SEMINÁRIO DE SISTEMAS DINÂMICOS

organizado por
JACOB PALIS JR.

MONOGRAFIAS DE MATEMÁTICA

1) Alberto Azevedo & Renzo Piccinini — Introdução à Teoria dos Grupos

2) Nathan M Santos — Vetores e Matrizes

3) Manfredo P. Carmo — Introdução à Geometria Diferencial Global

4) Jacob Palis Jr. — Sistemas Dinâmicos

INTRODUÇÃO

Estas notas correspondem às exposições feitas no Seminário de Sistemas Dinâmicos, realizado no IMPA em 1970.

A escolha dos tópicos foi feita de modo a dar ao leitor uma visão de uma das linhas mestras de pesquisa que atualmente se desenvolve em Sistemas Dinâmicos: o estudo de propriedades genéricas e estabilidade estrutural. A maioria dos artigos originais de pesquisa que serviram de base para estas notas foram publicados nos últimos dois anos.

A exposição dos artigos é bastante completa. No entanto, a sua compreensão requer do leitor certa maturidade em Equações Diferenciais, Topologia Diferencial e Elementos de Teoria Espectral.

Vários alunos de Doutorado do IMPA participaram do Seminário de Sistemas Dinâmicos e redigiram boa parte dos artigos aqui apresentados. O Seminário prossegue pelo ano de 1971, dentro do programa de atividades desenvolvido nesta área. Parte importante dêste programa será a realização do Simpósio Internacional de Sistemas Dinâmicos a ter lugar em Salvador em fins do próximo mês de julho.

Contribuição valiosa para a realização destas notas foi dada pelos Professôres Mauricio Peixoto, Jorge Sotomayor, Sheldon Newhouse e Clark Robinson. Agradecemos ao Professor Elon Lages Lima, Diretor do IMPA, pelo apôio dada à esta publicação. Agradecemos à Academia Brasileira de Ciências pela colaboração que nos deu através de convênio feito com o Ministério do Planejamento e Coordenação Geral.

Rio de Janeiro, abril de 1971

Jacob Palis Jr.

ÍNDICE

I - Estabilidade dos Sistemas Dinâmicos .... J. Palis

II - Estabilidade Local em Espaço de Banach .... Rubens L. de Andrade

III - Variedade Estável de Elemento Crítico .... Geovan T. dos Santos

IV - Difeomorfismos de Morse-Smale I .... Gilda de La Rocque Palis

V - Difeomorfismos de Morse-Smale II .... Genésio L. dos Reis

VI - Estabilidade Local .... Welington C. de Melo

VII - Densidade dos Campos de Morse-Smale em M^2 .... Aristides Barreto e Pedro Mendes

VIII - O Teorema de Kupka e Smale .... J. Pitombeira Carvalho e Nathan M. dos Santos

IX - Stability of Anosov Diffeomorphisms .... A. Verjovsky e C. Robinson

X - Estabilidade Estrutural dos Sistemas de Morse-Smale .... Genésio L. dos Reis, Pedro Mendes, Welington C. de Melo

XI - Stable Manifolds for Hyperbolic Sets.......... R. Jewett e W. White

XII - O Teorema da Decomposição Espectral para Difeomorfismos............. Nathan M. dos Santos

XIII - Ω-Explosões.............. Geovan T. dos Santos

XIV - Notes on Ω-Stability..... S. Newhouse

XV - Teoria da Bifurcação Genérica................. Jorge Sotomayor

ESTABILIDADE DOS SISTEMAS DINÂMICOS*

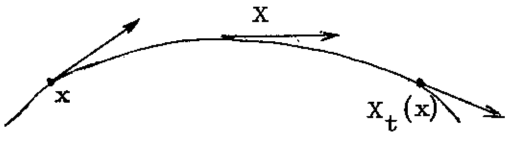
J. Palis

Um sistema dinâmico é definido como uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável (de classe C^∞) M. As ações que consideraremos serão diferenciáveis de classe C^r ($r \geq 1$), isto é, homomorfismos de grupos $\varphi: G \to \text{Dif}(M)$ tais que $\varphi: M \times G \to M$, definidas por $\varphi(x,g) = \varphi(g)(x)$, são de classe C^r. Dif(M) representa o grupo de difeomorfismos de classe C^r de M, munido com a topologia C^r. Do ponto de vista aqui adotado, os casos mais estudados até agora são aqueles em que $G = R$ ou $G = Z$ e M é compacto e sem bordo. As ações de $G = Z$ em M se identificam canônicamente com Dif(M). Os campos de vetores em M de classe C^r geram, também de modo natural, grupos a um parâmetro de difeomorfismos, isto é, ações de R em M. O conjunto de campos de vetores em M de classe C^r será indicado por $\chi(M)$ e munido da topologia C^r. Para $X \in \chi(M)$,

---

* O presente trabalho baseia-se em uma série de conferências feitas pelo autor na II Reunião da Sociedade Brasileira de Matemática e publicadas nas Atas desta Reunião.

representaremos por $\{X_t \mid t \in R\}$ a ação ou fluxo por êle gerado. Para cada $t \in R$ e $x \in M$, $X_t(x)$ é obtido percorrendo-se a trajetória de X que passa por x durante o tempo t.



O objetivo básico da teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos de M é o estudo topológico global de suas órbitas e sua consequente classificação. Observemos, no entanto, que se não impuzermos certas condições ao sistema dinâmico, seu espaço de órbitas pode ser muito patológico. Assim é que qualquer conjunto fechado de M coincide com o conjunto de pontos fixos de algum sistema dinâmico. Portanto, uma classificação dos sistemas dinâmicos do ponto de vista acima envolveria a classificação (módulo homeomorfismos) dos conjuntos fechados de M. É natural, pois, a restrição dêste estudo a um subconjunto (digamos aberto e denso) dos sistemas dinâmicos, pelo menos em sua etapa básica.

Resumindo os comentários acima, poderíamos assim enunciar o problema fundamental da teoria:

<u>Definir um conjunto B aberto e denso dos sistemas dinâmicos $\text{Dif}(M)$ ou $\chi(M)$ e uma relação de equivalência $\sim$ de maneira tal que cada elemento de B seja estável em relação a $\sim$.</u>

A formulação acima é essencialmente devida a Smale [27]. Tal artigo de Smale constitui-se na referência básica para estas notas.

A condição de cada elemento de B ser estável em relação a $\sim$ significa que, para qualquer sistema $b \in B$, existe uma vizinhança de b em $\text{Dif}(M)$ (ou $\chi(M)$) formada por sistemas $\sim$ equivalentes a b. Como $\text{Dif}(M)$ e $\chi(M)$ são separáveis, teremos um conjunto enumerável de $\sim$ classes de equivalência em B. Esta relação $\sim$ deve expressar o comportamento topológico das órbitas (tôdas ou parte significativa delas) dos sistemas.

Neste sentido, a relação de equivalência mais expressiva é a conjugação:

DEFINIÇÃO - $f,g \in \text{Dif}(M)$ são conjugados se existir um homeomorfismo $h:M \to M$ tal que $hf(x) = gh(x)$ para $\forall x \in M$.

DEFINIÇÃO - $X,Y \in \chi(M)$ são conjugados se existir um homeomorfismo $h:M \to M$ que leva as trajetórias de X nas de Y.

A estabilidade de um sistema dinâmico em relação à conjugação é denominada estabilidade estrutural.

No que se segue, admitiremos sempre M compacto e sem bordo.

Com respeito ao problema fundamental acima formulado, temos os seguintes resultados:

TEOREMA (Peixoto [17]) - Quando $\dim M = 2$, os sistemas estruturalmente estáveis em $\chi(M)$ formam um conjunto aberto e denso.

Aqui, a relação de equivalência $\sim$ é a conjugação e o conjunto $B \subset \chi(M^2)$ é formado pelos campos de vetores estruturalmente estáveis ($\sim$ estáveis). Recentemente, Peixoto enunciou uma caracterização das classes de conjugação dos campos estruturalmente estáveis de M^2 [18].

TEOREMA (Smale [24] e Palis-Smale [16]) - Para qualquer M, seja $\mathrm{Grad}(M) \subset X(M)$ o conjunto de campos gradientes de M. Em $\mathrm{Grad}(M)$, o conjunto dos sistemas estruturalmente estáveis é aberto e denso.

Neste caso, a relação de equivalência $\sim$ é também a conjugação e o conjunto $B \subset \mathrm{Grad}(M)$ é formado pelos campos gradientes estruturalmente estáveis. Não há, aqui, qualquer restrição quanto à dimensão de M. Um problema que permanece em aberto é o de caracterizar as classes de conjugação quando $M = S^3$, ou em geral para $\dim M \geq 3$.

Veremos depois outra importante relação de equivalência para os sistemas dinâmicos, denominada de Ω-conjugação.

Os sistemas estruturalmente estáveis que aparecem nos resultados acima são denominados sistemas de Morse-Smale. Para caracterizar tais sistemas necessitamos de alguns conceitos básicos.

Seja $f \in \mathrm{Dif}(M)$. Um ponto $x \in M$ é dito não-errante se para qualquer vizinhança $U(x)$ e qualquer inteiro positivo n_o, existir um inteiro n tal que $|n| > n_o$ e $f^n U \cap U \neq \emptyset$. A definição de ponto não-errante para um sistema em $\chi(M)$ é análoga. O conjunto de pontos não-errantes de um sistema é fechado e invariante, isto é, formado por órbitas do sistema e será denotado por Ω.

Um ponto fixo x de f é dito hiperbólico se $\mathrm{Esp}(Df)_x \cap S^1 = \phi$ onde $\mathrm{Esp}(Df)_x$ representa o espectro complexificado de $(Df)_x$ e S^1 o círculo unitário no plano complexo. Um ponto crítico de $X \in \chi(M)$ é hiperbólico se x fôr um ponto fixo hiperbólico para $X_{t=1}$.

Se x fôr um ponto periódico de f, então êle será hiperbólico se fôr um ponto fixo hiperbólico de f^n, onde n é o período de x. Uma órbita periódica γ do campo X é hiperbólica se a transformação de Poincaré, associada a uma seção transversal a X passando por $x \in \gamma$, tiver x como ponto fixo hiperbólico.

Chamaremos de elemento crítico de um sistema dinâmico a um ponto fixo ou periódico de um difeomorfismo ou a um ponto crítico ou órbita fechada de um campo de vetores.

O seguinte resultado de Hartman [4] e Grobman [5] (veja também [12], [13], [21]) dá uma idéia da importância do conceito de elemento crítico hiperbólico:

TEOREMA - Uma condição necessária e suficiente para que um sistema dinâmico seja estruturalmente estável em uma vizinhança de um elmento crítico (localmente estruturalmente estável) é que êste elemento seja hiperbólico.

Se y fôr um elemento crítico hiperbólico, o conjunto de pontos cujas órbitas positivas convergem a y formam uma variedade de classe C^r (mesma classe de diferenciabilidade do sistema dinâmico correspondente) imersa 1-1 em M [6]. Esta variedade é chamada de variedade estável de y e a denotaremos por $W^s(y)$. A variedade instável de y, $W^u(y)$, é definida dualmente. Se s e u forem as dimensões das variedades invariantes (estável e instável) de y, então $s+u = \dim M$ ou $s+u = \dim M+1$. Êste último caso ocorre quando y é uma órbita fechada de um campo de vetores.

Podemos, agora, definir os sistemas de Morse-Smale. A formulação que se segue é válida tanto para os elementos de $Dif(M)$ como para os de $\chi(M)$.

DEFINIÇÃO - Um sistema dinâmico é dito de Morse-Smale se

(i) seu conjunto não-errante consistir de um número finito de elementos críticos, todos hiperbólicos;

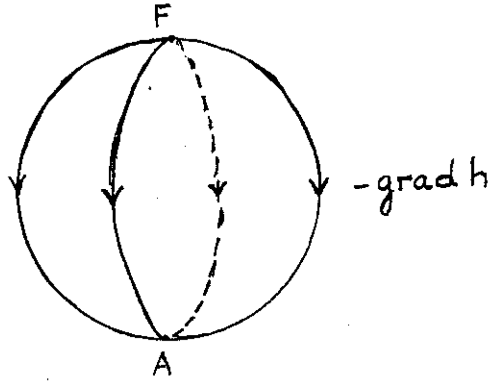
(ii) as variedades invariantes de seus elementos críticos estiverem, duas a duas, em posição geral.

Demonstra-se em [12] que os sistemas de Morse-Smale formam um subconjunto aberto de $Dif(M)$ ou $\chi(M)$. Por outro lado, Smale mostrou em [24] que os campos de Morse-Smale são densos em $Grad(M)$. Observemos também que se $X \in Grad(M)$ é um campo de Morse-Smale, então $X_{t=t_0}$ é um difeomorfismo de Morse-Smale para qualquer $t_0 \neq 0$. Assim, em qualquer variedade compacta e sem bordo M, existem sistemas de Morse-Smale e êles formam um subconjunto aberto de $Dif(M)$ ou $\chi(M)$.

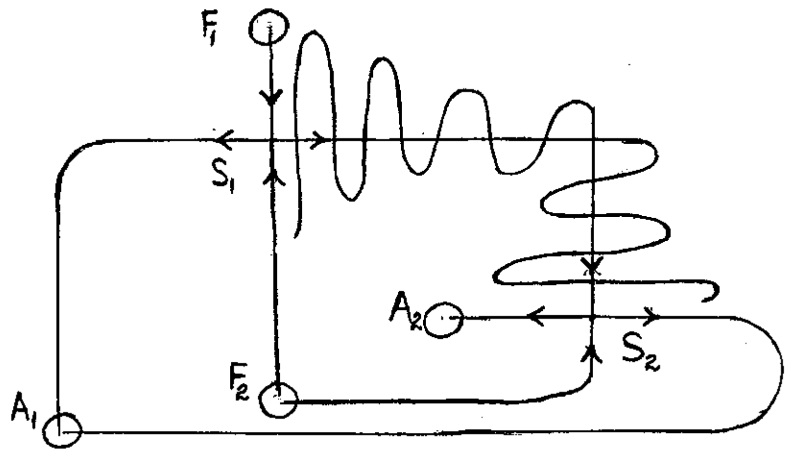
Consideremos na esfera

$$S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset R^3$$

a função real $h: S^2 \to R$, definida por $h(x,y,z) = z$. É fácil ver que $-grad\ h$ é um campo de Morse-Smale: $\Omega(-grad\ h)$ consiste do polo norte da esfera (fonte) e do polo sul (atrator), como na figura abaixo. O difeomorfis-



mo $(-\text{grad } h)_{t=1}$ é de Morse-Smale. Consideremos, agora, o difeomorfismo de Morse-Smale f de S^2, cujo conjunto não-errante $\Omega(f)$ é exibido na figura 3.



$\Omega(f)$ consiste dos pontos fixos A_1, A_2, F_1, F_2, S_1 e S_2, onde A_1 e A_2 são atratores, F_1 e F_2 fontes e S_1 e S_2 selas. Neste caso, não existe um campo $X \in \mathfrak{X}(S^2)$ tal que $f = X_{t=1}$.

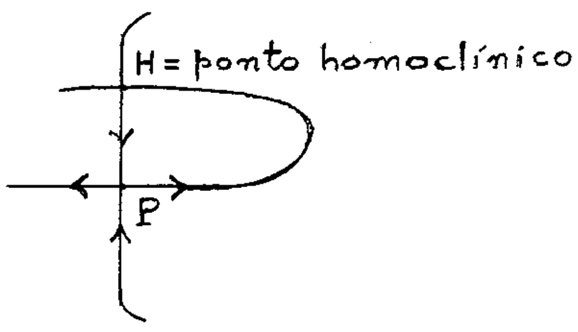
Sôbre sistemas de Morse-Smale temos os seguintes resultados, já enunciados para campos gradientes:

TEOREMA (Palis-Smale [16]) - Os sistemas de Morse-Smale são estruturalmente estáveis.

COROLÁRIO - Em tôda variedade compacta e sem bordo existem sistemas estruturalmente estáveis.

O teorema acima foi demonstrado em [12] para dim $M \leq 3$.

Já observamos que os sistemas de Morse-Smale são densos em Grad(M), qualquer que seja dim M, ou em $\chi(M)$ se dim M = 2. Em geral, tal não ocorre em Dif(M) ou $\chi(M)$. Para tanto, basta exibir um sistema em que haja um ponto homoclínico transversal. Isto é, uma intersecção transversal das variedades estável e instável do mesmo elemento crítico hiperbólico, a intersecção ocorrendo fora da órbita do elemento crítico. Tal ponto homoclínico é não-errante, logo o sistema não pode ser Morse-Smale.



Além disso, tal fenômeno é estável: qualquer sistema suficientemente próximo do inicial (topologia C^r) exibe um ponto homoclínico. Daí, teríamos um conjunto aberto no complemento dos Morse-Smale.

O seguinte exemplo, nesta direção, é devido a Thom.

Considere em R^2 a seguinte transformação linear $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, expressa em relação a uma certa base de R^2. Tal transformação se projeta, naturalmente, em um difeomorfismo f do toro T^2.

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi"'] & R^2 \arrow[d, "\pi"] \\ T^2 \arrow[r, "f"'] & T^2 \end{tikzcd}$$

Em R^2, a origem é hiperbólica para L e suas variedades estável e instável são retas perpendiculares e de inclinação irracional. Elas se projetam nas variedades estável e instável do ponto fixo $\pi(0)$, hiperbólico para f. Logo, as variedades invariantes de $\pi(0)$ são densas em T^2 e suas intersecções (pontos homoclínicos) são, também, densas em T^2.

É fácil ver que o fibrado rangente a T^2 se decompõe em uma soma direta $E^s \oplus E^u$ contínua, invariante por Df e Df/E^s, $(Df)^{-1}/E^u$ são contrações.

A fim de generalizar o exemplo acima, introduziremos agora o conceito de conjunto hiperbólico.

DEFINIÇÃO - Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante por $f \in \mathrm{Dif}(M)$, isto é, $f(\Lambda) = \Lambda$. Tal conjunto Λ é dito hiperbólico se o fibrado tangente a M restrito a Λ, $T_\Lambda M$, se decompõe em uma soma direta

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

contínua, invariante por Df e tal que Df/E^s, $(Df)^{-1}/E^u$ sejam contrações. Isto é, $\|Df/E^s\|$, $\|(Df)^{-1}/E^u\| < \lambda < 1$ para alguma métrica Riemanniana em M.

A definição de conjunto hiperbólico de um fluxo X_t é análoga. Apenas, exige-se que $T_\Lambda M = E^o \oplus E^s \oplus E^u$, sendo êstes sub-fibrados contínuos, invariantes por DX_t para cada $t \in R$ e

$$\|DX_t/E^s\|, \ \|DX_{-t}/E^u\| < e^{-\lambda t}$$

para cada $t > 0$ e algum $\lambda > 0$. E^o é o sub-fibrado definido em cada ponto pelo campo de vetores X, associado a X_t.

Um sistema de Anosov é aquêle para o qual o ambiente todo M é um conjunto hiperbólico. O seguinte resultado é devido a Anosov [2].

TEOREMA - Os sistemas de Anosov são estruturalmente estáveis.

Os difeomorfismos de Anosov de codimensão um, i.e. dim $W^s(x) = 1$ ou dim $W^u(x) = 1$ para todo $x \in M$, foram estudados por Fransks [3] e Newhouse [10], entre outros. Para o caso análogo de campos de vetores, veja [31].

Objetivando a obtenção de uma classe de sistemas dinâmicos que englobasse os sistemas de Morse-Smale e Anosov, Smale [27] apresentou o seguinte conceito:

DEFINIÇÃO - Um sistema dinâmico satisfaz o Axioma A se

(i) seu conjunto não-errante Ω fôr hiperbólico;

(ii) seus elementos críticos forem denso em Ω.

Evidentemente, qualquer sistema de Morse-Smale satisfaz o Axioma A. É claro, também, que qualquer sistema de Anosov satisfaz a condição (i) do Axioma A. Para mostrar que tal ocorre em relação à condição (ii), faremos uso da seguinte consequência de um resultado de Pugh [20]:

TEOREMA - Os difeomorfismos

$$\{f \in \mathrm{Dif}(M) \mid \overline{P(f)} = \Omega(f)\}$$

são densos em $\mathrm{Dif}^1(M)$, sendo $\overline{P(f)}$ o fêcho topológico do conjunto de pontos periódicos de f.

Resultado análogo é válido para campos de vetores.

Usando tais fatos e a estabilidade estrutural dos sistemas de Anosov, válida em $\mathrm{Dif}^r(M)$ ou $\chi^r(M)$ para qualquer $r \geq 1$, concluimos que êstes sistemas satisfazem o item (ii) do Axioma A.

Vale a pena abrir aqui um parênteses para mencionar em conexão com o teorema de Pugh acima, o seguinte resultado de Kupka e Smale.

TEOREMA ([9], [19], [25]) - Os sistemas dinâmicos para os quais

(i) seus elementos críticos são todos hiperbólicos,

(ii) as variedades invariantes dêstes elementos críticos estão, duas a duas, em posição geral,

formam um conjunto de segunda categoria (Baire) em $\mathrm{Dif}(M)$ ou $\chi(M)$.

Se um sistema satisfaz o Axioma A então seu conjunto não-errante Ω pode ser escrito [27] como uma união finita de conjuntos fechados, invariantes e topològicamente transitivos (possuem órbita densa):

$$\Omega = \bigcup_k \Omega_k \quad .$$

Êstes Ω_k são chamados de sub-conjuntos básicos de Ω. Um importante problema em aberto é o de caracterizar topològicamente tais subconjuntos básicos. Williams em [32] resolve parcialmente esta questão para atratores.

Se $f \in \mathrm{Dif}(M)$ satisfaz o Axioma A e Ω_k é um subconjunto básico de $\Omega(f)$, então para cada $x \in \Omega_k$ o conjunto

$$W^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$$

é uma variedade de classe C^r (mesma classe de diferenciabilidade do sistema dinâmico) imersa em M e tangente a E^s em x. Tal fato foi enunciado em [27] e demonstrado em [6].

Se definirmos

$$W^s(\Omega_k) = \{y \in M \mid f^n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Omega_k\}$$

então, de acôrdo com [8], $W^s(\Omega_k) = \bigcup_{x\in\Omega_k} W^s(x)$.

Os resultados análogos para campos de vetores se encontram em [7], [8].

A condição de transversalidade das variedades invariantes, que aparece na definição dos sistemas Morse-Smale e é automática nos sistemas Anosov, é expressa aqui por

<u>Condição de Transversalidade</u>. $W^s(x)$ e $W^u(y)$ estão em posição geral para quaisquer $x \in \Omega_i$, $y \in \Omega_j$.

Pode-se, então, formular a seguinte conjectura:

<u>Conjectura</u> - Uma condição necessária e suficiente para que um sistema dinâmico seja estruturalmente es-

tável é que êle satisfaça ao Axioma A e à Condição de Transversalidade.

Tal conjectura verificou-se verdadeira quando o conjunto não-errante consiste em um número finito de elementos críticos.

Além disto, recentemente Robbin demonstrou o seguinte resultado:

TEOREMA (Robbin [23]) - Se o difeomorfismo $f: M \to M$ é de classe C^2, satisfaz o Axioma A e a Condição de Transversalidade, então f é estruturalmente estável em $\mathrm{Dif}^1(M)$.

No entanto, com respeito ao Problema Fundamental aqui formulado, ressaltamos que os sistemas estruturalmente estáveis não são, em geral, densos em $\mathrm{Dif}(M)$ ou $\mathfrak{X}(M)$ [26]. Um ponto de vista mais atual [29] é o de procurar definir uma sequência finita de subconjuntos $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset \subset U_n$ de sistemas dinâmicos, cada um dêles exibindo uma certa propriedade de estabilidade que seria cada vez mais fraca, a partir da estabilidade estrutural. Êstes U_i devem ser abertos, ou pelo menos de segunda categoria (Baire) em algum conjunto aberto e U_n deve ser denso em $\mathrm{Dif}(M)$ ou $\mathfrak{X}(M)$. Assim, U_1 seria formado pelos sistemas de Morse-Smale e U_2 pelos sistemas que satisfazem o Axioma A e a

Condição de Transversalidade.

Observamos, no entanto, que não se provou, até o momento, se os sistemas que satisfazem o Axioma A e a Condição de Transversalidade são estruturalmente estáveis e formam um conjunto aberto em $Dif^1(M)$ ou $\chi^1(M)$. Tais questões, resolvidas por Robbin em $Dif^2(M)$, se tornam importantes se levarmos em conta que o resultado de Pugh acima enunciado em $Dif^1(M)$ ou $\chi^1(M)$, não é conhecido em $Dif^r(M)$ ou $\chi^r(M)$ para $r \geq 2$.

Outra questão em aberto: se $\Omega(f)$ é hiperbólico, então $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$? Isto é: Axioma A (i) $\Rightarrow$ Axioma A?

Vejamos, agora, uma classe mais ampla de sistemas dinâmicos. Uma propriedade mais fraca que a estabilidade estrutural, mas ainda assim muito expressiva, é a estabilidade de um sistema restrito ao seu conjunto não-errante. Tal estabilidade é denominada Ω-estabilidade.

DEFINIÇÃO - $f,g \in Dif(M)$ são Ω-conjugados se existir um homeomorfismo $h:\Omega(f) \to \Omega(g)$ tal que $hf(x) = gh(x)$ para qualquer $x \in \Omega(f)$.

Para campos de vetores $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ a definição é análoga, exigindo-se que o homeomorfismo leve trajetórias de $\Omega(X)$ nas de $\Omega(Y)$.

DEFINIÇÃO - Considere um sistema dinâmico que satisfaça o Axioma A e sejam $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ os subconjuntos básicos de seu conjunto não-errante Ω. Dizemos que Ω possui um k-ciclo $(k \geq 2)$, se existir uma sequência $\Omega_1,\ldots,\Omega_k,\Omega_{k+1}$ (reordenando os índices se necessário) tal que

(i) $\Omega_{k+1} = \Omega_1$ e em qualquer outro caso $\Omega_i \neq \Omega_j$

(ii) $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_{i+1}) \neq \phi$.

TEOREMA (Palis, [12] e [14]) - Seja $f \in \text{Dif}(M)$ tal que $\Omega(f)$ é finito. Então f é Ω-estável se e sòmente se $\Omega(f)$ é hiperbólico e não possui ciclos.

O resultado análogo para campo de vetores também é válido ([12], [15]).

TEOREMA (Smale, [28]) - Se $f \in \text{Dif}(M)$ satisfaz o Axioma A e $\Omega(f)$ não possui ciclos então f é Ω-estável.

O resultado correspondente para campos de vetores encontra-se no artigo de Pugh e Shub [22].

TEOREMA ([14]) - Se $f \in \text{Dif}(M)$ satisfaz o Axioma A e f é Ω-estável então $\Omega(f)$ não possui ciclos.

Em [15] tem-se o fato análogo para campo de vetores.

<u>Conjectura</u>: Um sistema dinâmico é Ω-estável se e sòmente se êle satisfaz ao Axioma A e seu conjunto não-errante não possui ciclos.

Os sistemas Ω-estáveis não são, em geral, densos no conjunto de todos os sistemas dinâmicos. Tal fato foi demonstrado em [1] (veja também [11]).

Finalmente, observamos que existem vários problemas em aberto com respeito às classes de conjugação (ou Ω-conjugação) dos sistemas dinâmicos. Por exemplo, de que maneira podemos ligar duas classes de conjugação por um arco (i.e. uma família a um parâmetro) de sistemas dinâmicos? Quais as classes de conjugação que se obtém por pequenas perturbações, a partir de um sistema satisfazendo o Axioma A e possuindo ciclos em seu conjunto não-errante? Em [30], Sotomayor estudou as famílias a um parâmetro em $\chi(M^2)$.

REFERÊNCIAS

[1] - ABRAHAM e SMALE, Non-genericity of Axiom A and Ω-stability, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS, 1970.

[2] - ANOSOV, Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Stekelov Math. Inst., AMS Translations, 1969.

[3] - FRANKS, Anosov diffeomorphisms, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol XIV, AMS, 1970.

[4] - GROBMAN, Topological classification of the neighborhood of a singular point in n-dimensional space, Math. Sb., N.S. 56, 1962.

[5] - HARTMAN, A lemma in the structural stability of differential equations, Proc. AMS 11, 1961.

[6] - HIRSCH e PUGH, Stable manifolds for hyperbolic sets, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS, 1970.

[7] - HIRSCH, PUGH e SHUB, Invariant manifolds, a ser publicado.

[8] - HIRSCH, PALIS, PUGH e SHUB, Neighborhoods of hyperbolic sets, Inventiones Mathematicae, 1970

[9] - KUPKA, Contribution à la théorie des champs génériques, Contributions to Diff. Equat. 2, 1963.

[10] - NEWHOUSE, On codimension one Anosov diffeomorphisms Amer. Journal of Math., 1970.

[11] - NEWHOUSE, Non density of Axiom A (a) on S^2, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS, 1970.

[12] - PALIS, On Morse-Smale dynamical systems, Topology, 1969.

[13] - PALIS, Local structure of hyperbolic fixed points in Banach spaces, Anais da Acad. Bras. de Ciências, 1968.

[14] - PALIS, A note on Ω-stability, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS, 1970.

[15] - PALIS, Ω-explosions, a ser publicado nos Proc. of the AMS.

[16] - PALIS e SMALE, Structural Stability theorems, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure

Math., vol. XIV, AMS, 1970.

[17] - PEIXOTO, On structural stability, Topology, 1962.

[18] - PEIXOTO, Classification of vector fields in two dimensional manifolds, a ser publicado.

[19] - PEIXOTO, On an approximation theorem of Kupka and Smale, Journal of Differential Equations, 1967.

[20] - PUGH, A general density theorem, Amer. Journal of Math., 1968.

[21] - PUGH, On a theorem of P. Hartman, Amer. Journal of Math., 1969.

[22] - PUGH e SHUB, The Ω-stability theorem for flows, Inventiones Mathematicae, 1970.

[23] - ROBBIN, On structural stability, Bull. of the AMS, 1970.

[24] - SMALE, On gradient dynamical systems, Annals of Math., 1961.

[25] - SMALE, Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Annali Scul. Norm. Sup. Pisa, 1963.

[26] - SMALE, Structurally stable systems are not dense, Amer. Journal of Math., 1966.

[27] - SMALE, Differentiable dynamical systems, Bull. of the AMS, 1967.

[28] - SMALE, The Ω-stability theorem, Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS, 1970.

[29] - SMALE, Stability and genericity in dynamical systems, Sem. Bourbaki, 1970.

[30] - SOTOMAYOR, Generic one parameter families of vector fields on two dimensional manifolds, a aparecer em Topology.

[31] - VERJOVSKY, Flows with cross-sections, Proc. of the Nat. Acad. of Sciences, 1970.

[32] - WILLAMS, Classification of one dimensional attractors. Global Analysis - Proc. Symp. in Pure Math., vol. XIV, AMS, 1970.

ESTABILIDADE LOCAL EM ESPAÇO DE BANACH

Rubens Leão de Andrade

Introdução

Seja E um espaço de Banach sôbre R. Um homomorfismo linear $L:E \to E$ é chamado um operador. O complexificado de E é o espaço vetorial $E \times E = \tilde{E}$ sôbre $\mathbb{C}$ com a soma usual e uma multiplicação definida por

$$(a+ib)(u,v) = (au-bv, av+bu)$$

O complexificado de L é a aplicação linear $\tilde{L}:\tilde{E} \to \tilde{E}$ definida por

$$\tilde{L}(u,v) = (L(u), L(v))$$

O espectro de $\tilde{L}$ é chamado espectro complexo de L. Um operador $L:E \to E$ é dito hiperbólico se seu espectro complexo não intersecta o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$. Observemos que se $E = R^n$ então o espectro complexo de um operador $L:R^n \to R^n$ é o conjunto das raízes (complexas) do polinômio característico de L.

O principal resultado que pretendemos demonstrar é o seguinte:

TEOREMA 1 - Sejam $0 \in E$ e V uma vizinhança de 0 em E. Seja $f:V \to E$ um difeomorfismo C^1 tal que $f(0) = 0$ e $L = f'(0)$ é hiperbólico. Existe uma vizinhança U de 0 em V e um homomorfismo $h:E \to E$ tal que

$$h\, L(x) = f\, h(x)$$

para todo $x \in U$.

O resultado acima, em dimensão finita, foi provado por Hartman e Grobman, respondendo uma questão levantada por Peixoto. A generalização aquí apresentada é devida a J. Palis [1] e C. Pugh [2].

1. Sejam E um espaço de Banach sôbre $\mathbb{C}$ e $L:E \to E$ um operador. Denotemos o espectro de L por $\Lambda(L)$ e definamos $R:\mathbb{C} - \Lambda(L) \to E$ por

$$R(z) = (L - zI)^{-1}$$

Seja $C:[0,1] \to \mathbb{C} - \Lambda(L)$ uma curva contínua, simples, fechada.

Ponhamos

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_C R(z)dz .$$

PROPOSIÇÃO 1 - $P:E \to E$ é uma projeção, i.e. $P^2 = P$.

Além disso, pondo $E_s = \{x \in E; P(x) = x\}$ e $E_u = \{x \in E;\ P(x) = 0\}$, temos que E_s e E_u são invariantes por L, $\Lambda(L|E_s)$ = parte de $\Lambda(L)$ contida no interior de C, $\Lambda(L|E_u)$ = parte de $\Lambda(L)$ contida no exterior de C, $E = E_s \oplus E_u$.

Para a demonstração da Proposição 1 veja F. Riez e B. Nagy, (1955), Functional Analysis, Ungar, New York, pág. 415.

Se $\Lambda(L) \cap S^1 = \Phi$, tomemos na Proposição 1, $C = S^1$ e ponhamos $L_s = L|E_s$, $L_u = L|E_u$, $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Temos então $\Lambda(L_s) \subset D$, $\Lambda(L_u^{-1}) \subset D$. Se α é o raio espectral de L_s e β é o raio espectral de L_u^{-1} temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_s^n\|^{1/n} = \alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_u^{-n}\|^{1/n} = \beta < 1$.

PROPOSIÇÃO 2 - Sejam E um espaço de Banach sôbre R e $L:E \to E$ um operador. Se o espectro complexo de L não intersecta o círculo unitário S^1 então existem subespaços fechados E_s, E_u tais que $E = E_s \oplus E_u$, E_s e E_u são invariantes por L e

$$\lim \|L_s^n\|^{1/n} = \alpha < 1, \qquad \lim \|E_u^{-n}\|^{1/n} = \beta < 1$$

Prova: Sejam $\tilde{E}$ o complexificado de E e $\tilde{L}$ o complexificado de L. Definamos em $\tilde{E}$ a norma

$$|(u,v)| = \sup\{\|xu + yv\|;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

É fácil ver que $|\ |$ é de fato uma norma em $\tilde{E}$ que torna $\tilde{E}$ um espaço de Banach. Como o espectro de $\tilde{L}$ não intersecta S^1 temos, pela Proposição 1, que existem subespaços fechados E_s e E_u de $\tilde{E}$ satisfazendo as condições acima. Seja $\pi:\tilde{E} \to E$ definida por

$$\pi(u,v) = u$$

Ponhamos $E_s = \pi(\tilde{E}_s)$, $E_u = \pi(\tilde{E}_u)$. Como $\pi\tilde{L} = L\pi$ e se olharmos $\tilde{E}$ como espaço vetorial real π é linear, temos que E_s e E_n são invariantes por L. É claro que $E = E_s + E_n$. Seja $B_1 = \{u \in E_s;\ \|u\| \leq 1\}$. Tomemos r tal que $\pi(\tilde{B}_r) \supset B_1$, onde $\tilde{B}_r$ é a bola de raio r em $\tilde{E}_s$. Segue-se então que para todo $u \in B_1$ temos

$$\begin{aligned}\|L_s(u)\| &\leq \|L_s(u)\| + \|L_s(v)\| \\ &\leq 2\sup\{\|x\,L_s(u) + y\,L_s(v)\|;\ x^2 + y^2 = 1\} \\ &= 2|\tilde{L}_s(u,v)| \leq 2r|\tilde{L}_s|\end{aligned}$$

pois podemos supor $(u,v) \in \tilde{B}_r$.

É claro que a mesma desigualdade se verifica com L_s^n e $\tilde{L}_s^n$ no lugar de L_s e $\tilde{L}_s$ respectivamente.

Por outro lado, notando que se $(u,v) \in \tilde{E}_s$ então $-i(u,v) = (v,-u) \in \tilde{E}_s$, obtemos que para todo $(u,v) \in \tilde{E}_s$

$$|\tilde{L}_s(u,v)| = \sup\{\|x\, L_s(u)+y\, L_s(v)\|;\ x^2+y^2 = 1\}$$
$$\leq \|L_s(u)\| + \|L_s(v)\| \leq 2\, \|L_s\|\ |(u,v)|$$

a mesma desigualdade vale com L_s^n e $\tilde{L}_s^n$ no lugar de L_s e $\tilde{L}_s$ respectivamente. Obtemos então

$$(\tfrac{1}{2})^{1/n}\ |\tilde{L}_s^n|^{1/n} \leq \|L_s^n\|^{1/n} \leq (2r)^{1/n} |\tilde{L}_s^n|^{1/n}$$

segue-se então que

$$\lim_{n\to\infty} \|L_s^n\|^{1/n} = \alpha < 1$$

anàlogamente obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|L_u^{-n}\|^{1/n} = \beta < 1.$$

Resta provar que $E = E_s \oplus E_u$. Suponhamos que $u \in E_s \cap E_u$, $\|u\| = 1$. Decorre então

$$1 = \|u\| = \|L_s^n\ L_u^{-n}(u)\| \leq \|L_s^n\|\ \|L_u^{-n}\|$$

donde

$$1 \leq \|L_s^{-n}\|^{1/n}\ \|L_u^{-n}\|^{1/n}$$

fazendo $n \to \infty$ obtemos $1 \leq \alpha.\beta < 1$, contradição. Isto termina á prova da proposição. q.e.d.

Do fato que $\|L_s^n\|^{1/n} \to \alpha < 1$ obtemos que existe um inteiro p tal que $\|L_s^p\| < a^p$. Isto implica na convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-pn} \|L_s^{pn}\| .$$

Da convergência desta série obtemos a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} \|L_s^{n}\| .$$

Para ver isto observe que se t é um têrmo desta série entre $a^{pn} \|L_s^{pn}\|$ e $a^{p(n+1)}\|L^{p(n+1)}\|$ então

$$t = a^{-(pn+k)}\|L_s^{pn+k}\| \text{ onde } 0 < k < p.$$

Assim

$$t \le a^{-pn}\|L_s^{pn}\| \; a^{-k}\|L_s^{k}\| \le M \quad a^{-n}\|L_s^{pn}\|$$

onde

$$M = \max\{a^{k}\|L_s^{k}\|, \; 0 \le k < p\} .$$

Daí vem .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s^{n}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} p \quad M \, a^{-pn}\|L_s^{pn}\| < \infty .$$

PROPOSIÇÃO 3 - Seja E um espaço de Banach com norma $\| \|_1$. Seja $L:E \to E$ um operador inversível hiperbólico. Existem subespaços E_u, E_s invariantes por L e uma norma $\| \|_2$ equivalente a $\| \|_1$ em E tal que $E = E_s \oplus E_u$, $\|L_s\| < 1$ e $\|L_u^{-1}\| < 1$.

<u>Prova</u>: E_s e E_u são dadas pela Proposição 1.

De acôrdo com o que vimos acima, definamos em E_s

$$\|v\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s^n(v)\|_1$$

Temos,

$$\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s^n\|\right)\| v \|_1$$

donde $\| \;\|_1$ equivalente a $\| \;\|_2$, em E_s.

$$\|L_s(v)\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L^{n+1}(v)\|_1 = a\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-(n+1)}\|L_s^{n+1}(v)\|_1\right)$$

$$< a\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s^n(v)\|_1\right) = a\|v\|_2$$

donde $\|L_s\| \leq a < 1$.

O procedimento para L_u é análogo.

Definindo $\| \;\|_2$ em E de maneira óbvia, o resultado segue-se. q.e.d.

Sejam E e F espaços de Banach. Denotemos por $C_b^o(E,F)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas de E em F com a norma do sup. Escrevamos $C_b^o(E)$ em lugar de $C_b^o(E,E)$. Denotemos a $\| \;\|_2$ obtida na Proposição 3 simplesmente por $\| \;\|$.

Sejam $L:E \to E$ como na Proposição 3 e $g:E \to E$ um homomorfismo. Consideremos o operador $\mathcal{L}:C_b^o(E) \to C_b^o(E)$ dado por

$$\mathcal{L}(V) = LV - Vg \; .$$

Verifica-se imediatamente que $C_b^o(E) = C_b^o(E,E_s) \oplus C_b^o(E,E_u)$, $C_b^o(E,E_s)$ e $C_b^o(E,E_u)$ invariantes por $\mathcal{L}$.

PROPOSIÇÃO 4 - O operador $\mathcal{L}$ é inversível. Além disso, existe $M \in R$ tal que $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq M$ independentemente do homomorfismo g.

Prova: Definamos $T,S,\mathcal{L}^*: C_b^o(E) \to C_b^o(E)$ por

$$T(V) = L^{-1}V$$
$$S(V) = V\, g^{-1}$$
$$\mathcal{L}^*(V) = LV\, g^{-1}$$

T, S e $\mathcal{L}^*$ são operadores inversíveis com inversas

$$T^{-1}(V) = LV$$
$$S^{-1}(V) = Vg$$
$$(\mathcal{L}^*)^{-1}(V) = L^{-1}\, Vg$$

Segue-se imediatamente que

$$T\mathcal{L} - I = -(\mathcal{L}^*)^{-1}$$
$$S\mathcal{L} - I = \mathcal{L}^*$$

onde $I: C_b^o(E) \to C_b^o(E)$ é a identidade.

Notemos que $C_b^o(E,E_s)$ e $C_b^o(E,E_u)$ são invariantes por T, S, $\mathcal{L}^*$. Pondo o índice correspondente em cada respectiva restrição, temos

$$T_u\mathcal{L}_u - I_u = -(\mathcal{L}_u^*)^{-1}$$
$$S_s\mathcal{L}_s + I_s = \mathcal{L}_s^* \quad .$$

Seja $a = \max\{\|L_s\|, \|L_u^{-1}\|\} < 1$. Temos que $\|\mathcal{L}_s^*\| \leq \|L_s\| \leq$ $\leq a$, $\|(\mathcal{L}_u^*)^{-1}\| \leq \|L_u^{-1}\| \leq a$. Obtendo então

$$\|T_u\mathcal{L}_u - I_u\| < 1$$
$$\|S_s\mathcal{L}_s + I_s\| < 1$$

Decorre disto que $\mathcal{L}_u$ e $\mathcal{L}_s$ são inversíveis, donde $\mathcal{L}$ inversível. Provando a primeira parte.

Para provar a segunda parte notemos que $\|T_u\|, \|S_s\| \leq 1$. Das igualdades acima obtemos

$$T_u = \mathcal{L}_u^{-1} - (\mathcal{L}_u^*)^{-1}\,\mathcal{L}_u^{-1}$$

donde

$$1 \geq \|T_u\| \geq \|\mathcal{L}_u^{-1}\| - \|(\mathcal{L}_u^*)^{-1}\,\mathcal{L}_u^{-1}\|$$
$$\geq \|\mathcal{L}_u^{-1}\| - a\|\mathcal{L}_u^{-1}\|$$

Portanto $$\|\mathcal{L}_u^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a} \;.$$

anàlogamente

$$\|\mathcal{L}_s^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a} \;.$$

Estas desigualdades independem de g, uma vez que $\|\mathcal{L}_s^*\| \leq \|L_s\| \leq a$, $\|(\mathcal{L}_u^*)^{-1}\| \leq \|L_u^{-1}\| \leq a$ independentemente de g. Segue-se então que $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$ independentemente de g.

Seja $\Phi \in C_b^o(E)$ com constante de Lipschitz $\leq e$, isto é, $\|\Phi(x)-\Phi(y)\| \leq e\|x-y\|$. Seja $L:E \to E$ como na Proposição 3.

COROLÁRIO 1 - Se a constante de Lipschitz e de Φ for suficientemente pequena as equações

$$(1) \qquad LV - VL = -\Phi(I+V)$$

$$(2) \qquad LV - V(L+\Phi) = \Phi$$

$$(3) \qquad LV - V(L+\Phi) = \Phi-\Phi(I+V)$$

têm solução única em $C_b^o(E)$.

<u>Prova:</u> Seja M dado pela Proposição 4. Tomemos e tão pequeno tal que $L+\Phi:E \to E$ seja um homomorfismo. Se preciso, diminuamos e ainda mais de modo que $eM < 1$. Consideremos o operador $\mathcal{L}(V) = LV - VL$. Pela Proposição 4 $\mathcal{L}$ é inversível e pelas condições acima o operador $\mu(V) = -\mathcal{L}^{-1}\,\Phi(I+V)$ é uma contração. Segue-se do Princípio do Ponto Fixo que o único ponto fixo de μ é a solução única de (1). Para as equações (2) e (3) consideremos o operador $\mathcal{L}(V) = LV-V(L+\Phi)$; pela Proposição 4 e devido as condições acima, $\mathcal{L}$ é inversível e $\mathcal{L}^{-1}(\Phi)$ é a única solução de (2). $\mu(V) = \mathcal{L}^{-1}(\Phi-\Phi(I+V))$ é uma contração, e o resultado para (3) segue-se. q.e.d.

Seja $\mathfrak{F} = \{f:E \to E;\ f \text{ contínua},\ \|f-I\| < \infty\}$ notemos que se $f,g \in \mathfrak{F}$ então $f\circ g \in \mathfrak{F}$, e que $f \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow f = I+V,\ V \in C_b^o(E)$.

COROLÁRIO 2 - Se a constante de Lipschitz de Φ for sufi cientemente pequena as equações

(1) $$yL = (L+\Phi)y$$

(2) $$Ly = y(L+\Phi)$$

(3) $$y(L+\Phi) = (L+\Phi)y$$

têm solução única em $\mathfrak{F}$. Em particular a equação $yL = Ly$ tem solução única em $\mathfrak{F}$, a saber $y = I$.

<u>Prova</u>: Pondo $y = I+V$ estas equações se reduzem às equações do Corolário 1, e o resultado segue-se, q.e.d.

Seja $\delta > 0$ tal que se Φ tem constante de Lipschitz $\leq\delta$, as equações acima têm solução única em $\mathfrak{F}$.

Sejam h e ℓ as soluções de (1) e (2) respectivamente.

COROLÁRIO 3 - As soluções h e ℓ são homomorfismos ($h = \ell^{-1}$).

<u>Prova</u>: Temos

$$hL = (L+\Phi)h$$

$$L\ell = \ell(L+\Phi)$$

Daí decorre

$$(\ell h)L = L(\ell h)$$

$$(h\ell)(L+\Phi) = (L+\Phi)(h\ell)$$

Como ℓh, $h\ell \in \mathfrak{F}$, temos $\ell h = h\ell = I$. E o resultado está provado. q.e.d.

Resumiremos na proposição abaixo, o que acabamos de provar.

PROPOSIÇÃO 5 - Seja E um espaço de Banach, e seja $L:E \to E$ um operador hiperbólico inversível. Existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: Se $\Phi \in C_b^0(E)$ tem constante de Lipschitz $\leq \delta$; então existe um homomorfismo $h:E \to E$ satisfazendo

$$hL = (L+\Phi)h \ .$$

Além disso, $\|h-I\| < \infty$, e h é único com estas propriedades.

2.

PROPOSIÇÃO 6 - Seja $V(0) \subset E$ uma vizinhança da origem. Seja $\Phi:V(0) \to E$ com constante de Lipschitz $\leq e$. Existe $U(0) \subset V(0)$ e $\tilde{\Phi}:E \to E$ tal que Φ é limitada, tem constante de Lipschitz $\leq ae$, e coincide com Φ em $U(0)$. O número a independe de Φ.

<u>Prova</u>: Seja $\alpha:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞, satisfazendo $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, $\alpha(t) = 1$ para $|t| < \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = 0$ para $|t| \geq 1$. Seja $M = \max|\alpha'(t)|$. Seja $\rho > 0$ tal que $B(0,\rho) \subset V(0)$.

Definamos

$$\tilde{\Phi}(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{\rho}\right) \Phi(x) \quad \text{para} \quad \|x\| \leq \rho$$

$$\tilde{\Phi}(x) = 0 \qquad\qquad \text{para} \quad \|x\| \geq \rho$$

As condições são imediatamente verificadas, com $U(0) = B(0,\rho/2)$ e $a = M+1$. q.e.d.

COROLÁRIO 4 - Seja $\Phi : V(0) \to E$ de classe C^1, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$. Dado $e > 0$, Φ restrita a uma certa vizinhança $U(0) \subset V(0)$ pode ser estendida a E, a extensão sendo limitada e tendo constante de Lipschitz $\leq e$.

Prova: Dado $e > 0$, existe $W(0) \subset V(0)$ tal que $\|\Phi'(x)\| \leq \frac{e}{a}$ para todo $x \in W(0)$, onde a é o mesmo dado pela Proposição 6. Usando o teorema do valor médio obtemos que $\Phi : W(0) \to E$, tem constante de Lipschitz $\leq \frac{e}{a}$. O resultado segue-se da Proposição 6. q.e.d.

COROLÁRIO 5 - Seja $L : E \to E$ um operador. Dado $e > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $A \in B(L,\delta)$ existe $U(0)$ e $\tilde{\Phi} : E \to E$ limitada com constante de Lipschitz $\leq e$ e $L+\tilde{\Phi}$ coincide com A em $U(0)$.

Prova: Tomemos $\delta = \frac{e}{a}$. Se escrevemos $A = L+\Phi$, onde $\Phi = A-L$ e $\|A-L\| < \frac{e}{a}$, temos que Φ tem constante de Lipschitz $\leq \frac{e}{a}$. O resultado segue-se da Proposição 6. q.e.d.

3. O principal resultado

TEOREMA 1 - Seja $0 \in E$ e V uma vizinhança de 0 em E. Seja $f: V \to E$ um difeomorfismo C^1 tal que $f(0) = 0$ e $L = f'(0)$ é hiperbólico. Existe uma vizinhança U de 0 em V e um homomorfismo $h: E \to E$ tal que

$$hL(x) = fh(x)$$

para todo $x \in U$.

Prova: Seja $\delta > 0$ dado pela Proposição 5. Seja $f = L+\Phi$, onde $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$. Pelo Corolário 4 existe uma vizinhança W de 0, $W \subset V$ e $\tilde{\Phi}: E \to E$ tal que $\tilde{\Phi} = \Phi$ em W, $\tilde{\Phi} \in C_b^0(E)$ e tem constante de Lipschitz $\leq \delta$. Pela Proposição 5 existe um homomorfismo $h: E \to E$ tal que $hL = (L+\tilde{\Phi})h$. Se $h(x) \in W$ temos $hL(x) = fh(x)$. Tomando $U = h^{-1}(W)$ o teorema está demonstrado. (Notemos que $0 \in U$, pois, $Lh^{-1}(0) = L^{-1}f(0) = h^{-1}(0)$, e como L é hiperbólico temos $h^{-1}(0) = 0$).

q.e.d.

OBSERVAÇÃO: Se no Teorema 1 o ponto fixo de f é a (não necessàriamente a origem), tomemos $T: E \to E$, $T(x) = x+a$ e consideremos $g = T^{-1}fT$; g satisfaz as condições do Teorema 1. Se k é tal que $kL = gk$, localmente, onde $L = f'(a) = g'(0)$ e $k: E \to E$ homomorfismo, tomando $h = Tk$, temos $hL = fh$ em uma vizinhança de a. Portanto o Teorema 1 pode ser enunciado pondo-se a em lugar de 0.

4. Estabilidade local

TEOREMA 2 - Seja f como no Teorema 1. Existe uma vizinhança N de f, na topologia C^1, tal que para cada $g \in N$ existe um homomorfismo local em E satisfazendo $gh = hf$.

Provaremos antes os seguintes lemas:

LEMA 1 - Seja f como no Teorema 1. Existe uma vizinhança N de f, na topologia C^1, uma vizinhança U de 0 em E e uma função contínua $\gamma : N \to U$ tal que $\gamma(f) = 0$ e para cada $g \in N$ $g(\gamma(g)) = \gamma(g)$.

Prova: Considere a aplicação $\psi : C_b^1(V,E) \to E$ definida por

$$\psi(g,x) = g(x)-x$$

ψ é de classe C^1, na topologia C^1 e

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(f,0) = f'(0)-I$$

é um isomorfismo pois $f'(0)$ é hiperbólico. Do Teorema da Função Implícita obtemos o resultado. q.e.d.

LEMA 2 - O conjunto dos operadores hiperbólicos é aberto no espaço de Banach $\mathcal{L}(E)$ das aplicações lineares contínuas de E em E.

Prova: Seja $\{T_n\}$, $T_n \to T$, T_n não hiperbólico, $T_n \in \mathcal{L}(E)$.

Para cada n existe $\lambda_n \in S^1$ tal que $T_n - \lambda_n I \in \mathcal{L}(E)$ é não inversível. Passando a uma subsequência de $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ tal que $\mu_n \to \mu \in S^1$, temos que

$$T_n - \mu_n I \to T - \mu I \ .$$

Como o conjunto dos operadores não inversíveis de $\mathcal{L}(E)$ é fechado, temos que $T - \mu I$ é não inversível, ou seja T é não hiperbólico. O lema está provado. q.e.d.

LEMA 3 - Seja $L:E \to E$ hiperbólico inversível. Existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: Para cada $A \in B(L,\delta)$ existe um homomorfismo $h:E \to E$ e uma vizinhança $U \ni 0$ tal que $hL = Ah$ em U.

Prova: Segue-se da Proposição 5 e do Corolário 5. q.e.d.

Prova do Teorema 2: O Lema 1 garante que existe uma vizinhança N de f e uma vizinhança U de 0 tal que tôda função $g \in N$ tem um ponto fixo em U. O Lema 2 garante que existe $e > 0$ tal que $\|L-A\| < e$ implica que A é hiperbólico e inversível.

Seja $\beta = \min\{e,\delta\}$, δ dado pelo Lema 3.

Sejam $U_1 = \{x \in U;\ \|L-f'(x)\| < \frac{\beta}{2}$ e $N_1 = N \cap \gamma^{-1}(U_1) \cap$ $\cap\ B(f,\beta/2)$.

Temos então que tôda função $g \in N_1$ tem um ponto fixo $a \in U_1$ e $g'(a)$ é inversível e hiperbólico. Apliquemos o Teorema 1 a f e a g e apliquemos o Lema 3 a $f'(0)$ e $g'(a)$. O resultado segue-se por transitividade. q.e.d.

5. O Teorema 1 para fluxos

PROPOSIÇÃO 7 - Seja $Y: V \to E$ de classe C^1, $Y(0) = 0$, onde V é uma vizinhança de 0.

Seja $L = Y'(0)$. Dado $e > 0$ existe $X: E \to E$ satisfazendo

1) X tem constante de Lipschitz $\leq a$, e portanto o fluxo induzido por X está definido em $\mathbb{R} \times E$.

2) $X = L$ fora de uma certa bola $B(0,r)$.

3) Existe um aberto $U \ni 0$ em V tal que o fluxo induzido por X é igual ao fluxo induzido por Y em $[-2,2] \times U$ (e $X = Y$ em U).

4) Escrevendo $X_t = L_t + \Phi_t$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|\Phi_t\| \leq M$ para todo $t \in [-2,2]$ e Φ_1 tem constante de Lipschitz $\leq e$.

Prova: Seja $\Phi: E \to E$ limitada com constante de Lipschitz

$\leq$e, $\Phi = 0$ fora de uma certa bola $B(0,r)$ e $Y = L+\Phi$ em $W \ni 0$, $W \subset V$. Confira Corolário 4. Ponhamos $X = L+\Phi$. As condições (1) e (2) estão satisfeitas. Como $Y(0) = 0$ existe $U \subset W$, $U \ni 0$ tal que (3) é satisfeita. Para verificar (4) observemos a seguinte identidade:

$$X_t(x) - X_t(y) = x-y + \int_0^t [X(X_s(x))-X(X_s(y))]ds$$

segue-se então

$$\|X_t(x)-X_t(y)\| \leq \|x-y\| + a\int_0^t \|X_s(x)-X_s(y)\|ds \, .$$

Da desigualdade de Grönwald decorre que $\|X_t(x)-X_t(y)\| \leq$ $\leq e^{2a}\|x-y\|$ para $t \in [-2,2]$. Fazendo uso agora da identidade

$$\Phi_t(x)-\Phi_t(y) = \int_0^t [\Phi(X_s(x)-\Phi(X_s(y))]ds+\int_0^t L(\Phi_s(x)-\Phi_s(y))\,ds$$

pondo $\|L\| = \ell$ $e^{2a} = b$, e usando novamente a desigualdade de Grönwald, obtemos

$$\|\Phi_t(x)-\Phi_t(y)\| \leq 2b\ e\ e^{4\ell}\|x-y\|$$

(4) decorre desta desigualdade e do fato que $X = L$ fora da bola $B(0,r)$. q.e.d.

Estenderemos agora o Teorema 1 para fluxos em espaços de Banach.

<u>O Teorema 1 para fluxos</u>. Seja $Y: V \to E$ de classe C^1, $Y(0) = 0$. Sejam Y_t o fluxo (local) induzido por Y e L_t o fluxo induzido por $L = Y'(0)$. Se L_1 é hiperbólico existe um homomorfismo $h: E \to E$ e uma vizinhança $U \subset V$ de 0 tal que h leva as trajetórias de Y em U em trajetórias de L.

Prova: Seja X nas condições da Proposição 7. É claro que $X_1'(0) = Y_1'(0) = L_1$. Aplicando o Teorema 1 a X_1 concluimos que existe $h: E \to E$ tal que

$$h\, L_1 = X_1\, h$$

em U. Definamos

$$H = \int_0^1 L_{-t}\, h\, X_t\, dt\ .$$

A condição (4) da Proposição 7 garante que H está a distância finita da identidade. Vamos mostrar que

$$L_s H = H\, X_s$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Para isto basta considerar $s \in [0,1]$. Temos

$$L_{-s} H\, X_s = L_{-s}\left(\int_0^1 L_{-t} h\, X_t\, dt\right) X_s = \int_0^1 L_{-s-t}\, h\, X_{t-s}\, dt\ .$$

Tomando $u = t+s-1$, obtemos

$$\int_0^1 L_{-s-t}\, h\, X_{t+s}\, dt = \int_{-1+s}^{s} L_{-u-1}\, h\, X_{u+1}\, du =$$

$$= \int_{-1+s}^{0} L_{-u}\, L_{-1}\, h\, X_1\, X_u\, du + \int_0^s L_{-u-1}\, h\, X_{u+1}\, du\ .$$

Fazendo $v = u+1$ na primeira parcela obtemos

$$\int_0^s L_{-u}\, h\, X_u\, du + \int_s^1 L_{-v}\, h\, X_v\, dV = H\ .$$

Em particular, $L_{-1}\, H\, X_1 = H$. Como $H \in \mathfrak{F}$ temos $H = h$, (cf. Prop. 5). Disto resulta que h^{-1} leva trajetórias de X em trajetórias de L. Como $X = Y$ em U, o teorema está provado. q.e.d.

REFERÊNCIAS

[1] J. PALIS - On the Local Structure of Hyperbolic Points in Banach spaces. An. Acad. Brasileira de Ciências.

[2] C. PUGH - On a Theorem of Hartman (a aparecer).

VARIEDADE ESTÁVEL DE ELEMENTO CRÍTICO

Geovan Tavares dos Santos

Com base no artigo de Hirsch e Pugh "Stable manifold and hyperbolic sets", demonstraremos um resultado já clássico que é a existência da variedade estável de um ponto fixo hiperbólico.

DEFINIÇÃO - Dados X e Y espaços métricos, uma função $f:X \to Y$ é dita de Lipschitz se $\exists\, k \in R$ tal que $d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$ $\forall\, x,y \in X$. A constante de Lipschitz $L(f)$ é definida por

$L(f) = \inf\{k \in \mathbb{R};\ d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)\ \forall\, x,y \in X\}$. Se $L(f) < 1$, diz-se que f é uma contração.

Denotaremos por $\mathfrak{m}(X,Y)$, onde X é um conjunto e Y um espaço métrico, o conjunto das funções de X em Y com a topologia gerada por

$\eta_e(f) = \{g \in \mathfrak{m}(X,Y);\ d(f(x),g(x)) < e,\ \forall\, x \in X\}$.

A proposição abaixo e seu corolário são de fácil demonstração.

PROPOSIÇÃO 1 - Se X é completo e $f:X \to X$ uma contração, então existe um único ponto fixo x_o (= $\lim f^n(x)$, $x \in X$) para f. Se $L(f) = k < 1$ e $g: X \to X$ tem um ponto fixo y_o com $d(f(x_o), g(y_o)) \leq e$ então $d(x_o, y_o) < \frac{e}{1-k}$.

COROLÁRIO - A aplicação $f \mapsto p_f$ que a cada contração f associa seu ponto fixo p_f é contínua.

