidade Estrutural em Variedades de Dimensão 2
11) Jaime Lesmes - Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais
12) Clóvis Vilanova - Elementos da Teoria dos Grupos e da Teoria dos Anéis
13) Jean Claude Douai - Cohomologie des Groupes
14) H. Blaine Lawson, Jr. - Lectures on Minimal Submanifolds - Volume 1

Rio de Janeiro - GB

INTRODUCTION

Ces notes reproduisent un cours donné au mois de Juillet 1972 à l'IMPA. Elles peuvent être considérées comme une introduction à l'étude de la cohomologie des groupes. Le cadre choisi est celui des résultats de A. Grothendieck sur les foncteurs cohomologiques. En outre, nous avons voulu insister sur les diverses interprétations géométriques qui historiquement ont motivé l'étude de la cohomologie des groupes; en particulier, nous interprétons le H^2 au moyen des extensions de groupes, ce qui est dû à Eilenberg-Mac Lane et de H^1 au moyen des espaces homogènes, ce qui est dû à Serre. Ces interprétations ont naturellement des applications au cas galoisien (par exemple le groupe de Brauer d'un corps) et permettent une extension au cas non abélien qui est seulement suggérée ici. Dans le dernier chapitre, enfin, on étend pour les groupes finis le foncteur cohomologique aux dimensions négatives en utilisant les idées de Tate et on termine par le théorème des "Jumeaux" qui donne une caractérisation des modules cohomologiquement triviaux.

Nous remercions Monsieur E. Lima d'avoir bien voulu publier ces imparfaites notes, ainsi que Monsieur Wilson Góes pour sa typographie.

Jean Claude Douai

CHAPITRE O - Rappels d'Algèbre Homologique - Foncteurs dérivés.

CHAPITRE I - Définition et interprétation des groupes de cohomologie.

CHAPITRE II - Propriétés cohomologiques des foncteurs $H^i(G,-)$.

CHAPITRE III - Relations avec les sous-groupes - Premiers calculs.

CHAPITRE IV - Cohomologie galoisienne.

CHAPITRE V - Résultats particuliers au cas des groupes finis.

CHAPITRE O

RAPPELS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE - FONCTEURS DÉRIVÉS

Pour les notions de catégorie abélienne, foncteur additif, objet injectif et projectif, nous renvoyons au fascicule d'algèbre homologique de P. Hilton [3].

DÉFINITION 1 - Nous dirons qu'une catégorie abélienne $\mathfrak{A}$ possède <u>suffisamment d'injectifs</u> (resp. de projectifs) si tout objet de $\mathfrak{A}$ est sous truc d'un objet injectif (resp. quotient d'un objet projectif).

DÉFINITION 2 - Soient $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment de projectifs, A um objet de $\mathfrak{A}$, nous appelerons <u>résolution projective</u> de A une suite exacte

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_o \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

dans $\mathfrak{A}$ où chaque P_i est um objet projectif.

L'hypothése "$\mathfrak{A}$ possède suffisamment de projectifs" permet d'assurer l'existence de telles résolutions.

Dans une catégorie abélienne de modules, tout objet possède une rèsolution libre et, par consèquent, projective.

Considérons maintenant une deuxième catégorie abélienne $\mathfrak{B}$ et un foncteur additif contravariant $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, que l'on supposera, en outre, exact à gauche, c'est-à dire transformant un épimorphisme en un monomorphisme. Soit A um objet de $\mathfrak{A}$ et

$$\mathfrak{R}: \;\ldots\ldots \to P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_o \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$$

une résolution projective de A. Appliquons à $\mathfrak{R}$ le foncteur F.

Nous obtenons un complexe

$$F(\mathfrak{R}): \; 0 \to F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(P_o) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(P_1) \to \ldots\ldots$$

qui n'est plus exact. Les <u>foncteurs dérivés à droite</u> $R^nF(A;\mathfrak{R})$ qui donnent une mesure de la faute d'exactitude du complexe $F(\mathfrak{R})$ sont définis par

DÉFINITION 3 - $R^nF(A;\mathfrak{R}) = H_n(F(\mathfrak{R}))$, $n \geq 0$.

LEMME 1 - <u>Les groupes</u> $R^nF(A;\mathfrak{R})$ <u>ne dépendent pas de la résolution choisie</u> $\mathfrak{R}$.

Ils dépendent donc seulement de A, ce qui nous permet d'écrire $R^nF(A)$ au lieu de $R^nF(A;\mathfrak{R})$. On dira que le foncteur $A \to R^nF(A)$ est le n^{ieme} <u>foncteur dérivé à droite</u> de F.

EXEMPLE: Soit $\mathfrak{A}$ la catégorie abélienne des Λ-modules sur un anneau Λ. Prenons pour F le foncteur contravariant additif $\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(-,B)$ où B est un objet de $\mathfrak{A}$. F est exact à gauche. Nous avons alors:

$R^n\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) = \underline{\mathrm{Ext}}^n_\Lambda(A,B) = \{$classes d'isomorphie de n-extensions du Λ-module A par le Λ-module $B\}$. Pour ce fait, nous renvoyons à [5] ou [1].

En outre, une suite exacte courte $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ de $\mathfrak{A}$ induit la suite exacte longue ([5] p.97).

$$\ldots\ldots \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B') \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B'') \to \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(A,B') \to$$

qui s'écrit encore

$$\ldots \to R^nF(B') \to R^nF(B) \to R^nF(B'') \to R^{n+1}F(B') \to \ldots$$

Les résultats précédents se dualisent, ce qui donne la notion de $n^{\text{ième}}$ foncteur dérivé à gauche. L'exemple ci-dessus est alors le dual du suivant: prenons pour F le foncteur covariant $B\otimes_\Lambda -$; le $n^{\text{ième}}$ foncteur dérivé à gauche de F n'est autre, alors, que le foncteur $\underline{\mathrm{Tor}}^\Lambda_n(-,B)$ (voir [5], [1]).

CHAPITRE I

DÉFINITION ET INTERPRÉTATION DES GROUPES DE COHOMOLOGIE ([6], [4], [9])

1 - Définition d'un G-module

DÉFINITION 1-1: On dit qu'un groupe G opère à gauche sur un groupe abélien A si l'on s'est donné un homomorphisme de G dans Aut A. De manière équivalente, cela revient à se donner une application $(s,a) \rightsquigarrow s\cdot a$ de $G \times A$ dans A (on écrira encore sa au lieu de $s\cdot a$ pour rappeler qu'il s'agit d'une torsion) satisfaisant les conditions suivantes:

$$1\cdot a = a \quad \text{où } 1 \text{ est l'élément neutre de } G.$$
$$s\cdot(a+a') = s\cdot a + s\cdot a'$$
$$(s\cdot t)\cdot a = s\cdot(t\cdot a), \quad s,t \in G, \quad a,a' \in A.$$

Un groupe abélien A pourvu d'une telle action à gauche de G sur A est appelé un G-module. Etant donné un G-module A, l'action de G sur A s'étend naturellement à une action de l'algèbre $Z[G]$ du groupe G à coefficients dans Z sur A; il suffit de poser: $(\Sigma n_s\cdot s)\cdot a = \Sigma n_s\cdot(s\cdot a)$. Pour cette dernière action, A

est un $Z[G]$-module dans le sens usuel (on dira encore plus briévement G-module).

Nous noterons Mod(G) la catégorie des G-modules A. Les G-homomorphismes d'un G-module A vers un G-module A', c'est-à dire les homomorphismes de A vers A' compatibles avec l'action de G, constituent les morphismes de A vers A' dans Mod G. Ils forment un groupe abélien noté $\mathrm{Hom}_G(A,A')$. Mod G est une catégorie abélienne dans laquelle, par conséquent, nous avons la notion d'objet projectif (resp. injectif). Comme toute catégorie de modules, elle possède suffisamment d'injectifs (resp. de projectifs).

