ANÁLISE FUNCIONAL E O PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

CHAIM S. HÖNIG

APRESENTAÇÃO

As presentes notas visam dar uma pequena introdução à Análise Funcional levando a uma aplicação importante e significativa desta teoria, à resolução do problema de Sturm-Liouville da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Estas notas foram escritas especialmente para o 8º Colóquio Brasileiro de Matemática mas nelas aproveitamos ao máximo possível o nosso texto de "Análise Funcional e Aplicações"† ao qual nos referiremos como AFA.

Para a compreensão das presentes notas exige-se a familiaridade com a linguagem dos espaços métricos e dos espaços vetoriais.

Demos uma visão de conjunto sôbre o problema de Sturm-Liouville e sua relação com o resto destas notas:

O teorema fundamental da teoria de Sturm-Liouville é o teorema 2.4 do cap. IV. Quando aplicamos o método de separação de variáveis a problemas de Equações Diferenciais Parciais caimos muitas vêzes num sistema de Sturm-

---

† Chaim Samuel Hönig, "Análise Funcional e Aplicações", 2 volumes. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970.

Liouville (ver cap.IV, §2,A) e num problema de desenvolvimento ortonormal em série de autofunções do sistema de Sturm-Liouville. No caso particular da equação da corda homogênea vibrante isto se reduz a um problema de séries de Fourier (ver o Exemplo do fim do Apêndice "Séries de Fourier" no cap. II) o que nos leva naturalmente ao estudo destas e da teoria dos espaços de Hilbert. Neste caso a possibilidade do desenvolvimento ortonormal é demonstrada de modo relativamente simples; no caso geral porém êste estudo é muito mais complexo. Começamos transformando o problema diferencial numa equação integral de Fredholm com núcleo hermitiano através da função de Green do problema (teorema 2.3 do cap. IV). Esta equação integral, à qual corresponde um operador hermitiano compacto no espaço prehilbertiano $C_{L_2(\rho)}([a,b])$, é estudada no §1 do cap. IV e êste estudo é baseado na teoria espectral dos operadores hermitianos compactos (teoremas 3.8, 3.9 e 3.10 do cap.III). Os parágrafos iniciais do cap.III são preparatórios para esta teoria espectral e nos capítulos I e II damos, entre outros, os resultados necessários para o cap.III. Partes complementares não necessárias para a linha acima levando à solução do problema de Sturm-Liouville são precedidas de $\binom{*}{*}$.

Estas notas contém perto de uma centena de exercícios. Os precedidos de (→) são em geral rotineiros e servem para verificar se as noções apresentadas foram bem compreendidas; os exercícios precedidos de (*) são em geral mais difíceis.

São Paulo, março de 1971

Chaim Samuel Hönig

NOTAÇÕES

Usamos as notações habituais de Bourbaki para a teoria dos conjuntos, a álgebra e a topologia geral.

Lembremos que N, Z, Q, R e C indicam, respectivamente, os conjuntos dos inteiros naturais, dos inteiros relativos, dos números racionais, dos números reais e dos números complexos. R_+ indica o conjunto dos números reais positivos.

Dados números reais $a < b$, $[a,b]$ e $]a,b[$ indicam, respectivamente o intervalo fechado e o intervalo aberto de extremidades a e b.

Se λ é um número complexo, $\bar{\lambda}$ indica seu complexo conjugado.

F^E indica o conjunto das funções ou aplicações f definidas no conjunto E e a valores no conjunto F; escrevemos

$$f:E \to F$$

e também

$$f:x \in E \mapsto f(x) \in F$$

para indicar a função f.

Dada uma aplicação $f:E \to F$ e um subconjunto $A \subset E$, indicamos por $f|_A$ a restrição da aplicação f ao subcon junto A.

Por seqüência entendemos tanto uma seqüência finita

$$(x_n)_{n=1,\dots,m}$$

como uma sequência infinita $(x_n)_{n\in N}$ e quando não houver perigo de confusão escrevemos simplesmente "a sequência x_n".

Dado um espaço vetorial E sôbre um corpo K, E^* indica o seu dual algébrico, isto é, o conjunto das formas lineares definidas em E (aplicações lineares de E em K). Dado x' em E^*, para todo $x \in E$ escrevemos

$$\langle x',x\rangle = \langle x,x'\rangle = x'(x).$$

Num espaço métrico E com uma distância d, dados $A \subset E$ e $x \in E$, $d(x,A)$ indica a distância do elemento x ao conjunto A:

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\}.$$

Dado um subconjunto A de um espaço topológico E, $\overset{\circ}{A}$ indica o interior de A e $\bar{A}$ sua aderência.

PARA OUTRAS NOTAÇÕES, VER O ÍNDICE DE NOTAÇÕES.

<u>A menos de menção explícita em contrário todos os resultados destas notas, bem como as respectivas demonstrações, são válidos tanto para espaços vetoriais sôbre o</u>

corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos como para espaços vetoriais sôbre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Consideramos sempre espaços vetoriais complexos, a passagem para espaços vetoriais reais fazendo-se por adaptações óbvias. Por exemplo, passando a considerar, quando fôr o caso, seqüências e funções a valores reais em vez de valores complexos etc.

As proposições e os exercícios são numerados dentro de cada capítulo. O exercício 3.5 se refere ao exercício 5 do §3 do capítulo em que a referência é feita; o teorema III.2.7 se refere ao teorema 7 do §2 do capítulo III.

As partes assinaladas por $\left\{\begin{matrix}*\\*\end{matrix}\right\}$ não são necessárias para os resultados levando ao problema de Sturm-Liouville. O leitor que não tiver lido as desigualdades de Hölder e Minkowsky pode sempre substituir a norma $\| \ \|_p$ pela norma $\| \ \|_2$ e aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwartz em vez da desigualdade de Hölder (tomando $p = p' = 2$).

ÍNDICE

CAPÍTULO I

ESPAÇOS DE BANACH

§1 - Espaços normados

A - Normas

DEFINIÇÃO - Dado um espaço vetorial E sôbre $\mathbb{C}$, uma seminorma sôbre E é uma aplicação $p:E \to \mathbb{R}_+$ tal que

SN_1 - Para todo $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

SN_2 - Para quaisquer $x,y \in E$ temos $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Dizemos que uma seminorma é uma norma se $p(x) = 0$ implica $x = 0$. Neste caso, em geral, escrevemos $\|x\|$ em lugar de $p(x)$ acompanhando eventualmente esta notação por outrans indicações (por exemplo, $\|x\|_p$, $\|x\|_p^{(m)}$, $\|x\|_{p,\rho}$, etc, como veremos).

Se p é uma seminorma sôbre E, é imediato que para quaisquer $x,y \in E$ temos $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$.

Um espaço vetorial munido de uma norma se chama de espaço normado.

Dado um espaço normado E, à sua norma está natural mente associada uma distância $d(x,y) = \|x-y\|$.

É fácil verificar que estão satisfeitas as propriedades que caracterizam uma distância:

d1 - $d(x,y) \geqq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

d2 - $d(y,x) = d(x,y)$;

d3 - $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ (propriedade triangular).

Quando a distância é definida a partir de uma norma, é imediato que ela ainda goza das seguintes propriedades:

d4 - $d(x+z,y+z) = d(x,y)$ (invariança por translações);

d5 - $d(\lambda x,\lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ (homotetia).

→ EXERCÍCIO 1.1 - Demonstrar que se uma distância sôbre um espaço vetorial E satisfaz as propriedades d4 e d5, ela provém de uma norma. [Sugestão: considerar $\|x\| = d(x,0)$].

Consideramos sempre um espaço normado como munido da distância natural associada à sua norma. Dêste modo êle se torna um espaço métrico e como tal herda portanto tôda linguagem associada aos espaços métricos e à sua topologia.

Lembremos algumas definições e propriedades: Seja E um espaço métrico com distância d.

1) Dizemos que a seqüência x_n converge para o elemento x, escrevemos $x_n \to x$ ou $x_n \overset{E}{\to} x$ quando $d(x_n,x) \to 0$.

2) Dizemos que a seqüência x_n é uma seqüência de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existe n_o tal que para $m,n \geqq n_o$ temos $d(x_m,x_n) < \epsilon$. Tôda sequência convergente é uma seqüência de Cauchy.

3) Dizemos que E é completo se tôda seqüência de Cauchy de E fôr convergente (em E). Exemplos: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ com a distância euclidiana habitual são completos. O conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais não é completo quando munido da mesma distância.

Dado $a > 0$ e $x \in E$ indicamos por

$$B_a(x) = \{y \in E \mid d(x,y) < a\}$$

a bola aberta de centro x e raio a e por

$$B_a[x] = \{y \in E \mid d(x,y) \leqq a\}$$

a bola fechada de centro x e raio a.

EXERCÍCIO 1.2 - Seja E um espaço normado e $\| \ \|$ a sua norma.

a) Demonstrar que a aplicação $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$ é contínua.

b) Demonstrar que $x_n \to x$ implica $\|x_n\| \to \|x\|$.

c) Demonstrar que as aplicações

$$(x,y) \in E \times E \mapsto x+y \in E \quad \text{e} \quad (\lambda,x) \in \mathbf{C} \times E \mapsto \lambda x \in E$$

são contínuas (consideramos $E \times E$ e $\mathbf{C} \times E$ munidos da topologia produto).

d) Demonstrar que $x_n \to x$, $y_n \to y$ e $\lambda_n \to \lambda$ implicam

$$x_n + y_n \to x+y \quad \text{e} \quad \lambda_n x_n \to \lambda x \ .$$

DEFINIÇÕES - Um <u>espaço de Banach</u> é um espaço normado completo. Um subconjunto A de um espaço normado se diz <u>limitado</u> se temos $\sup\limits_{x \in A}\|x\| < \infty$.

EXEMPLO N1 - $\mathbf{C}$ - Sôbre o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos a função $\lambda \in \mathbf{C} \longmapsto |\lambda| \in \mathbf{R}_+$ é uma norma.

EXEMPLO N2 - $C(K)$ - Dado um espaço compacto K, indicamos por $C(K)$ o conjunto das funções definidas em K e a valores complexos que são contínuas. A menos de menção explícita do contrário, $C(K)$ é sempre munido da norma

$$x \in C(K) \longmapsto \|x\| = \sup_{t \in K} |x(t)| \ .$$

EXEMPLO N3 - $C_{L_1}([a,b])$ - Indica o conjunto $C([a,b])$ munido da norma

$$x \in C([a,b]) \longmapsto \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt \ .$$

*EXEMPLO N4 - $\ell_\infty(I)$ - Indica o conjunto das famílias $x = (x_i)_{i \in I}$ de números complexos tais que $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i \in I} |x_i| < \infty$. $x \in \ell_\infty(I) \longmapsto \|x\|_\infty$ é uma norma.

* EXEMPLO N5 - $\ell_1(\mathbf{N})$ - Indica o conjunto das seqüências

$x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de números complexos tais que $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. $x \in \ell_1(N) \longmapsto \|x\|_1$ é uma norma.

EXEMPLO N6 - $C^{(m)}([a,b])$ - Indica o conjunto das funções definidas em $[a,b]$ e a valores complexos que são m vêzes contìnuamente diferenciáveis; com a notação do Exemplo N2

$$x \in C^{(m)}([a,b]) \longmapsto \|x\|^{(m)} = \sup_{0\leqq i\leqq m} \|x^{(i)}\|$$

é uma norma.

→ EXERCÍCIO 1.3 - Demonstrar que o espaço normado $C(K)$ é completo.

→ EXERCÍCIO 1.4 - Demonstrar que $C_{L_1}([a,b])$ não é completo.

* EXERCÍCIO 1.5 - Demonstrar que o espaço $\ell_1(N)$ é completo.

EXERCÍCIO 1.6 - Definições: Dizemos que um espaço topológico é <u>separável</u> ou de <u>caráter enumerável</u> (escrevemos $C\aleph_0$) se existe um subconjunto enumerável denso no espaço todo. Dizemos que num espaço topológico está satisfeito o <u>primeiro axioma de enumerabilidade</u> (escrevemos $V\aleph_0$) se todo ponto tem um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Dizemos que num espaço topológico está satisfeito o segundo axioma de enumerabilidade (escrevemos $O\aleph_0$) se êle tem uma base enumerável de conjuntos abertos.

a) Demonstrar que $O\aleph_0 \Rightarrow V\aleph_0$ e $C\aleph_0$.

b) Demonstrar que num espaço métrico temos $C\aleph_0 \Rightarrow O\aleph_0$.

c) Demonstrar que todo subespaço de um espaço $O\aleph_0$ é $O\aleph_0$. Isto vale para espaços $C\aleph_0$?

d) Demonstrar que o espaço de Banach $C^*(R)$, das funções contínuas e limitadas definidas em R (munido da norma sup), não é separável. [Sugestão: considerar

$$\|e^{irx} - e^{isx}\|$$

para $r,s \in R$.]

LEMA 1.1 - Sejam E e F espaços normados e f uma aplicação linear de E em F. São equivalentes as seguintes propriedades:

a) f é contínua na origem

b) $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = M < \infty$

c) Existe $C > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$

d) f é contínua.

Demonstração: a) $\Rightarrow$ b). f sendo contínua na origem, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ implica $\|f(x)\| \leq \varepsilon$ e portanto $\|x\| \leq 1$ implica

$\|f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$. b) $\Rightarrow$ c). Para todo $x \in E$, $x \neq 0$, o elemento $\frac{x}{\|x\|}$ tem norma 1 e portanto $\|f(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$, isto é, $\|f(x)\| \leq M\|x\|$. c) $\Rightarrow$ d). Se $\|x-x_o\| \leq \frac{\epsilon}{C}$ então $\|f(x)-f(x_o)\| = \|f(x-x_o)\| \leq C\|x-x_o\| \leq \epsilon$. d) $\Rightarrow$ a) é evidente.

EXEMPLO N7 - $L(E,F)$ - Dados espaços normados E e F, $L(E,F)$ indica o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas de E em F munido da norma

$$f \in L(E,F) \longmapsto \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| .$$

Para todo $x \in E$ temos portanto $\|f(x)\| \leq \|f\| \, \|x\|$ e $\|f\|$ é a menor constante C tal que $\|f(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$ (ver o exercício 1.7).

Quando $F = \mathbb{C}$ indicamos por $E' = L(E,\mathbb{C})$ o <u>dual topológico</u> de E, isto é, o espaço vetorial das formas lineares contínuas sôbre E. Escrevemos $L(E) = L(E,E)$.

→ EXERCÍCIO 1.7 - Com as notações do Exemplo N7 demonstrar que

a) $f \in L(E,F) \longmapsto \|f\|$ é uma norma

b) $\|f\| = \inf\{C \; \|f(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E\}$

c) $\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$ para todo $x \in E$ e $f \in L(E,F)$

* EXERCÍCIO 1.8 - Seja E um espaço normado e F um es-

paço de Banach; demonstrar que $L(E,F)$ é um espaço de Banach.

EXERCÍCIO 1.9 - Sejam E,F e G espaços normados e $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,G)$. Demonstrar que $B \circ A \in L(E,G)$ e que $\|B \circ A\| \leq \|A\| \|B\|$.

LEMA 1.2 - Seja $E = \mathbb{C}([a,b])$ e $F = \mathbb{C}([c,d])$; seja

$$K:[c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

uma função contínua. Para todo $x \in E$ definimos

$$(kx)(t) = \int_a^b K(t,s)\ x(s)ds \qquad (c \leqq t \leqq d);$$

$k \in L(E,F)$ e temos $\|k\| \leq \sup\limits_{c \leqq t \leqq d} \int_a^b |K(t,s)|ds$.

Demonstração: É imediato que k é uma aplicação linear de E em F; sua continuidade segue-se de

$$|(kx)(t)| \leqq \int_a^b |K(t,s)\ x(s)|dx \leqq \int_a^b |K(t,s)|ds \cdot \|x\|$$

que implica que

$$\|kx\| \leqq \sup_{c \leqq t \leqq d} \int_a^b |K(t,s)|ds \cdot \|x\|$$

e portanto

$$\|k\| \leqq \sup_t \int_a^b |K(t,s)|ds \ .$$

OBSERVAÇÃO - Pode-se demonstrar que na majoração precedente de $\|k\|$ vale a igualdade [ver AFA, cap.II, §3, Ex. L3]. Em geral, porém, nos exemplos concretos conhece-se apenas majorações para a norma do operador; ver os exercícios 1.11 a 1.14.

EXERCÍCIO 1.10 - Sejam $E = \mathbb{C}([a,b])$, $F = \mathbb{C}([c,d])$ e $G = \mathbb{C}([e,f])$; sejam $K_1:[c,d]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ e $K_2:[e,f]\times[c,d] \to \mathbb{C}$ funções contínuas e $k_1 \in L(E,F)$ e $k_2 \in L(F,G)$ os operadores definidos por K_1 e K_2 respectivamente. Para $(t,r) \in [e,f]\times[a,b]$ seja $K(t,r) = \int_c^d K_2(t,s)K_1(s,r)ds$ e seja $k \in L(E,G)$ o operador definido por K. Demonstrar que $k = k_2 \circ k_1$.

* APÊNDICE - As desigualdades de Hölder e Minkowsky.

Dado $1 \leq p \leq \infty$ indicamos com p' o elemento de $[1,\infty]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Temos $p'' = p$, $1' = \infty$, $2' = 2$; dizemos que p e p' são <u>expoentes conjugados</u>.

Dado $x \in \mathbb{C}^n$ definimos $\|x\|_p = [\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p]^{1/p}$ quando $p < \infty$ e $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq j\leq n} |x_j|$.

Dado $f \in \mathbb{C}([a,b])$ definimos $\|f\|_p = [\int_a^b |f(x)|^p dx]^{1/p}$ quando $p < \infty$ e $\|f\|_\infty = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$.

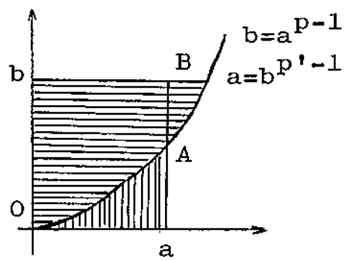
LEMA 1.3 - Seja $1 < p < \infty$; para quaisquer $a,b \in \mathbb{R}_+$ temos

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração: Consideremos a curva

$$b = a^{p-1} \quad (a = b^{\frac{1}{p-1}} = b^{p'-1})$$

que é estritamente crescente (convexa se $p \geqq 2$ e côncava se $p \leqq 2$).



Temos, então, $ab \leq$ área OaA + área OBb, isto é,

$$ab \leqq \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^b t^{p'-1}dt = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

TEOREMA 1.4 (a desigualdade de Hölder) - Sejam $1 \leqq p,p' \leqq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;

a) dados $x,y \in \mathbb{C}^n$ temos $\|xy\|_1 \leqq \|x\|_p \|y\|_{p'}$ †, isto é,

---

† definimos $xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$, interpretando $x \in \mathbb{C}^n$ como uma função $j \in \{1,\ldots,n\} \longmapsto x_j \in \mathbb{C}$ e xy é portanto a função produto.

$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p} \cdot (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'})^{1/p'}$ quando $1 < p < \infty$ e $\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sup_{1 \leq j \leq n} |y_j|$ quando $p = 1$, $p' = \infty$.

b) Dados $f, g \in C([a,b])$ temos $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$, isto é,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(x)|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}}$$ quando $1 < p < \infty$ e

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \cdot \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$ quando $p=1$.

Demonstração: a) Supomos $1 < p, p' < \infty$ pois senão o teorema é evidente. Pela mesma razão, basta considerar o caso em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Aplicando o Lema 1.3 aos pares

$$a_j = \frac{|x_j|}{\|x\|_p} \quad \text{e} \quad b_j = \frac{|y_j|}{\|y\|_{p'}}, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

temos $$\frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_j|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|y_j|^{p'}}{(\|y\|_{p'})^{p'}}$$

e efetuando a soma membro a membro das desigualdades vem

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}}\right) \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\|y\|_{p'}^{p'}} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ . \qquad \text{CQD}$$

b) O teorema é evidente para $p = 1$ ou ∞. Quando $1 < p < \infty$, para todo $x \in [a,b]$ consideramos o par

$$a(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad b(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}$$

ao qual aplicamos o Lema 1.3:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_p)^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|g(x)|^{p'}}{(\|g\|_{p'})^{p'}} \ .$$

Integrando esta desigualdade em $[a,b]$ segue o resultado.

TEOREMA 1.5 (a desigualdade de Minkowsky) - a) Para quaisquer x e y em C^n temos $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, isto é,

$$\left[\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} .$$

b) Para quaisquer $f,g \in C([a,b])$ temos $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Demonstração: a) Temos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{p-1} |x_j+y_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{p-1}|x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{p-1}|y_j| \quad \dagger$$

$$\leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{(p-1)p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \quad \dagger\dagger$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{p}\right]^{1-\frac{1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p) ,$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{p} \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^{p}\right]^{1-\frac{1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p) .$$

Dividindo ambos os membros pelo primeiro fator do segundo membro obtemos a desigualdade de Minkowsky.

b) A demonstração é análoga à de a) substituindo $\sum_{j=1}^{n}$ por $\int_a^b$.

EXEMPLO N8 - $\mathbb{C}_p^n$ - Seja $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{C}_p^n$ indica o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ munido da norma $x \in \mathbb{C}^n \mapsto \|x\|_p$ onde $\|x\|_p = [\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p]^{1/p}$ quando $p < \infty$ e $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Da desigualdade de Minkowsky segue a propriedade SN2; as outras propriedades de norma são de verificação trivial.

---

† Aplicamos a desigualdade de Hölder a ambos os têrmos e relativamente ao par (p',p).

†† Lembrando que $(p-1)p' = p$ e $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$.

EXEMPLO N9 - $\mathcal{C}_{L_p}([a,b])$ - Seja $1 \leq p \leq \infty$; $\mathcal{C}_{L_p}([a,b])$ indica o espaço vetorial $\mathcal{C}([a,b])$ munido da norma $f \in \mathcal{C}([a,b]) \longmapsto \|f\|_p$ onde $\|f\|_p = [\int_a^b |f(x)|^p dx]^{1/p}$ quando $p < \infty$ e $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Da desigualdade de Minkowsky segue a propriedade SN2; as outras propriedades de norma são de verificação trivial.

OBSERVAÇÃO (para quem conhece a teoria da integração de Lebesgue) - As desigualdades de Hölder e Minkowsky ainda valem quando consideramos os espaços vetoriais $L_p([a,b])$ das classes de equivalência [identificamos funções que só diferem num conjunto de medida nula] de funções mensuráveis $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ tais que $\|f\|_p < \infty$ onde $\|f\|_p = [\int_a^b |f(x)|^p dx]^{1/p}$ quando $p < \infty$ e $\|f\|_\infty = \operatorname*{supess}\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = \inf\{C \mid \{x \in [a,b] \mid |f(x)| > C\}$ tem medida nula$\}$. O espaço $L_p([a,b])$ é completo e $\mathcal{C}([a,b])$ é denso nele quando $p < \infty$.

Mais geralmente, dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ pode-se considerar anàlogamente os espaços $L_p(U)$.

Nos 4 exercícios que seguem consideramos o mesmo operador k definido em 1.2 mas munimos os espaços $\mathcal{C}([a,b])$ e $\mathcal{C}([c,d])$ de outras normas.

EXERCÍCIO 1.11 - Seja $E = \mathcal{C}_{L_1}([a,b])$ e $F = \mathcal{C}_{L_1}([c,d])$. Demonstrar que

$$\|k\| \leq \sup_{a \leqq s \leqq b} \int_c^b |K(t,s)|dt \ .$$

EXERCÍCIO 1.12 - Seja $E = C_{L_1}([a,b])$ e $F = C([c,d])$; demonstrar que

$$\|k\| \leq \sup\{|K(t,s)| \ a \leq s \leq b, \ \ c \leq t \leq d\} \ .$$

* EXERCÍCIO 1.13 - Seja $E = C_{L_p}([a,b])$ e $F = C_{L_q}([c,d])$; demonstrar que

$$\|k\| \leqq \left[\int_d^c \left[\int_a^b |K(t,s)|^{p'} \ ds\right]^{q/p'} dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. [Sugestão: aplicar a desigualdade de Hölder.]

* EXERCÍCIO 1.14 - Seja $E = C_{L_p}([a,b])$ e $F = C_{L_p}([c,d])$ seja

$$A = \sup_{a \leqq s \leqq b} \int_c^d |K(t,s)|dt \quad \text{e} \quad B = \sup_{c \leqq t \leqq d} \int_a^b |K(t,s)|ds \ .$$

Demonstrar que $\|k\| \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{p'}}$.

[Sugestão: considerar $|K| = |K|^{\frac{1}{p'}} |K|^{\frac{1}{p}}$ e aplicar a desigualdade de Hölder no cálculo de $\|kx\|$.]

* B - Topologia dos espaços normados

DEFINIÇÃO - Dadas duas normas p e q sôbre um espaço vetorial E dizemos que a norma p é <u>mais fina</u> que a norma q, escrevemos $p \geqslant q$ ou $q \leqslant p$, se a aplicação idêntica

$$E_p \hookrightarrow E_q \;^{\dagger}$$

for contínua, isto é, se p define sôbre E uma topologia mais fina que q.

PROPOSIÇÃO 1.6 - Sejam p e q duas normas sôbre espaço vetorial E; as seguintes propriedades são equivalentes:

1) $q \leqslant p$;
2) existe uma constante a tal que para todo $x \in E$ temos $q(x) \leqq ap(x)$.

De fato: $q(x) \leqq ap(x) \Leftrightarrow p(x) \leqq \frac{e}{a}$ implica $q(x) \leqq e \Leftrightarrow p(x-x_o) \leqq \frac{e}{a}$ implica $q(x-x_o) \leqq e \Leftrightarrow E_p \hookrightarrow E_q$ é contínua no ponto x_o.

Dizemos que duas normas p e q sôbre um espaço vetorial E são <u>equivalentes</u> se temos ao mesmo tempo

---

† indicamos por E_p o espaço vetorial E munido da norma p e da distância e topologia correspondentes.

$p \succ q$ e $q \succ p$.

É imediata a demonstração da

PROPOSIÇÃO 1.7 - Sejam p e q normas sôbre um espaço vetorial E; as seguintes propriedades são equivalentes:

1) p e q são normas equivalentes.
2) A aplicação idêntica $E_p \hookrightarrow E_q$ é bicontínua.
3) Existem constantes $a,b > 0$ tais que para todo $x \in E$ temos: $ap(x) \leq q(x) \leq bp(x)$.

OBSERVAÇÃO - Se duas normas são equivalentes as suas distâncias são uniformemente equivalentes e portanto ambas têm as mesmas sequências de Cauchy e os mesmos subespaços completos.

EXEMPLO - Sôbre $\mathbf{C}^n$ tôdas as normas $\| \|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ são equivalentes; isto segue imediatamente da relação

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty ,$$

isto é,

$$\sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| .$$

TEOREMA 1.8 - Tôdas as normas sôbre um espaço vetorial E dimensão finita são equivalentes.

<u>Demonstração</u>: Seja $e_1,e_2,\ldots,e_n$ uma base de E; vamos demonstrar que qualquer norma p sôbre E é equivalente à norma

$$x \in E \longmapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

onde
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

Seja $b = \sup\{p(e_1),\ldots,p(e_n)\}$; para todo $x \in E$ temos $p(x) \leq b\|x\|_1$ pois $p(x) = p(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| p(e_i) \leq$ $\leq b\|x\|_1$. Portanto, a função $p: x \in E_{\|\ \|_1} \longmapsto p(x) \in \mathbf{R}_+$ é contínua e como $S_1 = \{x \in E \mid \|x\|_1 = 1\}$ é um subconjunto compacto de $E_{\|\ \|_1}$, p atinge seu mínimo $a \geq 0$ num ponto $x_o \in S_1$; $x_o \neq 0$ e portanto $a = p(x_o)$ é estritamente positivo pois p é uma norma. Daí segue que para todo $x \in E$ temos $p(\frac{x}{\|x\|_1}) \geq a$, isto é, $a\|x\|_1 \leq p(x)$.

COROLÁRIO - Todo subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço normado é um subespaço completo (e portanto fechado) e localmente compacto.

<u>Demonstração</u>: Do teorema segue que se o subespaço tem dimensão n então êle é equivalente a C^n munido de sua norma habitual. O resultado é pois conseqüência da observação que segue a Proposição 1.7.

EXERCÍCIO 1.15 - Seja $m > 0$ um inteiro; demonstrar que

entre todos os polinômios $P \in C[X]$ de grau $\leq m$ e tais que $P(0) = 1$ existe um que torna mínimo o valor

$$\int_0^1 |P(t)|\,dt.$$

→ EXERCÍCIO 1.16 - a) Definir a noção de norma para espaços vetoriais sôbre o corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais.

b) Demonstrar que sôbre $\mathbf{Q}^2$ nem tôdas as normas são equivalentes. [Sugestão: Seja $\xi \in \mathbf{R} \cap \complement\mathbf{Q}$; mostrar que

$$(x,y) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \longmapsto |x+y\xi| \in \mathbf{R}_+$$

define uma norma que não é equivalente às normas "habituais" sôbre $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$.]

PROPOSIÇÃO 1.9 - a) Dado um subespaço vetorial fechado F de um espaço normado E, $F \neq E$, e dado $e > 0$ existe x_e pertencente a E com $\|x_e\| = 1$ e tal que $d(x_e,F) > 1-e$.

b) Se F fôr de dimensão finita existe $\bar{x} \in E$ tal que $\|\bar{x}\| = 1 = d(\bar{x},F)$.

