Antonio Conde

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA DIFERENCIAL

Para

Emilia

e

Antonio José

INTRODUÇÃO

Em topologia geral coloca-se estrutura topológica em conjuntos para se estudar a noção de continuidade de funções entre os mesmos. Um conjunto com uma estrutura topológica é chamado de espaço topológico. Em topologia diferencial coloca-se "estrutura diferencial" em espaços topológicos para se estudar a noção de diferenciabilidade de funções entre os mesmos. Um espaço topológico com uma "estrutura diferencial" é chamado de variedade diferenciável. A motivação para a criação da topologia diferencial foi o aparecimento dos primeiros exemplos de variedades diferenciáveis, em vários ramos da matemática, como em geometria diferencial local, com seus estudos de curvas e superfícies em R^3, em geometria algébrica e projetiva, na teoria das superfícies de Riemann, de grupos de matrizes e outros exemplos de natureza mais técnica.

Das definições de variedade, sempre tem-se informação clara de seu aspecto local, isto é, uma variedade é localmente "difeomorfa" a R^n. Daí até conhecer-se propriedades globais da variedade, a distância é grande. Whitney, por exemplo, demonstrou que toda variedade diferenciável M^n, de dimensão n, pode ser mergulhada, ou realizada, em R^{2n}. Um dos aspectos deste teorema diz que toda variedade diferenciável é, no fundo, uma superfície regular num espaço euclidiano (é por esta razão que nestas notas consideraremos variedades sempre em algum R^k). Outro aspecto deste teorema diz que bastam $2n$ dimensões para realizar M^n, isto é, dá uma informação de caráter global sobre todas as variedades diferenciáveis, de caráter relevante e que está apenas ligada as dimensões das mesmas. Uma conjectura bem mais profunda que existe é a seguinte: "Toda variedade diferenciável de dimensão n pode ser mergulhada em $R^{2n-\alpha(n)+1}$" onde $\alpha(n)$ é o número de 1's que aparecem na expansão diádica de n. Fatos desta natureza já dizem da interferência da dimensão da variedade em seu grau de complexidade. Estes são ainda bastante gerais pois se aplicam a classe de todas as variedades diferenciáveis. Em topologia diferencial, procura-se introduzir e estudar conceitos que reflitam aspectos globais de variedades ou funções entre as mesmas e que estejam ligados de modo mais íntimo às suas estruturas topológica ou diferencial. Existem duas atitudes ou maneiras de estudo nesta disciplina; uma geométrica e outra algébrica. A primeira é o próprio modo de viver da mesma; a segunda aparece mais como ferramenta. Os métodos algébricos só puderam surgir depois dos fundamentos da topologia diferencial estarem assentados. Dentre outros nomes o de Whitney está ligado, e é bastante representativo, à fase inicial e geométrica da topologia diferencial. Pode dizer-se que Milnor marca nitidamente o aparecimento, bem sucedido, da utilização de métodos da topologia algébrica na topologia diferencial, com seu artigo: "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere" em 1956 [6] onde ele consegue definir um invariante, para estrutura diferencial sobre a esfera (topológica) S^7, que está ligado de modo essencial à estrutura diferencial e não apenas à topológica. O mesmo consegue assim, detectar estruturas diferenciais não difeomorfas em S^7. Este trabalho de Milnor marca uma nova fase da topologia diferencial em que há grande fusão de métodos geométricos e algébricos. Esta iteração entre topologia diferencial e algébrica produziu, nos últimos quinze anos, desenvolvimento rápido e diversificado na matemática, solucionando problemas antigos, criando novas teorias e produzindo teoremas de grande poder de síntese. Um curso moderno de topolgia diferencial teria que, necessariamente, expor alguns aspectos deste desenvolvimento, à custa de não ser muito acessível. As presentes notas tratam de matéria bastante clássica, neste sentido. Estas cumprem porém, duas finalidades, tem a vantagem de ser bastante acessível e mostram a atitude de se estudar conceitos que reflitam aspectos globais de variedades ou funções, a que temos nos referido. Damos aqui a noção de grau de uma aplicação diferenciável entre variedades de mesma dimensão e sua generalização para dimensões quaisquer. Os pré-requisitos são familiaridade com os aspectos geométricos do teorema da função inversa e seus corolários e o conhecimento do enunciado do Teorema de Sard. São feitas algumas aplicações e dados alguns alguns exercícios. Estas notas foram escritas, mais ou menos, no mesmo espírito em que o curso foi aprentado no 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, isto é, em oito horas de exposições distribuidas em duas semanas, portanto mais no estilo de conferências do que aulas. O leitor precisará preencher detalhes que ficam subentendidos em certos argumentos, mas nunca deverá parar para demonstrar teoremas que são admitidos, pois a idéia de não incluir certas demonstrações é a de não distrair o estudante com as mesmas e sim mantê-lo com a atenção voltada para o significado dos enunciados e as maneiras de utilizá-los. Cremos que com esta atitude, o leitor conseguirá avançar rapidamente adquirindo visão geral dos conceitos aqui apresentados. Estas notas não pretendem ser completas e nem rigorosas (analiticamente). Se as mesmas estimularem discussões sobre topologia diferencial, terão cumprido grande parte dos objetivos que temos em mente. Agradeceremos a todos aqueles que nos derem su-

gestões e fizerem críticas construtivas ou destrutivas sobre estas notas. Este é basicamente um curso que foi dado por J. Milnor [10] em dezembro de 1963 na Universidade de Virginia - USA. Queremos agradecer à Comissão Organizadora do 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, pelo convite que nos fez para ministrar tal curso. Deixamos aqui também nossos agradecimentos ao Prof. Antonio O. Farias pela revisão que fez do manuscrito e a Wilson Góes pelo trabalho de datilografia.

Campinas, Abril de 1973

Universidade de Campinas

Antonio Conde

ÍNDICE

1. Diferenciabilidade

Anotamos com $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e se $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ designa o valor absoluto ou norma de x.

Seja $U \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $f: U \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que f é diferenciável no ponto $x_o \in U$ se existe um número real s tal que

$$\frac{f(x) - f(x_o) - s(x-x_o)}{x - x_o}$$

tenha limite para x tendendo a x_o e que este limite seja nulo, ou seja, se chamarmos o numerador de $r(x,x_o)$ temos que f é diferenciável em x_o se ela se deixa escrever como

$$f(x) = f(x_o) + s(x-x_o) + r(x,x_o) \tag{1.1}$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e

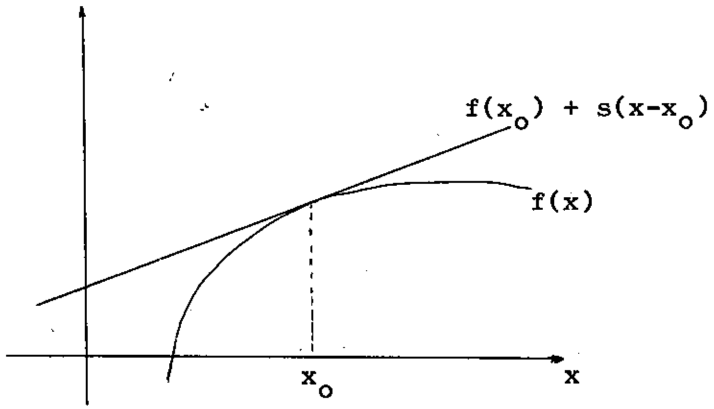
$$\lim_{x \to x_o} \frac{r(x,x_o)}{|x-x_o|} = 0. \tag{1.2}$$

O importante da definição acima é a condição (1.2) pois sempre podemos escrever f na forma (1.1) para algum $x \in \mathbb{R}$ mas nem sempre $r(x,x_o)$ verificará a condição (1.2).

É imediato que se f é diferenciável em x_o, então s é único, satisfazendo tal condição e o mesmo é chamado de derivada de f em x_o. As seguintes notações são usadas para s: $\frac{df}{dx}(x_o)$, $f'(x_o)$, etc.

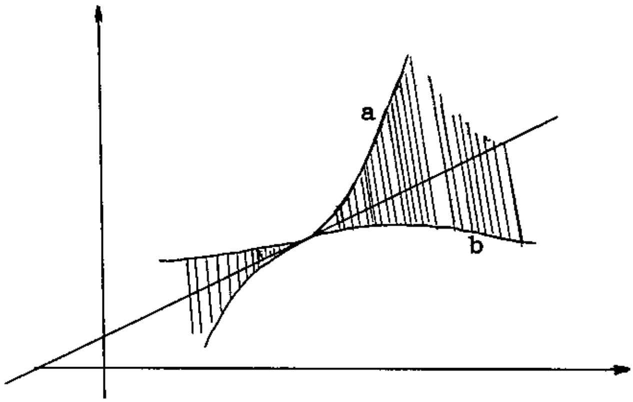
Dizemos que f é diferenciável em U se ela for diferenciável em cada ponto de U. A definição de diferenciabilidade diz que $f(x) - f(x_o)$ pode ser bem aproximada por uma aplicação linear $x \longmapsto sx$. Bem aproximada aqui significa que os gráficos de f e o da função $f(x_o) + s(x-x_o)$ se tangenciam em $(x_o, f(x_o))$ no sentido (1.2).

(1.3)



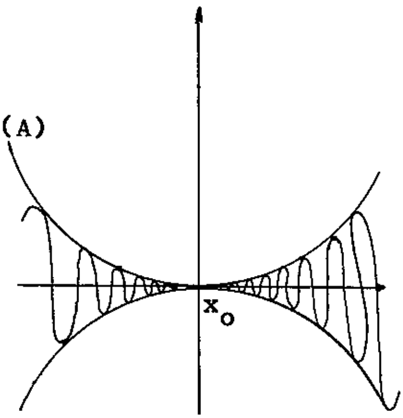
Observe que na figura seguinte, (1.4), qualquer função que tenha o gráfico entre os gráficos a e b é também diferenciável no ponto x_o.

(1.4)

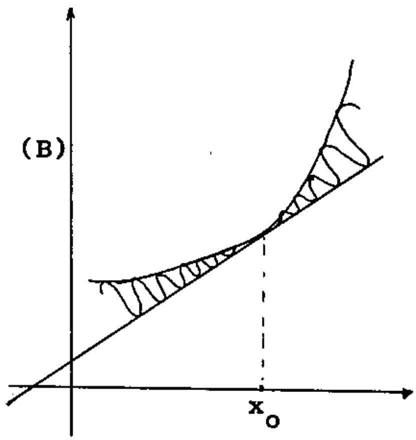


Vê-se então que uma função apenas diferenciável pode ter um comportamento um tanto arbitrário nas vizinhanças de um ponto, como por exemplo os gráficos intermediários nas figuras abaixo.

(A)



(B)



Os gráficos aqui tendem a ter inclinação vertical à medida que x tende a x_o.

Se pedirmos porém que a derivada seja uma função contínua, a função original passa a ter um comportamento local bem descritível e conveniente. Lembremos o teorema que diz:

(1.5) Seja $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ aberto, f diferenciável em U com derivada f' contínua em U. Então para cada ponto $x_o \in U$, se $f'(x_o) \neq 0$, existe uma vizinhança V de x_o tal que f restrita a V admite inversa f^{-1} que é também diferenciável.

Isto implica, por exemplo, que se $f'(x_o) > 0$ então f é crescente em alguma vizinhança de x_o e se $f'(x_o) < 0$ então f é decrescente em alguma vizinhança de x_o. Ou seja, f herda estas propriedades da função que a aproxima (cujo gráfico é uma reta).

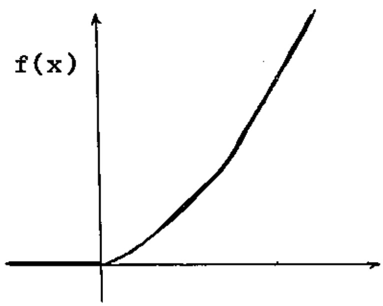
Observe que a oscilação da função representada na figura B acima, deixa de ser admitida quando pedimos que a derivada seja contínua, graças a este teorema, pois ela teria de ser crescente numa vizinhança de x_o.

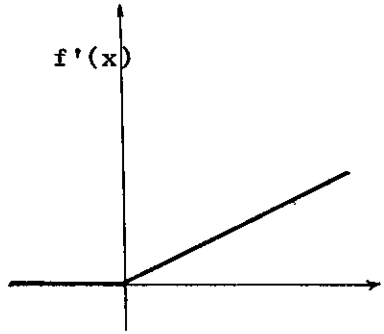
Se f tem derivada contínua dizemos que f é da classe C^1. Mais geralmente, dizemos que f é de classe C^r se f admite derivadas até a ordem r e que a r-ésima derivada seja contínua. Uma função é de classe C^∞ se ela admite derivada de todas as ordens.

A função exponencial e^x e os polinômios são funções de classe C^∞. A seguinte função é de classe C^1

apenas

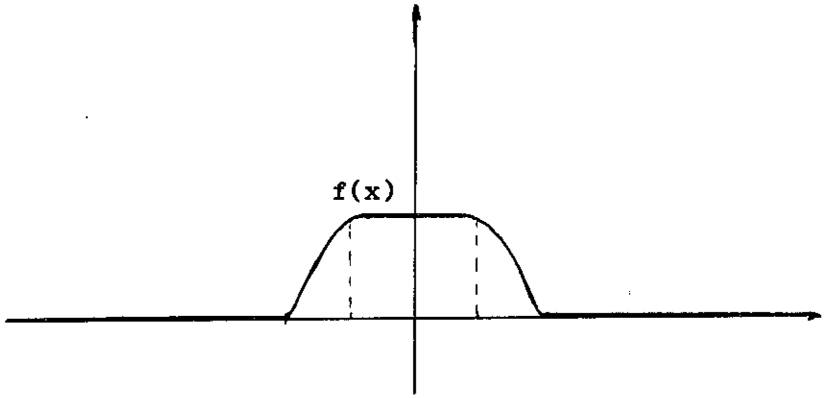
$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$





A seguinte função de classe C^∞ é bastante utilizada em topologia diferencial. Vamos construir uma função φ com as seguintes propriedades:

(1.6)
$$\begin{array}{l} \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \varphi \text{ é de classe } C^\infty \\ \varphi(x) > 0 \quad \text{para} \quad |x| < 1 \\ \varphi(x) = 1 \quad \text{para} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \\ \varphi(x) = 0 \quad \text{para} \quad |x| \geq 1. \end{array}$$



Consideramos inicialmente a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

que é de classe C^∞. Definimos agora a função $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$ que é também de classe C^∞. Finalmente obtemos a função procurada

$$\varphi(x) = g(2x+2)g(-2x+2)$$

Esta função verifica as condições que pedimos acima.

Embora tenhamos uma tal função φ de modo explícito, o importante é sabermos da existência de funções satisfazendo as propriedades (1.6).

Em topologia diferencial procura-se estudar propriedades de objetos as quais permanecem, após aplicarmos a estes objetos difeomorfismos, isto é, funções diferenciáveis que admitem inversas também diferenciáveis. Assim sendo interessa conhecer os objetos a menos de difeomorfismos. Observe que o teorema acima (1.5) nos diz que uma função f de classe C^1 é, a menos de difeomorfismo local, do tipo $f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$ em torno de x_o tal que $f'(x_o) \neq 0$. Em outros termos, como f é diferenciável temos que

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o(x-x_o) + r(x,x_o)$$

onde $r(x,x_o)$ satisfaz a condição $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{r(x,x_o)}{|x-x_o|} = 0$.
O teorema (1.5) nos permite concluir, como faremos abaixo, que existe um difeomorfismo h de uma vizinhança de $f(x_o)$ tal que, alterando-se f por este difeomorfismo, o resto $r(x,x_o)$ desaparece, ou seja, o erro cometido quando aproximamos $f(x)$ por $f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$ pode ser corrigido com um difeomorfismo local. É simples a partir do referido teorema. Seja $L(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$. Como estamos assumindo $f'(x_o) \neq 0$, temos que L é um difeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Pelo teorema (1.5) temos que existe vizinhança V de x_o onde f é também um difeomorfismo sobre alguma vizinhança

W de $f(x_o)$. Podemos considerar então $h: W \to W'$, $h = L \circ f^{-1}$. Assim h é um difeomorfismo como composição de difeomorfismos e temos que $h \circ f = L$ ou

$$h \circ f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$$

isto é, alteramos f por um difeomorfismo e consequentemente "desapareceu" o resto $r(x,x_o)$. Assim sendo, embora f possa ser relativamente complicada em torno de x_o, ela é, a menos de difeomorfismo bastante simples e explícita.

2. Funções de n variáveis

Anotamos com $\mathbb{R}^n$ o conjunto das n-uplas de números reais $(x_1,\ldots,x_n)$. Com a adição de n-uplas e multiplicação por escalar, $\mathbb{R}^n$ torna-se um espaço vetorial de dimensão n. Uma base de $\mathbb{R}^n$ é dada pelos vetores

$$e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0); \quad i = 1,\ldots,n$$

com 1 na posição i-ésima. Chamamos a esta de base canônica de $\mathbb{R}^n$. Temos também a noção de comprimento ou norma de vetores. Duas normas são de uso comum.

Def. (2.1) $\|(x_1,\ldots,x_n)\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$

Chamamos esta norma de norma bola.

Def. (2.2) $|(x_1,\ldots,x_n)| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

Chamamos esta norma de norma do cubo.

As seguintes notações e terminologia são usadas:

$S^{n-1}(r) = \{v \in \mathbb{R}^n | \|v\| = r\}$ = esfera de raio r em $\mathbb{R}^n$

$B^n(r) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = r\}$ = bola de raio r em $\mathbb{R}^n$

$D^n(r) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq r\}$ = disco de raio r em $\mathbb{R}^n$

$C^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |v| \leq r\}$ = cubo de raio r em $\mathbb{R}^n$

As normas da bola e do cubo introduzem em $\mathbb{R}^n$ a mesma topologia e que chamamos de topologia usual.

A noção de diferenciabilidade para funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^k$ é dada imitando-se o caso de uma variável, tanto em seu aspecto analítico como em seu aspecto geométrico. Temos aqui elementos suficientes para escrevermos uma fórmula semelhante a dada em (1.1). Precisa-se antes decidir o que deve substituir a derivada $f'(x_o)$ que, no caso de uma variável, é um número. Observemos porém que no aspecto geométrico envolvido no caso de uma variável, desempenha papel importante a aplicação linear $y \mapsto f'(x_o)\cdot y$. Pedimos então que a derivada, no caso $\mathbb{R}^n$, seja uma aplicação linear entre os espaços em questão.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Consideremos a função contínua

$$f: U \to \mathbb{R}^k.$$

Def. (2.3) - Dizemos que f é diferenciável no ponto x_o de U, se existe uma aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tal que f se deixe expressar como:

$$f(x) = f(x_o) + L(x-x_o) + r(x,x_o) \tag{2.4}$$

onde $r(x,x_o)$ satisfaz

$$\lim_{x \to x_o} \frac{r(x,x_o)}{\|x-x_o\|} = 0. \tag{2.5}$$

Observe que é sempre possível escrever-se f na forma (2.4), isto é, tal igualdade define $r(x,x_o)$ uma vez se tenha escolhido L. A condição de diferenciabilidade é dada realmente pela (2.5). A condição (2.5) implica na unicidade de L, isto é, se f é diferenciável em $x_o \in U$ então a aplicação linear L está univocamente determinada. Se T e outra aplicação linear verificando (2.4) e (2.5) então chegamos a

$$\lim_{x \to x_o} (L-T)\left(\frac{x-x_o}{\|x-x_o\|}\right) = 0$$

ou seja tal limite existe e é nulo, mas daí é fácil ver que $L-T$ tem que se anular em todos os vetores unitários e portanto $L-T = 0$ ou $L = T$.

Def. (2.6) - A aplicação linear L univocamente determinada pelas condições (2.4) e (2.5) é denominada derivada de f no ponto x_o. As seguintes notações são usadas para L:

$$Df(x_o),\ df(x_o),\ f'(x_o),\ \frac{df}{dx}(x_o)\quad \text{etc.}$$

Dizemos que f é diferenciável em U se f é diferenciável em cada ponto de U. Neste caso a derivada pode ser vista então como uma função definida em U com valores no espaço vetorial das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^k$ que se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ isto é

$$Df\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k).$$

(2.7) Observemos que começamos lidando com espaços $\mathbb{R}^n$'s e fomos levados naturalmente a usar o espaço vetorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ que não é explicitamente igual a algum $\mathbb{R}^s$ embora lhe seja isomorfo. Outros tipos de espaços que forçosamente ocorrem, são os subespaços de $\mathbb{R}^n$. Assim, sendo, é preferível que se dê a definição de diferenciabilidade para funções entre espaços vetoriais sobre R e normados (sempre subentendido de dimensão finita). Uma vista d'olhos na Definição (2.3) dirá que nada foi utilizado a não ser as propriedades de espaço vetorial normado, de R^n. Portanto podemos utilizar daqui em diante as definições anteriores como valendo para espaços vetoriais normados. Isto nos dá a liberdade de lidar com espaços do tipo acima e outros. Lembramos aqui que uma norma num espaço vetorial E é apenas uma aplicação $\| \ \|: E \to \mathbb{R}$, que satisfaz

1. $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad x \in E$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Uma propriedade básica da derivação é a regra da cadeia, que diz que a derivada da composição de funções é a composição das derivadas. Mais precisamente temos que:

(2.8) Se U, V e W são abertos respectivamente de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$ e tivermos o diagrama comutativo de funções diferenciáveis

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & V \arrow[dl, "g"] \\
& W &
\end{tikzcd}
$$

tomando as derivadas obtemos ainda um diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "Df(x)"] \arrow[dr, "D(g\circ f)(x)"'] & & \mathbb{R}^k \arrow[dl, "Dg(y)"] \\
& \mathbb{R}^s &
\end{tikzcd}
$$

onde $y = f(x)$, ou seja

$$D(g\circ f)(x) = Dg(y) \circ Df(x).$$

<u>Exercícios</u>

1. Mostre que a derivada de uma translação em R^n é a identidade.

2. Mostre que a derivada num ponto, de uma aplicação linear L é igual a L.

3. Mostre que se $f\colon U \to W$ é um difeomorfismo (isto é f admite inversa também diferenciável) entre abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $W \subset \mathbb{R}^k$ então $n=k$. Utilize a regra da cadeia.

(2.9) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (não necessariamente aberto). Sejam f e g duas funções diferenciáveis definidas num aberto U que contém A, com valores em $\mathbb{R}^k$ e tais que f e g são iguais quando restritas a A.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & U \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{R}^k & \end{tikzcd}$$

Suponhamos agora que A seja a imagem de um aberto W de $\mathbb{R}^s$ por uma aplicação diferenciável h. Seja T_x o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ da forma $Dh(x)(v)$ onde v percorre $\mathbb{R}^s$. Então $Df(y)$ e $Dg(y)$ coincidem quando restritas a T_x, com $y = h(x)$. Esta é uma conseqüência imediata da regra da cadeia e que será utilizada mais adiante.

3. Derivada parcial ou segundo um subespaço

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ função contínua e $F \subset \mathbb{R}^n$ subespaço vetorial.

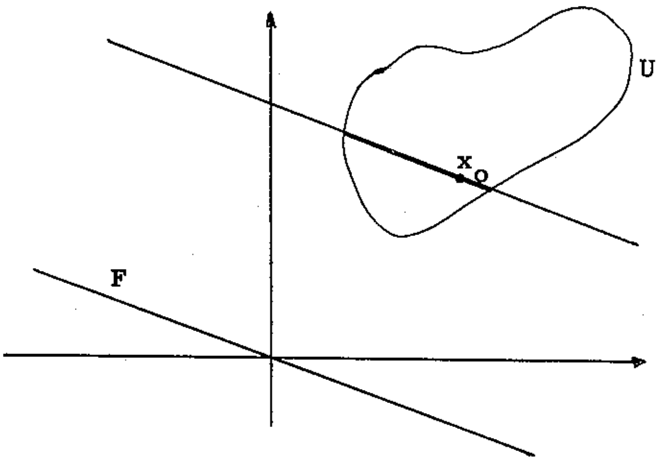
Def. (3.1) - f é diferenciável em $x_o \in U$, segundo o subespaço F, se existe uma aplicação linear T de F em $\mathbb{R}^k$ tal que, para $x-x_o \in F$ tivermos

(3.2) $$f(x) = f(x_o) + T(x-x_o) + r(x,x_o)$$

onde $r(x,x_o)$ satisfaz

(3.3) $$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x-x_o \in F}} \frac{r(x,x_o)}{\|x-x_o\|} = 0$$

Compare esta definição com a Definição (2.3); elas diferem apenas nas restrições que se impõe a T e a variável x.