2 - Notons Γ le foncteur $A \to A^G = \{a \in A$ tels que $s\cdot a = a,\ \forall s \in G\}$ c'est un foncteur de Mod G dans la catégorie des groupes abéliens; il est exact à gauche. Nous pouvons donc considérer ses foncteurs dérivés droits.

DÉFINITION 2.1: Les groupes de cohomologie de G à valeurs dans A sont les foncteurs dérivés droits de Γ.

On les note $H^i(G,A)$, $i \geq 0$. On les détermine suivant le méthode rappelée au Chapitre 0. Plus précisément, considérons le groupe abélien Z des entiers relatifs sur lequel on fera opérer G trivialement:

Z devient ainsi un objet de Mod G dont on considèrera une résolution projective

(1) $$\ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_o \to Z \to 0 .$$

Appliquant à (1) le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_G(-,A)$, on obtient un complexe de groupes abéliens:

(2) $$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_G(Z,A) \to \underline{\mathrm{Hom}}_G(P_o,A) \to \ldots \to \underline{\mathrm{Hom}}_G(P_i,A) \to \ldots$$

dont l'homologie en dimension i est précisément $H^i(G,A)$. Observons que $\underline{\mathrm{Hom}}_G(Z,A)$ s'identifie à A^G (ce qui justifie la Définition 2.1). Le choix d'une autre résolution projective (1) ne modifie pas les $H^i(G,A)$, $i \geq 0$ ([1]).

3 - Construction d'une résolution projective standard du G-module Z (méthode dite de la "Bar-Résolution" - [5])

Soit B_n le $Z[G]$-module libre avec générateurs les n-uples $[s_1|\ldots\ldots|s_n]$ d'éléments $s_1 \neq 1,\ldots,s_n \neq 1$ de G. Par convention, on prendra $[s_1|\ldots\ldots|s_n] = 0$ si un quelconque des s_i est égal à 1 (condition de normalisation). Nous définissons les homomorphismes bords

$$\partial : B_n \to B_{n-1} \text{ , pour } n > 0,$$

de la manière usuelle:

$$\partial[s_1|\ldots\ldots|s_n] = s_1[s_2|\ldots\ldots|s_n]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [s_1|\ldots\ldots|s_i s_{i+1}|\ldots\ldots|s_n]$$
$$+ (-1)^n [s_1|\ldots\ldots|s_{n-1}].$$

Considérons alors la chaîne suivante:

$$(3) \quad \ldots \to B_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \to \ldots\ldots \to B_o \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0$$

où B_o est le $Z[G]$-module libre à un générateur et où ε envoie cet unique générateur sur celui de Z.

LEMME 3.1: (3) <u>constitue une résolution libre du G-module Z.</u>

Les éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}_G(B_n,A)$ sont appelés des n-cochaînes. Ce sont des fonctions $f(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ de n arguments à valeurs dans A qui satisfont aux conditions de normalisation

$$f(s_1,\ldots,s_{i-1},1,s_{i+1},\ldots,s_n) = 0, \quad i=1,\ldots,n.$$

Le cobord d'une telle n-cochaîne est donnée par la formule

$$(4) \qquad \delta f(s_1,\ldots,s_{n+1}) = s_1 \cdot f(s_2,\ldots,s_{n+1})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(s_1,\ldots,s_j s_{j+1},\ldots,s_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1} f(s_1,\ldots,s_n).$$

4 - Détermination explicite des cocycles et cobords pour les petites dimensions

a) Un 0-cocycle de G à valeurs dans A est simplement un élément de A^G.

b) Um 1-cocycle est une fonction $f: G \to A$ qui satisfait à la relation $f(s \cdot t) = f(s) + s \cdot f(t)$ $(= f(s) + {}^s f(t))$. Une telle fonction s'appelle "homomorphisme croisé" de G dans A. En particulier, si l'action de G sur A est triviale, un homomorphisme croisé est un homomorphisme usuel.

Un 1-cobord est un homomorphisme croisé f de la forme $f(s) = sa-a$, $a \in A$. On l'appelera "homomorphisme principal".

c) Un 2-cocycle (de G à valeurs dans A) est une application normalisée $f: G \times G \to A$ qui satisfait à la condition $\delta f(s,t,r) = 0$, $\forall\, s,t,r \in G$, c'est-à-dire vérifiant l'identité (cf. la formule (4))

$$s \cdot f(t,r) - f(st,r) + f(s,tr) - f(s,t) = 0. \tag{5}$$

Un 2-cobord est une 2-cochaîne de la forme $h(s) + s \cdot h(t) - h(s \cdot t)$ où h est une 1-cochaîne de G dans A.

5 - Applications - Interpretation du $H^2(G,A)$ ([5])

Nous allons voir que les fonctions exhibées précedemment en a), b), c) interviennent naturellement dans la classification de certaines structures algébriques.

DÉFINITION 5.1: On appelle extension de G par A une suite exacte $1 \to A \to E \to G \to 1$ de groupes commençant par A et se terminant par G (en particulier A est invariant dans E).

Etant donné deux extensions

$$(E) \qquad 1 \to A \to E \to G \to 1$$
$$(E') \qquad 1 \to A \to E' \to G \to 1,$$

un morphisme de (E) vers (E') est un triple (id_A, f, id_G) où $f: E \to E'$ est un homomorphisme. On voit immédiatement que un morphisme de (E) vers (E') dans ce sens est un isomorphisme.

Supposons A abélien. Considérons une extension (E) de G par A. Les automorphismes internes de E agissent sur A et cette action passe au quotient et détermine une action φ de G sur A. Ce que nous allons classifier, en réalité, ce sont les extensions de G par A qui induisent précisément cette action φ. Notons $\underline{Ext}(G,A;\varphi)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de telles extensions.

THÉORÈME 5.2: <u>Soient</u> A <u>un groupe abélien,</u> G <u>un groupe quelconque,</u> φ <u>une action de</u> G <u>sur</u> A.
<u>Il existe une bijection entre l'ensemble</u> $\underline{\mathrm{Ext}}(G,A;\varphi)$ <u>et l'ensemble sous-jacent au groupe</u> $H^2(G,A)$ <u>où</u> A <u>est considéré comme G-module pour l'action</u> φ (Par cette bijection, il est donc possible de munir $\underline{\mathrm{Ext}}(G,A;\varphi)$ d'une structure de groupe abélien).

Soit $(E): 1 \to A \to E \to G \to 1$ un représentant d'une classe de $\underline{\mathrm{Ext}}(G,A;\varphi)$. Nous allons associer à (E) un 2-cocycle de G à valeurs dans A. Choisissons pour cela une section σ ensembliste de E au-dessus de G. Pour tout couple $(s,t) \in G\times G$, définissons la fonction $f: G\times G \to A$ par

$$\sigma(s)\cdot\sigma(t) = f(s,t)\cdot\sigma(s\cdot t).$$

f mesure ce qui empêche σ d'être un homomorphisme c'est une 2-cochaîne de G à valeurs dans A que l'on pourra toujours supposer normalisée (prenant $\sigma(1) = 0$).

Pour tout triple (s,t,r) d'éléments de G, calculons de deux manières différentes l'écart qui sépare $\sigma(s\cdot t\cdot r)$ de $\sigma(s)\cdot\sigma(t)\cdot\sigma(r)$.

$$(6) \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \sigma(s\cdot t\cdot r) \arrow[dl, Rightarrow, "f(s\cdot t,r)"'] \arrow[dr, Rightarrow, "f(s,tr)"] & \\ \sigma(s\cdot t)\cdot\sigma(r) \arrow[dr, Rightarrow, "f(s,t)"'] & & \sigma(s)\cdot\sigma(t\cdot r) \arrow[dl, Rightarrow, "\sigma(s)[f(t,r)]"] \\ & \sigma(s)\cdot\sigma(t)\cdot\sigma(r) & \end{tikzcd}$$

Comme l'élément $\sigma(s)$ de E induit l'automorphisme $\varphi(s)$ de A, la commutativité du diagramme précédent (6) est équivalente au fait que la fonction f satisfait la relation:

$$^{s}f(t,r) - f(st,r) + f(s,t\cdot r) - f(s,t) = 0,$$

$\forall\ s,t,r \in G$, c'est à dire est un 2-cocycle de G à valeurs dans A ((5) - nº 4) (on a noté $^{s}f(t,r)$ au lieu de $\varphi(s)\,[f(t,r)]$).