<u>Demonstração</u>: a) Seja $x \in E$, $x \notin F$ e seja $\delta = d(x,F)$. Então existe $y_0 \in F$ tal que $\delta \leq \|x-y_0\| \leq \delta(1+e)$; tomando $x_e = -\dfrac{y_0-x}{\|y_0-x\|}$ temos $\|x_e\| = 1$ e para todo $y \in F$ temos

$$\|y-x_\varepsilon\| = \left\|y + \frac{y_o-x}{\|y_o-x\|}\right\| = \frac{1}{\|y_o-x\|}\ \|y_o + \|y_o-x\|y-x\| \geqq \frac{\delta}{\|y_o-x\|} \geqq$$

$$\geqq \frac{\delta}{\delta(1+\varepsilon)} > 1 - \varepsilon .$$

b) Se F fôr de dimensão finita, F é um subespaço vetorial fechado e localmente compacto (Cf. o corolário do Teorema 1.8) e portanto dado $x \in E$, $x \notin F$ e $\delta_1 > \delta = d(x,F)$ então $B_{\delta_1}[x] \cap F$ é um conjunto fechado, limitado não vazio de F e portanto compacto e existe pois um ponto y_o dêste conjunto tal que $d(x,y_o) = d(x,B_{\delta_1}[x] \cap F)$; mas $d(x,B_{\delta_1}[x] \cap F) = d(x,F)$ e então basta tomar $\bar{x} = \dfrac{x-y_o}{\|x-y_o\|}$:

$$d(\bar{x},F) = \frac{1}{\|x-y_o\|}\ d(x-y_o,F) = \frac{1}{\|x-y_o\|} d(x,F) = \frac{d(x,y_o)}{\|x-y_o\|} = 1.$$

COROLÁRIO (F. Riesz) - Um espaço normado E é localmente compacto se, e sòmente se, fôr de dimensão finita.

Demonstração: Do Teorema 1.8 segue que todo espaço de dimensão finita é localmente compacto. Se um espaço normado E não fôr de dimensão finita, então, segue da Proposição que existe uma sequência $x_n \in E$ com $\|x_n\| = 1$ e tal que $\|x_n-x_m\| \geqq 1$ para $m < n$; basta tomar x_1 com $\|x_1\| = 1$ e já tendo $x_1,\dots,x_n$ nas condições acima seja F o subespaço vetorial de dimensão finita gerado pelos $x_1,\ldots,x_n$; então, existe $x_{n+1} \in E$ com $\|x_{n+1}\| = 1$ e tal que $1 = d(x_{n+1},F) \leqq \|x_{n+1}-x_m\|$ para $m = 1,2,\ldots,n$. Segue que a bola unitária fechada de E não é compacta pois a sequência acima, (x_n), não contém nenhuma subseqüência convergente. Por homotetia o mesmo vale para qualquer bola fechada e E não é portanto localmente compacto.

PROPOSIÇÃO 1.10 - Sejam E e F espaços normados E de dimensão <u>finita</u>; tôda aplicação linear de E em F é contínua.

<u>Demonstração</u>: Seja $e_1,\ldots,e_n$ uma base de E; de $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ segue-se que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ e portanto $\|f(x)\| \leqq b\|x\|_1$ onde $b = \sup_{1\leqq i\leqq n} \|f(e_i)\|$ e $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

A afirmação segue do Teorema 1.8.

OBSERVAÇÃO - Não vale um resultado análogo se apenas F fôr de dimensão finita, mesmo se $F = \mathbf{C}$ pois sôbre todo espaço normado E de dimensão infinita existem formas lineares $f:E \to \mathbf{C}$ que não são contínuas.

C - Somabilidade em espaços normados

A definição habitual de série convergente de números reais ou complexos se estende naturalmente aos espaços normados: dada uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de elementos de um espaço normado E, dizemos que a série† $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente para o elemento $x \in E$, escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, se para a seqüência das reduzidas $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ temos $s_m \to x$ quando $m \to \infty$.

Mas em espaços normados e especialmente em espaços de Hilbert temos a necessidade de dar um sentido a somatórias da forma $\sum_{i\in I} x_i$ quando o conjunto I dos índices não é necessàriamente o conjunto $\mathbf{N}$ dos inteiros naturais. Quando $I = \mathbf{Z}$, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, Z^n, etc. podemos ordenar o conjunto dos índices de um modo conveniente procurando recair no caso que nos é familiar. Neste caso a soma da série pode depender da ordem em que se efetuam as somas parciais. Por exemplo, é bem conhecido que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de números reais x_n não fôr absolutamente convergente (isto é, se $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \infty$) então dado um número real qualquer r

---

† Quando não houver perigo de confusão, por abuso de linguagem e de notação, diremos simplesmente "a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ "}$$

em lugar de "a série associada à seqüência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ".

podemos "reordenar" a seqüência $(x_n)_{n\in N}$ (ver abaixo a definição exata) de modo que a soma da série corresponden te seja r. Vamos dar um sentido a somatórias $\sum_{i\in I} x_i$, sentido êste que vai ser independente de qualquer estrutura de ordem sôbre o conjunto de índices I.

DEFINIÇÃO - Dada uma família $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de um espaço normado E dizemos que esta família é somável e tem por soma $x \in E$, escrevemos $\sum_{i\in I} x_i = x$, se dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset I$ tal que para todo subconjunto finito $F \subset I$ com $F \supset F_\epsilon$ temos $\|x - \sum_{i\in F} x_i\| < \epsilon$.

Motivação desta definição: seja $(x_n)_{n\in N}$ uma seqüência de números reais ou complexos. São equivalentes as seguintes propriedades:

A) A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é comutativamente convergente para x.

B) Dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset N$ tal que para qualquer subconjunto finito $F \subset \mathbf{N}$ com $F \supset F_\epsilon$ temos $|x - \sum_{n\in F} x_n| < \epsilon$.

OBSERVAÇÕES: 1) Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é comutativamente convergente para x se reordenando-a de um modo qualquer obtemos sempre uma série convergente cuja soma é x; isto é, se ϕ é uma aplicação biunívoca de N sôbre **N** e se colocarmos $x_n^{\phi} = x_{\phi(n)}$ então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\phi} = x$.

2) As duas propriedades acima são equivalentes a dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

PROPOSIÇÃO 1.11 - Sejam E_1 e E_2 espaços normados e $f \in L(E_1,E_2)$. Dada uma família somável $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de E_1 e cuja soma é x então a família $(f(x_i))_{i\in I}$ é somável em E_2 e tem por soma $f(x)$.

Demonstração: Segue imediatamente da definição de família somável e da desigualdade

$$\|f(x) - \sum_{i\in F} f(x_i)\| = \|f(x - \sum_{i\in F} x_i)\| \leq \|f\| \, \|x - \sum_{i\in F} x_i\|$$

* EXERCÍCIO 1.17 - Demonstrar a equivalência A) ⇔ B). [Sugestão: proceder por redução ao absurdo para demonstrar que A) implica B).]

→ EXERCÍCIO 1.18 - Seja $(a_i)_{i\in I}$ uma família de números reais positivos e α um número tal que para todo subconjunto finito F de I temos $\sum_{i\in F} a_i \leqq \alpha$; demonstrar que a família $(a_i)_{i\in I}$ é somável e que temos

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\{\sum_{i\in F} a_i \mid F \subset I,\ F \text{ finito}\} \leqq \alpha .$$

→ EXERCÍCIO 1.19 - Demonstrar que se as famílias $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$ de elementos de um espaço normado E são somáveis e têm por somas x e y, respectivamente, então as famílias $(x_i+y_i)_{i\in I}$ e $(\lambda x_i)_{i\in I}$ também são somáveis e têm por somas $x+y$ e λx, respectivamente.

Do mesmo modo que para séries de números reais ou complexos temos o critério de Cauchy que nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma série seja convergente sem termos de conhecer a soma da mesma, assim também vamos dar um critério análogo para famílias somáveis.

DEFINIÇÃO - Dizemos que uma família $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de um espaço normado E satisfaz a <u>condição de Cauchy</u> se dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F_\varepsilon \subset I$ tal que para todo subconjunto finito $F' \subset I$ e disjunto de F_ε (isto é $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ ou ainda $F' \subset \complement F_\varepsilon$) temos $\left\| \sum_{i\in F'} x_i \right\| < \varepsilon$.

OBSERVAÇÕES: 1) É evidente que se a família $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, então dado $J \subset I$ a subfamília $(x_i)_{i\in J}$ também satisfaz a condição de Cauchy.

2) Tôda família somável $(x_i)_{i\in I}$ satisfaz a condição de

Cauchy. De fato, seja $x = \sum_{i \in I} x_i$ e seja $F_\epsilon \subset I$ tal que para todo $F \supset F_\epsilon$ com $F \subset I$ temos $\|x - \sum_{i \in F} x_i\| < \epsilon$. Tomando qualquer (subconjunto finito) $F' \subset I$ com $F' \cap F_\epsilon = \emptyset$ temos

$$\Big\|\sum_{i \in F'} x_i\Big\| = \Big\|\sum_{i \in F' \cup F_\epsilon} x_i - x - \Big(\sum_{i \in F_\epsilon} x_i - x\Big)\Big\| \leqq$$

$$\leqq \Big\|\sum_{i \in F' \cup F_\epsilon} x_i - x\Big\| + \Big\|\sum_{i \in F_\epsilon} x_i - x\Big\| < 2\epsilon \ .$$

3) Se a família $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz a condição de Cauchy então o subconjunto $I^* = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ é enumerável. De fato, temos $I^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ onde $I_n = \{i \in I \mid \|x_i\| \geqq \frac{1}{n}\}$ e pela definição da condição de Cauchy cada I_n é finito.

TEOREMA 1.12 (<u>o critério de Cauchy</u>) - Seja E um espaço de Banach. Uma condição necessária e suficiente para que uma família $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de E seja somável é que ela satisfaça a condição de Cauchy.

* <u>Demonstração</u>: Na Observação 2), precedente, mostramos que a condição é necessária. Reciprocamente, se a família $(x_i)_{i \in I}$ satisfaz a condição de Cauchy, então, com as notações da Observação 3), tomemos $y_n = \sum_{i \in I_n} x_i$. Vamos demonstrar que a seqüência y_n é uma sequência de Cauchy: pela condição de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe (um subconjunto finito) $F_\epsilon \subset I^*$ (para os

índices $i \notin I^*$ temos $x_i = 0$) tal que para $F' \subset I^*$ com $F' \cap F_e = \emptyset$ temos $\|\sum_{i\in F'} x_i\| < e$. Tomemos n_o tal que $I_{n_o} \supset F_e$ (isto é possível, pois no conjunto finito $\{x_i \mid i \in F_e\}$ todos os x_n têm norma >0 e portanto maior que um certo $1/n_o$). Para $m > n \geq n_o$ temos $F' = I_m - I_n \subset \complement F_e$ e portanto $\|y_m - y_n\| = \|\sum_{i\in F'} x_i\| < e$. $(y_n)_{n\in N}$ sendo pois uma seqüência de Cauchy e E sendo completo seja x o seu limite. Temos $\|x-y_n\| \leq e$ para $n \geq n_o$. Vamos demonstrar que $\sum_{i\in I} x_i = x$: para todo $F \supset I_{n_o}$ temos $F' = F - I_{n_o} \subset \complement F_e$ e portanto

$$\|x - \sum_{i\in F} x_i\| = \|x - \sum_{i\in I_{n_o}} x_i - \sum_{i\in F'} x_i\| =$$

$$\|x - y_{n_o} - \sum_{i\in F'} x_i\| \leq \|x - y_{n_o}\| + \|\sum_{i\in F'} x_i\| < 2e.$$

EXERCÍCIO 1.20 - Dizemos que uma família $(x_i)_{i\in I}$ de elementos de um espaço normado E é <u>absolutamente somável</u> se a família $(\|x_i\|)_{i\in I}$ (de números reais) fôr somável. Demonstrar que num espaço de Banach tôda família absolutamente somável é somável. Dar exemplos mostrando que (ao contrário do que acontece em **R** ou **C**) uma família somável não é necessàriamente absolutamente somável. [Sugestão: procurar em $\ell_1(\mathbf{N})$ e em $C([0,1])$.]

$\ast$ §2 - Construção de espaços normados

A - Subespaços

Seja E um espaço normado de norma p e E_o um subespaço vetorial de E munido de uma norma p_o; se p_o coincide com a restrição de p a E_o dizemos que E_{op_o} é um subespaço de E_p.

B - Espaço quociente

PROPOSIÇÃO 2.1 - Dado um espaço normado E e um subespaço vetorial $E_o \subset E$ a aplicação

$$\dot{x} = x + E_o \in E/E_o \longmapsto \|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\|$$

é uma seminorma que é uma norma se, e sòmente se, E_o é fechado em E.

<u>Demonstração</u>: Temos evidentemente $\|\lambda \dot{x}\| = |\lambda| \|\dot{x}\|$ pois $\lambda \dot{x} = \lambda(x+E_o) = \lambda x + E_o$. De $\dot{\widehat{x+y}} = x+y+E_o = \dot{x}+\dot{y}$ segue-se que $\|\dot{x} + \dot{y}\| = \|\dot{\widehat{x+y}}\| = \inf\{\|z\| \mid z \in \dot{\widehat{x+y}}\} = \inf\{\|x+y\| \mid x \in \dot{x},\ y \in \dot{y}\} \leq \inf\{\|x\|+\|y\| \mid x \in \dot{x},\ y \in \dot{y}\} = \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\|$.

Para demonstrar a segunda afirmativa basta lembrar que

$$\|\dot{x}\| = 0 \Leftrightarrow \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| = 0 \Leftrightarrow 0 \in \overline{x+E_o} = x+\bar{E}_o \Leftrightarrow x \in \bar{E}_o$$

e que $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x \in E_o$.

TEOREMA 2.2 - Seja E um espaço de Banach e F um sub-espaço vetorial fechado; o espaço normado quociente E/F é completo.

<u>Demonstração</u>: Seja $\dot{x}_n \in E/F$ uma sequência de Cauchy; passando a uma subsequência podemos supor que para $m \geq n$ temos $\|\dot{x}_n - \dot{x}_m\| < \frac{1}{2^n}$. Por recorrência podemos escolher $x_n \in \dot{x}_n$ tal que $\|x_n - x_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$ e a seqüência $x_n \in E$ é portanto uma seqüência de Cauchy. E sendo completo ela converge para um elemento $x \in E$; de $\|\dot{x}_n - \dot{x}\| \leq \|x_n - x\|$ segue-se que $\dot{x}_n \to \dot{x}$. CQD

EXERCÍCIO 2.1 - Demonstrar que todo espaço normado E pode ser completado; mais precisamente:

a) Demonstrar que sôbre o espaço vetorial $\tilde{E}$ das seqüências de Cauchy $(x_n)_{n \in N}$ de elementos de E a aplicação $(x_n)_{n \in N} \in \tilde{E} \longmapsto \|(x_n)\| = \sup_{n \in N} \|x_n\|$ é uma norma.

b) Demonstrar que o subespaço vetorial $\tilde{E}_o$ de $\tilde{E}$ formado pelas seqüências convergentes para 0 é fechado.

c) Demonstrar que o espaço quociente $\hat{E} = \tilde{E}/\tilde{E}_o$ é completo.

d) Demonstrar que a aplicação $x \in E \longmapsto \dot{x} \in \hat{E}$ (onde $\dot{x}$

indica a classe de equivalência em $\tilde{E}/\tilde{E}_o$ da seqüência de Cauchy constante $x_n = x$) é uma isometria (isto é, $\|\dot{x}\| = \|x\|$) linear de E sôbre um subespaço denso de $\hat{E}$.

C - Espaço produto

PROPOSIÇÃO 2.3 - Seja $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ o espaço vetorial produto dos espaços normados $E_1, E_2, \ldots, E_n$; para todo $x \in E$ definimos $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|$ e $\|x\|_p = \left[\sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ se $1 \leq p < \infty$. As aplicações $x \in E \longmapsto \|x\|_p \in \mathbf{R}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas equivalentes que definem a topologia produto sôbre E e induzem sôbre cada E_j sua norma. Indicamos êste espaço por $E_1 \overset{p}{\times \ldots \times} E_n$.

Demonstração: Da desigualdade de Minkowsky (Teorema 1.5) segue que as aplicações $\| \ \|_p$ são normas sôbre E. A equivalência destas normas segue de $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$; as outras afirmações são trivialmente verificadas.

D - Outros processos de construção de espaços normados

PROPOSIÇÃO 2.4 - Seja E um espaço vetorial.

a) Se p é uma seminorma sôbre E e $\lambda > 0$ então λp é uma seminorma sôbre E (onde $(\lambda p)(x) = \lambda p(x)$).

b) Se $p_1,\dots,p_r$ são seminormas sôbre E então $p_1+\dots+$ $+ p_r$ é uma seminorma sôbre E (onde $(p_1+\dots+p_r)(x) =$ $= p_1(x)+\dots+p_r(x)$).

c) Se $p_1,\dots,p_r$ são seminormas sôbre E, então $\sup\limits_{1\leqq i\leqq r} p_i$ é uma seminorma sôbre E (onde $(\sup\limits_{1\leqq i\leqq r} p_i)(x) =$ $= \sup\limits_{1\leqq i\leqq r} p_i(x)$).

A demonstração desta proposição é imediata como também o é a demonstração da

PROPOSIÇÃO 2.5 - Seja E um espaço vetorial e seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de subespaços vetoriais de E; seja p_i uma seminorma sôbre E_i.

a) O conjunto $E_o = \{x \in \bigcap\limits_{i\in I} E_i \mid \sup\limits_{i\in I} p_i(x) < \infty\}$ é um subespaço vetorial de E (eventualmente reduzido a $\{0\}$) e a função $x \in E_o \longmapsto (\sup\limits_{i\in I} p_i)(x) = \sup\limits_{i\in I} p_i(x)$ é uma seminorma.

b) O conjunto $E_{oo} = \{x \in \bigcap\limits_{i\in I} E_i \mid \sum\limits_{i\in I} p_i(x) < \infty\}$ é um subespaço vetorial de E (eventualmente reduzido a $\{0\}$) e a função $x \in E_{oo} \longmapsto (\sum\limits_{i\in I} p_i)(x) = \sum\limits_{i\in I} p_i(x)$ é uma seminorma.

EXEMPLO N 10 - $C_\alpha(U)$ - Seja U um intervalo (finito ou infinito, aberto ou não) da reta e seja $0 < \alpha \leqq 1$; para tôda função f definida em U

definimos

$$[f]_\alpha = \sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \mid x,y \in U,\ x \neq y\}$$
$$= \inf\{c \mid |f(x)-f(y)| \leq c|x-y|^\alpha,\ \forall\ x,y \in U\}$$

e indicamos por $C_\alpha(U)$ o conjunto das funções f definidas em U e tais que $[f]_\alpha < \infty$.

É imediato que $C_\alpha(U)$ é formado por funções contínuas e que $[f]_\alpha = 0 \Leftrightarrow f$ é constante. Tomemos um ponto $x_o \in U$; para todo $f \in C_\alpha(U)$ definimos $\|f\|_\alpha = |f(x_o)| + [f]_\alpha$. Vamos demonstrar que $\|f\|_\alpha$ define uma norma sôbre $C_\alpha(U)$; do que acabamos de dizer segue que é suficiente demonstrar que $[\ ]_\alpha$ é uma seminorma: para cada par $x,y \in U$ com $x \neq y$ a função $f \in C_\alpha(U) \mapsto |f(x)-f(y)|$ é uma seminorma e da Proposição 2.4-a) segue que a função

$$f \in C_\alpha(U) \mapsto \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \in \mathbb{R}_+$$

também é uma seminorma; da Proposição 2.5-a) segue então que a função

$$f \in C_\alpha(u) \mapsto \sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \mid x,y \in U,\ x \neq y\}$$

também é uma seminorma. CQD

OBSERVAÇÕES: 1) Costuma-se chamar as funções de $C_\alpha(U)$ de <u>α-Hölderianas</u> ou <u>Hölderianas de ordem</u> α

(e também Lipschitzianas de ordem α).

2) Para $\alpha > 1$ é imediato que as funções α-Hölderianas são constantes e a noção não apresenta pois interêsse.

3) Variando o ponto $x_o \in U$ obtemos normas equivalentes sôbre $C_\alpha(U)$; êste espaço é completo (ver exercício 2.2).

EXERCÍCIO 2.2 - Seja Ω um espaço métrico e d a sua distância; seja $0 < \alpha \leq 1$. Definimos $C_\alpha(\Omega) = \{f \in C^\Omega \mid [f]_\alpha < \infty\}$ onde

$$[f]_\alpha = \sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \mid x,y \in \Omega,\ x \neq y\}$$

$$= \inf\{c \mid |f(x)-f(y)| \leq c d(x,y)^\alpha\}.$$

Dado um ponto $x_o \in \Omega$, para todo $f \in C_\alpha(\Omega)$ seja

$$\|f\|_\alpha = |f(x_o)| + [f]_\alpha .$$

a) Demonstrar que variando $x_o \in \Omega$ obtemos normas equivalentes e que, quando Ω é compacto, estas normas são equivalentes à norma $\|f\| + [f]_\alpha$.

b) Demonstrar que $C_\alpha(\Omega)$ é um espaço de Banach.

[Sugestão: demonstrar que uma seqüência de Cauchy de $C_\alpha(\Omega)$ é uniformemente convergente em qualquer bola de centro x_o e demonstrar que a função limite ainda é de $C_\alpha(\Omega)$ e que a convergência tem lugar na norma $\| \ \|_\alpha$].

c) Demonstrar que quando $0 < \alpha < \beta \leqq 1$ temos $C_\beta(\Omega) \subset$ $\subset C_\alpha(\Omega)$ com imersão contínua quando Ω é limitado.

d) Quando $\Omega = [a,b]$ demonstrar que $C^{(1)}([a,b]) \subset$ $\subset C_1([a,b])$ com imersão contínua (sôbre $C^{(1)}([a,b])$ consideramos a norma $\|f\|_\infty^{(1)} = \sup[\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty]$).

* APÊNDICE - Os teoremas fundamentais dos espaços de Banach

No que precede desenvolvemos apenas a linguagem dos espaços de Banach sem apresentar nenhum resultado mais profundo. Isto é mais que suficiente para as necessidades do presente curso, isto é, para os capítulos III e IV. A verdadeira justificativa da teoria dos espaços de Banach se encontra nos teoremas fundamentais que enunciamos a seguir junto com alguns exemplos de aplicações dos mesmos. Para as demonstrações damos referências a AFA.

I - O teorema de Hahn-Banach - Seja E um espaço normado: tôda forma linear contínua f_o definida sôbre um subespaço E_o de E pode ser prolongada a uma forma linear contínua f definida em E e tal que $\|f\| = \|f_o\|$ [AFA, cap.II, corol. 3 do teorema 8.5].

Aplicações - 1) Dado um subespaço vetorial fechado F de um espaço normado E e um elemento $x_1 \in E$, $x_1 \notin F$, existe $f \in E'$ com $\|f\| = 1$ tal que $f(x_1) = d(x_1,F)$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in F$ [AFA, cap.II, Prop. 8.7].

2) Seja E um espaço normado: a aplicação natural $x \in E \longmapsto \tilde{x} \in E''$ de E em seu bidual E'' (onde $\tilde{x}(x') = \langle x,x' \rangle$ para todo $x' \in E'$) é um isomorfismo do 1º espaço no 2º.

3) Dada uma forma linear contínua F sôbre o espaço de Banach $\mathbb{C}([a,b])$ existe uma função $\alpha:[a,b] \to \mathbb{C}$ que é de variação limitada e tal que para todo $x \in \mathbb{C}([a,b])$ temos $F(x) = \int_a^b x(t)d\alpha(t)$ (esta integral sendo de Riemann-Stieltjes) [Teorema de Riesz; AFA, cap.II, Teorema 9.2].

II - O princípio da limitação uniforme - Seja E um espaço de Banach, F um espaço normado e $B \subset L(E,F)$ tal que para todo $x \in E$ se tenha $\sup\limits_{f\in B} \|f(x)\| < \infty$; então $\sup\limits_{f\in B} \|f\| < \infty$ [AFA, cap. II, corol. 1 do Teorema 11.1].

Uma das conseqüências do princípio da limitação uniforme é o

III - O teorema de Banach-Steinhaus - Seja E um espaço de Banach e F um espaço normado; seja $f_n \in L(E,F)$ uma seqüência de aplicações lineares contínuas tal que para todo $x \in E$ existe o limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; então $f \in L(E,F)$ e $\|f\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|$ [AFA, cap.II, teorema 11.2].

Aplicação - Para a maioria das funções contínuas e periódicas definidas na reta a sua série de Fourier é divergente na maioria dos pontos da reta; mais precisamente: existe um subconjunto $E \subset \mathcal{C}(T)$ que é um G_δ (isto é, interseção enumerável de conjuntos abertos) denso em $\mathcal{C}(T)$ e tal que para todo $x \in E$ existe um subconjunto $D_x \subset T$ que é um G_δ denso em T e tal que nos pontos $t \in D_x$ a série de Fourier de x não converge para $x(t)$ [AFA, cap.II, teorema 11.6].

IV - O teorema da aplicação aberta - Seja f uma aplicação linear contínua de um espaço de Banch E sôbre um espaço de Banach F. Então para todo conjunto aberto $U \subset E$, $f(U)$ é aberto em F [AFA, cap.II, teorema 12.3].

Aplicações: 1) Seja f uma aplicação linear biunívoca e contínua de um espaço de Banach E sôbre um espaço de Banach F; então f é bicontínua [AFA, cap. II, corol. 1 do teorema 12.3].

2) Todo espaço de Banach separável é um quociente do espaço $\ell_1(N)$.

Uma outra conseqüência do Teorema da aplicação aberta é

IV - O teorema do gráfico fechado - Sejam E e F espaços de Banach e $f:E \to F$ uma aplicação linear cujo gráfico, em $E \times F$, é fechado; então f é contínua [AFA, cap.II, teorema 12.5].

Lembremos que para verificar que o gráfico de f é fechado, é suficiente demonstrar que $x_n \xrightarrow{E} 0$ e $f(x_n) \xrightarrow{F} y$ implicam $y = 0$.

Aplicações: 1) Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $\alpha = (\alpha_n)_{n \in N}$ uma sequência de números complexos tal que para todo $x \in \ell_p(N)$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ seja convergente. Então $\alpha \in \ell_{p'}(N)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ e é contínua a aplicação linear $x \in \ell_p(N) \longmapsto \langle x,\alpha \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ [AFA, cap.II, §12 c, aplicação 1].

2) Seja A e A^* aplicações lineares de um espaço de Hilbert H em si mesmo e tais que $(Ax|y) = (x|A^*y)$ para quaisquer $x,y \in H$; então A e A^* são contínuas [ibidem, aplicação 3].

3) Sejam E e F espaços de Banach e $G \neq \{0\}$ um espaço

normado; seja $f: E \to F$ uma aplicação linear tal que para todo $g \in L(F,G)$ se tenha $g \circ f \in L(E,G)$; então f é contínua [AFA, cap.II, Prop. 12.6].

4) Sejam $1 \le p, q \le \infty$ e $f: x \in \ell_p(N) \mapsto y = f(x) \in \ell_q(N)$ uma aplicação linear tal que exista uma matriz (α_{ij}) $i,j \in N$ de números complexos tal que $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j$, $i \in N$. Então f é contínua.

5) Seja $\alpha: [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função tal que para todo $f \in L_p([a,b])$ tenhamos $\alpha f \in L_q([a,b])$ onde $1 \le q \le p \le \infty$; então $\alpha \in L_r([a,b])$ com $r = \frac{pq}{p-q}$.

Referências: [1], [3], [4], [5], [12].

CAPÍTULO II

ESPAÇOS DE HILBERT

§1 - Produto interno

Seja E um espaço vetorial sôbre C. Por definição, um produto interno sôbre E é uma forma sesquilinear (bilinear no caso real), hermitiana (simétrica no caso real), positiva, definida, isto é, é uma aplicação $f:E\times E \to C$ que tem as seguintes propriedades:

1) ela é sesquilinear, isto é, para quaisquer x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 de E e $\lambda \in C$ temos

$$f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y), \qquad f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y),$$
$$f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1) + f(x,y_2), \qquad f(x,\lambda y) = \bar{\lambda} f(x,y);$$

2) ela é hermitiana, isto é, para quaisquer $x,y \in E$ temos $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$;

3) ela é positiva, isto é, para todo $x \in E$ temos $f(x,x) \geqq 0$;

4) ela é definida, isto é, para todo $x \in E$ temos $f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

OBSERVAÇÃO: As propriedades acima não são independentes.

Em geral indicamos um produto interno pela notação simplificada $(x|y) = f(x,y)$ e escrevemos $\|x\| = (x|x)^{1/2}$.

TEOREMA 1.1 (<u>a desigualdade de Cauchy-Schwarz</u>) - Seja E um espaço com produto interno $(\,|\,)$. Para quaisquer x e y em E temos $|(x|y)| \leqq \|x\|\|y\|$.

<u>Demonstração</u>: Podemos escrever o número complexo $(x|y)$ sob a forma $(x|y) = e^{i\theta}|(x|y)|$ e portanto $(y|x) = \overline{(x|y)} = e^{-i\theta}|(x|y)|$.

Para todo $\lambda \in C$ temos $0 \leqq (\lambda x + e^{i\theta}y | \lambda x + e^{i\theta}y) =$
$= \lambda\bar{\lambda}\|x\|^2 + \lambda e^{-i\theta}(x|y) + \bar{\lambda}e^{i\theta}(y|x) + \|y\|^2 = \lambda\bar{\lambda}\|x\|^2 + \lambda|(x|y)| +$
$+ \bar{\lambda}|(x|y)| + \|y\|^2$.