Pelas mesmas razões anteriores, se f é diferenciável segundo F em x_o então a aplicação T acima é univocamente determinada e é chamada de derivada parcial de f segundo F no ponto x_o. As seguintes notações são usadas para T: $D_F f(x_o)$, $\frac{\partial f}{\partial F}(x_o)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o)$, onde y designa a variável que percorre F.

Se f é diferenciável segundo F em todo ponto de U temos então a função derivada

$$D_F f\colon U \to \mathcal{L}(F,\mathbb{R}^k).$$

Uma conseqüência imediata da definição é que se f é diferenciável em x_o então a derivada parcial de f segundo F, $D_F f(x_o)$ é igual à restrição da derivada de f $Df(x_o)$ ao subespaço F, isto é

$$D_F f(x_o) = Df(x_o)|F$$

Assim sendo, se f é diferenciável, para sabermos como a derivada de f atua num vetor v, basta sabermos a derivada parcial de f segundo a reta gerada por v. No caso de F ser uma reta a derivada parcial toma a forma

$$Df(x_o)(v) = D_F\, f(x_o)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o+tv)-f(x_o)}{t}$$

O limite à direita é também chamado de derivada direcional de f segundo o vetor v e denota-se também com $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$. Temos então que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = Df(x_o)(v)$$

Seja F subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. A derivada parcial $D_F f(x_o)$ fica determinada pela restrição de f

ao conjunto $U \cap \{x_o+F\}$, ou seja, qualquer função g que concida com f sobre $U \cap \{x_o+F\}$ dará a mesma derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial F}(x_o) = \frac{\partial g}{\partial F}(x_o).$$

Observe que isto é também conseqüência de (2.8).

(3.4) Sejam E e F espaços vetoriais normados (sempre de dimensão finita e sobre $\mathbb{R}$). O conjunto das aplicações lineares de E em F denotado por $\mathcal{L}(E,F)$ é também espaço vetorial onde podemos definir normas. Uma maneira de fazê-lo seria fixar-se um isomorfismo entre $\mathcal{L}(E,F)$ e algum $\mathbb{R}^s$ e transportar uma norma de $\mathbb{R}^s$ para $\mathcal{L}(E,F)$, por tal isomorfismo. Outra maneira de se obter uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$ é definí-la por

$$L \in \mathcal{L}(E,F)$$

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|$$

(3.5) Qualquer que seja norma posta em $\mathcal{L}(E,F)$ obteremos sempre a mesma topologia. Este é um fato geral para qualquer espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (de dimensão finita). O mesmo decorre do fato de que em $\mathbb{R}^n$ duas normas quaisquer determinam a mesma topologia que é a usual. Tal proposição é comoda de ter-se em mente e de demonstra ção simples, veja por exemplo [12].

Suponhamos agora, $\mathbb{R}^n$ decomposto em soma direta de dois subespaços, $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \to \mathbb{R}^k$ função contínua. Se f é diferenciável em U, já vimos que f é diferenciável segundo E e F, valendo ainda

$$D_E f(x_o) = Df(x_o)/E$$

$$D_F f(x_o) = Df(x_o)/F$$

É conveniente e importante sabermos o que se passa com o caso recíproco, isto é, se f é diferenciável segundo E e segundo F, em U, o que ocorre com a diferenciabilidade de f? A diferenciabilidade parcial de f segundo E e F não implica na diferenciabilidade de f. Porém se pedirmos que as funções derivadas parciais

$$D_E f: U \to \mathcal{L}(E,\mathbb{R}^k)$$

$$D_F f: U \to \mathcal{L}(F,\mathbb{R}^k)$$

sejam contínuos, então teremos que f é diferenciável e ainda com derivada contínua

$$Df: U \to \mathcal{L}(R^n,\mathbb{R}^k).$$

Quando a derivada de uma função é contínua, dizemos que a função é continuamente diferenciável.

É fácil ver que se f é diferenciável e $v = v_1 + v_2$ segundo a decomposição $\mathbb{R}^n = E \oplus F$, temos que

$$Df(x_o)(v_1+v_2) = D_E f(x_o)(v_1) + D_F f(x_o)(v_2).$$

Resumindo, podemos enunciar a seguinte proposição cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

(3.6) Uma função $f\colon U \to \mathbb{R}^k$, U aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n = E \oplus F$, é continuamente diferenciável se e somente se f é continuamente diferenciável segundo E e F e vale a igualdade

$$Df(x_o)(v_1+v_2) = D_E f(x_o)(v_1) + D_F f(x_o)(v_2).$$

Lembramos que o que estamos fazendo é válido se substituirmos R^n por um espaço vetorial normado qualquer (de dimensão finita sobre R).

Vejamos o que ocorre quando queremos utilizar uma decomposição, do contra domínio da função, em soma direta.

Sejam então $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ diferenciável com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $R^k = E \oplus F$. Chamemos de p_E e p_F as projeções em E e F respectivamente determinadas pela decomposição. As aplicações p_E e p_F são então lineares.

A seguinte igualdade é conseqüência puramente da decomposição de R^k em $E \oplus F$.

$$Df(x)(v) = p_E \ Df(x)(v) + p_F \circ Df(x)(v).$$

A próxima igualdade envolve o fato de que a derivada de uma aplicação linear e ela própria. Isto permite-nos passar p_E e p_F para dentro do símbolo de derivação, utilizando a regra da cadeia.

$$p_E \circ Df(x)(v) + p_F \circ Df(x)(v) =$$

$$= D(p_E \circ f)(x)(v) + D(p_F \circ f)(x)(v).$$

(3.7) Se chamarmos $p_E \circ f = f_1$ e $p_F \circ f = f_2$ temos que $f = (f_1, f_2)$ e a derivada escreve-se como:

$$Df(x)(v) = Df_1(x)(v) + Df_2(x)(v),$$

ou seja,

$$Df(x) = (Df_1(x), Df_2(x)).$$

Vamos combinar estes dois aspectos, isto é, suponhamos que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ apareçam como somas diretas de subespaços e queiramos explorar este fato. Sejam então

$$\mathbb{R}^n = E \oplus F, \quad \mathbb{R}^k = H \oplus L$$

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável.

Consideremos as componentes $v = (v_1,v_2) \in E \oplus F$ e $f(v) = (f_1(v),f_2(v)) \in H \oplus L$.

Combinando (3.6) e (3.7) temos que:

$$Df(x)(v_1,v_2) =$$

$$= (D_Ef_1(x)(v_1) + D_Ff_1(x)(v_2),\ D_Ef_2(x)(v_1) + D_Ff_2(x)(v_2)).$$

Colocando em forma matricial temos que

$$(3.8) \qquad Df(x) = \begin{pmatrix} D_Ef_1(x) & D_Ff_1(x) \\ D_Ef_2(x) & D_Ff_2(x) \end{pmatrix}$$

ou em outra notação

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial F}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial E}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial F}(x) \end{pmatrix}$$

A derivada $Df(x)$ atua portanto no vetor (v_1,v_2) na forma usual das matrizes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial F}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial E}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial F}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial E}(x)(v_1) + \frac{\partial f_1}{\partial F}(x)(v_2),\right.$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial E}(x)(v_1) + \frac{\partial f_2}{\partial F}(x)(v_2)\right).$$

(3.9) Chamamos a matriz em (3.8) de matriz jacobiana de f segundo as decomposições de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ dadas.

O que dissemos em (3.6), (3.7) e (3.8) extende-se por indução para decomposições em um número finito qualquer de fatores

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$$

$$\mathbb{R}^k = F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$$

Vale o Teorema (3.6) e temos que $Df(x)$ é dada pela matriz jacobiana

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial E_j}(x)\right); \quad i=1,\ldots,s; \; j=1,\ldots,r.$$

Lembramos que o mesmo vale se em lugar de R^n e R^k tivermos espaços vetoriais normados.

As decomposições canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$, dada pelas bases canônicas, nos fornece a matriz jacobiana clássica de f.

(3.10) Se $f: U \to \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável, isto é, se a função derivada

$$Df: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

for contínua dizemos que f é de classe C^1. Consideremos agora o problema de diferenciabilidade para Df. Se

Df é diferenciável dizemos que f admite derivada de segunda ordem. Se $D(Df)$ for contínua dizemos que f é de classe C^2. De modo análogo temos a noção de função que admite derivada até a ordem r e a noção de função de classe C^r

$$D^1 f = Df, \qquad D^r f = D(D^{r-1} f).$$

Podemos por a condição de diferenciabilidade de ordem superior também em linguagem de função real de variável real utilizando as decomposições canônicas de R^n e R^k, ou seja, considerando-se as matrizes jacobianas sucessivas. Veja (3.6) e (3.9).

$$f\colon U \to \mathbb{R}^k; \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto}$$

$$x = (x_1,\ldots,x_n); \quad f(x) = (f_1(x),\ldots,f_k(x))$$

Temos então que f é continuamente diferenciável até a ordem r, se e somente se cada função f_i é continuamente diferenciável até a ordem r, segundo cada variável x_j. A função f será de classe C^∞, se e somente se, cada função f_i admite derivadas de todas as ordens, segundo cada variável x_j.

4. Descrição local das funções de classe C^1

Como já dissemos anteriormente, em topologia diferencial, as propriedades que interessam são aquelas que são invariantes por difeomorfismos. Neste sentido, os teoremas que enunciaremos a seguir, dizem que as funções que tem derivada contínua (isto é, de classe C^1), comportam-se localmente como aplicações lineares. Elas herdam, localmente as propriedades de suas derivadas. Leia por exemplo, (1.5) e comentários. Para funções diferenciáveis cujas derivadas não são contínuas o comportamento local pode ser bastante irregular. Veja os gráficos em (1.3) e (1.4). O que fizemos até agora, nestas notas, foi recordar, em meio a algumas definições, comentários e motivações. O teorema que daremos a seguir é o primeiro resultado que não deve ser esquecido. Trata-se do teorema da função inversa. Este é que fornece a descrição local conveniente das funções de classe C^1. Usaremos a linguagem de espaços vetoriais normados (sempre de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$).

(4.1) Teorema da função inversa (sem demonstração).

Sejam E e F espaços vetoriais normados, $U \subset E$

aberto e $f: U \to F$ aplicação diferenciável com derivada contínua. Se a derivada de f no ponto x_o é isomorfismo de E sobre F,

$$Df(x_o): E \to F$$

então existem abertos V e W com $x_o \in V$ e $f(x_o) \in W$, tais que a restrição de f a V é um difeomorfismo sobre W e f^{-1} tem também derivada contínua. Vale ainda que

$$D(f^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}, \quad \text{com} \quad y = f(x).$$

Observação: Este teorema continua válido se puzermos "classe C^r com $r \geq 1$", em todo lugar que aparece "derivada contínua".

(4.2) Pela condição de diferenciabilidade temos que

$$f(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o) + r(x,x_o)$$

Quando aproximarmos f pela função $f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o)$ cometemos o erro $r(x,x_o)$. O teorema da função inversa permite-nos concluir que existe um difeomorfismo em torno de $f(x_o)$, tal que, se alterarmos f por este difeomorfismo, o erro $r(x,x_o)$ desaparece, ou seja, a menos de difeomorfismo, f é localmente dada simplesmente por

$$x \longmapsto f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o).$$

Vejamos como. Seja $L(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o)$. O difeomorfismo h, em questão é obtido como

$$h = L \circ f^{-1}$$

Observe que, como $Df(x_o)$ é isomorfismo então L é difeomorfismo, o mesmo acontecendo com f^{-1}, pelo teorema da função inversa. Assim h é um difeomorfismo de classe C^1 entre duas vizinhanças de $f(x_o)$ e temos:

$$h \circ f(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o).$$

Assim então, um difeomorfismo local na imagem permite transformar f na função simples deste segundo membro.

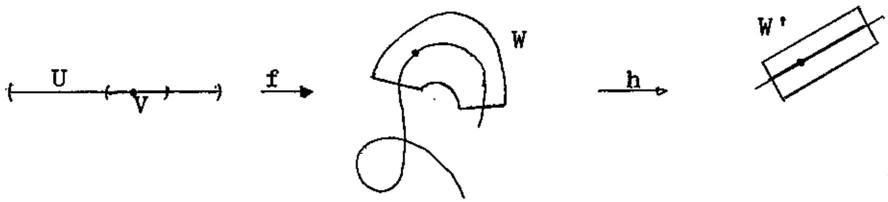
O posto de uma aplicação linear é a dimensão da imagem da mesma, que é igual ao posto de uma matriz que a represente, que é o mesmo que o número máximo de vetores-coluna (ou linha) linearmente independentes de tal matriz.

Os dois teoremas que enunciaremos a seguir são chamados de teoremas do posto máximo, porque pede-se neles que a derivada seja injetora ou sobrejetora.

(4.3) <u>Teorema da derivada injetora</u> (sem demonstração).

Sejam E e F espaços vetoriais normados, $U \subset E$ aberto e $f: U \to F$ diferenciável de classe C^r, com $r \geq 1$. Se $Df(x_o)$, $x_o \in U$, é injetora então existem vizinhanças V de x_o e W e W' de $f(x_o)$ é um difeomorfismo $h: W \to W'$ de classe C^r, tais que,

$$h \circ f(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o) \quad \text{com} \quad x \in V$$



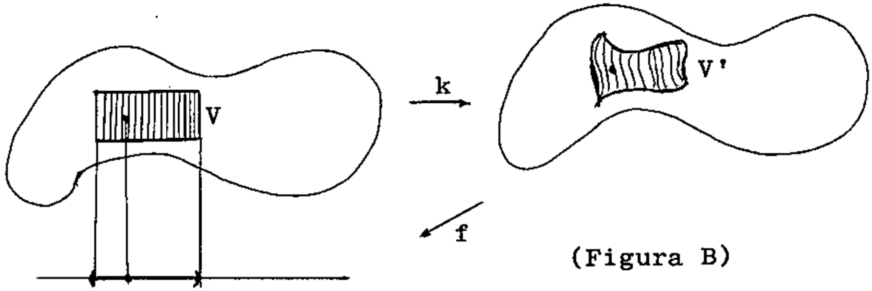
(Figura A)

O difeomorfismo local h endireita, ou lineariza a imagem de V por f.

(4.4) <u>Teorema da derivada sobrejetora</u> (sem demonstração).

Sejam E e F espaços vetoriais normados, $U \subset E$ aberto, $f: U \to F$ diferenciável de classe C^r, com $r \geq 1$. Se $Df(x_o)$, $x_o \in U$, é sobrejetora então existem vizinhanças V e V' de x_o e difeomorfismo $k: V \to V'$ de classe C^r, tais que

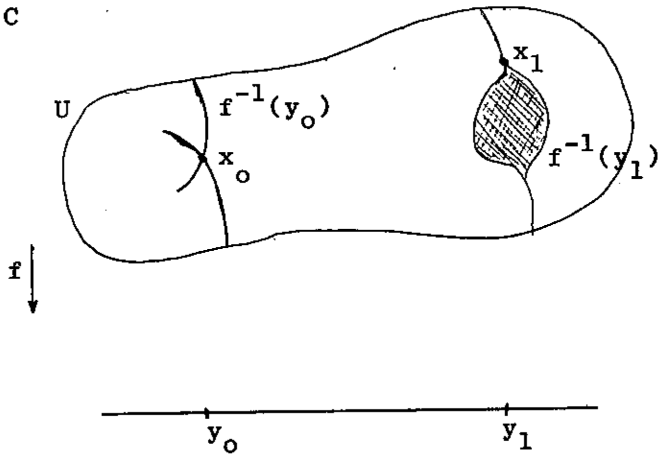
$$f \circ k(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o).$$



(Figura B)

Observe que, graças a este teorema, a situação seguinte não pode ocorrer, se a derivada for sobrejetora nos pontos em questão, já que em torno de tais pontos, imagens inversas devem ser parecidas e abertos do núcleo da derivada, ou seja, abertos de subespaços de E.

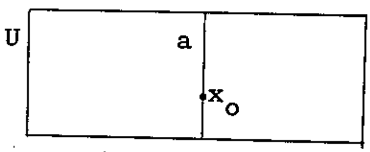
Figura C



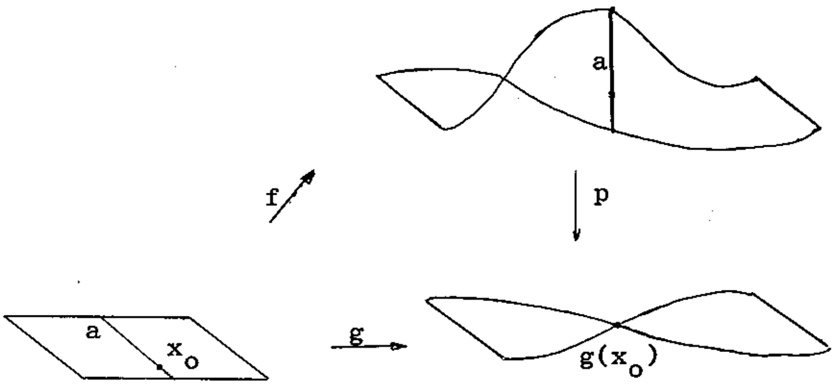
Neste caso, nenhuma vizinhança de x_o em x_1, nas imagens inversas $f^{-1}(y_o)$ e $f^{-1}(y_1)$, pode ser homeomorfa a abertos de R, portanto as derivadas de f nos pontos x_o e x_1 não podem ser sobrejetoras.

É natural e importante que se queira saber o que ocorre no caso geral onde não se pede que a derivada tenha posto máximo, isto é, f é apenas uma função de classe C^1. Neste caso o comportamento local ainda pode ser complicado, ou seja, não vale mais a descrição que vem sendo dada. Vejamos um exemplo em descrição geométrica.

(4.5) Tomemos um retângulo aberto U do plano $\mathbb{R}^2$



e levemo-lo no espaço $\mathbb{R}^3$ aplicando-lhe uma "torção" de modo que o segmento a fique em posição vertical. Isto pode ser feito de modo que a função assim obtida $f: U \to \mathbb{R}^3$ seja de classe C^∞. Em seguida compomos f com a projeção $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Temos então:



A função $g = p \circ f$ é diferenciável de classe C^∞ e a derivada de g nos pontos x_o de a não são injetoras e nem sobrejetoras, pois $Df(x_o)$ leva $\mathbb{R}^2$ num plano vertical e p o projeta numa reta passando por $g(x_o)$. Observe que nenhuma vizinhança de $g(x_o)$ em $g(U)$ é homeomorfa a uma bola.

Se impuzermos uma certa restrição às funções de classe C^r, com $r \geq 1$ podemos ainda obter descrição local semelhante à anterior. Basta pedirmos que o posto da derivada seja constante. Temos então o seguinte:

(4.6) <u>Teorema do posto constante</u> (sem demonstração).

Sejam E e F espaços vetoriais normados, $U \subset E$ aberto e $f: U \to F$ diferenciável de classe C^r, com $r \geq 1$. Se Df tem posto constante numa vizinhança de x_o, então existem difeomorfismos de classe C^r

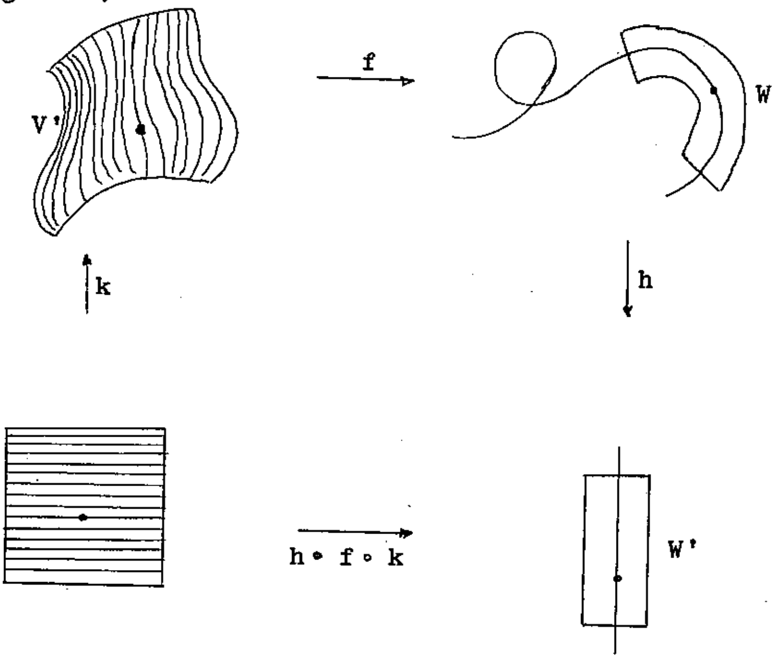
$k: V \to V'$; entre vizinhanças de x_o,

$h: W \to W'$; entre vizinhanças de $f(x_o)$

tais que

$$h \circ f \circ k(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o).$$

(Figura D)

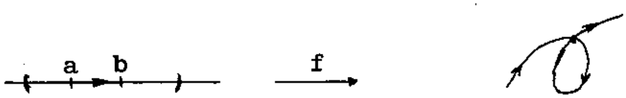


Observe que os três teoremas anteriores satisfazem a hipótese do teorema do posto constante, pois se a derivada de uma função tem posto máximo em x_o, as derivadas em pontos vizinhos devem ter o mesmo posto; considere por exemplo as derivadas representadas por matrizes; se uma matriz tem posto máximo, toda matriz suficientemen te próxima dela terá também posto máximo. Em outra linguagem, se uma k-upla de vetores é linearmente independente, qualquer outra k-upla de vetores suficientemente próxima será linearmente independente.

Resumindo, podemos dizer então que as funções de classe C^r, com $r \geq 1$ e de posto constante, comportam-se localmente como aplicações lineares, a menos de difeomorfismos de mesma classe. A finalidade do teorema da função inversa é essencialmente dar esta descrição.

(4.7) Exemplos e comentários.

1. Pelo teorema da derivada injetora (4.3), se F é de classe C^1 com derivada injetora em cada ponto, então f herda esta propriedade localmente, isto é, ela é localmente injetora, mas não necessariamente globalmente, por exemplo, a função sugerida pela figura abaixo



$f(a) = f(b)$

ou ainda a função exponencial $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y).$$

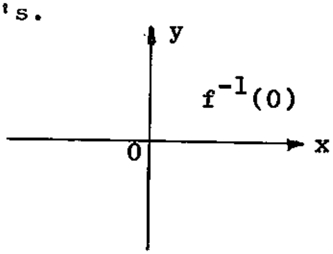
2. Como já indicamos em observações após o Teorema (4.4), o teorema da derivada sobrejetora nos dá informação

importante sobre imagens inversas de pontos. Se $Df(x_o)$ é sobrejetora para cada x_o em $f^{-1}(y)$, então este teorema nos diz que o conjunto $f^{-1}(y)$ goza da propriedade de que existe vizinhança V de x_o e difeomorfismo k definido em V tal que $h(V \cap f^{-1}(y))$ é um aberto de um subespaço vetorial. Estas imagens inversas tem então propriedades locais semelhantes em cada ponto. Conjunto com tais propriedades locais é que serão chamados, mais adiante, de variedades diferenciáveis. Se f é de classe C^1 mas $Df(x_o)$ não é sobrejetora então $f^{-1}(y)$, com $y = f(x_o)$, pode não ser localmente homeomorfo a uma bola, por exemplo, a função multiplicação

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad f(x,y) = xy$$

$$Df(x_o,y_o)(x,y) = x_o y + y_o x$$

Logo para $x_o = y_o = 0$ temos que $Df(0,0) = 0$ e portanto não é sobre. Vejamos como é $f^{-1}(0)$. Este é exatatamente o conjunto dos pontos que satisfazem $xy = 0$, isto é, $x = 0$ ou $y = 0$, logo consiste da união dos eixos dos x's e dos y's.



