# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO

NELSON ONUCHIC

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO

por

NELSON ONUCHIC

Colaboradores:

Hildebrando Munhoz Rodrigues
Lourdes de la Rosa Onuchic
Plácido Zoéga Táboas

# I

## INTRODUÇÃO

O objetivo principal dêste trabalho é estudar propriedades de estabilidade das soluções de sistemas de equações diferenciais com retardamento.

No Capítulo I introduzimos o conceito de equação diferencial com retardamento. No Capítulo II apresentamos fatos básicos sôbre existência, unicidade e prolongamento de soluções, bem como sôbre continuidade em relação às condições iniciais. No Capítulo III damos diferentes conceitos de estabilidade e discutimos critérios de estabilidade, na linha do segundo método de Lyapunoff, para os diferentes conceitos de estabilidade. O conteúdo do Capítulo IV refere-se aos problemas de estabilidade e instabilidade de sistemas autônomos, tomando como instrumento fundamental o uso simultâneo dos conceitos de conjunto invariante e funcional de Lyapunoff. No Capítulo V estudamos um princípio de comparação, devido a J. Hale, para o estudo do comportamento das soluções, nas vizinhanças do infinito, de um sistema perturbado de um sistema de linear de equações com retardamento. A idéia básica é reduzir o problema de comportamento das soluções de um sistema de equa ções com retardamento ao problema do comportamento das soluções de uma equação diferencial ordinária escalar. Uma série de resultados de estabilidade é estabelecida usando o mencionado princípio de comparação.

Êste trabalho dependeu de auxílio concedido pelo CNPq. e pela FAPESP. Aos responsáveis por essas instituições os nossos agradecimentos.

NELSON ONUCHIC

Escola de Engenharia de São Carlos, USP

São Carlos, Julho de 1971

# ÍNDICE

# CAPÍTULO I

# INTRODUÇÃO AO PROBLEMA

## 1. EXEMPLO

Para um primeiro contacto, num caso bastante simples, do tipo de equações que consideraremos, vamos abordar a seguinte equação:

$\dot{x}(t) = f(t,x(t-1))$, $\cdot = \frac{d}{dt}$, onde $f(t,x)$ é suposta contínua para $t \geq 0$, $x$ real.

Não temos neste exemplo uma equação diferencial ordinária, uma vez que não se trata de uma equação do tipo $\dot{x}(t) = g(t,x(t))$ em que $\dot{x}(t)$ depende de $t$ e da função $x$ calculada no instante $t$. Vemos, no nosso caso, que $\dot{x}(t)$ depende de $t$ e da função $x$ calculada no instante $t-1$. Êste é um exemplo do que chamaremos, mais adiante, uma equação diferencial com retardamento. Vamos ver que neste tipo de equações a determinação da solução $x$ depende não apenas do conhecimento da mesma em um instante $t_o$, como no caso "bem comportado" de uma equação diferencial ordinária, mas sim do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a $t_o$. Em outras palavras, no caso das equações diferenciais ordinárias, dentro de certas exigências, o conhecimento de uma solução em um instante $t_o$ é suficiente para determinar a solução. No caso das equações diferenciais com retardamento isto não ocorre. É preciso conhecer-se um certo passado da solução anterior a $t_o$. Vamos ver isto no exemplo que estamos abordando.

Pomos o seguinte problema:

Determinar a função $x(t)$, definida em $[0,\infty)$, tal que $\dot{x}(t) = f(t,x(t-1))$ para $t \geq 1$ e $x(t) = x_o(t)$ para $0 \leq t \leq 1$, onde $x_o(t)$ é suposta contínua em $[0,1]$.

Para $1 \leq t \leq 2$, a solução, que denotamos por $x_1(t)$ satisfaz

$$\dot{x}_1(t) = f(t,x_o(t-1)), \quad x_1(1) = x_o(1),$$

e, portanto,

$$x_1(t) = x_o(1) + \int_1^t f(\tau,x_o(\tau-1))d\tau \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Supondo conhecida a solução em $[n-1,n]$, que denotamos por $x_{n-1}(t)$, determinamos a solução em $[n,n+1]$ como segue:

$$\dot{x}_n(t) = f(t,x_{n-1}(t-1)), \; x_n(n) = x_{n-1}(n)$$

ou seja,

$$x_n(t) = x_{n-1}(n) + \int_n^t f(\tau,x_{n-1}(\tau-1))d\tau \quad \text{para} \quad n \leq t \leq n+1$$

Assim, a solução de nosso problema fica determinada para $t \geq 0$.

Vemos em nosso problema que precisamos ter como dado inicial o conhecimento da solução no intervalo $[0,1]$, não bastando conhecer o seu valor no instante $t_o = 1$, como já observado prèviamente.

## 2. DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM RETARDAMENTO E EXEMPLOS.

Sejam $h, H$ com $0 \leq h < \infty$, $0 < H \leq \infty$, $C_H = \{\varphi \in C = C([-h,0],R^n) \mid \|\varphi\| < H\}$ onde $C([-h,0],R^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-h,0]$ no $R^n$ com a norma $\|\varphi\| = \sup\limits_{-h\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$, $|\cdot|$ denotando uma norma usual do $R^n$. No caso $H = \infty$ fica, pois, $C_H = C_\infty = C$.

Sejam $A$, $0 < A \leq \infty$, e $x(t)$ contínua em $[t_o-h, t_o+A)$ com valores no $R^n$. Seja $t$, $t_o \leq t < t_o+A$. Por definição $x_t$ é o elemento de $C$ dado por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ para $-h \leq \theta \leq 0$. É fácil ver que a aplicação de $[t_o,t_o+A)$ no espaço de Banach $C$ dada por $x_t$ é contínua.

Seja $f(t,\varphi)$ uma aplicação de $[0,\infty) \times C_H$ no $R^n$. A equação

(1) $$\dot{x}(t) = f(t,x_t)$$

é chamada uma equação diferencial com retardamento.

Uma função $x(t)$, contínua em $[t_o-h, t_o+A)$, $0 < A \leq \infty$, $t_o \geq 0$, é dita uma solução de (1) se existir a derivada de $x(t)$ em $[t_o,t_o+A)$ e $\dot{x}(t) = f(t,x_t)$ para $t_o \leq t < t_o + A$. Observamos que não é exigido de $x(t)$, definida em $[t_o-h,t_o+A)$, que seja diferenciável em $t_o$. No instante $t_o$ consideramos apenas a derivada direita.

Note-se que, quando $h = 0$, uma equação diferencial com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de equações com retardamento:

i) A equação $\dot{x}(t) = g(t,x(t-1))$, discutida no início, é uma equação com retardamento, vista da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t), \text{ onde } f(t,\varphi) = g(t,\varphi(-1)) \text{ com } \varphi \in C([-1,0],R)$$

ii) Mais geralmente, o sistema

$$\dot{x}(t) = g(t,x(t),x(t-h_1(t)),\ldots,x(t-h_m(t))) ,$$

$0 \leq h_j(t) \leq h < \infty$, $j = 1,\ldots,m$, é uma equação com retardamento, vista como segue:

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) ,$$

onde $f(t,\varphi) = g(t,\varphi(0),\varphi(-h_1(t)),\ldots,\varphi(-h_m(t)))$ com $\varphi \in C([-h,0],R^n)$.

iii) $\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} g(t,\theta,x(t+\theta))d\theta$, que podemos escrever como

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \text{ onde } f(t,\varphi) = \int_{-h}^{0} g(t,\theta,\varphi(\theta))d\theta \text{ ,}$$

$$\varphi \in C([-h,0],R)$$

# CAPÍTULO II

# FATOS BÁSICOS

## 1. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Vamos estudar o problema da determinação de solução, com condição inicial, da equação

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

onde $f(t,\varphi)$ está definida em $[0,\infty) \times C_H$, $0 < H \leq \infty$.

Sejam $t_o \geq 0$ e $\psi \in C_H$.

A função $x(t)$, contínua em $[t_o - h, t_o + A)$, $A > 0$, diferenciável em $[t_o, t_o + A)$, é dita uma solução de (1) com função inicial $\psi$ em $t_o$ se

i) $x_t \in C_H$ para $t_o \leq t < t_o + A$

ii) $x_{t_o} = \psi$,

iii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_o \leq t < t_o + A$

Dizemos que $f(t,\varphi)$ satisfaz à condição de Lipschitz ou é lipschitziana relativamente a $\varphi$ em $[0,\tau] \times C_{H_1}$ $0 < H_1 < H$, se existir $L = L(\tau, H_1)$ tal que

$|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \leq L\|\varphi_2 - \varphi_1\|$ para $0 \leq t \leq \tau$ e $\varphi_1, \varphi_2$ em $C_{H_1}$.

Dizemos que $f(t,\varphi)$ é localmente lipschitziana relativamente a $\varphi$ em $[0,\infty) \times C_H$ se $f(t,\varphi)$ for lipschitziana relativamente a $\varphi$ em $[0,\tau] \times C_{H_1}$, para todo $\tau, H_1$, $0 < T < \infty$, $0 < H_1 < H$.

TEOREMA 1 - Seja $f(t,\varphi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a $\varphi$ em $[0,\infty) \times C_H$.

Então, para qualquer $t_o \geq 0$, $\psi \in C_H$, existem $A > 0$ e função $x(t)$ definida em $[t_o - h, t_o + A)$ que é solução de (1) com função inicial $\psi$ em $t_o$.

Ainda mais, esta solução é única.

Prova: Seja $F = \{x \in C([t_o - h, t_o + A], R^n) \mid \|x\| \leq H_1$ e $x(t_o + \theta) = \psi(\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0\}$ onde $H_1$ é escolhido de modo que $\|\psi\| < H_1 < H$ e $A > 0$ a ser fixado convenientemente. $C([t_o - h, t_o + A], R^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[t_o - h, t_o + A]$ no $R^n$ com a norma

$$\|x\| = \sup_{t_o - h \leq t \leq t_o + A} |x(t)|.$$

$F$ é um espaço métrico completo.

Consideremos $T$, aplicação de $F$ em $C([t_o - h, t_o + A], R^n)$, definida por

$(Tx)(t_o + \theta) = \psi(\theta)$ para $-h \leq \theta \leq 0$ e

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_o}^{t} f(s,x_s)ds \quad \text{para} \quad t_o \le t \le t_o + A.$$

Vamos mostrar inicialmente que $T$, para $A$ conveniente, é uma aplicação de $F$ em $F$

$$|(Tx)(t)| \le |\psi(0)| + \int_{t_o}^{t_o+A} |f(s,x_s)|ds \quad \text{para} \quad t_o \le t \le t_o+A .$$

Fazendo a restrição $A \le 1$ e observando que $\|x_s\| \le H_1$ para $t_o \le s \le t_o+A$ decorre que para $t_o \le s \le$ $\le t_o+A$ temos

$$|f(s,x_s)| \le |f(s,x_s) - f(s,0)| + |f(s,0)| \le L\,H_1 + K ,$$

onde $K = \sup\limits_{t_o \le \tau \le t_o+1} |f(\tau,0)|$ e $L = L(t_o+1,H_1)$. Então,

$$|(Tx)(t)| \le |\psi(0)| + A[H_1L + K] \quad \text{para} \quad t_o \le t \le t_o+A .$$

Por outro lado, como $\|\psi\| < H_1$, resulta que existe $H_2$ tal que $\|\psi\| < H_2 < H_1$.

Logo $|(Tx)(t)| < H_2 + A[H_1L + K] < H_1$ para $A$ conveniente. Portanto, com uma tal escolha de $A$ vem que $\|Tx\| < H_1$.

Assim, $T$ é uma aplicação de $F$ em $F$.

Escolhendo agora $A$ não só com a indicação anterior mas também com a exigência $A < \frac{1}{L}$ , vamos mostrar que $T$ é também uma contração de $F$ em $F$.

Dados $x$ e $y$ de $F$, sejam $(Tx)(t_o+\theta) = \psi(\theta)$ e

$(Ty)(t_o+\theta) = \psi(\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$, $(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_o}^{t} f(s,x_s)ds$ e $(Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_o}^{t} f(s,y_s)ds$ para para $t_o \leq t \leq t_o+A$.

Então,

$$|(Tx)(t)-(Ty)(t)| = 0 \quad \text{para} \quad t_o-h \leq t \leq t_o$$

e
$$|(Tx)(t)-(Ty)(t)| \leq \int_{t_o}^{t} |f(s,x_s) - f(s,y_s)|ds \leq$$

$$\leq \int_{t_o}^{t_o+A} L\|x_s-y_s\|ds, \quad \text{para} \quad t_o \leq t \leq t_o+A \ .$$

Como $\|x_s-y_s\| \leq \|x-y\|$ para $t_o \leq s \leq t_o+A$, vem que

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq AL\|x-y\| \text{ para } t_o-h \leq t \leq t_o+A$$

e
$$\|Tx-Ty\| \leq AL\|x-y\|.$$

Logo $T$ é uma contração porque $AL < 1$.

Então, pelo teorema do ponto fixo de Banach existe uma e uma só função $x \in F$ tal que $Tx = x$.

Em outras palavras, existe uma e uma só função $x \in F$ tal que

$$x(t_o+\theta) = \psi(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0$$

$$x(t) = \psi(0) + \int_{t_o}^{t} f(s,x_s) \quad \text{para} \quad t_o \leq t \leq t_o+A \ .$$

O nosso teorema é uma consequência imediata dêste fato.

No caso em que supomos $f(t,\varphi)$ apenas contínua podemos provar a existência, mas não a unicidade, de uma solução da equação (1) em um intervalo $[t_o-h,\ t_o+A)$, com A suficientemente pequeno, do problema de valor inicial. A prova, neste caso, pode ser feita como uma aplicação natural do teorema de ponto fixo de Schauder. Ver, por exemplo, [14-b, Theorem 37.1, pg. 184].

## 2. EXTENSÃO DAS SOLUÇÕES

Com relação à equação com retardamento consideremos as seguintes hipóteses:

i) o segundo membro da equação é uma função contínua que leva conjuntos $[0,\tau] \times C_{H_1}$ em conjuntos limitados do $R^n$ para todo $\tau$, $H_1$, $0 < \tau < \infty$, $0 < H_1 < H$.

ii) vale alguma condição de unicidade relativamente ao problema de função inicial, isto é, se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções definidas em algum intervalo comum $[t_o-h,\ t_o+\delta)$, $0 < \delta \leq \infty$, com $x_{t_o} = y_{t_o}$, então, $x(t) = y(t)$ para todo $t_o-h \leq t < t_o+\delta$.

Como conseqüência do Teorema 1 segue que (i) e (ii) são satisfeitas no caso em que o segundo membro da equação é uma função contínua, localmente dipschitziana relativamente a $\varphi$.

Indicamos por $x(t,t_o,\varphi)$ a solução da equação (1) cuja função inicial em $t_o$ é $\varphi$. Usamos a notação $x_t(t_o,\varphi)$ para indicar o elemento de $C$ dado por $x_t(t_o,\varphi)(\theta) = x(t+\theta,t_o,\varphi)$.

As seguintes propriedades são verdadeiras relativamente ao problema de extensão de soluções de (1), supostas satisfeitas as condições (i) e (ii):

a) Se $x(t)$, definida em $[t_o-h,\ t_o+\delta]$ é solução de (1) e se $|x(t)| < H$ neste intervalo, então, $x(t)$ pode ser estendida à direita de $t_o+\delta$, como solução de (1), tomando para função inicial em $t_o+\delta$

$$\psi(\theta) = x(t_o+\delta+\theta), \quad -h \le \theta \le 0 .$$

Esta afirmação segue do teorema de existência mencionado no fim da secção 1. Se $f(t,\varphi)$ além de contínua é localmente lipschitziana relativamente a $\varphi$, então, basta usar o Teorema 1.

b) Se $x(t)$, definida em $[t_o-h,\ t_o+\delta)$, $0 < \delta < \infty$, é solução de (1) e se, neste intervalo, $|x(t)| \le \tilde{H} < H$, então, podemos estender $x(t)$, como solução de (1), a $[t_o-h,t_o+\delta]$ e, por conseguinte, pela afirmação (a), à direita de $t_o+\delta$.