Para $\lambda \in \mathbf{R}$ temos portanto

$$\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda|(x|y)| + \|y\|^2 \geqq 0$$

donde segue-se que $4|(x|y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, o que implica a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

COROLÁRIO 1 - Num espaço E com produto interno $(\,|\,)$ a aplicação $x \in E \longmapsto \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}_+$ é uma norma.

De fato: verifiquemos SN_2. Temos

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + (x|y) + \overline{(x|y)} + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x|y) + \|y\|^2 \leqq \|x\|^2 + 2|(x|y)| +$$

$$+ \|y\|^2 \leqq 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

As outras propriedades são de verificação trivial.

Um <u>espaço de Hilbert</u> é um espaço com produto interno que é completo (relativamente à norma associada ao seu produto interno). Passaremos a chamar de <u>espaço pré-hilbertiano</u> a um espaço com produto interno.

COROLÁRIO 2 - Dado um espaço prehilbertiano E, para todo $y \in E$ a aplicação $f_y : x \in E \longmapsto f_y(x) = (x|y) \in \mathbb{C}$ é linear e contínua e temos $\|f_y\| = \|y\|$.

<u>Demonstração</u>: Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que $\|f_y\| \leq \|y\|$ e tomando $x = y$ em $f_y(x) = (x|y)$ segue que $\|f_y\| = \|y\|$.

COROLÁRIO 3 - Seja $(x_i)_{i \in I}$ uma família somável de elementos de um espaço prehilbertiano E, tendo por soma x. Então para todo $y \in E$ a família $(x_i|y)$, $i \in I$, de números complexos é somável e têm por soma $(x|y)$.

<u>Demonstração</u>: segue do Corolário 2 e da Proposição 1.11 do Cap. I.

COROLÁRIO 4 - Num espaço pré-hilbertiano E o produto interno é uma função contínua dos seus argumentos.

A demonstração segue imediatamente, usando a técnica dos ε e δ, lembrando a desigualdade

$$|(x|y) - (x'|y')| = |(x|y)-(x'|y)+(x'|y)-(x'|y')|$$

$$\leq |(x-x'|y)| + |(x'|y-y')| \leq \|x-x'\|\|y\| + \|x'\|\|y-y'\|.$$

COROLÁRIO 5 - Dadas duas seqüências convergentes $x_n \to x$ e $y_n \to y$, de um espaço pré-hilbertiano E temos $(x_n|y_n) \to (x|y)$.

EXEMPLO H.1 - $\mathbb{C}^n$ - Sôbre o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ das n-uplas de números complexos a expressão $(x|y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$ define um produto interno. Sôbre $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ isto corresponde ao produto interno habitual do cálculo vetorial.

EXEMPLO H.2 - $\mathcal{C}_{L_2(\rho)}([a,b])$ - Seja $\rho:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua estritamente positiva. $\mathcal{C}_{L_2(\rho)}([a,b])$ indica o espaço vetorial $\mathcal{C}([a,b])$ munido do produto interno

$$x,y \in \mathcal{C}([a,b]) \longmapsto (x|y)_\rho = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\rho(t)dt$$

Indicamos a norma correspondente por $\|x\|_\rho$ ou $\|x\|_{2,\rho}$. Quando $\rho \equiv 1$ escrevemos simplesmente $\mathcal{C}_{L_2}([a,b])$; neste caso a desigualdade de Cauchy-Schwarz é um caso particular da desigualdade de Hölder para $p = p' = 2$.

$L_2([a,b];\rho)$ indica o espaço vetorial das (classes de equivalência de) funções mensuráveis $x:[a,b] \to \mathbb{C}$ tais que

$$\|x\|_{2,\rho} = [\int_a^b |x(t)|^2 \rho(t)dt]^{1/2} < \infty ;$$

o produto interno é definido como acima. $L_2([a,b];\rho)$ é um espaço de Hilbert e $\mathbb{C}([a,b])$ é denso nele.

EXEMPLO H.3 - $\ell_2(\mathbb{N})$ - Definimos

$$\ell_2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in N} \in \mathbb{C}^N | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

De $|x_n+y_n|^2 \leq 2[|x_n|^2 + |y_n|^2]$ segue-se que $x,y \in \ell_2(\mathbb{N}) \Rightarrow x + y \in \ell_2(\mathbb{N})$ e por outro lado é evidente que $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \ell_2(\mathbb{N})$ implicam que $\lambda x \in \ell_2(\mathbb{N})$ e $\ell_2(\mathbb{N})$ é portanto um espaço vetorial. Sôbre êste espaço vetorial definimos um produto interno por $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$. De $|x_n\overline{y_n}| \leq \frac{1}{2} [|x_n|^2 + |y_n|^2]$ segue-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ é convergente (e mesmo absolutamente convergente) para quaisquer $x,y \in \ell_2(\mathbb{N})$. É fácil verificar que estão satisfeitas as propriedades de produto interno.

EXEMPLO H.4 - $\mathbb{C}^{(1)}_{L_2}([a,b])$ - Indicamos com $\mathbb{C}^{(1)}([a,b])$ o espaço das funções contínuas x definidas no intervalo $[a,b]$ e que têm derivada primeira contínua. Neste espaço consideramos o seguinte produto interno

$$(x|y)^{(1)} = \int_a^b [x(t)\overline{y(t)} + x'(t)\overline{y'(t)}]dt .$$

EXERCÍCIO 1.1 - a) Estudar o espaço E das funções x definidas na reta que admitem uma representação da forma

$$x(t) = \sum_{r\in R}^{*} c_r e^{irt} \qquad (c_r \in \mathbb{C})$$

onde Σ^* indica que se trata de uma soma finita, isto é, para cada função x existe apenas um número finito de elementos $r \in R$ com $c_r \neq 0$. Demonstrar que dados $x,y \in E$ a expressão

$$(x|y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)}dt$$

está bem definida e define um produto interno. Qual a norma associada a êste produto interno? o espaço é completo?

b) Demonstrar que o espaço E não é separável.

EXERCÍCIO 1.2 - Demonstrar que a aplicação idêntica $\mathbb{C}_{L_2(\rho)}([a,b]) \hookrightarrow \mathbb{C}_{L_2}([a,b])$ é bicontínua.

§2 - Geometria dos espaços pré-hilbertianos

PROPOSIÇÃO 2.1 - Num espaço pré-hilbertiano vale a lei do paralelogramo: para quaisquer x e y temos

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$$

ou

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

Demonstração: Basta desenvolver o primeiro membro lembrando que o produto interno é sesquilinear.

PROPOSIÇÃO 2.2 (a fórmula de polarização) - Temos, em todo espaço pré-hilbertiano

complexo: $(x|y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2]$

real: $(x|y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$.

Demonstração: Basta desenvolver o segundo membro lembrando que o produto interno é sesquilinear (e usando sua simetria no caso real).

OBSERVAÇÃO - Pode-se demonstrar [ver AFA, Apêndice do §3 do cap.I] uma recíproca da Proposição 2.1: se num espaço normado vale a lei do paralelogramo, a sua norma provém de um produto interno. Neste caso a Proposição 2.2 mostra como deve ser definido o produto interno a partir da norma; usando a lei do paralelogramo demonstra-se que de fato obtemos um produto interno.

+EXERCÍCIO 2.1 - Demonstrar que a norma de $C(K)$ (Exemplo N2, §1, cap.I) não provém de um produto interno (quando K tem mais de um ponto).

EXERCÍCIO 2.2 - Demonstrar que se num espaço normado E não vale a lei do paralelogramo, então existem elementos x, y, u, v em E tais que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 < 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$$

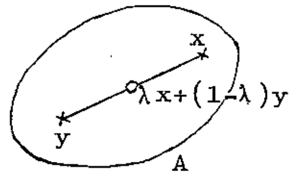
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 > 2[\|u\|^2 + \|v\|^2].$$

⁑ Sejam E_i, $i=1,2$, espaços pré-hilbertianos com produto interno $(|)_i$. Um <u>isomorfismo</u> de E_1 em (sôbre) E_2 é uma aplicação biunívoca linear de E_1 em (sôbre) E_2 tal que para quaisquer $x,y \in E_1$ temos $(f(x)|f(y))_2 = (x|y)_1$.

EXERCÍCIO 2.3 - Seja f uma aplicação linear do espaço pré-hilbertiano E_1 no espaço pré-hilbertiano E_2 tal que para todo $x \in E_1$ temos $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$ (isto é, f é uma <u>isometria</u> de E_1 em E_2). Demonstrar que f é um isomorfismo.

DEFINIÇÃO - Dizemos que um subconjunto A de um espaço vetorial E é <u>convexo</u> se para quaisquer $x,y \in A$ temos $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

⁑ É imediato que todo subespaço vetorial de E é convexo; que o transladado de um conjunto convexo é um conjunto convexo; que a intersecção de uma família qualquer de conjuntos convexos é um conjunto convexo (eventualmente vazio). Daí segue-se que dado um conjunto $X \subset E$ existe a <u>envoltória convexa</u> de X, isto é, o menor con-



junto convexo, ΓX, que contém X (basta considerar a intersecção de todos os subconjuntos convexos de E que contém X). É fácil verificar que dada uma semi-norma p sôbre E, para todo $r \geqq 0$ os conjuntos $\{x \in E \mid p(x) \leqq r\}$ e $\{x \in E \mid p(x) < r\}$ são convexos.

PROPOSIÇÃO 2.3 - Dado um subconjunto <u>convexo</u> e <u>completo</u>, A, de um espaço pré-hilbertiano E, existe um e um só ponto $a^* \in A$ tal que para todo $a \in A$ temos $\|a^*\| \leqq \|a\|$.

<u>Demonstração</u>: Seja $\delta = d(0,A) = \inf\limits_{a \in A} d(0,a) = \inf\limits_{a \in A} \|a\|$.

Pela definição de δ existe uma seqüência de pontos $a_n \in A$ tais que $\|a_n\| \to \delta$. Vamos demonstrar que os a_n formam uma seqüência de Cauchy. De fato, pela lei do paralelogramo temos:

$$\|a_n - a_m\|^2 = 2\|a_n\|^2 + 2\|a_m\|^2 - \|a_n + a_m\|^2 \ .$$

Lembrando que A é convexo temos $\frac{a_n + a_m}{2} \in A$ e portanto

$\|\frac{a_n + a_m}{2}\| \geqq \delta$, isto é, $\|a_n+a_m\|^2 \geqq 4\delta^2$. Pela definição da seqüência a_n, dado $e > 0$ existe n_o tal que para $n \geqq n_o$ temos $\|a_n\| \leqq \delta+e$; portanto, para $n,m \geqq n_o$ temos

$$\|a_n-a_m\|^2 \leqq 2(\delta+e)^2 + 2(\delta+e)^2 - 4\delta^2 = (8\delta+4e)e.$$

Os a_n formam portanto uma seqüência de Cauchy e A sendo por hipótese completo existe um elemento $a^* \in A$ tal que $a_n \to a^*$ e portanto $\|a^*\| = \delta$, pois $\|a_n\| \to \delta$.

O elemento $a^* \in A$ tal que $\|a^*\| = \delta$ é único. De fato, seja $a' \in A$ outro elemento com a mesma propriedade. Da convexidade de A segue-se que $\frac{a^* + a'}{2} \in A$ e portanto $\|\frac{a^* + a'}{2}\| \geqq \delta$. Mas pela lei do paralelogramo temos

$$\delta^2 \leqq \|\frac{a^* + a'}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\|a^*\|^2 + \frac{1}{2}\|a'\| - \|\frac{a^* + a'}{2}\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \|\frac{a^* - a'}{2}\|^2 < \delta^2$$

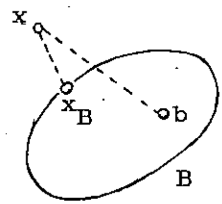
se $a' \neq a^*$.

COROLÁRIO - Seja B um subconjunto convexo e completo de um espaço pré-hilbertiano E. Para todo $x \in E$ existe um e um só elemento $x_B \in B$ tal que para todo $b \in B$ temos

$$d(x,x_B) \leqq d(x,b) .$$

<u>Demonstração</u>: Lembrando que a distância é invariante por translação, basta aplicar a proposição ao conjunto

$$A = B - x = \{b-x \mid b \in B\}.$$



Temos $x_B = a^* + x$.

EXERCÍCIO 2.4 - Consideremos o espaço de Banach $C([0,1])$, Dar exemplos de conjuntos convexos completos A tais que se $\delta = \inf_{a \in A} \|a\|$, então:

1) Existem infinitos pontos $a \in A$ tais que $\|a\| = \delta$.
2) Existe uma seqüência $a_n \in A$ tal que $\|a_n\| \to \delta$ mas tal que nenhuma subseqüência de a_n é uma seqüência de Cauchy.
3) Não existe $a \in A$ tal que $\|a\| = \delta$. [Sugestão para 3): tomar $A = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = 0 \text{ e } \int_0^1 x(t)dt = 1\}$].

§3 - Projeção ortogonal

Dizemos que dois vetores x e y de um espaço pré-hilbertiano E são <u>ortogonais</u> ou <u>perpendiculares</u>, escrevemos $x \perp y$, se temos $(x|y) = 0$. Evidentemente $x \perp y$ implica $y \perp x$. Dizemos que x é ortogonal a um subconjun to A de E, escrevemos $x \perp A$ ou $x \in A^{\perp}$, se $x \perp a$ para todo $a \in A$; é claro que se x é ortogonal a A então x também é ortogonal a qualquer combinação linear de vetores de A e x é, portanto, ortogonal ao subespaço vetorial $[A]$ de E gerado por A; do Corolário 5 do Teorema 1.1 segue-se que x é mesmo ortogonal ao subespaço vetorial fechado $\overline{[A]}$ de E gerado por A.

$A^{\perp} = \{x \in E \mid x \perp A\}$ é um subespaço vetorial fechado de E e $(A^{\perp})^{\perp} \supset \overline{[A]}$ (Cf. exercício 3.1) mas não vale necessàriamente a igualdade se E não fôr completo.

EXERCÍCIO 3.1 - Seja E um espaço pré-hilbertiano.

a) Dado um subconjunto A de E demonstrar que $A^{\perp}$ é um subespaço vetorial fechado de E.

b) Demonstrar que $A \subset B$ implica $A^{\perp} \supset B^{\perp}$; que $A \subset A^{\perp\perp}$; que $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$ e que $(\bigcup_{i \in I} A_i)^{\perp} \subset \bigcap_{i \in I} A_i^{\perp}$.

c) Dados subespaços vetoriais F_1 e F_2 de E, demonstrar que

$$(F_1 + F_2)^{\perp} \subset F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp} .$$

TEOREMA 3.1 (Teorema de Pitágoras) -

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

<u>Demonstração</u>: É só fazer o desenvolvimento de $\|x+y\|^2 =$
$= (x+y \mid x+y)$.

→ EXERCÍCIO 3.2 - a) Demonstrar que num espaço pré-hilbertiano real temos $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$.

b) Demonstrar que o mesmo não vale num espaço pré-hilbertiano complexo. [Sugestão: considerar $y = ix$.]

c) Demonstrar que dados $x_1,\ldots,x_n$ tais que $x_i \perp x_j$ para $i \neq j$ então $\|x_1+\ldots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.

PROPOSIÇÃO 3.2 - Seja F um subespaço vetorial de um espaço pré-hilbertiano E; dado $z \in E$ são equivalentes as seguintes propriedades:

a) $\|z\| \leq \|z-y\|$ para todo $y \in F$;

b) $z \perp F$;

c) $d(z,F) = \|z\|$.

Demonstração: É evidente que a) e c) são equivalentes.

a) ⇒ b). Se z não é ortogonal a F existe $e \in F$ tal que $(z|e) \neq 0$ e podemos supor que $\|e\| = 1$. Então, $z - (z|e)e \perp e$ e do Teorema de Pitágoras segue-se que

$$\|z\|^2 = \|z-(z|e)e + (z|e)e\|^2 = \|z-(z|e)e\|^2 + \\ + \|(z|e)e\|^2 > \|z-(z|e)e\|^2 ,$$

isto é, achamos um elemento $y = (z|e)e \in F$ tal que $\|z\| > \|z-y\|$.

b) $\Rightarrow$ a). De $z \perp F$ segue-se que $z \perp y$ para todo $y \in F$ e pelo Teorema de Pitágoras temos portanto que

$$\|z-y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 > \|z\|^2 \quad \text{se} \quad y \neq 0.$$

COROLÁRIO 1 - Seja F um subespaço vetorial de um espaço pré-hilbertiano E.

A) Dados elementos $x \in E$ e $x_F \in F$ são equivalentes as propriedades:

a) para todo $y \in F$ temos $\|x-x_F\| \leq \|x-y\|$;

b) $x-x_F \perp F$;

c) $d(x,F) = \|x-x_F\|$.

B) Quando F é completo, para todo $x \in E$, existe um e um só elemento x_F em F satisfazendo as propriedades equivalentes a), b) e c).

Demonstração: A) segue da proposição tomando $z = x-x_F$.

B) segue do corolário da Proposição 2.3.

O elemento x_F do corolário 1, B) se chama projeção ortogonal de x sôbre F.

COROLÁRIO 2 - Seja F um subespaço vetorial completo de um espaço pré-hilbertiano E, $F \neq E$: existe $z \in E$, $z \neq 0$ tal que $z \perp F$.

Demonstração: Seja $x \in E$, $x \notin F$; pelo corolário 1, B) existe $z = x-x_F$ que é não nulo e ortogonal a F.

EXERCÍCIO 3.3 - Nas hipóteses de corolário 1, B) para todo $x \in E$ definimos $p_F(x) = x_F$. Demonstrar que p_F é um operador linear contínuo de E sôbre F, que $\|p_F\| = 1$ se $F \neq \{0\}$, que $p_F^2 = p_F$ e que para todo $x \in E$ temos $x - p_F x \in F^{\perp}$.

Já vimos (corolário 2 da desigualdade de Cauchy-Schwarz) que para todo $y \in E$ o funcional $x \in E \mapsto f_y(x) = (x|y)$ é linear e contínuo com $\|f_y\| = \|y\|$. O teorema que segue é uma recíproca dêste fato.

TEOREMA 3.3 (de Riesz) - Seja E um espaço de Hilbert e $f: E \to \mathbf{C}$ um funcional linear contínuo. Então existe um e um só $y \in E$ tal que $f(x) = (x|y)$; temos $\|y\| = \|f\|$.

Demonstração: A unicidade é imediata pois $(x|y_1) = (x|y_2)$ para todo $x \in E$ equivale a $(x|y_1 - y_2) = 0$ e portanto para $x = y_1 - y_2$ temos $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, isto é, $y_1 = y_2$.

Existência. f sendo um funcional linear contínuo, então $F = f^{-1}(0)$ é um subespaço vetorial fechado de E. Se $F = E$ temos $f = 0$ e tomamos $y = 0$. Se $F \neq E$ tomemos $b \perp F$ com $f(b) = 1$ (pelo corolário 2 precedente existe $z \notin F$, $z \perp F$ e portanto $f(z) \neq 0$; tomamos $b = \frac{z}{f(z)}$). Para todo $x \in E$ temos pois a decomposição $x = f(x)b + [x-f(x)b]$ onde $x-f(x)b \in F$ (pois $f(x-f(x)b) = f(x)-f(x) = 0$) e portanto $x-f(x)b \perp b$ donde segue-se que $(x|b) = (f(x)b|b) = f(x)\|b\|^2$. Basta pois tomar $y = b/\|b\|^2$.

EXEMPLO - Quando $E = L_2([a,b];\rho)$ o Teorema de Riesz afirma que dado um funcional linear contínuo $F: L_2([a,b];\rho) \to \mathbb{C}$ existe uma e uma só função $f \in L_2([a,b];\rho)$ tal que para todo $g \in L_2([a,b];\rho)$ temos

$$F(g) = \int_a^b g(x)\overline{f(x)}\rho(x)dx .$$

EXERCÍCIO 3.4 - Seja E um espaço de Hilbert e F um espaço pré-hilbertiano;

a) Demonstrar que para todo $u \in L(E,F)$ existe uma e uma só aplicação $u^* \in L(F,E)$ tal que para quaisquer $x \in E$ e $y \in F$ tenhamos $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ [Sugestão: indicar por $u^*(y)$ o elemento de E que determina o funcional linear contínuo $x \in E \longmapsto (u(x)|y) \in C$].

b) Demonstrar que $\|u^*\| = \|u\|$.

§4 - O Teorema da base

Neste parágrafo muitas das definições e proposições serão ilustradas nos dois exemplos seguintes.

EXEMPLO A) - O espaço $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ com o produto interno

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} .$$

EXEMPLO B) - O espaço $L_2([0,1])$ com o produto interno

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

ou o seu subespaço $C_{L_2}(T)$ onde $C(T)$ indica o conjunto das funções contínuas (a valores complexos) definidas sôbre o toro $T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$; $C(T)$ se identifica canônicamente com o espaço das funções definidas na reta (a valores complexos) que são contínuas e periódicas de período 1.

A distância

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left[\int_0^1 |x(t)-y(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

associada a êste produto interno muitas vêzes se denomina de <u>distância média quadrática</u>.

DEFINIÇÃO - Dizemos que uma família $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ (um sistema $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$) de elementos de um espaço pré-hilbertiano E é uma <u>família ortogonal</u> (<u>sistema ortogonal</u>) se para $\alpha,\beta \in A$ e $\alpha \neq \beta$ temos $e_\alpha \perp e_\beta$. Se além disto os vetores e_α fôrem unitários dizemos que a família (o sistema) é <u>ortonormal</u> (abreviamos o.n.).

No Exemplo A) os vetores $e_1,\dots,e_n$ formam um sistema o.n. (e_i é o elemento de C^n cuja i-ésima coordenada é 1 sendo nulas as outras coordenadas).

No Exemplo B) as funções $e^{2\pi ikt}$, $k \in \mathbf{Z}$, formam um sistema o.n.. Isto segue imediatamente de

$$(e^{2\pi ikt}|e^{2\pi iht}) = \int_0^1 e^{2\pi i(k-h)t}dt = \delta_{kh} .$$

→ EXERCÍCIO 4.1 - Demonstrar que tôda família ortogonal $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ formada por vetores não nulos é linearmente independente.

Dado um vetor unitário e_α, para todo vetor $x \in E$ o número complexo $x_\alpha = (x|e_\alpha)$ é denominado de <u>componente de x segundo</u> e_α. O vetor $x_\alpha e_\alpha = (x|e_\alpha)e_\alpha$ é chamado de <u>projeção de</u> x <u>na direção</u> e_α.

No Exemplo A), dado $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in C^n$ temos $(x|e_i) = x_i$.

No Exemplo B), dado $x \in L_2([0,1])$ temos

$$(x|e^{2\pi int}) = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt$$

que é justamente $c_n[x]$, o n-ésimo coeficiente de Fourier (exponencial) de x. Por esta razão dada uma família o.n. $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de um espaço pré-hilbertiano E muitos autores chamam os números complexos $x_\alpha = (x|e_\alpha)$, $\alpha\in A$, de <u>coeficientes de Fourier</u> do elemento $x \in E$.

PROPOSIÇÃO 4.1 - Seja $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família o.n. de um espaço pré-hilbertiano E.

a) Se a família $(\lambda_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ (onde os λ_α são números complexos) fôr somável, então $(\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha e_\alpha | e_\beta) = \lambda_\beta$ para todo $\beta \in A$.

b) Sejam $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$ e $y = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha e_\alpha$ então $(x|y) = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}$.

c) Seja $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$, então $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|^2$.

DEMONSTRAÇÃO: a) segue do Corolário 3 do Teorema 1.1;

b) segue dêste mesmo corolário e da parte a). Fazendo $y = x$ em b) segue c).

PROPOSIÇÃO 4.2 (a desigualdade de Bessel) - a) Dada uma família o.n. $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de um espaço pré-hilbertiano E, para todo $x \in E$ temos $\sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|^2 \leq \|x\|^2$ onde $x_\alpha = (x|e_\alpha)$ (isto é, para todo $x \in E$ a família $(|x_\alpha|^2)_{\alpha\in A}$ de números complexos é somável e vale a desigualdade acima).

b) $$\sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha .$$

Demonstração: a) Para tôda parte finita $F \subset A$ temos

$$\|x\|^2 - \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha|^2 = (x-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha | x-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha) \geqq 0$$

o resultado segue portanto do Exercício I.1.18.

b) Na Proposição 4.1 vimos que $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$ implica que $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|^2$; a recíproca segue de $\|x-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha\|^2 = = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha|^2$ e da definição de somabilidade.

No Exemplo A) a desigualdade de Bessel nos diz simplesmente que dado um subconjunto $A \subset \{1,2,\dots,n\}$ temos

$$\sum_{i\in A} |x_i|^2 \leqq \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 .$$

No Exemplo B) a desigualdade de Bessel exprime que para todo subconjunto $A \subset \mathbf{Z}$ temos

$$\sum_{n\in A} |c_n[x]|^2 \leqq \int_0^1 |x(t)|^2 dt .$$

Mais adiante demonstraremos que, neste exemplo, quando $A = \mathbf{Z}$ vale a igualdade (Teorema 4.7).

TEOREMA 4.3 (da melhor aproximação) - Sejam $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família o.n. de um espaço pré-hilbertiano E

e um subconjunto finito F de A. Para todo $x \in E$ temos

$$\|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha\| \leq \|x - \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha\| ,$$

onde $x_\alpha = (x|e_\alpha)$ e onde os λ_α, $\alpha \in F$, são números complexos quaisquer. Vale a igualdade se, e sòmente se, $\lambda_\alpha = x_\alpha$ para todo $\alpha \in F$. $\sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha$ é a projeção ortogonal de x sôbre o subespaço vetorial de E gerado pelos e_α, $\alpha \in F$.

Demonstração: Para todo $\beta \in F$ temos

$$(x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha | e_\beta) = x_\beta - x_\beta = 0$$

e $x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha e_\alpha$ é portanto ortogonal ao subespaço vetorial gerado pelos e_α. O resultado segue pois do Corolário 1 da Proposição 3.2.

No Exemplo B) o teorema acima exprime que a melhor aproximação (em média quadrática) de uma função $x \in L_2([0,1])$ por combinações lineares de exponenciais $e^{2\pi int}$, $n \in F$, é obtida tomando como coeficientes os coeficientes de Fourier de x:

$$\int_0^1 |x(t) - \sum_{n\in F} c_n[x]e^{2\pi int}|^2 dt \leq \int_0^1 |x(t) - \sum_{n\in F} \lambda_n e^{2\pi int}|^2 dt.$$

PROPOSIÇÃO 4.4 (Fischer-Riesz) - Seja $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família o.n. de um espaço de Hilbert E e se ja $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de números complexos tal que a família $(|\lambda_\alpha|^2)_{\alpha\in A}$ seja somável. Então a família $(\lambda_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ é somável.

<u>Demonstração</u>: E sendo completo é suficiente demonstrar (Cf. Teorema I. 1.12) que a família $(\lambda_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ satisfaz a condição de Cauchy, isto é, que dado $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F_\epsilon \subset A$ tal que para todo subconjunto finito F' de A com $F' \cap F_\epsilon = \emptyset$ temos $\|\sum_{\alpha\in F'} \lambda_\alpha e_\alpha\| < \epsilon$. Isto segue de $\|\sum_{\alpha\in F'} \lambda_\alpha e_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in F'} |\lambda_\alpha|^2$ e da hipótese de somabilidade da família $(|\lambda_\alpha|^2)_{\alpha\in A}$.

OBSERVAÇÃO - O teorema de Fischer-Riesz foi originalmente demonstrado para o espaço de Hilbert $E = L_2([0,1])$ e a família o.n. de funções $(e^{2\pi int})_{n\in Z}$; o seu ponto crucial estava na demonstração de que o espaço $L_2([0,1])$ é completo.

PROPOSIÇÃO 4.5 - Seja $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família o.n. de um espaço de Hilbert E. Para todo $x \in E$ a família $(x_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ é somável.

<u>Demonstração</u>: O resultado segue imediatamente da desigualdade de Bessel, aplicando a proposição precedente.

EXERCÍCIO 4.2 - Conservando as hipóteses da Proposição 4.5 demonstrar que $\sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$ é a projeção ortogonal de x sôbre o subespaço vetorial fechado gerado pelos e_α, $\alpha \in A$.

TEOREMA 4.6 (Teorema da base) - Seja $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ um sistema ortonormal de um espaço pré-hilbertiano E. São equivalentes às seguintes propriedades:

1) Para todo $x \in E$ temos $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$ (isto é, a família $(x_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ é somável e tem por soma x).

2) Para quaisquer $x,y \in E$ temos

$$(x|y) = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha \overline{y_\alpha} \quad \text{(identidade de Parseval).}$$

3) Para todo $x \in E$ temos

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|^2 \quad \text{(igualdade de Bessel).}$$

4) O conjunto das combinações lineares finitas dos e_α, $\alpha \in A$, é denso em E, isto é, dado $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear finita $\sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha$ tal que

$$\|x - \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha\| < \varepsilon .$$

5) Todo funcional linear contínuo $f:E \to C$ que é nulo sôbre todos os e_α, $\alpha \in A$, é idênticamente nulo.

Quando E é um <u>espaço de Hilbert</u> as propriedades precedentes ainda são equivalentes às seguintes:

6) O sistema o.n. $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$ é maximal em E (isto é, não existe um sistema o.n. $\{f_\beta | \beta \in B\} \supsetneqq \{e_\alpha | \alpha \in A\}$).