O ponto 0 não admite vizinhança em $f^{-1}(0)$ homeomorfa a uma bola.

3. Dado um fechado A qualquer de $\mathbb{R}^n$, existe função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ tal que $f^{-1}(0) = A$. Isto mostra quão maleável são as funções diferenciáveis. Como conjuntos fechados podem ser bastante complicados, o teorema da derivada sobrejetora nos garante que a função f não terá em geral, derivadas sobrejetoras em todo ponto de A. Não nos interessa aqui a construção de tal função, mas é conveniente ter-se tal informação em mente.

(4.8) <u>Definição</u>. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^k$, diferenciável, onde U é aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $Df(x_0)$ é sobrejetora, dizemos que x_0 é ponto regular de f. Se x_0 não é ponto regular chamamo-lo de ponto crítico de f. Dizemos que $y \in R^k$ é valor regular de f se todos os pontos de $f^{-1}(y)$ forem pontos regulares de f; admite-se o caso $f^{-1}(y) = \emptyset$.

A noção de valor regular é importante em topologia diferencial e a grande informação, que se tem a respeito de tais pontos, é dada pelo Teorema de Sard, que veremos mais adiante. Tanto a noção quanto este teorema desempenham papel básico nestas notas.

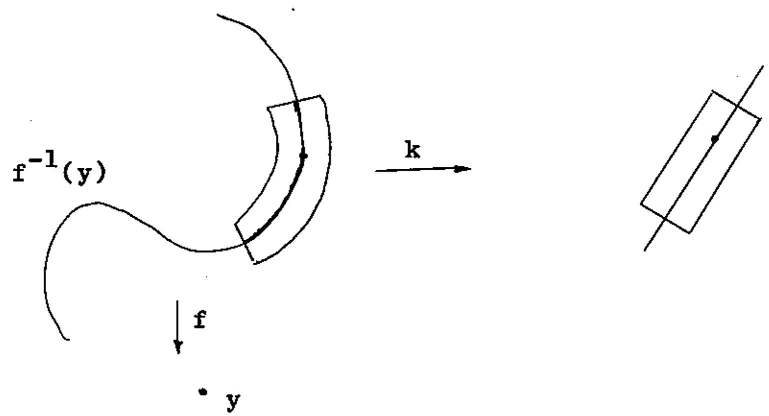
Exercícios

1. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x$. Verifique que todo ponto de $\mathbb{R}$ é valor regular.

2. Considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$. Verifique que $0 \in \mathbb{R}^2$ não é ponto regular de f. O que acontece com os demais pontos de $f^{-1}(0)$? O ponto $0 \in \mathbb{R}$ é ou não valor regular de f?

5. Variedades diferenciáveis

Se p é um polinômio, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, há interesse em conhecer-se ou determinar os zeros de p, isto é, $p^{-1}(0)$. Do ponto de vista topológico tal conjunto é simples, ou seja, é um conjunto finito de pontos. Se considerarmos um polinômio f com mais de uma variável o conjunto dos zeros não é mais finito em geral, e o conjunto $f^{-1}(0)$ passa a ter descrição topológica mais difícil. De modo mais geral podemos considerar uma função diferenciável $f: U \to \mathbb{R}^k$; $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. O teorema da derivada sobrejetora (4.4) nos dá informação local sobre $f^{-1}(0)$. Tal teorema nos permite dizer que para cada ponto $x \in f^{-1}(0)$ existe uma vizinhança V de x_0 e um difeomorfismo k definido em V, tal que, $k(f^{-1}(0) \cap V)$ é uma bola de um subespaço vetorial F de $\mathbb{R}^n$. Como as translações e as aplicações lineares são diferenciáveis de classe C^∞, podemos tomar F como sendo, digamos, $\mathbb{R}^p$



Sabemos por esta propriedade local que tal tipo de conjunto deve ter a mesma dimensão em torno de cada ponto e que ele não pode ter "bifurcações" ou "bicos".

Os subespaços topológicos de $\mathbb{R}^n$ com tais propriedades, são suficientemente gerais para englobar fenomenos que ocorrem frequentemente em matemática e, ao mesmo tempo, suficientemente particulares para se deixarem ser estudadas com alguma profundidade. Estes são, essencialmente, os objetos que chamaremos de variedades diferenciáveis. Estes generalizam as noções de curvas e superfícies de $\mathbb{R}^3$.

As funções diferenciáveis que consideraremos daqui em diante serão de classe C^∞. Em outros termos, se não explicitarmos a classe da função diferenciável ela deve ser entendida como C^∞. Esta restrição simplifica a teoria sem diminuir-lhe essencialmente a generalidade.

Até agora temos a noção de diferenciabilidade para funções definidas em conjuntos abertos, digamos de $\mathbb{R}^n$. Queremos estudar subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são necessariamente abertos; como por exemplo $f^{-1}(y)$ onde y é valor regular de f. Para isso daremos a seguinte

(5.1) <u>Definição</u>. Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$, respectivamente (não necessariamente abertos). Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é diferenciável (C^∞) se para cada $x \in X$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e uma aplicação diferenciável $F: U \to \mathbb{R}^k$ (C^∞) que coincida com f em $X \cap U$.

$$\begin{array}{ccc} X \cap U & \xrightarrow{f} & Y \\ \cap & & \cap \\ U & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Esta definição diz que uma função, definida num conjunto arbitrário $X \subset \mathbb{R}^n$, é diferenciável se ela extende-se localmente a uma função diferenciável definida num aberto de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^k$.

Segundo esta definição, a composição de aplicações diferenciáveis é diferenciável e as identidades são diferenciáveis.

(5.2) Definição. Uma aplicação $f: X \to Y$ é um difeomorfismo se f é um homeomorfismo sobre Y e se f e f^{-1} são diferenciáveis. Dizemos neste caso que X e Y são difeomorfos.

A topologia diferencial preocupa-se em estudar propriedades que são invariantes por difeomorfismos. Exemplificando, em geometria euclideana dois triângulos, com lados de comprimentos iguais, são considerados iguais; dois triângulos com ângulos iguais são considerados semelhantes. Em álgebra, dois espaços vetoriais isomorfos são considerados iguais para propósitos algébricos. Analogamente, em topologia diferencial, dois espaços difeomorfos são considerados iguais para os propósitos desta teoria.

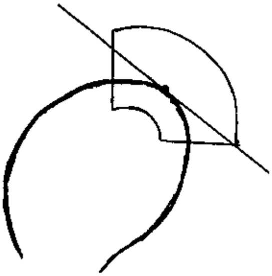
Como já indicamos antes, o interesse é de estudar-se subconjuntos X de $\mathbb{R}^n$ que possuem propriedades locais convenientes, como por exemplo, $X = f^{-1}(0)$ onde

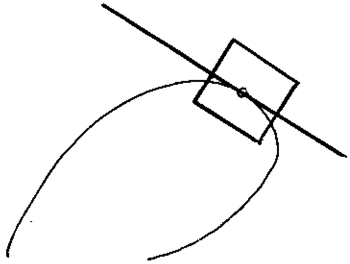
0 é valor regular de f. Vamos à definição do que entenderemos por variedade diferenciável.

(5.3) <u>Definição</u>. Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é chamado de variedade diferenciável de dimensão m (de classe C^∞), se para cada ponto x de M existe um aberto V de $\mathbb{R}^n$ tal que $V \cap M$ é difeomorfo (de classe C^∞) a um aberto U de $\mathbb{R}^m$.

Um difeomorfismo particular qualquer $g: U \to V \cap M$ é chamado de carta local ou parametrização local. Usaremos os mesmos nomes para a inversa de g. As variedades de dimensão zero (m=0) reduzem-se a conjuntos de pontos isolados de $\mathbb{R}^n$.

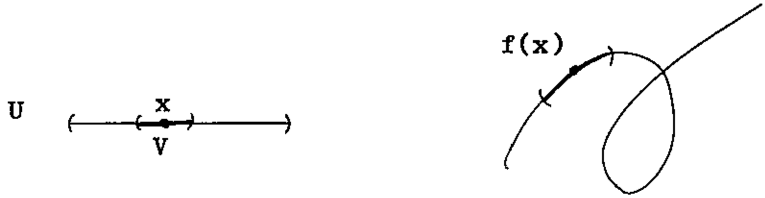
Observemos que, nesta definição, com relação ao aberto U, o importante é que U seja aberto de um subespaço vetorial de dimensão m de $\mathbb{R}^n$, ou mesmo um subespaço afim de dimensão m, pois estes são difeomorfos a $\mathbb{R}^m$. Ainda, esta "linearização local" de M pode ser obtida por um difeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$, veja o teorema da derivada injetora.





(5.4) Como já chamamos a atenção anteriormente, se f é aplicação diferenciável definida num aberto U e y é valor regular de f, então pelo teorema da derivada sobrejetora, temos que $f^{-1}(y)$ é variedade diferenciável e a dimensão do contradomínio mais a dimensão da variedade deve dar a dimensão do domínio, (verifique detalhadamente estas afirmações).

(5.5) O teorema da derivada injetora nos fornece exemplos de variedades como imagens de certas vizinhanças: Se $f: U \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $Df(x)$ é injetora então existe vizinhança V de x e um difeomorfismo local k em torno de $f(x)$ tal que k "linearíza" a imagem de V por f, mas esta é exatamente a condição que precisamos para a imagem de V ser variedade. Se $Df(x)$ é injetora para todo $x \in U$ e f for um homeomorfismo sobre sua imagem, então a imagem de f é variedade.

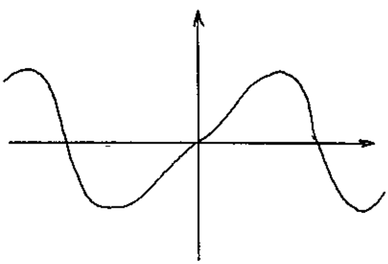


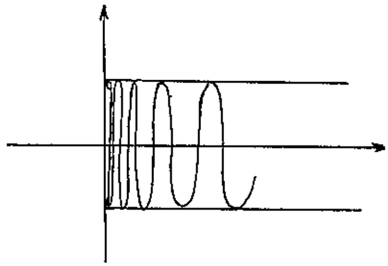
As seguintes funções tem imagens sendo variedades, pelo teorema da derivada injetora e por elas serem homeomorfismos

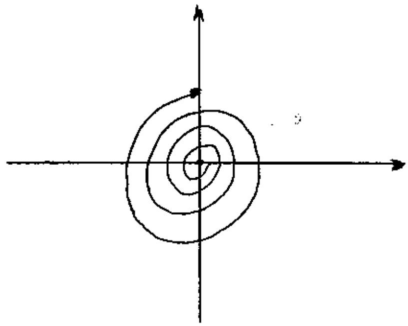
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad f(x) = (x,\ \text{sen}\ x)$$

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2; \quad f(x) = (x,\ \text{sen}\ \frac{1}{x})$$

$$f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}^2; \quad f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$$







Exemplos (de variedades)

1. Os abertos de $\mathbb{R}^n$ são variedades diferenciáveis de dimensão n.

2. As esferas são variedades diferenciáveis. S^n é o conjunto dos vetores de norma 1, de $\mathbb{R}^{n+1}$. Em coordenadas, os pontos de S^n ficam caracterizados por $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$. Consideremos a função real de classe C^∞, definida em $\mathbb{R}^{n+1}$, dada por

$$f(x_1,\ldots,x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$$

A derivada de f é a seguinte (calcule)

$$Df(a_1,\ldots,a_{n+1})(x_1,\ldots,x_{n+1}) = 2(a_1x_1 + \ldots + a_{n+1}\, x_{n+1}).$$

Vemos então que o único ponto crítico de f é o zero. Logo pelo teorema da derivada sobrejetora $f^{-1}(1) = S^n$ é variedade diferenciável.

3. O toro T^2 de revolução em $\mathbb{R}^3$ é dado por

$$x_3^2 + (\sqrt{x_1^2 - x_2^2} - a)^2 = b^2 \quad \text{com} \quad 0 < b < a$$

onde a é o raio do círculo "horizontal" e b é o raio do círculo "vertical". Utilizando a função dada por este primeiro membro e o teorema da derivada sobrejetora, verifica-se que T^2 é variedade diferenciável.

Nem toda variedade diferenciável é obtida através de valor regular como acima, isto é, como imagem inversa de valor regular de uma função diferenciável. Estas formam, na realidade, uma classe bastante restrita de variedades.

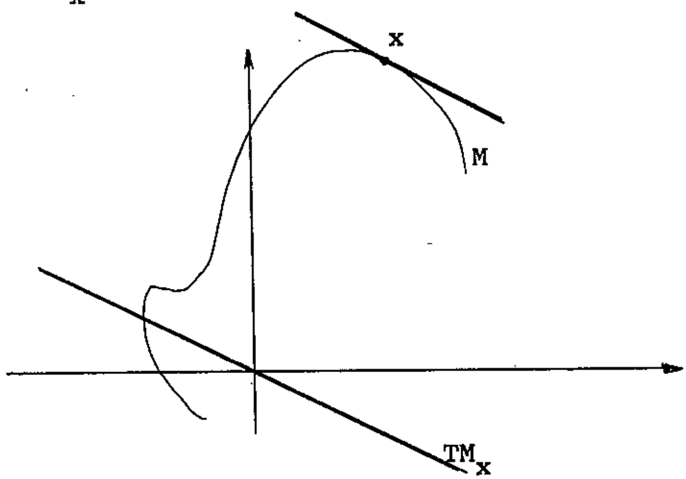
(5.6) Espaços tangentes e derivadas

Nós temos a noção de derivada para funções diferenciáveis definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^k$. Queremos agora definir a noção de derivada para funções diferenciáveis entre variedades diferenciáveis. A nova noção deverá generalizar a anterior. No caso de abertos de $\mathbb{R}^n$ a derivada está definida em todos os vetores de $\mathbb{R}^n$. Para generalizarmos a derivada, precisamos inicialmente especificar quais os vetores que associaremos à variedade diferenciável. Vamos então definir o que é espaço tangente a uma variedade diferenciável.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade diferenciável de dimensão n. Vamos definir espaço tangente a M num ponto x, para cada x de M. Consideremos uma carta local $h: U \to M \subset \mathbb{R}^n$, $h(U)$ é vizinhança de x em M, $h(a) = x$ e U aberto de $\mathbb{R}^m$. Podemos então tomar a derivada de h no ponto a.

(5.7) Definição. Chamamos de espaço tangente a M no ponto x à imagem da derivada $Dh(a)$ e anotamos tal imagem com TM_x.

Nesta definição o espaço TM_x é dado a partir de uma carta local h. Qualquer outra carta local difere de h por um difeomorfismo em torno de a, portanto é fácil ver que TM_x não depende da carta local utilizada em sua definição e está portanto associado apenas a M e x. Observe que TM_x é um subespaço vetorial de R^n, logo passa pela origem, e tem dimensão m. O espaço afim $x + TM_x$ é o que melhor aproxima M no ponto x.



Podemos agora definir a nóção de derivada para funções diferenciáveis entre variedades diferenciáveis.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ variedades diferenciáveis e $f\colon M \to N$ função diferenciável (5.1).

Seja $y = f(x)$ e $\tilde{f}$ uma extensão diferenciável de f a uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^n$.

(5.8) <u>Definição</u>. A derivada de f no ponto x é a aplicação linear de TM_x em TN_y anotada por $Df(x)$ é dada por $D\tilde{f}(x)$ restrita a TM_x, isto é,

$$Df(x) = D\tilde{f}(x)/TM_x.$$

Duas coisas devem ser verificadas para que tal definição faça sentido, uma é que $D\tilde{f}(x)$ leva TM_x em TN_y e outra é que $Df(x)$ não depende da extensão $\tilde{f}$ utilizada. Ambos são decorrências imediatas da regra da cadeia, veja (2.8) e (2.9).

Para esta nova noção de diferenciabilidade vale a regra da cȧdeia.

(5.9) Sejam $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis. Então temos

$$D(g \circ f)(x) = Dg(y) \circ Df(x); \quad \text{onde} \quad y = f(x).$$

Se $M \xrightarrow{f} N$ é um difeomorfismo então $Df(x)$ é isomorfismo entre os espaços vetoriais TM_x e TN_y e portanto M e N tem que ter a mesma dimensão, isto é, variedades difeomorfas tem a mesma dimensão.

(5.10) Definição. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f: M \to N$ aplicação diferenciável. Um ponto x de M é chamado de ponto regular de f se a derivada $Df(x)$ é sobrejetora. Os pontos de M que não são regulares são chamados de pontos críticos de f. Um ponto y de N é um valor regular de f se $f^{-1}(y)$ é formado apenas de pontos regulares. Se $f^{-1}(y) = \emptyset$, y é valor regular.

No caso de M ser um aberto de $\mathbb{R}^s$ e $N = \mathbb{R}^k$, sabemos que se y é valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é variedade diferenciável e isto é conseqüência direta do teorema da derivada sobrejetora. Queremos obter resultado semelhante no caso de f ter variedades para domínio e contra domínio. O que precisamos provar exatamente é que se $Df(x): TM_x \to TN_{f(x)}$ é sobre, com $M \subset R^s$, então existe uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^s$ tal que $V \cap M$ pode ser "endireitada" ou "linearizada" por uma carta local de M.

(5.11) Proposição. Sejam $M \subset \mathbb{R}^r$ e $N \subset \mathbb{R}^s$ variedades diferenciáveis de dimensões m e n respectivamente. Sejam $f: M \to N$ função diferenciável, $x \in M$ e $y = f(x)$. Se $Df(x): TM_x \to TN_y$ é sobrejetora, então existe um aberto U de M com $x \in U$ e carta local g definida em U tal que $g(U \cap f^{-1}(y))$ é aberto em $\mathbb{R}^{m-n}$.

<u>Demonstração</u>: Sejam (V,h) e (V',k) cartas locais em torno de x e $f(x)$ respectivamente, com $f(V) \subset V'$ e consideremos a função diferenciável

$$\ell = kfh^{-1}: h(V) \to k(V').$$

Observemos que $D\ell(h(x)): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é sobre. Logo, pelo teorema da derivada sobrejetora, existe um aberto W contendo $h(x)$ e difeomorfismo d definido em W, tal que, $d(W \cap \ell^{-1}(k(y)))$ é aberto num subespaço vetorial de dimensão $m-n$ que podemos considerar como $\mathbb{R}^{m-n}$. Basta agora tomarmos $U = h^{-1}(W)$ e $g = d \circ h$ e temos a proposição.

(5.12) <u>Teorema</u> (do valor regular).

Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente e $f: M \to N$ função diferenciável. Se $y \in N$ é valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é variedade diferenciável.

<u>Demonstração</u>: Decorre de modo imediato da proposição acima.

(5.13) <u>Proposição</u>. Nas condições e notação do teorema acima temos que o núcleo de $Df(x): TM_x \to TN_y$ é exatamente o espaço tangente $Tf^{-1}(y)_x$ à variedade $f^{-1}(y)$ no ponto x, onde $y = f(x)$.

Demonstração: Observemos o diagrama

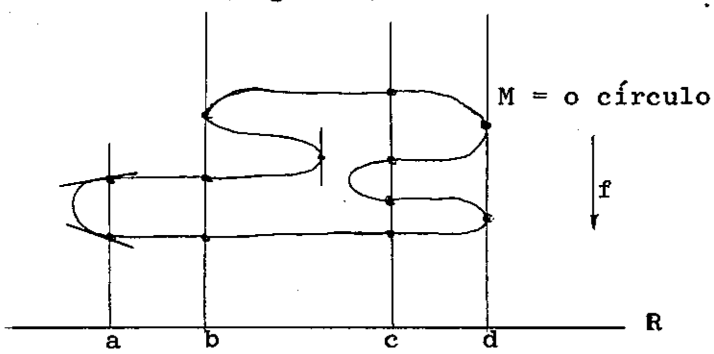
$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

onde i é a inclusão. Vemos então que $Df(x)$ leva o subespaço $Tf^{-1}(y)_x \subset TM_x$ no zero. Por razões de dimensão $Tf^{-1}(y)_x$ deve constituir então todo o núcleo de $Df(x)$.

É muito cômodo imaginarmos funções definidas sobre variedades como sendo restrições de projeções. Tal classe de funções serve, na realidade, para muitos propósitos e exemplos. Como a projeção é linear tem-se controle da derivada de sua restrição a variedades. Examinemos, por exemplo, os conceitos de ponto regular e valor regular, com figuras.

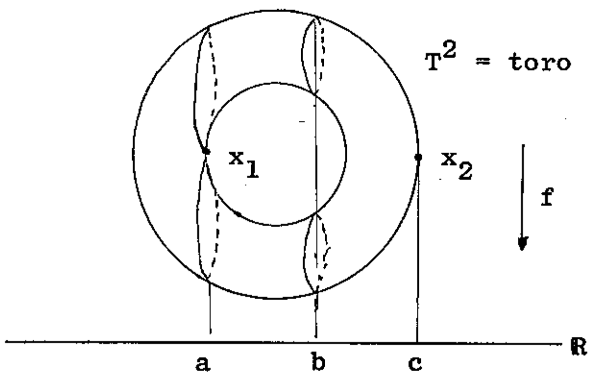
(5.14)

(Figura A)

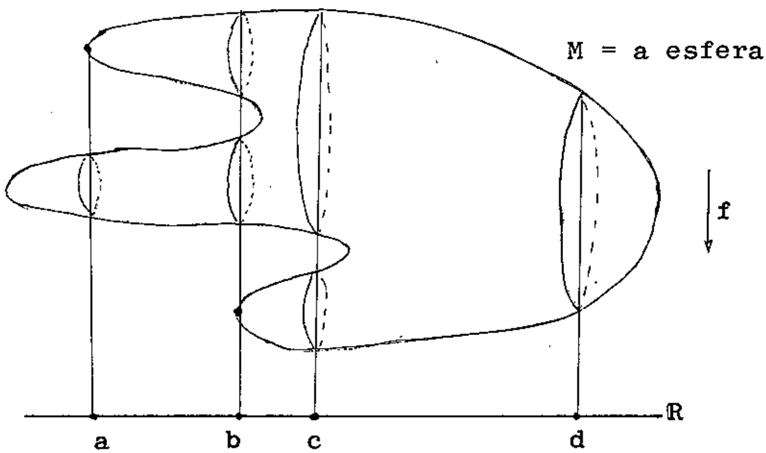


É fácil ver nesta figura (A) quais são os pontos regulares e quais os valores regulares, pois derivada de f e a própria projeção, restrita aos espaços tangentes a M. Basta então ver se o espaço tangente a um ponto de M projeta-se sobre $\mathbb{R}$ e no zero, isto é, é vertical. Os pontos a e c são valores regulares de f, pois suas imagens inversas contém apenas pontos regulares. Os pontos b e d não são valores regulares.

(Figura B)



Observe que a não é valor regular pois $f^{-1}(a)$ contém um ponto crítico x_1, onde o plano tangente é vertical, embora os demais pontos de $f^{-1}(a)$ sejam pontos regulares. O ponto b é valor regular, pois em todos os pontos de $f^{-1}(b)$, os planos tangentes projetam-se sobre a reta.



(Figura C)

Decida quais pontos são críticos, quais são regulares e quais são valores regulares.

