

# INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

CHAIM SAMUEL HÖNIG

6.º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

POÇOS DE CALDAS

julho de 1967



## P R E F Á C I O

As presentes notas reproduzem um curso que demos no 1º semestre de 1966 para os estudantes do 3º ano dos cursos de licenciatura em Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Este curso é habitualmente seguido por mais de cem estudantes, 95% dos quais não vão ser matemáticos profissionais. O curso é desenvolvido levando em conta este fato. Procuramos dar uma visão de conjunto da teoria elementar das funções analíticas de uma variável complexa e de suas aplicações, evitando porém certos tópicos (a teoria da homotopia, por exemplo) que não só dificultariam, inicialmente, a compreensão da teoria das funções analíticas, como desviariam a atenção para questões acessórias (do ponto de vista da teoria das funções analíticas) e técnicas.

Está em processo de criação na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo um curso de Bacharelado em Matemática destinado primordialmente a um número bem menor de estudantes, que tenham a intenção de ficar no magistério superior de matemática. Para o curso de Bacharelado de Funções Analíticas, e para estudos posteriores, aconselhamos um dos excelentes livros

“Complex Analysis” de Lars Ahlfors (Editôra Mc Graw-Hill, N.York)

“Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes” de Henri Cartan (Editôra Hermann, Paris).

Como texto de consulta, exaustivo e completo, indicariamos o livro de Behnke e Sommer, “Theorie der Analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen” (Editôra Springer, Berlin).

Façamos alguns comentários sôbre os diferentes capítulos destas notas:

No capítulo I fazemos a construção do corpo dos números complexos.

No capítulo II começamos dando a linguagem topológica (convergência, continuidade, séries etc.) necessária para o resto do curso e a seguir fazemos a extensão das chamadas "funções elementares" do campo real ao campo complexo. Para fazer esta extensão não se necessita da noção de função analítica pois ela pode ser feita a partir da série de Taylor real da função; a unicidade do prolongamento, a conservação das propriedades algébricas etc, são asseguradas simplesmente pelo Teorema de Abel sôbre séries de potências convergentes. No último parágrafo dêste capítulo introduzimos a noção de logarítmo de um número complexo e por meio dêle poderemos posteriormente caracterizar as "funções elementares". É neste parágrafo que vão aparecer pela primeira vez fatos essencialmente novos (em relação à teoria das funções de uma variável real). Quando procuramos estender as funções  $\log x$ ,  $x^y$  etc., definidas em  $\mathbb{R}_+$  ou  $\mathbb{R}$ , ao campo complexo, mantendo ao mesmo tempo as suas propriedades algébricas habituais e sua continuidade caímos forçosamente em funções ou expressões multivalentes. Só Euler se apercebeu disto claramente, explicando assim as divergências anteriores entre Leibniz e Jean Bernouilli [o 1º argumentando que o logarítmo de um número negativo deveria ser um número imaginário puro e o 2º "demonstrando" que  $\log(-a) = \log a - i\pi$  - ver no §6 do Capítulo II: o paradoxo de Bernouilli]. Para não trabalhar com funções multivalentes introduz-se a noção de ramos ou determinações de  $\text{Log } z$  e de outras expressões multivalentes; mas esta noção é artificiosa e só a noção de Superfície de Riemann vai restaurar a harmonia e a naturalidade neste domínio.

Nos capítulos III e IV é que começa o estudo das funções analíticas pròpriamente ditas. As funções analíticas podem ser caracterizadas por 4 propriedades equivalentes (a derivabilidade complexa, as equações de Cauchy-Riemann, a representação local por série de potências convergente, a existência de uma primitiva

local) e a maioria das suas propriedades elementares são uma consequência trivial de uma destas quatro propriedades (ver o resumo -recapitulação no §10 do capítulo IV); o que não é trivial é a demonstração da equivalência daquelas quatro propriedades e é isto que fazemos, entre outras, nos capítulos III e IV.

A demonstração do Teorema de Cauchy-Goursat que apresentamos no §6 do capítulo IV é elementar, não usando o Teorema de Jordan, nem a possibilidade de decompor um polígono em triângulos (fato êste de demonstração bastante complexa). Naturalmente o verdadeiro contexto do Teorema de Cauchy-Goursat (excetuada a sua demonstração para um triângulo) se situa na Topologia Algébrica.