7) Dado $e \in E$ tal que $e \perp e_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, então $e = 0$.

Se um sistema o.n. $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$ satisfaz as propriedades equivalentes 1) a 5) dizemos que êle é um sistema ortonormal completo ou uma base hilbertiana (ou simplesmente base - não confundir com "base algébrica"!) de E.

Demonstração: 1) ⇒ 2): Foi demonstrado na parte b) da Proposição 4.1. 2) ⇒ 3): É só tomar $y = x$. 3) ⇒ 4): Segue de $\|x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha e_\alpha\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in F} |x_\alpha|^2$ e da definição de somabilidade.

4) ⇒ 5): Se o funcional linear f é nulo sôbre os e_α, $\alpha \in A$, êle é nulo sôbre o subespaço vetorial das combinações lineares finitas dos e_α e da continuidade de f segue que f é nulo em E. 5) ⇒ 1): Seja $x \in E$ tal que $x \neq \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$; da Proposição 4.2 segue que $\|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 > 0$. Consideremos o funcional linear contínuo

$$y \in E \to f(y) = (y|x) - \sum_{\alpha \in A} y_\alpha \overline{x_\alpha} \ ;$$

para todo $\alpha \in A$ temos $f(e_\alpha) = \overline{x_\alpha} - \overline{x_\alpha} = 0$ mas

$$f(x) = (x|x) - \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 > 0 \ .$$

5) $\Rightarrow$ 6): Se o sistema o.n. $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$ não fôsse maximal existiria um vetor unitário e tal que $e \perp e_\alpha$ para todo $\alpha \in A$ e o funcional linear contínuo $y \in E \to f(y) = (y|e)$ seria portanto nulo sôbre todos os e_α sem ser nulo pois $f(e) = 1$.

6) $\Rightarrow$ 7): Senão seja $e \in E$ tal que $e \perp e_\alpha$ para todo α em A com $e \neq 0$; tomando $e' = e/\|e\|$, $\{e_\alpha | \alpha \in A\} \cup \{e'\}$ é um sistema o.n. que contém pròpriamente o sistema $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$.

7) $\Rightarrow$ 1) (Esta é a única parte da demonstração em que usamos a hipótese de que E é um espaço de Hilbert.): Dado x em E segue da Proposição 4.5 que a família $(x_\alpha e_\alpha)_{\alpha \in A}$ é somável; tomemos pois $e = x - \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$; para todo $\alpha \in A$ temos $(e|e_\alpha) = x_\alpha - x_\alpha = 0$ e de 7) segue portanto que $e = 0$, isto é, $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$.

* OBSERVAÇÕES: 1) Num espaço pré-hilbertiano um sistema o.n. maximal não é necessàriamente uma base hilbertiana (isto é, 6) ou 7) não implicam as propriedades 1) a 5)). Mais ainda: um espaço pré-hilbertiano pode não ter uma base hilbertiana; ver Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques, Cap.V, §2, exerc. 2.

2) Usando o Teorema de Zorn demonstra-se que todo espaço de Hilbert tem uma base [AFA, Teorema 6.4 do cap.I];

o mesmo ainda é verdadeiro para todo espaço pré-hilbertiano separável (isto é, que contém um subconjunto enumerável denso em todo espaço) [AFA, Teorema 7.2 do cap.I].

→ EXERCÍCIO 4.3 - a) Mostrar que o funcional f definido na demonstração 5) ⇒ 1) é contínuo.

b) Por que não definimos f por $f(y) = (y|x-\sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha)$?

EXERCÍCIO 4.4 - Seja E o espaço prehilbertiano definido no exercício 3.5. Demonstrar que as funções e^{irt}, $r \in \mathbb{R}$, formam uma base o.n. dêste espaço.

Antes de demonstrar que em $E = C_{L_2}(T)$ ou $E = L_2([0,1])$ as funções $(e^{2\pi int})_{n\in Z}$ formam uma base, vamos traduzir as diferentes propriedades 1) a 7) para êste exemplo.

1) Para todo $x \in E$ temos $x(t) = \sum_{n\in Z} c_n[x]e^{2\pi int}$ a somabilidade sendo no sentido da norma de $L_2([0,1])$† e não no sentido pontual. Aliás, até há poucos anos não se sabia siquer demonstrar que dada uma função contínua $x \in C(T)$ há pontos $t \in \mathbf{R}$ nos quais a série de Fourier

---

† isto é, dado $e > 0$, existe um subconjunto finito $F_e \subset Z$ tal que para todo subconjunto finito $F \subset Z$ que contém F_e temos

$$\|x-\sum_{n\in F} c_n[x]e^{2\pi int}\|=\left[\int_0^1 |x(t)-\sum_{n\in F}c_n[x]e^{2\pi int}|^2dt\right]^{1/2} \leq e \ .$$

de x é convergente.

2) Para quaisquer $x, y \in E$, temos

$$\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt = \sum_{n \in Z} c_n[x]\overline{c_n[y]}.$$

3) Para todo $x \in E$, temos

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n[x]|^2 .$$

4) Dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito F de Z e números complexos $(\lambda_n)_{n \in F}$ tais que

$$\int_0^1 |x(t) - \sum_{n \in F} \lambda_n e^{2\pi int}|^2 dt < \epsilon^2 .$$

7) Se $x \in E$ é tal que

$$c_n[x] = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt = 0$$

para todo $n \in \mathbf{Z}$ então $x = 0$, isto é, uma função que tem todos os coeficientes de Fourier nulos é nula.

TEOREMA 4.7 - Os $(e^{2\pi int})_{n \in \mathbf{Z}}$ formam uma base hilbertiana de $C_{L_2}(T)$ e de $L_2([0,1])$.

COROLÁRIO - Para tôda função ϕ de $C(T)$ ou de $L_2([0,1])$ temos

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{n \in Z} |c_n[\phi]|^2$$

Demonstração do Teorema 4.7 - Pelo teorema precedente é suficiente demonstrar que está satisfeita uma das propriedades equivalentes 1) a 5), por exemplo a 4). Lembrando que $C(T)$ é denso em $L_2([0,1])$ †, basta pois demonstrar a propriedade 4) para $C(T)$, isto é, que dados $\phi \in C(T)$ e $e > 0$ existe um subconjunto finito F de Z e números complexos $(\lambda_n)_{n\in F}$ tais que

$$\int_0^1 |\phi(t) - \sum_{n\in F} \lambda_n e^{2\pi int}|^2 dt < e^2 .$$

Para isto é suficiente demonstrar que podemos determinar $F \subset Z$ e os $(\lambda_n)_{n\in F}$ tais que para todo $t \in [0,1]$ temos

$$|\phi(t) - \sum_{n\in F} \lambda_n e^{2\pi int}| < e .$$

Isto é conseqüência do Teorema de Weierstrass ou do teore-

† Quer por definição, quando definimos $L_2([0,1])$ como o completado de $C(T)$ relativamente à norma

$$\|\phi\| = \left[\int_0^1 |\phi(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

quer pelo Teorema de Lebesgue (dados $x \in L_2([0,1])$ e $e > 0$ existe $\phi \in C(T)$ tal que

$$\int_0^1 |x(t)-\phi(t)|^2 dt < e^2) ,$$

quando definimos $L_2([a,b])$ como foi feito no Exemplo H.2.

ma geral de Stone-Weierstrass. Enunciaremos êste último:

TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS COMPLEXO - Dado um espaço compacto K e um subconjunto separante $S = \{e_i | i \in I\}$ de $\mathcal{C}(K)$ (isto é, tal que dados $x, y \in K$, $x \neq y$, existe uma função $e_i \in S$ tal que $e_i(x) \neq e_i(y)$) então a álgebra gerada pelas funções de S, pelas suas conjugadas e pelas funções constantes é densa em $\mathcal{C}(K)$ (na topologia da convergência uniforme sôbre K) isto é, dados $\phi \in \mathcal{C}(K)$ e $\epsilon > 0$ existe um polinômio a coeficientes complexos P tal que

$$|\phi(t) - P[e_{i_1}(t), \ldots, e_{i_r}(t), \overline{e_{j_1}(t)}, \ldots, \overline{e_{j_s}(t)}]| < \epsilon$$

para todo $t \in K$.

Para aplicar êste teorema ao nosso caso basta lembrar que a função $e^{2\pi it}$ é separante sôbre T (isto é, $s \not\equiv t$ mod. 1 implica que $e^{2\pi is} \neq e^{2\pi it}$) e como $\overline{e^{2\pi it}} = e^{-2\pi it}$ e $(e^{2\pi it})^n = e^{2\pi int}$ então um polinômio em $e^{2\pi it}$ e $\overline{e^{2\pi it}}$ nada mais é que um polinômio exponencial $\sum_{n \in F} \lambda_n e^{2\pi int}$. CQD

EXERCÍCIO 4.5 (O processo de ortonormalização de Gram-Schmidt) - Seja $(f_n)_{n \in N}$ uma seqüência de vetores linearmente independentes de um espaço pré-hilbertiano E. Demonstrar que existe uma seqüência o.n.

$(e_n)_{n\in N}$ em E tal que para todo $n \in N$ $\{f_1,\ldots,f_n\}$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ geram o mesmo subespaço de E. [Sugestão: definir e_n por recorrência $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ e $e_{m+1} + \frac{f^*_{m+1}}{\|f^*_{m+1}\|}$ onde

$$f^*_{m+1} = f_{m+1} - (f_{m+1}|e_1)e_1 - \ldots - (f_{m+1}|e_m)e_m\ ]$$

EXERCÍCIO 4.6 - Demonstrar que todo espaço de Hilbert complexo de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{C}^n$.

EXERCÍCIO 4.7 - Demonstrar que todo espaço pré-hilbertiano separável E tem uma base. [Sugestão: se $\{x_n | n\in N\}$ é um subconjunto enumerável denso em E, extrair uma subseqüência linearmente independente (x_{r_n}) tal que o subespaço vetorial de E gerado pelos x_{r_n} é denso em E; aplicar o Exercício 4.5].

* EXERCÍCIO 4.8 - Demonstrar que o espaço pré-hilbertiano $C_{L_2}([a,b])$ tem uma base enumerável. [Sugestão: aplicar o Exercício 4.7 e o Teorema de Stone-Weierstrass ou ...]

<u>Referências</u> - [2], [3], [4], [10], [14].

APÊNDICE - Séries de Fourier

As funções que consideramos neste apêndice são definidas na reta e a valores complexos, periódicas de período $P > 0$; elas ficam portanto completamente determinadas pelo seu valor num intervalo $[a, a+P[$ e qualquer função dada num intervalo de comprimento P pode ser estendida de um e um só modo a uma função definida na reta, periódica de período P. Assim, por exemplo, quando consideramos a função $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi[$, está subentendido que se trata da função periódica de período 2π que coincide com a função $f(x) = x$ naquele intervalo.

As funções e^{iwnt}, $t \in \mathbb{R}$, $n \in Z$ onde $w = \frac{2\pi}{P}$ são exemplos de funções periódicas de período P; idem as funções $\cos wnt$ e $\operatorname{sen} wnt$.

Consideramos séries exponenciais formais da forma $\sum_{n \in Z} c_n e^{iwnt}$ onde os c_n são números complexos. A relação $e^{iwnt} = \cos wnt + i \operatorname{sen} wnt$ nos permite passar a séries trigonométricas formais

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos wkt + b_k \operatorname{sen} wkt]$$

onde $\begin{cases} a_o = 2c_o \\ a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$ $k>0$; as relações $\begin{cases} c_o = \frac{1}{2}a_o \\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases}$

permitem a passagem inversa.

1 - Relações de ortogonalidade:

$$\int_a^{a+P} e^{iwnt} \; e^{-iwmt} \, dt = P \, \delta_{mn}$$

$$\int_a^{a+P} \cos wnt \, . \cos wmt \; dt = \int_a^{a+P} \operatorname{sen} wnt \, . \operatorname{sen} wmt \; dt = \frac{1}{2} P \, \delta_{nm}$$

$$\int_a^{a+P} \cos wnt \, . \, \operatorname{sen} wmt \; dt = 0$$

2 - Dada uma família $(c_n)_{n\in Z}$ absolutamente convergente de números complexos, a série $\sum_{n\in Z} c_n \, e^{iwnt}$ é absolutamente uniformemente convergente na reta e sua soma é uma função contínua f de período P; para todo $m \in Z$ temos $c_m = \frac{1}{P} \int_a^{a+P} f(t) e^{-iwmt} \, dt$.

Demonstração: O limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua e como cada um dos somandos têm período P o mesmo vale para a soma f. Multiplicando a série pela função e^{-iwmt} podemos integrá-la têrmo a têrmo no intervalo $[a,a+P[$ por causa de sua convergência uniforme; usando então as relações de ortogonalidade segue-se a expressão de c_m.

De modo análogo demonstra-se que

3 - Se a série $\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos wkt + b_k \operatorname{sen} wkt]$ é uniformemente convergente para uma função f então f é contínua na reta, periódica de período P e temos

$$a_k = \frac{2}{P}\int_a^{a+P} f(t)\cos wkt\, dt \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{P}\int_a^{a+P} f(t)\operatorname{sen} wkt\, dt \qquad k=1,2,\ldots$$

2 e 3 motivam as seguintes definições: dada uma função f integrável no intervalo $[a,a+P[$ o <u>$n^{\text{ésimo}}$ coeficiente de Fourier exponencial</u> de f, $n \in Z$, é o número $c_n[f] = \frac{1}{P}\int_a^{a+P} f(t)e^{-iwnt}\, dt$ e a série formal $\sum_{n\in Z} c_n[f]e^{iwnt}$ é a <u>série de Fourier exponencial</u> de f. Anàlogamente definimos os <u>coeficientes de Fourier trigonométricos</u> de f, $a_k[f] = \frac{2}{P}\int_a^{a+P} f(t)\cos wkt$ $k=0,1,2,\ldots$ e $b_k[f] = \frac{2}{P}\int_a^{a+P} f(t)\operatorname{sen} wkt\, dt$ $k = 1,2,\ldots$ bem como a série de Fourier trigonométrica de f:

$$\frac{1}{2} a_o[f] + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k[f]\cos wkt + b_k[f]\operatorname{sen} wkt].$$

Para funções reais prefere-se em geral trabalhar com a série de Fourier trigonométrica. Se a função f fôr par, isto é, $f(-t) = f(t)$, temos $b_k[f] = 0$ e $a_k[f] = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(t)\cos wkt\, dt$. Se f fôr ímpar, isto é, $f(-t) = -f(t)$ então $a_k[f] = 0$ e $b_k[f] = \frac{4}{P}\int_0^{P/2} f(t)\,\text{sen}\, wkt\, dt$.

EXEMPLOS - a) É imediato que a série de Fourier da função $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi,\pi[$ é dada por

$$2[\text{sen}\, x - \frac{\text{sen}\, 2x}{2} + \frac{\text{sen}\, 3x}{3} - \dots]$$

b) A série de Fourier da função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-\pi,\pi]$ é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots]$$

c) A série de Fourier da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[-\pi,\pi]$ é

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} .$$

4 - Seja f uma função contínua definida na reta, periódica de período P e lisa por partes [isto é, existe uma divisão $a \le t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = a + P$ do intervalo $[a,a+P]$ tal que em cada subintervalo $[t_{i-1},t_i]$ a função f é continuamente diferenciável]. Então para to-

do $n \in Z$ temos

$$c_n[f'] = iwn\, c_n[f] \ .$$

<u>Demonstração</u>: segue por integração por partes.

Um dos problemas fundamentais da teoria das séries de Fourier é determinar condições para que a série de Fourier de uma função f, convirja, em algum sentido, para a função f. Mencionemos os seguintes resultados:

5 - Seja f uma função contínua definida na reta, periódica de período P e lisa por partes. Então a sua série de Fourier converge uniformemente e absolutamente para f. [Demonstração: AFA, cap.II, exerc.11.3].

Se a função f fôr apenas contínua (e periódica de período P) a seqüência de suas reduzidas $s_m(t) = \sum_{n=-m}^{m} c_n[f]e^{iwnt}$ não é, em geral, convergente (ver Apêndice do cap. I, aplicação do Teorema de Banach-Steinhaus); temos porém

6 - Teorema de Fejer: Seja f contínua, periódica de período P; então a seqüência $\sigma_m(t) = \frac{1}{m+1}\,[s_o(t) + s_1(t) + \ldots + s_m(t)]$ converge uniformemente para a função f. [AFA, cap.II, teorema 11.8].

7 - Teorema de Jordan: Seja f uma função periódica de

período P, de variação limitada no intervalo $[a,a+P[$; então em cada ponto t a seqüência $s_m(t)$ de suas reduzidas converge para $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$.

8 - Seja $f \in L_2([0,1])$; então temos $\|f\|_2 = \|(c_n[f])_{n\in Z}\|_2$ isto é, $\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in Z} |c_n[f]|^2$ e a série de Fourier de f converge para f em média quadrática [corolário do Teorema 4.7].

A teoria das séries de Fourier pode ser usada para achar a soma de certas séries numéricas; exemplos:

a') de 7 segue que a série de Fourier da função $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi,\pi[$ converge em todo ponto $x \neq -\pi$ para esta função. Fazendo então o cálculo no ponto $x = \frac{\pi}{2}$ (ver a série em a)) vem a fórmula de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

b') de 5 segue que a série de Fourier da função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-\pi,\pi]$ (ver o exemplo b)) converge uniformemente para esta função. Calculando então seu valor no ponto $x = 0$ vem

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

c') um resultado análogo vale para o exemplo c). Calculando então o seu valor nos pontos $x = \pi$ e $x = 0$ vem respectivamente

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$$

A teoria das séries de Fourier é de grande importância no estudo de muitas partes da Análise, particularmente na resolução das Equações Diferenciais Parciais da Física Matemática.

EXEMPLO - Consideremos a equação da corda homogênea vibrante

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{no intervalo} \quad 0 \leq x \leq L$$

com condições de fronteira $U(0,t) = 0$ e $U(L,t) = 0$ e com condições iniciais $U(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

Procurando inicialmente soluções de (*) que sejam da forma $U(x,t) = X(x)T(t)$ (o chamado <u>método de separação de variáveis</u>) vem $XT'' = a^2X''T$, isto é, $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T}$ que se separa em

$$(**) \qquad X'' - \lambda X = 0$$

$$(***) \qquad T'' - \lambda a^2 T = 0$$

As condições de fronteira implicam que $X(0) = X(L) = 0$ e uma solução de (**) satisfazendo estas condições é da forma

$$X_n(x) = c \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}$$

onde n é inteiro e por conseguinte $\lambda = -(\frac{n\pi}{L})^2$ donde segue que para cada n a solução geral de (***) é

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{an\pi t}{L} + B_n \text{ sen } \frac{an\pi t}{L}$$

donde segue que a função

$$U_n(x,t) = (A_n \cos \frac{an\pi t}{L} + B_n \text{ sen } \frac{an\pi t}{L}) \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$$

é solução de (*) e satisfaz as condições de fronteira.

Procuremos agora ver quando é que uma série da forma

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{an\pi t}{L} + B_n \text{ sen } \frac{an\pi t}{L}) \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$$

satisfaz também as condições iniciais. Para isto devemos ter

$$f(x) = U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}$$

e

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{L} B_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}$$

e se de fato estas são as séries de Fourier de f e g respectivamente, então (as séries são de senos e portanto o período é $2L$) temos

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{e} \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^L g(x)\,\text{sen}\ \frac{n\pi x}{L}\,dx$$

e está portanto determinada a função $U(x,t)$. Naturalmente é preciso verificar em que condições (sôbre f e g) a série que define $U(x,t)$ é convergente, satisfaz (*) e as condições iniciais [ver também Cap. IV, §2,A].

<u>Referências</u>: [9], [13].

CAPÍTULO III

TEORIA DOS OPERADORES

No presente capítulo vamos estudar operadores compactos em espaços normados, isto é, operadores que levam a bola unidade num conjunto relativamente compacto. Os exemplos mais importantes de operadores compactos são obtidos a partir de equações integrais da forma
$\int K(t,s)x(s)ds = y(t)$ ou $\int K(t,s)x(s)ds - \lambda x(t) = y(t)$ onde x e y são elementos de um espaço normado E de funções. No Capítulo IV vamos aplicar os resultados dêste capítulo ao estudo das equações integrais de Fredholm com núcleo hermitiano (§1) e ao estudo do problema de Sturm-Liouville (§2).

No §1 do presente capítulo estudamos os operadores compactos. Para isto estudamos inicialmente espaços métricos compactos (item A) e a seguir o Teorema de Ascoli (item B) que vai dar um dos critérios mais úteis para demonstrar que certos operadores são compactos. No item C é feito o estudo geral de operadores compactos. No §2 estudamos operadores hermitianos para no §3 dar a teoria espectral dos operadores hermitianos compactos.

§1 - Operadores compactos

A - Espaços métricos compactos

Lembremos que um espaço topológico separado E se diz <u>compacto</u> se todo recobrimento aberto de E contém um subrecobrimento finito. Um subespaço de um espaço compacto é compacto se, e sòmente se, fôr fechado. Um espaço discreto é compacto se, e sòmente se, fôr finito. A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua (a valores num espaço separado) é um conjunto compacto.

TEOREMA 1.1 - Seja E um espaço métrico; são equivalentes as seguintes propriedades:

A) E é compacto.
B) E é seqüêncialmente compacto (isto é, tôda seqüência de pontos de E contém uma subseqüência convergente).
C) E é completo e totalmente limitado (isto é, para todo $\epsilon > 0$ existe um recobrimento finito de E formado por conjuntos de diâmetro $\leq \epsilon$).

<u>Demonstração</u>: A) ⇒ B). Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de

pontos de E; se o conjunto $X = \{x_n | n \in N\}$ é finito a seqüência $(x_n)_{n \in N}$ tem evidentemente uma subseqüência convergente. Suponhamos pois que o conjunto X é infinito; se a seqüência $(x_n)_{n \in N}$ não tivesse nenhuma subseqüência convergente o conjunto X seria ao mesmo tempo fechado (pois não tem pontos de acumulação) e portanto compacto, e, discreto; X seria portanto finito, contra a hipótese.

B) $\Rightarrow$ C). B) implica que tôda seqüência de Cauchy de E é convergente (pois se uma seqüência de Cauchy contém uma subseqüência convergente, ela tôda é convergente). Se por outro lado E não fôsse totalmente limitado existiria um $e > 0$ tal que poderíamos construir uma seqüência $x_1, x_2, \ldots$ de pontos de E com $d(x_i, x_j) > e$ para $i \neq j$. Então a seqüência $(x_n)_{n \in N}$ não pode ter uma subseqüência convergente, contra a hipótese B).

C) $\Rightarrow$ A). Se E não fôsse compacto existiria um recobrimento aberto $(O_i)_{i \in I}$ de E que não conteria nenhum subrecobrimento finito. Dado portanto um recobrimento finito $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, \ldots, E_{n_1}^{(1)}$ de E por conjuntos de diâmetro ≤ 1, um deles pelo menos, seja $E_{m_1}^{(1)}$, não pode ser recoberto por um número finito dos O_i, $i \in I$. Do mesmo modo dado então um recobrimento finito $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}, \ldots, E_{n_2}^{(2)}$ de $E_{m_1}^{(1)}$ por conjuntos de diâmetro

$\leq \frac{1}{2}$, pelo menos um dêstes conjuntos, seja $E_{m_2}^{(2)}$, não pode ser recoberto por um número finito dos O_i. Assim vamos construindo sucessivamente conjuntos $E_{m_n}^{(n)}$, de diâmetro $\leq \frac{1}{n}$, embutidos $(E_{m_n}^{(n)} \supset E_{m_{n+1}}^{(n+1)})$ e que não podem ser recobertos por um número finito dos O_i, $i \in I$. E sendo completo existe um e um só ponto $x_o \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{E_{m_n}^{(n)}}$; mas existe $i_o \in I$ tal que $x_o \in O_{i_o}$ e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_o) \subset O_{i_o}$ donde segue-se que $E_{m_n}^{(n)} \subset B_\epsilon(x_o) \subset$ $\subset O_{i_o}$ se $\frac{1}{n} < \epsilon$ contra a escolha dos $E_{m_n}^{(n)}$ que não podem ser recobertos por um número finito dos O_i.

COROLÁRIO - Dado um subconjunto X de um espaço métrico completo E, são equivalentes as seguintes propriedades:

A') X é relativamente compacto em E (isto é, $\bar{X}$ é compacto).

B') Tôda seqüência de pontos de X contém uma subseqüência convergente em E.

C') X é totalmente limitado.

Demonstração: Basta lembrar que cada uma das propriedades A'), B') e C') de X é equivalente à propriedade correspondente A), B) e C) de $\bar{X}$.

OBSERVAÇÕES: 1) A equivalência entre A') e B') vale num espaço métrico qualquer: sempre vale

A') $\Rightarrow$ B') e se X satisfaz B') então $\bar{X}$ é completo e aplicando o corolário a $E = \bar{X}$ segue-se que B') $\Rightarrow$ A').

2) É imediato que em C) ou C') acima podemos substituir "conjuntos de diâmetro $\leqq \varepsilon$ " por "bolas abertas de raio ε " ou por "bolas fechadas de raio ε ".

EXERCÍCIO 1.1 - a) Demonstrar que todo espaço métrico totalmente limitado é separável.

b) Concluir que todo espaço métrico compacto é separável.

→ EXERCÍCIO 1.2 - Seja E um espaço métrico e $X \subset E$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto totalmente limitado $K \subset E$ tal que para todo $x \in X$ temos $d(x,K) \leq \varepsilon$. Demonstrar que então X é totalmente limitado.

* EXERCÍCIO 1.3 - Demonstrar que um subconjunto $K \subset \ell_p(N)$, $1 \leq p < \infty$, é totalmente limitado se e sòmente se K é limitado e dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito $F \subset N$ tal que $x \in K$ implica $\sum_{i \notin F} |x_i|^p \leq \varepsilon^p$. [Sugestão: aplicar o exercício 1.2].

B - O Teorema de Ascoli

<u>Neste item E indica um espaço compacto e F um espaço métrico completo</u> com distância d. $C(E,F)$ indica o conjunto das funções contínuas de E em F munido da distância

$$d(f,g) = \sup_{x \in E} d(f(x),g(y));$$

lembremos que $C(E,F)$ é completo em relação a esta distância.

Seja H um conjunto de aplicações de E em F; dizemos que H é <u>equicontínuo no ponto</u> $x_o \in E$ se dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança V_{x_o} de x_o tal que se $x \in V_{x_o}$ temos $d(f(x),f(x_o)) < \epsilon$ para todo $f \in H$; então tôdas as funções de H são contínuas no ponto x_o. Dizemos que H é <u>equicontínuo</u> se H é equicontínuo em todo ponto $x \in E$; então H é formado por funções contínuas, $H \subset C(E,F)$.

EXEMPLOS - 1) Tôda reunião de um número finito de subconjuntos equicontínuos de $C(E,F)$ é um conjunto equicontínuo; em particular todo conjunto finito de funções contínuas é equicontínuo.

2) Dado $m > 0$ o conjunto

$$H = \{f \in C^{(1)}([a,b]) \mid \sup_{a\leq t\leq b} |f'(t)| \leq m\}$$

é um subconjunto equicontínuo de $C([a,b])$ pois do teorema da média segue-se que para $x,x' \in [a,b]$ temos $|f(x)-f(x')| \leq m|x-x'|$ para todo $f \in H$.

→ EXERCÍCIO 1.4 - Seja $f_n \in C(E,F)$ uma seqüência de funções uniformemente convergente para uma função f. Demonstrar que o conjunto $H = \{f_n \mid n \in N\}$ é equicontínuo.

* EXERCÍCIO 1.5 - Seja $f_n \in C(E,F)$ uma seqüência equicontínua que converge simplesmente para uma função $f:E \to F$ (isto é, para todo $x \in E$ temos $f_n(x) \to f(x)$). Demonstrar que então a seqüência f_n converge uniformemente para a função f.

TEOREMA 1.2 (O Teorema de Ascoli) - Um subconjunto $H \subset C(E,F)$ é relativamente compacto se, e sòmente se, êle satisfaz às condições:

1) H é equicontínuo;
2) para todo $x \in E$ o conjunto $H(x) = \{f(x) | f \in H\}$ é relativamente compacto em F.

Demonstração: Seja H relativamente compacto; então $H(x)$ também o é por ser a imagem de H pela aplicação contínua

$$f \in C(E,F) \mapsto f(x) \in F.$$

Demonstremos também que H é equicontínuo: da propriedade C') do corolário do Teorema 1.1 segue-se que existe um recobrimento finito $H_1,\dots,H_n$ de H por conjuntos de diâmetro $\leq \epsilon/3$; fixemos então elementos $f_1 \in H_1,\dots,f_n \in H_n$. Da continuidade das funções $f_1,\dots,f_n$ segue-se que dado $x_o \in E$ existe uma vizinhança V_{x_o} de x_o tal que para $x \in V_{x_o}$ temos

$$d(f_i(x),f_i(x_o)) < \frac{\epsilon}{3}\ ,\ i = 1,2,\dots,n;$$

dado $f \in H$ seja i tal que $f \in H_i$; para $x \in V_{x_o}$ temos então

$$d(f(x),f(x_o)) \leq d(f(x),f_i(x)) +$$

$$+\ d(f_i(x),f_i(x_o)) + d(f_i(x_o),f(x_o)) < \epsilon$$

o que prova a equicontinuidade de H no ponto x_o.