DEFINIÇÃO - Seja $f: X \to X$ com um ponto fixo x_o, êste é chamado um atrator se $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_o$, $\forall x \in X$.

TEOREMA 1 (da contração em fibras) - Sejam X e Y espaços métricos, $f: X \to X$ tendo um ponto fixo atrator $p \in X$ e $\{g_x\}_{x\in X}$ uma família de funções $g_x: Y \to Y$ tal que $F: X\times Y \to X\times Y$, $(x,y) \to (f(x), g_x(y))$ é contínua. Se $g_p: Y \to Y$ tem um ponto fixo q e (*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup L(g_{f^n(x)}) < 1$ $\forall x \in X$, então (p,q) é um ponto fixo atrator para F.

<u>Prova</u>: Queremos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(x,y) = (p,q)$, $(x,y) \in$ $\in X\times Y$. Basta supor que $X = \{p\} \cup \{f^n(x); n \geq n_o, x \in X\}$ e de (*) decorre que $L(g_x) \leq \lambda < 1$, $\forall x \in X$. Como $F^{n+1}(x,y) = (f^{(n+1)}(x), g_{f^n(x)} \circ \ldots \circ g_x(y))$ e p é um ponto fixo para f só necessitamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_2 F^n(x,y) = q$, onde π_2 é a projeção na segunda coordenada.

Seja $\delta_n = d(g_{f^n(x)}(q), q)$; $\lim \delta_n = 0$ pois $\lim f^n(x) = p$ e F é contínua. Agora $d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x,q), q) \leq$

$$\leq d(\pi_2 \circ F^{n+1}(x,q),\ g_{f^n(x)}(q)) + d(g_{\underset{n}{f^n(x)}}(q),q) \leq$$

$$\leq \lambda(\pi_2 \circ F^n(x,q),q) + \delta_n \leq \ldots \leq \sum_{j=o}^{n} \lambda^{n-j}\, \delta_j .$$

Ora $\sum_{j=0}^{n} \lambda^{n-j}\, \delta_j = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n-j}\, \delta_j + \sum_{j=k}^{n} \lambda^{n-j}\, \delta_j \quad 0 < k < n \Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda^{n-j}\, \delta_j \leq (\lambda^n + \ldots + \lambda^{n-k+1}) \max_{j<k} (\delta_j) + (1+\lambda+\ldots+\lambda^{n-k})$$

$$\max_{d\geq k} (\delta_j) \leq \frac{\lambda^{n-k}}{1-\lambda} \max_{j<k} (\delta_j) + \frac{\max(\delta_j)}{1-\lambda} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

e $n-k \to \infty$. Daí $d(\pi_2\, F^n(x,y),q) \leq d(\pi_2\, F^n(x,y),\pi_2 F^n(x,q)) + d(\pi_2\, F^n(x,q),q) \leq \lambda^n\, d(y,q) + \sum_{j=0}^{n} \lambda^{n-j}\, \delta_j \to 0$ quando $n \to \infty$.

Suporemos que as expressões que aparecem na proposição abaixo têm sentido, com as funções definidas em espaços de Banach.

PROPOSIÇÃO 2

a) $L(f.g) \leq L(f)L(g)$

b) $L(f+g) \leq L(f) + L(g)$

$L(f) - L(g) \leq L(f-g)$

c) $d(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2) \leq d(f_1,f_2) + L(f_2)\, d(g_1,g_2)$

d) $|g^{-1} - h^{-1}| \leq L(g^{-1})|g-h|$

<u>Prova</u>: a) e b) são demonstração imediata. Para demonstrar c) temos que $d(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2) \leq d(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_1) + d(f_2 \circ g_1, f_2 \circ g_2) \leq d(f_1,f_2) + L(f_2) d(g_1,g_2)$. Utilizando

c) podemos mostrar d) do seguinte modo $|g^{-1} - h^{-1}| =$
$= |g^{-1} \circ h \circ h^{-1} - g^{-1} \circ g \circ h^{-1}| \leq L(g^{-1}) \ |h \circ h^{-1} - g \circ h^{-1}| \leq$
$\leq L(g^{-1}) \ |h-g|$.

TEOREMA 2 (da perturbação de um isomorfismo).

Seja E um espaço de Banach e $U \subset E$ aberto. Se $T:E \to E$ é um isomorfismo e $L(f-T) < \|T^{-1}\|^{-1}$, então:

a) f é um homomorfismo de U sôbre $f(U)$

b) $L(f^{-1}) \leq [\|T^{-1}\|^{-1} - L(f-T)]^{-1}$.

Prova: A parte a) é um conhecido teorema de análise, ver [3] pg. 80, por exemplo. Para o item b) temos que:
$|f(x)-f(y)| = |(T(x)-T(y) + (f-T)(x) - (f-T)(y)| \geq$
$|T(x)-T(y)| - |(f-T)(x)-(f-T)(y)| \geq |T(x)-T(y)| -$
$L(f-T)|x-y| \geq (\|T^{-1}\|^{-1} - L(f-T))\|x-y\|$. Daí
$|x-y| \leq (\|T^{-1}\|^{-1} - L(f-T))^{-1}|f(x)-f(y)| \Rightarrow |f^{-1}(w)-f^{-1}(z)|$
$\leq (\|T^{-1}\|^{-1} - L(f-T))^{-1}|w-z| \Rightarrow L(f^{-1}) \leq [\|T^{-1}\|-L(f-T)]^{-1}$.

PROPOSIÇÃO 3 - Sejam X e Y espaços métricos e $f:X \to Y$ uma bijeção com $L(f^{-1}) \leq \lambda^{-1}$ então
$f(B(x;r)) \supset B(f(x);\lambda r)$, onde $B(x;r) = \{y \in X; \ d(y,x) \leq r\}$.

Prova: $y \notin B(x;r) \Rightarrow d(y,x) > r \Rightarrow r < d(y,x) = d(f^{-1}(f(x)),$
$f^{-1}(f(y)) \leq L(f^{-1})d(f(x),f(y)) \leq \lambda^{-1}d(f(x),f(y)) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(f(x),f(y)) > \lambda r \Rightarrow f(y) \notin B(f(x);\lambda r)$ i.e.
$f(X-B(x,r)) \subset Y - B(f(x);\lambda r) \Rightarrow f(B(x;r)) \supset B(f(x);\lambda r)$ pois

f é uma bijeção.

DEFINIÇÃO - Seja E um espaço de Banach e $T:E \to E$ um isomorfismo. T é chamado hiperbólico se $Esp(T) \cap S^1 = \Phi$ onde $Esp(T)$ é o espectro de T e $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é o círculo unitário.

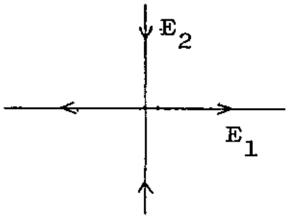
Em [2] é demonstrado o seguinte resultado:

TEOREMA 3 - Seja $T:E \to E$ um isomorfismo hiperbólico em E, E com norma $|\ |_1$. Existem subespaços E_1, E_2 invariantes sob T e uma norma $|\ |_2$ em E equivalente a $|\ |_1$ tal que:

a) $E = E_1 \oplus E_2$

b) $\|T_1^{-1}\| < 1$ e $\|T_2\| < 1$ com $T_1 = T|E_1$ e $T_2 = T|E_2$.

De agora por diante suporemos que E tem a decomposição acima que chamaremos de canônica. Se $E = E_1 \oplus E_2$ é canônica, tomaremos $|(x_1,x_2;| = \max\{|x_1|,|x_2|\}$. Ao número $\tau = \max\{\|T_1^{-1}\|, \|T_2\|\} < 1$ chamaremos de assimetria de T.



$E = E_1 \oplus E_2$

Denotaremos por $E(r) \subset E$ a bola fechada de raio r e centro na origem.

LEMA - Seja $f:E(r) \to E$ tal que $L(f-T) < e < \frac{1-\tau}{1+\tau}$. Se

$$x = (x_1,x_2), \quad y = (y_1,y_2) \in E(r) \quad e \quad |x_1-y_1| \geq$$

$\geq |x_2-y_2|$, então $|f_1(x)-f_1(y)| \geq (\tau^{-1}-e)|x_1-y_1| \geq$

$\geq (\tau+e)|x_1-y_1| \geq (\tau+e)|x_1-y_1| \geq |f_2(x)-f_2(y)|$ onde

$f(x) = (f_1(x),f_2(x)) \in E = E_1 \oplus E_2$.

<u>Prova</u>: Podemos escrever $T(x_1,x_2) = (T_1(x_1),T_2(x_2)) \Rightarrow$

$\pi_1 T(x_1,x_2) = T_1(x_1)$ e $\pi_2\, T(x_1,x_2) = T_2(x_2)$. Daí

$$|f_1(x)-f_1(y)| = |\pi_1\, T(x-y)+(\pi_1 f-\pi_1 T)(x)-(\pi_1 f-\pi_1 T)(y)| \geq$$
$$\geq |T_1(x_1-y_1)| - |\pi_1((f-T)(x)-(f-T)(y))| \geq \|T_1^{-1}\|^{-1}|x_1-y_1| -$$
$$- |(f-T)(x)-(f-T)(y)| \geq \tau^{-1}|x_1-y_1| - e|x-y| =$$
$$= (\tau^{-1} - e)|x_1-y_1|$$ já que $|x-y| = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\} =$

$= |x_1-y_1|$.

Utilizando $\pi_2 T$ chegamos a $|f_2(x)-f_2(y)| \leq$

$\leq \tau|x_2-y_2| + e|x-y| \leq \tau|x_1-y_1| + e|x_1-y_1| = (\tau+e)|x_1-y_1|$.

Por outro lado $\tau < j \Rightarrow \tau e < e$, como $e < 1 - \tau$ temos que $e < \tau^{-1} - 1$.

$$\text{Daí} \quad \left.\begin{matrix} e < \tau^{-1} - 1 \\ e < 1-\tau \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 < \tau^{-1} - e \\ \tau + e < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tau+e < \tau^{-1} - e,$$

donde segue a desigualdade central do Lema.

DEFINIÇÃO - Seja $f:E(r) \to f(E(r))$ invertível, definimos

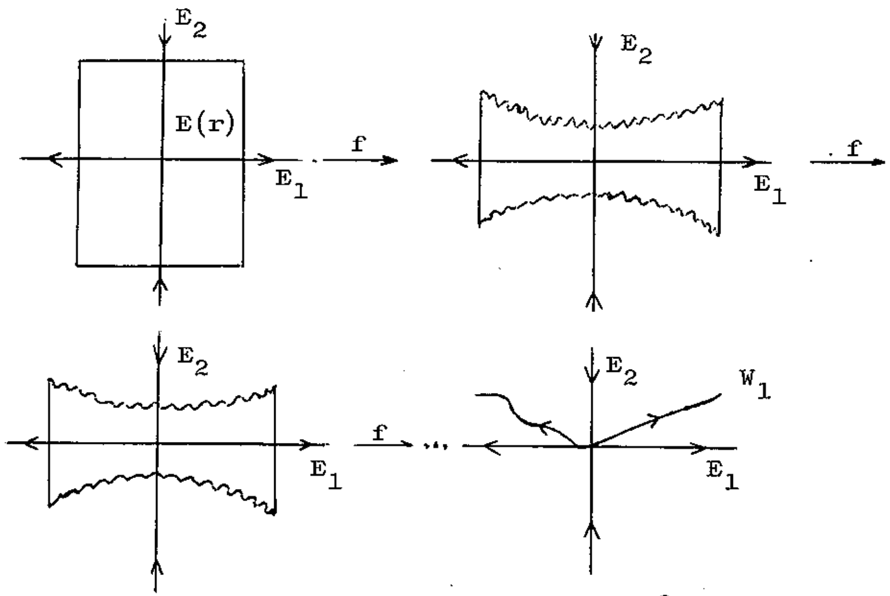
$$f^{-n}(E(r)) = \{x \in E(r); f^{-1}(x),\ldots,f^{-n}(x) \in E(r)\}.$$

PROPOSIÇÃO - Se $f:E(r) \to E$ e $L(f-T) < e$,

$$e < \max\{\frac{1-\tau}{1+\tau}, \|T^{-1}\|^{-1}\}, \quad \text{então}$$

$W_1 = \bigcap_{n\geq 0} f^n(E(r))$ é o gráfico de uma função $U_1 \subset E_1(r) \to E_2(r)$, enquanto $W_2 = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(E(r))$ é o gráfico de uma função $U_2 \subset E_2(r) \to E_1(r)$.

OBSERVAÇÃO: Gràficamente temos para W_1.



Prova: Observemos primeiro que $f_1 \circ f = (f^2)_1$ e $f_2 \circ f = (f^2)_2$, onde os subscritos 1 e 2 denotam primeira e segunda coordenada. Com efeito $f_1 \circ f = \pi_1 \circ f \circ f = \pi_1 \circ (f^2) = (f^2)_1$.

Suponha $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in W_1$ com $x_1 = y_1$. Vamos mostrar que $x_2 = y_2$.

Dado $n \geq 0$, sejam $x' = f^{-n}(x)$, $y' = f^{-n}(y) \in E(r)$. Se $\exists j$, $0 \leq j \leq n$ tal que $|(f^j(x')_1 - f^j(y')_1| \geq$

$\geq |f^j(x')_2 - f^j(y')_2|$, aplicando o lema anterior teremos $|f_1 \circ f^j(x') - f_1 \circ f^j(y')| \geq |f_2(f^j(x')) - f_2(f^j(y'))|$ e pela observação acima $|(f^{j+1}(x'))_1 - (f^{j+1}(y'))_1| \geq$ $\geq |(f^{j+1}(x'))_2 - (f^{j+1}(y'))_2|$ e usando o lema várias vêzes chegaremos a $|(f^n(x'))_1 - (f^n(y'))_1| \geq$ $\geq |(f^n(x'))_2 - (f^n(y'))_2| \Rightarrow |x_1-y_1| \geq |x_2-y_2| \Rightarrow x_2 = y_2$, pois $x_1 = y_1$.

Agora se $\forall j$, $0 \leq j \leq n$, $|(f^j(x'))_1 - (f^j(y'))_1| \leq$ $\geq |(f^j x')_2 - (f^j y')_2|$, então $|x_2-y_2| = |(f^n x')_2 - (f^n(y'))_2|$ $= |f_2(f^{n-1}x') - f_2(f^{n-1}y'))| \leq (\tau+e)|(f^{n-1}(x'))_1 - (f^{n-1}(y'))_1|$ usando o lema. Como $|(f^{n-1}(x'))_1 - (f^{n-1}(y'))_1| \leq$ $\leq |(f^{n-1}(x'))_2 - (f^{n-1}(y'))_2|$, temos que $|x_2-y_2| \leq$ $\leq (\tau+e)|(f^{n-1}(x'))_2 - (f^{n-1}(y'))_2|$. Aplicando o mesmo argumento chegaremos a $|x_2-y_2| \leq (\tau+e)^n|x_2'-y_2'| \leq 2r(\tau+e)^n$, fazendo $n \to \infty$, $(\tau+e)^n \to 0$ pois $\tau+e < 1$, o que implica $x_2 = y_2$.

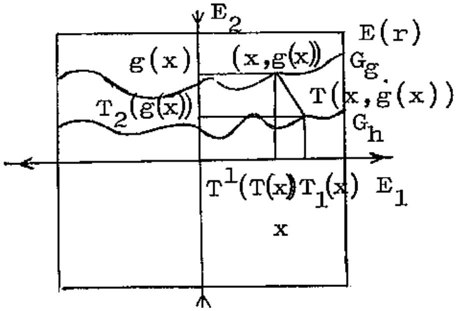
Suponha agora que $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in W_2$ com $x_2 = y_2$, vamos mostrar que $x_1 = y_1$. Ora $f^n(x), f^n(y) \in E(r)$ $\forall n \geq 0 \Rightarrow 2r \geq |(f^n)_1(x)-(f^n)_1(y)| =$ $= |f_1(f^{n-1}(x)) - f_1(f^{n-1}(y))| \geq (\tau^{-1}-e)|(f^{n-1})_1(x) -$ $- (f^{n-1})_1(y)| \geq \ldots \geq (\tau^{-1}-e)^n|x_1-y_1| \Rightarrow |x_1-y_1| \leq$ $\leq \dfrac{2r}{(\tau^{-1}-e)^n} \to 0$ quando $n \to \infty$, já que $\tau^{-1}-e > 1$, logo $x_1 = y_1$.

Segue-se, portanto, que W_1 e W_2 são gráficos de funções, como queríamos.

O nosso propósito é mostrar que se f é de classe C^k, W_1 e W_2 são gráficos de funções de classe C^k. W_1 e W_2 são chamadas variedades estável e instável de f, respectivamente.

DEFINIÇÃO - Seja $r > 0$ e $f:E(r) \to E$. Definimos a <u>Transformação Gráfico</u> Γ_f de f, do seguinte modo: Se $h,g:E_1(r) \to E_2(r)$ e $f(G_g) \cap E(r) = G_h$, onde G_g e G_h são os gráficos de g e h, respectivamente, então $\Gamma_f(g) = h$.

Suponha que $(f_1,f_2) = f:E(r) \to E$ e $g:E_1(r) \to E_2(r)$ são tais que $f_1 \circ (1,g)$ é inversível então
$\Gamma_f(g) = f_2 \circ (1,g).[f_1 \circ (1,g)]^{-1}|E_1(r)$, onde
$1:\underset{x}{E_1(r)} \underset{\longmapsto}{\to} \underset{x}{E_1(r)}$. Com efeito $(y,\Gamma_f(g)y) =$
$= (y, f_2\circ(1,g)\circ[f_1\circ(1,g)]^{-1}(y)) = (f_1(x,g(x)),f_2(x,g(x))=$
$= f(x,g(x))$ onde $x = [f_1 \circ (1,g)]^{-1}(y) \in E_1(r)$. Em particular se $T = T_1 \oplus T_2$ é hiperbólica então $\Gamma_T(g) =$
$= (\pi_2\circ T)\circ(1,g)\circ[(\pi_1\circ T)\circ(1,g)]^{-1}|E_1(r) = T_2\circ g\circ T_1^{-1}|E_1(r)$.
Seja $\Gamma_T(g) = h$ e vejamos geomètricamente.



DEFINIÇÃO - a) Seja $f:E(r) \to E$ de classe C^k, definimos $|f|_k = \sup\limits_{x\in E(r)} \max\{|f(x)|, |Df(x)|,\ldots, |D^k f(x)|\}$ e $C^k(E(r),E) = \{f:E(r) \to E;\ f$ é de classe C^k e $|f|_k < \infty\}$.

b) $N_e^k(T) = \{f \in C^k(E(r),E); L(f-T) < e,\ |f(0)| < e\}$ sendo $T:E \to E$ hiperbólico.

TEOREMA 4 (da variedade instável) - Seja $T:E \to E$ um isomorfismo hiperbólico com assimetria τ. Se $f:E(r) \to E$ é de Lipschitz, $L(f-T) < e$ e $|f(0)| < \delta$, com $e < \max\{\frac{1-\tau}{1+\tau}, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ e $\delta < e^2 r\tau$, então:

a) Existe uma única aplicação $g_f:E_1(r) \to E_2(r)$ cujo gráfico é $W_1 = \bigcap\limits_{n\geq 0} f^n(E(r))$ e $L(g_f) \leq 1$.

b) A aplicação $(f|W_1)^{-1}:W_1 \to W_1$ é uma contração de W_1 em seu interior $(= \{x \in W_1;\ |x_1| \leq S,\ S < r\})$.

c) Se f é de classe C^k, $k \geq 1$, então g_f é de classe C^k, $k \geq 1$.

d) A função $\begin{array}{ccc} N_\delta^k(T) & \longrightarrow & C^k(E_1(r),E_2(r)) \\ f & \longmapsto & g_f \end{array}$ é contínua.

<u>Prova</u>: Provaremos o caso que $f(0) = 0$. Se $f(0) \neq 0$ faz-se uma translação da origem do ponto fixo de f. (V. [1]). Para mostrar a) observemos que $e < \frac{1-\tau}{1+\tau} = \frac{\tau^{-1} - 1}{\tau^{-1} + 1}$, $e < \tau^{-1}$, $e < 1-\tau$ e $\frac{\tau + e}{1-\tau e} < 1$.

Seja $\mathcal{G} = \{g \in \mathfrak{m}(E_1(r),E_2(r)); g(0) = 0,\ L(g) \leq 1\}$. $\mathcal{G}$ é completo como se pode verificar fàcilmente. Vamos mostrar que $\Gamma_f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é bem definida. Para isto consideremos as funções $\psi_f(g) : E_1(r) \to E_2(r)$ e $\varphi_f(g) : E_1(r) \to E_2(r)$ definidas por $\psi_f(g) = f_1 \circ (1,g)$ e $\varphi_f(g) = f_2 \circ (1,g)$.

Temos que $L(\psi_f g - T_1) < \|T_1^{-1}\|^{-1}$, pois

$|\psi_f(g)(x_1) - T_1(x) - \psi_f(g)(y) - T_1(y)| = |\pi_1 \circ [f(x,g(x)) - T(x,g(x)) -$
$- f(y,g(y)) + T(y,g(y))| \leq L(f-T)|(x-y, g(x)-g(y))| \leq$
$\leq L(f-T)|x-y|$ pois $L(g) \leq 1 \Rightarrow L(\psi_f(g) - T_1) \leq L(f-T) <$
$< e < \tau^{-1} = \|T_1^{-1}\|^{-1}$. Daí pelo teorema da perturbação de um isomorfismo $\psi_f g$ é um homomorfismo e $L((\psi_f g)^{-1}) \leq$
$\leq [\|T_1^{-1}\|^{-1} - L(\psi_f g - T_1)]^{-1} \leq (\tau^{-1} - e)^{-1} < 1$. Como $\psi_f g(0) = 0$ e $\psi_f(g)(E_1(r)) \supset E_1(r(\tau^{-1} - e)) \supset E_1(r)$, temos que $(\psi_f g)^{-1}|E_1(r) : E_1(r) \to E_1(r)$ é um homomorfismo que é uma contração.

Agora $|\varphi_f g(x) - \varphi_f g(y)| = |f_2(,xg(x)) - f_2(y,g(y))| \leq$
$\leq |\pi_2 \circ T(x-y, g(x)-g(y))| + |\pi_2 \circ [(f-T)(x,g(x)) - (f-T)(y,g(y))|$
$\leq \|T_2\|\,|g(x)-g(y)| + L(f-T)\max\{|x-y|, |g(x)-g(y)|\} \leq$
$\leq (\tau + e)|x-y|$ pois $L(g) \leq 1 \Rightarrow L(\varphi_f g) \leq \tau + e < 1$ e mais

ainda $\varphi_f g(0) = 0$. Daí $\Gamma_f(g) = \varphi_f(g)\circ[\psi_f(g)]^{-1}|E_1(r)$ é bem definida, pois $\Gamma_f(g)(0) = 0$ e $L(\Gamma_f(g)) \leq 1$.

Mostremos que $\Gamma_f: G \to G$ é uma contração.

$$|\Gamma_f(g_1)-\Gamma_f(g_2)| = |\varphi_f(g_1)\circ[\psi_f(g_1)]^{-1} - \varphi_f(g_2)\circ[\psi_f(g_2)]^{-1}|$$

$$\leq |\varphi_f g_1\circ(\psi_f g_1)^{-1} - \varphi_f(g_1)\circ(\psi_f g_2)^{-1}| + |\varphi_f g_1\circ(\psi_f g_2)^{-1} - \varphi_f g_2\circ(\psi_f g_2)^{-1}|$$

$$\leq L(\varphi_f g_1)L(\psi_f g_1)^{-1}|\psi_f g_1 - \psi_f g_2| + |\varphi_f g_1 - \varphi_f g_2| \leq$$

$$\leq (\tau+e)(\tau^{-1}-e)^{-1}|\psi_f g_1 - \psi_f g_2| + |\varphi_f g_1 - \varphi_f g_2|.$$ Ora

$$|\psi_f g_1(x) - \psi_f g_2(x)| = |f_1(x,g_1(x)) - f_1(x,g_2(x))| =$$

$$= |\pi_1\circ[(f-T)(x,g_1(x))-(f-T)(x,g_2(x))| \leq L(f-T)|g_1(x)-g_2(x)| \Rightarrow$$

$$|\psi_f g_1 - \psi_f g_2| \leq e|g_1-g_2|.$$

$$|\varphi_f g_1(x)-\varphi_f g_2(x)| = |f_2(x,g_1(x))-f_2(x,g_2(x))| \leq |T_2(g_1(x)-g_2(x))|$$

$$+ |\pi_2[(f-T)(x,g_1(x))-(f-T)(x,g_2(x))| \leq (\|T_2\|+L(f-T))|g_1(x)-g_2(x)|$$

$$\Rightarrow |\varphi_f g_1 - \varphi_2 g_2| \leq (\tau+e)|g_1-g_2|.$$

Segue-se daí que $|\Gamma_f(g_1) - \Gamma_f(g_2)| \leq \frac{\tau+e}{1-\tau e}|g_1-g_2|$. Portanto $L(\Gamma_f) \leq \frac{\tau+e}{1-\tau e} < 1$ e Γ_f é uma contração. Daí Γ_f tem um ponto fixo g_f. Como $f(G_{g_f}) \cap E(r) = G_{g_f}$, segue-se que $W_1 = \bigcap_{n\geq 0} f^n(E(r)) =$ gráfico de g_f. Como $g_f \in G$ então $L(g_f) \leq 1$. Concluímos o item a).

Mostremos o item b). Para isto consideremos o diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"] & f(W_1) \arrow[d, "\pi_1"] \\ E_1(r) \arrow[r, "\psi_f(g_f)=f_1\circ(1,g_f)"'] & E_1 \end{tikzcd}$$

π_1 é a projeção no primeiro fator de $E = E_1 \oplus E_2$.

Como $L(g_f) \le 1$ então $|g_f(x)-g_f(y)| \le |x-y| \Rightarrow$ $|(x,g_f(x))-y,g_f(y))| = \max\{|x-y|,|g_f(x)-g_f(y)|\} = |x-y| \Rightarrow$ $|(x,g_f(x))-(y,g_f(y))| = |\pi_1(x,g_f(x))-\pi_1(y,g_f(y))|$. Segue-se do diagrama que $\pi_1 \circ f^{-1} = (\psi_f g_f)^{-1} \circ \pi_1 \Rightarrow$ $(f^{-1})_1(x,g_f(x)) = (\psi_f(g_f)^{-1}(x)$, daí e do visto acima $|f^{-1}(x,g_f(x))-f^{-1}(y,g_f(y))| = |(f^{-1})_1(x,g_f(x))-(f^{-1})_1(y,g_f(y))|$ $= |(\psi_f g_f)^{-1}(x) - (\psi_f g_f)^{-1}(y)| \le (\tau^{-1} - e)^{-1}|x-y| =$ $= (\tau^{-1} - e)^{-1}|(x-y,g_f(x)-g_f(y))|$ o que mostra que $f^{-1}|W_1$ é uma contração que tem portanto um único ponto fixo que é o zero pois $f^{-1}(0) = 0$, $0 \in W_1$.

Faremos a demonstração do item c) com a seguinte hipótese de indução: se $f-T|E(r) \to E$ é tal que $L(f-T)<e$ com $T:E \to E$ hiperbólica e f é de classe C^k, $k \ge 1$, então g_f é de classe C^k.

Provemos para $k = 1$.

Em primeiro lugar vamos mostrar que $\exists \tilde{r} \le r$ tal que se $e < \tilde{e} < \max\{\frac{1-\tau}{1+\tau}, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ então $\|Df(x)-T\| < \tilde{e}$, $|x| \le \tilde{r}$. Com efeito $|Df(0).x-T.x| \le |f(x)-Df(0).x|+|f(x)-T.x| \le$ $\le h|x| + e|x|$ e portanto, como $h \to 0$ quando $x \to 0$ po demos escolher h de tal modo que $h + e < \tilde{e}$, daí $|Df(0)-T| < \tilde{\varepsilon}$. Segue, por continuidade, que $\exists \tilde{r} \leq r$ tal que $|Df(x)-T| < \tilde{e}$, $|x| \leq \tilde{r}$.

Considere agora $\tilde{f} = f|E(\tilde{r})$ e $\tilde{g} \in G^1 = G \cap C^1(E_1(\tilde{r}), E_2(\tilde{r}))$.

Definamos
$$\begin{aligned} \Delta\tilde{f}:(E\times E)(\tilde{r}) &\longrightarrow E\times E \\ (x,y) &\longmapsto (\tilde{f}(x), D\tilde{f}(x).y) \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} \Delta\tilde{g}:E_1(\tilde{r}) \times E_1(\tilde{r}) &\longrightarrow E_2(\tilde{r}) \times E_2(\tilde{r}) \\ (x_1,y_1) &\longmapsto (\tilde{g}(x_1), D\tilde{g}(x_1).y_1) \end{aligned}$$
.

Seja $\mathcal{H} = \{\tilde{h} \in C^0(E_1(\tilde{r}), L(E_1,E_2)); \|\tilde{h}(x_1)\| \leq 1, \forall x_1 \in E_1(\tilde{r})\}$ e defina $\Gamma_{\Delta\tilde{f}}(g,\tilde{h})(x_1) = (\Gamma_{\tilde{f}}(g)(x_1), D\tilde{f}_2(\xi)\circ(1,\tilde{h}(\xi)) \circ$ $\circ [Df_1(\xi)\circ(1,\tilde{h}(\xi))]^{-1})$ onde $(g,\tilde{h}) \in G \times \mathcal{H}$, $\xi_1 = (\psi_f g)^{-1}(x_1)$, $\xi_2 = g(\xi_1)$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Mostremos que $\Gamma_{\Delta f}$ está bem definida.

Consideremos $\Xi_i = L(E,E_i)$ $i=1,2$, temos $\Xi = \Xi_1 \oplus \Xi_2$.

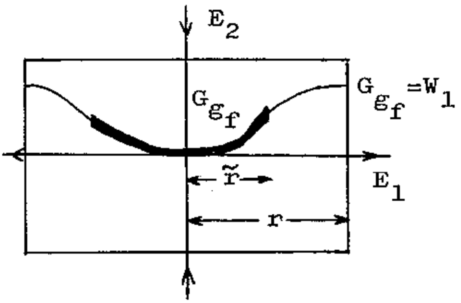
Se $\Xi(1)$ é a bola unitária em Ξ defina $T_\ell : \Xi(1) \to \Xi$.

É fácil ver que $|T_\ell| = |T|$, $|T_{1\ell}| = |T_1|$; $|T_{2\ell}| = |T_2|$ com $T_1 \oplus T_2 = T$. Se $|T'-T| < c$ então $T'_\ell : \Xi(1) \to \Xi$ é tal que $L(T'_\ell - T_\ell) = L(T'-T) < c \leq c' < |T^{-1}|^{-1} = |T_\ell^{-1}|^{-1}$.

Daí (pelo mesmo argumento que fizemos para f!) $\exists$ $\Gamma_{T'}: G\Xi \to G\Xi$ que é contração, onde $G\Xi = \{H \in C^0(\Xi_1(1), \Xi_2(1)); H(0) = 0$ e $L(H) \leq 1\}$ e $\Gamma_{T'}(H(S_1)) = T'_2\,(1,H(S_1))\,[T'_1\,(1,H(S_1))]^{-1}$. Agora é só observar que $|Df(\xi)-T| < c$ se $|\xi| \leq r$ e que

$\Gamma_{\Delta\tilde{f}}(g,\tilde{h})(x_1) = (\Gamma_{\tilde{f}}(g)(x_1),\ \Gamma_{D\tilde{f}(\xi)_{\#}}(h(\xi)_{\#}))$. Pelo Teorema 1, existe um único ponto fixo atrator (g_f, h_f) de $\Gamma_{\Delta\tilde{f}}: G\times\mathcal{H} \to G\times\mathcal{H}$. Vamos mostrar que $h_{\tilde{f}} = Dg_{\tilde{f}}$. Ora $\Gamma_{\Delta\tilde{f}}(\Delta\tilde{g}) = \Gamma_{(\tilde{f},Df)}(\tilde{g},D\tilde{g}) = (\Gamma_{\tilde{f}}\tilde{g},(D\tilde{f})_2\circ(1,D\tilde{g})\circ[(D\tilde{f})_1\circ(1,D\tilde{g})]^{-1})$ $= (\Gamma_{\tilde{f}}\tilde{g}, D(\Gamma_{\tilde{f}}\tilde{g})) = \Delta(\Gamma_{\tilde{f}}g)$.

Tome $\tilde{g}_o \equiv 0$, temos que $\Gamma^n_{\Delta\tilde{f}}(\Delta\tilde{g}_o) \xrightarrow[n\to\infty]{} (g_{\tilde{f}},h_{\tilde{f}}) \Rightarrow$ $\Delta(\Gamma^n_{\tilde{f}}\tilde{g}_o) \xrightarrow[n\to\infty]{} (g_{\tilde{f}},h_{\tilde{f}}) \Rightarrow (\Gamma^n_{\tilde{f}}\,\tilde{g}_o, D(\Gamma^n_{\tilde{f}}\,\tilde{g}_o)) \to (g_{\tilde{f}},h_{\tilde{f}}) \Rightarrow h_{\tilde{f}} =$ $= Dg_{\tilde{f}}$. Acontece que $\Delta g_f|E_1(\tilde{r}) \times E_1(\tilde{r})$ também resolve a equação $\Gamma_{\Delta\tilde{f}}(\Delta g) = \Delta g$ e por unicidade $\Delta g_f|E_1(\tilde{r})\times E_1(\tilde{r})$ é de classe $C^{k-1} \Rightarrow g_f$ de classe C^k em $E_1(\tilde{r})$.



Como f^{-1} é uma contração $\exists N$ tal que $f^N(G_{g_{\tilde{f}}}) \cap E_1(r) =$ $= G_{g_f} \Rightarrow$ $g_f = (f^N)_2\circ(1,g_f)\circ[(f^N)_1\circ(1,g_f)]^{-1}$ $|E_1(r)$.

Portanto g_f é de classe C^1.

Provaremos agora que g_f é C^k, $k \geq 2$. Para tanto suponha que f é C^k, $k \geq 2$ e $|f|_k \leq M$. Escolha e', $\tilde{\varepsilon} < e' < \max\{\frac{1-\tau}{1+\tau}, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ e r', $0 < r' \leq r$ tais que $Mr' < e' - \tilde{\varepsilon}$ ($\tilde{\varepsilon}$ é o construido na prova para $k = 1$).

Seja $f' = f|E(r')$, mostremos que $\Delta f' \in \eta_{e'}(T\oplus T)$.

$|(\Delta f' - T\oplus T)(x,y) - (\Delta f' - T\oplus T)(x',y')| =$

$= \max\{|(f'-T)(x)-(f'-T)(x')|, |((Df')(x)-T)(y)-(Df(x')-T)(y')|$

$\leq \max\{e|x-x'|, [Df'(x)-Df'(x')](y)+|[Df'(x')-T](y-y')|\}$

$\leq \max\{e|x-x'|, M|x-x'|r'+\tilde{e}|y-y'|\} < e'|(x,y)-(x',y')|$, pois

se $|x-x'| \geq |y-y'|$ então $Mr'|x-x'| + \tilde{e}|y-y'| \leq$

$\leq (Mr'+\tilde{e})|x-x'| < e'|x-x'| \Rightarrow \max\{e|x-x'|, M|x-x'|r'+e|y-y'|\}$

$\leq \max\{e|x-x'|, e'|x-x'|\} < e'|x-x'| < e'|(x,y)-(x',y')|$.

Anàlogamente se $|x-x'| \leq |y-y'|$.

Temos que $L(\Delta f'-T\oplus T) < e' \Rightarrow \Delta f' \in \eta_{e'}(T\oplus T)$. Daí pela hipótese de indução $\exists$ uma única função que é da forma $\Delta g_{\tilde{f}}$ i.e. $\Gamma^n_{\Delta f'}(\Delta g') \to \Delta g_{f'}$. Ainda mais $\Delta g_{f'}$ é de classe C^{k-1}.

Agora $\Delta g_f|E_1(r')\times E_1(r')$ também resolve a equação $\Gamma_{\Delta f}(\Delta g) = \Delta g$ e por unicidade $\Delta g_f|E_1(r')\times E_1(r')$ é de classe $C^k \Rightarrow g_f$ de classe C^{k-1}. Como $\Gamma_f(g_f) = g_f$ nós temos para N suficientemente grande (usando o fato de que f é uma contração) que

$$(*) \quad g_f = (f^N)_2 \circ (1, g_{f'}) \circ [(f^N)_1 \circ (1, g_{f'})]^{-1}|E_1(r)$$

Portanto g_f é de classe C^k em $E_1(r)$.

Esta fórmula (*) vale $\forall f \in \eta_e(T)$ com o mesmo N. Daí se $\bar{f} \to f$ em $N^k_e(T) \Rightarrow \bar{f}' \xrightarrow{C^k} f' \Rightarrow \Delta\bar{f}' \xrightarrow{C^{k-1}} \Delta\bar{f} \Rightarrow$ $\Delta g_{\bar{f}'} \xrightarrow{C^{k-1}} \Delta g_{f'}$ e por indução $\Rightarrow g_{\bar{f}'} \xrightarrow{C^k} g_{f'}$.

Agora usando (*) para $g_{\bar{f}}$ temos que $g_{\bar{f}} \xrightarrow{C^k} g_f$ se $\bar{f} \xrightarrow{C^k} f$.

COROLÁRIO - Seja E um espaço de Banach e $V \subset E$ uma vizinhança da origem. Considere $f: V \to E$ um difeomorfismo tendo zero como ponto fixo hiperbólico. $\exists\ e, \delta, r > 0$ tais que as conclusões do teorema anterior são verdadeiras. Ainda mais se $E = E_1 \oplus E_2$ é a decomposição canônica de E então $(TW_1)_o = E_1$.

<u>Prova</u>: Para mostrar que $(TW_1)_o = E_1$ basta provar que $g_f'(0) = 0$.

Sabemos que $g_f = f_2 \circ (1, g_f) \circ [(f_1 \circ (1, g_f)]^{-1} \Rightarrow$
$g_f \circ f_1 \circ (1, g_f) = f_2 \circ (1, g_f) \Rightarrow g_f'(0) \circ \pi_1 \circ f'(0,0) \circ (1, g_f'(0)) =$
$= \pi_2 \circ f'(0,0) \circ (1, g_f'(0)) \Rightarrow g_f'(0) \circ \pi_1 \circ [f'(0,0)|E_1 \oplus (f'(0,0)|E_2)$
$\circ\, g_f'(0)] = \pi_2 \circ [f'(0,0)|E_1 \oplus (f'(0,0)|E_2) \circ g_f'(0)] \Rightarrow$
$g_f'(0,0) = f'(0,0)|E_2 \circ g_f'(0) \circ [f'(0,0)|E_1]^{-1} \Rightarrow g_f'(0) = 0$
pois $g_f'(0) \neq 0 \Rightarrow |g_f'(0)| < |g_f'(0)|$ já que
$|f'(0,0)|E_1| < 1$ e $|[f'(0,0)|E_2]^{-1}| < 1$.

<u>Variedade Instável para fluxos</u>

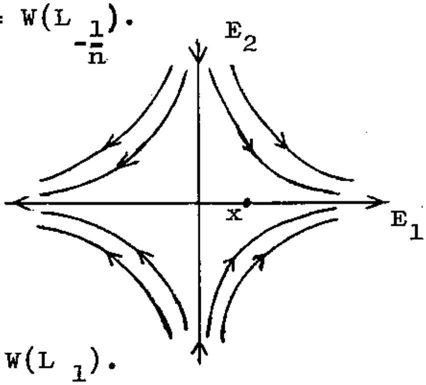
TEOREMA 5 - Considere $U \subset E$ um aberto num espaço de Banach E. Seja $X: U \to E$ de classe C^{k-1}, $k \geq 1$, $X(0) = 0$ e $X'(0)$ hiperbólica. Se $\varphi: \mathcal{D} \subset R \times E \to E$ é o fluxo de X, $\exists r > 0$ tal que o conjunto $W(\varphi) = \{x \in E(r);\ \varphi_t(x) \in E(r),\ t \geq 0\}$ é uma variedade de classe C^k, esta é chamada variedade instável (local) do campo X.

<u>Prova</u>: Seja $W(\varphi_{-1})$ a variedade instável (local) de φ_{-1}.

Sabemos que esta é de classe C^k pelo teorema anterior, i.e. $\exists r > 0$ tal que $W(\varphi_{-1}) = \{x \in E(r); \varphi^m_{-1}(x) \in E(r)$ $\forall\, m \geq 0\}$ é uma variedade de classe C^k.

Vamos mostrar que $W(\varphi) = W(\varphi_{-1})$. Seja $L: R \times E \to E$ o fluxo correspondente a parte linear de X. Sabemos pelo teorema de Hartman (V. [2]) que existe um homeomorfismo $H: E \to E$ tal que em $E(r)$ (diminuindo r se necessário) $\varphi_t H = HL_t$. Daí se $W(L)$ é a variedade instável de L $H(W(L)) = W(\varphi)$. Portanto basta mostrar que $W(L) = W(L-1)$.

Primeiro vamos ver que $W(L_{-1}) = W(L_{-\frac{1}{n}})$.



$W(L_{-\frac{1}{n}}) \subset W(_{-1})$ pois $L^n_{-\frac{1}{n}} = L_{-1}$.

Suponha que $\exists$ $x \in W(L_{-1})$ e

$x \notin W(L_{-\frac{1}{n}}) = L^m_{-\frac{1}{n}}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow L^{kn}_{-\frac{1}{n}}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \Rightarrow L^k_{-1}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

o que é absurdo. Logo $W(L_{-1}) \subset W(L_{-\frac{1}{n}})$.

Como $L^m_{-\frac{1}{n}} = L_{-\frac{m}{n}}$ temos $W(L_{-\frac{m}{n}}) = W(L^n_{-\frac{1}{n}}) = W(L_{-1})$.

Agora se $\rho < 0$ é irracional temos por continuidade de L e invariância de E_1 que $W(L_{-1}) = W(L_\rho)$. Conclusão: $W(L_{-1}) = W(L)$.

OBSERVAÇÃO - Após a redação do presente trabalho, Ivan de Camargo observou-me que parece ser necessário adicionar na condição c) do Teorema 4, à página 10, que a derivada de ordem k de f seja uniformemente contínua. Assim, dever-se-ia acrescentar na hipótese de indução dêste teorema (veja página 13) que a derivada de ordem k de f seja uniformemente contínua. Daí resulta que g_f tem a mesma propriedade.

REFERÊNCIAS

[1] - HIRSCH, M.W. e PUGH, C.C. - Stable manifolds and hyperbolic sets (a aparecer).

[2] - PALIS, J. - On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces. Anais da Academia Brasileira de Ciências (1968, vol. 40, nº 3).

[3] - LAGES, E.L. - Análise Geométrica, 7º Colóquio Brasileiro de Matemática.

DIFEOMORFISMOS DE MORSE-SMALE I

Gilda de La Rocque Palis

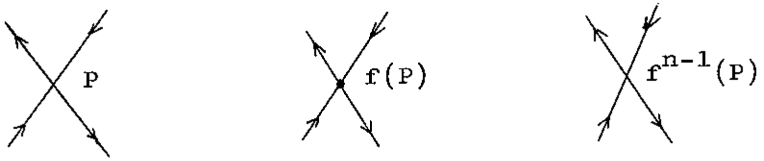
Nestas notas estabeleceremos algumas propriedades básicas dos sistemas de Morse-Smale. Trataremos apenas do caso de difeomorfismos. Os resultados obtidos podem ser extendidos de maneira imediata para campos de vetores.

No que se segue, M será uma variedade C^∞ compacta e sem bordo e $\mathrm{Dif}(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de classe C^r $(r \geq 1)$ de M com a topologia C^r.

Para $f \in \mathrm{Dif}(M)$ denotaremos por $\Omega(f)$ o conjunto de pontos não-errantes de f e por $\mathrm{Per}(f)$ o conjunto de pontos periódicos de f.

Se P é um ponto fixo hiperbólico de f, temos definidas as variedades estável e instável de f em P, denotadas respectivamente por $W^s(P)$ e $W^u(P)$.

Se P é ponto periódico hiperbólico de f, P com período n, as variedades estável e instável de f em P são as variedades estável e instável de f^n em P. As variedades estável e instável da órbita de P, $\mathcal{O}(P)$, são as imagens por f^i, $0 \leq i < n$, das variedades estável e instável de f em P



Seja $P \in Per(f)$, P hiperbólico. A $\dim W^s(P)$ é chamada de índice de estabilidade de P. Se $\dim W^s(P) = \dim M$, P é dito um poço. Se $0 < \dim W^s(P) < \dim M$, P é dito uma sela. Se $\dim W^s(P) = 0$, P é dito uma fonte.

DEFINIÇÃO - Seja $f \in Dif(M)$. f é um difeomorfismo de Morse-Smale se

1) $\Omega(f)$ é finito.
2) Se $P \in Per(f)$ então P é hiperbólico.
3) Se $P, Q \in Per(f)$ então $W^s(P) \pitchfork W^u(Q)$.

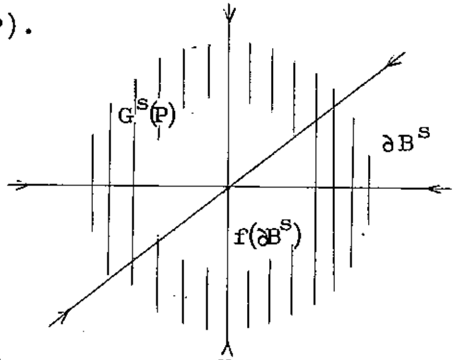
O conjunto de difeomorfismos de Morse-Smale será denotado por $S(M)$.

OBSERVAÇÃO: Se $\Omega(f)$ é finito então $\Omega(f) = Per(f)$.

No trabalho de G.L.Reis que se segue a êste, demonstra-se que $S(M)$ é aberto em $Dif(M)$. A demonstração dêste teorema consiste em definir um conjunto $R(M) \supset S(M)$ e provar que $R(M)$ é aberto em $Dif(M)$ e que

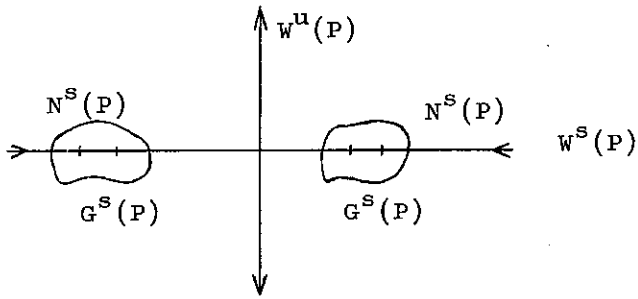
$S(M)$ é aberto em $R(M)$. Nestas notas, vamos definir $R(M)$ e estudar algumas de suas propriedades básicas.

Sejam $f \in \mathrm{Dif}(M)$, P ponto fixo hiperbólico de f, $LU(P)$ e $LS(P)$ as variedades instável e estável locais de f em P. Como $f|_{LS(P)}$ é uma contração existe um disco B^s mergulhado em $LS(P)$, contendo P, tal que $f(\partial B^s) \subset \mathrm{Int}\, B^s$. O anel mergulhado em $LS(P)$ cujos bordos são ∂B^s e $f(\partial B^s)$ é chamado domínio fundamental $G^s(P)$ de $W^s(P)$.



Como $W^s(P) = \bigcup_{n \in Z^+} f^{-n} LS(P)$ e para qualquer $x \neq P$, $x \in W^s(P)$, $f^{+n}(x) \in G^s(P)$ para algum n, então $W^s(P) = \bigcup_{n \in Z} f^n(G^s(P)) \cup \{P\}$.

Qualquer vizinhança $N^s(P)$ de $G^s(P)$ em M disjunta de $LU(P)$ é chamada de vizinhança fundamental de $W^s(P)$.



Se P é ponto periódico hiperbólico de f, com período u, $G^s(P)$ e $N^s(P)$ são definidas anàlogamente considerando-se a aplicação f^n para o qual P é fixo.

De modo semelhante definem-se $G^u(P)$ e $N^u(P)$.

Uma descrição de f^n em uma vizinhança de P é levada, por iteração por f, a uma descrição de f^n em vizinhanças dos outros pontos da órbita de P, $\mathcal{O}(P)$.

DEFINIÇÃO - Sejam W_1 e W_2 subvariedades de M, i_1 e i_2 as respectivas aplicações de inclusão. W_2 está e-C^1 próxima de W_1 se existir um difeomorfismo $\gamma: W_1 \to W_2$ tal que i_1 e $i_2 \gamma$ estejam e-C^1 próximas.

LEMA (λ-Lema, [1]) - Sejam $f \in \mathrm{Dif}(M)$ e P ponto fixo hiperbólico de f. Suponhamos que $\dim W^u(P) = r$, $0 < r < \dim M$ e que N é uma variedade imersa 1-1 em M, invariante por f e com um ponto Q de interseção transversal com $W^s(P)$. Então para qualquer $e > 0$ e qualquer disco B^r mergulhado em $W^u(P)$, com centro em P, existe um disco de dimensão r, mergulhado em N, ε-C^1 próximo de B^r.

Demonstração: P é uma sela. Se $Q \in N$ e N é invariante por f, $f^n(Q) \in N$ para qualquer inteiro n. Como Q é ponto de interseção transversal com $W^s(P)$, $\dim N \geq r$.

É suficiente demonstrar o lema para o caso em que $\dim N = r$, pois se $\dim N > r$ podemos restringir o estudo a um disco mergulhado em N, de $\dim r$, transversal a $W^s(P)$ em Q e seus iterados por f.

Como $W^s(P)$ e N são invariantes por f e $N \pitchfork W^s(P)$ em Q, então $N \pitchfork W^s(P)$ em $f^n(Q)$ para qualquer $n \geq 0$ e podemos considerar Q em qualquer vizinhança de P.

Como as variedades estável e instável de P tem interseção transversal em P e tem dimensões complementares, teremos que, em vizinhança $V = LS(P) \times LU(P)$ de P, f pode ser expressa por

$$f(x_1,x_2) = (L_s x_1 + \phi_1(x_1,x_2), L_u x_2 + \phi_2(x_1,x_2))$$

onde

$$(Df)_P = (L_s, L_u), \quad x_1 \in LS(P), \; x_2 \in LU(P)$$

$$\|L_s\|, \; \|L_u^{-1}\| < a < 1$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\Big|_{LU(P)} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}\Big|_{LS(P)} = 0 .$$

Como $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(0,0) = 0$, $1 \leq i,j \leq 2$, por continuidade destas aplicações existe k com $a_1 = a+k < 1$, $0 < k < 1$,

$$b = (\frac{1}{a} - k) > 1, \quad k < \frac{(b-1)^2}{4}$$

e existe $V' \subset V$ tal que

$$k = \max_{\bar{V}'} \|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\| \ , \quad 1 \leq i,j \leq 2 .$$

Podemos supor $Q \in V'$. Suponhamos $B^r \subset V'$. Seja v_o um vetor unitário qualquer em $(TN)_Q$. Com relação à decomposição $V = LS(P) \times LU(P)$ podemos escrever $v_o = (v_o^s, v_o^u)$. Seja λ_o a inclinação de v_o, $\lambda_o = \dfrac{\|v_o^s\|}{\|v_o^u\|}$, com $\|v_o^u\| \neq 0$ pois $N \pitchfork W^s(P)$ em Q.

Consideremos

$$\begin{aligned}
Q_1 &= f(Q) \ , & v_1 &= (Df)_Q(v_o)\\
Q_2 &= f^2(Q) \ , & v_2 &= (Df)_{Q_1}(v_1)\\
&\vdots & &\\
Q_n &= f^n(Q) \ , & v_n &= (Df)_{Q_{n-1}}(v_{n-1})
\end{aligned}$$

Para $Q \in LS(P)$,

$$(Df)_Q(v_o) = \begin{pmatrix} L_s + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(Q) & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(Q) \\ 0 + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}(Q) & L_u + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(Q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_o^s \\ v_o^u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_s\ v_o^s + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(Q)v_o^s + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(Q)v_o^u \\ L_u\ v_o^u + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(Q)v_o^u \end{pmatrix}$$

Logo $\lambda_1 = \dfrac{\|L_s\ v_o^s + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(Q)v_o^s + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(Q)v_o^u\|}{\|L_u\ v_o^u + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(Q)v_o^u\|}$

O numerador é majorado por $\|L_s\ v_o^s\| + \|\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(Q)v_o^s\| +$
$+ \ \|\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(Q)v_o^u\| \le a\|v_o^s\| + k\|v_o^s\| + k\|v_o^u\|$.

O denominador é minorado por $\|L_u\ v_o^u\| - \|\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(Q)v_o^u\| \ge$
$\ge \frac{1}{a}\|v_o^u\| - k\|v_o^u\|$.

Daí $\lambda_1 \le \dfrac{a\ \lambda_o + k\ \lambda_o + k}{1/a - k} \le \dfrac{\lambda_o + k}{b} = \dfrac{\lambda_o}{b} + \dfrac{k}{b}$

$$\lambda_2 \le \frac{\lambda_1 + k}{b} \le \frac{\lambda_o}{b^2} + k \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{b^i}$$

$$\lambda_n \le \frac{\lambda_o}{b^n} + k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b^i} \le \frac{\lambda_o}{b^n} + \frac{k}{b-1} .$$

Como $\dfrac{\lambda_o}{b^n} \to 0$ quando $n \to \infty$ e $\dfrac{k}{b-1} < \dfrac{b-1}{4}$, existe

$n_o \in Z^+$ tal que para qualquer $n > n_o$ tem-se $\lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$.

Como $\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right|_{LU(P)} = 0$, $\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right|_{B^r} = 0$.

Seja $0 < k_1 < \min(e,k)$. Como $\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right|_{B^r} = 0$ e B^r é compacto, existe $\delta < e$ tal que para $V_1 = \delta I^s \times B^r \subset V$ tem-se

$$\max_{V_1} \left\|\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right\| \leq k_1 \quad .$$

Como v_o poderia ter sido escolhido tal que λ_o fôsse o máximo entre as inclinações dos vetores unitários de $(TN)_Q$, temos que existe n_o tal que para $n \geq n_o$ todos os vetores não nulos de $(TN)_{Q_n}$ tem inclinação $\lambda_n \leq \frac{b-1}{4}$ e $Q_{n_o} \in V_1$. Então, pela continuidade do plano tangente a N, existe D^r um disco mergulhado em N com centro Q_{n_o} e tal que a inclinação de qualquer vetor unitário em $(TN)_R$, $R \in D^r$, satisfaz $\lambda \leq \frac{b-1}{2}$.

Seja $v \in (TN)_R$ para $R \in D^r$. Considerando a decomposição $v = (v^s, v^u)$, v tem inclinação $\lambda_{n_o} = \left\|\frac{v^s}{v^u}\right\|$. Vejamos quais as inclinações dos iterados de v.

$$(Df)_R(v) = \begin{pmatrix} L_s\, v^s + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(R)(v^s) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(R)(v^u) \\ \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(R)(v^s) + L_u\, v^u + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(R)(v^u) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{n_o+1} = \frac{\|L_s\ v^s + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(R)(v^s) + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(R)(v^u)\|}{\|\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}(R)(v^s) + L_u\ v^u + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(R)(v^u)\|}$$

cujo numerador é menor que $a\|v^s\| + k\|v^s\| + k_1\|v^u\|$ e cujo denominador é maior que $\|L_u\ v^u\| - \|\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(v^u)\| - \|\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}(R)(v^s)\| \geq \frac{1}{a}\|v^u\| - k\|v^u\| - k\|v^s\|$.

Daí

$$\lambda_{n_o+1} \leq \frac{a\ \lambda_{n_o} + k\ \lambda_{n_o} + k_1}{1/a - k - k\ \lambda_{n_o}} \leq \frac{\lambda_{n_o} + k_1}{b - k\lambda_{n_o}} \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_{n_o} + k_1}{b - k(\frac{b-1}{2})} \leq \frac{\lambda_{n_o} + k_1}{b - \frac{b-1}{2}} = \frac{\lambda_{n_o} + k_1}{\frac{b+1}{2}} .$$

Seja $b_1 = \frac{b+1}{2}$, $b_1 > 1$. Então: $\lambda_{n+n_o} \leq \frac{\lambda_{n_o}}{b_1^n} + \frac{k_1}{b_1 - 1}$.

E existe $\bar{n}$ tal que para $n \geq \bar{n}$

$$\lambda_{n+n_o} \leq e(1 + \frac{1}{b_1 - 1}) .$$

Como poderíamos ter considerado v tal que λ_{n_o} fôsse a máxima inclinação dos vetores unitários tangentes a D^r, temos que para $n \geq \bar{n}$, qualquer vetor não nulo tangente a $f^n(D^r) \cap V_1$ tem inclinação menor que $e(1 + \frac{1}{b_1-1})$. Então, dado $e > 0$ existe $\bar{n}$ tal que para $n \geq \bar{n}$, $f^n(D^r) \cap V_1$ tem todos os seus vetores tangentes não nulos com inclinação menor que ϵ.

Comparemos as normas do vetor tangente a $f^n(D^r) \cap$ $\cap\ V_1$ e de seu iterado por Df:

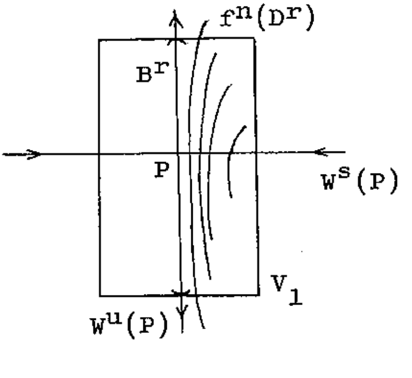
$$(v_n^s, v_n^u) \longrightarrow Df(v_n^s, v_n^u) = (v_{n+1}^s, v_{n+1})$$

$$\frac{\sqrt{(v_{n+1}^s)^2 + (v_{n+1}^u)^2}}{\sqrt{(v_n^s)^2 + (v_n^u)^2}} = \frac{v_{n+1}^u}{v_n^u} \sqrt{\frac{1 + \lambda_{n+1}^2}{1 + \lambda_n^2}} \; .$$

Desta relação concluimos que $\dfrac{v_{n+1}^u}{v_n^u} \geq (\frac{1}{a} - k) - k\,\lambda_n$.

Como as inclinações λ_{n+1} e λ_n são arbitràriamente pequenas, temos que as normas dos iterados dos vetores tangentes não nulas de $f^n(D^r) \cap V_1$ crescem numa razão arbitràriamente próxima a $1/a > 1$. Logo, os diâmetros de $f^n(D^r) \cap V_1$ aumentam o que, juntamente com a inclinação uniformemente pequena de seus planos tangentes, vai implicar que existe $\bar{n}$ tal que para todo $n > \bar{n}$ $f^n(D^r) \cap V_1$ é C^1 próximo de B^r, via a projeção canônica em B^r.

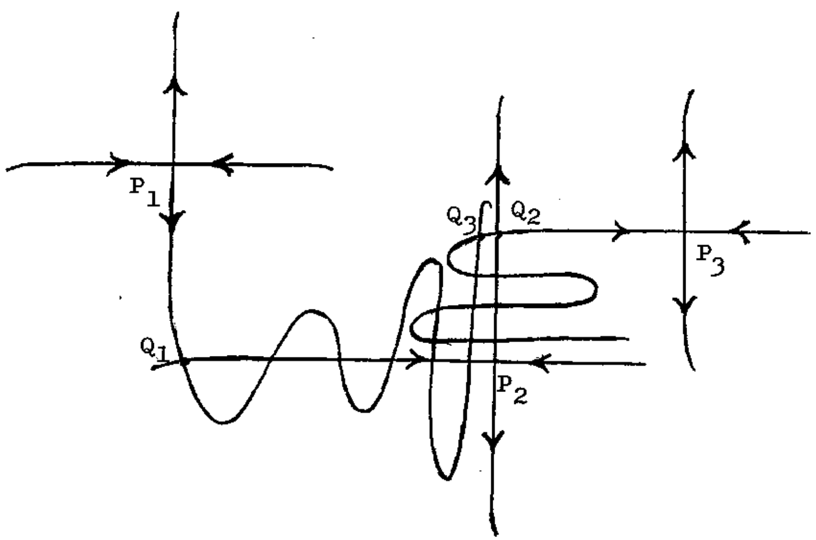
Com isto, fica demonstrado o λ-lema.



COROLÁRIO 1 - Seja $P \in Per(f)$ hiperbólico e $N^s(P)$ uma vizinhança fundamental de $W^s(P)$. Então, $\bigcup_{n\in Z} f^n(N^s(P)) \supset V - LU(P)$, onde V é uma vizinhança de P em M.

