

TOPOLOGIA ALGÉBRICA

JOÃO BOSCO PITOMBEIRA

INTRODUÇÃO

Estas notas apresentam uma introdução à parte da Topologia Algébrica que poderia ser denominada a teoria clássica da homologia singular, isto é, aquela parte da teoria singular anterior à introdução das operações de cohomologia, das seqüências espectrais, etc. O máximo que nos permitimos foi a introdução do produto em cohomologia, embora sem demonstrações. Achamos que a maneira natural de apresentar êste produto é por meio da técnica dos modelos acíclicos e introduzi-la seria não somente alongar as notas mas como forçar a introdução dos conceitos de categoria e funtores, que resolvemos evitar nestas notas introdutórias.

Não há nada de nôvo nestas páginas. Baseamo-nos no livro de E. Artin, "Einführung in die Algebraische Topologie". Pode-se argumentar, com razão, que a parte da topologia algébrica aqui apresentada é incapaz de resolver novos problemas, e que o grande rejuvenescimento do assunto nos últimos vinte anos se deveu a técnicas inteiramente novas. Achamos, todavia, que uma exposição a estas novas técnicas, antes que o aluno se tenha familiarizado com o material clássico mais intuitivo e geométrico, pode

ser prejudicial.

Estas notas, elaboradas às pressas, contêm certamente erros e imperfeições. Desejo agradecer à Comissão Organizadora do 8º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de ministrar êste curso. O grande esforço feito para traduzir um manuscrito hieroglífico não deve passar silencioso: meus sinceros agradecimentos ao Sr. Wilson Góes.

Fortaleza, Janeiro de 1971

Rio de Janeiro, abril de 1971

João Bosco Pitombeira

ÍNDICE

	pag.
PRIMEIRA PARTE - A homologia singular e suas propriedades básicas.	
CAPÍTULO 1 - Pré-requisitos algébricos.....	1
CAPÍTULO 2 - A homologia singular e suas propriedades básicas.....	11
§2.1 - Definição da homologia singular.....	11
§2.2 - A seqüência exata de homologia de um par....	21
§2.3 - Homologia aumentada.....	24
CAPÍTULO 3 - Invariância sob homotopia e excisão.....	27
§3.1 - Invariância sob homotopia.....	27
§3.2 - O Teorema da excisão.....	32
CAPÍTULO 4 - A seqüência exata de homologia de um terno e a seqüência de Mayer-Vietoris...	41
§4.1 - A seqüência exata de homologia de um terno..	41
§4.2 - A seqüência de Mayer-Vietoris.....	43
SEGUNDA PARTE - Aplicações de homologia singular	
CAPÍTULO 5 - Os grupos de homologia da esfera S^n e o teorema do ponto fixo de Brouwer....	53
CAPÍTULO 6 - Algumas aplicações à esfera.....	63

	pag.
CAPÍTULO 7 - O teorema fundamental da álgebra e o teorema de separação de Jordan-Brouwer	71
§7.1 - O teorema fundamental da álgebra.....	71
§7.2 - O teorema da separação de Jordan-Brouwer..	74
CAPÍTULO 8 - Os complexos celulares.....	83
§8.1 - Definição e exemplos de complexos celu- lares.....	83
§8.2 - A homologia dos complexos celulares.....	85
TERCEIRA PARTE - Cohomologia Singular	
CAPÍTULO 9 - A cohomologia singular e sua relação com a homologia singular.....	95
§9.1 - Definição de cohomologia	95
§9.2 - Resoluções e Ext	97
§9.3 - O Teorema dos Coeficientes Universais.....	103
CAPÍTULO 10 - A existência de um produto em cohomologia e aplicações.....	107
§10.1 - O produto tensorial de complexos. A idéia de Tor. O teorema de Eilenberg- Zilber	107
§10.2 - O produto interno em cohomologia	109
BIBLIOGRAFIA	117

PRIMEIRA PARTE

A HOMOLOGIA SINGULAR E SUAS PROPRIEDADES BÁSICAS

CAPÍTULO 1

PRÉ-REQUISITOS ALGÉBRICOS

Reunimos, neste capítulo, as noções de álgebra que serão diretamente utilizadas no restante do curso. As referências canônicas para o material aqui apresentado são Cartan-Eilenberg [9] e Mac Lane [10].

§1.1 - Os complexos-cadeia e sua homologia

Tomemos um anel R , comutativo e com identidade multiplicativa.

DEFINIÇÃO 1.1.1 - Um complexo-cadeia C sôbre R é uma família $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, onde os C_n são R -módulos, e homomorfismos de módulos $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ tais que $d_{n-1} \cdot d_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\dots \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \dots$$

Observemos que, se $I_m d_n$ é o sub-módulo de C_{n-1} formado pela imagem de d_n , e $\text{Ker } d_{n-1}$ é o sub-módulo de C_{n-1} constituído pelo núcleo de d_{n-1} , então vem, da definição, que $I_m d_n \leq \text{Ker } d_{n-1}$.

Se $C_n = 0$, para $n < 0$, dizemos que o complexo-cadeia é positivo.

Exemplos de complexos-cadeia:

Em ambos os exemplos o anel R será o anel dos inteiros.

1.1.2) Seja o complexo tal que $C_n = Z, \forall n \in Z$ e

$d_n(k) = 2k$, se n é par, $d_n(k) = 0$, se n é ímpar.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & \dots \\ & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & -2 & & \end{array}$$

1.1.3) Considere o complexo-cadeia abaixo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & Z & \xrightarrow{d_2} & Z & \xrightarrow{d_1} & Z_2 & \rightarrow & 0 & \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots \\ & & & & & & & & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \end{array}$$

onde $C_2 = Z$, $C_1 = Z$, $C_0 = Z_2$, $C_n = 0$ se $n \neq 0, 1, 2$ e $d_2(k) = 2k$, $d_1(k) = \bar{k}$, \bar{k} a classe definida por k em Z_2 .

DEFINIÇÃO 1.1.4 - Dado um complexo-cadeia C_I um sub-complexo K de C é uma coleção de módulos $\{K_n\}_{n \in Z}$ tais que $K_n \leq C_n, \forall n \in Z$ e $d_n(K_n) \leq K_{n-1} \forall n \in Z$.

DEFINIÇÃO 1.1.5 - Um complexo-cadeia C é dito exato se, para todo $n \in Z$, $I_m d_n = \text{Ker } d_{n-1}$.

O complexo do Exemplo 1.1.3 é exato, mas o mesmo não acontece com o do Exemplo 1.1.2.

Chamando de $Z_n = \text{Ker } d_n$, $B_n = \text{Im } d_{n+1}$ vemos que, para um complexo-cadeia, $B_n \leq Z_n \leq C_n$.

DEFINIÇÃO 1.1.6 - O n-ésimo módulo de homologia de um complexo-cadeia C , $H_n(C)$, é o módulo quociente Z_n/B_n ; é também chamado o módulo de homologia de C em dimensão n .

EXERCÍCIOS

1.1.7 - Quais os módulos de homologia do complexo de 1.1.2? e de 1.1.3?

1.1.8 - Sejam G, H e L grupos cíclicos de ordens 8, 16 e 2 e com geradores a, b e c respectivamente. Prove que o complexo (sobre Z)

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow G \xrightarrow{\alpha} H \xrightarrow{\beta} L \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

onde $\alpha(a) = 2b$, $\beta(b) = c$ tem módulos de homologia triviais.

Um complexo-cadeia tem todos seus módulos de homologia triviais se e somente se é exato. Referimo-nos, mais concisamente, à homologia de um complexo C :

DEFINIÇÃO 1.1.9 - A homologia $H_*(C)$ de um complexo-cadeia C é a coleção de módulos $\{H_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Os complexos como os que aparecem em 1.1.3 e 1.1.8 ocorrem freqüentemente e merecem um nome:

DEFINIÇÃO 1.1.10 - Uma seqüência curta é um complexo-cadeia da forma $\dots \rightarrow 0 \rightarrow H \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

onde todos os R-módulos não indicados são triviais. Uma seqüência curta exata é uma seqüência curta que é exata (considerada como complexo-cadeia).

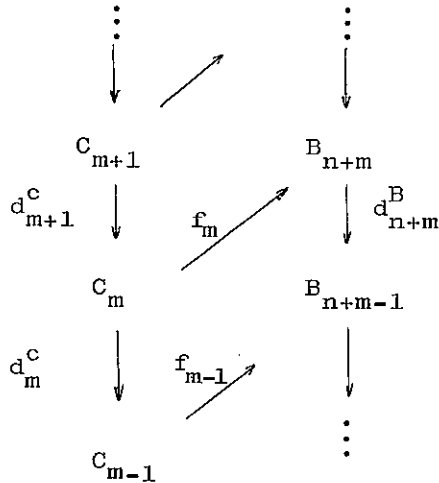
EXERCÍCIOS

1.1.11 - Mostre que se $0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata, então α é um monomorfismo e β um epimorfismo.

1.1.12 - Se $0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata e se $x \in M$ é tal que $\beta(x) = 0$, então existe um único $y \in L$ tal que $\alpha(y) = x$.

Passamos, agora, a estudar aplicações entre dois complexos-cadeia:

DEFINIÇÃO 1.1.13 - Uma aplicação f de grau n entre dois complexos-cadeia C e B é uma coleção $\{f_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos entre R-módulos tais que $f_m: C_m \rightarrow B_{m+n}$ e, para todo m , $d_{n+m}^B \cdot f_m = f_{m-1} \cdot d_m^C$.



Trabalharemos, quase sempre, com aplicações de grau zero, ou seja, aquelas para as quais $d_m^B \cdot f_m = f_{m-1} \cdot d_m^C$.

TEOREMA 1.1.14 - Sejam C e β complexos-cadeia e

$f: C \rightarrow \beta$ uma aplicação de grau zero entre C e β . Então f induz uma aplicação $f_* = \{f_n\}_*_{n \in \mathbb{Z}}$ entre as homologias de C e β : $f_n)_* : H_n(C) \rightarrow H_n(\beta)$.

Demonstração: Se $\bar{x} \in H_n(C)$, definamos $f_n)_*(\bar{x}) = \overline{f_n(x)} \in H_n(\beta)$. Resta mostrar que $f_n(x)$ é um ciclo e que se $\bar{x} = \bar{y}$, então $f_n)_*(\bar{x}) = f_n)_*(\bar{y})$. Com efeito,

se $d_n^C(x) = 0$, então, como $d_n^B \cdot f_n = f_{n-1} \cdot d_n^C$, vemos que $d_n^B(f_n(x)) = 0$. Por outro lado, se $\bar{x} = \bar{y}$, segue-se que $x = y + d_{n+1}^C(w)$, $w \in C_{n+1}$; mas então $f_n(x) = f_n(y + d_{n+1}^C(w)) = f_n(y) + f_n(d_{n+1}^C(w)) = f_n(y) + d_{n+1}^B(f_{n+1}(w))$

e assim $(f_n(x)) = (\overline{f_n(y)})$. É óbvio que $(f_n)_*$ é um homomorfismo de R-módulos.

EXERCÍCIOS

1.1.15 - É possível formular um teorema análogo a 1.1.14 para aplicações $f: C \rightarrow B$ de grau $n, n \neq 0$?

1.1.16 - Se $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ são aplicações de grau zero entre complexos, mostre que $(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*$.

1.1.17 - Se $1_C: C \rightarrow C$ é a aplicação de complexos dada por $(1_C)_n = 1_{C_n}$, o homomorfismo identidade de C_n , então $(1_C)_*$ é a aplicação que, em dimensão n é a identidade de $H_n(C)$.

1.1.18 - Se $f: A \rightarrow B$ é uma aplicação de complexos que é um isomorfismo para todo n , será $f_*: H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ um isomorfismo para todo n ?

DEFINIÇÃO 1.1.19 - Os complexos-cadeia A, B, C e os homomorfismos de complexos-cadeia,

$\alpha: A \rightarrow B, \beta: B \rightarrow C$ formam uma seqüência curta exata de complexos, denotada por $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$, se, para todo n , $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} B_n \xrightarrow{\beta_n} C_n \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata de R-módulos.

TEOREMA 1.1.20 - Uma seqüência curta exata de complexos-cadeia $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ induz, em ho-

mologia, uma seqüência (complexo-cadeia) exata

$$\dots \rightarrow H_n(\mathbb{G}) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(\mathbb{B}) \xrightarrow{\beta_*} H_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(\mathbb{G}) \xrightarrow{\alpha_*} \dots$$

onde α_* e β_* são as aplicações em homologia induzidas por α e β e τ é definida como segue: se $\bar{x} \in H_n(\mathbb{C})$, $\exists b \in B_n$ tal que $\beta(b) = x$; mas então $\beta d(b) = 0$ e isso implica que $\exists a \in A_{n-1}$ com $\alpha(a) = \alpha(b)$. Defina $\tau_n(\bar{x}) = \bar{a}$ (resta mostrar que esta aplicação está bem definida. Isso será feito na demonstração do teorema).

Demonstração: Em primeiro lugar, devemos provar que τ está de fato bem definida. Se $\bar{x} = \bar{y} \in H_n(\mathbb{C})$, então $\exists c \in C_{n+1}$ tal que $x = y + dc$. Tome $b \in B_n$ tal que $\beta(b) = x$ e $b' \in B_{n+1}$ tal que $\beta(b') = c$ e assim $\beta(b+db') = \beta(b) + \beta db' = y$ e como $d(b+db') = db$, vem que $\tau(\bar{y}) = \bar{a}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow b' & \longrightarrow & \downarrow c \\
 A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n \\
 \downarrow & & \downarrow b & \longrightarrow & \downarrow x=y+dc \\
 A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1}
 \end{array}$$

Por outro lado, se b e $b' \in B_n$, com $\beta(b) = \beta(b') = x$, então $\beta(b-b') = 0$ e $\exists a'' \in A_n$ tal que $\alpha(a'') = b-b'$. Logo se $a' \in A_{n-1}$ é tal que $\alpha(a') = db'$, como $\alpha(a-a') = db-db'$, vem que $da'' = a-a'$ e assim $\bar{a} = \bar{a}' \in H_{n-1}(A)$. Desta maneira, fica provado que $\bar{a} \in H_{n-1}(G)$ não depende da escolha do representante de classe de $\bar{x} \in H_n(C)$ nem da escolha do elemento $b \in B_n$ tal que $\beta(b) = x$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n \\
 \downarrow & & \downarrow & \begin{array}{c} b \longrightarrow \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} x \\ \downarrow \end{array} \\
 A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} \\
 \downarrow a & \longrightarrow & \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\
 A_{n-2} & \longrightarrow & B_{n-2} & \longrightarrow & C_{n-2} \\
 & & & & \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \end{array}
 \end{array}$$

Devemos, agora, mostrar que $I_m(\alpha_n)_* = \text{Ker}(\beta_n)_*$, $I_m(\beta_n)_* = \text{Ker} \tau_n$, $I_m \tau_n = \text{Ker}(\alpha_{n-1})_*$. Com efeito, o resultado de 1.1.16 mostra imediatamente que $I_m(\alpha_n)_* \leq \text{Ker}(\beta_n)_*$. Por outro lado, se $\beta_n)_*(\bar{x}) = 0$, onde $\bar{x} \in H_n(B)$, então $\exists c \in C_{n+1}$ tal que $d(c) = \beta_n(x)$; mas $\exists b' \in B_{n+1}$ com $\beta_{n+1}(b') = c$; assim, $\beta_n(db'+x) = 0$ e portanto $\exists a \in A_n$ tal que $\alpha_n(a) = -db'+x$ e vê-se facilmente que $\alpha_n)_*(\bar{a}) = \bar{x}$, e isso conclui a demonstração de que $I_m(\alpha_n)_* = \text{Ker}(\beta_n)_*$.

Mostremos também que $I_m(\beta_n)_* = \text{Ker } \tau_n$. Se $\bar{x} \in I_m(\beta_n)_*$, então $dx = 0$ e $\exists \bar{b} \in H_n(\beta)$ tal que $\beta_n)_*(\bar{b}) = \bar{x}$; mas então $db = 0$ e podemos tomar b com a propriedade de que $\beta b = x$ (por quê?); vemos assim que $\tau(\bar{x}) = 0$ pois $db = 0$ (veja a definição de τ !). Se, por outro lado, $\tau(\bar{x}) = \bar{a} = 0 \in H_{n-1}(\mathbb{C})$, então $\exists a' \in A_n$ com $da' = a$; mas então $d(-\alpha(a') + b) = 0$ e logo vemos que $\beta)_*(\overline{b - \alpha(a')}) = \bar{x}$, como queríamos demonstrar.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\alpha} & B_n & \xrightarrow{\beta} & C_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow a' & & \downarrow & \xrightarrow{b} & x \\
 & & \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow \\
 & & a & \longrightarrow & db & \longrightarrow & 0 \\
 & & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1}
 \end{array}$$

O restante da demonstração é o exercício abaixo:

EXERCÍCIO

1.1.21 - Mostre que, na situação de 1.1.20, $I_m(\tau_n) = \text{Ker}(\alpha_{n-1})_*$.

CAPÍTULO 2

A HOMOLOGIA SINGULAR E SUAS PROPRIEDADES BÁSICAS

§2.1 - Definição da homologia singular

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e \mathbb{R}^∞ um produto infinito enumerável de cópias de \mathbb{R} . Considere os pontos $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ de \mathbb{R}^∞ definidos por

$$E_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$$

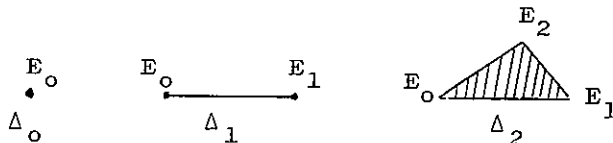
$$E_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

\vdots

DEFINIÇÃO 2.1.1 - O simplexo geométrico de dimensão q , Δ_q , é o fêcho convexo dos pontos E_0, E_1, \dots, E_q .

Damos, abaixo, uma representação de Δ_0 , Δ_1 e Δ_2 :



A aplicação (contínua) identidade de Δ_q em Δ_q será denotada por 1_q .

DEFINIÇÃO 2.1.2 - Se X é um espaço topológico, um q-simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\Delta_q \rightarrow X$. Os q -simplexos singulares são também chamados de simplexos de dimensão q .

EXERCÍCIOS

2.1.3 - Se X é um espaço topológico, quantos 0-simplexos singulares há em X ?

2.1.4 - Se $X = \mathbb{R}^2$ o que são os simplexos em X de dimensão 1?

Aprenderemos, agora, como associar a um espaço topológico X um complexo-cadeia extremamente importante, e que nos conduzirá à definição da chamada homologia singular de X .

DEFINIÇÃO 2.1.5 - Para um espaço topológico X e um anel comutativo R , o R -módulo das q -cadeias singulares em X , $C_q(X)$, é o módulo livre sobre R gerado pelos q -simplexos singulares em X .

Frizamos que os elementos de $C_q(X)$ não são funções contínuas de Δ_q em X ; serão combinações lineares formais com coeficientes no anel R , de funções contínuas $\Delta_q \rightarrow X$. Para uma revisão sobre módulos livres (sua existência, construção e propriedades básicas) veja Lang [14].

EXERCÍCIOS

2.1.6 - Se $X = \{\text{pto}\}$, descreva $C_q(X)$, q arbitrário, quando R é sucessivamente o conjunto dos inteiros, dos racionais, dos reais e finalmente o anel Z_5 . Em cada caso, quantos geradores possui $C_q(X)$?

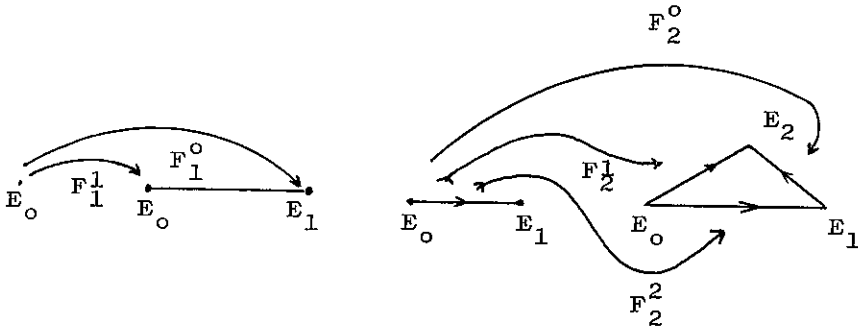
2.1.7 - Se $X = \{x_1, x_2\}$ o espaço discreto com dois pontos, descreva $C_0(X)$ ($R=Z$).