De modo geral, dada uma variedade diferenciável M, podemos produzir muitas funções diferenciáveis, digamos com valores reais definidas sobre M, do seguinte modo: primeiramente aplicamos a M um difeomorfismo $M \to M'$ e depois projetamos M' em uma reta. É isso que fizemos nos exemplos das figuras A, B e C acima. Este tipo de construção serve, não só para produzir funções interessantes, como também dão idéia intuitiva sobre a influência da topologia (forma) da variedade, nas propriedades das funções definidas sobre a mesma. Por exemplo, consideremos a esfera S^n como variedade diferenciável e tomemos uma função diferenciável qualquer $f: S^n \to \mathbb{R}$. Como alguma familiaridade com as funções projeções, como nas figuras acima, é razoável admitir-se que f deve ter pelo menos dois pontos críticos, isto é, pelo menos em dois pontos de S^n os espaços tangentes devem ser "perpendiculares a $\mathbb{R}$ ". Na realidade este fato ocorre e é de fácil verificação, utilizando-se para tal, que a imagem de S^n é um intervalo fechado e o teorema da derivada sobrejetora. A recíproca é quase verdade, isto é, se M é variedade diferenciável que é domínio de uma função real diferenciável, com apenas dois pontos críticos (pede-se que tais pontos satisfaçam certa condição) então M é homeomorfa a uma esfera; ver por exemplo [8] pag.25.

Seja $f: M \to N$ função diferencíável entre variedades. Se $y \in N$ não é valor regular de f a única coisa que se pode dizer de $f^{-1}(y)$ é que este é um conjunto fechado e nada mais. Se y é valor regular de f então $f^{-1}(y)$ é uma variedade diferenciável. Esta enorme diferença em informação torna os valores regulares extremamente importantes e de existência desejada. Felizmente eles existem em abundância e tal informação é fornecida pelo Teorema de Sard.

(5.15) Teorema de Sard (sem demonstração).

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ abertos e $f: U \to V$ função diferenciável. Seja C o conjunto dos pontos críticos de f, $C = \{x \in U \mid Df(x)$ tem posto $<k\}$. Então $f(C) \subset V$ tem medida de Lebesgue nula, isto é, dado $\varepsilon > 0$ podemos cobrir $f(C)$ com uma seqüência de cubos de $\mathbb{R}^k$ com a soma do volume total menor do que ε.

Como um conjunto de medida nula tem interior vazio, temos que o conjunto dos valores regulares de f, na notação acima, é denso em V. Lembramos que se $f^{-1}(y)$ é vazio y é valor regular. Com este comentário e utilizando-se cartas locais, temos o seguinte resultado para variedades.

(5.16) Corolário. O conjunto dos valores regulares de uma aplicação diferenciável $f: M \to N$, entre variedades diferenciáveis, é denso em N.

(5.17) Ainda com a mesma notação. Se M é compacta temos uma informação a mais para dar sobre o conjunto dos valores regulares, este é também aberto em N. De fato, o conjunto dos pontos regulares é aberto em M, basta ver a definição de ponto regular e observar o teorema da derivada sobrejetora. Assim sendo, o conjunto dos pontos críticos C é fechado em M e portanto compacto (M é compacta). Logo $f(C)$ é fechado em N e seu complementar, que é o conjunto dos valores regulares, é então aberto. Neste caso o conjunto dos valores regulares é aberto e denso.

(5.18) Sejam agora variedades diferenciáveis de mesma dimensão com M compacta e $f: M \to N$ função diferenciável. Sabemos que o conjunto dos valores regulares de f é um aberto denso de N. Como M e N tem a mesma dimensão temos que $f^{-1}(y)$ é variedade de dimensão zero para y valor regular. Como M é compacta e $f^{-1}(y)$ é um conjunto de pontos isolados, este deve ser finito, digamos $\{x_1,\ldots,x_r\} = f^{-1}(y)$. Sendo y valor regular e M e N de mesma dimensão, temos que $Df(x_i)$ é isomorfismo para cada $i = 1,\ldots,r$. Então podemos escolher vizinhanças abertas V_i de x_i, disjuntas duas a duas e tais que f restrita a V_i é um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta U_i de y.

Temos $M - V_1 - \ldots - V_r$ é fechado em M logo é compacto, portanto sua imagem por f é fechada em N e não contém o ponto y. Logo

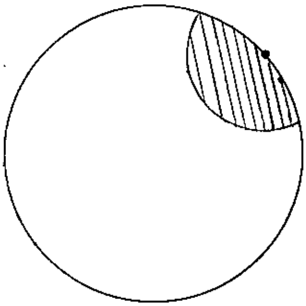
$$U = \bigcap_{i=1}^{r} U_i - f(M - v_1 - \dots - v_r)$$

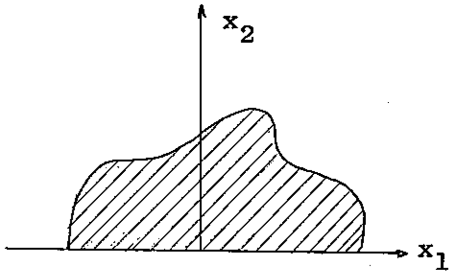
é um aberto contendo y e formado apenas de valores regulares de f. Pela maneira que construimos U, é fácil verificar que para todo ponto $z \in U$, $f^{-1}(z)$ tem exatamente r elementos. Temos então o seguinte resultado.

(5.19) Se M e N são variedades diferenciáveis de mesma dimensão com M compacta e $f: M \to N$ é diferenciável, então a função $\# f^{-1}(y)$, que associa a cada valor regular y de f, o número de pontos de $f^{-1}(y)$, é localmente constante.

6. Variedades com bordo

A noção de variedade que demos não inclue, por exemplo, o disco unitário $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$, pois os pontos do círculo unitário $S^1 \subset D^2$ não possuem vizinhanças em D^2, difeomorfas a abertos de $\mathbb{R}^2$. Esta afirmação é justificável com o teorema da função inversa. Se tirarmos o círculo de D^2, o que resta é variedade diferenciável e os pontos de S^1 tem propriedades locais em D^2 que são semelhantes, isto é, todo ponto de S^1 possui, em D^2, uma vizinhança difeomorfa a um aberto do semiplano $H^2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$





Espaços com estas propriedades são importantes tanto no aspecto técnico como conceitual. Vamos então generalizar um pouco a noção de variedade de modo a incluir tais espaços. No exemplo acima dizemos que S^1 é bordo de D^2.

Anotaremos com H^n o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ com a última coordenada não negativa

$$H^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

e

$$\partial H^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}.$$

(6.1) <u>Definição</u>. Um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão m (com bordo) se para cada ponto x de M existe um aberto V

de $\mathbb{R}^n$ contendo x, tal que $V \cap M$ é difeomorfo a um aberto de H^m. O conjunto dos pontos de M que, por tais difeomorfismos, vão em ∂H^m, é chamado de bordo de M e denotado por ∂M. Os demais pontos de M são chamados de pontos interiores de M e tal conjunto é denotado por $\text{int}(M)$.

Usando o teorema da função inversa é fácil verificar que um ponto de M não pode ser simultaneamente interior e de bordo, ou seja, a definição de ∂H faz sentido.

A definição de variedade diferenciável que demos em (5.3) é caso particular da definição acima. Aquelas são variedades diferenciáveis com bordos vazios. Vejamos alguns exemplos.

<u>Exemplos</u>

1. H^n é variedade diferenciável com bordo $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$.
2. O disco D^n é variedade diferenciável com bordo $\partial D^n = S^{n-1}$.
3. O toro "cheio" $D^2 \times S^1$ é variedade diferenciável com bordo $\partial(D^2 \times S^1) = T^2$ = toro usual = $S^1 \times S^1$.
4. Se tomarmos uma bola aberta B e juntarmos a ela apenas um ponto fronteira x, o que obtemos $B \cup \{x\}$ não

é variedade diferenciável com bordo.

5. Se tomarmos um quadrado aberto Q do plano $\mathbb{R}^2$ e juntarmos um de seus lados ℓ sem as extremidades, obtemos uma variedade diferenciável com bordo igual a ℓ. Se agora juntarmos também os extremos de ℓ não mais temos uma variedade diferenciável com bordo.

6. Um quadrado fechado do plano não é variedade diferenciável com bordo.

Exercícios

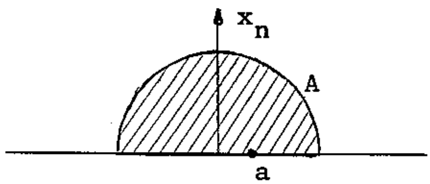
1. Prove que, se M é variedade diferenciável de dimensão m então ∂M é variedade diferenciável de dimensão $m-1$ sem bordo (para $\partial M \neq \emptyset$).

2. Justifique a afirmação feita no Exemplo 6 acima.

(6.2) Seja M variedade diferenciável com $\partial M = \emptyset$ e $f: M \to \mathbb{R}$ função diferenciável tendo $0 \in \mathbb{R}$ como valor regular. Então o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f(x) \geq 0$ é variedade diferenciável com bordo igual a $f^{-1}(0)$. A verificação deste resultado é feita de modo semelhante a (5.11).

Exercício. Utilize (6.2) para provar que os Exemplos 2 e 3 dados acima são verdadeiros.

Na Definição (6.1) de variedade com bordo, aparecem cartas locais que são difeomorfismos entre abertos da variedade e abertos de H^n, que não são abertos em R^n, por exemplo $A = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid \|x\| < 1 \text{ e } x_n \geq 0\}$



Quanto ao aspecto de diferenciabilidade tudo está claro graças à Definição (5.1), mas quanto à noção de derivada há uma observação a ser feita. Veja que nas definições espaço tangente e derivada (5.6), (5.7) e (5.8), desempenha papel básico, a carta local. Se imitarmos aqui o que fizemos lá, surge o problema de esclarecermos o que é a derivada, no ponto a, de uma carta local definida em A, como na figura acima.

Mais especificamente, sejam M variedade diferenciável com bordo, $x \in \partial M$, U uma vizinhança de x em M e $h: A \to U$ carta local, isto é, um difeomorfismo. Isto implica que existe um aberto V de $\mathbb{R}^n$ contendo a e uma função diferenciável $\tilde{h}$ definida em V tal que $\tilde{h}(x) = h(x)$ para $x \in V \cap A$. Queremos definir $Dh(a) = D\tilde{h}(a)$, mas $Dh(a)$ fica dependendo da extensão $\tilde{h}$ de $f/A \cap V$. Felizmente esta dependência é apenas aparente graças ao tipo especial do conjunto A, segundo o resultado abaixo.

(6.3) Sejam W aberto de $\mathbb{R}^n$ e A com a propriedade $W \subset A \subset \bar{W}$. Sejam f e g funções diferenciáveis (pelo menos de classe C^1) definidas em um aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo A. Se $f/W = g/W$ então $Df(x) = Dg(x)$ para todo ponto x de A.

O argumento é simples, pois como $f/W = g/W$ temos que $Df(x) = Dg(x)$ para todo x de W, mas as derivadas são contínuas logo elas devem também coincidir nos pontos da fronteira de W onde estão definidas e portanto $Df(x) = Dg(x)$ para todo x de A.

Assim sendo, com as mesmas definições dadas anteriormente (5.7) e (5.8), temos as noções de espaço tangente e da derivada para variedades com bordo. As noções de ponto regular, ponto crítico e valor regular são as mesmas, para variedades com bordo. Temos porém a seguinte versão do Teorema (5.12).

(6.4) <u>Teorema</u> (do valor regular).

Sejam M e N variedades diferenciáveis com dimensões m e n respectivamente, com $m > n$ e $\partial N = \phi$. Seja $f: M \to N$ função diferenciável. Suponhamos que

$y \in N$ é valor regular de f e de $f/\partial M$. Então $f^{-1}(y)$ é variedade diferenciável de dimensão $m-n$ tendo como bordo precisamente $f^{-1}(y) \cap \partial M$.

<u>Demonstração</u>: Temos então que $y \in N$ é valor regular de f e $f/\partial M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ \partial M \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur, "f/\partial M"'] & \end{tikzcd}$$

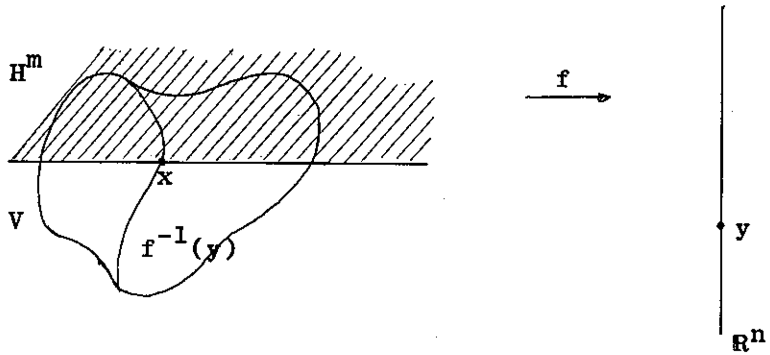
já sabemos pelos Teoremas (5.12) e (5.13) que $f^{-1}(y) \cap$ $\cap\ \mathrm{int}(M)$ é variedade diferenciável, sem bordo, de dimensão $m-n$ e que $f^{-1}(y) \cap \partial M$ é variedade diferenciável, sem bordo, de dimensão $m-n-1$. O presente teorema ficará então provado se verificarmos que para cada ponto x de $\partial M \cap f^{-1}(y)$, existe uma vizinhança U de x em M, tal que $f^{-1}(y) \cap U$ é variedade, com bordo igual a $f^{-1}(y) \cap U \cap \partial M$. Como o problema é então local, em pontos de ∂M, podemos considerar nossa função como sendo definida em H^m com valores em R^n (através de cartas locais).

$$f\colon H^m \to \mathbb{R}^n$$

com $y \in \mathbb{R}^n$ valor regular de f e de $f/\partial H^m$.

Seja $x \in \partial H^m$ e $f(x) = y$. Como f é diferenciável em x, existe, por definição, um aberto V de $\mathbb{R}^n$

contendo x e uma função diferenciável $\tilde{f}: V \to \mathbb{R}^n$ que coincide com f em $V \cap H^m$. Como a derivada de f em x é sobrejetora, podemos escolher V tal que todo ponto de V é ponto regular de $\tilde{f}$. Assim sendo $f^{-1}(y)$ é variedade diferenciável contida em V, de dimensão $m-n$.



O que queremos provar agora é que a parte de $\tilde{f}^{-1}(y)$ contida em H^m, é variedade com bordo em ∂H^m. Isto encerrará a demonstração do teorema. Vamos arranjar as coisas para utilizar o resultado (6.2). Queremos então mostrar que os pontos de $\tilde{f}^{-1}(y)$, com a n-ésima coordenada x_n, não negativa, é variedade, com seu bordo sendo o conjunto dos pontos de $\tilde{f}^{-1}(y)$ com $x_n = 0$. Para isso consideramos a função

$$p: \tilde{f}^{-1}(y) \to \mathbb{R}$$

dada por $p(x_1,\dots,x_n) = x_n$. Graças ao resultado (6.2), basta provarmos agora que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de p, isto é, precisamos mostrar que cada ponto de $\tilde{f}^{-1}(y)$ do tipo $(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ é ponto regular de p. Seja então x um tal ponto. O espaço tangente a $\tilde{f}^{-1}(y)$ no ponto x é o núcleo E da aplicação linear $D\tilde{f}(x)$, derivada de $\tilde{f}$ no ponto x, veja (5.13). Observe que x é ponto regular de p se e somente se E não é tangente a ∂H^m no ponto x, pois se tal fato ocorresse, como $D(f/\partial H^m)(x) = D\tilde{f}(x)/\partial H^m$, teriamos E sendo núcleo deste primeiro membro, mas sua codimensão, em $\partial H^m = \mathbb{R}^{m-1}$, é $n-1$ e assim x não seria ponto regular de $f/\partial H^m$, contra a hipótese do teorema. Temos então finalmente, que o conjunto dos pontos $x \in \tilde{f}^{-1}(y)$ tais que $p(x) \geq 0$ é variedade com bordo em ∂H^m, como queríamos.

O seguinte resultado é de grande importância nestas notas. Sua demonstração pode ser encontrada em [10].

(6.5) Toda variedade diferenciável conexa de dimensão 1 é difeomorfa ou ao círculo S^1 ou a um intervalo de $\mathbb{R}$.

Se a variedade é de dimensão 1 e não conexa, ela é então uma união disjunta de copias de S^1 e de intervalos de R.

Vejamos uma aplicação significativa do teorema do valor regular (6.4) e de (6.5).

(6.6) <u>Proposição</u>. Seja M variedade diferenciável com bordo e compacta. Não existe nenhuma função diferenciável $f: M \to \partial M$ tal que para todo ponto x de ∂M, $f(x) = x$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que existe uma tal função $f: M \to \partial M$. Seja $y \in \partial M$ valor regular de f. Observe que y é também valor regular de $f/\partial M =$ $=$ identidade. Estamos então dentro das hipóteses do teorema do valor regular (6.4). Temos então que $f^{-1}(y)$ é variedade diferenciável de dimensão 1 e com bordo sendo $f^{-1}(y) \cap \partial M$. Como já observamos em (6.5), toda variedade diferenciável de dimensão 1 é uma união disjunta de "círculos" e "segmentos" de $\mathbb{R}$. Como $f^{-1}(y)$ é compacta os segmentos devem ter os extremos que são os seus pontos de bordo e tais só podem ocorrer em ∂M. Como $y \in f^{-1}(y) \cap \partial M$ temos que y é ponto de bordo de $f^{-1}(y)$ e portanto pertence a um segmento fechado que possui uma outra extremidade $y_1 \in \partial M$ com $y \neq y_1$. Então temos $y_1 \in f^{-1}(y)$ logo $f(y_1) = y$, mas como $y_1 \in \partial M$ e $f/\partial M =$ identidade vem que $f(y_1) = y_1$, ou seja

$$y_1 = f(y_1) = y$$

o que é contraditório com $y_1 \neq y$. Logo não pode existir tal função e fica provada a proposição.

7. Grau de uma aplicação diferenciável

Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão com M compacta e sem bordo e $f: M \to N$ função diferenciável. Se y é valor regular de f e então $f^{-1}(y)$ tem um número finito de pontos, como vimos em (5.18). Anotamos com $\# f^{-1}(y)$ o número de pontos em $f^{-1}(y)$. A função $\# f^{-1}$ está então definida no conjunto dos valores regulares de f que é neste caso um aberto denso de N. Vimos ainda em (5.19) que $\# f^{-1}$ é localmente constante. Neste capítulo analizaremos mais detalhadamente a relação entre f e $\# f^{-1}$. A segunda função é de fato bastante simples e dá informações profundas sobre f. A noção de homotopia diferenciável desempenha papel importante no que vamos tratar daqui para frente.

(7.1) Definição. Sejam A subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $I = [0,1]$ o intervalo de $\mathbb{R}$ fechado de extremidades 0 e 1. Consideremos o produto $A \times I$ como subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. Sejam f_0 e f_1 aplicações diferenciáveis

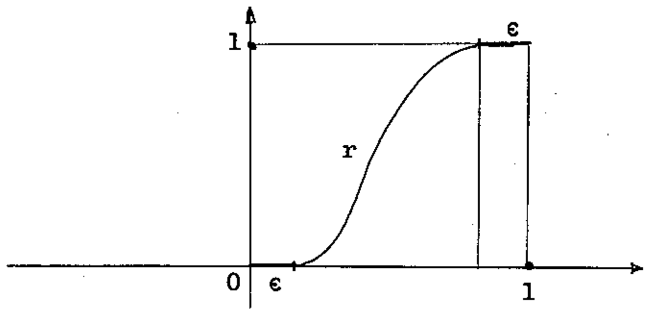
$$f_i: A \to B.$$

Dizemos que f_o é diferenciavelmente homotópica a f_1 se existe uma aplicação diferenciável

$$F: A \times I \to B$$

tal que $F(x,0) = f_o(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$.

Se f_o e f_1 são diferenciavelmente homotópicas é sempre possível escolher F com a propriedade $F(x,t) = f_o(x)$ para $0 \leq t < \epsilon$ e $F(x,t) = f_1(x)$ para $1-\epsilon < t \leq 1$. com $0 < \epsilon < 1/2$. Se H é uma homotopia diferenciável qualquer, basta considerar a função $r: [0,1] \to [0,1]$ com o gráfico como abaixo.



e tomar $F(x,t) = H(x,r(t))$.

Com a observação acima é fácil provar que a relação de homotopia diferenciável entre funções é uma relação de equivalência.

(7.2) Definição. Sejam f_o, f_1: $A \to B$ difeomorfismos.

Dizemos que f_o e f_1 são diferenciavelmente isotópicas se existe uma homotopia diferenciável F entre f_o e f_1 tal que para cada t fixo, $F(\ ,t)$: $A \to B$ é um difeomorfismo.

A relação de isotopia diferenciável também é de equivalência.

(7.3) Proposição. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, com M compacta e sem bordo. Se f e g: $M \to N$ são diferenciavelmente homotópicas e $y \in N$ é valor regular de ambas estas funções, então vale:

$$\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Demonstração: Seja F: $M\times[0,1] \to N$ homotopia diferenciável entre f e g. Suponhamos, por um momento, que y seja também valor regular de F. Então $F^{-1}(y)$ é variedade diferenciável de dimensão 1 com bordo e

$$\partial F^{-1}(y) = (f^{-1}(y)\times 0) \cup (g^{-1}(y)\times 1).$$

Veja (6.4) e observe que

$$\partial(M\times[0,1]) = (M\times 0) \cup (M\times 1).$$

Assim sendo, o número de pontos em $\partial F^{-1}(y)$ é igual a $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$, mas $F^{-1}(y)$ sendo variedade compacta de dimensão 1, deve ter um número par de pontos de bordo (6.5). Logo $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$ é par e portanto

$$\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Utilizamos o fato de y ser também valor regular de F. Isto porém não impõe restrição alguma, pois dado y valor regular de f e g, existe vizinhança V de y em N tal que $\#f^{-1}$ e $\#g^{-1}$ são constantes em V e como o conjunto dos valores regulares de F é denso em N podemos tomar $z \in V$ valor regular de F e $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z)$ e $\#g^{-1}(y) = \#g^{-1}(z)$. Logo podemos substituir y por z e a demonstração acima passa a ser geral e está demonstrada a proposição.

Pela definição de variedade diferenciável M sem bordo, sabemos que dois pontos quaisquer de M não podem ser distinguidos por suas propriedades locais, pois eles admitem vizinhanças difeomorfas. O lema que veremos a seguir, diz mais ainda, que dois pontos quaisquer de M não podem ser distinguidos pelos seus relacionamentos globais com a variedade se M é conexa, pois existe sempre um difeomorfismo (global) que leva um dos pontos no outro. E ainda tais difeomorfismos são particulares.

(7.4) Lema. Sejam N variedade diferenciável (com ou sem bordo) conexa e x e y pontos interiores de N. Então existe um difeomorfismo $f: N \to N$, diferenciavelmente isotópico à identidade e tal que $f(x) = y$.

Demonstração: Seja (U,h) carta local de N com $h(U)$ sendo bola de $\mathbb{R}^n$. Vamos supor que o lema seja válido sempre que os dois estiverem numa carta local como esta, isto é, x e $y \in U$. Vamos então provar o lema no caso geral. Fixemos x no interior de N e consideremos o conjunto de todos os pontos do interior de N que são levados em x por tais difeomorfismos de N. Tal conjunto é aberto pelo que acabamos de supor. Se variarmos agora x no interior de N obtemos uma partição o interior de N de conjuntos abertos. Como N é conexa, pode existir apenas um tal conjunto, logo vale o lema. Falta agora verificarmos o caso particular do lema, isto é, x e y numa carta local como acima. Basta então considerarmos $N = \mathbb{R}^n$ e $U = B$ como sua bola unitária, $x = 0$ e $y \in B$ e procurarmos um difeomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciavelmente isotópico à identidade e tal que f coincida com a identidade no complementar de B e $f(0) = y$. Queremos então definir um certo "movimento" em $\mathbb{R}^n$ que leve 0 em y e deixe os pontos fora de B fixos.