On voit immédiatement que le choix d'une autre section σ conduit à un 2-cocycle équivalent.

Réciproquement, étant donné un 2-cocycle f de G à valeurs dans A, il est possible de construire une extension de G par A en définissant sur l'ensemble $G\times A$ la loi de groupe suivante

$$(s,a)\cdot(t,b) = (s\cdot t,\ a + {}^{s}b + f(s,t)).$$

La condition d'être 2-cocycle pour f revient à exprimer exactement l'associativité de cette loi de groupe.

REMARQUE: En s'inspirant du Théorème 5.2, on aimerait définir un $H^2(G,A)$ avec A non abélien, en considérant l'ensemble des classes d'isomorphie d'entensions de G par A. Ceci n'a de sens que si l'on veut bien substituer à l'action φ de G sur A, c'est-à-dire à un homomorphisme $\varphi: G \to \underline{\mathrm{Aut}}\ A$, la donnée d'un homomorphisme de G dans $\frac{\underline{\mathrm{Aut}}\ A}{\underline{\mathrm{Int}}\ A}$. En effet, considérons une extension (E) comme précédemment avec A non abélien, E opère alors sur A par automorphismes internes. Or les automorphismes internes de A ne sont plus triviaux; par passage au quotient on obtient, ainsi, non plus un homomorphisme de G dans $\underline{\mathrm{Aut}}\ A$, mais un homomorphisme de G dans $\frac{\underline{\mathrm{Aut}}\ A}{\underline{\mathrm{Int}}\ A}$ (appelé G-noyau par Eilenberg-MacLane [5]).

6 - Interprétation du $H^1(G,A)$ (A n'étant plus nécessairement abélien) ([7] et [8]).

Soit G-ens. la catégorie des ensembles sur lesquels opère le groupe G (à gauche), les morphismes étant les applications entre ensembles compatibles avec l'action de G. Sous cette forme, les G-modules définis dans le nº 1 ne sont pas autres choses que les groupes abéliens de G-<u>ens</u>.

DÉFINITION 6.1: Soit A un groupe de G-<u>ens</u>, on dit qu'un objet H de G-<u>ens</u> est un <u>espace principal homogène</u> sous A si A opère simplement transitivement sur H (on entend par là que, quelque soit le couple d'éléments de H, il existe un unique élément de A qui permet de passer de l'un à l'autre) ([7] p. I-58).

Un morphisme entre deux espaces principaux homogènes sous A est nécessairement un isomorphisme.

A un espace homogène principal H sous A, il est passible d'associer un 1-cocycle de G à valeurs dans A comme suit: choisissons un point $x \in H$; puisque H est principal homogène sous A, il existe un unique élément $a_s \in A$ qui transforme x en ${}^s x$ pour tout $s \in G$. La fonction $s \to a_s$ définit un 1-cocycle de G à valeurs dans A et le choix d'un autre point x' conduirait à un 1-cocycle équivalent.

THÉORÈME 6.2: <u>Il y a une correspondance buinivoque entre l'ensemble des classes d'isomorphie d'espaces homogènes principaux sous</u> A <u>dans</u> G-<u>ens</u> <u>et l'ensemble</u> $H^1(G,A)$ <u>des classes d'homomorphismes croisés de</u> G <u>dans</u> A. <u>Si</u> A <u>est abélien, l'ensemble</u> $H^1(G,A)$ <u>possède en outre une structure de groupe abélien</u>.

Etant donné (a_s) un 1-cocycle de G à valeurs dans A, on lui associe un espace homogène principal noté ${}_aA$ en prenant le groupe A et en le tordant par le cocycle (a_s), ce qui fournit un objet de G-ens pour lequel l'action de G est définié par

$$\begin{aligned} G \times {}_aA &\to {}_aA \\ (s,x) &\rightsquigarrow a_s \cdot {}^s x \ . \end{aligned}$$

7 - Exemple d'utilisation des résolutions projectives pour la détermination des groupes de cohomologie des groupes cycliques ([5] ou [6] p 140).

Soit G un groupe cyclique d'ordre m avec générateur t. L'anneau $Z[G]$ est l'anneau de tous les polynômes $\sum_{i=o}^{m-1} a_i t^i$ en t à coefficients entiers a_i, modulo la relation $t^m = 1$. Posons:

$$N = 1 + t + \dots + t^{m-1}$$

$$D = t-1$$

N et D induisent des homomorphismes de $Z[G]$ dans lui-même qu'on notera encore N et D respectivement.

$$N \cdot D = 0$$

on voit facilement que la suite

$$\cdots \longrightarrow Z[G] \xrightarrow{D} Z[G] \xrightarrow{N} Z[G] \xrightarrow{D} Z[G] \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0$$

est une résolution (nécessairement libre) de Z.

Identifiant $\underline{\mathrm{Hom}}_G(Z[G],A)$ avec A, nous obtenons un complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow A \xrightarrow{D} A \xrightarrow{N} \cdots.$$

dont l'homologie en dimension i est précisément $H^i(G,A)$, $i \geq 0$. On en tire le théorème suivant:

THÉORÈME 7.1: Si G est un groupe cyclique fini, les groupes de cohomologie de G à valeurs dans A sont donnés par:

$$H^0(G,A) = A^G$$

$$H^{2i}(G,A) = \frac{A^G}{NA}, \quad i > 0$$

$$H^{2i+1}(G,A) = \{a \in A \text{ t.q. } Na = 0\}/DA, \quad i \geq 0.$$

Les valeurs des groupes de cohomologie de G à valeurs dans A sont donc périodiques. Les isomorphismes de périodicité $H^i(G,A) \to H^{i+2}(G,A)$, $i > 0$, sont obtenus en "cupant" avec la classe $\delta\chi_t$ où $\chi_t\colon G \to Q/Z$ est tel que $\chi_t(t) = \frac{1}{n}$ et où δ est le cobord associé à la suite exacte:

$$0 \to Z \to Q \to Q/Z \to 0.$$

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS COHOMOLOGIQUES DES FONCTEURS $H^i(G,-)$

1 - Foncteurs Cohomologiques

Les résultats de ce numéro sont dus à Alexandre Grothendieck (Voir Journal de Tohoku [2]).

DÉFINITIONS 1.1: Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne; soit $T = (T^i)$, i entier quelconque pouvant être négatif, un système de foncteurs de $\mathfrak{A}$ vers la catégorie des groupes abéliens. On dira que T est un foncteur cohomologique si pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathfrak{A}$, il existe un homomorphisme (cobord)

$$\delta : T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

a) δ est compatible avec les homomorphismes transformant la suite exacte donnée $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ en toute autre suite exacte du même type.

b) δ s'insére dans une suite exacte longue:

$$\ldots \to T^i(A') \to T^i(A) \to T^i(A'') \xrightarrow{\delta} T^{i+1}(A') \to \ldots$$

On dira qu'un foncteur cohomologique $(T^i)_{i\geq 0}$ est <u>universel</u> s'il est "effacable" sur les objets injectifs de $\mathfrak{A}$ (i.e. sa cohomologie s'annule sur les dits objets) dans toute dimension $i \geq 1$.

Le mot universel est expliqué par le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1: <u>Soient</u> T <u>et</u> T' <u>deux foncteurs cohomologiques définis sur une même catégorie abélienne</u> $\mathfrak{A}$ <u>possédant suffisamment d'objets injectifs</u>. <u>Si</u> T <u>est universel, toute transformation naturelle de</u> T^0 <u>dans</u> T'^0 <u>se prolonge en une unique transformation naturelle de</u> T <u>dans</u> T'.