Considere a família $C(X) = \{C_q(X)\}_{q \geq 0}$; a fim de obtermos um complexo-cadeia (será o chamado complexo singular de X), falta definir aplicações convenientes entre os diferentes módulos $C_q(X)$; neste sentido, pomos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.1.8 - Para $q > 0$, considere as aplicações afins (logo contínuas) $F_q^i: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$, $0 \leq i \leq q$ definidas por suas ações sobre vértices de Δ_{q-1}

$$F_q^i(E_j) = \begin{cases} E_j & j < i \\ E_{j+1} & j \geq i \end{cases} .$$

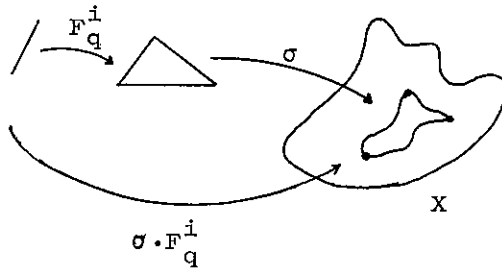
Por exemplo, as figuras abaixo ilustram a situação para dimensões pequenas:



EXERCÍCIO

2.1.9 - Quantas aplicações do tipo F_q^i há de Δ_2 em Δ_3 ?

DEFINIÇÃO 2.1.10 - A i -ésima face de um q -simplexo de X , denotada por $\sigma^{(i)}$, é o $(q-1)$ -simplexo em X dado por $\sigma \cdot F_q^i: \Delta_{q-1} \rightarrow X$.



DEFINIÇÃO 2.1.11 - A fronteira $d(\sigma)$ de um q -simplexo em X é o elemento de $C_{q-1}(X)$ dado por sua ação sobre os geradores como segue:

$$d_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \cdot F_q^i$$

Como o módulo $C_q(X)$ é livre, podemos, de fato,

definir $d: C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ por sua ação sobre os geradores, como acima, e estendê-la a $C_q(X)$ por linearidade.

A fronteira de um q -simplexo não é uma aplicação contínua, mas uma combinação linear formal, com coeficientes no anel R , de um número finito de aplicações contínuas.

Se P_0, P_1, \dots, P_q são pontos de um espaço afim, $(P_0 P_1 \dots P_q)$ será a aplicação afimtal que $E_i \rightarrow P_i$ $0 \leq i \leq q$. Com esta notação, vemos que $d(E_0 E_1) = (E_1) - (E_0)$, $d(E_0 E_1 E_2) = (E_1 E_2) - (E_0 E_2) + (E_0 E_1)$.

LEMA 2.1.12 - As aplicações $F_q^i \cdot F_{q-1}^j, F_q^j \cdot F_{q-1}^{i-1}: \Delta_{q-2} \rightarrow \Delta_q$ são iguais, se $j < i$.

Demonstração:

$$F_q^i \cdot F_{q-1}^j(E_k) = \begin{cases} F_q^i(E_k) = E_k & k < j \\ F_q^i(E_{k+1}) = E_{k+1} & j \leq k < i-1 \\ F_q^i(E_{k+1}) = E_{k+2} & j \leq k = i-1 \\ F_q^i(E_{k+1}) = E_{k+2} & k \geq i > j \end{cases}$$

$$F_q^j \cdot F_{q-1}^{i-1}(E_k) = \begin{cases} F_q^j(E_k) = E_k & k < j < i \\ F_q^j(E_k) = E_{k+1} & j \leq k < i-1 \\ F_q^j(E_{k+1}) = E_{k+2} & j \leq k = i-1 \\ F_q^j(E_{k+1}) = E_{k+2} & j < i \leq k \end{cases}$$

TEOREMA 2.1.13 - A aplicação $d_{q-1} \cdot d_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ é nula.

Demonstração: Mais uma vez, é suficiente verificar o que se passa com os geradores de $C_q(X)$:

$$\begin{aligned} d(d(\sigma)) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i d(\sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \cdot F_q^i) \cdot F_{q-1}^j \\ &= \sum_{\substack{j < i \\ i=1}}^q (-1)^{i+j} \sigma \cdot (F_q^j \cdot F_{q-1}^{i-1}) + \sum_{\substack{i \leq j \\ i=0}}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma \cdot (F_q^i \cdot F_{q-1}^j) = 0 \end{aligned}$$

pelo lema anterior.

DEFINIÇÃO 2.1.14 - Um elemento $x \in C_q(X)$ é chamado de q-cadeia singular; se $d(x) = 0$, x é um ciclo. Se $x = dy$, com $y \in C_{q+1}(X)$, x é um bordo. Duas q -cadeias que diferem por um bordo são ditas homólogas.

Podemos, agora, associar a um espaço topológico X um complexo-cadeia.

DEFINIÇÃO 2.1.15 - Se X é um espaço topológico, o complexo-cadeia singular de X sobre o anel R é o complexo-cadeia positivo $C(X) = \{C_q(X)\}_{q \geq 0}$ com aplicações $d_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ (se $q = 0$, ponha $d_q = 0$):

$$C_{q+1}(X) \rightarrow C_q(X) \xrightarrow{d_q} C_{q-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(X) \rightarrow C_0(X) \rightarrow 0.$$

DEFINIÇÃO 2.1.16 - A homologia singular do espaço X, com coeficientes no anel R, $H_*(X;R)$ é a homologia do complexo-cadeia singular de X sôbre R; assim

$$H_n(X;R) = \text{Ker } d_n / I_n d_{n+1} \quad n \geq 0.$$

EXEMPLOS

2.1.17 - Se X é um espaço constituído por um ponto, calculemos $H_*(X;Z)$. Para todo $q \geq 0$, $C_q(X)$ é o módulo livre sôbre Z com um gerador $a_q : \Delta_q \rightarrow X$. Assim, se $x \in C_q(X)$, $x = n \cdot a_q$. Determinemos, agora, a ação de $d_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ sôbre o gerador a_q . Por definição, $d_q a_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i a_q \cdot F_q^i$. Se q é par, segue-se que $d_q a_q = a_{q-1}$ e se q é ímpar, $d_q a_q = 0$ (por quê?). Assim, o complexo-cadeia singular de X é

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2_n & & 2_{n-1} & & & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \\ Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & \dots & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & Z & \rightarrow & 0 \\ a_{2n} & \rightarrow & a_{2n-1} & \rightarrow & 0 & & & & a_3 & \rightarrow & 0 & & & & a_0 & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & a_2 & \rightarrow & a_1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

e vemos que, se $n \neq 0$, $H_n(X;Z) = 0$, enquanto que $H_0(X;Z) = Z$.

EXERCÍCIO

2.1.18 - Se X é um espaço topológico e σ é um gerador de $C_1(X)$ (isto é, uma função contínua $\Delta_1 \rightarrow X$),

em que condições σ será um ciclo?

EXEMPLO

2.1.19 - Para um espaço topológico X , conexo por arcos,

$H_0(X;R)$ é um módulo livre sôbre tantos geradores quantos são as componentes conexas de X . Com efeito, dado $x \in X$, seja $\sigma_x: \Delta_0 \rightarrow X$ a função contínua tal que $\sigma_x(E_0) = x$ e escolhamos um ponto fixo $x_0 \in X$. Vemos então que, $\forall x \in X$, σ_x é homólogo a σ_{x_0} (é suficiente tomar um caminho σ em X ligando x_0 a x e calcular $d(\sigma)$).

Por outro lado, se $c \in C_0(X)$, então $c = \sum r_x \sigma_x$ e vemos que c é um ciclo. Defina $f: C_0(X) \rightarrow R$ por $f(c) = \sum r_x$. O núcleo de f é precisamente o conjunto das cadeias cujas somas dos coeficientes é nula. Obviamente, f é sôbre, logo $\frac{C_0(X)}{\text{Ker}(f)} \approx R$.

Além disso, $c \in C_0(X)$ é bordo se e somente se $c \in \text{Ker}(f)$; com efeito, se c é bordo, isso se verifica trivialmente; por outro lado, se $c = \sum r_x \sigma_x$ tal que $\sum r_x = 0$, então $c = \sum r_x \sigma_x - \sum r_x \sigma_{x_0} = d(\sum r_x \sigma_x')$, onde $\sigma_x': \Delta_0 \rightarrow X$ liga x_0 a x_1 e isso conclui a demonstração.

Podemos mesmo demonstrar a proposição seguinte:

TEOREMA 2.1.20 - Se $\{X_k\}$ é a família de componentes por arcos de X , então há um isomorfismo

$$H_q(X;R) \approx \bigoplus_k H_q(X_k;R) \quad \forall q \geq 0.$$

Demonstração: Como, para todo $q \geq 0$, Δ_q é conexo por arcos, um q -simplexo singular qualquer leva Δ_q em uma das componentes por arcos de X ; assim, toda q -cadeia se decompõe unicamente em uma soma finita $c = \sum c_k$, e note que se c_k é uma q -cadeia em X_k , então $d(c_k)$ é um bordo de X_k (por quê?), de maneira que a diferencial d opera invariantemente sobre as componentes por arcos de X e de $S_q(X) = \bigoplus_k S_q(X_k)$, $\forall q \geq 0$, podemos então tirar que $H_q(X) = \bigoplus_k H_q(X_k)$.

Uma aplicação contínua f entre os espaços topológicos X e Y induz uma aplicação f_* de grau zero entre os complexos-cadeia singular $C(X)$ e $C(Y)$: se σ é um gerador de $C_q(X)$, ponha $f_*(\sigma) = f \cdot \sigma = \Delta_q \rightarrow Y$ e extenda f_* a $C_q(X)$ por linearidade; então, pelo Capítulo 1, f_* induz uma aplicação

$$f_*: H_*(X;R) \rightarrow H_*(Y;R).$$

EXERCÍCIOS

2.1.21 - Se X e Y são espaços homeomorfos, então mostre que $H_*(X;R)$ e $H_*(Y;R)$ são isomorfos, com um isomorfismo induzido por uma aplicação contínua.

2.1.22 - Se $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ são funções contínuas, mostre que $(g \circ f)_* = g_* \cdot f_*$.

2.1.23 - Se $I_X: X \rightarrow X$ é a função identidade em X (logo contínua), mostre que $(I_X)_*$ é o homomorfismo identidade em $H_*(X;R)$.

2.1.24 - Mostre que a aplicação f_* introduzida acima é um morfismo de R -módulos.

Damos, a seguir, um exemplo extremamente elementar e simples que ilustra o método da topologia algébrica, que é tentar resolver problemas geométricos transformando-os em questões algébricas que são, às vezes, mais acessíveis do que o problema geométrico original. Exemplos mais interessantes poderão ser vistos no decorrer destas notas e em estudos mais avançados de topologia algébrica.

EXEMPLO

2.1.25 - Um espaço X com duas componentes conexas por arcos não é homeomorfo a um espaço Y com uma componente conexa por arcos: Com efeito, se $f: X \rightarrow Y$ fôsse um homeomorfismo, f induziria um isomorfismo $f_*: H_*(X;Z) \approx H_*(Y;Z)$; em particular, teremos um isomorfismo $H_0(X;Z) \approx H_0(Y;Z)$; mas $H_0(X;Z) \approx Z \oplus Z$ e $H_0(Y;Z) \approx Z$. Com estes dois módulos livres não podem ser isomorfos (por quê?), tal homeomorfismo f não pode existir.

Embora muito simples, este exemplo mostra bem o método de boa parte da topologia algébrica: dada uma situa-

ção geométrica-topológica, construir um modelo algébrico para ela com a esperança de que as informações obtidas sôbre o modelo algébrico possam ajudar à compreensão da situação geométrico-topológico original. É mais ou menos óbvio que, quanto mais complexo e difícil fôr o problema geométrico atacado, mais refinado e complicado deverá ser o modelo algébrico escolhido, a fim de fornecer informações úteis. O modelo do exemplo acima, o grupo de homologia de dimensão zero, foi extremamente simples, mas também o problema não era difícil.

§2.2 - A seqüência exata de homologia de um par

DEFINIÇÃO 2.2.1 - Um par (X,A) de espaços topológicos é um espaço topológico X e um seu subespaço A . Uma aplicação contínua f entre pares $f:(X,A) \rightarrow (Y,B)$ é uma aplicação contínua $f:X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Dado um par de espaços (X,A) , a função contínua $i:A \rightarrow X$, definida por $i(a) = a \in X$ é chamada de inclusão canônica. O par (X,\emptyset) será interpretado como sendo o espaço X .

A inclusão canônica $i:A \rightarrow X$ induz uma aplicação $i_*:C(A) \rightarrow C(X)$. Seja $C(X;A)$ a família $\left\{ \frac{C_q(X)}{C_q(A)} \right\}_{q \geq 0}$ e se $\bar{x} \in C_q(X,A)$, defina $\bar{d}_q \bar{x} = \overline{(d_q(x))}$; é trivial verificar

que \bar{d} está bem definida e que $\bar{d}_{q-1} \cdot \bar{d}_q = 0$. Assim, $C(X;A)$ é um complexo-cadeia. O lema abaixo relaciona os complexos $C(A)$, $C(X)$ e $C(X;A)$.

LEMA 2.2.2 - Os módulos $C_q(X;A)$ são livres e a seqüência $0 \rightarrow C(A) \xrightarrow{i_*} C(X) \xrightarrow{p} C(X,A) \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata de complexos.

Demonstração: é fácil e fica a cargo do leitor.

DEFINIÇÃO 2.2.3 - A homologia singular do par $(X;A)$, com coeficientes no anel R , $H_*(X;A;R)$ é a homologia do complexo-cadeia $C(X,A)$ definido acima. É também chamada de homologia relativa de (X,A) . Um elemento $x \in C_q(X)$ tal que $dx \in C_q(A)$ é chamado de ciclo relativo módulo A .

TEOREMA 2.2.4 - Dado um par (X,A) de espaços topológicos, existe uma seqüência longa exata de homologia

$$\rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

onde i_* é reduzida pela inclusão canônica $i:A \rightarrow X$,

p_* é induzida pela projeção $C(X) \rightarrow \frac{C(X)}{C(A)}$ e τ é definida como em 1.1.20.

Demonstração: é um corolário imediato de 2.2.2 e de 1.1.20.

Para um espaço topológico X e $x_0 \in X$, o par $(X, \{x_0\})$ é denotado simplesmente por (X, x_0) . A relação entre $H_*(X; R)$ e $H_*(X, x_0; R)$ é dada por

LEMA 2.2.5 - Se $x \in X$, então

$$H_q(X; R) = \begin{cases} H_q(X, x_0; R) & q \neq 0 \\ H_q(X, x_0; R) \oplus R & q = 0 \end{cases} .$$

Demonstração: Observemos a seqüência longa de homologia do par (X, x_0) :

$$\begin{aligned} \rightarrow H_q(x_0) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, x_0) \rightarrow H_{q-1}(x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ \rightarrow H_1(x_0) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, x_0) \rightarrow H_0(x_0) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, x_0) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Vemos assim que $H_q(X, x_0) \approx H_q(X)$, se $q > 1$. Resta estudar os casos $q = 0, 1$.

Consideremos, para tanto, a seqüência

$0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, x_0) \rightarrow R \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, x_0) \rightarrow 0$. Ora, a aplicação $H_1(X, x_0) \rightarrow R$ é trivial; assim, $H_1(X) \approx H_1(X, x_0)$ e $0 \rightarrow R \xrightarrow{\alpha} H_0(X) \xrightarrow{\beta} H_0(X, x_0) \rightarrow 0$ é exata. Mas se $\alpha \in H_0(X)$, $\alpha = \sum r_i \bar{x}_i$ onde \bar{x}_i denota a classe do ponto x_i , defina $f: H_0(X) \rightarrow R$ por $\alpha \mapsto (\sum r_i) \cdot \bar{x}_0$, onde \bar{x}_0 é o gerador de R e vemos então que $f \cdot \alpha = I_R$, logo a seqüência acima se fatora na forma $0 \rightarrow R \rightarrow R \oplus H_0(X, x_0) \rightarrow H_0(X, x_0) \rightarrow 0$ mostrando que $H_0(X) \approx H_0(X, x_0) \oplus R$, como queríamos demonstrar.

§2.3 - Homologia aumentada

Um epimorfismo entre complexos é uma aplicação entre complexos que é um epimorfismo em tôdas as dimensões. Dado um anel R , chamaremos também de R o complexo que é constituído pelo módulo trivial em tôdas as dimensões exceto em dimensão zero, onde é o módulo livre sôbre R com um gerador.

DEFINIÇÃO 2.3.1 - Dado um complexo-cadeia positivo C , uma aumentação e de C é um epimorfismo de C no complexo R

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & C_q & \rightarrow & C_{q-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_0 & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & e \\ & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & R & \rightarrow & 0 \end{array}$$

DEFINIÇÃO 2.3.2 - Se C é um complexo-cadeia positivo com aumentação e , o complexo-cadeia reduzido associado a C , \tilde{C} , é definido como $\tilde{C}_q = \text{Ker } e_q$,

$$d_q = d_q|_{\text{Ker } e_q}$$

DEFINIÇÃO 2.3.3 - Os grupos de homologia de \tilde{C} com coeficientes no anel R são chamados de grupos de homologia reduzida de C , e denotados por

$$\tilde{H}_q(C; R).$$

LEMA 2.3.4 - Se C é um complexo-cadeia positivo com aumento, então

$$H_q(C;R) \approx \begin{cases} \tilde{H}_q(C;R) & q \neq 0 \\ \tilde{H}_q(C;R) \oplus R & q = 0 \end{cases}$$

Demonstração: Observemos, em primeiro lugar, a seqüência curta exata de R -módulos:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(e_0) \rightarrow C_0 \xrightarrow{e} R \rightarrow 0$$

O módulo R é livre sobre o anel R , e e é um epimorfismo e assim existe $\alpha: R \rightarrow C_0$ tal que $e \circ \alpha = I_R$. Mas então a seqüência $0 \rightarrow \text{Ker}(e_0) \rightarrow C_0 \xrightleftharpoons[\alpha]{e} R \rightarrow 0$ se fatora como

$$0 \rightarrow \text{Ker}(e_0) \rightarrow \text{Ker}(e_0) \oplus R \rightarrow R \rightarrow 0$$

e assim $C_0 \approx \text{Ker}(e_0) \oplus R$.

Em segundo lugar, note que $d(C_0) \subseteq \text{Ker}(e_0)$, pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{d} & C_0 \approx \text{Ker}(e_0) \oplus R \\ \downarrow & & \downarrow e_0 \\ 0 & \longrightarrow & R \end{array}$$

e isso conclui a demonstração.

LEMA 2.3.5 - O complexo singular $C(X)$ sobre um anel R , onde X é um espaço topológico não vazio,

admite uma aumentação definida por $\sigma \mapsto 1$, onde σ é um gerador de $C_0(X)$.

Demonstração: trivial.

EXERCÍCIOS

2.3.6 - Podemos também definir uma aumentação de um complexo positivo C como um epimorfismo $e: C_0 \rightarrow R$ tal que $e \cdot d_1: C_1 \rightarrow R$ seja trivial. Definimos, então, o complexo cadeia aumentado $\tilde{C}: \tilde{C}_q = C_q$ se $q \neq 0$ e $\tilde{C}_q = \text{Ker } e$ se $q = 0$. Mostre que as duas definições são equivalentes.

2.3.7 - Se K é um sub-complexo de C e $e: C \rightarrow R$ é uma aumentação para C , $e: K \rightarrow R$ é uma aumentação para K .

2.3.8 - Mostre, nas condições de 2.3.6 e 2.3.7, que

$$\frac{\tilde{H}_*(C)}{\tilde{H}_*(K)} \approx \frac{H_*(C)}{H_*(K)}$$

CAPÍTULO 3

INVARIÂNCIA SOB HOMOTOPIA E EXCISÃO

Demonstramos, neste capítulo, dois teoremas que são armas poderosas para o cálculo dos grupos de homotopia.

