Djairo Guedes de Figueiredo

ANÁLISE NA RETA

PREFÁCIO

Os cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados pelos Institutos ou Departamentos de Matemática de nossas universidades destinam-se a um número muito grande de estudantes pertencentes às mais diversas áreas, como as engenharias, as ciências exatas, as ciências biológicas, e as ciências humanas. Numa universidade, como a de Brasília, a maior parte dos alunos admitidos tomam pelo menos um curso semestral de cálculo. Portanto, apenas uma percentagem muito pequena da população estudantil do Cálculo é constituída por alunos da área de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. A compreensão desse fato é essencial para que se decida o modo como o Cálculo deve ser ensinado. Não é correto, para os objetivos a que se destina tal curso, tentar ensiná-lo com um rigor que cabe mais em um curso de Análise. Por outro lado, não se deve cair no estilo "Dona Benta". É possível escolher um curso médio entre os dois extremos, apresentando (sempre) os conceitos corretamente, demonstrando alguns teoremas, e fazendo muitas aplicações às diversas áreas do conhecimento.

Não é de esperar que um aluno após um curso de Cálculo saiba demonstrar os fatos que conduzem ao teorema do valor médio, digamos. No entanto, será imperdoável se ele não souber aplicar esse teorema na pesquisa dos pontos críticos de uma função. Julgamos que, para os estudantes do Cálculo, é mais importante saber utilizar os teoremas do que propriamente demonstrá-los. As aplicações são muito importantes por que dão um sentido prático ao que o aluno aprende. Afinal de contas, o Cálculo foi criado por Newton, tendo em vista uma aplicação: a mecânica.

Os estudantes da área de matemática ficariam prejudicados em ser "submetidos" a um curso de Cálculo como propomos? Cremos que não. Em primeiro lugar, o nosso curso secundário é, via de regra, deficiente, o que força o aluno de primeiro semestre na universidade a gastar parte de seu tempo preenchendo lacunas, e um curso de Cálculo, como propomos, está mais ao nível desse estudante. Em segundo lugar, é muito salutar, para qualquer um, ter uma visão geral das questões tratadas no Cálculo, ter um sentimento de sua importância no corpo da matemática e das outras ciências, ter o manejo adequado de algumas ferramentas, como a derivada e a integral, tudo isso vale a pena ter, antes de descer aos detalhes delicados (e, via de regra, difíceis) da formalização lógica, rigorosa e dedutiva da teoria à qual essas questões pertencem.

O curso de Análise cobre praticamente o mesmo material do Cálculo, mas com uma diferença essencial. A atitude perante as várias situações é outra. Na Análise a base axiomática é estabelecida com detalhe, os teoremas são, a partir daí, demonstrados com rigor, e, principalmente, a atitude crítica e inquisitiva diante das questões deve estar sempre presente. A Análise é um ramo da matemática, com sua vida própria, gerando seus próprios problemas, com ou sem influência das outras ciências que a aplicam.

Houve no passado, e talvez ainda hoje, certa confusão entre Cálculo e Análise. Por exemplo, em escolas de engenharia, as vezes um curso de Análise era forçado em vez de um de Cálculo, com conseqüências desastrosas: nem o estudante dominava propriamente a análise, nem aprendia o Cálculo que necessitava para sua vida acadêmica. Quando uma situação desse tipo prevalece, as cadeiras do curso profissional dão a matemática que eles vão utilizar. Nós vemos essa situação anômala com grande preocupação, pois ela representa um certo perigo para o prestígio e importância dos departamentos de matemática nas universidades. Muitos cursos de matemática, e particularmente o de Cálculo, devem ser pensados tendo em vista o serviço que prestam à comunidade universitária.

Um curso de Análise deve compreender duas partes: a Análise de funções de uma variável, e a de funções de várias variáveis. Cada parte deve ocupar um semestre, com noventa horas de aula. A primeira parte é o objeto da presente monografia; dois capítulos adicionais, integrais impróprias e sucessões de funções, serão acrescentados na próxima edição. Julgamos que o aluno dessa seqüência de Análise deva ter feito antes o curso correspondente de Cálculo. Assim, o cálculo de funções de uma variável deve preceder o curso de Análise de uma variável.

Não faremos, neste prefácio, um detalhamento do conteúdo da presente monografia. Uma vista d'olhos no Índice fornecerá toda a informação que alguem desejar.

A preparação dessa monografia tem consumido muito tempo do autor, o qual teve de usar a técnica de permanecer em casa, e, simultaneamente, estar ausente! Agradecimentos à Maruja, por compreender esse paradoxo. O Colóquio deve ser sempre um pesadelo para o Wilson que, em tempo mínimo, tem que datilografar todos os cursos, a partir de manuscritos difíceis. Apesar disso, ele faz um trabalho excelente, e com isso se tornou uma instituição na comunidade matemática. A ele nossos agradecimentos, também.

Brasília, abril de 1973

DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

OS NÚMEROS REAIS

1.1 - Conjuntos e Funções

Os conceitos de conjunto e função pertencem aos fundamentos da matemática moderna. Portanto, ao iniciar o nosso trabalho, sentimos a necessidade de fazer algumas considerações sobre tais conceitos a fim de evitar seu uso inadequado posteriormente.

A formalização da teoria dos conjuntos em um contexto logicamente rigoroso é obra de grandes matemáticos deste e do século passado. As contribuições de Cantor, Hilbert e Gödel são decisivas e profundas. Mencionamos também o nome do matemático contemporâneo, Paul Cohen, que fêz uma contribuição extremamente importante à teoria dos conjuntos.

No presente trabalho, não utilizamos nenhum dos aspectos delicados da teoria dos conjuntos. Na verdade, necessitamos apenas definir alguns termos. A palavra conjunto é usada para designar uma coleção qualquer de objetos. Por exemplo, o conjunto das carteiras em uma sala de aula, o conjunto das crianças menores de 10 anos, o conjunto dos números pares. Lidaremos, em geral, com <u>conjuntos numéricos</u>, isto é, conjuntos constituídos por números. Como, por exemplo: o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, etc. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que consideramos a noção de conjunto como primitiva e que, portanto, não é passível de definição.

Os objetos que constituem um dado conjunto são chamados os <u>elementos</u> do conjunto. Usamos a notação $x \in A$ para dizer que um elemento x está em um conjunto A, e lê-se x "pertence a" A. Uma propriedade P caracteriza um conjunto A, se todo elemento de A satisfaz à propriedade P e se, reciprocamente, todo elemento que satisfaz à propriedade P pertence ao conjunto. Via de regra, um conjunto é dado através de propriedades que o caracterizam.

Por exemplo: $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos elementos x de $\mathbb{R}$ tais que $x > 0$, ou, em símbolos

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Cada parte B de um conjunto A é chamado um <u>subconjunto</u> de A. Mais precisamente, B é um subconjunto de A (em símbolos, $B \subset A$ ou $A \supset B$) se todo $x \in B$

é tal que $x \in A$. A expressão $B \subset A$ lê-se B "contido em" A e $A \supset B$ lê-se A "contém" B.

Usamos as seguintes notações: $A \cup B$ para designar o conjunto dos elementos que estão em A ou em B; $A \cap B$ para designar o conjunto dos elementos que estão simultâneamente em A e em B; $A \setminus B$ para designar o conjunto dos elementos que estão em A mas não em B.

Uma <u>função</u> f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra que a cada elemento $x \in A$ associa um elemento $f(x)$ em B. $f(x)$ é chamado o <u>valor</u> de f no elemento x. O conjunto A é chamado o <u>domínio</u> (conhecido também por <u>campo de definição</u>) da função f, e o conjunto B é chamado o <u>contradomínio</u>. Usamos a seguinte definição que explicita o domínio e o contradomínio da função: $f: A \to B$. Não é demais repetir que, dada uma função $f: A \to B$, o valor da função em um elemento $x \in A$ é univocamente determinado.

<u>Exemplos de Funções</u>

(i) $A = B = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2$, isto é, a função que a cada real x associa o seu quadrado x^2.

(ii) $A = B = \mathbb{R}^+$ e $f(x) = +\sqrt{x}$, isto é, a função que a cada real positivo x associa sua raiz quadrada positiva.

(iii) $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}$ e $f(x) = -\sqrt{x}$, isto é, a função que a cada real positivo x associa sua raiz quadrada negativa.

(iv) $A = B = \mathbb{R}$ e

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{para} \quad x > 0 \\ 1, & \text{para} \quad x = 0 \\ x^3, & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$

(v) $A = B = \mathbb{R}^+$ e $f(x) = 1/(1+x)$.

(vi) (A função de Dirichlet). $A = B = \mathbb{R}$ e f a função que a cada racional associa o número 0, e a cada irracional associa o número 1.

Uma função entre conjuntos numéricos não é necessariamente definida por uma fórmula algébrica, cf. exemplos (iv) e (vi) acima.

Dada uma função $f\colon A \to B$, o conjunto dos elementos y de B tais que existe (pelo menos) um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, é chamado a <u>imagem</u> de A pela função f, e é designado por $f(A)$.

A imagem do domínio pela f não é necessariamente o contradomínio todo, cf. exemplos (i), (iii), (iv), (v), (vi) acima. No exemplo (ii), a imagem do domínio coincide com o contradomínio. Uma função $f\colon A \to B$ tal que $f(A) = B$ é chamada de <u>sobrejeção</u>, ou <u>função sobrejetiva</u>.

Elementos distintos do domínio de uma função f podem ter o mesmo valor no contradomínio. Em outras palavras, pode-se ter a seguinte situação: $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. No exemplo acima (i), a função $f(x) = x^2$ tem o mesmo valor nos pontos 1 e -1. No exemplo (vi) todos os racionais vão no mesmo ponto pela função de Dirichlet. Uma função f que leve elementos distintos em valores distintos é chamada de <u>injeção</u>, ou <u>função injetiva</u>. Em outras palavras, $f: A \to B$ é uma injeção se, para todo par de pontos x_1 e x_2 em A tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$. As funções (ii), (iii), (v) acima são injetivas.

Uma função que é, ao mesmo tempo, uma injeção e uma sobrejeção é chamada de <u>bijeção</u> ou <u>função bijetiva</u>. A função (ii) acima é bijetiva.

Sejam $f: A \to B$ e $C \subset A$ dados. A função $\tilde{f}: C \to B$ definida por $\tilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in C$, é chamada a <u>restrição de</u> f ao subconjunto C. Essa função $\tilde{f}$ é, geralmente, designada por $f|C$. Por exemplo, a função $\tilde{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $\tilde{f}(x) = x$ é a restrição da função (iv) ao conjunto $\mathbb{R}^+$.

O leitor interessado encontrará um tratamento detalhado das ideias aqui apresentadas na referência [9]. O artigó de Paul Cohen e Reuben Hersh na referência [4] faz um tratamento completo da axiomática da teoria dos conjuntos.

1.2 - Os números racionais

Usamos as seguintes notações:

$\mathbb{N}$ - conjunto dos números naturais 1,2,3,...

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros ..., -2, -1, 0, 1, 2,...

$\mathbb{Q}$ - conjunto dos números racionais, isto é, dos números da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$.

Não está no nosso programa fazer um estudo sistemático dos três conjuntos numéricos acima. Faremos apenas alguns comentários rápidos.

Como o leitor deve observar os números racionais nada mais são que as frações da aritmética do curso primário. Quando lhe ensinaram a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações enunciadas abaixo, apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isso parece explicável porque os números inteiros gozam de quase todas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas facilmente de propriedades análogas para $\mathbb{Z}$. Também foram ensinadas relações do tipo $8/6 = 4/3$ e $3/1 = 3$. No fundo, essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, $p/q = r/s$ se $ps = qr$. A segunda igualdade faz uma identificação do conjunto $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$, isto é, com o subconjunto

$$\{p/q \in \mathbb{Q} : q = 1\}.$$

Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Um <u>corpo</u> F é um conjunto de elementos $x, y, z, \ldots$ onde se acham definidas as operações de adição (i.e., a cada par de elmentos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por $x+y$) e de multiplicação (i.e., a cada par de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por xy) satisfazendo às seguintes propriedades:

(1) Leis comutativas $x + y = y + x$, $xy = yx$.

(2) Leis associativas $(x+y) + z = x + (y+z)$, $(xy)z = x(yz)$.

(3) Existência de um zero: existe um elemento $0 \in F$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in F$.

(4) Existência de uma unidade: existe um elemento $1 \in F$ tal que $x1 = x$.

(5) Existência de inversos: dado $x \in F$ existe $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$, e dado $x \in F$, $x \neq 0$, existe

$x^{-1} \in F$ tal que $xx^{-1} = 1$.

(6) Lei distributiva: $(x+y)z = xz + yz$.

É imediato verificar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é um corpo.

O leitor deve ser familiar com a interpretação geométrica dos racionais utilizando uma reta R, onde se escolhem dois pontos, o 0 e o 1:

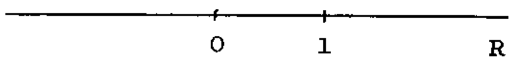


Fig. 1

Os inteiros são marcados, facilmente, usando o segmento de extremidades 0 e 1 como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade. Se imaginarmos os números racionais marcados sobre a reta, veremos que eles formam um subconjunto da reta que é <u>denso</u> no sentido que esclarecemos a seguir. Dado um ponto qualquer da reta poderemos obter racionais tão perto dele quanto se queira; basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade. Pode parecer, pois, que os racionais cobrem a reta R, isto é, a cada ponto de R corresponde um racional. Que isso não é verdade, já era conhecido pelos matemáticos da Escola Pitagórica. Sabiam eles que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento igual a 1, então a hipotenusa não é racional. Portanto, o ponto P da reta R, obtido traçando-se a circunferência centrada em O e raio igual à hipotenusa, não corresponde a um racional; veja figura 2.

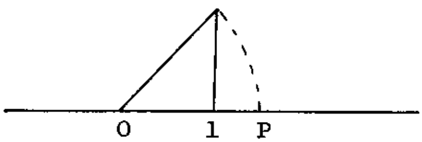


Fig. 2

<u>Demonstração de que a hipotenusa não é racional</u>. Suponhamos, por contradição, que a hipotenusa seja um racional p/q. Podemos supor que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras $(p/q)^2 = 1 + 1$, ou seja $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é um inteiro par, o que implica que p é par, isto é $p = 2r$. Portanto, $4r^2 = 2q^2$ ou seja $q^2 = 2r^2$, de onde se segue que q é par. Ora, p e q sendo números pares, não podem ser primos entre si. Essa é a contradição.

O fato acima demonstrado de que existem pontos de R que não correspondem a elementos de $\mathbb{Q}$, indica uma deficiência dos racionais. Procederemos agora no sentido de obter um conjunto numérico mais amplo que o dos racionais e cujos elementos estejam em correspondência biunívo ca com os pontos de R. (Dois conjuntos A e B estão em correspondência biunívoca se a cada elemento de A corresponde um e somente um elemento de B, e vice-versa). O conjunto que vai resolver essa questão é o corpo dos números reais.

EXERCÍCIO 1 - Demonstre o seguinte fato, o qual foi utilizado na demonstração de que a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles de cateto 1 não é racional. Um inteiro $p \in N$ é par se e só se p^2 for par.

EXERCÍCIO 2 - (Unicidade do zero de um corpo F). Se $0' \in F$ é tal que $x+0' = x$ para todo $x \in F$, então $0' = 0$. (Sugestão: use a igualdade precedente para $x = 0$).

EXERCÍCIO 3 - (Unicidade da unidade de um corpo F). Se $1' \in F$ é tal que $x1' = x$ para todo $x \in F$, então $1' = 1$.

EXERCÍCIO 4 - Dados a e b em um corpo F, mostre que a equação $a+x = b$ tem solução única.

EXERCÍCIO 5 - Dados $a \neq 0$ e b em um corpo F, mostre que a equação $ax = b$ tem solução única.

EXERCÍCIO 6 - $0x = 0$, qualquer que seja $x \in F$.

EXERCÍCIO 7 - $1 = 0$ se e somente se $F = \{0\}$.

EXERCÍCIO 8 - Dois corpos F_1 e F_2 são chamados isomorfos se existe uma função $\tau: F_1 \to F_2$ bijetiva e tal que $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$, $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$ para todos x e y em F_1. A aplicação τ é chamada um isomorfismo. Mostre que $\tau(0) = 0$ e $\tau(1) = 1$, onde estamos utilizando o mesmo símbolo 0 para os zeros de F_1 e F_2, bem como 1 para as duas unidades.

1.3 - INF e SUP

Um corpo F é ordenado se contém um subconjunto P com as seguintes propriedades

(P1) $x \in P$, $y \in P$ implica $x + y \in P$ e $xy \in P$,

(P2) dado $x \in F$, então uma e somente uma das três possibilidades ocorre: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.

O leitor verá imediatamente que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, onde P é o conjunto $\mathbb{Q}^+$ dos racionais positivos. Isso motiva o nome de elementos positivos para os elementos do subconjunto P de um corpo ordenado qualquer F. Em um corpo ordenado F, pode-se introduzir uma relação de ordem entre seus elementos do seguinte modo:

$$x > y \quad \text{se} \quad x - y \in P.$$

No caso dos racionais essa é precisamente a ordem usual, pois $x \in \mathbb{Q}^+$ se $x > 0$.

EXERCÍCIO 1 - Seja 0 o zero de um corpo ordenado F. Demonstre que: (i) $x \in P$ se, e só se, $x > 0$; (ii) $0 > x$ se, e só se, $x \neq 0$ e $x \notin P$.

Deixamos ao leitor a verificação das seguintes propriedades, que são válidas em qualquer corpo ordenado:

(1) $x > y, \quad y > z \Rightarrow x > z$

(2) $x > y, \quad z > t \Rightarrow x + z > y + t$

(3) $x > y, \quad z > 0 \Rightarrow xz > yz$

(4) $x > 0, \quad xy > 0 \Rightarrow y > 0$

(5) $x > 0, \quad 0 > y \Rightarrow 0 > xy$

(6) $0 > x, \quad 0 > y \Rightarrow xy > 0$

(7) $x > y, \quad z$ qualquer $\Rightarrow x + z > y + z$

(8) Se $F \neq \{0\}$, então $0 < 1$.

(9) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(10) $a < b \Rightarrow -a > -b$

(11) $a < b < 0 \Rightarrow 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(12) $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

(O símbolo $\Rightarrow$, que se lê "implica", é usado para expressar que as asserções do lado esquerdo acarretam o que vem escrito do lado direito. Nos enunciados de teoremas, "$\Rightarrow$" substitui a palavra "então".)

Usamos ainda os seguintes símbolos: $\geq$, $<$, $\leq$, que têm o seguinte significado:

$$x \geq y \quad \text{se} \quad x > y \quad \text{ou} \quad x = y$$

$$x < y \quad \text{se} \quad y > x$$

$$x \leq y \quad \text{se} \quad y \geq x.$$

Além disso, utiliza-se a seguinte terminologia:

$x > y$ lê-se x maior que y

$x \geq y$ lê-se x maior ou igual a y

$x < y$ lê-se x menor que y

$x \leq y$ lê-se x menor ou igual a y.

<u>Cota superior</u>. Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F. Um elemento $x \in F$ é uma <u>cota superior</u> de A se $x \geq y$, para todo $y \in A$. Existem conjuntos que não têm cota superior. Por exemplo, considere o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais; é fácil de ver que o subconjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não tem cota superior (cf. Exercício 2, seção 1.4). Esse fato motiva a seguinte definição. Um subconjunto A de F se diz <u>limitado superiormente</u> se ele possui cota superior.

<u>Cota inferior</u>. De modo análogo, introduzimos os conceitos de cota inferior e conjunto limitado inferiormente. Um elemento $x \in F$ é uma <u>cota inferior</u> se $x \leq y$, para todo $y \in A$. Existem conjuntos que não possuem cota inferior. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros

não tem cota inferior no corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Um subconjunto A de um corpo ordenado F se diz <u>limitado inferiormente</u> se ele possui cota inferior.

<u>Supremo de um conjunto limitado superiormente</u>. Seja F um corpo ordenado e $A \subset F$ um subconjunto limitado superiormente. O <u>supremo</u> do conjunto A, que designamos por $\sup A$, é definido como a menor das cotas superiores de A (quando existe!). Em outras palavras, $x \in F$ é o supremo de A se

(i) x for cota superior de A, e

(ii) $x \geq z$, onde z é uma cota superior de A, implique $x = z$.

O Exercício 2 no final desta seção mostra um conjunto limitado superiormente que não possui supremo.

EXEMPLO 1 - Considere o corpo ordenado $\mathbb{Q}$, e o subconjunto A dos racionais maiores que 0 e menores que 1, i.e.

$$A = \{y \in \mathbb{Q}: 0 < y < 1\}.$$

Qualquer racional maior ou igual a 1 é cota superior, e $\sup A = 1$. É fácil de ver que $\sup B = 1$, onde $B = \{y \in \mathbb{Q}: 0 \leq y \leq 1\}$. Por esses exemplos, vemos que o sup (quando existe!) pode pertencer ou não ao conjunto.

<u>Ínfimo de um conjunto limitado inferiormente</u>. Seja F um corpo ordenado, e $A \subset F$ um subconjunto limitado inferiormente. O <u>ínfimo</u> de um conjunto A, que designamos por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores (quando existe!). Em outras palavras, $x \in F$ é o ínfimo de A se

(i) x for cota inferior de A, e

(ii) $x \leq z$, onde z é uma cota inferior de A, implique $x = z$.

O Exemplo 3, abaixo, mostra um conjunto que não possui inf.

EXEMPLO 2 - Considere no corpo ordenado dos racionais os conjuntos A e B definidos no Exemplo 1 acima. Vê-se que $\inf A = 0$ e $\inf B = 0$. Como no caso do sup, o inf (quando existe) pode pertencer ou não ao conjunto.

EXEMPLO 3 - Considere o seguinte subconjunto dos racionais

$$A = \{x \in \mathbb{Q}\colon x^2 > 2,\ x > 0\}.$$

Demonstraremos que A não tem inf (em $\mathbb{Q}$). Seja

$$B = \{x \in \mathbb{Q}\colon x^2 < 2,\ x > 0\}.$$

Como não existe racional tal que $x^2 = 2$, segue-se que dado um racional positivo r, então ou $r \in A$ ou $r \in B$.

Em primeiro lugar, provamos

(8) se $x \in A \Rightarrow$ existe $y \in A$ tal que $y < x$.

(9) se $x \in B \Rightarrow$ existe $y \in B$ tal que $x < y$.

Para provar (8) escrevemos $x = p/q$. À idéia é procurar um inteiro n tal que $y = (np-1)/nq$ pertença a A. Isso ocorre se $(np-1)^2/n^2q^2 > 2$, i.e.,

(10) $(p^2-2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0.$

Como $x \in A$ temos que $p^2 - 2q^2 > 0$. Logo, (10) se verifica para n suficientemente grande (quão grande?). De modo análogo provamos (9). A seguir, suponhamos que A tenha ínfimo, que designamos por x_o. Então $x_o \leq x$ para todo $x \in A$. À vista de (8), x_o não pode pertencer a A, pois, de outro modo haveria $y \in A$ tal que $y < x_o$, o que seria absurdo. Logo, x_o deve pertence a B. À vista de (9), existe pois $z \in B$ tal $x_o < z$. Como $z^2 < 2$, segue-se que z é cota inferior para A. Isso, porém, contradiz o fato de x_o ser o inf de A. Conclusão: A não tem inf.

EXERCÍCIO 2 - Usando um argumento análogo ao empregado no Exemplo 3, o leitor pode demonstrar que o conjunto B definido no Exemplo 3 não possui supremo.

EXERCÍCIO 3 - Um subconjunto de um corpo ordenado se diz <u>limitado</u> se é limitado superiormente e limitado inferiormente. Dê um exemplo de um conjunto limitado que não possui nem sup nem inf.

1.4 - Os números reais

Agora definimos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como sendo um corpo ordenado onde se verifica a seguinte propriedade:

Postulado de Dedekind. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ constituído de elementos positivos tem um ínfimo.

O Postulado de Dedekind realmente determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. (A rigor essa determinação é feita a menos de isomorfismos.) O corpo $\mathbb{R}$ assim definido contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais. Na realidade, essa correspondência goza da propriedade de preservar as operações de adição e multiplicação; correspondências biunívocas desse tipo tomam em álgebra o nome de isomorfismos. Para todos os efeitos, podemos simplificar essa questão do isomorfismo e simplesmente dizer que $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. A reta R é um belo modelo geométrico para o corpo $\mathbb{R}$: cada ponto de R representa um real, e vice-versa, a cada real corresponde um ponto de R. As afirmações feitas no presente parágrafo requerem demonstração. O leitor poderá encontrá-las, por exemplo, na referência [2].

Deixamos ao leitor as verificações dos seguintes fatos que decorrem diretamente do Postulado de Dedekind.

EXERCÍCIO 1 - Se um conjunto A de $\mathbb{R}$ tem uma cota inferior, então A tem inf. (Sugestão: seja d uma cota inferior de A, considere o conjunto $A-d = \{x \in \mathbb{R}: x = a-d, a \in A\}$, isto é, a translação do conjunto por $-d$, de modo que o novo conjunto é constituído de reais positivos.)

EXERCÍCIO 2 - Se B é um conjunto que tem uma cota superior, então $\sup B = -\inf(-B)$, onde $-B = \{x \in \mathbb{R}: x = -b, b \in B\}$. Daí se segue que todo conjunto não vazio, que tem cota superior, tem um sup.

EXERCÍCIO 3 - Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números inteiros positivos não tem sup. (Sugestão: suponha que m é o sup de $\mathbb{N}$ e mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 < n$.)

EXERCÍCIO 4 - Mostre que dado um real positivo a, existe um inteiro positivo n tal que $\frac{1}{n} < a$.

EXERCÍCIO 5 - Mostre que o corpo dos reais é <u>arquimediano</u> isto é, dados dois reais a, b, com

$0 < a < b$, existe um inteiro n tal que $na > b$.

EXERCÍCIO 6 - Sejam $x \in R$ e $A = \{r \in R: r \in Q \text{ e } x < r\}$. Mostre que $x = \inf A$. (Sugestão: chame b o ínfimo de A; primeiro mostre que a asserção $b < x$ não pode ser verdadeira; a seguir admita que $b > x$ e use o Exercício 5 para tomar n tal que $\frac{1}{n} < b-x$. Tome $x \in A$ tal que $b < r < b + \frac{1}{n}$, e mostre que $x < r - \frac{1}{n} < b$, chegando a uma contradição).

EXERCÍCIO 7 - Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ é <u>denso</u> em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, dados dois números reais quaisquer $x < y$, existem racionais r tais que $x < r < y$. (Sugestão: use o Exercício 6).

Os números reais, que não são racionais, são chamados <u>irracionais</u>. Um modo de produzir exemplos de números reais é tomar inf de subconjuntos não vazios de racionais positivos. Por exemplo, o conjunto A do Exemplo 3 da seção 1.3, olhado como um subconjunto dos números reais, tem um ínfimo $b \in \mathbb{R}$, em virtude do Postulado de Dedekind. Provamos na seção 1.3 que b não é racional. Eis pois, um exemplo de um número irracional; esse número é designado por $\sqrt{2}$. A justificação dessa notação jaz no seguinte resultado.

"A equação $x^2 = 2$ tem uma e só uma solução real positiva".

Esse é um resultado sobre a existência e unicidade de solução para uma equação. A unicidade é facilmente provada supondo que existem duas soluções reais positivas a e b: $a^2 = 2$ e $b^2 = 2$ o que acarreta $a^2-b^2 = 0$ ou seja $(a-b)(a+b) = 0$. Como $a > 0$ e $b > 0$ temos $a+b > 0$ o que implica $a-b = 0$, ou seja $a = b$.

A existência de solução real positiva para $x^2 = 2$ é obtida provando-se que $b = \inf. A$ (A, o conjunto do exemplo 3 da seção 1.3) satisfaz à equação: $b^2 = 2$. Basta mostrar que $b^2 < 2$ ou $b^2 > 2$ não são verdadeiras. Primeiro suponha que $b^2 < 2$. Como

$$(b + \frac{1}{n})^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b+1}{n},$$

vê-se que $(b + \frac{1}{n})^2 < 2$ se $n > \frac{2b+1}{2-b^2}$. Isso mostra que $b + \frac{1}{n}$ é uma cota inferior do conjunto A; portanto b não poderia ser o ínfimo de A. Por outro lado, suponha que $b^2 > 2$. É fácil de ver, como se fez acima, que se $n \in N$ for tomado adequadamente, teremos $(b - \frac{1}{n})^2 > 2$. Em virtude do Exercício 7, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $b - \frac{1}{n} < r < b$. Logo $2 < r^2 < b^2$ o que contradiz o fato de b ser o ínfimo de A.

EXERCÍCIO 8 - Mostre por indução que

$$x^n-y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+x^{n-j}y^{j-1}+\ldots+y^{n-1}),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $x,y \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 9 - Seja a um número real positivo e p um inteiro positivo. Mostre que a equação $x^p = a$ tem uma e só uma solução real positiva. Essa solução que se designa por $\sqrt[p]{a}$ ou $a^{\frac{1}{p}}$, é chamada a <u>raiz p</u> (ou <u>p-ésima</u>) de a. (Sugestão: use o Exercício 8 para provar a unicidade. A existência é demonstrada de modo análogo ao que se fez para a raiz quadrada).

<u>Potências</u>. Se a é um real positivo e p é um inteiro positivo, a^p designa o produto de a por si mesmo p vezes. Usando o Exercício 9, $a^{\frac{1}{p}}$ designa a solução positiva (única) da equação $x^p = a$. Definimos agora $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{1/q}$ para p e q inteiros positivos. Finalmente se r é uma racional negativo definimos $a^r = (a^{-r})^{-1}$, isto a^r é o inverso do real a^{-r}, que já está definido pois $-r > 0$. Adiamos para o Capítulo 6 a questão de atribuir um sentido a expressões como $2^{\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{3}}$, e, em geral a^x, onde a é um real positivo e x é um número irracional.

EXERCÍCIO 10 - Mostre que se r e s são racionais e a é um real positivo, então $a^r a^s = a^{r+s}$.

<u>Comentários sobre a definição de número real</u>. No começo desta seção definimos os números reais como sendo um corpo ordenado onde vale o Postulado de Dedekind. Põe-se, imediatamente, a questão da existência de um tal corpo. Essa questão deve receber uma resposta positiva para que a definição dada de número real tenha sentido. Não é fácil provar que existe um corpo nas condições pedidas. Do ponto de vista histórico, essa questão foi resolvida relativamente tarde. Coube ao matemático alemão Richard Dedekind, fazer a primeira apresentação rigorosa do conceito de número real. Isso foi feito em um pequeno livro "Continuidade e Números Irracionais", publicado em 1872. A ele se deve a noção de "corte", com a qual é possível provar que <u>existe</u> um corpo ordenado onde vale o postulado de Dedekind, veja abaixo. Há um outro modo de introduzir os reais, através das chamadas sucessões de Cauchy, cf. seção 1.11.

A atitude adotada no presente trabalho, além da vantagem de introduzir os números reais sem maiores delongas, fornece-nos os elementos de prosseguir com absoluto rigor. Cremos que essa é a melhor atitude a tomar em cursos introdutórios de cálculo ou análise.

Somente a título de ilustração, faremos alguns comentários sobre o método de Dedekind. O leitor interessado poderá ver os detalhes na referência [10].

Cortes de Dedekind. O método consiste em partir o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais e construir um outro corpo do seguinte modo. Primeiramente, um subconjunto A dos racionais é chamado um corte se as três condições seguintes são satisfeitas: (i) A é não vazio e não contém todos os racionais, (ii) se $r \in A$, $s \in \mathbb{Q}$ e $s < r$ então $s \in A$, (iii) dado $r \in A$, existe $t \in A$ tal que $r < t$. Considere o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os cortes. (Um elemento de $\mathbb{C}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$.) Em $\mathbb{C}$, pode-se definir operações de adição e multiplicação e provar que, com essas operações, $\mathbb{C}$ é um corpo. Define-se, também, uma relação de ordem e prova-se, então, que $\mathbb{C}$ é um corpo ordenado. Finalmente, demonstra-se que esse corpo satisfaz o Postulado de Dedekind. Observe que, seguindo essa apresentação, o dito postulado deve ser chamado Teorema de Dedekind!

1.5 - Desigualdades

Designemos por $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos elementos positivos do corpo ordenado $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}^+$ contém todos os racionais positivos.

O valor absoluto de um número real a, que se designa por $|a|$, é definido do seguinte modo:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geqq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, o valor absoluto de 3 é 3, e o valor absoluto de -3 também é 3. Vê-se que, em geral, temos para qualquer real a:

$$|a| = |-a|.$$

Seja a um número real positivo. Observamos na seção anterior que a equação $x^2 = a$ tem uma única solução positiva, isto é, existe $b \in R^+$ tal que $b^2 = a$. Este valor é chamado a raiz quadrada positiva (ou simplesmente a raiz quadrada) de a, e será representada por $\sqrt{a}$. Se considerarmos a equação $x^2 = 0$, vemos que $x = 0$ é solução; logo, a raiz quadrada de 0 é 0. Se considerarmos a equação $x^2 = a$, como $a < 0$, vemos que ela não pode ter solução, pois, o quadrado de um número real, positivo ou negativo, nunca é negativo. Logo, um número real negativo não tem raiz quadrada. Provaremos agora os seguintes fatos relativos a raiz quadrada.

TEOREMA 1.1 - Seja c um real qualquer. Então $|c| = \sqrt{c^2}$.

<u>Demonstração</u>: Imediato se $c \geq 0$. Se $c < 0$, então $c^2 = |c|^2$ e, portanto, $\sqrt{c^2} = \sqrt{|c|^2} = |c|$, onde se usou na última igualdade o resultado já provado para o caso de $c \geqq 0$.

TEOREMA 1.2 - <u>Sejam</u> a <u>e</u> b <u>reais positivos, tais que</u> $a < b$. <u>Então</u> $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

<u>Demonstração</u>: Escrevamos $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$. Daí $x^2 = a$ e $y^2 = b$. Como $a < b$, então $x^2 < y^2$. Isto é, $y^2 - x^2 > 0$, ou $(y-x)(y+x) > 0$. Sendo x e y positivos, temos que $y+x$ é positivo. Pela propriedade (4) da seção 1.3, segue-se que $y - x > 0$. Daí $x < y$, como queríamos provar.

Temos as seguintes propriedades do valor absoluto:

(i) $|ab| = |a|\,|b|$

(ii) $|a+b| \leqq |a|+|b|$ (desigualdade do triângulo)

(iii) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a-b|$ (2ª desigualdade do triângulo)

quaisquer que sejam os reais a e b.

<u>Demonstração de (i)</u>: Consideremos os três casos possíveis. Primeiro, $a \geq 0$ e $b \geq 0$; então (i) se reduz a $ab = ab$. Segundo, $a \geq 0$ e $b < 0$; então $ab \leq 0$, e temos $|ab| = -ab$, $|a| = a$ e $|b| = -b$, o que implica (i). Terceiro, $a < 0$ e $b < 0$; então $ab > > 0$, e temos $|ab| = ab$, $|a| = -a$, $|b| = -b$, e daí (i).

Não há necessidade de analisar um quarto caso, $a < 0$ e $b > 0$, pois, os papeis de a e b na relação (i) são perfeitamente simétricos, em virtude da comutatividade do produto de reais.

Demonstração de (ii): A demonstração poderia ser feita, como no caso anterior, pelo exame das diversas possibilidades. Preferimos, porém, dar outra demonstração, a fim de ilustrar um outro método. Da definição de valor absoluto, segue-se que para qualquer real c, temos que

$$c \leq |c|,$$

a igualdade ocorrendo se $c \geq 0$. Portanto, temos

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|,$$

onde utilizamos (i) para escrever a igualdade. Multiplicando ambos os membros por 2 e somando $a^2 + b^2$ a cada membro temos

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2\,|a|\,|b| + b^2$$

ou

$$(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

em virtude de $a^2 = |a|^2$. Tomando a raiz quadrada de ambos os membros, e usando os Teoremas 1.1 e 1.2 obtemos a desigualdade (ii), que queríamos demonstrar.

EXERCÍCIO 1 - Usando (ii) acima demonstre (iii).

O conjunto $\mathbb{R}^+$ é chamado a <u>semi-reta positiva</u>. Por analogia, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}: x < 0\}$ é a semi-reta negativa. Em geral, uma semi-reta é um conjunto de uma das formas seguintes.

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$$

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}, \quad (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$$

onde a e b são reais quaisquer. Nos dois primeiros casos, a semi-reta não inclui a extremidade, e então é chamada <u>semi-reta aberta</u>. Nos dois últimos casos, ela inclui a extremidade, e, então, é chamada <u>semi-reta fechada</u>. Veja figura 3 abaixo:

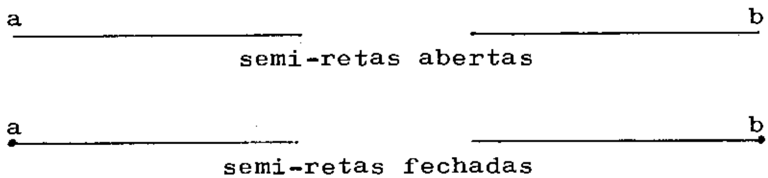


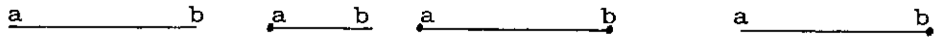
Fig. 3

Dados dois reais a e b, como $a < b$, um conjunto de uma das quatro formas abaixo é chamado um intervalo.

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}, \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}.$$

O intervalo (a,b) não inclui suas extremidades e é chamado um <u>intervalo aberto</u>. O intervalo $[a,b]$ inclui suas extremidades e é denominado <u>fechado</u>. Veja figura 4 abaixo:



intervalo aberto   intervalo fechado

Fig. 4

O <u>interior</u> de um intervalo de um dos quatro tipos acima é, por definição, o intervalo aberto (a,b). Vê-se que o interior do intervalo pode coincidir com o próprio intervalo.

Por uma questão de uniformidade na nomenclatura, as semi-retas e a reta inteira são chamadas também intervalor ou, mais precisamente, <u>intervalos infinitos</u>.

Definimos interior de um intervalo infinito de modo análogo a interior de um intervalo (finito). Por exemplo, o interior de $[a,\infty)$ é (a,∞).

Intervalos também podem ser descritos em termos do valor absoluto. Por exemplo:

$$(-3,3) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| < 3\}$$
$$[-4,4] = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| \leq 4\}.$$

Nestes exemplos, o centro do intervalo (i.e., o ponto medic do intervalo) é a origem O da reta. Mostraremos agora que intervalos, não necessariamente com centro na origem, também podem ser descritos usando o valor absoluto. Por exemplo, consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}: |x-1| < 2\}.$$

Pela definição de valor absoluto, temos que se $x \in A$, então há duas possibilidades:

1) $x - 1 \geq 0$ e, neste caso, $x - 1 < 2$. Estas duas desigualdades dão $x \geq 1$ e $x < 3$. Logo, neste caso, x pertence ao intervalo $[1.3)$.

2) $x - 1 < 0$ e, neste caso, $-(x-1) < 2$. Estas desigualdades dizem que $x < 1$ e $x > -1$. Logo, neste caso x pertence ao intervalo $(-1,1)$.

Juntando os dois casos, vemos que A é precisamente o intervalo $(-1,3)$.

Pelo mesmo argumento desenvolvido acima, o leitor pode provar que:

$$\{x \in \mathbb{R}: |x+3| < 1\} = (-4,-2)$$

$$\{x \in \mathbb{R}: |x-3| \leqq 2\} = [1,5] .$$

Trace uma figura e observe que no primeiro caso o número -3 é o centro do intervalo e 1 é a metade do comprimento do intervalo. O <u>comprimento</u> de um intervalo (de qualquer um dos tipos acima) com extremidades $a < b$ é por definição o número real positivo $b-a$. A metade do comprimento de um intervalo é chamado o raio do intervalo. Assim no intervalo $[1,5]$ o centro é 3 e o raio 2. Em geral, o leitor poderá provar que se a e r são reais quaisquer, com $r > 0$, então

$$\{x \in \mathbb{R}: |x+a| < r\} = (-a - r, -a + r)$$

$$\{x \in \mathbb{R}: |x+a| \leq r\} = [-a - r, -a + r]$$

$$\{x \in \mathbb{R}: |x-a| < r\} = (a - r, a + r) .$$

Dados dois números reais a e b, dizemos que $|a-b|$ é a distância entre eles. Tal conceito tem um significado geométrico evidente, se lembrarmos a correspondência entre os números reais e os pontos da reta. O comprimento de um intervalo $[a,b]$, (ou $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$) é então a distância entre suas extremidades.

EXERCÍCIO 2 - Usando valor absoluto escreva expressões para os seguintes conjuntos:

(i) o conjunto dos pontos cuja distância a 1 é menor ou igual a 4.

(ii) o conjunto dos pontos cuja distância a -5 é menor que 2.

(iii) o conjunto dos pontos cuja distância a 6 é maior que 3.

EXERCÍCIO 3 - Descreva geometricamente o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}: |x-2| \leq |a-2|\},$$

considerando os vários casos possíveis para o parâmetro a.

EXERCÍCIO 4 - Mostre que os dois conjuntos abaixo são iguais

$$\{x: x < 4\} \quad \text{e} \quad \{x: |x-2| < |x-6|\}$$

(Observe que usando a noção de distância, o segundo conjunto pode ser descrito como o conjunto dos pontos cuja distância a 2 é menor que sua distância a 6.)

EXERCÍCIO 6 - (A desigualdade do triângulo generalizada.) Sejam a, b e c números reais. Prove que

$$|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

(Esse resultado pode ser provado, usando indução, para qualquer número (finito) de termos, i.e.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|).$$

EXERCÍCIO 7 - Descreva geometricamente os seguintes conjuntos:

$$\{x \in \mathbb{R}: 1 < \frac{1}{x} < 2\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} < \frac{1}{x}\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}: 9 < x^2 < 16\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}: 0 < x^3\}.$$

EXERCÍCIO 8 - Descreva geometricamente os conjuntos:

$$\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 - x - 6 < 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 2x + 1 > 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 + x + 1 < 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}:\ (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0\}$$

EXERCÍCIO 9 - Se $a < x < b$, mostre que $|x| < |a| + |b|$. (Sugestão: $x < b$ implica $x < |b|$; $a < x$ implica $-x < -a < |a|$).

EXERCÍCIO 10 - Mostre que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ quaisquer que sejam os reais a e b.

EXERCÍCIO 11 - Se a e b são reais positivos mostre que $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$. (Sugestão: use os produtos notáveis da álgebra do curso secundário). Essa desigualdade diz que a média geométrica de dois números reais positivos $(\sqrt{xy})$ é menor ou igual que a média aritmética $(\frac{x+y}{2})$ desses mesmos números. Mostre que geometricamente essa desigualdade expressa o fato que a altura de um triângulo retângulo tendo por base a hipotenusa é menor ou igual que metade da hipotenusa. Quando é que as médias aritmética e geométrica são iguais? Que quer dizer isso geometricamente?

EXERCÍCIO 12 - A média harmônica de dois números reais positivos a e b é definida como sendo o número h tal que $h^{-1} = \frac{1}{2}(a^{-1} + b^{-1})$. Mostre que a média harmônica é menor ou igual que a média geométrica. Quando é que essas duas médias são iguais?

EXERCÍCIO 13 - (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

Se $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ são números reais mostre que $\left(\sum_{n=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. (Sugestão: o trinômio em t, $\sum_{i=1}^{n} (x_i - t y_i)^2$, é sempre ≥ 0. Qual é seu discriminante?)

EXERCÍCIO 14 - Se $a_1, \ldots, a_n$ são reais positivos mostre que

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n).$$

1.6 - Sucessões numéricas

Uma <u>sucessão numérica</u> (ou simplesmente, <u>sucessão</u>) é uma função $s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida no conjunto dos números inteiros positivos tomando valores reais. Assim a cada $n \in \mathbb{N}$ corresponde um real a_n. Observamos que os a_n's não são necessariamente diferentes. Os elementos a_n são chamados os <u>termos da sucessão</u>, e a notação (a_n) é usada para designar a sucessão.

EXEMPLOS:

(i) $1, 1/2, 1/3,\dots,1/n,\dots$

(ii) $1, 3, 1/2, 3, 1/3, 3, 1/4, 3,\dots$

(iii) $1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3,\dots.$

(iv) $1, 2, 1, 4,\dots$

(v) $2, 2, 2,\dots$

(vi) $1, 2, 3, 4,\dots$

Atenção: A notação (a_n) não deve induzir o leitor a pensar que uma sucessão é um conjunto de reais. É essencial ter uma definição de sucessão que implique que a sucessão (i) acima seja diferente de $1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, 1,\dots.$ Quando nos referimos ao conjunto formado pelos termos da sucessão, usaremos a notação $\{a_n\}$.

Uma sucessão (a_n) converge para um número real r, se, para qualquer real $\epsilon > 0$ dado, existir um número natural n_o (que pode depender de ϵ) tal que

(1) $$|r - a_n| < \epsilon ,$$

para todo $n \geq n_o$.

Na verdade, ao testar a convergência de uma sucessão, nós nos interessamos somente no que se passa quando são dados "pequenos" ϵ's. Isso porque se a desigualdade (1) se verificar para um dado $\epsilon_o > 0$, ela necessariamente se verificará para todo $\epsilon > \epsilon_o$. O número r é chamado o <u>limite</u> da sucessão, e toda sucessão que converge é denominada <u>convergente</u>. Usamos as notações $a_n \to r$, e $r = \lim a_n$.

OBSERVAÇÕES: 1) A sucessão (i) acima converge para 0.

De fato, dado um $\epsilon > 0$, tomaremos um $n_o > 1/\epsilon$. Então, para todo $n > n_o$, teremos $n > 1/\epsilon$, o que implica $1/n < \epsilon$ ou $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

2) A sucessão (ii) acima não converge, pois, por um lado, há termos da sucessão iguais a 3, para n's tão grande quanto se queira e, por outro lado, os termos a_n para n ímpar convergem para 0. Poderíamos formalizar esse argumento do seguinte modo: seja dado $\epsilon = 1$; então, qualquer que fosse o real r, o intervalo $\{x \in \mathbb{R} : |x-r| < 1\}$ não poderia conter o número 3 e algum termo a_n para n ímpar.