Reciprocamente: seja $H \subset C(E,F)$ equicontínuo e tal que para todo $x \in E$ o conjunto $H(x)$ seja relativamente compacto em F. Do corolário do Teorema 1.1 segue-se que para demonstrar que H é relativamente compacto é suficiente demonstrar que H é totalmente limitado; isto é, dado $\epsilon > 0$ existe um recobrimento finito de H por conjuntos de diâmetro $\leq \epsilon$. H sendo equicontínuo segue-se que para todo $x \in E$ existe uma vizinhança aberta O_x de x tal que se $x' \in O_x$ temos $d(f(x'),f(x)) <$ $< \frac{e}{3}$ para todo $f \in H$; E sendo compacto pode ser recoberto por um número finito de abertos $O_{x_1},\dots,O_{x_n}$ com esta propriedade. Por outro lado $H^{(i)} = H(x_i)$, $i=1,\dots,n$, por hipótese, é relativamente compacto e existe portanto um recobrimento finito $H_1^{(i)},H_2^{(i)},\dots,H_{m_i}^{(i)}$ de $H^{(i)}$ por conjuntos de diâmetro $\leqq e/3$. Para cada seqüência de inteiros $p_1,\dots,p_n$ com $1 \leqq p_i \leqq m_i$ seja

$$H_{p_1,\dots,p_n} = \{f \in H \mid f(x_i) \in H_{p_i}^{(i)}, \quad i=1,2,\dots,n\} .$$

Êstes conjuntos evidentemente formam um recobrimento finito de H; resta mostrar que cada $H_{p_1,\dots,p_n}$ tem diâmetro $< e$: sejam $f,g \in H_{p_1,\dots,p_n}$; para todo $x \in E$ existe $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $x \in O_{x_i}$ e portanto

$$d(f(x),g(x)) \leqq d(f(x),f(x_i)) + d(f(x_i),g(x_i)) + \\ + d(g(x_i),g(x)) < e.$$

CQD

OBSERVAÇÃO - Quando $F = \mathbf{R}^n$ ou C^n para verificar a condição 2) é suficiente verificar que todo $H(x)$, $x \in E$, é um conjunto limitado pois em C^n um conjunto é relativamente compacto se, e sòmente se, fôr limitado.

C - Operadores compactos

PROPOSIÇÃO 1.3 - Sejam E e F espaços normados e $k:E \to F$ uma aplicação linear; são equivalentes as seguintes propriedades:

a) k leva a bola unitária B de E num conjunto relativamente compacto de F.

b) k leva os conjuntos limitados de E em conjuntos relativamente compactos de F.

c) Tôda seqüência limitada de pontos x_n de E contém uma subseqüência x_{r_n} tal que a seqüência $k(x_{r_n})$ é convergente em F.

Demonstração: a) $\Rightarrow$ b): Seja $L \subset E$ um conjunto limitado; então existe $a > 0$ tal que $L \subset aB = B_a$ e portanto $k(L) \subset ak(B)$ donde segue-se que $k(L)$ é relativamente compacto pois $k(B)$ e portanto $ak(B)$ o é.

b) $\Rightarrow$ c): $\{x_n | n \in N\}$ sendo um subconjunto limitado de E então $\{k(x_n) \mid n \in N\}$ é um subconjunto relativamente compacto de F e do corolário do Teorema 1.1 segue-se que a seqüência $k(x_n)$ tem então uma subseqüência convergente.

c) $\Rightarrow$ a): Da hipótese segue-se que tôda seqüência $x_n \in B$

contém uma subseqüência x_{r_n} tal que $k(x_{r_n})$ é convergente em F. Isto equivale a dizer que o conjunto $k(B)$ satisfaz a condição B') do corolário do Teorema 1.1 e êle é portanto relativamente compacto (Cf. a Observação 1) que segue aquele corolário).

Dizemos que uma aplicação linear $k: E \to F$ é compacta ou completamente contínua se ela satisfaz as condições equivalentes acima; como todo conjunto relativamente compacto de um espaço normado é limitado, segue-se do Lema 1.1 do Cap. I que tôda aplicação linear compacta é contínua.

São de verificação imediata as seguintes propriedades:

* 1.4 - O conjunto das aplicações lineares compactas de E em F é um subespaço vetorial de $L(E,F)$ (segue da propriedade c) da Proposição 1.3).

1.5 - Sejam E_1, E, F, F_1 espaços normados, $u \in L(E_1,E)$, $v \in L(F,F_1)$; se $k \in L(E,F)$ é compacta então $v \circ k \circ u \in L(E_1,F_1)$ é compacta.

1.6 - Se $k \in L(E,F)$ é compacta então a restrição k_o de k a um subespaço vetorial E_o de E também é compacta.

1.7 - Se $k \in L(E,F)$ tem pôsto finito, isto é, se $k(E)$ tem dimensão finita, então k é compacta; em particular, se $\dim E$ é finita tôda aplicação linear de E em F é compacta.

EXERCÍCIO 1.6 - Seja $K(t,s) = \sum_{r=1}^{n} x_r(s)y_r(t)$ onde $x_r \in C([a,b])$ e $y_r \in C([c,d])$. Demonstrar que o operador $k:C([a,b]) \to C([c,d])$ definido pelo núcleo K (ver cap. I, 1.2) é compacto. [Sugestão: aplicar 1.7].

* 1.8 - A aplicação idêntica de um espaço normado E em si mesmo é compacta se, e sòmente se, E fôr de dimensão finita.

Demonstração: Segue do corolário da Proposição 1.9 do Cap. I.

EXERCÍCIO 1.7 - Se $k \in L(E,F)$ é compacta demonstrar que $k(E)$ é um subespaço separável de F. [Sugestão: aplicar o exercício 1.1].

1.9 - Seja $k \in L(E,F)$ compacta e $\hat{k} \in L(\hat{E},\hat{F})$ sua extensão contínua de $\hat{E}$ (completado de E) em $\hat{F}$. Então $k(\hat{E}) \subset F$ e $\hat{k} \in L(\hat{E},F)$ é compacta.

Demonstração: Por hipótese $\overline{k(B)}$ é um subconjunto compacto de F. Da continuidade de $\hat{k}$ segue-se que $\hat{k}(\hat{B}) \subset \tilde{k}(B) = k(B) \subset F$ e portanto $\hat{k}(\hat{E}) \subset F$.

Daí segue-se em particular, quando $F = E$:

1.10 - Se $k \in L(E)$ é compacta então $\hat{k}(\hat{E}) \subset E$ e k e $\hat{k}$ têm mesmos autovalores (não nulos) e autovetores.

Exemplos de operadores compactos:

EXEMPLO K 1 - Seja $E = C([a,b])$ e $F = C([c,d])$; seja

$$K:(t,s) \in [c,d]\times[a,b] \mapsto K(t,s) \in \mathbb{C}$$

uma função contínua. Para todo $x \in C([a,b])$ definimos $y = k(x) \in C([c,d])$ por

$$(*) \qquad y(t) = (kx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds \quad \text{onde} \quad t \in [c,d].$$

Em I.1.2 já vimos que $k \in L(E,F)$. Para demonstrar que k é compacto vamos demonstrar que $k(B)$ é um subconjunto relativamente compacto de $C([c,d])$; para isto, pelo Teorema de Ascoli, é suficiente demonstrar que

1) $k(B)$ é equicontínuo;

2) para todo $t_o \in [c,d]$ o conjunto

$$k(B)(t_o) = \{(kx)(t_o) \in \mathbb{C} | x \in B\}$$

é limitado em $\mathbb{C}$.

<u>Demonstração de 1)</u>: Da continuidade uniforme de K segue-se que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$

tal que para todo $s \in [a,b]$ e $t_1, t_2 \in [c,d]$ com $|t_1 - t_2| < \delta$ temos $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < e$.
De $|y(t_1) - y(t_2)| \leqq \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)||x(s)|ds$ segue-se então que para $|t-t_o| < \delta$ e $x \in B$ temos

$$|(kx)(t) - (kx)(t_o)| \leqq e(b-a)$$

o que prova a equicontinuidade de $k(B)$.

Demonstração de 2): Para todo $x \in B$ e $t_o \in [c,d]$ temos

$$|(kx)(t_o)| \leqq \int_a^b |K(t_o,s)||x(s)|ds \leqq \int_a^b |K(t_o,s)|ds \ .$$

EXERCÍCIO 1.8 - Sejam abertos limitados $U \subset R^n$ e $V \subset R^m$ e uma função contínua $K:\bar{V}\times\bar{U} \to \mathbb{C}$. Demonstrar que o operador integral k de $C(\bar{U})$ em $C(\bar{V})$ definido pelo núcleo K é compacto.

EXEMPLO K 2 - Dado $1 \leqq p < \infty$ seja $E = C_{L_p}([a,b])$ e $F = C([c,d])$. Consideremos o mesmo operador k definido no Exemplo K 1. Dado

$$B = \{x \in C_{L_p}([a,b]) \mid \|x\|_p \leqq 1\},$$

para demonstrar que $k(B)$ é um subconjunto relativamente compacto de $C([c,d])$ é suficiente, pelo Teorema de Ascoli demonstrar que

1) $k(B)$ é equicontínuo;

2) para todo $t_o \in [c,d]$ o conjunto $k(B)(t_o)$ é limita

do em C.

<u>Demonstração de 1)</u>: Conservando as notações do Exemplo K1 temos para todo $x \in B$ e $t, t_o \in [c,d]$ com $|t-t_o| < \delta$

$$|(kx)(t)-(kx)(t_o)| \leqq \int_a^b |K(t,s)-K(t_o,s)|\,|x(s)|ds$$

$$\overset{\dagger}{\leqq} \left[\int_a^b |K(t,s)-K(t_o,s)|^{p'} ds\right]^{\frac{1}{p'}} \|x\|_p \leqq \epsilon(b-a)^{\frac{1}{p'}}.$$

<u>Demonstração de 2)</u>: Para $x \in B$ temos

$$|(kx)(t_o)| \leqq \int_a^b |K(t_o,s)|\,|x(s)|ds \leqq \left[\int_a^b |K(t_o,s)|^{p'} ds\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

OBSERVAÇÕES: 1) Como $C([a,b])$ é denso em $L_p([a,b])$ segue-se de 1.9 que (*) ainda define um operador compacto de $L_p([a,b])$ em $C([c,d])$.

2) A aplicação idêntica $C([c,d]) \hookrightarrow C_{L_p}([c,d])$ sendo contínua, segue-se de 1.5 que (*) ainda define um operador compacto de $C_{L_p}([a,b])$ em $C_{L_p}([c,d])$ e de $L_p([a,b])$ em $C_{L_p}([c,d])$.

EXERCÍCIO 1.9 - Dado $1 < p \leq \infty$, seja $E = C_{L_p}([a,b])$ e $F = C([a,b])$. Para todo $x \in E$ definimos $(Jx)(t) = \int_a^t x(s)ds$ onde $t \in [a,b]$. Demonstrar que J é um operador linear compacto de E em F.

---

† Aplicando a desigualdade de Hölder.

EXERCÍCIO 1.10 - Seja E um espaço normado e F um espaço de Banach.

* a) Seja $T \in L(E,F)$ tal que existe uma seqüência de operadores compactos $k_n \in L(E,F)$ tal que $\|T-k_n\| \to 0$. Demonstrar que T é compacto.

b) Concluir que todo operador $T \in L(E,F)$ que é o limite (na norma de $L(E,F)$) de operadores de pôsto finito é compacto.

§2 - Operadores hermitianos

A - Formas sesquilineares

Lembremos que dado um espaço vetorial E sôbre K ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) dizemos que uma forma

$$f:(x,y) \in E\times E \mapsto f(x,y) \in K$$

é <u>sesquilinear</u> (<u>bilinear</u> se $K = \mathbf{R}$) se temos

$$f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y), \quad f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$$
$$f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1) + f(x,y_2), \quad f(x,\lambda y) = \bar{\lambda} f(x,y)$$

onde $\lambda \in K$ e $x,y,x_1,x_2,y_1,y_2 \in E$.

EXEMPLOS: 1) Se f é uma forma sesquilinear sôbre E então $f^*(x,y) = \overline{f(y,x)}$ define uma forma sesquilinear sôbre E e $f^{**} = f$.

2) Se f é uma forma sesquilinear sôbre E e $A:E \to E$ uma transformação linear então $f_A(x,y) = f(Ax,y)$ define uma forma sesquilinear sôbre E. No caso particular em que f é o produto interno de um espaço pré-hilbertiano E escrevemos $\varphi_A(x,y) = (Ax|y)$ e $\psi_A(x,y) = (x|Ay)$.

Lembremos os seguintes resultados:

2.1 - A <u>fórmula de polarização</u>: se f é uma forma sesquilinear definida sôbre E então temos

no caso real: $2[f(x,y)+f(y,x)] = f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y)$

no caso complexo: $4f(x,y) = f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y) +$
$$+ if(x+iy,x+iy) - if(x-iy,x-iy).$$

<u>Demonstração</u>: Desenvolver os segundos membros.

PROPOSIÇÃO 2.2 - Sejam $E_1,\dots,E_n$ e F espaços normados e $f:E_1 \times \dots \times E_n \to F$ uma aplicação n-linear; são equivalentes as seguintes propriedades:

1) f é contínua.

2) $\sup\{\|f(x_1,\dots,x_n)\| \mid x_i \in E_i,\ \|x_i\| \leq 1;\ i=1,\dots,n\} \leq M < \infty$.

3) $\inf\{C \mid \|f(x_1,\dots,x_n)\| \leq C\|x_1\| \dots \|x_n\|;\ x_i \in E_i, i=1,\dots,n\} \leq M < \infty$.

<u>Demonstração</u>: 1) $\Rightarrow$ 2): f sendo contínua na origem, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$\|x_1\| < \delta, \ldots, \|x_n\| < \delta$ implica $\|f(x_1,\ldots,x_n\| < e$ e portanto $\|x_1\| \leq 1,\ldots,\|x_n\| \leq 1$ implica $\|f(x_1,\ldots,x_n\| \leq \frac{e}{\delta^n}$. É imediato que 2) $\Rightarrow$ 3). 3) $\Rightarrow$ 1): Queremos demonstrar que f é contínua em todo ponto $(x_1^o,\ldots,x_n^o) \in E_1 \times\ldots\times E_n$; isto segue-se de

$$\|f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1^o,\ldots,x_n^o)\| =$$

$$= \|\sum_{i=1}^{n}[f(x_1^o,\ldots,x_{i-1}^o,x_i,\ldots,x_n)-f(x_1^o,\ldots,x_i^o,x_{i+1},\ldots,x_n)]\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\|f(x_1^o,\ldots,x_{i-1}^o,x_i,\ldots,x_n)-f(x_1^o,\ldots,x_i^o,x_{i+1},\ldots,x_n)\|$$

$$\leq M \sum_{i=1}^{n}\|x_1^o\|\ldots\|x_{i-1}^o\|\|x_i-x_i^o\|\|x_{i+1}\|\ldots\|x_n\|.$$

Indicando com $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ o espaço vetorial das aplicações n-lineares contínuas de $E_1 \times\ldots\times E_n$ em F segue-se da Proposição 2.5 a) do Cap. I que

$$f \in L(E_1,\ldots,E_n;F) \mapsto \|f\| = \sup\{\|(x_1,\ldots,x_n)\| \mid x_i \in E,$$
$$\|x_i\| \leq 1, \quad i = 1,\ldots,n\} =$$
$$= \inf\{C \mid \|f(x_1,\ldots,x_n)\| \leq C\|x_1\|\ldots\|x_n\|, \; x_i \in E, \; i=1,\ldots,n\}$$

define uma norma em $L(E_1,\ldots,E_n;F)$. Temos portanto

$$\|f(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \|f\|\|x_1\|\ldots\|x_n\| .$$

É imediato que dado um espaço pré-hilbertiano E vale um resultado análog para formas sesquilineares

$f: E \times E \to C$ e definimos então

$$\|f\| = \sup\{|f(x,y)| \mid \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1\} .$$

PROPOSIÇÃO 2.3 - Seja E um espaço pré-hilbertiano e $A \in L(E)$; consideremos a forma sesquilinear

$$(x,y) \in E \times E \to \phi_A(x,y) = (Ax|y) \in C$$

Temos $\|\phi_A\| = \|A\|$, isto é,

$$\sup\{|(Ax|y)| \mid \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1\} = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|Ax\| .$$

<u>Demonstração</u>: De

$$|\phi_A(x,y)| = |(Ax|y)| \leqq \|Ax\|\|y\| \leqq \|A\|\|x\|\|y\|$$

segue-se que $\|\phi_A\| \leqq \|A\|$; por outro lado temos

$$\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = \phi_A(x,Ax) \leqq \|\phi_A\| \|x\| \|Ax\|$$

e portanto $\|Ax\| \leqq \|\phi_A\| \|x\|$ isto é, $\|A\| \leqq \|\phi_A\|$.

COROLÁRIO - Consideremos a forma sesquilinear $\psi_A(x,y) = (x|Ay)$ temos $\|\psi_A\| = \|A\| = \|\phi_A\|$.

B - Adjunto

Seja E um espaço pré-hilbertiano e A uma transformação linear de E em E. Dizemos que uma transformação linear A^* de E em E é <u>adjunta</u> de A se para quaisquer $x,y \in E$ temos $(Ax|y) = (x|A^*y)$. É imediato que o adjunto de A, quando existe, é único e que $A^{**} = A$.

EXEMPLOS: A1 - Seja $E = C_{L_2(\rho)}([a,b])$ e $K:[a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Consideremos o operador linear $k:E \to E$ definido por $(kx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\rho(s)ds$ onde $x \in C([a,b])$ e $t \in [a,b]$.
Temos $(k^*x)(t) = \int_a^b K^*(t,s)x(s)\rho(s)ds$ onde $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$

De fato: $(kx|y)_\rho = \int_a^b [\int_a^b K(t,s)x(s)\rho(s)ds]\overline{y(t)}\rho(t)dt = \int_a^b x(s)\overline{[\int_a^b K^*(s,t)y(t)\rho(t)dt]}\rho(s)ds = (x|k^*y)_\rho$.

A2 - Seja $E = \mathbb{C}^n$, $A \in L(\mathbb{C}^n)$ e (a_{ji}) $i,j=1,\dots,n$ a matriz de A em relação à base canônica de $\mathbb{C}^n$ [isto é, $a_{ji} = (Ae_i|e_j)$ ou $Ae_i = \sum_{j=1}^n e_j a_{ji}$ ou ainda $Ax = y$ com $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i$]. Então a matriz adjunta (a^*_{ji}) onde $a^*_{ji} = \overline{a}_{ij}$ é a matriz de A^* em relação à mesma base.

De fato: $a^*_{ji} = (A^*e_i|e_j) = (e_i|Ae_j) = \overline{(Ae_j|e_i)} = \overline{a}_{ij}$

PROPOSIÇÃO 2.4 - Seja E um espaço de Hilbert e f uma forma sesquilinear contínua definida sôbre E; então existe uma e uma só transformação $B \in L(E)$ tal que $f(x,y) = (x|By)$ para $x,y \in E$.

<u>Demonstração</u>: De $|f(x,y)| \leq \|f\| \, \|x\| \, \|y\|$ segue-se que para todo $y \in E$ a forma linear $x \in E \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{C}$

é contínua e pelo Teorema de Riesz existe um e um só elemento de E, elemento êste que indicamos por By, tal que $f(x,y) = (x|By)$, para todo $x \in E$. É imediato que a aplicação $y \in E \longmapsto By \in E$ é linear e contínua ($\|B\| \leq \|f\|$; Cf. a demonstração de $\|A\| \leq \|\phi_A\|$ em 2.3).

Da proposição precedente segue-se o

TEOREMA 2.5 - Seja E um espaço de Hilbert; para todo A em $L(E)$ existe um e um só $A^* \in L(E)$ tal que $(Ax|y) = (x|A^*y)$ para $x,y \in E$.

C - Operadores hermitianos

DEFINIÇÕES - Dizemos que uma forma sesquilinear f definida sôbre um espaço vetorial E é <u>hermitiana</u> (<u>simétrica</u>, no caso real) se para quaisquer $x,y \in E$ temos $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$. Dizemos que uma transformação linear A de um espaço pré-hilbertiano E é <u>hermitiana</u> (<u>simétrica</u> no caso real) se a forma sesquilinear φ_A o fôr, isto é, se para quaisquer $x,y \in E$ temos $(Ax|y) = (x|Ay)$.

EXEMPLOS: 1) Do Exemplo A1 segue que o operador k definido pelo núcleo K é hermitiano se e sòmente se o núcleo fôr hermitiano, isto é, se temos $K(s,t) =$

$= \overline{K(t,s)}$ para quaisquer $s,t \in [a,b]$.

2) Do Exemplo A2 segue que o operador A definido pela matriz (a_{ji}) é hermitiano se e sòmente se a matriz fôr hermitiana, isto é, se temos $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i,j=1,\ldots,n$.

2.6 - Seja f uma forma sesquilinear sôbre o espaço vetorial complexo E. São equivalentes as seguintes propriedades:

1) f é hermitiana;

2) $f^* = f$;

3) $f(x,x) \in \mathbf{R}$ para todo $x \in E$.

Demonstração: É imediato que 1) ⇒ 2) e 2) ⇒ 3); 3) ⇒ 1) segue-se da fórmula de polarização.

OBSERVAÇÃO - O resultado precedente não vale para espaços vetoriais reais: a forma

$$(x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longmapsto f(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 \in \mathbf{R}$$

é tal que $f(x,x) = 0 \in \mathbf{R}$ para todo $x \in \mathbf{R}^2$, mas f não é simétrica.

Da fórmula de polarização ainda segue-se que

2.7 - Dada uma forma sesquilinear (simétrica no caso real) f definida sôbre E se temos $f(x,x) = 0$ para todo $x \in E$ então $f \equiv 0$.

De 2.7 segue-se que

2.8 - Dado uma transformação linear (simétrica no caso real) A de um espaço pré-hilbertiano E então $(Ax|x) = 0$ para todo $x \in E$ implica $A = 0$.

De 2.6 segue

2.9 - Seja E um espaço pré-hilbertiano complexo e A uma transformação linear de E; são equivalentes as seguintes propriedades:

1) A é hermitiana
2) existe A^* e $A^* = A$
3) $(Ax|x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in E$

2.10 - Os autovalores de um operador hermitiano são reais e autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração: Seja $Ax = \lambda x$ e $Ay = \mu y$ com $\lambda \neq \mu$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. A 1ª afirmação segue de $\lambda\|x\|^2 = (\lambda x|x| = (Ax|x) = (x|Ax) = \overline{\lambda}\|x\|^2$ e a 2ª segue de $\lambda(x|y) = (Ax|y) = (x|Ay) = \mu(x|y)$.

→ EXERCÍCIO 2.1 - Determinar se os operadores que seguem são hermitianos:

a) $x \in E = C_{L_2}([a,b]) \mapsto \alpha x \in E$ onde $\alpha(t) = t$, $t \in [a,b]$.

b) $x \in E = C_{L_2}([a,b]) \mapsto \beta x \in E$ onde $\beta(t) = it^2$, $t \in [a,b]$.

c) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in C^2 \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in C^2$.

d) $x \in \mathcal{D}_{L_2}(T) \mapsto x' \in \mathcal{D}_{L_2}(T)$ onde $\mathcal{D}_{L_2}(T)$ indica o espaço $\mathcal{D}(T)$ das funções definidas na reta a valores complexos que são infinitamente deriváveis, periódicas e de período 1 e no qual consideramos o produto interno induzido por $C_{L_2}([0,1])$.

PROPOSIÇÃO 2.11 - Seja E um espaço pré-hilbertiano e f uma forma hermitiana contínua definida em E. Temos

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x,x)| ,$$

isto é,

$$\sup\{|f(x,y)| \mid \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1\} = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x,x)| .$$

Demonstração: Seja $s_f = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x,x)|$; é evidente que temos $s_f \leqq \|f\|$. Para demonstrar a desigualdade $\|f\| \leqq s_f$ é suficiente mostrar que dados $x,y \in E$ com $\|x\| \leqq 1$, $\|y\| \leqq 1$ temos $|f(x,y)| \leqq s_f$: se $f(x,y)$ é real então pela fórmula de polarização temos (quando $K = C$ a parte imaginária do segundo membro é necessàriamente nula):

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y)]$$

e portanto

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leqq \tfrac{1}{4}\,|f(x+y,x+y)| + \tfrac{1}{4}\,|f(x-y,x-y)| \\ &\leqq \tfrac{1}{4}\,s_f[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2]\ ^{\dagger} \\ &= \tfrac{1}{2}\,s_f[\|x\|^2 + \|y\|^2] \leqq s_f\ .\end{aligned}$$

Se $f(x,y)$ não é real seja μ tal que

$$|f(x,y)| = \mu f(x,y) = f(\mu x,y)\ ;$$

μ é um número complexo e $|\mu| = 1$; portanto $\|\mu x\| =$ $= \|x\| \leqq 1$ e do raciocínio precedente segue-se que $|f(x,y)| = f(\mu x,y) \leqq s_f$.

CQD

COROLÁRIO - Seja $A \in L(E)$ hermitiano; então temos

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqq 1} |(Ax|x)|\ .$$

<u>Demonstração</u>: Se A é hermitiano a forma sesquilinear $\phi_A(x,y) = (Ax|y)$ é hermitiana; o resultado segue-se pois da proposição.

EXERCÍCIO 2.2 - a) Seja f uma forma sesquilinear definida num espaço pré-hilbertiano complexo E; demonstrar que

$$\|f\| \leqq 2s_f\ .$$

---

† aplicamos a lei do paralelogramo.

[Sugestão: aplicar a f a fórmula de polarização e usar a lei do paralelogramo.]

b) Seja $E = \mathbb{C}^2$ com o produto interno habitual e seja ϕ_A a forma sesquilinear definida pelo operador

$$A : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \longmapsto Ax = (x_2, 0) \in \mathbb{C}^2 .$$

Demonstrar que

$$\|\phi_A\| = \|A\| = 2 \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax|x)| = 2\, s_{\phi_A} .$$

2.12 - Seja E um espaço pré-hilbertiano e A, B transformações lineares de E; valem as seguintes propriedades:

a) Se existem A^* e B^* então $(A+B)^* = A^* + B^*$.

b) Se existe A^* então $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.

c) Se existe A^* então $A^{**} = A$.

d) Se existem A^* e B^* então $(AB)^* = B^* A^*$.

e) Se existe $(A^{-1})^*$ ou $(A^*)^{-1}$ então $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

f) Se A é contínua e existe A^* então $\|A^*\| = \|A\|$.

De fato: do corolário da Proposição 2.3 segue-se que

$$\|A^*\| = \|\psi_{A^*}\| = \|\phi_A\| = \|A\| .$$

g) Se A é contínua e existe A^* então $\|A^* A\| = \|A\|^2 = \|AA^*\|$.

De fato: de f) segue-se que $\|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$ e por outro lado temos $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} (Ax|Ax)$ $= \sup_{\|x\|\leq 1} (A^*Ax|x) \leq \|A^*A\|$.

h) Se existe A^* então A^*A, AA^* e $A+A^*$ e $i(A-A^*)$ são hermitianos.

i) Se existe A^* e se F é um subespaço vetorial de E invariante por A (isto é, $A(F) \subset F$) então $F^{\perp}$ é invariante por A^*.

De fato: dado $y \in F^{\perp}$, isto é, tal que $(y|x) = 0$ para todo $x \in F$, então $A^*y \in F^{\perp}$ pois $(A^*y|x) = $ $= (y|Ax) = 0$ para todo $x \in F$ já que então $Ax \in F$.

j) Se existe A^* e se F é um subespaço invariante por A e por A^*, então $F^{\perp}$ é invariante por A e por A^*.

De fato: segue-se de c) e i).

k) Se existe A^* e se F é um subespaço invariante por A e por A^* então $(A_{|F})^* = A^*{}_{|F}$.

* D - Operadores normais

PROPOSIÇÃO 2.13 - Dada uma transformação linear A de um espaço pré-hilbertiano E e tal que A^* existe, são equivalentes as propriedades:

1) $AA^* = A^*A$;

2) para todo $x \in E$ temos $\|A^*x\| = \|Ax\|$.

Demonstração: Temos sempre $\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (A^*Ax|x)$ e $\|A^*x\|^2 = (A^*x|A^*x) = (AA^*x|x)$. Portanto temos $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in E$ se, e sòmente se, $((AA^*-A^*A)x|x) = 0$ para todo $x \in E$; de 2.8 (no caso real lembremos que AA^*-A^*A é sempre uma transformação simétrica) segue-se que a última igualdade é equivalente a $AA^*-A^*A = 0$. CQD

Dizemos que um operador é <u>normal</u> se êle satisfaz as condições equivalentes acima. Todo operador hermitiano é normal.

COROLÁRIO 1 - Se A é normal então $\|A^2\| = \|A\|^2$.

De fato: tomando $x = Ay$ em $\|Ax\| = \|A^*x\|$ vem $\|A^2y\| = \|A^*Ay\|$ para todo $y \in E$ e portanto $\|A^2\| = \|A^*A\|$; o resultado segue-se de 2.12 g).

COROLÁRIO 2 - Seja A normal; x é um autovetor de A correspondente ao autovalor λ se, e sòmente se, x é um autovetor de A^* correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}$.

De fato: Se A é normal, $A-\lambda$ também o é; o resultado segue-se de

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \|(A-\lambda)x\| = 0 \Leftrightarrow \|(A-\lambda)^*x\| = 0 \Leftrightarrow A^*x-\bar{\lambda}x = 0.$$

COROLÁRIO 3 - Seja A normal; se x e y são autovetores de A, correspondentes a autovalores distintos λ e μ então $x \perp y$.