2 - <u>Propriétés cohomologiques des</u> $H^i(G,-)$

Pour chaque suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans <u>Mod</u>(G) et chaque $i \geq 0$, nous avons un homomorphisme cobord

$$\delta: H^i(G,A'') \to H^{i+1}(G,A'),$$

en vertu d'un résultat rappelé au Chapitre 0.

THÉORÈME 2.1: <u>Les</u> $H^i(G,-)$, $i \geq 0$, <u>constituent un foncteur cohomologique effaçable</u> (donc universel).

Nous avons déjà signalé (Chap. I - nº 1) que la catégorie <u>Mod</u>(G) possédait suffisamment d'injectifs.

COROLLAIRE 2.2: <u>Soit</u> T <u>un foncteur cohomologique. S'il existe une transformation naturelle de</u> $H^o(G,-)$ <u>dans</u> T^o, <u>alors elle se prolonge en une unique transformation naturelle de</u> $H^i(G,-)$ <u>dans</u> T.

Le foncteur $H^i(G,-)$ est effaçable sur les objets injectifs de <u>Mod</u> G, $i \geq 1$; en effet, si A est un tel objet, le foncteur $\underline{Hom}_G(-,A)$ transforme une suite exacte en une suite exacte. Le complexe (2) du nº 2 - Chap. I est alors acyclique.

3 - Nous allons définir une nouvelle classe d'objets qui annulent le foncteur cohomologique $(H^i(G,-))_{i\geq 0}$, la classe des objets induits.

Soit G um groupe, H un sous-groupe de G; définissons un foncteur M_G^H: <u>Mod</u>(H) $\to$ <u>Mod</u>(G) par

$$M_G^H(B) = \{\text{toutes les fonctions } G \xrightarrow{f} B, \text{ telles que } s\cdot f(x) = f(s\cdot x),\ s \in H,\ x \in G\}$$

$M_G^H(B)$ peut être muni d'une structure de G-module par l'operation $(sf)(x) = f(x\cdot s)$, $s,x \in G$. M_G^H est appelé foncteur module induit de H vers G. Si $H = \{e\}$, on dira seulement <u>module induit</u>.

Notons Res. le foncteur de <u>Mod</u> G vers <u>Mod</u> H qui à un G-module A associe A considéré comme H-module par l'intermédiaire de l'injection de H dans G.

LEMMA 3.1: <u>Le couple</u> $(M_G^H, \text{Res.})$ <u>est un couple de foncteurs adjoints. En particulier,</u> $\underline{\mathrm{Hom}}_G(A, M_G^H(B)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_H(\text{Res. } A, B)$ <u>pour des objets quelconques</u> A <u>de</u> <u>Mod</u> G <u>et</u> B <u>de</u> <u>Mod</u> H.

THÉORÈME 3.2: <u>L'homomorphisme de groupes</u> $H^i(G, M_G^H(B) \to H^i(G,B)$ <u>induit par l'homomorphisme</u> $f \rightsquigarrow f(1)$ <u>de</u> $M_G^H(B)$ <u>dans</u> B, <u>est un isomorphisme</u>.

Nous avons, en effet, deux foncteurs cohomologiques $H \circ M_G^H$ et H définis sur <u>Mod</u> H qui coïncident en dimension 0 (il suffit de faire $A = Z$ dans le Lemme 3.1 pour le voir) et s'annulent sur les injectifs; M_G^H transforme, en effet, un injectif dans un injectif. Ils sont donc isomorphes en toutes dimensions.

COROLLAIRE 3.3: <u>Si</u> $H = \{e\}$, $H^i(G, M_G^{\{e\}}(B)) = 0$ <u>pour tout</u> $i \geq 1$.

Tout module peut être plongé dans un module induit à l'aide de $A \rightsquigarrow A^* = \underline{\mathrm{Hom}}_Z(G, \dot{A})$ où $\dot{A}$ représente le groupe abélien sous jacent à A. Ce fait permet de définir les groupes de cohomologie par le méthode dite de "décalage": la suite exacte

$$0 \to A \to A^* \to A^*/A \to 0$$

donne les isomorphismes

$$\delta: H^i(G, A^*/A) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}(G, A), \quad i \geq 0,$$

qui permettent de définir les groupes de cohomologie par induction ([6]).

4 - Un exemple galoisien de module induit

Soit k um corps, K une extension galoisienne finie de k, G son groupe de Galois sur k. Notans K^+ le groupe additif de K; alors K^+ est un G-module.

PROPOSITION 4.1: Les groupes de cohomologie $H^i(G, K^+)$ sont nuls pour $i \geq 1$ ([6] p. 158).

En effet, le théorème de la base normale montr que K^+ est de la forme $Z[G] \otimes_Z \dot{k}$ (où $\dot{k}$ désigne le groupe abélien sous jacent à k comme plus haut). Mais puisque G est fini, $Z[G] \otimes_Z \dot{k}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z[G], \dot{k})$, lequel est un module induit.

5 - Suite exacte de cohomologie non abélienne ([7])

Que deviennent les propriétés précédentes et, en particulier, la propriété b) Def. 1.1 dans le cas non abélien? Nous avons défini dans le nº 6 du Chap. I un $H^1(G,A)$ non abélien. D'autre part, la définition du $H^o(G,A)$ est encore évidemment valable dans le cas non abélien. Etant donné une suite exacte $1 \to A' \to A \to A'' \to 1$ de groupes de G-ens, nous pouvons donc considérer la suite d'ensembles

$$(1) \qquad 1 \to H^o(G,A') \to H^o(G,A) \to H^o(G,A'') \xrightarrow{\delta^o} H^1(G,A') \to H^1(G,A) \to H^1(G,A'').$$

Le cobord δ^o est défini de la manière suivante: on prend un élément $a'' \in A''$ tel que ${}^s a'' = a''$, on l'éléve en un élément $a \in A$; la différence ${}^s a \cdot a^{-1} \in A'$ et la fonction $s \to {}^s a \cdot a^{-1}$ est un 1-cocycle à valeurs dans A' dont la classe est précisement $\delta^o(a'')$.

PROPOSITION 5.1: La suite (1) d'ensembles pointés par les classes triviales est exacte.

Supposons maintenant A' abélien; on aimerait construire un ensemble d'obstruction à l'élévation d'un élément de $H^1(G,A'')$ en un élément de $H^1(G,A)$.

Soit (a''_s) un 1-cocycle de G à valeurs dans A''.

Relevons a''_s en une application $a: s \to a_s$ de G dans A; a n'est pas un 1-cocycle; l'application

$$f_{a''}: (s,t) \to a_s\ {}^s a_t \cdot a_{st}^{-1}$$

donne une mesure de l'écart qui sépare a_s d'un 1-cocycle. On constate immédiatement que c'est un 2-cocycle de G à valeurs dans le groupe ${}_{a''}A'$, où ${}_{a''}A'$ désigne (cf. nº 6 Chap. I) le groupe A' tordu par le cocycle a''_s (remarquons que A opère sur A' par automorphisme intérieur et que cette action passe au quotient puisque A' est supposé abélien, donc A'' opére sur A'). Le 2-cocycle $f_{a''}$ est indépendant du relévement a choisi.

PROPOSITION 5.2: <u>La classe du 1-cocycle</u> (a''_s) <u>appartient à l'image de</u> $H^1(G,A)$ <u>si et seulement si la classe du 2-cocycle</u> $f_{a''}$ <u>dans</u> $H^2(G,{}_{a''}A')$ <u>est triviale</u>.