3) Por um argumento semelhante ao de 1) acima podemos provar que a sucessão (iii) converge para 0.

4) É imediato que a sucessão (iv) não pode convergir.

5) A sucessão (v) obviamente converge para 2.

Quando uma sucessão não converge, diz-se que <u>diverge</u> e ela é então chamada uma <u>sucessão divergente</u>. Uma sucessão ao divergir pode fazê-lo de modo que os termos a_n se tornam "arbitrariamente grandes". Formalmente, isso quer dizer que dado qualquer real $M > 0$, existe n_o (que pode depender de M) tal que para todo $n \geq n_o$ temos $a_n > M$. Neste caso, dizemos que a sucessão (a_n) <u>tende para</u> $+\infty$. Usamos a notação $a_n \to +\infty$ ou $\lim a_n = +\infty$.

Por exemplo, a sucessão (vi) tende para $+\infty$. De modo análogo podemos definir o conceito de uma sucessão tender para $-\infty$: $a_n \to -\infty$ se dado qualquer $M > 0$ existe n_o (que pode depender de M) tal que, para todo $n \geq n_o$, temos $a_n < -M$.

Uma sucessão pode divergir sem que seus termos se tornem arbitrariamente grandes, como por exemplo, a sucessão (ii) acima. A divergência, neste caso, decorre de que os termos se "acumulam" junto a dois pontos diferentes, 3 e 0.

Seja $A = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. A restrição $s|A$ de uma sucessão $s\colon N \to \mathbb{R}$ ($s\colon n \to a_n$) a A é chamada uma <u>subsucessão</u>. Portanto a subsucessão $s|A$ é uma sucessão definida do seguinte modo: a cada $j \in N$ corresponde o real $s(n_j) = a_{n_j}$.

EXERCÍCIO 1 - Seja k um número real positivo dado. Prove que uma sucessão (a_n) converge para r se, dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que $|a_n - r| < k\epsilon$ para $n \geq n_o$.

EXERCÍCIO 2 - O limite de uma sucessão convergente é único, isto é, se para uma dada sucessão (a_n) tem-se $\lim a_n = r$ e $\lim a_n = s$, então $r = s$.

EXERCÍCIO 3 - Mostre que as sucessões (ii) e (iv), apesar de não convergirem, contêm subsucessões convergentes. Dê um exemplo de uma sucessão que não contém nenhuma subsucessão convergente.

EXERCÍCIO 4 - Seja (a_n) uma sucessão convergente. Mostre que qualquer subsucessão é também convergente. Além disso, se o limite de (a_n) é r, o limite de qualquer subsucessão é também r.

EXERCÍCIO 5 - Dê exemplo de uma sucessão que contém subsucessões convergentes para cada $n \in N$. (Em outras palavras, os termos da sucessão se "acumulam" em torno de todos os inteiros positivos).

*EXERCÍCIO 6 - Dê exemplo de uma sucessão que contém subsucessões convergentes para cada real do intervalo (0.1).

*EXERCÍCIO 7 - (lim sup). Dada uma sucessão (a_n), define-se o <u>limite superior</u> de (a_n) (o qual se representa por $\lim\sup a_n$) como o número real s que goze da seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$ existe apenas um número finito de termos de (a_n) maiores que

$s+\epsilon$, e existe um número infinito de termos de (a_n) maiores que $s-\epsilon$. Para entender bem esse conceito, determine os lim sup das sucessões exemplificadas acima. Observe que se a sucessão converge, então seu limite coincide com o lim sup. As sucessões (iv) e (vi) não tem lim sup. Mostre que se uma sucessão tem lim sup, então existe uma subsucessão que converge para esse lim sup.

*EXERCÍCIO 8 - (lim inf). Dada uma sucessão (a_n) define-se o limite inferior de (a_n) (o qual se representa por $\liminf a_n$) como sendo o número σ que goze da seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$ existe apenas um número finito de termos (a_n) menores que $\sigma-\epsilon$, e existe um número infinito de termos de (a_n) menores que $\sigma+\epsilon$. Analise os exemplos. Prove resultados análogos aos do lim sup.

1.7 - Propriedades do limite

Propriedade 1. Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões convergentes, então a sucessão $(a_n + b_n)$ é convergente, e

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

<u>Observação</u>: Dê um exemplo para mostrar que (a_n) e (b_n) podem divergir, mas $(a_n + b_n)$ converge.

<u>Propriedade 2</u>. Se (a_n) e (b_n) são sucessões convergentes, então a sucessão (a_nb_n) é convergente, e

$$\lim(a_nb_n) = (\lim a_n)(\lim b_n).$$

<u>Observação</u>: Em particular, se (b_n) fosse uma sucessão constante, isto é, $b_n = b$ para todo n, a Propriedade 2 se reduziria às seguintes asserções: "se (a_n) é convergente, então (ba_n) é convergente, onde b é um real qualquer; além disso, tem-se

$$\lim(ba_n) = b \lim a_n \text{ ".}$$

Decorre, pois, que $\lim(-a_n) = -\lim a_n$. E isso, juntamente com a Propriedade 1, implica que a diferença (a_n-b_n) de duas sucessões convergentes é convergente, e

$$\lim(a_n-b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

<u>Propriedade 3</u>. Se (a_n) é uma sucessão convergente, então a sucessão $(|a_n|)$ dos valores absolutos é também convergente, e

$$\lim|a_n| = |\lim a_n|.$$

<u>Propriedade 4</u>. Se (a_n) é uma sucessão convergente tal que $a_n \neq 0$ para todo n, e $\lim a_n \neq 0$,

então a sucessão $(1/a_n)$ é convergente, e

$$\lim(1/a_n) = 1/\lim a_n.$$

<u>Propriedade 5</u>. Se (a_n) é uma sucessão convergente tal que $a_n > 0$ e $\lim a_n = 0$, então $(1/a_n)$ tende para $+\infty$. Reciprocamente, se (b_n) tende para $+\infty$, e $b_n > 0$ para todo n, então a sucessão $(1/b_n)$ converge para 0.

<u>Observação</u>: Uma propriedade análoga pode ser enunciada com relação a $-\infty$. Pondo as duas asserções em um enunciado único teremos: "se $a_n < 0$ para todo n, então $\lim a_n = 0$ se, e só se, $\lim(1/a_n) = -\infty$ ".

O leitor pode concluir facilmente que não é necessário supor $a_n > 0$ <u>para todo</u> n na Propriedade 5 (ou $a_n < 0$ para todo n na observação acima). De fato, como a convergência ou não de uma sucessão é conseqüência do comportamento da sucessão a partir de um certo n_o, o que se passa em um <u>número finito</u> de termos da sucessão não perturba as questões de convergência. Então, no presente caso, poderíamos pedir $a_n \neq 0$ para todo n e $a_n > 0$ para n maior que um certo n_o. Exemplo: a sucessão $-10, -3, 10, -1, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ converge para 0, e sua inversa $-1/10, -1/3, 1/10, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots$ tende para $+\infty$.

<u>Propriedade 6</u>. Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões convergentes e $a_n \leq b_n$, para todo n, então

$$\lim a_n \leq \lim b_n .$$

<u>Observação</u>: Do que foi dito acima, a conclusão da Propriedade 6 é ainda válida se $a_n \leq b_n$ se verifica somente a partir de um certo n_o.

<u>Propriedade 7</u>. Se (a_n) e (b_n) são sucessões tais que $a_n \leq b_n$, para todo n (ou para n maior que um certo n_o), e (a_n) tende para $+\infty$, então (b_n) também tende para $+\infty$.

As Propriedades 6 e 7 tem bastante utilidade no cálculo explícito de alguns limites. Por exemplo, suponhamos que queremos calcular o limite de uma sucessão (a_n), e que podemos determinar duas outras sucessões (b_n) e (c_n) que têm o mesmo limite r, e tais que $b_n \leq a_n \leq$ $\leq c_n$. Então, pela Propriedade 6 acima, $\lim a_n = r$. Uma tal situação ocorre na seção 1.8. Uma outra situação que requer o uso de Propriedade 7 também lá ocorre.

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar as propriedades acima. Apenas para ilustrar o tipo de argumento que é usado nessas demonstrações, daremos a seguir a demonstração da Propriedade 2. Utilizaremos o seguinte teorema que é também importante em outras ocasiões.

TEOREMA 1.3 - Seja (a_n) uma sucessão convergente. Então existe $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$ para todo n.

Observação: Quando um tal k existe a sucessão é dita limitada. Portanto, o Teorema 1.3 poderia ser assim enunciado "toda sucessão convergente é limitada". Comparando os conceitos de sucessão limitada e de conjunto limitado (cf. seção 1.3), o leitor verá que uma sucessão é limitada se o conjunto $\{a_n\}$ for limitado.

Demonstração do Teorema 1.3 - Seja r o limite da sucessão. Então, dado ϵ, digamos $\epsilon = 1$, existe n_o tal que $|a_n - r| < 1$ para todo $n \geq n_o$. Usando a 2ª desigualdade do triângulo temos

$$|a_n| - |r| \leq \big||a_n| - |r|\big| \leq |a_n - r| < 1.$$

Logo, $|a_n| < |r| + 1$ para todo $n \geq n_o$. Seja agora k' o maior dos números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_o} - 1|$. É claro, pois, que se tomarmos k como sendo a maior dos dois números, k' e $|r| + 1$, então, $|a_n| \leq k$ para todo n, como queríamos provar.

Demonstração da Propriedade 2: Dado $\epsilon > 0$ existem números n_o' e n_o'' tais que

$$|a_n - r| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_o'$$

$$|b_n - s| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq n_o''$$

onde $r = \lim a_n$ e $s = \lim b_n$. Agora para provar que o limite de $(a_n b_n)$ é rs, deveremos obter uma majoração para $a_n b_n - rs$:

$$|a_n b_n - rs| = |a_n b_n - a_n s + a_n s - rs| \leq$$
$$\leq |a_n||b_n - s| + |a_n - r||s|.$$

Pelo Teorema 1.3 temos

$$|a_n b_n - rs| \leq k|b_n - s| + |a_n - r||s|,$$

onde k é tal que $|a_n| \leq k$ para todo n. Logo para n maior que n_o, onde n_o é o maior dos dois números n_o' e n_o'', temos

$$|a_n b_n - rs| \leq k\varepsilon + |s|\varepsilon.$$

Como k e $|s|$ são constantes, temos, à vista do Exercício 1 (seção 1.6), que $a_n b_n \to rs$.

EXERCÍCIO 1 - Se (a_n) é uma sucessão convergente tal que $a_n \neq 0$ para todo n e $\lim a_n \neq 0$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $|a_n| > \delta$ para todo n. Use esse resultado para demonstrar a Propriedade 4 acima.

EXERCÍCIO 2 - Se p é um inteiro positivo e (a_n) é uma sucessão convergente, mostre que (a_n^p) é também convergente e $\lim a_n^p = (\lim a_n)^p$. Observe que a sucessão (a_n^p) pode convergir sem que (a_n) convirja. Dê um exemplo.

EXERCÍCIO 3 - Se (a_n) é uma sucessão de termos positivos convergindo para 0, e q é um inteiro positivo, mostre que $\lim a_n^{1/q} = 0$. (Sugestão: raciocine por contradição suponha que dado $\epsilon > 0$, existe uma sucessão de inteiros positivos $n_1 < n_2 < \ldots$ tal que $a_{n_j}^{1/q} > \epsilon$).

EXERCÍCIO 4 - Se (a_n) é uma sucessão de termos positivos convergindo para $r > 0$, e q é um número inteiro positivo, mostre que $\lim a_n^{1/q} = r^{1/q}$. (Sugestão: use o Exercício 8 da seção 1.4 para escrever $a_n - r = (a_n^{1/q} - r^{1/q})(a_n^{(q-1)/q} + a_n^{(q-2)/q} r^{1/q} + \ldots)$. Em vista do Exercício 1 acima, obtemos $(a_n - r) \geq$ $\geq \text{const}(a_n^{1/q} - r^{1/q}) > 0$ e daí o resultado se segue).

EXERCÍCIO 5 - Se (a_n) é uma sucessão de termos positivos convergindo para $r \geq 0$ e s é um número racional positivo mostre que $\lim a_n^s = r^s$. Discuta os casos de s negativo, e de s nulo. Por que considerar apenas $a_n > 0$?

EXERCÍCIO 6 - Estude a convergência de (a_n^s) onde (a_n) é uma sucessão tendendo para $+\infty$ e $s \geq 0$

é um número racional.

EXERCÍCIO 7 - Calcule os limites das sucessões

$$\left(\frac{n}{n^2+2}\right), \quad \left(\frac{n^3}{4n^3+1}\right), \quad (n^r - n) \quad \text{onde} \quad r \neq 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

EXERCÍCIO 8 - Calcule o limite das sucessões

$$(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}), \quad (\sqrt{n^2+n} - n).$$

EXERCÍCIO 9 - Se (a_n) converge para a mostre que

$(\sigma_n) = \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$ também converge para a. Dê um exemplo para mostrar que (a_n) pode divergir e a sucessão (σ_n) correspondente pode convergir.

EXERCÍCIO 10 - Se (a_n) converge para 0 e (b_n) é limitada mostre que $(a_n b_n)$ converge para 0.

1.8 - Exemplos de sucessões

1) <u>Sucessão</u> (a^n) <u>onde</u> a <u>é um real</u>. Necessitamos da seguinte desigualdade.

LEMA 1.1 - <u>Se</u> r <u>é um real tal que</u> $r > -1$, <u>então</u>

(1) $$1 + nr \leq (1+r)^n \quad n \in \mathbb{N},$$

<u>Demonstração por indução</u>: A desigualdade é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos que seja verdadeira para um n_o e provemos que é também verdadeira para $n_o + 1$. (Isso feito, o princípio da indução nos dirá que a desigualdade é verdadeira para todo n.) Tomemos, então, a desigualdade (1) com $n = n_o$, e multipliquemos ambos os membros por $1+r$, que é um número positivo:

$$(1 + n_o r)(1 + r) \leq (1 + r)^{n_o+1},$$

que fornece

$$(2) \qquad 1 + (n_o + 1)r + n_o r^2 \leq (1 + r)^{n_o+1}.$$

Como $n_o r^2$ é positivo, o primeiro membro de (2) é maior que $1 + (n_o+1)r$, de onde se segue a desigualdade (1) para $n = n_o + 1$. Logo, o lema está provado.

<u>Observação</u>: Obviamente, a desigualdade (1) é válida para $r = -1$. De fato, neste caso (1) se reduz a desigualdade $1 - n \leq 0$, a qual se verifica, pois, $n \geq 1$.

Vejamos agora a análise da convergência de (a^n).

<u>Caso 1.</u> $a > 1$. Então, $a = 1 + r$ onde $r > 0$. Pela desigualdade (1) acima temos

$$a^n = (1 + r)^n \geq 1 + nr.$$

Pela Propriedade 7 da seção 1.7, segue-se que $a^n \to +\infty$.

<u>Caso 2</u>. $a < -1$. Os termos da sucessão alternam de sinal, de acordo com a paridade de n, e tendem em valor absoluto para $+\infty$. A sucessão também diverge neste caso.

<u>Caso 3</u>. $a = -1$. A sucessão é: $-1, 1, -1, 1, \ldots$, e diverge.

<u>Caso 4</u>. $a = 1$. A sucessão é: $1, 1, 1, 1, \ldots$, e converge.

<u>Caso 5</u>. $a = 0$. A sucessão é: $0, 0, 0, 0, \ldots$, e converge.

<u>Caso 6</u>. $0 < a < 1$. Então $a = \frac{1}{1+r}$ onde $r > 0$. Então pela desigualdade (1) escrevemos:

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr}.$$

Pela Propriedade 6, seção 1.7, segue-se que $\lim a^n = 0$.

<u>Caso 7</u>. $-1 < a < 0$. Os termos da sucessão alternam de sinal, mas a sucessão converge para 0.

2) <u>Sucessão</u> $(\sqrt[n]{a})$, <u>onde</u> a <u>é um real positivo</u>.

<u>Caso 1</u>. $a > 1$. Neste caso $\sqrt[n]{a} > 1$ e escrevemos

$$\sqrt[n]{a} = 1 + b_n \tag{3}$$

onde $b_n > 0$, e varia para cada n. De (3) obtemos

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n,$$

onde usamos a desigualdade (1) acima. Daí obtemos

$$0 < b_n \le \frac{a-1}{n}.$$

Pela Propriedade 6, seção 1.7, concluímos que $\lim b_n = 0$. Portanto, a sucessão $(\sqrt[n]{a})$ converge para 1, pois

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 + \lim b_n = 1.$$

<u>Caso 2</u>. $0 < a < 1$. Neste caso $\sqrt[n]{a} < 1$ e escrevemos

(4) $$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + c_n}$$

onde $c_n > 0$, e varia com n. De (4) e (1) obtemos

$$a = \frac{1}{(1 + c_n)^n} \le \frac{1}{1 + nc_n}.$$

De onde se segue

$$0 < c_n \le \left(\frac{1}{a} - 1\right)\frac{1}{n}.$$

Portanto, $c \to 0$ quando $n \to \infty$. E daí $(\sqrt[n]{a})$ converge para 1, também neste caso, pois,

$$\lim \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + \lim c_n} = 1.$$

3) <u>Sucessão</u> $(\sqrt[n]{n})$. Necessitamos da seguinte desigualdade.

LEMA 1.2 - Se r é um número real tal que $r \ge 0$, então,

(5) $$(1 + r)^n \ge 1 + nr + n(n - 1)r^2/2.$$

<u>Demonstração por indução</u>: A desigualdade (5) é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos (5) válida para

$n = n_o$ e provemos que ela é também válida para $n = n_o + 1$. (Feito isso, a desigualdade estará provada para todo n.) Tomemos (5) com $n = n_o$ e multipliquemos ambos os membros pelo número positivo $1 + r$. Teremos

$$(6) \qquad (1+r)^{n_o+1} \geq 1 + (n_o+1)r + n_o(n_o+1)r^2/2 + \\ + n_o(n_o-1)r^3/2.$$

Como o último termo no segundo membro de (6) é positivo, podemos eliminá-lo e a desigualdade em (6) fica preservada. Mas, então, teremos precisamente (5) para $n = n_o + 1$. O lema está provado.

<u>Observação</u>: É claro que sendo $r \geq 0$, a desigualdade (5) implica

$$(7) \qquad (1 + r)^n \geq n(n - 1)r^2/2.$$

Voltando à sucessão $(\sqrt[n]{n})$, escrevemos

$$(8) \qquad \sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad h_n > 0.$$

Aplicando (7):

$$n = (1 + h_n)^n \geq n(n - 1)h_n^2/2.$$

Daí se segue

$$0 < h_n \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2}.$$

Pela Propriedade 6, seção 1.7, temos que $\lim h_n = 0$.

Exemplos de sucessões crescentes são $(a_n) = n$ e $(a_n) = (\frac{n-1}{n})$.

TEOREMA 1.4 - *Seja* (a_n) *uma sucessão não decrescente tal que o conjunto* $\{a_n\}$ *tem uma cota superior (cf. seção 1.3). Então,* (a_n) *é convergente, e seu limite é o supremo do conjunto* $\{a_n\}$.

Demonstração: Seja m o sup do conjunto $\{a_n\}$, o qual existe em virtude do Postulado de Dedekind. Provaremos que (a_n) converge para m. Suponhamos, por contradição, que (a_n) não convirja para m. Isso quer dizer que existe um $\epsilon > 0$ com a propriedade que, para todo n_o, existe $n > n_o$ tal que $|a_n - m| > \epsilon$. (Isso é a negação da afirmativa: $a_n \to m$. Quando se faz uma negação, uma expressão como "dado" ou "para todo" é substituída por "existe um", e a expressão "existe um" é substituída por "para todo".) Observemos que a desigualdade $|x-m| > \epsilon$ quer dizer que o intervalo $[m - \epsilon, m + \epsilon]$ não contém x:

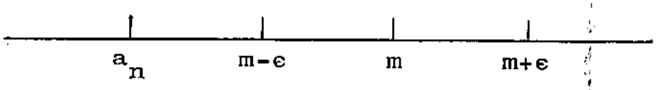


Fig. 5

Portanto, a negação acima diz que para todo n_o existe um $n > n_o$ tal que a_n não está no intervalo $[m-\varepsilon, m+\varepsilon]$. Como a sucessão $\{a_n\}$ é não decrescente, concluímos que nenhum a_n pode estar nesse intervalo. Logo, $m-\varepsilon$ é uma cota superior para $\{a_n\}$. Sendo $m-\varepsilon < m$, isso contradiz o fato de que m é o supremo de $\{a_n\}$. O absurdo proveio da suposição de que m não fosse o limite de (a_n). Logo, m é o limite de (a_n) e a demonstração está completa.

EXERCÍCIO 1 - Demonstre o seguinte resultado: "Seja (a_n) uma sucessão não crescente tal que o conjunto $\{a_n\}$ tem cota inferior. Então, (a_n) é convergente e seu limite é o ínfimo do conjunto $\{a_n\}$.

EXERCÍCIO 2 - Usaremos o resultado do Exercício 1 acima para dar uma outra demonstração de que $r^n \to 0$, quando $0 < r < 1$. Ora, (r^n) é uma sucessão decrescente e 0 é uma cota inferior para ela. Pelo corolário, existe $m \geq 0$ tal que $r^n \to m$. Pela Propriedade 2 de limites, segue-se que $r^n r = r^{n+1} \to rm$. Mas, (r^n) e (r^{n+1}) têm o mesmo limite m, pois à exceção do primeiro termo de (r^n) ambas coincidem. Como, então, (r^{n+1}) converge para m e para rm, segue-se que $rm = m$, o que implica $m = 0$, pois $r < 1$.

EXERCÍCIO 3 - (Teorema dos intervalos encaixantes). Seja

$[a,b] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$ uma sucessão de intervalos fechados, cada um contendo o seguinte. Suponha que a sucessão $(b_n - a_n)$ dos comprimentos de tais intervalos tende a 0. Demonstre que existe um único ponto c comum a todos esses intervalos. (Sugestão: Considere as sucessões monótonas (a_n) e (b_n) e aplique o Teorema 1.4.)

EXERCÍCIO 4 - Dê um exemplo para mostrar que a conclusão do exercício precedente não se verifica se os intervalos forem abertos. Mostre também que se os comprimentos dos intervalos não tenderem a zero, a intersecção pode ser vazia; para tal use intervalos infinitos.

EXERCÍCIO 5 - Mostre que a sucessão $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots,$ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ converge para 2. (Sugestão: seja s_n o termo geral da sucessão. É claro que $s_{n+1} = \sqrt{2+s_n}$. Mostre que $s_n \leq 2$, para todo n, do seguinte modo: admita que $s_n > 2$ e conclua que (s_n) é decrescente, o que não é possível. Use o Teorema 1.4 para concluir que $s_n \to s$. Portanto $s = \sqrt{2+s}$, de onde se segue $s = 2$.)

EXERCÍCIO 6 - Mostre $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, onde a é real positivo dado. (Sugestão: mostre que a partir de um certo n a sucessão torna-se decrescente. Representa por b_n o termo de ordem n. Tem-se $b_{n+1} = b_n \frac{a}{n+1}$.

Como (b_n) converge em virtude do Teorema 1.4 obtemos o resultado).

1.10 - O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Diz-se que um subconjunto A de R limitado se existe um $k > 0$ tal que $|x| \leq k$ para todo $x \in A$. Em outras palavras, um conjunto é limitado se ele está contido em algum intervalo. Ou ainda, se ele tem cota inferior e cota superior. Dizemos que uma sucessão (a_n) é limitada se ela está contida em um conjunto limitado A, isto é, se $a_n \in A$ para todo n. (Há um certo abuso de linguagem, pois, como chamamos a atenção anteriormente, uma sucessão não é um conjunto.)

TEOREMA 1.5 - (Bolzano-Weierstrass). Toda sucessão limitada (a_n) contém um subsucessão convergente.

Demonstração: Definimos um conjunto B de reais do seguinte modo: "$x \in B$ se existe no máximo um número finito de termos de (a_n) que são maiores que x ". Por exemplo, se M é o sup de A, onde A é um conjunto limitado contendo (a_n), então qualquer ponto $x > M$ pertence a B. Exemplifiquemos outra possibilidade: seja $(a_n) = (1/n)$; então, qualquer real positivo r pertence a B, pois, apenas um número finito de termos de (a_n) são maiores que r; neste exemplo, B seria precisamente o conjunto dos reais positivos. Um terceiro exemplo seria (a_n) a sucessão 1, 1/2, 1, 1/3, 1. 1/4,...; neste caso $x \in B$ se, e só se, $x \geq 1$; observe que pontos $x < 1$ e perto de 1 não pertencem a B, pois, apesar de apenas os termos iguais a 1 serem maiores que x, eles são em número infinito. Voltemos ao caso geral. B é um conjunto com cota inferior, pois, qualquer cota inferior de A é obviamente cota inferior de B. Portanto, pelo Postulado de Dedekind, B tem ínfimo, seja m tal ínfimo. Agora vamos construir uma subsucessão (a_{n_j}) de (a_n) tal que $a_{n_j} \to m$. O intervalo $(m-1, m+1)$ contém um número infinito de termos da sucessão (a_n), pois, de outro modo, m-1 estaria em B, e portanto, m não seria o ínfimo de B; tome um desses termos de a_n, a_{n_1}, então

$$|a_{n_1} - m| < 1.$$

O intervalo $(m - 1/2, m + 1/2)$ contém um número infinito de termos da sucessão (a_n), o que se prova do mesmo modo que no caso precedente; seja a_{n_2} um tal termo e tal que $n_2 > n_1$. (Observe que a_{n_2} pode ser igual a a_{n_1}!). Então,

$$|a_{n_2} - m| < 1/2.$$

Assim por diante, tomamos $a_{n_j} \in (m - 1/j, m + 1/j)$ e tal que $n_j > n_{j-1} > \ldots, n_2 > n_1$. Deste modo constroi-se uma subsucessão (a_{n_j}) de (a_n) tal que $a_{n_j} \to m$ quando $j \to \infty$, pois

$$|a_{n_j} - m| < 1/j.$$

Seja (a_n) uma sucessão e c um número real. Dizemos que c é um <u>ponto de acumulação da sucessão</u> (a_n) se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe um número infinito de inteiros n tais que $|a_n - c| < \epsilon$. É fácil de ver que c é um ponto de acumulação da sucessão (a_n) se e somente se ela contém uma subsucessão convergindo para c. O teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser também enunciado assim: "Toda sucessão limitada tem pelo menos um ponto de acumulação." É claro que tal ponto pode ser ou não um termo da sucessão.

EXEMPLOS: (i) a sucessão 2,2,... tem um único ponto de acumulação: 2.

(ii) a sucessão 1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4,... tem dois pontos de acumulação: 1 e 0.

(iii) a sucessão 1, 2, 1, 3, 1, 4,... tem um ponto de acumulação: 1.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um real c é um <u>ponto de acumulação do conjunto</u> A se, para cada $\epsilon > 0$, existe um número infinito de $y \in A$ tais que $|y-x| < \epsilon$.

É claro que conjuntos A com um número finito de pontos não podem ter pontos de acumulação. Há, por outro lado, conjuntos infinitos que não têm pontos de acumulação; por exemplo $\{1,2,3,\ldots\}$. Entretanto vale o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 1.1 - Todo conjunto infinito limitado A de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação.

Demonstração: Temos falado tanto em conjunto infinito, mas até agora não o definimos. Bom, não o fizemos porque todo mundo tem uma noção intuitiva do que queremos dizer. Mas, já que vamos dar uma demonstração em que esse conceito entra de modo essencial, será necessário formalizá-lo. Um conjunto A é infinito se existe uma aplicação injetiva de $\mathbb{N}$ em A, ou seja, existem $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, distintos dois a dois, isto é, $x_n \neq x_m$ para $n \neq m$. Agora demonstramos a Proposição 1.1 simplesmente considerando a sucessão (x_n) e aplicando o teorema de Bolzano-Weierstrass para concluir que existe um ponto de acumulação c da sucessão (x_n). É fácil de ver que tal c é também um ponto de acumulação de A.

EXEMPLOS: 1) Os pontos de acumulação do conjunto $[0,1] = \{x \in R: 0 \leq x \leq 1\}$ são todos os pontos de $[0,1]$.

2) Os pontos de acumulação do conjunto $\{x \in Q: 0 < x < 1\}$ são todos os pontos de $[0,1]$.

3) O conjunto $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ tem um único ponto de acumulação, 0.

Observação: Vê-se pelos exemplos acima que o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto dado pode ou não interseccionar o conjunto. Pode inclusive contê-lo.

EXERCÍCIO 1 - Dê um exemplo para mostrar que uma sucessão (a_n), como no teorema de Bolzano-Weierstrass pode conter mais de uma subsucessão convergente.

EXERCÍCIO 2 - Sem a hipótese de (a_n) ser limitada não se pode concluir que ela contenha uma subsucessão convergente. Dê um exemplo. Entretanto pode-se concluir que, quando tal coisa não ocorrer, então existe uma subsucessão convergindo para $-\infty$ ou $+\infty$.

EXERCÍCIO 3 - Releia a demonstração anterior e se convença que m é o limite superior da sucessão (a_n). Mostre que uma sucessão (a_n) limitada tem limite inferior. (Veja as definições de lim sup e lim inf, nos Exercícios 7 e 8 da seção 1.6).

EXERCÍCIO 4 - Seja S o conjunto dos pontos de acumulação de uma sucessão (a_n). O exemplo que você construiu no Exercício 2 acima serve para mostrar que S pode ser vazio. Supondo (a_n) limitada mostre que $\sup S = \limsup a_n$ e $\inf S = \liminf S$.

EXERCÍCIO 5 - Demonstre as seguintes propriedades dos lim inf e lim sup de sucessões limitadas:

(i) $\liminf a_n = -\limsup (-a_n)$.

(ii) $\limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

(Sugestão para (ii): seja $s = \limsup(a_n+b_n)$ e seja $(a_{n_j} + b_{n_j})$ uma subsucessão convergindo para s. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existem subsucessões de (a_{n_j}) e (b_{n_j}) convergindo para r_1 e r_2, respectivamente. Logo $s = r_1 + r_2$. Use o Exercício 4 acima para concluir a demonstração).

EXERCÍCIO 6 - Através de um exemplo mostre que desigualdade estrita pode ocorrer em (ii) do Exercício 5.

EXERCÍCIO 7 - Prove que $\liminf(a_n+b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$.

EXERCÍCIO 8 - Analise (i) e (ii) do Exercício 5 no caso de sucessões não limitadas.

1.11 - O critério de Cauchy

A presente seção trata de um critério que caracteriza a convergência de uma sucessão. Ele oferece uma maneira de saber se uma dada sucessão é convergente sem se ter o conhecimento prévio do limite. Isso é importante pois se em alguns casos se tem uma indicação óbvia do que venha a ser o limite, em outros casos o número que é o limite da sucessão é definido precisamente pela sucessão e não se tem para ele uma representação decimal ou fracionária simples. Tal limite é um número real, que pode ser determinado aproximadamente tomando-se um termo da sucessão; quanto maior fôr a ordem de tal termo melhor será a aproximação.

TEOREMA 1.6 - (Critério de Cauchy). Uma sucessão (a_n) é convergente se, e só se, dado $\epsilon > 0$ existe $n_o \in N$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para $m, n \geq n_o$.

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que (a_n) seja convergente e seja r seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$ existe n_o tal que $|a_n - r| < \epsilon/2$ para $n \geq n_o$. Logo, se n e m são maiores que n_o temos, usando a desigualdade do triângulo:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - r| + |a_m - r| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que a condição do teorema seja satisfeita e provemos que (a_n) é convergente. Devemos, pois, descobrir o limite r. Pela hipótese, dado $c = 1$ existe n_o tal que

$$|a_n - a_m| < 1, \quad \text{para} \quad n, m \geq n_o.$$

Logo,

$$|a_n - a_{n_o}| < 1, \quad \text{para} \quad n \geq n_o .$$

Da desigualdade do triângulo segue-se então:

$$|a_n| \leq |a_{n_o}| + |a_n - a_{n_o}| < 1 + |a_{n_o}| \quad \text{para} \quad n \geq n_o.$$

Seja agora k' o maior dos números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_o-1}|$, e seja k o maior dos dois números, k' e $1 + |a_{n_o}|$. Portanto,

$$(1) \qquad |a_n| \leq k, \quad \text{para todo} \quad n.$$

Aplicando o teorema de Bonzano-Weierstrass, segue-se que (a_n) contém uma subsucessão convergente (a_{n_j}), e seja r seu limite. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $n_o' \in \mathbb{N}$ tal que

$$(2) \qquad |a_{n_j} - r| < \epsilon$$

para $n_j \geq n_o'$. Por outro lado, em virtude da hipótese, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_o'' \in N$ tal que

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

para $n, m \geq n_o''$. Agora, pela desigualdade do triângulo, temos

(3) $$|a_m - r| \leq |a_m - a_n| + |a_n - r|$$

para quaisquer termos a_n e a_m de (a_n). Logo, se em (3) tomamos $m \geq \max(n_o', n_o'')$ e $n = n_j \geq \max(n_o', n_o'')$ temos

$$|a_m - r| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

o que prova a convergência de (a_n).

<u>Sucessões de Cauchy</u>. (i) Uma sucessão (a_n) de números reais é denominada uma <u>sucessão de Cauchy</u> se, dado $\epsilon > 0$, existe n_o (que pode depender de ϵ) tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para todos $n, m \geq n_o$. O Teorema 1.6 diz que uma sucessão (a_n) de <u>números reais</u> é convergente se, e só se, ela é de Cauchy. Em virtude deste fato, que toda sucessão de Cauchy tem um limite, o conjunto dos reais é chamado <u>completo</u>. A noção de completo, como o leitor vê, depende somente das distâncias (cf. seção 1.5) entre os elementos da sucessão; em virtude disso, tal noção pode ser estudada em outros conjuntos onde se pode medir "distâncias" de pontos. Esses conjuntos são chamados espaços métricos; ao leitor interessado recomendamos a referência [7].

(ii) Uma sucessão (a_n) de números racionais é denominada uma <u>sucessão de Cauchy</u> se, dado $\epsilon > 0$, existe n_o (que pode depender de ϵ) tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para todos $n, m \geq n_o$. (É a "mesma" definição acima, exceto que consideramos apenas racionais.) Considerando apenas racionais, vemos que existem sucessões de Cauchy de números racionais que não convergem para um número racional. Exemplo: a sucessão 1, 1,4, 1,41, 1,414,... que converge (no conjunto dos reais) para $\sqrt{2}$. Em virtude de haver sucessões de Cauchy de racionais que não convergem para um racional, dizemos que o conjunto dos racionais não é completo.

(iii) O conjunto dos reais pode ser construído a partir dos números racionais, do seguinte modo. Daremos, a seguir, um esboço do método, cujos detalhes podem ser encontrados na referência [2], cf. também [7]. A imprecisão desse esboço será perdoável, se conseguirmos despertar o interesse de algum leitor para estudar a questão mais a fundo!

Considere o conjunto C de todas as sucessões de Cauchy de números racionais. (Um elemento de C é uma sucessão de números racionais!) Como não desejamos distinguir entre sucessões que estão "perto" uma da outra (por exemplo: $(1 + \frac{1}{n})$ e $(1 - \frac{1}{n})$) consideramos um novo conjunto C', cujos elementos são classes ou subconjuntos de C. (Um elemento de C' é um conjunto de sucessões de Cauchy de racionais!) Nesse conjunto C', define-se operações de adição e multiplicação e demonstra-se que C' é um corpo. Define-se também uma ordem em C', e prova-se que, com essa ordem C' é um corpo ordenado. Finalmente, demonstra-se que o corpo ordenado C' satisfaz o Postulado de Dedekind. Esse corpo C' é definido como o corpo dos reais.

1.12 - Séries numéricas

Nesta seção trataremos de atribuir um sentido à "soma infinita"

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots,$$

onde os termos a_n são números reais dados. Uma expressão da forma (1) é chamada uma série numérica.

Associamos à sucessão (a_n) dada acima, uma nova sucessão (A_n), chamada sucessão das reduzidas ou das somas parciais, que é assim definida

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n.$$

Se a sucessão (A_n) tem um limite S, dizemos que a série (1) converge, e que sua soma é S. Se a sucessão (A_n) não tem limite, dizemos que a série (1) diverge. No caso de convergência, escrevemos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

EXEMPLO 1 - $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$. A soma parcial A_n é igual a $1 - 2^{-n}$, cf. Exercício 2 da seção 1.8. É claro que o limite de A_n é 1. Logo, a série em pauta converge e sua soma é 1.

EXEMPLO 2 - $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, onde $|r| < 1$. Deixamos ao leitor a verificação da convergência dessa série, e a demonstração que sua soma é $(1-r)^{-1}$. Cf. Exercício 2 da seção 1.8. Essa é a chamada <u>série geométrica</u>.

<u>Observação</u>: A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} ba_n$ também converge, onde b é um número real qualquer. De fato, se A_n é a reduzida de ordem da primeira série e B_n é a reduzida de ordem n da segunda série, temos què $B_n = bA_n$. Portanto $\lim B_n = b \lim A_n$. Podemos, portanto escrever $\sum_{n=1}^{\infty} ba_n = b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

TEOREMA 1.7 - <u>A série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge se, e só se, dado</u> $\epsilon > 0$, <u>existe</u> n_o <u>(que pode depender de</u> ϵ)

<u>tal que</u> $\left|\sum_{j=n}^{n} a_j\right| < \epsilon$ <u>para todos</u> $n, m \geq n_o$.

Deixamos a demonstração a cargo do leitor e sugerimos o uso do critério de Cauchy para convergência de sucessões, i.e., Teorema 1.6.

COROLÁRIO 1.1 - <u>Se a série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge, então</u> $\lim a_n = 0$.

<u>Observação</u>: O Teorema 1.7 mostra que a convergência ou não de uma série não é influenciada pelo que se passa em número finito de termos. Mais precisamente: seja p um número inteiro positivo fixado, então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (ou diverge) se, e só se, a série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge (ou diverge).

EXEMPLO 3 - A série harmônica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge. De fato, temos

$$\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

e aplicando o teorema acima, o resultado se segue.

EXEMPLO 4 - As séries $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n$ divergem.

Vê-se que a sucessão das reduzidas tende para $+\infty$. Neste caso a sucessão das reduzidas torna-se ilimitada. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é um exemplo de uma série divergente cujas reduzidas se mantêm limitadas; de fato a sucessão das reduzidas é $(-1,0,-1,0,\dots)$.

Observação: O Exemplo 3 acima mostra que o Corolário 1.1 fornece apenas uma condição necessária para a convergência de uma série. Em outras palavras, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode divergir e, apesar disso, pode-se ter $\lim a_n = 0$. Entretanto, se os termos a_n alternarem de sinal, então a condição $\lim a_n = 0$ é "quase" suficiente para a convergência da série. Mais precisamente, temos o seguinte resultado, que é conhecido como o Teste de Leibniz.

TEOREMA 1.8 - (Série alternadas). Seja (a_n) uma sucessão de números reais não negativos, tais que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ e $\lim a_n = 0$. Então a série $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ converge.

Demonstração: Primeiramente, observamos que as reduzidas de ordem par formam uma sucessão não decrescente. De fato

$$S_{2n} = (a_1-a_2) + (a_3-a_4) + \dots + (a_{2n-1}-a_{2n}),$$

onde as expressões em cada parêntesis são não negativas.

Analogamente, a sucessão das reduzidas de ordem ímpar é não crescente:

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2-a_3) - (a_4-a_5) - \dots - (a_{2n}-a_{2n+1}),$$

onde as expressões em cada parêntesis são não negativas. A seguir, observamos que a sucessão (S_{2n}) é limitada superiormente, pois $S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_1$, e daí S_1 é uma cota superior para essa sucessão. Do mesmo modo, a sucessão (S_{2n+1}) é limitada inferiormente, pois $S_{2n+1} \geq S_{2n+2} \geq S_2$, e daí S_2 é uma cota inferior para a sucessão das reduzidas de ordem ímpar. Aplicando o Teorema 1.4, concluímos que existem números reais r e s tais que

$$\lim S_{2n} = r \quad e \quad \lim S_{2n+1} = s.$$

Como $\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim a_{2n+1}$, e $a_n \to 0$, segue-se que $r = s$, o que demonstra o teorema.

EXERCÍCIO 1 - Use o Teorema 1.4 para provar o seguinte teorema: "Uma série de termos não negativos é convergente se, e só se, as reduzidas formam uma sucessão limitada".

EXERCÍCIO 2 - Use o exercício precedente e demonstre:

"Seja (a_n) uma sucessão de números reais não negativos e tais que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se, a série abaixo converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^j a_{2^j} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é <u>majorada</u> por uma série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se existe n_o tal que, para todo $n \geq n_o$, tenhamos $|a_n| \leq b_n$. É comum dizer-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma <u>majorante</u> da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

TEOREMA 1.9 - <u>A série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>é convergente se ela possui uma série majorante</u> $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, <u>que converge</u>.

<u>Demonstração</u>: Basta observar que

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} b_j,$$

para $n_o \leq n \leq m$, e aplicar o Teorema 1.7.

COROLÁRIO 1.2 - Suponhamos que a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma majorante de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é também divergente.

Demonstração: Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e aplique o teorema anterior para chegar a uma contradição.

COROLÁRIO 1.3 - Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

A demonstração do corolário precedente é imediata. A recíproca não é verdadeira: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1}$.

EXERCÍCIO 3 - Aplique o Corolário 1.2 e mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ diverge, se $p < 1$.

EXERCÍCIO 4 - Aplique o Teorema 1.9 e o Exercício 2 acima e mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ converge, se $p > 1$.

DEFINIÇÃO: Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (ou, é absolutamente convergente) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. O Corolário 1.3 mostra que toda série absolutamente convergente é também convergente.

Apresentaremos a seguir dois testes para a convergência absoluta de séries numéricas.

TEOREMA 1.10 - (Teste da razão). <u>Consideremos uma série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>e suponhamos que</u> $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ <u>existe. Seja</u> ℓ <u>tal limite. Então</u>: (i) <u>a série converge absolutamente se</u> $\ell < 1$; (ii) <u>a série diverge se</u> $\ell > 1$; (iii) <u>o teste não fornece informação se</u> $\ell = 1$.

<u>Demonstração</u>: (i) Do fato que $\ell = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, segue-se que existe n_o tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq b \text{ , para } n \geq n_o, \tag{1}$$

onde $b = (1+\ell)/2$. Observe que $b < 1$. De (1) obtemos

$$|a_{n_o+1}| \leq b|a_{n_o}|$$
$$|a_{n_o+2}| \leq b|a_{n_o+1}|$$
$$\cdots$$
$$|a_{n_o+p}| \leq b|a_{n_o+p-1}| \text{ ,}$$

e daí se segue:

$$|a_{n_o+p}| \leq b^p|a_{n_o}|.$$

A desigualdade acima mostra que a série $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{n_o+p}|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{n_o}|b^p = |a_{n_o}|\sum_{p=1}^{\infty} b^p$. Como $b < 1$, segue-se, pelo Teorema 1.9, que a série $\sum_{p=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

(ii) Como $\ell > 1$, segue-se que existe n_o tal que, para $n \geq n_o$, tem-se

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1.$$

Logo $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, para $n \geq n_o$. Portanto, (a_n) não pode convergir para 0. Logo, pelo Corolário 1.1, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deve divergir.

(iii) Para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, temos $\ell = 1$.

Por outro lado, a primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

TEOREMA 1.11 - Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e suponhamos que $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe. Seja ℓ esse limite. Então: (i) a série converge absolutamente se $\ell < 1$; (ii) a série diverge se $\ell > 1$; (iii) o teste não dá informação se $\ell = 1$.

Demonstração: (i) Pela definição de limite, segue-se que existe n_o tal que, para $n \geq n_o$, temos

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq b, \tag{2}$$

onde $b = (1+\ell)/2$. Observe que $b < 1$. De (2) obtemos

$$|a_n| \leq b^n, \quad \text{para} \quad n \geq n_o.$$

A desigualdade acima mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$. Como $b < 1$, segue-se, pelo Teorema 1.9, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

(ii) Se $\ell > 1$, concluímos que existe n_o tal que, para $n \geq n_o$, temos $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$. Daí $|a_n| \geq 1$, para $n \geq n_o$, e portanto, a sucessão (a_n) não tende a 0. Pelo Corolário 1.1, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) É fácil ver, usando resultados da seção 1.8, que $\ell = 1$ para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. A primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

EXERCÍCIO 5 - Seja (x_n) uma sucessão de termos positivos convergindo para $r > 0$. Mostre que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

EXERCÍCIO 6 - Sejam $a_1,\ldots,a_p$ números reais positivos. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{p} a_j^n} = \max\{a_1,\ldots,a_p\}.$$

(Sugestão: chame m maior dos números $a_1,\ldots,a_p$ e seja $b_j = a_j/m$. O problema é mostrar $\sqrt[n]{\sum_{j=1}^{p} b_j^n} \to 1$).

EXERCÍCIO 7 - Demonstre que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)r^n$ convergem se $|r| < 1$.

EXERCÍCIO 8 - Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ também converge. Dê um exemplo para mostrar que a condição $a_n \geq 0$ não pode ser dispensada.

EXERCÍCIO 9 - Demonstre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ também é. (Sugestão: use o Teorema 1.7 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter uma estimativa da diferença de duas reduzidas).

1.13 - Representação decimal

Nesta seção mostraremos como os números reais podem ser representados por expressões decimais. Restringir-nos-emos aos reais do intervalo $[0,1)$; os demais serão reduzidos a esses mediante translação conveniente por um número inteiro. Uma decimal é um conjunto enumerável cujos elementos são os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9; uma decimal será representada assim: $.a_1\, a_2\, a_3 \ldots$, onde o ponto antes dos a's é para indicar que estamos considerando apenas o intervalo $[0,1)$, e a_i é um dos dez algarismos acima. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as decimais. Nosso objetivo será estabelecer uma correspondência entre $\mathcal{D}$ e o conjunto dos reais no $[0,1)$.