Vamos definir tal movimento, dando as velocidades com que os pontos devem mover-se, ou seja, vamos dar um campo de vetores de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$. Como queremos que 0 chegue em y, vamos tomar todos os vetores com direção e sentido de y. Para tal consideramos uma função diferenciável

$$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

satisfazendo

$$g(x) > 0 \quad \text{para} \quad \|x\| < 1$$
$$g(x) = 0 \quad \text{para} \quad \|x\| \geq 1$$

Tal função pode ser obtida pelo Exemplo (1.6). Tomamos agora o vetor y e definimos o campo v de vetores do $\mathbb{R}^n$ por

$$v(x) = y\, g(x).$$

As trajetórias serão então as soluções das equações diferenciais

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x)$$

onde i indica a i-ésima componente. Para cada $z \in \mathbb{R}^n$ este sistema tem uma única solução $s_z(t)$ definida em $\mathbb{R}$

e satisfazendo $s_z(0) = z$ e ainda a função $s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $s(z,t) = s_z(t)$ é diferenciável. Para cada t, a função $z \longmapsto s(z,t)$ é difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ e para algum instante t_1 temos $s(0,t_1) = y$. Logo $s(\ ,t_1)$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ que leva 0 em y e deixa o complementar da bola unitária B fixo. Observe que $s(z,0) = z$, logo o próprio s é a homotopia diferenciável (num certo intervalo) que dá a isotopia entre a identidade do $\mathbb{R}^n$ e $s(\ ,t_1)$ que leva 0 em y, como queríamos.

(7.5) <u>Teorema</u>. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, com M compacta e sem bordo e N conexa. Seja $f: M \to N$ diferenciável. Se y e z são valores regulares de f temos que

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \pmod 2.$$

<u>Demonstração</u>: Seja $d: N \to N$ difeomorfismo isotópico à identidade e que leva y em z, $d(y) = z$. A existência de d está assegurada pelo Lema (7.4). Então $d \circ f$ tem z como valor regular e $d \circ f$ é diferenciavelmente homotópica a f (basta deformar d à identidade). Pela Proposição (7.3) temos

$$\# (d \circ f)^{-1}(z) = \# f^{-1}(z) \pmod 2$$

mas

$$(d \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(d^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$$

logo

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \pmod 2$$

como queríamos.

Este teorema diz então, que a função $\# f^{-1}$, definida nos valores regulares de f, é sempre par ou sempre ímpar, quando a variedade N é conexa. O inteiro $\# f^{-1}(y) \pmod 2$ está assim associado apenas à função f e não ao particular valor regular y.

(7.6) <u>Definição</u>. Chamamos $\# f^{-1}(y) \pmod 2$ de grau, módulo z, da aplicação f (com y sendo valor regular de f) e denotamos

$$\# f^{-1}(y) = \deg_2(f).$$

(7.7) <u>Corolário</u>. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, com M compacta, sem bordo e N conexa. Se f e $g: M \to N$ são diferenciavelmente homotópicas então

$$\deg_2(f) = \deg_2(g).$$

<u>Demonstração</u>: Exercício. Utilize o Teorema de Sard e os resultados acima.

Conseguimos então associar inteiros (mod 2) a funções diferenciáveis, como acima. Estes inteiros estão de fato associados às classes de homotopia diferenciável das funções. Obtemos então que se $\deg_2(f) \neq \deg_2(g)$ f não é diferenciavelmente homotópica a g. Por exemplo, seja M variedade diferenciável compacta sem bordo, conexa e de dimensão positiva. Uma aplicação constante $c: M \to M$ tem grau zero enquanto que a identidade $id: M \to M$ tem grau 1, portanto id não é diferenciavelmente homotópica a c.

A maneira de associarmos invariantes numéricos a funções diferenciáveis, como acima, embora mostre-se já bastante bem sucedida, permite ainda um refinamento com alguma restrição. Vejamos primeiramente um exemplo. Consideremos a esfera unitária S^2 de dimensão dois e duas aplicações diferenciáveis que são a identidade e a antípoda

$$id: S^2 \to S^2; \quad id(x) = x$$
$$a: S^2 \to S^2; \quad a(x) = -x$$

Vemos de imediato que os graus (mod 2) de ambas são iguais

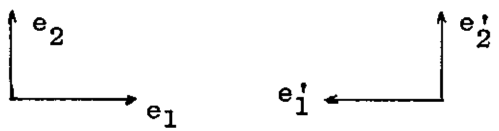
$$\deg_2(id) = \deg_2(a).$$

Conhece-se entretanto argumentos que mostram que estas funções não são homotópicas. Esta noção de grau ainda confunde facilmente funções que não são homotópicas. É possível introduzir uma noção de grau, utilizando-se a orientação que se pode dar a certas variedades, e que dá mais informação sobre a função. A nova noção de grau distinguirá as funções id e a acima.

Vejamos então a noção de orientação para variedades diferenciáveis. Primeiramente para um espaço vetorial.

(7.8) <u>Definição</u>. Sejam $(e_1,\ldots,e_n)$ e $(f_1,\ldots,f_n)$ bases de um espaço vetorial E, sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que elas determinam a mesma orientação de E se a transformação linear que leva e_i em f_i, tem determinante positivo. Tal relação é de equivalência e determina apenas duas classes de equivalências a que chamamos de orientações de E. Para termos E orientado basta então escolhermos uma base de E. Se E tem dimensão nula, permitimos que E seja orientado positivamente (+1) ou negativamente (-1).

<u>Exemplo</u>. Podemos orientar o plano $\mathbb{R}^2$ de duas maneiras diferentes escolhendo uma das bases abaixo:



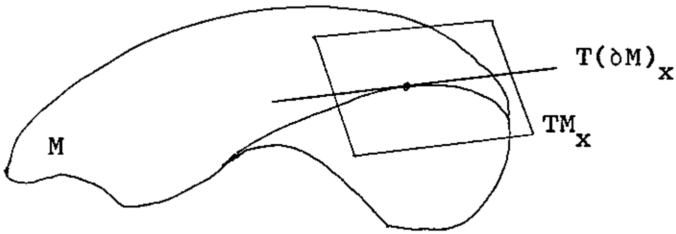
(7.9) Definição. Uma orientação em uma variedade diferenciável M^n é uma escolha de orientação nos espaços tangentes a M em cada um de seus pontos, de tal modo que a seguinte condição seja satisfeita: Para cada x de M existe uma carta local (U,h) com $x \in U$ tal que $Dh(x)$ leve a orientação escolhida em TM_x, na orientação de $\mathbb{R}^n$ dada por sua base canônica. Se a variedade M tem dimensão zero, dispensa-se esta condição.

Observe que esta definição é equivalente a dizer-se que existe uma cobertura de M^n por cartas locais tais que a transformação de coordenadas, entre duas quaisquer destas cartas, tem a derivada com determinante positivo.

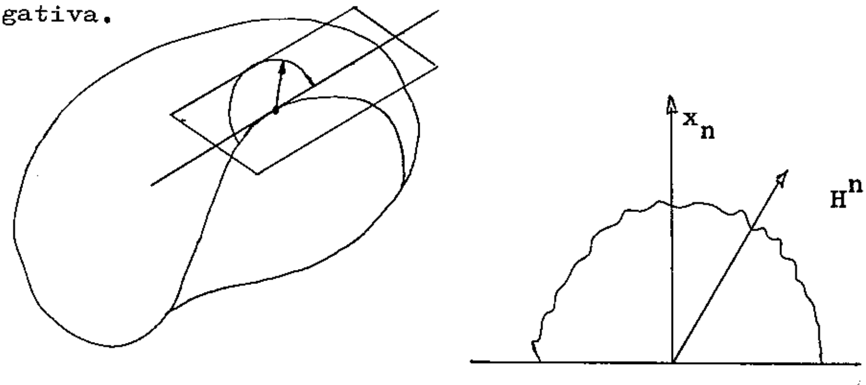
Nem toda variedade diferenciável admite orientação, como por exemplo a faixa de Moebius, a garrafa de Klein, os espaços projetivos reais de dimensão par.

É fácil ver que as variedades conexas e orientáveis admitem exatamente duas orientações.

Seja M variedade diferenciável de dimensão n e com bordo, $\partial M \neq \emptyset$. Sabemos que ∂M é variedade diferenciável (sem bordo) de dimensão $n-1$. Seja $x \in \partial M$ e (U,h) carta local com $x \in U$. Temos então que h toma valores em H^n e que $h(x) \in \partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$. Podemos então considerar os espaços tangentes $T(\partial M)_x$ e TM_x e sabemos que o primeiro é subespaço de dimensão $(n-1)$, do segundo e portanto divide este em dois semi-espaços



Chamamos de vetores internos de M em x a aqueles $v \in TM_x$ tais que $Dh(x)(v)$ tem a n-ésima coordenada positiva, e de externos aqueles que tem a mesma negativa.

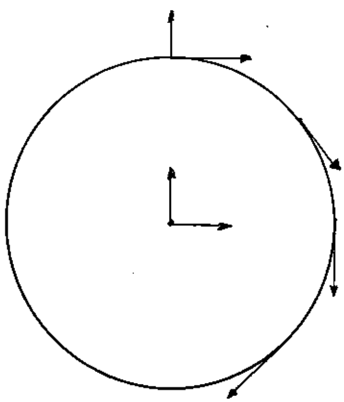


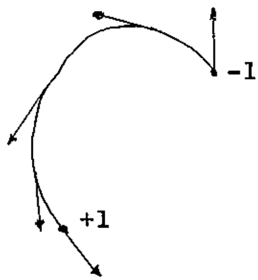
<u>Exercício</u>. Verifique que esta definição de vetores internos (ou externos) não depende da carta local fixada.

Sejam M^n variedade diferenciável com bordo $\partial M \neq \emptyset$, e uma orientação de M fixada. Então ∂M é variedade orientável e a orientação de M induz uma orientação em ∂M que definimos do seguinte modo. Seja $x \in \partial M$, escolhemos uma base $(v_1,\ldots,v_n)$ de TM_x dada pela orientação de M e tal que v_1 é vetor externo e $(v_2,\ldots,v_n)$ é base de $T(\partial M)_x$. Assim sendo, a escolha de $(v_2,\ldots,v_n)$ para cada $x \in \partial M$ determina uma orientação de ∂M, que chamamos então de induzida pela de M.

Exercício. Verifique que esta escolha de bases para $T(\partial M)_x$ dá realmente uma orientação a ∂M segundo a Definição (7.9).

Se M tem dimensão 1, ∂M é formado de pontos isolados e adotamos a convenção de que a orientação de $x \in \partial M$ é $+1$ se o vetor de orientação de M em x é externo e -1 se o mesmo é interno.





(7.10) O grau de Brouwer.

Veremos agora um refinamento da noção de grau, como havíamos mencionado. Este será definido somente para aplicações diferenciáveis entre variedades diferenciáveis orientadas.

(7.11) Sejam M e N variedades diferenciáveis orientadas de mesma dimensão, ambas sem bordo, com M compacta. Seja

$$f: M \to N$$

aplicação diferenciável, $x \in M$ ponto regular de f. Observe que, nestas condições, $Df(x)$ é isomorfismo entre os espaços tangentes em x e em $f(x)$. Dizemos que f preserva a orientação em x se $Df(x)$ leva uma base de TM_x, da orientação de M, numa base de $TN_{f(x)}$ da orientação de N. Se isto não acontece, dizemos que f inverte, ou não preserva a orientação em x.

(7.12) Definição. Com as notações e observações acima (7.11), seja $y \in N$ valor regular de f. A cada $x \in f^{-1}(y)$ associamos o valor $sDf(x) = 1$ se $Df(x)$ preserva a orientação e $sDf(x) = -1$ se $Df(x)$ inverte a orientação. Pomos então para cada valor regular y de f

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sDf(x),$$

que chamamos de grau de f em y. Observe que $f^{-1}(y)$ tem um número finito de pontos, como antes, pois M é compacta.

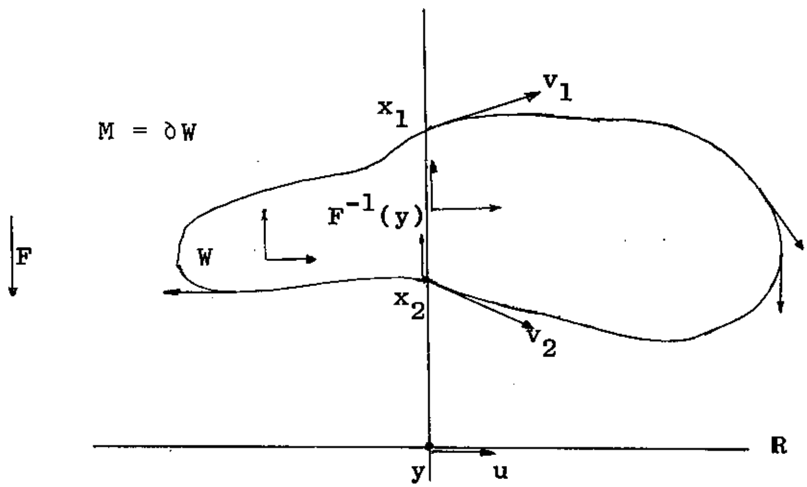
Se trocarmos a orientação de M ou de N (não de ambas) colocando a orientação oposta, o grau muda apenas de sinal. Se f preserva a orientação em x, o mesmo ocorrerá numa vizinhança de x e analogamente para o caso de f inverter a orientação. Como M é compacta, sabemos de (5.19) que $\# f^{-1}$ é localmente constante. Pelo que dissemos, os sinais associados a cada ponto de $f^{-1}(y)$ preservam-se em vizinhanças também, logo $\deg(f,y)$ é localmente constante (para M compacta) e está definida no conjunto dos valores regulares de f que é denso e aberto em N.

Queremos agora provar, para esta noção de grau, teoremas análogos ao que vimos para $\deg_2 f$. Vamos inicialmente a dois lemas.

(7.13) <u>Lema</u>. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão n, orientadas, sem bordos, com M compacta. Seja $f\colon M \to N$ aplicação diferenciável e $y \in N$ valor regular de f. Se f extende-se a uma aplicação diferenciável $F: W \to N$ onde W é variedade diferenciável com $\partial W = M$, então

$$\deg(f,y) = 0.$$

Demonstração:



O que ocorre na figura acima, com relação ao grau, ocorre no caso geral. Analisemos este desenho. Suponhamos que a orientação de W seja dada pela base canônica do plano. Esta induz em M a orientação desenhada (sentido horário). Consideremos F como sendo a projeção de W em R. Sendo F projeção ela é linear e portanto "coincide" com sua derivada. Tomemos u como dando a orientação de R e v_1 vetor tangente a M em

x_1 e tal que $DF(x_1)(v_1) = u$. Portanto $f = F/M$ preserva a orientação em x_1. Observemos agora que o vetor tangente a M em x_2, que é levado por F em u, é oposto à orientação de M. Logo f inverte a orientação em x_2. Assim sendo, a contribuição dos pontos x_1 e x_2 para o grau $\deg f$ é nula.

Vejamos agora o argumento geral. Suponhamos que y seja também valor regular de F. Sabemos então que $F^{-1}(y)$ é variedade diferenciável de dimensão 1 e como já informamos em (6.5) esta deve ser composta de "círculos" e "arcos" com extremidades em $\partial W = M$, por (6.4). Observe então que $f^{-1}(y)$ é formado exatamente pelas extremidades dos arcos em $F^{-1}(y)$. Temos pois, que $f^{-1}(y)$ tem um número par de pontos, já que cada arco possui duas extremidades. Verificaremos que cada duas destas extremidades se cancelam em $\deg(f,y)$ sendo portanto a soma total nula.

Sejam então $S \subset F^{-1}(y)$ um arco com extremidades x_1 e x_2. Vamos dar uma orientação a S do seguinte modo: dado $x \in S$ consideramos uma base $(u_1,\ldots,u_{n+1})$ de TW_x dada pela orientação de W, com u_1 tangente a S em x e tal que $DF(x)$ deve $(u_2,\ldots,u_{n+1})$ numa base da orientação de N em $F(x)$. Nestas condições, a escolha de u_1 para cada $x \in S$ dá a orientação que que ríamos em S. Como uma função diferenciável é, a menos de difeomorfismos, igual a uma projeção em uma vizinhança de um ponto regular, temos que a escolha de u_1 para cada ponto de S é de fato uma orientação. Logo se u_1 é vetor interior de W, digamos em x_2, então deverá ser exterior em x_1. Então, segundo a escolha que fizemos, quando passamos da base de TM_{x_1} dada por $(u_2,\dots,u_{n+1})$ para a base de TM_{x_2} dada por $(u_2',\dots,u_{n+1}')$, percorrendo ao longo de S, obtemos que em x_1 ela é a orientação induzida em M mas em x_2 não é. Assim sendo f preserva a orientação em x_1 e inverte em x_2, portanto

$$sDf(x_1) + sDf(x_2) = 0$$

e portanto

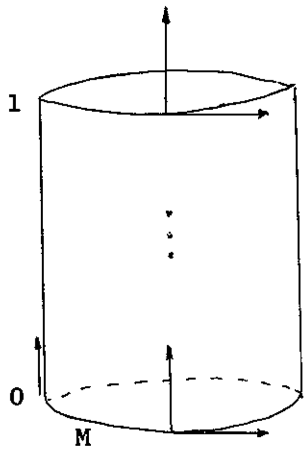
$$\deg(f,y) = 0.$$

Falta ainda analizarmos o caso em que y não é valor regular de F (mas sim de f). Pelo Teorema de Sard, o conjunto dos valores regulares de F, é denso em N. Sabemos que $\deg(f,y)$ é localmente constante, isto é, existe vizinhança V de y em N tal que para cada $z \in V$ temos $\deg(f,z) = \deg(f,y)$. Mas V encontra os valores regulares de F, logo podemos tomar $z \in V$ e sendo valor regular de F e a demonstração acima aplica-se e temos demonstrado o Lema (7.13).

(7.14) Lema. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, sem bordos, orientadas, com M compacta e f e $g: M \to N$ aplicações diferenciavelmente homotópicas através de uma homotopia $F: M\times[0,1] \to N$, $f(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$. Nestas condições, se y é valor regular de f e de g temos

$$\deg(f,y) = \deg(g,y).$$

Demonstração: $M \times [0,1]$ é variedade diferenciável com bordo igual a $(M\times 0) \cup (M\times 1)$



Escolhemos a orientação de $[0,1]$ dada por vetores no sentido positivo. A orientação de M juntamente com esta de $[0,1]$ permite-nos dar uma orientação a $M \times [0,1]$ de modo natural. Esta induz em $M\times 1$ a orientação de M e em $M\times 0$ a orientação oposta. Veja a figura acima. Assim sendo, o grau da restrição de F a $\partial(M \times [0,1])$, num valor regular y é igual à diferença

$$\deg(g,y) - \deg(f,y).$$

Segundo o lema anterior (7.13), este grau deve ser nulo e portanto

$$\deg(g,y) = \deg(f,y).$$

Nos argumentos apresentados até agora, não necessitamos da hipótese de N ser conexa, pois sempre nos referimos a um valor regular y, isto é, até agora o grau está associado ao par (f,y) onde y é valor regular de f. Do mesmo modo como foi feito para a noção de grau (mod 2), vamos agora procurar livrarmo-nos do valor regular. Para isso precisamos da hipótese do contradomínio de f ser conexo. O caminho a seguir é idêntico ao que foi feito para $\deg_2(f)$.

(7.15) <u>Teorema</u>. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, sem bordos, orientadas, M compacta e N conexa. Seja $f: M \to N$ aplicação diferenciável. Então $\deg(f,y)$ tem o mesmo valor para todo valor regular y de f.

<u>Demonstração</u>: Sejam y e z valores regulares de f.

Por (7.4) existe um difeomorfismo $d: N \to N$, diferenciavelmente isotópico à identidade e tal que $d(y) = z$. Por ser isotópico à identidade, d preserva a orientação de N. Temos que

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(d^{-1}(d(y))) = (df)^{-1}(d(y)).$$

Então vale

$$\deg(f,y) = \deg(df,d(y)).$$

Como f é diferenciavelmente homotópica a df temos

$$\deg(df,z) = \deg(f,z)$$

pelo Lema (7.14). Então

$$\deg(f,y) = \deg(f,z)$$

como queríamos.

Temos então que, para contradomínio de f conexo, o inteiro $\deg(f,y)$ não depende do valor regular y de f e está associado à função apenas. Pomos

$$\deg(f) = \deg(f,y).$$

O próximo teorema é agora imediato.

(7.16) Teorema. Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão, sem bordos, orientadas, M compacta e N conexa. Se f e $g: M \to N$ são diferenciavelmente homotópicas então ambas tem o mesmo grau:

$$\deg(f) = \deg(g).$$

Demonstração: Basta escolher um valor regular y comum para f e g e usarmos (7.14). Podemos em seguida abandonar y graças a (7.15) e temos o teorema.

Exemplos

1. Consideremos o círculo S^1 de centro 0 e raio 1, isto é, os números complexos de norma 1. Seja

$$f: S^1 \to S^1$$

dada por $f(z) = z^k$ onde k é número inteiro. Temos então que

$$\deg(f) = k.$$

Se $k = 0$ f é constante logo $\deg(f) = 0$

Se $k > 0$ $f(z)$ percorre S^1 no mesmo sentido que z cobrindo S^1 k-vezes.

Se $k < 0$ o sentido de percurso inverte porém cobrindo novamente k-vezes.

2. Seja N compacta, sem bordo, orientada e conexa.

Um difeomorfismo de N tem grau $+1$ ou -1 respectivamente se preserva ou inverte a orientação. Pelo que já vimos podemos dizer que se um difeomorfismo tem grau -1 ele não pode ser homotópico à identidade.

Seja S^n a esfera de centro 0 e raio 1 em R^{n+1}. Consideremos o difeomorfismo de S^n dado por uma reflexão

$$r_i: S^n \to S^n$$

$$r_i(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_{n+1})$$

Este tem grau -1 $\deg(r_i) = -1$.

A composição de um número par destas reflexões preserva a orientação e a de um número ímpar, inverte a orientação. Como a aplicação antípoda de S^n, é a composição de $(n+1)$ reflexões, temos que

$$\deg(\text{antípoda}) = (-1)^{n+1}.$$

Portanto esta nova noção de grau, distingue a aplicação antípoda da identidade, em esferas de dimensão par, como já comentamos. E mais ainda, neste caso a antípoda não é diferenciavelmente homotópica à identidade.

Com esta noção de grau podemos provar que as esferas de dimensão par, não admitem campos tangentes de vetores não nulos.

Um campo vetorial diferenciável tangente a S^n é uma aplicação diferenciável

$$v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

tal que, $v(x)$ é tangente a S^n no ponto x, isto é, $\langle x, v(x)\rangle = 0$. Vamos demonstrar, por absurdo, que um tal campo de vetores tem que se anular em algum ponto se n é par. Suponhamos que v não é nulo em nenhum ponto. Dividindo pela norma, podemos então supor que $v(x)$ tem comprimento 1 para todo x, isto é, temos de fato a aplicação

$$v\colon S^n \to S^n$$

com $\langle x, v(x)\rangle = 0$. Com o auxílio de v podemos agora definir uma homotopia diferenciável entre as aplicações identidade e antípoda de S^n, da seguinte maneira:

$$F\colon S^n \times [0,1] \to S^n$$

$$F(x,t) = x \cos t\pi + v(x) \operatorname{sen} t\pi .$$

Temos então que $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = -x$, mas pelo comentário do Exemplo 2 acima isto não pode acontecer quando n é par. Logo nas esferas de dimensão par não existe campo vetorial diferenciável tangente que não se anule em nenhum ponto.

Exercício

Seja $f: S^n \to S^n$ aplicação diferenciável. Prove que se n é par e f é diferenciavelmente homotópica à identidade então f tem ponto fixo, isto é, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = x$.

8. Campos de vetores e número de Euler

Vamos agora apresentar uma aplicação da noção de grau de modo resumido e fazer alguns comentários sobre o Teorema de Poincaré-Hopf que relaciona singularidades de campos vetoriais numa variedade com sua topologia.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um campo de vetores diferenciável em U é apenas uma aplicação diferenciável

$$v: U \to \mathbb{R}^n.$$

Por causa dos aspectos que se estuda neste tema, os pontos de U que vão no $0 \in \mathbb{R}^n$ passam a desempenhar papel importante. Chamamos tais pontos de singularidades do campo v. Uma singularidade é isolada se ela é um ponto isolado no conjunto de todas as singularidades de v.

