ANÁLISE GEOMÉTRICA

ELON LAGES LIMA

7.º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

POÇOS DE CALDAS

julho de 1969

PREFÁCIO

Neste curso são desenvolvidos os fundamentos do Cálculo para funções de várias variáveis reais, em forma intrínseca. Isto significa que usamos a linguagem de vetores, segundo a qual uma função real $f(x^1,x^2,x^3)$ de 3 variáveis reais passa a ser uma função $f(x)$ do vetor $x = (x^1,x^2,x^3) \in R^3$, enquanto, por exemplo, duas funções reais $f^1(x^1,x^2,x^3)$, $f^2(x^1,x^2,x^3)$ são consideradas como uma função vetorial $f^2: R^3 \longrightarrow R^2$, onde $f(x) = (f^1(x^1,x^2,x^3), f^2(x^1,x^2,x^3))$.

A notação vetorial simplifica as fórmulas, esclarece os enunciados, "limpa" as demonstrações e contribui para uma compreensão melhor dos fenômenos diferenciais. (Vide, por exemplo, a Regra da Cadeia, e o Teorema da Função Inversa). Além disso, ela dá maior amplitude à validez dos resultados. Quase todos os teoremas aqui demonstrados se mantêm verdadeiros, com as mesmas demonstrações, para o Cálculo em Espaços de Banach. Na realidade, apenas por motivos psicológicos é que consideramos os espaços euclidianos R^n em vez de espaços normados mais gerais.

Usamos livremente a linguagem e os resultados elementares da Álgebra Linear e não nos abstemos de usar também alguns fatos simples da Topologia dos Espaços Euclidianos. Êstes são os principais pré-requisitos para a leitura destas notas.

Como leitura complementar, a fim de melhor ilustrar-se sôbre os pontos aqui considerados, o leitor poderá consultar os seguintes livros:

M. Spivak - Calculus on Manifolds

S. Lang - Analysis I (Capítulos 15, 16 e 17)

W. Rudin - Principles of Mathematical Analysis (Capítulo 9)

H. Cartan - Calcul Différentiel.

Como de hábito, os originais foram datilografados de maneira competente e rápida por Wilson Góes e impressos, com igual zêlo, pela turma da Seção de Publicações do IMPA. A todos, meus sinceros agradecimentos.

Os originais dêste trabalho foram notas de aula de um curso que lecionei na Universidade da California, em Berkeley, no ano de 1967. A tradução para o português foi feita por Henrique Browne Filho, Israel Vainsencher, Jair Koiler e Milton Kelmanson, aos quais estendo meus cordiais agradecimentos.

Rio de Janeiro, 30 de junho de 1969

Elon Lages Lima

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

§ 1. Definição de aplicação diferenciável.

Seja $U \subset R^m$ um conjunto aberto. Dizemos que uma aplicação $f: U \to R^n$ é diferenciável em um ponto $x \in U$ quando se tem, na vizinhança de x, uma "boa aproximação linear para a f".

Mais precisamente, deve existir uma transformação linear $T: R^m \to R^n$ tal que $f(x+h) = f(x) + T.h + r(h)$ onde $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

Na expressão acima, h deve ser tomado suficientemente pequeno para que $x+h \in U$ e portanto $f(x+h)$ tenha sentido. Como U é aberto, existe $\eta > 0$ tal que $|h| < \eta$ implica $x+h \in U$.

A igualdade $f(x+h) = f(x) + T.h + r(h)$ é simplesmente a definição do "resto" $r(h) \in R^n$. A diferenciabilidade de f no ponto x nos diz que êste resto é um "infinitésimo de ordem superior a h", isto é $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

Isto significa: é claro, que

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então $|r(h)| < \varepsilon |h|$.

Às vêzes é conveniente escrever a condição para a diferenciabilidade de $f: U \to R^n$ em $x \in U$ do seguinte modo:

$$f(x+h) = f(x) + T.h + \rho(h).|h|, \text{ onde } \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0.$$

Para tal, basta tomar $\rho(h) = r(h)/|h|$. Isto deixa $\rho(h)$ sem sentido quando $h = 0$. Mas como f é diferenciável em x, é natural definir $\rho(0) = 0$. Então $\rho(h)$ será uma função contínua de h no ponto $h = 0$.

Se $f: U \to R^n$ é diferenciável em $x \in U$ então, para cada vetor $h \in R^n$, tem-se evidentemente:

$$T.h = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

É única, portanto, a transformação linear $T: R^m \to R^n$ que dá a boa aproximação para a f perto de x. Ela é chamada de <u>derivada</u> de f no ponto x, e indicada por $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Abandonemos agora a notação provisória T. A condição para a diferenciabilidade de uma aplicação $f: U \to R^n$ ($U \subset R^m$ aberto) em um ponto $x \in U$ se escreve:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + r(h), \text{ com } \lim_{h \to 0} r(h)/|h| = 0.$$

É claro que se f é diferenciável no ponto x então f é contínua nêste ponto.

§ 2. Generalização.

As definições acima (como tudo o mais nêste capítulo) se aplicam com poucas exceções, ao caso mais geral de uma função $f: U \to F$ onde $U \subset E$ é um conjunto aberto e E, F são espaços vetoriais normados (as principais exceções são as observações que faremos sôbre matrizes jacobianas e outras maneiras de usar a base canônica do R^n).

Nas páginas seguintes, esta situação mais geral será considerada sem maiores comentários, especialmente em se tratando de subespaços E, F, etc, de espaços euclidianos R^n. Tais subespaços são espaços vetoriais normados mas não são, estritamente falando, espaços euclidianos R^n. Uma outra situação que escapa ao contexto de espaços euclidianos é a consideração dos espaços $E = \mathcal{L}(R^m, R^n)$ de transofrmações lineares entre espaços euclidianos. Se $u \in \mathcal{L}(R^m, R^n)$ é uma transformação linear de R^m para R^n, sua norma $|u|$ se define naturalmente por

$$|u| = \sup \{ |u(x)| ; x \in R^m, |x| = 1 \}.$$

Lembramos que esta norma induz uma topologia em $\mathcal{L}(R^m, R^n)$ que o faz homeomorfo a R^{mn}. O homeomorfismo associa a cada transformação linear $u: R^m \to R^n$ a m.n-uplá formada pelos elementos da matriz de u relativa às bases canônicas de R^m e R^n, arrumados em uma dada ordem.

Mais geralmente, se $E_1,\dots,E_p$ e F são espaços vetoriais normados, o espaço $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_p;F)$ das transformações p-lineares $u:E_1 \times\dots\times E_p \to F$ tem uma norma natural, definida por

$$|u| = \sup \{ |u(x_1,\dots,x_p)| \; ; \; x_i \in E_i, \; |x_i| = 1 \}.$$

Frequentemente se tem $E_1 = \dots = E_p = E$ e se escreve $\mathcal{L}_p(E,F)$ para indicar o espaço vetorial das transformações p-lineares $u:E \times\dots\times E \to F$.

§ 3. Comentários sôbre normas.

Recordemos os seguintes fatos:

1) Duas normas $|\;|_1$ e $|\;|_2$ no mesmo espaço vetorial E são ditas equivalentes quando elas induzem a mesma topologia em E. Isto acontece se, e sòmente se, existem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tais que $a|x|_1 \leq |x|_2 \leq b|x|_1$ para todo $x \in E$.

2) Num cartesiano $E \times F$ de espaços normados, as três normas

$$|(h,k)|_1 = |h| + |k|$$
$$|(h,k)|_2 = \max \{ |h|, |k| \}$$
$$|(h,k)|_3 = (|h|^2 + |k|^2)^{1/2}$$

são equivalentes duas a duas.

A diferenciabilidade de uma aplicação $f: U \to F$ ($U \subset E$, aberto) depende da topologia dos espaços E e F, mas não depende das particulares normas usadas nêsses espaços, pois podemos substituir essas normas por outras que lhes são equivalentes, sem mudar a validade das asserções $h \to 0$ e $r(h)/|h| \to 0$. Ao testar portanto, a diferenciabilidade de uma aplicação podemos, de acôrdo com nossa conveniência, substituir as normas dos espaços em questão por outras equivalentes. (cf. exemplo 3, abaixo).

CAPÍTULO 2

EXEMPLOS

1) Aplicações constantes. Uma aplicação constante é claramente diferenciável e sua derivada em qualquer ponto é igual à transformação linear zero.

2) Transformações lineares. Uma transformação linear $T: R^m \to R^n$ é diferenciável em cada ponto $x \in R^m$ e $T'(x) = T$. De fato, por linearidade, $T(x+h) = T.x + T.h$ logo $r(h) = 0$ e $T'(x) = T$.

3) <u>Transformações bilineares</u>. Uma transformação bilinear $B: R^m x R^n \to R^p$ é diferenciável em cada ponto $(x,y) \in R^m x R^n$ e sua derivada é a transformação linear $B'(x,y): R^m x R^n \to R^p$ definida por

$$B'(x,y) \cdot (h,R) = B(x,k) + B(h,y).$$

De fato, dada a transformação bilinear B, existe uma constante $c > 0$ tal que $|B(h,k)| \leq c|h|.|k|$ para todo $h \in R^m$ e para todo $k \in R^n$. (Basta tomar $c =$ $= \sup\{|B(h,k)| \ ; \ |h| = 1, \ |k| = 1\}$.)

Agora,

$$B(x+h,y+k) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k).$$

Nossa afirmação ficará provada quando mostrarmos que

$$\lim_{(h,k)\to o} \frac{B(h,k)}{|(h,k)|} = 0.$$

Usemos em $R^m x R^n$ a norma $|(h,k)| = \sup\{|h|,|k|\}$ $\frac{|B(h,k)|}{|(h,k)|} =$ $= \frac{|B(h,k)|}{\sup\{|h|,|k|\}} \leq \frac{c\ |h|\ |k|}{\sup\{|h|,|k|\}} = c.\ \inf\{|h|,|k|\}$, de onde se segue o resultado.

Casos especiais de transformações bilineares são o produto interno $R^m x R^m \to R$ dado por $\langle x,y\rangle = \sum x^i y^i$, e a composição de transformações lineares:

$$\mu: \mathcal{L}(R^n,R^p) \times \mathcal{L}(R^m,R^n) \to \mathcal{L}(R^m,R^p)$$

onde $\mu(S,T) = ST$. Em particular, a multiplicação de números reais é bilinear.

Também é bilinear a aplicação

$$B: \mathcal{L}(R^m, R^n) \times R^m \longrightarrow R^n \text{ , onde}$$
$$B(t,x) = T.x \text{ .}$$

4) <u>Inversão de Matrizes</u>. O conjunto $GL(R^n) \subset (R^n)$, das transformações lineares invertíveis $T: R^n \longrightarrow R^n$ é aberto. De fato, $T \in GL(R^n)$ se e sòmente se $\det(T) \neq 0$, e $\det: \mathcal{L}(R^n) \longrightarrow R$ é uma função contínua.

Considere a aplicação inversão $f: GL(R^n) \longrightarrow \mathcal{L}(R^n)$, definida por $f(X) = X^{-1}$. A expressão clássica de X^{-1} em têrmos de determinantes mostra que f é contínua. Afirmamos que f é diferenciável em cada $X \in GL(R^n)$ e que sua derivada $f'(X): \mathcal{L}(R^n) \longrightarrow \mathcal{L}(R^n)$ é a transformação linear $H \longmapsto -X^{-1} H X^{-1}$. De fato, se escrevemos

$$(X+H)^{-1} = X^{-1} - X^{-1} H X^{-1} + r(H)$$

e multiplicamos ambos os membros desta igualdade por $X+H$ obtemos, após uma fácil simplificação, $r(H) = (X^{-1}H)^2(X+H)^{-1}$. Portanto $|r(H)| = |X^{-1}|^2 \; |H|^2 \; |X+H|^{-1}$ e $\lim\limits_{H \to 0} r(H)/|H| = 0$.

Em particular, para $n = 1$, $\mathcal{L}(R^1)$ se identifica com R e $GL(R^1) \approx R^{\#} = R - \{0\}$. Segue-se que a função $f: R^{\#} \longrightarrow R$, dada por $f(x) = 1/x$ é diferenciável em cada $x \in R^{\#}$ e sua derivada é a transformação linear $f'(x): R \longrightarrow R$ tal que $f'(x).h = -h/x^2$. Em outras palavras, $f'(x)$ é identificada com o número $-1/x^2$ (ver exemplo 8 abaixo).

5) <u>As coordenadas de uma aplicação diferenciável</u>. Dado um conjunto aberto $U \subset R^m$, uma aplicação $f: U \to R^n$ fica determinada por n funções reais $f^1, \ldots, f^n: U \to R$, chamadas de <u>coordenadas</u> de f e definidas pela relação $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))$, $x \in U$.

Uma aplicação f é diferenciável no ponto $x \in U$ se, e sòmente se, cada função coordenada f^i for diferenciável no ponto x. Além disso $f'(x): R^m \to R^n$ será dada por $f'(x).h = (Df^1(x).h, \ldots, Df^n(x).h)$, onde preferimos a notação Df^i para evitar escrever $f^{i'}$ que ficaria deselegante.

Para provar isto, observe sòmente que a igualdade $f(x+h) = f(x) + T.h + r(h)$ é equivalente a n igualdades $f^i(x+h) = f^i(x) = T^i.h + r^i(h)$, onde $T.h = (T^1.h, \ldots, T^n.h)$, Além disso, $r(h)/|h| \to 0$ se, e sòmente se $r^i(h)/|h| \to 0$, para cada $i=1, \ldots, n$.

Um resultado inteiramente análogo se verifica para aplicações $f: U \to E_1 x E_2$, $U \subset R^m$ aberto, E_1, E_2 espaços vetoriais normados, f dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

6) <u>A matriz jacobiana</u>. Seja $f: U \to R^n$ diferenciável em $x \in U$ e e_j = j-ésimo vetor da base canônica do R^m. Então

$$f'(x).e_j = \lim_{t \to o} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t} \in R^n .$$

O limite acima é usualmente chamado de j-ésima <u>derivada parcial</u> de f no ponto x, e é indicado por $f'(x).e_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$.

Pelo exemplo anterior, se $f^1,\ldots,f^n: U \to R$ são as coordenadas de f então

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^j}(x),\ldots,\frac{\partial f^n}{\partial x^j}(x)\right).$$

Isto nos leva a uma expressão clássica para a matriz da transformação linear $f'(x): R^m \to R^n$ relativa às bases canônicas de R^m e R^n, conhecida como a <u>matriz jacobiana</u> de f no ponto x. O elemento (i,j) desta matriz é a i-ésima coordenada do vetor $f'(x).e_j$, e portanto:

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x) & \ldots & \frac{\partial f^2}{\partial x^m}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \frac{\partial f^n}{\partial x^2}(x) & \ldots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{bmatrix}$$

7) <u>Advertência</u>. A existência das derivadas parciais $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)(x)$, e portanto a existência da matriz $Jf(x)$, não é suficiente para garantir a diferenciabilidade de f no ponto x. Podemos dizer ainda mais: dada $f: U \to R^n$ ($U \subset R^m$ aberto) e $x \in U$, $h \in R^m$, o limite

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \in R^n$$

(quando existe) é conhecido como a <u>derivada direcional</u> de f

na direção h. Observamos no Capítulo 1 que se f é diferenciável no ponto x então existem tôdas as derivadas direcionais e $(\partial f/\partial h)(x) = f'(x).h$. A recíproca é falsa e o contra-exemplo clássico é $f:R^2 \to R$ definido por

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

É fácil de ver que se $h = (a,h)$ então $(\partial f/\partial h)(0,0) = a^2b/(a^2+b^2)$. Portanto f não pode ser diferenciável na origem, pois $(\partial f/\partial h)(0,0)$ não depende linearmente de h.

Como veremos mais tarde, a dificuldade aí se deve ao fato de que a derivada direcional $(\partial f/\partial e_1)(x,y)$, com respeito a $e_1 = (1,0)$ é uma função descontínua de (x,y) na origem.

8) Caminhos diferenciáveis. Uma aplicação definida num intervalo, tomando valôres num certo espaço, é chamada de um caminho neste espaço.

Dado um caminho $f:J \to R^n$, seu vetor velocidade em um ponto interior $x \in J$ é definido por

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in R^n$$

desde que êste limite exista. Escreveremos $v = (df/dt)(x)$ para indicar o vetor velocidade do caminho f no ponto x.

O vetor velocidade $(df/dt)(x)$ existe se, e sòmente se, o caminho $f:J \to R^n$ fôr diferenciável no ponto x. Além disso, êste vetor velocidade se identifica naturalmente com a derivada $f'(x)$. (Compare com o exemplo anterior, onde o domínio tem dimensão >1.) Vamos demonstrar isto.

Primeiro devemos notar o isomorfismo natural $\mathcal{L}(R,R^n) \approx R^n$, que associa a cada transformação $A \in \mathcal{L}(R,R^n)$ o vetor $a = A.1$, imagem de $1 \in R$ por A. Como $A.t = A.(t.1) = t.(A.1) = t.a$, ao identificarmos $\mathcal{L}(R,R^n)$ com R^n dêste modo, a operação $A.t$ da transformação A sôbre $t \in R$ será interpretada como o produto $t.a$ do escalar t com vetor a.

Dada $f: J \to R^n$, e dado $x \in J$, escrever $f(x+t) = f(x) + f'(x).t + r(t)$ é o mesmo que escrever $f(x+t) = f(x) + t.v + r(t)$, onde $v = f'(x).1$. Portanto

$$\frac{r(t)}{|t|} = \pm \left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t} - v \right] .$$

Segue-se que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0$ se, e sòmente se, f tem um vetor velocidade em x e, neste caso, êste vetor v é identificado com $f'(x)$.

Em particular, dados $J \subset R$ e $f: J \to R$ (uma função real de variável real), vemos que f é diferenciável num ponto interior $x \in J$ se, e sòmente se, f tem derivada no sentido clássico

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \frac{df}{dt}(x) .$$

Neste caso a é um número que identificamos com a transformação linear $t \to at$ de R em R. Esta transformação linear é a derivada $f'(s)$ no sentido da nossa definição.

Se as funções coordenadas de um caminho $f:J \to R^n$ são $f^1,\ldots,f^n$, o vetor velocidade $\frac{df}{dt}(x)$ é dado por

$$\frac{df}{dt}(x) = \left(\frac{df^1}{dt}(x),\ldots, \frac{df^n}{dt}(x) \right).$$

A noção de vetor velocidade nos dá uma interpretação geométrica para a derivada $f'(x):R^m \to R^n$ de uma aplicação $f:U \to R^n$ ($U \subset R^m$, aberto $x \in U$).

Dado $v \in R^m$, seja J um intervalo aberto contendo 0 tal que $x + tv \in U$ para cada $t \in J$. A aplicação f transforma o caminho $\phi:J \to R^m$, $\phi(t) = x + tv$, no caminho $t \mapsto f(x+tv) \in R^n$, e $f'(x).v$ é o vetor velocidade dêste último em $t = 0$. Veremos adiante que não é necessário usar o caminho linear ϕ. Qualquer caminho ϕ tal que $\phi(0) = x$ e $\frac{d\phi}{dt}(0) = v$, servirá.

9) <u>Funções Reais</u> - Enquanto que a derivada de um caminho $f:J \to R^n$ é um vetor, a derivada de uma função diferenciável $f:U \to R$, $U \subset R^m$, em um ponto $x \in U$, é um elemento de $\mathcal{L}(R^m,R) = (R^m)^*$ = espaço dual de R^m. Ou seja, $f'(x)$ é um <u>funcional linear</u>. Neste caso a notação tradicional é $df(x)$ ao invés de $f'(s)$ e $df(x)$ é chamada a <u>diferencial</u> de f no ponto x. A matriz jacobiana de $f'(x) = df(x)$ tem uma linha e m colunas:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x) \right) .$$

Os números $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ são as coordenadas do funcional linear $df(x)$ relativas à base canônica de $(R^m)^*$, espaço dual de R^m. Recordemos que esta base (e^i) de $(R^m)^*$ é caracterizada pela propriedade de que, dado qualquer vetor $v = (a^1,\ldots,a^m) \in R^m$, $e^i v = a^i$. Portanto, podemos escrever

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).e^i$$

Frequentemente os funcionais e^i são escritos como dx^i, já que os e^i podem ser interpretados como as funções coordenadas $x^i:R^m \longrightarrow R$, que a cada $x = (x^1,\ldots,x^m)$ fazem corresponder sua i-ésima coordenada x^i. Como estas funções são lineares, tem-se que $dx^i(x) = x^i$ para cada $x \in R^m$. Então, escrevemos

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\, dx^i .$$

A expressão acima é uma igualdade entre funcionais lineares no R^m. Ela significa que, para cada vetor $v = (a^1,\ldots,a^m) \in R^m$,

$$df(x).v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).(dx^i.v) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\, a^i .$$

10) <u>Funções Holomorfas</u>. Vamos identificar o corpo C dos números complexos com o plano R^2 pela correspondência $x+iy \longmapsto (x,y)$. Seja $U \subset C$ aberto. Uma função complexa $f:U \longrightarrow C$ é dita <u>holomorfa</u> quando, para cada $z \in U$, existe o

limite

$$A(z) = \lim_{h \to o} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} .$$

A definição acima se toma possível pela estrutura de corpo de C e significa precisamente que

$$f(z+h) = f(z) + A(z).h = r(h), \text{ onde } \lim_{h \to o} r(h)/|h| = 0.$$

Portanto, f é holomorfa se e sòmente se:

1º) A aplicação $f:U \to R^2$ é diferenciável.

2º) Sua derivada $f'(z):R^2 \to R^2$ é, em cada $z \in U$, uma transformação linear da forma $h \mapsto A(z).h$ (multiplicação pelo número complexo $A(z)$).

Mas as transformações lineares no plano que consistem na multiplicação pelo número complexo A são: a transformação zero (multiplicação pelo número complexo 0) e as <u>semelhanças positivas</u> (transformações da forma ρT, onde $\rho > 0$ e T uma rotação no sentido positivo. Para se ver isto, basta escrever $A = \rho e^{iO}$.

Em resumo: uma função complexa de variável complexa $f:U \to C$ é holomorfa se, e sòmente se, vista como uma aplicação $f:U \to R^2$, é diferenciável e, em cada ponto $z \in U$, sua derivada $f'(z)$, ou é 0, ou é uma semelhança positiva.

CAPÍTULO 3

AS CLASSES DE DIFERENCIABILIDADE C^k

§ 1. Derivadas de ordem 2.

Dado $U \subset R^m$ aberto, dizemos que uma aplicação $f:U \to R^n$ é diferenciável em U quando ela fôr diferenciável em todos os pontos $x \in U$. Define-se então a <u>aplicação derivada</u>

$$f':U \longrightarrow \mathcal{L}(R^m,R^n).$$

Ela associa a cada ponto $x \in U$ a transformação linear $f'(x):R^m \to R^n$, a derivada de f no ponto x. Como e espaço $\mathcal{L}(R^m,R^n)$ tem uma topologia, definida por sua norma, dizemos que $f:U \to R^n$ é <u>contìnuamente diferenciável</u>, ou que f é <u>de classe C^1</u>, e escrevemos $f \in C^1$, quando f fôr diferenciável e, além disso, $f':U \longrightarrow \mathcal{L}(R^m,R^n)$ fôr contínua.

Ao testarmos a diferenciabilidade de uma aplicação $f:U \to R^n$ em todos os pontos $x \in U$, é conveniente escrever a condição de forma mais explícita, deixando claro que o resto r não só depende de h, como também do ponto x em questão. Portanto, f é diferenciável em U precisamente quando, para cada $x \in U$, existe uma transformação linear $f'(x)$ e e (R^m,R^n) tal que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + r(x,h),$$

onde

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(x,h)}{|h|} = 0.$$

Isto significa, é claro, que dado $\varepsilon > 0$ existe, para cada $x \in U$, um $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ dependendo de ε e de x, tal que $|d| < \delta$ implica $|r(x,h)| < \varepsilon|h|$. Será provado abaixo (Capítulo 5) que se $f \in C^1$ então poderemos escolher δ independente de x em cada subconjunto compacto de U.