Definimos a função $f: \mathcal{D} \to R$ pela expressão $f(.a_1\ a_2\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Inicialmente observamos que essa série é convergente; de fato ela é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ cuja soma é 1. A seguir observamos que f não é injetiva pois,

$$(1) \qquad f(.a_1\ldots a_{j-1}(a_j-1)99\ldots) = f(.a_1\ldots a_j 00\ldots)$$

Por outro lado, se $\delta_1 = .a_1\ a_2\ldots$, $\delta_2 = .b_1\ b_2\ldots$ e $f(\delta_1) = f(\delta_2)$ mostraremos que δ_1 e δ_2 devem ser da forma das decimais que aparecem em (1). De fato seja j o primeiro índice onde o a é diferente de b: suponhamos $a_j < b_j$. Então de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} = 0$ obtemos

$$(2) \qquad \frac{1}{10^j} \le \frac{b_j - a_j}{10^j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} \le \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^j} \ ;$$

e logo em (2) só temos igualdades e daí se segue que $b_j = a_j + 1$, $a_n = 9$ e $b_n = 0$ para $n \ge j+1$.

Se definirmos $\mathcal{D}^*$ como o subconjunto de $\mathcal{D}$ formado por decimais que não têm todos os elementos iguais a 9 a partir de uma certa ordem, então a função f, definida acima, restrita a $\mathcal{D}^*$ é <u>injetiva</u>. Mostraremos agora que f é sobre $[0,1)$, e portanto temos a correspondência biunívoca

$$\mathcal{D}^* \leftrightarrow [0,1)$$

$$.a_1\, a_2 \ldots \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}\ .$$

Seja pois $r \in [0,1)$. Consideremos a decomposição $[0,1) = \bigcup_{j=0}^{9} [\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10})$ e portanto r pertence a um e só um desses subintervalos: $r \in I_1 = [\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10})$. A seguir consideremos $[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}) = \bigcup_{j=0}^{9} [\frac{a_1}{10} + \frac{j}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{j+1}{10^2})$ e selecionemos a_2 tal que $r \in I_2 = [\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2})$. E assim por diante. Pelo teorema dos intervalos encaixantes, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n$ consiste de um único ponto; $\bar{I}_n$ designa o intervalo fechado que tem as mesmas extremidades que I_n. Como $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n \ni r$, segue-se que a sucessão formada pelas extremidades esquerdas dos I_n converge para r, e portanto $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, e a decimal que se toma para corresponder a r é $.a_1\, a_2 \ldots$

CAPÍTULO 2

AS FUNÇÕES REAIS

2.1 - Funções Reais

Na seção 1.1 definimos o conceito geral de função. Neste trabalho, porém, estamos interessados em um tipo especial de funções, as funções reais. Diz-se que uma função f é real se seu campo de definição é o conjunto $\mathbb{R}$ ou um subconjunto dele, e seu contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$. Usamos a notação $\mathcal{D}(f)$ para designar o campo de definição da função f.

EXEMPLOS:

(i) $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Aqui $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = x$ para $x \in [0,1]$. $\mathcal{D}(f) = [0,1]$.

(iii) $f(x) = x + 1$ para $x \in (0,1)$
$\qquad = 0$ para $x = 0$. $\mathcal{D}(f) = [0,1)$.

(iv) $f(x) = 2x-1$ para $x \in (1,2]$. $\mathcal{D}(f) = (1,2]$.

(v) $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. $\mathscr{D}(f) = [0,+\infty)$.

(vii) $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.

(viii) $f(x) = 1$, para $x > 0$

$\qquad 0$, para $x = 0$

$\qquad -1$, para $x < 0$. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.

(ix) $f(x) = [x]$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $[x]$ designa o maior inteiro menor ou igual a x. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.

(x) $f(x) = 1/x$, para $x \neq 0$. $\mathscr{D}(f)$ é o conjunto $\mathbb{R}$ menos o ponto $x = 0$.

Um modo de interpretar geometricamente uma função é traçando seu gráfico. Para isso tomamos um sistema cartesiano de coordenadas, isto é, um par de retas perpendiculares onde se marca o 0 e o 1, como se indica na figura 6.

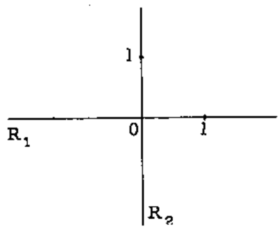


Fig. 6

Assim, como já se viu na seção 1.4, cada ponto da reta R_1 é representável por um real, o mesmo acontecendo com os pontos da reta R_2. Vê-se então que dado um ponto P do plano podemos determinar um número real x como a interseção da reta R_1 com a reta perpendicular a R_1 e passando por P. Um outro real y é também determinado como a interseção da reta R_2 com a reta perpendicular a R_2 passando por P.

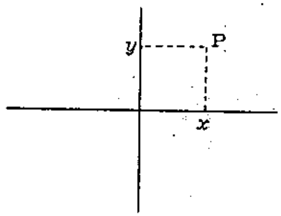


Fig. 7

Com esse procedimento, associamos a cada ponto P do plano um par (x,y) de reais, que são chamados as <u>coordenadas</u> de P. Reciprocamente, dado um par (x,y) de reais, determinaremos um ponto P como a interseção da reta perpendicular a R_1 passando por x com a reta perpendicular a R_2 passando por y. Veja os exemplos da figura 8.

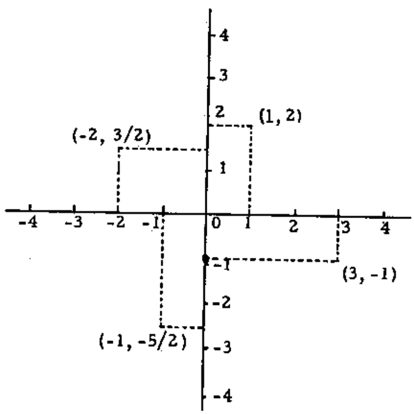


Fig. 8

Pelo que acabamos de expor, vê-se que há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares (x,y) de reais. A primeira coordenada, x, é sempre marcada sobre a reta R_1, que é chamada o <u>eixo dos</u> x. A segunda coordenada, y, é marcada sobre a reta R_2, que é chamada o <u>eixo dos</u> y.

Voltemos à questão da interpretação gráfica de uma função. O <u>gráfico</u> de uma função f é o subconjunto do plano formado pelos pontos $(x,f(x))$, quando x percorre o campo de definição da função. Tracemos o gráfico das funções definidas acima. (Veja fig. 9.)

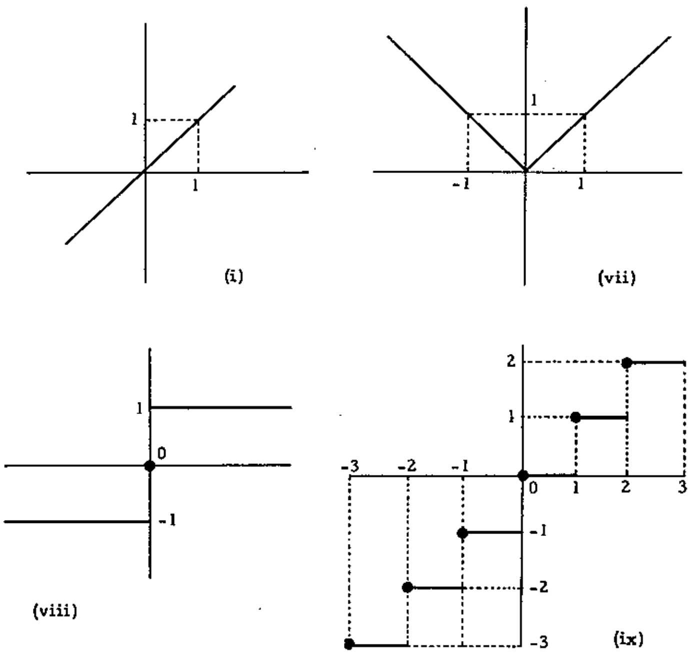


Fig. 9

Não é difícil ver que o gráfico de $1/x$ é simétrico em relação à diagonal Δ indicada na figura 12.

2.2 - Limites laterais de uma função

Consideremos uma função real $f: A \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto A dos números reais.

DEFINIÇÃO 1 - Seja c um número real tal que, para algum $d > c$, o intervalo aberto (c,d) esteja contido em A. Esta situação ocorreria, por exemplo, se $A = (a,b]$ e c fosse um ponto do interior do intervalo $(a,b]$ ou se $c = a$. A função $f: A \to \mathbb{R}$ tem limite à direita no ponto c se existir um real r tal que, para qualquer sucessão (x_n) contida em A, com $x_n > c$, e convergindo para c, tenha-se que a sucessão $(f(x_n))$ converge para r, isto é, $\lim f(x_n) = r$. Tal número r é chamado o limite à direita de f no ponto c, o qual é geralmente designado pelas notações $f(c+)$ ou $\lim_{x \to c+} f(x)$. Observe que a função não precisa estar definida no ponto c para o limite à direita existir, pois c podia ser igual a a no caso $A = (a,b]$ exemplificado acima.

DEFINIÇÃO 2 - Seja agora c um real tal que, para algum $c' < c$, o intervalo aberto (c',c) esteja contido em A. Por exemplo, $A = [a,b)$ e c um ponto interior do intervalo A ou $c = b$. A função $f: A \to \mathbb{R}$ tem limite à esquerda no ponto c se existir um real s tal que, para qualquer sucessão (x_n) contida em A, com $x_n < c$, e convergindo para c, tenha-se $\lim f(x_n) = s$. Tal número s é chamado o limite à esquerda de f no ponto c, o qual é geralmente designado por $f(c-)$ ou $\lim_{x \to c-} f(x)$. Como no caso do limite à direita a existência do limite à esquerda no ponto c nada tem a ver com a função estar ou não definida no ponto c.

DEFINIÇÃO 3 - Seja agora c um real tal que existam intervalos abertos (c',c) e (c,d) contidos em A. Por exemplo, isso seria o caso se A contivesse um intervalo I e c fosse um ponto do interior de I; ou ainda, se A fosse composto de dois intervalos consecutivos, como por exemplo, $[0,1)$ e $(1,2)$ e $c = 1$. Vê-se, no primeiro exemplo, que c pertence a A, e no segundo, que c não pertence a A. A função $f: A \to \mathbb{R}$ tem limite em um tal ponto c se existem os limites à direita e à esquerda, $f(c+)$ e $f(c-)$, e são iguais. Esse valor comum é chmado o limite de f no ponto c é designado por $\lim_{x \to c} f(x)$.

As definições dos limites laterais de uma função f no ponto c, usando sucessões (x_n) convergindo para c, foram preferidas no presente trabalho por dois motivos: (1) parece-nos mais fácil entender tais limites relacionando-os diretamente com os limites de sucessões já estudados, (2) as demonstrações dos teoremas e dos exercícios da seção 2.3 são mais simples usando essas definições. Entretanto o problema de, dada uma função, provar que certo número é seu limite lateral, problemas dessa natureza são mais facilmente resolvidos usando os resultados abaixo, os quais dão condições necessárias e suficientes para ser limite lateral. Em alguns textos essas condições são as próprias definições dos limites laterais.

TEOREMA 2.1 - Seja $f: A \to R$ uma função real e c um ponto tal que o intervalo $(c,d) \subset A$ para algum $d > c$. Então, a condição necessária e suficiente para que r seja o limite lateral à direita de f no ponto c é que dado $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ) tal que $|f(x)-r| < \epsilon$ para $c < x < c+\delta$.

Demonstração: 1) A condição é suficiente. Dada (x_n) tal que $x_n \in (c,d)$ e $x_n \to c$, e dado $\epsilon > 0$ segue-se que existe n_o tal que $x_n \in (c,c+\delta)$ para $n \geq n_o$. O δ é aquele do enunciado. Portanto usando a hipótese obtemos $|f(x_n)-r| < \epsilon$ para $n \geq n_o$. Mas isso quer dizer que $f(x_n) \to r$. 2) A condição é necessária. Suponha, por contradição, que exista $\epsilon_o > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se tenha $|f(x)-r| > \epsilon_o$ para algum x tal que $c < x < c+\delta$. Tomando-se para δ os termos da sucessão $(\frac{1}{n})$, obtemos uma sucessão (x_n) tal que $x_n \to c$ e $|f(x_n)-r| > \epsilon_o$. Mas isso contradiz o fato de r ser o limite lateral à direita de f no ponto c. Assim fica estabelecida a necessidade da condição do teorema.

De modo análogo demonstram-se os resultados seguintes:

TEOREMA 2.2 - <u>Seja</u> $f: A \to R$ <u>uma função real e</u> c <u>um ponto tal que o intervalo</u> $(c',c) \subset A$ <u>para algum</u> $c' < c$. <u>Então, a condição necessária e suficiente para que</u> r <u>seja o limite lateral à esquerda de</u> f <u>no ponto</u> c <u>é que, dado</u> $\epsilon > 0$, <u>exista</u> $\delta > 0$ <u>tal que</u> $|f(x)-r| < \epsilon$ <u>para</u> $c-\delta < x < c$.

TEOREMA 2.3 - <u>Seja</u> $f: A \to R$ <u>uma função real e</u> c <u>um ponto tal que os intervalos</u> (c',c) <u>e</u> (c,d) <u>estejam contidos em</u> A <u>para algum</u> $c' < c$ <u>e algum</u> $d > c$. <u>Então a condição necessária é suficiente para que</u> r <u>seja o limite de</u> f <u>no ponto</u> c <u>é que dado</u>

$\epsilon > 0$ <u>exista</u> $\delta > 0$ <u>tal que</u> $|f(x)-r| < \epsilon$ <u>para</u> $0 < |x-c| < \delta$.

Usando esses teoremas podemos estudar eficientemente os limites laterais das funções exemplificadas na seção 1.2.

(i) Para a função (i) temos $f(0+) = f(0-) = 0$, e portanto $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(ii) Para a função (ii), $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe, apesar de $f(0+)$ existir.

(iv) Para a função (iv), $f(1+) = 1$, e f não é definida para $x = 1$.

(v) Para a função (v) temos $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ pois

$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2|$$

para $0 < |x-2| < \delta < 1$. Portanto dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon/5$.

(viii) Para a função (viii), $f(0+) = 1$ e $f(0-) = -1$, enquanto $f(0) = 0$.

(ix) Para a função (ix), $f(3+) = 3$ e $f(3-) = 2$.

(x) Para a função (x), $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem.

O leitor pode facilmente ver que para os exemplos (ii), (iii) e (iv), as funções têm limite à direita em certos pontos, mas não limite à esquerda, ou vice-versa.

O exemplo (x) é de uma função para a qual $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem. Neste caso, a não existência desses limites decorre do fato que a função se torna ilimitada nas proximidades de 0. Nas circunstâncias do exemplo (x), é comum dizer que o limite lateral é $+\infty$ ou $-\infty$ conforme o caso. O leitor deve, porém, compreender que isso é uma convenção e que de nenhum modo essa situação está incorporada na definição. (De fato, $+\infty$ e $-\infty$ não são números!). Daremos agora um exemplo de uma função cujos limites laterais em um ponto não existem, apesar de a função se manter limitada:

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \text{ para } x \neq 0.$$

Para esta função, $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem.

<u>O caráter local do limite</u>. Nas três definições acima pediu-se a existência de intervalos adjacentes ao ponto c onde a função f fosse definida e uma certa propriedade fosse válida. É fácil de ver que, no caso da Definição 1, poderíamos tomar, em vez do intervalo (c,d), qualquer intervalo (c,d'), com $c < d' < d$. Em outras palavras, $f(c+)$ existe se, e somente se, existe um real r tal que, para qualquer d'

com $c < d' \leq d$, temos que: dada $(x_n) \subset (c,d')$ e convergindo para c, então $f(x_n)$ converge para r. Isso mostra que a questão da existência dos limites em um ponto depende tão somente do comportamento da função "perto" daquele ponto.

TEOREMA 2.4 - Seja $f: A \to R$ uma função real, e suponhamos que c seja um real tal que existam intervalos (c',c) e (c,d) contidos em A. Então, f tem limite no ponto c se, e só se, existe um número real r, tal que $f(x_n) \to r$, para qualquer sucessão (x_n), contida nos intervalos (c',c) e (c,d), e convergindo para c.

Observação: Como antes não se requer que c pertença a A. As sucessões (x_n) não estão necessariamente em um mesmo intervalo (c',c) ou (c,d); elas podem oscilar de um lado e outro de c.

Demonstração: Deixamo-la ao leitor. Como sugestão lembramos que há três possibilidades quanto à localização dos termos x_n: 1) existe um n_o tal que para todo $n \geq n_o$, $x_n \in (c',c)$; 2) existe n_o tal que para todo $n \geq n_o$, $x_n \in (c,d)$; 3) x_n se compõe de duas subsucessões (x_{n_j}) e (x_{m_j}) satisfazendo respectivamente às condições postas nas Definições 1 e 2 acima.

Observação: O que estabeleceremos a seguir tem o mérito de simplificar a verificação se certo número r é limite lateral (ou limite) de uma função f num ponto c. Na Definição 1 acima vimos que devíamos tomar todas as sucessões (x_n) contidas em A convergindo para c e com $x_n > c$ e provar que $f(x_n) \to r$. Uma pergunta natural é a seguinte: será necessário verificar isso para todas as sucessões? É também natural esperar-se que baste considerar as sucessões decrescentes. É isso que provamos a seguir. Suponha, então, que para toda sucessão decrescente (x_n) contida em A convergindo para c tenhamos $f(x_n) \to r$. Seja agora (y_n) uma sucessão arbitrária contida em A com $y_n > c$ e $y_n \to c$; suponhamos, por contradição, que $f(y_n)$ não convirja para r. Logo, existe $d > 0$ e uma subsucessão (y_{n_j}) de (y_n) tal que: (*) $|f(y_{n_j}) - r| > d$. Como (y_{n_j}) converge para c e $y_{n_j} > c$ segue-se que existe uma subsucessão (y_m) de (y_{n_j}), a qual é decrescente e converge para c. (Prove isso!) Então, pela hipótese, temos que $f(y_m) \to r$, o que contradiz a desigualdade (*) acima. De modo análogo podemos provar que na Definição 2 basta tomar sucessões x_n que sejam crescentes.

Limites quando $x \to \infty$. Ao tentar traçar o gráfico de uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida em um conjunto A que contém um intervalo infinito (por exemplo, $A \supset [a,+\infty)$) vemos que é extremamente importante saber qual é seu comportamento para valores arbitrariamente grandes de x, ou como é comum dizer-se, quando x tende para $+\infty$. Uma resposta adequada a esse problema será conseguida através da introdução do limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$, e do limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$, o que faremos a seguir.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ que contém um intervalo da forma $[a,+\infty)$ para algum número real a. Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ <u>tem limite</u> quando $x \to +\infty$ se existe um número real r tal que, para qualquer sucessão (x_n) contida em A e tal que $x_n \to +\infty$, tem-se que $f(x_n) \to r$. O número r é chamado o <u>limite de</u> $f(x)$ <u>quando</u> $x \to +\infty$, e se usa a notação $r = \lim_{x\to +\infty} f(x)$.

EXEMPLO 1 - $f(x) = \sin x$, para todo x real. Apesar de não havermos introduzido ainda as funções trigonométricas, imaginamos que o leitor seja familiar com as mesmas, e queremos dar este exemplo para mostrar que o limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ pode não existir.

De modo análogo podemos definir o limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$, para funções $f: A \to \mathbb{R}$, cujo campo de definição A contém intervalos de forma $(-\infty,a]$.

EXERCÍCIO 1 - Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função definida em um conjunto A, o qual contém um intervalo da forma $[a,+\infty)$. Prove que r é o limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ se, e só se, dado $\epsilon > 0$ existe um real N (o qual pode depender de ϵ) tal que $|f(x)-r| < \epsilon$ para todo $x \geq N$.

EXERCÍCIO 2 - Enuncie e prove um resultado análogo para limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$.

EXEMPLO 2 - $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ para $x > -1$. Temos $|f(x)-0| = = \dfrac{1}{1+x} < \epsilon$ para $x > N$ onde N é um inteiro maior que $\dfrac{1}{\epsilon} - 1$. Logo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

EXEMPLO 3 - $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ para $x > 0$. Neste caso $|f(x)-1| = \dfrac{1}{x}$, e usando um argumento semelhante ao do exemplo anterior, mostra-se que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

EXEMPLO 4 - $f(x) = x^2$ para todo real. Neste caso $f(x) > x$ se $x > 1$, o que implica que não pode existir nenhum número real $r > 0$ que seja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Como, para qualquer $M > 0$ dado, existe $N > 0$ tal que $f(x) > M$, para $x > N$, dizemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXEMPLO 5 - $f(x) = -x^3$. Como no exemplo anterior $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ não existe pois $f(x) < -x$. Acontece entretanto que dado $M > 0$ existe $N > 0$ tal que $f(x) < -M$, para $x > N$. Neste caso dizemos que

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

EXERCÍCIO 3 - Mostre que o limite de f no ponto c é determinado univocamente. Isto é, se

$\lim_{x \to c} f(x) = r$ e $\lim_{x \to c} f(x) = s$ então $r = s$.

EXERCÍCIO 4 - Seja $[x]$ o maior inteiro menor ou igual a x. Mostre que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[[x]]{x} = 1$. (Sugestão: use o Exemplo 3 da seção 1.8).

EXERCÍCIO 5 - Seja $f: A \to R$ uma função real e c um ponto tal que $(c',c) \subset A$ e $(c,d) \subset A$ para algum $c' < c$ e algum $d > c$. Mostre que o limite de f em c existe se e só se dado $\varepsilon > 0$ podemos determinar δ tal que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ para $0 < |x-c| < \delta$ e $0 < |y-c| < \delta$. (Sugestão: seja (x_n) uma sucessão contida em A convergindo para c. A sucessão $(f(x_n))$ é então de Cauchy. Pelo Teorema 1.6 existe r tal que $f(x_n) \to r$. Agora dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $0 < |x-c| < \delta$ e $0 < |y-c| < \delta$. Seja n_o tal que, para $n \geq n_o$, $|f(x_n)-r| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n-c| < \delta$. Use finalmente $|f(x)-r| \leq |f(x)-f(x_{n_o})| + |f(x_{n_o})-r|$.

EXERCÍCIO 6 - Seja $f: R \to R$. Mostre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe, se e somente se, dado $\varepsilon > 0$ podemos determinar N tal que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ para $x, y \geq N$. (Sugestão: proceda como no exercício anterior, obtendo primeiro um número r que seja o candidato a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$).

2.3 - Operações com limites de funções

Pode-se definir operações de adição e multiplicação de funções reais do seguinte modo.

Definição de adição. Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ duas funções reais com os mesmos campos de definição. A função $s: A \to \mathbb{R}$ definida por

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

para todo $x \in A$, é chamada a soma das funções f e g, e se designa por $f + g$.

Definição de multiplicação. Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ duas funções reais definidas sobre o mesmo subconjunto A dos reais. A função $p: A \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = f(x)\ g(x)$$

para todo $x \in A$, é chamada o <u>produto</u> das funções f e g, e se designa por fg.

<u>Observação</u>: O leitor pode ver facilmente que as duas operações, acima definidas no conjunto das funções reais do tipo $f\colon A \to \mathbb{R}$, satisfazem às leis comutativa, associativa e distributiva. Isso decorre do fato de serem os reais um corpo, cf. seção 1.4.

Um caso particular da multiplicação é aquele em que $g(x)$ é uma função constante, isto é, $g(x) = a$ para todo $x \in A$. Portanto, af, onde a é numero real, é a função real definida por $(af)(x) = af(x)$.

<u>Definição da função $|f|$</u>. Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função real. A função $|f|\colon A \to \mathbb{R}$ é definida por

$$|f|(x) = |f(x)|$$

para todo $x \in A$.

<u>Definição da função $1/f$</u>. Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função real tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. A função $1/f\colon A \to \mathbb{R}$ é definida por

$$(1/f)(x) = 1/f(x)$$

para todo $x \in A$.

Agora enunciamos algumas propriedades do limite de funções em um ponto.

TEOREMA 2.5 - Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ duas funções reais definidas em um subconjunto A de $\mathbb{R}$.

Então:

(a) Se os limites à direita de f e g no ponto c existem, então as funções $f + g$, fg e $|f|$ tem limite à direita no ponto c e:

(1) $$\lim_{x\to c^+} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c^+} f(x) + \lim_{x\to c^+} g(x)$$

(2) $$\lim_{x\to c^+} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c^+} f(x) \cdot \lim_{x\to c^+} g(x)$$

(3) $$\lim_{x\to c^+} |f(x)| = \left|\lim_{x\to c^+} f(x)\right|$$

(b) Enunciado análogo para os limites à esquerda.

(c) Se os limites de f e g no ponto c existem, então, as funções $f + g$, fg e $|f|$ tem limite no ponto c e

(4) $$\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

(5) $$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

(6) $$\lim_{x\to c} |f(x)| = \left|\lim_{x\to c} f(x)\right|$$

Demonstração: Para ilustrar demonstremos a relação (1); as relações (2), (3) e as análogas para o limite à esquerda têm demonstrações semelhantes. Seja (x_n) uma sucessão decrescente contida em A e convergindo para c. Como f e g têm limite à direita no ponto c, temos que $(f(x_n))$ converge para $f(c+)$ e $(g(x_n))$ converge para $g(c+)$. Então, a sucessão $(f(x_n) + g(x_n))$ converge para $f(c+) + g(c+)$, em virtude da Propriedade 1 para limites de sucessões. Logo, o limite à direita de $f + g$ no ponto c existe e satisfaz a relação (1). A parte (c) do teorema é conseqüência imediata das partes (a) e (b).

TEOREMA 2.6 - Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função real definida em um subconjunto A de $\mathbb{R}$. Suponhamos que $f(x) \neq 0$ para $x \in A$. Então:

(a) Se o limite à direita de f no ponto c existe e é diferente de zero, então o limite à direita de $1/f$ no ponto c existe, e

$$\lim_{x \to c+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to c+} f(x)} . \tag{7}$$

(b) Enunciado análogo para o limite à esquerda.

(c) Se o limite de f no ponto c existe e é diferente de 0, então, o limite de $1/f$ existe, e

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to c} f(x)}.$$

Demonstração de (a): Seja (x_n) uma sucessão decrescente contida em A e convergindo para c. Então, em virtude da Propriedade 3 para limites de sucessões, a sucessão $\{1/f(x_n)\}$ converge para $1/\lim f(x_n)$. Mas, a existência do limite à direita de f no ponto c implica que $1/\lim f(x_n) = 1/f(c+)$. Logo, a função $1/f$ tem limite à direita no ponto c, o qual satisfaz a relação (7). A parte (b) tem uma demonstração análoga. A parte (c) é uma conseqüência das partes (a) e (b).

EXERCÍCIO 1 - Sejam $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ duas funções reais definidas em um certo subconjunto A dos reais, tais que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in A$. Se f e g têm limite em um certo ponto c, mostre que $\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$.

EXERCÍCIO 2 - Se no exercício anterior tivermos $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A$, dê um contra-exemplo para mostrar que, em geral, não se tem $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$, admitindo a existência dos dois limites.

EXERCÍCIO 3 - Sejam f, g e h funções reais definidas em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Se $f(x) \le g(x) \le$

$\leq h(x)$ para todo $x \in A$ e se os limites de f e h existem e são iguais em um ponto c, prove que g também tem limite em c e $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x)$.

EXERCÍCIO 4 - Enuncie e demonstre resultados análogos aos do Teoremas 2.5 e 2.6 para o caso que dos limites de $f(x)$ e $g(x)$ quando $x \to +\infty$ (ou $x \to -\infty$).

EXERCÍCIO 5 - Prove que $\lim_{x\to c} f(x) = r$ e $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ implica

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

e $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$, conforme $r > 0$ ou $r < 0$.

EXERCÍCIO 6 - Dê exemplos para provar que a última relação do Exercício 5 não se verifica, em geral, no caso de $r = 0$.

EXERCÍCIO 7 - Seja $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função positiva, i.e., $f(x) > 0$ para todo $x \geq a$. Prove que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se, e só se, $\lim_{x\to+\infty} [1/f(x)] = 0$.

EXERCÍCIO 8 - Considere dois polinômios $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$, cujos coeficientes $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m$ são números reais e $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Os inteiros n e m são os graus de P e Q, respectivamente. Um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais, isto é, a equação $P(x) = 0$ tem no máximo n soluções reais (não necessariamente diferentes). Portanto para todo x real, diferente das raízes de $Q(x)$, podemos definir uma função pela expressão $f(x) = P(x)/Q(x)$.

Problema: calcule os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. Considere os diferentes casos: $n > m, n = m$ e $n < m$.

Observação: O "teorema fundamental da álgebra" diz que um polinômio $P(x)$ de grau n tem exatamente n raízes complexas (não necessariamente diferentes). Observe que o conjunto dos números complexos inclue o conjunto dos números reais; portanto algumas das raízes (ou mesmo todas, dependendo do polinômio) de $P(x)$ podem ser reais. Uma demonstração do teorema fundamental da álgebra pode ser encontrada na referência [11].

EXERCÍCIO 9 - Se $f(x) \geq 0$ e $\lim\limits_{x \to c} f(x) = r$, mostre que $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{r}$. (Sugestão: faça a demonstração usando sucessões).

EXERCÍCIO 10 - Mostre que

(i) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

(ii) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3}$$

(Sugestão: para (ii) use a fórmula da sugestão do Exercício 4 da seção 1.7).

2.4 - Funções contínuas

Seja I um intervalo de qualquer um dos tipos seguintes: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, (a,∞), $(-\infty,b]$, $[-a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty)$. Uma função real $f\colon I \to \mathbb{R}$ se diz contínua em um ponto c do interior de I se

$$f(c) = f(c+) = f(c-).$$

Se o intervalo contém a extremidade a, então a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua em a se $f(a) = f(a+)$. Se o intervalo I contém a extremidade b, então a função $f\colon I \to \mathbb{R}$ se diz contínua em b se $f(b) = f(b-)$. Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ se diz contínua no intervalo I se ela for contínua em todos os pontos de I. Será útil para futuras referências introduzir as terminologias: f contínua à direita em c se $f(c) = f(c+)$ e f contínua à esquerda em c se $f(c) = f(c-)$.

Exemplos da seção 2.1. É fácil ver que as funções (i), (v) e (vii) são contínuas em $\mathbb{R}$.

A função (ii) é contínua no intervalo $[0,1]$. A função (iii) não é contínua para $x = 0$. A função (iv) é contínua em $(1,2]$. A função (vi) é contínua em $[0,+\infty)$. A função (viii) não é contínua em $x = 0$. A função (ix) não é contínua para $x \in \mathbb{Z}$. As restrições da função (x) às semi-retas $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ são contínuas. A função (x) não está definida em $x = 0$; o leitor pode ver facilmente que não é possível defini-la aí de modo que a função resultante seja contínua; de fato, já observamos que $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem para a função (x).

Os pontos onde uma função $f: I \to \mathbb{R}$ não é contínua são chamados <u>pontos de descontinuidade</u>. Costuma-se dizer que a função tem uma <u>descontinuidade</u> em tal ponto. A <u>descontinuidade</u> é de <u>primeira espécie</u> se os limites à direita e à esquerda existem, mas são diferentes. Qualquer outro tipo de descontinuidade é chamada de <u>segunda espécie</u>. Nos exemplos (viii) e (ix) da seção 2.1 as descontinuidades são de primeira espécie. No exemplo (x), 0 é um ponto onde f tem uma descontinuidade de segunda espécie. A função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ apresentada na seção 2.2 tem uma descontinuidade de segunda espécie em $x = 0$. As seguintes funções têm também descontinuidades de segunda espécie em $x = 0$.

Definição da função composta. Sejam $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $\varphi\colon B \to \mathbb{R}$ duas funções reais tais que a imagem $f(A)$ está contida em B. A função $h\colon A \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \varphi(f(x))$$

para todo $x \in A$ é chamada a *função composta de* f e φ, e se designa por $\varphi \circ f$.

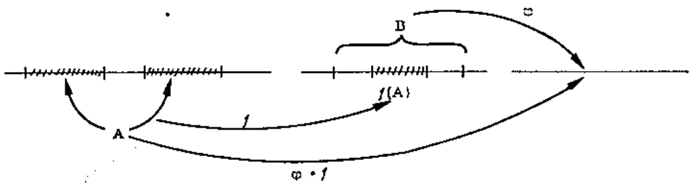


Fig. 13

TEOREMA 2.9 - *Sejam* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $\varphi\colon B \to \mathbb{R}$ *duas funções reais, tais que* $f(A) \subset B$. *Suponha que* f *tem limite em um ponto* c, *e seja* m *tal limite. Suponha que* φ *é contínua no ponto* m. *Então, a função composta* $\varphi \circ f$ *tem limite no ponto* c *e*

$$\lim_{x \to c} \varphi(f(x)) = \varphi(m).$$

Demonstração: Seja (x_n) uma sucessão contida em $A \setminus \{c\}$ convergido para c. Pela hipótese sobre f segue-se que $f(x_n) \to m$. Como φ é contínua, usamos o Teorema 2.7 para obter $\varphi(f(x_n)) \to \varphi(m)$. Ora, isso é ver dade para todo sucessão $(x_n) \subset A\setminus\{c\}$ convergindo para c. Logo, pelo Teorema 2.4, o resultado se segue.

2.5 - Operações com funções contínuas

Usando as propriedades de limites de função, obtemos facilmente os seguintes resultados. Algumas das demonstrações ficam a cargo do leitor.

TEOREMA 2.10 - A soma de duas funções contínuas $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ definidas em um mesmo intervalo I é contínua.

TEOREMA 2.11 - O produto de duas funções contínuas $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ definidas em um intervalo I é contínua.

COROLÁRIO 2.1 - Se $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em um intervalo I, e a é um número real, então, a função af é contínua.

Demonstração: Use o Teorema 2.11 com a função g constante e igual a a.

COROLÁRIO 2.2 - A diferença $(f - g)$ de duas funções contínuas $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ em um intervalo I é contínua.

Demonstração: Do Corolário 2.1 segue-se que $-g$ é contínua. Portanto, o resultado se segue pela aplicação do Teorema 2.10 a f e $-g$.

TEOREMA 2.12 - Se $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em um intervalo I e $f(x) \neq 0$ para todo x em I, então, a função $1/f(x)$ é contínua em I.

COROLÁRIO 2.3 - Se $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em um intervalo I e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então, a função g/f é contínua em I.

Demonstração: Direta a partir dos Teoremas 2.11 e 2.12.

TEOREMA 2.13 - Se $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em um intervalo I, então, a função $|f|$ é também contínua em I.

TEOREMA 2.14 - Sejam $f: I \to \mathbb{R}$ e $\varphi: J \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em intervalos I e J, e tais que a imagem $f(I)$ esteja contida em J. Então, a função composta $\varphi \circ f$ é contínua em I.

Demonstração: Provemos a continuidade em um ponto c. Como f é contínua em c temos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. E, como a função φ é contínua em $f(c)$, temos que $\lim_{y \to f(c)} \varphi(y) = \varphi(f(c))$. Pelo Teorema 2.9 sobre limites de funções compostas temos que

$$\lim_{x \to c} \varphi(f(x)) = \varphi(f(c)),$$

o que mostra que $\varphi \circ f$ é contínua em c.

EXERCÍCIO 1 - Sejam $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas definidas em um intervalo I.

Mostre que as funções

$$h(x) = \max[f(x), g(x)]$$

$$k(x) = \min[f(x), g(x)]$$

são contínuas em I. (Observe como as funções h e k são definidas: dado $x \in I$, considere os dois números reais $f(x)$ e $g(x)$, e defina $h(x)$ como sendo o maior dos dois, e $k(x)$ como o menor.) Sugestão: prove primeiro que

$$\max[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$\min[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].$$

EXERCÍCIO 2 - Seja $f: R \to R$ uma função tal que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $\lambda \in R$ e todo $x \in R$.

Mostre que f é contínua.

EXERCÍCIO 3 - Seja $f: R \to R$ definida assim: $f(x) = 0$ se x é irracional, e se x for racional tome a representação de x por uma fração irredutível $\frac{p}{q}$

onde $q > 0$, defina $f(x) = \frac{1}{q}$. Mostre que f é contínua nos irracionais e descontínua nos racionais. (Compare essa função com a função de Dirichlet, veja seção 1.1).

EXERCÍCIO 4 - Seja I um intervalo qualquer dado; uma função $f: I \to R$ é <u>Lipschitziana</u> se existe $M > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$ para todos x,y em I. Mostre que f é contínua em I.

EXERCÍCIO 5 - Seja I um intervalo; $f: I \to R$ é <u>Hölder-contínua</u> se existem $\alpha > 0$ e M tais que $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^{\alpha}$ para todos x,y em I. M é chamado a constante de Hölder e α o expoente de Hölder. Mostre que f é contínua em I. (Observação: $\alpha = 1$ é o caso do Exercício 4 acima. Se $\alpha > 1$, prova-se que f é constante, cf. Exercício 2 da seção 3.6).

EXERCÍCIO 6 - Mostre que a função $f(x) = x^2$ definida em $|x| \le 17$ é Lipschitziana, mas $f(x) = x^2$ definida em $-\infty < x < \infty$ não é. Dê outros exemplos de funções Lipschitzianas.

EXERCÍCIO 7 - Mostre que a função $f(x) = x^{1/2}$, definida para $x \ge 0$, não é Lipschitziana em nenhum intervalo contendo a origem. Entretanto f Hölder-contínua com expoente 1/2 em cada intervalo finito.

(Sugestão: comece com $x > y$ e escreva $\sqrt{x} - \sqrt{y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$ e multiplique ambos os membros por $\sqrt{x} - \sqrt{y}$).

EXERCÍCIO 8 - Mostre que x^{α}, $0 < \alpha \le 1$, é Hölder contínua em $0 \le x \le 1$ com expoente α.

EXERCÍCIO 9 - Uma função $f: R \to R$ é <u>localmente Lipschitziana</u> se para qualquer $x_o \in R$ existem $\varepsilon > 0$ e $M > 0$, ambos funções de x_o, tais que $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$, para $|x-x_o| < \varepsilon$ e $|y-x_o| < \varepsilon$. Mostre que f é contínua em R. Dê exemplos de funções localmente Lipschitzianas que não são Lipschitzianas.

EXERCÍCIO 10 - Uma função $f: R \to R$ é <u>localmente Hölderiana</u> (ou localmente Hölder-contínua) se para qualquer x_o existem $\varepsilon > 0$, $M > 0$ e $0 < \alpha$, tais que $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^{\alpha}$ para $|x-x_o| < \varepsilon$ e $|y-y_o| < \varepsilon$. Mostre que f é contínua em R. (Se $\alpha = 1$ temos o caso do Exercício 9, e se $\alpha > 1$ então f é constante, cf. Exercício 2 da seção 3.6).

EXERCÍCIO 11 - Seja I o intervalo aberto $(0,1)$ e $f: I \to R$ uma função Hölder-contínua em I. Mostre que $\lim_{x\to 0+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1-} f(x)$ existem. (Sugestão: use o Exercício 5 da seção 2.2, devidamente adaptado para limites laterais).

2.6 - Funções contínuas em intervalos fechados

Uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto A dos reais é limitada superiormente se existe um número real M tal que

$$(1) \qquad f(x) \leq M, \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$

Em outras palavras, usando a terminologia introduzida na seção 1.3: f é limitada superiormente se a imagem $f(A)$ tem uma cota superior. Portanto, o M da relação (1) pode ser qualquer cota superior. Pelo Postulado de Dedekind, o conjunto $f(A)$, no caso de uma função limitada superiormente, tem um supremo. Definimos, então, o supremo da função f (em símbolos $\sup f$) como sendo o supremo do conjunto $f(A)$.

Analogamente, uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é limitada inferiormente se existe um número real N tal que

$$f(x) \geq N, \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$

O ínfimo de f, que se desgina por $\inf f$, é definido como sendo o ínfimo do conjunto $f(A)$.

EXEMPLOS: As funções (i), (ix) e (x) definidas na seção 2.1 não têm nem supremo nem ínfimo. É comum dizer-se que o supremo de f é $+\infty$ quando tal supremo não existe. Analogamente, usa-se a convenção $\inf f = -\infty$ se o ínfimo não existe. Para algumas das outras funções definidas na seção 2.1, temos:

(ii) $\inf f = 0$, $\sup f = 1$. (iii) $\inf f = 0$ e $\sup f =$

(iii) $\inf f = 0$ e $\sup f = 2$.

(v) $\inf f = 0$, $\sup f = +\infty$.

(vii) $\inf f = 0$ e $\sup f = +\infty$.

Uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é <u>limitada</u> se for limitada superiormente e limitada inferiormente. As funções dos exemplos (ii), (iii), (iv) e (viii) são limitadas. É claro que uma função f é limitada se, e só se, existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$.

Dada uma função limitada superiormente, pode existir ou não um ponto $x_o \in A$ tal que $f(x_o) = \sup f$. Para a função (iii) não existe um tal x_o, enquanto que para a função (iv) existe. Diz-se que a função <u>assume máximo em</u> A quando existe um tal x_o, e o número $\sup f$ é chamado de <u>máximo</u> de f. Considerações análogas para o ínfimo: quando existe $x_o \in A$ tal que $f(x_o) = \inf f$, então, o $\inf f$ é chamado o <u>mínimo</u> de f e diz-se que a função <u>assume mínimo</u> em A.

TEOREMA 2.1 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Então, f assume máximo e mínimo em $[a,b]$.

Observação: A existência de um tal ponto parece óbvia a partir do exame do gráfico da função contínua f, cf. figura 14. Entretanto, não devemos basear nossas demonstrações em argumentos geométricos com os gráficos, pois, em certos casos o gráfico pode ser complicado e difícil de visualizar. Como, por exemplo, o gráfico da função de Dirichlet definida na seção 1.1.

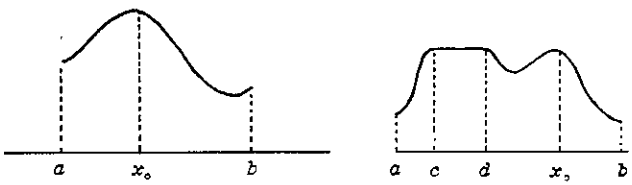


Fig. 14

Para a demonstração do Teorema 2.15 necessitaremos do seguinte lema:

LEMA 2.1 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$. Então f é limitada.

Demonstração: Vamos mostrar que f é limitada superiormente. De modo análogo demonstraríamos que f é limitada inferiormente. Suponhamos, por contradição, que f não fosse limitada superiormente. Logo, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a,b]$ tal que $f(x_n) > n$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (seção 1.10), (x_n) contém uma subsucessão (x_{n_j}) convergente, seja r o seu limite. Pela continuidade da f, segue-se (Teorema 2.7) que $f(x_{n_j}) \to f(r)$. Portanto, a partir de um certo n_j temos

$$f(x_{n_j}) < f(r) + 1.$$

Isto, porém, contradiz o fato de que $f(x_{n_j}) > n_j$. O lema está provado.

<u>Demonstração do Teorema 2.15</u> - Seja M o sup de f em $[a,b]$, o qual existe, em virtude do Lema 2.1. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a,b]$ tal que $M - f(x_n) < 1/n$. Pois, se não existisse, então $M - f(x) \geq 1/n$ para todo $x \in [a,b]$ e daí $M - 1/n \geq f(x)$, o que contradiz o fato de M ser o sup de f. Construímos deste modo uma sucessão (x_n). Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, segue-se que (x_n) contém uma subsucessão convergente (x_{n_j}), e seja r seu limite. Pela continuidade de f, segue-se (Teorema 2.7) que $f(x_{n_j}) \to f(r)$. Como $M - f(x_{n_j}) < 1/n_j$, concluímos por propriedades de limites de sucessões (Propriedade 6, seção 1.7) que $M = f(r)$, como queríamos provar.

Outro resultado que também parece razoável a partir da análise do gráfico de uma função contínua é o seguinte teorema, conhecido como o Teorema do Valor Intermediário.

TEOREMA 2.16 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo fechado $[a,b]$. Então, a função f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, a imagem $f([a,b])$ contém o intervalo fechado com extremidades $f(a)$ e $f(b)$.

A demonstração utiliza os seguinte lemas.

LEMA 2.2 - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo I. Suponhamos que, para um ponto $x_o \in I$, se tenha $f(x_o) < c$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo $x \in I$ tal que $|x-x_o| \leq \varepsilon$.

Demonstração por contradição: Suponha que, qualquer que seja n, exista $x_n \in I$ tal que $|x_n-x_o| < 1/n$ e $f(x_n) \geq c$. A sucessão (x_n) assim construída converge para x_o. Pela continuidade de f, segue-se (Teorema 2.7) que $f(x_n) \to f(x_o)$. Daí decorreria $f(x_o) \geq c$, o que contradiz a hipótese $f(x_o) < c$.

LEMA 2.3 - f como no Lema 2.1. Suponhamos que, para $x_o \in I$, $f(x_o) > d$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > d$ para todo $x \in I$ e $|x-x_o| \leq \varepsilon$.

<u>Demonstração</u>: Aplique o Lema 2.2 à função $g(x) = -f(x)$.