§3.1 - Invariância sob homotopia

DEFINIÇÃO 3.1.1 - Se $f, g: X \rightarrow Y$ são funções contínuas, diz-se que f e g são homotópicas, por meio de uma homotopia H , $f \underset{H}{\sim} g$, se existe uma função contínua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X$. Nesta definição, I denota o intervalo unitário $[0, 1]$.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{1\} & & \\ \downarrow & \searrow g & \\ X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \uparrow & \nearrow f & \\ X \times \{0\} & & \end{array}$$

Podemos, agora, enunciar o teorema importante dêste parágrafo:

TEOREMA 3.1.2 - Se X e Y são espaços topológicos e $f, g: X \rightarrow Y$ são funções contínuas homotó-

picas, então as aplicações induzidas em homologia, f_* e g_* coincidem.

A fim de demonstrar este teorema, necessitaremos de algumas definições, construções e lemas.

DEFINIÇÃO 3.1.3 - Duas aplicações de complexos, $f, g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, ambas de grau zero, são homotópicas por cadeia se existem homomorfismos de módulos, $h_q: B_q \rightarrow C_{q+1}$ tais que, para todo q , $d_{q+1}^C h_q + h_{q-1} d_q^B = f_q - g_q$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d_{q+1}^C & & d_q^B & & & & \\
 & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & & & \\
 & & C_{q+1} & & C_q & & C_{q-1} & & \\
 & & \uparrow & \nearrow h_q & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \uparrow & \\
 f & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\
 & & g & & & & & & \\
 & & B_{q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}^B} & B_q & \xrightarrow{d_q^B} & B_{q-1} & &
 \end{array}$$

LEMA 3.1.4 - Se $f, g: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ são aplicações de complexos homotópicos por cadeia, então as aplicações induzidas em homologia, $f_*, g_*: H_*(\mathcal{B}) \rightarrow H_*(\mathcal{C})$ coincidem.

Demonstração: Se $x \in B_q$ é um ciclo, temos que

$$d_{q+1}^C h_q(x) = f_q(x) - g_q(x), \text{ logo } \overline{f_q(x)} = \overline{g_q(x)}.$$

Mostraremos que aplicações contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ conduzem à situação do Lema 3.1.4.

DEFINIÇÃO 3.1.5 - Dado um espaço X , o operador de Prisma

P_X é definido como segue:

Se $l_q: \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ é o simplexo singular identidade em Δ_q ponha:

$$P_{\Delta_q}(l_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (A_0 \cdot A_1 \dots A_i \cdot B_i \dots B_q) \in C_{q+1}(\Delta_q \times I)$$

onde $A_i, B_i \in \Delta_q \times I$, $A_i = (E_i, 0)$, $B_i = (E_i, 1)$ e $(A_0 \cdot A_1, \dots, A_i \cdot B_i \dots B_q)$ é o $(q+1)$ -simplexo em XXI definido por $E_0 \mapsto A_0$, $E_1 \mapsto A_1, \dots, E_i \mapsto A_i$, $E_{i+1} \mapsto B_i, \dots, E_{q+1} \mapsto B_q$.

Se σ é um gerador de $C_q(X)$ ponha

$$P_X(\sigma) = (\sigma \times l_I)_* P_{\Delta_q}(l_q)$$

$$\begin{array}{ccc} C_{q+1}(\Delta_q \times I) & & \\ \downarrow (\sigma \times l_I)_* & & \\ C_{q+1}(XXI) & & \end{array}$$

LEMA 3.1.6 - Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então

$$P_Y f_* : (f \times l_I)_* P_X$$

Demonstração: Seja σ um gerador de $C_q(X)$; vem então

$$\begin{aligned} \text{que } (f \times l_I)_* P_X(\sigma) &= (f \times l_I)_* (\sigma \times l_I)_* P_{\Delta_q}(l_q) = \\ &= (f \sigma \times l_I)_* P_{\Delta_q}(l_q) = P_Y(f\sigma) = P_Y f_*(\sigma). \end{aligned}$$

LEMA 3.1.7 - Se $\lambda_t: X \rightarrow XXI$ é a aplicação definida por

$$x \mapsto (x, t), \text{ então } dP + Pd = (\lambda_1)_* - (\lambda_0)_*.$$

Demonstração: Como é fácil verificar,

$$\lambda_0)_*(1_q) = (A_0 A_1 \dots A_q)$$

$$\lambda_1)_*(1_q) = (B_0 B_1 \dots B_q)$$

de maneira que

$$\lambda_1)_* - \lambda_0)_* = (B_0 B_1 \dots B_q) - (A_0 A_1 \dots A_q).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} dP(1_q) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i d(A_0 \dots A_i B_i \dots B_q) = \\ &= \sum_{\substack{j \leq i \\ i=0}}^q (-1)^i (-1)^j (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_i \dots B_q) + \\ &+ \sum_{\substack{i=0 \\ i \leq j}}^q (-1)^i (-1)^{j+1} (A_0 \dots A_i B_i \dots \hat{B}_j \dots B_q). \end{aligned}$$

Se $j=1$, obtemos os t\u00e9rmos

$$\begin{aligned} &(B_0 B_1 \dots B_q) - (A_0 B_1 \dots B_q) + (A_0 B_1 \dots B_q) - (A_0 A_1 B_2 B_3 \dots B_q) + \\ &(A_0 A_1 B_1 \dots B_q) - \dots + (A_0 \dots A_{q-2} B_{q-1} B_q) - (A_0 \dots A_{q-1} B_q) + \\ &(A_0 A_1 \dots A_{q-1} B_q) - (A_0 \dots A_q) = (B_0 B_1 \dots B_q) - (A_0 A_1 \dots A_q). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} dP(1_q) &= (B_0 B_1 \dots B_q) - (A_0 A_1 \dots A_q) + \\ &+ \sum_{\substack{i=0 \\ j < i}}^q (-1)^{i+j} (A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_i \dots B_q) + \\ &+ \sum_{\substack{i=0 \\ i < j}}^q (-1)^{i+j+1} (A_0 A_1 \dots A_i B_i \dots \hat{B}_j \dots B_q). \end{aligned}$$

Temos também que:

$$P(d(1_q)) = \sum_{h=0}^q (-1)^h P(F_q^h) = (F_q^h \times 1)_* P(1_{q-1})$$

além disso:

$$(F_q^h \times 1)_* (A_0 A_1 \dots A_h B_h \dots B_{q-1}) = \begin{cases} (A_0 \dots A_k B_k \dots \hat{B}_h \dots B_{q-1}) & k < h \\ (A_0 \dots \hat{A}_h \dots A_{k+1} B_{k+1} \dots B_q) & k \geq h \end{cases}$$

pois $F_q^i: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$ é definida por $F_q^i(E_j) = \begin{cases} E_j & j < i \\ E_{j+1} & j \geq i \end{cases}$

e assim

$$\begin{aligned} P(d1_q) &= \sum_{h=0}^q (-1)^h P(F_q^h) = \sum_{h=0}^q (-1)^h (F_q^h \times 1)_* P(1_{q-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^h (-1)^k (F_q^h \times 1)_* (A_0 \dots A_k B_k \dots B_{q-1}) = \\ &= \sum_{\substack{k \geq 0 \\ h > k}} (-1)^{k+h} (A_0 \dots A_k B_k \dots \hat{B}_k \dots B_q) + \\ &+ \sum_{\substack{k \geq 0 \\ h \leq k}} (-1)^{h+k} (A_0 \dots \hat{A}_k \dots A_{k+1} B_{k+1} \dots B_q) = \\ &= \sum_{\substack{k \geq 0 \\ h > k}} (-1)^{h+k} (A_0 \dots A_k \dots B_k \dots \hat{B}_k \dots B_q) + \\ &+ \sum_{\substack{k > 0 \\ h < k}} (-1)^{h+k+1} (A_0 \dots \hat{A}_h \dots A_k B_k \dots B_q) \text{ e vemos} \end{aligned}$$

$$\text{que } d(P(1_q)) + P(d(1_q)) = \lambda_1)_*(1_q) - \lambda_0)_*(1_q). \quad (A)$$

EXERCÍCIO

3.1.8 - Mostre que a igualdade (A), acima, acarreta que, se x é uma cadeia de $S_q(x)$, então

$$dP(x) + Pd(x) = \lambda_1)_*(x) - \lambda_0)_*(x).$$

LEMA 3.1.9 - As aplicações $\lambda_0, \lambda_1: X \rightarrow XXI$ definem, em homologia, uma mesma aplicação $\lambda_0)_* = \lambda_1)_*: H_*(X) \rightarrow H_*(XXI)$.

Demonstração: é uma consequência trivial de 3.1.7 e de 3.1.8.

Podemos, agora demonstrar o Teorema 3.1.2.

Demonstração de 3.1.2: Note que, se $f \sim_H g$, então $f = H\lambda_0$ e $g = H\lambda_1$ donde $f_* = H_* \lambda_0)_* = H_* \lambda_1)_* = g_*$.

§3.2 - O teorema da excisão

O objetivo deste parágrafo é a demonstração do seguinte teorema:

TEOREMA 3.2.1 - Se X é um espaço topológico, e $U \leq A \leq X$, com $\bar{U} \leq \overset{\circ}{A}$, então a inclusão canônica $i: (X-U, A-U) \rightarrow (X, A)$ induz, em homologia, um isomorfismo

$$i_*: H_*(X-U, A-U) \xrightarrow{\approx} H_*(X, A) .$$

A demonstraçãõ, mais uma vez, exige a apresentaçaõ de vá-
rias definições e lemas.

DEFINIÇÃO 3.2.2 - Seja E um espaço vetorial euclideano

e $\sigma: (P_0, \dots, P_q) \in S_q(E)$. O cone de σ ,
 $B\sigma$, é o elemento de $S_{q+1}(E)$ dado por $B\sigma = (B, P_0, \dots, P_q)$.

É óbvio que B pode ser extendido a um operador
 $B: S_q(E) \rightarrow S_{q+1}(E)$.

DEFINIÇÃO 3.2.3 - O suporte de $\sigma = (P_0, \dots, P_q) \in S_q(E)$,

denotado por $|\sigma|$, é o fêcho convexo
dos pontos P_0, P_1, \dots, P_q .

Se $x, y \in |\sigma|$, então $x = \sum \alpha_i P_i$, $y = \sum \beta_i P_i$, em
coordenadas baricêntricas e então $d(y, x) = |y-x| =$
 $= |y - \sum \alpha_i P_i| = |(\sum \alpha_i)y - \sum \alpha_i P_i| = |\sum \alpha_i (y - P_i)| \leq \max |y - P_i|$;
repetindo êste raciocínio, chegamos enfim a que

$|y-x| \leq \max_{i,j} |P_j - P_i|$ e como $P_i, P_j \in |\sigma|$, segue-se que o
diâmetro de $|\sigma|$, $\delta(|\sigma|)$ é dado por $\delta(|\sigma|) =$

$$= \max_{i,j} |P_i - P_j| .$$

Por outro lado, se $y \in |\sigma|$, $|y - P_i| = |\sum \beta_j P_j - P_i| =$
 $= |\sum \beta_j P_j - (\sum \beta_j) P_i| = |\sum_j \beta_j (P_j - P_i)| = |\sum_{j \neq i} \beta_j (P_j - P_i)| \leq$
 $\leq \sum_{j \neq i} \beta_j \max |P_j - P_i| = (1 - \beta_i) \max |P_j - P_i|$ e se b_σ é o
ponto de coordenadas baricêntricas $\sum (\frac{1}{q+1}) P_i$, vem então
que $|b_\sigma - P_i| \leq \frac{q}{q+1} \delta(|\sigma|)$ e segue-se que $|b_\sigma - x| \leq$

Demonstração: A demonstração se faz por indução. Se $q=0$, a desigualdade é trivial. Seja τ um simplexo de $Sd(\sigma)$; como $Sd(\sigma) = B_\sigma Sd_{q-1} d_q$, existe um simplexo α de $d(\sigma)$ e um simplexo β de $Sd_{q-1} \alpha$ com a propriedade de que $\tau = b_\sigma \beta$. Mas como β é um simplexo de $Sd_{q-1}(\alpha)$ vem, por indução, que $\delta(|\beta|) \leq \frac{q-1}{q} \delta(|\alpha|) \leq \frac{q-1}{q} \delta(|\sigma|) \leq \frac{q}{q+1} \delta(|\sigma|)$.

Dispomos, agora, das ferramentas necessárias à demonstração do teorema.

DEFINIÇÃO 3.2.9 - Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{v_\alpha\}$ uma cobertura por abertos de X . Um q -simplexo singular σ em X é pequeno em relação a \mathcal{U} se o conjunto $\sigma(\Delta_q)$ está contido em algum elemento da cobertura.

LEMA 3.2.10 - Seja X um espaço topológico, $\mathcal{U} = \{v_\alpha\}$ uma cobertura por abertos de X e σ um simplexo singular em X . Existe então $r > 0$ tal que $Sd^r \sigma$ é uma combinação linear de simplexos singulares pequenos em relação a \mathcal{U} .

Demonstração: Seja a cobertura de Δ_q dada pelos conjuntos $\{\sigma^{-1} v_\alpha\}$ e $c > 0$ um número de Lebesgue para esta cobertura. Pelo lema anterior, existe r tal que $Sd^r(1_q)$ é uma combinação linear de simplexos sin

gulares de diâmetro menor que c . Se $Sd^r(1_q) = \sum \alpha_i \tau_i$, sabemos que $Sd^r(\sigma) = \sigma_*(\sum \alpha_i \tau_i) = \sum \alpha_i \sigma_* \tau_i$ e a continuidade de σ conclui a demonstração.

TEOREMA 3.2.11 - Se X é um espaço topológico, $\mathcal{U} = \{v_\alpha\}$ uma cobertura por abertos de X , A um subespaço de X e $\bar{x} \in H_q(X, A)$, então \bar{x} pode ser representado por um ciclo relativo em $S_q(X, A)$ que é uma combinação linear de simplexes pequenos em relação a \mathcal{U} .

Demonstração: Seja $x \in S_q(X)$ com $d_q(x) \in S_{q-1}(A)$. Vemos então que $x - Sdx = dT(x) + Td(x)$; mas como $dx \in S_{q-1}(A)$, segue-se que $Td(x) \in S_{q-1}(A)$ (Por quê?) e assim $\bar{x} = \overline{Sdx}$ (módulo A); uma repetição finita deste raciocínio mostra que $\bar{x} = \overline{Sd^r x}$, $\forall r > 0$ e a demonstração fica concluída.

Podemos enfim demonstrar o teorema da excisão, cujo enunciado repetimos

TEOREMA 3.2.1 - Se X é um espaço topológico, A e U subespaços de X tais que $\bar{U} \leq \overset{\circ}{A}$, então a inclusão canônica $(X-U, A-U) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo em homologia

$$i_* : H_q(X-U, A-U) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A).$$

Demonstração: A família $\mathcal{U} = \{(X-\bar{U}), \mathring{A}\}$ constitui uma cobertura de abertos para X . Pelo lema anterior, qualquer classe de $H_q(X,A)$ pode ser representada por um ciclo relativo $x = \sum \alpha_i \sigma_i$ onde cada σ_i é pequeno em relação a \mathcal{U} . Observe que para $i = 1, \dots, n$, $\text{Im } \sigma_i \leq X-\bar{U} \leq X-U$ ou $\text{Im } \sigma_i \leq \mathring{A} \leq A$; desta maneira podemos desprezar os σ_i tais que $\text{Im } \sigma_i \leq A$, sem alterar a classe em $H_q(X,A)$ representada por x ; mas se $x = \sum \alpha_{i_k} \sigma_{i_k}$, onde $\text{Im } \sigma_{i_k} \leq X-U$, então x definirá uma classe em $H_q(X-U, A-U)$ (por quê?), e assim a aplicação $H_q(X-U, A-U) \rightarrow H_q(X,A)$ é sôbre.

Mostremos, agora, que $i_*: H_q(X-U, A-U) \rightarrow H_q(X,A)$ é injetora: se x é um ciclo relativo em $X-U \text{ mod}(A-U)$ e z representa a classe 0 em $H_q(X,A)$, então $x = x' + dw$, onde x' é uma q -cadeia em A e w uma $(q+1)$ -cadeia em X e assim $Sd^r x = Sd^r x' + d Sd^r w$ representa unida a mesma classe de homologia. Se r fôr suficientemente grande, $Sd^r w$ será uma combinação linear de simplexes pequenos em relação a \mathcal{U} e assim $Sd^r w = w_1 + w_2$, onde w_1 é formado por simplexes cuja imagem está em $X-U$ e w_2 é formado por simplexes de imagem contida em A . Mas então $Sd^r x = Sd^r x' + d(w_1 + w_2)$ e assim $Sd^r x - dw_1 = Sd^r x' + d w_2$.

Note que $Sd^r x - dw_1 \in S_q(X-U)$, $Sd^r x' + dw_2 \in S_q(A)$

e então, obrigatoriamente $Sd^r x - dw_1, Sd^r x' + dw_2 \in S_q(A-U)$ e se $Sd^r x - dw_1 \in S_q(A-U)$ temos que $Sd^r x$ representa a classe zero em $H_q(X-U, A-U)$ (por quê?) e a demonstração fica concluída.

CAPÍTULO 4

A SEQÜÊNCIA EXATA DE HOMOLOGIA DE UM TERNO E A SEQÜÊNCIA DE MAYER-VIETORIS

Damos, neste capítulo, duas conseqüências puramente algébricas dos resultados sôbre homologia singular obtidos nos capítulos precedentes.

§4.1 - A seqüência exata de homologia de um terno

DEFINIÇÃO 4.1.1 - Um terno (X,A,B) é um espaço topológico X e subespaços $A,B \leq X$ tais que $B \leq A \leq X$. Uma aplicação f entre (X,A,B) e (Y,A',B') é uma aplicação contínua $f:X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \leq A'$, $f(B) \leq B'$. Podemos formar, com X, A e B os pares $(A,B), (X,B), (X,A), A, X$ e B (Os três últimos, como sempre, identificados com $(A,\phi), (X,\phi)$ e (B,ϕ)). As várias aplicações inclusões entre êstes pares estão descritas abaixo:

$$i:(A,B) \rightarrow (X,B)$$

$$j:(X,B) \rightarrow (X,A)$$

$$i_1:A \rightarrow X$$

$$j_1:X \rightarrow (X,A)$$

$$\begin{aligned} i_2: B &\rightarrow X \\ j_2: B &\rightarrow (X, B) \\ i_3: B &\rightarrow A \\ j_3: A &\rightarrow (A, B). \end{aligned}$$

Os operadores fronteira das seqüências exatas de homologia dos pares (X, A) , (X, B) e (A, B) serão denotados por d^1 , d^2 e d^3 respectivamente.

TEOREMA 4.1.2 - Dado um terno (X, A, B) , a seqüência de grupos de homologia (sôbre um anel de coeficientes R)

$$\rightarrow H_q(A, B) \xrightarrow{i_*} H_q(X, B) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{d} H_{q-1}(A, B) \rightarrow H_{q-1}(X, B)$$

onde $d = j_3)_* d^1$, é exata.

Demonstração: A demonstração é longa, mas fácil, e análoga à demonstração de 1.1.20: Trata-se de verificar exatidão em cada estágio. Sua compreensão fica facilitada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H_{q+1}(B) & \xrightarrow{i_3)_*} & H_{q+1}(A) & \rightarrow & H_{q+1}(A, B) & \rightarrow & H_q(B) & \xrightarrow{d^3} & H_q(A) & \xrightarrow{j_3)_*} & H_q(A, B) \\ H_{q+1}(B) & \xrightarrow{i_2)_*} & H_{q+1}(X) & \rightarrow & H_{q+1}(X, B) & \xrightarrow{d^2} & H_q(B) & \rightarrow & H_q(X) & \rightarrow & H_q(X, B) \\ H_{q+1}(A) & \xrightarrow{i_1)_*} & H_{q+1}(X) & \rightarrow & H_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{d^1} & H_q(A) & \rightarrow & H_q(X) & \rightarrow & H_q(X, A) \\ H_{q+1}(A) & \rightarrow & H_{q+1}(A, B) & \rightarrow & H_{q+1}(B) & \xrightarrow{d^3} & H_q(A) & \xrightarrow{j_3)_*} & H_q(A, B) \end{array}$$

§4.2 - A seqüência de Mayer-Vietoris

DEFINIÇÃO 4.2.1 - Uma tríade (X,A,B) é uma lista ordenada de três espaços topológicos tais que A e B são subespaços de X .