Quando $f: U \to R^n$ é de classe C^1, podemos perguntar quando a aplicação $f: U \to \mathcal{L}(R^m,R^n)$ tem uma derivada. Esta pergunta faz sentido porque $\mathcal{L}(R^m,R^n)$ é um espaço vetorial normado. Se quisermos, os elementos de $\mathcal{L}(R^m,R^n)$ podem ser pensados como matrizes $n \times m$ e f' pode ser considerada como a aplicação que a cada $x \in U$ associa a matriz jacobiana $Jf(x)$ de f em x. Então $f \in C^1$ implica que a matriz $Jf(x)$ depende continuamente de $x \in U$, isto é, cada uma de suas componentes $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)$ é uma função contínua de x. (Será mostrado adiante que a recíproca também é verdadeira. Veja o Capítulo 9.) Além disso, f' é diferenciável no ponto x se, e sòmente se, cada elemento $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ da matriz jacobiana for diferenciável no ponto x. Isto se segue do exemplo 5 acima.

Se $f': U \to \mathcal{L}(R^m,R^n)$ tem derivada no ponto $x \in U$, dizemos que f é <u>duas vêzes diferenciável</u> no ponto x e escrevemos $f''(x):R^m \to \mathcal{L}(R^m,R^n)$ para denotar a derivada de f' em x, isto é, a <u>segunda derivada</u> de f em x. Assim, $f''(x) \in \mathcal{L}(R^m, \mathcal{L}(R^m,R^n))$. Quando f é duas vêzes diferenciável em todos os pontos $x \in U$, dizemos que f é <u>duas vêzes diferenciável</u> em U. Se, além disso, a aplicação $f'':U \to \mathcal{L}(R^m, \mathcal{L}(R^m,R^n))$ for contínua, dizemos que f é <u>duas vêzes continuamente diferenciável</u> em U e escrevemos $f \in C^2$. Podemos dizer também que f é de <u>classe C^2</u>.

Existe um isomorfismo natural $\mathcal{L}(R^m, \mathcal{L}(R^m,R^n)) \approx \approx \mathcal{L}_2(R^m,R^n)$ que associa a cada transformação linear $T:R^m \to \mathcal{L}(R^m,R^n)$ a transformação bilinear $\hat{T}:R^m x R^m \to R^n$ tal que $\hat{T}(u,v) = (T.u).v$. Isto nos permite considerar a derivada segunda como sendo uma transformação bilinear $f''(x):R^m x R^m \to R^n$.

Vejamos de mais perto o caso especial de uma função duas vêzes diferenciável $f:U \to R$, $U \subset R^n$. Sua derivada é uma aplicação $f:U \to \mathcal{L}(R^m,R)$ dada por

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\, dx^i$$

onde $\{dx^1,\ldots,dx^m\}$ é a notação tradicional para a base canônica de $\mathcal{L}(R^m,R) = (R^m)^*$. As funções coordenadas de $f':U \to (R^m)^*$ são portanto $\frac{\partial f}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^m}$. Segue-se do exemplo 6, Cap. 2, que a matriz jacobiana de f'' em x tem elementos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i dx^j}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j})(x)$. Como transformação linear, a aplicação $f''(x):R^m \to (R^m)^*$ é caracterizada por

$$f''(x).e_i = \frac{\partial f'}{\partial x^i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)\, dx^j \,.$$

Vamos, por um momento, fazer uma distinção entre $f''(x)$ e a transformação bilinear $d^2f(x) \in \mathcal{L}_2(R^m;R)$ que lhe é associada pelo isomorfismo $\mathcal{L}(R^m,(R^m)^*) \approx \mathcal{L}_2(R^m;R)$. Por definição $d^2f(x)\ (u,v) = (f''(x).u).v$. A expressão anterior de $f''(x).e_i$ nos dá

$$d^2f(x).(e_i,e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x).$$

Lembremos agora que o espaço $\mathcal{L}_2(R^m;R)$ tem uma base natural, que consiste das formas bilineares $dx^i.dx^j:R^m x R^m \to R$, definidas por $dx^i.dx^j(u,v) = dx^i(u).dx^j(v) = \alpha^i \beta^j$ se $u = (\alpha^1,\ldots,\alpha^m)$ e $v = (\beta^1,\ldots,\beta^m)$. Qualquer forma bilinear $\phi \in \mathcal{L}_2(R^m,R)$ se escreve do modo único $\phi = \sum \alpha_{ij} dx^i dx^j$, onde $a_{ij} = \phi(e_i,e_j)$. Portanto

$$d^2f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) dx^i dx^j$$

é a expressão de $d^2f(x)$ em têrmos da base canônica de $\mathcal{L}_2(R^m,R)$.

De agora em diante, nenhuma distinção será feita entre d^2f e f''.

§ 2. Derivadas de ordem superior.

As derivadas de ordem superior são definidas indutivamente. Suponhamos que $f:U \to R^n$ é (k-1)-vêzes diferenciável. Então sua (k-1)-ésima derivada é uma aplicação $f^{(k-1)}:U \to \mathcal{L}_{k-1}(R^m,R^n)$ de U no espaço das aplicações (k-1)-lineares de R^m em R^n.

Se $f^{(k-1)}$ fôr diferenciável em um ponto $x \in U$, diremos que f é k vêzes diferenciável neste ponto e, usando o isomorfismo canônico $\mathcal{L}(R^m,\mathcal{L}_{k-1}(R^n)) \approx \mathcal{L}_k(R^m,R^n)$, idenficaremos $f^{(k)}(x)$, a derivada de $f^{(k-1)}$ em x, com uma aplicação k-linear de R^m em R^n, que chamaremos de k-ésima derivada de $\mathcal{L}$ em x. Quando $f^{(k)}(x)$ existe em cada ponto $x \in U$ dizemos que f é k vêzes diferenciável em U e se define a aplicação $f^{(k)}:U \to \mathcal{L}_k(R^m,R^n)$. Dizemos que f é uma aplicação de classe C^k ou k vêzes contìnuamente diferenciável, e escrevemos $f \in C^k$, quando $f^{(k)}$ fôr contínua. Por conveniência C^o denota o conjunto das aplicações contínuas.

Definimos a importante classe C^∞ das aplicações infinitamente diferenciáveis como sendo a interseção de tôdas as classes C^k: $C^\infty = C^o \cap C^1 \cap C^2 \cap \ldots$ Assim $f \in C^\infty$ se, e sòmente se, possuir derivadas de tôdas as ordens em cada ponto de U.

É claro que $C^\infty \subset \ldots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \ldots \subset C^1 \subset C^o$.

Frequentemente é necessário usar uma notação mais precisa e então, ao invés de C^k, se escreve $C^k(U,R^n)$ para indicar o conjunto de tôdas as aplicações $f:U \to R^n$ que são k vêzes contìnuamente diferenciáveis. As regras elementares de diferenciação (veja abaixo) mostram que cada $C^k(U,R^n)$ é um espaço vetorial real (de dimensão infinita) e que a derivada $Df = f'$ é uma transformação linear $D: C^k(U,R^n) \longrightarrow C^{k-1}(U,R^n)$.

Entre tôdas as classes, C^∞ é a única que é invariante pela aplicação derivada: $f \in C^\infty$ implica $f' \in C^\infty$. Isto a faz especialmente interessante. Uma classe também importante, mais restrita que C^∞, é a das aplicações analíticas. Nestas notas não vamos trabalhar muito com aplicações analíticas, mas algumas palavras sôbre elas serão ditas no Capítulo 11.

§ 3. Exemplos

11) Seja $f:U \to R^n$ dada por $f(x) = (f^1(x),\ldots,f^n(x))$.

Então $f \in C^k$ se, e sòmente se, cada coordenada $f^i:U \to R$ é de classe C^k. Se êste é o caso, $f^{(j)}(x) = D^{(j)} f(x) = (D^{(j)} f^1(x),\ldots,D^{(j)} f^n(x))$, onde $x \in U$ e $j = 1,\ldots,k$.

12) Tôda transformação linear $f:R^m \to R^n$ é de classe C^∞, pois $f':R^m \longrightarrow (R^m,R^n)$ é constante (a saber, $f'(x) = f$ para todos os $x \in R^m$) e portanto $f^{(k)} = 0$ para $k > 1$. Anàlogamente, tôda transformação bilinear $g:R^m x R^n \longrightarrow R^p$ é de classe C^∞ porque $g':R^m x R^n \longrightarrow \mathcal{L}(R^m x R^n, R^p)$ é uma

transformação linear (cf. exemplo 3, acima).

13) Seja $f:R^m \to R$ uma função polinomial, isto é, para $x = (x^1,\dots,x^m)$, temos $f(x) = \sum a_{j_1\dots j_m}(x^1)^{j_1}\dots(x^m)^{j_m}$. Dado $h = (h^1,\dots,h^m) \in R^m$, podemos, com um desenvolvimento elementar, colocar: $f(x+h) = f(x) + P(x).h + r(x,h)$, onde $P(x).h$ é a soma de todos os têrmos de $f(x+h)$ de primeiro grau relativamente a h e $r(x,h)$, considerado como um polinômio em h, tem todos os têrmos de grau >1. $P(x).h$ pode ser visto como o resultado de uma operação da matriz $m\times 1$, $P(x)$ (cujos elementos são polinômios em x) atuando no vetor h. Segue-se que f é diferenciável e $f'(x) = P(x)$, logo $f' \in C^o$ ou seja, $f \in C^1$. Isto mostra que tôda função polinomial é de classe C^1. Mas cada coordenada de f' é também uma função polinomial. Portanto $f' \in C^1$ isto é, $f \in C^2$. E assim por diante. Então $f \in C^k$ para cada $k > 0$, logo $f \in C^\infty$. Definimos uma <u>aplicação polinomial</u> $f:R^m \to R^n$ como aquela cujas coordenadas são funções polinomiais. Transformações polinomiais são portanto de classe C^∞. Definindo o grau de uma função polinomial $f:R^m \to R$ do modo usual, vemos que se o grau de f é p então $f^{(k)} = 0$ para $k \geqslant p+1$. Observe que as aplicações p-lineares são particulares aplicações polinomiais de grau p.

14) Nenhuma das inclusões $C^{k+1}(U,R^n) \subset C^k(U,R^n)$ se reduz à igualdade. Por exemplo, seja $U = R^n = R$ e considere as funções $f_k:R \to R$ definidas como se segue:

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

A função f_o é descontínua, f_1 é contínua mas não é diferenciável no ponto 0, logo $f_1 \in C^o - C^1$. Em geral, como $f_k' = k.f_{k-1}$, temos $f_k \in C^{k-1}$ mas $f_k \notin C^k$.

Um exemplo mais sofisticado é o das funções $g_k(t) = t^k \operatorname{sen}(\frac{1}{t})$, se $t \neq 0$ e $g_k(0) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$. Então $g_o \notin C^o$ e, para cada $k > 0$, $g_{2k+1} \in C^k$ mas deixa de pertencer a C^{k+1} porque sua $(k+1)$-ésima derivada não existe no ponto 0. Por outro lado, g_{2k+2} tem uma $(k+1)$-ésima derivada em todos os pontos mas não pertence a C^{k+1} porque sua derivada não é contínua em 0.

15) Se $J \subset R$ é um intervalo aberto e $f:J \to R^n$ é um caminho de classe C^k, então, para cada $j = 1,\ldots,k$, a j-ésima derivada $f^{(j)}(x)$, em $x \in J$, é ainda um vetor no R^n. De fato, $f':J \to R^n$ é ainda um caminho, como são f'', f''', etc. (ver o exemplo 8 acima). Se $f(t) = (f^1(t),\ldots,f^n(t))$ então $D^{(j)}f(t) = (D^{(j)} f^1(t),\ldots,D^{(j)} f^n(t))$. O vetor $D^2f(t)$ é chamado de aceleração do <u>caminho</u> f no instante t.

§ 4. <u>Observação sôbre caminhos seccionalmente diferenciáveis</u>.

Dado um caminho $f: [a,b] \to R^n$, dizemos que f é <u>diferenciável à direita</u> em um ponto $c \in [a,b)$ quando o limite lateral

$$f'(c^+) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{existe.}$$

Chamamos $f'(c^+)$ de derivada de f <u>à direita</u> em $x = c$.

Isto, é claro, faz sentido sòmente para $c \neq b$. Uma afirmação equivalente é

$$f(c+h) = f(c) + f'(c^+)h + r(h), \text{ onde } \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Anàlogamente se define a derivada à esquerda $f'(c^-)$, em um ponto $c \in (a,b]$.

Por exemplo, o caminho $f: [-1,+1] \to R$ dado por $f(x) = |x|$, tem derivadas laterais $f'(0^+) = 1$ $f'(0^-) = -1$ no ponto $x = 0$. O caminho $f: [-1,+1] \to R$, definido por $f(x) = x \text{ sen } \frac{1}{x}$, $(f(0) = 0)$ não tem derivadas laterais em $x = 0$.

Um caminho $f: [a,b] \to R^n$ é chamado <u>seccionalmente diferenciável</u> quando fôr contínuo e diferenciável a menos de um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_r \in [a,b]$, nos quais existem as derivadas laterais $f'(x_i+)$ e $f'(x_i-)$. Isto é equivalente a dizer que f é contínuo e existem $a = x_o < x_1 < \ldots < x_r = b$ tais que $f|[x_i, x_{i+1}]$ é diferenciável, para cada $i = 0,1,\ldots,r-1$.

Anàlogamente, um caminho $f: [a,b] \to R^n$ é chamado <u>seccionalmente de classe C^k</u> se f é contínuo e existem pontos $z = x_o < x_1 < \ldots < x_r = b$, tais que $f|[x_i, x_{i+1}]$ é de classe C^k para cada $i = 0,\ldots,k-1$.

CAPÍTULO 4

A REGRA DA CADEIA

O teorema abaixo é a versão intrínseca da regra da cadeia.

TEOREMA 1 - Sejam $U \subset R^m$ e $V \subset R^n$ conjuntos abertos, $f: U \to R^n$ uma aplicação diferenciável no ponto $x \in U$, com $f(U) \subset V$, e $g: V \to R^p$ uma aplicação diferenciável no ponto $y = f(x) \in V$. Então a aplicação composta $g \circ f: U \to R^p$ é diferenciável no ponto x e $(g \circ f)'(x) = g'(y)\ f'(x): R^m \to R^p$.

Em resumo, a derivada da aplicação composta é a composta das derivadas.

DEMONSTRAÇÃO: Podemos escrever

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \rho(h).|h|, \text{ com } \lim_{h \to o} \rho(h) = 0$$

$$g(y+k) = g(y) + g'(y).k + \rho(k).|k|, \text{ com } \lim_{k \to o} \rho(k) = 0$$

Então

$$g \circ f(x+h) = g(f(x) + f'(x).h + \rho(h).|h|).$$

Seja agora $k = f'(x).h + \rho(h).|h|$. Isto fornece

$$(g \circ f)(x+h) = g(f(x)+k) = g(f(x)) + g'(f(x)).f'(x).h +$$
$$+ g'(f(x)).\rho(h).|h| + \rho(k).|k| = (g \circ f)(x) + [g'(y)\ f'(x)].h +$$
$$+ \tau(h).|h|,$$

onde

$$\tau(h) = g'(\bar{y}).\rho(h) + \sigma(k).|f'(x).\frac{h}{|h|} + \rho(h)| \;.$$

Se $h \to 0$ então $k \to 0$ e $f'(x).(h/|h|)$ é limitada. Portanto $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$, provando o teorema.

COROLÁRIO 1 - <u>Se $f:U \to R^n$, $g:V \to R^p$ são ambas de classe C^k e $f(U) \subset V$, então $g \circ f:U \to R^p$ é também de classe C^k.</u>

De fato, a expressão $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ mostra que $(g \circ f)' = \mu \circ \lambda: U \to \mathcal{L}(R^m,R^p)$ onde $\mu: \mathcal{L}(R^n,R^p) \times \mathcal{L}(R^m,R^n) \to \mathcal{L}(R^m,R^p)$ é a multiplicação (composição) de transformações lineares e $\lambda:U \to \mathcal{L}(R^m,R^p) \times \mathcal{L}(R^m,R^n)$ é dada por suas coordenadas: $\lambda = (g' \circ f, f')$. Sabemos (exemplo 12, Cap.3) que $\mu \in C^\infty$. Suponhamos que o corolário está provado para a classe C^{k-1} (êle é óbvio para $k = 0$). Então, dadas $f,g \in C^k$, temos que $g' \circ f$, $f' \in C^{k-1}$ logo $\lambda \in C^{k-1}$ (ver exemplo 11, Cap. 3). Portanto $(g \circ f)' = \mu \circ \lambda \in C^{k-1}$, que significa $g \circ f \in C^k$.

APLICAÇÃO: usemos o corolário acima para mostrar que a inversão de transformações lineares é uma operação C^∞.

Seja $f:GL(R^m) \to \mathcal{L}(R^m)$ a inversão: $f(X) = X^{-1}$. Por simplicidade, escrevamos $E = \mathcal{L}(\mathcal{L}(R^m),\mathcal{L}(R^m))$ e consideremos a aplicação bilinear $g: \mathcal{L}(R^m) \times \mathcal{L}(R^m) \to E$ que associa a cada par (Y,Z) de elementos em $\mathcal{L}(R^m)$ o elemento $g(Y,Z) \in E$ tal que $g(Y,Z) \circ H = Y.H.Z$. Sabemos (exemplo 4, acima) que f é diferenciável e que sua derivada é $f': -g \circ (f,f):GL(R^m) \to E$, onde $(f,f)(X) = (f(X),f(X)) = (X^{-1},X^{-1})$. É claro que $f \in C^o$. Suponhamos por indução, que $f \in C^{k-1}$. Como $g \in C^{\infty}$, a equação $f' = -g\circ(f,f)$, mais o corolário, mostram que $f' \in C^{k-1}$, logo $f \in C^k$. Isto prova que $f \in C^k$ para todo k, portanto, a inversão $f: X \to X^{-1}$ é de classe C^{∞}.

COROLÁRIO 2 - Seja $f: U \to R^n$ diferenciável em $x_o \in U$. Dado $v \in R^m$, seja $x: t \mapsto x(t)$ um caminho em U, diferenciável em $t = 0$, com $x(0) = x_o$ e $x'(0) = v$. Então $f'(x_o).v$ é o vetor velocidade do caminho $t \mapsto f(x(t))$ em $t = 0$.

De fato, o vetor velocidade do caminho $t \mapsto f(x(t))$ em 0 é a derivada $(f\circ x)'(0) = f'(x_o).x'(0) = f'(x_o).v$.

NOTA: Êste corolário generaliza o modo geométrico de calcular $f'(x).v$. Veja o fim do exemplo 8, §2. Ali, o caminho $x(t)$ tinha a forma $t \mapsto x_o + tv$.

COROLÁRIO 3 - Seja $f: U \to R^n$ diferenciável em $x \in U \subset R^m$ e suponha que f admite uma inversa $g = f^{-1}: V \to R^m$, $V \subset R^n$, (isto é, $f(U) = V$, $g(V) = U$, $f\circ g = id_V$ e $g\circ f = id_U$) que é diferenciável no ponto $y = f(x)$. Então $f'(x): R^m \to R^n$ é um isomorfismo cujo inverso é $g'(y): R^n \to R^m$. Em particular, $m = n$.

De fato, como $(id_U)' = id_{R^m}$ e $(id_V)' = id_{R^n}$, as relações $f\circ g = id_V$ e $g\circ f = id_U$ implicam, pelo Teorema 1, que $f'(x)\circ g'(y) = id_{R^n}$ e $g'(y)\circ f'(x) = id_{R^m}$, logo $f'(x)$.

e $g'(y)$ são isomorfismos, sendo um o inverso do outro.

COROLÁRIO 4 (a antiga regra da cadeia) - No Teorema 1, suponha que $f = (f^1,\ldots,f^n)$ e $g = (g^1,\ldots,g^p)$. Então, para cada $i = 1,\ldots,p$ e $j = 1,\ldots,m$, temos:

$$\frac{\partial(g^i f)}{\partial x^j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i}{\partial y^k}(f(x)) \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x) .$$

Isto é uma consequência imediata do Teorema 1, mais o fato de que a matriz da composta de duas transformações lineares é o produto das matrizes das transformações.

OBSERVAÇÕES:

1) Se $U \subset R^m$ e $f:U \to R^m$ é diferenciável no ponto $x \in U$, então sua derivada $f'(x):R^m \to R^m$ é um endomorfismo (isto é, uma transformação linear de um espaço em si mesmo) e faz sentido falar no seu determinante, $\det(f'(x))$. Êle é chamado de determinante jacobiano de f em x e pode ser calculado usando a matriz jacobiana $Jf(x) = (\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x))$. Segue-se do corolário acima que o determinante jacobiano da aplicação composta é o produto dos determinantes jacobianos das aplicações que estamos compondo.

2) A notação clássica do Cálculo Diferencial - um pouco mais imprecisa que a nossa, porém sugestiva e de acôrdo com a prática (então universal) de enfatizar quantidades (" y é uma função de x ") ao invés de aplicações ("f leva x em

y ") - seria a seguinte, para o Corolário 4. Os pontos do primeiro espaço, R^m, serão escritos como "x", e os pontos do segundo espaço, R^n, como "y"; as funções f^i serão escritas como y^i $(= y^i(x))$. A derivada $\frac{\partial(g^i \circ f)}{\partial x^j}$ será a "derivada parcial de g^i com respeito à variável x^j ", e denotada por $\frac{\partial g^i}{\partial x^j}$. A formulação equivalente do Teorema 1 será:

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} .$$

Esta é, sem dúvida, uma fórmula atraente, cujo prêço, entretanto, é o de esconder o simples significado de "transitividade" (ou functiorial) do Teorema 1.

3) Com respeito ao Corolário 3, temos o exemplo clássico da função $f:R \to R$, dada por $f(t) = t^3$. É um homeomorfismo de classe C^∞, cujo inverso $s \mapsto s^{1/3}$ não pode ser diferenciável no ponto $0 = f(0)$ porque $f'(0) = 0$ não é um isomorfismo.

COROLÁRIO 5 - <u>(regras elementares de diferenciação) - Sejam $f,g:U \to R^n$ diferenciáveis no ponto $x \in U \subset R^m$ e um número real. Então $f+g:U \to R^n$ e $\lambda f:U \to R^n$ são diferenciáveis no ponto x, com $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ e $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$. Quando $n=1$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, então $1/f:U \to R$ é diferenciável no ponto x e $(1/f)'(x) = -(1/f(x)^2).f'(x)$. Finalmente, se $B:R^n x R^n \to R^p$ é bilinear então $B(f,g):U \to R^p$, dada por $y \mapsto B(f(y),g(y))$ é diferenciável no ponto x e $B(f,g)'(x).h = B(f'(x).h,g(x)) + B(f(x),g'(x).h)$.</u>

Em particular, quando $n=1$ e $B:R\times R \longrightarrow R$ é a multiplicação de números reais, $B(f,g) = f.g$, então $(f.g)'(x) = g(x).f'(x) + f(x).g'(x)$.

Isto resulta do Teorema 1, se notarmos que $f+g = \alpha\circ(f,g)$, $\lambda f = \lambda^*\circ f$, $1/f = i\circ f$ e $B(f,g) = B\circ(f,g)$ onde $(f,g):U \longrightarrow R^n$ é dada por $(f,g)(x) = (f(x),g(x))$, $\alpha:R^n\times R^n \longrightarrow R^n$ é dada por $\alpha(u,v) = u+v$, $\lambda^*:R^n \longrightarrow R^n$ é dada por $\lambda^*(u) = \lambda u$ e $i:R-\{0\} \longrightarrow R$ é dada por $i(t) = 1/t$. As aplicações α e λ^* são lineares, logo $\alpha'(u,v) = \alpha$ e $(\lambda^*)'(u) = \lambda^*$ para cada $u,v \in R^n$. A aplicação i é a inversão de matrizes não singulares 1×1. Usando os exemplos 3 e 4 do §2, o corolário fica provado.

EXEMPLO 16 - <u>Diferenciabilidade de produtos internos e normas</u>.