A demonstração segue do critério de Cauchy tomando-se

$$x(t) = x(t_o) + \int_{t_o}^{t} f(s, x_s) ds$$

e usando a hipótese (i).

Necessitamos da hipótese (i) para aplicar o critério de Cauchy porque num espaço de Banach de dimensão infinita, como é o caso de $C([-h,0], R^n)$, $h > 0$, uma bola fechada não é um conjunto compacto e, portanto, não podemos garantir a limitação de uma função contínua.

Vamos indicar por $[t_o-h, t^+)$, $t_o < t^+ \leq \infty$, o máximo intervalo aberto à direita ao qual podemos estender $x(t)$ como solução. Quando $t^+ = \infty$ dizemos que $x(t)$ é definida no futuro. Se $x(t)$ é definida e limitada em $[t_o-h, \infty)$ dizemos que $x(t)$ é limitada no futuro.

c) Seja $x(t)$ solução de (1) tal que $|x(t)| \leq \tilde{H} < H$ para $t_o-h \leq t < t^+$. Então, $t^+ = \infty$ e, portanto, $x(t)$ é limitado no futuro.

Em particular se $H = \infty$ e se $x(t)$ é limitada em seu máximo intervalo aberto à direita, então, $t^+ = \infty$.

Esta propriedade é uma conseqüência imediata de (b).

d) Em geral não podemos estender $x(t, t_o, \varphi)$ como solução à esquerda de $[t_o-h, t^+)$, isto é, não podemos garantir a existência de $\delta > 0$ e de uma função $x(t)$ definida em $[t_o-\delta-h,\ t^+)$, $x(t)$ coincidindo com $x(t,t_o,\varphi)$ em $[t_o-h,t^+)$ tal que

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \quad \text{para} \quad t_o-\delta \le t < t^+ .$$

Por exemplo, se tomarmos $\varphi \in C$ tal que $\varphi(\theta)$ não tenha derivada esquerda para $\theta = 0$, então, $x(t,t_o,\varphi)$ não admite prolongamento à esquerda qualquer que seja $t_o \ge 0$. Mas um prolongamento à esquerda não ocorre, em geral, mesmo que $\varphi(\theta)$ seja diferenciável.

## 3. DESIGUALDADE FUNDAMENTAL

A desigualdade seguinte estabelece a continuidade de $x(t,t_o,\varphi)$ em relação a $\varphi$.

TEOREMA 2 - Seja $f(t,\varphi)$ contínua e localmente lipschitziana.

Dados $t_o \ge 0$, $\varphi_1$ e $\varphi_2$ em $C_H$, sejam $x(t,t_o,\varphi_1)$ e $x(t,t_o,\varphi_2)$ definidas em um intervalo comum $[t_o-h,\tau]$, $t_o \le \tau < \infty$, com $\|x_t(t_o,\varphi_j)\| \le H_1 < H$, $t_o \le t \le \tau$, $j = 1,2,$. Então,

$$\|x_t(t_o,\varphi_2) - x_t(t_o,\varphi_1)\| \le e^{L(t-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\|, \quad t_o \le t \le \tau,$$

onde $L = L(\tau, H_1)$.

Prova: Vamos supor, sem perda de generalidade, que $|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| < L\|\varphi_2-\varphi_1\|$ para $\varphi_2 \neq \varphi_1$ e mostrar a desigualdade seguinte que é equivalente à proposta.

$$(2) \qquad |x(t,t_o,\varphi_2)-x(t,t_o,\varphi_1)| \leq e^{L(t-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\|, \quad t_o \leq t \leq \tau.$$

Como esta desigualdade é óbvia para $\varphi_2 = \varphi_1$, vamos supor $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

A desigualdade (2) é verdadeira para $t = t_o$.

Vamos supor que (2) não seja verdadeira para todo $t$, $t_o \leq t \leq \tau$. Então existem $\tilde{t}$ e seqüência $\{t_m\}$, $t_m > \tilde{t}$, $t_m \to \tilde{t}$ com $m \to \infty$, de modo que

$$\|x_{\tilde{t}}(t_o,\varphi_2) - x_{\tilde{t}}(t_o,\varphi_1)\| = |x(\tilde{t},t_o,\varphi_2) - x(\tilde{t},t_o,\varphi_2)| = $$
$$= e^{L(\tilde{t}-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\|$$

e $|x(t_m,t_o,\varphi_2) - x(t_m,t_o,\varphi_1)| > e^{L(t_m-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\|$.

Temos que

$$\frac{1}{t_m-t}[|x(t_m,t_o,\varphi_2)-x(t_m,t_o,\varphi_1)|-|x(\tilde{t},t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_o,\varphi_1)|] >$$
$$> \frac{1}{t_m-t}[e^{L(t_m-t_o)} - e^{L(\tilde{t}-t_o)}]\|\varphi_2-\varphi_1\| =$$
$$= \frac{e^{L(t_m-t_o)} - e^{L(\tilde{t}-t_o)}}{(t_m-t_o) - (\tilde{t}-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\| .$$

(3) $$\overline{\lim_{\Delta t\to 0+}} \frac{1}{\Delta t} [|x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_2) - x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_1)| - \\ - |x(\tilde{t},t_o,\varphi_2) - x(\tilde{t},t_o,\varphi_1)|] \geq$$

$$\geq \lim_{m\to\infty} \frac{e^{L(t_m-t_o)} - e^{L(\tilde{t}-t_o)}}{(t_m-t_o) - (\tilde{t}-t_o)} \|\varphi_2-\varphi_1\| = Le^{L(\tilde{t}-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\| .$$

Sejam $K > 0$ e $\epsilon_o > 0$ tais que

(4) $$|\dot{x}(\tilde{t},t_o,\varphi_2) - \dot{x}(\tilde{t},t_o,\varphi_1)| < K < K + \epsilon_o <$$

$$< L\|x_{\tilde{t}}(t_o,\varphi_2) - x_{\tilde{t}}(t_o,\varphi_1)\| = L\, e^{L(\tilde{t}-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\| .$$

Seja $\delta_o > 0$ tal que

$$\frac{1}{\Delta t} |[x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_1)]-[x(\tilde{t},t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_o,\varphi_1)]|$$

$$\leq |\dot{x}(\tilde{t},t_o,\varphi_2) - \dot{x}(\tilde{t},t_o,\varphi_1)| + \epsilon_o \quad \text{para} \quad 0 < \Delta t \leq \delta_o .$$

Em vista de (4) segue que

$$\frac{1}{\Delta t}[|x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_1)|-|x(\tilde{t},t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_o,\varphi_1)|] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Delta t}|[x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_1)]-[x(\tilde{t},t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_o,\varphi_1)]| \leq$$

$$\leq |\dot{x}(\tilde{t},t_o,\varphi_2) - \dot{x}(\tilde{t},t_o,\varphi_1)| + \epsilon_o < K + \epsilon_o < L\, e^{L(\tilde{t}-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\|$$

para $0 < \Delta t \leq \delta_o$.

Portanto,

$$\overline{\lim_{\Delta t\to 0+}} [|x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t}+\Delta t,t_o,\varphi_1)|-|x(\tilde{t},t_o,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_o,\varphi_1)|]$$

$< L\, e^{(\tilde{t}-t_o)}\|\varphi_2-\varphi_1\|$, que nos leva a uma contradição com (3).

O teorema fica assim provado.

Para uma discussão geral das equações com retardamento destacamos as referências [1], [2-a-b-], [3], [4-d], [5] e [8].

# CAPÍTULO III

# ESTABILIDADE: DEFINIÇÕES E SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOFF

## 1. DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE

Neste capítulo supomos que as condições (i) e (ii) da secção 2 do Capítulo II estejam satisfeitas relativamente à equação

(1) $$\dot{x} = f(t,x_t)$$

em $[0,\infty) \times C_H$. Supomos ainda que a origem seja um ponto de equilíbrio de (1), isto é, $f(t,0) = 0$, $t \geq 0$.

As definições seguintes de estabilidade são dadas em relação ao ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1).

(i) Estabilidade

Dados $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon,t_0) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implicam $\|x_t(t_0,\varphi)\| < \epsilon$.

No caso de uma equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t,x)$, $f(t,0) = 0$, se $\delta(\epsilon,t_0)$ puder ser determinado de acôrdo com a definição acima para algum $t_o = \overline{t}_o$, então, $\delta(\epsilon, t_o)$ poderá ser determinado para qualquer $t_o \geq 0$. Isto se deve ao fato de que a aplicação $x_o \to x(t_o, \overline{t}_o, x_o)$ induz um homeomorfismo entre duas vizinhanças de $x = 0$, desde que $f(t,x)$ seja contínua e satisfaça a alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial. Mas, um tal homeomorfismo não existe para o caso de equações com retardamento positivo.

O seguinte exemplo, devido a Zverkin [15], mostra a existência de dois instantes iniciais de modo que para um dêles a condição de estabilidade é satisfeita e para o outro não.

Consideremos a seguinte equação com retardamento

$$\dot{x}(t) = b(t)\, x(t - \tfrac{3}{2}\pi) \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} b(t) = 0 & \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \\ b(t) = -\cos t & \text{para} \quad \frac{3}{2}\pi \leq t \leq 3\pi \\ b(t) = 1 & \text{para} \quad t > 3\pi \end{cases}$$

Para $t_o = 0$, $\varphi \in C$, temos que $x(t) = x(t,0,\varphi)$ é dado por $x(t) = \varphi(0)$ se $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ e $x(t) = -\varphi(0)\,\mathrm{sen}\, t$ se $t > \frac{3}{2}\pi$. Vê-se, então, que a condição de estabilidade é satisfeita para $t_o = 0$. Por outro lado, se $t_o = 3\pi$, nossa equação fica $\dot{x}(t) = x(t - \frac{3}{2}\pi)$ para $t \geq 3\pi$ e vê-se que existe $\lambda > 0$ de modo que $x = c\, e^{\lambda t}$

seja uma solução da mesma para todo $c$. Isto significa, então, que em qualquer vizinhança da função inicial zero existe uma infinidade de funções iniciais $\varphi$ de modo que $x(t,3\pi,\varphi) \to \infty$ com $t \to \infty$; assim, a condição de estabilidade não está satisfeita para $t_o = 3\pi$.

(ii) Estabilidade uniforme

Dados $\epsilon > 0$ e $t_o \geq 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_o$ implicam $\|x_t(t_o,\varphi)\| < \epsilon$.

(iii) Estabilidade assintótica

(i) é satisfeita e a todo $t_o \geq 0$ corresponde $\rho = \rho(t_o) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \rho$ implica $x(t,t_o,\varphi) \to 0$ com $t \to \infty$.

(iv) Estabilidade equiassintótica

Dados $\epsilon > 0$ e $t_o \geq 0$ existem $\rho = \rho(t_o) > 0$ e $T = T(\epsilon) \geq 0$ de modo que $\|\varphi\| < \rho$ e $t \geq t_o + T$ implicam $\|x_t(t_o,\varphi\| < \epsilon$.

(v) Estabilidade assintótica uniforme

(ii) é satisfeita e existe $\rho > 0$ de modo que a todo $\epsilon > 0$ corresponde $T(\epsilon) \geq 0$ tal que se $\|\varphi\| < \rho$ e $t_o \geq 0$, então, $\|x_t(t_o,\varphi)\| < \epsilon$ para $t \geq t_o + T(\epsilon)$.

(vi) Estabilidade exponencial

Existem constantes positivas $\rho$, $\alpha$ e $B$ de modo que se $\|\varphi\| < \rho$, então,

$$\|x_t(t_o,\varphi)\| \le B\, e^{-\alpha(t-t_o)}\|\varphi\| \text{ para } t \ge t_o \ge 0$$

(vii) Estabilidade assintótica global

$H = \infty$ e a condição (iii) é satisfeita com $\rho(t_o) = \infty$.

As seguintes implicações são fàcilmente verificadas:

(vi) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i)

(vi) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

Não é, em geral, verdade que (v) $\Rightarrow$ (vi) como se pode ver no exemplo $\dot{x} = -x^3$ analisado em [10]. Contudo, se $f(t,\varphi)$ é linear em $\varphi$, então, a estabilidade assintótica uniforme implica a estabilidade exponencial [3, pag. 346].

Seja $y(t,t_o,\varphi)$ uma solução de $\dot{y}(t) = g(t,y_t)$ definida no futuro. Consideremos a mudança de variáveis $x = y - y(t,t_o,\varphi)$. Temos que

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) = g(t,x_t) = g(t,x_t+y_t(t_o,\varphi)) - g(t,y_t(t_o,\varphi))$$

onde $f(t,0) = 0$. Dizemos que a solução $y(t,t_o,\varphi)$ é estável num dos sentidos acima especificados se a solução $x = 0$ de $\dot{x} = f(t,x_t)$ for estável no correspondente sentido.

## 2. SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOFF

Seja $g(t)$ uma função escalar contínua definida em $[a,b)$, $b \leq \infty$. A expressão $\overline{\lim\limits_{r\to 0^+}} \dfrac{g(t+r) - g(t)}{r}$ tem sempre significado podendo ser $\pm\infty$. Êste limite é denotado por $\dot{g}(t)$. No caso em que $g(t)$ é diferenciável, $\dot{g}(t)$ coincide com a derivada de $g(t)$ no sentido usual.

Com relação à derivada de $g(t)$, tomada no sentido acima, temos os seguintes lemas que são fundamentais no segundo método de Lyapunoff.

LEMA 1 - <u>Seja</u> $g(t)$ <u>contínua com</u> $\dot{g}(t) \leq 0$ $\{\dot{g}(t) \geq 0\}$ <u>para</u> $a \leq t < b$. <u>Então,</u> $g(t)$ <u>é não crescente</u> <u>{não decrescente} em</u> $[a,b)$.

<u>Prova</u>: Consideremos o caso $\dot{g}(t) \leq 0$. O tratamento no caso $\dot{g}(t) \geq 0$ é análogo. Mostremos que se $a \leq t_1 \leq t_2 < b$, então, $g(t_2) \leq g(t_1)$. É suficiente provar que para qualquer $\epsilon > 0$ vale $g(t_2) - g(t_1) \leq \epsilon(t_2 - t_1)$. Supomos que não seja verdade. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que

$G(t_2) > 0$, onde $G(t) = g(t) - g(t_1) - \epsilon(t-t_1)$. Como $\dot{g}(t) \leq 0$, existe uma infinidade de pontos $t$ em $(t_1,t_2)$ de modo que $\frac{g(t) - g(t_1)}{t-t_1} \leq \epsilon$, ou seja $G(t) \leq 0$. Então, o conjunto $A = \{t \in (t_1,t_2) | G(t) = 0\} \neq \phi$. Para $\xi = \sup A$ temos $t_1 < \xi < t_2$, $G(\xi) = 0$ e $G(t) > 0$ para $\xi < t \leq \leq t_2$. Então, $\dot{G}(\xi) \geq 0$ e como $\dot{G}(\xi) = \dot{g}(\xi) - \epsilon$, segue que $\dot{g}(\xi) \geq \epsilon$, contrário à hipótese.

A prova está completa.

LEMA 2 - <u>Seja</u> $g(t)$ <u>contínua com</u> $\dot{g}(t) \leq -\sigma$ $\{\dot{g}(t) \geq \sigma\}$, $\sigma > 0$, <u>em</u> $[a,b)$.

<u>Então,</u> $g(t) \leq g(t_o) - \sigma(t-t_o)\{g(t) \geq g(t_o)+\sigma(t-t_o)\}$ <u>para</u> $a \leq t_o \leq t < b$.

<u>Prova</u>: Aplicar o Lema 1 à função $h(t) = g(t) + \sigma t$.

Seja $v(t,\varphi)$ um funcional definido para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, isto é, $v(t,\varphi)$ é uma aplicação numérica contínua definida em $[0,\infty) \times C_H$.

Será suposto $v(t,0) = 0$ para $t \geq 0$.

O funcional $v(t,\varphi)$ é dito <u>positivo-definido</u> se existir uma função escalar contínua $w(r)$, $r \geq 0$, tal que $v(t,\varphi) \geq w(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, $w(r) > 0$ para $r > 0$. O funcional é dito <u>negativo-definido</u> se $-v(t,\varphi)$ fôr positivo-definido.