Consideremos as inclusões:

$$k_1: (A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$$

$$k_2: (B, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, A)$$

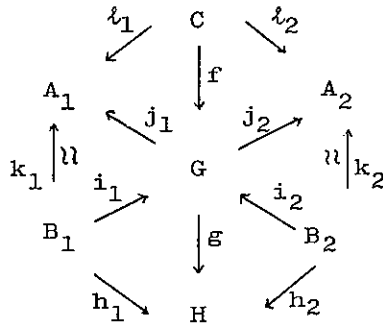
DEFINIÇÃO 4.2.2 - Uma tríade (X,A,B) é própria (ou exata) se as inclusões k_1 e k_2 induzem isomorfismos em homologia:

$$k_1)_*: H_*(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_*(A \cup B, B)$$

$$k_2)_*: H_*(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_*(A \cup B, A)$$

Antes de definirmos a seqüência de Mayer-Vietoris de uma tríade própria e provar sua exatidão, vejamos o seguinte lema puramente algébrico:

LEMA 4.2.3 (Lema do Hexágono) - Se, no diagrama de R -módulos e homomorfismos entre R -módulos



todos os triângulos são comutativos e

- a) k_1 e k_2 são isomorfismos
- b) $\text{Im}(i_1) = \ker(j_2)$, $\text{Im}(i_2) = \ker(j_1)$,

então $h_1 \cdot k_1^{-1} \cdot l_1 + h_2 \cdot k_2^{-1} \cdot l_2 = g \cdot f$.

Demonstração: Mostraremos, em primeiro lugar, que a aplicação $e = i_1 \cdot k_1^{-1} \cdot j_1 + l_2 \cdot k_2^{-1} \cdot j_2: G \rightarrow G$ é a identidade. Com efeito, seja $h: G \rightarrow G$ definida por

$h = 1_G - e$ e tomemos $x \in G$; então, $j_2 \cdot h(x) = j_2(x - l_1 \cdot k_1^{-1} \cdot j_1(x) - l_2 \cdot k_2^{-1} \cdot j_2(x)) = j_2(x) - j_2 \cdot l_1 \cdot k_1^{-1} \cdot j_1(x) - j_2 \cdot l_2 \cdot k_2^{-1} \cdot j_2(x) = j_2(x) - j_2(x) = 0$. Da mesma maneira, $j_1 \cdot h(x) = 0$. Mas se $j_2 \cdot h(x) = 0$, vem que $\exists y \in B_1$ com $i_1(y) = h(x)$ e $y' \in B_2$ com $l_2(y') = h(x)$. No entanto, $k_1(y) = j_1 \cdot l_1(y) = j_1 \cdot h(x) = j_1 \cdot l_2(y') = 0$ e como k_1 é um isomorfismo, $y = 0$ e assim $h(x) = 0$, logo $1_G = 0$.

Mas se $l_1 \cdot k_1^{-1} \cdot j_1 + l_2 \cdot k_2^{-1} \cdot j_2 = 1_G$ vem que

$g(\ell_1 \cdot k_1^{-1} \cdot j_1)f + g(\ell_2 \cdot k_2^{-1} \cdot j_2)f = g \cdot f$ e assim $h_1 \cdot k_1^{-1} \ell_1 + h_2 \cdot k_2^{-1} \ell_2 = g \cdot f$, como queríamos demonstrar.

EXEMPLO 4.2.4 - Como aplicação do lema do hexágono, se

(X, A, B) é uma tríade própria com

$A \cup B = X$ e $C = A \cap B$, e $h, h_1, h_2: (X, C) \rightarrow (Y, D)$ são

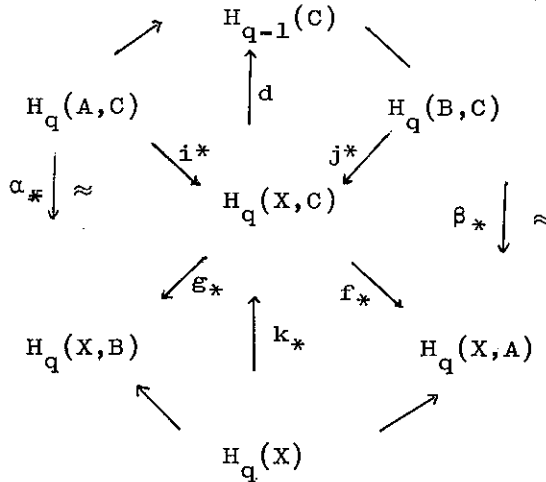
aplicações de pares tais que $h_1|_A = h|_A$, $h_2|_B = h|_B$,

$h_1(B) \leq D$, $h_2(A) \leq D$, então os homomorfismos induzidos

$h_*, (h_1)_*, (h_2)_*: H_*(X, C) \rightarrow H_*(Y, D)$ satisfazem a relação

$$h_* = (h_1)_* + (h_2)_* .$$

Com efeito, apliquemos o lema do hexágono ao diagrama



e nem que $1_{H_q(X, C)} = i_* \alpha_*^{-1} \epsilon_* + j_* \beta_*^{-1} f_*$.

Podemos definir aplicações $k_1: (X,B) \rightarrow (Y,D)$,
 $k_2: (X,A) \rightarrow (Y,D)$ a partir de h_1 e h_2 respectivamen-
 te, visto que $k_1(B) \leq D$, $k_2(A) \leq D$. Por outro lado,

$$h_*(u) = h_*\{(i_*\alpha_*^{-1}g_*)(u) + (j_*\beta_*^{-1}f_*)(u)\} = h_*i_*\alpha_*^{-1}g_*(u) + \\ + h_*j_*\beta_*^{-1}f_*(u) .$$

Mas como os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccc} (A,C) & \xrightarrow{i} & (X,C) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow h \\ (X,B) & \xrightarrow{k_1} & (Y,D) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (B,C) & \longrightarrow & (X,C) \\ \beta \downarrow & & \downarrow h \\ (X,A) & \xrightarrow{k_2} & (Y,D) \end{array}$$

vem que

$$h_*(u) = k_{1*}\alpha_*\alpha_*^{-1}g_*(u) + k_{2*}\beta_*\beta_*^{-1}f_*(u) = k_{1*}g_*(u) + \\ + k_{2*}f_*u$$

e da comutatividade de

$$\begin{array}{ccc} (X,C) & \xrightarrow{g} & (X,C) \\ h_1 \searrow & & \downarrow k_1 \\ & & (Y,D) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X,C) & \xrightarrow{g} & (X,A) \\ h_2 \searrow & & \downarrow k_2 \\ & & (Y,D) \end{array}$$

segue-se então o resultado procurado

$$h_* = h_{1*} + h_{2*} .$$

Em particular, se $D \leq Y$ é contratível e denotando
 por f, f_1, f_2 as aplicações de X em Y induzidas por

h, h_1, h_2 , teremos, então

$$\tilde{f}_* = \tilde{f}_{1*} + \tilde{f}_{2*} .$$

De fato, examinando

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_q(C) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_q(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X,C) & \xrightarrow{d} & \tilde{H}_{q-1}(C) \\ \mathcal{E}_* \downarrow & & f_* \downarrow & & h_* \downarrow & & \mathcal{E}_* \downarrow \\ \tilde{H}_q(D) & \xrightarrow{i'_*} & \tilde{H}_q(Y) & \xrightarrow{j'_*} & H_q(Y,D) & \xrightarrow{d'} & \tilde{H}_{q-1}(D) \end{array}$$

vemos que j'_* é um isomorfismo e assim $f_* = j'^{-1} h_* j_*$; de maneira análoga, segue-se que $f_{1*} = f'^{-1} h_{1*} j_*$, $f_{2*} = j'^{-1} h_{2*} j_*$ e como $h_* = h_{1*} + h_{2*}$, $f_* = f'^{-1} (h_{1*} + h_{2*}) j_* = f_{1*} + f_{2*}$.

Seja agora (X,A,B) uma tríade própria, onde $X = A \cup B$, $C = A \cap B$. Definamos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi_q : H_q(C) &\longrightarrow H_q(A) \oplus H_q(B) \\ U &\longmapsto [h_{1*}(u), -h_{2*}(u)] \end{aligned}$$

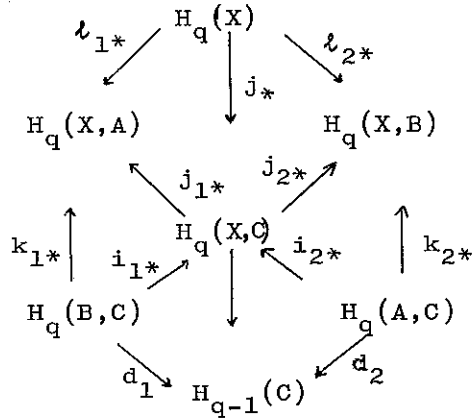
onde $h_1 : C \rightarrow A$ e $h_2 : C \rightarrow B$ são as inclusões canônicas.

Por outro lado, temos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_q : H_q(A) \oplus H_q(B) &\longrightarrow H_q(X) \\ (x,y) &\longmapsto m_{1*}(x) + m_{2*}(y) \end{aligned}$$

onde $m_1 : A \rightarrow X$ e $m_2 : B \rightarrow X$ são as inclusões canônicas.

O lema do hexágono pode ser aplicado ao diagrama



e obtemos um homomorfismo

$$\Delta_q : H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(C)$$

$$x \longmapsto -d_1 \cdot k_{1*}^{-1} \cdot \ell_{1*}(x) = d_2 \cdot k_{2*}^{-1} \cdot \ell_{2*}(x).$$

TEOREMA 4.2.5 - Se $X = A \cup B$ e a tríade (X,A,B) é própria, a seqüência

$$\dots \rightarrow H_q(C) \xrightarrow{\psi} H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{\phi_q} H_q(X) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(C) \rightarrow \dots$$

é exata.

Demonstração: A demonstração é longa e sem dificuldades, sendo deixado como exercício.

DEFINIÇÃO 4.2.6 - A seqüência do Teorema 4.2.5 é chamada de seqüência de Mayer-Vietoris da tríade (X,A,B) .

EXERCÍCIOS

4.2.7 - Demonstre, com detalhes, 4.2.5.

4.2.8 - Se (X, A, B) é uma tríade própria, com $X = A \cup B$ e $C = A \cap B \neq \emptyset$, então a seqüência de Mayer-Vietoris em homologia aumentada é exata.

4.2.9 - Se X_1 e X_2 são subconjuntos abertos de $X = X_1 \cup X_2$, então a tríade (X, X_1, X_2) é exata.

Sugestão: ponha $A = X_1$, $U = X_1 - (X_1 \cap X_2)$, e aplique o teorema da excisão.

4.2.10 - Mostre que se $E_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \text{ e } x_{n+1} \geq 0\}$
 $E_n^- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \text{ e } x_{n+1} \leq 0\}$ então (S^n, E_n^+, E_n^-) é uma tríade própria.

4.2.11 - Se $(A \cup B, A, B)$ é própria e $A \cap B \neq \emptyset$ é contrátil, então há um isomorfismo $\tilde{H}_q(X) \approx \tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B)$, $\forall q \geq 0$.

4.2.12 - Se $(A \cup B, A, B)$ é uma tríade própria, $C = A \cap B \neq \emptyset$, e X é contrátil, então $\tilde{H}_q(C) \approx \tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B)$, $\forall q \geq 0$.

4.2.13 - Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$

calcule os grupos de homologia com coeficientes em \mathbb{Z} de $X = A \cup B$.



SEGUNDA PARTE

APLICAÇÕES DA HOMOLOGIA SINGULAR

CAPÍTULO 5

OS GRUPOS DE HOMOLOGIA DA ESFERA S^n E O
TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

Podemos, enfim, começar a colher frutos da teoria desenvolvida até aqui. Apresentamos, neste capítulo, algumas aplicações elementares da homologia singular.

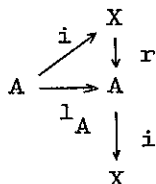
§5.1 - Os grupos de homologia da esfera S^n

DEFINIÇÃO 5.1.1 - Dados dois espaços topológicos $A \leq X$, diz-se que A é uma retração de X se existe uma função contínua $r: X \rightarrow A$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow i & \downarrow r \\ A & \longrightarrow & A \\ & \searrow 1_A & \end{array}$$

A função r é dita ser um retrato de X em A .

DEFINIÇÃO 5.1.2 - Dados dois espaços topológicos $A \leq X$, A é um retrato por deformação de X se existe $r: X \rightarrow A$, r uma retração de X em A tal que $i \cdot r \cong 1_X$



LEMA 5.1.3 - Seja A um subconjunto convexo do \mathbb{R}^n e $x_0 \in A$. Então o conjunto $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de A .

EXERCÍCIO

5.1.4 - Demonstre o Lema 5.1.3.

O Lema 5.1.3 forma um exemplo da situação descrita pela definição abaixo:

DEFINIÇÃO 5.1.5 - Um espaço X é contrátil se existe um ponto $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ é um retrato por deformação de X .

LEMA 5.1.6 - Se A é um retrato por deformação de X , então a inclusão $i:A \rightarrow X$ induz um isomorfismo em homologia.

Demonstração: Com efeito, como $r \cdot i = 1_A$ e $i \cdot r \cong 1_X$, vem que $r_* \cdot i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X) \rightarrow H_*(A)$ é a identidade e também, pelo teorema da invariância sob homotopia, que $i_* \cdot r_* : H_*(X) \rightarrow H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ é a identidade.

EXERCÍCIO

5.1.7 - Determine a homologia, com coeficientes em um anel qualquer, de um espaço contrátil X .

TEOREMA 5.1.8 - Seja X um espaço topológico, $V \leq U \leq A \leq X$, onde $\bar{V} \leq \overset{\circ}{A}$ e $(X-U, A-U)$ é um retrato por deformação de $(X-V, A-V)$. Então, a inclusão $(X-U, A-U) \rightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo em homologia.

Demonstração: Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & (X-V, A-V) & \\
 & \nearrow & \downarrow r \\
 (X-U, A-U) & \xrightarrow{i} & (X-U, A-U) & i \cdot r \cong 1 \\
 & & \downarrow i \\
 & & (X-V, A-V)
 \end{array}$$

Já sabemos que $i_*: H_*(X-U, A-U) \rightarrow H_*(X-V, A-V)$ é um isomorfismo; mas, pelo teorema da excisão, $i_*: H_*(X-V, A-V) \rightarrow H_*(X, A)$ é um isomorfismo, e o teorema está demonstrado.

Passamos, agora, à determinação da homologia da esfera S^n .

Suponha $n \geq 1$ e considere, mais uma vez, os conjuntos $E_n^+ = \{x \in S^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\}$, $E_n^- = \{x \in S^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} \leq 0\}$.

LEMA 5.1.9 - A aplicação $i: (S^n - \overset{\circ}{E}_n^-, E_n^- - \overset{\circ}{E}_n^-) \rightarrow (S^n, E_n^-)$ induz um isomorfismo em homologia.

Demonstração: Note que não podemos aplicar diretamente o teorema da excisão se $A = E_n^-$, $U = \overset{\circ}{E}_n^-$; seja $V = \{x \in S^{n+1} \mid x_{n+1} < \frac{1}{2}\}$ e observemos que o par $(E_n^+, S^{n-1}) = (S^n - E_n^-, E_n^- - \overset{\circ}{E}_n^-)$ é um retrato por deformação de $(S^n - V, E_n^- - V)$ e assim $i_*: H_*(E_n^+, S^{n-1}) \rightarrow H_*(S^n, E_n^-)$ é um isomorfismo.

Por outro lado, note também que $h_* (E_n^+, S^{n-1}) \xrightarrow{p^*} H_*(E^n, S^{n-1})$ é um isomorfismo, onde p é o homeomorfismo $(E_n^+, S^{n-1}) \rightarrow (E^n, S^{n-1})$ obtido projetando E_n^+ sobre E^n .

LEMA 5.1.10 - Na seqüência longa de homologia do par (E^n, S^{n-1}) o homomorfismo $d: H_q(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1})$ é um isomorfismo se $q \geq 2$.

Demonstração: Temos a seqüência

$$\begin{aligned} & H_q(S^{n-1}) \rightarrow H_q(E^n) \rightarrow H_q(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow H_2(S^{n-1}) \rightarrow \\ & \rightarrow H_2(E^n) \rightarrow H_2(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_1(S^{n-1}) \rightarrow H_1(E^n) \rightarrow H_1(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow \\ & \rightarrow H_0(E^n) \rightarrow H_0(E^n, S^{n-1}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Se $q > 1$, temos que $H_q(E^n) = 0$ (por quê?) e assim $H_q(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{d} H_{q-1}(S^{n-1})$ é um isomorfismo se $q \geq 2$.

Desta maneira, para $q \geq 2$,

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(E_n^+, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{i_*} & H_q(S^n, E_n^-) \\
 \downarrow \cong p_* & & \\
 H_q(E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{d} & H_{q-1}(S^{n-1})
 \end{array}$$

LEMA 5.1.11 - Se $q \geq 2$, $i_*: H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n, E_n^-)$ é um isomorfismo.

EXERCÍCIO

5.1.12 - Demonstre o Lema 5.1.11.

Observe que temos agora o seguinte diagrama de isomorfismos, para $q \geq 2$

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_q(S^n) \\
 & & \downarrow \cong i_* \\
 H_q(E_n^+, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{i_*} & H_q(S^n, E_n^-) \\
 \downarrow \cong p_* & & \\
 H_q(E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{d} & H_{q-1}(S^{n-1})
 \end{array}$$

e podemos enfim concluir:

LEMA 5.1.13 - Se $q \geq 2$, $H_q(S^n; \mathbb{R}) \approx H_q(S^{n-1}; \mathbb{R})$, com $n \geq 1$.

Se $q = 1$, voltando à seqüência de homologia do par (E^n, S^{n-1}) vemos que:

$$\begin{aligned}
 H_1(S^{n-1}) &\rightarrow H_1 \overset{0}{\parallel} (E^n) \rightarrow H_1(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(E^n) \rightarrow \\
 &\rightarrow H_0(E^n, S^{n-1}) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

que se reduz a

$$0 \rightarrow H_1(\mathbb{E}^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(\mathbb{E}^0) \rightarrow H_0(\mathbb{E}^n, S^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Seja $x_0 \in S^{n-1}$; se $c = \sum \alpha_i x_i$, $x_i \in \mathbb{E}^n$, tome um caminho σ_i que liga x_0 a x_i e assim seja $y = \sum \alpha_i \sigma_i \in c_1(X)$; vemos assim que $d(y) = c - (\sum \alpha_i)x_0$ de maneira que $\bar{c} \in H_0(\mathbb{E}^n, S^{n-1})$ é a classe zero e a seqüência se reduz a

$$0 \rightarrow H_1(\mathbb{E}^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(\mathbb{E}^n) \rightarrow 0.$$

EXERCÍCIO

5.1.14 - Se X é conexo por arcos e $A \leq X$, então

$$H_0(X, A) = 0.$$

Se $n > 1$, $H_0(S^{n-1}) \approx \mathbb{R}$, $H_0(\mathbb{E}^n) \approx \mathbb{R}$ e como $i_*: H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(\mathbb{E}^n)$ deve ser sôbre, segue-se que $\ker i_* = 0$ e assim $H_1(\mathbb{E}^n, S^{n-1}) = 0$. Se $n = 1$, $H_0(S^0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H_0(\mathbb{E}^1) = \mathbb{R}$.

Se $x_0 = (1, 0)$, $x_1 = (-1, 0)$, tomemos os geradores \bar{x}_0, \bar{x}_1 de $H_0(S^0)$ e escolhamos \bar{x}_0 como gerador de $H_0(\mathbb{E}^1)$; vemos assim que $i_* \bar{x}_0 = \bar{x}_0$, $i_* \bar{x}_1 = \bar{x}_0$ e assim $\ker i_* \approx \mathbb{R} \approx H_1(\mathbb{E}^n, S^{n-1})$.

Observando a seqüência (para $n \geq 1$)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_1(S^n) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(S^n, \mathbb{E}_n^-) & \xrightarrow{d} & H_0(\mathbb{E}_n^-) \rightarrow H_0(S^n) \rightarrow 0 \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ H_1(\mathbb{E}_n^-) & & & & & & H_0(S^n, \mathbb{E}_n^-) \end{array}$$

vem que $i_*: H_0(\mathbb{E}_n^-) \rightarrow H_0(S^n)$ é um isomorfismo e isso im-

plica que

$$\alpha: H_1(S^n) \xrightarrow{\approx} H_1(S^n, E_n^-)$$

é um isomorfismo. Mas

$$\begin{array}{c}
 H_1(E^n, S^{n-1}) \\
 \Downarrow \\
 H_1(E_n^+, S^{n-1}) \\
 \Downarrow \\
 H_1(S^n, E_n^-) \xleftarrow{\approx} H_1(S^n)
 \end{array}$$

e assim

$$H_1(S^n) = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ R & n = 1 \end{cases}$$

TEOREMA 5.1.15 - Seja S^n a esfera unitária em R^{n+1} .