Um caso especial do Corolário 5 que merece destaque é a função $\langle f,g\rangle:U \longrightarrow R$, definida por $\langle f,g\rangle(x) = \langle f(x),g(x)\rangle$. Como o produto interno $\langle\ ,\ \rangle: R^n\times R^n \longrightarrow R$ é bilinear, a diferenciabilidade de f e g no ponto x implica em que $\langle f,g\rangle$ é diferenciável no ponto x, e $\langle f,g\rangle'(x)\cdot h = \langle f'(x).h,g(x)\rangle + \langle f(x),g'(x).h\rangle$ para todo $h \in R^m$.

Se tomarmos $f = g$, vemos que dada $f:U \longrightarrow R^n$ diferenciável em x, a função $|f|^2:y \longmapsto |f(y)|^2 = \langle f(y),f(y)\rangle$ é diferenciável no ponto x, e sua derivada é o funcional linear $h \longmapsto 2\langle f'(x).h,f(x)\rangle$.

Ainda pela regra da cadeia, como a função $t \longmapsto t^{1/2}$ é diferenciável nos reais positivos, segue-se que a norma

$u \mapsto |u| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ que provém do produto interno do R^n, é uma função diferenciável $|\ |: R^n - \{0\} \to R$, (note que a origem deve ser excluida). A derivada de $|u| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ em um ponto $u \neq 0$ no R^n é o funcional linear $h \mapsto \langle h,u\rangle/\langle u,u\rangle^{1/2}$. Anàlogamente, se $f: U \to R^n$ é diferenciável no ponto $x \in U$ e $f(x) \neq 0$, então $|f|: y \mapsto |f(y)| = \langle f(y),f(y)\rangle^{1/2}$ é diferenciável no ponto x e sua derivada é o funcional linear $h \mapsto \langle f'(x).h, f(x)\rangle/\langle f(x),f(x)\rangle^{1/2}$, $h \in R^m$.

Mais precisamente, as funções $u \mapsto |u|^2 = \langle u,u\rangle$ e $u \mapsto |u| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ são de classe C^∞ em R^n e $R^n - \{0\}$, respectivamente.

Devemos chamar a atenção para o fato de que se uma norma em R^n não provém de produto interno, então ela não é necessàriamente uma função diferenciável em $R^n - \{0\}$, nem $|u|^2$ tem de ser diferenciável em R^n.

Vamos ilustrar êste ponto com a norma $p(u) = \max\{|x|,|y|\}$, $u = (x,y) \in R^2$. Esta norma deixa de ser diferenciável em todos os pontos das diagonais $x = y$ e $x = -y$. Por exemplo, no ponto $u = (1,1)$ tem-se $\partial p/\partial(-e_1) = 1$, $\partial p/\partial(-e_1) = 0$. O gráfico da função $p(x,y) = \max\{|x|,|y|\}$ pode ser fàcilmente visualizado no R^3. É uma pirâmide de quatro faces, infinita, invertida.

CAPÍTULO 5

A DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO

A seguinte proposição desempenha um papel de importância fundamental no desenvolvimento do Cálculo em uma variável.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO - Seja $f:[a,b+h] \longrightarrow R$ uma função contínua tal que $f|(a,a+h)$ é diferenciável. Então existe t_o, $0 < t_o < 1$, tal que

$$f(a+h) - f(a) = h.f'(a+t_o h).$$

Êste resultado pode ser fàcilmente generalizado para funções reais com mais de uma variável.

Se $a,b \in R^m$, indiquemos por $[a,b] = \{a+t(b-a); 0 \leq t \leq 1\}$ o segmento de reta (fechado) ligando a e b. O correspondente segmento de reta aberto é $(a,b) = \{a+t(b-a);\ 0<t<1\}$.

Seja $f:U \longrightarrow R$ diferenciável em $U \subset R^m$. Suponha que o segmento $[a,a+h]$ está contido em U. Então existe t_o, $0 < t_o < 1$, tal que $f(a+h) - f(a) = f'(a+t_o h).h$.

De fato, considere a função real de uma variável $\phi: [0,1] \longrightarrow R$, definida por $\phi(t) = f(a+th)$. Ela satisfaz às condições do teorema do valor médio, logo existe $t_o \in (0,1)$ tal que $\phi(1) - \phi(0) = \phi(t_o)$. Mas $\phi(1) = f(a+h)$, $\phi(0) =$

$= f(a)$ e, pela regra da cadeia, $\phi'(t_o) = f'(a+t_o h).h$.

Para aplicações $f:U \longrightarrow R^n$, com $n > 1$, não se verifica a <u>igualdade</u> do valor médio, como mostra o exemplo abaixo.

EXEMPLO 17 - Seja $f:R \longrightarrow R^2$ o caminho de classe C^{∞} definido por $f(t) = e^{it} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Seu vetor velocidade, $f'(t) = i.e^{it} = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, é distinto de zero para todo $t \in R$. De fato $|f'(t)| = 1$ para todo t. Por outro lado, $f(2\pi) - f(0) = 0$, logo nenhuma igualdade da forma $f(2\pi) - f(0) = f'(t_o).2\pi$ poderá ser verdadeira.

No entanto, uma forma mais fraca do teorema do valor médio, formulada como uma desigualdade, é satisfeita para aplicações diferenciáveis $f:U \longrightarrow R^n$ em geral. Êste teorema é tão útil quanto o resultado clássico, pois nas aplicações raramente se precisa da igualdade, devido ao fato de nada se saber sôbre o número intermediário t_o.

TEOREMA 2 - (<u>desigualdade do valor médio): Seja $f:U \longrightarrow R^n$ contínua no conjunto aberto $U \subset R^m$. Se o segmento de reta fechado</u> $[a,a+h]$ <u>está contido em U e f é diferenciável em todos os pontos do segmento aberto $(a,a+h)$, então</u>

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h|. \sup_{0<t<1} |f'(a+th)|.$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, inicialmente, que f também é diferenciável no ponto a. Seja $\phi:[0,1] \longrightarrow R^n$

o caminho definido por $\phi(t) = f(a+th)$. Então ϕ é contínuo em $[0,1]$ e diferenciável em $[0,1)$. Como $\phi(0) = f(a)$, $\phi(1) = f(a+h)$ e $\phi'(t) = f'(a+th).h$, é suficiente provar que $|\phi(1) - \phi(0)| \leq M$, onde $M = \sup\limits_{0<t<1} |\phi'(t)|$. Isto será obtido quando mostrarmos que $|\phi(1) - \phi(0)| \leq M+\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Consideremos o conjunto

$$X = \{t\in [0,1] \; ; \; |\phi(s)-\phi(0)| \leq (M+\varepsilon)s \quad \text{para todo} \quad s\in [0,t]\}.$$

É claro que X é um intervalo fechado da forma $[0,\alpha]$. Devemos apenas mostrar que $\alpha = 1$. Suponhamos, por absurdo, que

1. Então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ e tal que $0 \leq h < \delta$ implica $\phi(\alpha+h) = \phi(\alpha) + \phi'(\alpha).h + r(h)$, onde $|r(h)| \leq \varepsilon.h$. Segue-se que $\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| \leq (M+\varepsilon)h$, se $0 \leq h < \delta$. Como $\alpha \in X$ temos também que $|\phi(\alpha) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon)\,\alpha$. Portanto, $0 \leq h < \delta$ acarreta $|\phi(\alpha+h) - \phi(0)| \leq (M+\varepsilon)\,(\alpha+h)$. Tendo em conta que $\alpha \in X$, isto mostra que todo $\alpha+h$ com $0 \leq h < \delta$ também pertence a X. Contradição.

Da mesma maneira demonstraríamos o caso em que f é diferenciável num segmento do tipo $(a,b]$. Em seguida, observamos que se a desigualdade do valor médio vale para $(a,b]$ e $[b,x)$, então vale para (a,c).

OBSERVAÇÃO: Quando f fôr diferenciável no segmento fechado $[a,b]$, podemos tomar o sup para $0 \leq t \leq 1$.

COROLÁRIO 1 - Seja $U \subset R^m$ um conjunto aberto conexo e $f:U \to R^n$ uma aplicação diferenciável tal que

$f'(x) = 0$ para todo $x \in U$. Então f é constante em U.

Fixemos um ponto $a \in U$. O conjunto X dos pontos $x \in U$ tais que $f(x) = f(a)$ é fechado em U, pois f é contínua. Além disso, se $f(x) = f(a)$, $x \in U$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica que o segmento $[x,x+h]$ está contido em U. (Basta tomar como δ o raio de uma bola centrada em x e contida em U). Então, pelo teorema, e pelo fato de que $f' \equiv 0$, vemos que $|h| < \delta$ implica $|f(x+h) = f(x)| = 0$, isto é, $f(x+h) + f(a)$, logo $x+h \in X$. Portanto X é aberto e fechado em U, e não vazio. Como U é conexo, segue-se que $X = U$, provando o corolário.

COROLÁRIO 2 - Seja $f: U \to R^n$ contínua em um conjunto aberto $U \subset R^m$. Se o segmento de reta fechado $[a,a+h]$ está contido em U e f é diferenciável em todos os pontos do segmento de reta aberto $(a,a+h)$, então, para cada transformação linear $T: R^m \longrightarrow R^n$, vale a seguinte desigualdade:

$$|f(a+h) - f(a) - T.h| \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(a+th) - T|.|h| .$$

Para ver isto, usemos a desigualdade do valor médio com a aplicação $g: U \to R^n$, definida por $g(x) = f(x) - T.x$.

O caso especial do Corolário 2 em que $f'(a)$ existe e $T = f'(a)$ nos dá uma estimativa para o resto $r(a,h) =$ $= f(a+h) - f(a) - f'(a).h$. Vamos usar isto para mostrar que funções de classe C^1 são uniformemente diferenciáveis em conjuntos compactos.

Uma aplicação diferenciável $f: U \to R^n$ é dita ser <u>uniformemente diferenciável</u> em um subconjunto $X \subset U$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, pode ser encontrado um $\delta > 0$ tal que $|r(x,h)| = |f(x+h) - f(x) - f'(x).h| < \varepsilon|h|$ <u>qualquer que seja</u> $x \in X$ e $|h| < \delta$ com $x+h \in U$.

COROLÁRIO 3 - <u>Seja $f: U \to R^n$ uma aplicação de classe C^1. Então f é uniformemente diferenciável em cada subconjunto compacto $K \subset U$.</u>

De fato, dado $K \subset U$ compacto, existe $\delta > 0$ tal que $x+h \in U$ para todo $x \in K$ e $|h| < \delta$. Isto implica, em particular, que para $x \in K$ e $|h| < \delta$, o segmento $[x, x+h]$ está inteiramente contido em U. Portanto, podemos aplicar o Corolário 2, que dá

$$|r(x,h)|/|h| \leq \sup_{0<t<1} |f'(x+th) - f'(x)|$$

para todo $x \in K$ e $|h| < \delta$. Como f' é uniformemente contínua em K, é possível, se necessário, reduzir δ de modo que $|f'(x+h) - f'(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$ e $|h| < \delta$. Isto prova o corolário.

COROLÁRIO 4 - <u>Seja $c \in U$ e suponha que $f: U \to R^n$ é uma aplicação contínua, diferenciável em $U - \{c\}$. Se existe o limite $\lim_{x \to c} f'(x) = T \in \mathcal{L}(R^m, R^n)$, então f é diferenciável em c e $f'(c) = T$.</u>

Na demonstração usamos o Corolário 2 com tôda a sua fôrça e vemos porque, no Teorema 2, não é preciso supor que f é diferenciável em todo o segmento fechado.

Seja $\delta > 0$ tal que $c+h \in U$ se $|h| < \delta$. Então, pelo Corolário 2,

$$\frac{|r(c,h)|}{|h|} = \frac{|f(c+h)-f(c)-T.h|}{|h|} \leq \sup_{0<t<1} |f'(c+th) - T| .$$

Portanto, $\lim_{h\to 0} |r(c,h)|/|h| = 0$, mostrando que f é diferenciável em c, com $f'(c) = T$.

É ainda uma consequência imediata da desigualdade do valor médio que se $f:U \to R^n$ é diferenciável e sua derivada é limitada em U, isto é, $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in U$, então f satisfaz uma condição de Lipschitz $|f(x+h)-f(x)| \leq M.|h|$, desde que o segmento de reta $[x,x+h]$ esteja contido em U. Uma espécie de dual dêste resultado é o seguinte:

PROPOSIÇÃO 1 - <u>Seja $f:U \to R^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset R^m$. Suponhamos que $f'(x):R^m \to R^n$ seja injetiva em cada ponto x de um compacto $K \subset U$. Então existem números $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x,y \in K$, com $|x-y| < \delta$, implica $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Como $f'(x)$ é injetiva para cada $x \in K$, a função contínua $\lambda: K \times S^{m-1} \to R$, definida por $\lambda(x,u) = |f'(x).u|$, assume apenas valôres positivos. Como $K \times S^{m-1}$ é compacto, o número $2c = \inf\{|f'(x).u|; x \in K, u \in S^{m-1}\}$ é positivo. Notemos que $|f'(x).v| \geq 2c|v|$ para todo $x \in K$ e qualquer $v \in R^m$. Escrevamos $f(x)-f(y) = f'(y).(x-y) +$

$+ \rho(x,y).|x-y|$. Pela diferenciabilidade uniforme de f em K, (vide Corolário 3) existe $\delta > 0$ tal que $x,y \in K$, $|x-y| < \delta$ implicam $|\rho(x,y)| < c$. Assim, para tais x,y, temos

$$|f(x)-f(y)| \geq |f'(y).(x-y| - |\rho(x,y)||x-y| \geq$$
$$2c|x-y| - c|x-y| = c|x-y| .$$

EXEMPLOS:

18) Seja $f:R \to R$ definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. É uma função de classe C^∞. Realmente, se $x \neq 0$, $f'(x) = 2x^{-3} \exp(-1/x^2)$ e $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$. Pelo Corolário 4, $f'(0)$ existe e é igual a zero. Anàlogamente, para cada $k = 2,3,\ldots$ a k-ésima derivada de f é da forma $f^{(k)}(x) = P(1/x).\exp(-1/x^2)$, se $x \neq 0$, onde $P(1/x)$ é um polinômio em x^{-1}. Segue-se que $\lim\limits_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0$, logo tôdas as derivadas $f^{(k)}(0)$ existem e são iguais a zero.

19) A Proposição 1 implica que, dada $f:U \to R^n$ de classe C^1, com $f'(x_o):R^m \to R^n$ injetiva, existe $\delta > 0$ tal que a restrição de f à bola $B_\delta(x_o)$ é injetiva.

Como uma aplicação dêste comentário, consideremos o caso de uma função duas vêzes diferenciável $f:U \to R$. Se $x_o \in U$ é tal que $f'(x_o) = 0$, dizemos que x_o é um <u>ponto crítico</u> de f. Investiguemos a função derivada $f':U \to (R^m)^*$. Se $f''(x_o):R^m \to (R^m)^*$ fôr um isomorfismo, diremos que x_o é <u>um ponto crítico não degenerado</u> (isto significa que a "matriz Hessiana" $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j)$ tem determinante não nulo no ponto x_o. Se x_o é um ponto crítico não degenerado de f, então, aplicando a observação acima a $f':U \to (R^m)^*$, concluimos que existe uma vizinhança V de x_o tal que $x \in V$ implica $f'(x) \neq 0$.

Em outras palavras, os pontos críticos não degenerados são isolados no conjunto de todos os pontos críticos de $f:U \to R$. Em particular, como os pontos críticos de f òbviamente formam um subconjunto fechado de U, no caso em que f possuir sòmente pontos críticos não degenerados, um subconjunto compacto de U não poderá conter um número infinito de pontos críticos de f.

CAPÍTULO 6

INTEGRAIS

§ 1. Integração de caminhos.

Nesta seção, usamos pela primeira vez o fato do espaço R^n ser completo.

Uma partição de um intervalo fechado $[a,b] \subset R$ é um conjunto $P = \{t_o,\ldots,t_k\}$ tal que $a = t_o < t_1 < \ldots < t_k = b$. O conjunto de tôdas as partições de $[a,b]$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão. Quando $P \subset Q$, dizemos que a partição Q é mais fina que P. Denotemos por $|P| = \max\{t_{i+1}-t_i; 0,1,\ldots,k-1\}$ a norma da partição $P = \{t_o,\ldots,t_k\}$.

Um caminho $f: [a,b] \to R^n$ induz uma aplicação $\Sigma_f: \mathcal{P} \to R^n$ do conjunto $\mathcal{P}$ de tôdas as partições de $[a,b]$ em R^n: dada $P = \{t_o,\ldots,t_k\} \in \mathcal{P}$ definimos

$$\Sigma_f(P) = \sum_{i=o}^{k-1} (t_{i+1}-t_i)f(t_i) .$$

A menos que haja ambiguidade com respeito à aplicação f que estamos considerando, vamos escrever simplesmente $\Sigma(P)$ em lugar de $\Sigma_f(P)$.

Um vetor $v\in R^n$ chama-se *integral* do caminho $f: [a,b] \to R^n$ quando, para cada $\varepsilon>0$ fôr possível achar $\delta>0$ tal que $|P|<\delta$ acarreta $|v-\sum(P)|<\varepsilon$. Escrevemos então

$$v = \int_a^b f(t)dt.$$

Essa definição pode ser reformulada mais concisamente como

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|P|\to o} \sum(P).$$

É fácil ver que se a integral existir ela é única.

Quando a integral de um caminho $f: [a,b] \to R^n$ existe, dizemos que o caminho f é *integrável*.

Denotemos por $\mathcal{B} = \mathcal{B}([a,b];R^n)$ o conjunto de todos os caminhos limitados $f: [a,b] \to R^n$. Evidentemente as operações usuais $f+g$ e λf tornam $\mathcal{B}$ um espaço vetorial. Salvo menção explícita em contrário, considere-se $\mathcal{B}$ com a topologia de convergência uniforme, definida pela norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid a\leq t\leq b\}$.

PROPOSIÇÃO 2 - *Sejam $f,g: [a,b] \to R^n$ integráveis. Então, para qualquer número real α e qualquer aplicação linear $T:R^n \to R^p$, as aplicações αf, $T\circ f$ e $f+g$ são também integráveis. E mais, valem as seguintes relações:*

(1) $\displaystyle\int_a^b [f\,'t(+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

(2) $\displaystyle\int_a^b \alpha.f(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$

(3) $\int_a^b (T\circ f)(t)dt = T(\int_a^b f(t)dt)$

(4) $|\int_a^b f(t)dt| \leq (b-a).\|f\| = (b-a) \sup \{|f(t)| \mid a\leq t\leq b\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Essas relações seguem-se, por passagem direta ao limite, dos seguintes fatos evidentes:

$$\sum_{f+g}(P) = \sum_f(P) + \sum_g(P) \ ; \ \sum_{\alpha f}(P) = \alpha\sum_f(P); \ \sum_{T\circ f}(P) =$$
$$= T.(\sum_f(P)) \ ; \ |\sum_f(P)| \leq (b-a)\|f\|,$$

porque são válidos para uma partição P qualquer do intervalo $[a,b]$.

Naturalmente, (2) é um caso especial de (3), Um outro caso especial de (3) que destacamos para uso posterior é o

COROLÁRIO - Seja $T:[a,b]\to \mathcal{L}(R^m,R^n)$ integrável. Para todo vetor fixo $h\in R^m$, o caminho $t\mapsto T(t).h$ também é integrável e $\int_a^b T(t).h\,dt = (\int_a^b T(t)dt).h$.

Para a demonstração, faça em (3) $f = T$, e considere para o papel de T a aplicação linear $S\mapsto S.h$ de $\mathcal{L}(R^m,R^n)$ em R^n.

A proposição acima nos diz que o conjunto $\mathfrak{J}$ dos caminhos limitados e integráveis é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}$ e que a integral é uma transformação linear $\mathfrak{J}\to R^n$. A afirmativa (4) significa que $f\mapsto\int_a^b f(t)dt$ é uma aplicação uniformemente contínua. Mais precisamente, temos:

PROPOSIÇÃO 3 - <u>O conjunto $\mathfrak{J}$ dos caminhos limitados integrá-</u>

<u>veis é fechado em $\mathcal{B}$. Notras palavras, dada uma sequência de caminhos limitados integráveis</u> $f_m: [a,b] \to R^n$ <u>convergindo uniformemente a</u> $f: [a,b] \to R^n$, <u>então f é (limitada e) integrável. Além disso,</u>

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(t)dt .$$

DEMONSTRAÇÃO: Excreva $I_m = \int_a^b f_m(t)dt$, $m = 1,2,\ldots$. Como

$$|I_m - I_k| \leq (b-a)\,\|f_m - f_k\|, \text{ por (4) acima,}$$

segue-se que as integrais I_m formam uma sequência de Cauchy em R^n, e portanto, convergem para um vetor $I \in R^n$. Afirmamos que I é a integral de f. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ dado. Existe um inteiro $m > 0$ tal que $\|f-f_m\| < \varepsilon/3(b-a)$ e $|I-I_m| < \varepsilon/3$. Existe também $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ acarreta $|\Sigma_{f_m}(P) - I_m| < \varepsilon/3$. Observe que $|\Sigma_f(P) - \Sigma_{f_m}(P)| \leq (b-a)\|f-f_m\|$ Então $|P| < \delta$ acarreta $|I - \Sigma_f(P)| \leq |I-I_m| + |I_m - \Sigma_{f_m}(P)| + |\Sigma_{f_m}(P) - \Sigma_f(P)| < \varepsilon$. Isto completa a demonstração.

Como exemplos de caminhos integráveis temos evidentemente os caminhos constantes $f: [a,b] \to \{c\} \subset R^n$. Exemplos menos triviais serão fornecidos agora.

Um caminho $f: [a,b] \to R^n$ é chamado um <u>caminho de saltos</u> quando existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_k\}$ de $[a,b]$ e k constantes $v_0, \ldots, v_{k-1} \in R^n$ tal que $f(t) = v_i$ para $t_i < t < t_{i+1}$.

PROPOSIÇÃO 4 - <u>Seja</u> $f: [a,b] \to R^n$ <u>um caminho de saltos como acima. Então f é integrável e</u>

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=o}^{k-1} (t_{i+i}-t_i)v_i \; .$$

DEMONSTRAÇÃO: Escreva $\sum_{i=o}^{k-1} (t_{i+1}-t_i)v_i = I(P)$. Observe que $I(P)$ não se altera se acrescentarmos mais pontos à partição P. Em particular $I(P) = I(P \cup Q)$ para tôdas as partições Q. Agora, suponha dado $\varepsilon > 0$. Escreva $d = \max \{ |f(s)-f(t)| \mid s,t \in [a,b] \}$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon/(k-1)d$ e $\delta < t_{i+1}-t_i$ para todo $i = 0,1,\ldots,k-1$. Agora seja $Q = \{s_o,\ldots,s_r\}$ uma partição de $[a,b]$ com $|Q| < \delta$. Nenhum intervalo de Q conterá mais de um ponto de salto t_i. Por outro lado, cada intervalo de P conterá pelo menos um $s_j \in Q$. Denote por $(s_\alpha, s_{\alpha+1})$ os intervalos de Q que não contém nenhum t_i, e por $(s_\beta, s_{\beta+1})$ aquêles que contem (exatamente um) t_i, $i = i(\beta)$. Então

$$\Sigma(Q) = \Sigma(s_{\alpha+1}-s_\alpha)f(s_\alpha) + \Sigma(s_{\beta+1}-s_\beta)f(s_\beta) = \Sigma(s_{\alpha+1}-s_\alpha)f(s_\alpha) +$$
$$+ \Sigma(s_{\beta+1}-t_i)f(s_\beta) + \Sigma(t_i-s_\beta)f(s_\beta); \; I(P \cup Q) = \Sigma(s_{\alpha+1}-s_\alpha)f(s_\alpha) +$$
$$+ \Sigma[(s_{\beta+1}-t_i)f(t_i) + (t_i-s_\beta)f(s_\beta)]; \; \text{portanto}$$
$$|\Sigma(Q) - \Sigma(P)| = |\Sigma(Q) - \Sigma(P \cup Q)| \leq \Sigma(s_{\beta+1}-t_i)|f(s_\beta)-f(t_i)|.$$

A última soma tem $k-1$ têrmos. Logo

$$|\Sigma(Q) - \Sigma(P)| \leq (k-1)\delta d < \varepsilon,$$

o que demonstra a proposição.

COROLÁRIO - <u>Todo limite uniforme de caminhos de saltos é integrável</u>.