Dans le cas où A' est central dans A, le calcul précédent se simplifie car alors A opére trivialement sur A' et il en est de même de A'; nous avons donc ${}_{a''}A' = A'$. Dans ces conditions, la suite exacte (1) se prolonge en une suite exacte:

$$(2) \qquad \cdots \to H^1(G,A') \to H^1(G,A) \to H^1(G,A'') \xrightarrow{\delta^1} H^2(G,A'').$$

CHAPITRE III

RELATIONS AVEC LES SOUS-GROUPES - PREMIERS CALCULS ([6], [4], [9])

1 - Soit $f: G' \to G$ um homomorphisme; soit A um G-module. Posons $s'.a = f(s').a$, $s' \in G'$, $a \in A$. On munit ainsi A d'une structure de G'-module notée f^*A (pour rappeler qu'il s'agit d'une image réciproque). On obtient un morphisme

$$H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G',f^*A)$$

qui, en vertu des résultats du Chapitre II, se prolonge en un morphisme unique, pour $i \geq 1$,

$$H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',f^*A).$$

Em particulier, si $H \overset{f}{\hookrightarrow} G$ est l'injection d'un sous-groupe H dans G, nous avons défini un foncteur <u>restriction</u> <u>Res</u>. au Chapitre II nº 3 qui n'est autre que f^*; d'où, pour tout $i \geq 0$, un homomorphisme (encore noté <u>Res</u>.)

$$\underline{\text{Res}}.: H^i(G,A) \to H^i(H,A).$$

De manière analogue, si H est un sous-groupe invariant de G, l'application canonique $G \to G/H$ conduit à un homomorphisme

$$H^i(G/H,\ A^H) \to H^i(G,A), \quad i \geq 0,$$

appelé "<u>homomorphisme d'Inflation</u>" (dénoté Inf.)

PROPOSITION 1.1: <u>La suite</u>

$$0 \to H^1(G/H,\ A^H) \xrightarrow{\text{Inf.}} H^1(G,A) \xrightarrow{\text{Res.}} H^1(H,A)$$

<u>est exacte</u>.

Plus généralement:

PROPOSITION 1.2: <u>Soit</u> i <u>un entier</u> ≥ 1. <u>Supposons que</u> $H^j(H,A) = 0$ <u>pour</u> $1 \leq j \leq i-1$. <u>Alors</u> <u>la suite ci-dessous</u>:

$$0 \to H^i(G/H,\ A^H) \xrightarrow{\text{Inf.}} H^i(G,A) \xrightarrow{\text{Res.}} H^i(G,A)$$

<u>est exacte</u>.

La démonstration des propositions précédentes est laisséé au lecteur. (Voir [6] p.125).

La conjuguaison par un élément de G induit aussi une opération au niveau des cohomologies que l'on décrira facilement.

Soit H um sous-groupe d'indice fini de G. Définissons l'homomorphisme <u>Cor</u>.: $H^o(H,A) \to H^o(G,A)$ par $a \rightsquigarrow \sum_{s\in G/H} s\cdot a$. Par le raisonnement standard dejà utilisé, <u>Cor</u>. se prolonge en un unique homomorphisme (encore noté

Cor.) de $H^i(H,A)$ dans $H^i(G,A)$, $i \geq 1$.

PROPOSITION 1.3: Si $n = \mathrm{card}(G/H)$, on a $\mathrm{Cor} \circ \mathrm{Res.} = n$.

Evident pour $i = 0$. On peut se ramener à ce cas en utilisant la propriété de décalage décrite dans le nº 3 du Chapitre II, plongeant le G-module A dans un G-module induit.

COROLLAIRE 1.4: Si n est l'ordre du groupe G, tous les groupes $H^i(G,A)$ sont annulés par n.

COROLLAIRE 1.5: Soit G un groupe fini. Supposons que A soit un G-module de type fini sur Z; alors les $H^i(G,A)$, $i \geq 0$, sont des groupes finis.

Ce sont, en effet, des groupes de type fini puisque les cochaînes sont déterminées par leurs valeurs sur les générateurs. Comme ce sont, en plus, des groupes de torsion, ils sont finis.

Il résulte de ce corollaire le suivant:

COROLLAIRE 1.6: $i \geq 1$, $H^i(G,Z)$ est fini.

COROLLAIRE 1.7: Si G est un groupe fini, les groupes de cohomologie $H^i(G,A)$ sont nuls, $i \geq 1$, chaque fois que A est un G-module uniquement divisible.

COROLLAIRE 1.8: $H^i(G,Q) = 0$, $i \geq 1$, <u>où</u> Q <u>est considéré comme</u> G-<u>module pour l'action triviale de</u> G.

2 - <u>Sous-groupes de Sylow</u>

Soient G un groupe fini d'ordre n et G_p un p-sous-groupe de Sylow de G. Puisque deux sous-groupes de Sylow sont conjugués, pour un objet A de <u>Mod</u>(G), $H^i(G_p,A)$, $i \geq 0$, est déterminé à un isomorphisme près.

Désignons par $H^i(G,A,p)$ le sous-groupe des éléments de $H^i(G,A)$ dont l'ordre est une puissance de p. Alors, puisque, en vertu du Corollaire 1.4, tous les éléments de $H^i(G,A)$ sont de n-torsion,

$$H^i(G,A) = \coprod_{p|n} H^i(G,A,p), \quad i \geq 0,$$

où $p|n$ signifie "ensemble des nombres premiers p divisant n ".

THÉORÈME 2.1: <u>Soit</u> G_p <u>un</u> p-<u>groupe de Sylow d'un groupe fini</u> G. <u>Alors</u>

$$\underline{\text{Res.}}: H^i(G,A,p) \to H^i(G_p,A)$$

<u>est un monomorphisme</u>.

On peut même montrer très facilement plus, à savoir que la corestriction $H^i(G_p,A) \to H^i(G,A,p)$ est surjective et que $H^i(G_p,A)$ se scinde sous la forme $\mathrm{Im}\ \underline{\mathrm{Res}}. \oplus \mathrm{Ker}\ \underline{\mathrm{Cor}}$.

Démonstration du Théorème 2.1: Considérons un élément α de $H^i(G,A,p)$ et $\underline{\mathrm{Res}}.(\alpha)$ son image dans $H^i(G_p,A)$. Il existe un entier k tel que $p^k \cdot \alpha = 0$. Posons $\ell = \mathrm{card}(\frac{G}{G_p})$. En vertu de la Proposition 1.3, on a $\underline{\mathrm{Cor}}. \circ \underline{\mathrm{Res}}. = \ell$, d'où $\ell \cdot \alpha = 0$. Or k est premier à ℓ, d'où $\alpha = 0$.

COROLLAIRE 2.2: Si $H^i(G_p,A) = 0$ pour tout p, alors $H^i(G,A) = 0$, $i \geq 0$.

COROLLAIRE 2.3: Pour chaque $p \in p|n$, soit G_p un p-groupe de Sylow de G. Alors la somme directe des applications restrictions de G à G_p quand p décrit $p|n$, est un monomorphisme de $H^i(G,A)$ dans $\coprod_{p|n} H^i(G_p,A)$, $i \geq 0$.

3 - Premiers calculs

Notons I_G, l'idéal d'augmentation de $Z[G]$. Nous avons alors les suites exactes:

(i) $0 \to I_G \to Z[G] \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0$

(ii) $0 \to Z \to Q \to Q/Z \to 0$,

(i) étant valable pour G fini et (ii) pour G quelconque. $Z[G]$ est un G-module libre; ses groupes de cohomologie $H^i(G,Z[G])$ sont donc tous nuls pour $i \geq 0$. En vertu du Corollaire 1.8, il en est de même des groupes $H^i(G,Q)$, $i \geq 0$. D'où les isomorphismes ci-dessous induits par les applications "cobord"

$$\begin{cases} H^i(G,Z) \cong H^{i+1}(G,I_G) \\ H^i(G,Q/Z) \cong H^{i+1}(G,Z) \ . \end{cases}$$

On déduit immédiatement les valeurs suivantes pour les groupes de cohomologie:

$$\begin{cases} H^1(G,I_G) = H^o(G,Z) = Z \\ H^2(G,I_G) = H^1(G,Z) = \underline{\mathrm{Hom}}(G,Z) = 0 \end{cases}$$

(ne pas oublier que l'opération de G sur Z est triviale).

$$\begin{cases} H^o(G,Q/Z) = H^1(G,Z) = 0 \\ H^1(G,Q/Z) = \underline{\mathrm{Hom}}(G,Q/Z) = H^2(G,Z) = H^3(G,I_G) \end{cases}$$

Mais $\underline{\mathrm{Hom}}\ (G,Q/Z)$ n'est pas autre chose que le groupe des caractères $\hat{G}$ (i.e. le dual de G), d'où:

$$H^2(G,Z) = H^3(G,I_G) = \hat{G} \ .$$

CHAPITRE IV

COHOMOLOGIE GALOISIENNE. ([7], [8], [6])

1 - Une interprétation du H^1 Galoisien non abélien

Soit k um corps. Nous noterons K une extension galoisienne finie de k, G son groupe de Galois.