Para todo funcional $v(t,\varphi)$, $t_o \geq 0$, $\varphi \in C_H$, definimos

$$\dot{v}(t_o,\varphi) = \dot{v}(t,x_t(t_o,\varphi)) = \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r}[v(t_o+r,x_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - $$

$- v(t_o,\varphi)]$ onde $x(t,t_o,\varphi)$ é solução de (1).

TEOREMA 1 - <u>Suponhamos que exista um funcional</u> $v(t,\varphi)$, <u>positivo-definido e satisfazendo</u> $\dot{v}(t,\varphi) \leq 0$. <u>Então, a solução $x = 0$ de (1) é estável</u>.

<u>Prova</u>: Dados $\epsilon > 0$, $t_o \geq 0$, segue que existe $\delta = \delta(\epsilon,t_o) < H$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ implica $v(t_o,\varphi) < w(\epsilon)$, onde $w(\epsilon) > 0$.

Afirmamos que $\|\varphi\| < \delta$ implica $\|x_t(t_o,\varphi)\| < \epsilon$ para $t \geq t_o$. De fato, do contrário existiria $t_1 > t_o$ tal que $\|x_{t_1}(t_o,\varphi)\| = \epsilon$ e, portanto, $v(t_1,x_{t_1}(t_o,\varphi)) \geq w(\|x_{t_1}(t_o,\varphi)\|) = w(\epsilon) > v(t_o,\varphi) = v(t_o,x_{t_o}(t_o,\varphi))$ mas tal desigualdade nos leva a uma contradição porque pelo Lema 1 temos que $v(t,x_t(t_o,\varphi))$ é não crescente.

A prova está completa.

Dizemos que o funcional $v(t,\varphi)$ tem <u>extremo superior infinitésimo</u> se existir uma função escalar contínua $\xi(r)$, $r \geq 0$, tal que $|v(t,\varphi)| \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, $\xi(0) = 0$.

TEOREMA 2 - <u>Suponhamos que exista um funcional</u> $v(t,\varphi)$ <u>positivo-definido, tendo extremo superior in-</u>

finitésimo, com $\dot{v}(t,\varphi) \le 0$.

Então, a solução $x = 0$ de (1) é uniformemente estável.

Prova: Na prova do Teorema 1 podemos tomar $\delta = \delta(e) > 0$ desde que $v(t_o,\varphi) \le \xi(\|\varphi\|)$ e $\xi(r)$ é contínua com $\xi(0) = 0$.

A prova está completa.

Seja a solução $x = 0$ de (1) assintòticamente estável. Dado $t_o \ge 0$, o conjunto

$$D_{t_o} = \{\varphi \in C_H | x(t,t_o,\varphi) \to 0, \text{ com } t \to \infty\}$$

é chamado o centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ em $t_o$.

No caso de um sistema autônomo, isto é, $f(t,\varphi) = h(\varphi)$, o conjunto $D_{t_o}$ não depende de $t_o$ e $D = D_{t_o}$ é simplesmente chamado o centro de atração.

No caso em que a origem é globalmente assintòticamente estável temos $D_{t_o} = C$ para todo $t_o \ge 0$.

TEOREMA 3 - Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$, positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo e com $\dot{v}(t,\varphi)$ negativo-definido.

Então, a solução $x = 0$ de (1) é uniformemente assintòticamente estável.

Prova: A estabilidade uniforme segue do Teorema 2. Como $v(t,\varphi)$ é positivo-definição e tem extremo superior infinitésimo, existem funções escalares contínuas $w(r)$ e $\xi(r)$, com $w(r) > 0$ para $r > 0$, $\xi(0) = 0$, de modo que $w(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq t_o$, $\varphi \in C_H$.

Sejam $H_1$, $H_2$, $0 < H_1 < H_2 < H$, escolhidos de modo que $\xi(H_1) < w(H_2)$. A existência de $H_1$, $H_2$ com a propriedade pedida segue das hipóteses sôbre $\xi(r)$ e $w(r)$.

Afirmamos que $t_o \geq 0$, $\varphi \in C_{H_1}$ implicam $x_t(t_o,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_o \leq t < t^+$. Admitamos que isto não seja verdade. Então, existem $t_1$, $t_2$, $t_o < t_1 < t_2$, com $\|x_{t_1}(t_o,\varphi)\| = H_1$ e $\|x_{t_2}(t_o,\varphi)\| = H_2$. Portanto $v(t_1,x_{t_1}(t_o,\varphi)) \leq \xi(\|x_{t_1}(t_o,\varphi)\|) = \xi(H_1) < w(H_2) =$ $= w(\|x_{t_2}(t_o,\varphi)\|) \leq v(t_2,x_{t_2}(t_o,\varphi))$. Segue do Lema 1 a existência de um número $\tau$, $t_1 < \tau < t_2$, tal que $\dot{v}(\tau,x_\tau(t_o,\varphi)) > 0$, o que nos leva a uma contradição. Então, $t_o \geq 0$, $\varphi \in C_{H_1}$ implicam $x_t(t_o,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_o \leq t < t^+$ e $t^+ = \infty$.

Como $x = 0$ é uniformemente estável, dado $\epsilon$, $0 < \epsilon < H_1$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $\varphi \in C_\delta$ implica $x_t(t_o,\varphi) \in C_\epsilon$ para $t_o \leq t < \infty$. Como $\dot{v}(t,\varphi)$ é negativo-definido, existe função escalar contínua $\sigma(r)$, $\sigma(r) > 0$ para $r > 0$, com $\dot{v}(t,\varphi) \leq -\sigma(\|\varphi\|)$.

Sejam $0 < \gamma = \inf\limits_{\delta \leq r \leq H_2} \sigma(r)$, $M > \sup\limits_{0 \leq r \leq H_1} \xi|r|$ e

$T = \frac{M}{\gamma}$.

Vemos que $T$ não depende de $t_o$, e portanto, $T = T(e)$.

Afirmamos que $\varphi \in C_{H_1}$ implica $x_{\tilde{t}}(t_o,\varphi) \in C_\delta$ para algum instante $\tilde{t}$, $t_o \leq \tilde{t} \leq t_o + T$. Suponhamos que isto não seja verdade. Então, $\delta \leq \|x_t(t_o,\varphi)\| \leq H_2$ para $t_o \leq t \leq t_o + T$ e, portanto,

$$\dot{v}(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq -\sigma(\|x_t(t_o,\varphi)\|) \leq -\inf_{\delta \leq r \leq H_2} \sigma(r) = -\gamma$$

para $t_o \leq t \leq t_o + T$. Segue do Lema 2 que

$$v(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq v(t_o,\varphi) - \gamma(t-t_o) \text{ para } 0 \leq t_o \leq t \leq t_o+T$$

e, por conseguinte, $v(t_o+T, x_{t_o+T}(t_o,\varphi)) \leq \xi(\|\varphi\|) - \gamma T < M - \gamma T = 0$, o que é impossível porque $v(t,\varphi)$ é positivo-definido.

Então, $\varphi \in C_\rho$, com $\rho = H_1$, implica $x_{\tilde{t}}(t_o,\varphi) \in C_\delta$ para algum $\tilde{t}$, $t_o \leq \tilde{t} \leq t_o + T$, e, portanto, $x_t(t_o,\varphi) \in C_e$ para $t \geq t_o + T$.

O teorema está pois provado.

Dados $H_1$, $H_2$ como no Teorema 3, vemos que $C_{H_1}$ está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_o \geq 0$.

O funcional $v(t,\varphi)$, definido em $[0,\infty) \times C$, é dito radialmente ilimitado se existir uma função escalar contínua $\gamma(r)$ tal que $v(t,\varphi) \leq \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.

TEOREMA 4 - Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$, positivo-definido, radialmente ilimitado, tendo extremo superior infinitésimo e com $\dot{v}(t,\varphi)$ negativo-definido.

Então, a solução $x = 0$ de (1) é globalmente assintòticamente estável.

Prova: Como $v(t,\varphi)$ é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, existem funções escalares contínuas $w_1(r)$, $\xi(r)$, com $w_1(r) > 0$ para $r > 0$, $\xi(0) = 0$, de modo que $w_1(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$.

Como $v(t,\varphi)$ é radialmente ilimitada, existe função escalar contínua $\gamma(r)$ tal que $v(t,\varphi) \geq \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(r) \to \infty$ com $r \to \infty$. Definindo $w(r) = \max\{w_1(r), \gamma(r)\}$, temos que $w(r) > 0$ para $r > 0$, $w(r) \to \infty$ com $r \to \infty$ e $w(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$. Então, dada qualquer constante positiva $H_1$, podemos encontrar $H_2$ tal que $\xi(H_1) < w(H_2)$.

Como $C_{H_1}$ está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_o \geq 0$, segue que $x = 0$ é globalmente assintòticamente estável.

A prova está completa.

Os Teoremas 5, 6 e o Corolário dados a seguir são bastante convenientes nas aplicações como critérios de estabilidade.

TEOREMA 5 - Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$, definido em $[0,\infty) \times C_H$, e satisfazendo às seguintes condições:

i) $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t,\varphi) \leq w(\varphi)$, $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, onde $w(\varphi)$ é funcional em $C_H$, com $w(0) = 0$, e $\gamma(r)$ é uma função escalar contínua em $[0,H)$, com $\gamma(r) > 0$ para $r > 0$;

ii) $\dot{v}(t,\varphi) \leq 0$, $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$ .

Então, a solução $x = 0$ de (1) é uniformemente estável.

Prova: Dado $\epsilon$, $0 < \epsilon < H_1$, seja $\delta = \delta(\epsilon)$, $0 < \delta < \epsilon$, escolhido de modo que $w(\varphi) < \gamma(\epsilon)$ para $\varphi \in C_\delta$. Então, $t_o \geq 0$, $\varphi \in C_\delta$, implicam $v(t_o,\varphi) \leq w(\varphi) < \gamma(\epsilon)$. Como, do Lema 1 e hipótese (ii), segue que $v(t,x_t(t_o,\varphi))$ é não crescente, então, $v(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq v(t_o,\varphi) < \gamma(\epsilon)$ para $t \geq t_o$.

Afirmamos que $x_t(t_o,\varphi) \in C_\epsilon$ para $t \geq t_o$. De fato, pois do contrário existiria $t$ satisfazendo $|x(t,t_o,\varphi)| = \epsilon$ e, da hipótese (i), seguiria que $v(t,x_t(t_o,\varphi)) \geq \gamma(|x(t,t_o,\varphi)|) = \gamma(\epsilon)$, levando-nos a uma contradição.

Assim, $\varphi \in C_\delta$, $t_o \geq 0$, implicam $|x(t,t_o,\varphi)| < \varepsilon$ para $t \geq t_o$. Portanto, $x = 0$ é uniformemente estável.

A prova está completa.

Exemplos

i) Mostrar que a solução zero do sistema

$$\dot{x}(t) = y(t) - x(t)\; g(t,x_t,y_t)$$
$$\dot{y}(t) = -x(t) - y(t)\; h(t,x_t,y_t)$$

onde $g(t,\varphi_1,\varphi_2) \geq 0$ e $h(t,\varphi_1,\varphi_2) \geq 0$ para $t \geq 0$, $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in C$, é uniformemente estável.

Sugestão: Usar o funcional $v(t,\varphi_1,\varphi_2) = [\varphi_1(0)]^2 + [\varphi_2(0)]^2$.

ii) Mostrar que a solução zero da equação $\dot{x}(t) = -x(t)g(t,x_t)$, onde $g(t,\varphi) \geq 0$, é uniformemente estável.

TEOREMA 6 - Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ definido em $[0,\infty) \times C_H$ e satisfazendo à condição (i) do Teorema 5.

Suponhamos ainda que exista uma função escalar $\Gamma(r)$, $r \geq 0$, positiva e contínua para $r > 0$, tal que $\dot{v}(t,x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ para tôda solução $x(t)$ de (1).

Suponhamos que $f(t,\varphi)$ seja limitada em $[0,\infty) \times$

<u>Então, a solução</u> $x = 0$ <u>de (1) é assintòticamente estável</u>.

<u>Prova:</u> Nesta prova vamos tomar por conveniência $|x| = \sup_{1 \le j \le n} |x_j|$.

Sejam $H_1$, $H_2$, $0 < H_1 < H_2 < H$, escolhidos de modo que se $\varphi \in C_{H_1}$, então, $w(\varphi) < \gamma(H_2)$. Procedendo como na prova do Teorema 5 segue que $\varphi \in C_{H_1}$ implica $x_t(t_o,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t \ge t_o \ge 0$.

O Teorema 5 mostra que, para completar a prova de nosso teorema, é suficiente mostrar que $\varphi \in C_{H_1}$, $t_o \ge 0$, implicam $x(t,t_o,\varphi) \to 0$ com $t \to \infty$.

Suponhamos que existam $t_o \ge 0$, $\varphi \in C_{H_1}$, de modo que $x(t,t_o,\varphi)$ não tenda para zero com $t \to \infty$. Então, existem seqüência crescente $\{t_m\}$ com $t_{m+1} - t_m > 2$ e $\eta > 0$ de modo que $|x(t_m,t_o,\varphi)| > \eta$ para todo $m$. Garantimos que existe $\beta > 0$, não dependendo de $m$, tal que $|x(t,t_o,\varphi)| > \eta/2$ para $|t_m - t| \le \beta$. De fato. Seja $\sigma > 0$ satisfazendo $|f(t,\varphi)| \le \sigma$ para todo $t \ge 0$, $\varphi \in C_H$. Então, usando o teorema da média e óbvias desigualdades, segue que $|x_j(t,t_o,\varphi)| \ge |x_j(t_m,t_o,\varphi)| - \sigma|t-t_m|$. Assim, $|x(t,t_o,\varphi)| \ge |x(t_m,t_o,\varphi)| - \sigma|t-t_m| > \eta - \sigma|t-t_m|$ e, portanto, $|x(t,t_o,\varphi)| > \eta/2$ para $|t-t_m| \le \beta$, onde $\beta = \min\{\frac{1}{3\sigma}\eta, 1\}$. Observamos que $\beta$ não depende de $m$.

Então, $\eta/2 \le |x(t,t_o,\varphi)| \le H_2$ para $|t-t_m| \le \beta$ e isto acarreta que para $|t-t_m| \le \beta$ temos

$$\dot{v}(t,x_t(t_o,\varphi)) \le -\Gamma(|x(t,t_o,\varphi)|) \le \sup_{t_m-\beta\le s\le t_m+\beta} \{-\Gamma(|x(s,t_o,\varphi)|)\}$$

$$\le \sup_{\eta/2\le r\le H_2} \{-\Gamma(r)\} = -q < 0 .$$

Tendo em vista Lema 1, Lema 2, o fato de ser $\beta \le 1$ e $t_{m+1} - t_m > 2$, segue que para todo natural $N$ temos

$$v(t_N+\beta,\ x_{t_N+\beta}(t_o,\varphi)) - v(t_1-\beta, x_{t_1-\beta}(t_o,\varphi)) \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{N} [v(t_m+\beta, x_{t_m+\beta}(t_o,\varphi)) - v(t_m-\beta, x_{t_m-\beta}(t_o,\varphi))] \le -$$

e, por conseguinte, $v(t_N+\beta, x_{t_N+\beta}(t_o,\varphi)) \to -\infty$ co

$N \to \infty$, o que não é possível porque $v(t,\varphi) \ge 0$.

Esta contradição prova o teorema.

OBSERVAÇÃO - Da prova anterior segue que, n

do Teorema 6, se $H_1$, $H_2$, $0 <$

são escolhidos de modo que $\varphi \in C_{H_1}$ imp

$< \gamma(H_2)$, então, $C_{H_1}$ está contido no

de $x = 0$ para todo $t_o \ge 0$.

O exemplo seguinte é uma apl

icação

iam $b(t)$ e $\tau(t)$ fu

$(t)| \le \sigma$ e $0$

Sejam $H$ e $a$ escolhidos de modo que $\sigma H < a$, $H$ e $a$ sendo reais positivos.

Então, a solução $x = 0$ da equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-\tau(t))\; x(t)$$

é assintòticamente estável e $C_H$ está contido no centro de atração para todo $t_o \geq 0$.