É fácil mostrar que todo caminho contínuo é um limite uniforme de caminhos de saltos. Porém vamos provar agora um resultado mais geral, caracterizando todos os limites uniformes de caminhos de saltos.

Um caminho $f: [a,b] \to R^n$ é dito <u>regular</u> se, para cada $c \in [a,b]$, existem os limites laterais $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(x)$.

Exemplos de caminhos regulares são os caminhos contínuos, assim como os caminhos de saltos. A conhecida função $f: R \to R$ definida por $f(t) = 0$ para t irracional e $f(p/q) = 1/q$ se o racional p/q está sob forma irredutível, fornece um exemplo de um caminho regular. De fato, para todo $c \in R$, pode-se fàcilmente ver que ambos os limites laterais $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(x)$ são iguais a zero. Uma função monótona $f: [a,b] \to R$ é também um exemplo de caminho regular.

Um caminho $f: [a,b] \to R^n$ é regular se, e sòmente se, êle é o limite uniforme de uma sequência de caminhos de saltos. Isto é equivalente a dizer

PROPOSIÇÃO 5 - <u>O conjunto dos caminhos regulares $f: [a,b] \to R^n$ é o fêcho, em $\mathcal{B}([a,b], R^n)$, do conjunto de caminhos de saltos</u>.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que $f: [a,b] \to R^n$ é regular. Afirmamos que dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, pode-se achar um caminho de saltos $g: [a,b] \to R^n$ tal que $|f(t)-g(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a,b]$. Ora, sendo f regular, cada $x \in [a,b]$ é o centro de um intervalo I_x tal que $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$ para todos os $s,t \in I_x \cap [a,b]$, com $s,t < x$ ou $x < s,t$. (Nos pontos extremos tomemos $I_x = [a,a+\delta)$, e $I_b = (b-\delta,b]$.) Por compacidade, $[a,b]$ pode ser coberto por um número finito $I_{x_o},\ldots,I_{x_k}$ dêsses intervalos, com $a = x_o < x_1 < \ldots < x_a = b$. Eliminamos os intervalos supérfluos, de sorte que nenhum I_{x_i} está contido na união dos demais. Assim, para cada $i = o,1,\ldots,k-1$, existe um ponto $y_i \in I_{x_i} \cap I_{x_{i+1}}$ com $x_i < y_i < x_{i+1}$. Então $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$ desde que s,t pertençam ao mesmo intervalo aberto (x_i,y_i) ou (y_i,x_{i+1}). Agora define uma função de saltos $\varrho: [a,b] \to R^n$ pondo $g=f$ nos pontos x_i,y_i e, em cada intervalo (x_i,y_i) ou (y_i,x_{i+1}) tomando g constante e igual ao valor de f no ponto médio do intervalo. Evidentemente, $|f(t)-g(t)| < \varepsilon$ para todos os $t \in [a,b]$.

Por outro lado, considere uma sequência de caminhos de saltos $f_m: [a,b] \to R^n$ que convirja uniformemente a um caminho $f: [a,b] \to R^n$. Para demonstrar que f é regular, tome um $c \in [a,b]$ arbitrário $(c \neq d)$. Mostremos que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ existe. De fato, se $\lim\limits_{x \to c^-} f_m(x) = v_m$, então (v_m) converge à $v \in R^m$ e $v = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$. Senão vejamos: dado $\varepsilon > 0$, ache m_o tal que $m,p \geq m_o$ acarrete $|f_m(x)-f_p(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in [a,b]$. Então, para $m,p \geq m_o$ podemos escolher $x < c$ suficientemente próximo a c para que $|f_m(x)-v_m| < \varepsilon/3$ e $|f_p(x)-v_p| < \varepsilon/3$. Isso fornece

$$|v_m-v_p| < |v_m-f_m(x)| + |f_m(x)-f_p(x)| + |f_p(x)-v_p| < \varepsilon$$

para todos os $m,p \geq m_o$. Portanto (v_m) é uma sequência de Cauchy em R^n, tendo pois um limite $v \in R^n$. Finalmente, mostramos que $v = \lim_{x \to c^-} f(x)$. Seja $\varepsilon > 0$. Existe m tal que $|v_m - v| < \varepsilon/3$ e $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in [a,b]$. Também existe $\delta > 0$ tal que $c-\delta<x<c$ acarreta $|f_m(x)-v_m| < \varepsilon/3$. Logo, $c-\delta < x < c$ acarreta $|f(x)-v| \leq |f(x)-f_m(x)| +$
$+ |f_m(x)-v_m| + |v_m - v| < \varepsilon$.

Isto mostra que o conjunto dos caminhos regulares é fechado sob limites uniformes, de sorte que a proposição está demonstrada.

COROLÁRIO - <u>Um caminho regular tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades</u>.

Realmente, seja f o limite uniforme de caminhos de saltos f_m. O conjunto D dos pontos de descontinuidade de todos os f_m é enumerável. Visto que o limite uniforme preserva continuidade num ponto, f é contínua fora de D.

EXEMPLO 20 - Damos aqui uma aplicação de integração de caminhos a um tópico clássico: a fórmula para o comprimento de um caminho de classe C^1.

Um caminho $f: [a,b] \to R^n$ diz-se <u>retificável</u> se existe um número real $\ell = \ell(f)$, chamado o <u>comprimento</u> de f, com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $P = \{t_o, \ldots, t_k\}$ é uma partição de $[a,b]$ cuja norma $|P|$ é $< \delta$ então

$$| \ell(f) = \sum_{i=o}^{k-1} |f(t_{i+1})-f(t_i)| | < \varepsilon$$

Poderíamos escrever

$$\ell(f) = \lim_{|P|\to o} \ell(P), \text{ onde } \ell(P) = \ell_f(P) = \sum_{i=o}^{k-1} |f(t_{i+1})-f(t_i)|$$

Nem todos os caminhos contínuos são retificáveis. Por exemplo, se $f:[0,1]\to R^2$ é definida por $f(t) = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$ $t\neq 0$, $f(0) = (0,0)$ pode-se mostrar que f não é retificável. No entanto, afirmamos que se $f:[a,b]\to R^n$ é um caminho de classe C^1, então f é retificável, e mais ainda, seu comprimento é dado por

$$\ell(f) = \int_a^b |f'(t)|dt.$$

Realmente, seja $\varepsilon > 0$ dado. Pela definição de integral existe $\delta' > 0$ tal que para tôda partição $P = \{t_o,\ldots,t_k\}$ de $[a,b]$ com $|P| < \delta'$:

$$(*) \qquad \left|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=o}^{k-1} (t_{i+1}-t_i)|f'(t_i)|\right| < \varepsilon/2 \ .$$

Pela continuidade uniforme de $f'(t)$, existe $\delta'' > 0$ tal que se $u,v \in [a,b]$ com $|u-v| < \delta''$ tem-se $|f'(u)-f'(v)| < \varepsilon/2\,(b-a)$. Assim, se $|P| < \delta''$, temos (usando a desigualdade $||x| - |y|| \leq |x-y|$ e o Corolário 2 da Desigualdade do Valor Médio:

$$\left| \sum |f(t_{i+1})-f(t_i)| - \sum (t_{i+1}-t_i)|f'(t_i)| \right| \leq$$

$$\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i) - (t_{i+1}-t_i)f'(t_i)| \leq$$

$$\sum (t_{i+1}-t_i). \sup_{0\leq s\leq 1} |f'(t_i + s(t_{i+1}-t_i))-f'(t_i)| \leq$$

$$\sum (t_{i+1}-t_i)\varepsilon/2(b-a) = \varepsilon/2.$$

Seja $\delta = \min \{\delta', \delta''\}$. Combinando êsta última desigualdade com (*) vemos que $|P| < \delta$ acarreta

$$\left| \int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=o}^{k-1} |f(t_{i+1})-f(t_i)| \right| < \varepsilon$$

de sorte que nossa afirmativa está provada.

Em particular, quando $f:[a,b] \to R^2$ é um caminho no plano, dado por $f(t) = (x(t),y(t))$, e a norma em R^2 é a induzida pelo produto interno usual, então nós obtemos a familiar expressão para o comprimento de arco:

$$(f) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad .$$

§ 2. <u>Relações entre derivadas e integrais</u>.

O Teorema 3 abaixo (ou seu segundo corolário) é tradicionalmente conhecido como o Teorema Fundamental do Cálculo, visto que êle nos habilita a computar integrais por meio de primitivas. Do ponto de vista conceitual que adotamos aqui, trata-se de um resultado útil, mas não tão fundamental.

PROPOSIÇÃO 6 - <u>Seja</u> $f:[a,b] \to R^n$ <u>um caminho regular. Para todo</u> $x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt.$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $g = f|[a,x]$ e $h = f|[x,b]$. Cada partição P de $[a,b]$ que contém x como um ponto de partição induz partições P' de $[a,x]$ e P'' de $[x,b]$, tais que $\sum_f(P) = \sum_g(P') + \sum_h(P'')$. Como tôdas três integrais no enunciado de proposição existem, podemos calculá-las tomando uma sequência qualquer de partições P_m de $[a,b]$, com $|P_m| \to 0$. Escolha uma tal sequência com $x \in P_m$ para todo m. Então

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_m \sum_f(P_m) = \lim_m \sum_g(P'_m) + \lim_m \sum_h(P''_m) =$$
$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt.$$

OBSERVAÇÃO: A proposição acima é válida para um caminho limitado integrável $f:[a,b] \to R^n$ qualquer, sendo necessário apenas provar que f é integrável em todo subintervalo de $[a,b]$.

TEOREMA 3 - Seja $f:[a,b] \to R^n$ um caminho regular. Definamos $F:[a,b] \to R^n$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Então F é contínua e tem, em cada ponto $x \in [a,b)$, uma derivada à direita, $F'(x^+) = f(x^+)$, e, em cada ponto $x \in (a,b]$, uma derivada à esquerda $F'(x^-) = f(x^-)$.

DEMONSTRAÇÃO: A continuidade de F decorre do item (4) da Proposição 2. Quanto à derivabilidade, seja $x \in [a,b)$. Pela Proposição 6, para $x < x+a < b$,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x^+)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x^+)]\, dt\right| \leqslant$$

$\leq \sup\limits_{0 \leq t \leq x+h} |f(t)-f(x^+)|$ de modo que $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x^+)$.

Demonstração análoga para $F'(x^-)$.

COROLÁRIO 1 - <u>Para todo caminho contínuo</u> $f:[a,b] \to R^n$, <u>existe um caminho de classe</u> C^1 $F:[a,b] \to R^n$ <u>tal que</u> $F'(x) = f(x)$ <u>em todos os pontos</u> $x \in [a,b]$. <u>A saber:</u> $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

COROLÁRIO 2 - <u>Seja</u> $f:[a,b] \to R^n$ <u>de classe</u> C^1. <u>Então</u> $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.

Isto se evidencia considerando-se $F(x) = \int_a^x f'(t)dt$. Pelo teorema $F'(x) = f'(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Em vista do Corolário 1 da desigualdade do valor médio, $f(x) = F(x)+C$, sendo C uma constante. Como $F(a) = 0$, segue-se que $C = f(a)$ e $F(x) = f(x) - f(a)$. Em particular, para $x = b$, obtemos o Corolário.

EXEMPLO 21 - Sejam $U \subset R$ aberto e $f:U \to R^n$ uma aplicação de classe C^1. Suponha que $A \subset U$ é um subconjunto com a seguinte propriedade: <u>dados dois pontos quaisquer</u> <u>$a,d \in A$ existe um caminho $\phi:[0,1] \to R$ seccionalmente C^1</u>, <u>com $\phi(0) = a$, $\phi(1) = b$</u>. (Por exemplo, os conjuntos abertos conexos têm essa propriedade, visto que dois quaisquer de seus pontos podem ser ligados por uma poligonal).

<u>Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in A$ então f é constante em A.</u>

Com efeito, tome um ponto arbitrário $a \in A$. Afirmamos que

$f(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Como para quaisquer pontos $x_1,\ldots,x_k \in A$ temos $f(x) - f(a) = [f(x_1)-f(a)] +\ldots+ [f(x)-f(x_k)]$, podemos supor, em vista da hipótese sôbre A, que existe um caminho de classe C^1 $\phi:[0,1] \to A$ com $\phi(0) = a$, $\phi(1) = x$. Então $f \circ \phi$ é um caminho de classe C^1 e portanto, pelo Corolário 2 acima

$$f(x)-f(a) = f\phi(1)-f\phi(0) = \int_0^1 (f(\phi)'(t)dt = \int_0^1 f'(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt = 0$$

visto por $\phi(t) \in A$ e f' é zero em A.

Isto generaliza o Corolário 1 da desigualdade do valor médio.

Dizemos que uma sequência de aplicações $f_i:U \to R^n$ converge <u>local-uniformemente</u> para uma aplicação $f:U \to R^n$ quando cada ponto $x \in U$ tem uma vizinhança $V(x)$ tal que $f_i \to f$ uniformemente em $V(x)$.

PROPOSIÇÃO 7 - <u>Seja $U \subset R^m$ um conjunto aberto conexo. Se uma sequência de aplicações de classe C^1 $f_i:U \to R^n$ converge em um ponto $x_0 \in U$ e a sequência de derivadas $f_i':U \to R^m$ converge local-uniformemente para uma aplicação $g:U \to (R^m,R^n)$, então (f_i) converge local-uniformemente para uma aplicação de classe C^1 $f:U \to R^m$. Além disso, $f' = g$.</u>

<u>Em particular,</u> $D(\lim_i f_i) = \lim_i Df_i$ <u>desde que Df_i convirja local-uniformemente.</u>

DEMONSTRAÇÃO: U é coberto por bolas B, em cada uma das quais f_i' converge uniformemente a g. Fixe uma dessas bolas B e seja $d(B)$ seu diâmetro. Para cada par de pontos $x,y \in B$

$$(*) \qquad f_i(y) = f_i(x) + \int_0^1 f_i'(x+t(y-x)).(y-x)dt\,, \qquad \text{logo}$$

$$|f_i(y)-f_j(y)| \leq |f_i(x)-f_j(x)| + \sup_{z\in B}|f_i'(z)-f_j'(z)|.d(B)\,.$$

Isto mostra que se (f_i) converge em algum ponto $x\in B$ ela converge em todos os pontos $y\in B$ e de fato (f_i) converge uniformemente em B. Como U é conexo, cada bola B de dada cobertura é o último elemento de uma cadeia de bolas $B_o,\ldots,B_k = B$, tal que $x_o \in B_o$, (f_i) converge uniformemente em cada B_j e $B_j \cap B_{j+1} \neq \phi$. Segue-se que (f_i) converge local-uniformemente em U. Finalmente, fazendo $i \to \infty$ em $(*)$ segue-se que $f(x+h) = f(x) + \int_0^1 g(x+th).hdt$, e portanto $f'(x) = g(x)$.

§ 3. Integrais repetidas.

Dada uma aplicação $f\colon [a,b] \times [c,d] \to R^n$ suponha que, para cada $t\in[c,d]$, a integral $\xi(t) = \int_a^b f(s,t)ds$ existe, e mais, que $t \to \xi(t)$ é um caminho integrável. Então

$$\int_c^d \xi(t)dt = \int_c^d \left[\int_a^b f(s,t)ds\right]dt$$

é chamada uma <u>integral repetida</u>. Também é usada a notação

$$\int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds$$

tendo-se em mente a ordem da integração.

As propriedades das integrais repetidas seguem-se das concernentes às integrais simples. Por exemplo, a Proposição 2 da seção anterior, permanece válida com a seguinte adaptação

$$\left|\int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds\right| \leqslant (d-c)(b-a)\|f\|, \quad \text{onde}$$

$$\|f\| = \sup\left\{|f(s,t)| \quad s\in[a,b];\ t\in[c,d]\right\}.$$

PROPOSIÇÃO 8 - <u>Seja X um espaço topológico e $f: X\times[a,b]\to R^n$ uma aplicação contínua. Defina $\phi: X\to R^n$ por $\phi(x) = \int_a^b f(x,t)dt$. Então ϕ é contínua.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x_o\in X$ arbitrário. Vamos provar que ϕ é contínua em x_o. Dado $\varepsilon>0$, o conjunto de todos os pares $(x,t)\in X\times[a,b]$ tais que $|f(x,t)-f(x_o,t)| < \varepsilon/(b-a)$ é pela continuidade da f, uma parte aberta $U\subset X\times[a,b]$ que contém $x_o\times[a,b]$. Como $[a,b]$ é compacto, existe uma vizinhança V de x_o em X, tal que $V\times[a,b]\subset U$. Isto significa que, para cada $x\in V$, $|f(x,t)-f(x_o,t)|<\varepsilon/(b-a)$ qualquer que seja $t\in[a,b]$. Então $x\in V$ acarreta

$$|\phi(x)-\phi(x_o)| \leqslant (b-a) \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |f(x,t)-f(x_o,t)| \leqslant \varepsilon .$$

Isto completa a demonstração.

A Proposição 8 mostra que uma aplicação contínua $f: [a,b]\times[c,d]\to R^n$ possui uma integral repetida.

EXEMPLO 22 - O que segue é um exemplo simples de uma aplicação descontínua $\phi: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ que admite uma integral repetida, independente da ordem de integração.

Sejam $P = \{s_o,\ldots,s_k\}$ e $Q = \{t_o,\ldots,t_r\}$ partições dos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$ respectivamente. Escolha pontos $v_{ij} \in R^n$, $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq r-1$. Seja $\phi: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ tal que $\phi(s,t) = v_{ij}$ para $s \in (x_i, s_{i+1})$ e $t \in (t_j, t_{j+1})$. Os valores $\phi(s_i,t)$ e $\phi(s,t_j)$ não estão sujeitos a nenhuma condição.

Para cada $t \in [c,d]$, a aplicação $s \mapsto \phi(s,t)$ é um caminho de saltos, tendo como integral

$$\xi(t) = \int_a^b \phi(s,t)ds = \sum_{i=o}^{k-1} (s_{i+1}-s_i)v_{ij} \text{ , se } t_j < t < t_{j+1} .$$

Portanto $\xi: [c,d] \to R^n$ é também um caminho de saltos. Como tal, êle é integrável, com

$$\int_c^d dt \int_a^b \phi(s,t)ds = \sum_{i,j} (s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)v_{ij} .$$

Em particular, a ordem de integração é irrelevante.

TEOREMA 4 - <u>Seja</u> $f: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ <u>contínua. Então</u>

$$\int_c^d \underline{dt} \int_a^b \underline{f(s,t)ds} = \int_a^b \underline{ds} \int_c^d \underline{f(s,t)dt}.$$

DEMONSTRAÇÃO: É suficiente mostrar que, dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que, se P e Q são partições de $[a,b]$ e $[c,d]$ respectivamente, com $|P| < \delta$ e $|Q| < \delta$ então

$$\left| \int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds - \sum (s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)f(s_i,t_j) \right| < \varepsilon ;$$

O resultado decorrerá por simetria, visto que a outra integral será aproximada pela mesma soma.

Ora, em virtude da continuidade uniforme da f, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(s,t)-f(s',t')| < \varepsilon/(b-a)(d-c)$ desde que $|s-s'| < \delta$, $|t-t'| < \delta$. Dadas as partições P,Q, com $|P| < \delta$, $|Q| < \delta$, seja $\phi: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ definida por $\phi(s,t) = f(s_i,t_j)$ se $\delta \in [s_i,s_{i+1})$, $t \in [t_j,t_{j+1})$, e $\phi(b,t) = f(b,t)$, $\phi(s,d) = f(s,d)$. Então $\|f-\phi\| < \varepsilon/(b-a)(d-c)$. Calculando a integral repetida de ϕ conforme o exemplo anterior, obtemos

$$\left|\int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds - \sum (s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)f(s_i,t_j)\right| =$$

$$\left|\int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds - \int_c^d dt \int_a^b \phi(s,t)ds\right| =$$

$$\left|\int_c^d dt \int_a^b [f(s,t)-\phi(s,t)]\, ds\right| \leq (d-c)(b-a)\, \|f-\phi\| < \varepsilon .$$

§ 4. <u>Integrais múltiplas</u>.

Dadas uma aplicação $f: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ e partições $P = \{s_o,\ldots,s_k\}$ de $[a,b]$, $Q = \{t_o,\ldots,t_r\}$ de $[c,d]$, podemos escrever

$$\sum\nolimits_f(P,Q) = \sum\nolimits_{i,j}(s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)f(s_i,t_j)$$

e dizer que $\lim\limits_{|P|,|Q|\to 0} \sum_f(P,Q) = v$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|v-\sum_f(P,Q)| < \delta$ desde que $|P| < \delta$,

$|Q| < \delta$.

Dizemos que $f: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ <u>integrável</u> quando $\lim\limits_{|P|,|Q| \to 0} \sum_f(P,Q)$ existe. Se êste é o caso, escrevemos

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dsdt = \lim_{|P|,|Q| \to 0} \sum_f(P,Q)$$

e chamamos êste vetor de <u>integral dupla</u> da aplicação f.

Segue-se de propriedades gerais relacionando limites duplos com limites repetidos que se $\lim\limits_{P,Q} \sum(P,Q)$ existe e $\lim\limits_{P} \sum(P,Q)$ existe para todo Q, então $\lim\limits_{Q}(\lim\limits_{P} \sum(P,Q))$ existe e é igual a $\lim\limits_{P,Q} (\sum(P,Q))$.

Daí decorre que se a integral dupla $\iint f(s,t)dsdt$ existe e uma das integrais simples, digamos $\int_a^b f(s,t)ds$ existe, então a integral repetida $\int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds$ existe e é igual à integral dupla.

Em particular, se a integral dupla existe juntamente com cada uma das integrais simples, as integrais repetidas existem e são ambas iguais à integral dupla. A demonstração do Teorema 4 consistiu em mostrar que tôda aplicação contínua $f: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ possui uma integral dupla. Disso seguiu-se o resultado.

Observe que a mesma demonstração do Teorema 4 se aplica para mostrar que $f: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ possui uma integral dupla, desde que possa ser uniformemente aproximada por aplicações $\phi: [a,b] \times [c,d] \to R^n$ como no exemplo 21. Tais aplicações ϕ podem também ser chamadas de "funções de saltos".

É óbvio que todos os resultados desta seção são válidos para integrais m-uplas de aplicações $f:[a^1,b^1]\times\ldots\times[a^m,b^m] \to R^n$.

Seja X um espaço topológico. O <u>suporte</u> de uma aplicação $f:X\to R^n$ é o fêcho do conjunto dos pontos x onde $f(x)\neq 0$. É o menor subconjunto fechado fora do qual f é idênticamente nula.

Por exemplo, dizer que uma aplicação $f:X\to R^n$ tem suporte compacto significa que existe um subconjunto compacto $K\subset X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in X-K$.

Seja $U\subset R^m$ aberto. Se $f:U\to R^n$ é contínua e tem suporte compacto então f pode ser estendida a uma aplicação contínua $\bar{f}:R^m\to R^n$ pondo $\bar{f}(x) = 0$ para $x\notin U$.

Dados $U\subset R^m$ aberto e $f:U\to R^n$ uma <u>aplicação contínua com suporte compacto</u>, definimos a integral $\int f$ estendendo f a uma aplicação contínua $\bar{f}:R^m\to R^n$, com $\bar{f}(x) = 0$ se $x\in R^m-U$, depois escolhendo um paralelepípedo $\pi = [a^1,b^1]\times\ldots\times[a^m,b^m]\to R^n$ fora do qual f se anula, e pondo

$$f = \int_{a^m}^{b^m} dx^m \ldots \int_{a^2}^{b^2} dx^2 \int_{a^1}^{b^1} \bar{f}(x^1,\ldots,x^m)dx^1 .$$

É claro que esta definição não depende da escolha do paralelepípedo π.

CAPÍTULO 7

DERIVADAS PARCIAIS

Seja $R^m = E \oplus F$ o espaço euclidiano R^m, escrito como a soma direta de dois subespaços E, F. Cada elemento $z \in R^m$ se escreverá como um par $z = (x,y)$, $x \in E$, $y \in F$.