Então

$$H_q(S^n; R) = \begin{cases} R & q=n \quad q \geq 1, n \geq 1 \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

Demonstração: Como

$$H_1(S^n) = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ R & n = 1 \end{cases}$$

e $H_q(S^n) \approx H_{q-1}(S^{n-1})$, $n \geq 1$, $q \geq 2$, o resultado fica demonstrado por indução.

Uma aplicação imediata da homologia de S^n é o teorema abaixo:

TEOREMA 5.1.16 - A esfera S^{n-1} não é um retrato de E^n .

Demonstração: Se S^{n-1} fôsse um retrato de E^n , com re-

tração $r: E^n \rightarrow S^{n-1}$, teríamos que a aplicação

$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(E^n) \xrightarrow{r_*} H_{n-1}(S^{n-1})$ seria a identidade, o que é um absurdo, pois $H_{n-1}(E^n) = 0$ (se $n=1$, use homologia aumentada).

TEOREMA 5.1.17 (Teorema do ponto fixo de Brouwer) - Toda

aplicação contínua $f: E^n \rightarrow E^n$ tem um ponto fixo.

Demonstração: Suponha que exista $f: E^n \rightarrow E^n$ contínua

sem ponto fixo, ou seja, $\forall x \in E^n, f(x) \neq x$,

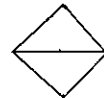
e assim os pontos $x, f(x)$ determinam um segmento de reta que, prolongado no sentido de $f(x)$ para x , intercepta S^{n-1} em um ponto p . Defina $r: E^n \rightarrow S^{n-1}$ pondo $r(x) = p$. É fácil ver que r é contínua e uma retração de E^n em S^{n-1} , o que é impossível.

Uma outra maneira de calcular os grupos de homologia da esfera S^n é usando a noção de suspensão:

DEFINIÇÃO 5.1.18 - Se X é um espaço topológico não vazio, a suspensão de X , $S(X)$ é o espaço

$$S^0 \xrightarrow{XXI} \frac{XX\{0\} \cup XX\{1\}}{XX\{0\} \cup XX\{1\}}.$$

Podemos supor que $X \leq S(X)$, por meio da aplicação (contínua!) $x \mapsto (x, \frac{1}{2})$.



$XX\{\frac{1}{2}\}$

Se U e V são os subespaços de $S(X)$ definidos por $U = \{(\overline{x,t}) \in S(X) \mid x \in X, \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$, $V = \{(\overline{x,t}) \in S(X) \mid x \in X, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$, vemos que $U \cap V = X$, $U \cup V = S(X)$ e U e V são contráteis.

Mas então, a seqüência exata de homologia

$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow & H_q(X) & \rightarrow & H_q(U) & \rightarrow & H_q(U,X) & \rightarrow & H_{q-1}(X) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & H_1(X) & \rightarrow \\ \rightarrow & H_1(U) & \rightarrow & H_1(U,X) & \rightarrow & H_0(X) & \rightarrow & H_0(U) & \rightarrow & H_0(U,X) & \rightarrow & 0 & \\ & \parallel & & & & & & \parallel & & & & \parallel & \\ & 0 & & & & & & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

mostra que $H_q(U,X) \xrightarrow{\cong} H_{q-1}(X)$ é um isomorfismo se $q \geq 1$.

Por outro lado, a seqüência exata de homologia de

$(S(X), V)$

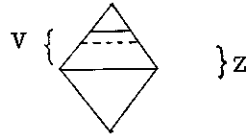
$$\begin{array}{ccccccccccc} \rightarrow & H_q(V) & \rightarrow & H_q(S(X)) & \rightarrow & H_q(S(X),V) & \rightarrow & H_{q-1}(V) & \rightarrow & H_{q-1}(S(X)) & \rightarrow \\ & & & & & & & \parallel & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & \parallel & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & \parallel & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ \rightarrow & H_0(V) & \rightarrow & H_0(S(X)) & \rightarrow & H_0(S(X),V) & \rightarrow & 0 & & & \end{array}$$

mostra que $H_q(S(X)) \xrightarrow{\cong} H_q(X(X), V)$ é um isomorfismo para $q \geq 1$ (por quê isso é verdade se $q = 1$?)

Se $\overset{\circ}{V}$ é o interior de V , consideremos a inclusão $(U, V) = (S(X) - \overset{\circ}{V}, V - \overset{\circ}{V}) \rightarrow (S(X), V)$. Se $Z = \{(\overline{x,t}) \in S(X) \mid x \in X, 0 \leq t < \frac{1}{2}\}$, temos que $\bar{Z} \leq \overset{\circ}{V}$ e que $(S(X) - \overset{\circ}{V}, V - \overset{\circ}{V})$ é um retrato por deformação de $(S(X) - Z, V - Z)$ (por quê?).

Logo temos um isomorfismo

$$H_q(U, X) \xrightarrow{\approx} H_q(S(X), V), \forall q$$



e assim obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H_{q+1}(X) & \xleftarrow{\approx} & H_q(U, X) \xrightarrow{\approx} H_q(S(X), V) \\
 & \searrow \sigma & \uparrow \cong \\
 & & H_q(S(X))
 \end{array} \quad q \geq 1$$

A aplicação σ é chamada de isomorfismo suspensão em homologia.

EXERCÍCIOS

5.1.19 - Mostre que, $\forall q, \tilde{H}_q(X) \approx \tilde{H}_{q+1}(S(X))$

5.1.20 - Mostre que, $\forall n, S(S^n)$ é homeomorfo a S^{n+1} .

Agora, para calcular os grupos de homologia de S^n , se $S^0 = \{(1,0), (-1,0)\}$, a seqüência exata de homologia (reduzida!) de $(S^0, \{(1,0)\})$ mostra que $\tilde{H}_q(S^0) \approx \approx H_q(S^0, (1,0)), \forall q$. Aplicando o teorema da excisão ao caso em que $X = S^0, A = \{(1,0)\}$ e $U = \{(1,0)\}$, vemos que

$$H_q(\{(1,0)\}) \approx H_q(S^0, \{(1,0)\}), \forall q$$

$$\text{e assim } H_q(S^0) \approx H_q(S^0, (1,0)) \approx H_q(1,0) = \begin{cases} G & q=0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

e o restante da demonstração procede por indução.

CAPÍTULO 6

ALGUMAS APLICAÇÕES À ESFERA

§6.1 - O grau de uma aplicação $f: S^n \rightarrow S^n$

LEMA 6.1.1 - Se $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, seja $f_n: S^1 \rightarrow S^1$ a aplicação definida por $f_n(z) = z^n$. Então, $f_{n*}: H_1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z})$ é dada por $x \mapsto nx$.

Demonstração: Procederemos por indução. Se $n = 0$, nada há a demonstrar; suponha, portanto, o teorema válido para o inteiro $n-1$ e considere as aplicações $g, h: S^1 \rightarrow S^1$ definidas por

$$g(e^{i2\pi\theta}) = \begin{cases} f_n(e^{i2\pi\theta}) & 0 \leq \theta \leq \frac{n-1}{n} \\ 1 & \frac{n-1}{n} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$
$$h(e^{i2\pi\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \frac{n-1}{n} \\ f_n(e^{i2\pi\theta}) & \frac{n-1}{n} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

Pondo

$$A = \{e^{i2\pi\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{n-1}{n}\}$$

$$B = \{e^{i2\pi\theta} \mid \frac{n-1}{n} \leq \theta \leq 1\}$$

vemos que $A \cup B = S^1$, $C = A \cap B = \{\text{pto}\} = \{e^{i2\pi(\frac{n-1}{n})}\}$ e

que $g|_A = f_n|_A$, $g(B) = \{1\}$, $h|_B = f_n|_B$, $h(A) = \{1\}$ e temos então as aplicações $f, g, h: (S^1, C) \rightarrow (S^1, \{1\})$ donde concluímos que $f_{n*} = g_* + h_*$.

Definamos, agora, para $0 \leq t \leq 1$, $g_t: S^1 \rightarrow S^1$ por

$$g_t(e^{i2\pi\theta}) = \begin{cases} e^{i2\pi\theta(n-1)} & 0 \leq \theta \leq \frac{n-1}{n-t} \\ 1 & \frac{n-1}{n-t} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

vem que $g_0 = g$, $g_1 = f_{n-1}$, logo $g \sim f_{n-1}$. Se definirmos

$$h_t(e^{i2\pi\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \frac{t+n-tn-1}{n} \\ e^{i2\pi\theta(t+n-tn)} & \frac{t+n-tn-1}{n} \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

vem que $h_0 = h_1$, $h_1 = f_1$. Então, podemos escrever

$$f_{n*} = f_{(n-1)*} + f_{1*}$$

e a hipótese de indução concluir que, se $x \geq 0$, $f_{n*}(x) = nx$.

Se $n < 0$, então $f_n = f_{-1} \cdot f_{(-n)}$ e é portanto suficiente estudar o caso de f_{-1} :

Definamos $g: S^1 \rightarrow S^1$ por

$$g(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i2\theta} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 1 & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e $h: S^1 \rightarrow S^1$, $k: S^1 \rightarrow S^1$

$$h(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \pi \\ e^{-2i\theta} & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$k(e^{i\theta}) = \begin{cases} g(e^{i\theta}) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ h(e^{i\theta}) & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

vem, novamente, que

$$k_* = g_* + h_* .$$

Mas se $\varphi_s: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ $0 \leq s \leq 1$ e $\psi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ são dadas por

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} \frac{t}{s+1} & 0 \leq t \leq \pi(s+1) \\ \pi & \pi(s+1) \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

vem que $\psi \cdot \varphi_s$ é uma homotopia entre g e f_1 . De maneira análoga, podemos ver que $f_{-1} \sim h$ e assim

$$k_* = f_{1*} + f_{-1*} .$$

Além disso, se $k_t: S^1 \rightarrow S^1$ $0 \leq t \leq 1$ é definida por

$$k_t(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{i2\theta t} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ e^{-i2\theta t} & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

vem que $f_0 \sim k$ e assim

$$f_{0*} = f_{1*} + f_{-1*} \quad \text{donde}$$

$$f_{-1*} = -f_{1*}$$

e o lema fica demonstrado.

LEMA 6.1.2 - Seja $n \geq 1$ e $r_n: S^n \rightarrow S^n$ a aplicação

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1}). \quad \text{Então,}$$

$$\forall x \in H_n(S^n) \quad r_{n*}(x) = -x.$$

Demonstração: Seja a aplicação $f_{-1}: S^1 \rightarrow S^1$ dada por

$$z \mapsto z^{-1}. \quad \text{Pelo lema precedente, } f_{-1*} \text{ é}$$

multiplicação por (-1) . Mas $f_{-1} = r$ e assim fica demonstrado o lema para $n=1$. Observando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xleftarrow[\approx]{\sigma} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ r_* \downarrow & & \downarrow r_* \\ H_n(S^n) & \xleftarrow[\approx]{\sigma} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

onde σ é o isomorfismo suspensão, a demonstração fica concluída por indução.

EXERCÍCIO

6.1.3 - Seja $a: S^n \rightarrow S^n$ a aplicação $x \mapsto -x$. Mostre que

a_* é multiplicação por $(-1)^{n+1}$.

DEFINIÇÃO 6.1.4 - Um campo de vetores sobre S^n é uma aplicação contínua $f: S^n \rightarrow R^{n+1}$ tal que $(x, f(x)) = 0, \forall x \in S^n$. Um campo é dito ser não nulo se $f(x) \neq 0, \forall x \in S^n$.

TEOREMA 6.1.5 - Existe um campo de vetores não nulo sobre S^n se e somente se n é ímpar.

Demonstração: Se $n = 2k+1$, defina $f: S^n \rightarrow R^{n+1}$ por

$(x_1, x_2, \dots, x_{2k+2}) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k+2}, x_{2k+1})$ e fica assim construído um campo não nulo sobre S^{2k+1} .

Por outro lado, se partirmos de um campo não nulo sobre S^n , podemos construir um campo $v: S^n \rightarrow R^{n+1}$ de vetores unitários pela fórmula $v(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$. Defina, agora, uma homotopia $F_t: S^n \rightarrow R^{n+1}$ por $F_t(x) = x \cos t\pi + v(x) \sin t\pi$ e vemos que $F_0 = I_{S^n}$, $F_{1/2} = v_1$, $F_1 = a$, onde a é a aplicação antípoda $S^n \rightarrow S^n$ e assim $I \cong v \cong a$. No entanto, se n é par, a aplicação antípoda não pode ser homotópica à identidade.

TEOREMA 6.1.6 - Se f e g são aplicações $S^n \rightarrow S^n$ tais que $f(x) \neq g(x), x \in S^n$, então $f \sim ag$ e assim $f_* = (-1)^{n+1} g_*$.

Demonstração: É fácil construir uma homotopia entre f e ag (proceda de maneira análoga à demonstra-

ção da segunda parte do teorema anterior), o que demonstra o teorema).

EXERCÍCIO

6.1.7 - Por que não se pode, para duas aplicações arbitrárias $f, g: S^n \rightarrow S^n$, construir uma homotopia como no teorema acima?

COROLÁRIO 6.1.8 - Se $f: S^n \rightarrow S^n$ é homotópica a uma constante, então f tem um ponto fixo e existe também um ponto $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = -x_0$.

Demonstração: Se f não possui ponto fixo, $f(x) \neq x$, $x \in S^n$, e a proposição anterior mostra que $f \sim a$, e assim f_* é multiplicação por $(-1)^{n+1}$, logo f não é homotópica a uma constante. De maneira análoga, demonstraríamos a segunda parte do enunciado.

TEOREMA 6.1.9 - Toda aplicação $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ ou tem um ponto fixo ou leva algum ponto em sua antípoda.

Demonstração: Suponha que $\forall x \in S^n$, $f(x) \neq x$, e $f(x) \neq -x$; é então fácil construir uma homotopia entre f e a identidade e f e a aplicação antípoda o que é uma contradição.

Como $H_n(S^n; \mathbb{Z})$ é cíclico infinito, dada uma apli-

cação $f:S^n \rightarrow S^n$, a aplicação induzida $f_*:H_n(S^n;Z) \rightarrow H_n(S^n;Z)$ fica perfeitamente determinada se conhecermos o inteiro $f_*(1)$.

DEFINIÇÃO 6.1.10 - O grau de uma aplicação contínua $f:S^n \rightarrow S^n$ é o inteiro $f_*(1)$.

Um fato trivial é que aplicações homotópicas de $S^n \rightarrow S^n$ têm o mesmo grau. Por outro lado, não é trivial mostrar que aplicações do mesmo grau são homotópicas e admitiremos, sem demonstração, o teorema seguinte:

TEOREMA 6.1.11 (Hopf) - Duas aplicações $f,g:S^n \rightarrow S^n$ são homotópicas se e somente se têm o mesmo grau.

EXERCÍCIO

6.1.12 - Se $f:S^n \rightarrow S^n$ não é sobre, então grau $(f) = 0$.

CAPÍTULO 7

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E
O TEOREMA DE SEPARAÇÃO DE JORDAN-BROUWER

§7.1 - O Teorema Fundamental da Álgebra

É bem conhecido que a compactificação por um ponto de \mathbb{R}^n é homeomorfa a S^n . Esta compactificação será denotada por $\bar{\mathbb{R}}^n$. Por outro lado, toda função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ induz uma função $\bar{f}: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$. É fácil ver que a continuidade de f não acarreta a continuidade de \bar{f} (ache um exemplo!).

DEFINIÇÃO 7.1.1 - Uma aplicação contínua $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é admissível se sua extensão $\bar{f}: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ for contínua.

TEOREMA 7.1.2 - Uma aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é admissível se e somente se, para todo número real positivo r , existe um real positivo N tal que

$$\|x\| > N \rightarrow \|f(x)\| > r.$$

Demonstração: é um exercício de topologia geral, usando a definição da topologia do $\bar{\mathbb{R}}^n$.

EXERCÍCIOS

7.1.3 - Demonstre 7.1.2.

8.1.4 - Mostre que a projeção estereográfica $S^n - \{\text{pto}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser estendida a um homeomorfismo $h: S^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$.

DEFINIÇÃO 7.1.5 - O grau de uma aplicação contínua admissível $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o grau da aplicação $h^{-1} \cdot \bar{f} \cdot h: S^n \rightarrow S^n$, onde h é o homeomorfismo de 7.1.4.

LEMA 7.1.6 - Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação admissível e grau $(f) \neq 0$, então f é sôbre.

Demonstração: Por definição, grau $(f) = \text{grau}(h^{-1} \cdot \bar{f} \cdot h)$ e assim $h^{-1} \cdot \bar{f} \cdot h: S^n \rightarrow S^n$ é sôbre (por quê?); mas então $\bar{f} = h(h^{-1} \cdot \bar{f} \cdot h)h^{-1}: \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ é sôbre (por quê?) e então segue-se que f é sôbre.

Definamos, agora, os seguintes subespaços do \mathbb{R}^n :

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$F^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 1\}.$$

LEMA 7.1.7 - Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é admissível e $F(E^n) \subseteq E^n$, $f(F^n) \subseteq F^n$, as aplicações

$$f^* = h^{-1} \cdot \bar{f} \cdot h: S^n \rightarrow S^n$$

$$g_1: S^n = S(S^{n-1}) \rightarrow S^n = S(S^{n-1})$$

$$(\overline{x}, t) \longmapsto (\overline{f(x)}, t)$$

são homotópicas.

LEMA 7.1.8 - Se $f: S^n \rightarrow S^n$ é uma aplicação contínua então a aplicação $S(f): S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ definida por $(\overline{x}, t) \mapsto (\overline{f(x)}, t)$ tem o mesmo grau que f .

LEMA 7.1.9 - Se $f: R^n \rightarrow R^n$ é uma aplicação admissível e $f(E^n) \leq E^n$, $f(F^n) \leq F^n$, então se $g = f|_{S^{n-1}}$ temos que $\text{grau}(g) = \text{grau}(f)$.

EXERCÍCIO

7.1.10 - Demonstre 7.1.7, 7.1.8 e 7.1.9.

LEMA 7.1.11 - Sejam $f, g: R^n \rightarrow R^n$ aplicações contínuas e $h_t: R^n \rightarrow R^n$ uma homotopia entre f e g tal que $\forall k > 0, \exists r > 0$ com a propriedade de que se $\|x\| > r$, então $\|h_t(x)\| > k, \forall t \in [0, 1]$. Então f e g são admissíveis e têm o mesmo grau.

Demonstração: É imediato ver que, $\forall t \in [0, 1]$, h_t é admissível, logo pode ser estendida a uma aplicação contínua $\bar{h}_t: \bar{R}^n \rightarrow \bar{R}^n$.

É também fácil de ver que f e g são admissíveis e que \bar{h}_t é uma homotopia entre \bar{f} e \bar{g} . Mas se \bar{f} e \bar{g} são homotópicas, o mesmo acontecerá com f^* e $g^*: S^n \rightarrow S^n$ (qual será a homotopia entre estas funções?), logo $\text{grau}(f) = \text{grau}(g)$.

TEOREMA 7.1.12 (Teorema Fundamental da Álgebra) - Todo polinômio $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.

Demonstração: Sejam $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as funções definidas

por $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ e $g(z) = z^n$, onde $z \in \mathbb{C}$. Se $t \in [0, 1]$, ponha $h_t(z) = z^n + (1-t)(a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1})$. Se k é um número real positivo, ponha $r = \max(k+A, 1)$ onde $A = |a_1| + \dots + |a_n|$ e vem então que se $|z| > r$, $|h_t(z)| \geq |z|^n - (1-t)(|a_1||z|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}||z| + |a_n|) \geq |z|^{n-A}|z|^{n-1} \geq |z| - A > k$.

Mas então f e g serão admissíveis e terão o mesmo grau. Note também que g satisfaz às condições do Lema 7.1.9, logo $\text{grau}(f) = \text{grau}(g) = n \neq 0$ e assim f é sôbre. Logo, $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $f(z_0) = 0$, e a demonstração fica concluída.