Terminamos o último capítulo mostrando como por meio do cálculo de resíduos temos um procedimento muito simples e automático para calcular diferentes tipos de integrais definidas.

A maior parte das presentes notas foram redigidas pela Assistente D. Alcilea Augusto Homem de Melo; os exercícios foram elaborados pela Assistente D. Sakuya Aoki Honda em colaboração com a D. Alcilea. A elas os meus mais sinceros agradecimentos que também estendo à nossa colega D. Elza Gomide que reviu criticamente a maior parte do presente texto.

Chaim Samuel Hönig

São Paulo, junho de 1967



## ÍNDICE

### Capítulo I - Números complexos

I.1 - Operações com números complexos .....	1
I.2 - Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ .....	3
I.3 - O elemento $i$ ; outras definições e notações.....	4
I.4 - Representação geométrica dos números complexos.....	5
I.5 - Módulo de um número complexo .....	6
I.6 - Corpo dos números complexos .....	8
I.7 - Forma polar de um número complexo .....	11
I.8 - Potência de um número complexo com expoente racional .....	15

### Capítulo II - Séries e funções no campo complexo

II.1 - Distância e convergência .....	20
II.2 - Sequências de Cauchy .....	22
II.3 - Funções de variável complexa e continuidade .....	23
II.4 - Séries .....	26
II.5 - Funções elementares no campo complexo .....	31
II.6 - Definição de $\text{Log } z$ ; aplicações .....	41

### Capítulo III - Diferenciabilidade complexa

III.1 - Derivada de uma função de variável complexa .....	55
III.2 - Regras formais para o cálculo de derivadas.....	56
III.3 - Condições de Cauchy-Riemann .....	59
III.4 - Funções diferenciáveis .....	62
III.5 - Funções analíticas .....	65
III.6 - Funções harmônicas .....	70





## Capítulo IV - Integral complexa

IV.1 - Curvas no plano complexo .....	76
IV.2 - Integrais curvilíneas reais .....	80
IV.3 - Integral de funções de variável complexa .....	84
IV.4 - Teorema integral de Cauchy .....	92
IV.5 - Primitiva de uma função complexa .....	99
IV.6 - Teorema de Cauchy-Goursat .....	102
IV.7 - Fórmula integral de Cauchy .....	115
IV.8 - Consequências da fórmula de Cauchy .....	123
IV.9 - Série de Taylor de uma função analítica .....	129
IV.10- Resumo-recapitulação .....	135

## Capítulo V - Cálculo de resíduos

V.1 - Séries de Laurent .....	140
V.2 - Ponto singular isolado .....	147
V.3 - Resíduos .....	152
V.4 - Cálculo do resíduo num polo simples .....	160
V.5 - Cálculo do resíduo num polo de ordem $m$ .....	163
V.6 - Cálculo de integrais reais (impróprias) por meio de resíduos .....	168
V.7 - Integrais envolvendo funções trigonométricas .....	181



## Capítulo I

### NÚMEROS COMPLEXOS

#### I.1 - Operações com números complexos:

Indicamos com  $\mathbb{R}$  o corpo dos números reais e com  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos, isto é, o conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dos pares ordenados de números reais munido das operações de adição e multiplicação, definidas como segue: se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , sendo  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , a adição faz corresponder ao par  $z_1, z_2$  o elemento  $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$  definido como

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e a multiplicação faz corresponder ao mesmo par o elemento

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) .$$

No parágrafo I.6 demonstraremos que em relação a essas operações os números complexos também formam um corpo.

As operações que acabamos de definir gozam das seguintes propriedades:

A1. A adição é associativa, isto é, se  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) ;$$

A2. A adição é comutativa, isto é, se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 .$$

A verificação das duas propriedades enunciadas é imediata a partir

da definição de adição e do fato de que a adição de números reais goza também destas mesmas propriedades;

A3. Existência do elemento neutro, isto é, existe um elemento

$0 \in \mathbb{C}$  tal que  $0 + z = z$  para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ . Basta tomar o par  $0 = (0,0)$ ; quando a operação de grupo é indicada aditivamente, o elemento neutro denomina-se zero.