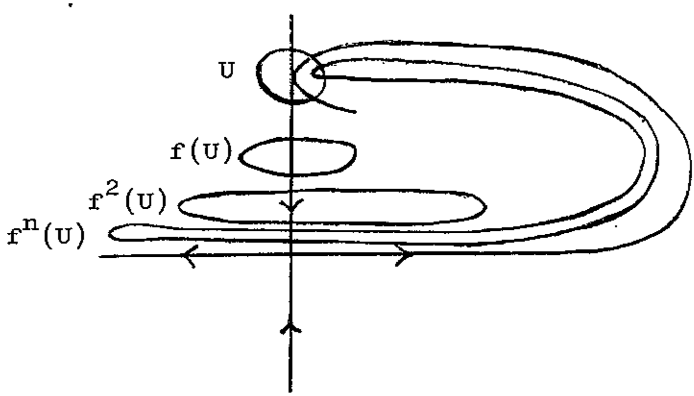
<u>Demonstração</u>: Observe que a iteração de um domínio fundamental $G^s(P) \subset N^s(P)$ cobre $W^s(P)-P$ e que todo ponto em vizinhança V de P está contido no iterado de uma seção transversal a $G^s(P)$ em $N^s(P)$.

COROLÁRIO 2 - Sejam $P_i \in Per(f)$, $1 \leq i \leq 3$, todos hiperbólicos. Se $W^u(P_1) \pitchfork W^s(P_2)$ em $Q_1 \notin Per(f)$, e $W^u(P_2) \pitchfork W^s(P_3)$ em $Q_2 \notin Per(f)$, então $W^u(P_1) \pitchfork W^s(P_3)$ em $Q_3 \notin Per(f)$.



Demonstração: Seja $r = \dim W^u(P_2)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer disco $B^r \subset W^u(P_2)$ existe um disco $D^r \subset W^u(P_1)$ que é ε C^1 próximo de B^r. Escolhendo $B^r \pitchfork W^s(P_3)$ e ε pequeno teremos $D^r \pitchfork W^s(P_3)$. Logo $W^u(P_1) \pitchfork W^s(P_3)$ em $Q_3 \notin Per(f)$.

COROLÁRIO 3 - Seja $P \in Per(f)$ hiperbólico. Se $W^u(P) \cap W^s(P) \neq \mathcal{O}(P)$, então $\Omega(f)$ não é finito.



Demonstração: Seja $Q \in W^u(P) \cap W^s(P)$, $Q \neq P$. Consideremos em U, vizinhança de Q, uma seção transversal a $W^s(P)$. Temos pelo λ-lema que $Q \in \Omega(f)$. Como $Q \notin Per(f)$, sua órbita $\mathcal{O}(Q)$ é infinita e contida em $\Omega(f)$.

Seja $R(M) \subset Dif(M)$ definido por $f \in R(M)$ se

1) $\Omega(f)$ é finito $(\Rightarrow \Omega(f) = Per(f))$.
2) Todo $P \in Per(f)$ é hiperbólico.
3) Se $P, Q \in Per(f)$ e $W^s(P) \cap W^u(Q) \neq \phi$, então

$W^s(P) \pitchfork W^u(Q)$ em algum ponto.

Claro que $S(M) \subset R(M)$, onde $S(M)$ é o conjunto de difeomorfismos de Morse-Smale de M.

PROPOSIÇÃO - Seja $f \in R(M)$. Então $M = \bigcup_i W^s(P_i) = \bigcup_i W^u(P_i)$ $P_i \in Per(f)$, e existe pelo menos um poço e uma fonte em $Per(f)$.

<u>Demonstração</u>: Vamos mostrar que $M = \bigcup_i W^s(P_i)$, $P_i \in Per(f)$. Seja $x \in M$. Consideremos a órbita de x

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) \mid n \in Z\}.$$

Se $\mathcal{O}(x)$ é finito então $x \in Per(f)$ e $x \in W^s(x)$. Suponhamos $\mathcal{O}(x)$ infinito. Recordemos que o conjunto w-limite de uma órbita $\mathcal{O}(x)$ é formado pelos pontos y para os quais existe uma sequência $n_i \to \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \to y$ quando $n_i \to \infty$. O conjunto w-limite de qualquer órbita pertence a Ω. No caso presente, w-lim $\mathcal{O}(x) \subset \Omega(f) =$ $= Per(f)$.

Mostremos inicialmente que se w-lim $\mathcal{O}(x)$ contém uma órbita periódica, então w-lim $\mathcal{O}(x)$ coincide com esta órbita periódica. De fato, escolhamos vizinhanças abertas V_i das órbitas periódicas de f tais que $V_i \cap V_j =$ $= \emptyset$ e $fV_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Suponhamos que $P_1 \in$ w-lim $\mathcal{O}(x)$ e que w-lim $\mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}(P_1)$, $P_1 \in Per(f)$.

Seja V_1 a vizinhança de $\mathcal{O}(P_1)$ e consideremos a órbita positiva de x, $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) | n \in Z^+\}$. Se $f^n(x) \notin V_1$ para uma infinidade de valores positivos de n, então existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \in M - \bigcup_i V_i$. Como $M - \bigcup_i V_i$ é compacto, existe uma subsequência de $\mathcal{O}^+(x)$ convergindo em $M - \bigcup_i V_i$ o que contraria o fato de que $w\text{-lim}\, \mathcal{O}(x) \subset Per(f)$.

Assim, para qualquer $x \in M$, $w\text{-lim}\, \mathcal{O}(x)$ consiste de uma única órbita periódica de f. Seja então $w - \lim \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(P)$, $x \in M$ e $P \in Per(f)$ com período k. Mostremos que $f^{nk}(x)$ converge a um dos pontos P, $f(P), \ldots, f^{k-1}(P)$ quando $n \to \infty$. De fato, sejam $U_1, \ldots, U_{k-1}$ vizinhanças abertas dêstes pontos tais que $U_i \cap U_j = \emptyset$ e $f^k(U_i) \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Então, para $n > 0$, $f^{nk}(x)$ deve pertencer a uma única destas vizinhanças, exceto para um número finito de valores de n. Pois, caso contrário, $w\text{-lim}\, \mathcal{O}(x)$ conteria algum ponto em $M - \bigcup_i U_i$, contrariando a hipótese. Daí segue-se de imediato que $x \in W^s(P)$.

Finalmente, como $M = \bigcup_i W^s(P_i)$, $P_i \in Per(f)$, $\dim W^s(P_i) = \dim M$ para algum índice i. Isto resulta do fato de que a união acima é finita e as variedades $W^s(P_i)$ estão imersas em M.

Os demais resultados da proposição são demonstrados de forma análoga.

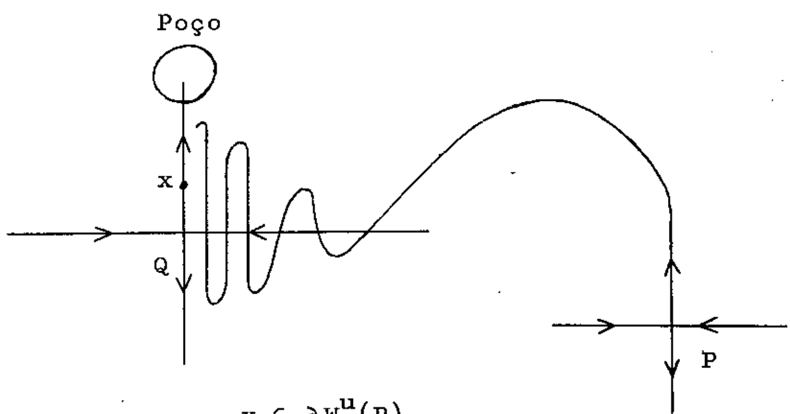
DEFINIÇÃO - Seja $f \in Dif(M)$ e $P \in Per(f)$ hiperbólico.

O bordo topológico de $W^u(P)$ é definido por

$$\partial W^u(P) = \{x \in M \mid x = \lim_{n_i \to \infty} f^{n_i}(y_i),\ y_i \in G^u(P) \text{ e } i, n_i \in Z^+\}.$$

O fêcho topológico de $W^u(P)$ é definido como $\bar{W}^u(P) = W^u(P) \cup \partial W^u(P)$.

É claro que $\partial W^u(P)$ é invariante por f. Observamos, também, que os conjuntos w-limite das órbitas dos pontos de $W^u(P)$ pertencem a $\partial W^u(P)$, mas a recíproca não é, em geral, válida como na situação da figura abaixo



$x \in \partial W^u(P)$

LEMA - Sejam $f \in R(M)$ e $P, Q \in Per(f)$ tais que $\partial W^u(Q) \cap W^u(P) \neq \phi$. Existe uma sequência $P_o, \ldots, P_n \in Per(f)$, $P_o = P$ e $P_n = Q$, tal que $W^s(P_i) \cap \cap W^u(P_{i+1}) \neq \phi$ para $0 \leq i \leq n-1$.

<u>Demonstração</u>: P não pode ser fonte. Se P fôr um poço, o par P,Q resolve. Suponhamos que P é uma sela. Neste caso, existe $x_1 \notin \mathcal{O}(P)$ e $x_1 \in \bar{W}^u(Q)$, onde $\bar{W}^u(Q) = W^u(Q) \cup \partial W^u(Q)$. De fato, se tal não ocorrer então para cada ponto x de um domínio fundamental $G^s(P)$ existe uma vizinhança $V(x)$ com $V(x) \cap W^u(Q) = \emptyset$. Logo existe uma vizinhança fundamental $N^s(P) \cap W^u(Q) = \emptyset$ e consequentemente $\bigcup_{n\in Z^+} f^n(N^s(P)) \cap W^u(Q) = \emptyset$. Como $\bigcup_{n\in Z^+} f^n(N^s(P)) \cup LU(P)$ contém uma vizinhança de P, esta vizinhança seria disjunta de $\partial W^u(Q)$, contrariando a hipó tese de que $\partial W^u(Q) \cap LU(P) \neq \emptyset$. Daí concluimos a existên cia de $x_1 \in W^s(P)$ satisfazendo as condições acima.

Como $M = \bigcup_i W^u(P_i)$, $P_i \in Per(f)$, $x_1 \in W^u(P_1)$ para algum $P_1 \in Per(f)$. Observamos que, por construção, $P_1 \in \bar{W}^u(Q)$ e $W^s(P) \cap W^u(P_1) \neq \emptyset$. Se $P_1 = Q$, então o par P,Q resolve a questão. Se $P_1 \neq Q$, então $x_1 \in \partial W^u(Q)$ e repetindo o argumento anterior obtemos $P_2 \in Per(f)$ com $W^s(P_1) \cap W^u(P_2) \neq \emptyset$ e $P_2 \in \bar{W}^u(Q)$. Se $P_2 = Q$, a seqüência $P_o = P$, P_1, $P_2 = Q$ resolve a questão. Se $P_2 \neq Q$, continuamos o processo. Obtemos assim uma seqüência de pontos periódicos $P_o,\ldots,P_n,\ldots$. Afirmamos que $P_i \neq P_j$ se $i \neq j$. Suponhamos, ao contrário, que $P_i = P_{i+k}$ para $k > 0$. Como $f \in R(M)$, $W^s(P_i)$ e $W^u(P_{i+1})$ têm um ponto de interseção transversal não periódico. O mesmo é válido para $W^s(P_{i+1})$ e $W^u(P_{i+2})$. Pelo Corolário 2, o mesmo também será válido para $W^s(P_i)$ e $W^u(P_{i+2})$. Assim, por indução, $W^s(P_i)$ e $W^u(P_{i+k} = P_i)$ têm um ponto de interseção não periódico. Pelo Corolário 3, Ω seria infinito o que é impossível pois $f \in R(M)$. Ainda, como $Per(f)$ é finito, forçosamente $P_n = Q$ para algum n. Isto é, a seqüência $P_o = P, P_2, \ldots, P_n = Q$ satisfaz às condições do lema.

TEOREMA [2] - Seja $f \in R(M)$. Então

i) para cada $P \in Per(f)$, $W^s(P)$ e $W^u(P)$ são subvariedades de M,

ii) as órbitas periódicas de f são parcialmente ordenadas pela relação

$$\Theta(P) \leq \Theta(Q) \Leftrightarrow \bar{W}^u(Q) \cap W^u(P) \neq \emptyset.$$

<u>Demonstração</u>: i) Suponhamos que $W^u(P)$ não seja subvariedade de M, isto é $\partial W^u(P) \cap W^u(P) \neq \emptyset$. Pelo lema anterior e o Corolário 2, existe $x \in W^s(P) \cap \cap W^u(P)$ com $x \notin Per(f)$. Pelo Corolário 3, $\Omega(f)$ não seria finito o que contraria $f \in R(M)$.

ii) É claro que a relação $\leq$ definida acima é reflexiva. Do lema anterior segue-se de imediato que $\leq$ é antisimétrica. Ainda do lema anterior temos que

$$\bar{W}^u(Q) \cap W^u(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow W^u(Q) \cap W^s(P) \neq \emptyset$$

o que implica na transitividade de $\leq$.

OBSERVAÇÃO: Para cada $P \in Per(f)$, existe uma vizinhança fundamental $N^s(P)$ de $W^s(P)$ tal que se $Q \in Per(f)$ com $W^s(P) \cap W^u(Q) = \emptyset$ então $N^s(P) \cap W^u(Q) = \emptyset$. É sempre conveniente considerar, no que se segue, vizinhanças fundamentais com esta propriedade.

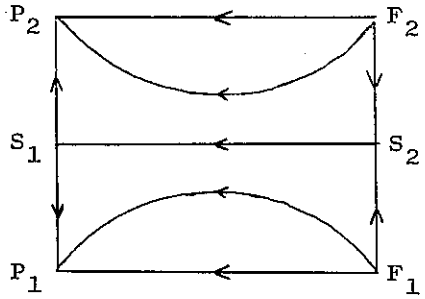
DEFINIÇÃO - Sejam $P, Q \in Per(f)$. Uma cadeia ligando P a Q é uma seqüência $P = P_o, P_1, \ldots, P_n = Q$, $P_i \in Per(f)$ e $P_i \not\leq \mathcal{O}(P_{i+1})$. O número n é chamado de comprimento da cadeia. Dizemos que P tem ordem k em relação a Q se o comprimento máximo das cadeias ligando P a Q é k é indicamos $Q/P = k$. Se $Q \in \mathcal{O}(P)$ colocamos $Q/P = 0$.

É claro que $\mathcal{O}(P) \leq \mathcal{O}(Q) \Rightarrow Q/P \geq 0$.

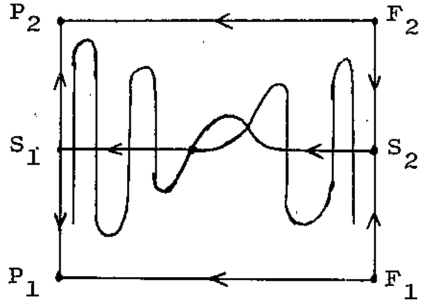
Observamos que se $Q/P = 1$ e $N^s(P)$ é uma vizinhança fundamental fechada de $W^s(P)$ então $\partial W^u(Q) \cap \cap N^s(P) = \emptyset$.

DEFINIÇÃO - Seja $f \in R(M)$. O diagrama de fase de f, $D(f)$, é o conjunto de órbitas de f com a estrutura de ordem parcial $\leq$ definida acima.

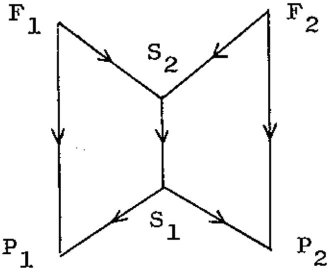
Como exemplo, consideremos o campo vetorial da figura abaixo que podemos extender a um campo na esfera S^2.



O conjunto não-errante dêste campo de vetores, restrito a êste disco, consiste das fontes F_1 e F_2, das selas S_1 e S_2 e dos poços S_1 e S_2, todos hiperbólicos. Tal será o caso também para o difeomorfismo f induzido pelo campo no tempo $t = 1$. Observe que f não é um difeomorfismo de Morse-Smale pois $W^s(S_1)$ e $W^u(S_2)$ não estão em posição geral. Podemos, no entanto, perturbar f de modo a obter um difeomorfismo g de Morse-Smale como na figura abaixo



O diagrama de fase de g é



REFERÊNCIAS

[1] - J. PALIS, "On Morse-Smale Dynamical Systems", Topology, 1969.

[2] - S. SMALE, "Morse Inequalities for Dynamical Systems", Bulletin A.M.S., 1960.

DIFEOMORFISMOS DE MORSE-SMALE II

Genésio Lima dos Reis

Nesta exposição, M é uma variedade compacta, C^∞, sem bordo. Indicamos com $\mathrm{Dif}(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de M, de classe C^r, $r \geq 1$, com a topologia C^r. Seja $f \in \mathrm{Dif}(M)$. Dizemos que um ponto $p \in M$ é um <u>ponto não errante</u> de f quando, para tôda vizinhança U de p em M, dado um inteiro n_o qualquer, existir um inteiro n, com $|n| > n_o$, tal que $f^n(U) \cap U = \Phi$. Representamos o conjunto de tais pontos por $\Omega(f)$. O conjunto dos <u>pontos periódicos</u> de f é denotado por $\mathrm{Per}(f)$. Dizemos que $p \in \mathrm{Per}(f)$ se existe um inteiro n tal que $f^n(p) = p$. Quando $n = 1$, o ponto p é <u>fixo</u>.

$S(M)$ é o conjunto dos difeomorfismos $f:M \to M$ tais que:

(i) $\Omega(f)$ é finito (donde $\Omega(f) = \mathrm{Per}(f)$);

(ii) todos os pontos de $\mathrm{Per}(f)$ são hiperbólicos;

(iii) para qualquer par de pontos $x,y \in \mathrm{Per}(f)$, $W^s(x)$ (variedade estável) e $W^u(y)$ (variedade instável) têm interseção transversal.

Se $f \in S(M)$ dizemos que f é um <u>difeomorfismo de Morse-Smale</u>.

Dizemos que um difeomorfismo $f \in \mathrm{Dif}(M)$ é <u>Ω-estável</u> se existe uma vizinhança $N(f)$ em $\mathrm{Dif}(M)$ tal que, para cada $g \in N(f)$, existe homeomorfismo $h: \Omega(f) \to \Omega(g)$ tal que $hf = gh$.

O nosso objetivo é demonstrar que os difeomorfismos de Morse-Smale são Ω-estáveis e que constituem um conjunto aberto em $\mathrm{Dif}(M)$. [1].

Designamos por $R(M)$ o conjunto dos difeomorfismos f que satisfazem as condições (i), (ii) e a seguinte

(iii)' Para $x,y \in \mathrm{Per}(f)$, se $W^s(x) \cap W^u(y) \neq \Phi$ então $W^s(x)$ e $W^u(y)$ têm pelo menos um ponto de interseção transversal.

Observemos que $S(M) \subset R(M)$.

Para $f \in R(M)$, as suas órbitas periódicas são parcialmente ordenadas pela relação

$$\Theta(x) \leq \Theta(y) \Leftrightarrow W^s(\Theta(x)) \cap W^u(\Theta(y)) \neq \Phi.$$

O conjunto das órbitas periódicas de f munido desta estrutura de ordem parcial é denominado <u>diagrama de fase</u>, $D(f)$.

Inicialmente mostraremos que para $f \in R(M)$, se g está suficientemente próximo de f, então $g \in R(M)$, isto é, $R(M)$ é aberto em $\mathrm{Dif}(M)$ e seu diagrama é <u>isomorfo</u> ao diagrama de f, no seguinte sentido:

Existe uma aplicação bijetiva

$$\rho(g): D(f) \to D(g),$$

entre os diagramas de f e de g, que preserva ordem e índice. Em outras palavras, se $P, Q \in \mathrm{Per}(f)$ são tais que $\Theta(P) \leq \Theta(Q)$ então $P^* = \rho(g)(P)$ e $Q^* = \rho(g)(Q)$ são tais que $\Theta(P^*) \leq \Theta(Q^*)$, e

$$\dim W^s(P) = \dim W^s(P^*).$$

$W^s(P)$ é a variedade estável de f em P e $W^s(P^*)$ é a variedade estável de g em P^*.

LEMA 1 - <u>Seja</u> $f \in R(M)$ <u>e seja</u> P <u>um ponto fixo hiperbólico de</u> f. <u>Existem vizinhança</u> U <u>de</u> P <u>em</u> M <u>e vizinhança</u> $N(f)$ <u>de</u> f <u>em</u> $\mathrm{Dif}(M)$ <u>tais que todo</u> $g \in N(f)$ <u>admite em</u> U <u>um e sòmente um ponto fixo</u> P^*, P^* <u>é hiperbólico e tem o mesmo índice de</u> P. <u>Além disso a correspondência</u>

$$\begin{aligned} \varphi: N(f) &\longrightarrow U \\ g &\longmapsto P^* \end{aligned}$$

<u>é contínua</u>.

A existência e unicidade de P^* decorre do Lema 3 [2]. Que P^* é hiperbólico e de mesmo índice de P resulta do teorema da variedade estável de elemento crítico [3]. Êste teorema implica também que em suas partes limitadas as variedades estáveis e instáveis variam continuamente na topologia C^r. O lema é ainda verdadeiro se $P \in \mathrm{Per}(f)$ é um ponto de período n. Neste caso tomamos U de modo que f não admita outro ponto periódico de período $\leq n$ em U. Resultará que P^* é um ponto hiperbólico de g, de período n e de mesmo índice de P, e é o único ponto periódico de g em U de período $\leq n$. Quando nos referirmos ao Lema 1 entenderemos esta formulação mais geral.

Para cada $g \in N(f)$ obtemos, pelo lema acima, uma aplicação bem definida

$$\begin{aligned} \rho(g): \mathrm{Per}(f) &\longrightarrow \mathrm{Per}(g) \subset \Omega(g) \\ P &\longmapsto P^* \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\rho(g)$ é sôbre $\Omega(g)$ (logo $\mathrm{Per}(g) = \Omega(g)$) e que $\rho(g)$ é na verdade um isomorfismo de diagramas. Primeiramente vamos construir uma vizinhança $N_1(f) \subset N(f)$ e uma vizinhança V dos poços, fontes e das variedades estáveis e instáveis das selas de f de tal modo que

$$\Omega(g) \cap V = \rho(g)(\mathrm{Per}(f) \cap V), \quad g \in N_1(f) ,$$

isto é, os pontos periódicos de f em V estão em correspondência biunívoca com os pontos não errantes de g em V.

A vizinhança V será da forma $V = V^s \cup V^u$, onde V^u é uma vizinhança dos poços, das variedades instáveis das selas e das fontes de f, e V^s uma vizinhança das variedades estáveis correspondentes. Percorreremos o diagrama de fase de f, dos poços para as fontes.

Construção de V^u:

Para cada poço P_i de f, escolhamos uma vizinhança $V_o(P_i) \subset W^s(P_i)$ e um número $\epsilon_o(P_i) > 0$ tais que, para g na vizinhança $|g-f|_{C^r} < \epsilon_o(P_i)$, P_i^* é um poço para g e $V_o(P_i) \subset W^s(P_i^*)$. Como sempre, $P_i^* = \rho(g)(P_i)$. Escrevemos

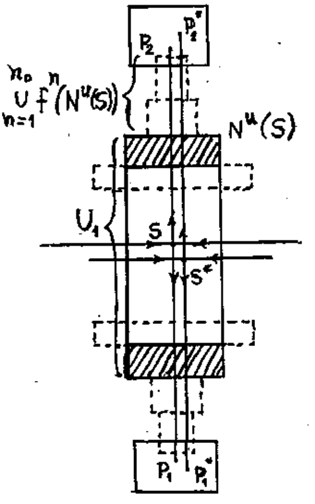
$$V_o = \bigcup_i V_o(P_i) \quad \text{e} \quad \epsilon_o = \min_i \{\epsilon_o(P_i)\}.$$

Temos imediatamente

$$\Omega(g) \cap V_o = \rho(g)(\mathrm{Per}(f) \cap V_o) .$$

Seja agora S uma sela que, no diagrama de fase de f, está logo após os poços (P_1, P_2 na figura). Seja $N^u(S)$

uma vizinhança fundamental fechada de S (bem próxima de S). Como as variedades instáveis variam continuamente em suas partes limitadas, podemos tomar $N^u(s)$ como sendo também uma vizinhança fundamental de $S^* = \rho(g)(S)$. Pela compacidade de $N^u(S)$, existe $n_o \in \mathbb{Z}_+$ tal que para cada



$x \in N^u(S)$, $f^n(x) \in V_o$ para algum n, $1 \le n \le n_o$. O mesmo acontece com g, se g está suficientemente próximo de f. Como sabemos, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} f^{-n}(N^u(S)) \cup LS(S)$ contém uma vizinhança U_1 de S em M. Então todos os pontos de U_1, exceto os que estão na variedade estável de f em S, são mandados em $N^u(S)$ por iterações positivas de f, isto é,

$$x \in U_1 - LS(S) \Rightarrow f^n(x) \in N^u(S) ,$$

para algum $n \ge 0$. Se tomamos $\epsilon_1(S) > 0$ $(\epsilon_1 < \epsilon_o)$, suficientemente pequeno então o mesmo acontece com g, $|g-f|_{C^r} < \epsilon_1(S)$, para cada $x \in U_1 - LS(S^*)$. Uma vez em $N^u(S)$, êsses pontos são levados a V_o por iterações finitas de g, onde são atraídos por um poço em V_o. Tomamos

$$V_1(S) = V_o \cup \bigcup_{n=1}^{n_o} f^n(N^u(S)) \cup U_1 \ .$$

Dêste modo construimos $V_1(S_i)$ e $e_1(S_i)$ para cada sela S_i próxima de poços no diagrama fase e tomamos

$$V_1 = \bigcup_i V_1(S_i) \ , \quad e_1 = \min_i \{e_1(S_i)\} \ .$$

Em V_1 está satisfeita a condição

$$\Omega(g) \cap V_1 = \rho(g)(\mathrm{Per}(f) \cap V_1)$$

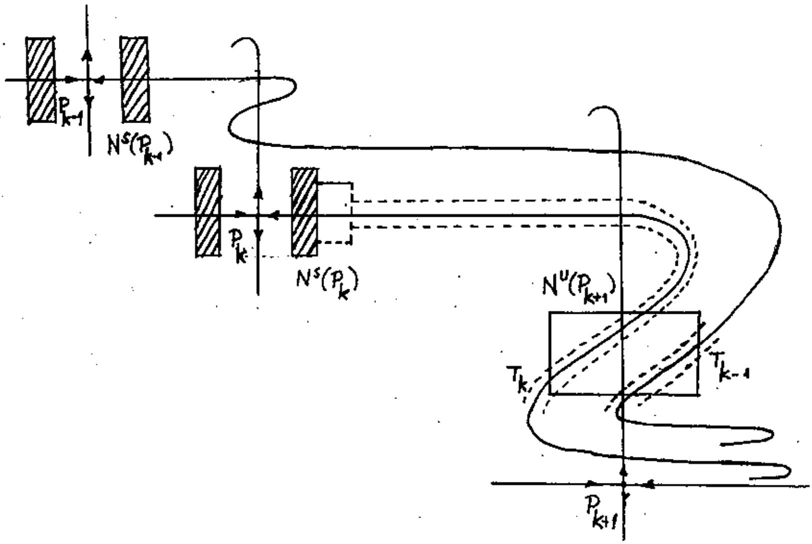
para $|g-f|_{C^r} < e_1$.

Procedendo por indução, suponhamos já construidos V_k, e_k correspondentes aos pontos de $\mathrm{Per}(f)$ cujas ordens com relação aos poços de f sejam $\leq k$, de modo que

$$\Omega(g) \cap V_k = \rho(g)(\mathrm{Per}(f) \cap V_k), \text{ para } |g-f|_{C^r} < e_k \ .$$

Seja P_{k+1} um ponto próximo a êsses no diagrama de fase de f e seja $N^u(P_{k+1})$ uma vizinhança fundamental fechada. Afirmamos que existe $n_o \in \mathbb{Z}_+$ tal que para cada $x \in N^u(P_{k+1})$, $f^n(x) \in V_k$ para algum n, $1 \leq n \leq n_o$. De fato, seja P_k tal que $\Theta(P_{k+1}|P_k) = 1$ e seja $N^s(P_k) \subset \subset V_k$ uma vizinhança fundamental aberta. Como $W^s(P_k)$ é fechada em $N^u(P_{k+1})$ (por não se acumular em $N^u(P_{k+1})$), existe $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n_1} f^{-i}(N^s(P_k))$ contém uma vizinhança T_k de $W^s(P_k) \cap N^u(P_{k+1})$.

Construimos vizinhanças análogas para as variedades estáveis de todos os pontos de comportamento 1 com relação a P_{k+1}, e designamos a união dessas vizinhanças por T_k mesmo.



Consideremos agora um ponto P_{k-1} tal que $\Theta(P_{k+1}|P_{k-1}) = 2$. Isto implica que, em $N^u(P_{k+1})$, $W^s(P_{k-1})$ só se acumula em $W^s(P_k)$. Portanto, dada uma vizinhança fundamental aberta $N^s(P_{k-1}) \subset V_k$ existe $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\bigcup_{n>n_2} f^{-n}(N^s(P_{k-1})) \subset T_k \cup V_k \ .$$

Segue que $W^s(P_{k-1})$ é fechada em $N^u(P_{k+1}) - T_k$ e $\bigcup_{n=1}^{n_2} f^{-n}(N^s(P_{k-1}))$ contém uma vizinhança T_{k-1} de $W^s(P_{k-1}) \cap N^u(P_{k+1})$. Como cada ponto de $N^u(P_{k+1})$ pertence a algum $W^u(P_{k-i})$ encontraremos $n_o > 0$ (o maior dos n_i acima) que queríamos.

Seja U_{k+1} uma vizinhança de P_{k+1}, $U_{k+1} \supset N^u(P_{k+1})$, como na figura abaixo. Para cada $x \in U_{k+1} - LS(P_{k+1})$, $f^n(x) \in N^u(P_{k+1})$ para algum $n \geq 0$. Se $e_{k+1} > 0$ é suficientemente pequeno o mesmo acontece para cada g, $|g-f|_{C^r} < e_{k+1}$ e cada $x \in U_{k+1} - LS(P^*_{k+1})$. Também para cada $x \in N^u(P_{k+1})$, $g^n(x) \in V_k$ para algum n, $1 \leq n \leq n_o$ (supondo-se que $N^u(P_{k+1})$ é também vizinhança fundamental de P^*_{k+1}). A indução fica completa pondo-se

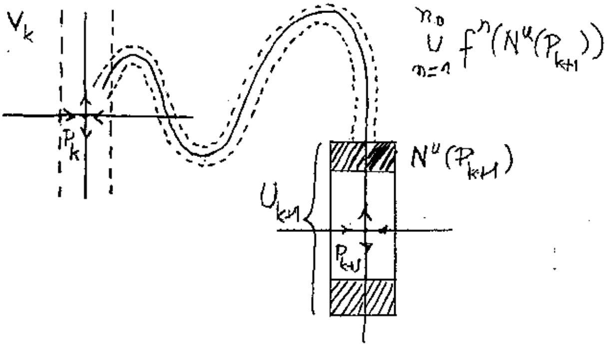
$$V_{k+1} = V_k \cup \bigcup_{n=1}^{n_o} f^n(N^u(P_{k+1})) \cup U_{k+1} \quad \text{e} \quad e_{k+1} < e_k \,.$$

Deve ter ficado claro que em V_{k+1} não existem outros pontos não errantes além dos já considerados P_i de f e os seus correspondentes P^*_i de g.

Finalmente sejam $V^u = \bigcup_k V_k$, $e^u = \min(e_k)$.

Construimos V^s e e^s dualmente e pomos

$V = V^s \cup V^u$, $e = \min(e^s, e^u)$.



Para concluir que a aplicação $\rho(g)$ é bijetiva resta mostrar que não há pontos não errantes de g em M-V. De fato M - Int V é compacto e está contido nas variedades estáveis dos poços de f.

A construção feita acima mostra que se $W^s(P_i) \cap \cap W^u(P_j) = \Phi$ então $W^s(P_i^*) \cap W^u(P_j^*) = \Phi$. Por fim, sendo claro que se $W^s(P_i)$ e $W^u(P_j)$ têm <u>um</u> ponto de interseção transversal então $W^s(P_i^*)$ e $W^u(P_j^*)$ também têm <u>um</u> ponto de interseção transversal, para g suficientemente próximo de f, concluimos que $\rho(g)$ é um isomorfismo de diagramas, e podemos enunciar o teorema.

TEOREMA 1 - <u>Se</u> $f \in R(M)$ <u>então existe uma vizinhança</u> $N(f)$ <u>tal que para cada</u> g <u>de</u> $N(f)$, $g \in R(M)$ <u>e a aplicação</u> $\rho(g): Per(f) \to Per(g)$ <u>definida acima é um isomorfismo de diagramas. Em particular</u>, $R(M)$ <u>é aberto</u>

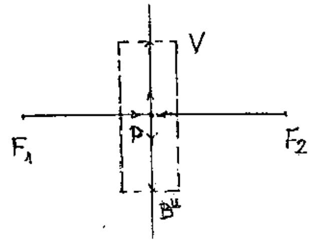
_em_ Dif(M) _e_ f _é Ω-estável_.

O nosso objetivo agora é mostrar que S(M) é aberto em Dif(M). Isto só não é imediato a partir do teorema acima porque não podemos garantir a priori que a propriedade "as variedades $W^s(P)$ e $W^u(Q)$ de f têm _todos_ os seus pontos de interseção transversais" seja preservada por perturbações de f. Para superar esta dificuldade construiremos uma espécie de fibração nas variedades instáveis de f, formalizada no lema:

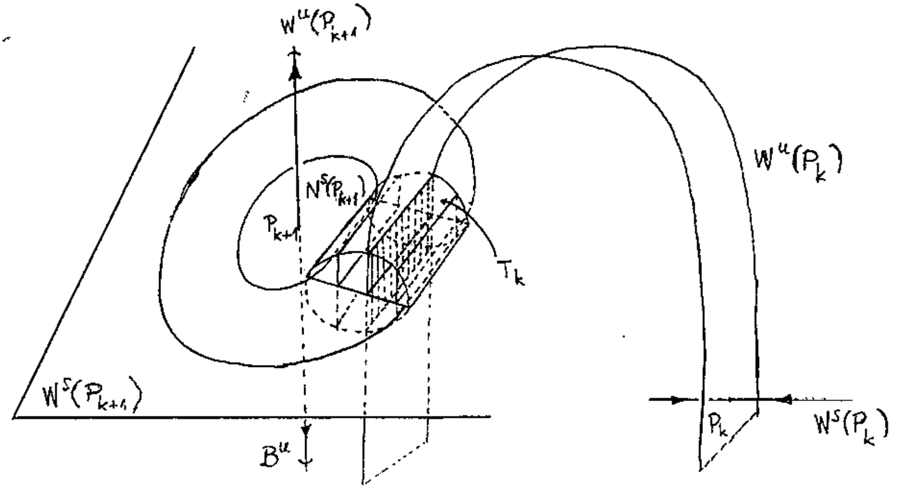
LEMA 2 - _Seja_ f _um difeomorfismo de Morse-Smale de_ M _e seja_ $P \in Per(f)$ _de índice instável_ u. _Fixemos um disco_ $B^u(P)$ _em_ LU(P). _Existem vizinhança_ V _de_ P, $V = \delta I^{m-u} \times B^u$, _e vizinhança_ N(f) _em_ Dif(M) _tal que para qualquer_ $g \in N(f)$, $W(P_i^*) \cap V$ _não sendo vazio fica decomposto em discos_ C^1_-próximos de_ B^u. _Como sempre_, $P_i^* = \rho(g)(P_i)$.

Demonstração: Para simplificar os argumentos esqueceremos g por um instante e trabalharemos apenas com f, isto é, vamos "fibrar" $W(P_i) \cap V$ para os pontos $P_i \in Per(f)$. A demonstração é feita por indução no diagrama de fase de f, das fontes para os poços. Se P é uma fonte não há nada a demonstrar. Seja P um ponto próximo de fontes no diagrama de f. Neste caso a fibração é trivial.

Suponhamos que a construção foi feita para os pontos P_k cuja ordem em relação às fontes é $\leq k$, e seja $P_{k+1} \in$ $\in \mathrm{Per}(f)$ tal que $\circledS(P_{k+1}|P_k) = 1$.



Seja $N^s(P_{k+1})$ uma vizinhança fundamental fechada. Então $L_1 = W^u(P_k) \cap N^s(P_{k+1}) \cap W^s(P_{k+1})$ é compacto.



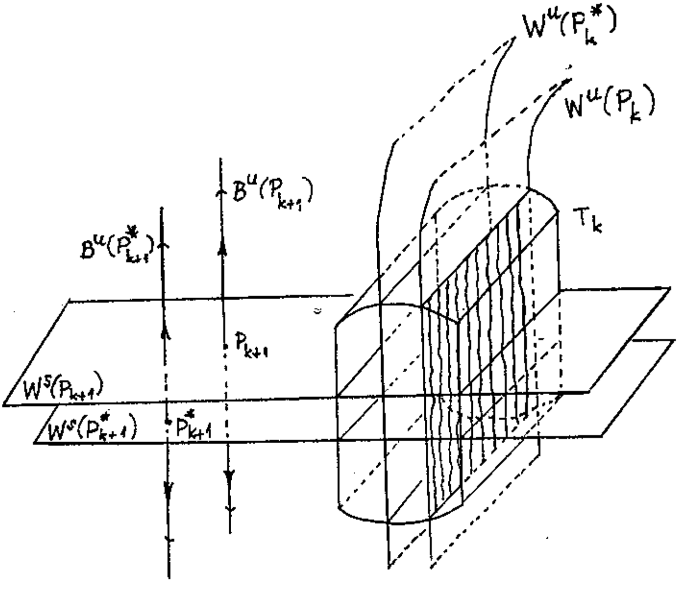
Da hipótese de transversalidade, o fibrado normal de L_1 restrito a uma pequena vizinhança V_1 de L_1 em $W^u(P_k)$, produz uma fibração com fibras F de $\dim F = \dim W^u(P_{k+1})$ Realmente,

$$\dim F = \dim W^u(P_k) - \dim L_1 = \dim M - \dim W^s(P_{k+1})$$
$$= \dim W^u(P_{k+1}).$$

Além disso os discos F têm inclinação máxima $<\lambda_1$, digamos. Os outros pontos periódicos de f que têm ordem 1 com relação a P_{k+1} são tratados de modo análogo. Seja agora $P_{k-1} \in \mathrm{Per}(f)$ tal que $\Theta(P_{k+1}|P_{k-1}) = 2$. Pela hipótese de indução, em vizinhança de uma parte limitada de $W^u(P_k)$ a variedade instável $W^u(P_{k-1})$ está fibrada, ou melhor, decomposta em discos C^1-próximos de $B^u(P_k)$. Então numa pequena vizinhança T_k de $W^u(P_k)$ em $N^s(P_{k+1})$, $W^u(P_{k-1}) \cap T_k$ também fibra sôbre sua interseção com $W^s(P_{k+1})$, com as fibras tendo inclinação máxima $<\lambda_2$ (esta fibração é induzida pelo difeomorfismo
$\gamma: W^u(P_k) \to \gamma(W^u(P_k)) \subset W^u(P_{k-1})$).
Em $N^s(P_{k+1}) - \mathrm{Int}\, T_k$, $W^u(P_{k-1})$ é compacto. Então podemos repetir o argumento para um ponto P_{k-2},
$\Theta(P_{k+1}|P_{k-2}) = 3$, cuja fibração é induzida pela de $W^u(P_{k-1})$ numa vizinhança T_{k-1} de $W^u(P_{k-1})$ e tem fibras com inclinação máxima $<\lambda_3$, e assim por diante.
Por iterações de f, o λ-lema (com as suas estimativas uniformes) encarrega-se de obter as fibrações desejadas em uma vizinhança V_{k+1} de $B^u(P_{k+1})$. Isto completa a indução.

Passemos agora para as perturbações de f. Primeiramente escolhemos uma vizinhança $N(f)$ de modo que o Teorema 1 seja satisfeito. Procedemos por indução no diagrama de fase de $g \in N(f)$, paralelamente à construção para f. O primeiro passo é trivial. Suponhamos a construção realizada até um ponto P_k^*, válida para g numa vizinhança $N_k(f)$.

Seja P_{k+1}^* um ponto seguinte no diagrama de fase de g. A vizinhança $N^s(P_{k+1})$ que tomamos para f pode ser escolhida de mdo a ser uma vizinhança fundamental para $W^s(P_{k+1}^*)$, se g está numa vizinhança suficientemente pequena $N_{k+1}(f)$.



O difeomorfismo que há entre $W^u(P_k)$ e $W^u(P_k^*)$ induz uma fibração em $W^u(P_k^*)$ e esta por sua vez induz em $W^u(P_{k-1}^*)$, etc... O λ-lema aplicado a g, restrito a V_{k+1}, produz a fibração desejada, com fibras C^1-próximas de $B^u(P_{k+1}^*)$ que por sua vez é C^1-próxima de $B^u(P_{k+1})$, concluindo a demonstração.

Os resultados obtidos permitem-nos enunciar o teorema:

TEOREMA 2 - $S(M)$ é aberto em $Dif(M)$. Além disso, se $f \in S(M)$, então o seu diagrama de fase é estável (a menos de um isomorfismo de diagramas) sob pequenas perturbações C^r.

REFERÊNCIAS

[1] J. PALIS - On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology, Vol. 8, 1969.

[2] J. PALIS - On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces. A. Acad. Bras. Ciências, Vol. 40, 1968.

[3] HIRSCH and PUGH - Stable manifolds and hyperbolic sets (ainda não publicado).

ESTABILIDADE LOCAL

Welington Celso de Melo

§1. Difeomorfismos

Sejam M uma variedade compacta C^∞ e $\text{Dif}(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de M com a topologia C^r, $r \geq 1$. Foi demonstrado por Hartmann e Grobman que, na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico, um difeomorfismo f é estruturalmente estável. Mais precisamente,

TEOREMA 1 - Se $p \in M$ é um ponto fixo hiperbólico de $f \in \text{Dif}(M)$, existem uma vizinhança V de p em M e uma vizinhança $N(f)$ de f em $\text{Dif}(M)$ tais que para cada $g \in N(f)$ existe um homeomorfismo local $h: V \to M$ satisfazendo $hf = gh$ em V.

Em [3] êste resultado foi generalizado para difeomorfismos em espaços de Banach e no §4 de [2] foi demonstrado que o Teorema 1 decorre do seguinte: numa vizinhança de um ponto fixo hiperbólico, um difeomorfismo f é conjugado à sua parte linear. Daremos abaixo uma demonstração geométrica dêste fato, devida a J. Palis [1]. Como se trata de um problema local podemos enunciar:

TEOREMA 2- Se $U(0)$ é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^m$, $f:U(0) \to \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo C^r $(r \geq 1)$, 0 ponto fixo hiperbólico de f e $L = (Df)_0$ então existem uma vizinhança V da origem e um homeomorfismo $h:V \to \mathbb{R}^m$ tal que $hL(x) = fh(x)$ $\forall x \in V$.

Na demonstração do Teorema 2 utilizaremos o seguinte

LEMA - Dado $e > 0$ existem uma vizinhança $B^s \times B^u$ de 0, $B^s \subset LS(0)$, $B^u \subset LU(0)$ e um difeomorfismo C^r $h_s:V \to LS(0) \times LU(0)$ onde $V \supset B^s \times B^u$ tal que:

i) $|h_s - Id|_{C^1} < e$

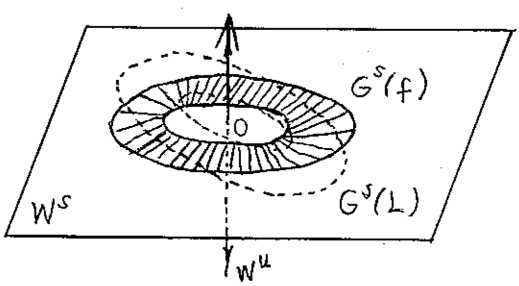
ii) $h_s = Id$ e $h_s \circ f = L$ em $\partial B^s \times B^u$

iii) B^s é invariante por h_s.

<u>Demonstração</u>: Sejam $B_1(0)$ uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^m$ (uma bola fechada), $U_1 = B_1 \cap L(B_1)$ e U_2 o complementar de uma vizinhança de U_1 tal que podemos escolher $B_1^s \times B_1^u \subset B_1 \cap L^{-1}(B_1)$ com $\partial B_1^s \times B_1^u \subset U_2$. Seja $\alpha:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função C^∞, cuja derivada é uniformemente limitada, tal que $\alpha(x) = 0$ se $x \in U_2$ e $\alpha(x) = 1$

se $x \in U_1$. Definimos as seguintes funções: $\gamma_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_n(z) = \frac{1}{n} z$ com $n \in \mathbb{N}$, $K_n : B_1 \to \mathbb{R}^m$ $K_n = Id + \Phi \circ L^{-1} \circ \circ \gamma_n | B_1$ onde $f = L + \Phi$ e $h_n : B_1 \to \mathbb{R}^m$ $h_n = \alpha K_n + (1-\alpha) + (1-\alpha) Id$. É fácil ver que para n suficientemente grande h_n está próximo de Id em $C^1(B_1, \mathbb{R}^m)$. Isto implica que h_n é um difeomorfismo de B_1 sôbre um aberto de $\mathbb{R}^m$. Definimos então $h^* : B \to \mathbb{R}^m$ por $h^*(z) = \gamma_n h_n(nz)$ onde $B = \gamma_n(B_1)$. É claro que h^* e h^{*-1} estão C^1 próximos da identidade, isto é, para n suficientemente grande $|h^* - Id|_{C^1} < e$ e $|(h^*)^{-1} - Id|_{C^1} < e$. Tomando $h_s = (h^*)^{-1}$ verificamos imediatamente que h_s é C^r e que B^s é invariante por h_s.

<u>Demonstração do teorema</u>: Sejam $V = B^s \times B^u$, $U \supset V$, $h_s : U \to LS(0) \times LU(0)$ um difeomorfismo como no lema acima. Tomemos $f_s = f/B_s$, $L_s = L/B^s$, $G^s(f)$ e $G^s(L)$ domínios fundamentais de fronteira ∂B^s, $f(\partial B^s)$ e ∂B^s, $L(\partial B^s)$ respectivamente (estamos tomando os domínios fundamentais fechados).



Consideremos a restrição de h_s a $G^s(f)$, $h_s:G_s(f) \to G^s(L)$ e observemos que $h_s f_s(z) = L_s h_s(z)$ para $z \in \partial B^s$. Podemos então redefinir h_s em todo B^s do seguinte modo: se $z \in B^s - \{0\}$, existe um n tal que $f_s^{-n}(z) \in G^s(f)$ e neste caso tomamos $h_s(z) = L_s^n\, h_s\, f_s^{-n}(z)$; para $z = 0$ definimos $h_s(0) = 0$. Devemos mostrar que h_s está bem definida e é contínua.

i) h_s está bem definida. Com efeito, se $z \notin f^n(\partial B^s)$ então existe um único n tal que $f_s^{-n}(z) \in G^s(f)$ e portanto neste caso $h_s(z)$ está bem definida. Se $z = f_s^n(z')$ com $z' \in \partial B^s$ temos $f_s^{-n}(z) \in G^s(f)$ e $f_s^{-n+1}(z) \in G^s(f)$. Devemos mostrar que $L_s^n\, h_s\, f_s^{-n}(z) = L_s^{n-1}\, h_s\, f_s^{-n+1}(z)$. Com efeito, $L_s^{n-1}\, h_s\, f_s^{-n+1}(z) = L_s^{n-1}\, h_s\, f_s(f_s^{-n}(z)) = L_s^{n-1}\, h_s\, f_s(z')$. Como $z' \in \partial B^s$, $h_s\, f_s(z') = L_s\, h_s(z') = L_s\, h_s\, f^{-n}(z)$. Logo $L_s^{n-1}\, h_s\, f_s^{-n+1}(z) = L_s^n\, h_s\, f_s^{-n}(z)$ como queríamos mostrar. Portanto h_s é bem definida.

ii) h_s é contínua. Por definição h_s é contínua em todos os pontos $z \neq 0$ em B^s. A continuidade na origem é consequência do fato que L_s e f_s são contrações.

Da continuidade de h_s concluimos que $h_s:B^s \to B^s$ é um homeomorfismo uma vez que é evidentemente bijetiva e B^s compacto. Além disto, pela construção do homeomorfismo h_s temos $h_s f_s(z) = L_s h_s(z)$ $\forall z \in B^s$.

Anàlogamente definimos um homeomorfismo h_u em B^u tal que $h_u f_u = L_u h_u$.

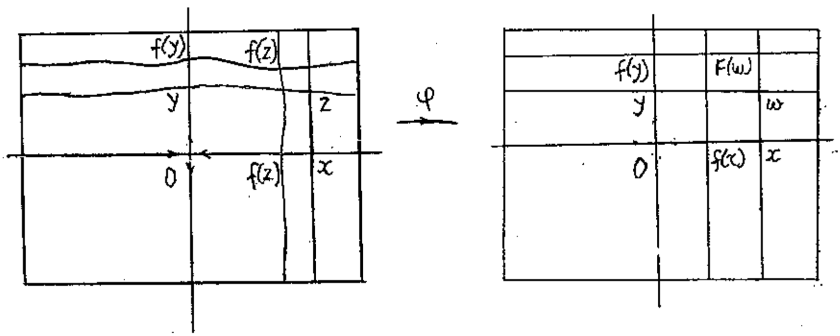
Se $f = f_s \times f_u$, isto é, $f(x,y) = (f_s(x), f_u(y))$, o problema estaria resolvido, pois, como $L = L_s \times L_u$ bastaria tomar $h = h_s \times h_u$ e teríamos: $hf(z) = h(f_s(x), f_u(y)) = (h_s f_s x, h_u f_u y) = (L_s h_s x, L_u h_u y) = Lh(z)$.

Em geral f não se decompõe em um produto como acima. A idéia é encontrar um sistema de coordenadas, isto é, um homeomorfismo $\varphi: B^s \times B^u \to B^s \times B^u$ tal que a expressão de f em relação a êste sistema de coordenadas, $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, se decomponha em um produto $F = F_s \times F_u$ onde $F_s = f_s$ e $F_u = f_u$. Para isto vamos construir duas fibrações em $B^s \times B^u$ com as propriedades abaixo.

<u>1ª fibração</u> - A fibra típica é B^u e $\varphi_s: B^s \times B^u \to B^s$ a projeção ao longo das fibras; a fibração é f-invariante, isto é, $f(\varphi_s^{-1}(x)) \cap B^s \times B^u = \varphi_s^{-1}(f(x))$ para $x \in B^s$; φ_s é contínua em $B^s \times B^u$ e C^r fora de B^u; as fibras $\varphi_s^{-1}(x)$ estão e C^1-próximas de B^u uniformemente.

<u>2ª fibração</u> - A fibra típica é B^s, $\varphi_u: B^s \times B^u \to B^u$ a projeção ao longo das fibras e as propriedades são análogas.

Construidas as duas fibrações definimos $\varphi: B^s \times B^u \to B^s \times B^u$ por $\varphi(z) = (\varphi_s(z), \varphi_u(z))$ (ver figura abaixo). Evidentemente φ é contínua (a continuidade em $B^s \times \{0\}$ e $\{0\} \times B^u$ decorre do λ-lema e nos outros pontos das propriedades de φ_s e φ^u). Como $\varphi_s^{-1}(x)$ e $\varphi_u^{-1}(y)$ estão ε-C^1 próximas de B^u e B^s respectivamente e B^s intercepta transversalmente B^u em um único ponto segue-se que $\varphi_s^{-1}(x)$ intercepta transversalmente $\varphi_u^{-1}(y)$ em um único ponto. Portanto φ é 1-1 e sôbre $B^s \times B^u$ e consequentemente um homeomorfismo pois $B^s \times B^u$ é compacto.



$w = \varphi(z)$

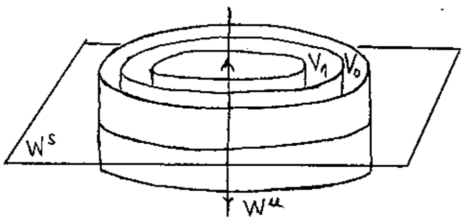
$F(w) = \varphi(f(z))$

Como $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_s \times f_u$ (veja figura) temos $hF = Lh$ e portanto $(h\varphi)f\varphi^{-1} = Lh \Rightarrow (h\varphi) \circ f = L \circ (h\varphi)$.

Logo $h\varphi$ é o homeomorfismo procurado.

Resta apenas mostrar a existência das fibrações acima.

<u>Construção da 1ª fibração</u> - Seja $D^s = \partial B^s \times B^u$. Afirmo que $f(D^s) \cap D^s = \emptyset$. Com efeito, se $z = (x,y) \in f(D^s) \cap D^s$ temos $z = h(z)$ porque $z \in D^s$ e $z = f(z')$ com $z' = (x',y') \in D^s$. Logo $h(z) = hf(z') = L(z') = L_s x' + L_u y'$, e portanto, $x' = x = L_s x'$ o que é absurdo pois L_s é uma contração. Seja V_n a região de $B^s \times B^u$ limitada por $f^n(D^s)$ e $f^{n+1}(D^s)$ como $n = 0,1,\ldots$. É claro que $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n = B^s \times B^u - \{0\} \times B^u$.



Definimos $\varphi_s : B^s \times B^u \to B^s$ por: $\varphi_s | V_0 = h_s \circ \pi_s \circ h_s$, $\varphi_s | V_n = f^n \circ \varphi_s \circ f^{-n}$, $\varphi_s | \{0\} \times B^u = 0$ onde $\pi_s : (x,y) \mapsto x$ é a projeção natural.

Observemos inicialmente que φ_s <u>está bem definida</u>. Com efeito se $z \notin f^n(D^s) \forall n \in \mathbb{N}$ existe um único n tal que $f^{-n}(z) \in D^s$ e neste caso $\varphi_s(z)$ está bem definido; se $z \in f^n(D^s)$ temos $z \in V_n \cap V_{n-1}$ e devemos mostrar que $f^n \circ \varphi_s \circ f^{-n}(z) = f^{n-1} \circ \varphi_s \circ f^{-n+1}(z)$. Como $f^{-n}(z) = z' \in D^s$ temos $h_s f(z') = L(z')$ e portanto $f^{n-1} \circ \varphi_s \circ f^{-n+1}(z) = f^{n-1} \circ \varphi_s \circ f(z') = f^{n-1} \circ h_s^{-1} \circ \pi_s \circ h_s f(z') =$

$= f^{n-1} \ h_s^{-1} \ \pi_s \ \ L(z') = f^{n-1}(h_s^{-1} \ L_s(z')) = f^{n-1}h_s^{-1}L(x') =$
$= f^n(x') = f^n \ h_s^{-1}(x') = f^n \ h_s^{-1} \ \pi_s(z') = f^n \ h_s^{-1} \ \pi_s \ h_s(z') =$
$= f^n \ \varphi_s \ f^{-n}(z)$ como queríamos demonstrar.

Devemos agora verificar se as propriedades desejadas são satisfeitas por φ_s. <u>$B^s \times B^u$ é f-invariante</u>. É claro que $f(\varphi_s^{-1}(x)) \cap B^s \times B^u = \varphi_s^{-1}(f(x)) \forall \ x \in B^s$.
<u>C^1-proximidade de B^u</u>. Como h_s está próximo de Id na topologia C^1 concluimos que φ_s está C^1 próximo de π_s em V_o. Portanto se $x \in V_o \cap B^s$ a fibra $\varphi_s^{-1}(x)$ está C^1-próxima das fibras $\pi_s^{-1}(x')$, $x' \in B^s$. Logo, tomando h_s suficientemente próximo da identidade podemos garantir que tôdas as fibras $\varphi_s^{-1}(x)$ com $x \in V_o \cap B^s$ estão C^1 próximas de B^u. As outras fibras são iteradas destas e, pelo λ-lema, estão C^1-próximas de B^u. Observemos que no argumento acima não utilizamos tôda a fôrça do λ-lema. Partimos de uma fibração em V_o que já era "bem comportada" devido às propriedades do difeomorfismo h_s. Poderíamos ter começado com uma fibração em V_o que não estivesse C^1-próxima de B^u mas que fôsse contínua e que o espaço tangente às fibras variasse continuamente. Pela continuidade dos espaços tangentes e pela compacidade de V_o haveria um mínimo $\lambda_o > 0$ na inclinação dos vetores tangentes e o λ-lema garante que após um número suficiente de iterações as fibras estarão C^1-próximas de B^u (uni

formemente). Restringindo a uma vizinhança menor teríamos a situação acima.

Continuidade. Pela construção φ_s é até C^1 fora de B^u.

Mostremos que φ_s é contínua em B^u. Seja $z \in B^u$ e $z_n \to z$. Como $\varphi_s(z) = 0$ devemos mostrar que $|\varphi_s(z_n)| \to 0$. Podemos supor que $z_n \notin B^u$. Logo, para cada n existem $n_i \in \mathbb{N}$ e $\gamma_{n_i} \in V_o$ tal que $z_n = f^{n_i}(\gamma_{n_i})$ e portanto $\varphi_s(z_n) = f^{n_i}(\varphi_s(\gamma_{n_i}))$. Como $\gamma_{n_i} \in V_o \ \forall\, n_i$ concluimos que $\varphi_s(\gamma_{n_i}) \in B^s \cap V_o$ e como $f|B^s$ é uma contração, temos que $|f^{n_i}\,\varphi_s(\gamma_{n_i})| \to 0$ quando $n_i \to \infty$. Por outro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in B^u$ resulta do λ-lema, que $n_i \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo $|\varphi_s(z_n)| \to 0$ quando $n \to \infty$ o que mostra que φ_s é contínua em B^u.

A construção da 2ª fibração é inteiramente análoga. Basta tomar f^{-1} em lugar de f e um difeomorfismo h_u semelhante a h_s.

Observemos que as fibrações acima não são únicas e consequentemente o homeomorfismo obtido também não o é. Decorre também das construções acima que o homeomorfismo h está próximo da identidade na topologia C^o.

§2. Campo de Vetores

Vamos agora estender o resultado acima para campos de vetores.

Sejam M uma variedade compacta C^∞ e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais em M com a topologia C^r. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ denotaremos por X_t o fluxo induzido por X. Podemos então enunciar:

TEOREMA 1 - Se $p \in M$ é uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}(M)$ existem uma vizinhança V de p em M e uma vizinhança N de X em $\mathfrak{X}(M)$ tais que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$ existe um homeomorfismo local $h:V \to M$ satisfazendo $h\, X_t = Y_t\, h$ em V.

Como se trata de um problema local podemos considerar campos definidos em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^m$ e que se anulem fora de uma vizinhança compacta de 0 (dêste modo não precisamos nos preocupar com os domínios de definição dos fluxos, X_t é definido $\forall t \in \mathbb{R}$).

Sejam então X umccampo C^r numa vizinhança $U(0)$ de 0 em R^m, 0 singularidade hiperbólica de X. Sejam X_t fluxo induzido, L_t parte linear de X_t, $LS(0)$ e $LU(0)$ variedades estável e instável (locais) de 0. Em

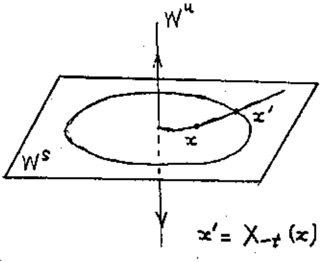
[3] pag. 22 está demonstrado a existência de uma bola fechada $B^s \subset LS(0)$ de centro 0 tal que a esfera ∂B^s é transversal ao fluxo e que se $x \in \partial B^s$ $X_t(x)$ tende monòtonamente para 0 quando $t \to \infty$. Vamos demonstrar que X_t é conjugado a sua parte linear em uma vizinhança de 0.

Sendo $X_t^s = X_t|B^s$ e $L_t^s = L_t|B^s$ vamos procurar um homeomorfismo $h_s : B^s \to B^s$ que conjuga X_t^s e L_t^s.

Definimos: $h_s(x) = x$ para $x \in \partial B^s$;

se $x \in \mathring{B}^s$ $\exists!$ t tal que $X_{-t}^s(x) \in \partial B^s$; definimos então $h_s(x) = L_t^s\, h_s\, X_{-t}^s$ e $h_s(0) = 0$.

É óbvio que h_s é um homeomorfismo e que



$$h_s\, X_t^s = L_t^s\, h_s$$

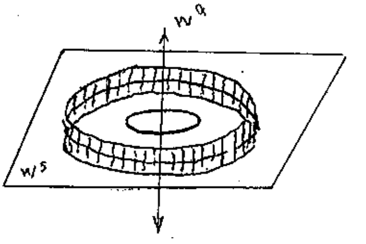
Anàlogamente existe uma bola $B^u \subset LU(0)$ e um homeomorfismo $h_u : B^u \to B^u$ tal que $h_u\, X_t^u = L_t^u\, h_u$.

Vamos construir um homeomorfismo $\varphi : B^s \times B^u \to B^s \times B^u$ tal que

$$F_t = \varphi \circ X_t \circ \varphi^{-1} = X_t^s \times X_t^u$$

e o problema estará resolvido.

Consideremos uma fibração trivial com base ∂B^s e cuja fibra típica é B^u: $x \in \partial B^s$ a fibra sôbre x é $\pi_s^{-1}(x)$.