<u>Demonstração do Teorema 2.16</u>: Para fixar as idéias, suponhamos que $f(a) < f(b)$, e seja c um ponto do intervalo $(f(a), f(b))$. Queremos provar que existe $x_o \in [a,b]$ tal que $f(x_o) = c$. Seja $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq c\}$. O conjunto A é não vazio, e b é uma cota superior para ele. Logo, o supremo de A existe; seja x' tal sup. É claro que $x' \leq b$. Além disso, $x' < b$. De fato, sendo $f(b) > c$ segue-se pelo Lema 2.3 que existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in [b - \varepsilon, b]$ temos $f(x) > c$. Logo, os x desse intervalo são cotas superiores do conjunto A e, portanto, b não pode ser o supremo de A. Agora, provemos que $f(x') = c$. Suponhamos que $f(x') < c$, então, pelo Lema 2.2 segue-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo $x \in [x - \varepsilon, x' + \varepsilon]$, o que contradiz o fato de x' ser o sup de A. A outra possibilidade, $f(x') > c$ também não ocorre, pois, usando o Lema 2.3 ter-se-ia um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo $x \in [x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$, o que mostra que $x' - \varepsilon$ é cota superior para o conjunto A; isso contradiz o fato de x' ser o supremo de A. Logo, $f(x')$ deve ser igual a c, o que prova o teorema.

EXERCÍCIO 1 - Seja $f: [0,1] \to R$ uma função real contínua. Suponha que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para qualquer $x \in [0,1]$ e que $f(0) = 1$. Mostre que $f \equiv 1$.

EXERCÍCIO 2 - Seja $f\colon [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua cujos domínio e contradomínio são o intervalo fechado $[0,1]$. Mostre que existe $x_o \in [0,1]$ tal que $f(x_o) = x_o$. (Sugestão: suponha que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$, pois se uma dessas desigualdades não ocorresse já teríamos o x_o procurado. Agora considere a função $g(x) = f(x) - x$ e aplique o Teorema 2.16). Observação: O ponto x_o é chamado um ponto fixo da função f. Um resultado semelhante é válido para funções de várias variáveis, mas a demonstração não é tão simples; nesse caso o resultado toma o nome de Teorema de Brouwer e é uma das poderosas armas da Análise nas investigações em campos da matemática e em suas aplicações.

2.7 - Funções monótonas

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I. Damos as seguintes definições:

f é crescente se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I

f é decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I

f é <u>não decrescente</u> se $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I

f é <u>não crescente</u> se $f(x_1) \geq f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I.

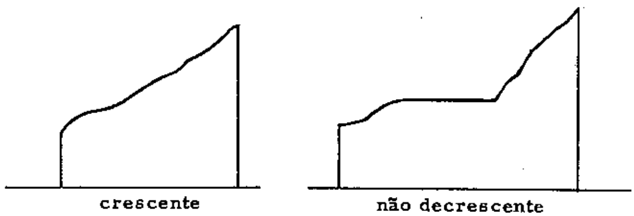


Fig. 15

É claro que toda função crescente é não decrescente, e toda função decrescente é não crescente. Obviamente, esses conceitos sobre a variação de uma função nada têm a ver com continuidade, cf. exemplos (viii) e (ix) da seção 2.1. Usa-se a expressão <u>monótona</u> para qualquer um dos quatro tipos de funções acima definidas.

TEOREMA 2.17 - <u>Uma função não decrescente f</u>: $I \to \mathbb{R}$ <u>definida em um intervalo</u> I <u>tem limites laterais em todos os pontos de</u> I.

<u>Observação</u>: É claro que se $c \in I$ é uma extremidade de I, então só existe um dos limites laterais. Se uma das extremidades do intervalo I não pertence a I, então o limite lateral em c pode não existir, cf. exemplo (x) da seção 2.1.

<u>Demonstração do Teorema 2.17</u>: 1) Seja c um ponto do interior de I ou a extremidade direita no caso desta pertencer ao intervalo I. Provemos que o limite à esquerda de f no ponto c existe. Considere o conjunto A dos $f(x)$ para $x < c$. Como $f(c)$ é uma cota superior para A, segue-se pelo Postulado de Dedekind que A tem supremo, que designamos por m. Seja agora (x_n) uma sucessão crescente contida em I e convergindo para c. Como f é não decrescente, $(f(x_n))$ é uma sucessão não decrescente e, portanto, converge, e seja d o seu limite. É claro que $d \leq m$. Se $d < m$ então existe $x < c$ tal que: (*) $d < f(x)$. Como $x_n \to c$ segue-se que existe n tal que $x < x_n$ e daí $f(x) \leq f(x_n)$. Esta desigualdade juntamente com (*) dá $d < f(x_n)$, o que contradiz o fato de a sucessão não decrescente $(f(x_n))$ convergir para d. Logo $(f(x_n))$ converge para m, qualquer que seja a sucessão (x_n) crescente, contida em I e convergindo para c. Isso mostra que $f(c-)$ existe e é igual a m.

2) Se c é um ponto interior ou a extremidade esquerda no caso desta pertencer ao intervalo, então, $f(c+)$ existe. De modo análogo ao procedimento da primeira parte, provamos que $f(c+)$ é o ínfimo do conjunto dos $f(x)$ para $x > c$.

<u>Nota</u>: Decorre da demonstração acima, que se f é não decrescente e c é um ponto interior, então

$$f(c-) \leq f(c) \leq f(c+). \tag{1}$$

COROLÁRIO 2.4 - <u>Toda função não crescente</u> $f\colon I \to \mathbb{R}$, <u>onde</u> I <u>é um intervalo, tem limites laterais nos pontos de</u> I.

<u>Demonstração</u>: A função $-f$ é não decrescente. Pelo Teorema 2.17 $-f$ tem os limites laterais. Pelas propriedades dos limites laterais de funções, cf. seção 2.3, segue-se que f também tem os limites laterais nos pontos de I.

EXERCÍCIO 1 - Seja I um intervalo. Diz-se que uma função $f\colon I \to R$ satisfaz à <u>propriedade do valor intermediário</u> se dados $p,q \in f(I)$, então os pontos entre p e q pertencem a $f(I)$. Mostre que se f satisfaz a propriedade do valor intermediário e é monótona então f é contínua.

*EXERCÍCIO 2 - Uma função $f\colon I \to R$ é localmente monótona se para qualquer $x_o \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que f é monótona em $(x_o-\epsilon\,,\ x_o+\epsilon)$. Demonstre que f é monótona em I.

EXERCÍCIO 3 - Seja $f: I \to R$ uma função real monótona definida em um intervalo I. Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade da f é enumerável ou finito. (Um conjunto $A \subset R$ é enumerável se for possível definir uma função bijetiva $\psi: \mathbb{N} \to A$. Exemplo: (i) o conjunto dos números pares: $P = \{0,2,4,...\}$; neste caso a função $\psi: \mathbb{N} \to P$ será dada por $\psi(x) = 2x$). Sugestão: viu-se no Teorema 2.17 que as descontinuidades de f são todas de primeira espécie. Considere primeiramente o caso quando I é um intervalo fechado limitado; basta também considerar o caso de f não decrescente. Os saltos da f nos pontos de descontinuidade são no máximo $f(b) - f(a)$, onde $I = [a,b]$. Agora considere os pontos de descontinuidade onde o salto é maior que 1: prove que há apenas um número finito de tais pontos. A seguir os pontos de descontinuidade onde o salto é maior que 1/2: novamente apenas um número finito. E assim por diante: 1/3, 1/4, ... Finalmente prove e use o fato que a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável. O caso quando $I = (a,b)$ é aberto pode ser tratado escrevendo-se que $I = \bigcup_{n=1} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, usando o caso já visto anteriormente e o Exercício 4 a seguir. Finalmente considere o caso de intervalos não limitados).

EXERCÍCIO 4 - Mostre que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. (Se não conseguir olhe a figura da página 30 da referência [10].)

2.8 - A função inversa

Seja $f: A \to B$ uma função injetiva definida em um conjunto A e tomando valores em um conjunto B. Relembremos que f injetiva significa $f(x_1) \neq f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ em A; cf. seção 1.1. Para uma tal f, pode-se definir a função inversa $f^{-1}: f(A) \to A$, que tem por domínio a imagem $f(A)$ e por contradomínio o conjunto A, do seguinte modo: para $y \in f(A)$ temos $f^{-1}(y) = x$, onde $x \in A$ é o elemento (único, por ser f injetiva) tal que $f(x) = y$.

Observe que $f^{-1}: f(A) \to A$ é sobrejetiva. Obviamente toda função crescente (ou decrescente) é injetiva. Para funções contínuas vale uma recíproca deste fato: "toda função $f: I \to \mathbb{R}$ injetiva contínua é ou crescente ou decrescente". Isso será provado na seção 2.9.

LEMA 2.4 - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua crescente em um intervalo I. Então, a imagem $f(I)$ é um intervalo. Além disso, se c pertence ao interior de I, então $f(c)$ pertence ao interior de $f(I)$.

Observação: O teorema acima nos diz então que se I é um intervalo aberto (a,b), então $f(I)$ é também um intervalo aberto (c,d), onde uma ou ambas as extremidades podem ser infinitas. Se I é um intervalo fechado $[a,b]$, então, $f(I)$ é também um intervalo fechado. Intervalos do tipo $[a,b)$ são transformados em intervalos do tipo $[c,d)$, onde d pode ser $+\infty$. Dê exemplos das várias possibilidades. Sugestão: funções como $f(x) = -1/x$ para $x > 0$, e $g(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ podem ajudar.

Demonstração do Lema 2.4: 1) Para mostrar que $f(I)$ é um intervalo, o que devemos fazer é provar que se y_1 e y_2, $y_1 < y_2$, pertencem a $f(I)$, então, o intervalo $[y_1,y_2]$ está contido em $f(I)$. Sejam x_1 e x_2 os pontos de I tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Logo, devemos provar que $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$. Isto, porém, decorre do teorema do valor intermediário, cf. Teorema 2.16.

2) Seja agora c um ponto do interior de I. Seja $\varepsilon > 0$, tal que $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset I$. Pela primeira parte deste teorema, já provada, a imagem do intervalo

$[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ é um intervalo J, cujas extremidades são $f(c-\varepsilon)$ e $f(c+\varepsilon)$. Sendo f crescente, segue-se que $f(c-\varepsilon) < f(c) < f(c+\varepsilon)$, o que mostra que $f(c)$ é um ponto do interior de J, e, a fortiori, de $f(I)$.

TEOREMA 2.18 - <u>Seja</u> $f: I \to \mathbb{R}$ <u>uma função contínua crescente em um intervalo</u> I. <u>Então, a função inversa</u> $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ <u>é também contínua</u>.

<u>Demonstração</u>: Primeiramente, observamos que a função inversa é também crescente. Logo, os limites laterais existem em todos os pontos do intervalo $f(I)$. Vamos provar que se d pertence ao interior de $f(I)$, então $f^{-1}(d-) = f^{-1}(d) = f^{-1}(d+)$. (O caso em que $d \in f(I)$ é uma extremidade pode ser atacado pelo mesmo processo.) Pela Nota da seção 2.7 temos que

$$f^{-1}(d-) \leq f^{-1}(d) \leq f^{-1}(d+)$$

Suponhamos que $f^{-1}(d-) < f^{-1}(d)$. Como $f^{-1}(d-)$ é o supremo dos $f^{-1}(y)$ tais que $y < d$, segue-se que existe $y_n < d$ e $y_n \to d$ tal que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(d-)$. Como f é crescente temos

$$(1) \qquad y_n < f(f^{-1}(d-))$$

Por outro lado, da hipótese $f^{-1}(d-) < f^{-1}(d)$, e do fato de f ser crescente temos

(2) $$f(f^{-1}(d-)) < f(f^{-1}(d)) = d.$$

As desigualdades (1) e (2) implicam que

$$\lim y_n \leq f(f^{-1}(d-)) < d,$$

o que contradiz o fato de (y_n) convergir para d. De modo análogo prova-se que $f^{-1}(d) < f^{-1}(d+)$ não pode ocorrer.

COROLÁRIO 2.5 - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua decrescente em um intervalo I. Então, a função inversa $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ é também contínua.

Demonstração: A função $g = -f$ é crescente. Por conseguinte, pelo teorema anterior $g^{-1}: g(I) \to \mathbb{R}$ é contínua. Ora, $g(I) = -f(I)$ e $f^{-1}(y) = g^{-1}(-y)$ para todo $y \in f(I)$. A continuidade de f^{-1}, segue-se usando o Teorema 2.14, pois a função f^{-1} é a composta da função contínua g^{-1} e dá função contínua

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida por $h(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.9 - As funções injetivas da reta

TEOREMA 2.19 - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva definida em um intervalo I. Então, f é uma função crescente ou uma função decrescente.

Demonstração: (1) Sejam $a, b \in I$, com $a < b$. Sendo f uma injetiva, segue-se que um dos dois casos deve ocorrer:

(1.i) $f(a) < f(b)$; (1.ii) $f(a) > f(b)$.

(2) Sejam $a, b, c \in I$, com $a < b < c$. Provemos que um dos dois casos deve ocorrer:

(2.i) $f(a) < f(b) < f(c)$; (2.ii) $f(a) > f(b) > f(c)$.

Suponhamos, em vista da parte (1) acima, que $f(a) < f(c)$. (A outra possibilidade poderá ser tratada com um raciocínio análogo.) Devemos provar que o caso (2.i) ocorre. Suponhamos, por contradição, que $f(a) > f(b)$. Seja r um número real comum aos intervalos $(f(b), f(a))$ e $(f(b), f(c))$. Pelo teorema do valor intermediário existem pontos $x_1 \in (a,b)$ e $x_2 \in (b,c)$ tais que $f(x_1) = r$ e $f(x_2) = r$. Isso, porém, contradiz a injetividade da função f. De modo inteiramente análogo, provemos que $f(b) > f(c)$ não pode ocorrer.

(3) Sejam $a,b,c,d \in I$, com $a < b < c < d$. Provemos que um dos dois casos deve ocorrer:

(3.i) $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$; (3.ii) $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

Suponhamos, em vista da parte (2) acima que

$$(1) \qquad f(a) < f(b) < f(c).$$

(A outra possibilidade, i.e. (2.ii), poderá ser tratada de modo análogo.) Devemos provar que, feita esta hipótese, i.e. desigualdade (1), o caso (3.i) ocorre. Consideremos os pontos b,c,d. Aplicando a parte (2) novamente, concluímos que

$$(2) \qquad f(b) < f(c) < f(d),$$

pois a outra possibilidade está descartada em virtude de já sabermos que $f(b) < f(c)$. As desigualdades (1) e (2) dão (3.i).

(4) Provemos, finalmente, que f é crescente ou decrescente. Fixemos dois pontos $a,b \in I$, $a < b$. Em vista da parte (1), temos $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$. Provaremos que no primeiro caso a função é crescente, e que no segundo, ela é decrescente. Consideremos o primeiro caso. Sejam x e y pontos quaisquer de I com

$x < y$, e provemos que $f(x) < f(y)$. O que devemos fazer é ver a localização dos pontos x e y em relação a a e b. No entanto em qualquer caso decorrerá a igualdade procurada. Por exemplo, se $x < y < a < b$, decorre, em vista da parte (3) e de já sabermos que $f(a) < f(b)$, que $f(x) < f(y) < f(a) < f(b)$. Deixamos ao leitor a consideração (inteiramente análoga) dos demais casos das posições de x e y, bem como o caso $f(a) > f(b)$.

2.10 - As funções lineares

Um tipo particularmente importante de funções reais é dado pelas funções lineares, que definiremos a seguir. Sejam a e b dois números reais dados. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

(1) $$f(x) = ax + b$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e chamada uma função linear. O nome linear provém de que, como analisaremos abaixo, o gráfico de f é uma reta. A continuidade de f é imediata.

O gráfico de $f(x)$. Para $x = 0$ temos $f(x) = b$. Logo, o gráfico de f passa pelo ponto $(0,b)$. Se $b = 0$, o gráfico da f correspondente, $f(x)=$

$= ax$, passa pela origem. Consideremos esse caso primeiro. Há três possibilidades:

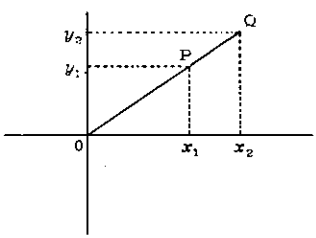
1a). $a = 0$. Neste caso $f(x) = 0$, e o gráfico de f, neste caso, é simplesmente o eixo dos x.

2a). $a > 0$. Sejam x_1 e x_2 dois reais diferentes de zero e designemos: $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Como $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$, temos

$$(2) \qquad y_1/x_1 = y_2/x_2 .$$

Observe que para (x,y) no gráfico, os números x e y têm o mesmo sinal. Logo, se são negativos temos $y/x = |y|/|x|$. À vista disso, a relação (2) implica que os triângulos Opx_1 e Oqx_2 das figuras abaixo são semelhantes.



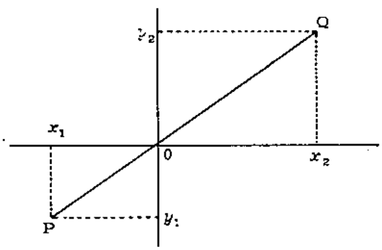


Fig. 16

Portanto, os pontos (x,y) do gráfico de $f(x) = ax$ são precisamente os pontos de uma reta passando pela origem:

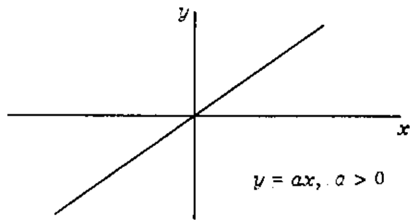


Fig. 17

3a). $a < 0$. Como no caso anterior, podemos provar que o gráfico de $f(x) = ax$ é uma reta passando pela origem como mostra a figura 18.

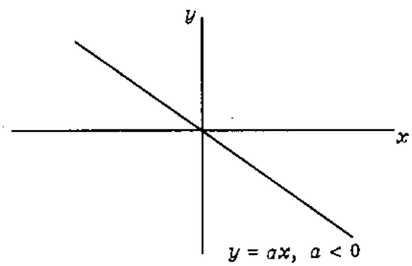


Fig. 18

Para o caso geral, $f(x) = ax + b$, o gráfico é o transladado do gráfico de $g(x) = ax$ por b no sentido vertical. Assim, por exemplo:

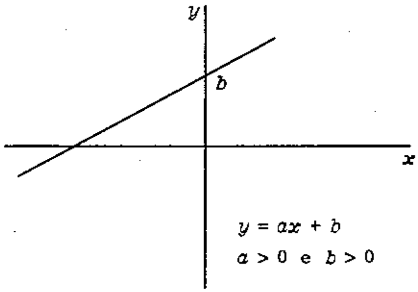


Fig. 19

<u>A equação de uma reta</u>. Dada uma reta R em um plano coordenado (x,y), ela é o gráfico de uma função linear, se R não fôr paralela ao eixo dos y. De fato, devemos determinar os parâmetros a e b que determinam a função linear correspondente a R. Para isso tomamos dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) de R e, como esses pontos devem pertencer ao gráfico da função linear procurada, escrevemos

$$(3) \qquad y_1 = ax_1 + b \quad e \quad y_2 = ax_2 + b$$

Temos, assim, em (3) um sistema de duas equações com incógnitas a e b. Resolvendo, obtemos

$$(4) \qquad a = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) \quad e \quad b = (x_2y_1-x_1y_2)/(x_2-x_1).$$

É claro que os denominadores são diferentes de zero, pois, estamos tomando pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) distintos, o que implica $x_1 \neq x_2$, pois, a reta não é paralela ao eixo dos y. As expressões (4) serão simplificadas se um dos pontos escolhidos de R fôr o ponto $(0,y_2)$ onde R corta o eixo dos y, e o outro fôr o ponto $(x_1,0)$ onde R corta o eixo dos x. Então

$$(5) \qquad a = -y_2/x_1 \quad e \quad b = y_2.$$

<u>Conclusão</u>. O gráfico de qualquer função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela ao eixo dos y, e vice-versa. Daí dizermos que $y = ax + b$ é a <u>equação geral das retas não paralelas ao eixo dos</u> y. Obviamente, retas paralelas ao eixo dos y têm equações da forma $x = c$.

DEFINIÇÃO - O número a é chamado o <u>coeficiente angular</u> da reta $y = ax + b$.

EXERCÍCIO 1 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todos x e y em R. Prove que f é linear, ou mais precisamente, da forma ax. (Sugestão: Prove que $f(2) = 2f(1)$, e daí calcule $f(n)$ e $f(1/n)$ para n inteiro positivo, e $f(r)$ para r racional. Usando a continuidade da f, calcule por fim $f(x)$ para x real qualquer. Não esqueça os reais negativos!)

Observação: Existem funções que satisfazem a relação acima mas não são da forma ax. Decorre do exercício acima que tais funções não são contínuas. A demonstração da existência de tais funções é uma peça matemática difícil, mas particularmente bonita e elegante. Ela usa o Lema de Zorn, base de Hamel,... Curioso? Consulte a referência [13].

EXERCÍCIO 2 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

e

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad x \geq 0.$$

Prove que f é da forma ax, o que em particular implica que f é contínua. (Sugestão: Como no exercício precedente, calcule $f(r)$ para r racional. Depois use o fato que dado um número real, pode-se determinar sucessões (r_n) e (s_n) de racionais convergindo para x, tais que (r_n) é crescente e (s_n) é decrescente.)

EXERCÍCIO 3 - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I que pode ser infinito. A função f é chamada convexa se

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$ e todo par a,b em I. Mostre que

f ser convexa significa que o segmento de reta ligando os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ está acima do gráfico da função $y = f(x)$. Verifique que as funções $y = x$, $y = x^2$ são convexas. Dê outros exemplos.

EXERCÍCIO 4 - Demonstre que toda função convexa $f: (a,b) \to R$ definida em um intervalo <u>aberto</u> (a,b) é contínua. (Sugestão: Fixe um ponto $c \in (a,b)$ e prove que $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. Para isso fixe pontos α e β em (a,b), tais que $\alpha < c < x < \beta$. Usando convexidade da função f aplicada aos pontos α, c, x, obtenha uma estimativa para $f(c) - f(x)$. Analogamente, considerando os pontos c, x, β, obtenha estimativa para $f(x) - f(c)$. As desigualdades obtidas implicarão a existência do limite lateral à direita em c, bem como sua igualdade a $f(c)$. Raciocínio semelhante para o limite lateral à esquerda em c.

EXERCÍCIO 5 - Dê um exemplo para mostrar que uma função convexa em um intervalo não é necessariamente contínua.

EXERCÍCIO 6 - Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Demonstre que

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

para x, c, d no intervalo (a,b) e tais que $x < c < d$.

EXERCÍCIO 7 - Uma função $f: R \to R$ satisfaz a propriedade do valor médio se, para qualquer $x_o \in R$ e $r > 0$, temos $f(x_o) = \frac{1}{2}[f(x_o+r) + f(x_o-r)]$. Se uma função f satisfaz à propriedade do valor médio e é contínua, então ela é linear.

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES DERIVÁVEIS

3.1 - A derivada

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I, que pode ser de qualquer um dos tipos apresentados na seção 1.5. Usamos a notação $\{c\}$ para designar o conjunto formado de um único elemento c.

Fixemos um ponto c, o qual pode ser do interior de I ou a extremidade esquerda de I no caso desta pertencer ao intervalo I. Consideramos a função $q: I\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$(1) \qquad q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\,.$$

Se a função q tem limite à direita no ponto c, então, diz-se que a função f é derivável à direita no ponto c. O limite à direita de q no ponto c, que se designa por $f'_+(c)$ é chamado a derivada lateral direita de f no ponto c. Em símbolos, tem-se

$$(2) \qquad f'_+(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Seja agora c um ponto do interior de I ou a extremidade direita de I no caso desta pertencer a I. Se a função q definida em (1) tem limite à esquerda em c, então, diz-se que a função f é <u>derivável à esquerda</u> no ponto c. O limite à esquerda de q no ponto c, que se designa por $f'_-(c)$ é chamado a <u>derivada lateral esquerda</u> de f no ponto c. Em símbolos:

$$(3) \qquad f'_-(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Seja agora c um ponto do interior de I. Se a função f é derivável à direita e à esquerda em c, e as derivadas laterais em c são iguais, dizemos que f é <u>derivável</u> em c. O valor comum das derivadas laterais em c é chamado a <u>derivada</u> de f em c, e se designa por $f'(c)$. É claro que f é derivável em c se a função q definida em (1) tem limite no ponto c, e tem-se

$$(4) \qquad f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

A expressão (1) é chamada a <u>razão incremental</u> de f relativamente ao ponto $c \in I$.

<u>Interpretação cinemática</u>. Consideremos uma partícula se deslocando de um ponto A para

um ponto B sobre uma reta R. Definamos a função $f: [0,T] \to \mathbb{R}$ que, para cada instante $t \in [0,T]$, dá a posição da partícula sobre a reta R. Fixado $c \in [0,T]$, a

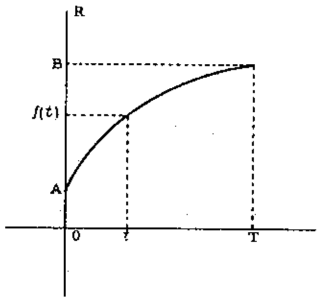


Fig. 20

razão incremental $\dfrac{f(t) - f(c)}{t - c}$ representa a velocidade média da partícula no trecho entre $f(t)$ e $f(c)$. O limite desse quociente no ponto c representa a velocidade da partícula no instante $t = c$.

<u>Interpretação geométrica</u>. Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo I. O gráfico de f, isto é, o conjunto dos pontos do plano da forma $(x,f(x))$, onde $x \in I$, é também chamado uma curva. A razão incremental representa o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(x,f(x))$ e $(c,f(c))$. Se o limite da função $q(x)$, definida em (1), existe no ponto c, segue-se que quando tomamos uma sucessão $\{x_n\}$ tendendo a c, então $q(x_n)$ converge pa-

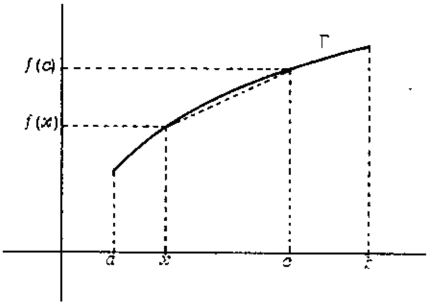


Fig. 21

ra $f'(c)$. Isto é, as retas com coeficiente angular $q(x_n)$ e passando pelo ponto $(c,f(c))$ se aproximam da reta com coeficiente angular $f'(c)$ passando pelo ponto $(c,f(c))$. Tal reta é chamada a tangente à curva Γ no ponto $(c,f(c))$.

EXEMPLOS. A função $f(x) = |x|$ tem as derivadas laterais no ponto $x = 0$, as quais são $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$. Como essas derivadas laterais são diferentes, f não é derivável em $x = 0$. A função $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$ não é derivável à direita em $x = 0$, como se pode ver facilmente, pois $q(x) = \sqrt{x}/x = 1/\sqrt{x} \to +\infty$ quando $x \to 0+$.

<u>Continuidade e existência da derivada</u>. Como vimos no primeiro exemplo acima, a continuidade da função em um ponto não implica a existência da derivada. O segundo exemplo mostra que uma função pode ser contínua sem que is-

to sequer implique na existência de derivada lateral. Mostraremos abaixo (Teorema 3.1) que a implicação contrária é verdadeira, isto é, a existência de derivada implica em continuidade.

TEOREMA 3.1 - Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I.

a) Se f é derivável à direita em um ponto $c \in I$, então f é contínua à direita em c.

b) Se f é derivável à esquerda em um ponto $c \in I$, então f é contínua à esquerda em c.

c) Se f é derivável à direita e à esquerda em $c \in I$, então f é contínua em c. Em particular, se f for derivável em c, ela é contínua.

Demonstração: a) Suponhamos, por contradição, que f não seja contínua à direita em c. Logo, ou $f(c+)$ não existe ou se existe $f(c) \neq f(c+)$. Em qualquer caso, segue-se que existe uma sucessão (x_n) decrescente convergindo para c e tal que $f(x_n)$ não converge para $f(c)$. Então, existe $d > 0$ e uma subsucessão (x_{n_j}) de (x_n) tal que $|f(x_{n_j}) - f(c)| > d$. Daí decorre que

$$|q(x_{n_j})| = \left|\frac{f(x_{n_j}) - f(c)}{x_{n_j} - c}\right| > \frac{d}{|x_{n_j} - c|}.$$

Portanto, temos $x_{n_j} \to c$ e $|q(x_n)| \to +\infty$, o que contradiz a hipótese de que $q(x_{n_j})$ converge para $f'_+(c)$. As demonstrações de b) e c) se fazem de modo perfeitamente análogo.

<u>O caráter local da derivada</u>. A razão incremental $q(x)$ para pontos x perto de c envolve valores de $f(x)$ apenas para x perto de c. Agora, como observamos na seção 2.2, a existência de limite da função $q(x)$ no ponto c é uma propriedade local, isto é, depende tão somente do comportamento de $q(x)$ perto de c. Portanto, a existência da derivada de f no ponto c é também uma propriedade local.

DEFINIÇÃO - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função real derivável em todos os pontos do interior de I. Usemos a notação $\operatorname{int} I$ para designar o interior de I. A função

$$f': \operatorname{int} I \to \mathbb{R}$$

definida por

$$x \to f'(x)$$

é chamada a <u>função derivada</u> ou, simplesmente, derivada. Usa-se, também, a notação $\frac{df}{dx}$ (ou df/dx) para a derivada de f. Chamamos a atenção para o fato de que df/dx não é um quociente, mas, simplesmente, um símbolo para representar uma função.

EXERCÍCIO 1 - Demonstre o Teorema 3.1 usando ε's e δ's.

EXERCÍCIO 2 - Dê um exemplo de uma função lipschitziana que não é derivável em certos pontos.

3.2 - Operações com funções deriváveis

Nos enunciados abaixo $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ são funções definidas em um intervalo I, e c será sempre um ponto do interior de I.

TEOREMA 3.2 - Se f e g são deriváveis em c, então $f + g$ também o é. E vale a fórmula

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

Demonstração: Escrevemos a razão incremental de $f + g$:

$$(1) \qquad \frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Usando o Teorema 2.2 sobre limites de funções, e a hipótese de que as duas razões incrementais no segundo membro de (1) têm limite no ponto c, segue-se que o primeiro membro também tem limite aí, o qual é igual a $(f+g)'(c)$.

TEOREMA 3.3 - *Se* f *e* g *são deriváveis em* c, *então* fg *também o é. E vale a fórmula*:

$$(2) \qquad (fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Demonstração: Temos a seguinte identidade para a razão incremental de fg:

$$(2') \qquad \frac{(fg)(x)-(fg)c}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x) + \frac{g(x)-g(c)}{x-c}f(c).$$

Como, por hipótese, f e g são deriváveis em c, temos que as razões incrementais de f e g têm limite em c, e pelo Teorema 3.1 segue-se que g é contínua em c. Logo, usando propriedades de limites de funções, segue-se que o primeiro membro de (2') tem limite em c. Passando ao limite em (2') obtemos a expressão (2).

TEOREMA 3.4 - *Se* f *é derivável em* c *e* $f(c) \neq 0$, *então* $1/f$ *é derivável em* c *e*

$$(3) \qquad (1/f)'(c) = -f'(c)/[f(c)]^2 .$$

Demonstração: Consideremos a identidade:

$$(4) \qquad \frac{(1/f(x) - (1/f(c)}{x - c} = - \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \frac{1}{f(x)f(c)} .$$

Vemos que (4) não é válida para todo x em $I\setminus\{c\}$, pois, $f(x)$ pode-se anular em alguns pontos. Mas pelo Lema 3.1, abaixo, $f(x) \neq 0$ em um intervalo $(c-\epsilon, c+\epsilon)$. Logo, a identidade (4) é válida para todo x nesse intervalo. Por propriedades dos limites de funções e pela hipótese sobre f, segue-se que o limite do segundo membro de (4) existe, e é igual a $-f'(c)/[f(c)]^2$. Logo, $1/f$ é derivável em c e vale a fórmula (3).

LEMA 3.1 - <u>Seja</u> $f: I \to \mathbb{R}$ <u>uma função contínua em um intervalo</u> I <u>tal que</u> $f(c) \neq 0$ <u>para um ponto</u> $c \in I$. <u>Então, existe um</u> $\epsilon > 0$ <u>tal que</u> $f(x) \neq 0$ <u>para todo</u> $x \in I$ <u>tal que</u> $|x-c| \leq \epsilon$.

<u>Demonstração</u>: Se $f(c) < 0$, use o Lema 2.2. Se $f(c) > 0$, use o Lema 2.3.

COROLÁRIO 3.1 - <u>Se</u> f <u>e</u> g <u>são deriváveis em</u> c <u>e</u> $g(c) \neq 0$, <u>então</u> f/g <u>é derivável em</u> c <u>e</u>

$$(f/g)'(c) = [f'(c)g(c) - f(c)g'(c)]/[g(c)]^2 .$$

<u>Observação</u>: Teoremas análogos aos Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 valem para as derivadas laterais.

3.3 - Derivadas de algumas funções

a) A função constante: $f(x) = a$ para todo x. A razão incremental $q(x)$ é 0 para qualquer c e qualquer $x \neq c$. Logo, $f'(c) = 0$.

b) A potência x^n, n-inteiro positivo. Temos a seguinte identidade

$$\frac{x^n - c^n}{x-c} = x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2 x^{n-3} + \ldots + c^{n-2}x + c^{n-1}, \quad x \neq c.$$

Usando propriedades de limites de funções, concluímos que a razão incremental tem limite no ponto c, e a derivada de x^n no ponto c é nc^{n-1}. Como isso é verdade para qualquer ponto c, temos

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Produto por constante. Seja a uma (função) constante e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em c. Então, decorre de a) acima e do Teorema 3.3 que

$$(af)'(c) = af'(c)$$

d) Polinômios. Decorre do Teorema 3.2 e dos resultados a), b) e c), acima, que

$$\frac{d}{dx}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) =$$
$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

e) A potência x^{-n}, n inteiro positivo. Usando o Teorema 3.4 temos

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{n-1}/(x^n)^2$$

ou

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}, \text{ para } x \neq 0.$$

3.4 - A derivada da função inversa

Vimos na seção 2.8 que toda função $f: I \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva (ou o que dá no mesmo, de acordo com o Teorema 2.16: crescente ou decrescente) tem uma inversa $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$. Naquela mesma seção provamos que, se I é um intervalo, então, $f(I)$ também o é, e que, se f é contínua, então, f^{-1} também é. Na presente seção admitiremos que f é derivável e estudaremos a derivabilidade de f^{-1}.

TEOREMA 3.5 - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente) em um intervalo aberto I. Suponhamos que f seja derivável em I, e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então, a função inversa $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ é também derivável no intervalo (aberto) $f(I)$, e

$$(1) \qquad (f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$$

para todo y em $f(I)$.

Demonstração: Que $f(I)$ é um intervalo aberto, decorre do Lema 2.4. Seja $d = f(c)$ em $f(I)$, para qualquer $y = f(x)$ em $f(I)$, com $y \neq d$, temos a seguinte identidade

$$(2) \qquad \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)} .$$

O segundo membro de (2) é precisamente $1/q(x)$, onde $q(x)$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto c. Como f é derivável, e sua derivada nunca se anula, segue-se que a razão incremental de f^{-1}, escrita no primeiro membro de (2), tem limite no ponto d. Portanto, pelo Teorema 2.3

$$\lim_{y\to d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = 1/\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} ,$$

o que prova o teorema.

Observação: A condição "$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$" é essencial para a validade do Teorema 3.5. De fato, seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in R$. A função f é crescente e derivável em R. Mas $f'(x) = 3x^2$ que é zero para $x = 0$. A função inversa f^{-1} é definida por $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, a qual não é derivável para $y = 0$. Trace os gráficos de f e f^{-1} e se convença desse fato.

Aplicação. Seja n um inteiro positivo e seja $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ a função real definida por $g(y) = \sqrt[n]{y}$ para todo $y \in (0,+\infty)$. É fácil de ver que g é a inversa da função $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. Como f é crescente e $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ para todo $x \in (0,+\infty)$, segue-se pelo Teorema 3.5 que g é derivável e

$$g'(y) = 1/f'(g(y)) = 1/n(\sqrt[n]{y})^{n-1}$$

isto é,

$$g'(y) = \frac{1}{n} y^{-(n-1)/n}.$$

Temos, então, a seguinte expressão para a derivada de $\sqrt[n]{y} = y^{1/n}$

$$\frac{d}{dy}(y^{1/n}) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

3.5 - Derivação de funções compostas

TEOREMA 3.6 (A regra da cadeia) - Sejam $f:I \to \mathbb{R}$ e $\varphi:J \to \mathbb{R}$ duas funções reais definidas em intervalos I e J, respectivamente, tais que $f(I) \subset J$ e $f(c)$ é um ponto interior de J. Suponhamos que f seja derivável em c e φ derivável em $f(c)$. Então, a função composta $\varphi \circ f: I \to \mathbb{R}$ é derivável em c e vale a fórmula:

onde $f(c) = \max_{a \le x \le b} f(x)$. Como $f(c) > 0$, o ponto c não pode ser uma extremidade do intervalo. Logo, $c \in (a,b)$. Pelo Teorema 3.7 segue-se que $f'(c) = 0$. Se a outra possibilidade $f(\hat{x}) < 0$ ocorresse, consideraríamos a função $g = -f$ e pela parte já provada deste teorema teríamos $g'(c) = 0$, ou $f'(c) = 0$.

Observação: É essencial, para a validade do Teorema 3.8, que f seja derivável em todos os pontos de (a,b). Veja o Exemplo (ii) da figura 23.

Fig. 23

O resultado seguinte é conhecido como o teorema do valor médio, e nos textos clássicos como o teorema dos acréscimos finitos.

TEOREMA 3.9 - (Teorema do valor médio). Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Suponhamos que f seja derivável no intervalo aberto (a,b). Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Com o objetivo de aplicar o teorema de Rolle vamos construir primeiramente uma função auxiliar: seja $g(x)$ a função linear cujo gráfico passa pelos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, isto é,

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a) + f(a) .$$

Agora definimos

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

que é uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e tal que $F(b) = F(a) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$. Mas, $F'(c) = f'(c) - g'(c)$. Logo, $f'(c) = g'(c)$ e temos o resultado.

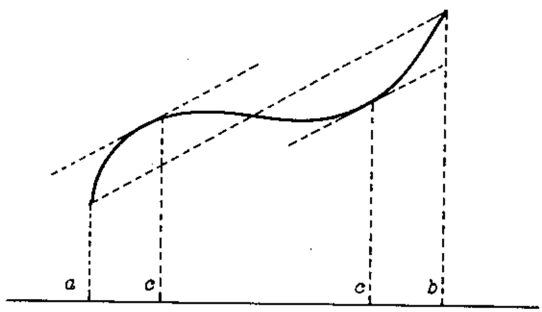


Fig. 24

Observação: O ponto c não é necessariamente único. O significado geométrico de teorema do valor médio é aparente do exame da figura 24: existe um ponto $c \in (a,b)$, onde a tangente à curva é paralela à corda que passa pelas extremidades da curva.

Observamos na seção 3.3 que a derivada de uma função constante é 0. A recíproca deste fato é provada a seguir.

TEOREMA 3.10 - <u>Seja</u> $f: I \to \mathbb{R}$ <u>uma função contínua em um intervalo</u> I, <u>e tal que</u> $f'(x) = 0$. <u>Então,</u> f <u>é constante</u>.

<u>Demonstração</u>: É suficiente demonstrar que dados dois pontos quaisquer de I, os valores de f coincidem nesses dois pontos. Sejam, portanto, z e x em I com $z < x$. Pelo teorema do valor médio, existe y em (z,x) tal que

$$f(x) - f(z) = f'(y)(x-z).$$

Como $f'(y) = 0$, o resultado se segue.

No início desta seção mostramos que se f é monótona e derivável em um certo intervalo, então, sua derivada tem sinal constante aí. Mostraremos agora a recíproca desse fato.

TEOREMA 3.11 - <u>Seja</u> $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ <u>uma função derivável</u>. <u>Então</u>,

$f'(x) \geq 0$ <u>para todo</u> $x \Rightarrow f$ <u>não decrescente</u>

$f'(x) \leq 0$ <u>para todo</u> $x \Rightarrow f$ <u>não crescente</u>

$f'(x) > 0$ <u>para todo</u> $x \Rightarrow f$ <u>crescente</u>

$f'(x) < 0$ <u>para todo</u> $x \Rightarrow f$ <u>decrescente</u>.

<u>Demonstração</u>: Sejam x_1 e x_2 em (a,b) e $x_1 < x_2$. Pelo teorema do valor médio

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(y)(x_2-x_1),$$

onde $y \in (x_1,x_2)$. Como $x_2 - x_1 > 0$, as conclusões do teorema seguem-se trivialmente.

EXERCÍCIO 1 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e que tem derivada contínua em $[a,b]$. Mostre que f é lipschitziana em $[a,b]$. (Observe que a continuidade da derivada pode ser substituída pela hipótese, mais fraca, de que tal derivada é limitada. A continuidade da derivada no intervalo fechado $[a,b]$ será discutida na seção 3.7 abaixo).

EXERCÍCIO 2 - Mostre que se f é localmente Hölder-contínua com expoente $\alpha > 1$, então f é constante. (Confira Exercício 10 da seção 2.5).

EXERCÍCIO 3 - Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo (a,b). Mostre que f é convexa se, e só se, a derivada f' é não decrescente. (Sugestão: Para mostrar que f é convexa, considere a função $\varphi(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y)$, onde $x < y$, são pontos fixados no intervalo (a,b) e a variável λ percorre o intervalo $[0,1]$. Observe que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, e para completar a demonstração da convexidade de f, analise a variação da derivada $\varphi'(\lambda)$. Para demonstrar a recíproca, fixe pontos c e d em (a,b) tais que $c < d$. Use as desigualdades obtidas aplicando o resultado do Exercício 6, seção 2.10, às triplas $x < c < d$ e $c < d < y$.

EXERCÍCIO 4 - Seja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função que possui derivada segunda no intervalo (a,b). Prove que f é convexa se, e só se, $f''(x) \geq 0$ para todo x em (a,b). (Sugestão: use o Exercício 3 acima.)

EXERCÍCIO 5 - Uma função $f\colon (a,b) \to R$ é côncava se para qualquer par de pontos x e y fixado em (a,b) tem-se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$. Enuncie resultados análogos aos dos exercícios 3 e 4 acima para funções côncavas. (Sugestão: f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa.)

EXERCÍCIO 6 - (A fórmula de Cauchy). Sejam f e g duas funções contínuas em um intervalo $[a,b]$ e deriváveis em (a,b). Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo

$x \in (a,b)$. Mostre que existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

(Sugestão: primeiro observe que o Teorema de Rolle implica que $g(b) \neq g(a)$. Seja A o primeiro membro da relação acima. Defina $\psi(x) = f(x) - Ag(x)$ e aplique o teorema de Rolle a ela.) Observação: A fórmula de Cauchy reduz-se ao teorema do valor médio quando $g(x) = x$.

EXERCÍCIO 7 - Discuta a aplicabilidade do Teorema de Rolle à função $f(x) = (x-2)^{2/3}$ no intervalo $[0,4]$.

EXERCÍCIO 8 - Seja $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e derivável em (a,b). Mostre que se $g'(x) \neq 0$ em (a,b), então $g'(x)$ não muda de sinal em (a,b). (Sugestão: suponha que num ponto $c \in (a,b)$, $g'(c) > 0$. Então demonstre que g é não decrescente em (a,b) de onde se seguirá $g'(x) \geq 0$, para todo $x \in (a,b)$. Para demonstrar que g é não decrescente, proceda por contradição e utilize o Teorema de Rolle).

EXERCÍCIO 9 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$ e que tem derivadas em todos os pontos de R. Se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo o R, mostre que $f = 0$.

3.7 - A fórmula de Taylor

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Na seção 3.1 foi definida a (função) derivada, $f': (a,b) \to \mathbb{R}$, da função f. Essa derivada é também chamada derivada primeira, para distinguí-la das derivadas de ordem superior que definiremos a seguir. A derivada segunda de f é a derivada da derivada primeira, e se usa o símbolo f''; insistimos em que a derivada segunda é também uma função $f'': (a,b) \to \mathbb{R}$. Assim por diante, definimos a derivada terceira f''', a derivada quarta $f^{(4)}, \ldots$, a derivada n-ésima $f^{(n)}$. Usamos a expressão "f é derivável até a ordem n" para dizer que existem as derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$, de f. As derivadas são também designadas por df/dx, $d^2f/dx^2, \ldots, d^nf/dx^n$.

Diremos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é <u>derivável no intervalo fechado</u> $[a,b]$ se ela for derivável em (a,b), no sentido definido na seção 3.1, e se as derivadas laterais $f'(a+)$ e $f'(b-)$ existirem. Provamos, anteriormente, que se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $[a,b]$, então, f é contínua em $[a,b]$, cf. Teorema 3.1.

TEOREMA 3.12 - (Fórmula de Taylor). Seja $f: [a,b] \to R$ uma função definida em um intervalo $[a,b]$. Suponhamos que as derivadas $f^{(1)},\dots,f^{(n)}$ existam e sejam contínuas em $[a,b]$, e que $f^{(n+1)}$ exista em (a,b). Seja c um ponto qualquer fixado em $[a,b]$. Então, para cada $x \in [a,b]$, $x \neq c$, existe um ponto ξ entre x e c tal que:

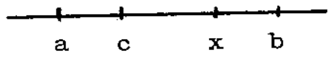
$$(1)\quad f(x) = f(c)+f'(c)(x-c) +\dots+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + R_{n+1}\ ,$$

onde

$$(2)\qquad R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}.$$

Observação: Para $n = 0$, o teorema acima é precisamente o teorema de valor médio. Note que a mera existência de $f^{(n)}$ em $[a,b]$ implica a continuidade de $f^{(1)},\dots,f^{(n-1)}$ em $[a,b]$. Portanto no enunciado do Teorema 3.12 poder-se-ia simplesmente pedir que $f^{(n)}$ fosse contínua em $[a,b]$ e $f^{(n+1)}$ existisse em (a,b). Observe que a existência de $f^{(n+1)}$ em (a,b) implica apenas a continuidade de $f^{(n)}$ em (a,b) e não no intervalo fechado $[a,b]$.

<u>Demonstração do Teorema 3.12</u>: Consideremos o caso $x > c$; por um raciocínio análogo atacaríamos o caso $x < c$. O ponto x ficará fixado durante toda a demonstração.