COROLÁRIO - Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ definido em $[0,\infty) \times C$ e satisfazendo às seguintes hipóteses:

i) $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t,\varphi) \leq w(\varphi)$, $t \geq 0$, $\varphi \in C$, onde $w(\varphi)$ é um funcional, limitado sôbre tôda bola de $C$, com $w(0) = 0$ e $\gamma(r)$ é uma função escalar contínua para $r \geq 0$, com $\gamma(r) > 0$ para $r > 0$ e $\gamma(r) \to \infty$;

ii) Existe função escalar contínua $\Gamma(r)$, $r \geq 0$, positiva e contínua para $r > 0$, tal que $\dot{v}(t,x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ para tôda solução $x(t)$ de (1).

iii) $f(t,\varphi)$ é limitada em $[0,\infty) \times C_H$ para todo $H < \infty$.

Então, a solução $x = 0$ de (1) é globalmente assintòticamente estável.

Prova: É suficiente provar que $C_{H_1}$ está contido no centro de atração para todo $t_o \geq 0$ e todo $H_1 < \infty$.

Como $\gamma(r) \to \infty$ com $r \to \infty$ e $w(\varphi)$ é limitado sô-bre tôda bola de $C$, segue que para todo $H_1 > 0$ existe $H_2$ tal que $\varphi \in C_{H_1}$ implica $w(\varphi) < \gamma(H_2)$. Então, $C_{H_1}$ está contido no centro de atração da origem e o corolário está provado.

Aplicação

Seja $b(t)$ função escalar contínua para $t \geq 0$ e sejam $a, \sigma$ constantes positivas de modo que $a \geq |b(t)| + \sigma$ para todo $t \geq 0$.

Então, a solução $x = 0$ da equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-h), \quad 0 \leq h < \infty ,$$

é globalmente assintòticamente estável.

Prova: Desde que $f(t,\varphi) = -a\,\varphi(0) + b(t)\,\varphi(-h)$, segue que a condição (iii) do corolário está satisfeita.

Tomando

$$v(\varphi) = w(\varphi) = [\varphi(0)]^2 + a\int_{-h}^{0} \varphi^2(\theta)d\theta \quad \text{e} \quad \gamma(r) = r^2$$

a condição (i) fica satisfeita.

Mostremos que a condição (ii) também está satisfei-ta.

Seja $x(t)$ uma solução da equação acima

$$v(x_t) = x^2(t) + \int_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta = x^2(t) + a\int_{t-h}^{t} x^2(s)ds .$$

Então,

$$\dot{v}(x_t) = 2\ x(t)\dot{x}(t) + a[x^2(t) - x^2(t-h)] =$$

$$= 2\ x(t)[-ax(t)+b(t)x(t-h)] + a[x^2(t)-x^2(t-h)] =$$

$$= [-ax^2(t)-ax^2(t-h)] + 2b(t)x(t)x(t-h) \leq$$

$$\leq -a\ x^2(t) + |b(t)|[x^2(t)+x^2(t-h)] - a\ x^2(t-h) =$$

$$= [-a + |b(t)|][x^2(t)+x^2(t-h)] \leq -\sigma\ x^2(t)\ .$$

Então, a hipótese (ii) do corolário fica satisfeita tomando $\Gamma(r) = \sigma r^2$. Portanto, $x = 0$ é globalmente assintòticamente estável.

As seguintes referências são sôbre o segundo método de Lyapunoff para èquações com retardamento: [3], [5], [14-b].

# CAPÍTULO IV

# CONJUNTOS INVARIANTES E FUNCIONAIS DE LYAPUNOFF PARA SISTEMAS AUTÔNOMOS: ESTABILIDADE, INSTABILIDADE E APLICAÇÕES

## 1. CONJUNTO $\omega$-LIMITE

Consideremos o sistema autônomo

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = P(x_t) \ .$$

Supomos $P(\varphi)$ contínua em $C_H$, $0 < H \leq \infty$, e que $P(\varphi)$ leva conjuntos $C_\rho$, $0 < \rho < H$, em conjuntos limitados do $R^n$. Admitimos também que esteja satisfeita alguma condição garantindo a unicidade de solução do problema de função inicial. Tôdas estas condições estão satisfeitas no caso em que $P(\varphi)$ é localmente lipschitziana em $C_H$.

A solução $x(t,0,\varphi)$ de (1) será, daqui para a frente, denotada por $x(t,\varphi)$ e a correspondente $x_t(0,\varphi)$ por $x_t(\varphi)$.

Um conjunto $M \subset C$ é dito invariante relativamente a (1) se a todo $\varphi \in M$ corresponder uma solução $x(t)$

de (1), $-\infty < t < \infty$, tal que $x_t \in M$ para todo real $t$ e $x_o = \varphi$.

Seja $\varphi \in C_H$ tal que $x_t(\varphi)$ existe em $[0,\infty)$. O conjunto <u>ω-limite</u> de $x_t(\varphi)$, que indicamos por $\Omega(\varphi)$, ou simplesmente $\Omega$, é, por definição, o conjunto de todos os elementos $\psi \in C$ de modo que existe seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ com $m \to \infty$, satisfazendo $x_{t_m}(\varphi) \to \psi$ quando $m \to \infty$.

LEMA 1 - <u>Seja</u> $x_t(\varphi)$, <u>que supomos existir em</u> $[0,\infty)$, <u>tal que</u> $\|x_t(\varphi)\| \leq H_1 < H$ <u>para todo</u> $t \geq 0$.

<u>Então, o conjunto</u> $B = \bigcup_{t \geq 0} x_t(\varphi)$ <u>é relativamente compacto em</u> $C$, <u>isto é, a aderência</u> $\bar{B}$ <u>de</u> $B$ <u>em</u> $C$ <u>é compacta</u>.

<u>Prova</u>: Como a imagem de $C_\rho$ por $P(\varphi)$ é limitada para todo $\rho$, $0 < \rho < H$, segue que $B$ é equicontínua em $[-h,0]$. Como $B \subset \bar{C}_{H_1}$, $0 < H_1 < H \leq \infty$, segue, do conhecido teorema de Ascoli, que $\bar{B}$ é compacta.

A prova está, pois, completa.

TEOREMA 1 - <u>Seja</u> $x_t(\varphi)$, <u>que supomos existir em</u> $[0,\infty)$, <u>tal que</u> $\|x_t(\varphi)\| \leq H_1 < H$ <u>para todo</u> $t \geq 0$.

<u>Então</u>, $\Omega(\varphi)$ <u>é um conjunto não vazio, invariante relativamente a (1), compacto e conexo. Ainda mais</u>, $x_t(\varphi) \to \Omega(\varphi)$ <u>com</u> $t \to \infty$, <u>isto é,</u> $\mathrm{dist}(x_t(\varphi),\Omega(\varphi)) \to 0$

<u>com</u> $t \to \infty$.

Prova: a) Mostremos que $\Omega(\varphi)$ é não vazio.

Seja $\{t_m\}$ seqüência qualquer com $t_m \to \infty$, para $m \to \infty$. Como $x_{t_m}(\varphi) \in \bar{B}$ para todo $m$ e $\bar{B}$ é compacto, em vista do Lema 1, segue que existe subseqüência $\{t_{m_j}\}$ de $\{t_m\}$ tal que $x_{t_{m_j}}(\varphi) \to$ algum $\psi \in \bar{B}$ com $j \to \infty$ e, portanto, $\psi \in \Omega(\varphi)$.

b) Mostremos que $\Omega(\varphi)$ é invariante.

Seja $\psi \in \Omega(\varphi)$. Então existe seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ com $m \to \infty$, tal que $x_{t_m}(\varphi) \to \psi$ para $m \to \infty$. Dado $\ell > 0$ podemos supor $t_{m+1} > t_m$ e $t_1 > 2h + \ell$.

Sejam $K = \sup\limits_{\|\varphi\| \le H_1} \{|P(\varphi)|\}$ e $x(t) = x(t,\varphi)$.

Para $-h - \ell \le t \le \ell$, $m = 1,2,\ldots,$ temos

$$x(t+t_m) = x(t_m) + \int_{t_m}^{t+t_m} P(x_s)ds \ .$$

Isto faz sentido porque $t + t_m \ge t_m - h - \ell > h$ .

Definimos $x_m(t) = x(t+t_m)$, $-h - \ell \le t \le \ell$, $m = 1,2,\ldots$

Assim, para $-h - \ell \le t \le \ell$, segue que

$$(2) \qquad x_m(t) = x(t_m) + \int_0^t P((x_m)_s)ds \ .$$

Consideremos o espaço de Banach $W = C([-h-\ell,\ell],R^n)$.

Seja $F = \{x_m \in V \mid x_m(t) = x(t+t_m), -h-\ell \leq t \leq \ell,\ m=1,2,\ldots\}$.

Mostremos que $\bar{F}$ é compacto. Como $|x_m(t)| \leq H_1$ para todo $m$ e todo $t$, $-h-\ell \leq t \leq \ell$, basta provar, em vista do teorema de Ascoli, que $F$ é equicontínuo em $[-h-\ell,\ell]$.

Para $-h-\ell \leq s_1 < s_2 \leq \ell$, vem que

$$x_m(s_2) - x_m(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} P((x_m)_s)ds \quad ,$$

e, por conseguinte, $|x_m(s_2)-x_m(s_1)| \leq K|s_2-s_1|$; o que prova a requerida equicontinuidade e, portanto, que $\bar{F}$ é compacto. Segue então que existe uma subseqüência de $\{x_m(t)\}$, que continuamos a denotar por $\{x_m(t)\}$, e uma função $y(t)$ tal que $x_m(t) = x(t+t_m) \to y(t)$, com $m \to \infty$, uniformemente em $t \in [-h-\ell,\ell]$. Isto implica $(x_m)_t \to y_t$, com $m \to \infty$, uniformemente em $t \in [-\ell,\ell]$ e $y_0 = \psi$.

Definindo $V = \{(x_m)_t \mid -\ell \leq t \leq \ell,\ m=1,2,\ldots\} \subset C$ vemos, pelo mesmo argumento anterior, que $\bar{V}$ é compacto e $y_t \in \bar{V}$, $-\ell \leq t \leq \ell$. Como $P(\varphi)$ é uniformemente contínua em $\bar{V}$ e $(x_m)_t \to y_t$, com $m \to \infty$, uniformemente em $t \in [-\ell,\ell]$, resulta que

$$\int_0^t P((x_m)_s)ds \to \int_0^t P(y_s)ds \quad \text{com} \quad m \to \infty, \quad -\ell \leq t \leq \ell \ .$$

Considerando o limite para $m \to \infty$, de ambos os membros de (2), segue que

$$y(t) = \psi(0) + \int_0^t P(y_s)ds \ , \quad -\ell \leq t \leq \ell.$$

Tomando $\ell = 1,2,\ldots$ e usando o processo de diagonalização, construimos uma seqüência $\{\tau_m\}$, subseqüência da original $\{t_m\}$, e uma função $y(t)$ definida em $(-\infty,+\infty)$ tal que:

i) $y(t) = \psi(0) + \int_0^t P(y_s)ds, \ -\infty < t < \infty,$ portanto

$\dot{y}(t) = P(y_t), \quad -\infty < t < \infty.$

ii) $x_{t+\tau_m} \to y_t$, com $m \to \infty$, uniformemente nas partes compactas de $R$, $y_o = \psi$ e, portanto, $y_t \in \Omega(\varphi)$, $-\infty < t < \infty$.

As condições (i) e (ii) dizem, então, que $\Omega(\varphi)$ é invariante relativamente a (1).

c) Mostremos que $\Omega(\varphi)$ é compacto.

Como $\Omega(\varphi) \subset \bar{B}$ e $\bar{B}$ é compacto, em vista do Lema 1, basta provar que $\Omega(\varphi)$ é fechado em $C$.

Seja $\{\psi_m\}$, $\psi_m \in \Omega(\varphi)$ e $\psi_m \to \psi$, com $m \to \infty$.

Vamos provar que $\psi \in \Omega(\varphi)$.

Existe subseqüência de $\{\psi_m\}$, para a qual usamos a mesma notação, tal que $\|\psi_m - \psi\| < \frac{1}{2m}$. Dado $m$ natural, seja $t_m \geq m$ tal que $\|x_{t_m}(\varphi) - \psi_m\| < \frac{1}{2m}$. Então,

$\|x_{t_m}(\varphi) - \psi\| < \frac{1}{m}$ e, portanto, $t_m \to \infty$, $x_{t_m}(\varphi) \to \psi$, com $m \to \infty$. Logo $\Omega(\varphi)$ é fechado e, portanto, compacto.

d) O fato de $\Omega(\varphi)$ ser conexo é de fácil prova.

e) Mostremos que $\text{dist}(x_t(\varphi),\Omega(\varphi)) \to 0$ com $t \to \infty$.

Supomos por momento que isto não seja verdade. Então, existem $\tau_m$, $\eta > 0$ e seqüência $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ com $m \to \infty$, de modo que $\text{dist}(x_{t_m}(\varphi),\Omega(\varphi)) \geq \eta$ para todo $m$. Podemos supor $\{t_m\}$ tal que $x_{t_m}(\varphi) \to$ algum $\psi_o \in \bar{B}$, com $m \to \infty$ e, portanto, $\text{dist}(x_{t_m}(\varphi),\psi_o) \to 0$ com $m \to \infty$. Como $\psi_o \in \Omega(\varphi)$ vem que $\text{dist}(x_{t_m}(\varphi),\psi_o) \geq \text{dist}(x_{t_m}(\varphi),\Omega) \to 0$ com $m \to \infty$, levando-nos a uma contradição. Logo, $x_t(\varphi) \to \Omega(\varphi)$ com $t \to \infty$.

A prova do teorema está pois completa.

## 2. CONJUNTOS INVARIANTES: ESTABILIDADE E INSTABILIDADE

Dado um funcional $v(\varphi)$ contínuo em $C_H$, $0 < H \leq \infty$, definimos

$$E = \{\varphi \in C_H \mid \dot{v}(\varphi) = 0\}$$

onde $\dot{v}(\varphi) = \overline{\lim_{r \to 0^+}} \frac{1}{r} [v(x_r(\varphi)) - v(\varphi)]$ .

Seja $E_o$ o maior conjunto invariante de (1) tal que $E_o \subset E$.

LEMA 2 - Seja $x(t)$ uma solução de (1) tal que $\|x_t\| \leq \rho < H$ e $\dot{v}(x_t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$.

Então, $x_t \to E_o$ com $t \to \infty$.

Prova: Como $\dot{v}(x_t) \leq 0$, segue que $v(x_t)$ é não crescente e, portanto, $v(x_t) \to \ell$, $\ell \geq -\infty$, com $t \to \infty$. Desde que $\Omega$ é não vazio existe $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ com $m \to \infty$, e $\psi \in \Omega$, de modo que $x_{t_m} \to \psi$ para $m \to \infty$. Então, $v(x_{t_m}) \to v(\psi)$ com $m \to \infty$ e, portanto, $\ell = v(\psi)$ é finito. Isto implica que $v(\varphi) = \ell$ para todo $\varphi \in \Omega$. Desde que $\Omega$ é invariante temos que, para todo $\varphi \in \Omega$, $x_t(\varphi) \in \Omega$ para $t \geq 0$. Como $v(x_t(\varphi)) = \ell$ resulta que $\dot{v}(\varphi) = 0$ e, portanto, $\Omega \subset E_o$. Desde que $x_t \to \Omega$ com $t \to \infty$ segue que $x_t \to E_o$ com $t \to \infty$, completando a prova do lema.

TEOREMA 2 - Seja $P(0) = 0$. Suponhamos que existam funcional contínuo $v(\varphi)$ em $C_H$ e função escalar contínua $u(s)$ em $[0,H)$ de modo que as seguintes condições estejam satisfeitas:

i) $\dot{v}(\varphi) \leq 0$,

ii) $u(0) = 0$, $u(r) > 0$ para $0 < r < H$, $\lim\limits_{r \to H} u(r) = \infty$, $u(|\varphi(0)|) \leq v(\varphi)$ e $v(0) = 0$.

Então, a solução $x = 0$ de (1) é estável e para todo $\varphi \in C_H$ existe $\rho$, $0 < \rho < H$, tal que $|x(t,\varphi)| < \rho$ para todo $t \geq 0$.