Seja G^s o domínio fundamental de W^s para X_1^s com fronteira ∂B^s e $X_1(\partial B^s)$. Estendemos esta fibração a G^s (a base) através do fluxo: a fibra sôbre $x \in G^s$ é $X_t\ \pi_s^{-1}(X_{-t}(x))$ onde $X_{-t}(x) \in \partial B^s$. Em seguida estendemos esta fibração a uma vizinhança de 0 por iterações com o difeo X_1 e colocando B^u como fibra sôbre 0. Aplicando o λ-lema para difeomorfismos concluimos que se restringirmos a uma vizinhança menor de 0 as fibras $\varphi_s^{-1}(x)$ estarão C^1-próximas de B^u. Em particular isto mostra que o λ-lema é válido para fluxos.

Anàlogamente construimos uma fibração cuja fibra típica é B^s. É evidente que estas fibrações gozam das propriedades daquelas usadas no caso de difeomorfismo.

Definimos então o homeomorfismo $\varphi = (\varphi_s, \varphi_u)$ onde φ_s e φ_u são as projeções ao longo das fibras. Temos imediatamente que $F_t = \varphi \circ X_t \circ \varphi^{-1} = X_t^s \times X_t^u$ e tomando $h = h_s \times h_u$, $h\,F_t = L_t h \Rightarrow h\varphi\ X_t\ \varphi^{-1} = L_t h\ \therefore\ (h\varphi)X_t =$
$= L_t(h\varphi)$.

$h\varphi$ é um homeomorfismo que leva trajetórias de X em trajetórias de sua parte linear <u>preservando o tempo</u>.

REFERÊNCIAS

[1] J. PALIS - On Morse-Smale Dynamical System, Topology, 1969.

[2] J. PALIS - On the local Structure of Hyperbolic Points in Banach Spaces (An.Acad.Brasileira de Ciências).

[3] M.M. PEIXOTO - Teoria geométrica das Equações Diferenciais, 7º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[4] HIRSCH, M.W. e PUGH, C.C. - Stable manifolds on hyperbolic sets (a aparecer).

DENSIDADE DOS CAMPOS DE MORSE-SMALE EM M^2

Arístides C. Barreto

Pedro Mendes

Com $M = M^2$ indicaremos (salvo menção ao contrário) uma variedade de classe C^∞, orientável, sem bordo, compacta, de dimensão 2. $\mathfrak{X}(M^2)$ será o conjunto dos campos de classe C^r, que, munido da topologia C^r, é um espaço de Banach. $S(M^2)$ será o subconjunto de $\mathfrak{X}(M^2)$ constituído pelos campos de Morse-Smale, cuja definição recordamos abaixo.

O objetivo destas notas é a demonstração do seguinte

TEOREMA 1 (M. Peixoto) - $S(M^2)$ é denso em $\mathfrak{X}(M^2)$.

A demonstração apresentada encontra-se essencialmente em [1].

Para simplificação de linguagem, chamaremos de <u>elementos críticos</u>, de $X \in \mathfrak{X}(M^2)$ as singularidades e as órbitas fechadas de X.

A definição dos campos de Morse-Smale que aparece em [1] é a seguinte.

DEFINIÇÃO I - $X \in \mathfrak{X}(M^2)$ é de Morse-Smale se e só se:

1) Os elementos críticos de X são todos hiperbólicos e em número finito.

2) Os conjuntos α- e ω-limites das órbitas de X são elementos críticos.

3) X não apresenta ligação entre selas.

A definição usual no momento é a seguinte:

DEFINIÇÃO I' - $X \in \mathfrak{X}(M^2)$ é de Morse-Smale se e só se

1') Os elementos críticos de X são todos hiperbólicos e em número finito.

2') O conjunto $\Omega(X)$ dos pontos não-errantes de X é a união dos elementos críticos de X.

3') As variedades estáveis e instáveis dos elementos críticos de X são transversais.

Observamos que as Definições I e I' são equivalentes pois 1) $\Rightarrow$ 1'); 3) $\Leftrightarrow$ 3'), já que a variedade tem dimensão 2 e os campos considerados satisfazem 1) = 1'). Temos também que 2') = 2). Não é de todo trivial a prova de que 1), 2), 3) $\Rightarrow$ 2'). Eis a idéia de como se demonstra isto.

Em vista de 1), 2) e 3), podemos definir uma ordem parcial no conjunto dos elementos críticos de X, tal como foi feito em [3], pag. 389. Com o raciocínio usado na demonstração do Teorema 1.9, pag. 391, em [3], isolamos por vizinhanças os elementos críticos de X e com isto podemos provar que os únicos pontos não-errantes de X são pontos de elementos críticos de X.

Vamos agora dar a idéia da demonstração do Teorema 1.

Inicialmente provaremos que qualquer campo em M^2 pode ser C^r-aproximado por um cujas singularidades são tôdas hiperbólicas e então em número finito. Em seguida, provaremos que os campos cujas singularidades são hiperbólicas podem ser C^r-aproximados por campos que têm para α- e ω-limites de suas órbitas apenas elementos críticos de X ou gráficos formados por ligações de selas. A etapa seguinte é provar que os campos cujas singularidades são hiperbólicas e que têm para α- e ω-limites de suas órbitas apenas elementos críticos ou gráficos podem ser aproximados por campos que só têm singularidades hiperbólicas, não apresentam ligação entre selas e, além disso, seus α- e ω-limites são elementos críticos.

Finalmente, tornaremos hiperbólicas tôdas as órbitas fechadas, sem destruir as propriedades anteriores.

Demonstraremos antes um lema topológico, que será usado para garantir que determinados processos de aproximação são finitos.

LEMA 1 - Sejam $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \subset M^2$ curvas fechadas disjuntas que não limitam disco (= não homotópicas a um ponto). Se n fôr suficientemente grande, então existem duas delas que constituem fronteira de um cilindro em M^2.

Demonstração: Nesta demonstração, M^2 não é necessàriamente orientável. Usaremos os seguintes resultados:

1) Cirurgias sôbre curvas fechadas de um lado só em M^2 não desconectam M^2.

2) Seja $\chi(M^2)$ a característica de Euler de M^2. O número máximo de cirurgias sôbre curvas fechadas em M^2 que não desconectam M^2 é $\leq k = 2 - \chi(M^2)$.

3) Uma cirurgia em M^2 sôbre uma curva fechada γ transforma M^2 ou em duas variedades compactas, com bordo homeomorfo a γ, ou numa variedade compacta, com bordo homeomorfo à união disjunta de duas cópias de γ.

4) a) Tôda variedade orientável de dimensão 2 é homeomorfa a uma variedade obtida da esfera S^2 com 2r "buracos" pela adjunção de r "asas".

b) Tôda variedade não-orientável de dimensão 2 é homeomorfa a uma variedade obtida do plano projetivo real com "buracos" pela adjunção de "asas".

5) Se γ é uma curva fechada de dois lados no plano projetivo com "buracos" e γ não limita disco então uma cirurgia sôbre γ separa-o em uma faixa de Moebius com "buracos" e um disco com "buracos".

Passemos agora à demonstração do lema.

Pelos fatos 1) e 2), podemos supor que as curvas γ's são tôdas de dois lados, já que o número delas é bastante grande.

Por 3) podemos supor que, cortando M^2 ao longo de γ_1, não desconectamos M^2. Seja M_1^2 a variedade com bordo obtida por êste corte. É claro que $\chi(M^2) = \chi(M_1^2)$.

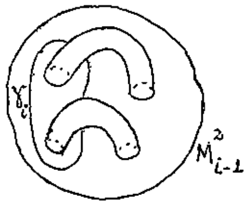
Como γ_1 não limita disco:

$$\text{nº de asas de } M_1^2 = \text{gênus de } M_1^2 \leq \text{gênus de } M^2.$$

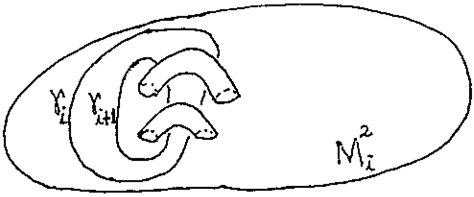
Aplicamos o método acima a M_1^2, cortando-a ao longo de γ_2, e assim prosseguimos.

Como no número de asas é finito e o número de curvas fechadas γ_i's é suficientemente grande, chegaremos a uma variedade M_m^2 compacta, com bordo, de gênus zero ou um, conforme M^2 seja orientável ou não (caso contrário muitas das γ_i's estariam na mesma asa e a demonstração estaria concluída).

No caso não-orientável, cortamos M_m^2 ao longo de γ_{m+1} separando-a então em duas variedades com bordo e, conforme 5), uma delas, M_{m+1}^2, é um disco com "buracos".

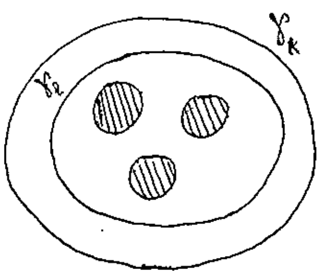


corte pode não diminuir gênus

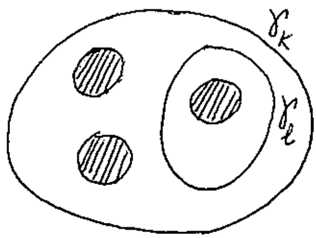


nêste caso o teorema está demonstrado.

Cada nôvo corte ao longo de uma curva fechada γ_i separa o disco em duas regiões: uma contendo alguns dos buracos e a outra contendo os buracos restantes.



Todos os buracos no interior de γ_ℓ



Apenas um buraco no interior de γ_ℓ

o teorema está demonstrado

Conforme as situações apresentadas nas figuras acima, vemos que cada corte nos dará um nôvo disco com me nor número de buracos (caso contrário o teorema estará demonstrado!)

Mas o número de buracos é finito. Logo chegaremos a um disco com apenas um buraco, quando o teorema está demonstrado.

LEMA 2 - Um campo X de classe C^r em M^2 pode ser aproximado por um campo X_1, de classe C^r e cujas singularidades são hiperbólicas.

<u>Demonstração</u>: Recordamos, antes de demonstrar o Lema 2, que um ponto $p \in M^2$ é um <u>singularidade</u> para o campo X se $X_p = 0$. E que esta é dita <u>simples</u> se $\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\right)_p \neq 0$, sendo (α_1, α_2) as coordenadas de X numa carta local (U, x_1, x_2) ao redor de p.

Desta definição e do toerema das funções inversas, é claro que as singularidades simples de um campo X são isoladas no conjunto de tôdas as singularidades de X em M^2; e como M^2 é compacta, elas são em número finito.

É conhecido o seguinte fato:

"Um campo X de classe C^r em M^2 pode ser C^r-aproximado por um campo $\widetilde{X}$ cujas singularidades são tôdas simples". (Ver Introdução à Topologia Diferencial - Elon Lages Lima - pag. 111-112).

Resta então demonstrar que $\tilde{X}$ pode ser aproximado por um campo X_1 cujas singularidades são hiperbólicas. Como o número de singularidades de $\tilde{X}$ é finito e as perturbações que faremos são locais, não perdemos em generalidade supondo que $\tilde{X}$ tem uma única singularidade simples p.

Num sistema de coordenadas locais (U, x_i) em p temos

$$X = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{com} \quad \det A = \det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right)_p \neq 0 \quad .$$

Sabemos que se λ_j é valor próprio de A então $\lambda_j + \beta$, é valor próprio de $A + \beta I$. Supondo que A não é hiperbólica, temos dois casos:

1º) Todo valor próprio de A é imaginário puro.

2º) A tem valôres próprios fora do eixo imaginário e com distância ao eixo $\geq \delta > 0$. Dado $e > 0$, seja $B = A + eI$ no 1º caso e $B = A + \mu I$, onde $\mu = \min\{c, \frac{\delta}{2}\}$, no 2º. É claro que B é hiperbólica.

Seja $\varphi : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ num compacto K tal que $p \in K \subset U$, e $\varphi = 0$ fora de U.

Definimos $X_1(q) = \tilde{X}(q)$ se $q \notin U$.

$X_1(q)$ para $q \in U$ é definido no sistema de coordenadas (U, x_i) por

$$X_1(q) = \Sigma\, \alpha^i(q)\, (\frac{\partial}{\partial x_i})_q + \varphi(q)\, \Sigma\, C_{ij}\, x_j(q) (\frac{\partial}{\partial x_i})_q \; ,$$

onde $B-A = (C_{ij})$.

Desta construção é claro que X_1 é eC^r-próximo de $\tilde{X}$ e que X_1 só possui singularidades hiperbólicas.

Nosso passo seguinte é demonstrar que X_1 pode ser aproximado por um campo X_1' cujas singularidades também são hiperbólicas e que não exibe recurrências não-triviais.

Para isto recordamos algumas definições e propriedades elementares.

<u>Teorema do fluxo tubular</u>

Seja $p \in M$ um ponto regular do campo X $(X_p \neq 0)$. Existem uma vizinhança U de p, um compacto B tal que $p \in B \subset U$ e um difeomorfismo $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\psi(B) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1\}; \quad \psi(p) = 0 \quad \text{e}$$

$$[\psi_*(X)]_{(x_1,\ldots,x_n)} = (1,0,\ldots,0)\ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \psi(B).$$

<u>Teorema do fluxo tubular longo</u>

Seja pq um arco de trajetória do campo X tal que $p \neq q$. Existem uma vizinhança U de pq em M, um compacto B tal que $pq \subset B \subset U$ e um difeomorfismo $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ tais que:

$$\psi(B) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1\};$$

$$\psi(pq) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \psi(B) : x_2 = \ldots = x_n = 0\}$$

$$[\psi_*(X)]_{(x_1,\ldots,x_n)} = (1,0,\ldots,0) \ \forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in \psi(B).$$

Para a demonstração dêstes dois teoremas veja [2].

DEFINIÇÕES: - Sejam X um campo em M e γ uma órbita de X.

1) $\alpha(\gamma) = \{p \in M : p = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma(t_n)$ onde $t_n \in \mathbb{R}$ e $t_n \to -\infty\}$.

2) $\omega(\gamma) = \{p \in M : p = \lim\limits_{n\to+\infty} (\gamma(t_n)),\ t_n \to +\infty,\ t_n \in \mathbb{R}\}$.

3) Se $\gamma \subset \omega(\gamma)$ $(\gamma \subset \alpha(\gamma))$ dizemos que γ é ω-recurrente (α-recurrente). Se $\gamma \subset \alpha(\gamma) \cup \omega(\gamma)$ dizemos que γ é recurrente.

Exemplos: 1) Um ponto singular e uma órbita fechada são recurrentes, ditos triviais.

2) Uma trajetória do campo

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \text{irracional} \end{cases}$$

no toro T^2 é recurrente não-trivial (veja [2]).

Propriedades:

I) $\alpha(\gamma)$ e $\omega(\gamma)$ são compactos, conexos, invariantes.

Demonstração: Seja $p_k \in \omega(\gamma)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p$.

Provemos que $p \in \omega(\gamma)$.

Para cada k existe $t_k > k$ tal que $d(\gamma(t_k),p_k) < \frac{1}{k}$, pois $p_k \in \omega(\gamma)$. Mas $d(\gamma(t_k),p) \leq d(\gamma(t_k),p_k) + d(p_k,p)$. Logo $p = \lim\limits_{k\to+\infty} \gamma(t_k)$ donde $p \in \omega(\gamma)$.

Assim, $\omega(\gamma)$ é fechado e, como M é variedade compacta, $\omega(\gamma)$ é compacto. É óbvio então que $\omega(\gamma)$ é invariante pelo fluxo induzido por X.

Suponhamos que existem abertos disjuntos não-vazios $U, V \subset M$ tais que $U \cap \omega(\gamma) \neq \Phi$, $V \cap \omega(\gamma) \neq \Phi$ e $\omega(\gamma) \subset U \cup V$. Sejam $p \in U \cap \omega(\gamma)$, $q \in V \cap \omega(\gamma)$ e $s_k \to +\infty$, $s_k' \to +\infty$ tais que $\gamma(s_k) \to p$ e $\gamma(s_k') \to q$. Como o arco de extremos $\gamma(s_k)$ e $\gamma(s_k')$ é conexo, existe t_k entre s_k e s_k' tal que $\gamma(t_k) \notin U \cup V$. Obtemos assim uma sequência $\{\gamma(t_k)\}$ em M e como M é compacta esta sequência tem uma subsequência convergente, cujo limite, pela construção feita, está no fechado $M^2 - U \cup V$ e em $\omega(\gamma)$, contradizendo $\omega(\gamma) \subset U \cup V$. Provamos então que $\omega(\gamma)$ é conexo.

Demonstrações análogas valem para $\alpha(\gamma)$.

II) Se γ é trajetória ω-recurrente de X tal que $\gamma \neq$ singularidade então $\omega(\gamma)$ é perfeito, (isto é, o conjunto $\omega(\gamma)'$ dos pontos de acumulação de $\omega(\gamma)$ coincide com $\omega(\gamma)$).

Demonstração: $\omega(\gamma) \supset \omega(\gamma)'$ pois $\omega(\gamma)$ é fechado. Por outro lado, se $p \in \omega(\gamma)$ então $p = \lim\limits_{k\to+\infty} \gamma(t_k)$, $t_k \to \infty$. Como $\gamma(t_k) \in \omega(\gamma)$, pois γ é ω-recurrente, temos $p \in \omega(\gamma)'$.

Valem os análogos de II) para trajetórias α-recurrentes e recurrentes.

III) Um conjunto perfeito em M não é enumerável.

<u>Demonstração</u>: Segue do teorema de Baire para espaços métricos completos, já que os pontos de um conjunto perfeito são fechados de interior vazio.

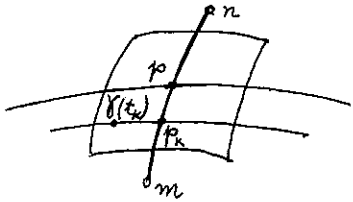
IV) Sejam γ uma trajetória ω-recurrente não-trivial de X e mn um arco (aberto) transversal a X. Se $\omega(\gamma) \cap mn \neq \Phi$ então o conjunto

$$\{p \in \omega(\gamma) \cap mn\colon p \text{ é ponto de acumulação de } \omega(\gamma) \cap mp \text{ e de } \omega(\gamma) \cap pn\}$$

não é enumerável.

<u>Demonstração</u>: Do teorema do fluxo tubular e do fato de γ

ser ω-recurrente <u>não trivial</u> segue que $\omega(\gamma) \cap mn$ é um conjunto perfeito. Logo $\omega(\gamma) \cap mn$ não é enumerável. Basta provar que o conjunto dos $p \in \omega(\gamma) \cap mn$ tais que

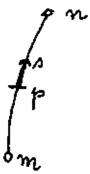


$$\lim \gamma(t_k) = p \Longrightarrow \lim p_k = p$$

a) p é ponto de acumulaçao de $\omega(\gamma) \cap mp$ e não o é de $\omega(\gamma) \cap pn$

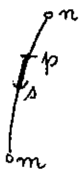
ou b) p é ponto de acumulação de $\omega(p) \cap pn$ e não o é de $\omega(\gamma) \cap mp$ é enumerável.

Mas isto segue de a), b) e do fato de ser enumerável o conjunto dos arcos ps semi-abertos contidos em mn.



caso a) ; existe $\underline{s}$ tal que

$$[p,s) \cap \omega(\gamma) = \phi$$



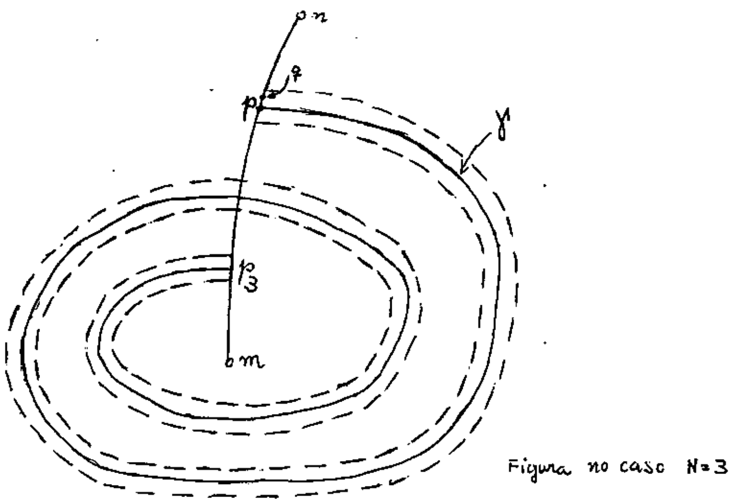
caso b) : existe $\underline{s}$ tal que ;

$$(s,p] \cap \omega(\gamma) = \phi$$

V) Sejam mn um arco (aberto) transversal ao campo X e γ a trajetória de X por $p \in mn$. Seja

N um número natural dado. Se γ encontra mn em infinitos pontos depois de p, então existe $q \in mn$ tal que a trajetória $\gamma(q)$ de X por q encontra mn em pelo menos N pontos depois de q.

Demonstração: Seja p_N a N-ésima interseção de γ com mn depois de p. Basta usar o teorema do fluxo tubular longo para o arco pp_N de γ.



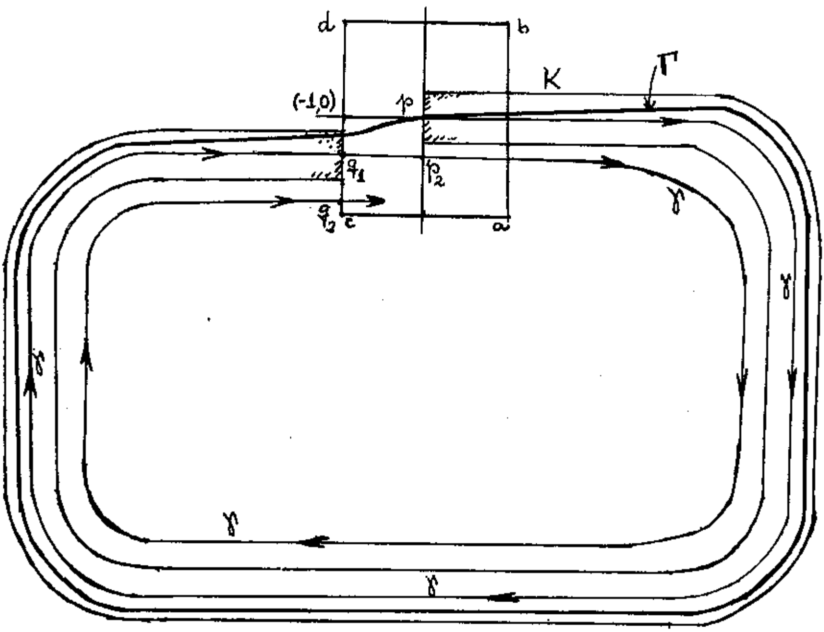
Existência do círculo transversal

LEMA 3 - Seja $p \in \gamma$, γ uma órbita ω-recurrente não-trivial do campo X em M^2. Existe uma curva fechada Γ (um círculo) transversal a X por p (M^2 orientável ou não).

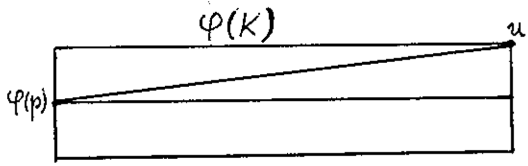
<u>Demonstração</u>: Consideremos um fluxo tubular B centrado em p e suponhamos que γ intercepta o lado esquerdo de B num ponto q_1 abaixo de $(-1,0)$.

Tomemos agora um fluxo tubular longo (K,φ) centrado no arco pq_1 da trajetória γ.

Suponhamos primeiro que o difeomorfismo T que a cada ponto q do "lado esquerdo" de K associa a primeira interseção da trajetória $\gamma(q)$, do campo X por q, com o "lado direito" de K preserve a orientação.



Tomamos em $\varphi(K) \subset \mathbb{R}^2$ um segmento $s = \varphi(p)u$, inclinado como na figura.



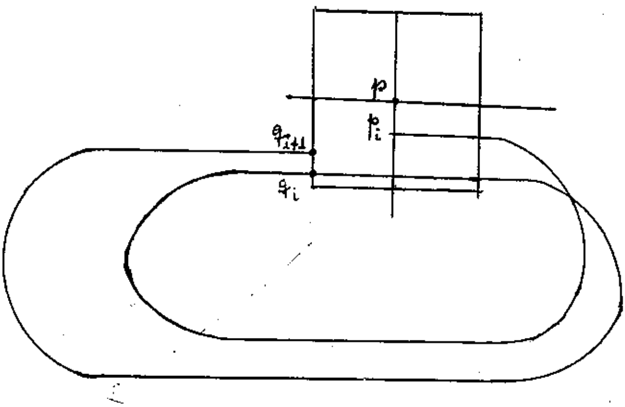
Construímos em B um arco unindo p e $\varphi^{-1}(u)$ de modo que a curva Γ obtida pela união de $\varphi^{-1}(s)$ com êsse arco seja diferenciável. Isto é possível porque as tangentes a $\varphi^{-1}(s)$ em p e $\varphi^{-1}(u)$ têm inclinações positivas. (Logo, êste argumento não se aplica quando o difeomorfismo T inverte a orientação).

Caso T não preserve a orientação, consideramos as sucessivas interseções q_i e p_i de γ com o lado esquerdo de B e com o eixo dos y's em B, respectivamente. (Veja fig.)

Se para algum i o arco $p_i\, q_i$ é tal que o fluxo tubular longo K_i centrado em $p_i\, q_i$ induz um difeomorfismo T_i que preserva a orientação, obtemos como acima um círculo $\tilde{\Gamma}_i$ transversal a X por p_i. Se T_i inverte a orientação qualquer que seja i, então o difeomorfismo T_i' induzido pelo fluxo tubular K_i centrado em $p_i\, q_{i+1}$ preserva a orientação.

Como γ é recurrente não trivial então $q_i \to (-1,0)$ donde existe i tal que q_{i+1} está acima de q_i. Aplicando o argumento anterior, construímos um círculo $\tilde{\Gamma}_i$

transversal a X por p_i.



Seja X_t o fluxo induzido pelo campo X. Seja $\tau > 0$ tal que $X_\tau(p) = p_i$.

Tomando $\Gamma = X_{-\tau}(\Gamma_i)$ obtemos o círculo transversal procurado no caso em que o difeomorfismo T não preserva a orientação.

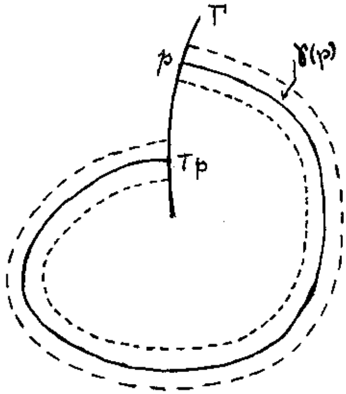
Transformação de Poincaré do círculo transversal

Seja Γ círculo transversal a X em M^2, nas condições do Lema 3.

Para cada $p \in \Gamma$ consideramos a trajetória $\gamma(p)$ de X por p. Se $\gamma(p)$ volta a encontrar Γ depois de p, chamamos T_p à primeira de tais interseções. Seja

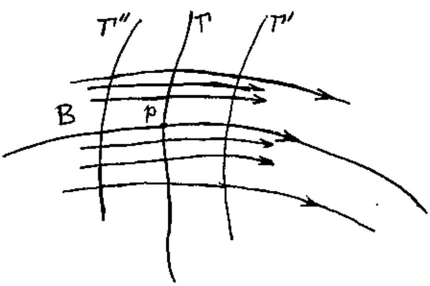
$D \subset \Gamma$ o conjunto formado pelos pontos $p \in \Gamma$ para os quais existe $T_p \in \Gamma$. Então $T:D \to \Gamma$ assim definida é dita transformação de Poincaré de Γ.

Do teorema do fluxo tubular longo segue que D é aberto e que T é difeomorfismo local da mesma classe de X. Como T é biunívoca, $T:D \to T(D)$ é difeomorfismo.



Se tomássemos $\Gamma_1 = X_1(\Gamma)$ e $\Gamma_{-1} = X_{-1}(\Gamma)$, X_t = fluxo induzido por X, poderíamos, como acima, definir $T:D \subset \Gamma_1 \to \Gamma_{-1}$.

Usaremos frequentemente $T:D \subset \Gamma' \to \Gamma''$ com Γ' e Γ'' na situação da figura abaixo, onde B é o fluxo tubular centrado em $p \in$ órbita α- ou ω-recurrente não-trivial.



Pretendemos agora estudar a estrutura do domínio D da transformação de Poincaré de um círculo Γ transversal ao fluxo. Para isto, faremos a seguinte observação.

Se $\omega(\gamma)$ não é constituido de uma única singularidade, então $\omega(\gamma)$ contém pontos regulares. (Aqui o campo X só tem singularidades hiperbólicas).

Demonstração: Basta ver que as singularidades de X são em número finito e $\omega(\gamma)$ é conexo. Vale resultado análogo para $\alpha(\gamma)$.

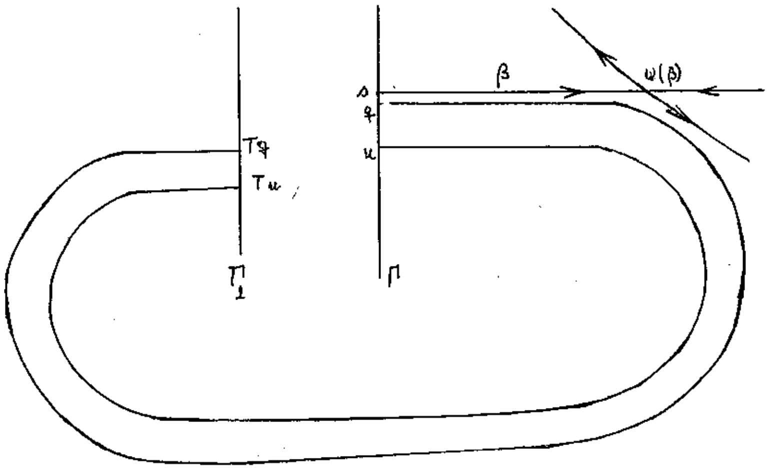
Considere uma trajetória γ ω-recurrente não-trivial de X. Sejam $p \in \gamma$, B fluxo tubular centrado em p cujos lados verticais estão contidos em círculos Γ e Γ_1 transversais a X e $T: D \subset \Gamma \to \Gamma_1$ a transformação de Poincaré.

Sôbre D temos o seguinte lema.

LEMA 4 - Ou $D = \Gamma$ ou D é reunião finita de arcos abertos de Γ tais que se s é extremo de um dêstes arcos a trajetória $\gamma(s)$ por s vai para uma sela sem cruzar Γ depois de s.

Demonstração: É claro que se $D \neq \Gamma$ então as componentes conexas de D, que é aberto, são arcos abertos (s',s). Basta provar que $\gamma(s)$ vai diretamente para uma sela, pois como as singularidades são em número finito resultará finito o número dêsses arcos.

Seja β a trajetória de X por s. Vamos provar que $\omega(\beta)$ é uma sela.



Se $\omega(\beta)$ contiver mais de uma singularidade então conterá pontos regulares.

Se $\omega(\beta) \cap \Gamma_1 \neq \Phi$ então β cortará Γ_1 (infinitas vêzes depois de s), o que é absurdo.

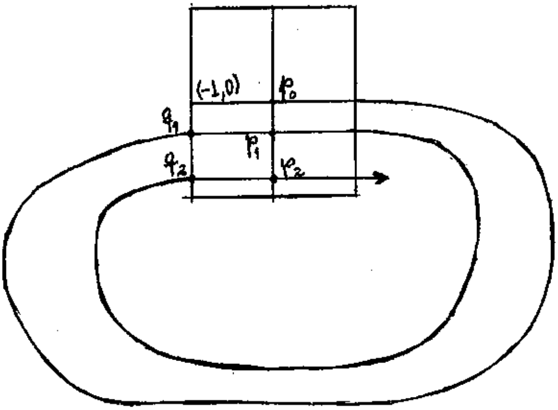
Se $\omega(\beta) \cap \Gamma_1 = \Phi$, consideramos um círculo C, transversal a X por um ponto regular de $\omega(\beta)$. Por um lado sabemos que, para $q \in [u,s)$ e bem próximo de s, o arco $q\,T_q$ encontrará C em um número arbitràriamente grande de pontos. Por outro lado, vemos que o número de interseções de $q\,T_q$ com C, $N(q)$, é finito, pois $q\,T_q$ é compacto. Além disto, pelo fluxo tubular longo, $q \mapsto N(q)$ é contínua. Como $[u,s)$ é conexo, $N(q)$ é constante, o que é absurdo. Como $\omega(\beta)$ não pode ser poço, será uma sela.

OBSERVAÇÃO: É claro que $T(D)$ tem a mesma estrutura de D. (Para ver isto, considere o campo $-X$, em lugar de X, no lema acima).

LEMA 5 - Seja M^2 orientável. Seja p_o um ponto de uma órbita recurrente não-trivial γ do campo X. Considere um fluxo tubular B centrado em p_o (cujos lados verticais ab e cd estão contidos em círculos transversais a X). Se $T:[a,b] \to [c,d]$ está definida então X pode ser aproximado por um campo X que exibe uma órbita fechada por p_o.

OBSERVAÇÃO: Pelas hipóteses dêste lema M^2 é o toro. De fato, observemos que o saturado S de B é aberto e fechado. Logo M^2, que é orientável, admite um campo sem singularidades, donde tem característica de Euler zero.

Demonstração do lema:



Considere em Y sequências $q_n \to (-1,0)$ e $p_n \to p_o$ (isto é possível porque p_o está em órbita recurrente não-trivial).

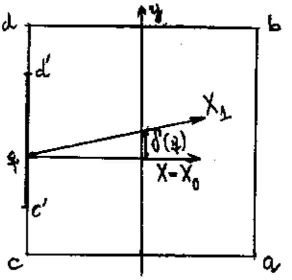
Definimos a seguinte família de campos em um parâmetro:

$$X_u = X + u\varepsilon\varphi Z \text{ , em que } 0 \leq u \leq 1,$$

Z campo unitário vertical em B, $e > 0$ arbitràriamente pequeno e $\varphi : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tal que $\varphi = 0$ fora de B e $\varphi > 0$ em B.

Seja $q_i(u)$ a i-ésima interseção com $[c,d]$ da trajetória de X_u por p_o, depois de p_o. Definição análoga para $p_i(u)$.

Seja $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ definida por $\delta(q)$ = comprimento do segmento determinado no eixo Y pelas trajetórias por q de X_o $(= X)$ e X_1.



Pela continuidade das soluções em relação às condições iniciais, δ é contínua; logo restrita a $[c',d'] \subset \subset (c,d)$ tem mínimo $\bar{\delta} > 0$ ("minimum lift").

Como M^2 é orientável, $p_i(u)$ está acima de p_i $\forall\, i$ e $\forall\, u \in (0,1]$. De observações já feitas, podemos supor que existe $u_o \in [0,1]$ tal que $p_i(u_o)$ está abaixo de p_o e dista de p_o menos que $\bar{\delta}$.

Ainda pela orientabilidade, podemos supor que $q_i(1)$ está acima de q_i. Logo $p_i(1)$ está acima de p_i e $p_i(1)$ está acima de p_o, pois $|p_i(1)-p_i| > \bar{\delta}$. Como

$$p_i:[0,1] \to R$$

é contínua, segue que existe $\bar{u} \in [0,1]$ tal que $p_i(\bar{u}) = p_o$. $X_{\bar{u}}$ é a desejada aproximação de X.

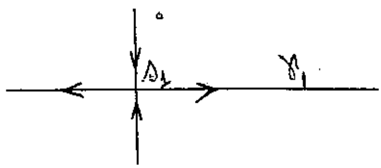
OBSERVAÇÃO: Suponha que $p_o \in \gamma$, órbita recurrente não trivial de um campo X na variedade orientável M^2. Se para p_o não ocorre a hipótese do Lema 5 então existem trajetórias γ_1, γ_2 de X tais que

$$\alpha(\gamma_1) = s_1 \text{ é sela}$$
$$\omega(\gamma_2) = s_2 \text{ é sela}$$
e
$$\omega(\gamma_1) \cap \alpha(\gamma_2) \ni p_o.$$

O lema seguinte trata desta situação.

LEMA 6 - Nas condições que acabamos de descrever, X pode ser aproximado por um campo $\tilde{X}$ que exibe uma ligação de selas a mais.

Demonstração: Podemos tomar um fluxo tubular B centrado em p_o tal que as trajetórias que passam por B não ligam selas.

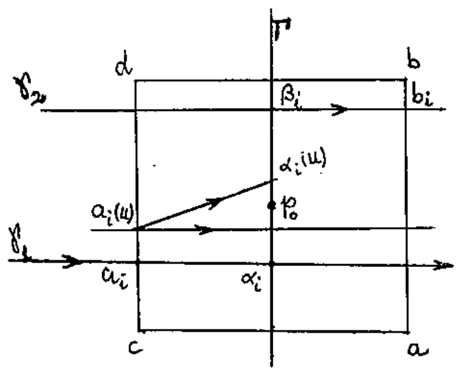


Suporemos também que as trajetórias que saem de $[a,b]$ não vão direto para sela e que as que chegam em $[c,d]$ não vêm direto de sela.

Ainda,

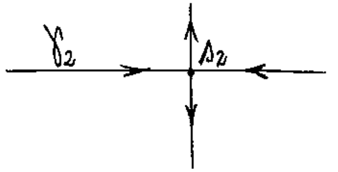
$[d,b] \subset \gamma_1$ e

$[c,a] \subset \gamma_2$.



Sejam a_i a i-ésima interseção de γ_1 com (c,d),

α_i a i-ésima de γ_1 com $\Gamma \cap$ interior de B, e b_i, p_i os análogos para γ_2.



Consideremos $\widetilde{X}_u = X + u\,\varepsilon\,\varphi\, Z$, em que $e > 0$ arbitràriamente pequeno, $-1 \leq u \leq 1$, $\varphi : M^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ tal que $\varphi = 0$ fora de B, e $\varphi > 0$ em B, Z = campo unitário vertical em B. Para cada $q \in [c,d]$, consideramos as trajetórias de $\widetilde{X}_0$ e $\widetilde{X}_1$ por q. Seja $\delta_{-1}(q)$ o comprimento do segmento que elas determinam em Γ. Como já vimos, existe um mínimo $\delta_{-1} > 0$ para os valôres $\delta_{-1}(q)$, $q \in [c',d'] \subset [c,d]$. Tomando as trajetórias de $\widetilde{X}_0$ e $\widetilde{X}_{-1}$, definimos δ'_{-1}. Se em lugar de $[c,d]$ usamos $[a,b]$ usamos $[a,b]$, obtemos de modo análogo δ_1 e δ'_1.

Seja $\delta = \min\{\delta_{-1}, \delta'_{-1}, \delta_1, \delta'_1\}$.

Existe i tal que $d(\alpha_i, \beta_i) < \delta/2$. Duas coisas podem ocorrer: (1) α_i acima de β_i; (2) α_i abaixo de β_i.

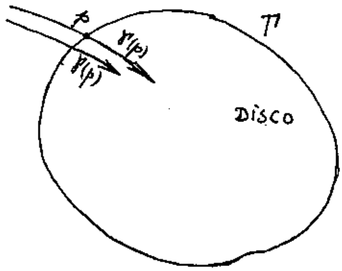
Vamos considerar o caso (2), para o que tomaremos $0 \leq u \leq 1$. (No caso (1) o mesmo raciocínio se aplica, tomando $-1 \leq u \leq 0$). Definimos $a_i(u)$, $\alpha_i(u)$, $b_i(u)$ e $\beta_i(u)$ de modo análogo a a_i, α_i, b_i, β_i. Como as trajetórias de $\widetilde{X}_u$ variam continuamente com o parâmetro u, $a_i(u)$, $\alpha_i(u)$, $b_i(u)$, $\beta_i(u)$ são contínuas. Da orientabilidade de M^2 temos: $a_i(u)$ e $\alpha_i(u)$ estão acima respectivamente de a_i e α_i; $\beta_i(u)$ e $b_i(u)$ estão abaixo respectivamente de β_i e b_i. Como $d(\alpha_i(1),\alpha_i) > \delta$ e $d(\beta_i(1), \beta_i) > \delta$, temos então: $\alpha_i(1)$ está acima de $\beta_i(1)$. Assim a função contínua $f: u \in [0,1] \to \alpha_i(u)-\beta_i(u)$ é tal que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$, donde existe $u_o \in (0,1)$ tal que $f(u_o) = 0$. Logo $\tilde{X}_{u_o}$ exibe uma ligação entre as selas s_1 e s_2.

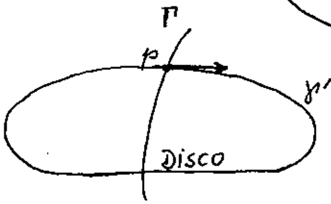
Vejamos agora o que ocorre se $\alpha_i(u)$ não está definido para todo $0 \leq u \leq 1$. (Mesmo raciocínio se aplica caso $\beta_i(u)$ não estiver definido para todo $u \in [0,1]$). Pela continuidade das soluções em relação à variação do parâmetro u, existe $0 < u_o \leq 1$ tal que $a_2(u)$ está definido para $0 \leq u < u_o$ e $a_i(u_o)$ não está definido. Assim a trajetória de $\tilde{X}_{u_o}$ por $a_{i-1}(u_o)$ não encontra (c,d) depois de $a_{i-1}(u_o)$. Da construção de B segue que esta trajetória não passa em d depois de $a_{i-1}(u_o)$, e que se passar por c depois de $a_{i-1}(u_o)$ então $\tilde{X}_{u_o}$ exibe uma nova ligação de selas. Resta então a possibilidade de a trajetória de $\tilde{X}_{u_o}$ por $a_{i-1}(u_o)$ encontrar Γ depois de $a_{i-1}(u_o)$ fora de B. Isto porém contraria a definição de u_o. (Se $a_{i-1}(u_o)$ não estivesse definido repetiríamos o argumento para $a_{i-2}(u_o)$, e assim por diante).

COROLÁRIO - Se X é um campo em M^2 cujas singularidades são hiperbólicas, então X pode ser aproximado por um campo Y cujas singularidades são hiperbólicas e cujas órbitas recurrentes não triviais satisfazem às hipóteses do Lema 5.

Vamos observar que o círculo Γ transversal a Y por $p \in \gamma$ = órbita recurrente não-trivial de Y, não limita disco.

Conforme o Lema 5, podemos aproximar Y por um campo Y' que possui uma órbita fechada γ' por p e ainda é transversal a Γ. A órbita γ' não limita disco.

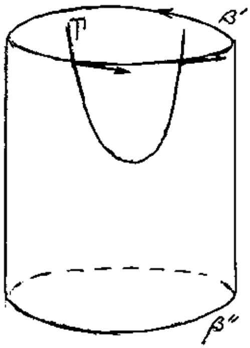


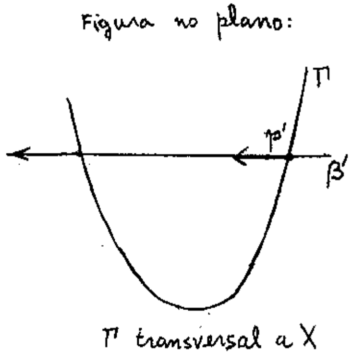


Suponhamos que Y tenha duas órbitas recurrentes não-triviais $\gamma \ni p$ e $\gamma' \ni p'$. Conforme o Lema 5, Y pode ser aproximado por um campo Y'' que exibe órbitas fechadas $\beta' \ni p$ e $\beta'' \ni p''$. Vamos provar que β' e β'' não constituem bordo de cilindro.

Podemos supor que o círculo Γ transversal a Y

por p é ainda transversal a Y'' e é disjunto de β''. Supondo que β' e β'' bordam cilindro chegaríamos à situação absurda da figura seguinte.





Das observações acima e do Lema 1, concluímos:

LEMA 7 - Um campo Y_1 na variedade orientável M^2 cujas singularidades são hiperbólicas pode ser aproximado por um campo Y_2 cujas singularidades são ainda hiperbólicas e que não possui órbitas recurrentes não triviais.

Seja X um campo numa variedade $M = M^n$ compacta.

Um conjunto $\mu \subset M$ é dito minimal para X se μ é compacto, não-vazio e invariante por X e não contém subconjunto próprio com estas três propriedades.

Exemplos: as singularidades e as órbitas fechadas (minimais ditos triviais) e o toro T^2 para os fluxos irracionais em T^2.

Se γ é a trajetória por qualquer ponto de um minimal μ então tem de ser $\alpha(\gamma) = \omega(\gamma) = \mu$. Em particular, γ resulta recurrente não-trivial.

Sejam $M = M^2$ orientável e $Y_1' \in \mathfrak{X}(M)$ um campo com singularidades tôdas hiperbólicas, donde em número finito, e suponhamos que todas as suas órbitas recurrentes sejam triviais. Em particular, resultam triviais todos os seus conjuntos minimais.

Consideremos a seguinte forma fraca de (2):

(2') Os conjuntos-limites de qualquer trajetória são ou singularidade ou órbita fechada ou um gráfico, formado de selas e separatrizes ligando-as.

LEMA 8 - Y_2 satisfaz (2').

<u>Demonstração</u>: Seja γ uma trajetória de Y_2 tal que $\omega(\gamma)$ não é singularidade, órbita fechada nem gráfico.

Só há duas alternativas:

(a) $\omega(\gamma)$ não contém singularidade

(b) $\omega(\gamma)$ contém singularidade.

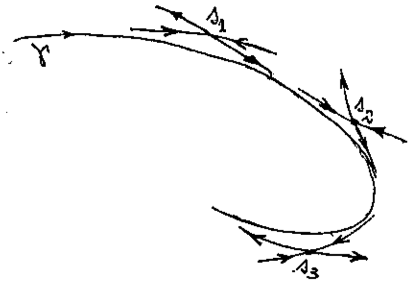
Mostremos primeiro que a) não ocorre.

Tomando um minimal $\mu \subset \omega(\gamma)$, como μ tem de ser trivial e não é singularidade então μ é órbita fechada.

Logo $\omega(\gamma)$ = órbita fechada μ, contra a suposição feita no início.

Agora, suponhamos que ocorre b). As singularidades em $\omega(\gamma)$ só podem ser selas, pois se houvesse um poço $p \in \omega(\gamma)$ então, como γ passa arbitràriamente perto de p, resultaria $\omega(\gamma) = p$.

Argumentando como em a), concluímos que estas selas são os únicos minimais em $\omega(\gamma)$, e há, por hipótese, ao menos duas. Sejam elas $s_1, \ldots, s_m$, $m \geq 2$.



$\omega(\gamma)$ é conexo mas, por hipótese, não é gráfico, logo $\omega(\gamma)$ contém certas separatrizes $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ que deixam respectivamente $s_1, s_2 \ldots$

$\omega(\lambda_1)$ se enquadra nas mesmas alternativas de $\omega(\gamma)$, as quais levam à mesma conclusão: $\omega(\lambda_1)$ contém selas, tomadas dentre $s_1, \ldots, s_m$.

Seja $s_2 \in \omega(\lambda_1)$. Anàlogamente, concluiremos que existe $s_3 \in \omega(\lambda_2)$ etc. Como as selas $s_1, \ldots, s_m$ são em número finito, m, chegaremos a uma delas, s, tal que

$$s \in \omega(\lambda)$$

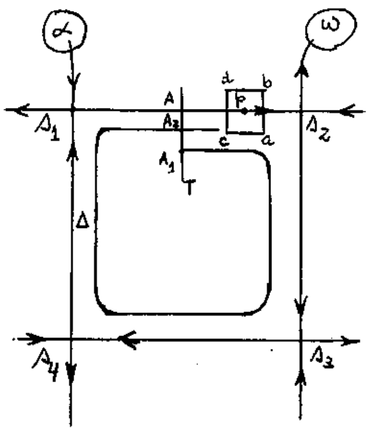
em que λ é separatriz da própria sela s. Logo λ volta infinitas vêzes perto de si mesma quando $t \to +\infty$ i.e. λ é recurrente não-trivial, o que é absurdo para Y_2.

LEMA 9 - Y_2 pode ser aproximado por um campo Y_3 cujas singularidades são hiperbólicas e que satisfaz 2), 3).

<u>Demonstração</u>: Devemos, agora, quebrar as ligações de selas, sem alterar as propriedades já conseguidas.

Comecemos pelos gráficos.

Seja $g = s_1 s_2 s_3 s_4$ um gráfico de Y_2 e mostremos primeiro como aproximar Y_2 por um campo do tipo (2'), com singularidades tôdas hiperbólicas e um gráfico a menos.



Seja γ tal que $g = \omega(\gamma)$ é um gráfico.

Tome $A \in s_1 s_2$ e por A uma pequena transversal T tal que

$\gamma \cap T = \{A_1, A_2 \ldots\}$ e $A_n \to A$.

A_1 deve ser escolhido tão perto de A que o anel Δ fique livre de singularidades.

Em $p \in s_1 s_2 - A$ centre um box $B = abcd$ cf.fig.

Dois casos:

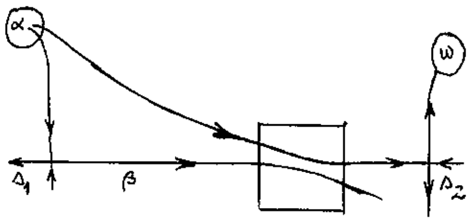
1º) $s_1 s_2$ não faz parte de outro gráfico.

Neste caso, seguindo $s_3 s_2$ além de s_2 atingimos um poço, que é também o ω-limite de tôdas as trajetórias que saem de B acima de $s_1 s_2$. Voltando no tempo, vemos que estas têm também o mesmo α-limite.

Considere o campo

$$Y_2' = Y_2 + e\varphi Z$$

em que e é uma constante >0 arbitràriamente pequena, φ é uma função diferenciável >0 em B e nula fora e $Z = (0,-1)$. Então Y_2' só tem singularidades hiperbólicas, é do tipo $(2')$, não tem ligação entre s_1 e s_2 (por causa das características dos conjuntos-limites das trajetórias vizinhas a $s_1 s_2$) nem apresenta nova ligação de selas.



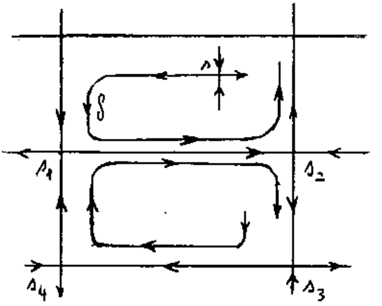
Para Y_2', a trajetória β tende para alguma órbita fechada que se forma no anel Δ.

2º) $s_1 s_2$ faz parte de outro gráfico.

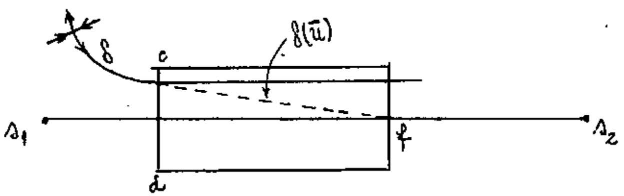
Em vez de Y_2', consideramos a família em um parâmetro

$$Y_2'(u) = Y_2 + e\, u\, \varphi\, Z, \qquad u \in [0,1]$$

$Y_2'(u)$ só tem singularidades hiperbólicas e é do tipo (2') para todo u e não tem ligação entre s_1 e s_2.



O problema aqui é que, se δ vinha de uma sela s, então, após a perturbação, δ pode passar a ligar s com s_2. Devemos provar que existe um adequado $u \in [0,1]$ para o qual $Y_2'(u)$ não tem conexão entre s_1 e s_2 e também não tem nenhuma outra, além das que Y_2 tinha.



$\delta \cap cd = \{q_1, q_2 \ldots\}$ e alguma subsequência de (q_n) tende para e.

Tome $\bar{u} \in (0,1)$ e a trajetória $\delta(\bar{u})$ de $Y_2'(\bar{u})$ por q_1.

Pode acontecer que $\delta(\bar{u})$ chegue exatamente em f (donde vai a s_2). Nesse caso, tome $u' > \bar{u}$ próximo de $\bar{u}$: como a perturbação correspondente a u' é maior, $\delta(u')$ chega abaixo de f e, portanto, entra no anel Δ, tendendo para alguma órbita fechada aí formada.

Se $\delta(\bar{u})$ não chega em f, podemos fazê-la chegar <u>abaixo</u> de f para um adequado u (argumento de minimum lift - lema 6), e a situação se repete.

Quebraremos um por um dos gráficos de Y_2, com esta técnica. Finalmente, obtemos um campo que poderá apresentar conexões entre selas, as quais quebraremos com a perturbação do caso 1º).

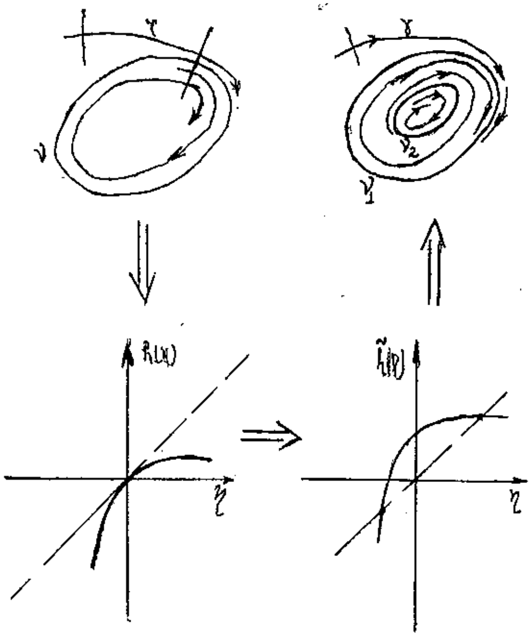
Chegamos, assim, a um campo Y_3 com as propriedades requeridas.

LEMA 10 - Y_3 pode ser aproximado por um campo Y_4 do tipo (1,2,3,4).

<u>Demonstração</u>: Y_4 será obtido em duas etapas. Na primeira, aproximaremos Y_3 por um campo $Y_{3,1}$ do tipo de Y_3 e cujas separatrizes de sela fiquem tôdas "estabilizadas" i.e. se γ parte de sela e vai para uma órbita fechada ν, então ν deverá ser hiperbólica.

Feito isto, pequenas perturbações subsequentes de $Y_{3,1}$ não introduzirão ligações de selas. Na segunda etapa é que obteremos um Y_4 do tipo (1,2,3,4) e arbitràriamente próximo a Y_3 em $\mathfrak{X}(M)$.

Suponha que γ é uma separatriz de sela tal que $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada não-hiperbólica ν. Se ν é estável (= atrator) de um lado e instável (= repulsor) do outro (cf. fig.) então [4] uma pequena perturbação restrita a uma vizinhança tubular de ν pode substituir ν por duas órbitas fechadas ν_1 e ν_2 tais que $\nu_1 = \omega(\gamma)$ é estável de ambos os lados e ν_2 é instável de ambos os lados.



Podemos então admitir, de partida, que ν seja estável dos dois lados.

Sabemos que o índice de estabilidade de uma órbita fechada Γ, que é a derivada $h'(0)$ da respectiva transformação h de Poincaré na origem, tem por expressão

$$\exp \int_{\Gamma} (f_x + g_y)$$

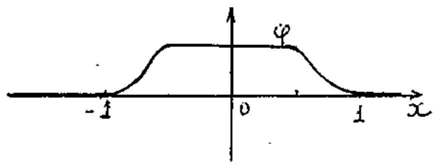
em que f,g são as componentes do campo num sistema de coordenadas válido numa vizinhança de Γ. Logo Γ é hiperbólica se e só se

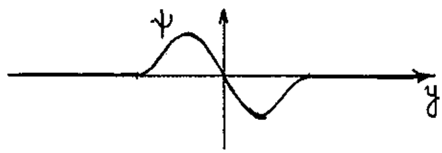
$$\exp \int_{\Gamma} = \exp \int_{\Gamma} (f_x + g_y) \neq 1 .$$

Mostremos então uma pequena perturbação de Y_3 que mantém ν mas torna $\exp \int_{\Gamma} \neq 1$.

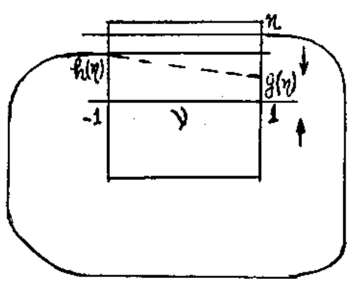
Considere um pequeno box $B: |x|, |y| \leq 1$ centrado em $p \in \nu$ e o campo

$$Y_3' = Y_3 + e\, \varphi(x)\, \psi(y) Z$$





em que $e > 0$ é uma constante arbitràriamente pequena, φ e ψ são funções diferenciáveis como na fig., e $Z = (0,1)$.



Y_3' em B equivale ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = e\, \varphi(x)\psi(y) \end{cases}$$

ou à equação

$$\frac{dy}{dx} = e\, \varphi(x)\psi(y) = F(x,y) \qquad (*)$$

Como ν é suposta não hiperbólica, temos

$$h'(0) = \lim_{n\to 0} \frac{h(n)}{n} = 1$$

Chamando de g a transformação de Poincaré relativa a ν para o campo perturbado, Y_3', devemos provar que

$$g'(0) = \lim_{n\to 0} \frac{g(n)}{n} = \lim_{n\to 0} \frac{g(n)}{h(n)} \frac{h(n)}{n} = \lim_{n\to 0} \frac{g(n)}{h(n)}$$

é $\neq 1$.

Mas êste último limite é a derivada da solução $y(x) = 0$ da equação (*), em relação à condição inicial, quando se passa da seção $x = -1$ para a $x = 1$; logo:

$$\lim_{n\to 0} \frac{g(n)}{h(n)} = \exp \int_{-1}^{1} F_y(x,y(x))dx =$$

$$= \exp e \int_{-1}^{1} \underbrace{\varphi(x)\ \psi'(0)}_{<0}\ dx < 1$$

O argumento deve ser repetido tantas vêzes quantas as órbitas fechadas não-hiperbólicas que sejam conjuntos-limites de separatrizes de sela. Obteremos, assim, um campo $Y_{3,1}$, ainda do tipo de Y_3 e com tôdas as separatrizes estabilizadas.

De $Y_{3,1}$ vamos obter um campo do tipo (1,2,3,4).

Segundo um teorema de Whitney [5, p. 654], existe um difeomorfismo $\Phi: M \to \widetilde{M}$ de M sôbre uma subvariedade analítica $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^5$. O campo $Y_{3,1}$ corresponde a um campo $\tilde{Y}_{3,1}$ sôbre $\tilde{M}$. Extenda $\tilde{Y}_{3,1}$ a uma bola B tal que $\tilde{M} \subset B \subset \mathbb{R}^5$ e aproxime $\tilde{Y}_{3,1}$ em B por um campo polinomial (Teorema de Weierstrass). Projete, em seguida, o campo polinomial sôbre os planos tangentes a $\tilde{M}$, o que dá um campo $\tilde{Y}_{3,2}$. O correspondente em M é um campo $Y_{3,2}$ que aproxima $Y_{3,1}$. Observemos também que, por causa do difeomorfismo, $\tilde{Y}_{3,2}$ e $Y_{3,2}$ têm a mesma configuração.

1º caso: Tôdas as trajetórias de $Y_{3,2}$ são fechadas.

Então $Y_{3,2}$ não tem singularidade donde $\chi(M) = 0$ e M é T^2 (pois M orientável).

Decomponha M em faixas σ_i de órbitas fechadas, centradas em certas γ_i, $i=1,\ldots,m$. Então pequenas perturbações restritas a cada σ_i podem tornar cada γ_i hiperbólica estável (técnica usada na construção de Y_3'). As curvas que constituem $\partial\sigma_i$ tornam-se instáveis e as podemos fazer hiperbólicas também.

Obtemos, então, um campo do tipo (1,2,3,4).

2º caso: Nem tôdas as trajetórias de $Y_{3,2}$ são fechadas.

Analisemos a distribuição das órbitas fechadas de $\tilde{Y}_{3,1}$ sôbre $\tilde{M}$.

A transformação de Poincaré h relativa a cada órbita fechada γ de $\tilde{Y}_{3,1}$ é analítica, como o campo. Logo ou h é idênticamente nula ($\Rightarrow$ faixas de órbitas fechadas) ou os zeros de h são isolados ($\Rightarrow$ órbitas fechadas isoladas).

Mostremos que a primeira situaçãonão ocorre aqui. De fato, supondo que haja uma faixa, F, tome $p \in \partial F$ e olhe a trajetória $\lambda \ni p$: $\alpha(\lambda)$ e $\omega(\lambda)$ não podem ser fontes e poços, já que as trajetórias vizinhas de λ são fechadas.

Logo $\alpha(\lambda)$ e $\omega(\lambda)$ são selas, o que contradiz o fato de ser $Y_{3,2}$ do tipo (3). À mesma contradição chegaremos supondo que $Y_{3,2}$ tenha uma infinidade de órbitas fechadas isoladas, bastando olhar a trajetória λ por um ponto p de acumulação delas.

Se $Y_{3,2}$, cujas singularidades são hiperbólicas e não tem ligação de selas, satisfizer também (2), só faltará tornar suas órbitas fechadas hiperbólicas, o que se faz como na contrução de Y_3'.