§7.2 - O Teorema de Separação de Jordan-Brouwer

Neste parágrafo, calculamos os grupos de homologia de alguns subconjuntos da esfera S^n e, como consequência, chegamos a teoremas importantes, o de separação de Jordan-Brouwer e o da invariância da dimensão.

DEFINIÇÃO 7.2.1 - Uma célula fechada de dimensão n é um espaço topológico homeomorfo a I^n , onde $I = [0,1]$.

LEMA 7.2.2 - Sejam e_r uma célula fechada de dimensão r , $\phi: I^r \rightarrow e_r$ um homeomorfismo, J_1, J_2 sub-intervalos de I tais que $J_1 \cap J_2 = \{x_0\}$, $x_0 \in I$ e $e' = \phi(J_1 \times I^{r-1})$, $e'' = \phi(J_2 \times I^{r-1})$, $X = S^r - \phi(x_0 \times I^{r-1})$ e suponha que existem cadeias $w' \in S_{q+1}(S^n - e')$, $w'' \in S_{q+1}(S^r - e'')$ tais que $\partial w' = z = \partial w''$. Então, se $\tilde{H}_{q+1}(X) = 0$, existe $w \in S_{q+1}(S^r - (e' \cup e''))$ tal que $z = \partial w$.

Demonstração: A demonstração se faz usando a seqüência de Mayer-Vietoris. Se $X_1 = S^r - e'$, $X_2 = S^r - e''$, $X = \phi(x_0 \times I^{r-1})$, a tríade (X, X_1, X_2) é exata (por quê?). Observe que $A = S^r - (e' \cup e'') \neq \emptyset$ e assim a seqüência de Mayer-Vietoris é exata em homologia aumentada.

Examinemos agora a seqüência:

$$H_{q+1}(A) \xrightarrow{\psi} H_{q+1}(X_1) \oplus H_{q+1}(X_2) \xrightarrow{\phi} H_{q+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_q(A)$$

$$\xrightarrow{\psi} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\phi} H_q(X)$$

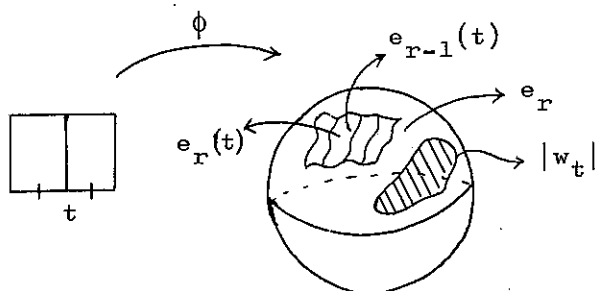
e sejam \bar{z} , \tilde{z} , $\bar{\bar{z}}$ as classes definidas pela cadeia z em $\tilde{H}_q(X_1)$, $\tilde{H}_q(X_2)$ e $\tilde{H}_q(A)$ respectivamente. Vem então que $\bar{z} = 0$ e $\tilde{z} = 0$; mas então, se $\bar{\bar{z}} \in H_q(A)$, $\psi(\bar{\bar{z}}) = 0$, o que acarreta $\bar{\bar{z}} \in I_m \Delta$ logo $\bar{\bar{z}} = 0 \in H_q(A)$.

TEOREMA 7.2.3 - Se $e_r \leq S^n$ é uma célula fechada de dimensão r , então $\tilde{H}_q(S^n - e_r) = 0, \forall q \geq 0$.

Demonstração: Usaremos indução em r . Se $r = 0$, o teorema é trivial (por quê?, o que é e_0 ?). Suponha $r > 0$ e que o teorema seja verdadeiro para $r-1$.

Seja z um ciclo em $S_q(S^n - e_r)$ e tome $\phi: I^r \rightarrow e_r$ um homeomorfismo. Se $t \in [0, 1]$, defina $e_{r-1}(t) = \phi(t \times I^{r-1})$. Como $S^n - e_r \leq S^n - e_{r-1}(t)$, z é realmente um ciclo em $S^n - e_{r-1}(t)$. Pela hipótese da indução, existe uma cadeia $w_t \in S_{q+1}(S^n - e_{r-1}(t))$ tal que $\partial w_t = z$. Se $w_t = \sum \alpha_i \sigma_i$, seja $|w_t| = \bigcup_i \sigma_i(\Delta_{q+1})$ e vem que $|w_t|$ é um conjunto compacto, disjunto do compacto $e_{r-1}(t)$, logo a distância e_t entre estes conjuntos é maior que zero.

A continuidade uniforme de ϕ garante que $\exists \delta_t > 0$ tal que se $x, y \in I^r$, $d(x, y) \in \delta_t$, então $d(\phi(x), \phi(y)) < e_t$. Tomemos I_t um intervalo aberto com centro em t e comprimento menor que δ_t . O conjunto $e_r(t) = \phi(I_t \times I^{r-1})$ será aberto e se $x \in e_r(t)$, $d(x, e_{r-1}(t)) < e_t$ e assim $e_r(t) \cap |w_y| = \emptyset$ e vemos que realmente $w_t \in S_{q+1}(S^n - e_r(t))$.



Como os intervalos abertos I_t cobrem o compacto I , $\exists \rho > 0$ tal que se J é um intervalo fechado, $J \leq I$, $\delta(J) < \rho \Rightarrow J \leq I_t$, para algum t . Se m é um inteiro positivo tal que $\frac{1}{m} < \rho$, considere os intervalos fechados $I_0 = [0, \frac{1}{m}]$, $I_1 = [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}]$, ..., $I_{m-1} = [\frac{(m-1)}{m}, 1]$ e defina $e_{r,j} = \phi(I_j \times I^{r-1})$. Pelas considerações anteriores, $\exists w_j \in S_{q+1}(S^n - e_{r,j})$ tal que $z = \partial w_j$. Podemos agora aplicar 7.2.2 um número finito de vezes para concluir que $\exists w \in S_{q+1}(S^n - (e_{r,1} \cup e_{r,2} \cup \dots \cup e_{r,n+1}))$ tal que $z = \partial w$, o que conclui a demonstração.

Este teorema acarreta os resultados abaixo:

TEOREMA 7.2.4 - A esfera S^n não pode ser tornada desconexa pela remoção de uma célula fechada $e_r \leq S^n$.

Demonstração: é uma consequência trivial do teorema precedente.

TEOREMA 7.2.5 - Se $s_r \leq S^n$ e s_r é homeomorfo a S^n ,

então $r \leq r$. No caso em que $r = n$ então, forçosamente, $\hat{s}_r = S^n$. Se $r < n$, teremos que

$$\tilde{H}_q(S^n - s_r) = \begin{cases} R & q = n-r-1 \\ 0 & q \neq n-r-1 \end{cases}$$

Demonstração: Tome $\phi: S^r \rightarrow s_r$ um homeomorfismo e sejam

$$e_r^+ = \phi(E_r^+), e_r^- = \phi(E_r^-), s_{r-1} = \phi(S^{r-1}),$$

$$X = S^r - s_{r-1}, X_1 = S^r - e_r^+, X_2 = S^r - e_r^-, A = S^r - s_r.$$

No caso em que $r \neq n$, temos que $A \neq \emptyset$ (por quê? olhe para a seqüência de homologia do par (S^r, s_r)).

Temos então que $\tilde{H}_q(X_1) = \tilde{H}_q(X_2) = 0, \forall q \geq 0$ e a seqüência de Mayer-Vietoris de (X, X_1, X_2) para homologia aumentada garante que $\tilde{H}_{q+1}(X) \approx \tilde{H}_q(S^r - s_{r-1}) \approx \tilde{H}_q(S^r - s_{r-1}), q \geq 0$ e uma aplicação repetida dêste resultado garante que

$$\tilde{H}_{q+r}(S^r - s_0) \approx \tilde{H}_q(S^n - s_r), \forall q \geq 0.$$

Mas como $H_{q+r}(S^n - s_0) \approx H_{q+r}(S^{n-1}), \forall q \geq 0$, vem então que

$$\tilde{H}_q(S^n - s_r) \approx \tilde{H}_{q+r}(S^{n-1}) = \begin{cases} R & q+r = n-1 \\ 0 & q+r \neq n-1 \end{cases}$$

Se $n = r$, suponha que $S^n \neq s_r$ e assim $A \neq \emptyset$ e vale ainda a seqüência de Mayer-Vietoris em homologia aumentada para (X, X_1, X_2) e obteríamos $\tilde{H}_{-1}(S^n - s_r) = R$, o que é um absurdo e assim a demonstração fica concluída

(como se conclui que $r < n$).

COROLÁRIO 7.2.6 - Se $r \leq n$, então $S^n - s_r$ é conexo por arcos se e somente se $r = n-1$.

TEOREMA 7.2.7 (Jordan-Brouwer) - Para todo r , e $s_{n-1} \leq S^r$, então $S^n - s_{n-1}$ consta de duas componentes conexas por arcos tendo s_{n-1} como fronteira comum.

Demonstração: O fato de que $S^n - s_{n-1}$ tem duas componentes conexas por arcos decorre de que

$\tilde{H}_0(S^n - s_{n-1}) \approx \mathbb{R}$, que serão subconjuntos abertos de S^n ,

U_1 e U_2 , e vemos assim que fronteira $(U_i) \leq s_{n-1}$,

$r = 1, 2$ (por quê?). Resta somente mostrar que

$s_{n-1} \leq$ fronteira (U_i) , $i=1, 2$.

Seja, portanto, $x \in s_{n-1}$. Devemos mostrar que qualquer vizinhança aberta de x intercepta U_1 e U_2 .

Tomemos $q_1 \in U_1$, $q_2 \in U_2$. Seja $A \leq s_{n-1}$, $x \in A$ e A homeomorfo a um intervalo aberto; então, $e_{n-1} = s_{n-1} - A$ é uma célula fechada de dimensão $n-1$ e assim

$\tilde{H}_0(S^n - e_{n-1}) = 0$, logo $S^n - e_{n-1}$ é conexo por arcos, e podemos tomar um arco $f: I \rightarrow S^n$ tal que $f(0) = q_1$, $f(1) = q_2$; se $\sigma = f(I)$, vemos que $\phi \neq \sigma \cap s_{n-1} \leq A$ (por quê $\sigma \cap s_{n-1} \neq \phi$). Mas note que $\sigma \cap s_{n-1}$ é fechado em σ .

Sejam $t_1 = \inf\{t \in [0, 1] \mid f(t) \in \sigma \cap s_{n-1}\}$, $t_2 = \sup\{t \in [0, 1] \mid f(t) \in \sigma \cap s_{n-1}\}$. Se $x_1 = f(t_1)$, $x_2 = f(t_2)$

e $t < t_1$, então $f(t) \in U_1$. Note também que $x_1, x_2 \in U_1$
 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ e então $\exists t_0 < t_1$ tal que $t_0 \in f^{-1}(U)$, logo
 $f(t_0) \in U_1 \cap U$ e de maneira análoga mostraremos que
 $U_2 \cap U \neq \emptyset$.

TEOREMA 7.2.8 - Se $n \geq 2$, seja $s_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfo a
 S^{n-1} . Então $\mathbb{R}^n - s_{n-1}$ tem duas compo-
nentes conexas por arcos, cuja fronteira comum é s_{n-1} .

Demonstração: \mathbb{R}^n é homeomorfo a $S^n - \{\text{pto}\}$ e a demons-
tração é agora trivial.

TEOREMA 7.2.9 - Se $n \geq 2$ e $f: E_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação
injetora, então f é um homeomorfismo de
 E_n sobre $f(E_n)$ e f leva o interior de E_n sobre a
componente limitada de $\mathbb{R}^n - s_{n-1}$.

Demonstração: O fato de que $f(E_n)$ é homeomorfo a E_n é
fácil de ver (por quê?). Mostremos, portanto,
que f leva o interior de E_n sobre a componente limita-
da de $\mathbb{R}^n - s_{n-1}$. Seja $e_n = f(E_n)$. Podemos supor que
 $e_n \subseteq S^n$ pois $S^n - \{\text{pto}\}$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n e podemos
portanto garantir que $S^n - e_n$ é conexo por arcos. Em
verdade, podemos garantir que $\mathbb{R}^n - e_n$ é conexo por arcos
($n \geq 2$) (por quê?). Como $(\mathbb{R}^n - e_n)$ não é limitado, está
contido na componente ilimitada (U_2) determinada pela
fronteira de e_n, s_{n-1} , no plano \mathbb{R}^n . Mas se $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n - e_n$

vem que $e_n \geq \mathbb{R}^n - U_1 = s_{n-1} \cup U_1$, onde U_1 é a componente limitada; como f é injetora, $e_n = f(\overset{\circ}{E}_n) \cup s_{n-1}$ e $s_{n-1} \cap f(\overset{\circ}{E}_n) = \emptyset$, $U_1 \leq f(\overset{\circ}{E}_n)$; mas como U_1 é maximal e $f(\overset{\circ}{E}_n)$ é conexo, $U_1 = f(\overset{\circ}{E}_n)$ e a demonstração fica concluída.

TEOREMA 7.2.10 (Teorema da Invariância do Domínio) - Suponha que $n \geq 1$ e seja $U \leq \mathbb{R}^n$ aberto conexo e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua injetora. Então, $f(U)$ é conexo, aberto, e f é um homeomorfismo sobre $f(U)$.

Demonstração: O único fato a demonstrar é que $f(U)$ é aberto. Mas se $x \in U$, seja V uma vizinhança aberta de x , $V \leq U$. Tome uma célula fechada e_n tal que $x \in e_n \leq V$. Pelo teorema precedente, $f(\overset{\circ}{e}_n)$ será uma vizinhança aberta de $f(x)$ contida em $f(U)$, e a demonstração fica concluída.

TEOREMA 7.2.11 - Se $n \neq m$, \mathbb{R}^n não é homeomorfa a \mathbb{R}^m .

Demonstração: Usaremos o fato de que um subespaço próprio de um espaço vetorial normado não pode conter abertos de N (aberto na topologia induzida pela norma). Suponha $m < n$ e seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ um homeomorfismo. Considere a composta $g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n$ que é uma aplicação contínua injetora. Se U é um aberto do \mathbb{R}^n , vem

que $g(U)$ será um aberto do R^n contido no subespaço R^m ,
uma contradição.

OBSERVAÇÃO: Em verdade, provamos que não há injeção do R^n
no R^m , se $n > m$.

COROLÁRIO 7.2.12 - Se $n \neq m$, S^n não é homeomorfa a S^n .

Demonstração: Suponha que $f: S^n \rightarrow S^n$ é um homeomorfismo.

A aplicação induzida $f^!: R^n \rightarrow R^m$ será
admissível e sua extensão será um homeomorfismo, o que é
uma contradição.

CAPÍTULO 8

OS COMPLEXOS CELULARES

Estudaremos, neste capítulo, uma classe importante de espaços cuja homologia pode ser, em geral, calculada.

§8.1 - Definição e exemplos de complexos celulares

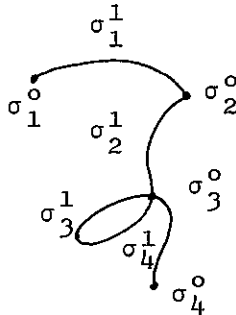
DEFINIÇÃO 8.1.1 - Um complexo celular finito X é um espaço de Hausdorff compacto tal que:

- 1) Há uma coleção finita de subconjuntos fechados de X , σ_j^q , $q = 0, 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, t$.
- 2) Se $X^q = \bigcup_{p \leq q} \sigma_j^p$ e $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, temos $X^{-1} = \emptyset$ e $(\sigma_i^p - f_i^p) \cap (\sigma_j^q - f_j^q) \neq \emptyset \leftrightarrow p = q$ e $i = j$.
- 3) $X = \bigcup_q X^q$
- 4) Para cada σ_j^q , há uma aplicação contínua $\varphi_s^q: E^q \rightarrow X$ que leva S^{q-1} sobre f_s^q e é um homeomorfismo de $E^q - S^{q-1}$ sobre $\sigma_s^q - f_s^q$. A aplicação φ_s^q é chamada de aplicação característica de σ_s^q . X^q é o q-esqueleto de X .

Os conjuntos σ_j^q são chamados de células abertas

de dimensão q . Dizemos que X^q é obtido a partir de X^{q-1} pela adjunção de células de dimensão q . A dimensão de X é a maior das dimensões das células de X .

Se X é um complexo celular finito, examinemos X^0 , o seu 0-esqueleto. Por definição, $X^0 = \bigcup_{p \leq 0} \sigma_j^p$ que se reduz, neste caso a $\bigcup_{p=0} \sigma_1^0$, mas uma célula de dimensão zero se reduz a um ponto e assim X^0 é uma coleção finita de pontos. As células de dimensão 1 serão os caminhos (ou laços) unindo células de dimensão zero.



EXEMPLO 8.1.2 - S^n é um complexo celular; com efeito, tome o polo norte x_0 , de S^n como célula de dimensão 0. Então, S^n será obtida pela adjunção de uma única célula de dimensão n a $\{x_0\}$.

EXEMPLO 8.1.3 - O espaço projetivo real de dimensão n , RP^n é um complexo celular finito. Com efeito, mostraremos como obter RP^n a partir de RP^{n-1}

pela adjunção de uma célula de dimensão n .

Seja $\sigma: S^n \rightarrow P^n$ a projeção natural e definamos $\varphi: D^n \rightarrow P^n$ por $\varphi(x) = \sigma(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, \dots, x_n)$. Vemos imediatamente que $\varphi|_{D_n}^o$ é um homeomorfismo, enquanto que $\varphi|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow P^{n-1}$ é a projeção canônica.

EXERCÍCIO 8.1.4 - Complete os detalhes da demonstração acima.

EXERCÍCIO

8.1.5 - O espaço projetivo complexo de dimensão n , CP^n , é um complexo celular finito.

§8.2 - A homologia dos complexos celulares

DEFINIÇÃO 8.2.1 - Seja X um espaço topológico, $A \subseteq X$ e $f: A \rightarrow Y$ uma função contínua. O espaço colagem de X e Y por f , $X \cup_f Y$ é o espaço obtido da união disjunta $X+Y$ pela identificação de a com $f(a)$, $\forall a \in A$.

EXEMPLO 8.2.2 - Se X é um complexo celular finito, então X^q é obtido de X^{q-1} pela colagem a X^{q-1} de células de dimensão q , pelas funções características φ .

LEMA 8.2.3 - Suponha que X é um complexo celular finito cujo n -esqueleto possui apenas uma célula de dimensão n , então

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \approx H_q(X^n, X^{n-1}), \forall q \geq 0.$$

Demonstração: Considere $B = \{x \in D^n \mid \|x\| > \frac{1}{2}\}$ e seja $i: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, B)$ a inclusão canônica.

Seja $\varphi: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ a função característica da célula D^n ; então $X^n = D^n \cup_{\varphi} X^{n-1}$. Seja p a projeção canônica $D^n + X^{n-1} \rightarrow X^n$; vemos que $D^n \subseteq D^n + X^{n-1}$ e tome

$H = X^{n-1} \cup p|_{D^n}(B)$. Temos, obviamente, uma inclusão $(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{j} (X^n, H)$. Por outro lado, $p|_{D^n}$ induz uma aplicação $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\mathcal{E}_1} (X^n, X^{n-1})$ e $(D^n, B) \xrightarrow{\mathcal{E}_2} (X^n, H)$.

O diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{i} & (D^n, B) \\ \mathcal{E}_1 \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}_2 \\ (X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{j} & (X^n, H) \end{array}$$

induz, para todo q , um diagrama comutativo de homologia

$$\begin{array}{ccc} H_q(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{i^*} & H_q(D^n, B) \\ \mathcal{E}_{1*} \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}_{2*} \\ H_q(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{j^*} & H_q(X^n, H) \end{array}$$

A inclusão $(D^n - S^{n-1}, B - S^{n-1}) \rightarrow (D^n, B)$ é uma excisão, logo induz um isomorfismo

$$H_q(D^n - S^{n-1}, B - S^{n-1}) \cong H_q(D^n, B), \quad \forall q \geq 0.$$

O mesmo vale em relação à inclusão

$$(X^n - X^{n-1}, p|_{D^n(B - S^{n-1})}) \rightarrow (X^n, H);$$

temos também um homeomorfismo

$$(D^n - S^{n-1}, B - S^{n-1}) \rightarrow (X^n - X^{n-1}, p|_{D^n(B - S^{n-1})})$$

e portanto o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_q(D^n - S^{n-1}, B - S^{n-1}) & \approx & H_q(D^n, B) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \mathcal{E}_{2*} \\ H_q(X^n - X^{n-1}, p|_{D^n(B - S^{n-1})}) & & \end{array}$$

mostra que \mathcal{E}_{2*} é um isomorfismo.