De fato: do corolário precedente segue-se que

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (Ax|y) = (x|A^*y) = (x|\bar{\mu}y) = \mu(x|y);$$

$\lambda \neq \mu$ implica portanto $(x|y) = 0$.

COROLÁRIO 4 - Seja A normal; se e é um autovetor de A então $\{e\}^{\perp}$ é invariante por A e por A^*.

Demonstração: Segue-se do Corolário 2 e de 2.12 j).

COROLÁRIO 5 - Se A é normal e se F é um subespaço invariante por A e por A^* então $A_{|F}$ é normal.

Demonstração: Segue-se de 2.12 k).

EXERCÍCIO 2.3 - a) No espaço de Hilbert $\ell_2(Z)$ seja A a transformação linear definida por

$Ae_n = e_{n+1}$, $n \in Z$; determinar A^* e demonstrar que A é normal.

b) A restrição B de A ao subespaço $\ell_2(N)$ é um operador normal?

c) Demonstrar que e_1 é um autovetor de B^* mas não é autovetor de B.

EXERCÍCIO 2.4 - Verificar quais dos operadores do Exercício 2.1 são normais.

§3 - Teoria espectral dos operadores hermitianos compactos

‡ A - Teoria espectral dos operadores normais em espaços de Hilbert complexos de dimensão finita.

3.1 - Seja E um espaço vetorial complexo de dimensão finita n. Tôda transformação linear A de E tem pelo menos um autovalor.

<u>Demonstração</u>: Considerando uma base $e_1,\dots,e_n$ de E e a matriz (a_{ji}) de A em relação a esta base, então tôda raiz λ do polinômio $P(\lambda) = \det|a_{ji} - \lambda\delta_{ji}|$ é um autovalor de A e uma solução $x = (x_1,\dots,x_n)$ não trivial do sistema de equações $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \lambda x_j$ $j = 1,2,\dots,n$ é um autovetor de A.

Dado um espaço vetorial E sôbre um corpo K e uma transformação linear A de E, para todo $\lambda \in K$ seja

$$A_\lambda = N(\lambda;A) = (A-\lambda)^{-1}(0) = \{x \in E | Ax = \lambda x\} ,$$

isto é, o subespaço de E formado pelos autovetores correspondentes ao autovalor λ (podemos ter $A_\lambda = \{0\}$).

3.2 - Dadas duas transformações lineares A e B de E tais que $AB = BA$, para todo $\lambda \in K$, A_λ é um subespaço invariante por B.

Demonstração: Dado $x \in A_\lambda$ temos $ABx = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx$ e portanto $Bx \in A_\lambda$.

3.3 - Seja E um espaço vetorial complexo de dimensão finita e A,B transformações lineares de E tais que $AB = BA$; então A e B têm um autovetor comum.

Demonstração: Por 3.1 existe um autovalor λ_o de A e por 3.2 A_{λ_o} é um subespaço vetorial de E que é invariante por B. Por 3.1 a restrição de B a A_{λ_o} tem autovalor e um autovetor correspondente é então um autovetor comum a A e a B.

TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES NORMAIS - Seja E um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita n e seja $A \in L(E)$; existe uma base o.n. $e_1,\dots,e_n$ de E em relação à qual a matriz de A é diagonal [isto é, $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i=1,\dots,n$, ou $(Ae_i|e_j) = \lambda_i\delta_{ij}$ ou ainda $Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ onde $x_i = (x|e_i)$] se, e sòmente se, A é normal.

Demonstração: Se existe uma base ortonormal $e_1,\dots,e_n$ de E tal que $Ae_i = \lambda_i e_i$ então $A^*e_i = \overline{\lambda}_i e_i$ (de fato: para todo $j = 1,\dots,n$ temos $(A^*e_i-\overline{\lambda}_i e_i|e_j) = (e_i|Ae_j-\lambda_i e_j) = (e_i|(\lambda_j-\lambda_i)e_j) = 0$) e portanto $AA^*e_i = |\lambda_i|^2 e_i = A^*Ae_i$, $i = 1,\dots,n$ donde segue-se que $AA^* = A^*A$, isto é, A é normal. Vamos demonstrar a recíproca por indução sôbre a dimensão n de E: o resultado é trivial para $n = 1$; se $AA^* = A^*A$, segue-se de 3.3 que A e A^* têm um autovetor comum e_1 e $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. [$A^*e_1 = \bar{\lambda}_1 e_1$, Cf. o Corolário 2 da Proposição 2.13]. Do Corolário 4 de 2.13 segue-se que $\{e_1\}^\perp$ é um subespaço vetorial de E, de dimensão $n-1$, que é invariante por A e A^*; da hipótese de indução aplicada à restrição de A a $\{e_1\}^\perp$ (ver corol. 5 de 2.13) segue-se que existe uma base o.n. $e_2,\ldots,e_n$ de $\{e_1\}^\perp$ tal que

$$Ae_i = \lambda_i e_i \;, \quad i=2,\ldots,n$$

o que completa a demonstração.

Lembrando que todo operador hermitiano é normal e que êle tem sòmente autovalores reais (2.1) segue-se o

TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES HERMITIANOS - Seja E um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita n e seja $A \in L(E)$; A é hermitiano se, e sòmente se, existe uma base o.n. de E em relação à qual a matriz de A é diagonal <u>real</u>.

O teorema precedente ainda vale para espaços de Hilbert reais (de dimensão finita); a demonstração pode ser feita por "complexificação" ou diretamente, como acima usando 3.6 que se segue.

REDUÇÃO DE UMA FORMA HERMITIANA A EIXOS PRINCIPAIS - Seja E um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita n e seja f um forma sesquilinear hermitiana definida sôbre E; existe uma base o.n. $e_1,\ldots,e_n$ de E e existem números reais $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tais que tenhamos

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \bar{y}_i \;.$$

Demonstração: Basta lembrar que existe um e um só operador linear $A \in L(E)$ tal que $f(x,y) = (Ax|y)$ e que A é hermitiano (Cf. 2.4 e 2.9); a seguir aplicamos o resultado precedente.

→ EXERCÍCIO 3.1 - Dizemos que um operador hermitiano A [uma forma hermitiana f] é positivo se temos $(Ax|x) \geqq 0$ $[f(x,x) \geqq 0]$ para todo $x \in E$.

a) Demonstrar que sôbre um espaço de Hilbert de dimensão finita uma forma hermitiana é positiva se, e sòmente se, todos os λ_i (quando reduzimos a forma a eixos principais) são positivos.

b) Demonstrar que tôda forma hermitiana sôbre um espaço de Hilbert de dimensão finita pode ser expressa como diferença de duas formas hermitianas positivas.

c) Demonstrar que um operador hermitiano sôbre um espaço de Hilbert de dimensão finita é positivo se, e sòmente se, todos os seus autovalores são positivos.

d) Demonstrar que todo operador hermitiano positivo A sôbre um espaço de Hilbert de dimensão finita tem uma raiz quadrada B (isto é, $B^2 = A$) que é um operador hermitiano positivo.

EXERCÍCIO 3.2 - Seja E um espaço de Hilbert complexo de dimensão finita n e $A, B \in L(E)$ dois operadores normais tais que $AB = BA$.

a) Demonstrar que existe uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de E em relação à qual A e B são simultâneamente diagonais. [Sugestão: por 3.3, A e B têm um autovetor comum e_1 que pelo Corolário 2 da Proposição 2.13 também é autovetor de A^* e B^*, e, por 2.12 i) $(e_1)^\perp$ é invariante por A, B, A^* e B^* e portanto podemos prosseguir por recorrência.]

b) Demonstrar que $AB^* = B^*A$. (Êste resultado não pode ser demonstrado de modo puramente algébrico).
[Sugestão: aplicar a).]

EXERCÍCIO 3.3 - Seja E um espaço de Hilbert complexo de dimensão n e $\mathcal{A} \subset L(E)$ um conjunto de operadores normais que comutam dois a dois; seja $[\mathcal{A}]$ o subespaço vetorial de $L(E)$ gerado por $\mathcal{A}$.

a) Demonstrar que os operadores de $[\mathcal{A}]$ são normais e comutam dois a dois. [Sugestão: aplicar o Exercício 3.2 b).]

b) Demonstrar que existe uma base ortonormal $e_1,\ldots,e_n$ de E em relação à qual todos os $A \in [\mathcal{A}]$ são diagonais. [Sugestão: é suficiente diagonalizar simultâneamente todos os operadores $A_1,\ldots,A_m$ de uma base de $[\mathcal{A}]$; para isto aplicar judiciosamente 3.3 (Cf. também o Exercício 3.6).]

B - Teoria espectral dos operadores hermitianos compactos

Seja E um espaço pré-hilbertiano.

3.4 - Dado um autovalor λ de um operador $A \in L(E)$ temos $|\lambda| \leqq \|A\|$.

De fato: de $Ax = \lambda x$ segue-se que

$$|\lambda| \, \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leqq \|A\| \, \|x\| .$$

Dado $x \in E$ com $\|x\| = 1$ temos $|(Ax|x)| \leqq \|A\|$ mas

3.5 - Seja $e \in E$ com $\|e\| = 1$; temos $|(Ae|e)| = \|A\|$ se e sòmente se, e é um autovetor de A de autovalor $\lambda = (Ae|e)$ com $|\lambda| = \|A\|$.

Demonstração: Seja $e \in E$ com $\|e\| = 1$ tal que $|(Ae|e)| = \|A\|$; tomemos $\lambda = (Ae|e)$; temos $|\lambda| = \|A\|$ e

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|Ae-\lambda e\|^2 &= (Ae-\lambda e|Ae-\lambda e) \\
&= \|Ae\|^2 - (Ae|\lambda e) - (\lambda e|Ae) + |\lambda|^2 \\
&= \|A\|^2 - \overline{(Ae|e)}(Ae|e) - (Ae|e)\overline{(Ae|e)}+\|A\|^2 = 0.
\end{aligned}
$$

A recíproca é trivial.

De 3.5 e do corolário da Proposição 2.11 segue-se que

3.6 - Seja A um operador hermitiano contínuo; a função $x \in \dot{B} = \{x \in E \mid \|x\| = 1\} \longmapsto |(Ax|x)| \in R$ atinge seu máximo num ponto $e \in \dot{B}$ (e então êste máximo é $\|A\|$) se, e sòmente se, e é um autovetor de A correspondente ao autovalor $\|A\|$ ou $-\|A\|$.

Se A é um operador hermitiano de E lembremos que todos os autovalores de A são reais e que autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais (2.10); além disto segue-se de 2.12 j) que se E_o é um subespaço de E invariante por A então $E_o^{\perp}$ também é invariante por A.

TEOREMA 3.7 - Seja A um operador hermitiano compacto, $A \neq 0$; então $\|A\|$ ou $-\|A\|$ é um autovalor de A.

Demonstração: Vamos demonstrar que existe $y \neq 0$ com $Ay = \lambda y$ onde $|\lambda| = \|A\|$. Do corolário da Proposição 2.11 segue-se que existe uma seqüência $e_n \in E$ com $\|e_n\| = 1$ tal que $|(Ae_n|e_n)| \longmapsto \|A\|$; a seqüência $(Ae_n|e_n)$ sendo formada por números reais, podemos achar uma subseqüência que ainda indicamos pela mesma notação tal que $(Ae_n|e_n) \longrightarrow \lambda$ onde $\lambda = \|A\|$ ou $\lambda = -\|A\|$ e portanto $|\lambda| = \|A\|$. Temos

$$\begin{aligned}
0 \leqq \|Ae_n-\lambda e_n\|^2 &= (Ae_n-\lambda e_n \mid Ae_n-\lambda e_n) \\
&= \|Ae_n\|^2 - (Ae_n|\lambda e_n) - (\lambda e_n|Ae_n) + |\lambda|^2 \\
&\leqq \|A\|^2 - 2\lambda(Ae_n|e_n) + \|A\|^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

pois $(Ae_n|e_n) \to \lambda$. Temos portanto $\|Ae_n-\lambda e_n\| \to 0$; A sendo um operador compacto, existe uma subseqüência e_{r_n} da seqüência limitada e_n tal que Ae_{r_n} converge para um elemento $y \in E$. Temos então $\lambda e_{r_n} = Ae_{r_n} - (Ae_{r_n} - \lambda e_{r_n}) \to y$ e portanto $A(\lambda e_{r_n}) \longrightarrow Ay$; mas $A(\lambda e_{r_n}) = \lambda A(e_{r_n}) \to \lambda y$ e portanto $Ay = \lambda y$; de $\lambda e_{r_n} \to y$ segue-se que $\|y\| = \|\lambda e_{r_n}\| = |\lambda| \neq 0$ o que completa a demonstração.

TEOREMA 3.8 (Teorema espectral dos operadores hermitianos compactos) - Seja E um espaço pré-hilbertiano (real ou complexo) e A um operador hermitiano compacto definido em E, $A \neq 0$. Existe uma seqüência $\lambda_n \in R$ (finita ou infinita) de autovalores não nulos de A e uma seqüência e_n autovetores correspondentes que formam um conjunto o.n. tal que para todo elemento $x \in E$ temos

$$(*) \qquad Ax = \sum_n \lambda_n x_n e_n \qquad \text{onde} \qquad x_n = (x|e_n).$$

Temos $|\lambda_i| \geqq |\lambda_{i+1}|$; a seqüência contém todos os autovalores não nulos de A e se ela fôr infinita temos $|\lambda_n| \to 0$.

Dado um particular $\lambda = \lambda_m$ a dimensão do subespaço A_λ gerado pelos autovetores correspondentes ao autovalor λ é finita e é igual ao número de vêzes que o autovalor λ comparece na seqüência λ_n.

<u>Demonstração</u>: Indiquemos por λ_1 e e_1 o autovalor e o autovetor unitário correspondente de A cuja existência foi demonstrada no Teorema 3.7. Façamos $E_1 = E$ e $A_1 = A$; temos $|\lambda_1| = \|A_1\|$ e $E_2 = \{e_1\}^\perp$ é um subespaço de E_1 invariante por A_1. A restrição A_2 de A_1 a E_2 é um operador hermitiano compacto e novamente pelo Teorema 3.7 existe um autovalor λ_2 e um autovetor unitário correspondente e_2 de A_2 (e por conseguinte também de A) tal que $|\lambda_2| = \|A_2\| \leqq \|A_1\|$ segue-se que

$|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Repetindo êste processo obtemos sucessivamente autovalores não nulos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de A, com

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

autovetores correspondentes $e_1,\ldots,e_n$ formando um sistema o.n., subespaços $E_2, E_3,\ldots,E_{n+1}$ onde E_{i+1} indica o subespaço de E_i (ou de E) formado pelos vetores ortogonais a $e_1,\ldots,e_i$.

A) Se a restrição A_{n+1} de A a E_{n+1} fôr nula temos para todo $x \in E$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \quad \text{onde} \quad x_i = (x|e_i),$$

isto é, $A(E)$ é o subespaço de E gerado pelos vetores $e_1,\ldots,e_n$).

De fato: seja $\tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; então $(\tilde{x}|e_i) = 0$ para $i = 1,\ldots,n$ e por conseguinte $\tilde{x} \in E_{n+1}$ donde segue-se que $A\tilde{x} = 0$ e por conseguinte

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \, . \qquad \text{CQD}$$

B) Se para todo inteiro natural n a restrição A_{n+1} de A a E_{n+1} fôr sempre não nula então o processo acima nos dá uma seqüência infinita λ_n de autovalores não nulos de A com

$$|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \ldots \geqq |\lambda_n| \geqq \ldots$$

e um sistema o.n. $(e_n)_{n\in N}$ formado pelos autovetores correspondentes.

a) A seqüência decrescente $|\lambda_n|$ tende para 0: senão existiria um $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geqq \epsilon$ para todo $n \in \mathbf{N}$ e a seqüência e_n/λ_n seria então limitada $(\|e_n/\lambda_n\| \leqq \leqq 1/\epsilon)$ sem que a seqüência $A(e_n/\lambda_n) = e_n$ contenha uma subseqüência convergente, pois, ela é formada por vetores o.n. $(d(e_n,e_m) = \sqrt{2})$. Chegamos assim a uma contradição com a hipótese de que o operador A é compacto.

b) Para todo $x \in E$ temos $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$, isto é, para todo $x \in E$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$ é convergente para Ax: basta demonstrar que dado $x \in E$ e $\epsilon > 0$ existe um inteiro m_o tal que para $m \geqq m_o$ temos $\|Ax - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n e_n\| < \epsilon$. Seja $x^{(m+1)} = x - \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$; temos evidentemente $\|x^{(m+1)}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |x_n|^2 \leqq \|x\|^2$ (desigualdade de Bessel) e $x^{(m+1)} \in E_{m+1}$ pois, para $n \leqq m$ temos $(x^{(m+1)}|e_n) = 0$; de $\|A_{m+1}\| = |\lambda_{m+1}|$ segue-se então que

$$\|Ax^{(m+1)}\| \leqq \|A_{m+1}\|\|x^{(m+1)}\| \leqq |\lambda_{m+1}| \ \|x\|$$

e como a seqüência $|\lambda_n|$ tende monotônicamente para 0 basta tomar m_o tal que $|\lambda_{m_o}| \leqq \frac{\epsilon}{\|x\|}$ para que tenhamos $\|Ax - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n e_n\| = \|Ax^{(m+1)}\| \leqq \epsilon$ se $m \geqq m_o$.

c) Todo autovalor $\lambda \neq 0$ de A se encontra na seqüência λ_n: pois senão o autovetor correspondente e seria ortogonal a todos os e_n e de b) seguiria que $Ae = 0$ contra a hipótese de que $Ae = \lambda e \neq 0$.

d) Dado um autovalor $\lambda \neq 0$ que aparece p vêzes na seqüência λ_n então o subespaço gerado pelos autovetores correspondentes ao autovalor λ tem dimensão $\geqq p$, pois existem pelo menos p autovetores ortonormais correspondentes a λ. O subespaço não pode ter dimensão $> p$ pois senão existiria ainda um autovetor $\underline{e}$ correspondente a λ, ortogonal aos anteriores e a todos os e_n; como em c) seguiria então que $Ae = 0$.

COROLÁRIO 1 - Para quaisquer $x,y \in E$ temos $(Ax|y) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \bar{y}_n$.

<u>Demonstração</u>: Por (*) temos $(Ax|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n (e_n|y) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \bar{y}_n$.

$\ast\!\!\ast$ COROLÁRIO 2 - $|\lambda_n| = \sup\{|\frac{(Ax|x)}{(x|x)}| \mid (x|e_i) = 0,\ i=1,\dots,n-1\}$

Dizemos que um operador (simétrico, no caso real) A de um espaço pré-hilbertiano E é <u>positivo</u> se temos

$$(Ax|x) \geqq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in E \ ;$$

por 2.9 segue-se que então A é hermitiano; do Teorema

3.8 segue-se imediatamente o

COROLÁRIO 3 - Seja A um operador hermitiano compacto: A é positivo se, e sòmente se, todos os seus autovalores são positivos.

→ EXERCÍCIO 3.4 - a) Demonstrar que a soma de dois operadores positivos é um operador positivo.

b) Tentar demonstrar que o produto de dois operadores positivos que comutam é um operador positivo.

→ EXERCÍCIO 3.5 - Seja E um espaço de Hilbert.

a) Demonstrar que todo operador compacto positivo A tem uma raiz quadrada B (isto é, $B^2 = A$) que é um operador compacto positivo; êste resultado vale num espaço pré-hilbertiano?

b) Demonstrar que todo operador hermitiano compacto é a diferença de dois operadores compactos positivos que comutam.

→ EXERCÍCIO 3.6 - Seja E um espaço pré-hilbertiano e $\mathcal{A} \subset L(E)$ um conjunto de operadores hermitianos compactos que comutam dois a dois; demonstrar que existe uma família ortonormal $(e_i)_{i \in I}$ tal que para cada $A \in \mathcal{A}$ existe uma família de números reais $(\lambda_i^A)_{i \in I} \in$

$\in c_o(I)$ tal que para todo $x \in E$ temos

$Ax = \sum_{i\in I} \lambda_i^A x_i e_i \quad (x_i = (x_i|e_i))$ [diagonalização simultânea.] [Sugestão: considerar um elemento maximal $\{e_i | i\in I\}$ na classe de todos os conjuntos ortonormais de vetores que são simultâneamente autovetores de todos $A \in \mathcal{A}$; seja E_o o subespaço vetorial fechado gerado pelos e_i, $i\in I$. Para todo $A \in \mathcal{A}$ e $\lambda \neq 0$ temos $E_o \supset A_\lambda$ pois senão $A_\lambda \cap (E_o \cap A_\lambda)^\perp$, que é um subespaço vetorial de dimensão finita e invariante por todos $B \in \mathcal{A}$ conteria um autovetor e comum a todos $B \in \mathcal{A}$ (Cf. o Exercício 3.2) e ortogonal a todos e_i, $i\in I$, contra a hipótese da maximalidade de $\{e_i | i\in I\}$.]

* EXERCÍCIO 3.7 - Demonstrar que o produto de dois operadores compactos positivos que comutam é um operador compacto positivo. [Sugestão: aplicar 3.5 e 3.4 a).]

TEOREMA 3.9 - Com as notações do Teorema 3.8: dado $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n então o operador $\lambda - A$ tem um inverso contínuo definido em E; indicando êste inverso por $(\lambda - A)^{-1}$ então $x = (\lambda - A)^{-1} y$ é dado por

$$(**) \qquad x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n \quad \text{onde} \quad y_n = (y|e_n).$$

OBSERVAÇÃO - Quando os e_n formam uma base o.n. de E então usando o desenvolvimento $y = \sum_n y_n e_n$, segue de (**) que $y = \sum_n \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda} e_n$.

Demonstração: 1) Se a equação $\lambda x - Ax = y$ tem uma solução x, esta certamente é única e dada pela série acima pois de (*) vem

$$\lambda x - y = Ax = \sum_n \lambda_n x_n e_n$$

e efetuando o produto interno por e_m vem $\lambda x_m - y_m = \lambda_m x_m$, isto é, $x_m = \frac{y_m}{\lambda - \lambda_m}$ e portanto $\lambda x - y = \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n$, que equivale a (**).

2) É imediato também que se a série de (**) fôr convergente, o elemento x definido por ela satisfaz à equação $(\lambda - A)x = y$.

3) A série de (**) satisfaz à condição de Cauchy.

Demonstração: seja

$$\alpha = \sup_n \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right| \quad \text{e} \quad \beta = \sup_n \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right|$$

que são números finitos pois $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ e $|\lambda_n| \to 0$ (se a seqüência λ_n fôr finita o teorema é evidentemente trivialmente verificado); seja

$$v_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n \quad \text{e} \quad u_m = Av_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n \quad .$$

Temos

$$\|u_{m+p} - u_m\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 |y_n|^2 \leq \alpha^2 \sum_{n=m+1}^{m+p} |y_n|^2 \ .$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$$

sendo convergente, satisfaz à condição de Cauchy e a última relação mostra que o mesmo é verdade para a série (**). O espaço E porém não sendo suposto completo não podemos concluir que a série de (**) é convergente.

4) A série (**) que define x é convergente: por

$$\|v_m\|^2 = \sum_{n=1}^{m} \left|\frac{y_n}{\lambda - \lambda_n}\right|^2 \leq \beta^2 \sum_{n=1}^{m} |y_n|^2 \leq \beta^2 \|y\|^2$$

vemos que a seqüência v_m é limitada em E e A sendo um operador compacto existe então uma subseqüência v_{r_m} tal que a seqüência $u_{r_m} = Av_{r_m}$ seja convergente. Porém, se a seqüência de Cauchy u_m contém uma subseqüência convergente então ela mesma já é convergente, o que completa a demonstração da convergência da série (**).

5) De (**) vem $\|x\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|y\| + \frac{1}{|\lambda|}\alpha\|y\| = \left|\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\alpha\right| \|y\|$ o que prova que o operador $(\lambda - A)^{-1}$ é contínuo e que

$$\|(\lambda-A)^{-1}\| \leq \left[\frac{1}{|\lambda|} + \frac{\alpha}{|\lambda|}\right] = \frac{1}{|\lambda|}\left[1 + \sup_n \left|\frac{\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}\right|\right] .$$

TEOREMA 3.10 - Com as notações dos Teoremas 3.8 e 3.9:

Dado um operador hermitiano compacto A num espaço pré-hilbertiano E, e dado um autovalor $\lambda \neq 0$ de A uma condição necessária e suficiente para que a equação

$$\lambda x - Ax = y$$

tenha uma solução é que y seja ortogonal a todo autovetor de A associado a λ. As soluções x da equação acima são então os elementos da forma

$$(***) \qquad x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda-\lambda_n} e_n + z$$

onde z é qualquer autovetor associado a λ, isto é, $Az = \lambda z$.

<u>Demonstração</u>: Seja $\lambda x - Ax = y$; então $(x|\lambda z-Az) =$

$$= (x|\lambda z) - (x|Az) = (\lambda x|z) - (Ax|z) = (y|z)$$

e portanto para todo z tal que $Az = \lambda z$ temos $(y|z) = 0$. Como em 3.9 se demonstra fàcilmente que x é da forma (***) bastando lembrar que $y_n = (y|e_n) = 0$ se $\lambda_n = \lambda$ pois então $Ae_n = \lambda e_n$.

Recìprocamente, se $(y|z) = 0$ para todo z tal que $Az = \lambda z$, é imediato que todo elemento x da forma

(***) é uma solução de $\lambda x - Ax = y$.

A conjunção dos Teoremas 3.9 e 3.10 dá lugar à <u>alternativa de Fredholm</u>:

Seja E um espaço pré-hilbertiano (real ou complexo), A um operador hermitiano compacto definido em E e $\lambda \in K$ (**R** ou **C**, conforme estamos no caso real ou complexo), $\lambda \neq 0$; vale a seguinte alternativa:

ou a equação $\lambda x - Ax = y$ tem solução para todo $y \in E$; então esta solução é única, dada por (**) e λ não é um autovalor de A

ou a equação $\lambda x - Ax = 0$ tem solução não trivial; então o conjunto destas soluções forma um espaço vetorial de dimensão finita e a equação $\lambda x - Ax = y$ tem solução se e sòmente se y fôr ortogonal a tôda solução z da equação $\lambda z - Az = 0$; então as soluções x são dadas por (***) e λ é um autovalor de A.

OBSERVAÇÃO - Se $\lambda = 0$ a alternativa de Fredholm não vale: no espaço de Hilbert $\ell_2(N)$, o operador hermitiano compacto A que a todo $x = (x_n) \in \ell_2(N)$ associa o elemento $x' = Ax = (x'_n) \in \ell_2(N)$ onde $x'_n = \frac{1}{n} x_n$ é tal que $Az = 0$ implica $z = 0$ mas a equação $Ax = y$ onde $y_n = \frac{1}{n}$ não tem solução em $\ell_2(N)$.

<u>Referências</u>: [2], [4], [12], [14].

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

§1 - A equação integral de Fredholm com núcleo hermitiano

Vamos aplicar os resultados do ítem B do §3 do Capítulo III na resolução da equação integral de Fredholm de 2ª espécie

$$(F) \qquad \lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

com núcleo hermitiano (isto é, $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$) e contínuo.

EXERCÍCIO 1.1 - Seja $K:[a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ da forma $K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)b_i(s)$ onde $a_i, b_i \in C([a,b])$. Demonstrar que dado $y \in C([a,b])$ então $x \in C([a,b])$ é solução de (F) se e sòmente se $x(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{m} x_i a_i(t)$ onde $x_1,\dots,x_m$ é solução do sistema

$$\lambda x_i - \sum_{j=1}^{m} x_j K_{ji} = y_i \qquad i=1,\dots,m$$

onde $y_i = \int_a^b y(s)b_i(s)ds$ e $K_{ji} = \int_a^b a_j(s)b_i(s)ds$.

Consideremos o espaço pré-hilbertiano $E = C_{L_2}([a,b])$. Já vimos no Exemplo K 2 do §1 do Cap.III que o operador $k: x \in E \longmapsto kx \in E$ onde $(kx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ é compacto e no Exemplo 2) do ítem C do §2 do Cap.III vimos que o operador k é hermitiano se o núcleo K o fôr.

Indiquemos por λ_n a seqüência de autovalores não nulos de k, e por e_n o sistema o.n. correspondente de autofunções, cuja existência foi demonstrada no Teorema III.3.8. Temos pois

(1) $\quad ke_n = \lambda_n e_n$ isto é $\int_a^b K(t,s)e_n(s)ds = \lambda_n e_n(t) \quad (a \leq t \leq b)$

1.1 - Temos $\sum\limits_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds\, dt$.

<u>Demonstração</u>: Para todo $t \in [a,b]$ a desigualdade de Bessel aplicada à função $s \in [a,b] \mapsto K(t,s) \in \mathbb{C}$ e ao sistema ortonormal de funções $\bar{e}_n$ nos dá que

$$\sum_n \left| \int_a^b K(t,s)e_n(s)ds \right|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2 ds$$

isto é

$$(2) \qquad \sum_n \lambda_n^2 |e_n(t)|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2 ds$$

donde segue-se que

$$\sum_n \lambda_n^2 \int_a^b |e_n(t)|^2 dt \leq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds\, dt,$$

isto é,

$$\sum_n \lambda_n^2 \leqq \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds\ dt\ .$$

OBSERVAÇÃO - Pode-se demonstrar que temos

$$K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t)\overline{e_n(s)}$$

esta última série sendo convergente em $C_{L_2}([a,b]\times[a,b])$; daí segue-se que temos

$$\sum_n |\lambda_n|^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dsdt = \|K\|_2^2\ .$$

EXERCÍCIO 1.2 - Seja $m(\lambda)$ a multiplicidade do autovalor λ de (F) (isto é, a dimensão do espaço vetorial dos autovetores correspondentes ao autovalor λ); demonstrar que $m(\lambda) \leqq \dfrac{\|K\|_2^2}{\lambda^2}$.