Suponha, porém, que $Y_{3,2}$ não é do tipo (2) e seja γ tal que $\omega(\gamma)$ não é singularidade ou órbita fechada. Tome um minimal $\mu \subset \omega(\gamma)$ donde μ não-trivial. Use o Lema 5 para obter por um ponto de μ uma órbita fechada γ_1 que não limita disco; torne-a hiperbólica. Repita a construção, caso ainda haja minimal não-trivial. Acabamos obtendo, conforme o Lema 7, um campo sem minimais não-triviais e com certo número de órbitas fechadas $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$ tais que

(P) cada γ_i é hiperbólica, nenhuma limita disco e duas diferentes nunca são homotópicas.

Se o número total de órbitas fechadas é finito, basta tornar cada uma hiperbólica.

Se há infinitas, fazemos nova aproximação analítica, eventualmente perdendo a condição (2). Para a obtermos de nôvo, introduzimos mais órbitas fechadas, com a propriedade (P) acima. O processo não se prolonga indefinidamente, por causa do que afirma o Lema 1.

OBSERVAÇÃO: Começando a demonstração acima com um campo de Kupka-Smale obtemos alguma simplificação na sua apresentação. Descrevemos de modo sucinto a nova apresentação.

Sabemos por teorema demonstrado nestas notas que os campos de Kupka-Smale em M^2 constituem um conjunto denso. Basta aproximar um campo de Kupka-Smale por um campo de Morse-Smale. As demonstrações dos Lemas 5, 6 e 7 são um pouco mais simples. Em particular o campo Y_1 do Lema 7 pode ser aproximado por um campo Y_2 cujas singularidades são hiperbólicas, que não possui recurrências não triviais e que apresenta <u>auto-ligações</u> de selas. Do Lema 8 concluimos que se γ é órbita de Y_2, $\omega(\gamma)$ ou é singularidade, ou é órbita fechada ou é uma separatriz de auto ligação de selas. Diremos que uma separatriz de sela está estabilizada se seu α ou ω-limite fôr um poço ou uma órbita fechada hiperbólica. Aproximamos Y_2 por um campo Y_3 que não possui ligação de selas e que tem suas separatrizes de selas estabilizadas. Finalmente aproximamos Y_3 pór um campo Y de Kupka-Smale perturbando-o fora de uma vizinhança de seus elementos críticos hiperbólicos e de suas separatrizes de selas. O número de órbitas fechadas de Y é finito de acôrdo com o teorema de Bendixon-Poincaré no cilindro e com o Lema 1.

Pelo Lema 5, caso Y possua recurrência não trivial a variedade é o toro e é trivial aproximar Y por um Morse-Smale neste caso.

Nos demais casos Y é de Morse-Smale e o teorema está demonstrado.

REFERÊNCIAS

[1] PEIXOTO, M.M. - Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology 1 (1962), 101-120.

[2] PEIXOTO, M.M. - Teoria geométrica das equações diferenciais, 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1969).

[3] PALIS, J. - On Morse-Smale dynamical systems, Topology 8 (1969), 385-405.

[4] DUFF, G.F.D. - Limit cycles and rotated vector fields, Ann. of Math. 57 (1953), 15-31.

[5] WHITNEY, H. - Differentiable manifolds, Ann. of Math. 37 (1936), 645-680.

O TEOREMA DE KUPKA E SMALE

J. Pitombeira Carvalho e
Nathan Moreira dos Santos

§1. Enunciado do Teorema

Seja M uma variedade C^∞, compacta e X um campo vetorial de classe C^r, $r \geq 1$, em M. Consideremos as seguintes propriedades:

G_1: as singularidades de X são hiperbólicas (como M é compacta e as singularidades hiperbólicas são isoladas, X possui apenas um número finito de singularidades).

G_2: as órbitas fechadas de X são hiperbólicas (isto é, as transformações de Poincaré a elas associadas possuem apenas pontos fixos hiperbólicos).

G_3: as variedades estável e instável associadas às singularidades e órbitas fechadas de X são transversais.

Seja χ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^r de M. Como M é compacta, χ, com a topologia C^r, é um espaço de Banach se $0 \leq r < \infty$ e um espaço de Fréchet se $r = \infty$. Seja $\mathcal{G}_i$ o conjunto dos campos vetoriais $X \in \chi$ que possuem a propriedade G_i, $i=1,2,3$. Consideraremos também os conjuntos

$$\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_{123} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 .$$

Mostraremos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{123}$ é o conjunto dos campos genéricos de χ, a noção de genericidade sendo precisada abaixo.

DEFINIÇÃO 1.1 - Um conjunto $C \subset \chi$ é <u>residual</u> $\Leftrightarrow$ C contém a intersecção de uma família enumerável de conjuntos abertos e densos.

Pelo teorema de Baire, desde que χ é completo, C é denso em χ.

TEOREMA (Kupka-Smale) - $\mathcal{G}$ é residual em χ.

<u>Demonstração</u>: Pelo lema da transversalidade de Thom, $\mathcal{G}_1$ é aberto e denso em χ. Assim, o procedimento natural seria demonstrar que $\mathcal{G}_2$ é residual em $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_3$ é residual em $\mathcal{G}_2$. Por razões técnicas, que logo se tornarão aparentes, o processo de demonstração será o seguinte: para cada inteiro $T > 0$, consideraremos os seguintes conjuntos

$\chi(T)$ é o conjunto dos campos X em $\mathcal{G}_1$ cujas órbitas fechadas de período menor ou igual a T são hiperbólicas.

$\tilde{\chi}(T)$ é o conjunto dos campos X de $\chi(T)$ cujas variedades estável e instável associadas aos elementos críticos (isto é, singularidades e órbitas fechadas) de período menor ou igual a T são transversais.

Do visto acima, é claro que

$$\mathcal{G}_{12} = \bigcap_{T=1}^{\infty} \chi(t) \quad \text{e} \quad \mathcal{G} = \bigcap_{T=1}^{\infty} \overline{\chi}(T) \qquad (I)$$

Demonstraremos dois teoremas:

TEOREMA A - $\chi(T)$ é aberto e denso em χ.

TEOREMA B - $\tilde{\chi}(T)$ é residual em $\chi(T)$.

Segue-se do Teorema A e de (I) que $\mathcal{G}_{12}$ é residual em χ e do Teorema B e também de (I) que $\mathcal{G}$ é residual em χ.

§2 - Lemas

Os lemas abaixo falam sôbre o comportamento dos elementos críticos próximos a elementos críticos hiperbólicos para campos próximos de um dado campo X.

LEMA 1 - Seja V uma vizinhança da origem no R^n e $X: V \to R^n$ um campo vetorial de classe C^1 tendo a origem como singularidade hiperbólica.

Dado $T > 0$ existem vizinhanças U da origem em V e $\mathcal{U}$ de X em $C_b^r(V,R^n)$ e uma função de classe C^r $p:\mathcal{U} \to U$ tais que:

a) Cada campo $Y \in \mathcal{U}$ tem uma única singularidade $p(Y)$ em U e essa singularidade é hiperbólica.

b) As órbitas fechadas dos campos $Y \in \mathcal{U}$ que interceptam U têm período maior que T.

<u>Demonstração</u>: A parte a) resulta do teorema das funções implícitas e do fato de que os operadores hiperbólicos são abertos em $L(R^n)$.

b) O espectro de $L = X'(0):R^n \to R^n$ é separado pelo eixo imaginário, assim, pelo teorema de Hartman, existe $\delta > 0$ (tal que a bola $B(0,2\delta)$ de centro em 0 e raio 2δ está contida em V) e uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $C_b^r(V,R^n)$ satisfazendo às seguintes propriedades:

(1) para cada $Y \in \mathcal{U}$ existe um homomorfismo $h_Y:B(0,2\delta) \to R^n$ tal que $h_Y\, Y_t(x) = L_t\, h_Y(x)$ para todo $x \in B(0,2\delta)$, todo $Y \in \mathcal{U}$ e todo tempo t onde $Y_t(x)$ for definido.

(2) h_Y depende contìnuamente de Y.

Desde que $X_t(0) = 0\ \forall t \in R$, então dado $\delta > 0$ é possível restringir U de maneira que as seguintes propriedades sejam verificadas:

(i) $U \subset B(0,\delta) \subset B(0,2\delta) \subset V$

(ii) o fluxo $\begin{aligned} J \times B(0,\delta) &\xrightarrow{\alpha} R^n \\ (t,x) &\longmapsto X_t(x) \end{aligned}$

de X está definido em um intervalo $J \supset [0,T]$.

(iii) $X_t(x) \in B(0,\delta)\ \forall\, x \in U,\quad 0 \leq t \leq T.$

Assim (cf. I.G. Petrovski, Ord. Diff. Equations, pg. 56), $\mathcal{U}$ pode ser restringido de maneira que

$$\|X_t(x)-Y_t(x)\| < \delta \quad \forall\, x \in B(0,\delta),\quad 0 \leq t \leq T$$

e que o fluxo

$$\begin{aligned} J \times \mathcal{U} \times B(0,\delta) &\xrightarrow{\beta} R^n \\ (t,X,x) &\longmapsto X_t(x) \end{aligned}$$

esteja definido em um intervalo $J \supset [0,T]$.
Resulta, do visto acima, e de (iii) que

$$\beta([0,T] \times \mathcal{U} \times U) \subset B(0,2\delta) \tag{3}$$

pois

$$\|Y_t(x)\| \leq \|Y_t(x)-X_t(x)\| + \|X_t(x)\| < 2\delta .$$

Desde que $L_t(x) = e^{tL}(x) \neq x \quad \forall\, x \in R^n$ e todo $t \neq 0$ (pois os operadores e^{tL} são hiperbólicos se $t \neq 0$), então (1) e (4) demonstram b).

O lema análogo para difeomorfismos é

LEMA 1' - Seja V uma vizinhança da origem no R^n e $\varphi: V \to R^n$ um difeomorfismo de classe C^r, cuja origem é ponto fixo hiperbólico.

Dado um inteiro $N > 0$ existem vizinhanças U da origem no R^n, $\mathcal{U}$ de φ em $C^r_b(V,R^n)$ e uma função $f: \mathcal{U} \to U$ de classe C^r, tais que:

a) cada $\psi \in \mathcal{U}$ tem um único ponto fixo $f(\psi)$ em U e êsse ponto é hiperbólico.

b) Os pontos periódicos de cada $\psi \in \mathcal{U}$ em U têm período maior que N.

LEMA 2 - Seja $T > 0$ e γ uma órbita fechada hiperbólica de período menor ou igual a T de um campo $X \in C^r_b(V,R^n)$. Então existe uma vizinhança tubular U de γ em V e uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $C^r_b(V,R^n)$ tais que:

a) a cada campo $Y \in \mathcal{U}$ corresponde uma órbita fechada hiperbólica $\gamma(Y)$ e tôdas as outras órbitas fechadas de Y que interceptam U têm período maior ou igual a T,

b) as órbitas $\gamma(Y)$ variam contìnuamente com Y.

<u>Demonstração</u>: Seja τ o período de γ e n o maior inteiro em T/τ. Ponha $N = n+1$. Seja $\varphi: \Sigma \to \Sigma'$ a transformação de Poincaré de γ (considerare-

mos Σ e Σ' abertos do R^{n-1} e O ponto fixo hiperbólico de φ). Sejam Σ e $\mathcal{U}_\varphi$ as vizinhanças, de O em R^{n-1}, e de φ em $C_b^r(\Sigma, R^{n-1})$ e $f:\mathcal{U}_\varphi \to \Sigma$ a função de classe C^r dadas pelo Lema 1'. Seja U a vizinhança tubular correspondente a $\varphi:\Sigma \to \Sigma'$ e $\mathcal{U}$ a vizinhança de X em $C_b^r(V,R^n)$ tal que cada $Y \in \mathcal{U}$ tem transformação de Poincaré P_Y em $\mathcal{U}_\varphi$. Assim, cada transformação de Poincaré $P_Y:\Sigma \to R^{n-1}$ tem um único ponto fixo $f(Y)$ o qual é hiperbólico e corresponde a uma órbita fechada hiperbólica $\gamma(Y)$ de Y em U. Além disso, desde que $f(Y) = f(P_Y)$ varia contìnuamente com Y, então $\gamma(Y)$ varia contìnaumente com Y. Desde que $f(Y)$ é o único ponto fixo para os iterados P_Y^k, $k=1,\ldots,N$, então qualquer órbita fechada de Y, distinta de $\gamma(Y)$, que intercepta U tem período τ' próximo a $\ell\tau$ onde $\ell > N$. Observando que $\ell\tau > N\tau > T$, concluimos que $\tau' > T$.

COROLÁRIO - Se $X \in \chi(T)$, então X tem apenas um número finito de órbitas fechadas de período $\leq T$.

Demonstração: Se existissem infinitas órbitas fechadas de período $\leq T$, existiria uma sequência de pontos (p_n), situados em órbitas distintas, tais que $p_n \to p$. Realmente, pelo Lema 1, p não pode ser ponto singular. Pelo Lema 2, p nao pode estar situado em órbita fechada (de período $\leq T$). Pelo teorema do fluxo longo, a órbita que passa por p não pode ter período $> T$, pois nesse caso as órbitas vizinhas também teriam.

LEMA 3 - Seja K um compacto de M e $X \in \chi$. Suponha que X não possui singularidades em K nem órbitas fechadas de período $\leq T$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X consistindo de campos cujas órbitas que encontram K têm período maior que T.

<u>Demonstração</u>: Pelo teorema do fluxo longo (cf. R. Abraham -J. Robbin, Transversal Mappings and Flows, pg. 58) para cada $x \in K$ corresponde uma vizinhança U_x de x em M e $\mathcal{U}(X,x)$ de X em χ tal que tôdas as órbitas que passam por U_x, de campos $Y \in \mathcal{U}(X,x)$, têm período maior que T. Extraia cobertura finita $U_{x_1},\ldots,U_{x_n}$ de K e tome $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}(X,x_i)$.

§3. <u>Demonstração do Teorema A</u>

<u>1ª parte</u>. <u>$\chi(T)$ é aberto em $\mathcal{G}_1$</u>.

Seja $X \in \chi(T)$. Para cada ponto $p \in M$ podem ocorrer três situações:

a) <u>p não é singularidade de X nem está sôbre órbita</u>

<u>fechada de período $\leq T$</u>.

Nesse caso escolho vizinhança W de p em M tal que $\bar{W}$ não contém nenhuma singularidade de X e não intercepta nenhuma órbita fechada de período $\leq T$ (isso é possível pois as singularidades hiperbólicas são isoladas e a união das órbitas fechadas de período $\leq T$ é compacta, pelo corolário). Pelo Lema 3, escolho vizinhança $\mathfrak{W}$ de X em $\mathcal{G}_1$ tal que as órbitas fechadas dos campos $Y \in \mathfrak{W}$ que interceptam $\bar{W}$ têm período $\geq T$.

b) <u>p é singularidade de X</u>. Sejam U e $\mathfrak{U}$ as vizinhanças de p e de X dadas pelo Lema 1.

c) <u>p está sôbre uma órbita de período $\leq T$</u>. Sejam V e $\mathfrak{V}$ as vizinhanças dadas pelo Lema 2.

Extraio uma cobertura finita de M por vizinhanças W, U e V. Seja $\mathfrak{U}(X)$ a intersecção das correspondentes vizinhanças $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$. Então $\mathfrak{U}(X) \subset \mathcal{X}(T)$, mostrando que $\mathcal{X}(T)$ é aberto em $\mathcal{X}$.

<u>2ª parte</u>. <u>$\mathcal{X}(T)$ é denso em $\mathcal{G}_1$</u>.

Seja $X \in \mathcal{G}_1$. Mostraremos que, após um número finito de perturbações de X, é possível obter $Y \in \mathcal{X}(T)$ arbitràriamente próximo de X.

<u>Afirmação 1</u>: existe $\tau > 0$ tal que nenhuma órbita fechada

de X tem período menor que τ. Realmente, se não existisse $\tau > 0$, poderíamos construir (por compacidade de M) uma sequência $p_n \to p$ onde cada p_n pertenceria a uma órbita γ_n de período τ_n e $\tau_n \to 0$. Pelo teorema do fluxo longo, p é singularidade de X, o que pelo Lema 1 é impossível.

Seja $\Gamma = \Gamma(\tau, \frac{3\tau}{2})$ a união das órbitas de X com período no intervalo $[\tau, \frac{3\tau}{2}]$.

<u>Afirmação 2:</u> <u>Γ é compacto</u>.

Desde que M é compacta, devemos mostrar que Γ é fechado. Seja p_n uma sequência em Γ e $p_n \to p$. Pelo Lema 1 p não é singularidade de X. Pelo teorema do fluxo longo p não pode estar sôbre órbita γ de período $> \frac{3\tau}{2}$. Assim $p \in \Gamma$.

Sejam $p_1, \ldots, p_n$ as singularidades de X. Desde que essas singularidades são tôdas hiperbólicas, sejam U_i e $\mathcal{U}_i$ as vizinhanças de p_i em M e de X em $\mathcal{G}_1$ dadas pelo Lema 1. Considere as vizinhanças

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad \text{e} \quad \mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \ .$$

Assim, as órbitas fechadas dos campos $Y \in \mathcal{U}$ que interceptam U têm período maior que T. Trabalhamos sempre em $\mathcal{U}$ e portanto não nos preocuparemos com o que acontece em U.

Para cada $\gamma \in \Gamma$ consideremos vizinhanças tubulares concêntricas $V_\gamma \subset \bar{V}_\gamma \subset U_\gamma$ de γ. Sejam $\Sigma_\gamma \subset \Sigma'_\gamma$ as secções transversais correspondentes e $\varphi_\gamma : \Sigma_\gamma \to \Sigma'_\gamma$ a transformação de Poincaré de X. Consideremos U_γ e Σ'_γ e uma vizinhança $W_\gamma \subset V_\gamma$ suficientemente pequenas de maneira a que se verifiquem as seguintes propriedades:

i) as trajetórias por pontos de Σ'_γ gastam tempo maior que $\frac{3\tau}{4}$ para interceptar Σ'_γ novamente.

ii) tôda órbita por pontos de W_γ intercepta Σ_γ pelo menos uma vez.

Estas propriedades permanecem válidas em uma vizinhança $\mathcal{V}_\gamma$ de X em $\mathcal{U}$. Desde que as vizinhanças W_γ cobrem o compacto Γ extraia uma subcobertura finita $W_{\gamma_1}, \ldots, W_{\gamma_N}$ para Γ e sejam $\mathcal{V}_{\gamma_1}, \ldots, \mathcal{V}_{\gamma_N}$ as vizinhanças correspondentes de X.

Seja

$$W = \bigcup_{i=1}^{N} W_{\gamma_i} , \qquad \mathcal{V}^1 = \bigcap_{i=1}^{N} \mathcal{V}_{\gamma_i} .$$

O conjunto $K = M - (U \cup W)$ é compacto e não contém singularidades nem órbitas fechadas de X de período menor ou igual $\frac{3\tau}{2}$. Assim, pelo Lema 3 existe vizinhança $\mathcal{W}_1$ de X em $\mathcal{V}^1$ tal que as órbitas fechadas dos campos $Y \in \mathfrak{W}_1$ que interceptam K têm período maior que $\frac{3\tau}{2}$. Não nos preocuparemos com essas órbitas por enquanto.

Pertubaremos X de maneira a obter um campo $Y_1 \in \mathfrak{W}_1$ cujas órbitas fechadas que passam por pontos de W sejam hiperbólicas.

Pela densidade de $\mathcal{G}_1$ (para difeomorfismos) escolha um difeomorfismo $\psi:\Sigma_1 \to \Sigma_1'$ contendo apenas pontos fixos hiperbólicos, suficientemente próxima da transformação de Poincaré $\varphi_1:\Sigma_1 \to \Sigma_1'$ de maneira que exista um campo $Y_1' \in \mathfrak{W}_1$ cuja transformação de Poincaré seja ψ_1 e além disso $Y_1'|M - U_{Y_1} = X$. Assim, as órbitas de Y_1' que passam por pontos de W_1 e têm período menor ou igual a $\frac{3\tau}{2}$ são genéricas (e portanto em número finito). Como essa propriedade é aberta, podemos determinar uma vizinhança $\mathfrak{W}_1' \subset \mathfrak{W}_1$ de Y_1' onde ela se verifica. Repitamos o argumento para Y_1' obtendo um campo Y_2' e uma vizinhança $\mathfrak{W}_2'$ de Y_2' tal que as órbitas fechadas dos campos $Z \in \mathfrak{W}_2'$ que interceptam W_2 (e também W_1) e têm período menor ou igual a $\frac{3\tau}{2}$ são genéricas (e portanto em número finito).

Repetindo o argumento N vêzes obtemos um campo Y_N' e uma vizinhança $\mathfrak{W}_N'$ de Y_N' com a seguinte propriedade: tôda órbita fechada de campos $Z \in \mathfrak{W}_N'$ cujo período é menor ou igual a $\frac{3\tau}{2}$ e intercepta algum W_i é hiperbólica. Seja $Y_1 = Y'_N$ e $\mathfrak{W}^1 = \mathfrak{W}'_N$.

Desde que Y_1 possui apenas um número finito de órbitas fechadas de período menor ou igual a $\frac{3\tau}{2}$, tôdas hiperbólicas, isolamos essas órbitas por vizinhanças tubulares conforme o Lema 2 e restringimos $\mathfrak{W}^1$. Teremos então a situação inicial e podemos repetir o argumento para o conjunto $\Gamma\,(\frac{3\tau}{2}, 2\tau)$, união das órbitas fechadas de Y_1 de período no intervalo $[\frac{3\tau}{2}, 2\tau]$. Obtemos assim um campo Y_2 e uma vizinhança $\mathfrak{W}_2$ de Y_2 onde os campos de órbitas cujo período é menor ou igual a 2τ são genéricas. Após repetir o argumento ℓ vêzes, (onde $\frac{\ell\tau}{2} > T$) obtemos um campo $Y = Y_\ell$ em $\chi(T)$ arbitràriamente próximo de X.

Nosso objetivo, agora, é demonstrar o

TEOREMA B - $\tilde{\chi}(T)$ é residual em $\chi(T)$.

A demonstração dêste teorema pode ser reduzida a provar que para todo $X \in \chi(T)$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $\chi(T)$ tal que $\tilde{\chi}(T) \cap \mathcal{U}$ contém um conjunto residual em $\mathcal{U}$.

Sejam p_i, $i=1,2,\ldots,N$ os elementos críticos de X (suas singularidades e órbitas fechadas de período $\leq T$). Os Lemas precedentes nos dão vizinhanças $\mathcal{U}_i$, U_i, $i=1,2,\ldots,N$, tais que se $Y \in \mathcal{U}_i$, então, em U_i, Y tem um e sòmente um elemento crítico de período $\leq T$. Além disso, podemos tomar estas vizinhanças U_i disjuntas.

Antes de iniciar a demonstração pròpriamente dita, relembremos que podemos, na topologia C^r, aproximar o campo X por um campo X' de classe C^{r+1}. A razão desta primeira aproximação ficará clara pela fórmula A, que dá a aproximação desejada no Teorema B. Nesta fórmula é definido um campo usando derivadas. Se estivéssemos trabalhando com um campo C^r o resultado seria um campo de classe C^{r-1}. De agora em diante, X será o campo C^{r+1} obtido acima.

Para cada um dos pontos críticos p_i, $i=1,2,\dots,N$, podemos obter um disco compacto B_i^+ contido na variedade estável de p_i, e B_i^- contido na variedade instável de p_i, com cêrcas Σ^+, Σ^- dêstes discos, estando as cêrcas contidas em U_i e transversais a todo campo $Y \in \mathcal{U}_i$. Definamos, para $Y \in \mathcal{U}_i$

$$B_i^+(Y,-t) = \varphi_t(Y)\, B_i^+(Y)$$

$$B_i^-(Y,\ t) = \varphi_t(Y)\, B_i^-(Y)$$

Observe que êstes conjuntos são "expansões" de $B_i^+(Y)$ e $B_i^-(Y)$ respectivamente.

Se τ é um inteiro positivo, seja

$$\mathfrak{F}(i,j,\tau) = \{Y \mid Y \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \text{ e com } B_i^+(Y,-\tau) \text{ transversal a } B_j^-(Y,\tau)\}.$$

Mostraremos que $\mathfrak{F}(i,j,\tau)$ é aberto e denso em $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.

O fato de que é aberto segue-se de que pequenas perturbações não alteram a transversalidade das variedades compactas $B_i^+(Y,-\tau)$ e $B_j^-(Y,\tau)$ e de que as variedades estável e instável variarão contìnuamente com Y (na topologia C^r).

A demonstração da densidade é mais delicada: Se $Y \in \mathcal{U}_{ij}$ e $\mathcal{V}$ é uma vizinhança de Y, acharemos $\bar{Y} \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{F}(i,j,\tau)$: Caso $B_i^-(Y,\tau)$ seja transversal a $B_j^+(Y,-\tau)$ tomemos $\bar{Y} = Y$. O que fazer se $B_i^-(Y,\tau)$ não é transversal a $B_j^+(Y,-\tau)$? O natural seria perturbar ligeiramente estas variedades, compactas a fim de torná-las transversais. O problema está em provar que as variedades assim obtidas provêm de fato de um campo $\bar{Y}$ próximo (na topologia C^r) a Y. Note que podemos encontrar $r > 0$, r inteiro, tal que $B_i^-(Z,r) \cap B_j^+(Z,-r) = \Phi$ e $\varphi_{-r}(Z) \cap B_j^+(Z,-\tau) = \Phi$ para Z numa vizinhança conveniente de Y (possìvelmente teremos que diminuir a vizinhança $\mathcal{V}$ de Y de maneira a ficarmos na situação descrita por Peixoto [1] 13(b).

Agora, se necessário restringindo a cêrca Σ, retificamos o campo Y ao longo da vizinhança tubular longa $\Sigma \times [-r,\tau]$, ou seja, existe um difeomorfismo $\lambda:\Sigma\times[-r,\tau]$ que leva o campo horizontal unitário de $\Sigma\times[-r,\tau]$ no campo Y. Seja $L = \lambda(\Sigma\times[-r,\tau]) \leq M$ e tomemos $L_1 = \varphi_\tau(Y)\Sigma$ e $C(\tau) = B_j^+(Y,-\tau) \cap L_1$. Observemos que se $B_i^+(Y,-\tau)$ e $B_j^-(Y,\tau)$ forem transversais em um ponto $p \in B_i^-(Y,\tau) \cap \cap B_j^+(Y,-\tau)$ então são transversais sôbre todo o pedaço de trajetória de Y que passa por p e está contida na intersecção; desta maneira, para estudar a transversalidade de $B_i^-(Y,\tau)$ e $B_j^+(Y,-\tau)$ podemos iterar todos os pontos até o face $L_1 = \varphi_\tau(Y)\Sigma$; é mesmo suficiente estudar a transversalidade de $C(\tau) = B_j^+(Y,-\tau) \cap L_1$ e $\varphi_\tau(Y)S_i^{-1}(Y)$, onde $S_i^- = \Sigma \cap B_i^-$. Se $C = \varphi_{-\tau}(Y)C(\tau)$, o problema reduz-se a estudar a transversalidade de C e S_i^- em Σ. Em primeiro lugar, se $\partial\Sigma$ é a fronteira de Σ, podemos tomar a vizinhança ν de maneira que $C(\tau) \cap \partial\Sigma = \Phi$ (temos também neste caso, de maneira óbvia, que $S_i^- \cap \partial\Sigma = \Phi$). Como C, S_i^- e Σ são compactos, podemos aplicar o Lema da isotopia de Thom: Se $J = [0,1]$ e Ω é uma vizinhança de $\partial\Sigma$, disjunta de C e S_i^-, podemos achar $\theta:\Sigma\times J \to \Sigma$, θ C^{r+1} próxima à identidade e tal que

$$\theta|_\Omega = Id$$

$$\theta(x,0) = I_\Sigma$$

Se $\psi_1(x) = \theta(x,1)$, então $\psi_1(S_i^-(Y))$ é transversal a C.

$$D_1\theta = 0.$$

A partir de $\theta:\Sigma \times J \to \Sigma$ construiremos o campo $\bar{Y}$: em primeiro lugar, definimos $\psi:\Sigma\times[-\nu,\tau] \to \Sigma\times[-\nu,\tau]$ por

$$\begin{aligned} \Sigma\times[-\nu,0] &\xrightarrow{1} \Sigma\times[-\nu,0] \\ \Sigma\times[0,\tau] &\longrightarrow \Sigma\times[0,\tau] \\ (x,t) &\longmapsto (\theta(x,t/\tau),t) \end{aligned}$$

Temos, agora, a seguinte situação:

$$\Sigma\times[-\nu,\tau] \xrightarrow{\psi} \Sigma\times[-\nu,\tau] \xrightarrow{\lambda} M$$

e definiremos o campo $\bar{Y}$ como segue:

$\bar{Y}(x) = Y(x)$ se $x \in M-L$

$\bar{Y}(x) = \lambda_* \circ \psi_* \, E(\psi^{-1} \circ \lambda^{-1}(x))$ se $x \in L$ (fórmula A)

onde E é o campo unitário horizontal em $\Sigma\times[-\nu,\tau]$ tal que $\lambda_*E = Y$ em L.

Como a isotopia θ pode ser feita arbitràriamente próxima à identidade logo $\bar{Y}$ pode ser feito arbitràriamente próximo a Y (na topologia C^{r+1}).

Note que a variedade estável B_j de p_j não foi alterada (ela pode ser obtida como os iterados negativos de B_j^+) e $B_j^+(\bar{Y}_1,-\tau) \cap L_1 = B_j^+(Y_1,-\tau) \cap L_1 = C(\tau) = C(\bar{Y}_1,\tau)$.

Mostraremos agora que $C(\tau) = \mathbb{C}(\bar{Y},\tau)$ é transversal a $\varphi_\tau(\bar{Y})\ S_i^-(\bar{Y}) = \varphi_\tau(\bar{Y})\ S_i^-(Y)$. Para isso, note que $\varphi_1(\bar{Y})\ S_i^-(\bar{Y})$ é transversal a C. Como $\varphi_\tau(\bar{Y})\ S_i^-(\bar{Y}) = \lambda(\varphi_1(S_i^-(\bar{Y}),\tau)$, vemos que $\lambda(\varphi_1(\bar{Y})\ S_i^-(Y),\tau)$ é transversal a $\lambda(C,\tau)$ e a demonstração está concluida.

O caso em que $i = j$ é de tratamento análogo.

Uma vez provado que $\mathfrak{F}(i,j,\tau)$ é aberto e denso em $\mathfrak{U}_{ij}$, seja $\mathfrak{F}(\tau) = \bigcap_{i,j=1}^{N} \mathfrak{F}(i,j,\tau) = \mathfrak{F}(\tau)$. Temos então que $\mathfrak{F}(\tau)$ é aberto e denso em $\bigcap_{i=1}^{N} \mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}$. Mas como $\widetilde{\chi}(T) = \bigcap_{\tau=1}^{\infty} \mathfrak{F}(\tau)$, fica provado que, dado $X \in \chi(T)$, existe uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de X em $\mathfrak{X}(T)$ tal que $\widetilde{\chi}(T) \cap \mathfrak{U}$ contém um conjunto residual em $\mathfrak{U}$.

Surge agora a seguinte pergunta: Como provar um resultado análogo (teorema de Kupka-Smale) para difeomorfismos?

Com êste objetivo em mente, introduzimos os seguintes conceitos:

Se M é uma variedade e $f:M \to M$ é um difeomorfismo, consideremos o produto $M\times R$ e estabeleçamos aí a relação de equivalência gerado por $(x,t) \sim (f(x),t-1)$.
Seja $\widetilde{M}$ o quociente $M/\sim$ e $p:M\times R \to \widetilde{M}$ a projeção canônica. Seja E o campo unitário horizontal E em $M\times R$ e consideremos o campo (!) X dado por $p(E)$. Se $x \in M \subset \widetilde{M}$, então a órbita de X por x é aberta se e sòmente se x

não é ponto periódico de f. É fácil ver que X é transversal a M e também que f é a transformada de Poincaré (global) relativa a uma órbita fechada.

O teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos pode ser demonstrado usando os seguintes fatos:

a) $p \in Per(f)$ é hiperbólico $\leftrightarrow \gamma_p$ é hiperbólica para X

b) $p,q \in Per(f)$ e hiperbólicos, $W^s(p)$ é transversal a $W^u(q)$ em $M \rightarrow W^s(\gamma_p)$ é transversal a $W^u(\gamma_q)$ em $\widetilde{M}$.

c) $\exists\ \mathcal{U}(X) \subseteq \chi(M)$ tal que $Y \in \mathcal{U}(X) \rightarrow Y$ é transversal a M.

REFERÊNCIAS

[1] M.M. PEIXOTO - On an approximation theorem of Kupka and Smale, Journal of Differential equations, 214-227, 1966.

[2] I. KUPKA - Contribuição à teoria dos campos genéricos, Tese de Doutorado, IMPA, 1964.

[3] S. SMALE - Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, XVII, 97-116, 1963.

STABILITY OF ANOSOV DIFFEOMORPHISMS

A. Verjovsky
and
C. Robinson

In these notes we give a proof of Anosov's theorem on structural stability of diffeomorphisms of a compact C^∞ manifold M without boundary. We also show that the Anosov diffeomorphisms form an open (maybe empty according to M) set in D, where D is the set of C^r diffeomorphisms of M with the C^r topology, $r \geq 1$.

The main references are Moser [1], Mather's appendix in [2] and Hirsch-Pugh [4].

DEFINITION 1 - Let $\langle , \rangle$ be a C^∞ Riemannian metric on M and $|\cdot|$ its induced norm on T_xM for each $x \in M$. We say that $f \in D$ is Anosov if

1) the tangent bundle of M splits in a Whitney direct sum of continuous subbundles $TM = E^s \oplus E^u$, where E^s and E^u are Df-invariant,

2) there exist constants $c, c' > 0$ and $0 < \lambda < 1$

such that

$$|Df_x^n v| \leq c\ \lambda^n |v|$$

$$|Df_x^{-n} w| \leq c'\ \lambda^n |w|$$

for all $x \in M$, $v \in E_x^s$, $w \in E_x^u$ and $n > 0$.

M being compact, this definition is independent of the Riemannian metric $\langle , \rangle$. Also, E^s and E^u are uniquely determined by the above conditions.

Let $\pi : E \to M$ be a vector bundle over M. We denote by $\Gamma(E)$ the Banach space of continuous sections of E, with norm $\|\sigma\| = \sup_{x \in M} |\sigma(x)|$, $\sigma \in \Gamma(E)$.

We denote $\Gamma(TM)$ simply by $\Gamma(M)$. If $f \in D$, then f induces a continuous operator $f_* : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$, defined by $f_*\sigma = Df \circ \sigma\, f^{-1}$, $\sigma \in \Gamma(M)$. That is $f_*\sigma(x) = $ $= Df_{f^{-1}(x)}\, \sigma(f^{-1}(x))$. The linearity of f_* is clear and its continuity follows from the fact that M is compact. In fact, f_* is an isomorphism, where $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$.

A vector bundle $\pi : E \to M$ of class C^r is said to be normed if there is a C^s $(0 \leq s \leq r)$ real function $F : E \to R$ such that $F/\pi^{-1}(x)$ defines a norm on $\pi^{-1}(x)$ for every $x \in M$.

In order to prove that the Anosov diffeomorphism form an open set; we need the following lemmas.

LEMMA 1 - $f \in D$ is Anosov if and only if f_* is hyperbolic. Also, if f is Anosov then there is a C^∞ structure of normed vector bundle on TM for which we can take $c = c' = 1$ in Definition 1.

Proof: If f is Anosov, then $\Gamma(M)$ splits in a direct sum of closed subspaces

$$\Gamma(M) = \Gamma(E^s) \oplus \Gamma(E^u)$$

where

$$\sigma \in \Gamma(E^s) \Leftrightarrow \sigma(x) \in E^s \ , \ \forall \ x \in M$$

$$\sigma \in \Gamma(E^u) \Leftrightarrow \sigma(x) \in E^u \ , \ \forall \ x \in M$$

Since E^s and E^u are Df-invariant, $\Gamma(E^s)$ and $\Gamma(E^u)$ are f_*-invariant. Let $f_s = f_*/\Gamma(E^s)$ and $f_u = f_*/\Gamma(E^u)$. Then $f_* = f_s \oplus f_u$ and f_s, f_u are (continuous) isomorphisms of $\Gamma(E^s)$, $\Gamma(E^u)$. This implies Spectrum $f_* =$ = Spectrum $f_s \cup$ Spectrum f_u. But f being Anosov,

$$\|f_s^n\| \leq c\ \lambda^n$$

$$\|f_u^n\| \leq c'\lambda^n$$

Therefore the spectral radius of f_s and of f_u are not bigger than $\lambda < 1$. Thus f_* is hyperbolic.

Let us now assume that $f_*:\Gamma(M) \to \Gamma(M)$ is hyperbolic for $f \in D$ and $\Gamma(M)$ with the norm induced as before by a Riemannian metric on M. As in [3], $\Gamma(M)$ can be decomposed in a direct sum of f_*-invariant subspaces

$\Gamma(M) = \Gamma^s \oplus \Gamma^u$, so that the spectral radius of $f_s = f_*/\Gamma^s$ and of $f_u^{-1} = f_*^{-1}/\Gamma^u$ are smaller than 1.

For each $x \in M$, define

$$E_x^s = \{\sigma(x) \mid \sigma \in \Gamma^s\}$$

$$E_x^u = \{\sigma(x) \mid \sigma \in \Gamma^u\}$$

It is not hard to see that $E^s = \bigcup_{x\in M} E_x^s$ and $E^u = \bigcup_{x\in M} E_x^u$ are continuous subbundles of TM, Df-invariant and $TM = E^s + E^u$. To see that this sum is direct, we let $v \in E_x^s \cap E_x^u$ for some $x \in M$. Since the spectral radius of f_s and of f_u^{-1} are smaller than 1, there is an integer n_o so that $\|f_s^{n_o}\| < k$, $\|f_u^{-n_o}\| < k$ with $0 < k < 1$. Define $\sigma^s \in \Gamma^s$ and $\sigma^u \in \Gamma^u$ such that $\sigma^s(f^{-n_o}(x)) = Df_x^{-n_o}v$, $\|\sigma^s\| = |Df_x^{-n_o}v|$ and $\sigma^u(x) = v$, $\|\sigma^u\| = |v|$. From this we get $\|f_s^{n_o}(\sigma^s)\| \le k|Df_x^{-n_o}v|$ and $\|f_u^{-n_o}(\sigma^u)\| \le k|v|$. This means that $|v| \le k|Df_x^{-n_o}v|$ and $|Df_x^{-n_o}v| \le k|v|$, which imply that $v = 0$ for $0 < k < 1$. Thus $TM = E^s \oplus E^u$.

Set now $\lambda = \sqrt[n_o]{k} < 1$, $c = \sup\{\|f_s\|^i \lambda^{-i}\}$ and $c' = \sup\{\|f_u^{-1}\|^i \lambda^i\}$ with $0 \le i < n_o$. From $\|f_s^{n_o}\| < k$ and $\|f_u^{-n_o}\| < k$ we get

$$|Df_x^n v| \le c\, \lambda^n |v|$$

$$|Df_x^{-n} w| \le c'\, \lambda^n |w|$$

for each $x \in M$, $v \in E^s_x$ and $w \in E^u_x$. This shows that f is Anosov, finishing the proof of the first part of the lemma.

Finally, we prove that if f is Anosov then there is a C^∞ norm on TM so that we can take $c = c' = 1$ in the above inequalities. Following [3], let ρ be such that $\lambda < \rho < 1$ and define

$$|v|_s = \sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-n} |Df^n_x \, v|$$

$$|w|_u = \sum_{n=o}^{\infty} \rho^{-n} |Df^{-n}_x \, w|$$

for $v \in E^s_x$ and $w \in E^u_x$. For any $\alpha \in T_xM$, α can be written as $\alpha = v + w$, with $v \in E^s_x$ and $w \in E^u_x$. Define $|\alpha|_1 = |v|_s + |w|_u$. Then $|\ |_1$ is a norm equivalent to the original one and

$$|Df_x v|_1 \leq \rho |v|_1$$

$$|Df^{-1}_x \, w|_1 \leq \rho |w|_1$$

for $v \in E^s_x$, $w \in E^u_x$. Of course, we can only say that $|\ |_1$ is a C^o norm. But now we approximate $|\ |_1$ by a C^∞ norm so that the above inequalities still hold. Q.E.D

Let E be a Banach space and E_1, E_2 closed subspaces so that $E = E_1 \oplus E_2$. Given τ, $0 < \tau < 1$, we denote by $\mathcal{L}_\tau$ the hyperbolic isomorphisms L of E leaving E_1, E_2 invariant such that $\|L/E_1\| < \tau$ and

$\|L^{-1}/E_2\| < \tau$.

The following lemma, due to Hirsch and Pugh, was proved in [4]. The proof we present here was suggested by Palis.

LEMMA 2 - Given τ, $0 < \tau < 1$, there exists $\epsilon > 0$ such that if the isomorphism $T:E \to E$ with respect to the splitting $E = E_1 \oplus E_2$ has the form $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, with $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = L \in \mathfrak{L}_\tau$ and $\|B\| < \epsilon$, $\|C\| < \epsilon$ then T is hyperbolic.

Proof: First we notice that there exists $\epsilon > 0$ (which depends only on τ) such that if $\|B\| < \epsilon$, $\|C\| < < \epsilon$ then T is locally conjugate to L (see [3]). In fact, we get a global uniformily continuous conjugacy h between T and L, i.e. $\tilde{T}h = hL$, where $\tilde{T} = T$ near the origin. It is easy to see that the local images of E_1 and E_2, $h(E_1)$ and $h(E_2)$, generate closed linear subspaces $\tilde{E}_1$ and $\tilde{E}_2$, invariant by T and $E_1 \cap E_2 = 0$. Also, $\|T^n/E_1\| < 1$ and $\|T^{-n}/E_2\| < 1$ for some integer n, which imply that the spectral radius of T/E_1 and of T^{-1}/E_2 are less than one. Notice that $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ are characterized by the fact that $T^n x \to 0$, $T^{-n} y \to 0$ as $n \to \infty$ for any $x \in \tilde{E}_1$, $y \in \tilde{E}_2$.

Finally, we show that $E = \tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2$. To see this, it is enough to show that $h(x+y) - h(x) \in \tilde{E}_2$ for small

$x \in E_1$ and $y \in E_2$. In fact,

$$\|L^{-n}(x+y) - L^{-n}x\| = \|L^{-n}y\| < \lambda^n\|y\|.$$

Therefore, $h(L^{-n}(x+y)) - hL^{-n}x = T^{-n}(h(x+y) - h(x))$ converges to the origin as $n \to \infty$ for h is uniformily continuous. Thus $E = \widetilde{E}_1 \oplus \widetilde{E}_2$ and since the spectral radius of $T/\widetilde{E}_1$ and of $T/\widetilde{E}_2$ are smaller than one, T is hyperbolic. Q.E.D.

We can now prove

THEOREM 1 - The Anosov diffeomorphisms form an open set in $\mathrm{Diff}(M)$.

<u>Proof</u>: Let f be an Anosov diffeomorphism. Then f_* is a hyperbolic isomorphism of $\Gamma(M)$. Thus $\Gamma(M) = \Gamma_s \oplus \Gamma_u$, where Γ_s and Γ_u are given by Lemma 1. Γ_s and Γ_u are f_*-invariant and $\|f_*/\Gamma_s\| < \tau$, $\|f_*/\Gamma_u\| < \tau$ for some τ such that $0 < \tau < 1$. It is immediate that given $\epsilon > 0$, there is a neighborhood $N(f) \subset \mathrm{Diff}(M)$ with the property that for any $g \in N(f)$, $g_* = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ with respect to the splitting $\Gamma(M) = \Gamma_s \oplus \Gamma_u$, where $\|A\| < \tau$, $\|D^{-1}\| < \tau$ and $\|B\| < \epsilon$, $\|C\| < \epsilon$. Thus taking ϵ as in Lemma 2, g_* is hyperbolic and by Lemma 1 g is Anosov.

Q.E.D.

REMARK - Notice that the map $\rho : \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Isom}(\Gamma(M))$, defined by $\rho(g) = g_*$, is not continuous. What we used in the proof above was the continuity of the norms of the operators corresponding to the decomposition of g_* with respect to the splitting $\Gamma(M) = \Gamma_s \oplus \Gamma_u$.

As before, we denote by D the space of diffeomorphism on M with the C^1 topology. We denote by H the space of homeomorphisms on M with the C^0 topology.

THEOREM 2 (Anosov) - If f is an Anosov diffeomorphism then f is structurally stable. In particular, there exists a neighborhood V of f in D, a neighborhood U of the identity $id:M \to M$ in H, and a continuous function $h:V \to U$ such that if $g \in V$ then $h = h(g)$ is the unique solution in U of the functional equation

$$h \circ g = f \circ h \ .$$

Before proving the theorem we need several definitions, constructions, and lemmas.

DEFINITION 2 - Let K_1 and K_2 be compact metric spaces, U an open subset of a Banach space F_1, and V an open subset of a Banach space F_2. Suppose that we have $f:K_1 \to K_2$ and $\bar{f}:K_1 \times U \to K_2 \times V$ continuous such that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} K_1 \times U \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & K_2 \times V \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & V \\ K_1 \arrow[r, "f"'] & K_2 & \end{tikzcd}$$

where π, p_1, p_2 are projections. We say that $\bar{f}$ is <u>vertically of class</u> C^r $(r \geq 0)$ if $p_2 \circ \bar{f}$ has r partial derivatives with respect to the variable in U and the partials are continuous mappings

$$D_2^k\ (p_2 \circ \bar{f}): K_1 \times U \ \rightarrow \ L_s^k\ (F_1, F_2)$$

for $k = 0, \ldots, r$. Here $L_s^k(F_1, F_2)$ are symmetric k-multilinear mappings from F_1 to F_2. In particular for each fixed $x \in K$, $p_2 \circ \bar{f}(x, \cdot): U \rightarrow V$ is of class C^r.

DEFINITION 3 - Let $\pi_1: E^1 \rightarrow M$ and $\pi_2: E^2 \rightarrow N$ be two Riemannian vector bundles of class C^0 over compact metric spaces M and N. Let $\bar{f}: E^1 \rightarrow E^2$ be a continuous map that preserves fibers, i.e. there exists a map $f: M \rightarrow N$ such that $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \bar{f}$. We say that $\bar{f}$ is <u>vertically of class</u> C^r or $\bar{f}$ is <u>of class C^r along the fibers</u>, $0 \leq r \leq \infty$, if the local representatives of $\bar{f}$ in local vector bundle charts are vertically of class C^r (using Definition 2).

Let $f: M \rightarrow M$ be a continuous function and $\pi: E \rightarrow M$ a Riemannian vector bundle. $f^*(E)$ is the subset of $M \times E$ of pairs (x,v) such that $f(x) = \pi(v)$. Let $\pi(f)$ be the projection on the first factor of $M \times E$. $\pi(f): f^*(E) \to M$ is a vector bundle. There is a Riemannian metric induced on $f^*(E)$ by the inclusion in $M \times E$.

Let $\pi_i: E^i \to M$ $i = 1,2$ be two Riemannian vector bundles. Let $U \subset E^1$ be an open subset such that $\pi_1 | U: U \to M$ is a surjection. Let $\Gamma(U) \subset \Gamma(E^1)$ be the open subset of sections with images in U. We assume U is connected enough so that $\Gamma(U)$ is nonempty. Let $\bar{f}: U \to E^2$ be a continuous function that preserves fibers covering $f: M \to M$.

We denote by

$$\Omega_{\bar{f}}: \Gamma(U) \to \Gamma(f^* E^2)$$

the map induced by composition on the left by $\bar{f}$,

$$\Omega_{\bar{f}}: \gamma \to \bar{f} \circ \gamma$$

LEMMA 3 - If $\bar{f}$ is vertically of class C^r, $0 \leq 0 \leq \infty$, then $\Omega_f: \Gamma(U) \to \Gamma(f^* E^2)$ is of class C^r.

<u>Proof</u>: For $r = 0$, $\Omega_{\bar{f}}$ corresponds to the composition of continuous functions on a compact set. It is a standard result that $\Omega_{\bar{f}}$ is continuous.

Let $\gamma \in \Gamma(U)$. Let $\sigma \in \Gamma(E^1)$ be small enough in norm so that $\gamma + \sigma \in U$). For each $x \in M$ we apply Taylor's Theorem to the function $\bar{f}_x: E^1_x \to E^2_{fx}$ at the point $\gamma(x)$. We obtain

$$(1) \quad \Omega_{\bar{f}}(\gamma+\sigma)(x) = \Omega_{\bar{f}}(\gamma)(x) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} D^k \bar{f}_x(\gamma(x))(\sigma(x))^k + R(\gamma(x),\sigma(x))(\sigma(x))^r .$$

Here $(\sigma(x))^k = (\sigma(x),..,\sigma(x))$, and $R(x,y) \in L_s^r(E_x^1, E_{fx}^2)$. $L_s^r(E_x^1, E_{fx}^2)$ are symmetric r-multilinear functions from E_x^1 to E_{fx}^2. Writing formula (1) without evaluation at x we obtain

$$(2) \quad \Omega_{\bar{f}}(\gamma+\sigma) = \Omega_{\bar{f}}(\gamma) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} D^k \bar{f}(\gamma)(\sigma)^k + R(\gamma,\sigma)(\sigma)^r$$

where we are only taking the derivative of $\bar{f}$ along the fiber and $R(\gamma,\sigma) \in L_s^r(\Gamma(E^1), \Gamma(f^*E^2))$. We leave it to the reader to check that $R(,)$ is continuous and that $R(\gamma,0) = 0$. By the converse to Taylor's Theorem, [7,2.1], it follows that $\Omega_{\bar{f}}$ is of class C^r and that $D^k\Omega_{\bar{f}}(\gamma)(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) = D^k \bar{f}_x(\gamma)(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ for $\sigma_1,\ldots,\sigma_k \in \Gamma(E^1)$. Then $D^k\Omega_{\bar{f}}:\Gamma(U) \to L_s^k(\Gamma(E^1),\Gamma(f^*E^2))$.

Q.E.D.

The following lemma is obvious.

LEMMA 4 - Let $\pi:E \to N$ be a Riemannian vector bundle of class C^0. Let M and N be compact metric spaces. Let $f:M \to N$ be a continuous function. Let $A_f:\Gamma(E) \to \Gamma(f^*E)$ be defined by $\gamma \to \gamma\circ f$. Then for fixed

f, A_f is a continuous linear function in γ and hence C^∞.

Let C be the space of continuous functions from M to M. We give M a C^∞ Riemannian metric. The topology of C is given by the metric $\bar{d}$:

$$\bar{d}(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in M\}$$

where d is the distance between points of M induced by the Riemannian structure on M. In Theorem 2 we have $H = \{h \in C: h$ is a homeomorphism$\}$. We take this opportunity to give the construction that makes C into a Banach manifold. To prove Theorem 2 we only use the local coordinate chart at the identity given by the following lemma.

LEMMA 5 - C admits the structure of a C^∞ manifold modeled on a Banach space.

Proof: Let $\mathfrak{U}$ be an open cover of M by convex neighborhoods. (Convex with respect to the Riemannian structure). Let $\delta > 0$ be a Lebesgue number associated to the open cover, i.e. given a ball B of radius $\leq \delta$ there exists a $U \in \mathfrak{U}$ such that $B \subset U$.

Let $f \in C$. Let $\Gamma(f)$ denote the Banach space, $\Gamma(f^*TM)$, of continuous sections of $f^*(TM)$. Let $U_\delta(f) = U(f)$ be the open ball in $\Gamma(f)$ of radius δ centered at the zero section. Let $B(f) = B_\delta(f)$ be the open ball in C centered at f of radius δ. We parameterize $B(f)$ by $U(f)$ as follows. Let $\varphi_f: U(f) \to B(f)$ be given by

$$(\varphi_f(\sigma))(x) = \exp_{fx}(\sigma(x))$$

for $\sigma \in U(f)$. We have that $\bar{d}(\varphi_f(\sigma_1), \varphi_f(\sigma_2)) =$
$= \sup\{d(\exp_{fx} \sigma_1(x), \exp_{fx} \sigma_2(x)) : x \in M) \leq$
$\leq \sup\{|\sigma_1(x) - \sigma_2(x)| : x \in M\} = \|\sigma_1 - \sigma_2\|$. Therefore φ_f is continuous. On the other hand, φ_f has an inverse $\varphi_f^{-1}: B(f) \to U(f)$ defined by $\varphi_f^{-1}(g)(x) = (x, (\exp_{fx})^{-1}(g(x))$. Because the neighborhoods in $\mathfrak{U}$ are convex, the expression $(\exp_{fx})^{-1}(g(x))$ is well defined. By the uniform continuity of the exponential on M, it follows there is a constant e such that

$$\|\varphi_f^{-1}(g_1) - \varphi_f^{-1}(g_2)\| =$$

$$= \sup\{|\exp_{fx}^{-1} g_1(x) - \exp_{fx}^{-1} g_2(x)| : x \in M\}$$

$$\leq e \sup\{d(g_1(x), g_2(x)) : x \in M\} = \bar{d}(g_1, g_2).$$

Thus $(\varphi_f)^{-1}$ is continuous.

We have defined an atlas for C, whose local charts are modeled on the Banach spaces $f^*(TM)$ where $f \in C$. To complete the proof it suffices to show the changes of coordinates are C^∞.

Let $\varphi_f: U(f) \to B(f)$ and $\varphi_g: U(g) \to B(g)$ be two charts.

We need to prove

$$\varphi_g^{-1}\,\varphi_f : U(f) \to U(g)$$

is a diffeomorphism of class C^∞ on its domain of definition.

Let $V(f) = \{v \in f^* TM : |v| < \delta\}$ and $V(g) = \{v \in g^* TM : |v| < \delta\}$. Then $U(f) = \Gamma V(f)$, $U(g) = = \Gamma V(g)$. Define the homeomorphism $G : V(f) \to V(g)$ by $G(x,v) = (x, (\exp_{gx})^{-1} \exp_{fx} v)$. G is well defined by the convexity of the neighborhoods. We have that $\varphi_g^{-1}\,\varphi_f(\gamma) = G \circ \gamma = \Omega_G(\gamma)$. G preserves fibers. G is vertically of class C^∞ since along a fixed fiber $G(x,\cdot) = (x, \exp_{gx}^{-1} \exp_{fx} \cdot)$. By Lemma 3, $\varphi_g^{-1}\ \varphi_f$ is of class C^∞. In the same way $(\Omega_G)^{-1} = \Omega_{G^{-1}} = \varphi_f^{-1}\,\varphi_g$ is of class C^∞. Q.E.D.

REMARKS 1 - The tangent space of C at f, $T_f C$, can be identified with $\Gamma(f^*TM)$. In particular $T_{id}C = \Gamma(TM) = \Gamma(M)$.

2. Let $\Lambda \subset M$ be a compact subset. Let $B(\Lambda, M)$ be the topological space of bounded functions from Λ to M. Then we can give $B(\Lambda, M)$ the structure of a manifold of class C^∞ modeled on bounded sections of TM.

Proof of Theorem 2: We want to look at the map $D \times D \times C \to C$

given by $(g_1,g_2,h) \to g_1 \circ h \circ g_2^{-1}$. If $g_1 \circ h \circ g_2^{-1} = h$ then $g_1 \circ h = h \circ g_2^{-1}$. Thus fixed points of the map give a semiconjugacy between g_1 and g_2. (To be a conjugacy we need h to be a homeomorphism). Also $g \circ id \circ g^{-1} = id$. We want to prove the stability of this fixed point.

We take local coordinates in C near id, $\varphi : U \subset \Gamma(M) \to C$ with $\varphi(\sigma)(x) = \exp_x \sigma(x)$. For neighborhoods V of f in D and U of 0 in $\Gamma(M)$

$$A: V \times V \times U \to \Gamma(M)$$

is well defined by $A(g_1,g_2,h) = \varphi^{-1}(g_1 \circ \varphi(h) \circ g_2^{-1})$, or $A(g_1,g_2,h)(x) = \exp_x^{-1}(g_1 \circ \exp_{g_2^{-1}x} \cdot (hg_2^{-1}x))$.

For $g_1,g_2 \in V$ define $G(g_1,g_2): TM \to TM$ by $G(g_1,g_2)(v_x) = \exp^{-1}_{g_2 x}(g_2 \circ \exp_x v_x)$. Then $(\Omega_{G(g_1,g_2)} A'_{g_2^{-1}} h)(x) =$

$= G(g_1,g_2) \circ h \circ g_2^{-1} = \exp_x^{-1}(g_1 \circ \exp_{g_2^{-1}x}(hg_2^{-1}x)) =$

$= A(g_1,g_2,h)(x)$. Here $A'_{g_2^{-1}}$ is the map given by Lemma 4.

LEMMA 6 - A has a partial derivative with respect to the third variable. When $g_1 = g_2 = g$ we have $D_3A(g,g,0)k = Dg(g^{-1})k \circ g^{-1} = g_* k$. $D_3A(g_1,g_2,h)$ is continuous in the first and third variables uniformly in the second variable, i.e. given (g_1,h) and $e > 0$ there exists neighborhoods V' of g_1 and U' of h such that for $f_{11}, f_{12} \in V'$, $f_2 \in V$, and $h_1,h_2 \in U'$

$$\|D_3 A(f_{11},f_2,h_1) - D_3 A(f_{12},f_2,h_2)\| < \epsilon \ .$$

In particular given $\epsilon > 0$ there exist neighborhoods V' of f and U' of 0 in $\Gamma(M)$ such that the Lipschitz constant

$$L(A(g_1,g_2,\cdot)|U' - D_3A(g_2,g_2,0)|U') < \epsilon$$

for $g_1,g_2 \in V'$.

Proof: By Lemmas 3 and 4 the partial derivative of A with respect to the third variable exists. Since $D(\exp_x)(0_x) = id:T_xM \to T_xM$ it follows that

$$D_3 A(g,g,0)k = Dg(g^{-1})k \circ g^{-1} \ .$$

Let $G_1 = G(f_{11},f_2)$ and $G_2 = G(f_{12},f_2)$. Then

$$\|D_3A(f_{11},f_2,h_1) - D_3 A(f_{12},f_2,h_2)\| =$$

$$= \sup\{\|DG_1(h_1 \quad f_2^{-1})k \circ f_2^{-1} - DG_2(h_2 \circ f_2^{-1})k \circ f_2^{-1}\|:k \in \Gamma(M) \text{ with } \|k\| = 1\}$$

$$\leq \sup\{\|DG_1(h_1 \circ f_2^{-1}(x)) - DG_2(h_2 \circ f_2^{-1}(x))\|: x \in M\} \ .$$

Using the uniformity in the exponential and letting $f_{11},f_{12} \to g \quad h_1,h_2 \to h$ we get that

$$\|DG_1(h_1 \circ f_2^{-1}(x)) - DG_2(h_2 \circ f_2^{-1}(x))\| \to 0$$

uniformly in f_2 and x. Remember that $G_i(f_2^{-1}(x),v) = \exp_x^{-1}(f_{1i} \circ \exp_{f_2^{-1}x} v)$. This proves the desired continuity of $D_3 A$.

The Lipschitz constant follows from the above result using the Mean Value Theorem. See [5, 8.6.2] for example. Q.E.D.

Caution. $D_3A(g_1,g_2,h)$ is not continuous in g_2. To see this consider the case of map defined in the plane so we can disregard the exponentials. Let $h = 0$ and take g_2' arbitrarily near g_2 in the C^1 topology but with $g_2(x_o) \neq g_2'(x_o)$. For each g_2' there exists a $k \in \Gamma(M)$ such that $\|k\|_o = 1$ and $|k \circ g_2(x_o) - k \circ g_2'(x_o)| = 1$ Then

$$\|D_3A(g_1,g_2,0) - D_3A(g_1,g_2',0)\| \geq$$

$$\geq |Dg_1(g_2^{-1}x_o)k(g_2^{-1}x_o) - Dg_1(g_2^{-1}(x_o))k(g_2'^{-1}x_o)| \geq \|Dg_1\|.$$

This stays bounded away from zero as g_2' goes to g_2.

However the following lemma gives a partial result in this direction.

LEMMA 7 - Let $T: D \times D \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ be defined by $T(g_1,g_2,h) = D_3A(g_2,g_2,0)h$. Then T is continuous in all variables.

In fact $D_3A(g_1,g_2,0)h$ is a continuous function of g_1, g_2, and h. The point is that it is not necessary to take the supremum over all h of unit length but just those near h_o. The proof is left to the reader.

The following lemma is what we need to prove the stability of the fixed point of A. It is based on the last paragraph of page 144 in [4].

If $D_3A:D\times D\times\Gamma(M) \to L(\Gamma(M),\Gamma(M))$ were continuous then we could use a standard fixed point theorem or the Implicit Function Theorem.

LEMMA 8 - Let P be a topological space. Let $F_1 \oplus F_2$ be a Banach space with the norm equal to the maximum of the norm on the two factors.