Dados um aberto $U \subset R^m$ e uma aplicação $f: U \to R^n$, as <u>derivadas parciais</u> de f num ponto $(a,b) \in U$ são aplicações lineares $\partial_1 f(a,b): E \to R^n$, $\partial_2 f(a,b): F \to R^n$, definidas pelas seguintes relações:

$$f(a+h,b) = f(a,b) + \partial_1 f(a,b).h + r_2(h), \text{ com } \frac{r_1(h)}{|h|} \to 0 \text{ quando } h \to 0.$$

$$f(a,b+k) = f(a,b) + \partial_2 f(a,b).k + r_2(k), \text{ com } \frac{r_2(h)}{|h|} \to 0 \text{ quando } k \to 0.$$

Naturalmente, f pode possuir uma, ambas, ou nehhuma das derivadas parciais $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ em um ponto $(a,b) \in U$.

Por vêzes usam-se as notações $D_1 f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\in \mathcal{L}(E,R^n)$ e $D_2 f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}(F,R^n)$ para as derivadas parciais.

A derivada parcial $\partial_1 f(a,b)$, caso exista, é a derivada da "aplicação parcial" $x \mapsto f(x,b)$ no ponto $a \in E$, estando tal aplicação parcial definida numa vizinhança de a.

em E. Analogamente, $\partial_2 f(a,b)$ é a derivada, em $b \in F$, da aplicação parcial $y \mapsto f(a,y)$. Assim, as regras das derivadas ordinárias aplicam-se às derivadas parciais.

Se a aplicação $f: U \to R^n$ é derivável no ponto $c \in U$ então, qualquer que seja a decomposição em soma direta $R^m = E \oplus F$, com $c = (a,b)$, $a \in E$, $b \in F$, as derivadas parciais $\partial_1 f(c)$, $\partial_2 f(c)$ existem, e $f'(c).(h,k) = \partial_1 f(c).h + \partial_2 f(c).k$. Em outras palavras, $\partial_1 f(z) = f'(z)|E$, $\partial_2 f(z) = f'(z)|F$.

A recíproca é falsa. Se considerarmos a decomposição em soma direta usual $R^2 = E \oplus F$, onde E = eixo dos x e F = eixo dos y, a função $f: R^2 \to R$, definida por $f(x,y) = x^2 y/(x^2+y^2)$, $f(0,0) = 0$, possui na origem $c=(0,0)$ derivadas parciais $\partial_1 f(c) = 0$ e $\partial_2 f(c) = 0$, mas f não é derivável na origem. (Cfr. Exemplo 7, Cap.2).

Observe que as derivadas parciais aqui introduzidas diferem ligeiramente das usuais $\frac{\partial f}{\partial x^i}$. A diferença é a seguinte. Dada a decomposição em soma direta usual $R^2 = E \oplus F$, sejam $U \subset R^2$ aberto e $f: U \to R^n$ definida. Então, num ponto $c = (a,b) \in U$, $\partial_1 f(c): E \to R^n$ e $\partial_2 f(c): F \to R^n$ são transformações lineares tais que $\partial_1 f(c).e_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}(c)$ e $\partial_2 f(c).e_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}(c)$. Como sempre, identificamos a transformação $\partial_i f(c)$ com o vetor $\frac{\partial f}{\partial x^i}(c)$.

Dado um conjunto aberto $U \subset R^m$ e um espaço topológico arbitrário Y, pode-se falar da derivada parcial $\partial_1 f(a,b): R^m \to R^n$ de uma aplicação $f: U \times Y \to R^n$. Ela é definida como a derivada ordinária da aplicação parcial $x \mapsto f(x,b)$, de U no R^n, no ponto $\underline{a}$.

O teorema abaixo dá uma condição suficiente para derivabilidade em têrmos de derivadas parciais. Na prática, êle fornece uma maneira muito útil de reconhecer se uma função $f:U \to R^n$ é de classe C^k.

TEOREMA 5 - Sejam $R^m = E \oplus F$ uma decomposição em soma direta, e $U \subset R^m$ um aberto. Uma aplicação $f:U \to R^n$ é de classe C^1 se, e sòmente se, para todo $z = (x,y) \in R^m$ as derivadas parciais $\partial_1 f(z):E \to R^n$, $\partial_2 f(z):F \to R^n$ existem e, além disso, as aplicações $\partial_1 f:U \to \mathcal{L}(E,R^n)$ e $\partial_2 f:U \to \mathcal{L}(F,R^n)$ são contínuas.

DEMONSTRAÇÃO: Se $f \in C^1$ então as derivadas parciais $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, existem em cada $z \in U$, com $\partial_1 f(z) = f'(z)|E$, $\partial_2 f(z) = f'(z)|F$. Isto mostra que $\partial_1 f(z)$ e $\partial_2 f(z)$ dependem contìnuamente de $z \in U$.

Recìprocamente, suponha que $\partial_1 f(z) \in \mathcal{L}(E,R^n)$ e $\partial_2 f(z) \in \mathcal{L}(F,R^n)$ existem e dependem contìnuamente de $z = (x,y) \in U$. Vamos mostrar que $f'(z) \in \mathcal{L}(R^m,R^m)$ existe e é igual à aplicação linear $(h,k) \mapsto \partial_1 f(z).h + \partial_2 f(z).k$. De fato

$$|f(z+h,y+k)-f(x,y)-\partial_1 f(x,y).h-\partial_2 f(x,y).k| =$$

$$= |f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-\partial_1 f(x,y).h+f(x,y+k)-f(x,y)-\partial_2 f(x,y).k| \leq$$

$$\leq |h| . \sup_{0 \leq s \leq 1} |\partial_1 f(x+sh,y+k)-\partial_1 f(x,y)|+|k| \sup_{0 \leq t \leq 1} |\partial_2 f(x,y+tk)- -\partial_2 f(x,y)|,$$

em virtude do Corolário 2 da desigualdade do valor médio. O teorema agora decorre da continuidade de $\partial_1 f$ e $\partial_2 f$ em (x,y).

Evidentemente pode-se considerar qualquer decomposição em soma direta $R^m = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ e definir as derivadas parciais $\partial_i f(z): E_i \to R^n$ de uma aplicação $f: U \to R^n$ ($U \subset R^m$ aberto) relativamente a esta decomposição. O Teorema 5, com a mesma demonstração e apenas notações um pouco mais complicadas, vale nesta situação mais geral: a aplicação f será de classe C^1 em U se, e sòmente se, as derivadas parciais $\partial_i f(z)$, $i=1,\ldots,r$, existirem em todos os pontos $z \in U$ e dependerem contìnuamente de z.

No caso da decomposição usual $R^m = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$, onde cada E_i é o subespaço unidimensional gerado pelo i-ésimo vetor básico e_i, identificamos cada $\partial_i f(z)$ com o vetor $\frac{\partial f}{\partial x^i}(z)$. Podemos então enunciar:

COROLÁRIO - Seja $U \subset R^m$ aberto. Uma aplicação $f: U \to R^n$, com $f(z) = (f^1(z),\ldots,f^n(z))$, é de classe C^k se, e sòmente se, tôdas as derivadas parciais mixtas

$$\frac{\partial^\alpha f^i}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_\alpha}}(z), \quad z \in U, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq i_1,\ldots,i_\alpha \leq m,$$

de ordem $\alpha \leq k$ existem e dependem contìnuamente de $z \in U$.

Para começar, observe que o Teorema 5, enunciado para a decomposição do R^m como a soma direta de seus eixos, afirma que $f \in C^1$ se, e sòmente se, as derivadas parciais

$\frac{\partial f}{\partial x^1}(z),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^m}(z)$ existem em cada $z\in U$ e são aplicações contínuas $\frac{\partial f}{\partial x^j}:U\to R^n$. Isto significa a existência e a continuidade das derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}:U\to R$. O resultado segue-se agora por indução, observando que $f\in C^k$ se, e sòmente se, $f^{(k-1)}\in C^1$.

TEOREMA 6 (Leibniz) - <u>Sejam $U\subset R^m$ aberto e $f:U\times[a,b]\to R^n$ contínua, com $\partial_1 f:U\times[a,b]\to \mathcal{L}(R^m,R^n)$ contínua. Então, $\phi:U\to R^n$, definida por $\phi(x)=\int_a^b f(x,t)dt$, é de classe C^1 e $\phi'(x)=\int_a^b \partial_1 f(x,t)dt$.</u>

DEMONSTRAÇÃO: $|\phi(x+h)-\phi(x)-(\int_a^b \partial_1 f(x,t)dt).h| =$

$$= |(\int_a^b f(x+h,t)-f(x,t)-\partial_1 f(x,t).h)dt| \leq$$

$$\leq (b-a)|h| \sup_{\substack{a\leq t\leq b\\ 0\leq s\leq 1}} |\partial_1 f(x+sh,t)-\partial_1 f(x,t)|$$

em virtude do corolário da Proposição 2 (Cap. 6) e do Corolário 2 da desigualdade do valor médio. Como $\partial_1 f(x,t)$ é contínua em $U\times[a,b]$, decorre da compacidade de $[a,b]$ que esta continuidade é uniforme com relação a t. Portanto, dado qualquer $\varepsilon>0$, podemos achar $\delta>0$ tal que $|h|<\delta$ acarreta $|\partial_1 f(x+h)-\partial_1 f(x,t)|<\varepsilon/(b-a)$ <u>para todo $t\in[a,b]$</u>. Isto demonstra o teorema.

EXEMPLO 23 - O Teorema 4, sôbre integração repetida, decorre do Teorema 6 acima. Com efeito, dada $f:[a,b]\times[c,d]\to R^n$ contínua, seja $\xi:[a,b]\to R^n$ definida

por $\xi(x) = \int_c^d dt \int_a^x f(s,t)ds$. Então $\xi(a) = 0$, $\xi(b) = $
$= \int_c^d dt \int_a^b f(s,t)ds$ e, pelo Teorema 6, ξ é de classe C^1,
com $\xi'(x) = \int_c^d f(x,t)dt$. Pelo Corolário 2 do Teorema 3,
temos então

$$\xi(b) = \xi(a) + \int_a^b \xi'(s)ds = \int_a^b ds \int_c^d f(s,t)dt.$$

CAPÍTULO 8

O TEOREMA DE SCHWARZ

TEOREMA 7 - <u>Seja $f:U \to R^n$ uma aplicação de classe C^2 ($U \subset R^m$ aberto). Para cada $x \in U$, a segunda derivada $f''(x) \in \mathcal{L}_2(R^m,R^n)$ é uma aplicação bilinear simétrica.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Fixe $x \in U$. É necessário mostrar que, quaisquer que sejam $h,k \in R^m$, $f''(x).(h,k) =$
$= f''(x).(k,h)$. Considere a "diferença de segunda ordem" $\phi(h,k) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$. Ela possui a propriedade simétrica $\phi(h,k) = \phi(k,h)$. Inicialmente mostremos que, para todo $\varepsilon > 0$, pode ser escolhido um $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ implicam $|\phi(h,k) - f''(x).(h,k)| < \frac{\varepsilon}{2}|h|\,|k|$.
Realmente, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\phi(h,k)-f''(x).(h,k) = \phi(h,k)-(f''(x).h).k =$$
$$= \left\{\int_0^1 [f'(x+h+sk) - f'(x+sk) - f''(x).h]ds\right\}.k =$$
$$= \left\{\int_0^1 ds \int_0^1 [f''(s+th+sk) - f''(x)]\,dt\right\}. (h,k).$$

Como $f'':U \to \mathcal{L}_2(R^m,R^n)$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ implicam $|f''(x+sk+th)-f''(x)| < \varepsilon/2$ quaisquer que sejam $s,t \in [0,1]$. Portanto $|\phi(h,k)-f''(x).(h,k)| < \frac{\varepsilon}{2}|h||k|$ desde que $|h|<\delta$, $|k|<\delta$. Anàlogamente, as mesmas condições sôbre h,k acarretam $|\phi(h,k)-f''(x).(k,h)|<\frac{\varepsilon}{2}|h||k|$. Pela simetria de $\phi(h,k)$, segue-se que $|f''(x).(h,k)-f''(x).(k,h)| < \varepsilon|h||k|$, desde que $|h|<\delta$, $|k|<\delta$. Como ambos os membros dessa desigualdade são homogeneos do segundo grau em h,k, segue-se que a mesma desigualdade vale para h,k arbitrários. Portanto, a aplicação bilinear $(h,k) \mapsto f''(x)(h,k)-f''(x).(h,k)$ tem norma $<\varepsilon$. Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, essa aplicação bilinear é zero, e portanto $f''(x)$ é simétrica.

OBSERVAÇÃO - O Teorema de Schwarz é verdadeira para aplicações que são apenas duplamente deriváveis, mesmo que não pertençam a C^2. No entanto, provendo esta versão mais fraca, não perdemos muito pois a maneira habitual de mostrar que uma aplicação é duplàmente derivável consiste em verificar que ela possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas, i.e., que ela é de classe C^2.

COROLÁRIO 1 - <u>Seja $f:U \to R^n$ de classe C^k. Então, para cada</u>

<u>$x\in U$, a k-ésima derivada $f^{(k)}(x)\in \mathcal{L}_k(R^m,R^n)$ é uma aplicação k-linear simétrica</u>.

Isto se demonstra por indução sôbre k. Vejamos, por exemplo, o caso $k=3$. Podemos encarar f''' como derivada de f'' (i.e., de uma aplicação cujos valores são aplicações bilineares simétricas). Então $f'''(x).(u,v,w) = (f'''(x).u)(v,w) = (f'''(x).u)(v,w) = f'''(x).(u,w,v)$.

Por outro lado, podemos olhar para f''' como a segunda da derivada de f'. Então, em cada $x\in U$, $f'''(x)$ é uma aplicação bilinear simétrica cujos valores são aplicações lineares. Então $f'''(x).(u,v,w) = (f'''(x).(u,v)).w = (F'''(x).(v,u)).w = f'''(x).(v,u,w)$.

Visto que podemos obter tôdas as permutações do terno (u,v,w) por intermédio de permutações sucessivas dos dois primeiros e dos dois últimos elementos, segue-se por $f'''(x)$ é simétrica.

COROLÁRIO 2 - <u>Sejam $U\subset R^m$ e $f:U\to R^n$ uma aplicação de</u> classe C^k. Para cada inteiro α, $1\leq\alpha\leq k$, as derivadas parciais mistas de ordem

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_\alpha}}(x), \quad 1\leq i_1,\ldots,i_\alpha\leq m,$$

não dependem da ordem em que foram efetuadas as derivações.

De fato, por definição

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_\alpha}}(x) = f^{(\alpha)}(x)\ (e_{i_1},\ldots,e_{i_\alpha})$$

onde $e_1,\ldots,e_m$ são os vetores básicos do R^m. O resultado decorre então do Corolário 1.

CAPÍTULO 9

A FÓRMULA DE TAYLOR

§ 1. Teorema de Taylor.

A Fórmula de Taylor provém da idéia muito natural de generalizar a noção de derivada e tentar aproximar uma aplicação por um polinômio de grau k na vizinhança de um ponto, com um resto R_k, que seja um infinitésimo de ordem superior a k. Tal idéia pode ser desenvolvida, mas nós aqui nos contentaremos em demonstrar o Teorema de Taylor, o qual afirma que tôda aplicação de classe C^k é suscetível de tal aproximação, e fornece uma fórmula explícita para o polinômio aproximador.

EXEMPLO 24 - Considere a função $f:R \to R$, dada por $f(0) = 0$, $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(1/x^3)$, $x \neq 0$. Para cada ponto $x \in R$, existe um polinômio $p(x,h)$ em h, de grau ≤ 2, tal que $\lim_{h \to \infty} |f(x+h)-f(x)-p(x,h)|/h^2 = 0$.

Como $f|(R-0)$ é de classe C^2, o polinômio $p(x,h)$, para $x \neq 0$, é dado pela Fórmula de Taylor usual. Para $x=0$, tomamos $p(0,h) = 0$. Então

$$\lim_{h \to \infty} |f(0+h)-f(0)-p(0,h)|/h^2 = \lim_{h \to \infty} h \operatorname{sen}(\frac{1}{h^3}) = 0.$$

Consequentemente f pode ser aproximada, em cada ponto $x \in R$, por um polinômio de grau ≤ 2, com um resto pequeno de ordem ≥ 2. No entanto, pode-se ver fàcilmente que f não é nem ao menos derivável no ponto 0. Êste exemplo mostra que a existência de uma aproximação polinomial do n-ésimo grau é uma hipótese mais fraca que a de ser u vêzes derivável.

Se h é um vetor em R^m, escrevemos $h^{(j)} = (h,h,\ldots,h) \in R^m \times\ldots\times R^m$ para representar a j-upla de vetores iguais a h. Assim, se $\phi: R^m \times\ldots\times R^m \to R^n$ é uma aplicação j-linear, $\phi.h^{(j)}$ significa $\phi.(h,h,\ldots,h)$. Aplica-se multilineares restritas a j-uplas da forma $h^{(j)}$ desempenham o papel de polinômios homogêneos do grau j (a m variáveis) quando não queremos usar coordenadas.

TEOREMA 8 (Taylor) - <u>Seja $f: U \to R^n$ uma aplicação de classe C^k. Se o segmento da reta $[x,x+h]$ está inteiramente contido em U, então $f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \ldots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x).h^{(k)} + R_k(x,h)$, onde o resto $R_k(x,h)$ tem a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ é possível achar $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ acarreta $|R_k(x,h)| \leq |h|^k.\varepsilon$.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\phi: [0,1] \to R^m$ um caminho qualquer de classe C^k em U. (Recorde que, para $1 \leq j \leq k$, e $t \in [0,1]$, a j-ésima derivada $\phi^{(j)}(t)$ é um vetor em R^m). Considere o novo caminho $p: [0,1] \to R^m$ dado por

$$p(t) = \phi(t) + (1-t)\phi(t) + \ldots + \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\phi^{(k-1)}(t).$$ Um cálculo

fácil mostra que $p'(t) = \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\phi^{(k)}(t)$. Isto faz com que a fórmula $p(1) = p(0) + \int_0^1 p'(t)dt$ tome o aspecto:

$$\phi(1) = \phi(0)+\phi(0) +\ldots+ \frac{1}{(k-1)!}\phi^{(k-1)}(0)+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{(k-1)}}{(k-1)!}\phi^{(k)}(t)dt.$$

Usando o que precede para o caminho $\phi(t) = f(x+th)$ obtemos (somando e subtraindo $\frac{1}{k!} f^{(k)}(x).h^{(k)}$):

$$f(x+h)=f(x)+f'(x).h+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x).h^{(k-1)}+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x).h^{(k)}+$$
$$+ R_k(x,h),$$

onde $R_k(x,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x+th).h^{(k)}dt-\frac{1}{k!}f^{(k)}(x).h^{(k)}$.

Visto que $1/k! = \int_0^1 [(1-t)^{k-1}/(k-1)!]dt$, obtemos

$R_k(x,h) = \left\{\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}[f^{(k)}(x+th)-f^{(k)}(x)]\, dt\right\}.h^{(k)}$, do que decorre o teorema, em virtude da Proposição 2 (4) §6, juntamente com a continuidade de $x \longmapsto f^{(k)}(x)$.

ESCÓLIO - 1) Sob as hipóteses do Teorema 8,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x).h+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x).h^{(k-1)} +$$
$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x+th).h^{(k)}dt.$$

2) Ainda sob as mesmas condições

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x).h-\ldots-\frac{1}{k!}f^{(k)}(x).h^{(k)}| \leq$$
$$\leq |h|^k \sup_{0\leq t\leq 1} |f^{(k)}(x+th)-f^{(k)}(x)|.$$

Em particular, para $k=1$ obtemos novamente o Corolário 2 de desigualdade do valor médio (§5).

Uma aplicação $f: U \to R^n$, definida no subconjunto aberto $U \subset R^m$, chama-se <u>analítica</u> em U se êle é C^∞ em U e, para cada $x \in U$, existe um $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ acarreta $x+h \in U$ e

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x).h^{(j)} ,$$

isto é, a série de Taylor converge, na vizinhança de cada ponto de U, para o valor da aplicação f.

O exemplo clássico de uma função C^∞ que não é analítica é o seguinte, devido a Cauchy: $f: R \to R$ é definida por $f(t) = e^{-1/t^2}$ para $t \neq 0$ e $f(0) = 0$. Vimos no Exemplo 18, Cap. 5, que $f \in C^\infty$ e tôdas as derivadas $f^{(k)}(0)$ são nulas. É claro que f não pode ser analítica, visto que sua expansão em série de Taylor em tôrno do ponto 0 é $f(t) = \sum \frac{1}{j!}.0.t^j = 0$, ao passo que $e^{-1/t^2} \neq 0$ para qualquer $t \neq 0$.

A despeito do fato de que a maioria das aplicações que se encontram "naturalmente" são analíticos, a classe das aplicações C^∞ é muito maior que a das aplicações analíticas e na realidade as aplicações construidas na teoria das Variedades Diferenciáveis são quase tôdas não-analíticas. Mais precisamente, o exemplo de Cauchy dado acima desempenha um papel muito importante em tais construções.

Entre as muito importantes propriedades das aplicações analíticas registramos a seguinte, conhecida como o princípio de unicidade do prolongamento: Sejam $f, g : U \to R^n$ analíticas, e U conexo. Se existir um subconjunto aberto não vazio $V \subset U$ tal que $f|V = g|V$, então $f = g$.

A demonstração é simples: a diferença $d = f - g : U \to R^n$ é analítica e idênticamente nula no aberto V, e assim tôdas as derivadas de d se anulam em V. Em virtude da série de Taylor, o conjunto dos pontos nos quais uma aplicação analítica se anula juntamente com tôdas as derivadas é um conjunto aberto. Por continuidade, tal conjunto é também fechado em U. Como êle não é vazio (pois contém V) e U é conexo, segue-se que êle é todo o U, isto é, $d=0$ em U, e portanto $f(x) = g(x)$ para todo $x \in U$.

É exatamente êste fato o responsável pelo papel relativamente pequeno da analiticidade na teoria das Variedades Diferenciáveis atualmente. De fato, um dos métodos mais eficientes desta teoria consiste em construir aplicações diferenciáveis começando com aplicações de "suporte pequeno" (isto é, aquelas que se anulam fora de uma pequena bola) e depois somando-as. Devido ao princípio acima, tal método, quando empregado para aplicações analíticas, produziria apenas a aplicação idênticamente nula. Não estamos querendo dizer aqui que não existem teoremas profundos sôbre Variedades Analíticas. Existem. Mas são escassos e de difícil demonstração.

§ 2. Máximos e mínimos.

Sejam $U \subset R^m$ aberto e $f: U \to R$ uma função com valores reais. Ditemos que f possui um <u>máximo local</u> num ponto $x_o \in U$ quando existe uma vizinhança V de x_o tal que $f(x) < f(x_o)$ para todo $x \in V$. Quando $f(x) < f(x_o)$ para todo $x \neq x_o$ em V, nós dizemos que f possui um máximo estrito (ou equivalentemente, um máximo isolado) no ponto x_o. De maneira análoga se define um <u>mínimo local</u> para uma função $f: U \to R$.

Quando $f: U \to R$ é derivável, todo máximo local $x_o \in U$ tem que ser um ponto crítico de f, i.e., $f'(x_o) = 0$. Com efeito, se tivermos $f'(x_o).h \neq 0$ para algum $h \neq 0$, trocando h por $-h$ se necessário, podemos supor que $f'(x_o).h > 0$. Como $f'(x_o).h = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(x_o+th)-f(x_o)}{t}$, segue-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < t < \varepsilon$ acarreta $\frac{1}{t}[f(x_o+th)-f(x_o)] > 0$, i.e., $f(x_o+th) > f(x_o)$ para todos os $t > 0$ suficientemente pequenos. Isto contradiz a hipótese de que f possui um máximo local em x_o.

Anàlogamente, se $f: U \to R$ é derivável e possui um mínimo local em $x_o \in U$, então x_o é um ponto crítico de f.

Naturalmente, não é verdade que uma função diferenciável $f: U \to R$ tenha que possuir um máximo local ou um mínimo local em cada um de seus pontos críticos. Por exemplo, seja $f: R^2 \to R$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$. A origem $0 = (0,0)$

é um ponto crítico de f visto que $f'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0)dy = 0$. No entanto, f não possui nem um máximo nem um mínimo local no ponto 0, pois $f(0,0) = 0$ e f assume valores positivos e negativos em qualquer vizinhança da origem.