Seja $z \in U$ singularidade isolada de v. Sabemos então que existe um disco fechado D_ε de raio $\varepsilon > 0$ e centro z tal que v não se anula em nenhum ponto de D_ε distinto de z. Podemos então definir a seguinte função na esfera S_ε que é a fronteira de D_ε, com valores em S^{n-1}.

$$\tilde{v}_\varepsilon : S_\varepsilon \to S^{n-1}$$
$$\tilde{v}_\varepsilon(x) = v(x)/\|v(x)\|.$$

Se tomarmos δ com as mesmas propriedades que ε obtemos $\tilde{v}_\delta$ que é diferenciavelmente homotópica a $\tilde{v}_\varepsilon$ (basta deformar radialmente S_ε em S_δ). Assim sendo $\tilde{v}_\varepsilon$ e $\tilde{v}_\delta$ tem o mesmo grau. Podemos então definir índice de uma singularidade.

(8.1) <u>Definição</u>. Com as notações acima, chamamos de índice de v na singularidade isolada z, ao grau da aplicação $\tilde{v}_\varepsilon$ e denotamos com $\mathrm{ind}(v,z)$

$$\mathrm{ind}(v,z) = \deg(\tilde{v}_\varepsilon).$$

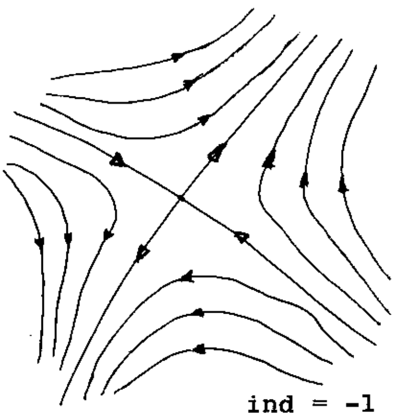
As orientações que assumimos para S_ε e S^{n-1} são as dadas pela base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Com $\mathbb{R}^2$ como o plano complexo e k inteiro positivo. A função z^k define em $\mathbb{R}^2$ um campo vetorial diferenciável com uma singularidade isolada na origem, de índice k. Se tomarmos z^{-k} teremos a singularidade com índice -k. Basta ver qual o grau desta função restrita ao círculo unitário.

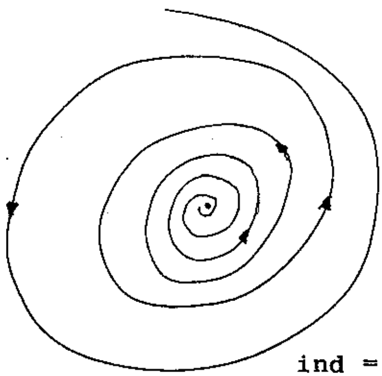
Dado um campo de vetores v como acima, podemos formular a seguinte equação diferencial

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1,\ldots,x_n); \quad i=1,\ldots,n$$

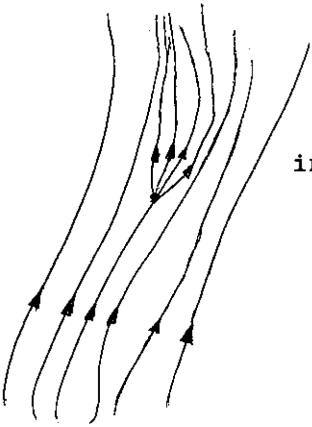
isto é, quais as curvas que tem para vetores tangentes os vetores do campo v. Tais curvas são chamadas curvas integrais de v. Podemos então dar um campo através de curvas integrais. Nas figuras abaixo esboçamos alguns campos através de curvas integrais e indicamos seus índices.



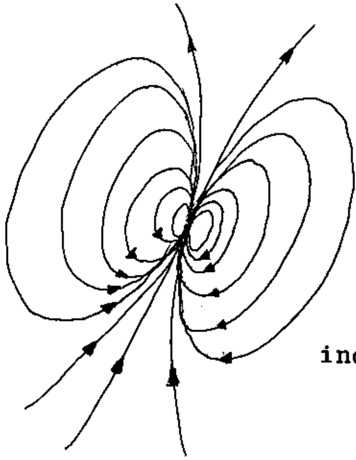
ind = -1



ind = +1



ind = 0



ind = 2

(8.2) <u>Definição</u>. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade diferenciável. Um campo de vetores tangentes a M diferenciável é uma aplicação diferenciável $v\colon M \to \mathbb{R}^n$ tal que $v(x) \in TM_x$.

Um ponto $x \in M$ é uma singularidade de v se $v(x) = 0$. Queremos também introduzir a noção de índice de uma singularidade isolada de v em M. Para tal, precisamos provar que a definição de índice dada em (8.1) é invariante por difeomorfismos num sentido que precisaremos abaixo.

Seja $f\colon U \to V$ aplicação diferenciável entre dois abertos de espaços euclideanos. Sejam u e v campos vetoriais diferenciáveis em U e V respectivamente.

Dizemos que u corresponde a v (por f), se para cada $x \in U$ tivermos

$$Df(x)(u(x)) = v(f(x)).$$

Se $Df(x)$ é isomorfismo para cada $x \in U$ então u fica determinado por v. Em particular, se f é difeomorfismo temos

$$v(y) = Df(f^{-1}(y))(u(f^{-1}(y)))$$

e anotamos abreviadamente com

$$v = Df \circ u \circ f^{-1}.$$

Se f é um difeomorfismo como acima, então os índices de u e v são os mesmos. Para provarmos tal fato utilizaremos o seguinte resultado.

(8.3) <u>Lema</u>. Qualquer difeomorfismo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva a orientação canônica, é diferenciavelmente isotópico à identidade.

<u>Demonstração</u>: Podemos supor $f(0) = 0$. Como a derivada de f em 0 é isotópica à identidade, basta definirmos

$$F\colon \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

por

$$F(x,t) = f(tx)/t \quad \text{para} \quad 0 < t \leq 1$$

e

$$F(x,0) = Df(0)(x),$$

ou seja, f é isotópica à sua derivada no ponto 0. Para provarmos que F é diferenciável, vamos escrever f numa forma conveniente.

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x)$$

onde $g_1, \dots, g_n$ são funções diferenciáveis. Tal decomposição pode ser obtida do seguinte modo

$$f(x) = \int_0^1 Df(tx)(x)dt = \int_0^1 \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)(x_i)dt =$$

$$= \sum_i x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt,$$

isto é, basta tomar $g_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$. Observe que $g_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Vamos agora provar que F é diferenciável.

$$F(x,t) = x_1 g_1(tx) + \dots + x_n g_n(tx) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1$$

portanto é diferenciável e

$$F(x,1) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x) = f(x)$$

$$F(x,0) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) = Df(0)(x);$$

(veja (3.7)) como queríamos.

(8.4) <u>Lema</u>. Sejam $f: U \to V$ difeomorfismo, u e v campos de vetores diferenciáveis em U e V respectivamente. Se u corresponde a v, por f, isto é $v = Df \circ u \circ f^{-1}$ então o índice de u numa singularidade isolada $x \in U$ é igual ao índice de v em $f(x)$

$$\operatorname{ind}(u,x) = \operatorname{ind}(v,f(x)).$$

<u>Demonstração</u>: Podemos assumir que U é convexo e que $x = 0 = f(x)$. Suponhamos primeiramente que f preserva a orientação. Podemos então construir, como em (8.3), uma isotopia diferenciável $H: U \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $H(x,0) = x$, $H(x.1) = f(x)$ e $H(0,t) = 0$ para todo t. Anotemos com u_t o campo de vetores

$$u_t = Df_t \circ u \circ f_t^{-1}$$

onde f_t é o difeomorfismo dado por $H(\ ,t)$. Os campos de vetores u_t estão definidos, em particular, numa esfera de raio suficientemente pequeno, de centro 0. Logo o índice de $u = u_o$ é igual ao índice de $v = u_1$, em 0, pois estes índices são graus de aplicações diferenciavelmente homotópicas.

Agora se f não preserva a orientação então f é isotópica a uma reflexão r (conseqüência de (8.3)). Então

$$v = r \circ u \circ r^{-1}$$

e a função $\tilde{v}_\varepsilon(x) = v(x)/\|v(x)\|$ definida numa esfera de raio $\varepsilon > 0$, como em (8.1), satisfaz

$$\tilde{v}_\varepsilon = r \circ \tilde{u}_\varepsilon \circ r^{-1}$$

o que mostra que $\tilde{v}_\varepsilon$ e $\tilde{u}_\varepsilon$ tem o mesmo grau e portanto os campos u e v tem o mesmo índice em 0, como queríamos.

O Lema (8.4) permite-nos definir índice para campos em variedades, isto é, podemos agora definir através de uma carta local e (8.4) nos garante que tal definição será independente da mesma.

(8.5) <u>Definição</u>. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade diferenciável e $v: M \to \mathbb{R}^n$ campo de vetores tangentes diferenciável. Seja $x \in M$ singularidade isolada de v. Consideremos uma carta local $h: U \to M$ em torno de x. Definimos o índice de v em x como sendo o índice do campo correspondente $Dh^{-1} \circ v \circ h$, em $h^{-1}(x)$.

Se v é campo vetorial e permitimos que v tenha singularidades não isoladas, então v torna-se realmente bastante geral. As propriedades de v em torno de um ponto podem não ter interferência nenhuma com as em torno de outro ponto. Se pedirmos porém, que todas as singularidades de v sejam isoladas, então v passa a comportar-se de modo mais "rígido", por exemplo, propriedades do seu domínio interfere com as propriedades de v, como no seguinte teorema.

(8.6) <u>Teorema</u> (Hopf). Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade diferenciável compacta, com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Seja $v: M \to R^n$ campo diferenciável de vetores tangentes com todas singularidades isoladas e tal que para $x \in \partial M$ $v(x) \neq 0$ e $v(x)$ é exterior. Então a soma dos índices de v é igual ao grau da aplicação

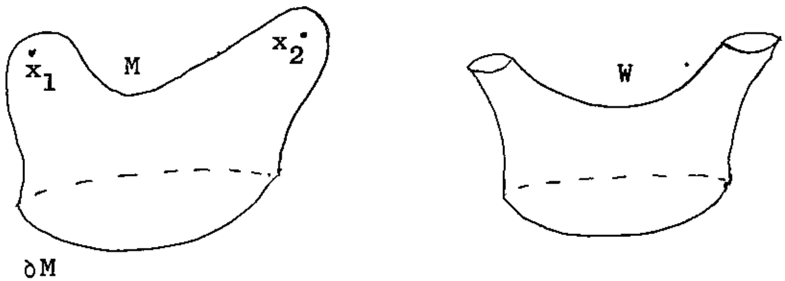
$$g_v: \partial M \to S^{n-1}$$

dada por

$$g_v(x) = v(x)/\|v(x)\|.$$

<u>Demonstração</u>: Como índice foi definido como sendo o grau de uma certa aplicação, a idéia aqui é de ajeitar as coisas de modo a poder utilizar o Lema (7.13).

Como as singularidades de v são isoladas, existe apenas um número finito delas, digamos em $x_1, \ldots, x_k$. Removemos de M, bolas de raio $\varepsilon > 0$ em torno de cada x_i, obtendo então uma variedade W cujo bordo agora é formado por ∂M e mais k "esferas".



Observe que quando orientamos a esfera como bordo do disco, a normal deve ser exterior ao disco, porém as esferas que estão no bordo de W, tem os normais em sentido oposto quando recebem a orientação induzida pela de W.

O campo v não tem então singularidade em W. Consideremos a aplicação

$$g_W: \partial W \to S^{n-1}$$

dada por

$$g_W(x) = v(x)/\|v(x)\|.$$

Como g_W estende-se a W (com a mesma fórmula) podemos utilizar o Lema (7.13) e termos que o grau de g_W é nulo

$$\deg(g_W) = 0.$$

Mas pela maneira como foi construido W e pela observação sobre a orientação das esferas acima, temos que

$$\deg(g_W) = \deg(g_v) - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(v,x_i).$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(v,x_i) = \deg(g_v)$$

como queríamos.

Observemos que se tomarmos um outro campo u, satisfazendo as hipóteses deste teorema, obteremos a aplicação g_u diferenciavelmente homotópica a g_v e portanto os graus de g_v e de g_u são iguais. Para sabermos qual é a soma dos índices de um campo qualquer v que satisfaz as condições deste teorema, basta tomarmos um campo de vetores unitários normais exteriores em ∂M e calcularmos seu grau. Veja portanto que $\Sigma \operatorname{ind}(v,x_i)$ fica totalmente determinada por ∂M. Este é então um teorema já profundo, que mostra a inteferência que a "forma" da variedade tem, nos campos de vetores que ela admite. Neste teorema o importante então não é M mas sim ∂M. O teorema que enunciamos a seguir mostra que a soma dos índices está determinada por propriedades bastante simples da variedade.

(8.7) Teorema de Poincaré-Hopf (sem demonstração)

Seja M^n variedade diferenciável compacta e v campo de vetores tangentes diferenciável com todas suas singularidades isoladas. Então a soma dos índices de v é igual ao número de Euler $\chi(M)$ de M que é dado por

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, rk(H_i(M))$$

onde $H_i(M)$ é o i-ésimo grupo de homologia de M e $rk(H_i(M))$ é o posto de $H_i(M)$.

Este teorema, além de dar o valor da soma dos índices de v, nos diz que tal soma não depende de v e sim apenas da variedade M. Observemos ainda que na definição de v e das singularidades de v utilizamos a estrutura diferenciável de M. Pois bem, o teorema acima nos diz ainda que a soma dos índices, além de não depender do campo, não depende da estrutura diferenciável da variedade M, pois os grupos de homologia $H_i(M)$ estão determinados apenas pela topologia de M. Um bom esboço da demonstração deste teorema é dado em [10].

Exercícios

1. Seja D^3 o disco (fechado) de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^3$ e portanto $S^2 = \partial D^3$. Seja v um campo diferen-

ciável de vetores em D^3 com suas singularidades no interior de D^3 e todas isoladas. Suponhamos que para cada $x \in S^2$, $v(x)$ é vetor exterior. Calcule a soma dos índices de v.

2. Calcule o número de Euler da esfera S^2.

3. Prove que as esferas de dimensão ímpar têm número de Euler nulo. Conclua daí que as variedades do tipo $M \times S^{2n+1}$ também tem número de Euler nulo.

9. Cobordismo de Pontrjagin

Vimos no Capítulo 7 a noção de grau de uma aplicação diferenciável $f: M \to N$ onde pedimos que M e N tenham dimensões iguais. Estudaremos neste capítulo uma generalização da noção de grau introduzida por Pontrjagin onde não mais pedimos que as dimensões de M e N sejam iguais, fixaremos porém o codomínio de f como sendo sempre uma esfera, isto é, vamos generalizar a noção de grau para funções diferenciáveis $f: M \to S^n$ onde M é variedade diferenciável compacta e sem bordo. Pontrjagin introduziu tal noção para estudar, especificamente, classes de homotopia de aplicações entre esferas $S^m \to S^n$.

Seja $f: M \to S^n$ diferenciável e y e $y' \in S^n$ valores regulares de f. Nós estaremos interessados em comparar as duas subvariedades $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(y')$ de M.

(9.1) Definição. Sejam M variedade diferenciável, N e N' subvariedades de M de mesma dimensão, todas estas variedades sem bordos. Dizemos que N é cobordante a N', em M, se o seguinte subconjunto de $M \times I$,

$$N \times [0,\epsilon) \cup N' \times (1-\epsilon,1]$$

pode ser prolongado a uma variedade compacta X,

$$X \subset M \times I$$

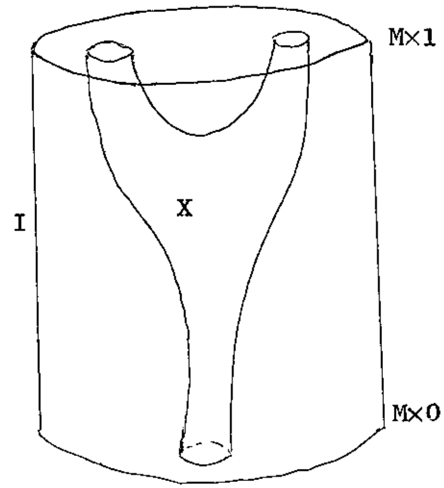
tal que

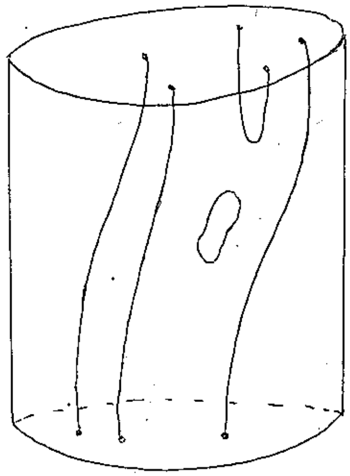
$$\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1$$

e

$$\partial X = X \cap \partial(M \times I)$$

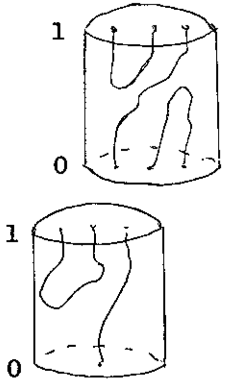
Vemos pela figura a seguir que um círculo é cobordante a dois círculos, em M. Observe que se N e N'

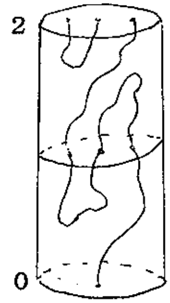




são subconjunto finitos de pontos de M e N é cobordante a N' então a soma dos números de pontos de N e de N' é par, pois deverão ser extremidades de segmentos compactos.

É fácil ver que a relação de ser cobordante é uma relação de equivalência. Para a transitividade basta "emendar e corrigir a escala", veja figura abaixo.



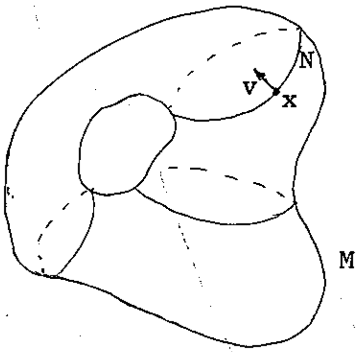


(9.2) Definição. Uma trivialização de uma subvariedade N de M é uma função diferenciável v que a cada $x \in N$ associa uma base

$$v(x) = (v_1(x),\dots,v_k(x))$$

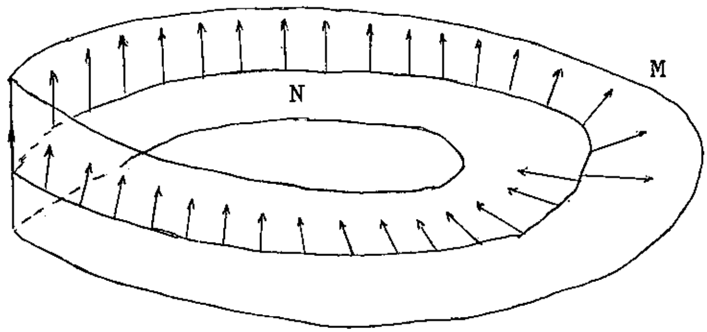
do subespaço normal a TN_x em TM_x.

Cada vetor $v_i(x)$ é tangente a M no ponto x e normal a N em x. Como pedios que formem uma base, nenhum deles pode ser nulo.



Chamamos o par (N,v) de subvariedade trivializada de M.

Nem toda subvariedade admite trivialização, como no caso, por exemplo, do círculo médio da faixa de Moebius



A noção de cobordismo que demos nos permite generalizar o conceito de grau modulo 2. Para incluirmos o grau de Brouwer precisamos de introduzir cobordismo entre subvariedades com trivializações.

(9.3) <u>Definição</u>. Sejam (N,v) e (P,u) subvariedades trivializadas de M. Dizemos que (N,v) é cobordante a (P,u) com trivialização, se existe um cobordismo $X \subset M \times [0,1]$ entre N e P, como em (9.1), e uma trivialização w de $\mathbf{X}$, tal que

$$w_i(x,t) = (v_i(x),0) \quad \text{para} \quad x \in N \quad \text{e} \quad 0 \leq t < \epsilon$$

$$w_i(x,t) = (u_i(x0,1) \quad \text{para} \quad x \in P \quad \text{e} \quad 1-\epsilon < t \leq 1$$

Da mesma forma que antes, o cobordismo com trivialização é uma relação de equivalência.

A intenção aqui é de estudar imagens inversas de valores regulares de funções diferenciáveis, como foi feito com o grau de uma aplicação; só que aqui as dimensões das variedades não precisam ser iguais e portanto tais imagens inversas não precisam ser conjunto de pontos isolados mas sim subvariedades. Consideremos então

$$f\colon M \to N$$

aplicação diferenciável e $y \in N$ valor regular de f. Temos então que $f^{-1}(y)$ é subvariedade de M de dimensão igual a $\dim(M) - \dim(N)$. Subvariedades obtidas desta maneira admitem trivialização, foi por esta razão que demos as Definições (9.2) e (9.3). Vejamos então como definir uma trivialização para $f^{-1}(y)$.

(9.4) Escolhemos uma base $(w_1,\dots,w_n)$ para o espaço tangente a N em y, TN_y. Para cada $x \in f^{-1}(y)$ sabemos que

$$Df(x)\colon TM_x \to TN_y$$

é sobrejetora e tem para núcleo $T(f^{-1}(y))_x$, levando portanto seu complemento ortogonal isomorficamente sobre TN_y. Fazemos então a escolha da trivialização v de $f^{-1}(y)$ assim $v(x) = (v_1(x),\dots,v_n(x))$ tal que cada $v_i(x)$ é normal a $f^{-1}(y)$ no ponto x e

$$Df(x)(v_i(x)) = w_i$$

Denotamos a trivialização v induzida por f e $w = (w_1,\dots,w_n)$, por $v = f^*(w)$. Que tal escolha de v é diferenciável, decorre do teorema da derivada sobrejetora.

Temos então a subvariedade trivializada $(f^{-1}(y), f^*(w))$ que chamamos de variedade de Pontrjagin associada a f e w. Vejamos o que acontece quando trocamos a base w de TN_y por outra w' da mesma classe de orientação que w.

(9.5) Lema. Sejam M e N variedades diferenciáveis, $f: M \to N$ aplicação diferenciável, $y \in N$ valor regular de f, w e w' duas bases de TN_y de mesma orientação. Então as variedades de Pontrjagin $(f^{-1}(y), f^*(w))$ e $(f^{-1}(y), f^*(w'))$ são cobordantes com trivialização.

Demonstração: Primeiramente uma observação a classes de orientação de $\mathbb{R}^n$. Sejam $(e_1,\dots,e_n)$ e $(f_1,\dots,f_n)$ duas bases quaisquer de $\mathbb{R}^n$ de uma mesma classe de orientação. Podemos considerar a matriz $E = [e_1 \dots e_n]$ tendo para i-ésima coluna o vetor e_i. Com a outra base obtemos analogamente uma matriz F.

Temos então que $\det E \neq 0$ e $\det F \neq 0$ e ambos determinantes tem o mesmo sinal isto é E e F estão numa mesma componente conexa de $GL(n,R)$, grupo das matrizes não singulares. Isto nos permite definir um caminho diferenciável

$$[0,1] \xrightarrow{\alpha} GL(n,\mathbb{R})$$

$$\alpha(0) = E \quad e \quad \alpha(1) = F$$

Temos então uma aplicação diferenciável α de $[0,1]$ nas bases de $\mathbb{R}^n$ ligando E a F. O mesmo ocorre para TN_y. Seja então $\alpha(t)$ família diferenciável de bases de TN_y com $t \in [0,1]$ e $\alpha(0) = w$ e $\alpha(1) = w'$.