Let $T:P\times F_1\oplus F_2 \to F_1\oplus F_2$ be a function (not necessarily continuous) such that for each $x \in P$ $T(x,\cdot):F_1\oplus F_2 \to F_1\oplus F_2$ is a continuous linear isomorphism. Assume $\|T_1(x,\cdot,0)^{-1}\| \le \tau$, $\|T_2(x,0,\cdot)\| \le \tau$, $\|T_1(x,0,\cdot)\| \le \mu$ and $\|T_2(x,\cdot,0)\| \le \mu$ where $T_i(x,\cdot,0):F_1 \to F_i$. We also have $\epsilon > 0$ such that $\tau + \mu + \epsilon < 1$. Let $U_1 \oplus U_1 \subset F_1 \oplus F_2$ be a ball about the origin of radius R.

Assume $f:P\times U_1\oplus U_2 \to F_1\oplus F_2$ is a function such that for all $x \in P$ (i) the Lipschitz constant $L(f(x,\cdot)-T(x,\cdot)|U_1\oplus U_2) < \epsilon$ and (ii) $|f(x,0,0)| \le (1-\tau-\mu-\epsilon)R$. Then there exists a function $u:P \to U_1\oplus U_2$ such that $f(x,u(x)) = u(x)$ and $|u(x)| \le |f(x,0,0)|/(1-\tau-\mu-\epsilon)$. Further if f and T are continuous then so is u.

Proof: Define $g: P \times U_1 \oplus U_2 \to F_1 \oplus F_2$ by $g(x,y_1,y_2) =$
$= (T_1(x,\cdot,0)^{-1}(y_1 + T_1(x,y_1,0) - f(x,y_1,y_2)), f_2(x,y_1,y_2))$. Note the fixed points of $g(x,\cdot)$ are the same as those of $f(x,\cdot)$.

First we show $g(x,\cdot)$ is a contraction with contraction constant $\tau + \mu + c$. Let $y = (y_1,y_2)$ and $y' = (y_1',y_2')$.

$$|g_1(x,y) - g_1(x,y')| \leq$$

$$\leq \tau(|y_1-y_1'| + L(T_1-f_1)|y-y'| + |T_1(x,0,y_2-y_2')|) \leq$$

$$\leq |y-y'|\,\tau(1 + \epsilon + \mu) \leq |y-y'|\cdot(\tau + \epsilon + \mu) .$$

$$|g_2(x,y) - g_2(x,y')| \leq$$

$$\leq |T_2(x,y-y')| + L(f_2(x,\cdot)-T_2(x,\cdot))|y-y'| \leq$$

$$\leq (\tau+\mu+\epsilon)|y-y'| .$$

By [6, 10.1.1], [4,1.1], or [5], g has a fixed point, $u(x)$, for each $x \in P$ with $|u(x)| \leq |g(x,0)|/(1-\tau-c-\mu) \leq$
$\leq |f(x,0)|/(1-\tau-\epsilon-\mu)$.

Now assume f and T are continuous. For $x_o \in P$ by [6,10.1.1], [4,1.1], or [5],

$$|u(x_o)-u(x)| \leq |g(x,u(x_o)) - u(x_o)|/(1 - \epsilon - \tau - \mu).$$

Q.E.D.

$T(f,f,\cdot) = D_3A(f,f,0) = f_*:\Gamma(M) \to \Gamma(M)$ is hyperbolic and has splitting $\Gamma(M) = \Gamma(E^u) \oplus \Gamma(E^s)$. We can approximate E^u and E^s by smooth bundles F^u and F^s. Let $F_1 = \Gamma(E^u)$ and $F_2 = \Gamma(F^s)$. For a small neighborhood V of f we can insure $T(g_1,g_2,h) = D_3A(g_2,g_2,0)h$ satisfies Lemma 8. This follows from the continuity of the norms of the coordinate functions and Lemma 6 and 7. On $F_1 \oplus F_2$ we take the norm $|(y_1,y_2)| = \max\{|y_1|,|y_2|\}$.

Thus there exists neighborhoods V_1 of f in D and U_1' of 0 in $\Gamma(M)$ such that for $g_1,g_2 \in V_1$ there exists a unique $k = u'(g_1,g_2) \in U_1'$ such that $A(g_1,g_2,k) = k$. Let $U_1 = \varphi U_1' = \exp U_1' \subset C$, $u = \varphi \circ u'$, and $h = u(g_1,g_2)$. Then $g_1h = hg_2$. Also u is a continuous function of g_1 and g_2. Let U_2 be a smaller neighborhood of id in C such that for all $h_1,h_2 \in U_2$ $h_1 \circ h_2 \in U_1$. This exists since composition is continuous. By continuity of u or by continuity of A and the estimate $|u'(g_1,g_2)-\mathrm{id}| \leq |A(g_1,g_2,\mathrm{id})-\mathrm{id}|/ /(1-\tau-\mu-\epsilon)$, there exists a smaller neighborhood V_2 of f in D such that for $g_1,g_2 \in V_2$ $u(g_1,g_2) \in U_2$. If $g \in V_2$ let $h = u(g,f)$ and $h' = u(f,g)$. Then $gh = hf$ and $fh' = h'g$. Thus $hh'g = hfh' = ghh'$. Also $h'hf = = fh'h$. $h'h, hh' \in V_1$ so by uniqueness we get $h'h = = hh' = \mathrm{id}$. Thus h is a homeomorphism.

Q.E.D.

REMARKS 1 - The proof given above applies directly to prove the local stability of basic sets. See [4, Theorem 7.3].

2. Using the Implicit Function Theorem instead of Lemma 8 we can solve for an h such that $gh = hf$. We do this by always keeping f fixed. h has to be onto by a degree argument. Using the stable manifold theorem of [4] or [5] we can show f is expansive, i.e. there exists an $e > 0$ such that for any two points $x,y \in M$ there exists an integer n such that the distance from $f^n x$ to $f^n y$ is $\geq e$. From this property it can be shown h has to be one to one.

3. The proof indicated in Remark 2 does not apply in the general setting of Remark 1.

REFERENCES

[1] - J. MOSER, "On a Theorem of Anosov", Journal of Differential Equations 5 (1969), pp.411-440.

[2] - S. SMALE, "Differential Dynamical Systems", Bull. A.M.S., 73 (1967).

[3] - J. PALIS, "On the structure of hyperbolic points in Banach spaces", Anais Acad. Bras.Ciências

40 (1968). Also these notes.

[4] - M. HIRSCH and C. PUGH, "Stable Manifolds and Hyperbolic Sets", Proc. of Symposium in Pure Math., 14, A.M.S. 1970, pp 133-165.

[5] - G. TAVARES, "Variedade Estável de Elemento Crítico", these notes.

[6] - J. DIEUDONNÉ, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1960.

[7] - R. ABRAHAM and J. ROBBIN, Transversal Mappings and Flows, Benjamin, 1967.

ESTABILIDADE ESTRUTURAL DOS SISTEMAS DE MORSE-SMALE

Genésio L. Reis
Pedro Mendes
Welington C. Melo

SEÇÃO 1. O TEOREMA DA FAMÍLIA TUBULAR

1.1. Introdução

Nesta exposição M é uma variedade compacta, C^∞, sem bordo, e denotamos por $\text{Dif}(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de M, de classe C^r, $r \geq 1$, com a topologia C^r. Para $f \in \text{Dif}(M)$ representamos por $\Omega(f)$ o conjunto dos pontos não errantes de f, isto é, $p \in \Omega(f)$ se e sòmente se para tôda vizinhança U de p em M, dado um inteiro n_o qualquer, existe um inteiro n, com $|n| > n_o$, tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. O difeomorfismo f é de Morse-Smale se

(i) $\Omega(f)$ é finito (donde $\Omega(f) = \text{Per}(f)$);

(ii) $\Omega(f)$ é hiperbólico;

(iii) se $x,y \in \Omega(f)$ então $W^s(x)$ e $W^u(y)$ têm interseção transversal.

Indicaremos por $S(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de Morse-Smale de M. Está demonstrado em [2] que $S(M)$ é aberto em $Dif(M)$.

Seja $f \in S(M)$ e $\Omega = \Omega(f)$. Se Ω_k é uma órbita periódica de Ω, sejam

$$W^s(\Omega_k) = \bigcup_{p\in\Omega_k} W^s(p) \qquad \text{e} \qquad W^u(\Omega_k) = \bigcup_{p\in\Omega_k} W^u(p) .$$

Para todo k, $W^s(\Omega_k)$ e $W^u(\Omega_k)$ são subvariedades mergulhadas em M. Também, as órbitas Ω_k são parcialmente ordenadas pela relação:

$$\Omega_i \leq \Omega_k \text{ se e sòmente se } W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega)_k \neq \Phi .$$

(Veja [2]).

Dizemos que um difeomorfismo $f \in Dif(M)$ é <u>estruturalmente estável</u> se existe uma vizinhança $N(f) \subset Dif(M)$ tal que se $g \in N(f)$ então f e g são topològicamente conjugados, isto é, existe um homeomorfismo $h:M \to M$ tal que $hf = gh$.

O objetivo destas notas é dar a demonstração do seguinte teorema de Palis-Smale [1]:

TEOREMA - Os difeomorfismos de Morse-Smale são estruturalmente estáveis.

Demonstraremos também o resultado correspondente para campos.

1.2. Existência da família tubular

Seja $p \in M$ um ponto fixo de $f \in S(M)$.

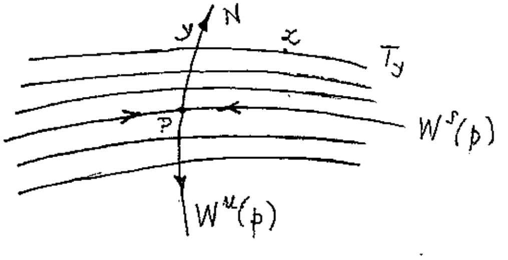
DEFINIÇÃO - Uma <u>família tubular</u> T de $W^s(p) = T_o$ é uma coleção $\{T_y\}_{y \in N}$ de subvariedades C^r de M, disjuntas, onde N é uma vizinhança aberta de p em $W^u(p)$, com as propriedades:

(a) $V = V(T_o) = \bigcup_{y \in N} T_y$ é um conjunto aberto de M, contendo T_o;

(b) $T_o = T_p$;

(c) T_y intercepta N transversalmente no único ponto y;

(d) a aplicação $V \to N$ que leva $x \in T_y$ no espaço tangente a T_y em x é uma aplicação contínua de V no fibrado grasmaniano sôbre V.



Observemos que não exigimos diferenciabilidade da função s.

Sendo Ω_k uma órbita periódica de $f \in S(M)$, de período n, uma <u>família tubular</u> de $W^s(\Omega_k)$ é uma família tubular $T = \{T_y\}$ de $W^s(p)$, para algum $p \in \Omega_k$, juntamente com as famílias $\{f(T_y)\}, \{f^2(T_y)\}, \ldots, \{f^{n-1}(T_y)\}$.

Uma família tubular $T = \{T_y\}$ de $W^s(p)$ diz-se <u>invariante</u> se $f^{-n}T_y = T_{f^{-n}(y)}$, onde n é o período de p. Neste caso a família tubular de $W^s(\Omega_k)$ também será chamada invariante, onde Ω_k é a órbita de p.

Um <u>sistema de famílias tubulares</u> para f é um conjunto de famílias tubulares $T^k = \{T^k_x\}$, uma para cada Ω_k. Dizemos que o sistema é <u>compatível</u> quando $T^i_x \cap T^j_y \neq \Phi$ implicar em $T^i_x \subset T^j_y$ ou $T^j_y \subset T^i_x$.

O objetivo desta seção é demonstrar que todo difeomorfismo de Morse-Smale possui um sistema compatível de famílias tubulares invariantes.

LEMA 1 - Seja N uma variedade C^r, sem bordo, e seja $I = [0,1]$. Existem uma vizinhança $U(\Delta)$ da diagonal Δ em $N \times N$ e uma função de classe C^r, $\Theta: U(\Delta) \times I \to N$ tais que

$$\Theta(x,y,0) = x,$$
$$\Theta(x,y,1) = y,$$

$$\Theta(x,x,t) = x, \text{ para todo } t \in I.$$

Demonstração: Por um teorema de Whitney, escolhamos uma estrutura C^∞ para N compatível com a sua estrutura C^r, e uma métrica riemaniana C^∞. Seja (U_i) uma cobertura aberta de N por vizinhanças geodésicas tais que, se $x,y \in U_i$ então a geodésica que une êstes pontos depende diferenciàvelmente do par (x,y), isto é, a aplicação

$$(x,y) \in U_i \times U_i \longmapsto (x,v) \in TN \quad \text{é} \quad C^\infty ,$$

onde $v \in TN_x$ é dado por $\exp_x v = y$.

Existe uma vizinhança V_i de $(x,0)$ em TN tal que a aplicação $(z,v) \mapsto \exp_z v$ é C^∞ em V_i (Milnor, Morse Theory, 58-59). Escolhemos os U_i de tal forma que se $(x,y) \in U_i \times U_i$ então $(x,v) \in V_i$ e definimos

$$U(\Delta) = \bigcup_i U_i \times U_i$$

e

$$\Theta : U(\Delta) \times I \longrightarrow N$$

por

$$\Theta(x,y,t) = \exp_x tv \quad \text{(geodésica que une } x \text{ a } y).$$

Θ é C^∞ em relação à estrutura C^∞ de N, pois é a composta das aplicações C^∞

$$(x,y,t) \longmapsto (x,v,t) \longmapsto (x,tv) \longmapsto \exp_x tv ,$$

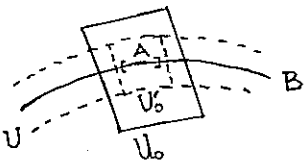
e portanto C^r em relação à estrutura C^r de N.

DEFINIÇÃO - Seja U um aberto de M e seja B uma subvariedade fechada de U. Uma <u>retração</u> C^r, $r \geq 0$, de U em B é uma aplicação $p:U \to B$ que é a identidade em B.

LEMA 2 (da retração). Sejam M uma variedade C^∞ e B uma subvariedade fechada C^r, sem bordo. Sejam A um subconjunto compacto de B, U_o uma vizinhança de A em M e $r_o:U_o \to B$ uma retração C^r sôbre $U_o \cap B$. Então existe uma vizinhança U de B e uma retração $r:U \to B$ tal que $r|U_o' = r_o|U_o'$, onde U_o' é uma vizinhança de A.

<u>Demonstração</u>: Seja

$$\pi:U_1 \to B$$



uma vizinhança tubular C^r.

Seja $\varphi:M \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, com suporte em U_o, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, e $\varphi(x) = 1$ se $x \in U_o'$ vizinhança de A. Seja θ "função geodésica" sôbre B conforme o Lema 1.

Definimos

$$r(x) = \pi(x), \text{ se } x \notin U_o ,$$

$$r(x) = \theta(\pi(x), r_o(x), \varphi(x)), \text{ se } x \in U_o .$$

DEFINIÇÃO - Seja $f \in S(M)$ e seja $p \in \Omega(f)$. O <u>bordo</u> de $T_o = W^s(p)$ é o conjunto

$$\partial T_o = \{q \in M;\ \exists n_i \to \infty,\ y_i \in D \ \text{(domínio fundamental)} \ \text{tais que} \ f^{-n_i}(y_i) \to q\}.$$

O <u>fêcho</u> de T_o é o conjunto $\bar{T}_o = T_o \cup \partial T_o$.

LEMA 3 - Seja $T = \{T_x\}$ uma família tubular de $W^s(\Omega_i)$ e seja $T_o = \bigcup_{x \in \Omega_i} T_x$. Sejam W uma subvariedade C^r que corta T_o transversalmente e A um subconjunto compacto de W. Seja U uma vizinhança de $A \cap \partial T_o$ e suponhamos que $\pi : U \to W$ é uma retração contínua tal que

(i) π é C^r em cada T_x;

(ii) $y \in T_x \cap W \cap U$ implica $\pi^{-1}(y) \subset T_x$;

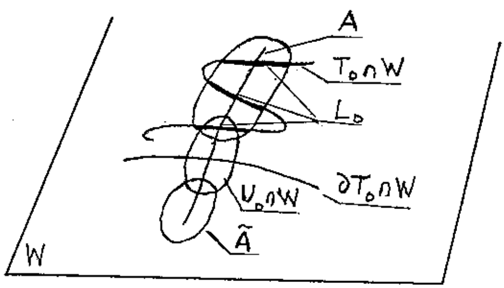
(iii) a família $\{\pi^{-1}(y)\}$ satisfaz a condição de continuidade grasmaniana.

Então existe uma retração contínua $r : U_1 \to W$, sendo U_1 uma vizinhança de $A \cap \bar{T}_o$, tal que (i), (ii) e (iii) são satisfeitas por r, e r restrita a uma vizinhança de $A \cap \partial T_o$ é igual a π.

<u>Demonstração</u>: Suporemos inicialmente que Ω_i é um ponto fixo p.

Consideremos uma vizinhança aberta U_o de $\partial T_o \cap A$, em M, tal que $\bar{U}_o \subset U$. Existe $\tilde{A} \subset W$, vizinhança aberta com fêcho compacto, de A, tal que $\partial T_o \cap \widetilde{A} \subset$ $\subset U_o$. Com efeito, como ∂T_o é fechado em M e $A-U_o \subset A$ é fechado e consequentemente compacto, existe vizinhança $U'_o \subset M$ de $A-U_o$, aberta e de fêcho compacto, tal que $U'_o \cap \partial T_o = \Phi$. Tomamos então $\widetilde{A} = (U_o \cap W) \cup (U'_o \cap W)$.

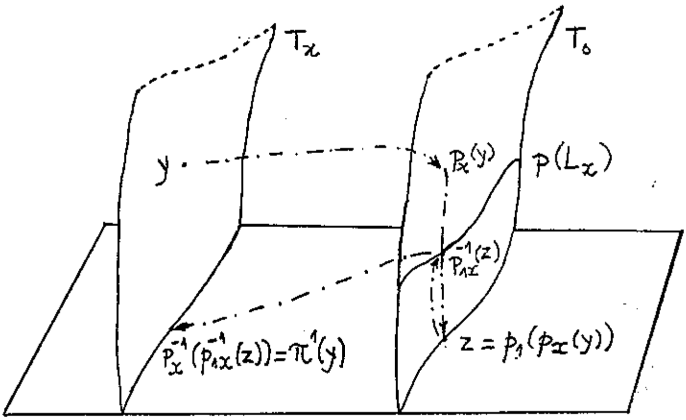
Construiremos $r: U_1 \to M$ como média entre a retração π e uma retração π_1 de uma vizinhança de $T_o \cap \widetilde{A} - U_o \cap \widetilde{A}$, em W, que satisfaz (i), (ii), (iii).



Observemos que $L_o = T_o \cap \widetilde{A} - U_o \cap \widetilde{A}$ é uma subvariedade de W, com fêcho compacto, porque $T_o \bar{\pitchfork} W \Rightarrow T_o \bar{\pitchfork} A$ e $T_o \cap A$ não se acumula fora de U_o. L_o pode ter bordo, como mostra a figura acima, mas podemos supor que L_o não tem bordo uma vez que na construção abaixo podemos "prolongar L_o um pouco mais".

Seja (B, L_o, p_1) uma vizinhança tubular de L_o em T_o, com fêcho compacto, e (V, B, p) uma vizinhança tubular de B em M. Tomamos V e B suficientemente pequenas para que $T_x \cap V$ fique ϵ C^1-próximo de $T_o \cap V$. Seja

$L_x = T_x \cap V \cap W$. Como $T_x \cap V$ está C^1-próximo de $T_o \cap V$, então L_x está C^1-próximo de L_o.



Tomamos e suficientemente pequeno para que p restrita a $T_x \cap V$ seja um difeomorfismo p_x sôbre $T_o \cap V$ e $p(L_x)$ esteja suficientemente C^1-próximo de L_o, de modo que p_1 restrita a $p(L_x)$ seja um difeomorfismo sôbre L_o. Denotamos esta restrição por p_{1x}. Definimos $\pi_1 : V \to W$ por

$$\pi_1(y) = (p_x^{-1} \circ p_{1x}^{-1} \circ p_1 \circ p_x)(y) \qquad \text{se} \quad y \in T_x .$$

A aplicação π_1 é contínua pois p, p_1 o são. É claro que

(a) $\pi_1^{-1}(y) \subset T_x$ se $y \in L_x$;

(b) π_1 é de classe C^r em cada T_x ;

(c) π_1 tem pôsto constante, pois cada fibra $\pi_1^{-1}(y)$, $y \in L_x$, é a imagem difeomórfica de uma fibra $p_1^{-1}(y')$, $y' \in L_o$;

(d) a continuidade grasmaniana da fibração π_1 decorre da continuidade grasmaniana de $\{T_x\}$, da diferenciabilidade de π_1 e do argumento usado em (c).

Seja θ_o uma função geodésica para L_o e θ_x a função geodésica para L_x induzida pelo difeomorfismo $F_x = p_{1x} \circ p_x$, isto é,

$$\theta_x(y,z,t) = F_x^{-1}(\theta_o(F_x(y),F_x(z),t)) .$$

Seja $\varphi: M \to \mathbb{R}$, de classe C^r, que é 1 em U_o e 0 fora de U. Definimos

$$r(z) = \pi_1(z), \text{ se } z \in V-U,$$
$$r(z) = \theta_x(\pi_1(z),\pi(z),\varphi(z)), \text{ se } z \in T_x \cap U \cap V,$$
$$r(z) = \pi(z), \text{ se } z \in U_o .$$

É fácil verificar as condições (i), (ii), (iii) para r, observando que em $U-U_o$, r é a "média" das fibrações π e π_1 e, pela construção dos θ_x, preserva T_x.

Quando Ω_i não é um ponto fixo, fazemos o mesmo raciocínio para cada componente de T_o. Isto completa a demonstração do Lema.

TEOREMA (DA FAMÍLIA TUBULAR) - Seja f um difeomorfismo de Morse-Smale de M e seja $\Omega(f) = \cup\, \Omega_k$, onde os Ω_k são as órbitas periódicas de $\Omega(f)$, parcialmente ordenadas. Existe um sistema de famílias tubulares $\{T^k\}$ invariante e compatível, sendo cada T^k uma família tubular de $W^s(\Omega_k)$. Portanto $T_o = W^s(\Omega_k)$. Além disso, a aplicação

$$\pi : \bigcup_{x \in N_k} T^k_x \longrightarrow W^u(\Omega_k)$$

definida por

$$\pi(y) = x = T^k_x \cap W^u(\Omega_k) \quad , \qquad y \in T^k_x$$

é de classe C^r em T^i_x , $1 \leq i \leq k$.

<u>Demonstração</u>: Às vêzes usaremos T^k para designar $\bigcup_{x \in N_k} T^k_x$ e, quando necessário, restringiremos N_k. Procedendo por indução, definamos T^1 simplesmente como $\{W^s(p); p \in \Omega_1\}$. [Lembrar que Ω_1 é constituida ou de poços ou de fontes.]

Suponhamos já construidos $T^1, \ldots, T^{k-1}$ nas condições do teorema. Construiremos T^k. Para $p \in \Omega_k$, de período m, seja D um domínio fundamental de $W^u(p)$, com $\partial D = S_E \cup S_I$. Definiremos uma retração contínua

$$\pi : U(D) \longrightarrow W^u(p)$$

tal que

(a) $\pi f^{-m} = f^{-m}\pi$, numa vizinhança de S_E ;

(b) π é C^r em cada T_x^i, $1 \leq i \leq k-1$;

(c) $y \in T_x^i \cap W^u(p) \cap U(D)$ implica $\pi^{-1}(y) \subset T_x^i$, $1 \leq i \leq k-1$;

(d) $\{\pi^{-1}(y)\}$ satisfaz a continuidade grasmaniana.

Supondo que π está definida como acima, construimos T^k como segue:

Seja N uma vizinhança de $p \in \Omega_k$ em $W^u(p)$, com $\partial N = S_E$. Dado $x \in N$, existem um único $y \in D - S_E$ e um inteiro $j \geq 0$ tais que $x = f^{-mj}(y)$. Então pomos

$$T_x^k = f^{-mj}(\pi^{-1}(y)) \quad \text{e} \quad T_p^k = W^s(p) \ .$$

A coleção $\{T_x^k;\ x \in N\}$ é uma família tubular para $W^s(p)$. Isto decorre do λ-Lema, e o argumento é o mesmo da demonstração geométrica do Teorema de Hartman [2].

<u>Construção de π.</u>

Pelo Lema 3, tomando $A = S_E$, $W = W^u(p)$, $T = T^{k-1}$ e usando o fato de que $T^{k-1} \cap D$ é compacto e $\partial T_o \cap A = \Phi$ (pois Ω^{k-1} tem ordem 1 em relação a Ω^k), construimos uma retração $\pi: T^{k-1} \cap U(S_E) \to W^u(p)$. Como T^{k-1} é invariante e $f^{-m}(S_E) = S_I$, a composta $f^{-m}\pi f^m$ define uma retração de $T^{k-1} \cap U(S_I)$ em $W^u(p)$, em que $U(S_I) = f^{-m}(U(S_E))$, a qual denotaremos ainda por π.

Aplicamos novamente o Lema 3, desta vez tomando $A = D$ e $U = T^{k-1} \cap [U(S_I) \cup U(S_E)]$, para estender π a uma retração de $T^{k-1} \cap U(D)$ em $T^{k-1} \cap D$.

Uma vez construida uma retração correspondente a cada órbita de ordem 1 com relação a Ω_k, passamos para as órbitas de ordem 2 com relação a Ω_k.

Procedemos do mesmo modo para estender π a $T^{k-2} \cap U(D)$, usando ainda o Lema 3 e o fato de que $(\partial T_o^{k-2} \cap D) \subset (T^{k-1} \cap D)$. Continuamos êste processo para $T^{k-3},\dots,T^1$, obtendo a retração π procurada.

Via iteração por f, o sistema $\{T^k\}$ obtido no teorema é estendido de modo invariante por f. Tal sistema será denotado por $\{T^{k,s}\}$, enquanto que $\{T^{k,u}\}$ denotará um sistema semelhante de famílias tubulares de $W^u(\Omega_k)$. Representaremos por $T^{k,s}(x)$, $T^{k,u}(x)$ os elementos das famílias $\{T^{k,s}\}$, $\{T^{k,u}\}$ que contêm o ponto x.

OBSERVAÇÃO: Existe uma vizinhança $N(f)$ em $\mathrm{Dif}(M)$ tal que para cada $g \in N(f)$ podemos construir um sistema compatível de famílias tubulares $\{T_g^{k,s}\}$ onde $T_g^{k,s}$ é a família tubular de $W^s(\Omega_k(g))$. A construção pode ser feita de modo que a aplicação $\varphi_s : g \longmapsto T_g^{k,s}$, $g \in N(f)$, seja contínua, sendo que em $T_g^{k,s}$ é a C^1 uniforme em partes compactas.

Com efeito, o conjunto $S(M)$ dos difeomorfismos de Morse-Smale é aberto em $\mathrm{Dif}(M)$ e tomamos $N(f) \subset S(M)$.

Construido o sistema de famílias tubulares para f, procedemos à construção de sistema análogo para $g \in N(f)$, por indução como no Teorema da Família Tubular. Observamos que ao aplicarmos o Lema 3, devemos restringir a vizinhança $N(f)$ suficientemente para que:

a) $W^s(\Omega_{k-1}(g)$, $W^u(\Omega_k(g))$ fiquem C^1-próximas de $T_o = W^s(\Omega_{k-1}(f))$ e $W^u(\Omega_k(f))$, em V, onde (V,p) é a vizinhança tubular construida no Lema 3;

b) a projeção p de V em $W^s(\Omega_{k-1}(f))$, restrita a $W^s(\Omega_{k-1}(g)) \cap V$, seja um difeomorfismo p_g;

c) $p_g(W^s(\Omega_{k-1}(g)) \cap W^u(\Omega_k(g)) \cap V) = p_g(L_o(g))$ fique C^1-próxima de $L_o = W^s(\Omega_{k-1}(f)) \cap W^u(\Omega_k(f)) \cap V$, para que p_1 (= projeção da vizinhança tubular B de L_o em T_o), restrita a $p_g(L_o(g))$ seja um difeo p_{1g}.

Usamos o argumento da demonstração do Lema 3 para g, tomando a função geodésica θ_{og} induzida por θ_o e pelo difeomorfismo $F_g = p_{1g} \circ p_g$, isto é, construimos uma fibração em $W^s(\Omega_{k-1}(g))$, a partir da fibração de T_o, do mesmo modo que fibramos T_x a partir de T_o, no Lema 3.

A função geodésica θ_{og} depende contìnuamente de g. A continuidade de φ_s segue-se então do λ-Lema, por serem uniformes em partes compactas as estimativas feitas na sua demonstração.

SEÇÃO 2. O TEOREMA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL PARA DIFEOMORFISMOS

DEFINIÇÃO - Seja N uma vizinhança de f em $\mathrm{Dif}(M)$. Para cada $g \in N$, $g\,f^{-1}$ é denominada uma <u>perturbação</u> de f. A perturbação é <u>localizada</u> em um aberto U de M se $g\,f^{-1} = I$ em $M-U$, onde I é a aplicação identidade de M. Denotamos por $\mathrm{supp} f$ o fêcho do conjunto onde f é diferente da identidade.

Mostraremos nesta seção que as perturbações de f próximas da identidade podem se decompor em perturbações mais simples, isto é, escrevem-se como a composta de perturbações localizadas que deixam invariante a estrutura de família tubular obtida na seção anterior. Encerraremos a seção com a demonstração do teorema da estabilidade para difeomorfismos de Morse-Smale.

LEMA 1 - Seja $\{U_k;\ k=1,\dots,n\}$ uma cobertura aberta de M e seja V uma vizinhança da identidade I. Existe uma vizinhança V_1 de I tal que se $f \in V_1$ então f pode ser fatorada como $f = f_n \circ \dots \circ f_1$ onde cada $f_i \in V$ e $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$.

Demonstração: Escolhemos V_1, vizinhança da identidade, tal que existe uma isotopia $F: M \times I \to M$ com $F_0 = I$ e $F_1 = f$. Para isto, basta considerar uma imersão $M \subset \mathbb{R}^k$, tomar uma vizinhança tubular de M e tomar V_1 suficientemente pequena para que o segmento $[x, f(x)]$ esteja contido na vizinhança tubular para todo $x \in M$ e $f \in V_1$. Definimos então $F(x,t) = p(tf(x) + (1-t)x)$ onde p é a projeção da vizinhança tubular. Como as aplicações $x \mapsto F(x,t)$ estão próximas da identidade na topologia C^1 (tomando V_1 pequeno) e o conjunto dos difeomorfismos de M é aberto, concluimos que F é uma isotopia. Pela construção vemos que, tomando V_1 pequeno, podemos obter F próxima da projeção natural $\pi: M \times I \to M$.

Seja $\{\lambda_i: M \to \mathbb{R};\ \operatorname{supp} \lambda_i = \overline{W}_i \subset U_i\}$ uma partição da unidade. Definimos $\mu_i: M \to M \times I$ por $\mu_i = (I, \lambda_1 + \dots + \lambda_i)$. Como $\lambda_i = 0$ em $M - W_i$ temos que $\mu_i = \mu_{i-1}$ em $M - W_i$. Pela continuidade da composição à esquerda temos que $g_i = F \circ \mu_i$ está próxima da identidade quando tomamos V_1

pequeno pois F está próxima da projeção $\pi: M\times I \to M$. Logo $g_i \in \mathrm{Dif}(M)$, $g_i \circ g_{i-1}^{-1} \in V$ e $g_{i-1}(W_i) \subset U_i$.

Fazendo $g_o = I$ definimos $f_i = g_i \circ g_{i-1}^{-1}$. Como $g_i = g_{i-1}$ em $M-W_i$ temos $\mathrm{supp} f_i \subset U_i$ e como $g_n = f$, temos

$$f = f_n \circ \dots \circ f_1 .$$

LEMA 2 - Sejam $f \in S(M)$ e $\{\Omega_k;\ 1 \le k \le m\}$ as órbitas periódicas de f. Existem vizinhanças V de f, U_k de Ω_k e um inteiro $J > 0$ tais que:

(a) $\{f^j(U_k)\}_{\substack{0\le j\le J \\ 1\le k\le m}}$ é uma cobertura de M;

(b) para cada $g \in V$ e $1 \le k \le m$,

$f^j(U_k) \subset T_f^{k,s} \cap T_f^{k,u} \cap T_g^{k,s} \cap T_g^{k,u}$, $0 \le j \le J$;

(c) para cada $x,y \in f^j(U_k)$, $T^{k,s}(x)$ e $T^{k,u}(y)$ cortam-se transversalmente em um único ponto. Aqui, $T^{k,s} = T_f^{k,s}$ ou $T_g^{k,s}$ e $T^{k,u} = T_f^{k,u}$ ou $T_g^{k,u}$.

OBSERVAÇÃO: Tomaremos a vizinhança V de f de modo que as funções $g \mapsto T_g^{k,s}$, $g \mapsto T_g^{k,u}$ sejam contínuas, conforme observação feita depois do Teorema da Família Tubular.

<u>Demonstração</u>: $T_f^{k,s}$ e $T_f^{k,u}$ são famílias tubulares de $W^s(\Omega_k)$ e $W^u(\Omega_k)$ e, como tais, são vizinhan-

ças abertas de $W^s(\Omega_k)$ e $W^u(\Omega_k)$, respectivamente. [Estamos utilizando os símbolos $T^{k,s}$ e $T^{k,u}$ ora para indicar família tubular, ora para indicar o conjunto de pontos sôbre as fibras.] Logo, $T_f^{k,s} \cap T_f^{k,u}$ é uma vizinhança de Ω_k. Se $p \in \Omega_k$ temos que $T_f^{k,s}(p) = W^s(p)$ corta transversalmente $T_f^{k,u}(p) = W^u(p)$ em um único ponto. Tomando x e y próximos de p, $T_f^{k,s}(x)$ e $T_f^{k,u}(y)$ estão C^1-próximos de $T_f^{k,s}(p)$ e $T_f^{k,u}(p)$, respectivamente, e portanto se interceptam transversalmente em um único ponto. Podemos então escolher $U_k = U_k(\Omega_k)$ suficientemente pequena para que as condições (b) e (c) verifiquem-se com $j = 0$, $\bar{U}_k$, $T_f^{k,s}$ e $T_f^{k,u}$. A família $\{f^j(U_k)\}_{j=0,1,\ldots,k=1,\ldots,m}$ é uma cobertura aberta das variedades estáveis $\bigcup_{k=1}^{m} W_s(\Omega_k) = M$. Como M é compacta existe $J > 0$ tal que $\{f^j(U_k)\}_{j=0,\ldots,J;k=1,\ldots,m}$ é uma cobertura aberta de M. Pela invariância de $T_f^{k,s}$ e $T_f^{k,u}$, as condições (a), (b) e (c) são verdadeiras para $j = 0,\ldots,J$, $f^j(\bar{U}_k)$, $T_f^{k,s}$ e $T_f^{k,u}$. Como $\bigcup_{j=0}^{J} f^j(\bar{U}_k)$ é compacto e pela continuidade das aplicações $g \longmapsto T_g^{k,s}$, $g \longmapsto T_g^{k,u}$, podemos escolher V, vizinhança de f, tão pequena que $T_g^{k,s}$ e $T_g^{k,u}$ estejam suficientemente C^1-próximas de $T_f^{k,s}$ e $T_f^{k,u}$ em $\bigcup_{j=0}^{J} f^j(\bar{U}_k)$ de modo que as condições (b) e (c) verifiquem-se também para $T_g^{k,s}$ e $T_g^{k,u}$.

LEMA 3 - Sejam $\{f^j(U_k);\ j=0,\dots,J; k=1,\dots,m\}$ uma cobertura de M e N uma vizinhança de f como no Lema 2. Se $g \in N$ e $\operatorname{supp} gf^{-1} \subset f^j(U_k)$ para j e k fixos, então existem homeomorfismos $\eta^s, \eta^u : M \to M$ tais que, para todo $x \in M$,

(a) $\eta^s(T_f^{k,s}(x)) = T_f^{k,s}(x)$ e $\eta^s = I$ em $M-U$,

(b) $\eta^u(T_g^{k,u}(x)) = T_g^{k,u}(x)$ e $\eta^u = I$ em $M-U$,

(c) $\eta^u \eta^s f(x) = g(x)$.

Aqui, $U = f^j(U_k) \cup f^{j+1}(U_k)$.

<u>Demonstração</u>: Definimos

$$\eta^s : U \to U \quad \text{por} \quad \eta^s(x) = T_f^{k,s}(x) \cap g\, T_g^{k,u}(f^{-1}(x)),$$

$$\eta^u : U \to U \quad \text{por} \quad \eta^u(x) = g[f^{-1}\, T_f^{k,s}(x) \cap g^{-1}\, T_g^{k,u}(x)]$$

Pelo Lema 2, condição (c), η^s e η^u são bem definidas. Além disto, η^s e η^u são contínuas, pois a interseção de duas fibras "depende continuamente das fibras". Temos as inversas

$$(\eta_s^{-1})(x) = f[g^{-1}\, T_g^{k,u}(x) \cap f^{-1}\, T_f^{k,s}(x)],$$

$$(\eta_u^{-1})(x) = f\, T_f^{k,s}(g^{-1}(x)) \cap T_g^{k,u}(x) .$$

Logo η_s^{-1} e η_u^{-1} são contínuas e portanto η^s e η^u são homeomorfismos. Como $\operatorname{supp} gf^{-1} = \bar{V} \subset f^j(U_k)$ temos

$g = f$ e $g^{-1} = f^{-1}$ em $M-W$ sendo $W = V \cup f(V)$. Consequentemente, $\eta^s = \eta^u = id$ em $U-W$ e podem ser estendidas como sendo id em $M-W$. Pelas definições de η^s e η^u temos

$$\eta^s(T_f^{k,s}(x)) = T_f^{k,s}(x) \quad \text{e} \quad \eta^u(T_g^{k,u}(x)) = T_g^{k,u}(x), \ \forall x \in M.$$

Se $x \in U$, então

$$\eta_s f(x) = T_f^{k,s}(f(x)) \cap T_g^{k,u}(g(x)) = \eta_u^{-1}\, g(x),$$

donde

$$\eta^u \eta^s f(x) = g(x), \quad x \in U$$

e como esta igualdade se verifica em $M-U$, temos

$$\eta^u \eta^s f = g \quad \text{em} \quad M,$$

concluindo a demonstração do lema.

TEOREMA (da estabilidade estrutural) - Se $f \in S(M)$ então f é estruturalmente estável.

Demonstração: De acôrdo com o Lema 2, sejam $\{f^j(U_k);\ j=0,\dots,J; k=1,\dots,m\}$ uma cobertura de M e N vizinhança de f em $S(M)$ tais que:

a) se $g \in N$ e $k = 1,\dots,m$ então
$$f^j(U_k) \subset T_f^{k,s} \cap T_f^{k,u} \cap T_g^{k,s} \cap T_g^{k,u}, \quad j=0,\dots,J;$$

b) $\forall\, x,y \in f^j(U_k)$, $j=0,\dots,J$; $T^{k,s}(x)$ e $T^{k,u}(x)$ se interceptam transversalmente em um único ponto.

Restringindo N se necessário teremos, pelo Lema 1

$$g\, f^{-1} = f_n \circ \dots \circ f_1 \, ,$$

onde cada f_i está próximo da identidade e $\text{supp}(f_i) \subset \subset f^j(U_k)$ para algum j e algum k, $0 \leq j \leq J$ e $1 \leq k \leq m$. Como f_i está próximo da identidade, então, para cada i, $\bar{f}_i = f_i \circ \dots \circ f_1 \circ f$ está próximo de f e portanto $\bar{f}_i \in S(M)$, uma vez que $S(M)$ é aberto.

Basta mostrar a conjugação entre $\bar{f}_i = f_i \circ \dots \circ f_1 \circ \circ f$ e $\bar{f}_{i-1} = f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f$, pois então $\bar{f}_n = f_n \circ \dots \circ f_1 \circ f = = g$ será conjugado com $\bar{f}_o = f$ (pela transitividade da conjugação).

Podemos então supor que $g = f_i \circ f$, onde f_i é próximo à identidade e $\text{supp}(f_i) \subset f^j(U_k)$ para algum j e algum k. Pelo Lema 3, existem homeomorfismos $\eta_s, \eta_u : M \to M$ tais que:

i) $\eta_s(T_f^{k,s}(x)) = T_f^{k,s}(x)$ e $\eta_s = \text{id}$ em $M - f^j(U_k) \cup \cup f^{j+1}(U_k)$

ii) $\eta_u(T_g^{k,u}(x)) = T_g^{k,u}(x)$ e $\eta_u = \text{id}$ em $M - f^j(U_k) \cup \cup f^{j+1}(U_k)$

iii) $\eta_u \eta_s f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in M$

Vamos construir um homeomorfismo $h : M \to M$ conjugando o difeomorfismo f e o homeomorfismo $d = \eta_s \circ f$.

Em seguida mostraremos a conjugação entre o homeomorfismo d e o difeomorfismo $g = \eta_u d$ e, por transitividade, teremos a conjugação entre f e g.

Seja $h(x) = \lim_{n\to\infty} d^n f^{-n}(x)$. Temos

1) $h(x) = x$, se $x \in M - \bigcup_{m\geq 0} f^m(U_k)$.

Com efeito, se $x \in M - \bigcup_{m\geq 0} f^m(U_k)$ então $f^{-n}(x) \notin \bigcup_{m\geq 0} f^m(U_k)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde

$d(f^{-n}(x)) = (\eta^s f)(f^{-n}(x)) = \eta^s(f^{-n+1}(x)) = f^{-n+1}(x)$,

$d^2(f^{-n}(x)) = d(f^{-n+1}(x)) = f^{-n+2}(x)$,

$d^n(f^{-n}(x)) = x$,

donde $h(x) = x$.

2) $h(x) = d^n f^{-n}(x)$ para $x \in \bigcup_{m\geq 0} f^m(U_k)$ e $f^{-n}(x) \in \bigcup_{m\geq 0} f^m(U_k)$.

Com efeito, se $r \in \mathbb{N}$,

$d^{n+r} f^{-(n+r)}(x) = d^{n+r-1}\ \eta_s\ f^{-(n+r-1)}(x) =$
$d^{n+r-1}\ f^{-(n+r-1)}(x) = d^{n+r-2}\ \eta_s\ f^{-(n+r-2)}(x) =$
$d^{n+r-2}\ f^{-(n+r-2)}(x) = \ldots = d^n f^{-n}(x)$,

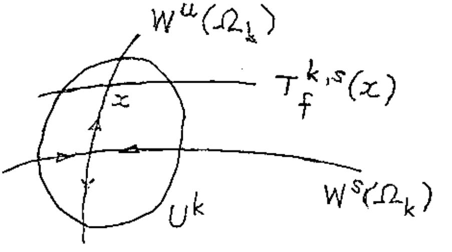
pois $f^{-(n+i)}(x) \notin \bigcup_{m\geq 0} f^m(U_k) \supset f^j(U_k) \cup f^{j+1}(U_k)$ se $i \geq 0$.

Logo

$$h(x) = \lim_{i\to\infty} d^i f^{-i}(x) = d^n f^{-n}(x) .$$

3) $h(x) = T_f^{k,s}(x) \cap W^u(\Omega_k(g))$, para $x \in W^u(\Omega_k) = W^u(\Omega_k(f))$

Inicialmente mostremos a igualdade para os pontos x de $W^u(\Omega_k) \cap U_k$. Como $d = \eta^s f$ e $\eta^s(T_f^{k,s}(x)) = T_f^{k,s}(x)$, segue-se que $d^n f^{-n}(T_f^{k,s}(x)) = T_f^{k,s}(x)$ e $h(T_f^{k,s}(x)) = T_f^{k,s}(x)$.



Como $d = \eta^s f$ e $g = \eta^u \eta^s f$ temos $d = (\eta_u^{-1})g$ e portanto o conjunto dos pontos limites da sequência $\{d^n(y);\ y \in U_k\}$ está contido em $\bigcup_{i \leq k} W^u(\Omega_i(g))$, isto porque g "aproxima" as fibras $T_g^{i,u}(y)$ de $W^i(\Omega_k(g))$, enquanto que $(\eta^u)^{-1}$ deixa as fibras invariantes. Assim, se K é o conjunto de pontos limites da sequência $\{d^n f^{-n}(y);\ y \in U_k\}$ então K está contido em $\bigcup_{i \leq k} W^u(\Omega_i(g)) \cap U_k = W^u(\Omega_k(g)) \cap U_k$, pois de início tomamos U_k suficientemente pequeno para que $W^u(\Omega_i(g)) \cap U_k = \emptyset$ se $i < k$. Logo, o conjunto de pontos limites da sequência

$$\{d^n f^{-n}(y);\ y \in W^u(\Omega_k) \cap U_k\}$$

está contido em $T_f^{k,s}(y) \cap W^u(\Omega_k(g))$ e, como a interseção é um único ponto, temos

$$h(x) = \lim_{n \to \infty} d^n f^{-n}(x) = T_f^{s,k}(x) \cap W^u(\Omega_k(g)) .$$

Para concluir a demonstração de 3) resta mostrar a igualdade para os $x \in W^u(\Omega_k)$, $x \notin U_k$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(x) \in U_k \cap W^u(\Omega_k)$. Como $h(x) = \lim_{i\to\infty} d^i f^{-i}(x) =$
$= \lim_{i\to\infty} d^{i+n} f^{-i-n}(x) = d^n h f^{-n}(x)$ e $hf^{-n}(x) =$
$= T_f^{k,s}(f^{-n}(x)) \cap W^u(\Omega_k(g))$, temos

$$h(x) = d^n h f^{-n}(x) = T_f^{k,s}(x) \cap W^u(\Omega_k(g))$$

uma vez que h deixa $T_f^{k,s}(x)$ invariante, $d = \eta_u^{-1} g$ e η_u^{-1}, g deixam $W^u(\Omega_k(g))$ invariante, o que mostra que $h(x) \in W^u(\Omega_k(g))$. A condição 3) está demonstrada.

Devemos mostrar que h é bem definido, $hf(x) =$
$= dh(x)$, $\forall x \in M$, e que h é um homeomorfismo.

É claro que h é bem definido, pois o é em $M-W^u(\Omega_k)$, onde ocorre as condições 1) ou 2), enquanto que para cada $x \in W^u(\Omega_k)$ existe um único ponto da interseção de $T_f^{k,s}(x)$ com $W^u(\Omega_k(g))$ e assim h é bem definido também em $W^u(\Omega_k)$.

A continuidade de h em $M-W^u(\Omega_k)$ resulta das condições 1) e 2). Resta provar que h é contínua em $W^u(\Omega_i)$, $i \leq k$. Mostremos que h é contínua em $W^u(\Omega_k)$. Basta mostrar a continuidade em $W^u(\Omega_k) \cap U_k$, desde que, como vimos acima, $dh(x) = hf(x) \Rightarrow d^n h(x) = hf^n(x)$.

Seja $x_m \in U_k$ uma sequência tal que $x_m \to x$, $x \in W^u(\Omega_k) \cap U_k$. Como mostramos acima, $h(T_f^{k,s}(x_m)) =$

$= T_f^{k,s}(x_m)$. Consideremos os dois casos seguintes. Se $x_m \in W^u(\Omega_k)$ então $f^{-n}(x_m) \in U_k$, para todo $n \geq 0$. Se $x_m \notin W^u(\Omega_k)$, existe $y_m \in f^{-1}(U_k) - U_k$ e $n_m \geq 0$ tal que $f^{-n_m}(x_m) = y_m$. Pelo λ-Lema, $n_m \to \infty$ quando $m \to \infty$, e $h(x_m) = d^{n_m}(y_m)$. Como anteriormente, o conjunto de pontos limites da sequência $\{d^n(y);\ y \in U_k \cap f^{-1}(U_k)\}$ está contido em $\bigcup_{i \leq k} W^u(\Omega_i(g))$. Então, combinando os dois casos se necessário, o conjunto dos pontos limites de $h(x_m)$ está contido em $\bigcup_{i \leq k} W^u(\Omega_i(g)) \cap U_k = W^u(\Omega_k(g)) \cap U_k$. Como $h(T_f^{k,s}(x_m)) = T_f^{k,s}(x_m)$, temos $h(x_m) \to T_f^{k,s}(x) \cap$ $\cap\ W^u(\Omega_k(g))$ ou $h(x_m) \to h(x)$ e portanto h é contínua em $W^u(\Omega_k)$.

A demonstração da continuidade de h em $W^u(\Omega_i)$, $i < k$, é análoga: da compatibilidade do sistema de famílieas tubulares resulta que $h(T_f^{i,s}(x)) = T_f^{i,s}(x)$ para $i \leq k$, desde que isto é verdadeiro para $T_f^{k,s}$. Se $x_m \to x \in W^u(\Omega_i)$, o conjunto de pontos limites da sequência $h(x_m)$ está contido em $W^u(\Omega_i(g))$. Dêstes dois fatos e como $T_f^{i,s}(x)$ intercepta $W^u(\Omega_i(g))$ em um único ponto, segue a continuidade de h.

Para mostrar que h é um homeomorfismo consideramos a aplicação $h_1(x) = \lim_{n\to\infty} f^n d^{-n}(x)$ e pelo mesmo argumento anterior concluimos que h_1 é bem definida e contínua. Da igualdade $f^n\, d^{-n}\, d^n\, f^{-n} = id$, para todo n, resulta que $h_1 h = id$. Anàlogamente, $hh_1 = id$ e portanto h é um homeomorfismo de M.

Obtivemos, assim, uma conjugação entre o homeomorfismo $d = \eta^s \circ f$ e o difeomorfismo f. Resta então obter uma conjugação entre o homeomorfismo $d = \eta^s \circ f$ e o difeomorfismo $g = \eta^u d$, isto é, construir um homeomorfismo $\tilde{h}:M \to M$ tal que $g\tilde{h} = \tilde{h}d$.

Definimos

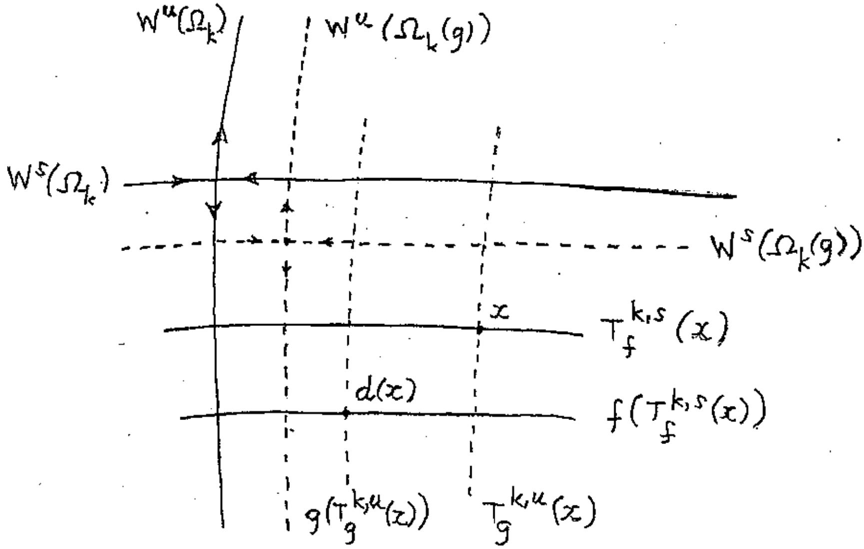
$$\tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} g^{-n} d^n(x).$$

Observemos que

$$\left.\begin{array}{l} d = \eta_u^{-1} g \Rightarrow d(x) \in g\, T_g^{k,u}(x) \\[2ex] d = \eta_s f \Rightarrow d(x) \in f\, T_f^{k,s}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow d(x) \in g\, T_g^{k,u}(x) \cap f\, T_f^{k,s}(x)$$

Portanto

$$\tilde{h}(T_g^{k,u}(x)) = T_g^{k,u}(x).$$



Temos:

1) Se $x \in M$ é tal que existe $n \in N$ de modo que $f^p(T_f^{k,s}(x)) \cap \bigcup_{m=0}^{j+1} f^m(U_k) = \emptyset$, para todo $p \geq n$, então $\tilde{h}(x) = g^{-n}\, d^n(x)$.

Realmente,

$p \geq n \Rightarrow d^p(x) \notin \bigcup_{m=0}^{j+1} f^m(U_k)$, pois $d^p(x) \in f^p(T_f^{k,s}(x))$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
g^{-(n+r)} d^{n+r}(x) &= g^{-(n+r-1)} g^{-1} \eta^s f\, d^{n+r-1}(x) \\
&= g^{-(n+r-1)} g^{-1}\, f\, d^{n+r-1}(x) \qquad (*) \\
&= g^{-(n+r-1)} f^{-1}\, f\, d^{n+r-1}(x) \qquad (**)
\end{aligned}
$$

$$= g^{-(n+r-1)}\, d^{n+r-1}(x)$$

$$\vdots$$

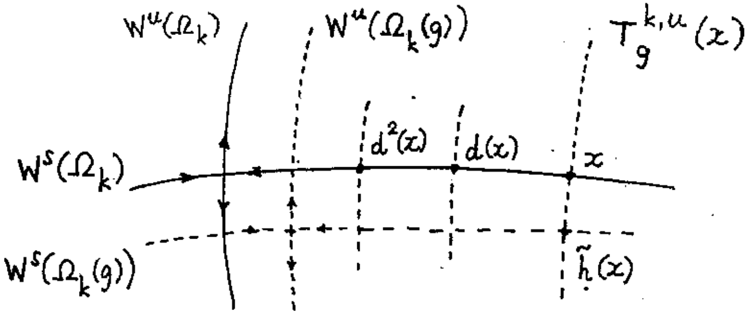
$$= g^{-n}\, d^{n}(x)\ .$$

Consequentemente, $\tilde{h}(x) = \lim_{i\to\infty} g^{-i} d^{i}(x) = g^{-n}\, d^{n}(x)$.

2) Se $x \in W^s(\Omega_k(f))$, então

$$\tilde{h}(x) = T_g^{k,u}(x) \cap W^s(\Omega_k(g)).$$

Como $\tilde{h}(x) = g^{-n}\,\tilde{h}\, d^n(x)$, pois $g^{-n}\,\tilde{h}\, d^n(x) =$
$= \lim_{i\to\infty} g^{-n-i}\, d^{n+i}(x) = \tilde{h}(x)$, podemos supor que
$x \in W^s(\Omega_k(f)) \cap U_k$.



(*) Porque $f d^{n+r-1}(x) \in f^{n+r}[T_f^{k,s}(x)] \therefore \not\in \bigcup_{m=0}^{j+1} f^m(U_k) \Rightarrow$ $\eta^s = id$.

(**) Porque $f = g$ em $M - [f^j(U_k) \cup f^{j+1}(U_k)]$.

Temos $\tilde{h}(x) \in T_g^{k,u}(x)$. Pelo λ-Lema, como $W^s(\Omega_k(f)) \cap U_k$ é transversal a $W^u(\Omega_k(g))$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^{-p}(W^s(\Omega_k(f)) \cap U_k)$ está ε-C^1-próximo de $W^s(\Omega_k(g))$ se $p \geq n$. Logo, o conjunto dos pontos limites da sequência $\{g^{-n}\, d^n(x)\}$ está contido em $W^s(\Omega_k(g)) \cap$ $\cap\, T_g^{k,u}(x)$ e portanto

$$\tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} g^{-n}\, d^n(x) = T_g^{k,u}(x) \cap W^s(\Omega_k(g)) \ .$$

Dos fatos 1) e 2) podemos afirmar que $\tilde{h}$ é bem definido. A demonstração de que $\tilde{h}$ é um homeomorfismo é feita do mesmo modo como foi feita a demonstração para h. Isto conclui a demonstração do teorema.

SEÇÃO 3. O TEOREMA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL PARA CAMPOS

Seja M uma variedade C^∞, compacta, sem bordo, e seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores C^r em M munido da topologia C^r. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ seja X_t o fluxo induzido. Uma <u>singularidade</u> de X, isto é, um ponto $p \in M$ tal que $X(p) = 0$, é chamada <u>hiperbólica</u> se p é um ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo $X_{t=1}$. Seja γ

uma órbita fechada de X e S uma seção transversal por $x \in \gamma$. Dizemos que γ é uma <u>órbita hiperbólica</u> se x fôr um ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo $f: U \to S$, a transformação de Poincaré para S (U é uma vizinhança de x em S). As órbitas fechadas e as singularidades de X são denominadas <u>elementos críticos</u> de X. Denotamos por $\Lambda(X)$ o conjunto dos elementos críticos de X. Se $\alpha \in \Lambda(X)$ é hiperbólico podemos definir suas variedades estável e instável, que denotaremos por $W^s(\alpha)$ e $W^u(\alpha)$, respectivamente.

DEFINIÇÃO - Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado de <u>Morse-Smale</u> se:

a) o seu conjunto não errante $\Omega(X)$ é a união de um número finito de elementos críticos:
$\Omega(X) = \Lambda(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$;

b) todos os seus elementos críticos α_j são hiperbólicos;

c) se $\alpha_i, \alpha_j \in \Lambda(X)$, então $W^s(\alpha_i)$ é transversal a $W^u(\alpha_j)$.

Indicaremos por $\mathcal{S}(M)$ o conjunto dos campos de Morse-Smale.

Agora enunciamos alguns resultados que foram demonstrados em [2].

LEMA (λ-Lema) - Seja $\alpha \in \Lambda(X)$ hiperbólico. Seja N uma variedade imersa biunìvocamente em M, tendo um ponto de interseção transversal com $W^s(\alpha)$ e sendo invariante pelo fluxo X_t. Se α é uma singularidade, seja B um disco mergulhado em $W^u(\alpha)$, com centro em α. Se α é uma órbita fechada, seja B um disco mergulhado em $W^u(\alpha) \cap S$, sendo S uma seção transversal por $x \in \gamma$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma subvariedade de N ϵ C^1-próxima de B.

PROPOSIÇÃO - Se $X \in \mathcal{S}(M)$ então:

1) para cada $\alpha \in \Lambda(X)$, $W^s(\alpha)$ e $W^u(\alpha)$ são subvariedades (mergulhadas) de M, isto é, tem a topologia induzida de M;

2) $\Lambda(X)$ tem uma estrutura de ordem parcial definida por

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow W^s(\alpha_1) \cap W^u(\alpha_2) \neq \emptyset ;$$

3) $M = \bigcup_{i=1}^{m} W^s(\alpha_i) = \bigcup_{i=1}^{m} W^u(\alpha_i)$.

O conjunto $\Lambda(X)$ munido desta estrutura de ordem parcial é chamado <u>diagrama de fase</u> de X.

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e seja $\alpha \in \Lambda(X)$ hiperbólico. Seja B uma vizinhança de α em $W^s(\alpha)$ cujo bordo ∂B é transversal a X em $W^s(\alpha)$. Chamamos $G^s(\alpha) = \partial B$ um <u>domínio fundamental</u> de $W^s(\alpha)$. Qualquer seção transversal a X que contenha $G^s(\alpha)$ e seja transversal a $W^s(\alpha)$ é denominada uma <u>vizinhança fundamental</u>, $N^s(\alpha)$, associada a $W^s(\alpha)$. Temos

$$W^s(\alpha) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(G^s(\alpha)) \cup \{\alpha\}.$$

O conjunto $\bigcup_{t\geq 0} X_t(N^s(\alpha)) \cup W^u(\alpha)$ contém uma vizinhança de α em M.

De maneira análoga ao caso de difeomorfismos, pode-se demonstrar o seguinte

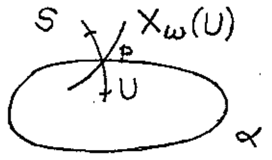
TEOREMA - O conjunto $\mathcal{S}(M)$ é aberto em $\mathfrak{X}(M)$. Se $X\in\mathcal{S}(M)$, então o seu diagrama de fase é estável sob pequenas perturbações C^r, isto é, o diagrama de fase do campo perturbado Y é isomorfo ao diagrama de fase de X.

DEFINIÇÃO - O campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é <u>estruturalmente estável</u> se existe uma vizinhança N de X tal que, se $Y \in N$ então Y é topològicamente equivalente a X, isto é, existe um homeomorfismo $h:M \to M$ que leva trajetórias de X em trajetórias de Y (não é necessário preservar o parâmetro tempo).

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte

TEOREMA - Se $X \in \mathcal{S}(M)$ então X é estruturalmente estável.

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sejam α uma órbita fechada de X, com período ω, e S uma seção transversal por um ponto $p \in \alpha$. Se U é uma vizinhança de p em S, em geral $X_{t=\omega}(U)$ não está contido em S. Dizemos que a seção S é <u>invariante</u> se $X_{t=\omega}(U) \subset S$.



LEMA 1 - Se $X \in \mathcal{S}(M)$, existe uma vizinhança N de X e uma função contínua $\mu: N \to \mathfrak{X}(M)$ com as seguintes propriedades:

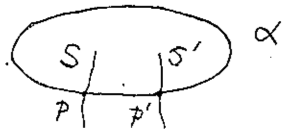
a) $\mu(X)$ tem as mesmas trajetórias de X (logo é topològicamente equivalente a X) e tôdas as órbitas fechadas α_i de $\mu(X)$ admitem uma seção transversal invariante, S_i, por um ponto de α_i ;

b) para cada $Y \in N$, $\mu(Y) \in \mathcal{S}(M)$ terá as mesmas trajetórias de Y (logo é topològicamente equivalente a Y) e suas órbitas fechadas têm os mesmos períodos e as mesmas seções invariantes que os correspondentes de $\mu(X)$.