Por outro lado, observemos as seqüências exatas de homologia

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(S^{n-1}) & \rightarrow & H_q(D^n) & \rightarrow & H_q(D^n, S^{n-1}) & \rightarrow & H_{q-1}(S^{n-1}) & \rightarrow & H_{q-1}(D^n) & \rightarrow \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow i_* & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & \\ H_q(B) & \rightarrow & H_q(D^n) & \rightarrow & H_q(D^n, B) & \rightarrow & H_{q-1}(B) & \rightarrow & H_{q-1}(D^n) & \rightarrow \end{array}$$

Como S^{n-1} é um retrato por deformação de B , segue-se que f_1, f_2, f_3 e f_4 são isomorfismos, donde se conclui que i_* é um isomorfismo (prove isso!).

As seqüências exatas de homologia dos pares
 (X^n, X^{n-1}) e (X^n, H)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_q(X^{n-1}) & \rightarrow & H_q(X^n) & \rightarrow & H_q(X^n, X^{n-1}) & \rightarrow & H_{q-1}(X^{n-1}) & \rightarrow & H_{q-1}(X^n) & \rightarrow \\
 \downarrow f'_1 & & \downarrow f'_2 & & \downarrow \varepsilon_{2*} & & \downarrow f'_3 & & \downarrow f'_4 & \\
 H_q(H) & \rightarrow & H_q(X^n) & \rightarrow & H_q(X^n, H) & \rightarrow & H_{q-1}(H) & \rightarrow & H_{q-1}(X) &
 \end{array}$$

mostram que f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 são isomorfismos
 (mostre que X^{n-1} é um retrato por deformação de H !) e
 portanto ε_{2*} é um isomorfismo.

Mas se i_*, j_* e ε_{2*} são isomorfismos, o mesmo
 acontece com ε_{1*} e o teorema está demonstrado.

Mostramos, pois, que a aplicação $H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\varepsilon_{1*}}$
 $H_q(X^n, X^{n-1})$ induzida por $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{p|_{D^n}} (X^n, X^{n-1})$ é
 um isomorfismo para todo $q \geq 0$.

Por outro lado, observemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_q(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\approx} & \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \\
 \downarrow \varepsilon_{1*} & & \downarrow \varepsilon \\
 \tilde{H}_q(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}(X^{n-1})
 \end{array}$$

e a seqüência exata de homologia do par (X^n, X^{n-1})

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{H}_q(X^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_q(X^n) & \rightarrow & \tilde{H}_q(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{q-1}(X^{n-1}) & \rightarrow \\
 & & & & \downarrow \approx & & \uparrow \varepsilon & \\
 & & & & \tilde{H}_q(D^n, S^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) &
 \end{array}$$

que pode, portanto, ser escrita como

$$\tilde{H}_q(X^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_q(X^n) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{g} \tilde{H}_{q-1}(X^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_q(X^n)$$

em vista das identificações acima.

Podemos, assim, concluir que:

TEOREMA 8.2.4 - Se X é um complexo celular e X^n possui
sòmente uma célula, então

a) $\tilde{H}_q(X^n) \approx \tilde{H}_q(X^{n-1}) \quad q \neq n, n-1$

b) $\tilde{H}_{n-1}(X^n) \approx \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) / \text{Im } g$

c) $0 \rightarrow \tilde{H}_n(X^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_n(X^n) \rightarrow \ker g \rightarrow 0$

é exata.

EXERCÍCIO

8.2.5 - Modifique 8.2.3 e 8.2.4 para que se apliquem a
complexos celulares arbitrários de dimensão finita.

EXEMPLO 8.2.6 - Suponha que R é um anel noetheriano
(\mathbb{Z} , por exemplo). Se X é um complexo
celular então, para todo q , $H_q(X, R)$ é um R -módulo finitamente gerado. Se $\dim X < n$, então $H_q(X) = 0$ se $q > n$. Com efeito, $H_0(X)$ é um R -módulo livre finitamente gerado. Como todo submódulo e todo módulo quociente de um módulo noetheriano é noetheriano, a conclusão segue-se por indução.

TEOREMA 8.2.7 - A homologia do espaço projetivo complexo de dimensão n , CP^n , é a seguinte

$$H_q(CP^n; R) = \begin{cases} 0 & q > 2n \text{ ou } q \text{ ímpar} \\ R & q \text{ par e } \leq 2n \end{cases}$$

Demonstração: Se $n = 0$, CP^0 é um ponto, cuja homologia é conhecida. Mas CP^n é obtida de CP^{n-1} pela adjunção de uma célula de dim $2n$. Se $q \neq 2n$, $q \neq 2n-1$, $H_q(CP^n) \cong H_q(CP^{n-1})$. Por outro lado $h_{2n-1}(CP^n) = \ker(g)$, $g: H_{2n-1}(S^{2n-1}) \rightarrow H_{2n-1}(CP^{n-1})$ e assim $\ker g = R$.

O cálculo da homologia dos espaços projetivos reais RP^n é mais laborioso.

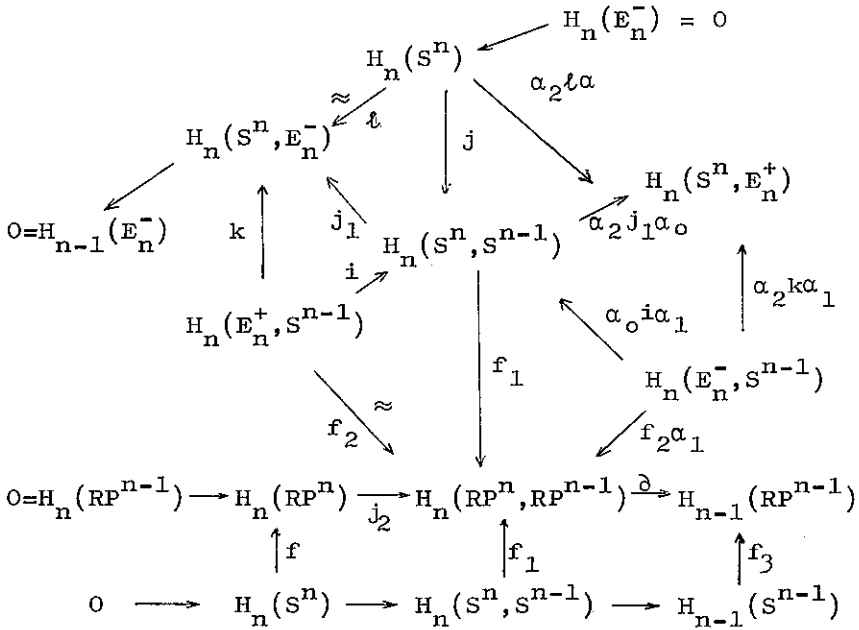
TEOREMA 8.2.8 - A homologia do espaço projetivo real RP^n

$$H_q(RP^n) = \begin{cases} 0 & q > n \\ R_2 & q \text{ par, } 1 < q \leq n \\ R/2R & q \text{ ímpar, } 1 \leq q \leq n-1 \\ R & q=0, q=n \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

onde $R_2 = \{x \in R \mid 2x = 0\}$.

Demonstração: A demonstração se faz por indução, sendo n necessário apenas estudar o caso em que $n > 0$.

Seja $p: S^{n-1} \rightarrow RP^{n-1}$ a projeção canônica e consideremos o diagrama



Os morfismos denotados por $\tilde{\alpha}$'s são induzidos por aplicações antipodais, os denotados por f são induzidos por p e os outros são fronteiras ou inclusões.

O lema do hexágono garante que

$$f_1 j = f_2 k^{-1} t + f_2 k^{-1} l \alpha$$

e assim

$$j_2 f = f_1 j = (1 + (-1)^{n+1}) f_2 k^{-1} t ;$$

note que como f_2 é um isomorfismo, segue-se que f_1 é um epimorfismo.

Se n é par, $j_2 f = f_1 j = 0$ e como j_2 é um mo-

homomorfismo, obtemos que $f: H_n(S^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$ é nulo.

Se n é ímpar, usamos o resultado acima para $(n-1)$ e logo $f_3: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1})$ é nulo, logo $\partial f_1 = 0$, o que mostra que j_2 é uma bijeção e vem que f é um isomorfismo seguido de multiplicação por 2 e $H_n(\mathbb{R}P^n) \approx H_n(S^n) \approx \mathbb{R}$.

Os resultados acima permitem calcular $H_n(\mathbb{R}P^n)$.

Para achar $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n)$, vemos imediatamente que

$H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{R}/2\mathbb{R}$ e como $H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$, segue-se que

$H_n(\mathbb{R}P^n) \approx \ker f_3 \approx \mathbb{R}_2$.

Além disso, se n é ímpar, de $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \approx \ker f_3$ segue-se que $H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) = H_{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \approx \mathbb{R}_2$.

TERCEIRA PARTE

COHOMOLOGIA SINGULAR

CAPÍTULO 9

A COHOMOLOGIA SINGULAR E SUA RELAÇÃO COM A HOMOLOGIA SINGULAR

§9.1 - Definição de cohomologia

Seja $C = \{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ um complexo-cadeia com diferencial $d_q: C_q \rightarrow C_{q-1}$, onde os C_q são R -módulos e os d_q são R -homomorfismos (R , como sempre, um anel comutativo com identidade).

DEFINIÇÃO 9.1.1 - Dado um complexo-cadeia C , e um R -módulo M , o complexo-cadeia $\text{Hom}(C, M)$ é o complexo definido por:

$$\begin{aligned} (\text{Hom}(C, M))_q &= \text{Hom}_R(C_q, M) \\ d_q^* : \text{Hom}_R(C_q, M) &\longrightarrow \text{Hom}_R(C_{q+1}, M) \\ f &\longrightarrow f \cdot d_{q+1} \end{aligned}$$

EXEMPLO 9.1.2 - Seja $R = \mathbb{Z}$ e considere a seqüência curta exata (encarada como complexo-cadeia):

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Se $M = Z_2$, obtemos para $\text{Hom}(C, M)$ o seguinte complexo

$$0 \leftarrow Z_2 \xleftarrow{\alpha} Z_2 \xleftarrow{\beta} Z_2 \leftarrow 0.$$

EXERCÍCIO

9.1.3 - Mostre que o complexo $\text{Hom}(C, M)$ obtido acima não é exato.

Podemos, no entanto, afirmar o seguinte:

LEMA 9.1.4 - Se $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata, e $A^* = \text{Hom}_R(A, R)$, $B^* = \text{Hom}_R(B, R)$, $C^* = \text{Hom}_R(C, R)$, então $0 \rightarrow C^* \xrightarrow{\beta^*} B^* \xrightarrow{\alpha^*} A^*$ é exata.

Demonstração: Devemos mostrar que B^*

é injetora e que

$$\text{Im}(\beta^*) = \text{Ker}(\alpha^*). \text{ Mas } \beta^*(f) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow f \cdot \beta = 0 \leftrightarrow f \cdot \beta(x) = 0, \forall x \in B \text{ e}$$

como β é sôbre, isso acarreta que

$$f = 0.$$

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \downarrow \\ R & \leftarrow & A \\ & & \downarrow \alpha \\ R & \leftarrow & B \\ & & \downarrow \beta \\ R & \xleftarrow{f} & C \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

Seja agora $g \in B^*$ tal que $\alpha^*(g) = 0$. Note que $\alpha^*(g) = 0 \leftrightarrow g \cdot \alpha = 0$. Defina então $h: C \rightarrow R$ como segue: se $x \in C$, $\exists y \in B$ tal que $\beta(y) = x$ e ponha $h(x) = g(y)$. É então fácil ver que $\beta^*(h) = g$.

EXERCÍCIOS

9.1.5 - Se M é um R -módulo e C um complexo-cadeia, definida, por analogia com 9.1.1, o complexo $\text{Hom}(M, C)$.

9.1.6 - Mostre que se $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata, e $A_* = \text{Hom}_R(R, A)$, $B_* = \text{Hom}_R(R, B)$, $C_* = \text{Hom}_R(R, C)$, então $0 \rightarrow A_* \rightarrow B_* \rightarrow C_*$ é exata.

DEFINIÇÃO 9.1.6 - Seja X um espaço topológico e $C(X)$ seu complexo singular. Formemos o complexo $C^*(X) = \text{Hom}(C(X), R)$, como em 9.1.1. A cohomologia singular de X , com coeficientes em R , é a homologia do complexo $\text{Hom}(C(X), R)$, mais precisamente:

se $C_q^*(X) = \text{Hom}_R(C_q(X), R)$ e $d_q^*: C_q^*(X) \rightarrow C_{q+1}^*(X)$ é dado por $f \rightarrow f \cdot d_q$, então

$$H_q^*(X; R) = \frac{\text{Ker } d_q^*}{\text{Im } d_{q-1}^*} .$$

Partindo desta definição de cohomologia, poderíamos provar que a cohomologia singular satisfaz tôdas as propriedades formais já achadas para a homologia singular. Dispensamos-nos tal trabalho.

§9.2 - Resoluções e Ext.

DEFINIÇÃO 9.2.1 - Um R -módulo P é projetivo se,

$\forall f: P \rightarrow C, g: B \rightarrow C, C$ e B R -módulos, g um epimorfismo, $\exists \alpha: P \rightarrow B$ tal que $g \cdot \alpha = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow \text{Eq} & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

DEFINIÇÃO 9.2.2 - Seja M um R -módulo. Uma resolução projetiva para M é um complexo exato de R -módulos

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{e} P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots \leftarrow P_{n-1} \leftarrow P_n$$

onde os P_i são módulos projetivos.

LEMA 9.2.3 - Todo R -módulo M possui uma resolução projetiva.

Demonstração: Com efeito, M é imagem homomorfa de um módulo livre $P_0: P_0 \xrightarrow{e} M$. Seja $K_0 =$ núcleo de e . Temos então a seqüência curta exata

$$0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow K_0 \leftarrow 0.$$

Por sua vez, K_0 é imagem homomorfa de um módulo livre $P_1: P_1 \rightarrow K_0$; obtemos assim uma seqüência curta exata

$$0 \leftarrow K_0 \leftarrow P_1 \leftarrow K_1 \leftarrow 0$$

e um processo de indução conclui a demonstração.

TEOREMA 9.2.4 (Teorema da comparação): Sejam M e M' R -módulos e $f: M \rightarrow M'$ um R -homomorfismo.

Suponha que

$$P: 0 \leftarrow M \xleftarrow{e} P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots \leftarrow P_n \dots$$

é um complexo onde P_i é projetivo, $i=0,1,\dots$ e

$$\rho': 0 \leftarrow M' \xleftarrow{e'} P'_0 \leftarrow P'_1 \leftarrow \dots \leftarrow P'_n \leftarrow \dots$$

é uma resolução projetiva de M' . Então, há uma transformação de complexos $g: \rho \rightarrow \rho'$ tal que $e'g_0 = ef$ e duas quaisquer de tais transformações são homotópicas por cadeia.

Demonstração:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \leftarrow & M & \xleftarrow{e} & P_0 & \leftarrow & P_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & P_{n-1} & \leftarrow & P_n & \leftarrow & P_{n+1} & \leftarrow & \dots \\ & & f \downarrow & & \downarrow g_0 & & \downarrow t_0 & & & & \downarrow \varepsilon_{n-1} & & \downarrow t_{n-1} & & \downarrow \varepsilon_n & & \downarrow \varepsilon_{n+1} \\ 0 & \leftarrow & M' & \leftarrow & P'_0 & \leftarrow & P'_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & P'_{n-1} & \leftarrow & P'_n & \leftarrow & P'_{n+1} & \leftarrow & \dots \end{array}$$

Como P_0 é projetivo, e e' um epimorfismo, $\exists g_0: P_0 \rightarrow P'_0$ tal que $e'g_0 = f \cdot e$. Suponha que construímos $g_n: P_n \rightarrow P'_n$ tal que $g_{n-1}d_n = d'_ng_n$. Como $d'_ng_nd_{n+1} = g_{n-1}d_nd_{n+1} = 0$, vemos que $I_m d'_{n+1} \geq I_m g_n d_{n+1}$ e assim, visto que P_{n+1} é projetivo, existe $g_{n+1}: P_{n+1} \rightarrow P'_{n+1}$ com $d'_{n+1}g_{n+1} = g_n d_{n+1}$.

Suponha agora que existe $g': \rho \rightarrow \rho'$ uma transformação de complexos tal que $e'g'_0 = ef$. Consideremos $h = g - g': \rho \rightarrow \rho'$. Observe que $e' \cdot h = 0$ e assim, $I_m h \leq I_m d'_1$ logo $\exists t_0: P_0 \rightarrow P'_1$ tal que $d'_1 t_0 = h_0$. Suponha que construímos t_{n-1} tal que $d'_n t_{n-1} + t_{n-2} d_{n-1} = h_{n-1}$. Vemos que $d'_n (h_n - t_{n-1} d_n) = d'_n h_n - d'_n t_{n-1} d_n = d'_n h_n - h_{n-1} d_n = 0$

e assim $\exists t_n : P_n \rightarrow P'_{n+1}$ tal que $d'_{n+1} \cdot t_n = h_n - t_{n-1} d_n$ e a demonstraçãõ fica concluída.

DEFINIÇÃO 9.2.5 - Seja M um R -módulo e \mathcal{P} uma resolução projetiva para M

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{e} P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots \xleftarrow{d_n} P_n \leftarrow \dots$$

Se N é um R -módulo, formemos o complexo $\text{Hom}(\mathcal{P}, N)$:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, N) \rightarrow \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \text{Hom}(P_2, N) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}(P_n, N) \rightarrow \dots$$

$$\text{Então } \text{Ext}_R^P(M, N) = \frac{\text{Ker}(\text{Hom}(P_n, N) \rightarrow \text{Hom}(P_{n+1}, N))}{I_m(\text{Hom}(P_{n-1}, N) \rightarrow \text{Hom}(P_n, N))}.$$

É uma consequência trivial de 9.2.4 que $\text{Ext}_R^P(M, N)$ independe da resolução projetiva escolhida para M .

EXERCÍCIOS

9.2.6 - Seja G um grupo abeliano livre, considerado como um Z -módulo. Calcule $\text{Ext}_Z^P(G, H)$, $p \geq 0$, H um grupo abeliano qualquer.

9.2.7 - Se G é um grupo abeliano qualquer, então $\text{Ext}_Z^1(Z_m, G) = \frac{G}{mG}$. Ache $\text{Ext}_Z^P(Z_n, G)$, $p \geq 2$.

9.2.8 - Calcule $\text{Ext}_Z^P(G, H)$, $p \geq 0$, G um grupo abeliano finitamente gerado, H um grupo abeliano.

9.2.9 - Se G e H são grupos abelianos, $\text{Ext}^P(G, H) = 0$, $p \geq 2$.

Os seguintes fatos serão úteis no que se segue:

EXERCÍCIOS

9.2.10 - Se P é um R -módulo projetivo, então toda sequência curta exata $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ é da forma $0 \rightarrow M \rightarrow M \otimes P \rightarrow P \rightarrow 0$, com $N \approx M \otimes P$.

9.2.11 - Dada uma sequência curta exata da forma

$0 \rightarrow M \rightarrow M \otimes P \rightarrow P \rightarrow 0$, então $0 \leftarrow \text{Hom}(M, P) \leftarrow \text{Hom}(M \otimes P, L) \leftarrow \text{Hom}(P, L) \leftarrow 0$ é curta exata, L um R -módulo. O mesmo acontece com $0 \rightarrow \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(L, M \otimes P) \rightarrow \text{Hom}(L, P) \rightarrow 0$.