Definamos a seguinte função $F: [c,x] \to \mathbb{R}$:

$$F(t) = f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\dots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n - \\ - \frac{1}{(n+1)!}K(x-t)^{n+1} ,$$

onde K é uma constante a ser escolhida posteriormente. Pelas propriedades das operações com funções contínuas, cf. seção 2.5, segue-se que F é contínua em $[c,x]$. Por propriedades das funções deriváveis, segue-se que F é derivável em (c,x). (F não é necessariamente derivável em $[c,x]$, pois, c ou x podiam coincidir com as extremidades a e b, onde $f^{(n)}$ pode não ser derivável.) Por outro lado, $F(x) = 0$ e se K fôr tomado convenientemente, i.e.,

$$(3)\ K = \{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)-\dots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n\} \frac{(n+1)!}{(x-c)^{n+1}} ,$$

então, $F(c) = 0$. Assim, todas as condições para a aplicação do Teorema de Rolle estão satisfeitas. Por conseguinte, existe $\xi \in (c,x)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Calculando a derivada de F, muitas simplificações ocorrem e chegamos a

$$(4) \qquad F'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + \frac{1}{n!}K(x-t)^n.$$

Logo de (4) e de $F'(\xi) = 0$ segue-se

$$(5) \qquad K = f^{n+1}(\xi).$$

Finalmente, (3) e (5) nos dão as expressões (1) e (2) . que queríamos demonstrar.

<u>Observação</u>: Se escrevermos

$$P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-c)^n,$$

o Teorema 3.12 nos diz que $f(x)$ difere do polinômio $P(x)$ por R_{n+1}, isto é:

$$(6) \qquad f(x) - P(x) = R_{n+1}.$$

Uma relação como (6) é de grande importância nas questões de aproximação da função f por polinômios. Exemplo: na seção 4 definiremos a função exponencial $f(x) = e^x$, para todo $x \in R$, a qual tem derivadas de todas as ordens e $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in N$. Logo, neste caso, se $c = 0$

$$P(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$$

e

$$R_{n+1} = e^{\xi}x^{n+1}/(n+1)!$$

Logo, pelo Teorema 3.12:

$$(7) \qquad e^x - P(x) = e^{\xi} x^{n+1}/(n+1)!$$

Se $|x| < 1$, então temos de (7)

$$|e^x - P(x)| \leq e/(n+1)!$$

Essa desigualdade mostra que o polinômio $P(x)$ constitui uma aproximação para e^x com um erro menor que $e/(n+1)!$ Quanto maior fôr n, melhor será essa aproximação, pois $e/(n+1)!$ tende a 0.

EXERCÍCIO 1 - Seja $f: R \to R$ é uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in R$. Mostre que na expressão da fórmula de Taylor em em torno de $c = 0$ não aparecem as derivadas ímpares em 0. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções ímpares, isto é, $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in R$.

3.8 - Os pontos críticos de uma função

Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto (a,b). Vimos na seção 3.6 que nos pontos c onde f tem um máximo local (ou um mínimo local), a derivada $f'(c)$ é 0. Portanto, o anulamento da derivada f' num ponto c é condição necessária para que c seja um máximo ou mínimo locais. Naquela mesma seção, mostramos que tal condição não era suficiente. Voltamos agora a essa questão a fim de fazer um estudo sistemático baseado na fórmula de Taylor.

Um ponto c onde $f'(c) = 0$ é chamado um <u>ponto crítico</u> de f. Estudaremos o que acontece com f nas vizinhanças de um ponto crítico. Já vimos (seção 3.6) que pontos de máximo local e mínimo local são pontos críticos.

DEFINIÇÃO - Um ponto crítico c é chamado um ponto de <u>inflexão horizontal</u> de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < f(c)$, para $c-\varepsilon < x < c$, e $f(x) > f(c)$, para $c < x < c+\varepsilon$, ou $f(x) > f(c)$ para $c-\varepsilon < x < c$, e $f(x) < f(c)$, para $c < x < c+\varepsilon$.

Seja $c \in (a,b)$ um ponto onde f tem um máximo local, então, esse máximo é dito <u>estrito</u> se $f(c) > f(x)$ para todo x em $|x-c| < \varepsilon$ para um certo ε. De modo análogo, define-se <u>mínimo local estrito</u>.

<u>Observação</u>: Volte à definição de ponto de inflexão. Suponha que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ (observe que estamos substituindo a desigualdade estrita por $\leq$) para $c-\varepsilon < x < c$ e $f(x) > f(c)$ para $c<x<c+\varepsilon$.

Pergunta-se: é ainda c um ponto de inflexão? Trace umas figuras.

TEOREMA 3.13 - Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo (a,b). Seja c um ponto crítico de f. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que

(1) $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c-\varepsilon, c)$ e $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, c+\varepsilon)$, então f tem um máximo local em c.

Se existe $\varepsilon > 0$ tal que

(2) $f'x) \leq 0$ para $x \in (c-\varepsilon, c)$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, c+\varepsilon)$, então, f tem um mínimo local em c.

Se as desigualdades em (1) e (2) são estritas (isto é, $<$ em vez de $\leq$, e $>$ em vez de $\geq$), então o máximo (ou mínimo) correspondente é estrito.

A demonstração é conseqüência imediata do Teorema 3.11.

Observação: A condição (1) do teorema acima seria satisfeita se f' fosse não crescente em $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Analogamente, a condição (2) se verificaria se f' fosse não decrescente. Portanto, se a derivada segunda de f existisse, a condição (1) seria satisfeita se

(3) $$f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

Se a derivada segunda de f fosse contínua, teríamos, em virtude do Lema 2.2, que a condição (3) para algum $\epsilon > 0$ seguir-se-ia de

$$(4) \qquad f''(c) < 0.$$

Resumindo: "<u>Se</u> $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ <u>tem derivada segunda</u>, f'' <u>contínua, então, um ponto crítico</u> c (<u>isto é</u>, $f'(c) = 0$) <u>é um ponto de máximo local se</u> $f''(c) < 0$."

Analogamente, provamos: "<u>Se</u> $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ <u>tem derivada segunda</u>, f'' <u>contínua, então, um ponto crítico</u> c <u>é um ponto de mínimo local se</u> $f''(c) > 0$ ".

Os dois critérios que acabamos de enunciar são de grande utilidade na pesquisa de máximo e mínimo locais. Eles, porém, oferecem apenas condições suficientes. De fato, a função pode ser tal que $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$ e c ser um ponto de máximo ou mínimo local. Exemplo: $f(x) = x^4$ para todo $x \in R$. O ponto $x = 0$ é um ponto crítico, pois $f'(0) = 0$; apesar de $f''(0) = 0$, f tem um mínimo em $x = 0$. Sentimos, pois, que há necessidade de produzir um critério mais poderoso para decidir se um dado ponto crítico é de máximo ou mínimo. Isso é feito através do teorema abaixo.

TEOREMA 3.14 - <u>Seja</u> $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ <u>uma função derivável</u>

n vezes e cujas derivadas, $f^1, \ldots, f^{(n)}$ são contínuas em (a,b). Seja $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Então, se n é par,

$$f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow f \text{ tem máximo em } c$$
$$f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo em } c.$$

Se n é ímpar, c é um ponto de inflexão horizontal.

Demonstração: Pelos Lemas 2.2 e 2.3 existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{(n)}(x) \neq 0$ para $|x-c| < \varepsilon$. Para tais x temos, em virtude da fórmula de Taylor

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-c)^n,$$

onde $\xi \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ e, portanto, $f^{(n)}(\xi) \neq 0$.

1) Se n é par, $(x-c)^n > 0$ para qualquer $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Logo, o sinal de $f(x) - f(c)$ é o mesmo que o sinal de $f^{(n)}(\xi)$. Portanto, se $f^{(n)}(c) < 0$, então, $f^{(n)}(\xi) < 0$ e $f(x) - f(c) < 0$, isto é, $f(c)$ é um máximo local.

Se $f^{(n)}(c) > 0$, então, $f^{(n)}(\xi) > 0$ e $f(x) - f(c) > 0$, isto é, $f(c)$ é um mínimo local.

2) Se n é ímpar, $(x-c)^n > 0$ se $x > c$ e $(x-c)^n < 0$ se $x < c$. Logo

$$\text{se } f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(c) < 0, & \text{se } x < c \\ f(x) - f(c) > 0, & \text{se } x > c \end{cases}$$

$$\text{e se} \quad f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - f(c) > 0, & \text{se} \quad x < c \\ f(x) - f(c) < 0, & \text{se} \quad x > c \end{cases}$$

o que mostra que, quando n é ímpar, c é um ponto de inflexão horizontal.

<u>Pergunta</u>: Seja $f(x) = x^4 \text{ sen } 1/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que 0 é um ponto crítico de f. Entretanto, f não tem nem máximo, nem mínimo, nem inflexão em $x = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema 3.14?

Até o momento tratamos apenas de pontos de inflexão horizontal, ou seja, do tipo de inflexão que ocorre nos pontos críticos. Agora damos a definição geral de inflexão.

DEFINIÇÃO - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função definida e derivável em um intervalo aberto I. Um ponto $c \in I$ é chamado um ponto de inflexão se existe $\varepsilon > 0$ tal que uma das duas situações ocorre:

(i) $f(x) < r(x)$, $x \in (c-\varepsilon, c)$; $f(x) > r(x)$, $x \in (c, c+\varepsilon)$

(ii) $f(x) > r(x)$, $x \in (c-\varepsilon, c)$; $f(x) < r(x)$, $x \in (c, c+\varepsilon)$,

onde $y = r(x)$ é a equação da reta de inclinação $f'(c)$ e passando pelo ponto $(c, f(c))$.

que descreve exatamente a direção tomada pelo raio de luz ao se refratar.

Imaginemos agora a seguinte situação: A é uma fonte luminosa emitindo raios em todas as direções. Pergunta-se: todos os raios que tocam $y = 0$, penetram em $y \leq 0$? A resposta é simples e é dada pela lei de Snell: penetrará sempre que a seguinte equação em β, para dado α, possa ser resolvida:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{c_2}{c_1} \operatorname{sen} \alpha .$$

Exemplo, suponha que $c_2 = 2c_1$, então no momento que α ultrapassar 30° (i.e. $\operatorname{sen} \alpha > 1/2$) deixará de haver refração. E o que é que acontece com o raio? Bom, a Física nos diz que se reflete. Aliás, tal coisa é razoável inclusive sob o ponto de vista matemático, pois quando α aumenta, β também aumenta, e quando $\alpha = 30^{\circ}$, então $\beta = 90^{\circ}$.

EXERCÍCIO 1 - Determine dois números reais cuja soma é 10 e cujo produto seja o máximo possível.

EXERCÍCIO 2 - Determine o retângulo de maior área que pode ser inscrito em um quadrante de círculo de raio R, de modo que dois dos lados do retângulo estejam sobre os lados retos do quadrante. Esse retângulo coincide com o retângulo de maior perímetro nas mesmas condições?

EXERCÍCIO 3 - Dado o triângulo retângulo de catetos 3 e 4, determine o retângulo de maior área nele inscrito de modo que um dos lados esteja sobre a hipotenusa. Esse retângulo coincide com o retângulo de maior perímetro nas mesmas condições?

EXERCÍCIO 4 - Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função com derivada segunda contínua no intervalo (a,b). Mostre que $c \in (a,b)$ é um ponto de inflexão se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f''(x) > 0$ para $x \in (c-\varepsilon, c)$ e $f''(x) < 0$ para $x \in (c, c+\varepsilon)$, ou vice-versa.

EXERCÍCIO 5 - Dada $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ para $-\infty < x < \infty$, mostre que $x = 0$ é único ponto crítico dessa função. Pesquise os pontos de inflexão, determinando as soluções de $f''(c) = 0$ e usando o Exercício 4.

EXERCÍCIO 6 - Construa (graficamente) um exemplo de uma função com derivada segunda contínua, tal que em um ponto c, $f'(c) \neq 0$, e $f''(c) = 0$ e tal ponto não é de inflexão. Faça algo mais sofisticado que a função linear $f(x) = ax + b$. Esse exemplo deve convencer-lhe que, no Exercício 5, após achar os zeros de $f''(c) = 0$ devemos necessariamente aplicar o resultado do Exercício 4.

EXERCÍCIO 7 - Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função com derivada terceira contínua no intervalo (a,b). Mostre que $c \in (a,b)$ é um ponto de inflexão se $f'(c) \neq 0$, $f''(c) = 0$ e $f'''(c) \neq 0$. Aplique esse critério ao exemplo estudado no Exercício 5 acima.

EXERCÍCIO 8 - Determine os pontos críticos e os pontos de inflexão de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

EXERCÍCIO 9 - Determine os pontos críticos da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ definida em $\mathbb{R}-\{1\}$. Trace o seu gráfico.

EXERCÍCIO 10 - Use o Exercício 7 para estudar a função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Localize seu máximo, seu mínimo e seus três pontos de inflexão. Trace um gráfico da função.

EXERCÍCIO 11 - Mesmo problema para a função $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x}$. Localize os três pontos de inflexão e trace um gráfico da função f.

3.9 - Séries de potências

Formalmente, uma série de potências é uma expressão do tipo

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$, para todo n. Os números a_n são chamados os <u>coeficientes</u> da série. Para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, a expressão (1) representa uma série numérica. Faz sentido, então, perguntar se, para aquele x fixado, a série numérica correspondente converge ou não. Seja D o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série (1) converge. É claro que D não é vazio, pois $x = 0$ pertence a D. Portanto, a expressão (1) define uma função $S(x)$ para todo $x \in D$, i.e.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Várias questões serão estudadas a seguir, como por exemplo: Dados os coeficientes a_n, qual é o conjunto D correspondente? Que tipo de função é $S(x)$?

TEOREMA 3.15 - <u>Suponhamos que a série (1) converge em um ponto</u> $x = c \neq 0$. <u>Então, a série converge absolutamente para todo</u> x, <u>tal que</u> $|x| < |c|$.

<u>Observação</u>: Em particular, o teorema anterior implica que, se $c \neq 0$ pertence a D, então o intervalo aberto $(-|c|,|c|)$ está contido em D.

Demonstração do Teorema 3.15: Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge, segue-se que a sucessão $(a_n c^n)$ tende a zero, cf. Corolário 1.1. Logo, essa sucessão é limitada, e seja M tal que $|a_n c^n| \leq M$ para todo n. Fixemos agora um x tal que $|x| < |c|$. Temos então

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \left|\frac{x}{c}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{c}\right|^n .$$

Como $\left|\frac{x}{c}\right| < 1$, segue-se que a série numérica $\sum_{n=0} M\left|\frac{x}{c}\right|^n$ converge. E, finalmente, usando o Teorema 1.9, concluímos que a série $\sum |a_n x^n|$ também converge, o que completa a demonstração.

COROLÁRIO 3.2 - Suponhamos que a série (1) não converge em um ponto $x = d \neq 0$. Então, ela não converge, também, para todo x tal que $|x| > |d|$.

Demonstração: Imediata pelo método de redução ao absurdo.

TEOREMA 3.16 - Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, uma das duas possibilidades deve ocorrer:

(i) a série converge para todo $x \in R$; (ii) existe um número real r, tal que a série converge para todo $|x| < r$, e diverge para todo $|x| > r$.

Observação: Se (i) ocorre dizemos que o raio de convergência da série é ∞. Se (ii) ocorre, o número

r é definido como sendo o raio de convergência. Em (ii), r pode ser zero, e neste caso a série converge apenas quando $x = 0$. Observe que o teorema nada diz sobre o que ocorre quando $|x| = r$. Nesses pontos, $x = -r$ e $x = r$, a série pode convergir ou não.

Demonstração: Como antes, seja D o conjunto dos pontos onde a série converge. D é não vazio, pois $0 \in D$. Suponhamos que (i) não ocorre, e provemos que (ii) deve ocorrer. Seja $d \notin D$. Então, em virtude do corolário acima, D está contido no intervalo $[-|d|,|d|]$. Seja r o supremo de D, e provemos que tal número r satisfaz às condições do enunciado do teorema. Suponhamos, por contradição, que existe x_o, $|x_o| < r$, onde a série não converge. Então pelo corolário acima, a série diverge para todo $|x| > |x_o|$, o que mostra que $D \subset [-|x_o|,|x_o|]$, contradizendo o fato que r é o sup de D. De modo análogo, provamos que não existe x_o, $|x_o| > r$, onde a série converge.

Observação: O teorema precedente mostra que D é um intervalo de uma das formas seguintes $(-r,r)$, $[-r,r]$, $(-r,r]$, $[-r,r)$, $(-\infty,+\infty)$. O caso extremo $r = 0$, e, portanto, $D = \{0\}$ também pode ocorrer; exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

<u>Observação</u>: Decorre dos Teoremas 3.15 e 3.16 que a série de potências converge absolutamente para cada $|x| < r$. (Demonstre). A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge para $-1 \leq x < 1$. Pelo dito acima ela converge absolutamente para $-1 < x < 1$, entretanto não converge absolutamente para $x = -1$.

Que tipo de função é $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$? Mostraremos a seguir que se a série converge para $|x| < r$, então $S(x)$ é derivável nesse mesmo intervalo. Daí decorre que $S(x)$ é contínua em $|x| < r$.

LEMA 3.3 - <u>Suponhamos que a série de potências</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ <u>convirja para</u> $|x| < r$. <u>Então as séries</u> $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ <u>e</u> $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ <u>convergem absolutamente para todo</u> $|x| < r$.

<u>Demonstração</u>: Fixemos x, tal que $|x| < r$. Seja c tal que $|x| < c < r$. Como a série $\Sigma a_n c^n$ converge segue-se que a sucessão $(a_n c^n)$ tende a zero. Daí concluímos que existe M tal que $|a_n c^n| \leq M$ para todo n. Para provar a convergência da primeira série, façamos o seguinte:

$$|na_n x^{n-1}| = n|a_n c^{n-1}|\left|\frac{x}{c}\right|^{n-1} \leq \left(\frac{M}{c}\right)n\left|\frac{x}{c}\right|^{n-1}.$$

Como $|x| < c$, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n|\frac{x}{c}|^{n-1}$ converge, cf. Exercício 7, seção 1.12. Logo, pelo Teorema 1.9 concluímos que $\Sigma|na_n x^{n-1}|$ também converge.

Para provar a convergência da segunda série procedemos de modo análogo:

$$|n(n-1)a_n x^{n-2}| = n(n-1)|a_n c^{n-2}||\frac{x}{c}|^{n-2} \leq (\frac{M}{c^2})n(n-1)|\frac{x}{c}|^{n-2}.$$

Como $|x| < c$, temos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|\frac{x}{c}|^{n-2}$ converge, cf. Exercício 7, seção 1.12. Pelo Teorema 1.9, concluímos que $\sum_{n=2}^{\infty} |n(n-1)a_n x^{n-2}|$ também converge.

TEOREMA 3.17 - <u>Suponhamos que a série de potências</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ <u>convirja para</u> $|x| < r$. <u>Seja</u> $S(x)$ <u>a soma dessa série. Então,</u> $S(x)$ <u>é uma função derivável em</u> $|x| < r$ <u>e</u> $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

<u>Demonstração</u>: Devemos provar que a razão incremental de S em um ponto x, fixado, converge para a série $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Com isso em vista, escrevemos

$$(1) \quad \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right],$$

(fazendo a convenção que $na_n x^{n-1} = 0$ para $n = 0$).

Aplicando a fórmula de Taylor, cf. seção 3.7, à função x^n, temos

$$(2) \qquad (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}(x+\theta h)^{n-2}h^2,$$

onde θ é um número no intervalo $(0,1)$. Como $|x + \theta h| \leq |x| + |h|$, obtemos de (1) e (2):

$$\left|\frac{S(x + h) - S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2}(|x| + |h|)^{n-2}|h| =$$

$$= \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|(|x| + |h|)^{n-2}.$$

O último membro da desigualdade acima tende a zero quando $h \to 0$, pois a série que aí aparece converge quando $|x| + |h| < r$ em virtude do lema acima. Isso completa a demonstração.

Observação: O teorema acima mostra que a derivada de uma série de potências é também uma série de potências com o mesmo raio de convergência que a série inicial. Podemos portanto aplicar o mesmo teorema à série derivada. Concluímos então:

"Suponhamos que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convirja para todo $|x| < r$. Seja $S(x)$ a função definida como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < r$. Então $S(x)$ tem todas as derivadas (i.e., $S(x)$ é infinitamente derivável). Além disso, as derivadas são séries de potências obtidas por derivação termo a termo, e todas as séries derivadas têm o mesmo raio de convergência".

EXERCÍCIO 1 - Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n; \quad \text{(iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n;$$

$$\text{(iv)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \quad \text{(v)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n.$$

EXERCÍCIO 2 - Demonstre que se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell > 0$, então o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é $r = 1/\ell$.

EXERCÍCIO 3 - Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é infinito. Seja c um número real fixado; então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + c)^n$ define uma função $f(x)$ para todo x real. Mostre que $f(x)$ é também uma série de potências, $\Sigma\, b_n x^n$, que converge para todo x real. Ache a expressão dos coeficientes b_n em termos de a_n e c.

EXERCÍCIO 4 - Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ duas séries de potências, cujos raios de convergência são r_1 e r_2 respectivamente. Então, $\Sigma(a_n+b_n)x^n$ é uma série de potências cujo raio de convergência é $r \geq \min(r_1, r_2)$. Em particular, se as duas séries convergem para todo x, então a soma também converge para todo x.

EXERCÍCIO 5 - Dê um exemplo para mostrar que o raio de convergência da soma de duas séries pode ser realmente maior que o raio de convergência de cada série. (Sugestão: Considere $1+x+x^2+\ldots$ e $-x^{10}-x^{11}-x^{12}-\ldots.$)

EXERCÍCIO 6 - Volte à seção 1.12 e verifique que no enunciado do Teorema 1.11 podemos substituir as hipóteses sobre $\lim \sqrt[n]{a_n}$ pelo $\lim\sup \sqrt[n]{a_n}$: as conclusões são as mesmas. Aplique isso para provar a fórmula de Cauchy-Hadamard: $r = 1/\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$, onde r é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Compare esse exercício com o Exercício 2 acima.

EXERCÍCIO 7 - Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências convergente para $|x| < r$, e seja $S(x)$ sua soma. Se $p \in \mathbb{N}$, prove que $S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$.

EXERCÍCIO 8 - Partindo de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, mostre que

$$\frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p},$$

onde todas as séries são tomadas para $-1 < x < 1$.

3.10 - A série de Taylor de uma função

Seja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável em um intervalo aberto (a,b). Seja $x_o \in (a,b)$. A série de Taylor da função f, relativamente a x_o, é definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_o)(x-x_o)^n.$$

Por uma mudança de variável, $z = x - x_o$, vemos que a série acima é uma série de potências. Logo aplicando a teoria desenvolvida na seção 3.9, concluímos que uma das duas possibilidades seguintes ocorre: a série de Taylor converge para todo x real, ou existe um real $r \geq 0$, tal que a série de Taylor converge para $|x-x_o| < r$ e diverge para $|x-x_o| > r$. Obviamente a série de Taylor sempre converge para $x = x_o$.

Suponhamos que a série de Taylor de uma função f converge para $|x-x_o| < r$. Pela teoria desenvolvida na seção anterior, a soma da série de Taylor é uma função $S(x)$ infinitamente derivável em $|x-x_o| < r$. É natural e importante saber se $S(x) = f(x)$ em $|x-x_o| < r$. A resposta a essa pergunta é negativa, em geral. Entretanto, é positiva para um grande número das funções que aparecem nas aplicações.

EXEMPLO - Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = e^{-1/x^2}$, para $x \neq 0$, (cf. seção 6.2). É fácil provar, usando resultados sobre exponenciais, que $f(x)$ é infinitamente derivável e que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n = 0,1,2,\ldots$ Logo, a série de Taylor dessa função para $x_o = 0$ é identicamente 0, enquanto a função não é. (Trace um gráfico da função f.)

Consideremos a função $f(x)$ definida por uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que converge para $|x| < r$, onde $r > 0$. Qual é a série de Taylor de $f(x)$ relativamente a $x_o = 0$? Usando o Teorema 3.17 podemos calcular os coeficientes da série de Taylor e veremos, facilmente, que a série de Taylor de $f(x)$ é precisamente a série de potências que define $f(x)$.

TEOREMA 3.18 - Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável em um intervalo I, que contém a origem 0 em seu interior. Seja $(-r,r)$ o maior intervalo aberto dessa forma contido em I, e tal que, para cada c com $0 < c < r$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n!} M_n(c) c^n\right] = 0, \tag{1}$$

onde $M_n(c)$ é o máximo da função $f^{(n)}(x)$ no intervalo $[-c,c]$. Então, a série de Taylor da função $f(x)$, relativamente a 0, converge para $f(x)$ no intervalo $(-r,r)$.

<u>Observação</u>: Em virtude do Teorema 3.1, as funções $f^{(n)}(x)$ são contínuas em I. Pelo Teorema 2.12, segue-se que $f^{(n)}(x)$ tem máximo no intervalo fechado $[-c,c]$.

<u>Demonstração</u>: Fixemos um ponto $x \in (-r,r)$. Usando a fórmula de Taylor temos:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x +\ldots+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_{n+1},$$

com

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1},$$

onde ξ é um ponto do intervalo $(0,x)$, se $x > 0$, ou de $(x,0)$ se $x < 0$. Para demonstrar que a série de Taylor da função f, calculada no ponto x, converge para $f(x)$, basta provar que o resto R_{n+1} tende a zero quando n tende a infinito.

Seja $c = |x|$. Então,

$$|R_{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!}M_{n+1}(c)c^{n+1}$$

e pela hipótese do teorema segue-se que $R_{n+1} \to 0$, o que completa a demonstração.

Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo aberto I é <u>analítica real</u> em um ponto $a \in I$, se existe um subintervalo $(a-\epsilon,a+\epsilon)$ onde f é igual à sua série

EXERCÍCIO 5 - Considere a função polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Obtenha a série de Taylor de f relativamente ao ponto $x_0 = 1$. Qual é o raio de convergência dessa série?

EXERCÍCIO 6 - Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ que converge para todo $|x| < r$. Seja $f(x)$ a função definida pela série. Mostre que $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. (Este exercício justifica a observação feita antes do Teorema 3.18.) Use este resultado e mostre que se duas séries de potências definem a mesma função em um intervalo $(-r,r)$, então os coeficientes correspondentes das duas séries são iguais.

EXERCÍCIO 7 - Mostre que os zeros de uma função analítica real são isolados. (Sugestão: seja a um zero de ordem p da função $f(x)$. Tome a expressão de Taylor da f em torno de a e se obtém $f(x) = (x-a)^p\psi(x)$ onde $\psi(a) \neq 0$. Pela continuidade de ψ temos que $\psi(x) \neq 0$ para x em um certo invervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ centrado em a).

CAPÍTULO 4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo introduziremos as funções trigonométricas de modo rigoroso e elegante através das séries de potências. A apresentação tem um certo artificialismo em seu início (quando se definem as funções seno e cosseno), mas depois as propriedades das funções são deduzidas com lógica e concisão. Essa situação é bem característica das teorias matemáticas "acabadas". O leitor não deve, porém, pensar que o processo inventivo em matemática segue essa linha dedutiva, partindo de postulados e definições para teoremas e resultados relevantes. Antes de encontrar os postulados e as definições apropriadas, o matemática desenvolve intensa pesquisa na qual as "técnicas" são imaginação, intuição, experiência, sorte e muito trabalho! Recomendamos ao leitor, os artigos de Paul Halmos e Henri Poincaré sobre inovação e criação em matemática, mencionados na referência [4].

Historicamente, as funções seno e cosseno foram introduzidas como se faz na trigonometria. O método trigonométrico tem mais apelo geométrico e pode ser mais natural e inspirador para o principiante. Em vista disso, não cremos que o método por nós escolhido deva ser usado para alunos, que vão estudar as funções trigonométricas pela primeira vez. Entretanto, chamamos a atenção do leitor para o fato de que o estudo das funções seno e cosseno na trigonometria deixa muito a desejar, quanto a rigor.

Pode parecer ao leitor que as "nossas" funções seno e cosseno definidas abaixo não são as mesmas da trigonometria, apesar de terem em comum todas as propriedades usuais. Essa dúvida é bastante legítima, e, na verdade, devemos provar que estamos introduzindo as funções seno e cosseno usuais. Isso será provado do seguinte modo. Mostraremos que só existe um par de funções $s(x)$ e $c(x)$, definidas e deriváveis para todo x real, tais que

$$s'(x) = c(x) \qquad c'(x) = -s(x)$$
$$s(0) = 0 \qquad c(0) = 1.$$

As funções seno e cosseno da trigonometria gozam das propriedades acima. Por outro lado, as funções seno e cosseno aqui definidas também satisfazem essas propriedades. Logo, elas são as mesmas!

4.1 - As funções seno e cosseno

Consideremos as duas séries de potências seguintes:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Aplicando o teste da razão, concluimos que elas convergem, qualquer que seja x real. Portanto, pelo Teorema 3.17, essas séries representam funções deriváveis (e, na verdade, infinitamente deriváveis) definidas para todo x real. Definimos, então, as funções seno e cosseno, respectivamente, pelas expressões:

(1) $$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(2) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o Teorema 3.17, que justifica a derivação termo a termo de uma série de potências, temos:

(3) $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

Diretamente da definição decorre que seno é uma função ímpar, enquanto cosseno é uma função par, isto é,

(4) $$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x.$$

TEOREMA 4.1 - <u>Para todo</u> x <u>real, tem-se</u>

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(Notação: $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$.)

<u>Demonstração</u>: A função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ é derivável, e sua derivada é

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)' + 2 \cos x(\cos x)' = 0$$

em vista das relações (3). Logo, pelo Teorema 3.10, segue-se que $f(x) = c$, onde c é uma constante. Para determinar c, basta calcular f para $x = 0$. Como

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \cos 0 = 1,$$

relações que decorrem imediatamente das definições (1) e (2), concluimos que $c = 1$. Isso prova a relação (5).

COROLÁRIO 4.1 - <u>Temos para todo</u> x <u>real</u>:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

LEMA 4.1 - <u>Seja</u> $f(x)$ <u>a função definida por uma série de potências</u>, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, <u>que converge em</u> $|x| < r$.

<u>Suponhamos que</u>

$$\text{(7)} \qquad f''(x) + f(x) = 0, \quad \text{para} \quad |x| < r,$$

<u>e</u>

(8) $$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Então, $f(x) = 0$ para todo $|x| < r$.

Demonstração: A equação (7) diz que $f''(x) = -f(x)$. E daí, o fato que $f(0) = 0$ implica

(9) $$f''(0) = 0.$$

O Teorema 3.17 diz que f é infinitamente derivável, e portanto, derivando (7) obtemos

(10) $$f'''(x) + f'(x) = 0.$$

Como $f'(0) = 0$, segue-se que $f'''(0) = 0$. E assim por diante, obtemos que todas as derivadas de f para $x = 0$ são zero. Por conseguinte, todos os coeficientes da série de potências que define f se anulam, pois $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ Logo, $f(x) \equiv 0$.

TEOREMA 4.2 - Para quaisquer números reais a e b valem as seguintes fórmulas:

(11) $$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

(12) $$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Demonstração: Fixe a e defina a função

$$f(x) = \operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a \cos x - \operatorname{sen} x \cos a.$$

A função $\operatorname{sen}(a+x)$ é uma série de potências em x, que converge para todo x real (cf. Exercício 3, seção 3.9). Logo $f(x)$ é uma série de potências em x. Usando (3) vê-se que f satisfaz (7). Por outro lado é fácil ver, usando (6), que $f(0) = f'(0) = 0$. Logo, pelo Lema 4.1 temos $f(x) \equiv 0$, o que prova a relação procurada. De modo semelhante, prova-se a relação (12).

TEOREMA 4.3 - <u>Existe</u> $a > 0$ <u>tal que</u> $\cos a = 0$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos, por contradição, que não exista um tal número real a. Como $\cos 0 = 1$, segue-se do teorema do valor intermediário (lembre que $\cos x$ é uma função contínua) que $\cos x > 0$ para todo $x > 0$. Logo, a função $\operatorname{sen} x$ seria crescente na semi-reta $[0,\infty)$, em virtude do Teorema 3.11 e da relação (3) acima. Como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, segue-se, então, que $\cos x$ seria decrescente em $[0,\infty)$. Logo, existiria α no intervalo $[0,1)$, tal que

$$(!) \qquad \lim_{x\to\infty} \cos x = \alpha.$$

Por outro lado, desde que $\operatorname{sen} 0 = 0$, segue-se que existiria β no intervalo $(0,1]$ tal que

$$(!!) \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x = \beta .$$

Das relações (11) e (12) obtemos

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\text{(14)} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Usando (5) na relação (14) temos

$$\text{(15)} \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Passando ao limite, quando $x \to +\infty$, nas relações (13) e (15), e usando (!) e (!!), temos,

$$\text{(16)} \qquad \beta = 2\alpha\beta \qquad \alpha = 2\alpha^2 - 1.$$

As únicas soluções, α e β, das equações (16) são $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o que contradiz os fatos de $\alpha \in [0,1)$ e $\beta \in (0,1]$. A contradição proveio de admitirmos que não existisse um $a > 0$ tal que $\cos a = 0$. Logo, o teorema está demonstrado.

<u>Definição do número π</u>. Como $\cos 0 = 1$ e $\cos x$ é uma função contínua, segue-se, usando o Teorema 4.3, que existe um primeiro $a > 0$, onde o cosseno se anula. Em outras palavras, existe $a > 0$ tal que $\cos x > 0$ para $0 \le x < a$ e $\cos a = 0$. <u>Definimos</u>, então,

$$\pi = 2a.$$

Temos então as seguintes relações

(17) $$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é <u>periódica</u> de <u>período</u> T se $f(x+T) = f(x)$ para todo x real. Uma função pode ser periódica e não ser contínua. (Dê um exemplo.) Se T é um período para uma função f, então, $-T$, $2T$ e, em geral, kT para qualquer inteiro k é também um período. O menor período positivo é chamado o <u>período fundamental</u>. É praxe, porém, usar simplesmente a palavra <u>período</u> para designar o período fundamental.

TEOREMA 4.4 - <u>As funções seno e cosseno são periódicas com período</u> 2π.

<u>Demonstração</u>: Primeiramente, usando (13), (14) e (17) temos

$$\operatorname{sen}\pi = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = -1.$$

A seguir, usamos (13) e (14) novamente

$$\operatorname{sen}2\pi = 2\operatorname{sen}\pi\cos\pi = 0$$

$$\cos 2\pi = \cos^2\pi - \operatorname{sen}^2\pi = 1.$$

Finalmente, as relações (11) e (12) fornecem

$$\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen } x \cos 2\pi + \text{sen } 2\pi \cos x = \text{sen } x$$

e

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \text{sen } x \text{ sen } 2\pi = \cos x,$$

que provam a periodicidade das funções seno e cosseno.

Observação: Em virtude do teorema precedente, vemos que para traçar os gráficos do seno e do cosseno basta estudá-las, por exemplo, no intervalo $[-\pi,\pi]$. Como o seno é uma função ímpar, basta estudá-la no intervalo $[0,\pi]$. De fato, uma vez que se tenha o gráfico do seno em $[0,\pi]$, o gráfico no intervalo $[-\pi,0]$ será obtido por simetria com relação à origem. Aplicando a relação (11), vemos, facilmente, que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Isso mostra que o gráfico de função seno é simétrico com relação à reta $x = \frac{\pi}{2}$. Logo, basta determinar o gráfico do seno no intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$. Para o gráfico de função cosseno, fazemos a seguinte observação. Aplicando a relação (11) temos que $\text{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, o que mostra que o gráfico do cosseno é nada mais que uma translação (de $\frac{\pi}{2}$) do gráfico do seno na direção do eixo dos x.

Com todas as informações colhidas até este ponto sobre a função seno podemos, finalmente, traçar seu gráfico:

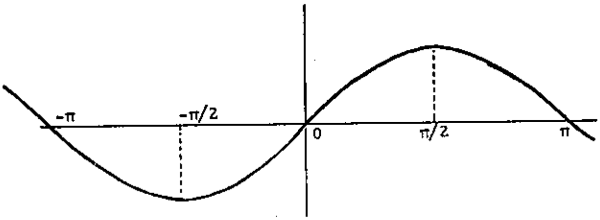


Figura 25

Por que o gráfico do seno não é como o que esboçamos abaixo?

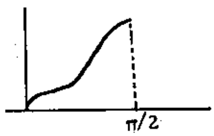


Figura 26

A resposta é imediata. Como $\frac{d^2}{dx^2}(\text{sen } x) = -\text{sen } x$, temos que a derivada segunda do seno é negativa em $(0,\pi)$. Logo, cf. Exercício 5, seção 3.6, a função seno é côncava no intervalo $(0,\pi)$.

Observe o leitor que em $x = 0$ a função seno tem um ponto de inflexão. Isso pode ser visto, também, observando que a derivada segunda do seno (que é $-\text{sen } x$) muda de sinal quando passa por $x = 0$, cf. Exercício 7, seção 3.8.

O gráfico do cosseno é obtido transladando de $\frac{\pi}{2}$ o gráfico do seno.

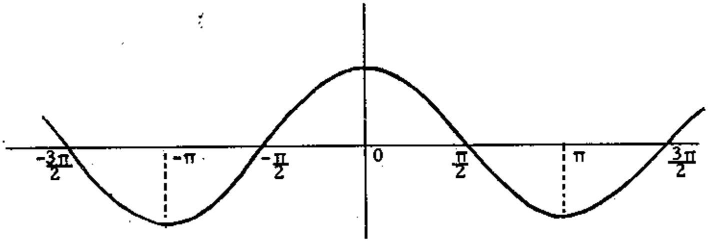


Figura 27

Da unicidade das funções seno e cosseno. É interessante observar que as relações (3) e (6) determinam as funções seno e cosseno. Isto é, temos o seguinte teorema:

TEOREMA 4.5 - Suponhamos que as funções $s_1(x)$, $c_1(x)$, $s_2(x)$ e $c_2(x)$, definidas para todo x real, satisfaçam às seguintes relações:

(18) $$s_1'(x) = c_1(x), \quad c_1'(x) = -s_1(x)$$

(19) $$s_1(0) = 0, \quad c_2(0) = 1$$

(20) $$s_2'(x) = c_2(x), \quad c_2'(x) = -s_2(x)$$

(21) $$s_2(0) = 0, \quad c_2(0) = 1.$$

Então, $s_1(x) = s_2(x)$ e $c_1(x) = c_2(x)$, para todo x real.

Demonstração: Considere as funções

$$f(x) = s_1(x)c_2(x) - s_2(x)c_1(x)$$

e

$$g(x) = s_1(x)s_2(x) + c_1(x)c_2(x).$$

Usando as relações (18) e (20), concluímos que

$$f'(x) = g'(x) = 0,$$

e das relações (19) e (21), segue-se que

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad g(0) = 1.$$

Logo, pelo Teorema 3.10, segue-se que

$$f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) = 1,$$

isto é

(22) $$s_1(x)c_2(x) - s_2(x)c_1(x) = 0$$

(23) $$s_1(x)s_2(x) + c_1(x)c_2(x) = 1.$$

Multiplicando a equação (22) por $c_2(x)$, a equação (23) por $s_2(x)$ e somando obtemos:

$$s_1(x)c_2^2(x) + s_1(x)s_2^2(x) = s_2(x)$$

ou seja

(24) $$s_1(x)[c_2^2(x) + s_2^2(x)] = s_2(x).$$

Agora, observe que o Teorema 4.1 decorre tão somente do fato que as funções $\text{sen } x$ e $\cos x$ satisfazem as relações (3) e (6), que são análogas de (18) e (19), ou (20) e (21). Logo

$$c_1^2(x) + s_1^2(x) = 1$$

e

$$c_2^2(x) + s_2^2(x) = 1.$$

Portanto de (24) concluímos que $s_1(x) = s_2(x)$.

De modo análogo, multiplicando (22) por $-s_2(x)$, (23) por $c_2(x)$ e somando obtemos

$$c_1(x)[s_2^2(x) + c_2^2(x)] = c_2(x),$$

o que implica $c_1(x) = c_2(x)$, e finaliza a demonstração do teorema.

EXERCÍCIO 1 - Demonstre que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Observação: O exercício anterior mostra que as funções

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

são contínuas para todo x real.

EXERCÍCIO 2 - Trace os gráficos das funções f e g definidas na observação acima.

Nos pontos $x = (2k+1)\pi/2$ a função $tg\ x$ tem descontinuidade de segunda espécie; é fácil ver que o limite à direita nesses pontos é $-\infty$, e o limite à esquerda é $+\infty$. A função $tg\ x$ é periódica de período π, pois, se $x \neq$ $\neq (2k+1)\pi/2$ temos

$$tg(x+\pi) = \frac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{-sen\ x}{-cos\ x} = tg\ x.$$

Deixamos ao leitor traçar os gráficos das outras funções trigonométricas:

$$cot\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}, \quad sec\ x = \frac{1}{cos\ x}, \quad cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}.$$

As derivadas dessas novas funções trigonométricas podem ser obtidas usando os teoremas da seção 3.2. Assim

$$\frac{d}{dx}(tg\ x) = \frac{cos\ x\ cos\ x - sen\ x(-sin\ x)}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(cotg\ x) = \frac{sen\ x(-sen\ x) - cos\ x\ cos\ x}{sen^2 x} = -\frac{1}{sen^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(sec\ x) = -\frac{-sen\ x}{cos^2 x} = tg\ x\ sec\ x$$

$$\frac{d}{dx}(cossec\ x) = -\frac{cos\ x}{sen^2 x} = -cotg\ x\ cossec\ x,$$

que são fórmulas válidas para os valores de x que não anulam os denominadores.

4.3 - As funções inversas

A função arc sen. A função $\operatorname{sen} x$ é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Logo, ela tem uma inversa aí. Essa inversa é chamada a função arco-seno, que se designa por arc sen e, portanto, é assim definida:

$$\begin{aligned}\text{arc sen}: [-1,1] &\to [-\pi/2,\pi/2]\\ y &\to \text{arc sen } y,\end{aligned}$$

onde $\operatorname{sen}(\text{arc sen } y) = y$. É imediato, por se tratar de uma função inversa de uma função crescente, contínua e derivável, que arc sen é crescente e contínua em $[-1,1]$ e derivável em $(-1,1)$. Além disso,

$$\frac{d}{dy}(\text{arc sen } y) = \frac{1}{(\operatorname{sen}'(\text{arc sen } y)} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } y)}.$$

Pela relação (5) da seção 4.1 temos:

$$\cos^2(\text{arc sen } y) = 1 - \operatorname{sen}^2(\text{arc sen } y) = 1 - y^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dy}(\text{arc sen } y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Observação: É claro que de modo análogo podemos definir as inversas da função seno quando restrita a outros intervalos da forma $[n\pi/2, (n+2)\pi/2]$, $n \in \mathbb{Z}$, onde ela é crescente. Dizemos que deste modo temos outras determinações da função arco-seno. Cada determinação é, pois, uma função diferente.

Se concordarmos em por os gráficos de todas essas determinações em um mesmo sistema de coordenadas, temos algo como nos mostra a Figura 29.

Insistimos em que se compreenda que a Figura 29 não é o gráfico de uma função; de fato, para um dado $x \in [-1,1]$ corresponde uma infinidade de pontos do gráfico; portanto, isso não poderia ser uma função!

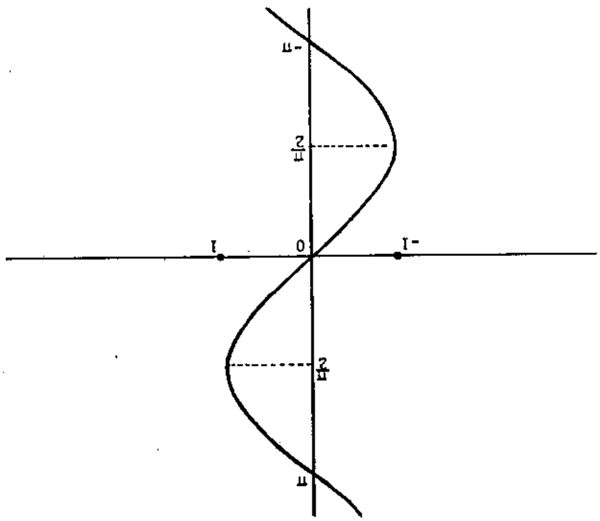


Figura 29

<u>A função arc cos.</u> A função $\cos x$ é decrescente no intervalo $[0,\pi]$. Logo, ela tem uma inversa aí. Essa inversa é chamada a função arco-cosseno, que se designa por arc cos, e é assim definida

$$\text{arc cos}: [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$y \to \text{arc cos } y$$

onde $\cos(\text{arc cos } y) = y$. A função arc cos é decrescente e contínua em $[-1,1]$ e derivável em $(-1,1)$. E a derivada é obtida assim

$$\frac{d}{dy}(\text{arc cos } y) = \frac{1}{\cos'(\text{arc cos } y)} = -\frac{1}{\text{sen}(\text{arc cos } y)}.$$

Como

$$\text{sen}^2(\text{arc cos } y) = 1 - \cos^2(\text{arc cos } y) = 1 - y^2,$$

temos

$$\frac{d}{dy}(\text{arc cos } y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Como no caso do arc sen, podemos definir outras determinações.

<u>A função arc tg.</u> A função arco-tangente (em símbolos arc tg) é definida como a inversa da função tg x restrita ao intervalo $(-\pi/2,\pi/2)$. Logo

$$\text{arc tg}: (-\infty,\infty) \to (-\pi/2,\pi/2)$$
$$y \to \text{arc tg } y$$

onde $\text{tg}(\text{arc tg } y) = y$. Tal função é crescente, contínua e derivável. A derivada é

$$\frac{d}{dy}(\text{arc tg } y) = \frac{1}{(\text{tg})'(\text{arc tg } y)} = \frac{1}{\sec^2(\text{arc tg } y)}.$$

Como $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ (prove!) obtemos, finalmente,

$$\frac{d}{dy}(\text{arc tg } y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

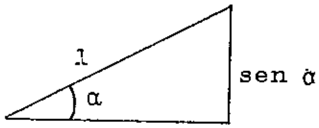
Deixamos ao leitor o estudo das outras funções inversas

arc cot, arc sec e arc cossec.