Seja $x_o \in U \subset R^m$ um ponto crítico de uma função de classe C^2 $f:U \to R$. A segunda derivada $f''(x_o):R^m x R^n \to R$ é uma forma bilinear simétrica, chamada a <u>forma hessiana</u> de f em x_o. Recordemos que o ponto crítico x_o é dito não-degenerado (veja o Exemplo 19, Cap. 5) quando a forma $f''(x_o)$ é não-singul r, isto é, $f''(x_o).(u,v) = 0$ para todo v acarreta $u = 0$. Isto é equivalente a requerer que o <u>determinante hessiano</u> $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_o))$ seja não-nulo.

Se a forma hessiana $f''(x_o)$ é definida positiva, isto é, $f''(x_o).u^2 > 0$ para todo $u \neq 0$ em R^m, então o ponto crítico x_o é necessàriamente não-degenerado. Afirmamos que êle é um mínimo local.

Realmente, pela fórmula de Taylor, $f(x_o+h) = f(x_o) + \frac{1}{2} f''(x_o).h^2 + r_2(x_o,h)$, onde $\lim_{h \to 0} (r_2(x_o,h)/|h|^2) = 0$. Ora, como $f''(x_o)$ é defini a positiva,

$a = \inf \{f''(x_o).u^2, u \in R^m, |u|=1\}$ é um número real positivo. Existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ acarreta $|r_2(x_o,h)|/|h|^2 < \frac{a}{4}$.

Para $0 < |h| < \delta$, temos

$$f(x_o+h)-f(x_o') = \frac{|h|^2}{2}\left[f''(x_o).(\frac{h}{|h|})^2 + \frac{2r_2(x_o,h)}{|h|^2}\right] \geq \frac{|h|^2}{2}\left[a - \frac{a}{2}\right] > 0 .$$

Por conseguinte, $f(x_o) < f(x')$ para cada $x = x_o+h$

na bola $B_o(x_o)$, mostrando que f possui um mínimo local estrito em x_o.

Anàlogamente, se a forma hessiana $f''(x_o)$ é <u>definida negativa</u>, isto é, $f''(x_o).u^2 < 0$ para todo $u \neq 0$ em R^m, então f possui um máximo local não degenerado em x_o.

Por outro lado, se a forma $f''(x_o)$ é indefinida, isto é, se existem $u,v \in R^m$ com $f''(x_o).u^2 > 0$ e $f''(x_o).v^2 < 0$, então f não possui nem um máximo nem um mínimo local no ponto x_o. Isto será demonstrado mais abaixo.

Quando a forma hessiana é apenas não-negativa, isto é, $f''(x_o).v^2 \geqslant 0$ para todo $u \in R^m$, a função f pode possuir ou não um mínimo local em x_o. Por exemplo em $x = y = 0$ a função $f(x,y) = x^2$ possui um mínimo local mas a função $g(x,y) = x^2+y^3$ não o possue. As formas hessianas dessas hessianas dessas funções no ponto crítico $x = y = 0$ são a mesma: $H = \frac{\partial_2 f}{\partial x^2} dxdx = 2dxdx$. Assim qualquer que seja o vetor $u = (\alpha,\beta) \in R^2$, $H.u^2 = 2\alpha^2 \geqslant 0$.

Em geral, podemos enunciar o seguinte.

Seja $f:U \to R$ uma função de classe C^∞, $U \subset R^m$ aberto.

Num ponto crítico x_o, seja $f^{(k)}(x_o)$ a derivada de menor ordem não idênticamente nula. Então:

1) <u>Se k é impar, f não possui nem máximo nem mínimo local em x_o;</u>

2) <u>Se k é par e $f^{(k)}(x_o).u^k > 0$ para todo $u \neq 0$ em R^m então f possui um mínimo isolado no ponto x_o. Um e-</u>

nunciado análogo vale para máximo com <0 no lugar de ≥ 0;

3) Se f possui um mínimo local em x_o então $f^{(k)}(x_o).u^k \geq 0$ para todo $u \in R^m$. Anàlogamente para um máximo local;

4) Nos demais casos nada se pode afirmar.

Todos êsses enunciados decorrem do desenvolvimento de Taylor

$$f(x_o+h) = f(x_o) + f^{(k)}(x_o).h^k + r_k(x_o,h).$$

Suponha, por exemplo, que, para algum vetor $v \in R^m$, $f^k(x_o).v^k = a > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ acarreta $|r_k(x_o,h)| < (a/2|v|^k)|h|^k$. Assim, $0 < t < \delta/|v|$ acarreta $|tv| < \delta$ e portanto $|r_k(x_o,tv)| < (a/2)t^k$. Para êsses valôres de t, temos, pela fórmula acima:

$$f(x_o+tv) - f(x_o) \geq t^k(a-\frac{a}{2}) = \frac{a}{2}\, t^k > 0.$$

Isto significa que $f(x_o) < f(x_o+tv)$ sempre que $0 < t < \frac{\delta}{|v|}$. Noutras palavras, se f deve possuir um máximo local em x_o, então deve-se ter $f^{(k)}(x_o).v^k \leq 0$ para todo $v \in R^m$. Isto demonstra 3).

O enunciado 1) decorre de 3) porque, para k ímpar, $f^{(k)}(x_o)(-v)^k = -f^{(k)}(x_o).v^k$.

O enunciado 2) se demonstra tomando-se $a = \inf \{f^k(x_o).u^k; u \in R^m, |u| = 1\}$ e procedendo como no caso de uma forma hessiana definida positiva.

Pode-se ter num ponto crítico isolado x_o, tôdas as derivadas $f^k(x_o) = 0$. Isto acontece por exemplo quando $f(x) = \exp(-1/x^2), f(0) = 0$.

CAPÍTULO 10

FUNÇÕES IMPLÍCITAS

§ 1. O Teorema da Função Inversa.

Nesta seção chegaremos ao mais importante teorema do curso, o qual é um dos resultados mais úteis e básicos na teoria das Variedades Diferenciáveis.

Sejam $U,V \subset R^m$, abertos. Um difeomorfismo $f:U \to V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Se ambas, f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k.

Em particular, um difeomorfismo é um homeomorfismo.

Por exemplo, $f:R \to (0,\infty)$ definido por $f(x) = \exp(x)$ é um difeomorfismo (de classe C^∞) cuja imersa $f^{-1}:(0,\infty) \to R$ é dada por $f^{-1}(x) = \log(x)$.

Se $f:U \to V$ é um difeomorfismo, então $f'(x):R^m \to R^m$ é um isomorfismo para todo $x \in U$ e $[f'(x)]^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$. É claro que não há perda de generalidade em supor U e V contidos no mesmo espaço euclidiano R^m.

A composta de difeomorfismos e a inversa de um difeomorfismo são ainda difeomorfismos.

Uma aplicação de classe C^k, $f:U \to V$ pode ser um homeomorfismo de U sôbre V mas, mesmo assim, sua inversa $f^{-1}:V \to U$ pode deixar de ser diferenciável. Por exemplo, $f:x \mapsto x^3$ de R em R. Será mostrado mais adiante que, se $f \in C^k$ e f^{-1} é diferenciável, então $f^{-1} \in C^k$.

Seja $U \subset R^m$ um aberto. Uma função diferenciável $f:U \to R^m$ é chamada um <u>difeomorfismo local</u> se para cada $x \in U$ existe uma vizinhança V_x que é aplicada difeomòrficamente por f sôbre uma vizinhança W_x de $f(x)$. Quando f, restrita a cada V_x, é um difeomorfismo C^k dizemos que f é um <u>difeomorfismo local de classe C^k</u>.

EXEMPLOS:

24) A aplicação $f:R^2 \to R^2$ definida por $f(x,y) = $
$= (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$ é um difeomorfismo local de classe C^∞ de R^2 sôbre $R^2 - \{0\}$. Isto resultará trivialmente do Teorema 9, abaixo (Vide Exemplo 26). Podemos também tirar a conclusão da teoria da variável complexa, se identificamos (x,y) com $z = x+iy$, obtendo então $f(z) = e^z$. Dado $z_o \in R^2$ seja $w_o = e^{z_o}$. Qualquer ramo de $\log w$, definido em uma vizinhança de w_o e tal que $\log w_o = z_o$, fornece uma inversa local para f. Observe que f não é um difeomorfismo (global) visto que f nos é biunívoca.

25) Se J é um intervalo aberto da reta, todo difeomorfismo local $f:J \to R$ é 1-1 sendo portanto um difeomorfismo de J sôbre $f(J)$. Isto se segue imediatamente do fato de que

tôda aplicação contínua aberta $f:J \to R$ é forçosamente 1-1 (se existissem $a \neq b$ em J tais que $f(a) = f(b)$ existiria $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \max\{f(x); x \in [a,b]\}$ ou no caso em que $f(a) = f(b) = \max f$ - tal que $f(c) = \min\{f(x). x \in [a,b]\}$. Então f levaria um pequeno intervalo aberto $(c- ,c+)$ sôbre um intervalo não-aberto do tipo $(d-\delta,d]$ ou $[d,d+\delta)$ em contradição com o fato de f ser aberta).

Um difeomorfismo local é uma aplicação aberta. Tal aplicação é um difeomorfismo (sôbre sua imagem) se, e sòmente se, for biunívoca. Dado um difeomorfismo local $f:U \to R^m$, $f'(x):R^m \to R^m$ é um isomorfismo (de espaços vetoriais) para cada $x \in U$.

O resultado principal desta seção estabelece que, recìprocamente, se $f \in C^k(U,R^m)$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, e $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in U$ então f é um difeomorfismo local de classe C^k.

Para demonstrá-lo, usaremos o método das aproximações sucessivas, um princípio de grande utilidade para provar existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, equações integrais, etc.

Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f:M \to N$ é chamada contração quando existe $\lambda \in R$, $0 < \lambda < 1$, tal que $d(f(x),f(y)) \leqslant \lambda d(x,y)$ para todos os $x,y \in M$.

Por exemplo seja $U \subset R^m$ aberto e convexo, i.e., $a,b \in U$ implica $[a,b] \subset U$. Seja $f:U \to R^n$ uma aplicação diferenciável, tal que $|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$ para uma certa constante λ e para todo $x \in U$. Então, pela desigualdade do valor médio, $|f(x)-f(y)| \leqslant \lambda |x-y|$ e portanto f é uma contração.

Um <u>ponto fixo</u> de uma aplicação $f: X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

PROPOSIÇÃO 9 - <u>(Aproximações sucessivas). Seja M um espaço métrico completo. Tôda contração $f: M \to M$ tem um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_o \in M$, seja $x_1 = f(x_o)$, $x_2 = f(x_1)$, ... A sequência (x_n) converge em M para o único ponto fixo de f.</u>

DEMONSTRAÇÃO: De $d(f(x),f(y)) \leqslant \lambda d(x,y)$ segue-se que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda^n d(x_o, x_1).$$ Portanto

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \sum_{i=o}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leqslant \left[\sum_{i=o}^{p-1} \lambda^{n+1}\right] . d(x_o, x_1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_o, x_1).$$

Isto mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo M. Seja $a = \lim x_n$. Como, evidentemente, f é (uniformemente) contínua, $f(a) = f(\lim x_n) = \lim x_{n+1} = a$. Quanto à unicidade, se $f(a) = a$ e $f(b) = b$ então $d(a,b) = d(f(a),f(b)) \leqslant \lambda d(a,b)$ e portanto $(1-\lambda)d(a,b) \leqslant 0$ o que implica $d(a,b) = 0$ ou seja $a = b$.

Como aplicação dêste princípio, mostraremos que se perturbamos a inclusão $U \to R^m$ adicionando uma contração então obtemos um homeomorfismo de U <u>sôbre um aberto de R^m</u>.

PROPOSIÇÃO 10 - (<u>Perturbação da identidade</u>). <u>Seja $U \subset R^m$ um aberto. Se $\phi: U \to R^m$ é uma contração então a função $f: U \to R^m$, dada por $f(x) = x + \phi(x)$ é um homeomorfismo de U, sôbre um aberto de R^m.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Dados x e y arbitrários em U, tem-se

$$|f(x)-f(y)| + |x-y+\phi(x)-\phi(y)| \geq |x-y| - $$
$$= |\phi(x)-\phi(y)| \geq (1-\lambda)|x-y|.$$

Desta expressão sai diretamente que f é 1-1 e que sua inversa $f^{-1}: f(U) \to U$ é contínua, i.e., f é um homeomorfismo de U sôbre $f(U)$. Para mostrar que $f(U)$ é aberto, seja $b \in f(U)$, $b = f(a)$. Escolha uma bola fechada $\bar{A}$ de centro a e raio $\delta > 0$, $\bar{A} \subset U$. Afirmamos que a bola aberta B de centro b e raio $(1-\lambda)\delta$ está contida em $f(U)$. Realmente, seja $y \in B$. Isto significa $|y-b| < (1-\lambda)\delta$. Devemos então achar uma solução $x \in U$ para a equação $y = f(x)$. Isto é equivalente a encontrar um ponto fixo $x \in U$ para a contração $\phi_y: U \to R^m$ definida por $\phi_y(x) = y - \phi(x)$. Como $\bar{A}$ é um espaço métrico completo é suficiente mostrar que $\phi_y(\bar{A}) \subset \bar{A}$. A contração $\phi_y|\bar{A}: \bar{A} \to \bar{A}$ terá então um ponto fixo pela Proposição 9. Seja portanto $x \in \bar{A}$, i.e., $|x-a| \leq \delta$. Devemos mostrar que $|\phi_y(x)-a| \leq \delta$. Como $b = a+\phi(a)$, temos

$$|\phi_y(a)-a| = |y-\phi(x)-a| \leq |y-\phi(a)-a| + |\phi(x)-\phi(a)| \leq$$
$$\leq |y-b| + \lambda|x-a| \leq (1-\lambda)\delta = \lambda\delta = \delta,$$

como queríamos demonstrar.

COROLÁRIO - <u>Sejam $U \subset R^m$ um aberto e $f: U \to R^m$ uma aplicação da forma $f(x) = T.x + \phi(x)$ onde $T \in GL(R^m)$ e $\phi: U \to R^m$ satisfaz $|\phi(x)-\phi(y)| \leq \lambda|x-y|$, com $\lambda < |T^{-1}|$. Então f é um homeomorfismo de U sôbre o aberto $f(U) \subset R^m$.</u>

De fato, $T^{-1}f(x) = x + T^{-1}\phi(x)$ onde $T^{-1}\phi(x): U \to R^m$ é uma contração. Desta forma $T^{-1}f$ leva U homeomòrficamente sôbre o aberto $T^{-1}f(U) \subset R^m$. Segue-se a conclusão desejada.

TEOREMA 9 - (<u>Teorema da função inversa</u>). <u>Sejam $U \subset R^m$ um aberto e $f: U \to R^m$ uma aplicação C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tal que, em um ponto $x_o \in U$, $f'(x_o) \in \mathcal{L}(R^m)$ é um isomorfismo. Então f aplica difeomòrficamente uma vizinhança V de x_o sôbre uma vizinhança W de $f(x_o)$.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Para simplicidade de notação suponhamos que $x_o = 0$ e $f(x_o) = f(0) = 0$. Então temos $f(x) = f'(0).x + r(x)$, onde $r(x) = f(x) - f'(0).x$ é de classe C^k $(k \geq 1)$ e $r'(0) = 0$. Seja λ tal que $0 < \lambda < 1/|f'(0)^{-1}|$. Existe uma bola aberta V em tôrno da origem tal que $|r'(x)| < \lambda$ para todo $x \in V$. Então, pela desigualdade do valor médio, $|r(x)-r(y)| < \lambda|x-y|$ para todos os $x,y \in V$. O corolário anterior nos diz que $f|V$ é um homeomorfismo de V sôbre um aberto W que contém $f(x_o)$. Além disso, visto que $f': U \to \mathcal{L}(R^m)$ é contínua e $f'(x_o)$ está no aberto $GL(R^m)$, a bola V pode ser escolhida de forma a que $f'(x)$ é invertível para todo $x \in V$.

Seja $g = f^{-1}: W \to V$ o homeomorfismo inverso de f. Mostraremos que g é diferenciável em cada ponto $y = f(x) \in W$. Ora, se existe, $g'(y)$ deverá ser igual a $[f'(x)]^{-1}$. Portanto, escrevemos

$$g(y+k) = g(y) + [f'(x)]^{-1}.k + s(k)$$

e tentaremos mostrar que $\lim_{k \to 0} s(k)/|k| = 0$. Seja $f(x+h) = y+k$, de modo que $k = f(x+h) - f(x)$. Observe que $k \to 0$ se, e sòmente se $h \to 0$ visto que $f|V$ é um homeomorfismo.

Temos $h = g(y+k) - g(y) = [f'(x)]^{-1}[f'(x).h+r(h)] + s(k)$ e portanto $h = h + [f'(x)]^{-1}.r(h) + s(k)$, i.e., $s(k) = -[f'(x)]^{-1}.r(h)$. Logo

$$\frac{s(k)}{|k|} = -\frac{|h|}{|k|}\left[f'(x)^{-1}.r(h)\right].$$

Quando $k \to 0$ a razão $|h|/|k|$ permanece limitada (V. Proposição 1, Cap. 5) e o fator entre colchêtes tende a zero. Isto mostra que g é diferenicável para cada $y \in W$, com $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$, onde $y = f(x)$. Em particular $f|V: V \to W$ é um difeomorfismo.

Para concluir, resta apenas mostrar que $g \in C^k$. Antes, porém, fazemos uma pequena digressão.

APLICAÇÃO: Vamos usar o resultado acima para redemonstrar que a inversão de aplicações lineares $i: GL(R^m) \to GL(R^m)$ é de classe C^∞. Por simplicidade ponhamos $U = GL(R^m)$. Definamos $\phi: U x U \to U x U$ por $\phi(X,Y) = (X,XY)$. Então $\phi \in C^\infty$ com $\phi'(X,Y).(H,K) = (H,XK+HY)$. Logo

$\phi(X,Y):\mathcal{L}(R^m)x\mathcal{L}(R^m) \longrightarrow \mathcal{L}(R^m)x\mathcal{L}(R^m)$ é um isomorfismo cujo inverso é dado por $(A,B) \longmapsto (A,X^{-1}B-X^{-1}AY)$. Segue-se da parte já demonstrada do Teorema 9 que ϕ é um difeomorfismo local. Como ϕ é 1-1, é um difeomorfismo. Em particular, sua inversa $\phi^{-1}:UxU \rightarrow UxU$, dada por $\phi^{-1}(S,T) \neq (S,S^{-1}T)$, é diferenciável. Isto é equivalente a dizer que $\xi:UxU \rightarrow U$, definida por $\xi(S,T) = S^{-1}T$, é diferenciável. Seja $\eta:U \rightarrow UxU$ definida por $\eta(S) = (S,T)$. A composta $\xi\circ\eta:U \rightarrow U$ é diferenciável. Mas $\xi\circ\eta(S) = S^{-1} = i(S)$ e portanto $i:U \rightarrow U$ é realmente um difeomorfismo (igual ao seu inverso). De $X.i(X) = I$ segue-se por diferenciação que para todo $H\in\mathcal{L}(R^m)$, $H.i(X) + X.i'(X).H = 0$ e portanto $i'(X).H = -X^{-1}HX^{-1}$. Como no Cap. 4 (Vide Aplicação após o Corolário 1 do Teorema 1), segue-se que $i(X) = X^{-1}$ é de classe C^∞.

<u>Final da Demonstração do Teorema 9</u>

Já conseguimos mostrar que $g = f^{-1}:W \rightarrow V$ é diferenciável com $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$ para todo $y\in W$. Logo a derivada $g':W \rightarrow \mathcal{L}(R^m)$ é a composta $g' = i\circ f\circ g$ onde $i(X) = X^{-1}$:

$$W \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f'} GL(R^m) \xrightarrow{i} GL(R^m).$$

Como $f\in C^1$ e i,f',g são contínuas, então $g'\in C^0$ e portanto $g\in C^1$. Suponhamos agora $f\in C^2$. Então $i,g,f'\in C^1$, logo $g'\in C^1$, implicando $g\in C^2$. E assim sucessivamente.

COROLÁRIO - <u>Sejam $U \subset R^m$ um aberto e $f: U \to R^m$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja um C^k-difeomorfismo local é que para cada $x \in U$, $f'(x): R^m \to R^m$ seja um isomorfismo</u>.

Na prática, verifica-se frequentemente que $f'(x)$ é um isomorfismo observando que o determinante jacobiano $\det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)\right]$ é não nulo.

EXEMPLO 26 - Reconsideremos $f: R^2 \to R^2$, definida por $f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$. O determinante jacobiano é:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x} & \frac{\partial f^1}{\partial y} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x},$$

que é não-nulo para todo $(x,y) \in R^2$. Concluimos que f é um difeomorfismo local de classe C^∞. (Compare com o Exemplo 24, acima).

APLICAÇÃO: <u>O Teorema Fundamental da Álgebra</u>.

Seja $p: R^2 \to R^2$ um polinômio complexo não constante, $p(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Afirmamos que p é sobrejetivo. Em particular, existe $z_o \in R^2$ tal que $p(z_o) = 0$.

Como se sabe, para cada $z \in R^2$ a derivada $p'(z)$ é a transformação linear em R^2 que consiste na multiplicação pelo número complexo $a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$, que identificamos com $p'(z)$.

Como um polinômio não nulo pode ter apenas um número finito de raizes, o conjunto $F = \{z \in R^2; p'(z)=0\}$ é finito, assim como $p(F)$. Em particular, $R^2 - p(F)$ é conexo.

Considere a aplicação $P: R^2 - p^{-1}(p(F)) \to R^2 - p(F)$ definida por restrição de p.

Para cada z no domínio de P, $z \notin F$. Então $P'(z) = P'(z)$ é um complexo não nulo e portanto $P'(z)$ é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa P é uma aplicação aberta.

Por outro lado, P é uma aplicação fechada. Isto pode ser provado com facilidade diretamente, ou como segue: por uma propriedade conhecida de polinômios, $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$. Isto significa que p é uma <u>aplicação própria</u>, i.e., a imagem inversa de todo compacto é compacta. Como $p(F) \subset R^2$ é fechado, a restrição a $R^2 - p^{-1}(p(F))$ é ainda uma aplicação própria em $R^2 - p(F)$. Aplicações próprias são fechadas. Logo P é uma aplicação fechada.

A imagem de P é portanto aberta e fechada no espaço métrico conexo $R^2 - p(F)$. Logo P é sôbre R^2. Como $p(F)$ está contido na imagem de p, segue-se que p é também sôbre R^2.

§ 2. A forma local das submersões.

Seja $U \subset R^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f: U \to R^n$ é chamada uma submersão se, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x): R^m \to R^n$ é sôbre. Claro que tal só pode ocorrer quando $m \geq n$.

Pela regra da cadeia, a composta de duas submersões é ainda uma submersão.

EXEMPLOS:

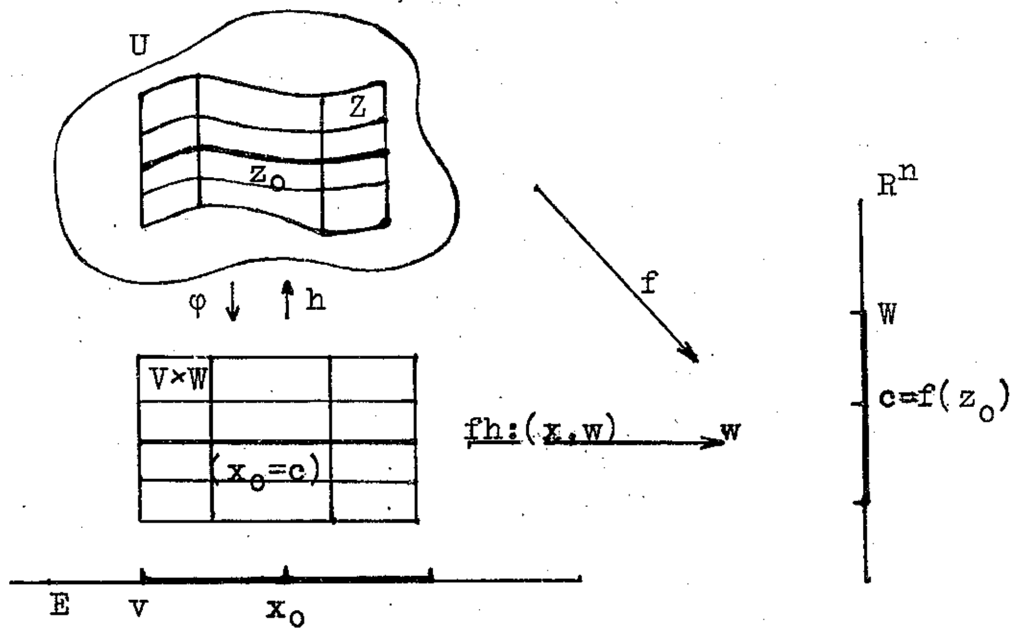
27) Seja $\pi: R^m x R^n \to R^n$ a projeção definida por $\pi(x,y) = y$. Então $\pi'(x,y) = \pi$ para todo $(x,y) \in R^m x R^n$, portanto é uma submersão. O Teorema 10 abaixo mostra que tôda submersão se comporta localmente como esta.