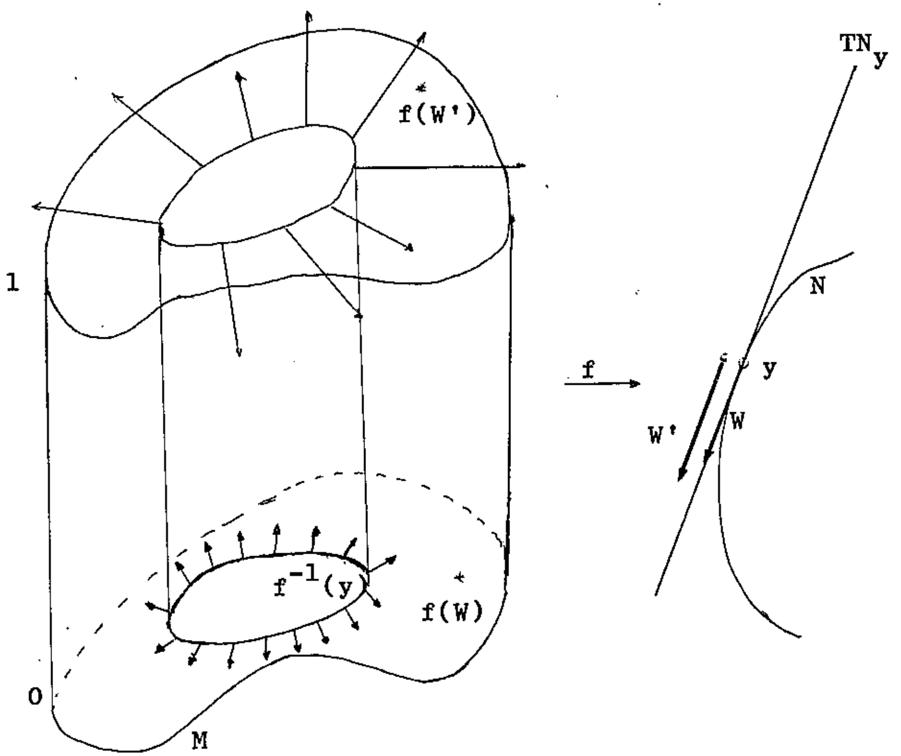
Seja $\alpha(t) = (\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$ base de TN_y no instante t. Queremos definir uma trivialização u para a subvariedade $f^{-1}(y) \times [0,1]$ de $M \times [0,1]$ que induz $f^*(w)$ em $f^{-1}(y) \times 0$ e $f^*(w')$ em $f^{-1}(y) \times 1$. Definimos $u_i(x,t)$ pelas condições

$u_i(x,t)$ tangente a M em x

$u_i(x,t)$ normal a $f^{-1}(y)$ em x

$Df(x)(u_i(x,t)) = \alpha_i(t)$.

E temos então que $(f^{-1}(y),f^*(w))$ e $(f^{-1}(y),f^*(w))$ cobordantes com trivialização.



Este lema nos diz então que a classe de cobordismo com trivialização de $f^{-1}(y)$ não depende da base w que escolhemos em TN_y mas sim apenas da orientação de TN_y determinada por w. Se N é uma variedade orientada, usaremos apenas a notação $f^{-1}(y)$ indicando a subvariedade trivializada $(f^{-1}(y), f^*(w))$ onde w é uma base da orientação de TN_y.

Queremos agora comparar $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$ para dois valores regulares y e z de f. Nós vimos em (5.19) que se M e N tem a mesma dimensão e M é compacta, sem bordo, então o número de pontos $\# f^{-1}(y)$, do conjunto $f^{-1}(y)$ é localmente constante. Vamos agora a uma forma correspondente para nosso caso generalizado.

(9.6) Lema. Sejam M e N variedades diferenciáveis, ambas sem bordos, com M compacta e N orientada. Sejam $f: M \to N$ aplicação diferenciável e $y \in N$ valor regular de f. Então existe uma vizinhança de y formada apenas de valores regulares z de f e $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$ são cobordantes com trivialização.

Demonstração: Sabemos que o conjunto dos valores regulares de f é denso em N, e quando M é compacta, tal conjunto é aberto. Portanto está claro que existe vizinhança de y formado só por valores regulares. Vamos considerar agora uma vizinhança V de y, difeomorfa à bola de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^n$ e V contida no conjunto dos valores regulares de f. Dado um ponto z de V temos um difeomorfismo d de N isotópico à identidade com $d(y) = z$ e que deixa todo ponto de N, fora de V, fixo, como em (7.4). E ainda todo ponto de V permanece em V durante a isotopia e todo ponto fora de V permanece fixo durante a isotopia. Podemos ainda supor que a isotopia d_t satisfaz

$$d_t \text{ é a identidade para } 0 \leq t < \epsilon$$

$$d_t \text{ é igual a } d \text{ para } 1-\epsilon < t \leq 1$$

e sabemos ainda que $d_t^{-1}(z)$ está em V para todo t e portanto é valor regular de f.

Vamos agora definir a função que nos dará o cobordismo. Pomos

$$F: M \times [0,1] \to N$$

$$F(x,t) = d_t f(x)$$

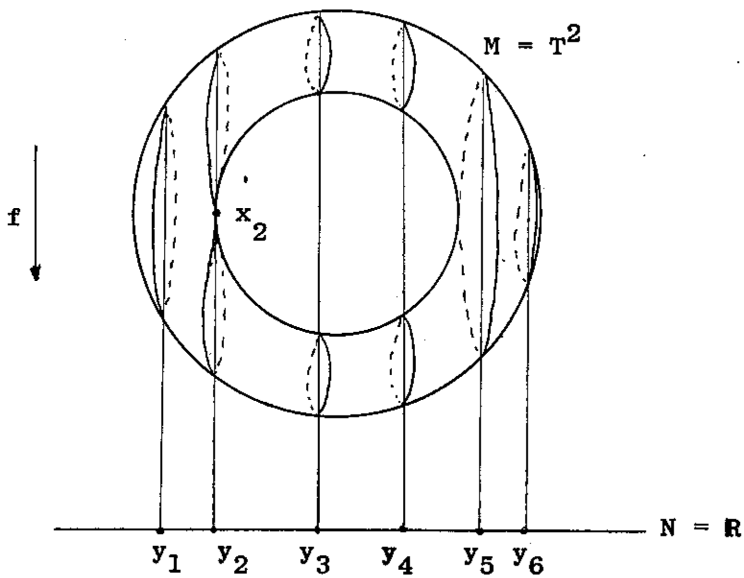
F é diferenciável e para cada t, z é valor regular de $d_t \circ f$ e isto nos diz que a "derivada parcial" de F com relação a x é sobrejetora, logo z é valor regular de F também. Então

$$F^{-1}(z) \subset M \times [0,1]$$

é subvariedade com trivialização que dá o cobordismo entre $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$.

<u>Observação</u>: Estamos interessados apenas no fato de que $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$ são cobordantes, mas é possível aqui, dizer mais; estas duas variedades são real_

mente difeomorfas, para z na vizinhança especificada. A expressão de que $f^{-1}(y)$ é localmente constante é bastante sugestiva. Se y e z são valores regulares de f porém distantes um do outro, ainda temos um difeomorfismo d com algumas das propriedades acima, porém ao irmos de y para z pode acontecer de passarmos por um valor crítico de f e aí não mais podemos garantir que $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$ sejam difeomorfas. Vejamos um exemplo simples, onde não incluiremos as trivializações.



Tomamos M como o toro, N sendo a reta e f a projeção como na figura acima. Temos então que para irmos de y_3 a y_4 não passamos por valores críticos de f e portanto $f^{-1}(y_3)$ é difeomorfa a $f^{-1}(y_4)$, o mesmo ocorrendo com y_5, y_6. Observe agora que $f^{-1}(y_1)$ e $f^{-1}(y_3)$ são cobordantes, mas não difeomorfas e isto pode ocorrer por causa da existência do ponto crítico x_2 e correspondente valor crítico y_2 entre y_1 e y_3.

Como tivemos para a noção de grau, temos aqui o seguinte lema, que além de dar sua informação específica, nos permitirá analizar o caso do lema acima para valores regulares y, z não necessariamente "próximos", como por exemplo os valores regulares y_1 e y_3 da figura acima.

(9.7) <u>Lema</u>. Sejam M e N variedades diferenciáveis, ambas sem bordos, com M compacta e N orientada. Sejam f e $g: M \to N'$ aplicações diferencialmente homotópicas, e y valor regular de ambas. Então $f^{-1}(y)$ e $g^{-1}(y)$ são cobordantes com trivialização.

<u>Demonstração</u>: Seja H homotopia diferenciável de f para g satisfazendo

$$H(x,t) = f(x) \quad \text{para} \quad 0 \leq t < \varepsilon$$
$$H(x,t) = g(x) \quad \text{para} \quad 1-\varepsilon < t \leq 1$$

Seja z valor regular de F suficientemente próximo de y de modo que $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$ sejam cobordantes com trivialização, o mesmó ocorrendo com

$g^{-1}(y)$ e $g^{-1}(z)$. Isto é garantido pelo Lema (9.6). Assim sendo, $F^{-1}(z)$ é um cobordismo com trivialização entre $f^{-1}(z)$ e $g^{-1}(z)$. Por transitividade, $f^{-1}(y)$ e $g^{-1}(y)$ são cobordantes com trivialização.

Podemos agora provar o teorema análogo ao (7.15).

(9.8) Teorema. Sejam M e N variedades diferenciáveis sem bordos, com M compacta, N orientada e conexa, $f: M \to N$ aplicação diferenciável. Então para dois valores regulares y e z quaisquer de f temos que $f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(z)$ são cobordantes com trivialização.

Demonstração: Sejam então y e $z \in N$ valores regulares de f. Como N é conexa, por (7.4) temos que existe um difeomorfismo d de N que é diferenciavelmente isotópico à identidade e tal que $d(y) = z$. Sabemos já que d preserva a orientação de N. Temos então a isotopia d_t com d_0 sendo a identidade de N e $d_1 = d$. Assim sendo temos que f é diferenciavelmente homotópica a $d_1 f$ e pelo lema acima (9.7), $f^{-1}(z)$ é cobordante a $(d_1 f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ com trivialização.

Temos então que a classe de cobordismo com trivialização de $f^{-1}(y)$ não depende do valor regular y de f mas sim está associado apenas a f desde que satisfaça as condições deste Teorema (9.8). O resultado (9.7) nos diz mais ainda, que tal classe de cobordismo está realmente associada à classe de homotopia diferenciável de f.

<u>Exercício</u>. Sejam M variedade diferenciável sem bordo, compacta e $f: M \to \mathbb{R}^n$ diferenciável. Mostre que as únicas subvariedades trivializadas de M que podem ocorrer como variedades de Pontrjagin de f são aquelas que são bordos de subvariedades compactas trivializadas de $M \times [0,1]$.

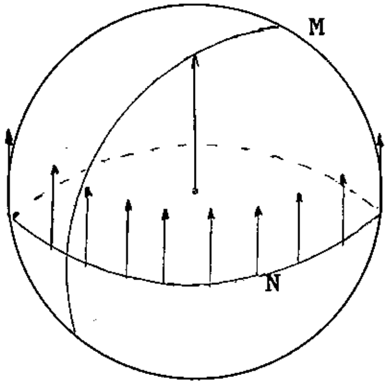
O exercício acima mostra que o codomínio de f tem grande influência no tipo de variedade de Pontrjagin de f que pode ocorrer. Dada uma subvariedade trivializada de M, será que ela é uma variedade de Pontrjagin de alguma aplicação diferenciável? Como Tais aplicações se relacionam? Para analizarmos tais questões, nos será importante o seguinte

(9.9) <u>Teorema</u> (da vizinhança produto).

Seja (N^n,v) subvariedade trivializada de M. Então existe uma vizinhança U de N, em M e um difeomorfismo $p: N\times\mathbb{R}^{m-n} \to U$ tal que $p(x,0) = x$ e a $Dp(x,0)$ leva a base canônica de $\mathbb{R}^{m-n}$ em $v(x)$.

Demonstração: Não daremos a demonstração completa, mas sim um esboço.

Vejamos um exemplo. Consideremos $M = S^2$ a esfera de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^3$, N sendo seu equador e v a aplicação constante $v(x) = (0,0,\epsilon)$, com $0 < \epsilon < 1$



Para cada ponto x de N consideramos o grande círculo de S^2 que passa por x e $(0,0,1)$. Dado agora um vetor u tangente a M em x e normal a N em x de comprimento $\|u\| < \epsilon$, procuramos o ponto $p(u)$ no grande círculo correspondente, tal que o arco de x a $p(u)$ percorrido no sentido de u tenha comprimento igual a $\|u\|$. Definimos assim uma função de um cilindro, que tangencia a esfera em S^1, numa faixa da esfera que é vizinhança produto de S^1 em S^2.

que leva $B_1(0)$ difeomorficamente em $S^k - s$, e o complementar desta bola em s, onde $s \in S^k$ e que preserve a orientação. Agora podemos definir a função procurada f, do seguinte modo.

$$f: M \to S^k$$
$$f/U = \varphi \cdot \tilde{f}$$
$$f(x) = s \quad \text{para} \quad x \in M \text{ fora de } U$$

É imediato ver que f satisfaz as condições pedidas no teorema.

Sabemos então que subvariedades trivializadas ocorrem como variedades de Pontrjagin de funções diferenciáveis com valores numa esfera. A pergunta agora é: se pedirmos que tais subvariedades sejam cobordantes, o que ocorre com as funções correspondentes. Vamos analisar um caso particular desta questão, mas que reune o essencial do caso geral.

(9.11) <u>Lema</u>. Seja (N,v) subvariedade trivializada de M, ambos compactos e sem bordos. Suponhamos que (N,v) seja variedade de Pontrjagin para duas funções diferenciáveis f e $g: M \to S^k$, isto é, $(f^{-1}(y), f^*(w)) = (g^{-1}(y), g^*(w)) = (N,v)$. Então f e g são diferenciavelmente homotópicas.

<u>Demonstração</u>: Vamos supor inicialmente que as funções f e g coincidem numa vizinhança U de N em M. Consideremos a projeção estereográfica $r: S^k - y \to \mathbb{R}^k$. Podemos agora definir uma homotopia que leva f em g do seguinte modo

$$H: M \times [0,1] \to S^k$$

$$H(x,t) = f(x) = g(x) \quad \text{para} \quad x \in U$$

$$H(x,t) = r^{-1}(trf(x) + (1-t)rg(x)), \quad x \in M-N$$

e temos então f diferenciavelmente homotópica a g.
O essencial da demonstração está então em mostrar que é possível deformar g por uma homotopia diferenciável, de modo a fazê-lo coincidir com f em uma vizinhança de N.

Temos por hipótese que $f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$ e $f^*(w) = g^*(w)$ e isto implica que

$$Df(x) = Dg(x), \quad x \in N.$$

Podemos supor f como sendo a construida em (9.10), já que a relação de homotopia é transitiva.
Como estamos interessados com o que ocorrerá numa vizinhança de N, graças ao teorema da vizinhança produto, podemos supor

$$f: N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

$$f(x,u) = u$$

$$F: M \times [0,1] \to S^k$$

cuja variedade de Pontrjagin $(F^{-1}(y), F^*(v))$ é exatamente (X,w). Temos então que $F(\ ,0)$ e f têm a mesma variedade de Pontrjagin e portanto $F(\ ,0)$ e f são diferenciavelmente homotópicas o mesmo ocorrendo com $F(\ ,1)$ e g, graças ao Lema (9.11). Assim sendo f e g são diferenciavelmente homotópicas.

Este teorema transforma problemas de classes de homotopia de funções $M \to S^k$ em problemas de classes de cobordismo de subvariedades de M e vice-versa. Pontrjagin introduziu esta noção de cobordismo para estudar especificamente, classes de homotopia de aplicações $S^n \to S^k$ com $n > k$. Por exemplo, se $n = k+1 \geq 4$, existem apenas duas classes de homotopias de aplicações $S^n \to S^k$ e este resultado foi demonstrado por Pontrjagin, classificando as subvariedades trivializadas, compactas e sem bordo, de S^n. O mesmo acontece no caso $n = k+2 \geq 4$ onde o grau de dificuldade é bem maior. Este relacionamento entre cobordismo e homotopia foi desenvolvido largamente por Thom [20] e vem produzindo trabalhos dos mais profundos em topologia.

Haviamos desenvolvido a noção de grau e agora o fizemos com cobordismo. Vamos observar mais detalhadamen te que a última inclue a primeira.

Seja M variedade diferenciável, orientada compacta e sem bordo. Uma subvariedade de dimensão zero trivializada, de M e apenas um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_k$ com uma base w_i de TM_{x_i} fixada para cada $i = 1, \ldots, k$. Se w_i concorda com a orientação de M em x_i pomos $s(x_i, w_i) = 1$, caso discorde pomos $s(x_i, w_i) = -1$. Vamos então fazer algumas observações entre o número

$$\sum_{i=1}^{k} s(x_i, w_i)$$

e a classe de cobordismo com trivialização de $((x_i), (w_i))$.

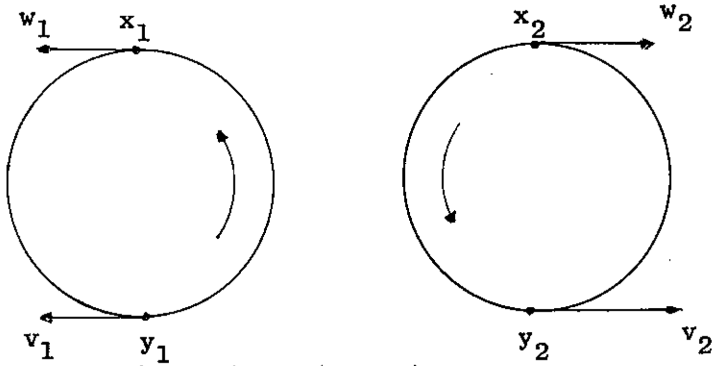
Se $((x_i)\ (w_i))$ é cobordante com trivialização a $((y_j)(v_j))$ então por (9.10) e (9.12) temos funções diferenciáveis

$$f \text{ e } g\colon M \to S^m$$

que são diferenciavelmente homotópicas e $f^{-1}(a) = (x_i)$ e $g^{-1}(b) = (y_i)$ com a e b valores regulares de f e g respectivamente. Mas então f e g devem ter o mesmo grau e portanto

$$\sum_{i=1}^{k} s(x_i, w_i) = \sum_{j=1}^{r} s(y_j, v_j).$$

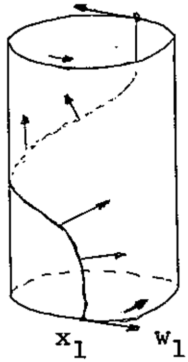
Observe que para este argumento não necessitamos de M ser conexa. Se quizermos provar a recíproca, isto é, estes números iguais implicam nas variedades serem cobordantes, precisamos de M conexa. Vejamos o seguinte contra exemplo.



$$s(x_1,w_1) + s(x_2,w_2) = 1-1 = 0$$

$$s(y_1,v_1) + s(y_2,v_2) = -1+1 = 0$$

Portanto temos os números iguais, mas (x_i) não é cobordante com trivialização a (y_i), pois o segmento, do cobordismo, de extremidade x_1 só pode ter a outra extremidade em y_1, mas a trivialização preserva a orientação dada a x_1, pois S^1 é orientável e assim v_1 deveria concordar com a orientação daquele círculo. Logo não existe tal cobordismo.

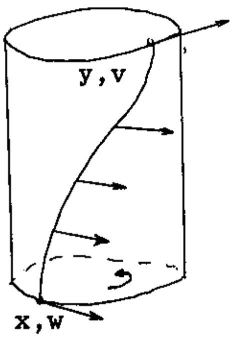


Se pedirmos que M seja conexa então temos que o número $\Sigma s(x_i,w_i)$ determina uma única classe de cobordismo que é a de $((x_i),(w_i))$. Para isto basta considerarmos variedades (x,w) e (y,v) reduzidas a um ponto com mesma orientação e o caso (x_1,x_2,w_1,w_2) com orientação opostos, isto é

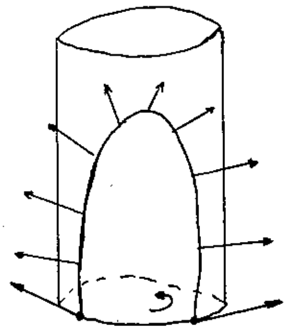
$$s(x,w) = s(y,v) = 1 \quad e \quad s(x_1w_1) + s(x_2w_2) = 0.$$

Como M é conexa temos $M\times I$ conexa e podemos ligar $x \times 0$ e $y \times 1$ por uma curva com trivialização como na figura (1) abaixo. No segundo caso podemos ligar

(1)



(2)



$x_1 \times 0$ e $x_2 \times 0$ com uma curva com trivialização como na figura (2).

Temos então demonstrado o seguinte

(9.13) Teorema (de Hopf). Seja M^m variedade diferenciável conexa, orientada, compacta e sem bordo. Então duas aplicações diferenciáveis de M em S^m são diferenciavelmente homotópicas se e somente se elas têm o mesmo grau.

Se M é não orientável e conexa, dado $x \in M$ e base w de TM_x existe uma curva C que começa e termina em x, tal que se "deslizarmos" w ao longo de C voltamos a x com w' de orientação oposta à de w. Assim é possível construir um cobordismo, de $x \times 0$ a $x \times 1$ com trivialização induzindo w em $x \times 0$ e w' em $x \times 1$. Portanto temos o seguinte resultado.

(9.14) Teorema. Seja M^m variedade diferenciável conexa, compacta, sem bordo e não-orientável. Então, duas aplicações diferenciáveis de M^m em S^m são diferenciavelmente homotópicas se e somente se elas tem o mesmo grau (mod 2).

Finalmente vamos à seguinte observação. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f: M \to N$ função

contínua apenas. Então na classe de homotopia (contínua) de f, sempre existe uma função diferenciável e esta pode ser escolhida tão "próxima" de f quanto quizermos. Em outros termos, dada uma função contínua entre variedades diferenciáveis podemos deformá-la tão pouco quanto quizermos e obter uma função diferenciável. Assim sendo, os conceitos introduzidos aqui podem ser definidos para funções contínuas, via suas homotópicas diferenciáveis.
Dado o próprio fato que acabamos de comentar não se ganha em nada porém de generalidade.

APÊNDICE

Teorema da função inversa

Sejam E e F espaços vetoriais normados de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, $U \subset E$ aberto e $f: U \to F$ aplicação diferenciável de classe C^r, com $r \geq 1$. Se a derivada de f no ponto x_o de U for isomorfismo sobre F

$$Df(x_o): E \to F$$

então existem abertos $V \subset U$ e $W \subset F$ com $x_o \in V$, $f(x_o) \in W$, tais que a restrição de f a V é um difeomorfismo sobre W e $(f/V)^{-1}$ é também de classe C^r.

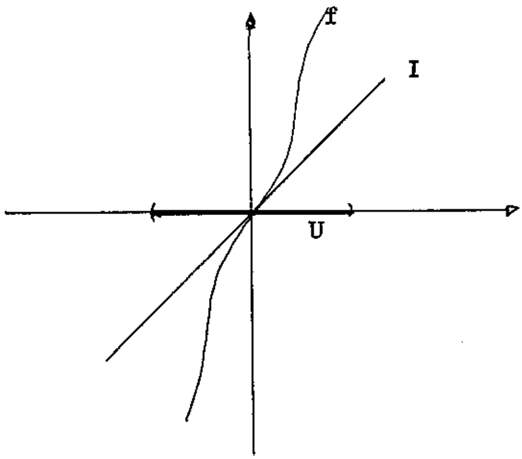
Demonstração: Faremos a demonstração em três etapas.

Primeiro verificaremos que f admite, em torno de x_o, uma inversa contínua. Em seguida veremos que tal inversa é de classe C^1 e finalmente, um simples argumento de indução prova que a mesma é de classe C^r.