4.4 - A trigonometria

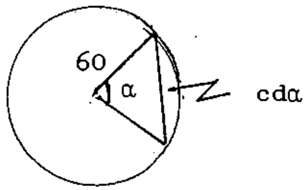
Nos cursos elementares de cálculo, o seno é introduzido como um número associado a um ângulo. A medida de um ângulo pode ser introduzida como o comprimento do arco de circunferência de raio 1 subtendido pelo ângulo. Assim a medida do ângulo reto seria $\pi/2$; é comum dizer-se que o ângulo que subtende um arco de comprimento 1 na circunferência de raio 1 tem 1 radiano. Na antiguidade, a medida de ângulos era o grau que é 1/90 do ângulo reto. Segue-se que o ângulo completo tem 2π radianos ou 360°. O uso do grau, de modo que se obtenha 360° para o ângulo completo, foi provavelmente influenciado pelo sistema numérico sexagesimal dos babilônios.

O seno de um ângulo α, $0 < \alpha < \pi/2$, é definido como o cateto oposto ao ângulo α num triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1.



As definições $\text{sen } 0 = 0$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ para os casos limites são as definições naturais. Para ângulos obtusos e ângulos maiores que um ângulo raso usa-se o chamado círculo trigonométrico.

Observe que o seno é o comprimento de um certo segmento associado a um ângulo, e foi assim que ele foi introduzido historicamente. Em verdade a primeira função trigonométrica estudada não foi o seno mas um certo múltiplo dele: <u>a corda de um ângulo</u> α, que representaremos por $cd\alpha$, é o comprimento

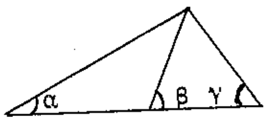


da corda do arco subtendido pelo ângulo α em uma circunferência de raio 60. É fácil de ver que $cd\alpha = 120 \text{ sen } \frac{\alpha}{2}$.

A trigonometria provavelmente se desenvolveu para atender às necessidades da astronomia. Os nomes de Eratóstenes (?276-194 AC), Aristarco (?310-230 AC), Apolônio (?262-190 AC) e Hiparco (?180-125 AC), que foram matemáticos e astrônomos, estão ligados ao nascimento da

trigonometria. Entretanto, o trabalho mais profundo e completo se deve a Ptolomeu, que viveu no século II DC, em Alexandria. O trabalho de Ptolomeu, em treze volumes, causou tanta admiração e entusiasmo nàs gerações seguintes que o trabalho passou a ser conhecido como o Almagest, nome que provém do árabe, onde quer dizer "o maior".
Ptolomeu confeccionou uma longa tabela de valores de $cd\alpha$ para vários ângulos α. Como o problema consiste em medir cordas, ele fez um inteligente uso da geometria euclideana conhecida, além de estabelecer novos resultados.
Observe que se ℓ_n é o lado do polígono regular inscrito de n lados na circunferência de raio 60, então $cd\frac{360^\circ}{n} = \ell_n$.

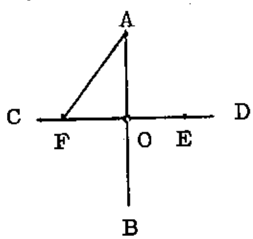
EXERCÍCIO 1 - Calcule $cd36^\circ$, usando a figura abaixo



$\alpha = 36^\circ$

$\beta = \gamma = 72^\circ$

EXERCÍCIO 2 - Calcule $cd\ 72^\circ$, usando a construção euclideana do lado do pentágono regular inscrito



$OA = 60$ unidades

$OE = ED$

$AE = EF$

Mostre que $AF = \ell_5$, $OF = \ell_{10}$.

EXERCÍCIO 3 - Calcule cd 45° aplicando o teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles.

EXERCÍCIO 4 - Prove que $\ell_3^2 + \ell_6^2 = 120^2$, e calcule cd 60° e cd 120°.

EXERCÍCIO 5 - Demonstre o teorema de Ptolomeu: se ABCD é um quadrilátero inscrito em um círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

EXERCÍCIO 6 - Use o exercício anterior com AD = 120 e o quadrilátero inscrito em um círculo de raio 60 e obtenha uma fórmula para a corda da diferença de dois ângulos. Usando essa fórmula obtenha cd 12°.

CAPÍTULO 5

A INTEGRAL

5.1 - A noção de área

No curso secundário, o estudo das áreas das figuras planas é, geralmente, apresentado do seguinte modo. Em primeiro lugar, admite-se, sem uma declaração explícita, que toda figura plana tem uma área. Além disso, admite-se que a área tem as seguintes propriedades:

(i) duas figuras planas congruentes têm a mesma área;

(ii) se uma figura plana F é "decomposta" em duas figuras planas F_1 e F_2, então, a área de F é igual à soma das áreas de F_1 e F_2.

Posto isso, define-se a área de um retângulo de base b e altura h como sendo o número bh. Em seguida prova-se, usando as propriedades acima, que a área de um paralelogramo de base b e altura h é também bh, cf. figura 30(a). É, então, fácil de demonstrar que a área de um triângulo de base b e altura h é $bh/2$, cf. figura 30(b). E, a partir desse resultado obtêm-se as áreas de figuras que podem ser decompostas em triângulos;

deste modo, temos as áreas de trapézios, e, em geral, de polígonos. Para o círculo de raio r, o problema é bem mais difícil.

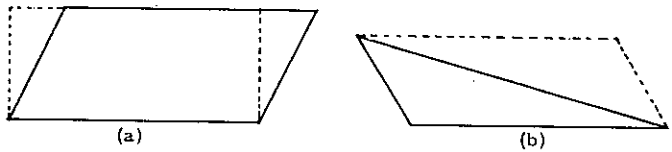


Fig. 30

O cálculo da área do círculo, preocupou os matemáticos desde a antiguidade. Arquimedes provou que a área A do círculo de raio r é igual à área de um triângulo cuja base é o comprimento C da circunferência do círculo e cuja altura é r. Segue-se, então, que a razão entre a área A e a área do quadrado de lado r é igual à relação entre C e o diâmetro do círculo; de fato,

$$(1) \qquad \frac{A}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}Cr}{r^2} = \frac{C}{2r} \, .$$

Usando o seguinte resultado, devido a Eudoxus, e que já aparece nos Elementos de Euclides: "A razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus raios", Arquimedes concluiu que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo é constante. Essa constante é a que, hoje, chamamos de π. Portanto, de (1) tem-se as fórmulas para a área do círculo e o comprimento da circunferência: $A = \pi r^2$ e $C = 2\pi r$, respectivamente. Calculando os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados, e considerando que C está compreendido entre êsses dois valores, Arquimedes obteve

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{10}{70}.$$

Tanto na demonstração do resultado de Euclides enunciado acima, como no cálculo aproximado de π feito por Arquimedes, usou-se a idéia de considerar o círculo como limite de polígonos regulares de lados cada vez menores. Isso constitui o que os gregos chamavam método de exaustão, porque a sucessão dos polígonos de certo modo exaure o círculo. Observe o leitor que no fundo uma nova propriedade da área é usada nesse raciocínio. Isto é, (iii) se F é uma figura plana e P_n é uma sucessão crescente (i.e., P_{n+1} contém P_n) de figuras planas que "tendem" para F, então as áreas de P_n convergem para a área de F. A essência do método da exaustão é o uso dessa propriedade. E é essa também a essência do cálculo integral formalizado no século XVIII por Newton e Leibniz. O método da exaustão foi ainda utilizado por Arquimedes e outros para o cálculo de outras áreas planas. O sucesso, porém, dependia em cada caso da obtenção de uma sucessão adequada de figuras planas, cujas áreas fossem conhecidas e constituissem uma aproximação da área a calcular.

Esperamos que ao ler as observações precedentes, o leitor tenha sentido que uma boa porção de formalização seria necessaria para tornar a apresentação rigorosa. Por exemplo, é imprescindível definir o que é uma "figura plana". É também necessário explicar o que significa "decompor" uma figura plana, o que significa uma sucessão de figuras planas "tender" para outra, etc. Toda essa formalização poderia ser feita após uma definição cuidadosa de curva plana; não nos deteremos para fazê-lo a fim de não fugir ao objetivo dêste trabalho. Existe uma generalização da noção de área, a medida de Lebesgue, que serve para medir os conjuntos de uma coleção muito grande de subconjuntos do plano.

Usando essa idéia de aproximar figuras planas podemos estabelecer o seguinte programa para o cálculo da área A, indicada na figura 31(a), onde Γ é o gráfico de uma função contínua.

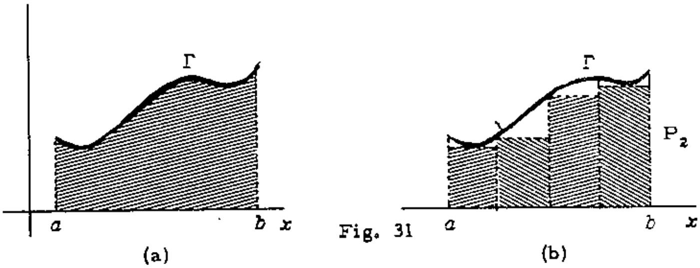


Fig. 31

Considere partições do intervalo $[a,b]: \delta_1, \delta_2, \ldots$. A primeira partição δ_1 é dada pelos pontos a, $(a+b)/2$ e b; dada uma partição δ_n

$$a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

a partição seguinte, δ_{n+1}, é obtida dividindo ao meio cada um dos subintervalos da partição δ_n. Correspondendo a cada partição δ_n construímos um polígono P_n formado pela reunião dos retângulos $R_1, \ldots, R_n$, onde R_j tem vértices: $(x_{j-1}, 0)$, $(x_j, 0)$, (x_j, m_j), (x_{j-1}, m_j), e m_j é o mínimo de f em $[x_{j-1}, x_j]$. Cf. a figura 31(b). Quando a partição se torna mais fina, os polígonos constituem, cada vez mais, melhores aproximações da área A. Portanto, para calcular a área A bastaria calcular o limite das áreas do polígono P_n. Tudo isso porém, deve ser cuidadosamente justificado. No próximo parágrafo, desenvolveremos a noção de integral e as idéias geométricas aqui apresentadas serão convenientemente algebrizadas.

A seguir, apresentamos três exercícios que têm mais um interesse histórico do que qualquer aspecto prático. O cálculo integral, que desenvolveremos, dará um processo simples de resolver esses problemas.

EXERCÍCIO 1 - Calcule a área do polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r. Mostre que o limite da expressão obtida quando n tende a $+\infty$ é precisamente a área do círculo. (Sugestão: use o Exercício 1 do Capítulo 4).

EXERCÍCIO 2 - Mostre que a área de um triângulo de base b e altura h é $bh/2$, usando o método de Cavalieri, que consiste em "aproximar" o triângulo por retângulos, do seguinte modo. Para cada n inteiro positivo, considere os segmentos paralelos à base, contidos no triângulo e à distâncias h/n, $2h/n, \ldots, (n-1)h/n$ da base. Construa, então, os n retângulos de altura h/n e bases nesses segmentos e na base do triângulo. Por exemplo, para $n = 4$ teríamos a figura abaixo:

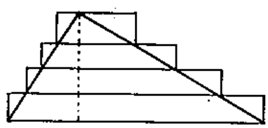


Fig. 32

EXERCÍCIO 3 - (A quadratura da parábola). Arquimedes, no ano 250 AC, demonstrou que a parábola $y = x^2$

divide a área do retângulo R de vértices $(0,0)$, $(b,0)$, (b,b^2), $(0,b^2)$ na razão de 1:2. Esse problema era muito difícil para uma época em que a noção de limite não estava estabelecida; o cálculo integral nasceria quase 2.000 anos depois! Explicamos, a seguir, o método de Arquimedes (deixando os detalhes para o leitor), que já contém o embrião do cálculo integral. Para cada n, divida o intervalo $[0,b]$ em n subintervalos de igual comprimento e considere os retângulos $R_1,\dots,R_n$ onde R_j tem vértices nos pontos $(\frac{[j-1]b}{n},0)$, $(\frac{jb}{n},0)$, $(\frac{jb}{n},[\frac{jb}{n}]^2)$, $(\frac{[j-1]b}{n},[\frac{jb}{n}]^2)$. Mostre, então, que a soma das áreas desses retângulos é

$$\frac{b^3}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

Use indução e prove que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n).$$

Passando ao limite, obtenha que a área entre a parábola, o eixo dos x e a reta $x = b$ é $b^3/3$. Como a área do retângulo é b^3, o resultado de Arquimedes segue-se imediatamente.

<u>Observação</u>: A bem da verdade histórica, deva-se dizer

(i) que Arquimedes aproximou a parábola usando triângulos, (ii) que Arquimedes não "passou ao limite"; os gregos tinham um pavor do infinito. Aliás, uma não compreensão do infinito, na época, ocasionou grande polêmicas, nas quais se destacaram os matemáticos da Escola Eleática (Elea era uma cidade no Golfo de Taranto no sul da Itália), principalmente Zenon, famoso por seus paradoxos, entre eles o de Aquiles e a tartaruga. Arquimedes utilizou o método de exaustão no problema de quadratura da parábola. A título de diversão, vamos demonstrar as proposições de Eudoxus e de Arquimedes, enunciadas acima, pelo método de exaustão.

Proposição de Eudoxus (Proposição 7 do Livro XII de Euclides).

"Sejam γ e Γ dois círculos de diâmetros d e D, respectivamente, e cujas áreas são a e A. Então $a/A = d^2/D^2$."

Demonstração: (Método de exaustão). Suponha, por contradição, que a igualdade da tese não se verifique. Então, ou $a/A > d^2/D^2$, ou a desigualdade oposto ocorre. Mostremos, inicialmente, que a primeira desigualdade não pode ocorrer. Seja a' um número real (perdoem-nos Eudoxus e os leitores: a demonstração dada aqui tem roupagem moderna!) tal que $a'/A = d^2/D^2$. Seja $\varepsilon = a-a'$, e tome um polígono regular inscrito em γ de n lados, cuja área p_n é tal que $a-p_n < \varepsilon$. Como se vê facilmente $p_n/P_n = d^2/D^2$, onde P_n é a área de um polígono regular de n lados inscrito em Γ. Logo $a'/A = p_n/P_n$, e como $p_n > a'$, obtemos $A < P_n$, o que é impossível. De modo análogo tomando polígonos circunscritos demonstramos que $a/A < d^2/D^2$ não pode ocorrer.

Proposição de Arquimedes (Proposição 1 do trabalho "A medida do círculo" de Arquimedes).

Seja A a área de um círculo de raio r. Então A é igual a área T de um triângulo retângulo cujos catetos são r e C, onde C é o comprimento da circunferência.

Demonstração: (Método de exaustão). Suponhamos que $A > T$. Determine um polígono regular inscrito no círculo, cuja área P_n satisfaça a $A > P_n > T$. Seja ℓ o lado, e a o apótema desse polígono. Portanto $P_n = \frac{1}{2} a\ell n$. Por outro lado $a < r$ e $n\ell < C$. Logo $\frac{1}{2} a\ell n < \frac{1}{2} rC$, ou seja $P_n < T$, o que é impossível. De modo análogo demonstra-que $A < T$ não pode ocorrer.

Nota: Os gregos não tinham a teoria dos números reais como utilizamos acima. As demonstrações originais das duas proposições acima usavam a teoria das proporções de Eudoxus, nos lugares onde nós utilizamos a completicidade dos reais. Ao leitor curioso, recomendamos o livro: "Great Books of the Western World", volume 11, publicado pela Encyclopedia Britannica.

5.2 - Integral superior e integral inferior

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$, a qual é suposta limitada. Como definimos na seção 2.6, uma função é limitada se existem números reais M e m tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Uma partição π do intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito de pontos de $[a,b]$: $x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Dadas uma função f e uma partição π definimos as chamadas somas de Darboux-Riemann, a soma superior $S(f,\pi)$ e a soma inferior $s(f,\pi)$, pelas expressões:

(1) $$S(f,\pi) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$$

(2) $$s(f,\pi) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$$

onde $M_j = \sup\{f(x): x \in [x_{j-1},x_j]\}$ e $m_j = \inf\{f(x): x \in [x_{j-1},x_j]\}$. É claro que esses sup's e inf's são finitos, uma vez que a função f é limitada. De fato, $m \leq m_j \leq M_j \leq M$. É claro que para qualquer partição π, tem-se

$$(3) \qquad s(f,\pi) \leq S(f,\pi).$$

Veja figura 33(a), onde a área hachurada representa a soma superior, e a figura 33(b), onde a área indicada representa a soma inferior. Apesar dessas ilustrações serem feitas para o caso de uma função contínua, as definições acima valem para qualquer função limitada. Observe, também, que f não é necessariamente positiva para todo x.

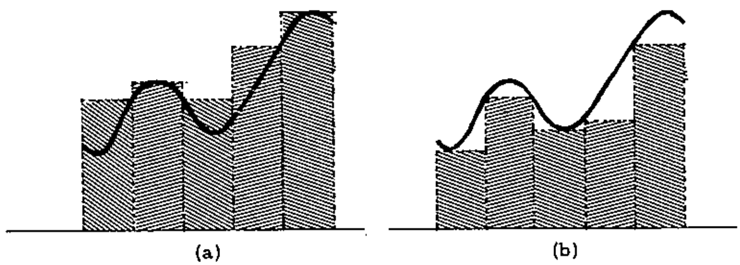


Fig. 33

DEFINIÇÃO - Sejam π_1 e π_2 duas partições do intervalo $[a,b]$. π_2 é um <u>refinamento</u> de π_1 se o conjunto dos pontos que formam π_2 contém o conjunto dos pontos de π_1.

EXEMPLO 1 - Seja π_1 uma partição dada: $x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. A partição π_2 formada por esses pontos e mais os pontos médios dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, para $j = 1,\ldots,n$, é um refinamento de π_1.

EXEMPLO 2 - Sejam $\pi_1 = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ e

$\pi_2 = \{y_o = a < y_1 < \ldots < y_k = b\}$ duas partições dadas. A partição π_3 formada pela união dos pontos de π_1 e π_2 é um refinamento de π_1, bem como de π_2.

TEOREMA 5.1 - Sejam π_1 e π_2 duas partições do intervalo $[a,b]$, com π_2 sendo um refinamento de π_1. Então,

(4) $$S(f,\pi_2) \leq S(f,\pi_1)$$

(5) $$s(f,\pi_2) \geq s(f,\pi_1)$$

Demonstração: Seja $\pi_1 = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. A partição π_2 contém os mesmos pontos e mais pontos adicionais nos subintervalos abertos (x_{j-1}, x_j). Podemos construir uma sucessão (finita) de partições, a primeira sendo π_1, a última sendo π_2, e cada partição (a partir da segunda) é um refinamento da anterior pela adição de apenas um ponto. Portanto, basta provar o teorema para o caso em que $\pi_2 = \{x_o = a < a < x_1 < \ldots < x_{j-1} < z < x_j < \ldots < x_n = b\}$ contém apenas um ponto a mais que π_1. Como

$$\sup\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \geq \begin{cases} \sup\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq z\} = M_{j,1} \\ \sup\{f(x): z \leq x \leq x_j\} = M_{j,2} \end{cases}$$

e

$$\inf\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \leq \begin{cases} \inf\{f(x): x_{j-1} \leq x \leq z\} = m_{j,1} \\ \inf\{f(x): z \leq x \leq x_j\} = m_{j,2} \end{cases}$$

obtemos

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \geq M_{j,1}(z - x_{j-1}) + M_{j,2}(x_j - z)$$

$$m_j(x_j - x_{j-1}) \leq m_{j,1}(z - x_{j-1}) + m_{j,2}(x_j - z).$$

Daí se seguem imediatamente as desigualdades (4) e (5) que queríamos provar.

TEOREMA 5.2 - <u>Sejam</u> π_1 <u>e</u> π_2 <u>duas partições quaisquer de</u> $[a,b]$. <u>Então</u>

(6) $$s(f,\pi_1) \leq S(f,\pi_2).$$

<u>Demonstração</u>: Seja $\bar{\pi}$ a partição obtida pela união dos pontos de π_1 com os pontos de π_2. Como $\bar{\pi}$ é um refinamento de π_1, a desigualdade (5) nos dá

(7) $$s(f,\pi_1) \leq s(f,\bar{\pi}).$$

Como $\bar{\pi}$ é um refinamento de π_2, temos pela desigualdade (4):

(8) $$S(f,\bar{\pi}) \leq S(f,\pi_2).$$

Finalmente, a desigualdade (6) decorre de (3), (7) e (8).

O Teorema 5.2, através da desigualdade (6), diz que as somas inferiores são limitadas superiormente, pois, qualquer $S(f,\pi)$ é uma cota superior. Analogamente, as somas superiores são limitadas inferiormente. Portanto, pelo Postulado de Dedekind, o conjunto das somas inferiores tem um supremo, e o conjunto das somas superiores tem um ínfimo. Isso justifica as definições a seguir.

DEFINIÇÕES - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função real limitada em $[a,b]$. A <u>integral superior</u>, que se designa por $\overline{\int_a^b} f$, é o ínfimo das somas superiores. Em símbolos:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi): \pi \in \wp\},$$

onde $\wp$ representa o conjunto de todas as partições de $[a,b]$. A integral inferior, que se designa por $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, é o supremo das somas inferiores. Em símbolos

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi): \pi \in \wp\}.$$

Decorre do Teorema 5.2 que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{9}$$

5.3 - <u>A integral</u>

Uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é <u>integrável</u> se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

O valor comum das integrais superior e inferior é chamado a <u>integral</u> de f, que se designa por $\int_a^b f$. Usa-se, também, a notação $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, se f é integrável, temos

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

<u>Exemplo de uma função limitada não integrável</u>. Seja

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}$$

a função de Dirichlet que a cada racional de $[0,1]$ associa o valor 0 e a cada irracional de $[0,1]$ o valor 1. Como o conjunto dos racionais (bem como o dos irracionais) é denso em $[0,1]$, temos que para qualquer partição π, os M_j's são todos iguais a 1 e os m_j's são todos iguais a 0. Logo, $S(f,\pi) = 1$ e $s(f,\pi) = 0$. Portanto, a integral superior é 1, enquanto a integral inferior é 0.

<u>A função constante é integrável</u>. A função $f(x) = k$ para todo x em $[a,b]$

é integrável e sua integral é igual a $k(b-a)$. De fato, para qualquer partição π, os M_j's e os m_j's são todos iguais a k. Logo, $S(f,\pi) = k(b-a)$ e $s(f,\pi) =$

$= k(b-a)$, para qualquer partição. Logo, as integrais superior e inferior são iguais a $k(b-a)$, donde se segue o que queríamos provar.

A seguir damos uma condição necessária e suficiente para uma função limitada ser integrável em $[a,b]$. Essa condição será muito útil em demonstrações de alguns teoremas das próximas seções. Ela, porém, não lança nenhuma luz quanto a tipos de funções que sejam integráveis; os Teoremas 5.4 e 5.5 serão, em compensação, passos nessa direção.

TEOREMA 5.3 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a,b]$. Então f é integrável se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe uma partição π do intervalo $[a,b]$ tal que

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon .$$

Demonstração: Seja A o conjunto das somas inferiores $s(f,\pi)$; cada soma inferior é um número real, portanto, A é um conjunto de reais. Analogamente, seja B o conjunto das somas superiores $S(f,\pi)$. Pelo Teorema 5.2 temos que $\alpha \leq \beta$, para qualquer $\alpha \in A$ e qualquer $\beta \in B$. Logo, $\sup A \leq \inf B$. Ora, $\sup A$ é a integral inferior de f e $\inf B$ é a integral superior de f. Logo, a condição de integrabilidade da f é $\sup A = \inf B$

Portanto, o presente teorema é conseqüência do seguinte resultado.

LEMA 5.1 - <u>Sejam</u> A <u>e</u> B <u>dois conjuntos de reais tais que</u> $\alpha \leq \beta$ <u>para todo</u> $\alpha \in A$ <u>e todo</u> $\beta \in B$. <u>Então</u> $\sup A = \inf B$ <u>se, e somente se, para qualquer</u> $\epsilon > 0$ <u>dado, existem</u> $\alpha \in A$ <u>e</u> $\beta \in B$ <u>tais que</u> $\beta - \alpha < \epsilon$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos, primeiramente, que $\sup A = \inf B$. Ora, dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha + \epsilon > \sup A$, em virtude da definição de sup. Pois, se $\alpha + \epsilon \leq \sup A$ para todo $\alpha \in A$, então, $\alpha \leq \sup A - \epsilon$ para todo $\alpha \in A$, o que contradiria o fato de $\sup A$ ser a menor das cotas superiores de A. Então, usando a hipótese: $\inf B < \alpha + \epsilon$. Daí pela definição de inf segue-se que existe $\beta \in B$ tal que $\beta < \alpha + \epsilon$. Logo, $\beta - \alpha < \epsilon$. Reciprocamente, suponhamos, por contradição, que $\sup A < \inf B$. Seja $\epsilon = \inf B - \sup A > 0$. Como para qualquer $\alpha \in A$ e qualquer $\beta \in B$ temos $\beta - \alpha \geq \inf B - \sup A$. Logo, $\beta - \alpha \geq \epsilon$ para todo $\alpha \in A$ e todo $\beta \in B$, o que contradiz a hipótese.

Antes de prosseguir enunciamos um resultado que mostra que a classe das funções integráveis não é demasiadamente pequena.

TEOREMA 5.4 - <u>Toda função contínua</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>em um intervalo fechado</u> $[a,b]$ <u>é integrável.</u>

A demonstração do Teorema 5.4 será feita na próxima seção. O leitor poderá aceitar o teorema e saltar a demonstração, sem que isso comprometa sua compreensão do resto do trabalho. O próximo resultado mostra que há funções descontínuas que são integráveis.

TEOREMA 5.5 - <u>Toda função não decrescente*</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>definida em um intervalo fechado</u> $[a,b]$ <u>é integrável.</u>

<u>Demonstração</u>: A idéia é utilizar o Teorema 5.3. Dado $\varepsilon > 0$ tome uma partição $\pi = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ tal que o comprimento dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ seja menor que $\varepsilon/(f(b) - f(a))$. Aqui supomos $f(b) > f(a)$, pois, de outro modo, f seria constante e já sabemos que uma função constante é integrável. Observamos a seguir que f sendo não decrescente, temos

$$(1) \qquad m_j = f(x_{j-1}) \quad \text{e} \quad M_j = f(x_j), \quad (j=1,\dots,n),$$

Logo,

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \le$$

---

* Lembramos ao leitor que estamos sempre considerando funções limitadas.

$$\leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)$$

e daí

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (M_n - m_1) = \varepsilon .$$

O resultado se segue pela aplicação do Teorema 5.3.

Observação: Decorre do Teorema 5.5 que toda função não crescente é integrável. De fato, se f é não crescente, então, $-f$ é não decrescente. Logo, pelo Teorema 5.5, $-f$ é integrável. Mas, $f = -(-f)$, e pelo Teorema 5.7 (cf. seção 5.5), segue-se que f é integrável.

5.4 - Demonstração do Teorema 5.4

Apresentaremos inicialmente um resultado que será utilizado na demonstração do Teorema 5.4 e posteriormente na seção 5.7.

LEMA 5.2 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$ para $|x_1-x_2| < \delta$.

Observação: Compare o enunciado desse lema com a definição de função contínua dada em termos de ε

e δ. Para enfatizar a diferença vamos repetir aquela definição. Uma função $f: I \to R$ é contínua em um intervalo I se dado $\epsilon > 0$ e dado $x_o \in I$, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ e de x_o) tal que $|f(x)-f(x_o)| < \epsilon$ para $|x-x_o| < \delta$. Observe que no enunciado do lema acima, δ depende tão somente do ϵ dado. Ele serve para todos os pontos do intervalo, i.e., há uma certa uniformidade na sua determinação. Tal uniformidade não existe necessariamente para todas as funções contínuas. Por exemplo, a função $1/x$ definida no intervalo aberto $(0,1)$; quanto mais perto esteja x_o do ponto 0 menor deve ser o δ para atender o mesmo ϵ. Quando o ϵ depende somente do δ dado, e não do particular ponto x_o no intervalo I, a função é chamada <u>uniformemente contínua</u>. A função $1/x$, exemplificada acima não é uniformemente contínua no intervalo $(0,1)$. O que o Lema 5.2 nos diz é que toda função contínua em um intervalo fechado é uniformemente contínua.

<u>Demonstração do Lema 5.2</u>: Suponhamos por contradição que não exista tal δ. Então, para uma sucessão $\delta_n > 0$ tendendo a zero, existem pontos a_n e b_n em $[a,b]$ tais que

$$(1) \qquad |f(a_n)-f(b_n)| \geq \epsilon \quad \text{e} \quad |a_n-b_n| < \delta_n.$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsucessão

$\{a_{n_j}\}$ de $\{a_n\}$ convergindo para um número real $c \in [a,b]$. Como

$$|b_{n_j}-c| \leq |b_{n_j}-a_{n_j}| + |a_{n_j}-c|$$

segue-se que $\{b_{n_j}\}$ também converge para c. Pela continuidade de f, temos que

$$\lim f(a_{n_j}) = f(c)$$

e

$$\lim f(b_{n_j}) = f(c),$$

o que mostra que $f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})$ tende a 0. Isto, porém, contradiz (1).

<u>Demonstração do Teorema 5.4</u>: Suponhamos, por contradição, que a função contínua f não seja integrável. Então,

$$(2) \qquad \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} = d > 0.$$

Consideremos agora uma sucessão π_n de partições do intervalo $[a,b]$ assim definidas: $\pi_1 = \{a < (a+b)/2 < b\}$ e π_{n+1} é obtida de π_n pela adição dos pontos médios dos subintervalos determinados pelos pontos de π_n. Pelo Lema 5.2, dado $\varepsilon = d/(b-a)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$ para $|x_1-x_2| < \delta$. Como o comprimento dos subintervalos determinados pelas partições π_n tende a zero quando n tende a infinito, teremos uma partição $\pi_{n_o} = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ tal que $|x_j - x_{j-1}| < \delta$. Logo, $M_j - m_j < \varepsilon$, onde M_j e m_j são, respectivamente, o máximo e o mínimo de f em $[x_{j-1}, x_j]$. Como

$$S(f,\pi_{n_o}) - s(f,\pi_{n_o}) = \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$$

segue-se que

$$(3) \quad S(f,\pi_{n_o}) - s(f,\pi_{n_o}) < \varepsilon \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b-a) = d.$$

Por outro lado,

$$(4) \qquad \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,\pi_{n_o}) - s(f,\pi_{n_o}),$$

pelas definições das integrais superior e inferior. Finalmente, as relações (2), (3) e (4) dão que $d < d$, o que não é possível. Tal contradição provém de admitirmos (2), ou seja que f não é integrável. A demonstração do Teorema 5.4 fica assim concluída.

EXERCÍCIO 1 - Seja f uma função contínua e limitada no intervalo $(a,b]$. Tome $f(a) = 0$. Mostre que f é integrável no intervalo $[a,b]$. (Sugestão: Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x em $[a,b]$. A idéia é aplicar o Teorema 5.3. Dado $\varepsilon > 0$, tome c em $[a,b]$ tal que $2M(c-a) \leq \varepsilon/2$. A restrição $\tilde{f}$ de f a

$[c,b]$ é contínua. Logo, existe uma partição π de $[c,b]$ tal que $S(\tilde{f},\pi) - s(\tilde{f},\pi) < \varepsilon/2$.)

EXERCÍCIO 2 - No exercício anterior mostre que o valor de f no ponto a não altera a integrabilidade de f.

EXERCÍCIO 3 - Mostre que a função

$$f(x) = \text{sen}(1/x) \quad \text{para} \quad 0 < x \leq 1$$

$$f(0) = 0$$

é integrável em $[0,1]$.

5.5 - Operações com funções integráveis

Nesta seção mostraremos que a soma, a diferença e o produto de funções integráveis são funções integráveis.

Necessitaremos do seguinte resultado sobre sup e inf de funções, cf. seção 2.6.

LEMA 5.3 - Sejam $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: I \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas definidas em um intervalo fechado I.

Então,

(1) $$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

(2) $$\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$$

Demonstração: Pela definição de supremo:

$$f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup g \leq \sup f + \sup g$$

para todo $x \in I$. Logo, (1) se segue. A desigualdade (2) se demonstra de modo análogo.

TEOREMA 5.6 - *Se* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ *são duas funções (limitadas) integráveis, então* $f + g$ *é integrável e*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Demonstração: Seja $\pi = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Aplicando o Lema 5.3 em cada um dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1,\dots,n$, obtemos

(3) $$S(f + g,\pi) \leq S(f,\pi) + S(g,\pi)$$

(4) $$s(f + g,\pi) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi)$$

Tomando inf das $S(f + g,\pi)$ para $\pi \in \wp$, onde $\wp$ é a coleção de todas as partições, obtemos a partir de (3):

(5) $$\overline{\int_a^b} (f + g) \leq S(f,\pi) + S(g,\pi)$$

para todo $\pi \in \wp$. Logo (5) nos dá:

(6) $$\overline{\int_a^b} (f + g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Analogamente, trabalhando com sup em (4) obtemos

$$(7) \qquad \underline{\int_a^b}(f + g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g.$$

De (6) e (7) e usando a hipótese de que f e g são integráveis, concluímos

$$\overline{\int_a^b}(f + g) \leq \underline{\int_a^b}(f + g).$$

E, como a integral inferior é sempre menor ou igual que a integral superior, obtemos

$$\overline{\int_a^b}(f + g) = \underline{\int_a^b}(f + g),$$

o que prova o Teorema 5.6.

LEMA 5.4 - <u>Seja</u> $f: I \to \mathbb{R}$ <u>uma função limitada em um intervalo</u> I. <u>Então</u>:

(a) $\sup(kf) = k \sup f$ <u>e</u> $\inf(kf) = k \inf f$, $k > 0$

<u>e</u>

(b) $\sup(-f) = -\inf f$ <u>e</u> $\inf(-f) = -\sup f$.

<u>Demonstração</u>: (a) Seja M o supremo de kf. Isso significa que $kf(x) \leq M$ para todo $x \in I$, e que, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_o \in I$ tal que $kf(x_o) > M-\varepsilon$. A última desigualdade implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_1 \in I$ tal que $kf(x_1) > M - k\varepsilon$, ou seja $f(x_1) > M/k-\varepsilon$. Esse fato juntamente com a desigualdade $f(x) \leq M/k$ para

todo $x \in I$ mostra que M/k é o supremo de kf. A segunda parte de (a) se demonstra de modo análogo.

(b) Basta demonstrar a primeira relação, pois, a segunda segue-se dela, substituindo f por $-f$. Seja M o supremo de $-f$. Isso quer dizer que $-f(x) \leq M$ para todo $x \in I$ e que, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_o \in I$ tal que $-f(x_o) > M-\varepsilon$. Logo, temos: $f(x) \geq -M$ para todo $x \in I$ e, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_o \in I$ tal que $f(x_o) < -M + \varepsilon$. Isso significa que $-M$ é o ínfimo de f. Logo, temos o resultado que se queria provar.

TEOREMA 5.7 - _Se_ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ _é_ (_limitada_) _integrável e_ k _é um número real, então,_ kf _é integrável e_

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

Demonstração: 1) $k > 0$. Dada uma partição qualquer π de $[a,b]$, temos $S(kf,\pi) = kS(f,\pi)$ e $s(kf,\pi) = ks(f,\pi)$, pois, $\sup(kf) = k \sup f$ e $\inf(kf) = k \inf f$. Logo,

$$\overline{\int_a^b} kf = k\overline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} kf = k\underline{\int_a^b} f.$$

Como f é integrável, o resultado se segue.

2) $k < 0$. Basta provar que $-f$ é integrável, pois, o caso geral, kf, será conseqüência desse caso

e do 1): $kf = (-k)(-f)$. Seja π uma partição qualquer de $[a,b]$. Como $\sup(-f) = -\inf f$ e $\inf(-f) = -\sup f$, temos

$$S(-f,\pi) = -s(f,\pi) \quad \text{e} \quad s(-f,\pi) = -S(f,\pi).$$

Logo,

$$\overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f.$$

Essas relações, juntamente com o fato que f é integrável, implicam que $-f$ é integrável e $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.

COROLÁRIO 5.1 - <u>A diferença</u> $f - g$ <u>de duas funções (limitadas) integráveis é integrável</u>.

LEMA 5.5 - <u>Seja</u> $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>uma função (limitada) integrável tal que</u> $f(x) \geq 0$ <u>para todo</u> $x \in [a,b]$. <u>Então, a função</u> $f^2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>definida por</u> $f^2(x) = [f(x)]^2$ <u>é integrável</u>.

<u>Demonstração</u>: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\pi = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon,$$

em virtude do Teorema 5.3. Sejam M_j e m_j o sup e o inf, respectivamente, da função f no intervalo $[x_{j-1},x_j]$. É imediato que M_j^2 e m_j^2 são, respectivamente, o sup e o inf de f^2 em $[x_{j-1},x_j]$. Logo,

$$S(f^2,\pi) - s(f^2,\pi) = \sum_{j=1}^{n} (M_j^2-m_j^2)(x_j-x_{j-1}).$$

E, como $M_j^2-m_j^2 = (M_j+m_j)(M_j-m_j) \leq 2M(M_j-m_j)$, onde M é o sup de f em $[a,b]$, obtemos

$$S(f^2,\pi) - s(f^2,\pi) \leq 2M \sum_{j=1}^{n} (M_j-m_j)(x_j-x_{j-1}) =$$

$$= 2M[S(f,\pi) - s(f,\pi)] < 2M\varepsilon .$$

Logo, aplicando o Teorema 5.3 à função f^2, concluímos que ela é integrável.

COROLÁRIO 5.2 - <u>O quadrado</u> f^2 <u>de uma função integrável (não necessariamente</u> ≥ 0) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>é integrável</u>.

<u>Demonstração</u>: Seja $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$. A função $f+k$ é integrável (em virtude do Teorema 5.6) e não negativa, i.e. $f(x) + k \geq$ ≥ 0. Logo pelo lema anterior $(f+k)^2$ é integrável. Como

$$f^2 = (f+k)^2 - 2kf - k^2,$$

segue-se pelos Teoremas 5.7 e 5.6 que f^2 é integrável.

TEOREMA 5.8 - <u>O produto</u> fg <u>de duas funções integráveis</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>e</u> $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>é integrável</u>.

<u>Demonstração</u>: Pelo Teorema 5.6 e pelo Corolário 5.1, te-

mos que $f+g$ e $f-g$ são integráveis. Pelo Corolário 5.2, segue-se que $(f+g)^2$ e $(f-g)^2$ são ambos integráveis. Aplicando os Teoremas 5.6 e 5.7 novamente temos que fg é integrável, pois,

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

<u>Observação</u>: A integrabilidade do produto fg de duas funções f e g não implica que f e g sejam integráveis. Exemplo: A função $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se x é irracional e $f(x) = -1$ se x é racional, não é integrável; mas $f^2(x) \equiv 1$ o é.

EXERCÍCIO 1 - Seja c um ponto do intervalo $[a,b]$, e α um número real. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

é integrável, e $\int_a^b f dx = 0$.

EXERCÍCIO 2 - Generalize o exercício anterior para o caso de um número finito de pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no intervalo $[a,b]$.

EXERCÍCIO 3 - Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$, tais que $f(x) = g(x)$ para todo

x de $[a,b]$ com exceção de um número finito de pontos, então

$$\int_a^b f dx = \int_a^b g dx.$$

<u>Observação simples mas importante</u>: Do Exercício 3 acima decorre o seguinte: "Os valores de uma função integrável $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nas extremidades do intervalo, isto é, $f(a)$ e $f(b)$, não influem na integrabilidade ou não da função f, como também o valor da integral $\int_a^b f$, quando existe, independe desses valores". O efeito disso é que, muitas vezes, a função f é dada apenas no intervalo aberto (a,b) e procedemos o estudo da integrabilidade, ou a busca do valor da integral, sem nos preocuparmos em definir a função nas extremidades do intervalo. Assim quando se diz que uma função $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ é integrável, o que significa é que uma extensão $\tilde{f}$ da função f para o intervalo fechado $[a,b]$ é integrável aí. Pelo dito acima pode-se tomar uma extensão qualquer, isto é, os valores $f(a)$ e $f(b)$ podem ser definidos arbitrariamente.

5.6 - Valor absoluto de uma função integrável

É conveniente para o estudo do valor absoluto de uma função integrável a introdução de duas funções auxiliares, as partes positiva e negativa de uma função.

DEFINIÇÃO - Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I. A parte positiva de f, que se representa por f^+, é assim definida:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

A parte negativa de f, que se representa por f^-, é definida por

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

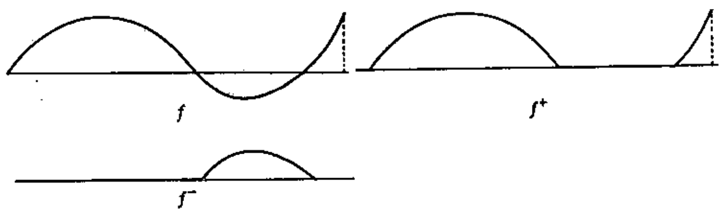


Fig. 34

É imediato que

(1) $$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Observação: A rigor f^+ devia ser chamada a parte não negativa e f^- a parte não positiva.

LEMA 5.6 - A parte positiva f^+ de uma função integrável $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Demonstração: A idéia é aplicar o Teorema 5.3. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tome uma partição $\pi = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que

$$(2) \qquad S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon.$$

Sejam M_j e m_j, respectivamente, o sup e o inf de f em $[x_{j-1},x_j]$. E, sejam M_j^+ e m_j^+, respectivamente, o sup e o inf de f^+ no mesmo subintervalo $[x_{j-1},x_j]$. Há dois casos a considerar:

Caso 1: Existe um $x \in [x_{j-1},x_j]$ tal que $f(x) > 0$. Então, $M_j^+ = M_j$ e $m_j^+ \geq m_j$. Logo, $M_j^+ - m_j^+ \leq M_j - m_j$.

Caso 2: Para qualquer $x \in [x_{j-1},x_j]$ tem-se $f(x) \leq 0$. Logo, $f^+ = 0$, o que implica $M_j^+ = m_j^+ = 0$. Logo, neste caso, também temos $M_j^+ - m_j^+ \leq M_j - m_j$.

Portanto,

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n}(M_j^+-m_j^+)(x_j-x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1}).$$

Como o primeiro membro de (3) é $S(f^+,\pi) - s(f^+,\pi)$ e o segundo membro de (3) é $S(f,\pi) - s(f,\pi)$, concluímos, usando a desigualdade (2), que $S(f^+,\pi) - s(f^+,\pi) < \epsilon$. Logo, pelo Teorema 5.3 segue-se que f^+ é integrável.

COROLÁRIO 5.3 - <u>A parte negativa</u> f^- <u>de uma função integrável é integrável.</u>

<u>Demonstração</u>: Pela relação (1) temos $f^- = f^+ - f$. Como f e f^+ são integráveis, o resultado segue-se pela aplicação do Corolário 5.1.

TEOREMA 5.9 - <u>O valor absoluto</u> $|f|$ <u>de uma função integrável</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>é integrável</u>.

<u>Demonstração</u>: Pelo Lema 5.6 e pelo Corolário 5.3, temos, respectivamente, que f^+ e f^- são integráveis. Aplicando o Teorema 5.6, concluímos que $|f| = f^+ + f^-$ é também integrável.

<u>Observação</u>: Não é verdade que a integrabilidade de $|f|$ implica a integrabilidade de f, conforme se vê pelo exemplo abaixo.

EXEMPLO: Seja $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ a função assim definida:

$f(x) = -1$ se x é racional e $f(x) = 1$ se x é irracional. A função $|f|$ é a função constante igual a 1, e, portanto, integrável. Entretanto, a função f

não é integrável, como já se observou acima.

Mostraremos agora que a operação de integração preserva ordem. Isto é, temos o seguinte resultado:

TEOREMA 5.10 - (a) Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então,

$$\int_a^b f \geq 0.$$

(b) Se f e g são funções integráveis em $[a,b]$ e $f \leq g$ então,

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g .$$

Demonstração: (a) Para qualquer partição π, os sup's M_j nos diversos subintervalos são ≥ 0. Logo, $S(f,\pi) \geq 0$ para qualquer π. Portanto,

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi): \pi \in \mathcal{P}\} \geq 0.$$

(b) Pelo Corolário 5.1 a função $g - f$ é integrável.

Como $g - f \geq 0$ podemos aplicar a parte (a) deste teorema e concluir que $\int_a^b (g-f) \geq 0$. Aplicando novamente o Corolário 5.1 temos $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$, o que nos dá o resultado a provar.

COROLÁRIO 5.4 - Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Então,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

TEOREMA 5.11 - Se f é integrável em $[a,b]$, então, $|f|$ é integrável e

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demonstração: A integrabilidade de $|f|$ foi estabelecida no Teorema 5.9. Aplicando o Teorema 5.10 a $-f \leq |f| \leq f$ obtemos

$$-\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b f,$$

de onde se segue o resultado.

COROLÁRIO 5.5 - Se f é integrável (limitada) em $[a,b]$, então

$$\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Demonstração: Diretamente do Corolário 5.4 e do Teorema 5.11.

5.7 - A integral como limite

Como vimos na seção 5.3, a integral de uma função f, quando existe, é o ínfimo do conjunto de números reais

$S(f,\pi)$, onde π percorre a coleção $\mathcal{P}$ de todas as partições. E, é também igual ao sup das somas inferiores. Esse modo de definir a integral deu como conseqüência o importante Teorema 5.3, que foi de bastante utilidade em várias demonstrações. É, porém, fácil de compreender que os processos de tomar sup e inf não são construtivos, uma vez que eles envolvem a consideração de todas as possíveis partições de $[a,b]$, e esse conjunto $\mathcal{P}$ é demasiadamente grande. É desejável estabelecer uma maneira prática de calcular a integral de uma dada função. Uma idéia seria tomar uma sucessão de partições cada vez mais finas, formar uma sucessão de somas associadas a essas partições, e tentar demonstrar que elas convergiriam para a integral procurada.