A4. Existência do simétrico, isto é, dado um elemento qualquer

$z \in \mathbb{C}$  existe em  $\mathbb{C}$  um outro elemento que denotamos com  $-z$  tal que:

$$z + (-z) = 0.$$

De fato, se  $z = (x,y)$ , basta tomar como  $-z$  o par  $(-x,-y)$ .

O número complexo  $-z$  diz-se o oposto de  $z$ .

As propriedades A1 - 4 dizem que o conjunto  $\mathbb{C}$  forma um grupo comutativo em relação à adição.

O leitor pode verificar que o elemento neutro é único e que para cada  $z \in \mathbb{C}$  o simétrico  $-z$  também é único. Este é um fato geral da teoria dos grupos.

Daqui por diante, se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  usaremos  $z_1 - z_2$  para indicar  $z_1 + (-z_2)$ .

Propriedades da multiplicação:

D. A multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, se

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 ;$$

M1. A multiplicação é associativa, isto é, se  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) ;$$

A verificação destas propriedades é feita a partir das definições

das operações, levadas em conta as propriedades das operações com números reais;

M2. A multiplicação é comutativa, isto é, se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 .$$

De fato, a expressão que define o elemento  $z_1 z_2$  é simétrica em relação aos índices 1 e 2.

As propriedades A1-4, D, M1-2 já nos asseguram que  $\mathbb{C}$  é um anel comutativo.

### I.2 - Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ :

Podemos considerar os números reais como números complexos, pois existe uma aplicação biunívoca natural de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  que conserva as operações definidas anteriormente.

Na realidade esta aplicação é um isomorfismo do corpo dos números reais no corpo dos números complexos. A aplicação é aquela que faz corresponder ao elemento  $x \in \mathbb{R}$  o elemento  $\tilde{x} = (x, 0) \in \mathbb{C}$ . É imediato verificar que esta aplicação:

- é biunívoca, isto é,  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $x \neq y \Rightarrow \tilde{x} \neq \tilde{y}$ ;
- conserva a adição e a multiplicação, isto é:  
 $\widetilde{x+y} = \tilde{x} + \tilde{y}$  e  $\widetilde{xy} = \tilde{x}\tilde{y}$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Em virtude destas propriedades, usaremos daqui por diante o mesmo símbolo  $x$  para indicar  $x \in \mathbb{R}$  ou  $\tilde{x} \in \mathbb{C}$ , isto é, estamos identificando o número real  $x$  e o número complexo  $\tilde{x}$ , considerando assim  $\mathbb{R}$  como parte de  $\mathbb{C}$ . É oportuno destacar que, graças a esta notação, já está definida a multiplicação de um número com-

plexo por um número real e, portanto, também a divisão. Com efeito, se  $z = (x,y) \in \mathbb{C}$  e  $r \in \mathbb{R}$ :

$$rz = zr = \tilde{r}(x,y) = (r,0) (x,y) = (rx,ry) \quad e$$

$$\frac{z}{r} = \frac{1}{r} z = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right).$$

### I.3 - O elemento i, outras definições e notações:

Das definições dadas, é simples verificar que um número complexo  $z = (x,y)$  pode sempre ser escrito como:

$$z = (x,0) + (y,0) (0,1) = \tilde{x} + \tilde{y}(0,1).$$

Introduzimos, então, o símbolo  $i$  para indicar o número complexo  $(0,1)$ . Assim sendo, pelo que vimos acima e usando a identificação que elimina o  $\sim$ , teremos para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ :

$$z = (x,y) = x + yi.$$

Como  $(0,1) (0,1) = (-1,0)$ , temos, com a notação acima que  $i^2 = -1$ .

Traduzidas as definições de adição e multiplicação para a nova notação agora introduzida, obtemos:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i ;$$

$$(x_1 + y_1 i) (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i ;$$

observe-se que este mesmo seria o resultado se desenvolvêssemos distributivamente o primeiro membro levando em conta que  $i^2 = -1$ .