<u>Demonstração</u>: Seja α uma órbita fechada de X, de período ω, e seja S uma seção transversal de X por um ponto $p \in \alpha$. Inicialmente vamos perturbar X de modo a obter um nôvo campo X^* com as mesmas órbitas de X, tal que α seja ainda uma órbita de período ω de X^* e S seja agora uma seção invariante para X^*.

O campo X^* será da forma ρX, onde ρ é uma função C^r que vale 1 fora de uma pequena vizinhança de um ponto de α.

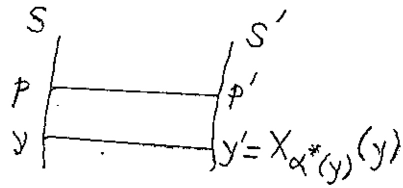
Seja $S' = X_{-(\omega - t_o)}(S)$, sendo $0 < t_o < \omega$. Temos $X_{t_o}(p) = p' \in S'$.



Seja

$$\alpha^* : S \to \mathbb{R}$$

a função que a cada $y \in S$ associa o menor tempo $\alpha^*(y)$ tal que $X_{\alpha^*(y)}(y) \in S'$.



É claro que α^* é C^r. Observemos que se $\alpha^*(y) = \alpha^*(p) = t_o$ em uma vizinhança de p em S, então a seção seria invariante. Sejam U e V vizinhanças de p em S tais que $\bar{U} \subset V$. Usando uma "bump function" (que permanecerá fixa mesmo quando estudarmos os campos próximos a X) definimos uma função C^r, $\alpha : S \to \mathbb{R}$, por $\alpha(y) = \alpha^*(y)$ se $y \in U$, e $\alpha(y) = t_o$ se $y \in S - V$. Seja $\gamma_y : [0, \alpha(y)] \to M$, $\gamma_j(t) = X_t(y)$ (a parametrização da órbita por $y \in S$, entre S e S').

Seja

$$(y,t) \xrightarrow{\ h\ } h(y,t)$$

uma função de classe C^r definida em $S \times [0, t_o]$ que satisfaz as condições: $h_y(t) = h(y,t)$ é um polinômio de grau $2r+1$ cujos coeficientes são determinados por:

$$h_y(0) = 0 \quad , \qquad h_y(t_o) = \alpha(y) \; ,$$
$$\frac{dh_y}{dt}(0) = 1 \quad , \qquad \frac{dh_y}{dt}(t_o) = 1 \; ,$$
$$\frac{d^2h_y}{dt^2}(0) = 0 \quad , \qquad \frac{d^2h_y}{dt}(t_o) = 0 \; ,$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^rh_y}{dt}(0) = 0 \quad , \qquad \frac{d^rh_y}{dt}(t_o) = 0 \; .$$

(Por exemplo, o polinômio do 3º grau que cumpre as quatro primeiras condições é

$$h_y(t) = t + 3\,\frac{\alpha(y)-t_o}{t_o^2}\,t^2 - 2\,\frac{\alpha(y)-t_o}{t_o^3}\,t^3 \quad .)$$

Tomando V suficientemente pequena, como α é contínua e $\alpha(p) = t_o$, temos que para cada $y \in S$, a aplicação

$$h_y:[0,t_o] \to [0,\alpha(y)]$$

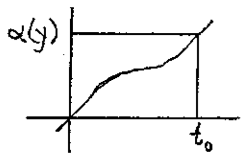


gráfico de h_y

é um difeomorfismo.

Observemos que, para y fora de V, h_y é a identidade. Definimos

$$\bar{\gamma}_y:[0,t_o] \to M \quad \text{por} \quad \bar{\gamma}_y = \gamma_y \circ h_y \; .$$

Tomamos V suficientemente pequena para que a aplicação

$\varphi:(y,t) \mapsto \bar{\gamma}_y(t)$ seja um difeomorfismo C^r. Seja $W = \varphi[S\times[0,t_o]] \subset M$ e seja $\rho: M \to \mathbb{R}$ a composta das aplicações C^r

$$q \xmapsto{\varphi^{-1}} (y,t) \longmapsto \frac{dh_y}{dt}(t) .$$

Vemos que ρ vale 1 em S, em S' e fora de $\varphi(V\times[0,t_o])$. Pelas condições impostas às derivadas de h_y e pelo fato acima, podemos estender ρ a M como sendo 1 fora de $\varphi(S \times [0,t_o])$. Definimos

$$X^* = \rho X .$$

Se $y \in U$ vemos que $X_t^*(y) = \bar{\gamma}_y(t)$ e portanto $X_{t_o}^*(y) \in S'$. Logo, α é uma órbita de X^*, de período ω, e $X_\omega^*(U) \subset S$, isto é, S é uma seção invariante para X^*. Realizando a mesma construção para cada órbita de X, obtemos um campo $\mu(X)$ satisfazendo as condições do lema.

Como $\mathcal{S}(M)$ é aberto, tomamos vizinhança N de X tal que $N \subset \mathcal{S}(M)$. Tomamos N suficientemente pequena para que as seções S, invariantes por $\mu(X)$, sejam também seções transversais para cada $Y \in N$. Repetindo a construção acima para $Y \in N$, com $S_Y' = Y_{-(\omega-t_o)}(S)$, obtemos a função

$$\mu: N \longrightarrow \mathfrak{X}(M) ,$$

a qual é contínua pois a função α depende continuamente do campo Y.

OBSERVAÇÃO: Podemos tomar μ de modo que tôdas as órbitas de $\mu(Y)$, com $Y \in N$, tenham período 1.

DEFINIÇÃO - Seja $X \in \mathcal{S}(M)$. Seja $\alpha \in M$ uma singularidade de X. Uma <u>família tubular</u> T de $W^s(\alpha) = T_o$ é uma coleção $\{T_y\}_{y \in N_\alpha}$ de subvariedades C^r de M, disjuntas, sendo N_α uma vizinhança de α em $W^u(\alpha)$, com as propriedades:

(a) $V = V(T_o) = \bigcup_{y \in N_\alpha} T_y$ é um aberto de M contendo $T_o = T_\alpha$;

(b) $T_y \pitchfork W^u(\alpha) = \{y\}$;

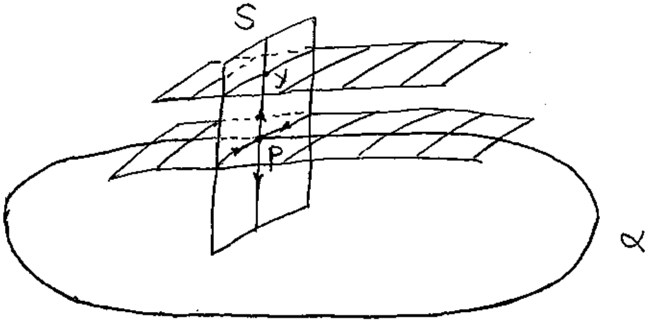
(c) a aplicação $p: V \to N$ que a cada $x \in T_y$ associa y (projeção ao longo das fibras) é contínua;

(d) a seção s que leva $x \in T_y$ no espaço tangente a T_y em x, é uma aplicação contínua de V no fibrado grasmaniano sôbre V (continuidade grasmaniana).

Dizemos que a família tubular é <u>invariante</u> se $X_{-t}(T_y) = T_{X_{-t}(y)}$, $\forall\, t \geq 0$.

DEFINIÇÃO - Seja $X \in \mathcal{S}(M)$ e seja $\alpha \subset M$ uma órbita fechada de X, de período 1, com uma seção transversal invariante S em $p \in \alpha$, isto é, $X_1(U) \subset S$

(U = vizinhança de p em S). Seja $f: U \to S$ a transformação de Poincaré associada a S: $f = X_1|U$. Seja $\{T_f^s(y)\}_{y \in U \cap W_f^u(p)}$ uma família tubular invariante para $W_f^s(p)$. A <u>família tubular</u> para $W^s(\alpha)$ é definida por $T^s(X_t(y)) = X_t(T_f^s(y))$, com $y \in U$ e $t \in \mathbb{R}$.



Observemos que a fibra T_o por p é $\bigcup_{n \geq 0} X_{-n}(W_f^s(p))$ e a fibra por um ponto $y \in \alpha$ tal que $X_{t_o}(p) = y$ é $\bigcup_{n \geq 0} X_{-n+t_o}(W_f^s(p))$.

DEFINIÇÃO - Seja $X \in \mathcal{S}(M)$ um campo que admite seção invariante por pontos de tôdas as órbitas fechadas. Um <u>sistema de famílias tubulares</u> para X é um conjunto de famílias tubulares $T = \{T_z^k\}_{x \in N_k}$, uma para cada $\alpha_k \in \Lambda(X)$. O sistema é <u>compatível</u> se $T_x^i \cap T_y^j \neq \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow T_x^i \subset T_y^j$ ou $T_y^j \subset T_x^i$.

TEOREMA (da família tubular) - Seja $X \in \mathcal{S}(M)$. Existe uma vizinhança N de X e uma função contínua $\mu: N \to \mathfrak{X}(M)$ tal que, para cada $Y \in N$, $\mu(Y)$ tem as mesmas órbitas que Y o qual admite um sistema de famílias tubulares $T^Y = \{T^k\}$, compatível e invariante, cada T^k sendo uma família tubular de $W^s(\alpha_k(Y))$.

OBSERVAÇÃO: A aplicação

$$\pi: \bigcup_{x \in N_k} T^k_x \longrightarrow W^u(\alpha_k(Y))$$
$$T^k_x \longmapsto x = T^k_x \cap W^u(\alpha_k(Y))$$

é C^r em cada T^i_x, $1 \le i \le k$.

Demonstração: (Por indução na ordem do diagrama de fase.)

Construiremos o sistema de famílias tubulares para o campo $\mu(X)$ e resultará, como no caso de difeomorfismos, que as famílias tubulares para $\mu(Y)$ dependerão contìnuamente de Y.

1) Seja $\alpha_1 \in \Lambda(X)$ um elemento crítico de ordem zero (um poço).

a) Se α_1 é uma singularidade, a família tubular de $W^s(\alpha_1)$ será constituida apenas de $W^s(\alpha_1)$.

b) Se α_1 é uma órbita fechada (atratora), seja S_1 uma seção transversal de X. Perturbamos X, de acôrdo com o Lema 1, de modo a obter um campo X^1 com as mesmas órbitas que X e que admite S_1 como seção invariante. A família tubular de $W^s(\alpha_1)$ é constituida por iterações da seção invariante S_1 pelo fluxo X_t^1 (as fibras são difeomorfas a S_1).

2) Supondo construidas as famílias tubulares de $W^s(\alpha_1),\dots,W^s(\alpha_{k-1})$ compatíveis e invariantes (de um campo X^{k-1} com as mesmas órbitas de X), passemos à construção da família tubular de $W^s(\alpha_k)$ onde α_k é um elemento crítico cuja ordem no diagrama de fase é k. Temos dois casos a considerar:

a) α_k é um ponto singular e

b) α_k é uma órbita fechada.

Caso a). Consideremos inicialmente um elemento $\alpha_{k-1} \in \Lambda(X^{k-1})$ com ordem 1 em relação a α_k e que seja um ponto singular.

Queremos construir uma fibração sôbre D^k (domínio fundamental), com fibras que interceptam transversalmente $W^u(\alpha_k)$ em um único ponto (portanto devem ter a dimensão de $W^s(\alpha_k)$) e que estejam contidas em Σ^k para que após iterações pelo fluxo possamos obter família tubular para $W^s(\alpha_k)$ invariante por êle. Para que a condição de compatibilidade seja satisfeita é necessário que esta fibração que estamos construindo tenha as fibras sôbre as fibras anteriores.

Como $T_o^{k-1} = W^s(\alpha_{k-1})$ intercepta $W^u(\alpha_k)$ por órbitas, a dimensão da interseção será ≥ 1. Como Σ^k tem dimensão n-1, é transversal ao campo e T_o^{k-1} é invariante pelo fluxo, temos que T_o é transversal a Σ^k. Logo, $L_o = T_o^{k-1} \cap \Sigma^k$ é uma subvariedade de M. Temos $\dim L_o = \dim T_o^{k-1} + \dim \Sigma^k - n = \dim T_o^{k-1} - 1 \geq W^s(\alpha_k)$. Da mesma forma, como as fibras T_x^{k-1} estão C^1-próximas de T_o^{k-1}, serão também transversal a Σ^k e $L_x = T_x^{k-1} \cap$ $\cap\ \Sigma^k$ terá a dimensão de L_o.

Como $L_o \subset \Sigma^k$ é uma subvariedade transversal a $W^u(\alpha_k)$ (transversalidade em M) e portanto é transversal a D^k (transversalidade em Σ^k), $L_o \cap D^k$ é uma subvariedade. Se a dimensão de $L_o \cap D^k$ fôr zero, isto é, $\dim L_o = \dim W^s(\alpha_k)$, o problema está resolvido. Caso contrário, seja (B, p_1) vizinhança tubular de $L_o \cap D^k$ em L_o. Se $x \in D^k \cap L_o$ então $p_1^{-1}(x) \cap W^u(\alpha_k) = \{x\}$ (transversalidade em L_o), $L_o \cap D^k = L_o \cap D^k$ (transversalidade em Σ^k) e Σ^k intercepta $W^u(\alpha_k)$ transversalmente em D^k (transversalidade no ambiente). Logo, $\dim p_1^{-1}(x) =$ $= \dim W^s(\alpha_k)$. Seja (V, p) uma vizinhança tubular de B em Σ^k. Tomamos T_x^{k-1} suficientemente C^1-próxima de T_o^{k-1} para que $p|L_x \cap V$ seja um difeomorfismo p_x sôbre $L_o \cap V$. Como no caso de difeomorfismos, a fibração obtida em L_o é ~~transmitida~~ a L_x através de p_x.

Suponhamos agora que $\alpha_{k-1} \in \Lambda(X)$ é uma órbita fechada de ordem 1 em relação a α_k. Observamos que como $W^s(\alpha_{k-1})$ não se acumula em Σ^k e $W^s(\alpha_{k-1}) \pitchfork \Sigma^k$, então $W^s(\alpha_{k-1}) \cap \Sigma^k$ é uma subvariedade compacta de M e

$$\dim(W^s(\alpha_{k-1}) \cap \Sigma^k) = \dim W^s(\alpha_{k-1}) - 1 = \text{dimensão das subfibras de } W^s(\alpha_{k-1}) .$$

Vamos substituir o campo X^{k-1} por um campo X^k com as mesmas órbitas do primeiro e para o qual a interseção $W^s(\alpha_{k-1}) \cap \Sigma^k$ é formada por partes das subfibras de $W^s(\alpha_{k-1})$.

Sejam T_o uma subfibra de $W^s(\alpha_{k-1})$, S^{k-1} a seção invariante de α_{k-1} e f a transformação de Poincaré correspondente. Tomamos $G^s(f)$ um domínio fundamental em $W^s(f)$. Existe $t_o \in R$ tal que $X_{-t_o}(G^s(f)) \subset T_o$. Pela construção das subfibras temos

$$T_o = (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} X^{k-1}_{-t_o-n}(G^s(f)) \cup (T_o \cap \alpha_{k-1})$$

[período de $\alpha_{k-1} = 1$].

Sejam $C_1,\dots,C_r$ as componentes conexas da variedade compacta $W^s(\alpha_{k-1}) \cap \Sigma^k$.

Para cada $p \in C_i$ existem $\tilde{p} \in G^s(f)$ e um tempo $t_p = \tilde{t}_p + n$, $\tilde{t}_p \in [0,1]$, tal que $X^{k-1}_{t_p}(\tilde{p}) = p$. Pelo teorema do fluxo tubular longo existem uma vizinhança V_p de p em Σ^k e uma vizinhança $V_{\tilde{p}}$ de $\tilde{p}$ em S^{k-1} tais que as órbitas por pontos de V_p interceptam V_p num tempo limitado. Como C_i é compacto existe uma subcobertura finita $V_{p_1},\dots,V_{p_m}$ de C_i e correspondentes $V_{\tilde{p}_1},\dots,V_{\tilde{p}_m}$. Pomos

$$V_i = \bigcup_{j=1}^{m} V_{p_j} \quad \text{e} \quad \tilde{V}_i = \bigcup_{j=1}^{m} V_{\tilde{p}_j} .$$

Obtemos assim uma vizinhança de C_i em Σ^k e um aberto $\tilde{V}_i$ que intercepta $G^s(f)$ tal que as órbitas por pontos de $\tilde{V}_i$ cortam V_i depois de um tempo limitado. É claro que podemos tomar $V_1,\dots,V_r$ disjuntas e, consequentemente, as $\tilde{V}_1,\dots,\tilde{V}_r$ serão disjuntas, porque $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j \neq \emptyset$ implica em que existe uma órbita por um ponto de $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$ que intercepta Σ^k em V_i e em V_j, e daí, sendo Σ^k transversal a X^{k-1}, teremos $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, o que é absurdo. Mudando a velocidade do campo X^{k-1} conforme o Lema 1 podemos obter um campo X^k cujas órbitas são as mesmas de X^{k-1} e tal que tôdas as órbitas por pontos de $\tilde{V}_i$ vão encontrar V_i depois do mesmo tempo t_i, para $i=1,\dots,r$.

Observamos agora que para o campo X^t, $W^s(\alpha_{k-1})$ e fibras suficientemente vizinhas interceptam Σ^k em subfibras do tipo T_o. Fibramos $T_o \cap \Sigma^{k-1}$ e subfibras de fatias vizinhas com fibras do tipo $W^s(\alpha_k)$, usando o raciocínio feito no caso em que α_{k-1} era ponto singular. A fibração obtida é transportada para as demais subfibras de $W^s(\alpha_{k-1})$ e subfibras vizinhas, iterando pelo fluxo X_t^k.

Seja $\alpha_{k-2} \in \Lambda(X)$ um elemento de ordem 2 em relação a α_k (portanto de ordem 1 com relação a α_{k-1}). $W^s(\alpha_{k-2})$ acumula-se em Σ^k numa vizinhança de $W^s(\alpha_{k-1}) \cap \Sigma^k$. Pela compatibilidade, a parte da família tubular de $W^s(\alpha_{k-2})$ que está na vizinhança mencionada fica subfibrada com fibras do tipo $W^s(\alpha_k)$. Como no complemento desta vizinhança (em Σ^k), $W^s(\alpha_{k-2})$ não se acumula em Σ^k, podemos repetir o argumento já visto para obter a fibração neste complemento.

Prosseguimos por indução. Como por cada ponto de D^k passa uma variedade estável de elemento crítico anterior a α_k no diagrama de fase, conseguimos uma retração de Σ^k sôbre D^k e, iterando por X_{-t}, obtemos pelo λ-Lema, uma família tubular compatível e invariante para $W^s(\alpha_k)$.

Caso b). O procedimento anterior ainda é válido quando α_k é uma órbita fechada, bastando notar que o papel da vizinhança fundamental Σ^k será agora desempenhado por S^k.

Conseguimos então um campo $\mu(X)$ com as mesmas órbitas de X e que admite um sistema de famílias tubulares compatível. Pela construção e pelo Lema 1, vemos que a aplicação $Y \mapsto \mu(Y)$ definida em uma vizinhança de X, é contínua e a família tubular de $\mu(Y)$ vai depender contìnuamente de Y, como no caso de difeomorfismos.

O nosso objetivo agora é demonstrar o teorema da estabilidade estrutural para $X \in \mathcal{S}(M)$.

LEMA 2 - Seja $\{U_k\}_{1 \le k \le s}$ uma cobertura de M e seja N uma vizinhança do campo nulo $\theta \in \mathfrak{X}(M)$. Existe uma vizinhança N_1 de θ tal que se $z \in N_1$ então podemos escrever

$$z = z_s + \dots + z_1$$

onde $z_i \in N$ e $z_i = 0$ fora de U_i.

<u>Demonstração</u>: Seja $(\lambda_i)_{i=1,\dots,m}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}$. Tomamos $z_i = \lambda_i z$. Se z está próximo de θ, z_i também estará próximo de θ, pois λ_i e suas derivadas são limitadas.

LEMA 3 - Seja $X \in \mathcal{S}(M)$. Existem uma vizinhança N de X, $U_k = U_k(\alpha_k)$ e um inteiro $J > 0$ tal que:

a) $\{X_j^*(U_k)\}_{\substack{0 \leq j \leq J \\ 1 \leq k \leq m}}$ é uma cobertura de M;

b) para cada $Y \in N$ e k como acima
$X_j^*(U_k) \subset T_{X^*}^{k,s} \cap T_{X^*}^{k,u} \cap T_{Y^*}^{k,s} \cap T_{Y^*}^{k,u}$, $j=0,\ldots,J$;

c) Se x e y pertencem a um mesmo $X_j^*(U_k)$ então $T^{k,s}(x)$ intercepta $T^{k,u}(y)$ transversalmente em um único ponto.

<u>Observação</u>: $Y^* = \mu(Y)$ onde $\mu: N(X) \to \mathfrak{X}(M)$ é a função contínua do Teorema da Família Tubular.

<u>Demonstração</u>: Análoga ao caso de difeomorfismos.

TEOREMA (da estabilidade estrutural) - Se $X \in \mathcal{S}(M)$ então X é estruturalmente estável.

<u>Demonstração</u>: Seja N uma vizinhança de X e $\mu: N \to \mathfrak{X}(M)$ a função do Teorema da Família Tubular.

Queremos mostrar que, restringindo N se necessário, os campos $Y \in N$ são topològicamente equivalentes a X. Como $Y \in N$ é topològicamente equivalente a $\mu(Y)$ e X a $\mu(X)$, basta provar que $\mu(X)$ e $\mu(Y)$ são topològicamente equivalentes. Como μ é contínua, podemos supor que $\mu(Y)$ está próximo a $\mu(X)$ (restringindo N). Para simplificar a notação denotaremos $\mu(X)$ e $\mu(Y)$ por X e Y, respectivamente.

Seja $\{X_j(U_k)\}_{\substack{0\leq j\leq J\\ 1\leq k\leq m}}$ uma cobertura de M como no Lema 3. Tomando Y próximo de X temos, pelo Lema 2,

$$Y-X = X_s + \dots + X_1$$

onde cada X_i é nulo fora de algum aberto cujo fêcho está contido em $X_j(U_k)$, e X_i está próximo do campo nulo. Como $\mathcal{S}(M)$ é aberto, podemos supor que

$$\bar{X}_i = X_i + \dots + X_1 + X$$

também está em $\mathcal{S}(M)$, para cada i

Por transitividade, basta mostrar a equivalência topológica entre $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_{i-1}$. (É possível que os campos $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_{i-1}$ não admitam famílias tubulares. Mas, procedendo como anteriormente podemos alterar as velocidades para obter campos $\bar{X}_i'$ e $\bar{X}_{i-1}'$ que estão próximos, são iguais fora de um compacto e que admitem famílias tubulares). Vamos supor então $Y = X$ fora de algum W com $\bar{W} \subset X^j(U_k)$. [X e Y ainda no lugar de $\mu(X)$ e $\mu(Y)$.]

Seja $V = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(U_k)$, isto é, o saturado de U_k. Vamos definir um fluxo $\tilde{X}_t$ em V com as propriedades:

$$\tilde{X}_t\, T_X^{k,s}(x) = T_X^{k,s}(X_t(x)),$$

$$\tilde{X}_t\, T_Y^{k,u}(x) = T_Y^{k,u}(Y_t(z)).$$

Para isto observemos o seguinte:

1) se $x \in V$ então $Y_t(x) \in V, \forall t \in \mathbb{R}$;

2) se $x \in V$ então existe $T_Y^{k,u}(x)$;

3) se $x \in V$ $T_X^{k,s}(X_t(x))$ intercepta transversalmente $T_Y^{k,u}(Y_t(x))$ em um único ponto.

Estas propriedades podem ser verificadas lembrando que $X = Y$ fora de W, com $W \subset X^j(U_k)$ (j fixo) e aplicando b) e c) do Lema 3. Com isto podemos definir

$$\tilde{X}_t(x) = T_X^{k,s}(X_t(x)) \cap T_Y^{k,u}(Y_t(x)), \ x \in V.$$

Se $x \in V$ mas x não pertence ao saturado de W, então $\tilde{X}_t(x) = X_t(x) = Y_t(x)$. Logo, podemos estender $\tilde{X}_t$ a M fazendo $\tilde{X}_t(x) = X_t(x)$ se $x \in M-V$. É claro que $\tilde{X}_t$ é um fluxo e é contínuo.

Vamos procurar um homeomorfismo $h:M \to M$ que conjugue X_t e $\tilde{X}_t$. Definimos

$$h(x) = \lim_{t\to\infty} \tilde{X}_t \, X_{-t}(x) \ .$$

Observemos que:

(i) $h(x) = x$, se $x \in M-V$;

(ii) se $x \in V$ e existe $t_o > 0$ tal que $X_{-t}(x) \notin W$ para $t \geq t_o$, então $h(x) = \tilde{X}_{t_o} X_{-t_o}(x)$. Com efei-

to, se $t = t' + t_o$ com $t' > 0$ e $y = X_{-t_o}(x)$ temos, pela hipótese, que $X_{-t'}(y) \in V-W$, $\forall\, t' \geq 0$. Como $X = Y$ fora de W, temos $\tilde{X}_{-t'}(y) = X_{-t'}(y)$ para $t' \geq 0$.
Logo,

$$\tilde{X}_{t'+t_o} X_{-(t'+t_o)}(x) = \tilde{X}_{t_o} \tilde{X}_{t'} X_{-t'} X_{-t_o}(x) =$$
$$\tilde{X}_{t_o} \tilde{X}_{t'} X_{-t'}(y) = \tilde{X}_{t_o} \tilde{X}_{t'} \tilde{X}_{-t'}(y) = \tilde{X}_{t_o}(y) =$$
$$\tilde{X}_{t_o} X_{-t_o}(x),$$

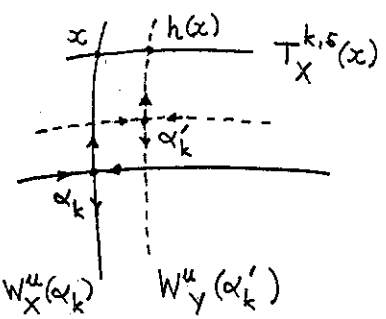
donde

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{X}_t X_{-t}(x) = \tilde{X}_{t_o} X_{-t_o}(x) .$$

(iii) Se $z \in W^u_X(\alpha_k)$ então $h(x) = T^{k,s}_X(x) \cap W^u_Y(\alpha'_k)$.
Com efeito,

$$\tilde{X}_t X_{-t}(T^{k,s}_X(x)) = \tilde{X}_t T^{k,s}_X(X_{-t}(x)) = T^{k,s}_X(x) .$$

Basta mostrar então que $\tilde{X}_t X_{-t}(x)$ se aproxima de $W^u_Y(\alpha'_k)$.



Para t suficientemente grande, $y=X_{-t}(x)$ está próximo de $W^u_Y(\alpha'_k)$ em partes compactas (λ-Lema).
Como $\tilde{X}_t X_{-t}(x)$ está nesta fibra e também em $T^{k,s}_X(x)$, temos que $\tilde{X}_t X_{-t}(x)$ está próximo de $T^{k,s}_X(x) \cap W^u_Y(\alpha'_k)$,

para t suficientemente grande. Logo

$$h(x) = T_X^{k,s}(x) \cap W_Y^u(\alpha_k') \ .$$

Com estas observações concluimos que h está bem definido. É claro que $h = \tilde{X}_t\, h\, X_{-t}$, para todo t, isto é, h conjuga $\tilde{X}_t$ e X_t. Como no caso de difeomorfismo, mostramos fàcilmente que h é um homeomorfismo.

Resta mostrar a conjugação entre $\tilde{X}_t$ e Y_t. Para tanto, basta definir

$$\tilde{h}(x) = \lim_{t\to\infty} Y_{-t}\, \tilde{X}_t(x) \ ,$$

procedendo de maneira análoga.

Observemos que conseguimos um homeomorfismo que leva trajetórias de X^* em trajetórias de Y^*, preservando o tempo. Entretanto, como observamos no início, já haviamos modificado os campos iniciais X e Y que são topològicamente equivalentes a X^* e Y^* porém não são conjugados (o homeomorfismo é a identidade e não preserva o tempo). Contudo, se os campos X e Y não tiverem órbitas fechadas (por exemplo, os gradientes) obtemos um homeomorfismo que preserva o tempo, porque não precisamos modificar os campos para a construção da família tubular.

REFERÊNCIAS

[1] J. PALIS and S. SMALE, Structural Stability Theorems.

[2] J. PALIS, On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology, Vol. 8, 385-405, 1969.

STABLE MANIFOLDS FOR HYPERBOLIC SETS

R. Jewett
and
W. White

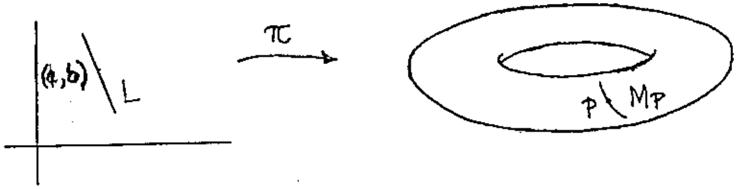
1. INTRODUCTION

In certain dynamical systems there are points, neither fixed nor periodic, which have some of the characteristics of hyperbolic fixed points. That is, the tangent space of such a point has a splitting, one part of which is contracted exponentially under iteration of the mapping, and the other part of which is expanded exponentially. If the orbit of this point lies in a compact invariant subset of the manifold, and the contraction and the expansion are in some sense uniform on the compact set, then the methods used to study hyperbolic fixed points in Banach spaces can be used to study this point and this set.

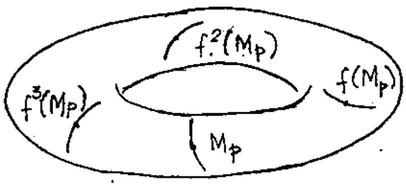
AN EXAMPLE - Using the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, an automorphism of the torus is specified by

either f, $(x,y) \mapsto (2x+y, x+y)$ in $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

or g, $(z,w) \mapsto (z^2 w, zw)$ in $\{(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}: |z|=|w|=1\}$. Choose a point p in M. Let $(a,b) = \pi^{-1}(p)$ be a corresponding point in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Let L be an open line segment through (a,b) with slope $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Then $M_p = \pi(L)$, the projection of L in M, is a one-dimensional submanifold of M through p'.



Moreover, under iteration of f, the sets $f^n(M_p)$ contract exponentially in diameter to zero, even though the sets are not converging to a point, in general.



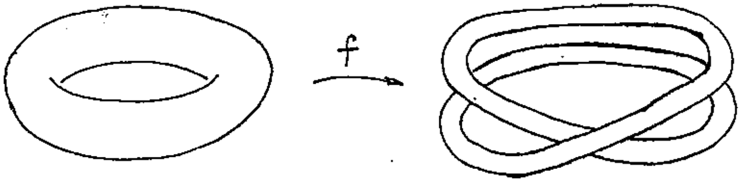
Specifically,

$$\text{length } f^n(M_p) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n (\text{length } M_p) .$$

ANOTHER EXAMPLE. Let M be the open solid torus

$$\{(z,w) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : |z| = 1,\ |w| < 1\}.$$

Let $f : M \to M$ be a differentiable mapping which winds M around twice and such that $f(M)$ is bounded away from the surface of M.



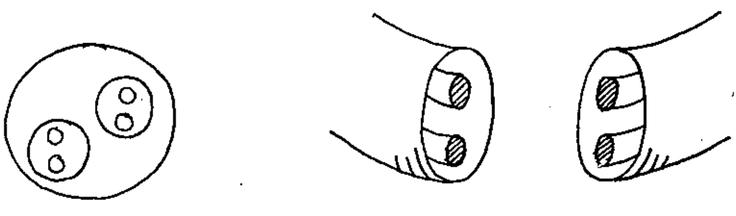
In particular, let

$$f(z,w) = (z^2,\ \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{4}w) \ .$$

Note that

$$\tfrac{1}{4} < |\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{4}w| < \tfrac{3}{4} \ .$$

A cross-section of M, fixing the first coordinate, is a disk of radius 1. A cross-section of $f^n(M)$ is 2^n disks of radius $1/4^n$, nested in the disks for $f^{n-1}(M)$.



Hence
$$\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(M)$$

is a compact non-void subset of M, which in cross-section is homeomorphic to the Cantor set. For each $p \in M$, let M_p be the cross-section of M through p, namely a disk. Under f, M_p is contracted uniformly by a factor $\frac{1}{4}$ and thus the tangent vectors to p in M_p are also so contracted. In some sense, M_p is a "stable manifold" for p under f.

NOTE: In the first example, there is a Whitney sum splitting

$$T(M) = E^s \oplus E^u$$

which is invariant under the action of f. One part, E^s, is contracted exponentially, and the other, E^u, is expanded exponentially. Moreover, the tangent bundle of the submanifold M_p is contained in E^s.

In the second example, Λ is locally homeomorphic to $\mathbb{R} \times$ (Cantor set) under a mapping which is differentiable in the first coordinate. Thus, using the curves in Λ, a splitting

$$T_\Lambda(M) = E^s \oplus E^u$$

is determined, where E^s consists of the vectors in the disks and E^u the vectors tangent to the curves in Λ.

Under the action of f, E^s and E^u are invariant, and E^s is contracted exponentially and E^u is expanded exponentially.

IN GENERAL. Let $k \geq 1$ and let M be a C^k-manifold. Let U be an open subset of M and let

$$f: U \to M$$

be a diffeomorphism (C^k). Let d be a metric for M. Let U_f be the set of p in U such that $f(p), f^2(p), \ldots$ are defined (and in U). Then the relation

$$p \equiv q \quad \text{if} \quad d(f^n(p), f^n(q)) \to 0$$

is an equivalence relation on U_f.

In the first example, $U_f = U = M$, and the equivalence classes are dense curves in M.

In the second example, $U_f = U = M$ and the equivalence classes are the cross-section disks.

For the general case, if $p \in U_f$ and $\epsilon > 0$ and the set

$$W_p^s = \{q \in U_f \colon q \equiv p \text{ and } d(f^n(q), f^n(p)) < \epsilon, \text{ all } n\}$$

is a submanifold of M, then W_p^s is called a

<u>Stable Manifold for p</u> .

2. REVIEW

The theory for hyperbolic fixed points in Banach spaces will be used. The expression ${}^{e}S$ is defined by ${}^{e}S = \{x \in S: \|x\| < e\}$.

THEOREM 1 - "<u>Stable manifold theorem for a hyperbolic fixed point</u>".

Let S be a Banach space, $k \geq 1$, $r > 0$, and

$$F: {}^{r}S \to S$$

a C^k-diffeomorphism such that

$$F(0) = 0.$$

Let
$$T = F'(0).$$

Suppose that there is a splitting

$$S = S^u \oplus S^s$$

such that

$$[P1] \qquad T(S^u) = S^u$$
$$T(S^s) = S^s$$

$$[P2] \qquad \|T|S^s\| < 1$$
$$\|T^{-1}|S^u\| < 1 .$$

Then there exist an $e > 0$ and a positive $\lambda < 1$ with the following properties:

Define

$$N = \{x+y: x \in S^s,\ y \in S^u,\ \|x\|<e,\ \|s\|<e\},$$

and set

$$W^s = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{-n}(N).$$

For each $x \in {}^eS^s$ there exists a unique $y \in S^u$ such that $x+y \in W^s$. Denote this y by $G(x)$.

The mapping

$$G: {}^eS^s \to S^u$$

is C^k-differentiable, and

$$G(0) = 0,\ G'(0) = 0.$$

Moreover,

$$F(W^s) \subset W^s$$

$$u,v \in W^s \Rightarrow \|F(u)-F(v)\| \le \lambda\|u-v\| .$$

NOTE: The usual version of this theorem is somewhat different. In particular, Hirsch and Pugh assume that

$$x \in S^s,\ y \in S^u \Rightarrow \|x+y\| = \max\{\|x\|,\|y\|\}.$$

and they do not note that $G'(0) = 0$, but only that

$$\|G(x)\| \le \|x\|.$$

Since E^u can be renormed, for each $K > 0$, $\|G(x)\| \le K\|x\|$ for sufficiently small x. Hence $G'(0) = 0$. Using now a general norm on S,

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ x,y\in S^s\\ x\neq y}} \frac{\|G(x)+x - G(y)-y\|}{\|x-y\|} = \lim_{\substack{x,y,z\to 0\\ x,y,z\in S^s\\ x\neq y}} \frac{\|G'(z)(x-y)+(x-y)\|}{\|x-y\|}$$

This limit is 1. Thus the contraction property of W^s does not depend on the norm of S, though ϵ, and λ undoubtedly do.

THE PLAN. For the case of $f:U \to M$, $U \subset M$, as described above, it will be assumed that there is also given a compact subset Λ of U such that $f(\Lambda) = \Lambda$. A new system $F:V \to S$, $V \subset S$, $0 \in V$, will be constructed, where S is a Banach space, and where Λ corresponds (in some sense) to the point 0. If Λ is a "hyperbolic set" for f, then 0 will be a hyperbolic fixed point for F.

The correspondence requires rather strong assumptions about the tangent bundle of Λ in M. It may be that weaker conditions, involving only the tangent spaces of the iterates of a point, also guarantee the existence of a stable manifold for the point.

3. STABLE MANIFOLDS FOR HYPERBOLIC SETS

THEOREM 2 - Let M be a finite-dimensional C^∞ Riemannian manifold, $U \subset M$ an open set, $f:U \to M$ a C^k embedding, and $\Lambda \subset U$ a compact set such that $f(\Lambda) = \Lambda$. Suppose there is a continuous splitting $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$ such that:

1) $$Df(E^s_p) = E^s_{f(p)} \;, \quad Df(E^u_p) = E^u_{f(p)}$$

2) $$\|Df|_{E^s}\| < 1 \;, \quad \|(Df)^{-1}|_{E^u}\| < 1 \;.$$

Then there is a family $\{W^s_p\}_{p\in\Lambda}$ of C^k submanifolds of U, and constants $0 < \eta$, $\lambda < 1$, such that:

a) $p \in W^s_p$ and $T_p W^s_p = E^s_p$ for each $p \in \Lambda$;

b) $f(W^s_p) \subset W^s_{f(p)}$;

c) if $p \in \Lambda$, $q, f(q), f^2(q), \ldots \in U$, and $d(f^n(p), f^n(q)) < \eta$ for all $n \geq 0$, then $q \in W^s_p$;

d) if $q_1, q_2 \in W^s_p$ then $d(f(q_1), f(q_2)) \leq \lambda d(q_1, q_2)$;

e) for each $p \in \Lambda$ there is a neighborhood N of p in Λ and a continuous map $\varphi: N \to C^k(D^s; M)$ such that φ_q is a C^k diffeomorphism of the disk D^s onto W^s_q for each $q \in N$.

The set Λ is called <u>hyperbolic</u> for f, and the manifolds W_p^s are called <u>stable manifolds</u>.

The theorem is essentially topological. A C^∞ manifold can be given a C^∞ Riemannian structure, and condition 2) of the theorem is satisfied for some Riemannian structure if and only if the following condition is satisfied for all Riemannian structures.

2') There exist constants $K > 0$, $0 < c < 1$ such that

$$\|Df^n|_{E^s}\| < Kc^n, \quad \|(Df)^{-n}|_{E^u}\| < Kc^n \text{ for all } n \geq 0.$$

SCHEME: Most of the information we are given on $f: U \to M$ and Λ refers to the derivative map Df of the tangent bundle over Λ, $B = T_\Lambda M$, into itself. We will embed B in the Banach space S of bounded, possibly discontinuous sections of B, identifying $v_p \in B$ with the section $\Sigma(v_p) \in S$ given by

$$\Sigma(v_p)_q = \begin{cases} v_p & q = p \\ 0 & q \neq p \end{cases}.$$

We will then define a map F of a neighborhood of 0 in S into S, satisfying

$$\Sigma(v_p) \mapsto \Sigma(w_{f(p)})$$

where $f(\exp_p v_p) = \exp_{f(p)} w_{f(p)}$. We will show that F is C^k and $F(0) = 0$, and that $F'(0)$ satisfies

$$\Sigma(v_p) \mapsto \Sigma(Df_p v_p)$$

and then apply the stable manifold theorem for a hyperbolic fixed point.

Let M, U, Λ, f be as given in Theorem 2, and let $B = T_\Lambda M$.

We will use the following notation in a normed linear space V: ${}^rV = \{v \in V : \|v\| < r\}$.

Choose $\delta' > 0$ so that $\exp_p : {}^{\delta'}B_p \to M$ is defined for each p and takes ${}^{\delta'}B_p$ differentiably into $U \cap f^{-1}(U)$. From now on, we will take $\exp_p$ to mean $\exp_p|_{{}^{\delta'}B_p}$. Pick $\delta > 0$ such that $f(N_\delta(p)) \subset N_{\delta'}(f(p))$ for all $p \in \Lambda$, and let ${}^\delta B = \bigcup_{p\in\Lambda} {}^\delta B_p$.

The map f induces a map $\tilde{f} : {}^\delta B \to B$ defined by setting $\tilde{f}|_{{}^\delta B_p} = \exp^{-1}_{f(p)} \circ f \circ \exp_p$. The next proposition follows from the definition.

PROPOSITION 1 - The map $\tilde{f} : {}^\delta B \to B$ is continuous,

$$\tilde{f}({}^\delta B_p) \subset B_{f(p)}, \text{ and } \tilde{f}(0_p) = 0_{f(p)} \,.$$

Moreover, $\tilde{f}|_{{}^\delta B_p}$ is C^k, the norms of the partial derivatives $D_2\tilde{f}$ are bounded on ${}^\delta B$, and $D_2\tilde{f}_{0_p} = Df_p$.

Let S be the Banch space of bounded, possibly discontinuous, sections of B with norm $\|\sigma\| = \sup_{p\in\Lambda}\|\sigma_p\|_p$. The set S_c of continuous sections of B is a Banach subspace of S, and we shall write S_* to represent "either S or S_c."

Consider the Banach subspace

$$S^p = \{\sigma \in S: \sigma_q = 0 \text{ if } q \neq p\} \text{ of } S.$$

The map $w_p: S^p \to B_p$ defined by $ev_p(\sigma^p) = \sigma_p^p$ is an isomorphism, and we denote the inverse of ev_p by $\Sigma^p: B_p \to S^p$. Explicitly,

$$\Sigma^p(v_p)_q = \begin{cases} 0 & q \neq p \\ v_p & q = p \end{cases} .$$

For $\sigma \in S$ and $p \in \Lambda$, define $\sigma^p = \Sigma^p \, ev_p \, \sigma \in S^p$. We will consider S to be a subset of the product $X_{p\in\Lambda} \; S^p$ with $\sigma = X \, \sigma^p$.

The map f induces a map $F_*: {}^\delta S_* \to S_*$ defined by setting $F_*(\sigma) = \tilde{f} \circ \sigma \circ f^{-1}$. F_c is just the restriction of F, so we neglect the subscript. Let $F|_{{}^\delta S^p} = F^p$.

PROPOSITION 2 - $F^p = \Sigma^{f(p)} \circ f \circ ev_p$, so that $F^p({}^\delta S^p) \subset \subset S^{f(p)}$. For any $\sigma \in {}^\delta S$, $F(\sigma) = F(X\sigma^p) = X' F^p(\sigma^p)$.

PROOF: Consider $\Sigma^p(v_p) \in {}^\delta S^p$; we have $F^p(\Sigma^p(v_p)) =$ $= \tilde{f} \circ \Sigma^p(v_p) \circ f^{-1} = \Sigma^{f(p)}(\tilde{f}(v_p)) = \Sigma^{f(p)} \circ \tilde{f} \circ ev_p \circ$ $\circ\, \Sigma^p(v_p)$. If $\sigma \in {}^\delta S$, then $F(\sigma)^{f(p)} = (\tilde{f} \circ \sigma \circ f^{-1})^{f(p)} =$ $= (\tilde{f} \circ \sigma)^p = \tilde{f} \circ \sigma^p = (\tilde{f} \circ \sigma^p \circ f^{-1})^{f(p)} = F(\sigma^p)^{f(p)} = F^p(\sigma^p)$, so $F(\sigma) = X' F(\sigma)^{f(p)} = X' F^p(\sigma^p)$.

PROPOSITION 3 - $F: {}^\delta S \to S$ is a C^k embedding and $F(0) = 0$. If $F'(0) = T$, then $T\sigma = Df \circ \sigma \circ f^{-1}$.

PROOF: It is clear that $F(0) = 0$. The map $F: {}^\delta S =$ $= X\, {}^\delta S^p \to S \subset X' S^p$ is given by the coordinate functions F^p, and F^p is a C^k embedding into $S^{f(p)}$ because $\tilde{f}|_{{}^\delta B_p}$ is a C^k embedding into $B_{f(p)}$. F is thus 1-1 in each coordinate and hence 1-1. Each F^p is C^k and the norms of their derivatives are uniformly bounded, so F is C^k. $DF^p_0 = \Sigma^{f(p)} \circ D_2 \tilde{f}_{0_p} \circ ev_p = \Sigma^{f(p)} \circ$ $\circ\, Df_p \circ ev_p$; therefore, $DF^p_0\, \sigma^p = \Sigma^{f(p)} \circ Df_p \circ ev_p\, \sigma^p = Df \circ$ $\circ\, \sigma^p \circ f^{-1}$. The derivative T, which is given by the derivative of the coordinate functions, is thus $T_\sigma = Df \circ \sigma \circ$ $\circ\, f^{-1}$.

COROLLARY - Let $S^u_* = \{\sigma \in S_* : \sigma(\Lambda) \subset E^u\}$ and $S^s_* = \{\sigma \in S_* : \sigma(\Lambda) \subset E^s\}$. Then $S_* = S^u_* \oplus S^s_*$ and $\|T|_{S^s_*}\| < 1$, $\|T^{-1}|_{S^u_*}\| < 1$.

Now, let c_*, λ_*, W^s_*, and G_* be the constants, stable manifold, and C^k map given by the stable manifold theorem for a hyperbolic fixed point when applied to $F: {}^{\delta}S_* \to S_*$. By taking ϵ smaller or λ larger, if necessary, we may assume $\epsilon_c = \epsilon$, $\lambda_c = \lambda$. For each $\sigma \in {}^{\epsilon}S_*^s$ $G_*(\sigma)$ is the unique element of S_*^u such that $F^n(G_*(\sigma) + \sigma) \in {}^{\epsilon}N = \{\tau^u + \tau^s : \tau^u \in {}^{\epsilon}S^u, \tau^s \in {}^{\epsilon}S^s\}$ for all $n \geq 0$. This implies that $G_c = G|_{S_c^s}$, and we will neglect the subscript; $G(\sigma)$ is a continuous section if σ is a continuous section.

Let $G^p = G|_{{}^{\epsilon}S^s \cap S^p}$.

PROPOSITION 4 - $G({}^{\epsilon}S^s \cap S^p) \subset S^u \cap S^p$, and $G(X\sigma^p) =$

$$= XG^p(\sigma^p) \quad \text{for} \quad X\sigma^p \in {}^{\epsilon}S^s.$$

PROOF: If $\sigma \in {}^{\epsilon}S^s$; then the product $X'F^n(G(\sigma)^p + \sigma^p) =$

$$= X'F^n(G(\sigma) + \sigma)^p = F^n(X(G(\sigma) + \sigma)^p) = F^n(G(\sigma)+\sigma) \in$$

$\in {}^{\epsilon}N$ for all $n \geq 0$, so each factor $F^n(G(\sigma)^p + \sigma^p) \in {}^{\epsilon}N$ for all $n \geq 0$. The unique section $\tau \in S^u$ such that $F^n(\tau + \sigma^p) \in {}^{\epsilon}N$ for all $n \geq 0$ is $\tau = G(\sigma^p)$, so $G(\sigma)^p = G(\sigma^p)$. Thus, if $\sigma^p \in {}^{\epsilon}S^s \cap S^p$ then $G(\sigma^p) =$ $= G(\sigma^p)^p \in S^u \cap S^p$, and $G(X\sigma^p) = G(\sigma) = X\, G(\sigma)^p =$ $= X\, G(\sigma^p) = X\, G^p(\sigma^p)$.

PROOF OF THEOREM 2: For $p \in \Lambda$, let $W_p^s = \exp_p ev_p(W^s \cap S^p)$

$$\doteq \{\exp_p ev_p\, (G^p(\sigma^p) + \sigma^p) : \sigma^p \in {}^{\epsilon}S^s \cap S^p\}.$$

We now show that the W_p^s's satisfy the conclusions a)-e) of Theorem 2.

a) Follows from the fact that W^s is tangent to S^s at 0.

b) Let $\sigma \in {}^{\epsilon}S^p$ be $\Sigma^p \exp_p^{-1}(q)$ for some $q \in N_\delta(p)$.

Then $F(\sigma) = \Sigma^{f(p)} \circ \tilde{f} \circ ev_p \circ \Sigma^p \circ \exp_p^{-1}(q) = \Sigma^{f(p)} \circ \tilde{f} \circ$ $\circ \exp_p^{-1}(q) = \Sigma^{f(p)} \circ \exp_{f(p)}^{-1} \circ f \circ \exp_p \circ \exp_p^{-1}(q) = \Sigma^{f(p)} \circ$ $\circ \exp_{f(p)}^{-1} f(q)$. If $q \in W_p^s$ then $\sigma \in W^s$, so $F(\sigma) \in W^s$ and $f(q) \in W_{f(p)}^s$.

c) Pick $\eta > 0$ such that ${}^{\eta}S \subset {}^{\epsilon}N$. Then $d(f^n(p), f^n(q)) <$ $< \eta$ for all $n \geq 0$ implies that $F^n(\Sigma^p \exp_p^{-1}(q)) =$ $= \Sigma^{f^n(p)} \exp_{f^n(p)}^{-1} f^n(q) \in {}^{\epsilon}N$ for all $n \geq 0$, so that $q \in W_p^s$.

d) Follows from the fact that $\exp_p$ is a local isometry at 0_p.

e) Take open sets V and V' with $\bar{V} \subset V'$, such that $B_{V' \cap \Lambda} = E^u_{V' \cap \Lambda} \oplus E^s_{V' \cap \Lambda} = (V' \cap \Lambda) \times (R^u \oplus R^s)$. For $x \in {}^{\epsilon}R^s$, let $\sigma(x) \in {}^{\epsilon}S_c^s$ be a section such that $\sigma_p(x) =$ $= (p,x)$ for all $p \in V \cap \Lambda$. For $p \in V \cap \Lambda$, $ev_p\{G(\sigma(x)) + \sigma(x):$ $x \in {}^{\epsilon}R^s\} = ev_p\{G(\sigma^p) + \sigma^p) : \sigma^p \in {}^{\epsilon}S^s \cap S^p\}$. Define $\varphi : (V \cap \Lambda) \to C^k({}^{\epsilon}R^s, M)$ by

$$\varphi_p(x) = \exp_p ev_p(G(\sigma(x)) + \sigma(x)) .$$

REFERENCES

HIRSCH, M.W., and PUGH, C.C. - "Stable manifolds and hyperbolic sets", Proceedings of symposia in pure mathematics XIV, American Mathematical Society.

TAVARES, G. - "Variedade estável de elemento crítico", êste seminário.

O TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL PARA DIFEOMORFISMOS

Nathan Moreira dos Santos

§1. O objetivo desta exposição é demonstrar o análogo, para difeomorfismos, do teorema espectral. A demonstração vai depender fortemente do teorema da variedade estável, que recordaremos abaixo.

Seja M uma variedade riemanniana e $f: M \to M$ um difeomorfismo. Um conjunto $\Lambda \subset M$ é invariante por $f \Leftrightarrow f(\Lambda) = \Lambda$. Diremos que Λ possui uma <u>estrutura hiperbólica</u> $\Leftrightarrow$ existe uma decomposição em soma de Whitney (contínua) $T_\Lambda M = E_u \oplus E_s$, do espaço fibrado tangente a M sôbre Λ, satisfazendo às seguintes propriedades:

(a) $Df(E_u) \subset E_u$, $Df(E_s) \subset E_s$

(b) $\max[\|Df^n|E_s\|, \|Df^{-n}|E_u\|] < c\,\tau^n$ onde $c > 0$ e $0 < \tau < 1$.

Por resultado de J. Mather, se M é compacta, então existe métrica riemanniana para a qual podemos tomar $c = 1$.

Seja $x \in \Lambda$ e $e > 0$. O conjunto

$$W_e^s(x) = \bigcap_{n>0} f^{-n}(B_e(f^n(x)))$$

(onde $B_e(f^n(x))$ é a bola aberta de raio e na distância induzida pela métrica riemanniana de M), é a <u>variedade estável</u> de tamanho e do ponto x.

TEOREMA 1 - Se Λ é compacto, então:

(a) existe $e > 0$ tal que cada ponto $x \in \Lambda$ possui uma variedade estável $W_e^s(x)$ de tamanho e;

(b) $\{W_e^s(x)\}_{x \in \Lambda}$ é uma família contínua de subvariedades de classe C^k de M, $k \geq 1$;

(c) existe um número real λ, $0 < \lambda < 1$ tal que se $y,z \in W_e^s(x)$, então $d(f^n(y),f^n(z)) \leq \lambda^n d(y,z)\ \forall\ n \geq 0$

(d) $W_e^s(x) \cap W_e^s(y)$ é aberto em $W_e^s(x)\ \forall\ x,y \in \Lambda$;

(e) $W_e^s(x)$ é tangente em x a $E_x^s\ \forall x \in \Lambda$.

<u>Demonstração</u>: Ver [2].

§2. <u>Coordenadas Canônicas</u>

Um ponto $p \in M$ é <u>não-errante</u> para um difeomorfismo $f: M \to M \Leftrightarrow$ para cada vizinhança U de p em M existe $n \neq 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \phi$.

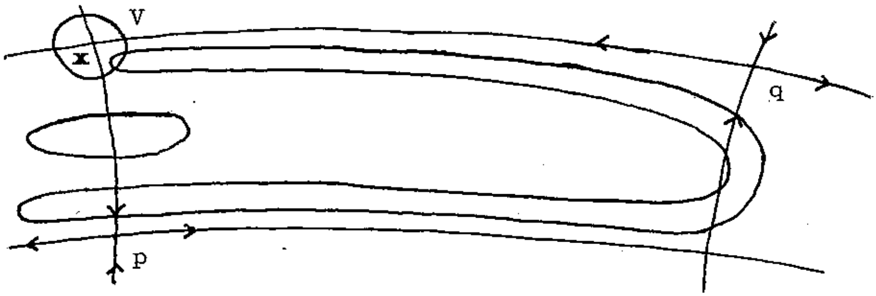
O conjunto $\Omega = \Omega(f)$ dos pontos não-errantes de $f:M \to M$ é fechado, invariante e contém o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f.

LEMA 1 - Seja $f:M \to M$ um difeomorfismo e p,q pontos periódicos hiperbólicos tais que

$$W^u(p) \pitchfork W^s(q) \neq \Phi, \qquad W^s(p) \pitchfork W^u(q) \neq \Phi \quad .$$

Então os pontos de intersecção são não-errantes.

Demonstração:



Seja n o mínimo múltiplo comum dos períodos de p e q e V uma vizinhança qualquer de x. Pelo λ-lema algum iterado $f^{nk}(V)$ intersecta $W^s(q)$ e portanto, ainda pelo λ-lema algum iterado $f^{ns}(V)$ intersecta V.

O teorema espectral será demonstrado para os difeomorfismos $f:M \to M$ que satisfazem ao seguinte

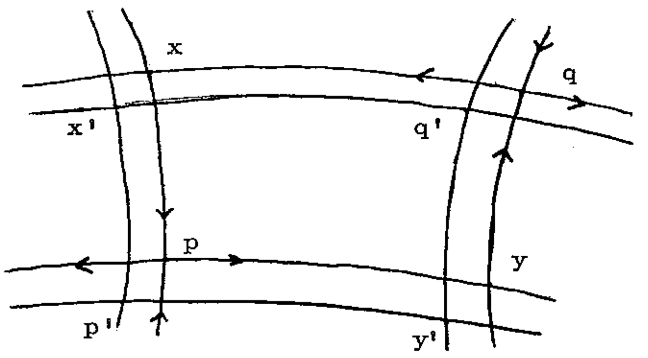
AXIOMA A - (a) Ω é hiperbólico; (b) $Per(f)$ é denso em Ω.

Um problema em aberto é saber se (a) $\Rightarrow$ (b).

LEMA 2 - Seja $f:M \to M$ um difeomorfismo satisfazendo o Axioma A. Então, para cada ponto $x \in \Omega$ existe um número real $e > 0$ e uma vizinhança V de x em M satisfazendo à seguinte propriedade: se $p,q \in N = V \cap \Omega$, então $W_e^s(p)$ e $W_e^u(q)$ se intersectam em um único ponto e êsse ponto é não-errante.

<u>Demonstração</u>: Por (a), (b) e (e) do Teorema 1 e pelo lema da transversalidade existe $e > 0$ e uma vizinhança V de x em M tal que se $p,q \in N$, então

$$W_e^s(p) \cap W_e^u(q) = z, \qquad W_e^u(p) \cap W_e^s(q) = y$$



Pelo Axioma A escolho pontos periódicos p',q' arbitràriamente próximos de p e q, respectivamente. Assim $W_e^u(p') \cap W_e^s(q') = y'$, $W_e^s(p') \cap W_e^u(q') = x'$. Pelo Lema 1, $x',y' \in \Omega$. Assim, arbitràriamente próximos de z e y existem pontos não-errantes e como Ω é fechado, $z,y \in \Omega$.

§3. Decomposição Espectral

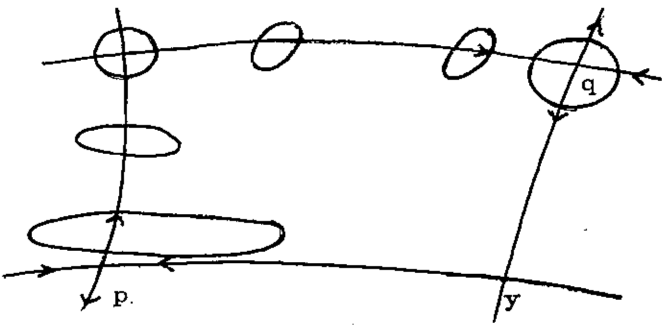
LEMA 3 - Seja $f:M \to M$ um difeomorfismo satisfazendo o Axioma A e $x \in \Omega$. Seja N uma vizinhança de x em Ω dada pelo Lema 2. Se U é qualquer aberto não vazio em N, então

$$\bigcup_{n\leq 0} f^n(U) \quad \text{e} \quad \bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$$

contêm conjuntos densos de N.

Demonstração: Pelo Axioma A é suficiente mostrar que

$$Per(f) \cap N \subset \overline{\bigcup_{n\leq 0} f^n(U)}.$$



Pelo Axioma A existe um ponto periódico $q \in U$. Seja p um ponto periódico arbitrário de N. Pelo Lema 2, $W_e^u(p) \cap W_e^s(q) = x$, $W_e^s(p) \cap W_e^u(q) = y$ onde $x,y \in \Omega$. Iterando U negativamente vemos que $x \in \bigcup_{n\leq 0} f^n(U)$ e continuando com a iteração vemos que $p \in \overline{\bigcup_{n\leq 0} f^n(U)}$.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL - Seja M uma variedade compacta e $f: M \to M$ um difeomorfismo satisfazendo o Axioma A. Então existe uma única decomposição finita

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$$

onde os Ω_i são disjuntos, fechados, invariantes e f possui órbitas densas em cada Ω_i.

Demonstração: Escolha para cada $x \in \Omega$ uma vizinhança N_x em Ω pelo Lema 2. Defina $\Omega_x = \overline{\bigcup_{n \in Z} f^n(N_x)}$. O Lema 3 nos diz que Ω_x não depende da escolha de N_x. Se $x, y \in \Omega$, então ou $\Omega_x = \Omega_y$ ou $\Omega_x \cap \Omega_y = \Phi$. Realmente, se $z \in \Omega_x \cap \Omega_y$ e N_z é uma vizinhança de z em Ω dada pelo Lema 2, então pelo Lema 3, temos

$$\Omega_x = \overline{\bigcup_n f^n(N_z)} = \Omega_y$$

pois $N_z \cap \operatorname{int} \Omega_x \neq \Phi$ e $N_z \cap \operatorname{int} \Omega_y \neq \Phi$. Existe apenas um número finito de Ω_x pois caso contrário poderíamos, por compacidade de Ω, construir uma sequência convergente $x_n \to x \in \Omega$ com $x_n \in \Omega_n$ e $\Omega_n \neq \Omega_m$ se $n \neq m$. Assim existiria n_o tal que $x_n \in \Omega_x$ $\forall n \geq n_o$ e portanto $\Omega_n = \Omega_x$ $\forall n \geq n_o$, o que contraria a construção acima.