Vejamos então que f admite um inversa local contínua. Como $Df(x_o): E \to F$ é isomorfismo podemos considerar $E = F$ identificados através de $Df(x_o)$ e passaremos ao problema na forma (justifique)

$$U \subset E, \quad f\colon U \to E, \quad Df(x_o) = I = \text{identidade}$$

Como as translações são difeomorfismos C^∞ tomaremos também $x_o = 0$ e $f(x_o) = 0$.



Queremos provar que, numa vizinhança conveniente de 0, a equação $f(x) = y$ tem solução em x, única para cada y fixado próximo de 0. Podemos escrever o problema na forma

$$y - f(x) = 0$$

ou
$$y+x - f(x) = x$$

Assim sendo, achar solução para $f(x) = y$ é o mesmo que achar ponto fixo para a aplicação

$$y+x - f(x).$$

Esta aplicação tem o conveniência de ser uma contração em alguma vizinhança de 0, como vamos ver agora.

Seja $g(x) = x-f(x)$, temos então que $Dg(0) = I-I = 0$. Como f é de classe C^r com $r \geq 1$, temos que Df é contínua e portanto Dg é contínua. Logo podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|Dg(x)\| < 1/2 \quad \text{para} \quad \|x\| < \varepsilon.$$

Pelo teorema do valor médio temos que

$$\|g(x_1)-g(x_2)\| \leq 1/2\|x_1-x_2\| \quad \text{para} \quad \|x_1\| \leq \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \|x_2\| \leq \varepsilon/2$$

Portanto g é contração na bola $\bar{B}_{\varepsilon/2}(0)$.

Seja $y \in B_{\varepsilon/4}(0)$ fixo. Temos então que a aplicação $y + g(x)$ leva $\bar{B}_{\varepsilon/2}(0)$ em $\bar{B}_{\varepsilon/2}(0)$ e é aí uma contração pois $\|y+g(x_1)-y-g(x_2)\| = \|g(x_1)-g(x_2)\| \leq$ $\leq \|x_1-x_2\|$.

Como $\bar{B}_{\varepsilon/2}(0)$ é compacto temos que $y + g(x)$ admite aí um ponto fixo e como a mesma contrai com razão $1/2$ tal ponto fixo é único, isto é, para cada $y \in \bar{B}_{\varepsilon/4}(0)$ existe um único $x \in \bar{B}_{\varepsilon/2}(0)$ tal que $y + g(x) = x$ ou seja $f(x) = y$. Podemos definir então uma função $h: B_{\varepsilon/4}(0) \to \bar{B}_{\varepsilon/2}(0)$ por $h(y) = x$ temos então que $fh(y) = y$. A função h é contínua, pois

$$\|h(y_1)-h(y_2)\| = \|x_1-x_2\| \leq \|f(x_1)-f(x_2)\| + \|g(x_1)-g(x_2)\|$$

portanto

$$\|h(y_1)-h(y_2)\| \leq 2\|f(x_1)-f(x_2)\|.$$

Tomemos agora

$$(f/\bar{B}_{\epsilon/2}(0))^{-1}(B_{\epsilon/4}(0)) \cap B_{\epsilon/2}(0) = V$$

que é um aberto em U, e

$$f(V) = h^{-1}(V) = W$$

que é um aberto em E e temos assim que

$$f/V: V \to W$$

é homeomorfismo.

Queremos provar agora, que $(f/V)^{-1}$ é diferenciável em W e de classe C^1. Seja $(f/V)^{-1} = \ell$. Antes, vamos verificar que

$$\|x-x_1\| \leq c\|f(x)-f(x_1)\|$$

com x e x_1 em V e x em alguma vizinhança de x_1. Chamemos $Df(x_1) = L$. Pela diferenciabilidade de f em x_1 temos que

$$f(x)-f(x_1) = L(x-x_1) + r(x,x_1)$$

donde

$$L^{-1}(f(x)-f(x_1)) = x-x_1 + L^{-1}(r(x,x_1)).$$

Dado $\epsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|r(x,x_1)\| < \epsilon\|x-x_1\|$ para $\|x-x_1\| < \delta$. Assim sendo, podemos escrever

$$\|L^{-1}\|\|f(x)-f(x_1)\| + \|L^{-1}\|\epsilon\|x-x_1\| \geq \|x-x_1\|$$

ou

$$\|x-x_1\| \leq (1/(1-\epsilon\|L^{-1}\|))\|f(x)-f(x_1)\|.$$

Portanto tomando $\epsilon < 1/\|L^{-1}\|$ temos $c = 1/(1-\epsilon\|L^{-1}\|) > 0$.

Vamos agora à diferenciabilidade de $(f/V)^{-1} = \ell$. A diferenciabilidade de f nos permite escrever

$$f(x) - f(x_1) - L(x-x_1) = r(x,x_1)$$

com $\lim\limits_{x\to x_1} r(x,x_1)/\|x-x_1\| = 0$.

Sejam $x = \ell(y)$ e $x_1 = \ell(y_1)$. Como L é isomorfismo temos que

$$L^{-1}(y-y_1) - (\ell(y)-\ell(y_1)) = L^{-1}(r(\ell(y),\ell(y_1))).$$

Se provarmos que $\lim\limits_{y\to y_1} L^{-1}(r(\ell(y),\ell(y_1)))/\|y-y_1\| = 0$ teremos provado que ℓ é diferenciável em y_1. Mas como L^{-1} é isomorfismo linear, o limite acima é equivalente a $\lim\limits_{y\to y_1} r(\ell(y),\ell(y_1))/\|y-y_1\| = 0$. Como ℓ é homeomorfismo

este limite é equivalente a $\lim_{x \to x_1} r(x,x_1)/\|f(x)-f(x_1)\| = 0$.
Mas vimos acima que numa vizinhança conveniente de x_1 vale $\|x-x_1\| \leq c\|f(x)-f(x_1)\|$ e como sabemos que $\lim_{x \to x_1} r(x,x_1)/\|x-x_1\| = 0$ temos que o limite acima é de fato nulo e portanto ℓ é diferenciável em y_1 com derivada

$$D\ell(y_1) = L^{-1} = Df(x_1)^{-1} \quad \text{onde} \quad x_1 = \ell(y_1).$$

Num ponto $y \in W$ temos

$$D\ell(y) = (Df(\ell(y)))^{-1}$$

ou seja, a derivada de ℓ é obtida como a composta de três funções, que são ℓ, Df e a inversão $(\ )^{-1}$ que são todas contínuas, portanto $D\ell$ é contínua em W, logo ℓ é de classe C^1. Se $r \geq 2$ suponhamos que ℓ seja de classe C^{r-1}. Sabemos que f é de classe C^r e portanto Df é de classe C^{r-1}. Como a inversão $(\ )^{-1}$ é de classe C^{∞} temos novamente que a composição nos dá $D\ell$ como sendo de classe C^{r-1} e portanto ℓ é de classe C^r.

CQD

Teorema da derivada injetora

Sejam E, F, U e f como acima. Se $x_o \in U$ e $Df(x_o)$ é injetora então existem vizinhanças V de x_o, W e W' de $f(x_o)$ e um difeomorfismo h de classe C^r, $h: W \to W'$, tais que

$$h \cdot f(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o) \quad \text{para } x \text{ em } V.$$

Demonstração: Podemos supor que $x_o = 0$, $f(x_o) = 0$ e identificarmos E com um subespaço de F através de $Df(x_o)$ e considerarmos $Df(x_o)$ como sendo a inclusão $E \subset F$ (justifique). Assim sendo, tomemos G complementar de E em F, isto é,

$$F = E \oplus G.$$

Consideremos o aberto $U \times G$ de F e definimos

$$\tilde{f}: U \times G \to F$$

por

$$\tilde{f}(x,y) = (f(x),y)$$

logo $\tilde{f}/U\times 0 = f$.

Temos então que

$$D\tilde{f}(0,0) = (Df(0),I_G) = (I_E,I_G)$$

e então $D\tilde{f}$ é isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, $\tilde{f}$ é difeomorfismo local em torno de $(0,0)$, de classe C^r, isto é, existem vizinhanças $V \times V'$, $V \subset E$, $V' \subset G$ e W de $(0,0)$ em F tais que

$$\tilde{f}/V \times V' : V \times V' \to W$$

é difeomorfismo de classe C^r. Tomando $h = (\tilde{f}/V \times V')^{-1}$ temos que

$$h \circ f(x) = x = Df(0)(x)$$

que prova o teorema.

CQD

<u>Teorema da derivada sobrejetora</u>

Sejam E, F, U e f como acima. Se $x_o \in U$ e $Df(x_o)$ é sobrejetora, então existem vizinhanças V e V' de x_o e um difeomorfismo $k: V \to V'$ de classe C^r tais que

$$f \circ k(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x - x_o).$$

<u>Demonstração</u>: Podemos supor $x_o = 0$ e $f(x_o) = 0$. Seja $G = \ker Df(x_o)$ o núcleo de $Df(x_o)$. Podemos então escrever

$$E = F' \oplus G$$

e então temos que $Df(0)/F': F' \to F$ é isomorfismo. Podemos então identificar F com F' através deste isomorfismo e $Df(0)$ passa a ser apenas a projeção em F (justifique)

$$E = F \oplus G$$

$$Df(0)(x,y) = x.$$

Definimos agora

$$\tilde{f}: U \to E$$

$$\tilde{f}(x,y) = (f(x,y),y).$$

Temos assim que $\tilde{f}$ é de classe C^r e ainda

$$D\tilde{f}(0,0)(x_1,x_2) = (Df(0,0)(x_1,x_2),x_2) = (x_1,x_2)$$

isto é, $D\tilde{f}(0,0)$ é a identidade. Então pelo teorema da função inversa temos que existem vizinhanças $V\times V'$ e W de $(0,0)$, $V \subset F$, $V' \subset G$ tais que

$$\tilde{f}/V\times V': V\times V' \to W$$

é difeomorfismo de classe C^r. Tomando $k = (\tilde{f}/V\times V')^{-1}$ temos $(x,y) = \tilde{f} \circ k(x,y) = (f \circ k(x,y),y)$, logo $f \circ k(x,y) = x = Df(0,0)(x)$ que prova o teorema.

CQD

<u>Teorema do posto constante</u>

Sejam E, F, U e f como acima. Se Df tem posto constante em U, então para cada $x_o \in U$, existem difeomorfismos de classe C^r

$k: V \to V'$ entre vizinhanças de x_o

$h: W' \to W$ entre vizinhanças de $f(x_o)$

tais que

$$hfk(x) = f(x_o) + Df(x_o)(x-x_o).$$

<u>Demonstração</u>: Demonstraremos este teorema numa situação especial e observaremos no final que o caso geral se reduz a este de modo trivial.

Seja p o posto de $Df(x)$ o qual é constante em U por hipótese. Consideraremos então o seguinte

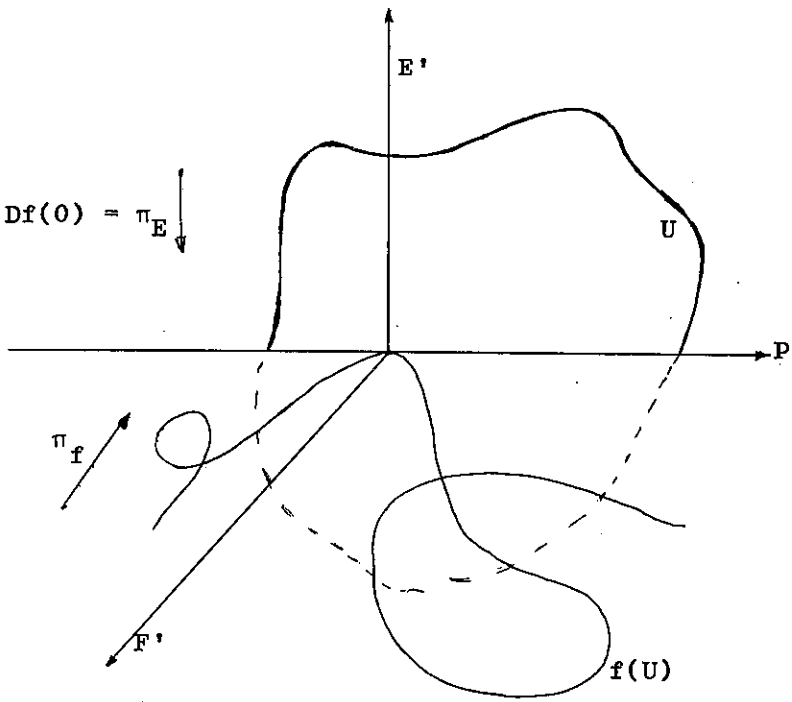
$$E = P \oplus E', \quad F = P \oplus F', \quad 0 \in U, \quad x_o = 0,$$

$f(x_o) = 0$, onde P tem dimensão p e $Df(0) = \pi_E$ e a projeção na primeira coordenada

$$Df(0)(x,y) = \pi_E(x,y) = (x,0).$$

Seja π_F a projeção de F na primeira coordenada

$$\pi_F(x,y) = (x,0)$$



Nesta figura U está no plano vertical (que é E) e $f(U)$ está no plano horizontal (que é F) e P é a imagem de $Df(0)$.

Consideremos agora a função

$$f_1 = \pi_F \circ f\colon U \to P$$

que também de classe C^r e $Df_1(0) = \pi_F \circ Df(0) = \pi_F \cdot \pi_E$, portanto $Df_1(0)$ é sobrejetora. Pelo teorema da derivada sobrejetora, existe difeomorfismo k de classe C^r

$$k: V \to V'$$

V e V' vizinhanças de 0 em E, tal que

$$f_1 \circ k(x,y) = Df_1(0)(x,y) = x$$

para (x,y) em V. Podemos tomar V como sendo a bola de raio $\epsilon > 0$ e centro na origem 0, $B_\epsilon(0)$.

Temos então, pela definição de f_1 e de k, que

$$\pi_F \circ f \circ k(x,y) = x$$

para todo (x,y) em V. Assim sendo, $f \circ k$ é do tipo

$$f \quad k(x,y) = (x,\theta(x,y)); \quad (x,y) \text{ em } V.$$

Queremos provar agora que, se fixarmos $x \in P$ e variarmos y "verticalmente" (veja figura acima), então $\theta(x,y)$ permanece constante. Consideremos, para isso, a matriz da derivada de $f \circ k$

$$D(f \circ k)(x,y) = \begin{pmatrix} I_P & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ calculada em } (x,y) \text{ de } V$$

onde I_P é identidade de P. Como $f \circ k$ tem posto constante igual a p, concluimos que $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$ é identicamente nula em V, pois caso contrário o posto da matriz acima seria maior que p em algum ponto. Como $V = B_\varepsilon(0)$ temos que θ depende apenas de x, isto é,

$$f \circ k(x,y) = (x,\theta(x)).$$

Podemos então definir a função

$$h\colon (V \cap P)\times F' \to F$$
$$h(x,z) = (x,z-\theta(x))$$

Temos então

$$Dh(0) = \begin{pmatrix} I_P & 0 \\ -\dfrac{\partial\theta}{\partial x} & I_{F'} \end{pmatrix}$$

que é isomorfismo, logo pelo teorema da função inversa, h é um difeomorfismo em torno da origem 0. Podemos escolher a vizinhança W' de 0 onde h é difeomorfismo e $h(W') = W = B_\delta(0)$.

Observemos agora que $h(x,0(x)) = (x,0)$ e portanto tomando-se $\varepsilon' = \min\{\varepsilon,\delta\}$ temos

$$h \circ f \circ k\colon V \to W$$

é dado por

$$h \circ f \circ k(x,y) = (x,0) = Df(0)(x,y)$$

que prova o teorema neste caso. Para o caso geral, podemos continuar supondo $x_o = 0$ e $f(x) = 0$ já que as translações são difeomorfismos C^∞ e consideramos decomposições

$$E = P \oplus \ker Df(0); \quad F = \operatorname{Im} Df(0) \oplus F'$$

e temos que

$$Df(0)/P \colon P \to \operatorname{Im} Df(0)$$

é isomorfismo. Basta considerarmos agora o isomorfismo

$$L \colon F \to P \oplus F'$$

$$L(x,y) = ((Df(0)/P)^{-1}(x), y).$$

A aplicação $L \circ f$ satisfará o caso especial demonstrado.

CQD

Teorema de Sard

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ função diferenciável de classe C^∞. Seja C o conjunto dos pontos críticos de f, isto é,

$$C = \{x \in U \mid Df(x) \text{ tem posto } \leq k-1\}.$$

Então o conjunto dos valores críticos $f(C) \subset \mathbb{R}^k$ de f

tem medida nula, isto é, dado $\epsilon > 0$ podemos cobrir $f(C)$ com uma seqüência de cubos de $\mathbb{R}^k$ com a soma dos volumes menor que ϵ.

Demonstração: Seja $C_i \subset C$, $C_i = \{x \in U \mid D^j f(x) = 0 \text{ para } 1 \le j \le i\}$

Temos então

$$f(C) = f(C_i) \cup f(C - C_i).$$

Vamos provar inicialmente que, se tomarmos i suficientemente grande, $f(C_i)$ tem medida nula e depois faremos mesmo com $f(C-C_i)$ e portanto $f(C)$ terá medida nula.

Seja $I^n \subset U$ cubo de aresta de comprimento δ. Provaremos que $f(I^n \cap C_i)$ tem medida nula, para i e δ convenientes. Como C_i pode ser coberto com uma seqüência de tais cubos teremos que $f(C_i)$ terá medida nula.

Podemos escrever

$$f(x+z) = f(x) + R(x,z).$$

O fato de $D^j f(x) = 0$ para $1 \le j \le i$, para $x \in C_i$, o Teorema de Taylor e a compacidade de I^n nos permite concluir que

$$\|R(x,z)\| \le M\|z\|^{i+1} \tag{1}$$

para $x \in C_i \cap I^n$ e $x+z \in I^n$ e M é constante positiva que depende apenas de f e de I^n. Subdividimos agora I^n em r^n cubos de arestas de comprimento δ/r. Seja I_1 o cubo destes, que contém o ponto x. Qualquer ponto de I_1 é do tipo $x+z$ com

$$\|z\| \leq \text{diagonal de } I_1 = \sqrt{n}(\delta/r).$$

De (1) temos que $f(I_1)$ está contido no cubo de centro em $f(x)$ e aresta de comprimento

$$2M(\sqrt{n}\ \delta)^{i+1}/r^{i+1}.$$

Logo $f(C_i \cap I^n)$ está contido numa união de r^n cubos com volume total T onde

$$T \leq r^n(2M(\sqrt{n}\ \delta)^{i+1}/r^{i+1})^k$$

donde

$$T \leq (2M(\sqrt{n}\ \delta)^{i+1})^k\ r^{n-(i+1)k}.$$

Portanto se $i+1 > n/k$ temos que T tende a zero quando r tende a infinito. Então $f(C_i)$ tem medida para $i+1 > n/k$.

Fixemos um índice $s > n/k - 1$ e consideremos $C - C_s$.

Um ponto $\bar{x}$ de $C - C_s$ tem a seguinte propriedade. Para algum $1 \leq j \leq s-1$ temos $D^j f(\bar{x}) \neq 0$. Então deve existir uma componente de f, digamos f_1, tal que

$$\partial^j f_1/\partial x_{t_1} \dots x_{t_j}(\bar{x}) \neq 0.$$

Consideremos então a função

$$h(x) = \partial^{j-1} f_1/\partial x_{t_2} \dots x_{t_j}(x).$$

Temos então que

$$\partial h/\partial x_{t_1}(\bar{x}) \neq 0.$$

Podemos supor $t_1 = 1$. Tomemos a seguinte função de classe C^∞

$$\bar{f}_1(x) = (h(x), x_2, \dots, x_n)$$

cuja derivada no ponto $\bar{x}$ é isomorfismo. Logo existem abertos V e V', $\bar{x} \in V$ e $\bar{f}_1(\bar{x}) \in V'$ tais que

$$\bar{f}_1/V: V \to V'$$

é difeomorfismo. Seja agora a composição

$$g = f \circ \bar{f}_1^{-1}: V' \to \mathbb{R}^k.$$

Observe que o conjunto dos pontos críticos C' de g é $\bar{f}_1(V \cap C)$. Então $g(C') = f(V \cap C)$.

Agora estamos em condições de reduzir a dimensão do domínio da função, o que nos permitirá aplicar argumento de indução.

Se $(x_1,\dots,x_n) \in V'$ temos

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \{x_1\} \times \mathbb{R}^{k-1}$$

e portanto g leva "hiperplanos em hiperplanos" e assim podemos tomar, para cada x_1 fixo, a função

$$g^{x_1}: (\{x_n\} \times R^{n-1}) \cap V' \to \{x_1\} \times R^{k-1}$$

$$g^{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n) = g(x_1,\dots,x_n)$$

mas um ponto de $(\{x_1\} \times R^{n-1}) \cap V'$ é ponto crítico de g^{x_1} se e somente se este é também ponto crítico de g, pois

$$\partial q_i/\partial x_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \partial g_i^{x_1}/\partial x_j \end{pmatrix}.$$

Supondo então que o teorema seja válido para dimensão do domínio igual a $n-1$, temos que o conjunto dos valores críticos de g^{x_1} tem medida nula em $\{x_n\} \times \mathbb{R}^{k-1}$.

Chegamos à seguinte situação

$$f(V \cap C) = g(C') \subset \mathbb{R}^k$$

é mensurável, pois pode ser escrito como união enumerável de conjuntos compactos, e

$$f(V \cap C) \cap (\{x_1\} \times \mathbb{R}^{k-1})$$

tem medida nula em $\{x_1\} \times \mathbb{R}^{k-1}$, para cada x_1. Mas um conjunto com tais propriedades tem medida nula em $\mathbb{R}^k$ (Teorema de Fubini). Como $C - C_s$ pode ser coberto por uma seqüência de tais vizinhanças de V temos que $f(C - C_s)$ tem medida nula. Falta apenas observar que a indução pode ser começada, isto é, para $n = 0$ o que é óbvio.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIEUDONNÉ, J. - Foundations of Modern Analysis, New York, Academic Press, 1960.

[2] GREENBERG, M. - Lectures in Algebraic Topology, New York, Benjamin 1967.

[3] LIMA, E. - Introdução às Variedades Diferenciáveis. IMPA, Rio de Janeiro, GB.

[4] LIMA, E. - Introdução à Topologia Diferencial, IMPA, Rio de Janeiro, GB.

[5] LIMA, E. - Análise no Espaço R^n. Edgard Blucher Ltda.

[6] MILNOR, J. - On Manifolds homeomorphic to the 7-sphere Annals of Math. 64 (1956).

[7] MILNOR, J. - A survey of Cobordism Theory, L'Enseignement Math. 8 (1962).

[8] MILNOR, J. - Morse Theory, Princeton University Press 1963.

[9] MILNOR, J. - Differential Topology, Lectures on Modern Mathematics II ed. T.L. Saaty, New York, Wiley 1964.

[10] MILNOR, J. - Topology from the Differentiable Viewpoint, University Press of Virginia, 1965.

[11] MUNKRES, J.R. - Elementary Differential Topology, Princeton University Press, 1963.

[12] NACHBIN, L. - Introdução à Análise Funcional e Cálculo Diferencial, Universidade de Brasília.

[13] NACHBIN, L. - Lectures on the Theory of Distributions Textos de Matemática, Universidade de Recife, 1964.

[14] PONTRJAGIN, L.S. - Smooth Manifolds and Their Applications in Homotopy Theory, Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2 II (1959).

[15] RHAM, G. de - Variétés Differentiables, Paris, Hermann 1955.

[16] SARD, A. - The Measure of Critical Points of Differentiable Maps, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942).

[17] SMALE, S. - Generalized Poincaré's Conjecture in dimensions greater than four, Annals of Math. 74 (1961).

[18] SMALE, S. - A Survey of some recent developments in Differential Topology. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963).

[19] SPIVAK, M. - Calculus on Manifolds, New York, Benjamin 1965.

[20] THOM, R. - Quelques propriétés globales des Variétés Differentiables. Commentarii Math. Helvet. 28 (1954).

[21] WHITNEY, H. - A function not constant on a connected set of critical points. Duke Math. Jour. 1 (1935).