Concentraremos nossa atenção em uma dada função contínua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Portanto, sabe-se pelo Teorema 5.4 que a integral existe.

DEFINIÇÃO 1 - Dada uma partição $\pi = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$, um conjunto Y contendo n pontos $y_1, y_2, \dots, y_n$ é <u>admissível para</u> π se $y_j \in [x_{j-1}, x_j]$ para $j = 1, \dots, n$.

EXEMPLOS: y_j pode ser o meio do intervalo $[x_{j-1}, x_j]$.

No caso de uma função contínua, y_j pode ser tomado como o ponto onde f atinge seu máximo (ou mínimo) no intervalo $[x_{j-1},x_j]$.

DEFINIÇÃO 2 - Dados uma partição $\pi = \{x_o = a < x_1 <\ldots<$ $< x_n = b\}$ e um conjunto admissível $Y = \{y_1,\ldots,y_n\}$ associado a π, a <u>soma de Riemann</u> associada a π e Y, que se designa por $\sigma(f,\pi,Y)$, é definida por

$$\sigma(f,\pi,Y) = \sum_{j=1}^{n} f(y_j)(x_j-x_{j-1}).$$

EXEMPLOS: A soma superior $S(f,\pi)$ e a soma inferior $s(f,\pi)$ são somas de Riemann, quando f é contínua.

DEFINIÇÃO 3 - A <u>norma</u> de uma partição $\pi = \{x_o = a < x_1 <$ $< \ldots < x_n = b\}$, que se designa por $\|\pi\|$, é definida como o comprimento do maior dos subintervalos $[x_{j-1},x_j]$.

TEOREMA 5.12 - <u>Seja</u> $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>uma função integrável (limitada) definida em</u> $[a,b]$. <u>Seja</u> $\{\pi_k\}$ <u>uma sucessão de partições do intervalo</u> $[a,b]$ <u>tais que</u> $\|\pi_k\| \to 0$ <u>quando</u> $k \to \infty$. <u>Correspondendo a cada</u> π_k <u>é dado um conjunto admissível</u> Y_k. <u>Então, as somas de Riemann</u> $\sigma(f,\pi_k,Y_k)$ <u>convergem para a integral de</u> f.

A demonstração do Teorema 5.12 repousa no seguinte resultado, devido a Darboux.

LEMA 5.7 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Representemos por I e J suas integrais inferior e superior respectivamente. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição π com $\|\pi\| < \delta$ tem-se

(1) $$S(f,\pi) < J + \varepsilon, \qquad s(f,\pi) > I - \varepsilon.$$

Demonstração do Teorema 5.12 usando o Lema 5.7: É imediato que

(2) $$s(f,\pi_k) \leq \sigma(f,\pi_k,Y_k) \leq S(f,\pi_k).$$

Agora dado $\varepsilon > 0$, tome o δ do lema anterior, e seja k_o tal que $\|\pi_k\| \leq \delta$ para $k \geq k_o$. Então

$$\left|\int_a^b f-\sigma(f,\pi_k,Y_k)\right| \leq \left|\int_a^b f-S(f,\pi_k)\right| + |S(f,\pi_k)-\sigma(f,\pi_k,Y_k)|$$

usando (1) e (2), e lembrando que $I = J = \int_a^b f$ temos

$$\left|\int_a^b f - \sigma(f,\pi_k,Y_k)\right| \leq \varepsilon + |S(f,\pi_k)-s(f,\pi_k)| \leq 3\varepsilon,$$

para todo $k \geq k_o$, o que completa a demonstração do Teorema 5.12.

Demonstração do Lema 5.7 - Dado $\varepsilon > 0$, escolha uma partição $\pi_1 = \{a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ tal que

(3) $$S(f,\pi_1) < J + \varepsilon.$$

Provaremos que existe $\delta < \frac{1}{2}\min\{x_j - x_{j-1}\colon j = 1,\dots,n\}$ tal que, para toda partição π_2, com $\|\pi_2\| < \delta$, temos

$$S(f,\pi_2) < J + 2\varepsilon. \tag{4}$$

De fato, seja $\pi_3 = \pi_1 \cup \pi_2$. É claro que entre cada dois pontos consecutivos de π_2 há no máximo um ponto de π_1. Sejam $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \dots < y_{n-1} < z_{n-1}$ os pontos de π_2 tais que $x_i \in [y_i, z_i]$. Logo

$$S(f,\pi_2) - S(f,\pi_3) = \sum_{i=1}^{n-1} M(y_i,z_i)(z_i-y_i) \tag{5}$$
$$- \sum_{i=1}^{n-1} \{M(y_i,x_i)(x_i-y_i) + M(x_i,z_i)(z_i-x_i)\}$$

onde $M(u,v) = \sup\{f(x)\colon x \in [u,v]\}$. (Observe que já fizemos os cancelamentos dos termos comuns às duas somas superiores). Se M representa o sup de f em $[a,b]$, cada termo do somatório de (5) pode ser majorado assim:

$$M(y_i,z_i)(z_i-y_i) - M(y_i,x_i)(x_i-y_i) - M(x_i,z_i)(z_i-x_i)$$
$$= \{M(y_i,z_i)-M(y_i,x_i)\}\ (x_i-y_i) + \{M(y_i,z_i)-M(x_i,z_i)\}(z_i-x_i)$$
$$\le\ 2M(z_i-y_i).$$

Logo de (3) temos:

$$S(f,\pi_2) - S(f,\pi_3) \le 2M\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i) < 2M(n-1)\delta.$$

Como $S(f,\pi_3) \le S(f,\pi_1) \le J + \varepsilon$, obtemos:

$$S(f,\pi_2) \leq J + \varepsilon + 2M(n-1)\delta.$$

Portanto, se $\delta \leq \varepsilon/2M(n-1)$, obtemos (4), como nos propusemos a demonstrar. De modo análogo demonstra-se a parte referente à integral inferior. Para cada uma das partes se obtém um δ, o menor dos dois atenderá a ambas.

EXERCÍCIO 1 - f é contínua em $[0,1]$. Tome partições em $2, 2^2, 2^3, \ldots,$ em geral 2^n, subintervalos de igual comprimento e para conjuntos admissíveis os meios dos subintervalos. Prove que

$$\sigma(f,\pi_n,Y_n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right).$$

EXERCÍCIO 2 - Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função Lipschtziana, i.e., $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$, para todos x,y em $[0,1]$. Mostre que

$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{M}{2n}.$$

(Sugestão: aproxime a integral por somas de Riemann $\pi(f,\pi_{np},Y_{np})$ onde $\pi_{np} = \{0, \frac{1}{np}, \ldots, \frac{p}{np}; \frac{p+1}{np}, \ldots, \frac{2p}{np}; \ldots; \frac{np-p}{np}; \ldots; \frac{np}{np}\}$ $Y_{np} = \{y_j = \frac{j}{np}\colon j = 1, \ldots, np\}$. Faça uma estimativa de $\left|\sigma(f,\pi_{np},Y_{np}) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ e passe ao limite quando $p \to \infty$).

5.8 - A restrição de uma função integrável

A integrabilidade de uma função é uma propriedade global, isto é, depende do comportamento da função em todo o intervalo de definição. Não é, pois, óbvio a priori que integrabilidade em um intervalo implique integrabilidade em um subintervalo. Observe que no caso da derivabilidade essa questão era imediata, dado o caráter local da propriedade.

TEOREMA 5.13 - Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função (limitada) integrável e $[c,d]$ é um intervalo fechado contido em $[a,b]$, então f é integrável em $[c,d]$. (Em outras palavras, a restrição $\tilde{f}$ de f a $[c,d]$, é integrável.)

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ existe uma partição π do intervalo $[a,b]$ tal que

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$$

aplicando o Teorema 5.3. Se π' é a partição de $[a,b]$ formada pelos pontos de π e mais os pontos c e d (caso eles não estejam em π), temos, em virtude do Teorema 5.1:

(1) $$S(f,\pi') - s(f,\pi') < \varepsilon.$$

Para fixar as idéias, seja $\pi' = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_i = c < \dots < x_k = d < \dots < x_n = b\}$.

Então,

$$(2) \qquad \sum_{j=i+1}^{k} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Seja $\tilde{\pi}$ a partição de $[c,d]$ obtida considerando apenas os pontos de π' que estão em $[c,d]$. Então, em virtude de (1) e (2) temos

$$(3) \qquad S(\tilde{f},\tilde{\pi}) - s(\tilde{f},\tilde{\pi}) < \varepsilon .$$

Portanto, usando o Teorema 5.3, obtemos o resultado.

TEOREMA 5.14 - <u>Seja</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>uma função integrável e seja</u> $c \in (a,b)$. <u>Então</u>

$$(4) \qquad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

<u>Demonstração</u>: Pelo Teorema 5.13 a função f é integrável em $[a,c]$ e também em $[c,b]$. Logo as expressões no segundo membro de (4) fazem sentido. Para demonstrar que se tem igualdade em (4) procedemos como se segue.

Seja π uma partição de $[a,b]$. Se c não pertencesse a π, formaríamos a partição π' adicionando o ponto c à partição π. Seja π_1 a partição de $[a,c]$ obtida considerando os pontos de π' contidos em $[a,c]$. Analogamente, seja π_2 a partição de $[c,b]$ obtida considerando os pontos de π' contidos em $[c,b]$. É claro que

$$(5) \qquad S(f,\pi) \geq S(f,\pi') = S(f_1,\pi_1) + S(f_2,\pi_2)$$

onde f_1 é a restrição de f a $[a,c]$ e f_2 é a restrição de f a $[c,b]$. De (5) segue-se

$$S(f,\pi) \geq \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$$

para toda partição π de $[a,b]$, e daí se segue

$$(6) \qquad \int_a^b f \geq \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2.$$

Procedendo analogamente para as somas inferiores obtemos

$$(7) \qquad \int_a^b f \leq \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2 .$$

Finalmente, (6) e (7) dão o resultado (4).

<u>Observação</u>: Se $c < d$ convencionamos que $\int_d^c f = -\int_c^d$.

Com essa conveção podemos escrever que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b$, onde c não é ncessariamente um ponto do intervalo $[a,b]$. A hipótese sobre f seria que ela fosse integrável no menor intervalo fechado contendo os pontos a, b e c.

O Teorema 5.3 diz, em particular, que se uma função for integrável em um intervalo e partirmos tal intervalo em (um número finito de) subintervalos, as restrições dessa função a esses subintervalos são integráveis. Agora apresentamos uma recíproca desse fato que pode ser útil em alguns problemas.

TEOREMA 5.15 - *Se* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *é tal que* f *é integrável em* $[a,c]$ *e em* $[c,b]$, *onde* $c \in (a,b)$, *então* f *é integrável em* $[a,b]$.

Demonstração: Seja f_1 e f_2, respectivamente, as restrições de f a $[a,c]$ e $[c,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existem partições, π_1 de $[a,c]$ e π_2 de $[c,b]$, tais que

$$(8) \qquad S(f_1,\pi_1)-s(f_1,\pi_1)<\varepsilon/2 \quad e \quad S(f_2,\pi_2)-s(f_2,\pi_2) < \varepsilon/2,$$

em virtude da integrabilidade de f_1 e f_2. Consideremos agora a partição π de $[a,b]$ obtida tomando os pontos de π_1 e π_2. É claro que

$$(9) \qquad S(f,\pi) = S(f_1,\pi_1) + S(f_2,\pi_2)$$

$$(10) \qquad s(f,\pi) = s(f_1,\pi_1) + s(f_2,\pi_2)$$

As relações (8), (9) e (10) fornecem

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon,$$

que prova a integrabilidade de f pelo Teorema 5.3.

EXEMPLO: Uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita <u>seccionalmente contínua</u> se existe uma partição $\pi = \{x_0 = a < < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que f é contínua em cada subintervalo aberto (x_{j-1}, x_j), e as possíveis descontinuidades (que devem necessariamente ocorrer em pontos de π) são de primeira espécie.

Aplicando os Teoremas 5.4 e 5.15 obtemos

COROLÁRIO 5.5 - <u>Toda função seccionalmente contínua em um intervalo</u> $[a,b]$ <u>é integrável</u>.

5.9 - <u>Uma condição necessária e suficiente de integrabilidade</u>

O Teorema 5.3 nos dá uma condição necessária e suficiente para uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ser integrável. Entretanto tal condição, que se revelou eficiente na demonstração de alguns teoremas, é pouco prática na verificação da integrabilidade de funções dadas explicitamente. O Teorema 5.4 e o Teorema 5.5 fornecem condições suficientes para a integrabilidade.

Nesta seção daremos uma condição necessária e suficiente para integrabilidade, a qual nos parece ser de grande interesse teórico e prático. A primeira definição rigorosa de integral é devida a Cauchy (em 1823) que considerou funções contínuas em $[a,b]$ e definiu

$$\int_a^b f = \lim \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}),$$

onde $\pi = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ é uma partição de $[a,b]$ e o limite é tomado quando $\|\pi\| \to 0$. Em virtude do Teorema 5.12, a integral como definida por Cauchy coincide com a integral definida na seção 5.3.

Após Cauchy, durante todo o resto do século XIX, os matemáticos desenvolveram um grande esforço para definir integral para funções que não fossem contínuas. Coube a Riemann dar um passo decisivo nessa direção. Em 1867, Riemann definiu integral como limite de certas somas (essas somas são precisamente as somas de Riemann que definimos na seção 5.7). O Teorema 5.12 nos diz que uma função é integrável no sentido de Riemann se, e só se, ela for integrável no sentido que definimos na seção 5.3, e além disso as integrais coincidem. Por esse motivo a integral aqui estudada é chamada integral de Riemann. Em seu trabalho, Riemann se põe a questão de saber que funções são integráveis e quais não são. Para isso ele defi ne a <u>oscilação</u> de uma função f num intervalo $[c,d]$ como

$$(1) \qquad \omega(c,d) = \sup\{f(x) : c<x<d\} - \inf\{f(x) : c<x<d\}.$$

E então demonstra que "uma função é integrável se, e só se, para cada $\alpha > 0$ dado, a soma dos comprimentos dos subintervalos da partição de $[a,b]$ nos quais a oscilação da função é maior que α tende a zero, quando a norma da partição tende a zero." Uma melhor formalização dessas idéias seria conseguida com a introdução do conceito de "conteúdo", por Hankel em 1882, e pelos estudos que se seguiram de Du Bois-Reymond e Harnack. As idéias necessárias para a teoria da medida estavam em fermentação. Lebesgue em 1901 poria essa teoria em bases sólidas.

<u>Oscilação de uma função em um ponto</u>. Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, e representemos por $\omega(c,d)$ a oscilação da função f no intervalo $[c,d]$, como se definiu em (1), acima. A <u>oscilação de</u> f <u>em um ponto</u> $x_o \in [a,b]$ é definida como

$$(2) \qquad \sigma(x_o) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon).$$

Observação crítica sobre a definição anterior: o limite em (2) realmente existe pois $\omega(x_o-\varepsilon, x_o+\varepsilon) \leq (x_o-\varepsilon', x_o+\varepsilon')$ se $\varepsilon < \varepsilon'$, e as oscilações ω são todas ≥ 0.

EXERCÍCIO 1 - Suponha que os limites laterais $f(x_o+)$ e $f(x_o-)$ existem e que $f(x_o)$ é igual a um desses limites. Mostre que $\sigma(x_o) = |f(x_o+) - f(x_o-)|$. (Sugestão: dado $\eta > 0$ tome ϵ_o tal que $|f(x_o+)-f(x)| \leq \eta/2$ para $x_o < x < x_o + \epsilon_o$, e $|f(x_o-) - f(y)| \leq \eta/2$ para $x_o - \epsilon < y < x_o$. Então, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_o$, temos

$$|f(x_o+)-f(x_o-)| - \eta \leq |f(x)-f(y)| \leq |f(x_o+)-f(x_o-)| + \eta,$$

para x e y arbitrários em $(x_o-\epsilon, x_o+\epsilon)$. Daí se segue que $|f(x_o+)-f(x_o-)| - \eta < \omega(x_o-\epsilon, x_o+\epsilon) \leq |f(x_o+)-f(x_o-)| + \eta$. Tomando o limite quando $\epsilon > 0$ e usando o fato que a desigualdade obtida é válida para todo $\eta > 0$, obtemos o resultado pedido).

EXERCÍCIO 2 - O exercício anterior mostra que a oscilação é igual ao salto nos pontos onde f tem uma descontinuidade de 1ª espécie e $f(x_o)$ é igual a um dos limites laterais $f(x_o+)$ ou $f(x_o-)$. Mostre que a oscilação é zero se, e só se, a função é contínua em x_o.

EXERCÍCIO 3 - Calcule a oscilação da função $f(x) = 1/x$, definida para $x \neq 0$, em $x = 0$.

<u>Conteúdo de um subconjunto de R</u>. Diz-se que um subconjunto A de R tem <u>conteúdo zero</u> se, dado $\epsilon > 0$, existir um número finito

de intervalos abertos, $I_1,\dots,I_k$, que cobrem A (i.e., $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$), e tais que $\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) < \epsilon$, onde $\ell(I_j)$ designa o comprimento de I_j.

EXERCÍCIO 4 - Mostre que todo conjunto com um número finito de pontos tem conteúdo zero.

EXERCÍCIO 5 - Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{n}: n = 1,2,\dots\}$ tem conteúdo zero.

EXERCÍCIO 6 - Nem todo conjunto enumerável tem conteúdo zero. Mostre que o conjunto dos racionais do intervalo $[0,1]$ não tem conteúdo zero.

<u>Observação</u>: Existem conjuntos não enumeráveis que têm conteúdo zero. Você já ouviu falar no conjunto ternário de Cantor?

TEOREMA 5.16 - (Du Bois-Reymond). <u>Seja</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>uma função limitada e seja</u> $E_\alpha = \{x \in [a,b]: \sigma(x) \geq \alpha\}$. <u>Então</u>, f <u>é integrável se, e só se, para cada</u> $\alpha > 0$, <u>o conteúdo de</u> E_α <u>é zero</u>.

A demonstração utiliza o seguinte lema.

LEMA 5.8 - <u>Seja</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>uma função limitada em</u> $[a,b]$. <u>Suponha que exista</u> $\alpha > 0$ <u>tal que</u> $\sigma(x) < \alpha$ <u>para todo</u> $x \in [a,b]$. <u>Então, existe</u> $\delta > 0$

<u>tal que</u> $\omega(c,d) < \alpha$ <u>para todos</u> $c < d$ <u>em</u> $[a,b]$ <u>com</u> $d-c < \delta$.

<u>Demonstração, por contradição</u>: Dado $\delta = 1/n$ existem $c_n < d_n$ em $[a,b]$ tais que $d_n - c_n < 1/n$ e $\omega(c_n,d_n) \geq \alpha$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existem subsucessões de (c_n) e (d_n), que representaremos ainda por (c_n) e (d_n), tais que $c_n \to c$ e $d_n \to d$. Como $d_n - c_n < 1/n$, obtemos $c = d$. Agora dado ϵ existe n_o tal que $[c-\epsilon, c+\epsilon] \supset [c_n, d_n]$ para $n > n_o$. Isso implica $\omega(x-\epsilon, c+\epsilon) \geq \omega(c_n,d_n) \geq \alpha$ e passando ao limite obtemos $\sigma(c) \geq \alpha$, o que contradiz a hipótese do lema.

<u>Demonstração do Teorema 5.16</u>: A condição é necessária para integrabilidade f. De fato, suponha, por contradição, que exista $\alpha_o > 0$ tal que o conteúdo de E_{α_o} não seja zero. Isso quer dizer que existe $\epsilon_o > 0$, tal que, para qualquer coleção finita de intervalos $I_1, \ldots, I_k$ abertos cobrindo E_{α_o}, tem-se $\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) \geq$ $\geq \epsilon_o$. Seja agora π uma partição qualquer do intervalo $[a,b]$. Então a soma dos comprimentos dos subintervalos da partição que contêm pontos de E_α é maior ou igual a ϵ_o. Logo $S(f,\pi) - s(f,\pi) \geq \alpha_o \epsilon_o$ para qualquer partição π, o que contradiz o fato de f ser integrável.

Reciprocamente, dados $\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$, existem, por hipótese, intervalos abertos $I_1,\dots,I_k$ que cobrem E_α e tais que $\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) < \epsilon$. É claro que $[a,b]\setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ é uma união finita de intervalos fechados, $J_1,\dots,J_n$. Em cada ponto de J_i a oscilação de f é menor que α. Logo aplicando o Lema 5.8 a cada intervalo J_i obtemos um δ_i. Seja agora π uma partição de $[a,b]$ formada pelas extremidades dos intervalos $I_1,\dots,I_k$ e por pontos adicionais em J_i de modo que a distância entre dois consecutivos seja menor que δ_i, para $i = 1,\dots,n$. Então é fácil de ver que $S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq (M-m)\epsilon + (b-a)\alpha$. Isso prova a integrabilidade de f usando o Teorema 5.3. A demonstração fica completa.

COROLÁRIO 5.6 - Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, cujo conjunto $D(f)$ dos pontos de descontinuidade tem conteúdo zero. Então f é integrável.

Demonstração: Basta observar que $D(f) = \bigcup_{\alpha>0} E_\alpha$, onde E_α é o conjunto definido no Teorema 5.16, e que todo subconjunto de um conjunto de conteúdo zero tem conteúdo zero. (Prove). Como $E_\alpha \subset D(f)$ para todo $\alpha > 0$, aplicamos o Teorema 5.16 e obtemos a integrabilidade de f.

Exemplos de funções não seccionalmente contínuas, mas

<u>integráveis</u>:

(i) $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

(ii) $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (-1)^n$, para $1/(n+1) < x \leq 1/n$, $n = 1,2,\ldots$.

<u>Conjuntos de medida zero</u>. Um subconjunto A de R tem <u>medida zero</u>, se dado $\epsilon > 0$, existir um número enumerável (não necessariamente finito) de intervalos abertos $I_1, I_2, \ldots$, que cobrem A e tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon$, onde $\ell(I_n)$ designa o comprimento do intervalo I_n.

EXERCÍCIO 7 - Mostre que todo conjunto de conteúdo zero tem também medida zero.

EXERCÍCIO 8 - Mostre que todo subconjunto enumerável de R tem medida zero. Dê um exemplo de um conjunto que tem medida zero, mas não conteúdo zero.

EXERCÍCIO 9 - Todo subconjunto de um conjunto de medida zero tem medida zero.

EXERCÍCIO 10 - A união enumerável de conjuntos de medida zero tem medida zero. (Sugestão: sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ os conjuntos de medida zero. Dado $\epsilon > 0$ tome uma coleção enumerável $I_{n1}, I_{n2}, \ldots$ de intervalos abertos que cobrem A_n e tais que

$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{nj}) < \frac{\epsilon}{2^n}$. Então a coleção enumerável I_{nm}, para $n,m = 1,2,\ldots$, cobre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e a soma de seus comprimentos é $< \epsilon$. Detalhes!)

TEOREMA 5.17 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f integrável se, e só se, o conjunto $D(f)$ de seus pontos de descontinuidade tem medida zero.

A demonstração desse teorema utiliza o teorema de Heine-Borel que será demonstrado no Apêndice a este capítulo sob condições mais gerais. Diz-se que um subconjunto A de R é fechado se, para qualquer sucessão convergente (x_n), com $x_n \in A$, seu limite está também em A. Exemplos: o intervalo fechado $[0,1]$ e o conjunto $\{0,1,\frac{1}{2},\ldots\}$ são conjuntos fechados; os intervalos $(0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$ e o conjunto $\{1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$ não são fechados.

TEOREMA DE HEINE-BOREL (enumerável) - Seja A um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Seja $I_1, I_2, \ldots$ uma coleção enumerável de intervalos abertos que cobrem A. Então existe um número finito desses intervalos $I_{k_1},\ldots,I_{k_n}$, que também cobrem A, isto é, $\bigcup_{j=1}^{n} I_{k_j} \supset A$.

LEMA 5.9 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então o conjunto $E_\alpha = \{x: \sigma(x) \geq \alpha\}$ é fechado, para cada $\alpha > 0$.

Demonstração: Seja (x_n) uma sucessão convergente, tal que $x_n \in E_\alpha$, e $x_n \to x$. Provaremos que $x \in E_\alpha$. Suponhamos, por contradição, que $x \notin E_\alpha$, isto é, $\sigma(x) < \alpha$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(x-\varepsilon, x+\varepsilon) < \alpha$. Tome agora x_n tal que $|x_n - x| < \varepsilon/2$. É claro que $\omega(x_n-\varepsilon/2,\ x_n+\varepsilon/2) < \alpha$, o que implicaria $\sigma(x_n) < \alpha$. E isso não é possível. A contradição proveio de se supor que $x \notin E_\alpha$.

Demonstração do Teorema 5.17: Suponha inicialmente que f é integrável. É fácil de ver que $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Como cada $E_{1/n}$ tem conteúdo zero, segue-se do Exercício 7 que $E_{1/n}$ tem medida zero. E, pode-se provar que, a união enumerável de conjuntos de medida zero, confira Exercício 10. Suponha, reciprocamente que $D(f)$ tem medida zero. Como $D(f) = \bigcup_{\alpha>0} E_\alpha$ segue-se que $E_\alpha \subset D(f)$ tem também medida zero, confira Exercício 9. Logo dado $\varepsilon > 0$ existe uma coleção enumerável de intervalos abertos que cobrem E_α e cujo somatório dos comprimentos é $< \varepsilon$. Sendo E_α fechado, em virtude do Lema 5.9 aplique o Teorema de Heine-Borel para extrair da cole ção de intervalos um número finito deles que também cubra E_α. Como o somatório dos comprimentos desse número finito de intervalos é, com mais forte razão, menor que ε, concluímos que E_α, para cada $\alpha > 0$, tem conteúdo zero. Finalmente aplicando o Teorema 5.16 obtemos que f é integrável. Q.E.D.

EXERCÍCIO 11 - Considere a função $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ irracional} \\ \\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q}, \ p \text{ e } q \text{ primos entre si.} \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em todo x irracional e descontínua em todo x racional. Mostre que f é integrável.

APÊNDICE AO CAPÍTULO 5

O TEOREMA DE HEINE-BOREL

Os intervalos abertos pertencem a uma classe mais geral de subconjuntos da reta: a coleção dos conjuntos abertos. Um subconjunto A do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é aberto se para qualquer $x \in A$ existe um $\epsilon > 0$ tal que o intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ está contido em A. É imediato que qualquer intervalo aberto é um conjunto aberto no sentido que acabamos de definir. Outros exemplos de conjuntos abertos são dados pelas uniões de intervalos abertos. (Prove). O leitor poderá provar sem dificuldades que (i) uma união de um número qualquer de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto. Já para a intersecção, esperamos que o leitor tenha dificuldades em demonstrar um resultado análogo... Isso porque o resultado é falso em geral: a intersecção dos intervalos abertos $(-1/n,\ 1+1/n)$, $n = 1,2,\ldots,$ é o intervalo fechado $[0,1]$. Entretanto, um pouco menos é verdadeiro. (ii) a intersecção de um número finito de conjuntos abertos é aberto.

Já vimos no decurso do Capítulo 5 o que é um conjunto fechado da reta. Repetindo: um subconjunto F do conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é <u>fechado</u> se qualquer sucessão (x_n) convergindo para x e com $x_n \in F$ é tal que $x \in F$.

EXERCÍCIO 1 - O <u>complementar</u> de um subconjunto B da reta é o conjunto $B^c = \{x \in \mathbb{R}: x \notin B\}$. Mostre que um conjunto é fechado se e só se seu complementar for aberto.

Relembremos que os intervalos fechados são exemplos de conjuntos fechados. Em particular, um conjunto constituído de um único ponto, $\{a\}$. O leitor poderá ver facilmente que uma união de um número finito de intervalos fechados é um conjunto fechado. Já o mesmo não se pode dizer de uma união de um número infinito de intervalos fechados: a união dos intervalos $[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, $n = 2,3,\ldots$, é o intervalo <u>aberto</u> $(0,1)$. Nessa linha de idéias convidamos o leitor a trabalhar o exercício seguinte.

EXERCÍCIO 2 - (i) A união de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(ii) A interseção de um número qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado. (As demonstrações podem ser feitas diretamente da definição ou usando o Exercício 1 acima, juntamente com as propriedades (i) e (ii) dos conjuntos abertos, bem como as relações do exercício abaixo.

EXERCÍCIO 3 - Seja $\{B_\alpha, \alpha \in \mathcal{C}\}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}$ é um conjunto qualquer de índices. Seja B a união de todos eles, e seja C a intersecção dos mesmos. Mostre que (i) o complementar B^c de B é a intersecção de todos os complementares B_α^c: $(\bigcup B_\alpha)^c = \bigcap B_\alpha^c$. Mostre também que (ii) $(\bigcap B_\alpha)^c = \bigcup B_\alpha^c$.

As coleções dos subconjuntos abertos e dos subconjuntos fechados da reta não esgotam a coleção de todos os subconjuntos da reta: o intervalo $[0,1)$ nem é fechado nem aberto.

Já vimos que um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é <u>limitado</u> se existir $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in B$. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é <u>compacto</u> se ele for fechado e limitado. Os intervalos fechados (finitos) são compactos. A reta, as semiretas $(-\infty,a]$ e $[b,\infty)$ são fechados mas não compactos.

O resultado central do presente apêndice é o seguinte:

TEOREMA DE HEINE-BOREL - <u>Seja</u> K <u>um conjunto compacto de</u> $\mathbb{R}$, <u>e</u> $\{A_\alpha, \alpha \in \mathcal{C}\}$ <u>uma coleção de abertos que cobre</u> K, <u>isto é</u>, $K \subset \bigcup A_\alpha$. <u>Então existe um número finito</u>, $A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_n}$, <u>desses abertos, que também cobre</u> K.

Observação: O teorema não valeria (i) se K fosse aberto, e de fato temos o contra-exemplo: $K = (0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n,\ 1-1/n) = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$; (ii) se K não fosse limitado: $K = [0,\infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1/n, n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; (iii) se os A_α não fossem abertos: $K = [0,1] = \{0\} \cup \{1\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} [1/n,\ 1-1/n]$.

COROLÁRIO - Seja K um conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $\{I_\alpha, \alpha \in G\}$ uma coleção de intervalos abertos cobrindo K. Então, podemos escolher um número finito deles, $I_1,\dots,I_n$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$.

A demonstração do Teorema de Heine-Borel repousa no resultado seguinte:

LEMA - Seja $\{A_\alpha; \alpha \in G\}$ uma coleção de abertos cobrindo um compacto K. Então, existe um número $d > 0$ tal que, para quaisquer $x,y \in K$ com $0 < y-x \leq d$, temos que o intervalo $[x,y]$ está contido em algum A_α. (Esse d é chamado um número de Lebesgue da cobertura $\{A_\alpha\}$ de K).

Demonstração por contradição: Suponha que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in K$ com $0 < y_n - x_n \leq \frac{1}{n}$ e tais que o intervalo $[x_n,y_n]$ não está contido em nenhum A_α. Aplique o Teorema de Bolzano-Weierstrass para selecionar subsucessões (x_{n_j}) de (x_n) e (y_{n_j}) de (y_n), as quais convergem. Como $y_{n_j} - x_{n_j} < 1/n_j$, segue-se que existe $z \in K$ tal que $\lim x_{n_j} = z$ e $\lim y_{n_j} = z$. Agora, tome um A_α que contenha z, e seja $\varepsilon > 0$ tal que $(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subset A_\alpha$. A seguir tome um n_j tal que $|x_{n_j}-z| < \varepsilon$ e $|y_{n_j}-z| < \varepsilon$. Logo $[x_{n_j}, y_{n_j}] \subset A_\alpha$, o que contradiz as condições impostas sobre x_{n_j} e y_{n_j}.

Demonstração do Teorema de Heine-Borel: Para facilitar a demonstração, poderemos, sem perda de generalidade, supor que K esteja contido no intervalo $[0,1]$. Considere a partição de $[0,1]$ formada pelos pontos $x_k = k\, 2^{-n}$, $k = 0,1,\ldots,2^n$, e tal que $2^{-n} \leq d/2$, onde d é o número determinado no lema acima. Seja $I_k = [x_k - 2^{-n}, x_k + 2^{-n}]$ o intervalo fechado centrado em x_k e com raio 2^{-n}. O conjunto $I_k \cap K$ é fechado (e mesmo compacto pois está contido em um intervalo) e daí se segue que o sup e o inf desse conjunto pertencem a K. Seja $z_k = \sup(I_k \cap K)$ e $y_k = \inf(I_k \cap K)$. Logo $z_k - y_k \leq d$. Pelo lema anterior existe um A_α, digamos A_{α_k}, que contém o intervalo $[y_k, z_k]$. Finalmente provaremos que os A_{α_k}, $k = 0,1,\ldots,2^n$, cobrem K. De fato, dado $x \in K$, tome um x_k tal que $|x-x_k| \leq 2^{-n}$. Então

$x \in [y_k, z_k]$ e daí $x \in A_{\alpha_k}$. Q.E.D.

Observação: O Teorema de Heine-Borel no caso enumerável pode ser demonstrado diretamente, utilizando Bolzano-Weierstrass, sem ter que passar pelo lema acima. De fato, suponha que, para cada n, exista $x_n \in K$ e $x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, onde $A_1, A_2, \ldots$ é a coleção enumerável de abertos que cobre K. Conclua você a demonstração!

EXERCÍCIO 1 - A aderência de um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é o conjunto $\bar{B}$ formado pelos pontos de B e por seus pontos de acumulação (veja a definição de ponto de acumulação na seção 1.10). Mostre que a aderência de qualquer conjunto B é um conjunto fechado.

EXERCÍCIO 2 - Mostre que um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $\bar{F} = F$.

EXERCÍCIO 3 - Mostre que a aderência de um conjunto B é o menor conjunto fechado que o contém. (Sugestão: o menor conjunto fechado que contém B é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm B).

EXERCÍCIO 4 - Sejam B e D dois subconjuntos de R, tais que $B \subset D$. Dizemos que B é denso em D se $\bar{B} \supset D$. Mostre que B é denso em D se todos os pontos de D podem ser aproximados por pontos de B, isto é, dado $x \in D$, existe uma sucessão (x_n), com $x_n \in B$ e tal que $x_n \to x$.

EXERCÍCIO 5 - Mostre que se K for compacto, então ele contém um subconjunto E enumerável e denso nele. (É comum dizer-se, então, que K é <u>separável</u>). (Sugestão: para cada n tome a cobertura de K pelos intervalos abertos $(x-1/n, x+1/n)$, onde x percorre K. Aplique Heine-Borel para selecionar um número finito desses intervalos que cubram K: $(x_{n_j}-1/n, x_{n_j}+1/n)$, $j = 1,\dots,N(n)$. Mostre depois que o conjunto $\{x_{n_j}: n = 1,2,\dots; j = 1,\dots,N(n)\}$ é o conjunto E procurado).

CAPÍTULO 6

AS FUNÇÕES LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL

6.1 - O logarítmo

Consideremos a função $f(x) = 1/x$ para $x > 0$. Sendo f contínua em qualquer intervalo fechado $[a,b]$ contido em $(0,\infty)$ podemos definir a função

$$F(x) = \int_1^x (1/t)dt$$

para qualquer $x \in (0,\infty)$. O valor da função F no ponto x pode ser interpretado graficamente como a área entre o eixo dos x, a curva $1/x$, a reta vertical que passa pelo ponto 1 e a reta vertical que passa pelo ponto x, cf. figura 35. Se $x < 1$, $F(x)$ é a área com sinal negativo, pois, neste caso

$$\int_1^x (1/t)dt = - \int_x^1 (1/t)dt.$$

DEFINIÇÃO - A função F, definida acima, é chamada a <u>função logarítmica</u>, e o valor $F(x)$ de F no ponto x é chamado o <u>logarítmo de</u> x e se representa

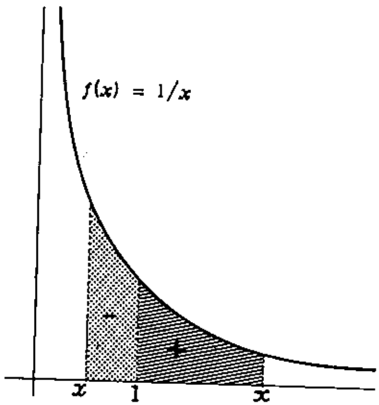


Fig. 35

por $\log x$. Observe que $\log x$ está definido para todo $x > 0$. Para referência futura repetimos a definição de $\log x$

$$(1) \qquad \log x = \int_1^x (1/t)dt, \quad x > 0.$$

Decorre, imediatamente, da definição (1) que

$$(2) \qquad \log 1 = 0$$

$$(3) \qquad \log x > 0 \text{ para } x > 1; \quad \log x < 0 \text{ para } x < 1.$$

TEOREMA 6.1 - <u>A função</u> $\log x$ <u>é crescente</u>.

<u>Demonstração</u>: Se $x_1 < x_2$ temos

$$(4) \quad \log x_2 - \log x_1 = \int_1^{x_2} (1/t)dt - \int_1^{x_1} (1/t)dt = \int_{x_1}^{x_2} (1/t)dt.$$

Aplicando o Corolário 5.4 ao último membro de (4) e como $1/t \geq 1/x_2$, temos:

(5) $$\log x_2 - \log x_1 \geq (x_2-x_1)(1/x_2) > 0.$$

Logo, $\log x_2 > \log x_1$, se $x_2 > x_1$.

TEOREMA 6.2 - <u>A função</u> $\log x$ <u>é contínua</u>.

<u>Demonstração</u>: Seja $x_o > 0$ fixado. Então, para $x > x_o$ temos, como em (4)

(6) $$\log x - \log x_o = \int_{x_o}^{x} (1/t)dt \leq (1/x_o)(x-x_o),$$

onde a desigualdade foi obtida usando o Corolário 5.4.

Por outro lado, para $x_o/2 < x < x_o$, temos

(7) $$\log x_o - \log x = \int_{x}^{x_o} (1/t)dt \leq (1/x)(x_o-x) \leq (2/x_o)(x_o-x)$$

De (6) e (7) segue-se que

$$|\log x - \log x_o| \leq \frac{2}{|x_o|}|x-x_o|,$$

de onde obtemos imediatamente a continuidade de $\log x$ em $x = x_o$.

TEOREMA 6.3 - <u>A função</u> $\log$ <u>é derivável e</u>

(8) $$\frac{d}{dx}(\log x) = 1/x.$$

<u>Demonstração</u>: Seja $x_o > 0$ fixado. A razão incremental correspondente é

$$(9) \qquad q(x) = \frac{\log x - \log x_o}{x - x_o} = \frac{1}{x-x_o} \int_{x_o}^{x} (1/t)dt.$$

Se $x > x_o$, temos pelo Corolário 5.4:

$$(10) \qquad \frac{1}{x}(x-x_o) \leq \int_{x_o}^{x} (1/t)dt \leq \frac{1}{x_o} (x-x_o),$$

o que também é óbvio do fato que a área hachurada está compreendida entre as áreas dos retângulos R_1 e R_2 da figura 36.

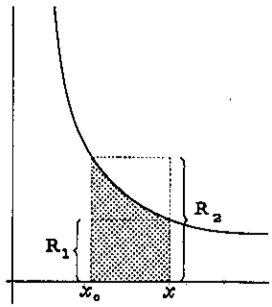


Fig. 36

Portanto, usando (10) em (9) obtemos:

$$(11) \qquad \frac{1}{x} \leq q(x) \leq \frac{1}{x_o},$$

o que implica que

$$(12) \qquad \lim_{x \to x_o+} q(x) = 1/x_o.$$

Analogamente, se $x_o > x$ temos

$$(13) \qquad \frac{1}{x_o} (x_o-x) \leq \int_{x}^{x_o} (1/t)dt \leq \frac{1}{x} (x_o-x).$$

Portanto, usando (13) em (9) obtemos

$$(14) \qquad \frac{1}{x_o} \le q(x) \le \frac{1}{x} ,$$

o que implica que

$$(15) \qquad \lim_{x \to x_o^-} q(x) = 1/x_o .$$

Finalmente, (12) e (15) implicam que $\log$ é derivável em x_o e $(\log)'(x_o) = 1/x_o$, como queríamos provar.

TEOREMA 6.4 - <u>Se</u> a <u>e</u> b <u>são reais positivos, então</u>,

$$(16) \qquad \log(ab) = \log a + \log b.$$

<u>Demonstração</u>: Considere a função $g(x) = \log(ax)$ definida para $x > 0$. g é uma função composta $g = \log \circ h$, onde $h(x) = ax$. Pelo teorema sobre derivação de funções compostas

$$g'(x) = (\log)'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ou seja

$$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x} .$$

Logo,

$$(g(x) - \log x)' = 0,$$

o que implica, em virtude do Teorema 3.10, que $g(x) = \log x + k$, onde k é uma constante. Portanto,

$$\log(ax) = \log x + k \tag{17}$$

para todo $x > 0$. Fazendo $x = 1$ em (17) e lembrando que $\log 1 = 0$, obtemos $k = \log a$. Logo,

$$\log(ax) = \log a + \log x$$

para todo $x > 0$. Em particular, para $x = b$ temos (16).

Por indução podemos provar a seguinte generalização do Teorema 6.4.

TEOREMA 6.4' - Se $a_1,\ldots,a_n$ são reais positivos, então,

$$\log(a_1\ldots a_n) = \log a_1 + \ldots + \log a_n.$$

COROLÁRIO 6.1 - Se $a > 0$ se r é um racional positivo, então,

$$\log a^r = r \log a. \tag{18}$$

<u>Demonstração:</u> Se $r = n$, um inteiro positivo, o resultado segue-se diretamente do Teorema 6.4', com $a_1 = \ldots = a_n = a$. Se $r = \frac{1}{n}$, usamos ainda o Teorema 6.4', com $a_1 = \ldots = a_n = a^{1/n}$ e obtemos

$$\log a = n \log a^{1/n},$$

que dá (18) neste caso. Finalmente, se $r = m/n$ temos, aplicando os dois casos particulares já provados

$$\log a^{m/n} = m \log a^{1/n} = (m/n)\log a.$$

COROLÁRIO 6.2 - Se $a > 0$, então, $\log a^{-1} = -\log a$.

<u>Demonstração</u>: Usando o Teorema 6.4 temos

$$0 = \log 1 = \log(aa^{-1}) = \log a + \log a^{-1},$$

o que dá o resultado a provar.

Decorre imediatamente dos Corolários 6.1 e 6.2 que

(19) $\log a^r = r \log a, \quad a > 0, \quad r$-racional,

onde r pode ser positivo, negativo ou nulo. A fórmula (19) é também válida para o caso de r ser um real qualquer. Entretanto, não estamos ainda em condições de provar esse resultado mais geral, pois, ainda não atribuímos um sentido a a^r, onde r é um irracional.

COROLÁRIO 6.3 - <u>Para toda sucessão</u> $\{x_n\}$ <u>tendendo a</u> $+\infty$ <u>temos</u> $\log x_n \to +\infty$.

<u>Demonstração</u>: Como a função $\log$ é crescente, basta mostrar isso para uma particular sucessão.

Tomemos a sucessão $\{x_n\} = \{2^n\}$. Pelo Corolário 6.1, $\log 2^n = n \log 2$, e como $\log 2 > 0$, segue-se que $n \log 2 \to +\infty$.

COROLÁRIO 6.4 - <u>Para toda sucessão</u> $\{x_n\}$ <u>tendendo a</u> 0 <u>temos</u> $\log x_n \to -\infty$.

<u>Demonstração</u>: Como na demonstração anterior, basta provar

isso para uma particular sucessão. Tomemos a sucessão $\{x_n\} = \{2^{-n}\}$. Pela fórmula (19) acima temos:

$$\log 2^{-n} = -n \log 2 \to -\infty.$$

Pelas informações colegidas nos Teoremas 6.1, 6.2 e 6.3 e nos Corolários 6.3 e 6.4, vemos que o gráfico de $\log x$ tem o aspecto indicado na figura 37:

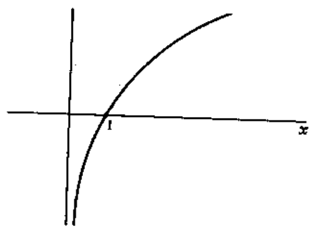


Fig. 37

EXERCÍCIO 1 - Seja $[a,b]$ um intervalo fechado contido na semi-reta $(0,+\infty)$. Mostre que

$$(*) \qquad |\log x - \log y| \le \frac{1}{a}|x-y|$$

para todos x,y em $[a,b]$. (Essa desigualdade mostra que a função log é lipschitziana em cada intervalo $[a,b]$, e a constante de Lipschitz depende do intervalo.)

EXERCÍCIO 2 - Mostre que a função $\log x$ é côncava. (Sugestão: use o Exercício 5 da seção 3.6.)

EXERCÍCIO 3 - (i) Mostre que a equação $x = \log x$ não tem solução.

(ii) Mostre que a equação $x-1 = \log x$ tem uma única soeles devem ser iguais. Tem-se, pois, a relação (6).

Por indução, prova-se uma generalização de (6):

$$(7) \qquad E(y_1 + \ldots + y_n) = E(y_1)\ldots E(y_n).$$

Daí se segue que $E(ny) = [E(y)]^n$ e $E(\frac{1}{n}y) = [E(y)]^{1/n}$. Logo, $E(ry) = [E(y)]^r$ para qualquer racional $r > 0$. Usando (2) e (6) temos

$$1 = E(0) = E(x-x) = E(x)E(-x),$$

o que prova que $E(-x) = E(x)^{-1}$. Logo,

$$(8) \qquad E(ry) = [E(y)]^r$$

para qualquer r racional (positivo, negativo ou nulo). De (8) segue-se que $E(n) = E(1)^n$ e como $E(1) > 1$ temos que $E(n) \to +\infty$. Usando ainda (8) temos $E(-n) = E(1)^{-n}$, o que implica que $E(-n) \to 0$. Logo, o gráfico de $E(y)$ deve ser como se indica abaixo

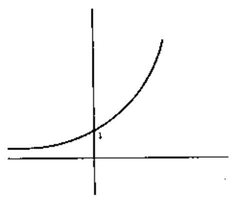


Fig. 38

EXERCÍCIO - Mostre que a função $E(x)$ é convexa.