*Mais ainda, se* $E_o = \{0\}$ *então a solução* $x = 0$ *de (1) é assintòticamente estável e* $x(t,\varphi) \to 0$, *com* $t \to \infty$, *para todo* $\varphi \in C_H$.

*Prova*: A estabilidade de $x = 0$ segue do Teorema 5 do Capítulo III.

Dado $\varphi \in C_H$, seja $\rho$, $0 < \rho < H$, escolhido de modo que $u(r) > v(\varphi)$ para $r \geq \rho$. Como $v(x_t)$ é não crescente para $t \geq 0$ segue que $|x(t,\varphi)| < \rho$ para $t \geq 0$. De fato. Do contrário existiria $\tau \geq 0$ satisfazendo $|x(\tau,\varphi)| \geq \rho$ e, portanto, $v(x_\tau(\varphi)) \geq u(|x(\tau,\varphi)|) > v(\varphi)$, levando-nos a uma contradição. Portanto, $|x(t,\varphi)| < \rho$ para $t \geq 0$.

Desde que dado $\varphi \in C_H$ existe $\rho < H$ tal que $\|x_t(\varphi)\| \leq \rho$ e como $\dot{v}(x_t(\varphi)) \leq 0$ para $t \geq 0$, segue do Lema 2 que $x_t(\varphi) \to E_o$ com $t \to \infty$. Então, se $E_o = \{0\}$, resulta que $x_t(\varphi) \to 0$ com $t \to \infty$, completando a prova do teorema.

Dado $U \subset C_H$, $\bar{U}$ denota a aderência de $U$ e $\partial U$ a fronteira de $U$ relativamente ao espaço $C_H$.

TEOREMA 3 (*sôbre instabilidade*) - *Seja* $P(0) = 0$. *Suponhamos que exista* $v(\varphi)$ *contínuo em* $C_H$ *e que exista um subconjunto aberto* $U$ *de* $C_H$ *de modo que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

i) $v(\varphi) > 0$ <u>em</u> $U$ e $v(\varphi) = 0$ <u>em</u> $\partial U$;

ii) $0 \in \partial U$;

iii) $\dot{v}(\varphi) \geq 0$ <u>em</u> $U$;

iv) <u>O conjunto</u> $F = \{\varphi \in U \mid \dot{v}(\varphi) = 0\}$ <u>não contém qualquer conjunto invariante de (1).</u>

<u>Então, a todo</u> $\varphi \in U$ <u>corresponde uma seqüência</u> $\{t_m\}$ <u>tal que</u> $|x(t_m,\varphi)| \to H$ <u>com</u> $m \to \infty$ e, <u>portanto, em vista de (ii), a solução</u> $x = 0$ <u>de (1) é instável.</u>

<u>Prova</u>: Suponhamos por momento que existam $\varphi \in U$ e $H_1$, $0 < H_1 < H$, de modo que $\|x_t(\varphi)\| \leq H_1$ para $t \geq 0$.

Mostremos inicialmente que $x_t(\varphi) \in U$ para $t \geq 0$. De fato. Do contrário existiria $\tau > 0$ tal que $x_\tau(\varphi) \in \partial U$ e $x_t(\varphi) \in U$ para $0 \leq t < \tau$. Mas, isto implicaria $v(x_t(\varphi)) > 0$ para $0 \leq t < \tau$ e $v(x_\tau(\varphi)) = 0$, o que não é possível porque, por (iii), $v(x_t(\varphi))$ deve ser não decrescente em $[0,\tau)$. Então, $x_t(\varphi) \in U$ para $0 \leq t < \infty$.

Sabemos que $\Omega(\varphi)$ é um conjunto não vazio e invariante. Como $x_t(\varphi) \in U$ e $v(x_t(\varphi)) \geq v(x_o(\varphi)) = v(\varphi) > 0$ para todo $t \geq 0$, segue que $\Omega(\varphi) \subset U$.

Como $v(x_t(\varphi))$ é não decrescente e $\Omega(\varphi)$ é não vazio segue que $v(x_t(\varphi)) \to \ell$, $\ell$ sendo um número real, com $t \to \infty$. Consequentemente, $v(\psi)$ é uma função constante em $\Omega(\varphi)$, acarretando $\dot{v}(\psi) = 0$ sôbre $\Omega(\varphi)$.

Então, o conjunto não vazio, invariante e compacto $\Omega(\varphi)$ está contido em F, contradizendo (iv).

A prova está completa.

COROLÁRIO (Teorema de Cetaeff) - Seja $P(0) = 0$. Suponhamos que exista $v(\varphi)$ contínua em $C_H$ e que exista um subconjunto aberto U de $C_H$ de modo que as seguintes condições estejam satisfeitas:

i) $v(\varphi) > 0$ em U e $v(\varphi) = 0$ em $\partial U$;

ii) $0 \in \partial U$;

iii) $\dot{v}(\varphi) > 0$ em U.

Então, a solução $x = 0$ de (1) é instável.

## 3. APLICAÇÕES

a) Seja

$$f(\varphi) = -\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} g(\varphi(\theta))[h+\theta]d\theta$$

onde $g(x)$ é uma função escalar de classe $C^1$, $-\infty < x < \infty$. Em adição supomos que $x.g(x) > 0$ para $x \neq 0$ e que $G(x) \to \infty$ com $|x| \to \infty$, onde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$.

Então, as seguintes propriedades são satisfeitas relativamente à equação

$$(3) \qquad \dot{x}(t) = f(x_t) = -\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} g(x(t+\theta))[h+\theta]d\theta, \quad t \geq 0 :$$

i) <u>a solução</u> $x = 0$ <u>é estável</u>;

ii) <u>se a única solução</u> $x(t)$ <u>da equação</u> $\ddot{x} + g(x) = 0$ <u>satisfazendo</u> $x(t+h) = x(t)$ <u>para todo real</u> $t$ <u>é a solução</u> $x = 0$, <u>então, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintòticamente estável de (3)</u>.

<u>Prova</u>: Consideremos

$$v(\varphi) = G(\varphi(0)) + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{0} [\int_{\tau}^{0} g(\varphi(\theta))d\theta]^2 d\tau .$$

Seja $x(t)$ uma solução de (3). Então,

$$v(x_t) = G(x(t)) + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{0} [\int_{\tau}^{0} g(x(t+\theta))d\theta]^2 \, d\tau =$$

$$= G(x(t)) + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{0} [\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds]^2 \, d\tau$$

Logo,

$$\dot{v}(x_t) = -g(x(t))\,\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} [h+\theta]g(x(t+\theta))d\theta \quad +$$

$$+ \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} [\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds][g(x(t)) - g(x(t+\tau))]d\tau =$$

$$= -\frac{1}{h}\,g(x(t))\int_{t-h}^{t} [h+s-t]\; g(x(s))ds \; +$$

$$+ \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} [\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds][g(x(t))-g(x(t+\tau))]d\tau =$$

$$= -\frac{1}{h}\,g(x(t))\int_{t-h}^{t} [h+s-t]\; g(x(s))ds \; +$$

$$+ \frac{1}{h}\; g(x(t))\int_{-h}^{0} [\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds]d\tau \; -$$

$$- \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} [\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds]g(x(t+\tau))d\tau \, .$$

Levando em conta que a derivada de $\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds$ em relação a $\tau$ é $-g(x(t+\tau))$, segue que

$$- \frac{1}{h} \int_{-h}^{0} [\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds]\ g(t+\tau))d\tau =$$

$$= \frac{1}{2h} \{\int_{t+}^{t} g(x(s))ds\}^2]_{\tau=-h}^{\tau=0} = - \frac{1}{2h}[\int_{t-}^{t} g(x(s))ds]^2 \quad .$$

Uma integração por partes mostra que

$$\int_{-h}^{0}[\int_{t+\tau}^{t} g(x(s))ds]d\tau = \int_{t-h}^{t} [h+s-t]\ g(x(s))ds \quad .$$

Então, $\dot{v}(x_t) =-\frac{1}{2h} [\int_{t-h}^{t} g(x(s))ds]^2 \leq 0$ .

Definindo $u(x) = \min\{G(x),G(-x)\}$, $0 \leq x < \infty$, vem que $u(x)$ é contínua, $u(0) = 0$, $u(x) > 0$ para $x > 0$ e $u(x) \to \infty$ com $x \to \infty$. Vemos também que

$$v(\varphi) \geq G(\varphi(0) \geq \min\{G(|\varphi(0)|),\ G(-|\varphi(0)|)\} = u(|\varphi(0)|) \quad .$$

Então, segue do Teorema 2 que a solução $x = 0$ de (3) é estável e que tôda solução de (3) é limitada no futuro.

Desde que tôda solução $x(t,\varphi)$ de (3) é limitada no futuro, o Lema 2 implica que $x_t(\varphi) \to E_o$ com $t \to \infty$.

Mostremos que se (ii) é satisfeito então $E_o = \{0\}$. Isto implicará a estabilidade global assintótica de $x = 0$.

Temos que mostrar que se $x(t)$ é solução, definida em R, com $\dot{v}(x_t) = 0$ para todo real $t$, então,

$x(t) = 0, \quad t \in R.$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}[h+\theta]g(x(t+\theta))d\theta = -\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}[h+s-t]g(x(s))ds$$

Conseqüentemente

$$\ddot{x}(t) + g(x(t)) = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} g(x(s))ds \ .$$

Mas, $\dot{v}(x_t) = 0$ implica $\int_{t-h}^{t} g(x(s))ds = 0$ e, portanto, $\ddot{x}(t) + g(x(t)) = 0$. Segue que $\dot{x}(t) - \dot{x}(t-h) = = \int_{t}^{t-h} g(x(s))ds = 0$. Como $x(t)$ é limitada em $R$, porque tôda solução de $\ddot{x} + g(x) = 0$ é periódica, a condição $\dot{x}(t-h) = \dot{x}(t)$ implica $x(t-h) = x(t)$, $t \in R$, e portanto $x(t) = 0$ para todo $t \in R$.

A prova está completa.

b) <u>Seja</u>

$$f(\varphi) = -\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} g(\varphi(\theta))[h+\theta]d\theta$$

<u>onde</u> $g(x)$ <u>é função escalar de classe</u> $C^1$ <u>para</u> $|x| < < H < \infty$, <u>com</u> $g(0) = 0$. <u>Admitamos ou</u>

(A) <u>que</u> $g(x) < 0$ <u>para</u> $0 < x < H$, <u>ou</u>

(B) <u>que</u> $g(x) > 0$ <u>para</u> $-H < x < 0$.

<u>Então, a solução</u> $x = 0$ <u>da equação</u>

$$\dot{x}(t) = f(x_t) = -\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} g(x(t+\theta))[h+\theta]d\theta \tag{4}$$

<u>é instável</u>.

<u>Prova</u>: Consideremos o caso $g(x) < 0$ para $0 < x < H$.

O tratamento no outro caso é análogo.

Definimos

$$\tilde{g}(x) = g(x) \quad \text{para} \quad 0 \le x < H$$

e

$$\tilde{g}(x) = 0 \quad \text{para} \quad -H < x \le 0$$

$$v(\varphi) = -\tilde{G}(\varphi(0)) - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{0} [\int_{\tau}^{0} g(\varphi(\theta))d\theta]^2 d\tau ,$$

onde $\tilde{G}(x) = \int_0^x \tilde{g}(s)ds$.

Seja $U = \{\varphi \in C_H | v(\varphi) > 0\}$. Então, para êste conjunto $U$ as condições (i) e (ii) do Teorema 3 estão satisfeitas.

Mostremos que a condição (iii) também está satisfeita.

Seja $\varphi \in U$. Então, $\tilde{G}(\varphi(0)) < 0$ e, conseqüentemente, $\tilde{G}(\varphi(0)) = G(\varphi(0))$ e

$$v(\varphi) = -G(\varphi(0)) - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{0} [\int_{\tau}^{0} g(\varphi(\theta))d\theta]^2 d\tau .$$

Procedendo como na aplicação (a) vemos que

$$\dot{v}(\varphi) = \frac{1}{2h} [\int_{-h}^{0} g(\varphi(s))ds]^2 \ge 0 .$$

Então, a condição (iii) do Teorema 3 está satisfeita.

Mostremos que a condição (iv) também está satisfei ta. Para tanto basta mostrar que não existe solução $x(t)$ de (4) tal que $x_t \in U$ com $\dot{v}(x_t) = 0$ para todo $t \in R$. Suponhamos que existisse $x_t \in U$ e $\dot{v}(x_t) = 0$ para todo $t \in R$. Então, teríamos $0 < x(t) < H$ para $t \in R$ e, procedendo como na aplicação (a) viria $\ddot{x}(t) + g(x(t)) = 0$. Isto implicaria $\dot{x}(t)$ crescente e a existência de um $\tau$ tal que $\dot{x}(\tau) > 0$ ou $\dot{x}(\tau) < 0$. No primeiro caso teríamos $\dot{x}(t) \geq \dot{x}(\tau) > 0$ para $t \geq \tau$ e portanto $x(t) \to \infty$ com $t \to \infty$. No segundo caso teríamos $\dot{x}(t) \leq \dot{x}(\tau) < 0$ para $t \leq \tau$ e portanto $x(t) \to \infty$ com $t \to -\infty$. Seríamos pois levados a uma contradição. Donde, (iv) está satisfeita.

Segue pois do Teorema que a solução $x = 0$ é instável.

c) <u>Seja</u>

$$X(\varphi_1,\varphi_2) = (\varphi_2(0), -f(\varphi_2(0)) - g(\varphi_1(0)) + \int_{-h}^{0} m(\varphi_1(\theta))\varphi_2(\theta)d\theta),$$

$\varphi_1, \varphi_2$ <u>em</u> $C_1 = C([-h,0],R)$, <u>localmente lipschitziana e</u> $\frac{f(x)}{x} > b > 0$, $\frac{g(x)}{x} > a > 0$ <u>para todo</u> $x \neq 0$, $|m(x)| < L$, $L < \frac{b}{h}$, <u>para todo</u> $x$.

<u>Então, a solução zero de</u>

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -f(y(t))-g(x(t))+\int_{-h}^{0} m(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta \end{pmatrix}$$

é globalmente assintòticamente estável.

Prova: Usar o Teorema 2 tomando

$$v(\varphi) = v(\varphi_1,\varphi_2) = 2\, G(\varphi_1(0)) + [\varphi_2(0)]^2 + \\ + \frac{b}{h}\int_{-h}^{0} \{\int_{\tau}^{0} [\varphi_2(\theta)]^2\, d\theta\} d\tau$$

onde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$.

d) Seja

$$X(\varphi_1,\varphi_2) = (\varphi_2(0), f(\varphi_1(0),\varphi_2(0)) + g(\varphi_2(-h)),$$

$\varphi_1,\varphi_2$ em $C_1$, localmente lipschitziana,

$$\frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} < -a \ , \quad \frac{f(x,0)}{x} < -b$$

para todo $x \neq 0$, $y \neq 0$, com $a > 0$, $b > 0$ e $|g(y)| \leq$ $\leq L|y|$, $a > L$.

Então, a solução zero de

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t),y(t)) + g(y(t-h)) \end{pmatrix}$$

é globalmente assintòticamente estável.

Prova:

Usar o Teorema 2 tomando

$$v(\varphi) = v(\varphi_1,\varphi_2) = -\int_0^{\varphi_1(0)} f(s,0)ds + \frac{1}{2}[\varphi_2(\theta)]^2 + \\ + \frac{a}{2}\int_{-h}^{0}[\varphi_2(s)]^2 ds \quad .$$

Principais referências sôbre êste capítulo: [4-b-c], [9], [12-d].

Referências relacionadas: [6], [7], [11], [12,c,e], [14-a].

# CAPÍTULO V

## ESTABILIDADE E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO EM SISTEMAS PERTURBADOS DE SISTEMAS LINEARES

O objetivo dêste capítulo é apresentar uma série de resultados sôbre sistemas perturbados de sistemas lineares, usando um princípio de comparação de Hale [4-a].

### 1. PRINCÍPIO DE COMPARAÇÃO

Seja $L(t,\varphi)$ contínua para $t \geq 0$, $\varphi \in C$ e linear em $\varphi$.