Donnons-nous un objet algébrique V au-dessus de k et désignons par $E(K/k)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objet algébriques sur k qui deviennent isomorphes sur K à l'objets $V_K = V \otimes_k K$. Soit $A(K)$ le groupe des K-automorphismes de V_K. Le groupe de Galois G opére naturellement sur $A(K)$ par la formule

$$s\cdot(f) = (1\otimes s)\cdot f\cdot(1\otimes s^{-1}).$$

Un objet algébrique O sur k définit par changement de base un objet O_K sur K. Si O est un représentant d'une classe de $E(K/k)$, alors l'ensemble P_O des isomorphismes de O_K vers V_K est un espace principal homogène sous $A(K)$ et définit donc un élément de $H^1(G,A(K))$.

PROPOSITION 1.1: La correspondance $O \rightsquigarrow P_O$ de $E(K/k)$

dans $H^1(G,A(K))$ est bijective.

Voir Serre [6] p 160 et 161 ou encore [8].

2 - Calculs galoisiens

Le groupe de Galois G opère naturellement sur le groupe additif K^+ et aussi sur le groupe multiplicatif K^*. Nous avons vu (nº 4 - chap. II) que la cohomologie du G-module K^+ est trivial pour $i \geq 1$. Intéressons-nous au G-module K^*.

PROPOSITION 2.1: $H^1(G,K^*) = 0$ (Théorème "90 de Hilbert").

On choisit un 1-cocycle (cf. Chapitre I) $s \rightsquigarrow a_s$. En vertu du théorème d'indépendances des automorphismes, si $c \in K$, il existe $b \neq 0$ tel que $b = \sum_{t \in G} a_t \cdot t(c)$. D'où:

$$s(b) = \sum_{t \in G} s(a_t) \cdot st(c) = \sum_{t \in G} a_s^{-1} \cdot a_{st} \cdot st(c) = a_s^{-1} \cdot b$$

qui montre que (a_s) représente un homomorphisme principal.

COROLLAIRE 2.2: Soient K une extension galoisienne finie de k, L une extension galoisienne finie de K de groupe de Galois sur k G. Si $H = \mathrm{Gal}(L/K)$, alors la suite:

$$(1) \qquad 0 \to H^2(\tfrac{G}{H},K^*) \xrightarrow{\text{Inf.}} H^2(G,L^*) \xrightarrow{\text{Res.}} H^2(H,L^*)$$

<u>est exacte</u>.

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la Proposition 1.2 du Chapitre III.

Utilisant une démonstration totalement similaire à celle de la Proposition 2.1, on peut montrer que $H^1(G, GL(n,K))$ est trivial, pour le moins dans le cas K infini. Nous admettrons la validité du résultat pour K fini (cf. Serre [6] p. 159 pour cette situation particulière). Considérons la suite exacte:

$$1 \to SL(n,K) \to GL(n,K) \xrightarrow{\det} K^* \to 1.$$

Appliquant la suite exacte (1) de cohomologie non abélienne, nº 5 - chap. II, on obtient:

$$H^o(G,GL(n,K)) \to H^o(G,K^*) \to H^1(G,SL(n,K)) \to 1$$

qui donne la suite exacte

$$GL(n,k) \to k^* \to H^1(G,SL(n,K)) \to 1.$$

Comme l'homomorphisme $GL(n,k) \to k^*$ est surjectif, on déduit:

PROPOSITION 2.3: $H^1(G,SL(n,K)) = \{1\}$.

3 - Groupe de Brauer

L'objet de ce numéro est de donner une autre interprétation du groupe $H^2(G,k_s^*)$ des classes d'isomorphie d'extensions de G par k_s^* (cf. Chap. I).

DÉFINITION 3.1: Soit k un corps. On appelle groupe de Brauer de k le groupe limite inductive des groupes $H^2(G,K^*)$ quand K parcourt l'ensemble des extensions galoisiennes finies de k. On le note $Br(k)$.

$Br(k)$ s'identifie donc aussi à $H^2(G,k_s^*)$ où k_s désigne une clôture séparable de k et $G = Gal(k_s/k)$. $Br(k)$ dépend fonctoriellement de k. Le Corollaire 3.2 donne la suite exacte

$$0 \to H^2(G,K^*) \to Br(k) \to Br(K) .$$

THÉORÈME 3.1: $Br(k)$ s'identifie au groupe des classes d'équivalence d'algèbres simples centrales sur k.

Rappelons que, deux algèbres simples centrales D, D' sur k sont dites équivalentes si il existe des algèbres de matrices M, M' sur k telles que $D \otimes_k M = D' \otimes_k M'$ et que, pour toute algèbre simple centrale sur k, il existe une extension galoisienne K/k telle que $D \otimes_k K$ soit isomorphe à une algèbre de matrices

$M_n(K)$ sur K pour un certain entier n.

Utilisant la classification du n° 1, on voit donc que les classes d'algèbres simples centrales qui sont isomorphes sur K à $M_n(K)$ sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(G, \underline{\mathrm{Aut}}\, M_n(K))$. Mais, en vertu du théorème de Skolem-Noether, tous les automorphismes de $M_n(K)$ sont intérieurs, c'est-à-dire induits par des éléments inversibles de $M_n(K)$ qui ne sont autres que les éléments de $GL(n,K)$; d'où la suite exacte:

$$1 \to K^* \to GL(n,K) \to \underline{\mathrm{Aut}}\, M_n(K) \to 1.$$

Comparant avec l'autre suite exacte:

$$(2) \qquad 1 \to K^* \to GL(n,K) \to PGL(n,K) \to 1$$

où $PGL(n,K)$ désigne le groupe projectif linéaire en dimension n, on voit que $\underline{\mathrm{Aut}}\, M_n(K)$ s'identifie à $PGL(n,K)$ et $H^1(G, \underline{\mathrm{Aut}}\, M_n(K))$ à $H^1(G,PGL(n,K))$.

La suite exacte (2) conduit à la suite exacte d'ensembles (Voir n° 5 - chap. II) puisque K^* est le centre de $GL(n,K)$

$$H^1(G,GL(n,K)) \to H^1(G,PGL(n,K)) \xrightarrow{\delta^1} H^2(G,K^*).$$

Comme $H^1(G,GL(n,K))$ est trivial, δ^1 est une application injective. Or soit $a_{s,t}$ un représentant d'une classe de $H^2(G,K^*)$, on montre facilement que $a_{s,t}$

s'écrit sous la forme $a'_s \cdot {}^s a'_t \cdot a'^{-1}_{st}$ où $a'_s \in GL(n,K)$ est l'automorphisme de V qui applique e_t sur $a_{s,t}\, e_{st}$, V représentant un espace vectoriel sur K ayant pour base une famille $\{e_s\}$ de vecteurs indexés par G.