Mostraremos agora que em cada Ω_i f possui órbita densa. Realmente, seja $\{U_r\}$ uma base enumerável de abertos de Ω_i. Pelo Lema 3, o conjunto $\bigcup_n f^n(U_r)$ é aberto e denso em Ω_i. Portanto o conjunto $D = \bigcap_r \bigcup_n f^n(U_r)$ é residual em Ω_i.

Afirmo: todo ponto $x \in D$ possui órbita densa em Ω_i. Realmente, se $z \in \Omega_i$ e V é uma vizinhança de z em Ω_i, então existe r_o tal que $z \in U_{r_o} \subset V$. Assim, pela construção de D, existe n_o tal que $x \in f^{n_o}(U_{r_o})$ ou seja $f^{-n_o}(x) \in U_{r_o} \subset V$.

COROLÁRIO 1 - Seja M uma variedade compacta e $f:M \to M$ um difeomorfismo satisfazendo o Axioma A.

Então M pode ser decomposto canonicamente na união finita, disjunta e invariante

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i)$$

onde $W^s(\Omega_i) = [x \in M \mid w\text{-lim}\, \mathcal{O}(x) \subset \Omega_i]$.

<u>Demonstração</u>: Se $x \in M$ e $\mathcal{O}(x)$ é a órbita de x, então $w\text{-lim}\, \mathcal{O}(x) \subset \Omega$, pois se $f^{m_k}(x) \to x_o$ é uma subsequência convergente de $\mathcal{O}(x)$ e U é uma vizinhança de x_o em M, então existem inteiros m_j e n_j tais que $f^{m_j}(x), f^{m_j+n_j}(x) \in U$ ou seja $f^{m_j}(x) \in f^{n_j}(U) \cap U$ e x_o é não-errante.

Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$ a decomposição espectral de Ω.

Afirmo: w-lim $\Theta(x) \subset \Omega_i$ para algum i. Realmente, suponha que $x_o \in \Omega_i$. Escolho vizinhanças V e W em M tais que $\Omega_i \subset W$, $\widehat{\Omega}_i \subset V$, $W \cap V = \Phi$ onde $\widehat{\Omega}_i = \Omega - \Omega_i$. Desde que Ω_i é invariante e $f:M \to M$ contínua, então para cada $x \in \Omega_i$ existe vizinhança U_x de x em M tal que U_x, $f(U_x) \subset W$. Seja $U_{x_1},\ldots,U_{x_r}$ cobertura finita de Ω_i e $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}$. Assim

$$\Omega_i \subset U, \quad U \cap V = \Phi, \quad f(U) \cap V = \Phi \tag{1}$$

Suponha que w-lim $\Theta(x) \cap \widehat{\Omega}_i \neq \Phi$. Podemos então construir subsequências $f^{m_k}(x) \to x_o \in \Omega_i$, $f^{n_k}(x) \to y_o \in \widehat{\Omega}_i$ e $f^{\ell_k}(x)$ tal que $n_k < \ell_k < m_k$ (use (1) acima) e $f^{\ell_k}(x) \to z_o \notin \Omega$ o que é impossível.

COROLÁRIO 2 - Seja M uma variedade compacta, $f:M \to M$ um difeomorfismo satisfazendo o Axioma A e $\Omega = \bigcup_{i=1} $ o conjunto dos pontos não errantes de f. Se $x \in \Omega_i$ é um ponto periódico então $W^s(x)$ é denso em Ω_i.

<u>Demonstração</u>: Seja N uma vizinhança de x em Ω como no Lema 2. Temos: $\Omega_i = \overline{\bigcup_{n\in Z} f^n(N)}$. Se

$z \in \Omega_i$ e V é uma vizinhança de z então existe $n_o \in Z$ tal que $f^{-n_o}(V) \cap N \neq \Phi$. Como $\overline{Per\ f} = \Omega$ existe $y \in f^{-n_o}(V) \cap N$, ponto periódico de f. Pela construção da vizinhança N $W^s(x)$ intercepta transversalmente $W^u(y)$ e portanto $W^s(x)$ se acumula em $W^u(y)$. Logo existe $\bar{y} \in W^s(x) \cap f^{-n_o}(V)$, $\bar{y}$ ponto não errante. Consequentemente $f^{n_o}(\bar{y}) \in V \cap W^s(x)$ pela invariança de $W^s(x)$.

OBSERVAÇÃO: $W^s(x)$ é a variedade estável da órbita de x.

REFERÊNCIAS

[1] S. SMALE - Differentiable Dynamical Systems - Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 73 - Nov. 1967.

[2] M.W. HIRSCH and C. PUGH - Stable manifolds and hyperbolic sets.

[3] M.W. HIRSCH, J. PALIS, C. PUGH and M. SHUB - Neighborhoods of Hyperbolic Sets, Inventiones Math. 9, 121-134 (1970).

Ω-EXPLOSÕES

Geovan Tavares dos Santos

O propósito desta exposição é:

a) descrever uma certa classe de campos para qual, pequenas perturbações, faz explodir o conjunto não-errante,

b) dar uma solução parcial ao problema de caracterizar a Ω-estabilidade.

O item a) é devido a J. Palis e o item b) a J.Palis -C.Pugh. Ambos encontram-se descritos no artigo [4] de J. Palis.

Seja M uma variedade compacta C^∞ e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores C^r, $r \geq 1$, em M, com a topologia C^r. Denotaremos por $\Omega(X)$ o conjunto não-errante de $X \in \mathfrak{X}(M)$.

DEFINIÇÃO 1 - a) $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são ditos Ω-conjugados se existe um homeomorfismo $h: \Omega(x) \to \Omega(Y)$ levando trajetórias de X em trajetórias de Y.

b) $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dito Ω-estável se $\forall \varepsilon > 0$ existe uma vizinhança $V(X) \subset \mathfrak{X}(M)$ tal que se $Y \in V(X)$ então X é Ω-conjugado a Y por um homeomorfismo h ε-C^0-próximo da identidade.

DEFINIÇÃO 2 - Seja $T_\Omega M$, $\Omega = \Omega(X)$, $X \in M$, o fibrado tangente a M restrito a Ω. Ω é dito hiperbólico se

a) $T_\Omega M = E^s \oplus E^u \oplus E^c$

b) $DX_t|E^s$ é invariante a $\exists a, \lambda > 0$ tais que $\|DX_t\| \leq ae^{-\lambda t}$, $t > 0$ $DX_t|E^u$ é invariante e $\exists b, r > 0$ tais que $\|DX_{-t}\| \leq be^{-rt}$, $\forall t > 0$ e $Dx_t|E^c$ é invariante.

DEFINIÇÃO 3 - $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz o Axioma A' se:

a) $\Omega = \Omega(X)$ é a união disjunta do conjunto dos pontos críticos F e do fêcho Λ de suas órbitas periódicas.

b) Cada elemento de F é hiperbólico e Λ é um conjunto hiperbólico no sentido da Definição 2.

Em [7] encontra-se o seguinte teorema:

TEOREMA (da decomposição espectral) - Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz o Axioma A', então $\Omega(X) = \Omega_o \cup \ldots \cup \Omega_k$ união disjunta, onde cada Ω_i é fechado, invariante e $X_t|\Omega_i$ é topològicamente transitivo (i.e. possui uma órbita densa em Ω_i).

Cada Ω_i do teorema anterior é chamado conjunto básico.

DEFINIÇÃO 4 - Para cada Ω_i definimos as variedades estável e instável por $W^s(\Omega_i) = \{x \in M;\ X_t(x) \to \Omega_i,\ t \to \infty\}$ e $W^u(\Omega_i) = \{x \in M;\ X_t(x) \to \Omega_i,\ t \to -\infty\}$.

[3] contém a demonstração da existência de $W^s(\Omega_i)$ e $W^u(\Omega_i)$.

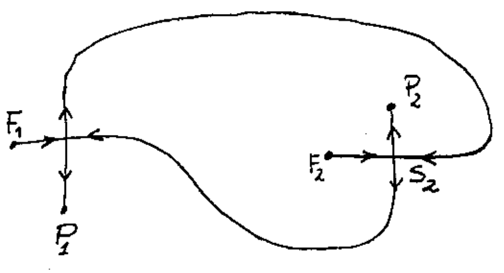
DEFINIÇÃO 5 - Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo o Axioma A'.

Dizemos que existe um n-ciclo, $n \geq 2$, em Ω se existe uma sequência de conjuntos básicos $\Omega_o, \Omega_1, \ldots, \Omega_n$ tais que

a) $\Omega_o = \Omega_n$, $\Omega_i \neq \Omega_j$, $i \neq j$, $i \neq 0$ e $j \neq n$.

b) $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_{i+1}) \neq \emptyset$, $0 \leq i \leq n-1$.

EXEMPLO (em S^2):



P_1, P_2 = poços

F_1, F_2 = fontes

S_1, S_2 = selas

$\Omega_o = \{S_1\} = \Omega_2$

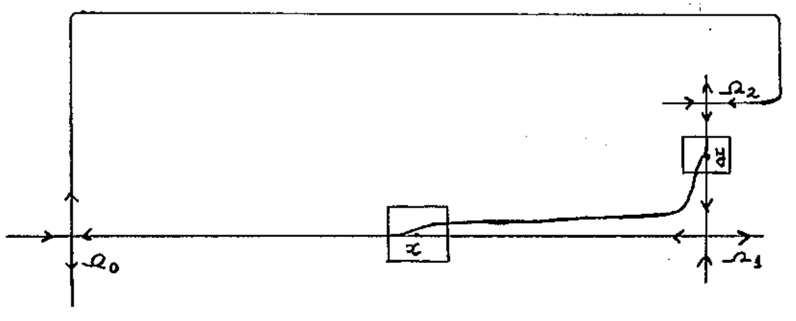
$\Omega_1 = \{S_2\}$

TEOREMA - Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz o Axioma A' e existe um n-ciclo em $\Omega(X)$ então X não é Ω-estável.

<u>Prova</u>: Vamos mostrar que se $n \geq 2$ então existe Y próximo a X tal que $Y/\Omega(x) = X/\Omega(X)$ e para o qual existe um $n-1$ ciclo em $\Omega(X)$.

<u>1º caso</u>: Suponha que o ciclo $\Omega_o, \Omega_1, \ldots, \Omega_n = \Omega_o$ são pontos críticos de X.

Seja $x \in W^s(\Omega_o) \cap W^u(\Omega_1)$ e $y \in W^s(\Omega_1) \cap W^u(\Omega_2)$ (ver figura abaixo com $n = 3$). Pelo λ-lema [6, pg. 387] se V é um disco transversal a $W^s(\Omega_1)$ em y, então $x \in$ fêcho $\mathcal{O}_+(V)$, onde $\mathcal{O}_+(V) = \bigcup_{t \geq 0} X_t(V)$. Então existe uma perturbação ΔX com suporte pequeno contendo x e y tal que $Y = X + \Delta X$ satisfaz: $Y/\Omega(X) = X/\Omega(X)$ e $\Omega_o, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ é um $(n-1)$-ciclo para Y.



<u>2º caso</u>: Suponha que nem todos os conjuntos básicos $\Omega_o, \Omega_1, \ldots, \Omega_n = \Omega_o$ é constituido de pontos crí-

ticos.

a) Se algum dos Ω_i é um ponto crítico, procedemos como no caso anterior e obteremos um (n-1)-ciclo.

b) Devido ao item anterior podemos supor que nenhum dos Ω_i é ponto crítico.

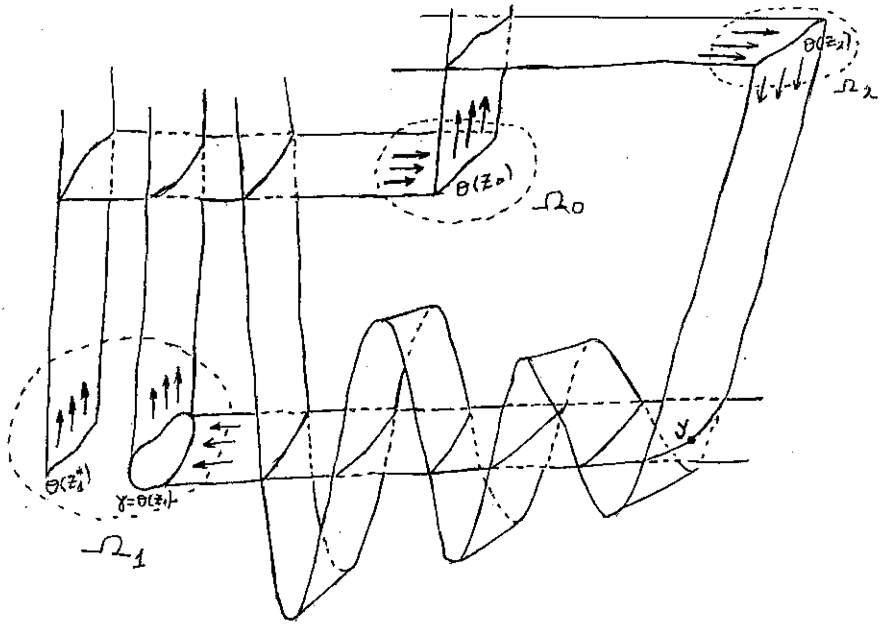
Para cada $z \in \Omega_i$ temos $\dim W^s\Theta(z) + \dim W^u\,\Theta(z) =$ $= \dim M+1$, onde $W^s\Theta(z) = \bigcup_{x\in\Theta(z)} W^s(x)$ e $W^u\Theta(z) =$ $= \bigcup_{x\in\Theta(z)} W^u(x)$. De [1] temos que $W^s(\Omega_i) = \bigcup_{z\in\Omega_i} W^s\Theta(z)$ e $W^u(\Omega_i) = \bigcup_{z\in\Omega_i} W^u\Theta(z)$. Como $\{\Omega_i\}_{i=0}^n$ é um ciclo, temos que $\exists j$ e existem $z_j \in \Omega_j$, $z_{j+1} \in \Omega_{j+1}$ tais que $\dim W^s\Theta(z_j) + \dim W^u\Theta(z_{j+1}) \geq \dim M+1$. Com efeito, se $\dim W^s\Theta(z_j) + \dim W^u\Theta(z_{j+1}) < \dim M+1 \;\; \forall j \in \{0,\ldots,n\}$ teríamos

$$A = \sum_{j=0}^{n} [\dim W^s\Theta(z_j)+\dim W^u\Theta(z_{j+1})] < (n+1)(\dim M+1) .$$

Por outro lado, usando o fato de que $\{\Omega_i\}_{i=0}^n$ é um ciclo temos que $A = (\dim W^s\Theta(z_o) + \dim W^u\Theta(z_{n+1})) + \ldots +$ $(\dim W^s\Theta(z_n) + \dim W^u\Theta(z_{n-1})) = (n+1)(\dim M+1)$ o que é uma contradição. Por simplicidade de notação vamos supor $j = 1$.

Sejam $x \in W^s\Theta(z_o) \cap W^u(z_1^*)$ e $y \in W^s\Theta(z_1)\cap W^u\Theta(z_2)$ $z_o \in \Omega_o$, z_1, $z_1^* \in \Omega_1$, $z_2 \in \Omega_2$. Como há dimensão suficiente podemos fazer $W^s\Theta(z_1)$ e $W^u\Theta(z_2)$ transversais, fazendo uma perturbação em X com suporte pequeno contendo y. Já que $X|\Omega_1$ é topològicamente transitivo, podemos supor que $\gamma = \Theta(z_1)$ é periódica e que z_1^* está próximo a γ.

Pelo λ-lema $C\ell W^u\Theta(z_2) \supset W^u\gamma$, portanto $W^s(\Omega_o) \cap W^u(\Omega_2) \neq \emptyset$ e obtemos um $(n-1)$-ciclo para Y, (ver figura abaixo para $n = 3$).



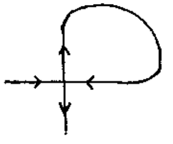
Obtemos assim um n-1 ciclo.

Procedendo do mesmo modo obteremos um campo Z próximo a X tal que:

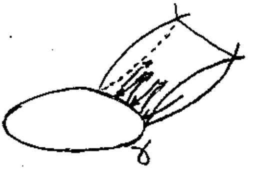
1) $Z|\Omega(X) = X|\Omega(X)$

2) $\Omega(Z)$ tem pontos longe de $\Omega(X)$.

Se todos os Ω_i são pontos críticos obteremos $W^s(\Omega_o) \cap \cap W^u(\Omega_o) \neq \emptyset$ (ver figura abaixo em dimensão 2) e pelo λ-lema êstes pontos da intersecção são não-errantes.



Se nem todos os Ω_i são pontos críticos obteremos uma órbita fechada γ tal que $W^s\gamma \cap W^u\gamma \neq \emptyset$ e esta intersecção é constituida de pontos não-errantes.



Nas duas situações Z e X não são conjugados por um homeomorfismo h e-C^o-próximo da identidade.

C.Q.D.

Para o caso de difeomorfismos ver [6].

OBSERVAÇÃO: No caso em que Ω é finito ou que em vez de campo temos um difeomorfismo, podemos deixar de exigir que o homeomorfismo que dá a conjugação seja e-C^o-próximo da identidade. Isto é verdade porque existe uma correspondência entre elementos críticos no caso Ω finito e entre os pontos periódicos de mesmo período no caso de difeomorfismos. Quando se trata do caso geral para campos, constitui uma questão aberta saber se o homeomorfismo que dá a conjugação pode deixar de ser e-C^0-próximo da identidade.

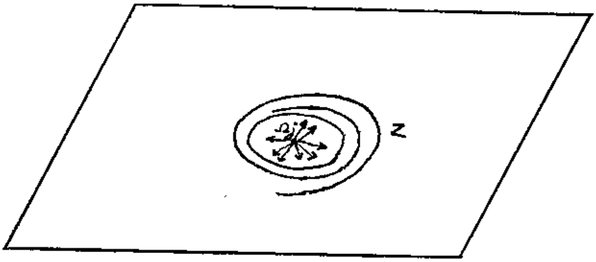
CARACTERIZAÇÃO DA Ω-ESTABILIDADE

PROPOSIÇÃO - Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\Omega = \Omega(X) = \bigcup_i \Omega_i$ é a união finita de pontos críticos e órbitas fechadas. Se X é Ω-estável então Ω_i é hiperbólico $\forall i$.

<u>Prova</u>: Suponha que X é Ω-estável e Ω_j não é hiperbólico, para algum j. O fibrado tangente a M restrito a Ω_j, tem uma decomposição contínua $T_{\Omega_j} M = E^s+E^u+E^c$, onde E^s, E^u e E^c são invariantes por DX_t. DX_t contrai em E^s, expande em E^u e E^c é a parte central da decomposição, correspondente aos valôres próprios de X sôbre o eixo imaginário. Seja U uma vizinhança de Ω_j disjunta de Ω_i, $\forall i \neq j$, e $W^c = W^c(\Omega_j)$ a variedade central que é invariante pelo fluxo, contém Ω_j e é tangente a E^c em Ω_j, [2] (tal variedade não é única em geral). Podemos fazer uma perturbação de X uma certa vizinhança U_1, $\overline{U}_1 \subset U$ tal que o novo campo Y obtido deixe W^c invariante e $Y|U_1 \cap W^c$ seja atrator. Como X é Ω-estável não existe conjuntos críticos de Y em U, logo

$Y_t(x) \to \Omega_j$, $t \to \infty$, $\forall x \in U \cap W^c$.

Seja Z uma outra perturbação de X em U_1 (pos sìvelmente restringindo U_1) de modo que Ω_j seja uma fonte para Z, i.e. $Z_t(x) \to \Omega_j$ $t \to -\infty$ $\forall x \in U_1$. O conjunto w-limite de Z tem pontos em $W^c \cap (U-U_1)$, pois aí Z coincide com X e $-Y$, e Y_t contrai em U. Isto cria novos pontos não errantes para Z em $W^c \cap (U-U_1)$,



portanto Z não é conjugado a X.

C.Q.D.

COROLÁRIO - Seja X nas condições da proposição anterior. Então X é Ω-estável $\Leftrightarrow \Omega_i$ é hiperbólico $\forall i$, e Ω não tem ciclos.

Prova: No sentido $\Rightarrow$, é a proposição e o teorema aqui demostrados.

No sentido $\Leftarrow$, encontra-se a demonstração em [8].

[9] põe a seguinte conjectura: $X \in \mathfrak{X}(M)$ é Ω-estável $\Leftrightarrow X$ satisfaz o Axioma A' e não tem ciclos.

Para respondê-la, devido ao teorema aqui demonstrado e ao teorema da Ω-estabilidade [8], basta responder a seguinte pergunta: Ω-estabilidade implica o Axioma A'?

REFERÊNCIAS

[1] HIRSCH-PALIS-PUGH-SHUB, Neighborhoods of Hyperbolic sets, Inventiones Math. 9, 121-134 (1970)

[2] HIRSCH-PUGH-SHUB, Invariants Manifolds (a aparecer)

[3] HIRSCH-PUGH, Stable Manifolds for Hyperbolic sets (a aparecer)

[4] PALIS, J. - Ω-explosions, Proceedings of the A.M.S. (a aparecer)

[5] PALIS, J. - A note on Ω-stability, Proceedings of the A.M.S., Summer Institute on Global Analysis (Berkeley 1967) (a aparecer)

[6] PALIS, J. - On Morse-Smale Dynamical Systems, Topology voll 8, 385-405 (1969)

[7] SMALE, S. - Differentiable Dynamical Systems, Bulletim of the A.M.S. (1967) 747-817.

[8] SMALE, S. - Ω-Stability Theorem, Proceedings of the A.M.S., Summer Institute on Global Analysis (Berkeley 1967) (a aparecer)

[9] SMALE, S. - Global Stability Questions in Dynamical Systems, Lectures in Modern Analysis and Applications I, Springer-Verlag, 150-158 (1969).

NOTES ON Ω-STABILITY

S. Newhouse

In these notes we present the main ideas needed to prove a generalization of Smale's Ω-stability theorem for diffeomorphisms of a compact manifold [5]. For more details and references, we refer the reader to [3].

First, we need to fix some terminology and notation. Throughout these notes, M will be a compact C^∞ manifold, and f will be a C^r diffeomorphism, $0 < r \leq \infty$. $\mathrm{Diff}(M)$ will denote the space of C^1 diffeomorphisms with the uniform C^1 topology. $\Omega = \Omega(f)$ will denote the non-wandering set of f which is defined by $\Omega(f) = \{x \in M;$ for any neighborhood U of x, there is an integer $n(U)$ such that $f^{n(U)}(U) \cap U \neq \emptyset\}$. A point $x \in M$ is called an $\alpha(\omega)$-limit point of f if there is a point $y \in M$ and a sequence of integers $n_i \to -\infty(+\infty)$ such that $f^{n_i}(y) \to x$. If $f^{n_i}(y) \to x$ as $n_i \to -\infty(+\infty)$, x is also said to be an α-limit point (ω-limit point) of y with respect to f. When the context makes it clear what is meant, the reference to f will be omitted. For $y \in M$, $\alpha(y)(\omega(y))$ will denote the set of α-limit points (ω-limit points) of y. For a subset $D \subset M$, $\bar{D}$ will denote its closure in M and int D will denote its interior in M. Let $L_\alpha = L_\alpha(f)$ be the set of α-limit points of f, and let $L^- = L^-(f) = \overline{L_\alpha(f)}$. We call $L^-(f)$ the negative limit set of f. A subset $D \subset M$ is f-invariant if $f(D) = D$. Note that $\Omega(f)$, $L^-(f)$, $\alpha(x)$, $\omega(x)$, $x \in M$, are f-invariant subsets of M.

We recall that a compact f-invariant set Λ is called hyperbolic if there are a continuous splitting of the tangent bundle over Λ, $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, which is preserved by the derivative, Tf, of f, a riemannian metric $|\cdot|$ on M, and a constant $0 < \lambda < 1$ such that $|Tf(v)| \le \lambda|v|$, $v \in E^s$, and $|Tf^{-1}(v)| \le \lambda|v|$, $v \in E^u$. Such a riemannian metric is said to be adapted to Λ.

We need to recall some aspects of the stable manifold theory. The references are [1], [2], and [6].

Let Λ be a hyperbolic set, and let d be the topological metric on M induced by an adapted metric for Λ. For $x \in \Lambda$, define

$$W^u_e(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \le e \quad \text{for} \quad n \le 0\},$$
$$W^u(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to -\infty\},$$

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \le \epsilon \quad \text{for} \quad n \ge 0\},$$

$$W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to +\infty\}.$$

By the stable manifold theory, for $\sigma = s,u$, $x \in \Lambda$, $W_\epsilon^\sigma(x)$, $W^\sigma(x)$ are smooth manifolds tangent to E_x^σ and $W_\epsilon^\sigma(x) \subset W^\sigma(x)$. Define $W_\epsilon^\sigma(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W_\epsilon^\sigma(x)$ and $W^\sigma(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^\sigma(x)$.

The hyperbolic set Λ is said to have a local product structure if there is an $\epsilon > 0$ such that $W_\epsilon^u(\Lambda) \cap W_\epsilon^s(\Lambda) \subset \Lambda$.

A compact f-invariant set Λ is said to be topologically transitive if there is a point $x \in \Lambda$ whose orbit is dense; i.e., $\overline{\{f^n(x) : n \text{ an integer}\}} = \Lambda$. A periodic point x of f is a point such that $f^n(x) = x$ for some integer n.

The following spectral decompsotion theorem is proved in [3].

THEOREM 1 - If $L^-(f)$ is hyperbolic, then $L^-(f) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_n$ where $\{\Lambda_i\}$ is a disjoint collection of closed invariant topologically transitive sets. Further, each Λ_i has a local product structure, and the periodic points in Λ_i are dense in Λ_i.

The subsets Λ_i referred to in Theorem 1 are called basic sets. If Λ_i is a basic set, let $\hat{W}^{\sigma}(\Lambda_i) = W^{\sigma}(\Lambda_i) - \Lambda_i$, $\sigma = s,u$. A sequence $\Lambda_{i_0}, \dots, \Lambda_{i_j}$ of basic sets is called a cycle if $\Lambda_{i_0} = \Lambda_{i_j}$ and $\hat{W}^u(\Lambda_{i_k}) \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_{k+1}}) \neq \emptyset$ for $0 \leq k < j$.

A diffeomorphism f is Ω-stable if there is a neighborhood $\mathcal{N}$ of f in $\mathrm{Diff}(M)$ such that if $g \in \mathcal{N}$, there is a homeomorphism $h:\Omega(f) \to \Omega(g)$ such that $gh = hf$. f is said to be ϵ-Ω-stable or strongly Ω-stable if given $\epsilon > 0$, there is a neighborhood $\mathcal{N}_\epsilon$ of f in $\mathrm{Diff}(M)$ such that if $g \in \mathcal{N}_\epsilon$, there is a homeomorphism $h:\Omega(f) \to \Omega(g)$ such that $gh = hf$ and $d(h(x),x) \leq \epsilon$ for all $x \in M$.

As far as is known the set of Ω-stable diffeomorphism coincides with the set of strongly Ω-stable diffeomorphisms.

We can now state the Ω-stability theorem.

THEOREM 2 - If $L^-(f)$ is hyperbolic and $L^-(f)$ has no cycles, then $L^-(f) = \Omega(f)$ and f is strongly Ω-stable.

To proceed with the proof of Theorem 2, we first present the next proposition.

PROPOSITION 3 - If $L^-(f) = L^-$ is hyperbolic, and $L^- = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$ as in Theorem 1, then

$M = W^u(\Lambda_1) \cup \ldots \cup W^u(\Lambda_n)$.

Proof: By Theorem (1.1) of [2], since Λ_i has a local product structure, if $\alpha(x) \subset \Lambda_i$, then $x \in W^u(\Lambda_i)$. Thus to prove the proposition we only need show if $x \in \Lambda$, there is an i such that $\alpha(x) \subset \Lambda_i$.

Since the Λ_i are disjoint and invariant, there are neighborhoods U_i of Λ_i such that $(f^{-1}(U_i) \cup U_i \cup f(U_i)) \cap (f^{-1}(U_j) \cup U_j \cup f(U_j)) = \emptyset$ for $i \neq j$. Suppose $\alpha(x) \cap \Lambda_i \neq \emptyset$ and $\alpha(x) \cap \Lambda_j \neq \emptyset$ and $\Lambda_i \neq \Lambda_j$. Then there are integers $n_k < m_k$ with $n_k \to \infty$ such that $f^{-n_k}(x) \subset U_i$ and $f^{-m_k}(x) \in U_j$. But then there are integers v_k with $n_k < v_k < m_k$ such that $f^{-v_k}(x) \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Further, a limit point v of $\{f^{-v_k}(x)\}$ will be an α-limit point of f which is outside of $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = L^-(f)$. This is a contradiction, so there must be a unique i such that $\alpha(x) \subset \Lambda_i$.

From now on unless otherwise stated, it will be assumed that $L^- = L^-(f)$ is hyperbolic.

For a basic set Λ_i, define $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_i)} = \overline{W^u(\Lambda_i)} - \Lambda_i$.

A sequence $\Lambda_{i_o}, \ldots, \Lambda_{i_s}$ is called a <u>c-cycle</u> or (closure cycle) if $\Lambda_{i_o} = \Lambda_{i_s}$ and

$$\overline{\hat{W}^u(\Lambda_{i_k})} \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_{k+1}}) \neq \emptyset, \quad 0 \le k < s .$$

Part (1) of the following lemma is proved as Lemma (3.9) in [3]. The proof of part (2) is similar.

LEMMA 4 - Let Λ_1 and Λ_2 be basic sets such that $\Lambda_i \neq \Lambda_2$.

(1) If $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_1)} \cap \hat{W}^u(\Lambda_2) \neq \emptyset$, then $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_1)} \cap \hat{W}^s(\Lambda_2) \neq \emptyset$.

(2) If $\overline{W^u(\Lambda_1)} \cap W^s(\Lambda_2) \neq \emptyset$, then $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_1)} \cap \hat{W}^s(\Lambda_2) \neq \emptyset$.

THEOREM 5 - There are no cycles for $L^-(f)$ if and only if there are no c-cycles for $L^-(f)$.

Proof: Clearly, if there are no c-cycles, there are no cycles. To prove the converse, it suffices to prove the following statement. If there are no cycles and $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_i)} \cap \hat{W}^s(\Lambda_j) \neq \emptyset$, then there is a sequence $\Lambda_i = \Lambda_{i_\nu}, \Lambda_{i_{\nu-1}}, \ldots, \Lambda_{i_o} = \Lambda_j$ such that $\hat{W}^u(\Lambda_{i_k}) \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_{k-1}}) \neq \emptyset$ for $1 \leq k \leq \nu$. To prove this, assume Λ_{i_k} defined for $0 \leq k \leq \nu$ such that $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_i)} \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_\nu}) \neq \emptyset$, and if $k > 0$, $\hat{W}^u(\Lambda_{i_k}) \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_{k-1}}) \neq \emptyset$. Let $x \in \overline{\hat{W}^u(\Lambda_i)} \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_\nu})$. Let $\Lambda_{i_{\nu+1}}$ be the basic set such that $x \in W^u(\Lambda_{i_{\nu+1}})$. Then $x \in \hat{W}^u(\Lambda_{i_{\nu+1}})$. If $\Lambda_{i_{\nu+1}} = \Lambda_i$, we are done. If not, by Lemma 4 (1), $\overline{\hat{W}^u(\Lambda_i)} \cap \hat{W}^s(\Lambda_{i_{\nu+1}}) \neq \emptyset$. Thus we can repeat the process with the sequence $\{\Lambda_{i_k} : 0 \leq k \leq \nu+1\}$. Since there are only finitely many basic sets and no cycles, we must get a ν_o such that $\Lambda_{i_{\nu_o}} = \Lambda_i$.

If $L^-(f)$ is hyperbolic and there are no c-cycles, then, by Lemma 4(2), the collection of basic sets $\{\Lambda_i\}$ is partially ordered by the relation $\Lambda_i \geq_1 \Lambda_j$ if and only if there is a sequence $\Lambda_i = \Lambda_{i_o}, \Lambda_{i_1}, \ldots, \Lambda_{i_s} = \Lambda_j$ such that $W^u(\Lambda_{i_k}) \cap W^s(\Lambda_{i_{k+1}}) \neq \emptyset$ for $0 \leq k < s$.

Take a total ordering $\geq$ on $\{\Lambda_i\}$ such that if $\Lambda_i \geq \Lambda_j$, then Λ_j does not strictly precede Λ_i in the $\geq_1$ ordering. Label the Λ_i's such that $\Lambda_n > \Lambda_{n-1} > \ldots > \Lambda_1$ where $\Lambda_i > \Lambda_j$ means $\Lambda_i \geq \Lambda_j$ and $\Lambda_i \neq \Lambda_j$.

The next lemma is due to Smale (see [5, Lemma 4.2], or [3, Lemma 3.5].

LEMMA 6 - Let F be a compact invariant subset of f and let Q be a compact neighborhood of F such that $\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q) = F$. Then there is a compact neighborhood V of F such that $V \subset Q$ and $f(V) \subset \operatorname{int} V$.

THEOREM 7 (Filtration theorem) - There is a decreasing sequence of compact sets $M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots \supset M_1 \supset M_o = \emptyset$ such that

(1) $f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$

(2) $\Lambda_i \subset \operatorname{int}(M_i - M_{i-1})$

(3) $\bigcap_{n\geq 0} f^n(M_i) = \bigcup_{k\leq i} W^u(\Lambda_k) = \bigcup_{k\leq i} \overline{W^u(\Lambda_k)}$

(4) $$\bigcap_{-\infty<n<\infty} f^n(M_i - M_{i-1}) = \Lambda_i \ .$$

Hence, $L^-(f) = \Omega(f)$.

<u>Proof</u>: Take $M_o = \emptyset$ and assume M_i has been defined for $i \le j$ such that (1), (2), (3), (4) are satisfied for $i \le j$. We will show how to define M_{j+1}.

Notice that $\bigcup_{k \ge j+1} \Lambda_k \cap M_j = \emptyset$.

Let $F_{j+1} = \overline{W^u(\Lambda_{j+1})} \cup \bigcap_{n \ge 0} f^n(M_j)$

$$= \bigcup_{k \le j+1} \overline{W^u(\Lambda_k)} \quad \text{by} \quad (3).$$

Let Q be a compact neighborhood of $\overline{W^u(\Lambda_{j+1})} \cup M_j$ such that $Q \cap (\bigcup_{k>j+1} \Lambda_k) = \emptyset$. Then if $x \in \bigcap_{n \ge 0} f^n(Q)$, $\alpha(x) \subset Q$, so $\alpha(x) \subset \bigcup_{k \le j+1} \Lambda_k$. Hence $x \in \bigcup_{k \le j+1} W^u(\Lambda_k)$. Thus $\bigcap_{n>0} f^n(Q) = \bigcup_{k \le j+1} W^u(\Lambda_k) = \bigcup_{k \le j+1} \overline{W^u(\Lambda_k)} = F_{j+1} \subset$ $\subset \text{int } Q$.

By Lemma 6, there is a compact neighborhood V of F_{j+1} such that $V \subset Q$ and $f(V) \subset \text{int } V$. Let $M_{j+1} = V$. Clearly, (1), (2), (3) hold for $i \le j + 1$. We only have to show $\bigcap_{-\infty<n<\infty} f^n(M_{j+1} - M_j) = \Lambda_{j+1}$. We know $\bigcap_{n \ge 0} f^n(M_{j+1} - M_j) \subset W^u(\Lambda_{j+1})$. We claim that

(5) $$\bigcap_{n \le 0} f^n(M_{j+1} - M_j) \subset W^s(\Lambda_{j+1}) \ .$$

Once (5) is proved, it follows that

$$\Lambda_{j+1} \subset \bigcap_n f^n(M_{j+1}-M_j) \subset W^u(\Lambda_{j+1}) \cap W^s(\Lambda_{j+1}) .$$

But since there are no cycles $W^u(\Lambda_{j+1}) \cap W^s(\Lambda_{j+1}) = \Lambda_{j+1}$. Thus (4) for M_{j+1} will follow from (5).

To prove (5), if $x \in \bigcap_{n\leq 0} f^n(M_{j+1}-M_j)$, then $\omega(x) \subset M_{j+1}-M_j$ (recall $\omega(x)$ is the ω-limite set of x). Since $\omega(x)$ is f-invariant,

$$\omega(x) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(M_{j+1}-M_j) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(M_{j+1}) - M_j \subset W^u(\Lambda_{j+1}).$$

Let $\epsilon > 0$. Since there are no c-cycles, $W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1})$ is a neighborhood of Λ_{j+1} in $W^u(\Lambda_{j+1})$. Further, $\bigcup_{n\geq 0} f^n(W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1})) = W^u(\Lambda_{j+1})$ and this is an increasing union (i.e. $W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1}) \subset f(W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1})) \subset f^2(W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1})) \subset \ldots$). Since $\omega(x)$ is a compact subset of $W^u(\Lambda_{j+1})$, there is a positive integer $n_1 > 0$ such that $\omega(x) \subset f^{n_1}(W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1}))$. Now $\omega(x)$ is f^{-1}-invariant so $\omega(x) \subset \bigcap_{n\leq 0} f^n(f^{n_1}(W^u_\epsilon(\Lambda_{j+1}))) = \Lambda_{j+1}$.
Now since Λ_{j+1} has a local product structure, $x \in W^s(\Lambda_{j+1})$ by theorem (1.1) of [2]. This completes the proof of (5). Thus the sequence $M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots \supset M_1 \supset \supset \emptyset$ can be obtained by induction.

Now if $x \in \Omega(f) \cap (M_i-M_{i-1})$, then it is easy to see that $x \in \bigcap_n f^n(M_i - M_{i-1}) = \Lambda_i$. Thus $\Omega(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = L^-(f)$. But clearly $L^-(f) \subset \Omega(f)$. This completes the proof of Theorem 7.

The following local stability theorem is proved in [1, Theorem 7.3].

THEOREM 8 - Let Λ be a compact hyperbolic set for the diffeomorphism f of M. Then for $e > 0$, there is a compact neighborhood V of Λ in M and a neighborhood $\mathfrak{N}$ of f in $\mathrm{Diff}(M)$ such that if $g_1, g_2 \in \mathfrak{N}$, then there is a unique homeomorphism $h: \bigcap_n g_1^n(V) \to \bigcap_n g_2^n(V)$ such that $g_2 h = h g_1$ and $d(h(x), x) \leq e$ for $x \in \bigcap_n g_1^n(V)$. Further, h depends continuously on (g_1, g_2) in $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$.

We can now complete the proof of Theorem 2.

Given $e > 0$, choose a compact neighborhood V_i of Λ_i and a neighborhood $\mathfrak{N}$ of f in $\mathrm{Diff}(M)$ such that if $g \in \mathfrak{N}$, there is a homeomorphism $h_i: \Lambda_i \to \bigcap_n g^n(V_i)$ such that $g\, h_i = h_i f|_{\Lambda_i}$ and $d(h_i(x), x) \leq e$ for $x \in \Lambda_i$.

For $g \in \mathfrak{N}$, let $\Lambda_i(g) = \bigcap_n g^n(V_i)$. We may choose V_i so that $V_i \subset \mathrm{int}(M_i - M_{i-1})$. If $\mathfrak{N}$ is possibly smaller, then for $g \in \mathfrak{N}$, and $1 \leq i \leq n$, $g(M_i) \subset \mathrm{int}\, M_i$ and $\bigcap_n g^n(M_i - M_{i-1}) \subset V_i$. The latter inclusion implies that $\bigcap_n g^n(M_i - M_{i-1}) = \Lambda_i(g)$. Hence the h_i's define a homeomorphism $h: L^-(f) \to \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i(g) = \bigcup_{i=1}^n (\bigcap_n g^n(M_i - M_{i-1}))$. If we prove $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i(g) = \Omega(g)$ we are done. Since the periodic points of f are dense in $L^-(f)$, those of g are dense in $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i(g)$. So $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i(g) \subset \Omega(g)$. On the other hand, if $x \in \Omega(g) \cap M_i - M_{i-1}$, then, since $g(M_k) \subset \operatorname{int} M_k$ for $k=i, i-1$, $x \in \bigcap_n g^n(M_i - M_{i-1}) = \Lambda_i(g)$. Thus $\Omega(g) \subset \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i(g)$.

The results indicated in remarks 1 and 2 below are contained in [3].

REMARKS 1 - In these notes we have attempted to limit ourselves to only those concepts which are needed to prove Theorem 2. Actually, considerably more can be said about the structure of diffeomorphisms f for which $L^-(f)$ is hyperbolic. For example, there is a filtration theorem generalizing Theorem 7, and one can get some information on the structure of the largest closed invariant sets in each "level" of the filtration.

2. Another sufficient condition for Ω-stability can be given as follows. Let $P(f)$ be the set of periodic points of f. Let $L_\alpha^1(f) = L_\alpha(f)$, and inductively define $L_\alpha^n(f) = L_\alpha(L_\alpha^{n-1}(f))$; i.e., $L_\alpha^n(f)$ is the set of

α-limit points of points in $L_\alpha^{n-1}(f)$. Then if $\overline{P(f)}$ is hyperbolic, there is a spectral decomposition theorem for $\overline{P}$. Thus $\overline{P} = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$ with the same conclusions holding for the Λ_i as in Theorem 1. Also one defines c-cycle in exactly the same way as before. Then the following is true. <u>If $\overline{P(f)}$ is hyperbolic, there are no c-cycles, and there is an integer $n > 0$ such that $L_\alpha^n(f) \subset \overline{P}(f)$, then $\overline{P}(f) = \Omega(f)$ and f is Ω-stable</u>.

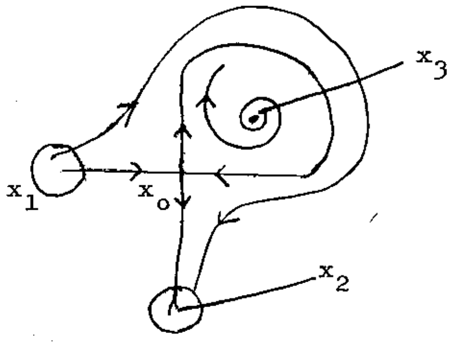
If the no c-cycle assumption in this theorem could be replaced by the assumption that there are no cycles, then this theorem would include Theorem 1. This is still not known.

3. One says that f satisfies Axiom A if $\Omega(f)$ is hyperbolic and $\overline{P}(f) = \Omega(f)$. In his original version of the Ω-stability theorem, Smale proved that if f satisfies Axiom A and $\Omega(f)$ has no cycles, then f is strongly Ω-stable. He has also conjectured that a necessary and sufficient condition for Ω-stability is that f satisfy Axiom A and have no cycles. In view of Theorem 2, this conjecture may be stated as follows.

CONJECTURE - $f \in \mathrm{Diff}(M)$ is (strongly) Ω-stable if and only if $L^-(f)$ is hyperbolic and there are no cycles.

Concerning this conjecture, it follows from the work of Palis and the closing lemma of Pugh that the only unproved part of the conjecture is that Ω-stability implies $\overline{P}(f)$ is hyperbolic. Some partial results in this direction have been obtained by J. Franks [7]. He proves, among other things, that if f is Ω-stable, then the periodic points of f must be hyperbolic (in fact, the absolute values of their eigenvalues must be uniformly bounded away from 1).

In closing, we present one simple example where $L^-(f)$ is hyperbolic, there is a cycle, $L^-(f) \subsetneq \Omega(f)$ and f is not Ω-stable. f is the time-one map of the flow on S^2 in the figure below. $L^-(f)$ consists of four hyperbolic fixed points. There is one saddle point x_o and one component of $W^u(x_o) - \{x_o\}$ agrees with one of $W^s(x_o) - \{x_o\}$.



A slight C^r perturbation can be made to produce a diffeomorphism g with a transversal homoclinic point for x_o; i.e., a point of transversal intersection of $W^u(x_o) \cap W^s(x_o)$ away from x_o. Then g will have infinitely many periodic points, so it cannot be Ω-conjugate to f.

REFERENCES

[1] M. HIRSCH and C. PUGH, Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 133-163.

[2] M. HIRSCH and C. PUGH, J. PALIS, M. SHUB, Neighborhoods of hyperbolic sets, Inventiones Math. 9, pp. 121-134, 1970.

[3] S. NEWHOUSE, Hyperbolic limit sets, to appear.

[4] S. SMALE, Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 13, Nº 6 (1967), pp. 747-817.

[5] S. SMALE, The Ω-stability theorem, Global Analysis, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. 14,

Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 289-297.

[6]

[7] J. FRANKS, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, to appear.

TEORIA DA BIFURCAÇÃO GENÉRICA

Jorge Sotomayor

INTRODUÇÃO

Esta nota é um resumo de uma série de conferências do autor feitas no Seminário de Sistemas Dinâmicos em 1970, no IMPA. Para maiores detalhes, referimos aos leitores a "Generic one parameter families of vector fields in two dimensional manifolds", que será publicado em Topology.

Seja M uma variedade bidimensional compacta e de classe C^{∞}. $\mathfrak{X}^r$ denotará o espaço de campos vetoriais de classe C^r em M, munido da topologia C^r.
Seja $J = [a,b]$ um intervalo compacto. Φ^r denotará o espaço de funções $\xi : J \to \mathfrak{X}^r$ de classe C^1, munido da topologia C^1. Os elementos ξ de Φ^r são chamados <u>familias a um parâmetro de campos vetoriais em M</u>.

Um <u>valor ordinário</u> de $\xi \in \Phi^r$ é um ponto $\lambda_o \in J$ que tem uma vizinhança V, tal que, $\xi(\lambda_o)$ é topològicamente equivalente a todo $\xi(\lambda)$, $\lambda \in V$. Se λ_o não é <u>valor ordinário</u> de ξ, então é chamado de <u>valor de bifurcação</u> de ξ.

O problema fundamental da teoria da bifurcação genérica é o seguinte: encontrar uma família Γ^r residual em Φ^r, tal que, para $\xi \in \Gamma^r$ a variação da estrutura topológica do espaço de fase de $\xi(\lambda)$, quando λ varia em J, admite uma descrição simples.

Enunciamos o nosso resultado principal.

TEOREMA PRINCIPAL - Seja $r \geq 4$. Existe uma subvariedade Σ_1^r, de classe C^{r-1} e codimensão 1, imersa em $\mathfrak{X}^r$, com as seguintes propriedades:

a) Σ_1^r está contida densamente em $\mathfrak{X}_1^r = \mathfrak{X}^r - \Sigma^r$, munido da topologia induzida.

b) Para todo $X \in \Sigma_1^r$ existe uma vizinhança V, na topologia intrínseca de Σ_1^r, tal que, todo $Y \in V$ é topològicamente equivalente à X.

Seja Γ^r o conjunto das famílias ξ, tais que:

1) $\xi(J) \subset [K-S]^r \cup \Sigma_1^r$, onde $[K-S]^r$ denota o conjunto dos campos de Kupka-Smale.

2) ξ é transversal a Σ_1^r.

3) O conjunto dos valôres ordinários de ξ coincide com

$\xi^{-1}(\Sigma^r)$.

Então Γ^r é residual em Φ^r isto é, Γ^r contém uma interseção enumerável de abertos densos de Φ^r; em particular, Γ^r é denso em Φ^r.

DEFINIÇÃO DA SUBVARIEDADE Σ_1^r

Pontos singulares quase-genéricos.

Seja p um ponto singular de $X \in \mathfrak{X}^r$, $r \geq 2$. Se a derivada de X, DX_p, tem um único valor próprio nulo, e v_o (resp. v) é o vetor próprio associado ao valor próprio nulo (resp. não nulo), então p é chamado sela-nó de X se $D^2X_p(v_o,v_o)$, a segunda derivada de X na direção de v_o, tem projeção (paralela a v) não nula sôbre o espaço gerado por v_o.

Num sistema de coordenadas em tôrno de uma sela-nó onde $x_1(p) = x_2(p) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x_1} = v_o$, $\frac{\partial}{\partial x_2} = v$, X tem componentes:

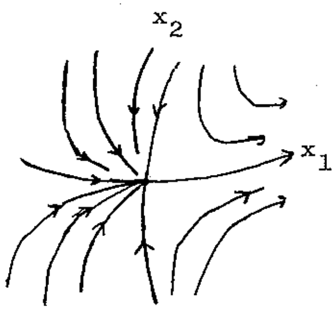
$$X^1(x_1,x_2) = \Delta_1 x_1^2 + bx_1x_2 + c\ x_2^2 + M^1(x_1,x_2)$$

$$X^2(x_1,x_2) = \lambda\ x_2 + \alpha\ x_1^2 + \beta\ x_1x_2 + \gamma\ x_2^2 + M^2(x_1,x_2)$$

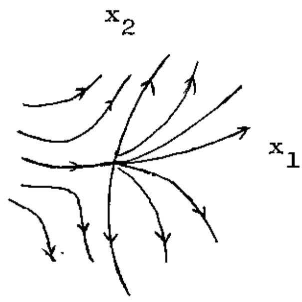
onde $M^i = O(x_1^2 + x_2^2)$ e $\Delta_1,\lambda \neq 0$.

A configuração das órbitas vizinhas a uma sela-nó está ilustrada na seguinte figura:

Sela nó



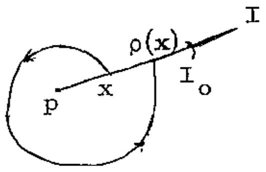
$\lambda < 0, \quad \Delta_1 > 0$



$\lambda > 0, \quad \Delta_1 > 0$

No caso da sela-nó as variedades estáveis e instáveis têm bordo, sendo uma delas bidimensional: se $\lambda > 0$, a estável é bidimensional, etc.

Se DX_p tem valôres próprios com parte imaginária não nula e $\rho : I_o \to I$ é a transformação de Poincaré associada aos segmentos semi abertos $I_o \subset I$ com extremo em p, então p é chamado foco-composto se $\rho'(p) = 1$ e $\rho^{(3)}(p) \neq 0$.



A transformação de Poincaré associada a um foro

Observamos que $\rho'(p) \neq 1$ é equivalente a afirmar que p é um foco genérico (partes reais dos valôres próprios não nulas). O comportamento das órbitas vizinhas a um foco-composto é ilustrado na figura seguinte:

Foco composto

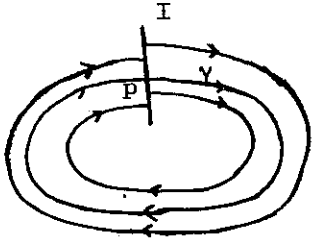
$\rho^{(3)}(p) < 0$

$\rho^{(3)}(p) > 0$

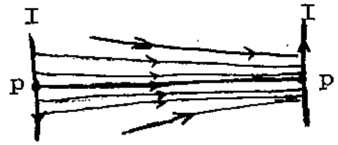
Trajetórias Periódicas Quasi-genéricas - Seja π a transformação de Poincaré associada a uma trajetória periódica, γ, de X. $\pi : I_o \to I$, onde $I_o \subset I$ são segmentos transversais a X por um ponto $p \in \gamma$.

Se $\pi'(p) = 1$ e $\pi^{(2)}(p) \neq 0$, ou se $\pi'(p) = -1$ e $(\pi^2)^{(3)}(p) \neq 0$, γ é chamada trajetória periódica quasi-genérica de X. Ver figura seguinte.

Trajetória Periódica Quasi genérica



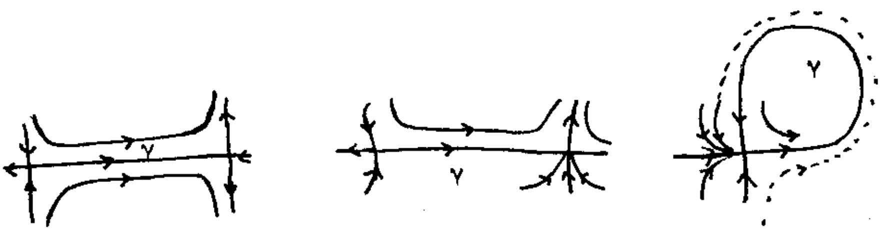
$\pi^1(p) = 1, \quad \pi^{(2)}(p) > 0$



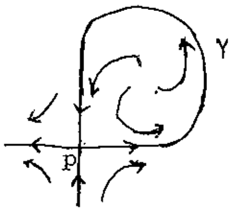
$\pi^1(p) = -1, \quad (\pi^2)^{(3)}(p) > 0$

<u>Conexões de selas</u> - Uma conexão de selas (genérica, não genérica) é uma trajetória γ ao longo da qual duas variedades invariantes de selas ou selas-nó se interceptam (transversalmente, não transversalmente).

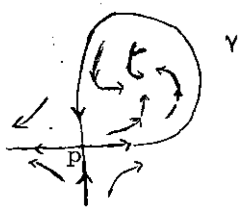
<u>Exemplos de conexões de selas</u>.



a b c

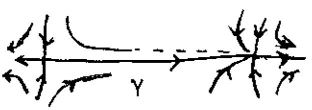


$d: \sigma(p) < 0$



$e: \sigma(p) > 0$

As seguintes trajetórias γ são conexões de sela (genéricas)



Uma conexão de selas é dita <u>quasi genérica</u> se conecta duas selas diferentes, (caso a acima), ou se autoconecta uma única sela p e $\sigma(p) = \text{traço } DX_p \neq 0$, casos d, e na figura acima.

<u>A variedade Σ_1^r</u> - Lembramos que uma <u>subvariedade imersa</u> de codimensão k é um conjunto $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ onde cada S_i é uma subvariedade (mergulhada) e $S_i \subset S_{i+1}$, para todo i. Chamamos de <u>elemento crítico</u>

(genérico, não genérico, quasi-genérico) a um ponto singular, trajetória periódica ou conexão de selas (genérico, não genérico, quasi-genérico).

Definimos Σ_1^r como o conjunto dos campos X tais que

1) X possui um número finito de elementos críticos dos quais exatamente um é não genérico, mas é do tipo quasi-genérico.

2) X não possui órbitas recurrentes não triviais.

Esbôço da Prova: Indicamos sucintamente os passos que conduzem à prova do Teorema Principal.

Fixada uma métrica Riemanniana em M^2, definimos S_ℓ como o conjunto dos campos $X \in \Sigma_1^r$ tais que o elemento crítico quasi-genérico de X tem comprimento menor do que $\ell > 0$, ℓ real. Consideramos aqui os pontos singulares como curvas de comprimento nulo.

Prova-se que S_ℓ é uma subvariedade de classe C^{r-1} e codimensão 1, mergulhada em $\mathfrak{X}^r$. Mais ainda, todo $X \in S_\ell$ possui uma vizinhança V em S_ℓ (com a topologia induzida por $\mathfrak{X}^r$) tal que todo $Y \in V$ é topològicamente equivalente a X. Depois disto é claro que $\Sigma_1^r = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ $i=1,2,\ldots$ é uma subvariedade imersa com a propriedade b) requerida no teorema. A propriedade a) é obti da provando que cada elemento X de $\mathfrak{X}_1^r$ pode ser arbitràriamente aproximado na topologia C^r por um campo $Y \in S_\ell$ para algum ℓ. Por exemplo, se X tem uma trajetória periódica (resp. ponto singular) não genérica γ, Y pode ser escolhido tal que γ é uma trajetória periódica (resp. ponto singular) quasi-genérica e é o único elemento crítico não genérico de Y.

Se X tem uma órbita recurrente não trivial, pode ser aproximado por $Y \in S_\ell$ com uma órbita periódica quasi-genérica ou uma conexão de selas quasi-genérica como único elemento crítico não genérico. Neste caso ℓ pode ser escolhido arbitràriamente grande.

Seja $\Phi(S_i)$ o conjunto das famílias $\xi \in \Phi^r$ tais que ξ é transversal a S_i e $\xi(J) \cap [\mathrm{Clos}\, S_i - S_i] = \emptyset$. Prova-se que $\Phi(S_i)$ é aberto e denso em Φ^r.

Seja Φ_j o conjunto de famílias ξ tais $\xi(a_j) \in \Sigma^r$ onde $\{a_j\}$ $j=1,2,\ldots$ é um conjunto enumerável e denso em J que contém os extremos de J. Por ser Σ^r aberto e denso em $\mathfrak{X}^r$, Φ_j é aberto e denso em Φ^r. Logo $\mathcal{B} = \bigcap_{i,j=1}^{\infty} [\Phi(S_i) \cap \Phi_j]$ é um conjunto de Baire. Prova-se que $\Gamma^r \supset \mathcal{B}$.

BIFURCAÇÕES GENÉRICAS

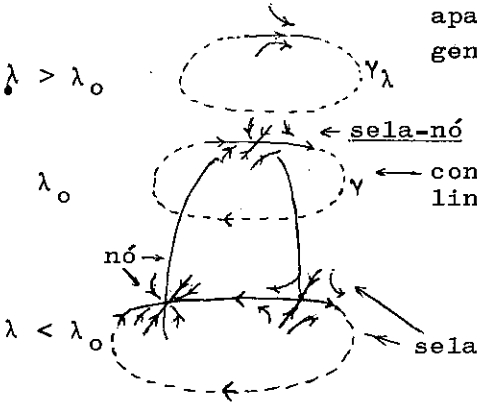
Em $M^2 \times J$ representamos o espaço de fase de $\xi(\lambda)$ pelas órbitas do campo $\hat{\xi} = (\xi, 0)$ na sua variedade invariante $M^2 \times \{\lambda\}$. Nas figuras abaixo ilustramos as bifurcações de $\xi \in \Gamma^r$ nos pontos λ_o onde ξ corta Σ_1^r transversalmente.

As figuras correspondentes à órbita periódica e à auto conexão de selas Γ ilustram o fato que Σ_1^r não é uma subvariedade mergulhada. Pois $\xi(\lambda_n)$ tem uma conexão de selas γ_{λ_n} de comprimento ℓ_n com $\ell_n \to \infty$, quando Γ é α ou ω (ou ambos) limite de separatrizes de sela. Em outros têrmos, "$\xi(\lambda_n) \to \infty$" na topologia de Σ_1^r e $\xi(\lambda_n) \to \xi(\lambda_o)$ em $\mathfrak{X}^r$.

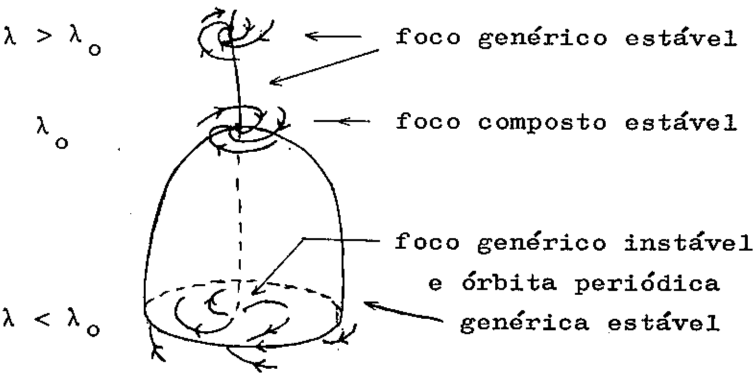
Ainda no caso da órbita periódica Γ ser α e ω limite de tôdas as órbitas de M, caso possível sòmente em T^2 ou K^2, prova-se que existe $\lambda_n \to \lambda_o$ onde $\xi(\lambda_n)$ tem uma órbita quasi-genérica de comprimento ℓ_n com $\ell_n \to \infty$.

Sela-nó

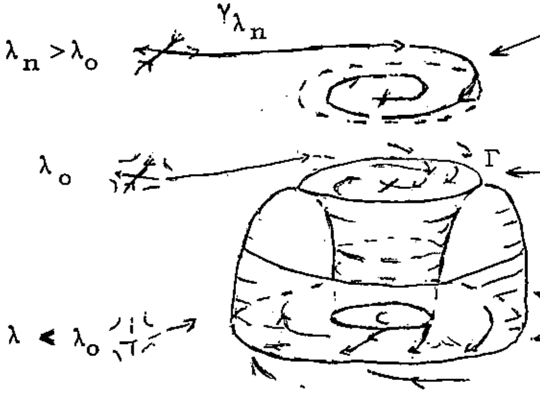
Se γ existe em $\lambda=\lambda_o$ para $\lambda>0$ aparece uma órbita periódica genérica (γ_λ)



Foco composto



Órbita periódica

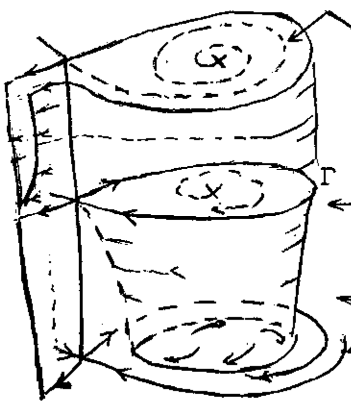


existem $\lambda_n \to \lambda_o$ com conexões de selas γ_{λ_n}, comprimento $\gamma_{\lambda_n} \to \infty$.

órbita quasi genérica $\Gamma = \alpha$ e ω de separatrizes de selas

duas órbitas periódicas genéricas

Auto conexão de selas



Se $\Gamma = \omega$ limite de separatrizes de sela existem conexões γ_{λ_n} .
Comprimento $\gamma_{\lambda_n} \to \infty$.

Γ auto conexão quasi genérica $\sigma < 0$.

Órbita periódica genérica estável

Conexão de selas