Consideremos o sistema

$$(1) \qquad \dot{y}(t) = L(t,y_t) \ .$$

LEMA 1 - Suponhamos que existam função numérica $\alpha(t)$, com $\dot{\alpha}(t)$ contínua para $t \geq 0$, e função numérica $K(t)$, contínua para $t \geq 0$, de modo que para todo $t_o \geq 0$ e todo $t \geq t_o \geq 0$, $\varphi \in C$, a solução $y(t,t_o,\varphi)$ de (1) satisfaça

$$(2) \qquad \|y_t(t_o,\varphi)\| \leq K(t_o)e^{-[\alpha(t)-\alpha(t_o)]}\|\varphi\| \ .$$

Então, existe um funcional $v(t,\varphi)$, contínuo para $t \geq 0$, $\varphi \in C$ e satisfazendo às seguintes propriedades:

i) $\|\varphi\| \leq v(t,\varphi) \leq K(t)\|\varphi\|$

ii) $\dot{v}(t,\varphi) \leq -\dot{\alpha}(t)\, v(t,\varphi)$

iii) $|v(t,\varphi_1) - v(t,\varphi_2)| \leq K(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|$ .

Prova: Definimos

$$v(t,\varphi) = \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t+\tau}(t,\varphi)\| e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} .$$

De (2) segue que

$$\|\varphi\| \leq v(t,\varphi) \leq K(t)\|\varphi\|$$

e, portanto, (i) está satisfeita.

$$\dot{v}(t_o,\varphi) = \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} [v(t_o+r, y_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - v(t_o, y_{t_o}(t_o,\varphi))] =$$

$$= \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r}\{\sup_{\tau\geq 0}\|y_{t_o+r+\tau}(t_o+r, y_{t_o+r}(t_o,\varphi))\| e^{[\alpha(t_o+r+\tau)-\alpha(t_o+r)]} -$$

$$- \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o)]}\} =$$

$$= \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r}\{\sup_{\tau\geq r}\|y_{t_o+\tau}(t_o+r, y_{t_o+r}(t_o,\varphi))\| e^{[\alpha(t_o+r)-\alpha(t_o+r)]} -$$

$$- \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o)]}\} =$$

$$= \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} \{\sup_{\tau\geq r} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o+r)]} -$$

$$- \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o)]} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{r\to 0^+}} \frac{1}{r} \{ \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o+r)]} -$$

$$- \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o)]} \} .$$

Desde que $\sup_{t\geq 0} h(t) - \sup_{t\geq 0} g(t) \leq \sup_{t\geq 0} [h(t)-g(t)]$ onde $h(t)$ e $g(t)$ são supostos limitados em $[0,\infty)$, segue que

$$\dot{v}(t_o,\varphi) \leq \overline{\lim_{r\to 0^+}} \frac{1}{r} \sup_{\tau\geq 0} \{ \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{[\alpha(t_o+\tau)-\alpha(t_o)]} \} .$$

$$\cdot \{ e^{[\alpha(t_o)-\alpha(t_o+r)]} - 1 \} = v(t_o,\varphi)\frac{d}{dr}\{ e^{[\alpha(t_o)-\alpha(t_o+r)]} \}_{r=0}$$

$$= -v(t_o,\varphi) \cdot \alpha(t_o) .$$

Então, (ii) está verificada.

Sejam $\varphi_1,\varphi_2$ em $C$.

$$|v(t,\varphi_1)-v(t,\varphi_2)| = |\sup_{\tau\geq 0}\{ \|y_{t+\tau}(t,\varphi_1)\| e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \} -$$

$$- \sup_{\tau\geq 0} \{ \|y_{t+\tau}(t,\varphi_2)\| e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \} | .$$

Como $|\sup_{t\geq 0} h(t) - \sup_{t\geq 0} g(t)| \leq \sup_{t\geq 0} |h(t)-g(t)|$, temos que

$$|v(t,\varphi_1)-v(t,\varphi_2)| \leq \sup_{\tau\geq 0} \{ | \|y_{t+\tau}(t,\varphi_1)\| - \|y_{t+\tau}(t,\varphi_2)\| | .$$

$$. e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \} \leq$$

$$\leq \sup_{\tau\geq 0} \|y_{t+\tau}(t,\varphi_1) - y_{t+\tau}(t,\varphi_2)\| e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} =$$

$$= \sup_{\tau \geq 0} \|y_{t+\tau}(t,\varphi_1-\varphi_2)\| e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \leq$$

$$\leq \sup_{\tau \geq 0} K(t) e^{-[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \cdot e^{[\alpha(t+\tau)-\alpha(t)]} \|\varphi_1-\varphi_2\| =$$

$$= K(t) \|\varphi_1-\varphi_2\| .$$

Então, (iii) está verificada.

Para a prova da continuidade de $v(t,\varphi)$ ver [14 -b - pag.194].

Seja $X(t,\varphi)$ contínuo para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, $0 < H \leq \infty$, localmente lipschitziana em $\varphi$.

Consideremos o sistema perturbado

$$\dot{x}(t) = L(t,x_t) + X(t,x_t) \quad . \tag{3}$$

LEMA 2 - <u>Suponhamos que as soluções de (1) satisfaçam à condição (2).</u>

<u>Seja</u> $v(t,\varphi)$ <u>definido como no Lema 1. Então,</u>

$$\dot{v}_{(3)}(t,\varphi) \leq -\dot{\alpha}(t)\; v(t,\varphi) + K(t)|X(t,\varphi)|$$

<u>para</u> $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$ .

<u>Prova</u>: Sejam $x_{t+\tau}(t,\varphi)$ e $y_{t+\tau}(t,\varphi)$ soluções de (1) e (3) respectivamente.

$$\dot{v}_{(3)}(t_o,\varphi) = \overline{\lim_{r \to 0^+}} \frac{1}{r}[v(t_o+r, x_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - v(t_o, x_{t_o}(t_o,\varphi))] =$$

$$= \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} [v(t_o+r, x_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - v(t_o+r, t_{t_o+r}(t_o,\varphi)) +$$

$$+ v(t_o+r, y_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - v(t_o,\varphi)] \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} [v(t_o+r, y_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - v(t_o,\varphi)] +$$

$$+ \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} [v(t_o+r, x_{t_o+r}(t_o,\varphi)) - v(t_o+r, y_{t_o+r}(t_o,\varphi))] .$$

Usando a fórmula (iii) do Lema 1 segue que

$$\dot{v}_{(3)}(t_o,\varphi) \leq \dot{v}_{(1)}(t_o,\varphi) + \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} K(t_o+r) \| x_{t_o+r}(t_o,\varphi) - y_{t_o+r}(t_o,\varphi) \| =$$

$$= \dot{v}_{(1)}(t_o,\varphi) + K(t_o) \overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |x(t_o+r+\theta, t_o,\varphi) - y(t_o+r+\theta, t_o,\varphi)| .$$

Existem seqüências $\{r_m\}$, $\{\theta_m\}$, $r_m > 0$, $-r_m < \theta_m \leq 0$, $r_m \to 0$ com $m \to \infty$, de modo que

$$\overline{\lim_{r\to 0+}} \frac{1}{r} \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |x(t_o+r+\theta, t_o,\varphi) - y(t_o+r+\theta, t_o,\varphi)| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{r_m} |x(t_o+r_m+\theta_m, t_o,\varphi) - y(t_o+r_m+\theta_m, t_o,\varphi)| \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{r_m+\theta_m} |[x(t_o+r_m+\theta_m, t_o,\varphi) - x(t_o, t_o,\varphi)] - [y(t_o+r_m+\theta_m, t_o,\varphi) - y(t_o, t_o,\varphi)]| =$$

$$= \left| \lim_{m\to\infty} \frac{x(t_o+r_m+\theta_m, t_o,\varphi) - x(t_o, t_o,\varphi)}{r_m+\theta_m} - \lim_{m\to\infty} \frac{y(t_o+r_m+\theta_m, t_o,\varphi) - y(t_o, t_o,\varphi)}{r_m+\theta_m} \right|$$

$$= |\dot{x}(t_o,t_o,\varphi) - \dot{y}(t_o,t_o,\varphi)| =$$

$$= |L(t_o,x_{t_o}(t_o,\varphi)) + X(t_o,x_{t_o}(t_o,\varphi)) - L(t_o,y_{t_o}(t_o,\varphi))| =$$

$$= |X(t_o,\varphi)| \ .$$

Então, do Lema 1, fórmula (ii), segue que

$$\dot{v}_{(3)}(t_o,\varphi) \leq \dot{v}_{(1)}(t_o,\varphi) + K(t_o)|X(t_o,\varphi)| \leq$$
$$\leq -\dot{\alpha}(t_o)\, v(t_o,\varphi) + K(t_o)|X(t_o,\varphi)| \ .$$

A prova está completa.

TEOREMA 1 - Suponhamos que as soluções de (1) satisfaçam à condição (2).

Suponhamos que exista uma função numérica $w(t,r)$, contínua para $t \geq 0$, $r \geq 0$, não decrescente em $r$, tal que

(4) $$|X(t,\varphi)| \leq w(t,\|\varphi\|), \quad t \geq 0, \ \varphi \in C_H$$

Seja $u(t,t_o,\varphi)$ a solução máxima da equação diferencial ordinária escalar

(5) $$\dot{u} = -\dot{\alpha}(t)u + K(t)w(t,u), \ u(t_o) = v(t_o,\varphi)$$

onde $v(t,\varphi)$ é o funcional dado no Lema 1 e $\varphi \in C_H$.

Seja $u(t) = u(t,t_o,\varphi) < H$ para $t_o \leq t < \infty$.

Então, a solução $x(t,t_o,\varphi)$ de (3) satisfaz

$$(6) \qquad \|x_t(t_o,\varphi)\| \leq u(t_o,\varphi), \; t_o \leq t < \infty .$$

<u>Prova</u>: De (4) e do Lema 2 segue que

$$\dot{v}_{(3)}(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq -\dot{\alpha}(t)v(t,x_t(t_o,\varphi))+K(t)|X(t,x_t(t_o,\varphi))| \leq$$
$$\leq -\dot{\alpha}(t)v(t,x_t(t_o,\varphi)) + K(t)w(t,\|x_t(t_o,\varphi)\|),$$

para $t_o \leq t < t^+$, $t^+ \leq \infty$, $[t_o,t^+)$ sendo o máximo intervalo aberto à direita onde $x_t(t_o,\varphi)$ está definido.

Desde que $w(t,r)$ é não decrescente em $r$, para cada $t$ fixo, segue do Lema 1, fórmula (i), que

$$w(t,\|x_t(t_o,\varphi)\|) \leq w(t,v(t,x_t(t_o,\varphi))) .$$

Portanto,

$$\dot{v}_{(3)}(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq -\dot{\alpha}(t)v(t,x_t(t_o,\varphi))+K(t) \; w(t,v(x_t(t_o,\varphi))).$$

Desde que $u(t,t_o,\varphi)$ é a solução máxima de (5) segue que

$$v(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq u(t,t_o,\varphi), \; t_o \leq t < t^+$$

[14-b, Th. 4.1, pag. 18].

Do Lema 1, fórmula (i), segue que

$$\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq v(t,x_t(t_o,\varphi)) \leq u(t,t_o,\varphi), \quad t_o \leq t < t^+ .$$

Como $u(t,t_o,\varphi) < H$ para $t_o \leq t < \infty$, vem que $t^+ = \infty$ e, portanto, $\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq u(t,t_o,\varphi)$, $t_o \leq t < \infty$.

A prova está completa.

## 2. ESTABILIDADE UNIFORME

LEMA 3 - A origem é um ponto de equilíbrio uniformemente estável para (1) se e sòmente se existir constante $k$ tal que $\|y_t(t_o,\varphi)\| \le k\|\varphi\|$ para todo $t \ge t_o \ge 0$, $\varphi \in C$.

Prova: Supomos que a solução $y = 0$ de (1) seja uniformemente estável. Então, existe $\delta > 0$ tal que $\|y_t(t_o,\varphi)\| \le 1$ para $t \ge 0$, $\|\varphi\| \le \delta$. Logo, para todo $\varphi \in C$, $\varphi \ne 0$, e $t \ge t \ge 0$, segue que $\|y_t(t_o, \frac{\delta}{\|\varphi\|}\varphi)\| \le 1$, ou seja, $\|y_t(t_o,\varphi)\| \le k\|\varphi\|$ com $k = \frac{1}{\delta}$, $t \ge t_o$.

Como a recíproca é óbvia, a prova está completa.

LEMA 4 - Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

i) a solução $y = 0$ de (1) é uniformemente estável;

ii) para tôdo $H$ positivo existe uma função escalar contínua $h_H(t)$, $0 \le t < \infty$, com $\int^{\infty} h_H(t)dt < \infty$, tal que

$$|X(t,\varphi)| \le h_H(t), \text{ para } t \ge 0, \quad \|\varphi\| \le H .$$

Sejam $\varphi \in C$, $t_o \ge 0$, $0 < H < \infty$, dados de modo que $k[\|\varphi\| + \int_{t_o}^{\infty} h_H(s)ds] < H$, onde $k$ é dado como no Lema 3.

Então, a solução $x(t,t_o,\varphi)$ de (3) satisfaz

$$\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq k[\|\varphi\| + \int_{t_o}^{t} h_H(s)ds], \quad \text{para} \quad t \geq t_o .$$

Prova: Aplicamos o Teorema 1 tomando $w(t,r) = h_H(t)$, $K(t) = k$ e $\alpha(t) = 0$. Como a solução máxima da equação diferencial escalar

$$\dot{u} = k\, h_H(t), \quad u(t_o) = \sup_{s\geq 0} \|y_{t_o+s}(t_o,\varphi)\| \leq k\|\varphi\|$$

é

$$u(t) = u(t_o) + \int_{t_o}^{t} k\, h_H(s)ds \leq k[\|\varphi\| + \int_{t_o}^{t} h_H(s)ds] < H$$

para $t_o \leq t < \infty$, segue do Teorema 1 que

$$\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq u(t) \leq k[\|\varphi\| + \int_{t_o}^{t} h_H(s)ds], \quad t_o \leq t < \infty,$$

completando a prova.

TEOREMA 2 - Suponhamos que as condições (i) e (ii) do Lema 4 estejam satisfeitas.

Então, tôda solução de (3), limitada no futuro, é uniformemente estável.

NOTA: Quanto ao problema de existência de soluções limitadas de (3), sob as condições acima, observamos o seguinte: dado qualquer $\varphi \in C$ existe $\tau = \tau(\varphi)$ tal que, para todo $t_o \geq \tau$, temos $x(t,t_o,\varphi)$ limitada no futuro. De fato, dado $\varphi \in C$ seja $H > k\|\varphi\|$. Então, escolhemos $\tau$

de modo que $k[\|\varphi\| + \int_{\tau}^{\infty} h_H(s)ds] < H$. Do Lema 4 segue que $\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq k[\|\varphi\| + \int_{t_o}^{\infty} h_H(s)ds] < H$ para $t \geq t_o \geq \tau$ e, por conseguinte, $x(t,t_o,\varphi)$ é limitada no futuro.

<u>Prova do Teorema 2</u>: Seja $x(t,t_o,\varphi)$ uma solução de (3) limitada no futuro. Fazendo a mudança de variáveis $z = x - x(t,t_o,\varphi)$, em (3), vê-se que a nova equação é dada por

$$\dot{z}(t) = L(t,z_t) + Y(t,z_t)$$

onde $Y(t,\psi) = X(t,\psi+x_t(t_o,\varphi)) - X(t,x_t(t_o,\varphi))$ satisfaz à hipótese (ii) do Lema 4 e $Y(t,0) = 0$. Isto mostra que não existe perda de generalidade em se supor $X(t,0) = 0$ e que é suficiente provar a estabilidade uniforme da solução $x = 0$ de (3).

Dado $\epsilon > 0$, existem $T = T(\epsilon)$, $\sigma = \sigma(\epsilon)$, de modo que a seguinte desigualdade se verifica para todo $t_1 \geq T$ e $\|\varphi\| < \sigma$

$$k[\|\varphi\| + \int_{t_1}^{\infty} h_{\epsilon}(s)ds] < \epsilon \quad .$$

Então, segue do Lema 4 que a solução $x(t,t_1,\varphi)$ de (3), onde $t_1 \geq T(\epsilon)$ e $\|\varphi\| < \sigma$, satisfaz à relação

$$\|x_t(t_1,\varphi)\| \leq k[\|\varphi\| + \int_{t_1}^{t} h_{\epsilon}(s)ds] < \epsilon, \quad t \geq t_1 \quad .$$

Em vista do Teorema 2 do Capítulo II segue que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\varphi \in C_\delta$ e $t \geq t_1 \geq 0$ implicam $x_t(t_1,\varphi) \in C_\varepsilon$ .