4 - Tout ce que nous venons de faire est valable pour les extensions galoisiennes finies. Dans le cas des extensions galoisiennes infinies, on peut prolonger le foncteur cohomologique précédent en posant:

$$H^i(G,A) = \varinjlim H^i\left(\frac{G}{H}, A^H\right),$$

H parcourant l'ensemble des sous-groupes invariants ouverts de G muni de sa structure topologique, compacte, totalement discontinue, limite projective des groupes de Galois $G(K'/k)$ où K' parcourt l'ensemble des sous-extensions galoisiennes finies de K. Ceci n'a de sens que si l'on suppose en outre que le G-module A est topologique, ce qui signifie que $\{s \in G$ tels que $s \cdot a = a, \forall a \in A\}$ est un sous-groupe ouvert de G.

CHAPITRE V

RÉSULTATS PARTICULIERS AU CAS DES GROUPES FINIS

([6], p. 146)

I - Homologie

L'homologie s'obtient en dualisant la construction du Chapitre I. Plus précisément, le dual du foncteur Γ défini dans le nº 2 de loc. citado est le foncteur

$$A \to A_G = \frac{A}{I_G A}$$

où $I_G A = \{s \cdot a - a,\ s \in G,\ a \in A\}$. A_G s'interprète donc comme le plus grand module quotient de A sur lequel G opère trivialement. Le foncteur $A \to A_G$ est exact à droite.

DÉFINITION 1.1: Les groupes d'homologie de G à valeurs dans A notés $H_i(G,A)$, $i \geq 0$, sont les foncteurs dérivés du foncteur $A \to A_G$.

On les explicite comme suit: on considère une résolution projective de Z (de type (1) - nº 2, Chap.I) à laquelle on applique le foncteur $-\otimes_G A$ (c'est-à-dire, en fait, $-\otimes_{Z[G]} A$).

On établit facilement les propriétés duales de celles du foncteur cohomologie; en particulier

a) $H_i(G,-)$ s'annule sur les objets projectifs de Mod G, $i \geq 1$.

b) $H_i(G,-)$ s'annule sur les objets co-induits de Mod G. On appelle évidemment "objet co-induit" un objet de la forme $Z[G] \otimes_Z X$ où X est un groupe abélien. Quand G est fini, les notions d'objet induits et co-induits coincident.

c) Pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans Mod G, on peut dérouler la suite exacte:

$$\dots \to H_i(G,A') \to H_i(G,A) \to H_i(G,A'') \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(G,A') \to \dots$$

2 - Groupes de cohomologie modifiés

Dans toute la suite, nous supposerons que G est un groupe fini. La dualité homologie-cohomologie nous permet dans ce numéro d'étendre le foncteur cohomologique $H^i(G,-)$ en un foncteur cohomologique défini pour toute dimension positive ou négative.

Nous procédons ainsi. A toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans Mod(G), nous pouvons associer les deux suites exactes:

$$(1) \quad \dots H_1(G,A'') \to H_o(G,A') \to H_o(G,A) \to H_o(G,A'') \to 0$$

(2) $\quad 0 \to H^0(G,A') \to H^0(G,A) \to H^0(G,A'') \to H^1(G,A') \ \ldots$

Definissons l'homomorphisme $N\colon A \to A$ par $Na = \sum_{s\in G} s\cdot a$, cette dernière expression ayant un sens puisque G est fini. Comme I_G est engendré par les expressions $(s-1)$, $s \in G$, $I_G A \subset \operatorname{Ker} N$. Les suites exactes (1) et (2) mènent alors au diagramme ci-dessous où N_*^A représente l'application de $H_0(G,A)$ dans $H^0(G,A)$ induite par N:

(*)
$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \operatorname{Ker} N_*^{A''} \arrow[d] & \\
H_1(G,A'') \arrow[r] \arrow[d] & H_0(G,A') \arrow[r] \arrow[d, "N_*^{A'}"] & H_0(G,A) \arrow[r] \arrow[d, "N_*^{A}"] & H_0(G,A'') \arrow[r] \arrow[d, "N_*^{A''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(G,A') \arrow[r] \arrow[d] & H^0(G,A) \arrow[r] & H^0(G,A'') \arrow[r] & H^1(G,A') \\
 & \operatorname{Coker} N_*^{A'} \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

En vertu d'une technique classique (Eilenberg-Cartan [1] Chap. IV), un tel diagramme conduit à une application de $\operatorname{Ker} N_*^{A''}$ dans $\operatorname{Coker} N_*^{A'}$ (on prend un élément dans $\operatorname{Ker} N_*^{A''}$, son image dans $H_0(G,A'')$ que l'on relève dans $H_o(G,A)$; on descend l'élément ainsi obtenu dans $H^o(G,A)$ par N_*^A; on obtient un élément de $H^o(G,A)$ dont on vérifie qu'il se remonte en un élément de $H^o(G,A')$).

Posons: $\hat{H}_o(G,A) = \frac{\text{Ker } N}{I_G A} = \text{Ker } N_*^A$

(on vérifie facilement cette dernière égalité) et dualement

$$\hat{H}^o(G,A) = \frac{A^G}{NA} = \text{Coker } N_*^A .$$

Enfin, posons:

$$\hat{H}^{-1}(G,A) = \hat{H}_o(G,A)$$

$$\hat{H}^i(G,A) = H^i(G,A), \quad i \geq 1$$

$$\hat{H}^{-i}(G,A) = H_{i-1}(G,A), \quad i \geq 2.$$

THÉORÈME 2.1: <u>Les groupes</u> $\hat{H}^i(G,-)$, $i \in Z$, <u>constituent un foncteur cohomologique</u>.

Compte tenu des résultats de Eilenberg-Cartan, le diagramme (*) nous donne, en effet, la suite exacte:

$$\ldots \to H_1(G,A'') \to \hat{H}_o(G,A') \to \hat{H}_o(G,A) \to \hat{H}_o(G,A'')$$
$$\to \hat{H}^o(G,A') \to \hat{H}^o(G,A) \to \hat{H}^o(G,A'')$$
$$\to H^1(G,A') \to \ldots$$

qui n'est pas autre chose que:

$$\ldots \to \hat{H}^{-2}(g,A'') \to \hat{H}^{-1}(G,A') \to \hat{H}^{-1}(G,A) \to \hat{H}^{-1}(G,A'')$$

$$\to \hat{H}^o(G,A') \to \hat{H}^o(G\ A) \to \hat{H}^o(G,A'') \to \hat{H}^1(G,A'') \to \ldots$$

Remarquons, enfin, que le foncteur $\hat{H}^i$ est effaçable et coeffaçable pour tout i. En particulier, il s'annule sur les objets induits, donc aussi sur les objets co-induits puisque G est fini et, par conséquent, sur les projectifs.

Les applications <u>Inf</u>., <u>Res</u>., <u>Cor</u>. définies dans le Chapitre III s'étendent au foncteur cohomologique $\hat{H}^i(G,-)$ et jouissent des mêmes propriétés (cf. Proposition 1.3, Corollaire 1.4, Théorème 2.1 - Chap. III).

3 - Homomorphisme transfert

Considérons de nouveau la suite exacte

$$0 \to I_G \to Z[G] \to Z \to 0$$

Elle fournit les isomorphismes:

$$\hat{H}^{-2}(G,Z) \xrightarrow{\simeq} \hat{H}^{-1}(G,I_G) = \hat{H}_o(G,I_G) = \frac{I_G}{I_G^2}. \tag{3}$$

LEMME 3.1: *Soit G^c le groupe des commutateurs de G. Nous avons un isomorphisme*

$$\frac{G}{G^c} \simeq \frac{I_G}{I_G^2} \tag{4}$$

donné par: $\quad s\cdot G^c \to (s-1) + I_G^2 .$

La démonstration de ce lemme est sans difficulté.