EXERCÍCIO 1.3 - Demonstrar diretamente 1.1 considerando que as funções $(t,s)\in[a,b]\times[a,b] \longmapsto e_n(t)\overline{e_m(s)} \in \mathbb{C}$ formam um sistema ortonormal de $C_{L_2}([a,b]\times[a,b])$.

Do Teorema III.3.8 segue-se que para tôda função $x \in E = C_{L_2}([a,b])$ temos $y = kx = \sum_n \lambda_n x_n e_n$ onde $x_n = (x|e_n) = \int_a^b x(s)\overline{e_n(s)}ds$, isto é,

$$(3) \qquad y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)dx = \sum_n \lambda_n x_n e_n(t)$$

$(t \in [a,b])$ a série sendo convergente em $E = C_{L_2}([a,b])$. Para todo $x \in C([a,b])$ a série (3) é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$. De fato aplicando primeiro a desigualdade de Cauchy-Schwarz e depois a desigualdade de Bessel e (2) temos

$$\sum_n |\lambda_n x_n e_n(t)| \leq \left[\sum_n |x_n|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\Sigma_n |\lambda_n e_n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left|\int_a^b \left[K(t,s)\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 = (b-a)^{\frac{1}{2}} M\|x\|_2$$

onde $$M = \sup_{a\leq s,t\leq b} |K(t,s)| .$$ CQD

Demonstramos portanto o

TEOREMA 1.2 - Para todo $x \in C([a,b])$ temos

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \sum_n \lambda_n x_n e_n(t)$$

esta série sendo uniformemente e absolutamente convergente em $[a,b]$.

O Teorema III.3.9 nos assegura que dado $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n então dado $y \in E = C_{L_2}([a,b])$ a equação integral (F), isto é, $y = (\lambda-k)x$, tem uma e uma só solução $x = (\lambda-k)^{-1}y \in E$ dada por $x = \frac{1}{\lambda} y + + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda-\lambda_n} e_n$ onde $y_n = \int_a^b y(s)\overline{e_n(s)}ds$, isto é,

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda-\lambda_n} e_n(t) \qquad (t \in [a,b]) \tag{4}$$

esta série sendo convergente em $E = C_{L_2}([a,b])$. Para todo $y \in E = C_{L_2}([a,b])$ a série (4) é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$. De fato: x satisfaz a relação $x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} kx$ que comparada com (4) nos mostra que

$$(kx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t)$$

e de 1.2 segue-se que esta série é absolutamente e uniformemente convergente. CQD

Demonstramos portanto o

TEOREMA 1.3 - Seja $K:[a,b]\times[a,b] \to \mathbf{C}$ um núcleo hermitiano contínuo; seja λ_n a seqüência de seus autovalores não nulos e e_n a seqüência ortonormal das autofunções correspondentes. Para todo $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ a equação integral

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

tem uma e uma só solução dada por

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t)$$

esta série sendo uniformemente e absolutamente convergente em $[a,b]$.

OBSERVAÇÃO - Quando os e_n formam uma base o.n. de $C_{L_2}([a,b])$ então substituindo $y(t) = \sum_n y_n e_n(t)$ em (4) vem

$$x(t) = \sum_n \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda} e_n(t)$$

série esta porém que é apenas convergente em $C_{L_2}([a,b])$ e não uniformemente absolutamente (se o desenvolvimento o.n. de y não o fôr).

Anàlogamente segue-se do Teorema III.3.10 que

1.4 - Dado um núcleo hermitiano contínuo K e um autovalor $\lambda \neq 0$ do operador hermitiano compacto k associado a K, então a equação integral

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

tem solução se, e sòmente se,

$$\int_a^b y(t)\overline{z(t)}dt = 0$$

para tôda função contínua $z \in C([a,b])$ tal que

(5) $$\int_a^b K(t,s)z(s)ds = \lambda z(t) .$$

As soluções são da forma

(6) $$x(t) = \frac{1}{\lambda}y(t) + \frac{1}{\lambda}\sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t) + z(t)$$

onde z é um elemento de $C([a,b])$ que satisfaz (5) e $y_n = \int_a^b y(s)\overline{e_n(s)}ds$. A série (6) é absolutamente e uniformemente convergente.

EXERCÍCIO 1.4 - Com as hipóteses do Teorema 1.3 para todo $(t,z) \in [a,b]\times[a,b]$ definimos $K_2(t,z) = \int_a^b K(t,s)K(s,z)ds$. Demonstrar que o núcleo K_2 é hermitiano e contínuo e que se e_n é uma autofunção de K correspondente ao autovalor λ_n então e_n também é uma autofunção de K_2 correspondente ao autovalor λ_n^2.

OBSERVAÇÕES: 1) Pode-se demonstrar [ver AFA, Cap.III, teorema 6.8] o

TEOREMA DE MERCER - Se o núcleo hermitiano contínuo K é tal que o operador k definido por êle é positivo [isto é, $(kx|x) \geqq 0$ para todo x; lembremos que k sendo compacto esta condição equivale a dizer que todos os seus autovalores são positivos] então temos

$$K(t,s) = \Sigma\ \lambda_n e_n(t)\overline{e_n(s)}$$

esta série sendo absolutamente e uniformemente convergente. A mesma conclusão ainda vale se o operador k fôr negativo ou se todos os autovalores, exceto um número finito dêles, tiverem o mesmo sinal.

2) Nas condições da Observação 1) temos

$$\sum_n \lambda_n = \int_a^b K(t,t)dt\ .$$

3) <u>Todos os resultados dêste parágrafo ainda se aplicam ao estudo da equação integral</u>

$$\lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)\rho(s)ds$$

<u>onde</u> ρ <u>é uma função contínua estritamente positiva definida em</u> $[a,b]$. Para estender os resultados mantendo as mesmas demonstrações basta trabalhar no espaço $C_{L_2(\rho)}([a,b])$, isto é, no espaço $C([a,b])$ munido do produto interno

$$(x|y)_\rho = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\rho(t)dt$$

e substituir em tôdas as integrais ds por $\rho(s)ds$ e $dsdt$ por $\rho(s)\rho(t)dsdt$.

<u>Referências</u> - [2], [4], [6], [8], [14], [15] .

§2 - O Problema de Sturm-Liouville

Consideremos o operador diferencial linear de 2ª ordem

$$L_\lambda[y] \equiv -(p(t)y')' + [q(t)-\lambda\rho(t)]y$$

no intervalo $[a,b]$ onde $p \in C^{(1)}([a,b])$ com $p(t) > 0$ para $t \in [a,b]$, $\rho \in C([a,b])$ com $\rho(t) > 0$ para $t \in [a,b]$ e $q \in C([a,b],R)$, e, condições de fronteira

$$F_1[y] \equiv \alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a)$$

$$F_2[y] \equiv \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b)$$

onde $\alpha_o, \alpha_1, \beta_o, \beta_1 \in \mathbf{R}$ com

$$|\alpha_o| + |\alpha_1| \neq 0 \quad \text{e} \quad |\beta_o| + |\beta_1| \neq 0.$$

O problema de Sturm-Liouville consiste em achar uma função y solução do sistema

$$(S_\lambda) \qquad L_\lambda[y](t) = f(t) \quad \text{para} \quad t \in [a,b]$$

$$(F) \qquad F_1[y] = 0, \quad F_2[y] = 0 \;.$$

Os exemplos mais comuns de condições de fronteira são

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{e} \quad y'(a) = y'(b) = 0$$

* OBSERVAÇÕES: 1) Se o problema de Sturm-Liouville têm solução para todo $f \in C([a,b])$ então também têm solução o problema

$$L_\lambda[y] = f, \quad F_1[y] = c_1, \quad F_2[y] = c_2$$

De fato: se $y_o \in C^{(2)}([a,b])$ é uma função tal que $F_1[y_o] = c_1$ e $F_2[y_o] = c_2$ então temos $y = z + y_o$ onde z é solução de

$$L_\lambda[z] = f - L_\lambda[y_o], \quad F_1[z] = 0, \quad F_2[z] = 0.$$

2) Dada uma equação diferencial linear de 2ª ordem

$$-a_o(t)y'' + a_1(t)y' + [a_2(t)-\lambda\mu(t)]y = g(t)$$

onde $a_o \in C([a,b])$ com $a_o(t) > 0$ para $t \in [a,b]$, $\mu \in C([a,b])$ com $\mu(t) > 0$ para $t \in [a,b]$ e $a_1, a_2 \in$ $\in C([a,b],\mathbf{R})$, se multiplicarmos todos os seus têrmos pela função

$$-p(t) = \frac{1}{a_o(t)} \exp \int \frac{a_1(s)}{a_o(s)} ds$$

obtemos uma equação da forma (S_λ) com

$$q(t) = -p(t)a_2(t), \quad \rho(t) = p(t)\mu(t) \quad e \quad f(t) = -p(t)g(t).$$

3) A mesma equação pode ser posta sob a forma

$$v'' + (k(t) - \lambda\nu(t))v = h(t)$$

para isto basta dividir todos os têrmos por a_o, fazer $y = uv$ com

$$u(t) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int \frac{a_1(s)}{a_o(s)} ds \right]$$

e dividir todos os têrmos por u; obtemos então a equação sob a forma desejada com

$$k = \frac{u''}{u} + \frac{a_1 u'}{a_o u} + \frac{a_2}{a_o}, \quad \nu = \frac{\mu}{a_o} \quad e \quad h = \frac{g}{a_o u} \quad .$$

Dizemos que λ é um <u>autovalor</u> do sistema $(S_\lambda)+(F)$ ou do problema de Sturm-Liouville se a equação homogênea

(S_λ^*) $$L_\lambda[y] = 0$$

isto é $L_o[y] = \lambda\rho(t)y$ ou ainda

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda\rho(t)y$$

tem uma solução $y \neq 0$ que satisfaz as condições de fronteira (F). A solução y se chama então <u>autofunção</u> (correspondente ao autovalor λ).

→ EXERCÍCIO 2.1 - Determinar quais dos problemas seguintes são problemas de Sturm-Liouville:

a) $y'' + \lambda y = f$ em $[a,b]$, $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$

b) $y'' + y = f$ em $[a,b]$, $y(a) = 0$, $y'(b) = 0$

c) $ty''+y'+\lambda y = \cos t$ em $[a,b]$, $y(a)+y'(a) = 0$, $y'(b)=0$

d) $y'' + \lambda y = f$ em $[a,b]$, $y(a) = y(b) = 0$

e) $y''+\lambda y = 0$ em $[0,\pi]$, $2y(0) + y(\pi) = 0$, $2y'(0)-y'(\pi) = 0$

f) $y''+\lambda y = f$ em $[0,\pi]$, $y(0) = 0$, $y(1) + \beta y'(1) = 0$.

EXERCÍCIO 2.2 - Consideremos o operador

$$L[y] = -(p(t)y')' + g(t)y \text{ em } [a,b] \text{ com}$$
$$g \in C([a,b],\mathbb{R}).$$

a) Demonstrar que dados $u,v \in C^{(2)}([a,b])$ temos a <u>identidade de Lagrange</u>

$$\int_a^b (\bar{v}L[u] - u\overline{L[v]})dt = M[u,v](b) - M[u,v](a)$$

onde

$$M[u,v](t) = -p(t)[u'(t)\overline{v(t)}-u(t)\overline{v'(t)}].$$

b) Sejam y_1,y_2 soluções de $(S_\lambda^*) + (F)$; demonstrar que

$$M[y_1,y_2](a) = M[y_1,y_2](b)$$

e portanto

$$\int_a^b (\bar{y}_1 L_\nu[y_2] - y_2\overline{L_\nu[y_1]})dt = 0 \quad \text{para todo} \quad \nu.$$

EXERCÍCIO 2.3 - a) Demonstrar que autofunções y_1,y_2 do problema de Sturm-Liouville, correspondentes a autovalores distintos são ortogonais relativamente a ρ, isto é, satisfazem

$$\int_a^b \rho(t)y_1(t)\overline{y_2(t)}dt = 0 .$$

[Sugestão: integrar $\bar{y}_2 L_o[y_1] - y_1\overline{L_o[y_2]}$ e aplicar o Exercício 2.2 b).]

b) Demonstrar que todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais. [Sugestão: demonstrar que se y é uma autofunção correspondente ao autovalor $\lambda = r+is$ então $\bar{y}$ é uma autofunção correspondente a $\bar{\lambda}$ ($\neq \lambda$ se $\lambda \notin \mathbf{R}$); de a) vem

$$\int_a^b \rho(t)|y(t)|^2 dt = 0. \;]$$

c) Demonstrar que tôda autofunção do problema de Sturm-Liouville é uma combinação linear de autofunções reais, correspondentes ao mesmo autovalor (ver também corol.4 do Teorema 2.3).

A - Exemplos de separação de variáveis levando ao problema de Sturm-Liouville

Os problemas de Sturm-Liouville aparecem naturalmente quando se aplica o método de separação de variáveis ao estudo de certas equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem.

EXEMPLO 1 - Consideremos a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - q(x)U = \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

com as condições iniciais $U(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = g(x)$ e condições de fronteira $U(a,t) = 0$ e $U(b,t) = 0$.

p e ρ representam a tensão e a densidade da corda respectivamente, sendo portanto funções contínuas e estritamente positivas em $[a,b]$. Procurando soluções da equação diferencial parcial que sejam da forma

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

vem

$$\frac{(p(x)X')' - q(x)X}{\rho X} = \frac{T''}{T}$$

que se separa em

$$\begin{cases} (\alpha) \quad (p(x)X')' - q(x)X = -\lambda\rho(x)X \quad \text{com} \quad X(a) = X(b) = 0 \\ (\beta) \quad T'' = -\lambda T \ . \end{cases}$$

Vamos demonstrar no ítem B que apenas para uma seqüência λ_n de números positivos tendendo para infinito o problema (α) tem uma solução não nula, única a menos de uma constante multiplicativa; chamemos de ϕ_n a auto-função normalizada correspondente [isto é, $\int_a^b |\phi_n(t)|^2 \rho(t)dt = 1$]. Procuremos então a solução do problema original sob a forma

$$U(x,t) = \sum_n \phi_n(x)[c_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + d_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}t] \ ^{\dagger}$$

Para satisfazer as condições iniciais devemos ter

$$f(x) = U(x,0) = \sum_n c_n\phi_n(x)$$

$$g(x) = \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} d_n \phi_n(x) \quad .$$

---

† lembremos que a solução geral de $T'' = -\lambda_n T$ com $\lambda_n > 0$ é $T_n(t) = c_n \cos\sqrt{\lambda_n}\ t + d_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\ t$.

Se f e g admitem êste desenvolvimento em série os coeficientes c_n e d_n são determinados por

$$c_n = (f|\phi_n)_\rho = \int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}\rho(x)dx \quad e \quad d_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(g|\phi_n)_\rho .$$

Vemos pois a importância do estudo sôbre a possibilidade de desenvolvimento de uma função f em série de Fourier das autofunções ϕ_n bem como a importância de condições que assegurem que esta série é absolutamente e uniformemente convergente em $[a,b]$, e não apenas convergente em $C_{L_2(\rho)}([a,b])$. Naturalmente ainda subsiste a questão de saber como devem ser as funções f e g para que a série de U seja convergente, para que ela represente de fato uma solução da equação diferencial parcial, para que tenhamos $U(x,t) \to f(x)$ quando $t\downarrow 0$ etc. Estas últimas questões em geral têm de ser estudadas particularmente para cada tipo de equação.

EXEMPLO 2 - Para a mesma equação do Exemplo 1 com as mesmas condições iniciais poderíamos considerar outras condições de fronteira:

a) $\quad \frac{\partial U}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial U}{\partial x}(b,t) = 0 \quad$ (extremidades livres)

para obter as condições de fronteira

$X'(a) = X'(b) = 0$ (em lugar de $X(a) = X(b) = 0$)

b) $$\alpha U(a,bt) + \frac{\partial U}{\partial x}(a,t) = \beta U(b,t) + \frac{\partial U}{\partial x}(b,t) = 0$$

(extremidades elàsticamente fixadas) para obter as condições de fronteira

$$\alpha X(a) + X'(a) = \beta X(b) + X'(b) = 0 .$$

EXEMPLO 3a - No estudo da equação de difusão

$$\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}) - q(x)U = \rho(x)\frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{para} \quad a \leqq x \leqq b \quad e \quad t \geqq 0$$

com condições de contôrno $U(a,t) = U(b,t) = 0$ e condição inicial $U(x,0) = f(x)$ o método de separação de variáveis nos leva ao sistema

$$\begin{cases} (p(x)X')' - q(x)X = -\lambda\rho(x)X, \quad X(a) = X(b) = 0 \\ T' + \lambda T = 0. \end{cases}$$

b) Se as condições de contôrno são

$$\frac{\partial U}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial U}{\partial x}(b,t) = 0$$

(por exemplo um corpo tèrmicamente isolado nas extremidades $x = a$ e $x = b$) vem as condições de fronteira

$$X'(a) = X'(b) = 0 \qquad \text{(em lugar de } X(a) = X(b) = 0).$$

B - O Problema de Sturm-Liouville

Lembremos os seguintes resultados da teoria das equações diferenciais lineares: consideremos o operador diferencial linear de ordem n

$$L[y] \equiv a_o(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+ a_n(t)y$$

onde $a_i \in C([a,b])$, $i = 0,1,\dots,n$ e $a_o(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$.

a) O conjunto das funções $y \in C^{(n)}([a,b])$ que são soluções da equação homogênea $L[y] = 0$ formam um espaço vetorial E_o de dimensão n

b) $y_1,\dots,y_n \in E_o$ formam uma base de E_o se e sòmente se o seu determinante wronskiano

$$W(t) = W[y_1,\dots,y_n](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots\dots & y_n'(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

fôr $\neq 0$ em todo ponto $t \in [a,b]$. Fixado um ponto $t_o \in [a,b]$ temos então (Teorema de Liouville)

$$W(t) = W(t_o)\ \exp\left[-\int_{t_o}^{t} \frac{a_1(s)}{a_o(s)}\, ds\right] \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b]$$

TEOREMA 2.1 - Todo autovalor do problema de Sturm-Liouville tem multiplicidade 1, isto é, o espaço vetorial das autofunções correspondentes tem dimensão 1.

Demonstração: Sejam y_1, y_2 duas soluções linearmente independentes de $L_\lambda[y] = 0$ e satisfazendo $F_1[y] = F_2[y] = 0$. Consideremos o wronskiano

$$W(t) = W[y_1,y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \quad ;$$

de b) acima segue-se que

$$W[y_1,y_2] \neq 0 \quad \text{para} \quad t \in [a,b]$$

pois y_1, y_2 são soluções linearmente independentes e que

$$W(t) = W(a) \exp\left[-\int_a^t \frac{p'(s)}{p(s)}\, ds\right] = \frac{W(a)}{p(a)}\, p(a)$$

isto é $p(t)W(t) = p(a)W(a)$.

Por outro lado as hipóteses

$$F_1[y_1] = \alpha_o y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) = 0$$

e

$$F_1[y_2] = \alpha_o y_2(a) + \alpha_1 y_2'(a) = 0$$

com α_o e α_1 não simultâneamente nulos implicam que

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0$$

isto é, $W[y_1,y_2](a) = 0$ e portanto $W[y_1,y_2] \equiv 0$ contra a hipótese da independência linear de y_1 e y_2.

CQD

LEMA - Seja $x \in C^{(1)}_{L_2}([a,b])$; para todo $t \in [a,b]$ temos

$$|x(t)|^2 \leq \frac{1}{b-a}\|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \, \|x'\|_2 \, .$$

<u>Demonstração</u>: Seja $\bar{t} \in [a,b]$ ponto de máximo de $|x(t)|$. Temos então

$$|x(\bar{t})|^2 = |x(t)|^2 + \int_t^{\bar{t}} [x(s)\overline{x(s)}]' ds$$

$$= |x(t)|^2 + \int_t^{\bar{t}} [x'(s)\overline{x(s)} + x(s)\overline{x'(s)}] ds$$

$$\leq |x(t)|^2 + 2\|x\|_2 \, \|x'\|_2$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwartz. Integrando esta desigualdade vem

$$(b-a)|x(\bar{t})|^2 \leq \|x\|_2^2 + 2(b-a)\|x\|_2\|x'\|_2 \, .$$

COROLÁRIO - Seja $x \in C^{(1)}_{L_2}([a,b])$ com $\|x\|_2 = 1$; para todo $t \in [a,b]$ temos

$$|x(t)|^2 \leq \frac{1}{b-a} + 2\|x'\|_2 \, .$$

TEOREMA 2.2 - Existe $c_o \in \mathbf{R}$ tal que para $\lambda \in \mathbf{R}$ auto valor do problema de Sturm-Liouville temos $\lambda \geqq c_o$.

Demonstração: Se y é uma autofunção correspondente ao autovalor λ temos $L_\lambda[y] \equiv 0$. É pois suficiente demonstrar que existe $c_o \leqq 0$ tal que para $\lambda < c_o$ e $y \in C^{(2)}([a,b],R)$ com $\|y\|_2 = 1$ temos sempre

$$\int_a^b L_\lambda[y](t)y(t)dt > 0,$$

isto é,

$$\int_a^b [-(py')'+qy-\lambda\rho y]ydt > 0 .$$

Temos

$$\int_a^b [-(py')'+qy-\lambda\rho y]ydt = -(py')y\Big|_a^b + \int_a^b py'^2dt + \int_a^b qy^2dt - \\ - \lambda\int_a^b \rho y^2dt$$

e minoremos êstes quatro somandos.

1º somando - Se $y(a) = 0$ então $p(a)y'(a)y(a) = 0$; se $y(a) \neq 0$ de $F_1[y] = 0$ e do corolário acima segue-se que

$$|p(a)y'(a)y(a)| = |p(a)\frac{\alpha_o}{\alpha_1}\, y(a)^2| \leqq |\frac{\alpha_o}{\alpha_1}|\frac{p(a)}{b-a} + 2p(a)\,|\frac{\alpha_o}{\alpha_1}|\,\|y'\|_2$$

isto é, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$|p(a)y'(a)y(a)| \leqq c_1 + c_2\|y'\|_2$$

e portanto

$$p(a)y'(a)y(a) \geqq -c_1 - c_2\|y'\|_2 \ .$$

Anàlogamente existem constantes c_3 e c_4 tais que

$$-p(b)y'(b)y(b) \geqq c_3 + c_4\|y'\|_2 \ .$$

2º somando - Temos evidentemente $\int_a^b p(t)y'(t)^2dt \geq p_1\|y'\|_2^2$ onde $p_1 = \inf\limits_{a \leqq t \leqq b} p(t) > 0.$

3º somando - $\int_a^b qy^2dt \geqq c_5$ onde $c_5 = \inf\limits_t q(t)$.

4º somando - $-\lambda \int_a^b \rho y^2 dt \geqq -\lambda p_2$ onde $p_2 = \inf\limits_t \rho(t) > 0$ (lembremos que $\lambda < 0$).

Efetuando portanto a soma vemos que existem constantes c_6 e c_7 tais que

$$\int_a^b L_\lambda[y](t)y(t)dt \geqq c_6 + c_7\|y'\|_2 + p_1\|y'\|_2^2 - \lambda p_2$$

$$= \left[\sqrt{p_1}\|y'\|_2 + \frac{1}{2}\frac{c_7}{\sqrt{p_1}}\right]^2 - c_6 - \frac{1}{4}\frac{c_7^2}{p_1} - \lambda p_2$$

$$\geqq c_8 - \lambda p_2$$

onde $c_8 = -c_6 - \frac{1}{4}\frac{c_7^2}{p_o}$; temos $c_8 - \lambda p_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{c_8}{p_2} = c_9$

e basta pois tomar $c_o = \inf(0,c_9)$. CQD †

EXERCÍCIO 2.4 - Demonstrar o Teorema 2.2 sem usar o lema e o seu corolário,

a) quando temos condições de fronteira $y(a) = y(b) = 0$

b) quando temos condições de fronteira $y'(a) = y'(b) = 0$

c) quando temos condições de fronteira com $\alpha_o\alpha_1 \leqq 0$ e $\beta_o\beta_1 \geqq 0$.

[Sugestão: seguir a demonstração do Teorema 2.2]

Do Teorema 2.2 segue-se que substituindo eventualmente $q(t)$ por $\hat{q}(t) = q(t) - \hat{c}\rho(t)$ onde $\hat{c} < 0$ e $\hat{c} < c_o$ temos um operador $\hat{L}_o$ tal que $\lambda = 0$ não é autovalor do problema de Sturm-Liouville correspondente (e do qual além disto todos os autovalores são estritamente positivos).

DAQUI ATÉ O FIM DO PARÁGRAFO FAZEMOS A HIPÓTESE DE QUE $\lambda = 0$ NÃO É AUTOVALOR DO PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

Esta hipótese implica evidentemente que para todo $f \in C([a,b])$ o problema $L_o[y] = f$, $F_1[y] = 0$, $F_2[y] = 0$ tem no máximo uma solução.

---

† esta demonstração é adaptada de H. Widom, Lectures on integral equations, p.73 - Van Nostrand Mathematical Studies 17

TEOREMA 2.3 - Existe uma função contínua

$$G:[a,b]\times[a,b] \to R$$

tal que dado $f \in C([a,b])$, $y \in C^{(2)}([a,b])$ é solução de

$$(S_o) \quad L[y] = L_o[y] \equiv -(py')' + qy = f \quad \text{em} \quad [a,b]$$

$$(F) \quad \begin{aligned} F_1[y] &\equiv \alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \\ F_2[y] &\equiv \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{aligned}$$

se, e sòmente se,

$$(\alpha) \qquad y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds \ .$$

A função G se chama de <u>função de Green</u> do problema.

<u>Demonstração</u>: a) Construção da função de Green: seja y_i $i=1,2$ uma solução real não nula de $L[y] \equiv 0$ satisfazendo

$$F_i[y_i] = 0 \ .$$

y_1 e y_2 são linearmente independentes, isto é, não proporcionais pois por hipótese $\lambda = 0$ não é autovalor de L, isto é, o problema homogêneo $L[y] \equiv 0$, $F_1[y] = F_2[y] = 0$ não tem solução $y \neq 0$.

Procuremos a função G sob a forma

$$G_s(t) = G(t,s) = \begin{cases} G^1(t,s) = c(s)y_1(t)y_2(s) & \text{se} \quad a \leqq t \leqq s \\ G^2(t,s) = c(s)y_2(t)y_1(s) & \text{se} \quad s \leqq t \leqq b \end{cases}$$

Com esta definição já temos assegurado

$$(1) \qquad F_i[G_s(t)] = 0 \qquad i = 1,2$$

$$(2) \qquad L[G_s^i(t)] = 0 \qquad i = 1,2.$$

Temos $G^2(t,t) = G^1(t,t)$ mas não podemos ter

$$\frac{\partial G^2}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t-} = \frac{\partial G^1}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t+}$$

pois com (2) e (1) isto implicaria que G_s é solução de

$$L[y] \equiv 0, \quad F_1[y] = F_2[y] = 0 .$$

Procuremos então G tal que

$$(3) \qquad \frac{\partial G^2}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t-} - \frac{\partial G^1}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t+} = -\frac{1}{p(s)} .$$

Como temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^2}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t-} - \frac{\partial G^1}{\partial t}(t,s)\Big|_{s=t+} &= c(s)[y_2'y_1 - y_1'y_2](s) \\ &= c(s)W[y_1,y_2](s) \end{aligned}$$

então para termos (3) basta tomar

$$c(s) = -\frac{1}{p(s)W[y_1,y_2](s)};$$

portanto

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{y_1(t)y_2(s)}{p(s)W[y_1,y_2](s)} & \text{se} \quad a \leqq t \leqq s \\[2ex] -\dfrac{y_2(t)y_1(s)}{p(s)W[y_1,y_2](s)} & \text{se} \quad s \leqq t \leqq b \; . \end{cases}$$

De

$$\begin{aligned} p(s)W[y_1,y_2](s) &= p(a)W[y_1,y_2](a) \\ &= p(t)W[y_1,y_2](t) \end{aligned}$$

(Cf. a demonstração do Teorema 2.1) segue-se que

$$(4) \qquad G(s,t) = G(t,s) \; .$$

b) Demonstremos que a função y definida por (α) é de f<u>a</u>to solução de $(S_o) + (F)$. De (1) segue-se que y satisfaz as condições de fronteira. Temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b G(t,s)f(s)ds \\ &= \int_a^t G^2(t,s)f(s)ds + \int_t^b G^1(t,s)f(s)ds \; . \end{aligned}$$

Diferenciando vem

$$\begin{aligned} y'(t) = &\int_a^t \frac{\partial G^2(t,s)}{\partial t}f(s)ds + G^2(t,t)f(t) + \\ &+ \int_t^b \frac{\partial G^1(t,s)}{\partial t}f(s)ds - G^1(t,t)f(t) = \end{aligned}$$

$$= \int_a^t \frac{\partial G^2(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G^1(t,s)}{\partial t} f(s)ds$$

pois $G^2(t,t) = G^1(t,t)$. Diferenciando novamente vem

$$y''(t) = \int_a^t \frac{\partial^2 G^2(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds + \frac{\partial G^2(t,s)}{\partial t} f(s)\Big|_{s=t-} +$$

$$+ \int_t^b \frac{\partial^2 G^1(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds - \frac{\partial G^2(t,s)}{\partial t} f(s)\Big|_{s=t+} .$$

Multiplicando estas expressões de y, y' e y'' respectivamente por $-p$, $-p'$ e q e fazendo a soma vem

$$L[y](t) = \int_a^t L[G^2(t,s)]f(s)ds + \int_t^b L[G^1(t,s)]f(s)ds -$$

$$- p(t)\left[\frac{\partial G^2(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t-} - \frac{\partial G^1(t,s)}{\partial t}\Big|_{s=t+}\right]f(t) = f(t)$$

por (2) e (3). Da unicidade da solução segue-se que a solução do problema $(S_o)+(F)$ é necessàriamente da forma (α).