A prova está completa.

COROLÁRIO - Suponhamos que a solução $y = 0$ de (1) seja uniformemente estável e que

$$|X(t,\varphi)| \leq h(t)\|\varphi\|, \quad t \geq 0, \ \varphi \in C \ \text{com} \ \int_0^\infty h(t)dt < \infty.$$

Então, tôda solução de (3) é limitada no futuro e uniformemente estável.

Prova: Usando a bem conhecida desigualdade de Gronwall, não é difícil ver que tôda solução de (3) é definida no futuro. Mostremos que tôda solução de (3) é limitada no futuro. Como tôda solução é definida no futuro, basta provar que existe $T \geq 0$ tal que, para todo $t_o \geq T$ e todo $\varphi \in C$, $x(t,t_o,\varphi)$ é limitada no futuro.

Tomemos $T > 0$ tal que $k\int_T^\infty h(t)dt < 1$. Sejam $t_o \geq T$ e $\varphi \in C$. Podemos escolher $H$ suficientemente grande de modo que $k[\|\varphi\| + \int_T^\infty H\, h(t)dt] < H$. Tomando, no Lema 4, $h_H(t) = H\, h(t)$ segue que a solução $x(t,t_o,\varphi)$ de (3) satisfaz à relação $\|x_t(t_o,\varphi)\| < H$.

Como tôda solução de (3) é limitada no futuro, então, o Corolário segue do Teorema 2.

A prova está completa.

## 3. ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Consideremos a equação

(7) $$\dot{u} = -\alpha u + b(t)u$$

onde $b(t)$ é contínua e não negativa para $t \geq 0$ e $\alpha > 0$.

Consideremos também a condição

(8) $$\lim_{(t,v)\to(\infty,\infty)} \sup \frac{1}{v} \int_t^{t+v} b(s)ds < \alpha \quad .$$

Não é difícil ver que (8) é equivalente à seguinte condição:

(9) Existem $\tau > 0$, $T > 0$ e $0 < \beta < \alpha$ de modo que

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} b(s)ds \leq \beta \quad \text{para} \quad t \geq T \ .$$

O lema seguinte é essencialmente uma comunicação que nos fizeram A. Strauss e J. Yorke.

LEMA 5 - A solução $u = 0$ de (7) é uniformemente assintòticamente estável se e sòmente se $b(t)$ satisfaz à condição (8).

Prova: Suponhamos (8) satisfeita

$$u(t+t_o,t_o,u_o) = u_o \, e^{[-\alpha t + \int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds]} =$$

$$= u_o . e^{-t[\alpha - t^{-1}\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds]} .$$

Seja $e > 0$ escolhido de modo que

$$\lim_{(t,v)\to(\infty,\infty)} \sup \frac{1}{v}\int_t^{t+v} b(s)ds = \tilde{\alpha} < \alpha - e$$

e, então, escolhemos $T_o > 0$, $T > 0$ de modo que

$$t^{-1}\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds \leq \alpha - e \quad \text{para} \quad t \geq T,\ t_o \geq T_o .$$

Seja $k$ escolhido de modo que $\int_{t_o}^{t_o+t} b(s)ds \leq k$ para $t_o \geq T_o$ e $0 \leq t \leq T$. Então, se $0 \leq t \leq T$, $t_o \geq T_o$ temos $|u(t+t_o,t_o,u_o)| \leq u_o\, e^{+k}$, enquanto que se $t \geq T$ temos $|u(t+t_o,t_o,u_o)| \leq |u_o|e^{-et}$.

Assim, para $t \geq 0$, $t_o \geq T_o$, temos

$$|u(t+t_o,t_o,u_o)| \leq |u_o|e^{eT}\ e^{k}\ e^{-et} .$$

Portanto, a solução $u = 0$ de (7) é uniformemente assintòticamente estável para $t_o \geq T_o$. Do teorema da continuidade em relação às condições iniciais segue que a solução $u = 0$ de (7) é uniformemente assintòticamente estável.

Suponhamos que $b(t)$ não satisfaça (8) e que $u=0$ seja uniformemente assintòticamente estável. Então, existem $\sigma > 0$ e $B > 0$ de modo que

(10) $$e^{\sigma(t)}\, u(t+t_o,t_o,1) \leq B, \quad t_o \geq 0 \quad e \quad t \geq 0 .$$

Como estamos supondo (8) não satisfeita, existem seqüências $\{t_m\}$, $\{v_m\}$, $t_m \to \infty$, $v_m \to \infty$, com $m \to \infty$, de modo que

$$\frac{1}{v_m}\int_{t_m}^{t_m+v_m} b(s)ds \geq \alpha - \frac{1}{2}\sigma \quad \text{para todo} \quad m .$$

Segue então que

$$e^{\sigma v_m}\, u(t_m+v_m,t_m,1) = e^{[\sigma\, v_m - \alpha\, v_m + \int_{t_m}^{t_m+v_m} b(s)ds]} =$$

$$= e^{v_m[\sigma-\alpha+\frac{1}{v_m}\int_{t_m}^{t_m+v_m} b(s)ds]} \geq e^{\frac{1}{2}\sigma\, v_m} \to \infty \quad \text{com} \quad m \to \infty.$$

Mas, isto contradiz (10) e, então, a prova está completa.

TEOREMA 3 - <u>Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:</u>

i) <u>a solução $y = 0$ de (1) é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positivas $\sigma$, $B$ tais que para todo $\varphi \in C$ temos</u>

(11) $$\|y_t(t_o,\varphi)\| \leq B\, e^{-\sigma(t-t_o)}\|\varphi\| , \quad t \geq t_o \geq 0 ;$$

ii) $|X(t,\varphi)| \le b(t)\|\varphi\|$, $\varphi \in C_H$, $t \ge 0$, <u>onde</u> $b(t)$ <u>satisfaz à condição (8) com</u> $0 < \alpha \leqq \frac{\sigma}{B}$ .

<u>Então, a solução</u> $x = 0$ <u>de (3) é exponencialmente estável</u>.

<u>Prova</u>: Da hipótese (ii) segue que

$$|X(t,\varphi)| \le w(t,\|\varphi\|),\ t \ge 0,\ \varphi \in C_H ,$$

onde $w(t,r) = b(t)r$.

A fim de aplicar o Teorema 1, consideremos a equação escalar

$$(12) \qquad \dot{u} = -\sigma u + B\, b(t)u,\quad u(t_o) = v(t_o,\varphi),\quad \text{onde}$$

$$v(t_o,\varphi) = \sup_{\tau \ge 0} \|y_{t_o+\tau}(t_o,\varphi)\| e^{\tau\sigma} .$$

De (11) segue que $v(t_o,\varphi) \le B\|\varphi\|$.

Como conseqüência do Lema 5 temos que a solução $u = 0$ de (12) é uniformemente assintòticamente estável. Desde que (12) é linear, $u = 0$ é exponencialmente estável [3 - pag. 43]. Então, existem $k > 0$, $e > 0$ de modo que

$$u(t) = u(t,t_o,\varphi) \le k\, e^{-e(t-t_o)} u(t_o) \le Bk\, e^{-e(t-t_o)} \|\varphi\|$$

para $t \ge t_o \ge 0$. Se $\rho = \frac{H}{kB}$, então, $\varphi \in C_\rho$, $t \ge t_o$ implicam $u(t,t_o,\varphi) < H$ para $t_o \le t < \infty$.

Portanto, aplicando o Teorema 1, segue que $\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq u(t,t_o,\varphi) \leq B\ k\ e^{-\epsilon(t-t_o)}\|\varphi\|$, para $\varphi \in C_\rho$ e $t_o \leq t < \infty$.

A prova está completa.

## 4. ESTABILIDADE EQUIASSINTÓTICA

Consideremos as equações escalares

$$\dot{v} = q(t)v \tag{13}$$

$$\dot{u} = q(t)u + c\ t^\nu |u|^{1+a} \tag{14}$$

onde $q(t)$ é contínua para $t \geq 0$ e $a,\nu,c$ constantes positivas.

LEMA 6 - <u>Seja a solução</u> $v = 0$ <u>de (13) exponencialmente estável</u>.

<u>Então, a solução</u> $u = 0$ <u>de (14) é equiassintòticamente estável</u>.

<u>Prova</u>: Para cada $s \geq 0$, seja $v(t,s)$ a solução de (13) satisfazendo $v(s,s) = 1$. Então, a solução $u(t) = u(t,t_o,v_o)$ de (14) satisfaz à equação integral

$$u(t) = v(t,t_o)u_o + \int_{t_o}^{t} v(t,s)c\ s^\nu |u(s)|^{1+a}\, ds\ .$$

Desde que a solução $v = 0$ de (13) é exponencialmente, existem constantes positivas $\sigma$ e $K$ de modo que

$$|v(t,s)| \leq K\, e^{-\sigma(t-s)}, \text{ para } t \geq s .$$

Seja $\eta > 0$ escolhido de modo que $cK\eta < \sigma$. Tomemos em seguida $P$ tal que $K^a\, e^{-a\beta t}\, t^{\nu} \leq P$ para $0 \leq t < \infty$, onde $\beta = \sigma - c\eta K$, e também $\delta = \delta(t_o) < \eta$ tal que $\delta^a\, t_o^{\nu} < \eta$ e $P\, \delta^a\, e^{a\beta t_o} < \eta$.

Para cada real $u_o$ satisfazendo $|u_o| < \delta$ e todo $t \geq t_o \geq 0$ segue que

$$|u(t)| \leq K e^{-\sigma(t-t_o)} |u_o| + K\, e^{-\sigma t} \int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}\, c\, s^{\nu} |u(s)|^{1+a}\, ds$$

e, por conseguinte,

$$e^{\sigma t}|u(t)| \leq K\, e^{\sigma t_o}|u_o| + K \int_{t_o}^{t} e^{\sigma s} c\, s^{\nu} |u(s)|\,|u(s)|^{a} ds .$$

Afirmamos que $|u(t)|^a\, t^{\nu} < \eta$ para $t_o \leq t < \infty$.

Supomos por momento que isto não seja verdade. Então, existe $\tau < \infty$ tal que $|u(t)|^a\, t^{\nu} < \eta$ para $t_o \leq t < \tau$ e $|u(\tau)|^a\, \tau^{\nu} = \eta$. Logo, $e^{\sigma t}|u(t)| \leq K\, e^{\sigma t_o}|u_o| + K \int_{t_o}^{t} e^{\sigma s}|u(s)|\, c\, \eta\, ds$ para $t_o \leq t \leq \tau$ e, então, usando a desigualdade de Gronwall, vem que

$$e^{\sigma t}|u(t)| \leq K\, e^{\sigma t_o}|u_o| e^{cK\eta(t-t_o)} \text{ para } t_o \leq t \leq \tau .$$

Donde, $|u(t)| \leq K\, e^{t_o(\sigma - cK\eta)}\, e^{(cK\eta-\sigma)t}|u_o| =$

$= K\, e^{-\beta(t-t_o)}|u_o|$ para $t_o \leq t \leq \tau$ e, portanto,

$|u(t)|^a\, t^\nu \leq |u_o|^a\, K^a\, e^{t_o a\beta}\, e^{-ta\beta}\, t^\nu < \delta^a\, e^{t_o a\beta} K^a e^{-ta\beta}\, t^\nu \leq$

$\leq \delta^a\, e^{t_o a\beta}\, P \leq \eta$, para $t_o \leq t \leq \tau$.

Somos, pois, levados a uma contradição e, portanto, $t_o \leq t < \infty$, $|u_o| < \delta$, implicam $|u(t)|^a\, t^\nu < \eta$.

Usando o mesmo argumento anterior vemos que

$$|u(t)| \leq K\, e^{-\beta(t-t_o)}|u_o| \quad \text{para} \quad t \geq t_o,\ |u_o| < \delta .$$

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $T = T(\epsilon)$ tal que $\eta K\, e^{-\beta T} < \epsilon$.

Então, $t \geq t_o + T(\epsilon)$, $|u_o| < \delta$, implicam $|u(t)| \leq K\, e^{-\beta(t-t_o)}|u_o| < \eta K\, e^{-\beta T} < \epsilon$, completando a prova do lema.

Consideremos o sistema

$$(15) \qquad \dot{x}(t) = L(t,x_t) + X(t,x_t) + Y(t,x_t)$$

onde $L(t,\varphi)$ é contínua para $t \geq 0$, $\varphi \in C$ e linear em $\varphi$, $X(t,\varphi)$ e $Y(t,\varphi)$ são contínuas para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, $0 < H \leq \infty$, e localmente lipschitzianas em $\varphi$.

TEOREMA 4 - <u>Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:</u>

i) a solução $y = 0$ de (1) é exponencialmente estável;

ii) $|X(t,\varphi)| \le b(t)\|\varphi\|$, $\varphi \in C_H$, $t \ge 0$, onde $b(t)$ satisfaz à condição (8), com $0 < \alpha < \frac{\sigma}{B}$, $\sigma$ e $B$ sendo escolhidos como em (11);

iii) existem constantes positivas $a$, $\nu$ e $k$ de modo que

$$|Y(t,\varphi)| \le k\, t^{\nu} \|\varphi\|^{1+a}, \quad \varphi \in C_H, \quad t \ge 0.$$

Então, a solução $x = 0$ de (15) é equiassintòticamente estável.

Prova: a prova é feita com argumento análogo ao da prova do Teorema 3 e usando o Lema 5, Lema 6 e Teorema 1.

OBSERVAÇÃO: Usando o Teorema 2 do Capítulo II podemos também mostrar a estabilidade equiassintótica da solução $x = 0$ de (15), supondo no Teorema 4 as hipóteses (ii) e (iii) satisfeitas para $t \ge$ algum $\tau \ge 0$ e $Y(t,0) = 0$ para $t \ge 0$.

## 5. ESTABILIDADE ASSINTÓTICA UNIFORME

LEMA 7 - Seja $b(t)$ contínua e não negativa para $0 \le t < \infty$, com

$$(16) \qquad \int_t^{t+1} b(s)ds \to 0 \quad \underline{\text{para}} \quad t \to \infty .$$

<u>Então, para todo</u> $\alpha > 0$, <u>temos que</u>

$$e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} b(s)ds \to 0 \quad \underline{\text{para}} \quad t \to \infty.$$

Para uma prova ver [13].

TEOREMA 5 - <u>Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas</u>:

i) <u>a solução</u> $y = 0$ <u>de (1) é exponencialmente estável</u>;

ii) $|X(t,\varphi)| \leq b(t)$, $\varphi \in C_H$, $t \geq 0$, <u>onde</u> $b(t)$ <u>satisfaz à condição (16)</u>;

iii) $|Y(t,\varphi)| \leq \gamma\|\varphi\|$, $\varphi \in C_H$, $t \geq 0$, $\gamma$ <u>sendo suficientemente pequeno</u>;

iv) $X(t,0) = 0$ <u>para todo</u> $t \geq 0$.

<u>Então, a solução</u> $x = 0$ <u>de (15) é uniformemente assintòticamente estável</u>.

Seguir argumento análogo ao da prova do Teorema 3, usando Lema 7, Teorema 2 do Capítulo II e Teorema 1.

## 6. SOLUÇÕES LIMITADAS

O seguinte lema está essencialmente contido em [13].

LEMA 8 - *Seja* $c(t)$ *uma função escalar contínua com* $\int_t^{t+1} c(s)ds$ *limitada em* $[0,\infty)$.

*Então, dado* $\delta > 0$ *existe* $A = A(\delta) > 0$ *tal que* $e^{-\delta t} \int_{t_o}^{t} e^{\delta s} c(s)ds < A$, *para* $t \geq t_o \geq 0$.

Levando em conta o Teorema 1 e o Lema 8 o seguinte teorema pode ser provado.