Conjuguant les résultats (3) et (4), nous voyons que l'homomorphisme

$$\underline{\text{Cor}}:\ \hat{H}^{-2}(H,Z) \to \hat{H}^{-2}(G,Z)$$

correspond à l'homomorphisme $\dfrac{H}{H^c} \to \dfrac{G}{G^c}$ induit par l'inclusion de H dans G. De même, l'application

$$\underline{\text{Res}}:\ \hat{H}^{-2}(G,Z) \to \hat{H}^{-2}(H,Z)$$

correspond à l'homomorphisme "Verlagerung"

$$\text{Ver}:\ \frac{G}{G^c} \to \frac{H}{H^c}$$

défini dans [10]. Ce dernier homomorphisme s'interprète comme le dual de l'homomorphisme

$$\begin{array}{lccc}
\underline{\text{Res}}: & H^1(G,''/Z) & \to & H^1(G,Q/Z) \\
 & \Vert & & \Vert \\
 & \text{Hom}(G,Q/Z) & & \text{Hom}(H,Q/Z) \\
 & \Vert & & \Vert \\
 & \hat{G} & & \hat{H} \\
 & \Vert & & \Vert \\
 & \widehat{\left(\dfrac{G}{G^c}\right)} & & \widehat{\left(\dfrac{H}{H^c}\right)}
\end{array}$$

Rappelons (nº 3 - Chap. III) que $\hat{G}$ est le dual de G.

4 - Théorème (dit "des Jumeaux").

DÉFINITION 4.1: Soit G un groupe fini; soit A un G-module. On dit que A est *cohomologiquement trivial* si pour tout sous-groupe H de G et, pour tout $i \in Z$, $\hat{H}^i(H,A) = 0$.

EXEMPLE: le G-module K^+ du nº 4 - Chap. II est cohomologiquement trivial.

THÉORÈME 4.1 (dit "des Jumeaux") ([6], [4]): *Soient* G *un groupe fini,* A *un* G*-module. Il y a équivalence entre:*

(i) *Pour tout nombre premier* p, $\hat{H}^i(G_p,A) = 0$ *pour deux valeurs consécutives de* i, *où* G_p *désigne un* p*-groupe de Sylov de* G (*quelconque, car ils sont tous conjugués entre eux*).

(ii) A *est cohomologiquement trivial*.

(iii) *Il existe une résolution projective du* $Z[G]$*-module* A *du type suivant:*

$$0 \to P_1 \to P_o \to A \to 0 .$$

Si l'on appelle dimension projective de A la borne inférieure des "longueurs des chaînes de résolutions projectives de A", (iii) s'exprime encore en disant que la dimension projective de A est ≤ 1.

Il suffit seulement de montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii). Pour cela, considérons A comme quotient d'un $Z[G]$-module libre P_o et formons la suite exacte

$$(5) \qquad 0 \to P_1 \to P_o \to A \to 0.$$

Il nous faut donc montrer que, sous l'hypothèse (i), P_1 est un G-module projectif. Mais la suite exacte de cohomologie appliquée à (5) montre que si (i) est satisfaite, alors $\hat{H}^{i+1}(G_p,P_1) = \hat{H}^{i+2}(G_p,P_1) = 0$. Nous sommes donc ramenés à montrer la proposition suivante:

PROPOSITION 4.2: Soient G un groupe fini, G_p un p-groupe de Sylow de G, P_1 un G-module. Supposons que: a) pour tout nombre premier p, pour un entier i, $\hat{H}^i(G_p,P_1) = \hat{H}^{i+1}(G_p,P_1) = 0$.

b) P_1 est Z-libre.

Alors, P_1 est un $Z[G]$-module projectif, donc aussi co-induit et induit.

Ecrivons P_1 comme quotient d'un $Z[G]$-module libre L

$$(6) \qquad 0 \to N \to L \to P_1 \to 0.$$

Comme P_1 est Z-libre, le foncteur $\mathrm{Hom}_Z(P_1,-)$ transforme (6) en la suite exacte:

$$(7) \qquad 0 \to \mathrm{Hom}_Z(P_1,N) \to \mathrm{Hom}_Z(P_1,L) \to \mathrm{Hom}_Z(P_1,P_1) \to 0.$$

Supposons, pour le moment, demontré que sous les conditions de la proposition, le G-module $\mathrm{Hom}_Z(P_1,N)$ est cohomologiquement trivial, alors $H^1(G, \mathrm{Hom}_Z(P_1,N)) = 0$. La suite exacte de cohomologie dérivée de (7) montre alors que $\mathrm{Hom}_G(P_1,L) \to \mathrm{Hom}_G(P_1,P_1)$ est surjective. Il existe donc un G-homomorphisme de A dans L (qui élève le G-morphisme id_{P_1}) et qui fait de A un facteur direct de L, donc Z[G]-projectif. Tout revient donc à montrer que $\mathrm{Hom}_Z(P_1,N)$ est cohomologiquement trivial. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 4.3: <u>Soit</u> G <u>un</u> p-<u>groupe; soit</u> A <u>un</u> G-<u>module</u>
<u>sans torsion. Il y a équivalence entre</u>

(i)' $\hat{H}^i(G,A) = 0$ <u>pour deux dimensions consécutives</u>.

(ii)' A <u>est cohomologiquement trivial</u>.

(iii)' <u>le</u> $F_p[G]$-<u>module</u> $\frac{A}{pA}$ <u>est libre où</u> F_p <u>désigne le corps premier associé au nombre premier</u> p.

En effet, puisque A est sans p-torsion, nous avons la suite exacte: $0 \to A \xrightarrow{p} A \to A/pA \to 0$. En la dérivant, la condition (i)' implique $\hat{H}^i(G,A/pA) = 0$. Par un procédé de décalage (nº 3, Chap. II), on peut se ramener au cas $i = -2$ qui donne $H_1(G, A/pA) = 0$ et l'on voit facilement que cette dernière égalité suffit pour assurer que A/pA est $F_p[G]$-libre. La multiplication par p est donc bijective dans tous les $\hat{H}^i(G,A)$ ce qui entraîne (ii)'.

Revenons à la démonstration du fait que $\mathrm{Hom}_Z(P_1,N)$ est cohomologiquement trivial. P_1 est sans p-torsion, l'application du lemme précédent montre alors que $\frac{P_1}{pP_1}$ est un $F_p[G]$-module libre. N est aussi sans p-torsion; la suite exacte

$$0 \to N \xrightarrow{p} N \to \frac{N}{pN} \to 0$$

donne

$$0 \to N \xrightarrow{p} N \to \mathrm{Hom}_Z(P_1, \frac{N}{pN}) \to 0 .$$

D'où l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_Z(P_1, \frac{N}{pN}) \simeq \mathrm{Hom}_Z(\frac{P_1}{pP_1}, \frac{N}{pN})$.

Or $\frac{P_1}{pP_1}$ est un $F_p[G]$-module libre, donc induit;

donc $\mathrm{Hom}_Z(\frac{P_1}{pP_1}, \frac{N}{pN})$ est cohomologiquement trivial et $F_p[G]$-libre. Le Lemme 4.3 permet alors d'affirmer que $\mathrm{Hom}_Z(P_1,N)$ est cohomologiquement trivial, ce qui termine la démonstration du Théorème 4.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN and S. EILENBERG - Homological Algebra. Princeton 1956.

[2] A. GROTHENDIECK - Sur quelques points d'algèbre Homologique. Tohoku Math. J. 9, 119-221 (1957).

[3] P. HILTON - Tópicos de Álgebra Homológica. Publication de l'Université de São Paulo et de l'IMPA, 1971.

[4] S. LANG - Rapport sur la cohomologie des groupes. Benjamin, 1966.

[5] S. MAC-LANE - Homology. Springer, New York 1963.

[6] J.P. SERRE - Corps locaux. Paris - Hermann 1962.

[7] J.P. SERRE - Cohomologie Galoisienne. Berlin - Heidelberg - New York - Springer 1965.

[8] J.P. SERRE et A. BOREL - Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne. Commentari Math. Helvet. 39 (1964) 111-164.

[9] E. WEISS - Cohomology of groups. Academic Press New York et Londres - 1969.

[10] H. ZASSENHAUS - The theory of groups. Chelsea, New York - 1949.