* OBSERVAÇÕES: 1) A demonstração do teorema mostra que a aplicação $f \in C([a,b]) \mapsto y = \mathcal{G}f \in C^{(2)}([a,b])$ onde $(\mathcal{G}f)(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$ é contínua. Êste fato também segue imediatamente do teorema do gráfico fechado [ver o Apêndice do Cap.I].

2) (para quem conhece a teoria da integração de Lebesgue)

O Teorema 2.3 ainda vale quando $f \in L_1([a,b])$; neste caso a função y definida por (α) é tal que

$$y \in C^{(1)}([a,b]),$$

y' é absolutamente contínua e para quase todos os pontos t em $[a,b]$ temos $L[y](t) = f(t)$.

EXEMPLO 1 - Consideremos a equação $y'' = f$ em $[a,b]$ com condições de fronteira $y(a) = y(b) = 0$.

$\lambda = 0$ não é autovalor dêste problema. $y_1(t) = t-a$ e $y_2(t) = t-b$ são soluções de $y'' = 0$ satisfazendo respectivamente

$$y_1(a) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(b) = 0.$$

Temos

$$W[y_1,y_2](t) = \begin{vmatrix} t-a & t-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = b-a .$$

Portanto a função de Green do problema é

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)(s-b)}{b-a} & \text{se} \quad a \leqq t \leqq s \\[2ex] \dfrac{(t-b)(s-a)}{b-a} & \text{se} \quad s \leqq t \leqq b \end{cases}$$

donde segue-se que a solução y do problema é dada por

$$y(t) = \frac{t-b}{b-a} \int_a^t (s-a)f(s)ds + \frac{t-a}{b-a} \int_t^b (s-b)f(s)ds \ .$$

EXEMPLO 2 - Consideremos a equação

$$y'' + y = f \quad \text{em} \quad [0,\pi]$$

com condições de fronteira $y(0) = y'(\pi) = 0$. $\lambda = 0$ não é autovalor dêste problema pois a solução geral da equação homogênea $y'' + y = 0$ é

$$y(t) = c_1 \text{ sen } t + c_2 \cos t$$

e $y(0) = 0$ implica $c_2 = 0$, $y'(\pi) = 0$ implica $c_1 = 0$.

$y_1(t) = \text{sen } t$, $y_2(t) = \cos t$ são soluções da equação homogênea $y'' + y = 0$ satisfazendo respectivamente

$$y_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2'(\pi) = 0$$

Temos

$$W[y_1,y_2](t) = \begin{vmatrix} \text{sen } t & \cos t \\ \cos t & -\text{sen } t \end{vmatrix} \equiv -1 \ .$$

Portanto a função de Green do problema é dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} -\text{sen } t \cos s & \text{para} \quad 0 \leqq t \leqq s \\ -\cos t \text{ sen } s & \text{para} \quad s \leqq t \leqq \pi \end{cases}$$

e a solução do problema é dada por

$$y(t) = -\cos t \int_0^t \text{sen } s \, f(s)ds - \text{sen } t \int_t^\pi \cos s \, f(s)ds \ .$$

→ EXERCÍCIO 2.5 - Determinar quais dos problemas seguintes têm solução para qualquer f, isto é, têm uma função de Green:

a) $y'' + y = f$ em $[0,\pi]$ com $y(0) = y(\pi) = 0$

b) $y'' = f$ em $[0,1]$ com $y(0) + y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$

c) $y'' = f$ em $[0,1]$ com $y(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$

d) $y'' + y = f$ em $[0,\pi]$ com $y'(0) = y'(\pi) = 0$

→ EXERCÍCIO 2.6 - Achar a função de Green da equação $y'' = f$ em $[0,1]$ com condições de fronteira $y(0) = y'(1) = 0$.

→ EXERCÍCIO 2.7 - Achar a função de Green da equação $y'' = f$ em $[0,1]$ com condições de fronteira $y(0) = 0$, $y(1) + \beta y'(1) = 0$.

→ EXERCÍCIO 2.8 - Achar a função de Green da equação $y'' = f$ em $[a,b]$ com condições de fronteira $y(a) = y'(a) = 0$.

→ EXERCÍCIO 2.9 - Achar a função de Green da equação $y'' + y = f$ em $[0,1]$ com condições de fronteira $y(0) + y'(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

COROLÁRIO 1 - y é solução do problema de Sturm-Liouville $(S_\lambda)+(F)$ se, e sòmente se,

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)y(s)\rho(s)ds = g(t)$$

onde $g(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds.$

Demonstração: Pelo Teorema 2.3 temos $L[y] = \lambda\rho y + f$ com

$$F_1[y] = F_2[y] = 0 \text{ se, e sòmente se,}$$

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)[\lambda\rho(s)y(s) + f(s)]ds$$

isto é, se e sòmente se

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)y(s)\rho(s)ds = g(t) . \qquad \text{CQD}$$

Indiquemos por $\mathcal{G}$ o operador integral definido em $C_{L_2(\rho)}([a,b])$ pelo núcleo G (Cf. Observação 3 do fim do §1), isto é,

$$\mathcal{G}[y](t) = \int_a^b G(t,s)y(s)\rho(s)ds \quad t \in [a,b].$$

Ainda pelo Teorema 2.3 temos que $L_o[y] = \lambda\rho y$ com $F_1[y] = F_2[y] = 0$ se, e sòmente se,

$$y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)y(s)\rho(s)ds = 0$$

isto é, se, e sòmente se, $\frac{1}{\lambda} y = \mathcal{G}[y]$, isto é, $\frac{1}{\lambda}$ é auto valor de $\mathcal{G}$; portanto

COROLÁRIO 2 - a) λ é autovalor do problema de Sturm-Liouville se, e sòmente se, $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de $\mathcal{G}$.

b) y é autofunção do problema de Sturm-Liouville correspondente ao autovalor λ se, e sòmente se, y é autofunção do operador $\mathcal{G}$ correspondente ao autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

O núcleo G sendo real e simétrico (Cf. (4) do Teorema 2.3) segue-se (Cf. Observação 3 do fim do §1) que o operador $\mathcal{G}$ é hermitiano e compacto e todos os seus autovalores são reais; portanto

COROLÁRIO 3 - Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais. (Ver também o Exercício 2.3 b).

COROLÁRIO 4 - Todo autovalor do problema de Sturm-Liouville tem autofunção real.

Demonstração: Seja $y = u + iv \neq 0$ uma autofunção do problema de Sturm-Liouville correspondente ao autovalor λ. Do fato de que p, q, ρ, λ, α_o, α_1, β_o e β_1 serem reais segue imediatamente que as funções reais u e v são autofunções do mesmo problema correspondentes ao mesmo autovalor λ.

$\mathcal{G}$ sendo hermitiano compacto podemos aplicar a êle todos os resultados do §1; êstes resultados, junto com os do presente ítem nos permitem enunciar o

TEOREMA 2.4 - Consideremos o problema de Sturm-Liouville

$$(S_\lambda) \qquad L_\lambda[y] = -(py')' + (q-\lambda\rho)y = f \quad \text{em} \quad [a,b];$$

$$(F) \qquad \begin{cases} F_1[y] = \alpha_o y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \\ F_2[y] = \beta_o y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{cases}$$

onde L, F_1 e F_2 satisfazem as condições mencionadas no começo dêste parágrafo.

a) Os valores $\lambda \in \mathbf{C}$ tais que exista uma solução $y \neq 0$ de $L_\lambda[y] = 0$ satisfazendo $F_1[y] = F_2[y] = 0$, isto é, os autovalores do problema de Sturm-Liouville formam uma seqüência infinita crescente λ_n de números reais tais que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty \; .$$

b) Cada autovalor λ_n tem multiplicidade 1, isto é, o espaço vetorial das autofunções correspondentes tem dimensão 1; fixando uma autofunção real ϕ_n tal que

$$\int_a^b \phi_n(t)^2 \rho(t)dt = 1$$

então qualquer outra autofunção correspondente a λ_n é múltipla de ϕ_n.

c) A seqüência ϕ_n é uma base ortonormal do espaço pré-hilbertiano $C_{L_2(\rho)}([a,b])$ e do espaço de Hilbert

$L_2([a,b],\rho)$.

d) Para tôda função $x \in C^{(2)}([a,b])$ tal que

$$F_1[x] = F_2[x] = 0$$

temos

$$x(t) = \sum_n x_n \phi_n(t)$$

onde

$$x_n = (x|\phi_n)_\rho = \int_a^b x(t)\phi_n(t)\rho(t)dt$$

a série sendo uniformemente e absolutamente convergente em $[a,b]$.

e) Seja $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n e $f \in C([a,b])$: o sistema

$$L_\lambda[y] = f \quad \text{com} \quad F_1[y] = F_2[y] = 0$$

tem uma e uma só solução y

$$y(t) = \sum_n \frac{(f|\phi_n)}{\lambda - \lambda_n} \phi_n(t)$$

esta série sendo uniformemente e absolutamente convergente em $[a,b]$.

f) Se $\lambda = \lambda_m$ dado $f \in C([a,b])$ o sistema

$$L_\lambda[y] = f \quad \text{com} \quad F_1[y] = F_2[y] = 0$$

tem solução se, e sòmente se, $(f|\phi_m) = 0$, isto é,

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = 0;$$

neste caso a solução é como em e), a componente y_m de ϕ_m sendo arbitrária.

<u>Demonstração</u>: b) Segue do Teorema 2.1 e do Corolário 4 do Teorema 2.3.

d) Do Teorema 2.3 segue-se que

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)h(s)ds$$
$$= \int_a^b G(t,s)\frac{h(s)}{\rho(s)}\rho(s)ds$$
$$= \mathcal{G}[\frac{h}{\rho}](t)$$

onde $h(s) = L[x](s)$ e do Teorema 2.1 segue-se que

(1) $$x(t) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}(\frac{h}{\rho})_n \phi_n(t) = \sum_n x_n \phi_n(t)$$

onde

$$z_n = (z|\phi_n)_\rho = \int_a^b z(t)\phi_n(t)\rho(t)dt$$

e portanto

$$(\frac{h}{\rho})_n = \int_a^b \frac{h(t)}{\rho(t)}\phi_n(t)\rho(t)dt = (h|\phi_n)$$

a série (1) sendo uniformemente e absolutamente convergente.

c) Como $\mathcal{D}(]a,b[)$ é denso em $C_{L_2(\rho)}([a,b])$ (Cf. Apêndice dêste Capítulo) e como todo $x \in \mathcal{D}(]a,b[)$ satisfaz as condições de fronteira $F_1[x] = F_2[x] = 0$, segue-se que d) vale para as funções de $\mathcal{D}(]a,b[)$ (com convergência uniforme e absoluta e portanto, a fortiori com convergência em $C_{L_2(\rho)}([a,b])$). Está portanto satisfeita a propriedade 4) do teorema da base (Cap.II, Teorema 4.6) donde segue-se que os ϕ_n são uma base ortonormal de $C_{L_2(\rho)}([a,b])$ e portanto existem infinitas autofunções ϕ_n.

a) No Corolário 3 do Teorema 2.3 vimos que todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais e do Teorema 2.2 segue-se que quase todos são positivos. De c) segue-se que a seqüência dêles, λ_n, é infinita e do Teorema III.3.8 e do Corolário 2 do Teorema 2.3 segue-se que $\frac{1}{\lambda_n} \to 0$ e portanto $\lambda_n \to +\infty$. De 1.1 (e do Corolário 2 do Teorema 2.3) segue-se que $\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$. Da Observação 2) do fim do §1 segue-se mesmo que $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty$.

e) Do Corolário 1 do Teorema 2.3 segue-se que a solução y do problema de Sturm-Liouville, isto é, de

$$L_o[y] = \lambda\rho y + f$$

com $F_1[y] = F_2[y] = 0$ satisfaz

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)[\lambda y(s) + \frac{f(s)}{\rho(s)}]\rho(s)ds ,$$

isto é,

$$\frac{1}{\lambda}\, \mathcal{G}[\tfrac{f}{\rho}] = \frac{1}{\lambda}\, y - \mathcal{G}[y].$$

Do Teorema 1.3 † segue-se que

$$y(t) = \lambda\, \frac{1}{\lambda}\, \mathcal{G}[\tfrac{f}{\rho}](t) + \lambda \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \frac{\frac{1}{\lambda}\, \mathcal{G}[\frac{f}{\rho}]_n}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_n}}\, \phi_n(t)$$

esta série sendo uniformemente e absolutamente convergente em $[a,b]$. Usando (1) acima vem

$$y(t) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} (\tfrac{f}{\rho})_n\, \phi_n(t) + \lambda \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \frac{\frac{1}{\lambda}\, \mathcal{G}[\frac{f}{\rho}]_n}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_n}}\, \phi_n(t)$$

$$= \sum_n \frac{(f|\phi_n)}{\lambda_n} \phi_n(t) + \lambda \sum_n \frac{\frac{1}{\lambda_n}(f|\phi_n)}{\lambda_n - \lambda}\, \phi_n(t)$$

$$= \sum_n \frac{(f|\phi_n)}{\lambda_n - \lambda}\, \phi_n(t) \ .$$

f) Segue-se anàlogamente de 1.4.

OBSERVAÇÃO - de a) e do Teorema de Mercer segue-se que

$$G(t,s) = \sum_n \frac{\phi_n(t)\phi_n(s)}{\lambda_n} \ .$$

---

† onde substituimos λ por $\frac{1}{\lambda}$, λ_n por $\frac{1}{\lambda_n}$, x por y e y por $\frac{1}{\lambda}\, \mathcal{G}[\frac{f}{\rho}]$.

* OBSERVAÇÕES (para quem conhece a teoria da integração de Lebesgue).

1) O resultado de d) pode ser estendido:

d*) Seja $x \in C([a,b])$ absolutamente contínua tal que existem pontos

$$a = t_o < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$$

tais que para $i = 1,2,\dots,m$ x' é absolutamente contínua em $]t_{i-1},t_i[$ com $x'' \in L_2(]t_{i-1},t_i[)$ e tal que

$$F_1[x] = F_2[x] = 0 \ ;$$

então vale a conclusão de d).

De fato: i) Da observação que segue o Teorema 2.3 segue-se que d*) vale (e com a mesma demonstração de d) se

$$x \in C^{(1)}([a,b])$$

com x' absolutamente contínua e tal que $x'' \in L_2([a,b])$.

ii) No caso geral, seja $c_i = x'(t_i+) - x'(t_i-)$ $i=1,\dots,m-1$.

Então por (3) do Teorema 2.3

$$\hat{x}(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{m-1} c_i p(t_i) G(t,t_i)$$

está nas condições de i). Por outro lado da observação acima segue-se que

$$G_{t_i}(t) = G(t,t_i) = \sum_n \frac{\phi_n(t_i)}{\lambda_n} \phi_n(t)$$

esta série sendo uniformemente e absolutamente convergente. Daí segue-se que o resultado ainda vale para x. CQD [†]

2) Da observação que segue o Teorema 2.3 resulta que e) e f) ainda valem para $f \in L_2([a,b])$.

EXEMPLO - Consideremos a equação $y'' = f$ em $[0,\pi]$ com condições de fronteira $y(0) = y(\pi) = 0$. Vimos no Exemplo 1 que segue o Teorema 2.3 que $\lambda = 0$ não é autovalor do problema homogêneo. A solução geral da equação homogênea $y'' + \lambda y = 0$, $\lambda \neq 0$, é

$$y(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}t \ ;$$

para satisfazer $y(0) = 0$ devemos ter $c_1 = 0$ e para além disto satisfazer $y(\pi) = 0$ devemos ter $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$. $n = 1,2,\ldots$ e portanto

$$\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nt \qquad n = 1,2,\ldots$$

é o sistema ortonormal de autofunções do problema de Sturm-Liouville acima e a solução y pode ser escrita sob a forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nt$$

onde

$$b_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(s) \operatorname{sen} ns \, ds$$

[†] Cf. Dieudonné, Foundations of Analysis (11.7.10d)

a série sendo uniformemente e absolutamente convergente. Da observação segue-se que a função de Green do problema é dada por

$$G(t,s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nt \text{ sen } ns}{n^2} .$$

No Exemplo 1 que segue o Teorema 2.3 vimos outra expressão para a função de Green (tomar $a = 0$ e $b = \pi$).

→ EXERCÍCIO 2.9 - Achar os autovalores, autofunções e soluções dos seguintes problemas de Sturm-Liouville.

a) $y''+\lambda y = f$ em $[0,L]$ com $y'(0) = y'(L) = 0$.

b) $y''+\lambda y = f$ em $[0,L]$ com $y(0) = 0$ e $y'(L) = 0$.

c) $y''+\lambda y = f$ em $[0,1]$ com $y(0)+y'(0) = 0$ e $y'(1) = 0$.

* OBSERVAÇÕES: 1) Pode-se considerar problemas diferenciais mais gerais que o problema de Sturm-Liouville e mesmo problemas de ordem superior à 2ª:

$$L[y] \equiv a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y = f(t)$$

onde $f, a_j \in C([a,b])$ e $a_0(t) \neq 0$ para $t \in [a,b]$ com condições de fronteira

$$F_i[y] = \sum_{j=0}^{n-1} [\alpha_{ij}\, y^{(j)}(a) + \beta_{ij}\, y^{(j)}(b)] \quad i=1,2,\dots,n$$

onde $\alpha_{ij},\beta_{ij} \in \mathbb{C}$.

Se $\lambda = 0$ não é autovalor do problema, isto é, se não existe $y \not\equiv 0$ solução de $L[y] = 0$, $F_i[y] = 0$ $i = 1,\ldots,n$ então o problema acima tem uma <u>função de Green</u>, isto é, uma função $G:[a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $y \in C^{(n)}([a,b])$ é solução de $L[y] = f$, $F_i[y] = 0$ $i = 1,\ldots,n$ se e sòmente se $y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$ [ver AFA, Cap.III, Teorema 7.3]

Pode-se também demonstrar que a função de Green é hermitiana (isto é, $G(s,t) = \overline{G(t,s)}$) se e sòmente se para quaisquer funções $u,v \in C^{(n)}([a,b])$ que satisfazem as condições de fronteira $F_i[u] = F_i[v] = 0$, $i=1,\ldots,n$ temos $(L[u]|v) = (u|L[u])$ e diz-se neste caso que o problema é <u>autoadjunto</u> [ver AFA, Cap.III, teoremas 7.5 e 7.6]

Para problemas autoadjuntos valem resultados análogos aos do Teorema 2.4 [ver AFA, Cap.III, Teorema 7.8].

2) Quando consideramos o problema de autovalores e autofunções, isto é, procuramos soluções de

$$\begin{cases} L[y] = \lambda y \\ F_\mu[y] = 0 \quad \mu=1,\ldots,n \end{cases}$$

sem ulteriores restrições, podem acontecer diferentes situações:

EXEMPLO 1 -

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad \text{em} \quad [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi), \ y'(0) = -y'(\pi) \end{cases}$$

então qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ é autovalor dêste problema e a autofunção correspondente é

$$y_\lambda(t) = c \cos \sqrt{\lambda}\,(t - \tfrac{\pi}{2}) \ .$$

Êste problema não é autoadjunto: se u e v satisfazem as condições de fronteira então por integração por partes vem

$$\int_0^\pi u''\bar{v}dt - \int_0^\pi u\overline{v''}dt = -2[u'(0)\overline{v(0)} + u(0)\overline{v'(0)}] \neq 0 \ .$$

Por conseguinte não existe a função de Green.

EXEMPLO 2 -

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad \text{em} \quad [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi), \ y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$$

êste problema só tem solução não nula se

$$\lambda = \lambda_n = 4n^2 \ , \quad n = 1,2,\ldots$$

e então a solução é dada por

$$y_n(t) = c_n \text{sen } 2nt + d_n \cos 2nt \ .$$

Êste problema é autoadjunto: se u e v satisfazem as condições de fronteira então fazendo integração por partes vem

$$\int_0^{\pi} u''\bar{v}dt - \int_0^{\pi} u\overline{v''}dt = 0;$$

porém êste não é um problema de Sturm-Liouville.

EXEMPLO 3 -

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad \text{em} \quad [0,\pi] \\ 2y(0) + y(\pi) = 0, \; 2y'(0) - y'(\pi) = 0; \end{cases}$$

êste problema não tem nenhum autovalor λ real ou complexo.

De fato: quando $\lambda = 0$ a solução geral de $y'' = 0$ é $y(t) = a + bt$; da segunda condição de fronteira segue-se que $b = 0$ e da primeira segue-se então que $a = 0$ e $\lambda = 0$ não é portanto um autovalor do sistema. Quando $\lambda \neq 0$ a solução geral de $y'' + \lambda y = 0$ é

$$y(t) = ce^{i\sqrt{\lambda}t} + de^{-i\sqrt{\lambda}t}$$

e as condições de fronteira implicam que

$$\begin{cases} 2(c+d) + ce^{i\sqrt{\lambda}\pi} + de^{-i\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \\ 2(ci\sqrt{\lambda}-di\sqrt{\lambda}) - ci\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi} + di\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} (2+e^{i\sqrt{\lambda}\pi})c + (2+e^{-i\sqrt{\lambda}\pi})d = 0 \\ (2i\sqrt{\lambda} - i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi})c + (-2i\sqrt{\lambda}+i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi})d = 0 \end{cases}$$

sistema êste que tem solução $(c,d) \neq (0,0)$ se, e sòmente se, for nulo o discriminante

$$\Delta = (2+e^{i\sqrt{\lambda}\pi})(-2i\sqrt{\lambda}+i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\pi})-(2+e^{-i\sqrt{\lambda}\pi})(2i\sqrt{\lambda}-i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\pi})$$

mas $\Delta = 6i\sqrt{\lambda}$; portanto $\lambda \neq 0$ também não é autovalor do sistema. O problema acima não é autoadjunto.

As situações dos Exemplos 1 e 3 não podem acontecer para problemas autoadjuntos.

* APÊNDICE - $\mathcal{D}(]a,b[)$ é denso em $C_{L_p(\rho)}([a,b])$, $1 \leq p < \infty$.

Lembremos que $\mathcal{D}(]a,b[)$ indica o conjunto das funções definidas em $]a,b[$ e a valores complexos que são infinitamente deriváveis e nulas fora de um intervalo fechado contido em $]a,b[$. $C_{L_p(\rho)}([a,b])$ indica o espaço $C([a,b])$ munido da norma

$$x \in C([a,b]) \mapsto \|x\|_{p,\rho} = \left[\int_a^b |x(t)|^p \rho(t)dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

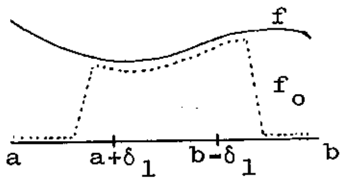
onde ρ é uma função contínua estritamente positiva definida em $[a,b]$.

TEOREMA - $\mathcal{D}(]a,b[)$ é denso em $C_{L_p(\rho)}([a,b])$ para $1 \leq p < \infty$.

<u>Demonstração</u>: I) Vamos demonstrar primeiro o teorema quando $\rho = 1$. Seja $f \in C([a,b])$; dado

$e_1 > 0$ é imediato que existe $\delta_1 > 0$ e $f_o \in C([a,b])$ tal que

$$f_o(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \leqq t \leqq a + \frac{\delta_1}{2} \\ f(t) & \text{se} \quad a+\delta_1 \leqq t \leqq b-\delta_1 \\ 0 & \text{se} \quad b - \frac{1}{2}\delta_1 \leqq t \leqq b \end{cases} \quad \text{e tal que } \|f-f_o\|_p \leqq e_1$$



Seja ϕ uma função definida na reta que é positiva infinitamente diferenciável, nula fora do intervalo $[-1,1]$ e tal que

$$\int \phi(t)dt = 1$$

[exemplo: $\phi(t) = c \exp\left[-\frac{1}{1-|t|^2}\right]$ se $|t| \leqq 1$ e $=0$ se $|t| \geqq 1$ onde c é tal que $\int \phi(t)dt = 1$]. Dado $\lambda > 0$ definimos

$$\phi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) :$$

ϕ_λ é uma função infinitamente diferenciável e

(1) $$\phi_\lambda(t) = 0 \quad \text{para} \quad |t| \geqq \lambda$$

(2) $$\int \phi_\lambda(t)dt = 1 .$$

A função

$$f_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda(t-s)f_o(s)ds$$

é infinitamente diferenciável [podemos derivar sob o sinal de integração pois ϕ_λ é infinitamente diferenciável e por causa de (1) a integral se estende apenas a um intervalo finito] e é imediato que $f_\lambda(t) = 0$ se

$$t \notin]a-\delta_1-\lambda,\ b-\delta_1+\lambda[\ ;$$

portanto $f \in \mathcal{D}(]a,b[)$ se $\lambda < \delta_1$, <u>o que suporemos no que se segue</u>.

$$\|f-f_o\|_p^p = \int_a^b |f_\lambda(t)-f_o(t)|^p dt = \int_a^b |\int\phi_\lambda(t-s)f_o(s)ds-f_o(t)|^p dt =$$

$$= \int_a^b |\int \phi_\lambda(t-s)[f_o(s)-f_o(t)]ds|^p dt$$

por (2); f_o sendo nula fora de um limitado ela é uniformemente contínua e portanto dado $e_2 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ (e tomamos $\delta_2 < \delta_1$) tal que para $|s-t| \leqq \delta_2$ temos $|f_o(s)-f_o(t)| \leqq e_2$; tomando $\lambda \leqq \delta_2$ temos por (1) que $\phi_\lambda(s-t) = 0$ se $|s-t| \geqq \delta_2$ e portanto a última integral é

$$\leqq |\int_a^b \phi_\lambda(t-s)e_2 ds|^p = e_2^p(b-a)$$

isto é,

$$\|f_\lambda-f_o\|_p \leqq e_2(b-a)^{\frac{1}{p}}$$

se $\lambda \leqq \delta_2$; temos portanto

$$\|f-f_\lambda\|_p \leqq \|f-f_o\|_p + \|f_o-f_\lambda\|_p \leqq e_1 + e_2(b-a)^{\frac{1}{p}}$$

se $\lambda \leqq \delta_2$.

II) Seja agora $f \in C_{L_p(\rho)}([a,b])$. Pela hipótese feita sô bre ρ existe $\sigma > 0$ tal que $\rho(t) \geqq \sigma$ para $a \leqq t \leqq b$. Pelo Teorema de Weierstrass dado $e > 0$ existe um polinômio

$$\rho_1 \in C^{(\infty)}([a,b])$$

com $|\rho(t)-\rho_1(t)| < e\rho_1(t)$ para $t \in [a,b]$ e temos ainda $\rho_1(t) > 0$. Temos

$$f\rho_1^{\frac{1}{p}} \in C_{L_p}([a,b])$$

e portanto por I) existe $\phi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ tal que

$$\int_a^b |f - \frac{\phi}{\rho_1^{1/p}}|^p \rho_1(s)ds = \int_a^b |f\rho_1^{\frac{1}{p}} - \phi|^p ds < e^p ;$$

tomando $\phi_1 = \phi/\rho_1^{1/p} \in \mathcal{D}(]a,b[)$ temos

$$\int_a^b |f-\phi_1|^p\rho ds \leqq \int_a^b |f-\phi_1|^p\rho_1 ds + \int_a^b |f-\phi_1|^p|\rho-\rho_1|ds < e^p+e^{p+1}.$$

CQD

<u>Referências</u> - [2], [4], [11], [14]

REFERÊNCIAS

[1] - Bachman-Narici, "Functional Analysis", Academic Press, 1966.

[2] - Dieudonné, "Foundations of Modern Analysis", Academic Press, 1960. Existe uma tradução francesa.

[3] - Goffman-Pedrick, "First Course in Functional Analysis", Prentice-Hall, 1965.

[4] - Hönig, "Análise Funcional e Aplicações", 2 volumes, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970.

[5] - Medeiros, L.A., "Tópicos de Análise Funcional", Instituto de Matemática, Univ.Federal de Pernambuco, 1968.

[6] - Mihlin, "Integral Equations", Pergamon Press, 1964.

[7] - Nagumo, "Introduction to the theory of Banach spaces" 2 volumes, Instituto de Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, 1961.

[8] - Petrovsky, "Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen", Physica-Verlag, 1953.

[9] - Seeley, "An introduction to Fourier series and integrals", Benjamin, 1966.

[10] - Shilov, "Mathematical Analysis. A special course", Pergamon Press, 1965.

[11] - Stakgold, "Boundary value problems of Mathematical Physics", Vol.I, MacMillan, 1967.

[12] - Taylor, "Introduction to Functional Analysis", Wiley, 1958.

[13] - Tolstov, "Fourier Series", Prentice Hall, 1962.

[14] - Vulih, "Introduction to Functional Analysis", Addison-Wesley, 1963.

[15] - Widom, "Lectures on Integral Equations", Van Nostrand, 1969.

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

ÍNDICE ALFABÉTICO