<u>O número e</u>. O valor da função E no ponto 1 é desig-

nado pela letra e. Então, o número e é assim definido:

$$E(1) = e.$$

Em virtude de (8) temos que

$$E(r) = e^r$$

para qualquer racional r. Definimos $e^y = E(y)$, para y irracional. Logo,

$$E(y) = e^y \tag{9}$$

para todo y real.

EXERCÍCIO 1 - Trace os gráficos das funções: e^{-y}, e^{ay} onde a é um real qualquer.

EXERCÍCIO 2 - Obtenha a série de Taylor, relativamente a $x = 0$, para a função e^x. Mostre que essa série converge, para todo x real.

EXERCÍCIO 3 - Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$. (Sugestão: use o Exercício 7 da seção 6.1.)

EXERCÍCIO 4 - Trace o gráfico da função $x \log x$, para $x > 0$. Determine o ponto onde ocorre o mínimo da função. Cf. Exercício 5 da seção 6.1.

EXERCÍCIO 5 - Trace o gráfico da função $(\log x)/x$, para $x > 0$. Determine o ponto onde ocorre o máximo da função.

EXERCÍCIO 6 - Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} E\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{para } |x| < 1 \\ 0, & \text{para } |x| \geq 1 \end{cases}$$

é derivável para todo x real. Trace o gráfico dessa função.

EXERCÍCIO 7 - Trace o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(Estude cuidadosamente o comportamento de $f(x)$ perto de $x = 0$, e determine os pontos de inflexão de f).

EXERCÍCIO 8 - Trace o gráfico da função $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ definida para $x \neq 0$. (Determine o ponto de inflexão de f e estude o comportamento de x perto de 0).

EXERCÍCIO 9 - (Funções hiperbólicas). As expressões

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$$

definem, respectivamente as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. Trace os gráficos dessas funções. Prove que

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x \quad (\cosh x)' = \operatorname{senh} x$$

EXERCÍCIO 10 - Seja $f(x)$ uma função contínua que satisfaz à equação $f(x+y) = f(x)f(y)$. Mostre que $f(x) \equiv 0$ ou $f(x) = e^{ax}$. (Sugestão: se f se anular para um valor de x, então segue da equação funcional que $f = 0$. Se $f \neq 0$, então $f(x) > 0$ para todo x. Aplicando $\log$ recai-se no Exercício 1 seção 2.10. Pode-se também proceder diretamente demonstrando: $f(n) = [f(1)]^n$, $f(\frac{1}{n}) = [f(1)]^{\frac{1}{n}}$, $f(\frac{m}{n}) = [f(1)]^{\frac{m}{n}}$ e aplicar continuidade para o caso geral).

EXERCÍCIO 11 - Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\log x)^p}{x} = 0$, $p > 0$. (Sugestão: faça $\log x = y$ e utilize o Exercício 3).

EXERCÍCIO 12 - Mostre que a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$, $p > 0$, diverge. (Sugestão: use o Exercício 8 para provar que existe $n_o \in N$ tal que $\frac{(\log n)^p}{n} < 1$, para $n \geq n_o$. Logo $\frac{1}{(\log n)^p} > \frac{1}{n}$).

EXERCÍCIO 13 - Mostre que a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ converge. (Sugestão: escreva $(\log n)^{\log n} = (e^{\log n})^{\log \log n} = n^{\log \log n} > n^2$ onde a desigualdade se verifica, com certeza, para $n \geq 19683$).

EXERCÍCIO 14 - A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge. (Sugestão: use o Exercício 2 da seção 1.12: o comportamento da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ é o mesmo da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log 2^n} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$).

EXERCÍCIO 15 - A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ diverge se $\alpha < 1$, e converge se $\alpha > 1$. (Sugestão: use o Exercício 11 para a divergência, e no caso $\alpha > 1$ use novamento o Exercício 2 da seção 1.2).

EXERCÍCIO 16 - Seja $f(x)$ uma função contínua na semi-reta $\{x: x > 0\}$ que satisfaz à equação $f(xy) = f(x) + f(y)$. Mostre que $f(x) \equiv 0$ ou $f(x) = a \log x$. (Sugestão: mostre que se $a > 0$ e x é um real qualquer então $f(a^x) = xf(a)$. Tome $a = e$ e faça $y = e^x$ para obter $f(y) = (\log y)\, f(e)$).

EXERCÍCIO 17 - Mostre que a função identicamente zero é a única função contínua que satisfaz a equação $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todos x e y reais.

6.3 - Potências irracionais

Na seção 1.4 definimos as potências a^r, onde a é um real positivo e r é um número racional. Até agora não atribuímos sentido a expressões como $2^{\sqrt{2}}$. Isso é o que faremos a seguir.

DEFINIÇÃO - Se $a > 0$ e b é um número real qualquer, define-se

$$(1) \qquad a^b = e^{b \log a},$$

onde o segundo membro de (1) tem um sentido dado pela relação (9) da seção 6.2.

Observação: No caso de $b = r$, r um racional, a definição acima coincide com o sentido já dado a a^r, pois, usando a relação (19) da secção 6.1 temos

$$e^{r \log a} = E(r \log a) = E(\log a^r) = a^r,$$

onde se usou o fato de E ser a inversa do $\log$ para obter a última igualdade.

Propriedades:

$$(2) \qquad a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}, \quad a > 0$$

$$(3) \qquad (a^b)^c = a^{bc}, \quad a > 0$$

Demonstração de (2): Usando a relação (6) da seção 6.2:

$$a^b \cdot a^{b'} = E(b \log a)E(b' \log a) = E(b \log a + b' \log a)$$
$$= E((b + b')\log a) = a^{b+b'}.$$

Demonstração de (3): Primeiro, usando (1) e a relação (1) da seção 6.2 obtemos

(4) $$(e^x)^b = e^{b \log e^x} = e^{bx}.$$

Agora, para o caso geral, usamos (1), a seguir (4) e (1) novamente:

$$(a^b)^c = (e^{b \log a})^c = e^{bc \log a} = a^{bc}.$$

6.4 - A função a^x

Para $a > 0$, podemos definir a função

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to a^x = e^{x \log a}$$

Em virtude de (1) da seção 6.3 temos:

$$f = E \circ h$$

onde $h(x) = x \cdot \log a$. Logo, f é contínua, derivável e

$$f'(x) = E'(h(x)) \cdot h'(x) = E(x \log a) \cdot \log a,$$

isto é,

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \log a. \tag{1}$$

O gráfico de a^x é como na figura 39(a), se $a < 1$, e como na figura 39(b), se $a > 1$. Se $a = 1$, então, $a^x \equiv 1$.

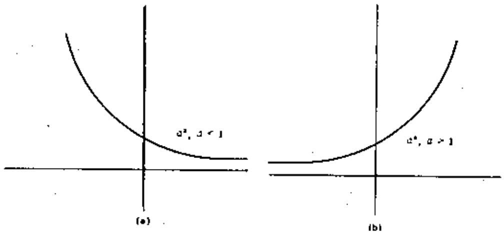


Fig. 39

EXERCÍCIO 1 - Aplique a fórmula de Taylor à função e^x e prove que $e^x \geq 1+x$ para todo x. Igualdade ocorre se, e só se, $x = 0$.

EXERCÍCIO 2 - Mostre que a equação $e^x - x - \frac{1}{2}x^2 = 1$ tem apenas a solução $x = 0$. (Sugestão: seja $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ e estude pontos extremos, pontos de inflexão, etc).

EXERCÍCIO 3 - (Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica). Sejam $a_1,\ldots,a_n$ números reais positivos, e $p_1,\ldots,p_n$ reais não negativos tais que $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Mostre que $\prod_{j=1}^{n} a_j^{q_j} \leq \sum_{j=1}^{n} p_j a_j$.
(Sugestão: Seja x_j tal que $a_j = (1+x_j)A$ onde $A =$

$= \sum_{j=1}^{n} a_j$. Aplicando a desigualdade do Exercício 1 obtemos $\prod_{j=1}^{n} a_j^{p_j} = A \prod_{j=1}^{n} (1+x_j)^{p_j} \leq Ae^{\Sigma p_j x_j}$ e mostre que $\Sigma p_j x_j = 0$.)

6.5 - A função x^b

Seja b um número real dado. A função potência, x^b, pode agora ser definida:

$$g\colon R^+ \to R$$
$$x \to x^b = e^{b \log x}$$

g é uma função composta: $g = E \circ p$, onde $p(x) = b \log x$. Então, g é contínua e derivável, e

$$g'(x) = E'(p(x)) \cdot p'(x) = E(b \log x)\frac{b}{x}$$

i.e.

$$\frac{d}{dx}(x^b) = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}, \quad x > 0.$$

6.6 - O número e como limite

A relação (11) da seção 6.1 para $x_0 = 1$ e $x = 1 + h$, $h > 0$, nos dá

(1) $$\frac{1}{1+h} \leq \frac{\log(1+h)}{h} \leq 1.$$

Usando (14') da seção 6.1, obtém-se uma desigualdade análoga para $h < 0$. Estas desigualdades implicam que a função

$$f(x) = \frac{1}{x}\log(1+x), \quad x > -1,\ x \neq 0$$

$$f(0) = 1$$

é contínua na origem, pois, $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = 1.$

Como

$$f(x) = \log(1+x)^{1/x}$$

e $f(x) \to 1$ quando $x \to 0$, segue-se que

$$\log(1+x)^{1/x} \to 1 \quad \text{quando} \quad x \to 0,$$

e daí

$$(1+x)^{1/x} \to e, \quad \text{quando} \quad x \to 0.$$

Portanto,

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Em particular

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

EXERCÍCIO 1 - Prove as seguintes relações

(i) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

(iii) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

EXERCÍCIO 2 - Mostre que, na desigualdade (1) da seção 6.6, podemos substituir os sinais $\leq$ por $<$.

Tomando $h = \frac{1}{m}$ naquela desigualdade temos

$$\frac{m}{m+1} < \log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1,$$

e, daí:

(*) $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Escreva a desigualdade (*) para $m = 1,2,\ldots,n-1$, e, por multiplicação das desigualdades resultantes, obtenha

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Obtém-se, assim a seguinte estimativa para o fatorial de n:

$$n^n e^{-n+1} < n! < n^{n+1} e^{-n+1}.$$

EXERCÍCIO 3 - Mostre que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0.$

6.7 - A constante de Euler-Mascheroni

A sucessão

$$(1) \qquad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge e seu limite, C, é conhecido pelo nome de <u>constante de Euler-Mascheroni</u>. De fato, considere a função $f(x) = 1/x$ para $x > 0$. Segue-se que

$$(2) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}\,dx < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1},$$

pois, o primeiro membro é uma soma inferior de $1/x$ no intervalo $[1,n]$ e o último membro é uma soma superior. (O leitor poderá fazer uma figura para se convencer da desigualdade (2)). Logo, de (2), efetuando a integração, segue-se

$$(3) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

De (3) segue-se que $0 < a_n < 1$. Por outro lado, temos

$$(4) \qquad a_n - a_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1},$$

e como

$$\log(n + 1) - \log n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{n+1},$$

segue-se que $a_n - a_{n+1} > 0$, ou seja, a sucessão $\{a_n\}$ é decrescente. Usando o Teorema 1.4 concluímos que $\{a_n\}$ converge.

<u>Observação</u>: É um problema aberto determinar se a constante C é racional ou irracional.

6.8 - <u>Uma equação diferencial</u>

Uma função $f(x)$ satisfaz a uma equação diferencial da forma

$$y' = ay, \tag{1}$$

onde a é um número real dado, se $f'(x) = a\, f(x)$.

Vimos na seção 6.2 que a função e^x satisfaz a equação diferencial $y' = y$. É fácil ver que qualquer função da forma ce^{ax}, onde c é uma constante arbitrária satisfaz à equação (1). Provaremos agora a recíproca desse fato: toda solução da equação (1) é dessa forma. De fato suponhamos que $f(x)$ seja outra solução de (1); então

$$(f(x)e^{-x})' = f'(x)e^{-ax} - f(x)e^{-ax} = 0,$$

de onde se segue, em virtude do Teorema 3.10, que $f(x)e^{-ax} = c = \text{const.}$ ou seja $f(x) = ce^{ax}$. Resumindo:

"$f(x)$ é uma solução da equação diferencial $y' = ay$ se e só se $f(x) = ce^{ax}$, para qualquer c real".

Vê-se assim que a equação (1) pode ter várias soluções (uma infinidade): para cada c se tem uma solução. Entretanto se for fixado o valor que a solução deve ter para $x = 0$, vemos que só há uma tal solução; exemplo, a solução do problema

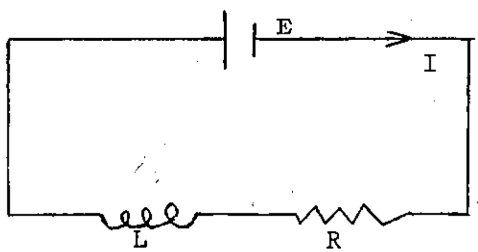
$$y' = ay \qquad y(0) = 1$$

que é conhecido como um problema de valor inicial, tem uma e somente uma solução: e^{ax}.

EXERCÍCIO 1 - Mostre que as funções e^x, e^{-x}, senh x, cosh x são soluções da equação $y'' = y$.

EXERCÍCIO 2 - Mostre que as funções sen x e cos x são soluções da equação $y'' = -y$.

EXEMPLO 1 - (Um circuito elétrico simples). Imaginemos um circuito elétrico com três elementos:



(i) uma fonte de voltagem E, que pode ser uma bateria ou um gerador, que produz uma corrente $I(t)$, que depende do tempo t; (ii) um resistor de resistência R que se opõe à corrente produzindo uma queda de voltagem, que é dada pela lei de Ohm: $E_R = RI$. (iii) um indutor de indutância L, que se opõe a variações na corrente e produz quedas de voltagem: $E_L = L\,\frac{dI}{dt}$. A lei de Kirchhoff estabelece que a soma algébrica das voltagens é zero:

$$E - E_R - E_L = 0$$

ou seja

(2) $$L\,\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Fazendo $f(t) = I(t) - \frac{E}{R}$ obtemos que

$$f'(t) = -\frac{R}{L}\,f(t).$$

Pelo visto acima $f(t) = ce^{-\frac{R}{L}t}$, ou seja

$$I(t) = \frac{E}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

A constante c pode ser determinada se admitirmos que inicialmente (i.e. para $t = 0$) a corrente $I(t)$ é 0. Então

$$I(t) = \frac{E}{R}\,(1-e^{-\frac{R}{L}t}).$$

EXEMPLO 2 - (Reações químicas). Supomos que numa reação química o número de moléculas que se decompõem por unidade de tempo é proporcional ao número de moléculas presentes. Fenômenos dessa natureza são chamados reações químicas de primeira ordem. Então se inicialmente (para $t = 0$) existem x_o gramas da substância, teremos que o número de gramas $x(t)$ ainda existentes no instante t é dado pela equação $x'(t) = -kx(t)$, $k > 0$. Pelo visto acima $x(t) = x_o e^{-kt}$. Um dos exemplos mais interessantes de reação química de primeira ordem é o da <u>desintegração radioativa</u>. Neste caso a constante k é determinada a partir da chamada "meia vida" T que é o tempo necessário para a substância reduzir-se à metade: $\frac{a}{2} = a\, e^{-kT}$, onde a é uma certa quantidade de substância; daí $k = (\log 2)/T$. Para alguns elementos radioativos, T é conhecido, e o conhecimento de $x(t)$ e x_o permite a determinação de t na expressão $x(t) = x_o\, e^{-kT}$. Isso é usado para determinar idade de rochas usando a desintegração do rubídio em estrôncio, cuja meia vida é 50 bilhões de anos. Para estabelecer datas de fósseis é necessário usar substâncias de meia vida mais curta. O processo utilizado é do radio carbono, descoberto por Willard Libby em 1950, o que lhe valeu o Prêmio Nobel de Química em 1960.

caso obtemos apenas uma informação sobre o comportamento da função perto desse ponto.

Há outras indeterminações, como por exemplo $\frac{\infty}{\infty}$ que ocorre quando $\lim_{x \to a} \psi(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} \psi(x) = \infty$. Outros tipos de indeterminações, serão estudados mais adiante.

A regra de L'Hôspital que daremos a seguir é um modo eficiente de levantar indeterminações. É curioso que a tal regra é, em verdade, devida a Jean Bernoulli (1667-1748), famoso matemático suisso pertencente a uma família que teve 6 gerações consecutivas de matemáticos. Bernoulli, quando de sua estada em Paris em 1692, teve por discípulo um jovem marquês francês, G.F.A. de L'Hôspital (1661-1704), o qual fez o seguinte "negócio" com Bernoulli. Em retribuição a um salário regular, Bernoulli se comprometia a enviar a L'Hôspital descobertas matemáticas que seriam usadas pelo marquês ao seu bel prazer. A regra de L'Hôspital é uma das tais descobertas. L'Hôspital foi muito conhecido dos estudiosos de Matemática do século XVIII em virtude de seu livro, publicado em 1696, "Analyse des infiment petits", onde um dos postulados básicos é o seguinte: "duas quantidades que diferem por uma quantidade infinitamente pequena são iguais". Certamente esse era o espírito da época, mas o postulado enunciado acima carece de qualquer rigor e precisão. Entretanto, essas idéias de quantidades infinitesimais dominariam a Matemática até o século passado.

TEOREMA 3.15 - Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo (a,b). Suponha que g e g' são diferentes de zero em (a,b), e que uma das duas possibilidades ocorra:

(i) $$\lim_{x\to b} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b} g(x) = 0$$

ou

(ii) $$\lim_{x\to b} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b} g(x) = \infty.$$

Então, se

(1) $$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

segue-se que

(2) $$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .$$

<u>Observações</u>: Em (ii) os limites podem ser $+\infty$ ou $-\infty$.

As funções $g(x)$ e $g'(x)$ não necessitam ser diferentes de zero em todo (a,b); como estamos interessados em limites, basta tomá-las diferente de zero perto de b. O limite ℓ pode ser ∞. Os limites tomados são limites à esquerda. Resultados análogos valem acima. Logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{2x},$$

caso o limite exista. A seguir, observamos que $f_1(x) = \text{sen } x$ e $g_1(x) = 2x$ satisfazem também as hipóteses do teorema. Daí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Para facilitar e encurtar a resolução desses problemas, usamos a notação: $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Assim no caso anterior temos

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \sim \frac{\text{sen } x}{2x} \sim \frac{\cos x}{2}$$

e daí

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLO 2 - Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\text{sen } x}{x^3}$.

Fazendo derivações $\frac{x-\text{sen } x}{x^3} \sim \frac{1-\cos x}{3x^2} \sim \frac{\text{sen } x}{6x} \sim \frac{\cos x}{6}$ e daí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen } x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

EXEMPLO 3 - Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^n}{e^x-1}$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x-1}$. Fazendo as derivações $\frac{x^n}{e^x-1} \sim \frac{nx^{n-1}}{e^x}$ e daí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{e^x-1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x-1} = 0.$$

EXEMPLO 4 - Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\text{sen } x}{x}$.

Fazendo as derivações

$$\frac{x-\text{sen } x}{x} \sim \frac{1-\cos x}{1},$$

e como $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\cos x)$ não existe, concluímos que o limite pedido não existe.

EXEMPLO 5 - Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\text{sen}(\frac{1}{x})}{\text{tg } x}$.

Fazendo as derivações

$$\frac{x^2-\text{sen } \frac{1}{x}}{\text{tg } x} \sim \frac{2x \text{ sen } \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\sec^2 x}$$

e como o limite do 2º numerador não existe, segue-se que o limite pedido não existe.

EXERCÍCIO 1 - Investigue os seguintes limites

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-a^x}{1-b^x}$, $a,b > 0$. (iv) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx}$.

EXERCÍCIO 2 - Seja f uma função derivável em (a,∞) tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = A$. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$.

EXERCÍCIO 3 - Seja f derivável em (a,∞) e tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ e $\lim_{x\to\infty} f'(x) = B$. Mostre que $B = 0$.

EXERCÍCIO 4 - Seja f derivável em (a,∞) e tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = A$. Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ e $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

EXERCÍCIO 5 -(<u>A indeterminação $0.\infty$.</u>) Sejam f e g definidadas em (a,b), onde b pode ser ∞, e tais que $\lim_{x\to b} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to b} g(x) = \infty$. Neste caso o estudo de $\lim_{x\to b} f(x)\, g(x)$ pode ser reduzido aos casos já estudados fazendo-se $f(x).g(x) = \dfrac{f(x)}{1/g(x)}$. Calcule $\lim_{x\to 0} x^{\alpha}.e^{\frac{1}{x}}$, $\alpha > 0$.

CAPÍTULO 7

RELAÇÕES ENTRE DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

O problema inverso da derivação consiste em dada uma função $f: I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I procurar uma função $F: I \to \mathbb{R}$ que seja derivável em I e tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Uma tal função F é chamada uma primitiva de f. Usa-se também as terminologias <u>integral indefinida</u> de f e <u>antiderivada</u> de f para designar uma tal função F. As questões centrais relativas ao problema inverso da derivação, as quais serão estudadas no presente capítulo, são:

(i) existência de uma primitiva;

(ii) se existem primitivas, o que se pode dizer sobre o conjunto formado por todas elas.

7.1 - <u>Existência de primitivas</u>

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável. Em virtude do Teorema 5.13, podemos definir uma função $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, pela expressão

(1) $$F(x) = \int_a^x f$$

para todo x em $[a,b]$.

TEOREMA 7.1 - A função $F(x)$ definida em (1) é contínua em $[a,b]$.

Demonstração: Consideremos pontos x_1 e x_2 em $[a,b]$ e tais que $x_1 < x_2$. Então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f - \int_a^{x_1} f = \int_{x_1}^{x_2} f .$$

Se k é número real positivo tal que $|f(x)| \leq k$, para todo x em $[a,b]$, temos usando o Teorema 5.11 e o Corolário 5.4:

(2) $$|F(x_2)-F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \int |f| \leq k(x_2-x_1).$$

A desigualdade (2) implica a continuidade de F.

TEOREMA 7.2 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável, e suponhamos que f seja contínua em um ponto $x_o \in (a,b)$. Então, a função F definida em (1) é derivável em x_o e $F'(x_o) = f(x_o)$.

Demonstração: Tomemos a razão incremental de F em x_o, para $x > x_o$:

$$q(x) = \frac{F(x)-F(x_o)}{x-x_o} = \frac{1}{x-x_o}\left[\int_a^x f - \int_a^{x_o} f\right] = \frac{1}{x-x_o} \int_{x_o}^x f .$$

Para obter uma estimativa para $q(x) - f(x_o)$, escrevemos

$$q(x) - f(x_o) = \frac{1}{x-x_o} \int_{x_o}^x f - f(x_o) ,$$

pois $f(x_o)$ é uma constante. Usando o Corolário 5.5:

$$|q(x)-f(x_o)| \leq \sup\{|f(t)-f(x_o)|: t \in [x_o,x]\}.$$

Se $x < x_o$, obtemos uma desigualdade semelhante. Juntando as duas obtemos

(3) $$|q(x)-f(x_o)| \leq \sup\{f(t)-f(x_o)|:|t-x_o| \leq |x-x_o|\},$$

onde $x < x_o$ ou $x > x_o$. Usando a continuidade de f no ponto x_o, obtemos que dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que se $|x-x_o| < \delta$, $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Portanto para $|x-x_o| < \delta$ obtemos de (3) que $|q(x) - f(x_o)| \leq \varepsilon$, o que conclue a demonstração. (Será que sua sensibilidade está suficientemente aguçada para você ter percebido que o "$<\varepsilon$" tornou-se "$\leq\varepsilon$" ?).

Observação

Vê-se da demonstração que, se a função é contínua na extremidade a do intervalo (i.e. $f(a+) = f(a)$), então $F'_+(a) = f(a)$. Uma assertiva semelhante para a extremidade b.

COROLÁRIO 7.1 - Se a função f é contínua em todos os pontos de (a,b), então $F'(x) = f(x)$ para todo x em (a,b). (Isto é, a função F definida em (1) é uma primitiva de f.)

COROLÁRIO 7.2 - Se a função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua para todo x em $[a,b]$, então $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a,b]$. (Entende-se que, para $x = a$, temos $F'_+(a) = f(a)$, e análogo para $x = b$).

Observe que a continuidade de f em x_o é apenas uma condição suficiente para a existência da derivada

$F'(x_o)$. O Exemplo 2 abaixo mostra que a condição não é necessária. O Exemplo 1 mostra que algum tipo de condição em x_o é necessária para a existência da derivada em x_o.

EXEMPLO 1 - Seja $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 2 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tal f é obviamente integrável, pois é seccionalmente contínua. Com um cálculo fácil, obtemos para a integral $F(x) = \int_0^x f(t)dt$:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 2x-1 & \text{para} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 1$, a função F não é derivável.

EXEMPLO 2 - Seja $F: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{para} \quad x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

A função F é contínua, tem derivada em todos os pontos e

$$(4) \qquad \begin{cases} F'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0 \\ \\ F'(0) = 0. \end{cases}$$

Entretanto, F' não é contínua para $x = 0$. No entanto, F' é integrável em $[-1,1]$. Conclusão: a função $f = F'$ é limitada integrável não contínua e tem primitiva.

Uma comparação dos dois exemplos apresentados acima conduz a uma conclusão que pode parecer estranha. De fato, enquanto uma função aparentemente simples como a função escada não tem primitiva, a função definida em (4), a qual tem uma descontinuidade de 2ª espécie na origem, possui uma primitiva. Essa situação, porém, nada tem de acidental como mostra o Corolário 7.3 abaixo. Antes de demonstrá-lo, mostraremos que a derivada de uma função, derivada esta que pode não ser contínua, tem uma propriedade em comum com as funções contínuas. Isto é, a derivada tem a propriedade do valor intermediário, cf. Teorema 2.13.

A dificuldade de caracterizar as funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que têm primitiva F em $[a,b]$ é uma das deficiências da integral de Riemann, aqui estudada. Esse problema tem solução satisfatória dentro de uma teoria mais geral de integral, creada por Lebesgue no começo deste século. O leitor interessado encontrará a teoria da integral de Lebesgue nas referências [2] e [10].

TEOREMA 7.3 - <u>Seja</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>uma função real defini-</u>

da em um intervalo fechado $[a,b]$, a qual é derivável em todos os pontos de $[a,b]$. (Cf. seção 3.7 para a definição de função derivável em um intervalo fechado.) Então, a função $f': [a,b] \to \mathbb{R}$ assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

Demonstração: Demonstremos a proposição para o caso de $f'(a) < f'(b)$. O outro caso é demonstrado de modo análogo. Consideremos as funções auxiliares $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\beta: [a,b] \to \mathbb{R}$ assim definidas:

$$\alpha(x) = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \leq x \leq (a+b)/2 \\ 2x-b, & \text{se} \quad (a+b)/2 \leq x \leq b \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 2x-a, & \text{se} \quad a \leq x \leq (a+b)/2 \\ b, & \text{se} \quad (a+b)/2 \leq x \leq b \end{cases}$$

(Trace os gráficos dessas funções.) É claro que $a \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq b$, e, portanto, pode-se definir a função

$$g(x) = \frac{f(\beta(x)) - f(\alpha(x))}{\beta(x) - \alpha(x)} \tag{5}$$

para $x \in (a,b)$. É fácil ver que $g(a+) = f'(a)$ e $g(b-) = f'(b)$. Por conseguinte, definindo $g(a) = g(a+)$

e $g(b) = g(b-)$, a função g resulta contínua em $[a,b]$. Logo, dado λ, com $f'(a) < \lambda < f'(b)$, existe $x_o \in [a,b]$ tal que

$$(6) \qquad g(x_o) = \lambda,$$

de acordo com o Teorema 2.13. Agora considere a função f restrita ao intervalo fechado $I = [\alpha(x_o), \beta(x_o)]$. Sendo f derivável em I, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que existe $c \in I$ tal que

$$(7) \qquad f(\beta(x_o)) - f(\alpha(x_o)) = f'(c)(\beta(x_o) - \alpha(x_o)).$$

Finalmente, de (5), (6) e (7) segue-se que $f'(c) = \lambda$, para um $c \in [a,b]$, pois $I \subset [a,b]$. A proposição está demonstrada.

COROLÁRIO 7.3 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a,b]$. Então, $f': [a,b] \to \mathbb{R}$ não pode ter descontinuidades de 1ª espécie.

Demonstração: Assuma, por contradição, que f' tem uma descontinuidade de 1ª espécie em $c \in [a,b]$, e suponha que $f'(c+) - f'(c-) = d > 0$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos

$$f'(x) < f'(c-) + d/3, \quad \text{se} \quad x \in (c-\varepsilon, c)$$
$$f'(x) > f'(c+) - d/3, \quad \text{se} \quad x \in (c, c+\varepsilon).$$

Portanto, a função $f': [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ não assume todos os valores entre $f'(c-)$ e $f'(c+)$, o que contradiz o Teorema 7.3.

OBSERVAÇÃO 1 - Como se viu no Exemplo 2 acima, a derivada pode ter descontinuidades de 2ª espécie.

OBSERVAÇÃO 2 - Nesta seção estudamos a questão de existência de uma primitiva de uma dada função f, tentando construí-la com $\int_a^x f$. É natural perguntar se não há um outro processo de determinar uma primitiva. Na próxima seção, mostraremos que se existe uma primitiva de f, então ela é da forma $\int_a^x f$ + constante. Esse resultado é o "teorema fundamental do cálculo".

7.2 - O Teorema Fundamental do Cálculo

Inicialmente faremos uma observação sobre a coleção das primitivas de uma dada função. Se F é uma primitiva de f, então, a função F + const é também uma primitiva. Provamos agora o seguinte resultado:

TEOREMA 7.4 - Se F e G são duas primitivas de uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, então, $F - G$ é uma função constante.

<u>Demonstração</u>: Como $F' = f$ e $G' = f$, então, $(F-G)' = 0$. Pelo Teorema 3.10 segue-se que $F - G$ é uma constante.

<u>Observação</u>: Este teorema mostra que se conhecermos uma primitiva de f, então, todas as outras serão obtidas adicionando-se constantes a ela.

Vimos na seção 7.2 que se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então,

$$F(x) = \int_a^x f$$

é uma primitiva. Seja $G(x)$ outra primitiva de f. Então, existe uma constante k tal que $G(x) = k + F(x)$. Logo,

$$G(x) = k + \int_a^x f \,,$$

Tomando os valores de G em a e b temos

$$G(a) = k, \quad G(b) = k + \int_a^b f.$$

Daí se segue que

(1) $$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Resumindo, (1) expressa o seguinte: se f é uma função <u>contínua</u> em $[a,b]$ e se G é uma primitiva qualquer de f, então, a integral de f em $[a,b]$ é $G(b)$ -

$- G(a)$. Tal resultado é também válido mesmo se f não é contínua, mas apenas integrável. Esse é o conteúdo do teorema fundamental do cálculo que damos a seguir.

TEOREMA 7.5 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável. Se G é uma primitiva qualquer de f, então,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a). \tag{2}$$

Observação: Este teorema explicita a íntima relação entre o cálculo integral e o cálculo diferencial. De um lado temos a integral e do outro temos uma primitiva que nada mais é que uma solução da equação diferencial $y' = f(x)$. Talvez não seja demasiado explicar que na equação diferencial $y' = f(x)$, a função $f(x)$ é dada e a função $y = y(x)$ é a incógnita; uma função $y(x)$ é solução da equação diferencial $y' = f(x)$ se ela for derivável em (a,b) e sua derivada y' for igual a f.

Demonstração do Teorema 7.5: A idéia é aplicar o Teorema 5.12 que dá uma aproximação da integral de f por somas de Riemann. Seja $\pi = \{x_o = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. A função G é contínua em $[x_{j-1},x_j]$ e derivável em (x_{j-1},x_j) para $j = 1,2,\dots,n$. Logo, aplicando o teorema do valor médio, temos que existe $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tal que $G(x_j) - G(x_{j-1}) = G'(t_j)(x_j - x_{j-1})$. Tomando o somatório de 1 a n e lembrando que $G' = f$ em (a,b) temos

$$(3) \qquad G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Portanto se escolhermos uma sucessão de partições $\{\pi_k\}$ de $[a,b]$ tais que $\|\pi_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$, teremos que as somas de Riemann correspondentes, no segundo membro de (3), convergem a $\int_a^b f$. Como o primeiro membro de (3) independe da particular partição, o teorema fica provado.

<u>Primitivas de algumas funções</u>. Usaremos a notação $\int f$ para designar uma primitiva da função f. Usando resultados dos Capítulos 3, 4 e 6, temos

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1, \quad \text{qualquer } x \text{ real},$$

$$\int x^{-1} = \log x + c, \qquad x > 0.$$

$$\int \cos x = \operatorname{sen} x + c,$$

$$\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c.$$

Usando essas primitivas podemos obter primitivas de outras funções. Em verdade, pode-se desenvolver um extensivo cálculo de primitivas. Dado o objetivo do presente trabalho, não entraremos nesse problema. O leitor, que não seja familiar com esse assunto, poderá estudá-lo em uma das referências seguintes [1], [8], [11] ou [12].

<u>Da aplicabilidade do Teorema 7.5</u>. O cálculo da integral de uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pode ser feito, em virtude do Teorema 7.5, usando uma primitiva G de f.

EXEMPLOS:

(i) $$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

(ii) $$\int_0^\pi \cos x dx = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0.$$

(iii) $$\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

7.3 - <u>Os operadores de derivação e de integração</u>

Vamos representar por $\mathcal{I}$ a coleção de todas as funções integráveis limitadas em $[a,b]$, por $\mathcal{C}$ a coleção de todas as funções contínuas em $[a,b]$, por $\mathcal{D}$ a coleção de todas as funções deriváveis em $[a,b]$, e por $\mathcal{F}$ a coleção de todas as funções em $[a,b]$. Uma função de uma dessas coleções em outra é chamada um <u>operador</u>. Um exemplo é o operador de <u>integração</u>

$$T: \mathcal{J} \to \mathfrak{F}$$
$$f(x) \longmapsto F(x) = \int_a^x f \ ;$$

que $T(f) \in \mathcal{C}$ é o conteúdo do Teorema 7.1. Se $f \in \mathcal{C}$, então o Teorema 7.2 nos diz que $T(f) \in \mathfrak{D}$. Um outro exemplo de operador é o de derivação

$$\begin{array}{lcl} D: \mathfrak{D} & \to & \mathfrak{F} \\ \ f(x) & & f'(x). \end{array}$$

TEOREMA 7.2-(Outro enunciado). O operador $D \circ T: \mathcal{C} \to \mathfrak{F}$ é a identidade, isto é, $D(Tf) = f$, ou ainda

(1) $$\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x), \text{ para } f \text{ contínua.}$$

<u>Pergunta</u>: $T \circ D: \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}$ é a identidade?

Bom, em primeiro lugar, devemos investigar se $Df \in \mathcal{J}$ para todo $f \in \mathfrak{D}$. E o seguinte exemplo mostra que nem sempre isso acontece.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Apesar da resposta à pergunta anterior ser negativa, segue-se do Teorema 7.5

TEOREMA 7.6 - Se $f \in \mathcal{D}$ e $f' \in \mathcal{J}$, então

(2) $$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Em particular, (2) é verdade se f for continuamente derivável, isto é, $f' \in \mathcal{C}$.

Atenção: Compare (1) e (2).

EXERCÍCIO 1 - Seja $u(x)$ uma função derivável em (a,b) e f contínua em $\mathbb{R}$. Defina $F(x) = \int_c^{u(x)} f$. Mostre que F é derivável em (a,b) e $F'(x) = f(u(x))u'(x)$. Se, além disso, $v(x)$ é também uma função derivável em (a,b) mostre que $\int_{v(x)}^{u(x)} f$ é derivável e calcule sua derivada.

EXERCÍCIO 2 - Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \int_0^x f$. Mostre que $f \equiv 0$. (Sugestão: use o Teorema 7.2 para obter $f'(x) = f(x)$ e depois use o que você sabe sobre exponenciais.)

7.4 - Mudança de variável nas integrais

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e seja $v: [c,d] \to R$ uma função derivável, tal que $v(c) = a$, $v(d) = b$ e v' seja integrável. Demonstraremos que

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(v(t))v'(t)dt,$$

onde o primeiro membro é uma notação (conveniente para enfatizar a variável de integração) para a integral de f em $[a,b]$ que estávamos designando por $\int_a^b f$. De fato, se $g(y) = \int_a^y f(x)dx$, segue-se do Teorema 7.2 que $g'(y) = f(y)$ para todo $y \in [a,b]$. Por outro lado, usando a regra da cadeia, Teorema 3.6, obtemos

$$(2) \qquad \{g(v(t))\}' = g'(v(t))v'(t) = f(v(t))v'(t).$$

A relação (2) expressa que $g(v(t))$ é uma primitiva de $f(v(t))v'(t)$ para t em $[c,d]$ e portanto aplicando o Teorema 7.5 temos

$$\int_c^d f(v(t)v'(t)dt = g(v(d)) - g(v(c)),$$

de onde (1) seguir-se-á imediatamente, usando os valores de v dados nas extremidades do intervalo $[c,d]$, e usando a definição da função g.

<u>Observação</u>: Nas aplicações, a expressão do integrando $f(x)$ é dada e aí se põe o problema de descobrir $v(t)$ para obter a 2ª integral em (1). É mais fácil e mais prático, entretanto, obter a inversa de v: $t = \varphi(x)$. Daí, se tomamos φ <u>monótona</u> $x = \varphi^{-1}(t) = v(t)$ e pelo teorema da derivada da função inversa, Teorema 3.5:

$$v'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}.$$

Portanto (1) se torna

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(t)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} dt$$

e é nessa forma que ela é mais adaptável para as aplicações.

EXEMPLO 1 - Para calcular $\int_a^b \frac{1}{Ax+B} dx$, onde $A > 0$ e $Ax + B \neq 0$ para $x \in [a,b]$, fazemos $t = Ax + B = \varphi(x)$. Daí $v'(t) = \frac{1}{A}$. Portanto

$$\int_a^b \frac{1}{Ax+B} dx = \int_{aA+B}^{bA+B} \frac{1}{t}\frac{1}{A} dt = \frac{1}{A}\big|\log|bA+B| - \log|aA+B|\big|.$$

EXEMPLO 2 - Por um raciocínio semelhante prove

$$\int_a^b (Ax+B)^{\alpha}dx = \frac{1}{A(\alpha+1)}\left|(Ab+B)^{\alpha+1} - (Aa+B)^{\alpha+1}\right| ,$$

onde $\alpha \neq -1$ e $Ax + B > 0$ para $x \in [a,b]$.

EXERCÍCIO - Calcule as integrais

$$\text{(i)} \int_0^1 \operatorname{sen}(Ax+B)dx; \quad \text{(ii)} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}x\, dx; \quad \text{(iii)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}dx$$

Sugestão: Para (ii) faça $t = \cos x$ e para (iii) escreva $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ e faça $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

7.5 - Integração por partes

Sejam f e g deriváveis em $[a,b]$ e tais que f' e g' são integráveis (limitadas) em $[a,b]$. Então, tem-se que

$$(1) \qquad \int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

onde $h\Big|_a^b = h(b) - h(a)$.

A demonstração de (1) é imediata. Basta lembrar que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Portanto fg é uma primitiva de $f'g + fg'$, e aplicando o Teorema 7.5, a fórmula (1) segue-se.

EXERCÍCIO 1 - Calcule as integrais

$$\int_0^1 x\, e^x dx, \quad \int_0^1 x \text{ sen } x\, dx, \quad \int_{-1}^1 x \cos x\, dx$$

(Sugestão use (1) com $f(x) = x$).

EXERCÍCIO 2 - Calcule as integrais

$$\int_0^1 e^x \cos x\, dx, \quad \int_0^1 e^x \sin x\, dx$$

(Sugestão: performe duas integrações por partes em cada uma das integrais.

EXERCÍCIO 3 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua juntamente com suas derivadas até ordem $n+1$. Mostre que para x_o e x no intervalo $[a,b]$ temos

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_o)(x-x_o)^j + R_{n+1}$$

onde

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{x_o}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

(Essa é a fórmula de Taylor com o resto na forma integral. Confronte com o Teorema 3.12). (Sugestão: aplique o Teorema 7.5 e temos

$$f(x) = f(x_o) + \int_{x_o}^{x} f'(t)dt.$$

A seguir aplique a fórmula de integração por partes para escrever

$$\int_{x_o}^{x} f'(t)dt = - \int_{x_o}^{x} f'(t)(x-t)'dt =$$

$$-f'(t)(x-t)\Big|_{x_o}^{x} + \int_{x_o}^{x} (x-t)f''(t)dt$$

e assim sucessivamente.)

EXERCÍCIO 4 - Aplique o Teorema 7.8 da seção 7.7 e obtenha o resto da fórmula de Taylor na forma do Teorema 3.12. Tal resto é conhecido como resto de Lagrange.

7.6 - Teoremas do valor médio para integrais

O resultado seguinte é conhecido como o primeiro teorema do valor médio para integrais.

TEOREMA 7.7 - Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f. \tag{1}$$

Demonstração: A função $F(x) = \int_a^x f$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b); logo, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a,b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$. Em virtude do Teorema 7.2 $F'(c) = f(c)$ e a relação (1) se segue.

Um resultado semelhante ao anterior vale para integrais com um peso. Se $a_1,\dots,a_n$ são números reais, a média aritmética deles foi definida por $\frac{1}{n}\sum_{y=1}^{n} a_j$. Se, além disso, são dados números não negativos $p_1,\dots,p_n$ (os pesos), então $\sum_{j=1}^{n} p_j a_j / \sum_{j=1}^{n} p_j$ é a média ponderada dos números $a_1,\dots,a_n$. (Pelo menos um dos pesos deve ser positivo). De modo análogo a expressão no 2º membro de (1) pode ser definida como a média de f em $[a,b]$. E também, se $g(x) \geq 0$ é integrável e $\int_a^b g > 0$, definimos $\int_a^b fg / \int_a^b g$ como a média ponderada de f com peso g em $[a,b]$. O resultado seguinte se refere a ela.

TEOREMA 7.8 - Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $p(x) \geq 0$ integrável em $[a,b]$ com $\int_a^b p > 0$. Então existe $c \in [a,b]$ tal que

(2) $$f(c) = \frac{\int_a^b fp}{\int_a^b p}.$$

Demonstração: Sejam m e M respectivamente o mínimo e o máximo de f em $[a,b]$. Logo

$$(3) \qquad mp(x) \le f(x)p(x) \le Mp(x).$$

Integrando em (3) e dividindo por $\int_a^b p$, vemos que a média ponderada de f está entre m e M. Como f é contínua, segue-se do valor intermediário que existe um $c \in [a,b]$ tal que $f(c)$ é igual à média ponderada.

O resultado seguinte é o 2º teorema do valor médio para integrais.

TEOREMA 7.9 - Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona e $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$(4) \qquad \int_a^b fg = f(a)\int_a^c g + f(b)\int_c^b g .$$

<u>Demonstração</u>: (no caso de f ser derivável e f' ser integrável).

Defina $G(x) = \int_a^x g$. Então, aplicando integração por partes

$$(5) \quad \int_a^b fg = \int_a^b fG' = fG\Big|_a^b - \int_a^b f'G = f(b)G(b) - \int_a^b f'G.$$

Aplicando o Teorema 7.8 à última integral em (5):

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) - G(c)\int_a^b f'.$$

Finalmente, usando o Teorema 7.2

$$\int_a^b fg = f(b)G(b) - G(c)[f(b)-f(a)]$$
$$= f(a)G(c) + f(b)[G(b)-G(c)],$$

de onde (4) se segue.

Aplicações: Os teoremas acima são muitos úteis para obter estimativas de integrais que não podem ser calculadas explicitamente. Exemplo:

$$\int_a^b \frac{\text{sen } x}{x}\, dx \quad \text{para} \quad 0 < a < b.$$

Logo

$$\left|\int_a^b \frac{\text{sen } x}{x}\, dx\right| \le \frac{1}{a}(c-a) + \frac{1}{b}(b-c) \le \frac{b-a}{a}\ .$$

EXERCÍCIO 1 - Seja $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2$, ambas consideradas no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Mostre que não existe um ponto c desse intervalo para o qual (4) se verifica. Por que o Teorema 7.8 não vale nesse exemplo?

BIBLIOGRAFIA

(1) BERS, L. - Calculus, Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nova York (1969).

(2) JACY MONTEIRO, L.H. - Elementos de Álgebra (Coleção Elementos de Matemática - IMPA), Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, GB (1969).

(3) JOHNSON, R. e KIOKEMEISTER, F. - Calculus with Analytic Geometry, Allyn & Bacon, Inc., Boston, Mass. (1960).

(4) KLINE, M. (ed.) Mathematics in the Modern World, W.H. Freeman & Co., San Francisco, Calif.(1968). (Este livro contém 48 artigos sobre os mais variados temas em matemática, escritos por matemáticos famosos e publicados na revista Scientific American.)

(5) LANG, S. - First Course in Calculus.

(6) LANG, S. - Analysis I, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. (1968).

(7) LIMA, E.L. - Topologia dos Espaços Métricos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil (1953).

(8) MOISE, E. - Calculus, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. (1967).

(9) NACHBIN, L. - Conjuntos e Funções, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil (1968).

(10) RUDIN, W. - Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Co., Nova York, 2ª edição (1964).

(11) SEELEY, R. - Calculus of One Variable, Scott, Foresman & Co., Chicago, Ill. (1968).

(12) THOMAS, G. - Cálculo, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, Brasil, 2 vols. (1953).

(A edição americana foi publicada pela Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Massachusetts.)

(13) TAYLOR, A.E. - Introduction to Functional Analysis, John Wiley, Nova York (1958).