28) Seja $R^m = R^{m-i} \oplus R^i$ uma decomposição em soma direta. Defina $f: R^m \to R$ por $f(x,y) = |x|^2 - |y|^2$, onde $|x|^2 = \langle x,x \rangle$ e $|y|^2 = \langle y,y \rangle$ para $x \in R^{m-i}$ e $y \in R^i$. Então $f'(x,y).(h,k) = 2 \langle x,h \rangle - 2 \langle y,k \rangle$, portanto $f'(x,y) \neq 0$ exceto na origem $(x,y) = (0,0)$. Assim f, restrita a $R^m - \{0\}$, é uma submersão, pois como funcional linear, $f'(x,y)$ pode ser apenas nulo ou sobrejetor.

Sempre que escrevermos um espaço vetorial como uma soma direta, da forma $R^{m+n} = E \oplus F$, os elementos do espaço original serão representados por pares (x,y) onde $x \in E$ e $y \in F$.

Com relação ao teorema seguinte, lembramos que dada uma transformação linear sôbrejetora $T:R^{m+n} \to R^n$, existem muitas decomposições em soma direta $R^{m+n} = E \oplus F$ tais que T restrito a F é um isomorfismo sôbre R^n. É suficiente tomar E = núcleo de T e F = qualquer subespaço suplementar de E em R^{m+n}. Em tais casos, òbviamente, $\dim E = m$ e $\dim F = n$.

TEOREMA 10 - (<u>Forma local das submersões). Seja $U \subset R^{m+n}$ um aberto e $f:U \to R^n$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que para algum $z_o \in U$, $f'(z_o):R^{m+n} \to R^n$ é sobrejetora. Dada uma qualquer decomposição em soma direta $R^{m+n} = E \oplus F$ (com $z_o = (x_o, y_o)$) tal que $\partial_2 f(z_o) = f'(z_o)|F:$ $:F \to R^n$ é um isomorfismo, existe um difeomorfismo, $h:V \times W \to Z$, de classe C^k, tal que $f \circ h\,(x,w) = w$ para todo $(x,w) \in V \times W$, onde $x_o \in V$ aberto em E. $f(z_o) \in W$ aberto em R^n e $z_o \in Z$ aberto em R^{m+n} $(Z \subset U)$</u>.



DEMONSTRAÇÃO: Defina a aplicação $\phi: U \to E\times R^n$, de classe C^k, pondo $\phi(x,y) = (x, f(x,y))$. A derivada $\phi'(z_o): R^{m+n} \to E\times R^n$ é dada por $(h,k) \mapsto (h, \partial_1 f(z_o).h + \partial_2 f(z_o).k)$ Ora, a aplicação linear $(u,v) \mapsto (u, |\partial_2 f(z_o)|^{-1}.(v - \partial_1 f(z_o).u))$ é claramente uma inversa para $\phi(z_o)$ que é então um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, se fazemos $f(z_o)=c$, ϕ é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança de z_o sôbre uma vizinhança de (x_o,c). Esta última pode ser escolhida na forma $V\times W$ onde V é aberto em E e W é aberto em R^n. Ponha $Z = \phi^{-1}(v\times W)$ e $h:\phi^{-1}: V\times W \to Z$. Então, para qualquer (x,w) em $V\times W$, afirmamos que $f\circ h(x,w) = w$. De fato, como $\phi(x,y) = (x,f(x,y))$ segue-se que $h = \phi^{-1}$ é da forma $h(x,w) = (x, h_2(x,w))$. Portanto para todo $(x,w)\in V\times W$, $(x,w) = \phi h(x,w) = (x, f\circ h(x,w))$ donde resulta $w = f\circ h(x,w)$.

COROLÁRIO: <u>Uma submersão de classe C^k $(k\geq 1)$ é uma aplicação aberta.</u>

OBSERVAÇÕES:

1) Segue-se do Teorema 10 que se $f: U \to R^n$ é de classe C^k $(k\geq 1)$ e $f'(z_o)$ é sobrejetora, então $f'(z)$ ainda é sobrejetora para todo z numa vizinhança Z de z_o. Isto também pode ser observado diretamente como resultado de dois fatos:

   a) $f': U \to \mathcal{L}(R^{m+n}, R^n)$ é contínua;

   b) O conjunto das aplicações lineares sobrejetoras formam um aberto em $\mathcal{L}(R^{m+n}, R^n)$. Para mostrá-lo observe apenas que se $T:R^{m+n} \to R^n$ é sobrejetora então algum determinante menor $n\times n$ da motriz de T é não nulo. O mesmo determinante será não-nulo em uma vizinhança de T.

2) Na categoria cujos objetos são abertos de espaços euclidianos e cujos morfismos são as aplicações de classe C^k $f:U \to R^n$ para um dado $k \geq 1$, as equivalências são os difeomorfismos C^k. O Teorema 10 nos diz então que tôda submersão C^k é localmente equivalente a uma projeção $\pi: V\times W \to W$.

3) Uma decomposição em soma direta do tipo $R^{m+n} = R^m \oplus R^n$ significa uma escolha de uma partição $\{e_1,\ldots,e_{m+n}\} = \{e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\} \cup \{e_{j_1},\ldots,e_{j_n}\}$ da base canônica de R^{m+n}. Dada a partição, pomos $R^m \subset R^{m+n}$ como sendo o subespaço gerado por $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\}$ e $R^n \subset R^{m+n}$ como o subespaço gerado pelos vetores restantes $\{e_{j_1},\ldots,e_{j_n}\}$. É óbvio que R^{m+n} é a soma direta dêsses dois subespaços e portanto escrevemos $R^{m+n} = R^m \oplus R^n$.

Uma vez dada uma decomposição em soma direta $R^{m+n} = R^m \oplus R^n$, escrevemos os elementos de R^{m+n} como pares $z = (x,y)$, $x\in R^m$ e $y\in R^n$. Por exemplo, seja $R^3 = R^2 \oplus R$ onde R^2 é gerado por e_1, e_3 e R por e_2. Então todo $z=(x^1,x^2,x^3)$ será denotado por $z = (u,v)$, $u = (x^1,0,x^3)\in R^2$ e $v = (0,x^2,0) \in R$.

Dada uma aplicação linear sobrejetiva $T:R^{m+n} \to R^n$, existe uma decomposição em soma direta do tipo $R^{m+n} = R^m \oplus R^n$

tal que $T|R^n : R^n \to R^n$ é um isomorfismo. Basta observar que os vetores $Te_1,\ldots,Te_{m+n}$ geral R^n portanto é possível selecionar dentre êles uma base $\{Te_{j_1},\ldots,Te_{j_n}\}$. Sejam $i_1,\ldots,i_m$ os índices restantes. A partição $\{1,2,\ldots,m+n\} = \{i_1,\ldots,i_m\} \cup \{j_1,\ldots,j_n\}$ fornece a decomposição desejada, $R^{m+n} = R^m \oplus R^n$.

Desta forma, no Teorema 10 (e também no Teorema 11 abaixo) a decomposição em soma direta $R^{m+n} = e\oplus F$ pode ser sempre tomada com E e F gerados pelos eixos coordenados.

TEOREMA 11 - (Teorema da função implícita). Sejam $U \subset R^{m+n}$ e $f: U \to R^n$ uma aplicação de classe C^k $(k\geq 1)$. Suponha que $R^{m+n} = E\oplus F$ é uma decomposição em soma direta tal que, para $z_o = (x_o,y_o)\in U$, a segunda derivada parcial $\partial_2 f(z_o): F \to R^n$ é um isomorfismo. Ponha $f(z_o) = c \in R^n$. Então existem abertos $V \subset E$ contendo x_o e $Z \subset U$ contendo z_o com a seguinte propriedade: para cada $x\in V$ há um único $\xi(x)\in F$ tal que $(x,\xi(x))\in Z$ e $f(x,\xi(x)) = c$.

A aplicação $\xi: V \to F$ assim definida é de classe C^k e sua derivada é dada por $\xi'(x) = -\partial_2 f(x, (x))^{-1}\circ\partial_1 f(x,\xi(x))$.

DEMONSTRAÇÃO: Usando a notação do Teorema 10, temos $Z = h(V\times W)$ e $h(x,w) = (x,h_2(x,w))$ para $(x,w)\in V\times W$. Ponha $\xi(x) = h_2(x,c)$. Então $\xi: V \to F$ é de classe C^k e $f(x,\xi(x)) = fh(x,c) = c$ para todo $x\in V$. Quanto à unicidade de ξ, seja $(x,y)\in Z$ tal que $f(x,y) = c$. Então, $(x,y) =$

$= h\phi(x,y) = h(x,c) = (x,h_2(x,c)) = (x,\xi(x))$ e portanto $y = \xi(x)$. Finalmente, derivando $f(x,\xi(x)) = c$, obtemos $\partial_1 f(x,\xi(x)) + \partial_2 f(x,\xi(x))\circ \xi'(x) = 0$. Logo $\xi'(x) = -[\partial_2 f(x,\xi(x))]^{-1}\circ \partial_1 f(x,\xi(x))$.

OBSERVAÇÕES:

1) O parâmetro c do teorema da função implícita pode variar no aberto W. A conclusão então será: existem abertos $V \subset E$, contendo x_o, $W \subset R^n$ contendo $\underline{c}$ e $Z \subset U$ contendo z com a seguinte propriedade. Para cada $(x,y) \in V x W$, existe um único $\xi(x,y) \in F$ tal que $(x,\xi(x,y)) \in Z$ e $f(x, \xi(x,y)) = y$. A aplicação $\xi : VxW \to F$ assim definido é de classe C^k. Basta colocar $\xi(x,y) = h_2(x,y)$.

2) A unicidade de ξ no Teorema 11 pode ser colocada sob forma diferente. Em vez de unicidade relativamente às condições $(x, \xi(x)) \in Z$ e $f(x,\xi(x)) = c$, podemos mostrar que ξ é a única <u>aplicação contínua</u> $\xi : V \to F$ tal que $\xi(x_o) = y_o$ e $f(x,\xi(x)) = c$. Para provar isto, escolhemos V conexo. Dada qualquer outra aplicação contínua $\lambda : V \to F$ satisfazendo àquelas condições, seja $X = \{x \in V \mid \xi(x) = \lambda(x)\}$. É claro que X é fechado <u>em V</u>. Por outro lado, observamos qie $X = \{x \in V ; (x,\lambda(x)) \in Z\}$ pelo argumento usado na demonstração de unicidade do Teorema 11. Portanto X é aberto em V. Como $x_o \in X$, segue-se que $X = V$.

3) A conclusão do Teorema 11 significa, geomètricamente que .

$f^{-1}(c) \cap Z$ é o gráfico (relativamente à decomposição $R^{m+n} = E \oplus F$) de uma aplicação $\xi: V \to F$ de classe C^k com $\xi(x_o) = y_o$.

§ 3. A forma local das imersões.

Seja $U \subset R^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f: U \to R^n$ é chamada uma imersão quando, para cada $x \in U$, a derivada $f'(x): R^m \to R^n$ fôr uma aplicação linear biunívoca. É claro que tal só pode ocorrer quando $m \times n$.

Como a composta de aplicações lineares biunívoca ainda é biunívoca, segue-se da regra da cadeia que a composta de imersões é uma imersão.

EXEMPLOS:

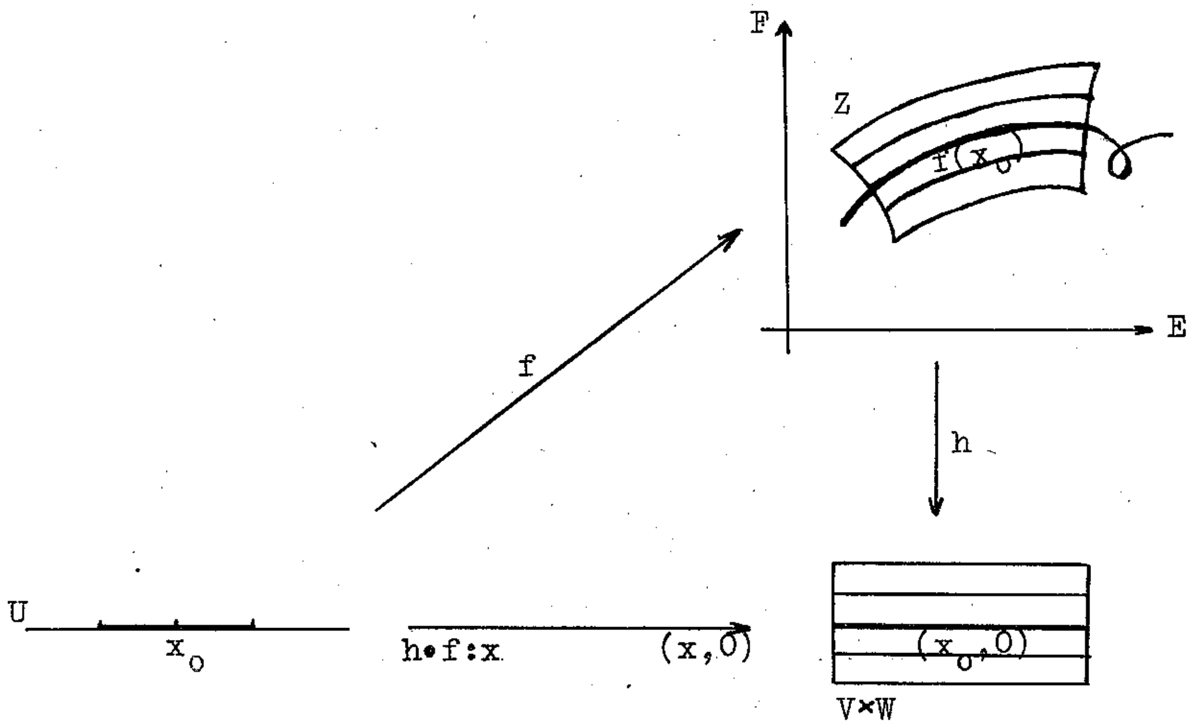
29) Seja $i: R^m \to R^m x R^n$ a aplicação de inclusão, definida por $i(x) = (x,0)$. Então $i'(x) = i$ para todo $x \in R^m$ e portanto i é uma imersão. O Teorema 12 abaixo mostra que tôda imersão se comporta localmente como esta.

30) Seja $J \subset R$ um intervalo aberto. Um caminho diferenciável $f: J \to R^n$ é uma imersão se, e sòmente se, seu vetor velocidade é não nulo em cada ponto $t \in J$. Desta forma, um caminho f é uma imersão se, e sòmente se, sua imagem $f(J)$ tem, em cada ponto $f(t)$ uma "tangente", a saber a reta $L = \{f(t) + \lambda f'(t); \lambda \in R\}$. Observe que f pode não ser 1-1.

Então, quando $f(t_1) = f(t_2)$, as duas retas tangentes $L_1 = \{f(t_1) + \lambda f'(t_1); \lambda \in R\}$ e $L_2 = \{f(t_2) + \lambda f'(t_2); \lambda \in R\}$ podem ser distintas. Se consideramos, entretanto, uma pequena vizinhança V de t_1, a mesma será transformada por t de forma biunívoca e assim L_1 será a única tangente no ponto $f(t_1)$ para o caminho $f|V$.

O Teorema 12 abaixo mostra que tôda imersão de classe C^k $(k \geq 1)$ $f: U \to R^{m+n}$ é localmente equivalente a uma inclusão $x \mapsto (x,0)$ de R^m em $R^m x R^n$. A noção intuitiva de uma imersão C^k $f: U \to R^{m+n}$ $(k \geq 1)$ é a seguinte: para cada aberto $V \subset U$ convenientemente pequeno $f(V)$ é uma "superfície m-dimensional suave" em R^{m+n}, que admite um "plano tangente" $f(x) + f'(x).R^m$ em cada ponto $f(x) \in f(V)$. Êsse "plano" varia contìnuamente com $x \in V$.

TEOREMA 12-(<u>Forma local das imersões). Sejam $U \subset R^m$ um aberto e $f: U \to R^{m+n}$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que existe $x_o \in U$ tal que $f'(x_o): R^m \to R^{m+n}$ é biunívoca. Então existe um difeomorfismo de classe C^k, $h: Z \to VxW$, de uma vizinhança Z de $f(x_o)$ sôbre um aberto $VxW \subset R^m x R^n$ $(x_o \in V, 0 \in W, f(V) \subset Z)$ tal que $h \circ f(x) = (x,0)$ para cada $x \in V$</u>.



DEMONSTRAÇÃO: Sejam $E = f'(x_o).R^m$ e F qualquer suplementar de E em R^{m+n}, ou seja $R^{m+n} = E \oplus F$.

Então $f'(x_o)$ é um isomorfismo de R^m em E e $\dim F = n$. Defina $\phi: U \times F \longrightarrow R^{m+n}$ pondo $\phi(x,y) = f(x)+y$. Então $\phi \in C^k$, $\phi(z_o,0) = f(x_o)$ e para $(u,v) \in R^m \times F$, $\phi'(x_o,0)(u,v) = f'(x_o).u+v$. Logo $\phi'(x_o,0)$ é um isomorfismo de $R^m \times F$ sôbre R^{m+n}. (Observe que $f'(x_o 0.u \in F$ e $v \in F$). Pelo teorema da função inversa, ϕ é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança de $(x_o,0)$ (que podemos escolher na forma $V \times W$, onde $V \ni x_o$ e aberto em U e $W \ni 0$ é aberto em F) sôbre uma vizinhança aberta Z de $f(x_o)$ em R^{m+n}. Seja h o difeomorfismo inverso de $\phi|(V\times W)$. Como $\phi(x,0) = f(x)$, temos $hf(x) = h\phi(x,0) = (x,0)$, para todo $x \in V$. Para terminar, identificamos F com R^n escolhendo uma base conveniente em F (a única razão para esta última passagem é simplificar o enunciado do teorema).

COROLÁRIO 1 - <u>Se $F:U \to R^{m+n}$ é de classe C^k $(k \geq 1)$ e $f'(x_o):R^m \to R^{m+n}$ é injetiva para algum $x_o \in U$ então em uma vizinhança V de x_o, $f:V \to f(V)$ é um homeomorfismo cujo inverso $f^{-1}:f(V) \to V$ é a restrição de uma aplicação de classe C^k, $\xi:Z \to V$ onde Z é uma vizinhança de $f(x_o)$.</u>

Basta tomar V e Z como no teorema acima e definir $\xi = \pi \circ h$ onde $\pi:V\times W \to V$ é a primeira projeção. Então para $x \in V$, $\xi \circ f(x) = \pi hf(x) = \pi(x,0) = x$ e portanto $\xi|f(V) = f^{-1}$. Como é óbvio que ξ é C^k, segue-se o corolário.

OBSERVAÇÃO: Em particular, se $f:U \to R^{m+n}$ é de classe C^k $(k \geq 1)$ e $f'(x_o):R^m \to R^{m+n}$ é injetiva, então $f'(x)$ é injetiva para todo x em uma vizinhança de x_o.

Isto segue-se diretamente dos dois fatos seguintes:

1) $f':U \to \mathcal{L}(R^m,R^{m+n})$ é contínua.
2) O conjunto das aplicações lineares injetivas é aberto em $\mathcal{L}(R^m,R^{m+n})$.

Para mostrá-lo observe que $T:R^m \to R^{m+n}$ é biunívoca se, e sòmente se, existe um determinante menor $m\times m$ não nulo em sua matriz. O mesmo menor será não nulo em uma vizinhança de T.

§ 4. O teorema do pôsto.

O teorema seguinte contém, como casos particulares, as formas locais das submersões e das imersões.

O pôsto de uma aplicação linear $T:R^m \to R^n$ é a dimensão de sua imagem $T.R^m$, i.e., o número máximo de vetores linearmente independentes entre $T.e_1,\ldots,T.e_m$. Assim pôsto de $T = \rho(T) = r$ se, e sòmente se, a matriz de T (por exemplo, relativamente às bases canônicas de R^m e R^n) tem um determinante menor $r \times r$ não-nulo e todo menor de ordem $r+1$ é nulo.

O pôsto de uma aplicação diferenciável $f:U \to R^n$ em um ponto $x \in U$ é, por definição, o pôsto de sua derivada $f'(x):R^m \to R^n$. Assim, uma submersão $f:U \to R^n$ tem pôsto n em todo ponto $x \in U$ e uma imersão $f:U \to R^n$ $(U \subset R^m)$ tem pôsto m em cada ponto. Submersões e imersões são chamadas, por isso, de aplicações de pôsto máximo.

Lembramos que um subconjunto A de um espaço vetorial E é convexo quando, para cada par de pontos $x,y \in A$, o segmento de reta $[x,y] \subset A$. Por exemplo, uma bola aberta $B_\delta(a)$, de centro a e raio δ, num espaço normado, é convexa. Para mostrá-lo tome $x,y \in B_\delta(a)$ i.e., $|x-a| < \delta$ e $|y-a| < \delta$. Para um t arbitrário, $0 \leq t \leq 1$ temos

$$|(1-t)x + ty-a| = |(1-t)(x-a)+t(y-a)| \leq (1-t)|x-a|+t|y-a) < \\ < (1-t)\delta + t\delta = \delta.$$

Anàlogamente a bola fechada de centro a e raio δ é convexa.

Se $A \subset E \times F$ é subconjunto do produto cartesiano de dois espaços vetoriais, dizemos que A é verticalmente convexo se todo segmento de reta vertical $[(x,y'),(x,y'')]$ cujas extremidades estão em A, está inteiramente contido em A. Por exemplo se $A = V \times W$ onde V é qualquer subconjunto de E, e $W \subset F$ é convexo, então A é verticalmente convexo.

LEMA - Seja $U \subset R^m \times R^n$ um aberto verticalmente convexo. Se $f: U \to R^p$ tem uma segunda derivada parcial $\partial_2 f$ identicamente nula em U então f é independente da segunda variável, i.e., $f(x,y) = f(x,y')$ para quaisquer (x,y) e $(x,y') \in U$.

DEMONSTRAÇÃO: Dados (x,y) e $(x,y') \in U$, o caminho $\phi: [0,1] \to R^p$ dado por $\phi(t) = f(x,(1-t)y + ty')$ é bem definido e diferenciável. Além disso $\phi'(t) = \partial_2 f(x,(1-t)y+ty') \cdot (y'-y) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Logo ϕ é constante. Em particular $\phi(0) = \phi(1)$, ou seja $f(x,y) = f(x,y')$.

Antes de demonstrar o próximo teorema, recordaremos um fato elementar de Álgebra Linear.

Seja $E \subset R^{m+p}$ um subespaço m-dimensional. Existe uma decomposição em soma direta $R^{m+p} = R^m \oplus R^p$ tal que a primeira projeção $\pi: R^{m+p} \to R^m$, $\pi(u,v) = u$, aplica E isomòrficamente sôbre R^m.