Suponhamos, agora, uma sequência curta exata de R -módulos $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ e resoluções projetivas \mathcal{P} e \mathcal{P}' para A e B respectivamente

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & P_1 & & P'_1 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & P_0 & & P'_0 & & & \\
 e & \downarrow & & \downarrow & e' & & \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \rightarrow 0
 \end{array}$$

Nesta situação, vale o seguinte teorema:

TEOREMA 9.2.12 - Se $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ é exata \mathcal{P} uma resolução projetiva para A , \mathcal{P}' uma resolução projetiva para B , então existe uma resolução projetiva \mathcal{P}'' para B tal que a sequência de complexos-ca-

deia $0 \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow P' \rightarrow 0$ é exata.

Demonstração: Ver Northcott, página 82.

Podemos agora demonstrar o seguinte:

TEOREMA 9.2.13 - Se $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ é exata, e $0 \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow P' \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata de complexos, onde P, P'' e P' são resoluções para A, B e C , P' projetiva, então, se L é um R -módulo

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P', L) \rightarrow \text{Hom}(P'', L) \rightarrow \text{Hom}(P, L) \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração: é uma consequência trivial de 9.2.11.

TEOREMA 9.2.14 (A seqüência exata para Ext): Se

$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ é uma seqüência curta exata de complexos, e L é um R -módulo, então a seqüência

$$\begin{aligned} & \dots \rightarrow \text{Ext}_R^n(C, L) \rightarrow \text{Ext}_R^n(B, L) \rightarrow \text{Ext}_R^n(A, L) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_R^1(C, L) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, L) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, L) \rightarrow \text{Hom}_R(C, L) \rightarrow \text{Hom}_R(B, L) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Hom}_R(A, L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

é exata.

Demonstração: é uma consequência de 9.2.13, levando em

conta que se M e L são R -módulos,

$$\text{Ext}_R^0(M, L) \approx \text{Hom}_R(M, L).$$

EXERCÍCIO

9.2.15 - Mostre que se (X, Y) é um par de espaços topológicos, então existe uma seqüência longa exata de cohomologia

$$0 \rightarrow H^0(X, Y) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(X) \rightarrow H^1(X, Y) \rightarrow H^1(Y) \rightarrow \dots \rightarrow H^n(X, Y) \rightarrow H^n(Y) \rightarrow H^n(X) \rightarrow \dots$$

§9.3 - O Teorema dos Coeficientes Universais

Neste parágrafo, estudamos as relações entre homologia e cohomologia.

TEOREMA 9.3.1 (Teorema dos Coeficientes Universais):

Seja K um complexo-cadeia de R -módulos livres, onde R é um domínio de ideais principais (P.I.D.) e N um R -módulo. Então, a seqüência

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(K), N) \xrightarrow{\beta} H^n(K, N) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_R(H_n(K), N) \rightarrow 0$$

é exata e se fatora.

Demonstração: Se $K = \{K_n\}$, seja Z_n o submódulo dos n -ciclos de K . Se $B_n = \frac{K_n}{Z_n}$, podemos fatorar $d_n: K_n \rightarrow K_{n-1}$ da seguinte forma

$$K_n \xrightarrow{P} B_n \xrightarrow{\partial^t} Z_{n-1} \xrightarrow{i} K_{n-1}$$

onde p é a projeção $K_n \rightarrow B_n$. Temos as duas seqüências exatas abaixo

$$Z_n \xrightarrow{i} K_n \xrightarrow{p} B_n \quad \text{e} \quad B_{n+1} \xrightarrow{\partial'} Z_n \rightarrow H_n(K).$$

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{Ext}_R^1(B_n, N) = 0 & & 0 & \\
 & & & \uparrow & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & \text{Hom}(H_n, N) & \rightarrow & \text{Hom}(Z_n, N) & \xrightarrow{d} & \text{Hom}(B_{n+1}, N) \\
 & & \downarrow & & \uparrow i^* & & \downarrow p^* \\
 & \rightarrow & \text{Hom}(K_{n-1}, N) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(K_n, N) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(K_{n+1}, N) \\
 & & \downarrow i^* & & \uparrow p^* & & \\
 \text{Hom}(Z_{n-1}, N) & \xrightarrow{d'} & \text{Hom}(B_n, N) & \xrightarrow{d'} & \text{Ext}_R^1(H_{n-1}, N) & \rightarrow & \text{Ext}_R^1(Z_{n-1}, N) \\
 & & & & \uparrow & & \parallel \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Observe que tanto as linhas como as colunas são exatas. Além disso, $\text{Ker } \frac{\delta}{I_m \delta} = \text{Ker } \frac{(di^*)}{I_m (p^* d^*)} = H$ e i^* induz uma aplicação de H sôbre $\text{Ker}(\text{Hom}(Z_n, N) \rightarrow \text{Hom}(B_{n+1}, N)) \approx \text{Hom}(H_n, G)$; esta aplicação é chamada de α . Seu núcleo é $\frac{I_m p^*}{I_m (p^* d^*)} \approx \text{Ext}(H_{n-1}, N)$; esta aplicação é β , e provamos assim o teorema.

EXEMPLOS

9.3.2 - Se $N = R$, o teorema dos coeficientes universais

se apresenta como $0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(K), R) \rightarrow H^n(K, R) \rightarrow \text{Hom}_R(H_n(K), R) \rightarrow 0$. Se R é um corpo, então

$\text{Ext}_R^1(H_{n-1}(K), R) = 0$ e assim $H^n(K, R) \approx \text{Hom}_R(H_n(K), R) = (H_n(K))^*$, o espaço vetorial dual de $H_n(K)$.

9.3.3 - Dado um espaço topológico X e R um P.I.D., então o teorema dos coeficientes universais se aplica (por quê?) e nos dá a relação entre a homologia e a cohomologia de X com coeficientes em R :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(X; R), R) \rightarrow H^n(X; R) \rightarrow \text{Hom}_R(H_n(X; R), R) \rightarrow 0 .$$

CAPÍTULO 10

A EXISTÊNCIA DE UM PRODUTO EM COHOMOLOGIA E APLICAÇÕES

O objetivo deste capítulo é tratar da existência de um "produto" na cohomologia singular de um espaço X . Ao contrário dos capítulos anteriores, que eram auto-suficientes, este citará, sem demonstrações, resultados que, incluídos, o alongariam demasiadamente. Apresentamos, em primeiro lugar, algumas idéias algébricas.

§10.1 - O produto tensorial de complexos. A idéia de "Tor".

O Teorema de Eilenberg-Zilber.

DEFINIÇÃO 10.1.1 - Seja R , como sempre, um anel comutativo, com identidade. Se $K = \{K_n\}$ e $M = \{M_n\}$ são complexos-cadeia sobre R , o complexo $K \otimes_R M$ é definido como segue

$$(K \otimes_R M)_n = \sum_{k+j=n} K_k \otimes_R M_j$$
$$d_n(K \otimes M) = dk \otimes m + (-1)^{|k|} k \otimes d_m,$$

onde $|k| = \text{dimensão de } K$.

DEFINIÇÃO 10.1.2 - Seja M um R -módulo, e \mathcal{P} uma resolução projetiva para M

$$0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots \leftarrow P_n \leftarrow \dots$$

Se N é um R -módulo, então

$$\text{Tor}_n^R(M, N) = H_n(\mathbb{F} \otimes_R N),$$

onde N é considerado como um complexo trivial, cujo único módulo não nulo é N , em dimensão zero.

DEFINIÇÃO 10.1.3 - Um R -módulo N é chato se $\text{Tor}_n^R(N, K) = 0$, para todo R -módulo K , $n \geq 1$.

EXERCÍCIOS

10.1.4 - Se P é projetivo, então P é chato.

10.1.5 - Sejam K e L complexos-cadeia; então, existe

$$\text{um homomorfismo } p: H_i(K) \otimes_R H_j(L) \rightarrow H_{i+j}(K \otimes L)$$

dado por $p(\bar{x} \otimes \bar{y}) = \overline{x \otimes y}$.

Podemos agora enunciar um dos teoremas importantes do capítulo:

TEOREMA 10.1.6 (A fórmula de Künneth) - Sejam L e K

complexos-cadeia tais que $Z_n(K)$ e $B_n(K)$

são módulos chatos, para todo n . Então, existe uma seqüência curta exata

$$0 \rightarrow \sum_{m+n=q} H_m(K) \otimes H_n(L) \xrightarrow{P} H_q(K \otimes L) \rightarrow \sum_{m+n=q-1} \text{Tor}_1^R(H_m(K), H_n(L)) \rightarrow 0$$

para todo q .

COROLÁRIO 10.1.7 - Se, além das hipóteses do teorema,

$H_m(K)$ é projetivo, $\forall m$, então

$$H_q(K \otimes L) \approx \sum_{m+n=q} H_m(K) \otimes H_n(L)$$

Outro fato importante, que não provaremos, é o seguinte:

TEOREMA 10.1.8 - Sejam X e Y espaços topológicos e

$C(XY)$, $C(X)$, $C(Y)$ seus complexos sin-

gulares respectivamente. Então há aplicações

$\varphi: C(XY) \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{R}} C(Y)$ e $\psi: C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(XY)$ que induzem um isomorfismo em homologia e cohomologia. Mais precisamente, $\psi \cdot \varphi$ é homotópica por cadeia à identidade de $C(XY)$ e $\varphi \cdot \psi$ é homotópica por cadeia à identidade de $C(X) \otimes C(Y)$.

Este é o chamado teorema de Eilenberg-Zilber. Sua demonstração é feita com o auxílio da técnica dos modelos acíclicos. Uma demonstração pode ser encontrada em Liulevicius [8].

§10.2 - O produto interno em cohomologia

Usando 10.1.8 podemos definir agora a noção de "produto interno" em cohomologia.

Seja $\Delta: X \rightarrow X \times X$ a função diagonal em $X: x \mapsto (x, x)$. Se $\bar{x} \in H^p(X; R)$, \bar{x} é representado por uma co-cadeia $x \in \text{Hom}_R(C_p(X), R)$. Seja também $\bar{y} \in H^q(X; R)$, representado por $y \in \text{Hom}_R(C_q(X), R)$. Podemos, portanto, definir uma co-cadeia $m(x \otimes y) \in \text{Hom}(C_p(X) \otimes C_q(X); R)$ usando a multiplicação $R \otimes R \rightarrow R$

$$C(X) \otimes C(X) \xrightarrow{x \otimes y} R \otimes R \xrightarrow{m} R .$$

LEMA 10.2.1 - Se x e y são co-ciclos em $C_p(X)$ e $C_q(X)$ respectivamente, então $m(x \otimes y)$ será um co-ciclo de dimensão $p+q$ em $C(X) \otimes C(X)$.

Demonstração: é imediata, sendo suficiente relembrar-se da definição da diferencial em $C(X) \otimes C(X)$.

Consideremos agora o diagrama de aplicações

$$C(X) \xrightarrow{\Delta} C(X \times X) \xrightarrow{\varphi} C(X) \otimes C(X)$$

onde φ é aplicação do teorema de Eilenberg-Zilber.

DEFINIÇÃO 10.2.2 - Se X é um espaço topológico, e

$\bar{x} \in H^p(X)$, $\bar{y} \in H^q(Y)$, então o produto interno de x e y , ou produto de x e y , $x \cup y$, é a classe de $H^{p+q}(X)$ definida por

$$x \cup y = \Delta * \varphi * (m(x \otimes y)).$$

É a existência deste produto, para um espaço topo-

lógico qualquer X , que torna a cohomologia de X um arma bem mais poderosa que sua homologia.

O produto interno goza de várias propriedades formais, que podem ser resumidas como segue:

TEOREMA 10.2.3 - Se X é um espaço topológico, então

$H^*(X;R)$ é uma álgebra graduada sôbre o anel R . Ou seja $H^*(X;R) = \{H^n(X;R), n \geq 0\}$ goza das seguintes propriedades: $\exists 1 \in H^0(X;R)$ e um produto \cup tal que se $x \in H^p(X)$, $y \in H^q(X)$, então $x \cup y \in H^{p+q}(X)$ e $1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad \forall x \in H^p(X)$, $p \geq 0$; além disso, se $x \in H^p(X)$, $y \in H^q(X)$, $z \in H^s(X)$, então $x(yz) = (xy)z$.

Além disso, a álgebra graduada $H^*(X;R)$ é anti-comutativa; isto é, se $x \in H^p(X)$, $y \in H^q(X)$, então $x \cup y = (-1)^{|x||y|} y \cup x$, onde $|x| = \dim x$ e $|y| = \dim y$.

Demonstração: A demonstração dêste teorema poderá ser encontrada em Liulevicius [8].

EXEMPLOS

10.2.4 - Seja $X = S^n$. É fácil ver que $H^q(S^n, R) = \begin{cases} R & q=0, n \\ 0 & q \neq 0, n \end{cases}$

Isso pode ser feito usando o teorema dos coeficientes universais ^{ou} diretamente a partir das propriedades formais que a cohomologia satisfaz (a mesma demonstração feita para

homologia). Então, a estrutura da álgebra de $H^*(S^n, R)$ é que $H^*(S^n, R)$ será uma álgebra exterior sobre R , com um gerador x em dimensão n .

10.2.5 - Seja $X = CP^n$, o espaço projetivo complexo de di mensão n . A cohomologia de CP^n é fácil de obter (e.q., pelo teorema dos coeficientes universais). Como álgebra sobre R , $H^*(CP^n, R) \approx \frac{R[y]}{(y^{n+1})}$, uma álgebra polinomial sobre um gerador y , de dimensão 2, dividido pelo ideal gerado por y^{n+1} . A demonstração d_este resultado encontra-se em Liulevicius [8] ou Spanier [6].

10.2.6 - Tomemos, agora, $X = RP^n$, cuja homologia é mais complicada que a homologia de CP^n . Consideraremos s_omente o caso em que $R = Z_2$. Então, $H^*(RP^n; Z_2) \approx \frac{Z_2[x]}{(x^{n+1})}$, isto é, uma álgebra polinomial sobre um gerador de dimensão 1 dividido pelo ideal gerado por x^{n+1} . A demonstração d_este resultado, mais uma vez, poderá ser vista em Liulevicius [8] ou Spanier [6].

10.2.7 - Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então f induz uma aplicação de módulos $f^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$. É um fato importante que f^* será de fato uma aplicação entre álgebras, isto é, se $x, y \in H^*(Y; R)$, então $f^*(x \cup y) = f^*(x) \cup f^*(y) \in H^*(X; R)$.

10.2.8 - Consideremos uma aplicação contínua $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$.

Podemos usá-la para formar o espaço $X = e^{2n} \cup_f S^n$, obtido pela adjunção de uma célula de dimensão $2n$ à esfera S^n . É então bem fácil determinar a cohomologia de X (tome $R=Z$):

$$H^q(X) = \begin{cases} Z & q = 2n, n, 0 \\ 0 & q \neq 2n, n, 0 \end{cases}$$

Seja x um gerador de $H^n(X)$; então, $x \cup x \in H^{2n}(X)$. Se y é um gerador de $H^{2n}(X)$, vem que $x \cup x = ny$, $n \in Z$. Demonstra-se que n depende (a menos de sinal), somente da classe de homotopia de $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$. O inteiro n é chamado o invariante de Hopf da aplicação f , e foi a causa de um grande desenvolvimento da topologia algébrica.

A estas alturas, achamos talvez convenientes algumas considerações de ordem geral. Já vimos que a introdução dos grupos de homologia nos permitiu a solução de alguns problemas importantes (e.g., o teorema do ponto fixo de Brouwer, o teorema fundamental da álgebra e o teorema da separação de Jordan-Brouwer). Êstes teoremas poderiam ter sido demonstrados, de maneira formalmente idêntica, usando a cohomologia singular. Surge então a pergunta: por quê introduzir mais estrutura nos grupos de cohomologia, tornando-os mais ricos (mas também mais complexos)?

A resposta é que isso se faz necessário a fim de resolver problemas mais complexos e difíceis. A procura de invariantes algébricos cada vez mais refinados que possam ser associados a um espaço, para resolver os problemas que resistiram aos ataques anteriores é contínua.

Como exemplo, já vimos, por meios muito simples, que a esfera S^n admite um campo de vetores não nulos se e somente se n é ímpar. Dois campos de vetores f e g são linearmente independentes se, $\forall x \in S^n$, $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes. Um problema sem solução por muitos anos foi achar o número de campos linearmente independentes sobre S^n . Este problema foi finalmente resolvido por J.F. Adams em 1962 ("Vector Fields on Spheres", *Annals of Mathematics*, vol. 75, 1962, p.603-632), após ter ocupado a atenção dos matemáticos por cinquenta anos! As técnicas usadas por Adams e os invariantes algébricos utilizados por ele foram bem mais complexos e ricos que os aqui descritos.

Damos abaixo um exemplo de uma situação em que teremos de usar o produto em cohomologia para poder resolver o problema em questão (veja N.E. Steenrod, "Cohomology Operations and Obstruction to Extending Continuous Functions", Princeton University, 1957).

Consideremos o espaço X dado pelo plano projetivo complexo e A o subespaço de X dado pela linha projetiva (complexa), definida por $A = \{[z_1, z_2, z_3] \in X \mid z_3 = 0\}$. Por 10.2.5, $H^*(A; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[y]}{(y^2)}$ e $H^*(X; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[y]}{(y^3)}$. Mostraremos que A não é um retrato de X . Se assim o fôsse, teríamos o seguinte diagrama comutativo de módulos e homomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 & H^*(X) & \\
 i^* \swarrow & & \uparrow r^* \\
 H^*(A) & \xleftarrow{=} & H^*(A)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \swarrow & & \downarrow r \\
 A & \xrightarrow{1_A} & A
 \end{array}$$

Usando somente a estrutura do módulo de cohomologia, vemos que tal situação é perfeitamente possível:

		0	1	2	3	4	
$H^*(X)$		\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2
$i^* \downarrow \uparrow r^*$							
$H^*(A)$		\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2	0	0	

Seja y o gerador de $H^2(X)$. Se A fôr um retrato de X , y está na imagem de r^* ; logo, se x é o gerador de $H^2(A)$, $r^*(x) = y$ e assim $r^*(x \cup x) = r^*(x) \cup r^*(x) = y \cup y = y^2$. Mas $x \cup x = 0$ logo $y^2 = 0$, uma contradição!

Em verdade, êste resultado permite resolver um pro

blema de extensão: Sabemos que $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1\}$ e $D^4 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \leq 1\}$ e que S^2 é a linha projetiva complexa $[z_1, z_2]$.

Hopf definiu a aplicação $h: S^3 \rightarrow S^2$ dada por $h(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$. A adjunção de D^4 a S^2 por meio de h é o espaço X e é então imediato de ver que h não pode ser estendida a E^4 (se o fôsse, teríamos uma retração de X em A).

BIBLIOGRAFIA

A bibliografia sôbre o assunto é bem vasta. Um livro bem elementar, claro e conciso é:

[1] Artin, E. e Braus: "Einführung in die algebraische Topologie" de que já existe uma tradução em inglês. Contém todo o material destas notas, e alguma coisa a mais. No entanto, é de orientação puramente clássica.

No mesmo nível, encontramos

[2] Hu, S.T.: "Homology Theory".

[3] Greenberg: "Lectures on Algebraic Topology".

O segundo dêstes é de leitura difícil, visto tentar apresentar em poucas páginas grande quantidade de material.

Livros auto-suficientes, bem mais completos são:

[4] Eilenberg and Steenrod: "Foundations of Algebraic Topology".

[5] Hilton and Wylie: "Homology Theory".

[6] Spanier: "Algebraic Topology".

O último dêles leva o leitor desde as definições básicas do assunto até à condição de poder ter trabalhos de pesquisa atual.

Um tratamento diferente é dado em

[7] Piccinini: "Introdução à Topologia Algébrica".

Uma apresentação clara, moderna e eficiente se encontra em

[8] Liulevicius: "Operações de Cohomologia e aplicações".

A álgebra necessária para um estudo mais cuidadoso da topologia algébrica pode ser vista em:

[9] Cartan and Eilenberg: "Homological Algebra".

[10] Mac Lane: "Homology".

[11] Northcott: "An introduction to homological algebra".

Uma ótima maneira de adquirir sensibilidade para o assunto é tentar ler os artigos de divulgação e condensação:

[12] Hilton: "Lectures on Modern Topology"

que contém ótimos trabalhos sôbre vários campos da topologia algébrica.

[13] Steenrod: Cohomology Operations and Obstruction to extending continuous functions"

ótimo trabalho de introdução e motivação, escrito por um dos grandes nomes do assunto.

Os fatos de álgebra geral usados podem ser encontrados em:

[14] S. Lang: Algebra.