TEOREMA 6 - *Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

i) *a solução* $y = 0$ *de (1) é exponencialmente estável;*

ii) $|X(t,\varphi)| \leq b(t)\|\varphi\|$, $\varphi \in C_H$, $t \geq 0$, *onde* $b(t)$ *satisfaz à condição (8), com* $0 < \alpha < \frac{\sigma}{B}$ ;

iii) $|Y(t,\varphi)| \leq c(t)$, $t \geq 0$, $\varphi \in C$, *onde* $\int_t^{t+1} c(s)ds$ *é limitada em* $[0,\infty)$.

*Então, existe uma constante positiva* $K$ *tal que, dado qualquer* $\rho$ *positivo, existe* $T = T(\rho)$ *tal que* $t \geq t_o + T(\rho)$ *e* $\|\varphi\| \leq \rho$ *implicam* $\|x_t(t_o,\varphi)\| \leq K$, *onde* $x(t,t_o,\varphi)$ *é a solução de (15).*

## 7. ESTABILIDADE NO ESPAÇO PRODUTO

Vamos, nesta secção, usar a notação $C^n$ para designar o espaço de Banach $C([-h,0], R^n)$.

Consideremos a seguinte hipótese em relação a uma função contínua e não negativa $a(t)$, $t \geq 0$:

$$(17) \qquad \sup_{t_o \geq 0} \int_0^\infty e^{-\gamma t} a(t+t_o)dt < \infty \ , \quad \gamma > 0$$

ou, equivalentemente,

$$(17') \qquad \sup_{t_o \geq 0} e^{\gamma t_o} \int_{t_o}^\infty e^{-\gamma t} a(t)dt < \infty \ .$$

Uma condição suficiente para (17) é

$$(18) \qquad a(t) \leq M + c(t)$$

onde $M > 0$ e $c(t) \geq 0$ com $\int^\infty c(t)dt < \infty$.

As condições (17) e (18) não são equivalentes. De fato, a função definida por

$a(t) = n$ se $t = n + \frac{1}{2^n}$

$a(t) = 0$ se $t \notin [n, n+\frac{1}{n}]$

$a(t)$ linear nos demais intervalos, $n = 1,2,...$

satisfaz (17) mas não (18).

Consideremos os sistemas

$$(19)\qquad \dot{u}(t) = L(t,u_t)$$

$$(20)\qquad \dot{v}(t) = J(t,v_t)$$

$$(21)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(t,x_t) + X(t,x_t,y_t) \\ \dot{y}(t) &= J(t,y_t) + Y(t,x_t,y_t) \end{aligned}$$

onde $L(t,\varphi)$ é contínua em $[0,\infty) \times C^n$ e linear em $\varphi$, $J(t,\psi)$ é contínua em $[0,\infty) \times C^m$ e linear em $\psi$, $X(t,\varphi,\psi)$ e $Y(t,\varphi,\psi)$ são contínuas e localmente lipschitzianas em relação a $(\varphi,\psi)$ em $[0,\infty) \times C^n_H \times C^m_H$.

TEOREMA 7 - Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:

i) a solução zero de (19) é uniformemente estável;

ii) a solução zero de (20) é exponencialmente estável; isto é, existem constantes positivas $\sigma$, $B$ de modo que para todo $\psi \in C$ temos

$$(22)\qquad \|v_t(t_o,\psi)\| \le B\, e^{-\sigma(t-t_o)}\|\psi\| \;,\quad t \ge t_o \ge 0;$$

iii) $|X(t,\varphi,\psi)| \le a(t)\|\psi\|^{\beta} + g(t)$, $\varphi \in C^n_H$, $\psi \in C^m_H$, $t\ge 0$, onde $\beta > 0$, $a(t)$ satisfaz à condição (17) com $\gamma$ suficientemente pequeno e $g(t) \ge 0$ com $\int^{\infty} g(t)dt < \infty$.

iv) $|Y(t,\varphi,\psi)| \leq b(t)\|\psi\| + G\|\psi\|^{1+\rho}$, $\varphi \in C_H^n$, $\psi \in C_H^m$,

$t \geq 0$, onde $b(t)$ satisfaz à condição (8) com $\alpha < \frac{\sigma}{B}$ e $\rho$, $G$ são constantes positivas.

Então, as seguintes conclusões são verdadeiras:

Existem constantes positivas $\mathcal{E}$, $\mu$, $T_o$ tais que $\varphi \in C_\mu^n$, $\psi \in C_{\mathcal{E}}^m$, $t_o \geq T_o$, implicam $y(t,t_o,\varphi,\psi) \to 0$ com $t \to \infty$ e, em adição, se $|L(t,\varphi)| \leq \lambda(t)\|\varphi\|$, $\varphi \in C^n$, $t \geq 0$, com $\int^\infty \lambda(t)dt < \infty$, então, $\lim_{t\to\infty} x(t,t_o,\varphi,\psi)$ existe. Aqui $(x(t,t_o,\varphi,\psi), y(t,t_o,\varphi,\psi))$ denota a solução de (21) com função inicial $(\varphi,\psi)$ em $t = t_o$.

Dado $\epsilon > 0$ existem $T(\epsilon) \geq 0$ e $\delta(\epsilon) > 0$ de modo que $\varphi \in C_\delta^n$, $\psi \in C_\delta^m$, $t \geq t_o \geq T(\epsilon)$ implicam $x_t(t_o,\varphi,\psi) \in C_\epsilon^n$ e $y_t(t_o,\varphi,\psi) \in C_\epsilon^m$. (Em particular isto diz, levando em conta o Teorema 2 do Capítulo II, que se $X(t,0,0) = 0$, $t \geq 0$, então, a solução zero de (21) é uniformemente estável).

Prova: Sejam $\varphi_o \in C_H^n$, $\psi_o \in C_H^m$ e $(\xi(t),\eta(t)) =$

$$= (x(t,t_o,\varphi_o,\psi_o), y(t,t_o,\varphi_o,\psi_o)), \quad t_o-h \leq t < t^+,$$

onde $[t_o-h,t^+)$ é o máximo intervalo, aberto à direita, em que $(\xi(t),\eta(t))$ está definido.

Consideremos o sistema

$$\dot{y}(t) = J(t,v_t) + Y(t,\xi_t,y_t), \quad t_o \leq t < t^+. \tag{23}$$

Da hipótese (iv) segue que

$$\|Y(t,\xi_t,\psi)\| \le w(t,\|\psi\|), \quad \psi \in C_H^m , \quad t_o \le t < t^+ ,$$

onde $w(t,r) = [b(t)+GH^\rho]r, \; t \ge t_o, \; r \ge 0.$

Para aplicar o Teorema 1 consideremos a equação escalar

$$\dot{z} = -\sigma z + B[b(t) + GH^\rho]z = \tag{24}$$

$$= -[\sigma - BGH^\rho]z + B\, b(t)z$$

$$z(t_o) = z(t_o,t_o,\psi) = v(t_o,\psi) \le B\|\psi\| .$$

Sem perda de generalidade podemos supor $H$ suficientemente pequeno de modo que $B\alpha < [\sigma - BGH^\rho]$. Então, do Lema 5, segue que a solução $z = 0$ de $\dot{z} = -[\sigma - BGH^\rho]z + B\, b(t)z$ é exponencialmente estável. Portanto, existem constantes positivas $k_o$, $\alpha_o$, de modo que

$$z(t) = z(t,t_o,\psi) \le k_o\, e^{-\alpha_o(t-t_o)} z(t_o) \le Bk_o\, e^{-\alpha_o(t-t_o)}\|\psi\|,$$

para $t \ge t_o \ge 0.$

Tomando $\tau < \dfrac{H}{B\, k_o}$, segue que $\psi \in C_\tau^m$ implica $z(t,t_o,\psi) = z(t) < H$ para $t_o \le t < \infty.$

Então, aplicando o Teorema 1 ao sistema (23), com $\psi = \psi_o$, segue que

$$\|\eta_t\| = \|y_t(t_o,\varphi_o,\psi_o)\| \le z(t,t_o,\psi_o) \le Bk_o\, e^{-\alpha_o(t-t_o)}\|\psi_o\| <$$

$$< Bk_o\tau < H, \text{ para } \psi_o \in C_\tau^m , \; \varphi_o \in C_H^m , \; 0 \le t_o \le t < t^+ .$$

O fato de estarmos aplicando o Teorema 1 a um sistema em que na perturbação temos $t \in [t_o, t+)$, $t^+ \leq \infty$, não oferece qualquer dificuldade.

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = L(t, x_t) + X(t, x_t, \eta_t) \ . \tag{25}$$

Temos que

$$|X(t,\varphi,\eta_t)| \leq a(t) \, \|\eta_t\|^\beta + g(t) \leq$$

$$\leq a(t)[\tau B k_o]^\beta \, e^{-\beta\alpha_o(t-t_o)} + g(t) \quad \text{para} \quad \psi_o \in C^m_\tau \ ,$$

$\varphi \in C^n_H$ , $t_o \leq t < t^+$.

Da hipótese (iii), com $\gamma = \beta\alpha_o$, segue que existe $M = M(\gamma)$ tal que

$$\int_{t_o}^\infty a(s) e^{-\beta\alpha_o(s-t_o)} ds < M, \ t_o \geq 0.$$

Portanto, existem constantes positivas $\tau$ e $\mu$, suficientemente pequenas e $T_o > 0$ suficientemente grande de modo que

$$k[\mu + (\tau B k_o)^\beta \int_{t_o}^\infty a(s) e^{-\beta\alpha_o(s-t_o)} ds + \int_{T_o}^\infty g(s) ds] <$$

$$< k[\mu + (\tau B k_o)^\beta M + \int_{T_o}^\infty g(s) ds] < H, \text{ onde } k \text{ é dado}$$

como no Lema 3 em relação ao sistema (19).

Aplicando o Teorema 1 em relação a (25), com

$\varphi = \varphi_o$, $K(t) = k$, $\alpha(t) = 0$, segue que

$$\|\xi_t\| = \|x_t(t_o,\varphi_o,\psi_o)\| \le$$

$$\le k[\|\varphi_o\| + \int_{t_o}^{t} a(s)(\tau B k_o)^{\beta} e^{-\beta\alpha_o(s-t_o)} ds + \int_{t_o}^{\infty} g(s)ds] \le$$

$$\le k[\|\varphi_o\| + (\tau B k_o)^{\beta} \int_{t_o}^{t} a(s) e^{-\beta\alpha_o(s-t_o)} ds + \int_{t_o}^{\infty} g(s)ds] <$$

$$< k[\mu + (\tau B k_o)^{\beta} M + \int_{T_o}^{\infty} g(s)ds] < H,$$

para $T_o \le t_o < t^+$, $\varphi_o \in C^n_\mu$, $\psi_o \in C^m_\tau$ .

Então, $\varphi_o \in C^n_\mu$ , $\psi_o \in C^m_\tau$ , $t \ge t_o \ge T_o$, implicam $t^+ = \infty$ e, consequentemente,

$$\|x_t(t_o,\varphi_o,\psi_o)\| \le k[\mu + (\tau B k_o)^{\beta} M + \int_{T_o}^{\infty} g(s)ds] < H$$

$$\|y_t(t_o,\varphi_o,\psi_o)\| \le B\, k_o\, e^{-\alpha_o(t-t_o)} \tau < B k_o \tau < H$$

para todo $t_o \le t < \infty$.

Isto implica que para $\varphi_o \in C^n_\mu$ , $\psi_o \in C^m_\tau$ , $t_o \ge T_o$, temos que $y_t(t_o,\varphi_o,\psi_o) \to 0$ com $t \to \infty$ e, em adição, se $|L(t,\varphi)| \le \lambda(t)\|\varphi\|$, $\varphi \in C^n$, $t \ge 0$ com $\int^{\infty} \lambda(t)dt < \infty$, então, $\lim_{t\to\infty} x(t,t_o,\varphi_o,\psi_o)$ existe.

Dado $\epsilon$, $0 < \epsilon < H$, sejam $\delta = \delta(\epsilon) < \frac{\epsilon}{Bk_o}$ , $T(\epsilon) \ge T_o$ escolhidos de modo que

$$k[\delta + (\delta B k_o)^{\beta} M + \int_{T(\epsilon)}^{\infty} g(s)ds] < \epsilon \quad .$$

Então, procedendo como antes, vemos que $\varphi_o \in C_\delta^n$, $\psi_o \in C_\delta^m$, $t \geq T_o \geq T(\epsilon)$ implicam

$$\|x_t(t_o,\varphi_o,\psi_o)\| < \epsilon$$

$$\|y_t(t_o,\varphi_o,\psi_o)\| < \epsilon . e^{-\alpha_o(t-t_o)} < \epsilon \quad .$$

A prova está completa.

Referências para êste capítulo: [4-b-], [8], [12, a-b], [13], [14-a].

## REFERÊNCIAS


[1] - Bellman, R. and Cooke, K. - "Differential-Difference Equations" Academic Press, 1963.

[2] -a- Elsgots, L.E. - "Introduction to the theory of Differential Equations with Deviating Arguments", Holden Day, 1966.

-b- - "Qualitative Methods in Mathematical Analysis", A.M.S., Providence - R.I., 1964.

[3] - Halanay, A. - "Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lag, "Academic Press, N.Y., 1966.

[4] -a- Hale, J.K. - "Asymptotic Behavior of the solutions of Differential-Difference Equations", Proc. Symp. Nonlinear Oscillations, Kiev, U.S.S.R., II, pp. 409-426, 1961.

-b- - "A stability Theorem for Functional Differential Equations", Proc. Nat. Acad. Sci. 50, pp. 942-946, 1963.

-c- - "Sufficient Conditions for Stability and Instability of Autonomous Functional-Differential Equations", J. Differential Equations, 1 - pp. 452-482, 1965.

-d- - "Functional Differential Equations of Retarded Type" - 7º Colóquio Bras. Mat., 1969.

[5] - Krasovskii, N. - "Stability of Motion", Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1963.

[6] - La Salle, J.P. - "An Invariance Principle in the Theory of Stability", Differential Equations and Dynamical Systems, Acad. Press, pp. 277-286, 1969.

[7] - La Salle, J.P. and Lefschetz, S. - "Stability by Liapunov's Direct Method with Applications", Academic Press, N.Y., 1961.

[8] - Lakshmikantham and S. Leela - "Differential and Integral Inequalities - Vol. I,II", Academic Press, 1969.

[9] - Levin, J.J. and Nobel, J. - "On a nonlinear Delay Equation", J. Math. Anal. Appl., 8, pp. 31-44, 1964.

[10] - Massera, J.L. - "Contributions to Stability Theory" Ann. Math. 64, pp.182-206, 1956.

[11] - Miller, R.K. - "Asymptotic Behavior of nonlinear Delay-Differential Equations", J. Differential Equations, vol. 1.3, pp. 293-305, 1965.

[12] -a- Onuchic, N. - "On the Uniform Stability of a Perturbed Linear Functional Differential Equation", Proc. A.M.S., 1968.

-b- - "Asymptotic Behavior of a Perturbed Linear Differential Equation with Time Lag on a Product Space", Annali di Matematica Pura ed Applicata, Bologna, Itália, 1970.

[12] -c- Onuchic, N. - "Stability Properties of a Second Order Differential Equation", Acta Mexicana de Ciencia y Tecnologia, vol. 3, pp. 6-11, 1969.

-d- - "On a Criterium of Instability for Differential Equations with Time Delay", Periodic Orbits, Stability and Resonance Reidel Publishing Co. - Holanda.

-e- - "Invariance Properties in the Theory of Ordinary Differential Equations with Applications to Stability Properties", Journal on Control, 1971.

[13] - Strauss,A. and Yorke,J. - "Perturbation Theorems for Ordinary Differential Equations" J. Differential Equations, 3, pp. 15-30, 1967.

[14] -a- Yoshizawa,P. - "Asymptotic Behavior of solutions of a Systems of Differential Equations" - Contributions to Differential Equations 1, pp.371-389, 1963.

-b- - "Stability Theory by Liapunov's Second Method", The Mathematical Society of Japan, 1966.

[15] - Zverkin, A.M. - "Dependence of the Stability of Solutions of Linear Differential Equations with Lagging upon the Choice of Initial Moment", Vestnik Markov, Univ.Ser.Mat.Mech.Astr.Fiz. Hin., 5, pp.15-20, 1959.