DEMONSTRAÇÃO: Escolhamos uma base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ em E. Salvo se $E = R^{m+p}$ (e portanto $p=0$) existe um vetor básico $e_{j_1} \in R^{m+p} - E$. Então $u_1, \ldots, u_m, e_{j_1}$ são linearmen te independentes e geram um subespaço $E_1 \subset R^{m+p}$. Salvo se $E_1 = R^{m+p}$, existe um vetor básico $e_{j_2} \in R^{m+p} - E_1$. Então $u_1,\ldots,u_m,e_{j_1},e_{j_2}$ são linearmente independentes. Prosseguindo dêste modo, obteremos vetores básicos $e_{j_1},\ldots,e_{j_p}$ tais que $\{u_1,\ldots,u_m,e_{j_1},\ldots,e_{j_p}\}$ seja uma base de R^{m+p}. Isto determina as decomposições em somas diretas $R^{m+p} = R^m \oplus R^p$, $R^{m+p} = E \oplus R^p$. A projeção π, relativa à primeira decomposição, transforma R^p em zero, logo aplica E isomòrficamente sôbre R^m.

TEOREMA 13 - Sejam $U \subset R^{m+n}$ um aberto e $f: U \to R^{m+p}$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Suponha que f tem pôsto m em cada ponto de U. Então, para todo $z_o \in U$ existem difeomorfismos de classe C^k: α, de um aberto de $R^m x R^n$ sôbre uma vizinhança de z_o e β, de uma vizinhança de $f(z_o)$ sôbre um aberto em $R^m x R^p$ tais que $\beta \circ f \circ \alpha$: $:(x,y) \mapsto (x,0)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $E = f'(z_o).R^{m+n} \subset R^{m+p}$. Como $\dim E = m$, existe uma decomposição em soma direta $R^{m+p} = R^m \oplus R^p$ tal que a primeira projeção correspondente, $\pi: (u,v) \longmapsto u$ aplica E isomòrficamente sôbre R^m. (Vide Observação acima). Então $(\pi \circ f')(z_o) = \pi \circ f'(z_o): R^{m+n} \longrightarrow R^m$ é sobrejetora. Pelo Teorema 10 existe um difeomorfismo $\alpha \in C^k$, de um aberto $V_o x W$ $R^m X R^n$ sôbre uma vizinhança de z_o, tal que $\pi f \alpha(x,y) = x$. Isto significa que $f\alpha(x,y) = (x, \lambda(x,y))$ onde $\lambda: V_o x W \longrightarrow R^p$ é de classe C^k. Afirmamos que $\partial_2 \lambda \equiv 0$.

Realmente as derivadas $(f\alpha)'$, $\partial_1\lambda$, $\partial_2\lambda$ sendo calculados em um ponto $(x,y) \in V_o x W$ fornecem:

$$(f\alpha)':(h,k) \longmapsto (h, \partial_1\lambda.h+\partial_2\lambda.k) \quad h\in R^m,\ k\in R^n$$

segue-se que $\pi\circ(f\alpha):(h,k)\mapsto h$. Portanto, se denotamos por E_{xy} a imagem da aplicação linear $(f\alpha)'$, π leva E_{xy} sôbre R^m. Como $\dim E_{xy} = m$ para todo $(x,y)\in V_o x W$, leva forçosamente todo o E_{xy} isomòrficamente sôbre R^m. Se em algum ponto (x,y), $\partial_2\lambda$ fôsse não nula, i.e., $\partial_2\lambda.k \neq 0$ para algum $k\in R^n$, então $(f\alpha)'.(0,k) = (0,\partial_2\lambda.k) \neq 0$, ou seja $(f\alpha)'$ levaria um vetor não nulo no zero, o que contradiz a condição de isomorfismo. Como podemos tomar W convexo, segue-se que $\lambda(x,y)$ não depende de y. Seja $\alpha(x_o,y_o) = z_o$. Considerando a injeção $i:V_o \to V_o x W$, dada por $i:x \mapsto (x,y_o)$, obtemos $f\alpha i:x\mapsto(x,\lambda(x,y_o))$ que é uma aplicação de classe C^k derivada injetora em x_o. Além do mais, $f\alpha i(x) = f\alpha(x,y)$ para todo $(x,y)\in V_o x W$. Pelo Teorema 12 existe um difeomrofismo de classe C^k, β, de uma vizinhança de $f(z_o)$ sôbre um aberto em $R^m x R^p$ tal que $\beta f\alpha i:x\mapsto(x,0)$ (x aqui estará passìvelmente em uma vizinhança $V\subset V_o$). Como $f\alpha i(x) = f\alpha(x,y)$ para todo $x\in V$ $y\in W$, temos $\beta f\alpha:(x,y)\longmapsto(x,0)$.

Em seguida mostraremos que, dada qualquer aplicação de classe C^1, $f:U\to R^n$, definida num aberto $U\subset R^m$, existe um subconjunto aberto denso $A\subset U$ tal que f tem pôsto constante em cada componente conexa de A. Então poderemos usar o teorema do pôsto a fim de obter informações sôbre f.

na vizinhança de cada ponto de A.

Primeiramente, notemos que o pôsto de uma aplicação $f:U \to R^n$, de classe C^1, é uma função semi-contínua inferiormente (com valores inteiros). Mais precisamente, se f tem pôsto r num ponto $x \in U$, existe uma vizinhança V de x tal que f tem pôsto $\geq r$ em todos os pontos de V. Com efeito, existe um determinante menor $r \times r$ da matriz $If(x)$ que é não-nulo. Por continuidade, êste menor é não-nulo em todos os pontos de uma vizinhança V de x, de modo que o pôsto de f é $\geq r$ em todos os pontos de V.

PROPOSIÇÃO 11 - <u>Sejam $U \subset R^m$ aberto e $f:U \to R^n$ de classe C^1. Para cada $r = 0,1,\ldots,p$ (onde $p = \min\{m,n\}$), seja A_r o interior do conjunto dos pontos $x \in U$ nos quais f tem pôsto r. Então $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$ é (aberto e) denso em U.</u>

DEMONSTRAÇÃO: Seja V um subconjunto aberto não-vazio arbitrário de U e seja $x \in V$ um ponto onde o pôsto de f assume seu valor máximo r_o em V Existe uma vizinhança W de x na qual o pôsto de f é r_o. Podemos tomar $W \subset V$, de modo que o pôsto de f será exatamente r_o em todos os pontos de W. Portanto $W \subset A r_o$. Isto mostra que $V \cap A \neq \emptyset$, logo A é denso em U.

COROLÁRIO 1 - <u>Dada $f:U \to R^n$ de classe C^1, existe um subconjunto aberto denso $A \subset U$ tal que o pôsto de f é constante em cada componente conexa de A.</u>

COROLÁRIO 2 - <u>Seja $U \subset R^m$ aberto. Se uma aplicação $f: U \to R^n$, de classe C^1, é biunívoca, então $m \times n$ e o conjunto dos pontos $x \in U$ tais que $f'(x): R^m \to R^n$ é injetiva é aberto e denso em U.</u>

De fato, seja $A = A_o \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$, $p = \min\{m,n\}$, como na proposição acima. Pelo teorema do pôsto, f não pode ser biunívoca em A_r, a menos que $r = m = p$. Portanto $m \leqslant n$ e $A_r = \emptyset$ para $r \neq m$, de modo que $A = A_m$. Isto demonstra o corolário, pois o conjunto de todos os $x \in U$ tais que $f'(x)$ tem ponto $\underline{m}$ é certamente aberto.

COROLÁRIO 3 - <u>Seja $U \subset R^m$ aberto. Se uma aplicação $f: U \to R^n$, de classe C^1, é aberta, então $m \geqslant n$ e o conjunto de todos os $x \in U$ tais que $f'(x): R^m \to R^n$ é sobrejetiva é aberto e denso em U.</u>

A demonstração é, <u>mutatis mutandis</u>, como a anterior.

CAPÍTULO 11

MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS MÚLTIPLAS

Seja $f:R^m \to R^n$ uma aplicação contínua com suporte compacto. (Ver no fim do §8). O símbolo $\int f$ foi definido como uma integral repetida. Aqui, usamos a notação tradicional $\int f(y)dy$, que significa o mesmo que $\int f(z)dz$ ou $\int f(x)dx$. Nossa definição foi:

$$\int f(y)dy = \int_{a^1}^{b^1} dy^1 \int_{a^2}^{b^2} dy^2 \ \ldots \int_{a^m}^{b^m} f(y^1,\ldots,y^m)dy^m \ ,$$

onde $[a^1,b^1]\times\ldots\times[a^m,b^m]$ é algum paralelepípedo contendo o suporte de f.

Suponha agora que $U,V \subset R^m$ são abertos, V contendo o suporte de f, e $\phi:U \to V$ é um difeomorfismo de classe C^1. A aplicação composta $f\phi:U \to R^n$ tem suporte compacto e, de fato, $\mathrm{supp}(f\phi) = \phi^{-1}\,\mathrm{supp}(f)$.

Podemos encarar $f\phi$ como uma aplicação contínua $f\phi:R^m \to R^n$ pelo procedimento usual de defini-la igual a zero fora de U.

Indiquemos com $\Delta\phi(x)$ o determinante jacobiano de ϕ em $x \in U$. Assim, $\Delta\phi:U \to R$ é a aplicação contínua definida por $\Delta\phi(x) = \det\phi'(x) = \det(\partial\phi^i/\partial x^j)(x)$. Quando $m=1$, $\Delta\phi(x) = \phi'(x)$.

A correspondência $x \to \Delta\phi(x).f(\phi(x))$ define uma aplicação contínua $U \to R^n$, com suporte compacto, logo ela pode ser considerada como definida em R^m, sendo zero fora de U. O mesmo é verdade para $x \mapsto |\Delta\phi(x)|f(\phi(x))$.

Nosso objetivo nesta seção é provar o seguinte teorema.

TEOREMA 14 - <u>Seja $f:R^m \to R^n$ uma aplicação contínua com suporte compacto, $U,V \subset R^m$ conjuntos abertos, com $supp(f) \subset V$, e $\phi:U \to V$ um C^1-difeomorfismo. Então</u>

$$\int f(y)dy = \int |\Delta\phi(x)|.f(\phi(x))dx.$$

A demonstração do Teorema 14 obedecerá ao seguinte esquema.

Indicaremos com $\mathcal{C}$ a coleção de todos os C^1-difeomorfismos entre conjuntos abertos em R^m para os quais o teorema é verdadeiro (relativamente a tôdas as aplicações admissíveis f). Então provaremos:

A) Quando $m=1$, $\mathcal{C}$ contém todos os C^1-difeomorfismos;

B) A classe $\mathcal{C}$ contém todos os difeomorfismos "primitivos", os quais serão definidos abaixo;

C) O composto de dois difeomorfismos de $\mathcal{C}$, está ainda em $\mathcal{C}$;

D) Seja $\phi:U \to V$ um C^1-difeomorfismo. Se todo $x \in U$

possui uma vizinhança W_x tal que $\phi|W_x \in \mathcal{C}$, então $\phi \in \mathcal{C}$.

E) Dado um C^k-difeomorfismo $\phi: U \to V$ $(k \geq 1)$, todo $x \in U$ possui uma vizinhança W_x tal que $\phi|W_x$ é o composto de C^k-difeomorfismos primitivos.

O resultado A) é corolário da seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 12 - <u>Sejam $\phi: [a,b] \to [c,d]$ um C^1-difeomorfismo e $f: [c,d] \to R^n$ um caminho contínuo. Então</u>

$$\int_c^d f(t)dt = \int_a^b |\phi'(s)| f(\phi(s))ds .$$

DEMONSTRAÇÃO: Defina os caminhos de classe C^1 $F: [a,b] \to R^n$ e $G: [c,d] \to R^n$ pondo $F(x) = \int_a^x \phi'(s)f(\phi(s))ds$ e $G(y) = \int_c^y f(t)dt$. Então $F'(x) = \phi'(x)f(\phi(x))$ e $G'(y) = f(y)$. Pela regra da cadeia segue-se que $F'(x) = (G \circ \phi)'(x)$ para todo x em $[a,b]$, portanto existe uma constante $v \in R^n$ tal que $G(\phi(x)) - F(x) = v$ para todo $x \in [a,b]$. Agora há dois casos. ou $\phi'(x) > 0$ para todo x em $[a,b]$, e então $\phi(a) = c$, $\phi(b) = d$, ou então $\phi(s) < 0$ para todo s, de modo que $\phi(a) = d$, $\phi(b) = c$. No primeiro caso, temos $v = G(\phi(a)) - F(a) = G(c) - F(a) = 0$, portanto $G(\phi(x)) = F(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Em particular $G(d) = G(\phi(b)) = F(b)$, i.e., $\int_c^d f(t)dt = \int_a^b \phi'(s)f(\phi(s))ds$. No segundo caso, $v = G(\phi(a)) - F(a) = G(d)$, logo $G(\phi(x)) - F(x) = G(d)$ para todo $x \in [a,b]$. Em particular, $G(d) = G(\phi(b)) - F(b) = G(c) - F(b) = -F(b)$, i.e., $\int_c^d f(t)dt = \int_a^b -\phi'(s)f(\phi(s))ds$.

Em cada caso, a proposição está provada.

COROLÁRIO - <u>Seja $f:R \to R^n$ contínua, com suporte compacto. Sejam $I, J \subset R$ intervalos abertos, com $supp(f) \subset J$, e $\phi: I \to J$ um C^1-difeomorfismo. Então</u>

$$\int f(t)dt = \int |\phi'(s)| f(\phi(s))ds.$$

Com efeito, seja $[c,d] \subset J$ um intervalo compacto contendo o suporte de f. Seja $[a,b] = \phi^{-1}[c,d]$. Então ϕ é um difeomorfismo de $[a,b]$ sôbre $[c,d]$. O corolário então decorre diretamente da Proposição 11.

Um difeomorfismo $\phi: U \to R^m$ é chamado <u>primitivo</u> quando consiste da transposição de duas coordenadas dadas ou então quando afeta no máximo uma dada coordenada de todo ponto $x \in U$. Mais precisamente, um difeomorfismo primitivo ϕ deve ter uma das duas formas abaixo:

$$\phi(\ldots x^i, \ldots, x^j, \ldots) = (\ldots x^j \ldots x^k \ldots), \quad i,j \text{ fixos, ou}$$
$$\phi(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, h(x^1, \ldots, x^m), \ldots x^m), \quad i \text{ fixo.}$$

Agora provaremos que todo difeomorfismo primitivo pertence à classe $\mathcal{C}$. Por simplicidade de notação, consideramos o caso de duas variáveis. A situação geral poderá, naturalmente, ser tratada da mesma maneira.

Sejam $f: R^2 \to R$ contínua, com suporte compacto, e $\phi: R^2 \to R^2$ da forma $\phi(x,y) = (y,x)$. Então $\Delta\phi = -1$, logo $|\Delta\phi| = 1$ em todos os pontos $(x,y) \in R^2$. Temos $\int f = \int dx \int f(xy)dy$. Por outro lado $f \circ \phi: (s,t) \mapsto f(t,s)$, assim $\int|\Delta\phi|.(f\circ\phi) = \int ds\ f(t,s)dt$. Os nomes das variáveis sendo irrelevantes, nós podemos escrever $\int|\Delta\phi|.(f\circ\phi) = $ $= \int dt \int f(s,t)ds$, que é igual a $\int ds \int f(s,t)dt$, pelo Teorema 4, §8. Portanto $\int f = \int |\Delta\phi|(f\circ\phi)$.

Suponha agora que $\phi: U \to V$ tem a forma $\phi:(x,y) \longmapsto (x,h(x,y))$. Então $|\Delta\phi(s,t)| = |\partial_2 h(s,t)|$. Agora $\int f = \int dx \int f(x,y)dy$, visto que $\int|\Delta\phi|(f\circ\phi) = $ $= \int ds |\partial_2 h(s,t)| f(s,h(s,t))dt$.

Observe que, devido à sua forma especial, ϕ aplica, para cada s_o fixo, o conjinto aberto $U \cap (s_o xR)$ da linha vertical $s_o xR$, difeomòrficamente sôbre o conjunto aberto $V \cap (s_o xR)$ da mesma linha. Isto significa que para cada s_o fixado, a função $t \longmapsto h(s_o,t)$ é um difeomorfismo entre dois conjuntos abertos de números reais. Podemos, portanto, aplicar o corolário da Proposição 11, para concluir que

$$\int|\Delta\phi|(f\circ\phi) = \int ds \int f(s,y)dy = \int f.$$

Isto demonstra a afirmação B).

Sejam agora $\phi: U \to V$, $\psi: V \to W$ difeomorfismos de conjuntos abertos em R^m, e $f: R^m \to R^n$ uma aplicação contínua, com $\text{supp}(f) \subset W$. Temos:

$$U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{f} R^n .$$

Suponha que ϕ, ψ pertencem a $\mathcal{C}$. Então $\int f(z)dz = \int |\Delta\psi(y)| f(\psi(y))dy = \int |\Delta\phi(x)|.|\Delta\psi(\phi(x))|.f(\psi(\phi(x)))dx$

Mas $\Delta\phi(x).\Delta\psi(\phi(x)) = \Delta(\psi\circ\phi)(x)$. (Veja Observação 1 depois da regra da cadeia, Cap. 4). Portanto

$$f(z)dz = \int \Delta(\psi\circ\phi)(x)\ f(\psi(\phi(x)))dx, \text{ e assim } \psi\circ\phi \in \mathcal{C}.$$

A afirmação C) está demonstrada.

A seguir, sejam $U, V \subset R^m$ abertos e $\phi: U \to V$ um difeomorfismo com a seguinte propriedade: todo $x \in U$ pertence a um aberto W_x tal que $\phi|W_x$ está na classe $\mathcal{C}$. Para provar que $\phi \in \mathcal{C}$, seja $f: V \to R^n$ uma aplicação contínua que se anula fora de um conjunto compacto $K \subset V$. Então $K_o = \phi^{-1}(K) \subset U$ é compacto, logo podemos escrever $K_o \subset W_1 \cup \ldots \cup W_r$, onde cada W_i é aberto e $\phi_i = \phi|W_i \in \mathcal{C}$. Seja $Z_i = \phi(W_i)$. Então $\phi_i: W_i \to Z_i$ é um difeomorfismo, e $Z \subset \cup W_i$.

Desejamos escrever $f = f_1 + \ldots + f_r$, onde cada $f_i: R^m \to R^n$ é contínua, com $\text{supp}(f_i) \subset Z_i$. Suponha que isto tenha sido feito. Então

$$\int f = \int f_1 + \ldots + \int f_r = \sum_{i=1}^{r} \int |\Delta\phi_i(x) f_i(\phi_i(x))dx =$$
$$= \int \sum_{i=1}^{r} |\Delta\phi_i(x)| f_i(\phi_i(x))dx.$$

Ora, se $x \in W_i$, $\phi_i(x) = \phi(x)$ e $\Delta\phi_i(x) = \Delta\phi(x)$. Logo

$$\sum_i |\Delta\phi_i(x)| f_i(\phi_i(x)) = |\Delta\phi(x)|.f(\phi(x))$$

para todo $x \in W_i$. Mas para os restantes x ambos os membros desta igualdade são zero. Portanto $\int f = \int |\Delta\phi(x)|.f(\phi(x))dx$, e concluimos que $\phi \in \mathcal{C}$.

Resta mostrar que a decomposição $f = f_1 + \ldots + f_r$ pode ser encontrada com as propriedades requiridas. Isto é feito definindo-se funções contínuas $\mu_1,\ldots,\mu_r : R^m \to R$ tais que $supp(u_i) \subset Z_i$ e $\mu_1(x) + \ldots + \mu_r(x) = 1$ para cada $x \in K$. Então, basta pôr $f_i(x) = \mu_i(x)f(x)$.

Obter as funções μ_i é um exercício em topologia elementar. Nós o incluiremos aqui para sermos completos.

Primeiramente diminuimos os conjuntos Z_i, e encontramos conjuntos abertos $A_1,\ldots,A_r$ tais que $K \subset A_1 \cup \ldots \cup A_r$ e $\bar{A}_i \subset Z_i$ para cada i. Para fazer isto, seja $Z_i^{\varepsilon} = \{x \in Z_i ; dist(x, R^m - Z_i) > \varepsilon\}$ onde $\varepsilon > 0$. Afirmamos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, $K \subset Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$. Com efeito, se não fosse assim, para cada $n=1,2,3,\ldots$ poderíamos encontrar $z_n \in K$ com $dist(z_n, R^m - Z_i) \leqslant \frac{1}{n}$, para $i = 1,\ldots,r$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $z_n \to z_o \in K$. Então $dist(z_o, R^m - Z_i) = 0$, qualquer que seja $i = 1,\ldots,r$. Logo $z_o \notin Z_1,\ldots,z_o \notin Z_r$, uma contradição. Para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tomamos $A_1 = Z_1^{\varepsilon},\ldots,A_r = Z_r^{\varepsilon}$.

A seguir escrevemos $A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$ e definimos funções contínuas $\lambda_1,\ldots,\lambda_r : A \to R$ pondo $\lambda_i(x) = dist(x, R^m - A_i)$. Então $\lambda_i(x) \neq 0$ se, e sòmente se, $x \in A_i$. Em particular, $\lambda_1(x) + \ldots + \lambda_n(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Assim, as funções $\mu_1,\ldots,\mu_r : A \to R$, definidas por $\mu_i(x) = \lambda_i(x)/[\lambda_1(x) + \ldots + \lambda_r(x)]$ são contínuas. Além disso $\sum_i \mu_i(x) = 1$ para todo $x \in A$ e $supp(u_i) \subset \bar{A}_i \subset Z_i$. Finalmente, estendemos μ_i continuamente a todo R^m, pondo $\mu_i(x) = 0$ se $x \notin A$.

Isto completa a demonstração do D).

O resultado E) é demonstrado abaixo.

PROPOSIÇÃO 13 - <u>Seja $\phi U \to R^m$ um C^k difeomorfismo local ($k \geq 1$). Todo ponto $x \in U$ pertence a um conjunto aberto W_x tal que $\phi|W_x$ é uma composição de C^k difeomorfismos primitivos.</u>

DEMONSTRAÇÃO: É suficiente provar que se $\phi: U \to R^m$ é um difeomorfismo local do tipo

$$\phi(x) = \phi(x^1,\ldots,x^m) = (\phi^1(x),\ldots,\phi^j(x),x^{j+1},\ldots,x^m)$$

então, para todo $x_0 \in U$, existem difeomorfismos primitivos h_1, h_2 tais que a imagem de h_1 é uma vizinhança de x_0 e $\phi h_1 h_2(z) = (\xi^1(z),\ldots,\xi^{j-1}(z),z^j,z^{j+1},\ldots,z^m)$ para todo z no domínio de h_2.

Para ver isto, notemos que a função $\phi^j: U \to R$ é uma submersão, pois $\phi^j = \pi^j \circ \phi$, onde $\pi^j: R^m \to R$ é a projeção sôbre o j-ésimo eixo. Portanto, pelo menos uma de suas derivadas parciais, digamos $\partial\phi^j/\partial x^i$, é $\neq 0$ no ponto x_0. Aqui, podemos supor $i \leq j$ porque o determinante jacobiano de ϕ é $\det(\partial^r/\partial x^s)$, $r,s = 1,2,\ldots,j$. Seja h_1 o difeomorfismo primitivo que permuta as coordenadas x^i e x^j. Então, de $i \leq j$, segue-se que $g = \phi h_1$ tem a forma

$$g(y) = (g^1(y),\ldots,g^j(y),y^{j+1},\ldots,y^m) .$$

Além disso, $\partial g^j/\partial y^j$ é $\neq 0$ no ponto y_o tal que $h_1(y_o) = x_o$. Seja $R^m = R^{m-1}\oplus R$ a decomposição de R^m como soma direta do hiperplano $y^j = 0$ com o j-ésimo eixo.

Como $Dg^j(y_o)$, restrita ao j-ésimo eixo, é um isomorfismo linear sôbre R, o Teorema 10 fornece um C^k-difeomorfismo h_2, onde

$$h_2(z) = (z^1,\ldots z^{j-1}, h_2^j(z), z^{j+1},\ldots,z^m)$$

tal que $g^j \circ h_2 : z \mapsto z^j$. Isto significa que

$$\begin{aligned}\phi h_1 h_2(z) &= gh_2(z) = (g^1(h_2(z)),\ldots,g^{j-1}(h_2(z)),z^j,z^{j+1}\ldots z^m) = \\ &= (\xi^1(z),\ldots,\xi^{j-1}(z),z^j,z^{j+1},\ldots,z^m)\end{aligned}$$

para todo z no domínio de h_2, como era para ser demonstrado.

Isto conclui a demonstração do Teorema 14.