Se  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = (x,y) = x + yi$ , o elemento  $x$  diz-se parte real de  $z$  e é denotado com  $\text{Re}z$  ou  $\text{Re}(z)$  e o elemento  $y$  diz-se parte imaginária de  $z$  e denota-se com  $\text{Im}z$  ou  $\text{Im}(z)$ .

Então, se  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z = \operatorname{Re}z + i\operatorname{Im}z.$$

As propriedades seguintes são imediatas:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}z_1 = \operatorname{Re}z_2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}z_1 = \operatorname{Im}z_2;$$

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2 ;$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2 ;$$

para quaisquer  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Dado um número complexo  $z = (x, y) = x + yi$ , define-se como seu complexo conjugado o número complexo denotado com  $\bar{z}$ :

$$\bar{z} = (x, -y) = x - yi.$$

Fica a cargo do leitor verificar que são válidas as propriedades enunciadas a seguir:

C1.  $\overline{\bar{z}} = z;$

C2.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$

C3.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$

C4.  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}z;$

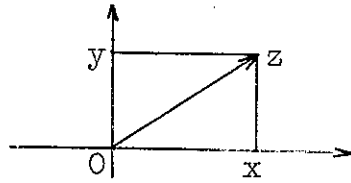
C5.  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}z;$

C6.  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ , sendo, portanto, um número real positivo.

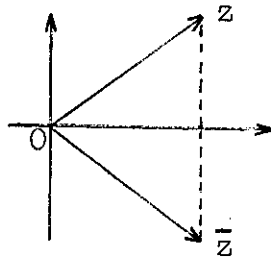
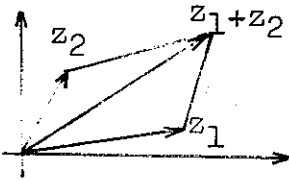
#### I.4 - Representação geométrica dos números complexos:

Sendo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  o conjunto dos números complexos, estes poderão ser representados geomêtricamente pelos pontos do plano ou pelos vetores do plano com origem no ponto  $O$ . O número complexo  $z = (x, y) = x + yi$  será representado pelo ponto de coordenadas

$(x,y)$  ou pelo vetor de origem  $O$  e extremidade  $(x,y)$ .



Dentro desta representação, a soma  $z_1 + z_2$  dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$  corresponderá à soma dos vetores  $z_1$  e  $z_2$  de acôrdo com a regra do paralelograma, e o complexo conjugado  $\bar{z}$  de um número



complexo  $z$  corresponde ao vetor simétrico ao vetor  $z$  em relação ao eixo dos  $x$ .

O eixo dos  $x$  é chamado eixo real pois seus pontos correspondem aos números reais. Os pontos do eixo dos  $y$  correspondem aos números complexos da forma  $(0,y) = yi$  chamados imaginários puros; isto dá ao eixo dos  $y$  o nome de eixo imaginário.

### I.5 - Módulo de um número complexo:

Chamamos de módulo do número complexo  $z = x + yi$  e indicamos com  $|z|$ , a raiz quadrada positiva do produto de  $z$  por seu complexo conjugado  $\bar{z}$  :

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

O módulo é também chamado de valor absoluto ou norma de  $z$ . Geométricamente  $|z|$  é o módulo do vetor que representa  $z$  ou a distância do ponto  $z$  à origem.



Estão satisfeitas as seguintes propriedades:

N1.  $|z| \geq 0$ , para qualquer  $z \in \mathbb{C}$  e  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ;

N2. se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ;

como ambos os membros são reais positivos, verifiquemos que seus quadrados são iguais:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2, \end{aligned}$$

levando-se em conta a propriedade C3) e a comutatividade e a associatividade da multiplicação;

N3. se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;

esta é a chamada propriedade triangular pois, geometricamente, diz que o comprimento de um dos lados de um triângulo é menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois. Para a demonstração analítica, convém lembrar que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &\leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad (\text{e mesmo vale para } \operatorname{Im} z: \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|) \text{ e} \\ |\bar{z}| &= |z|; \end{aligned}$$

de fato, das definições tem-se:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \\ &+ \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_2 \end{aligned}$$

$$\text{mas, } z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2 |z_1 z_2| = 2 |z_1| |z_2|,$$

$$\text{então: } |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2,$$

isto é,  $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$  e, como são números positivos:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

### I.6 - Corpo dos números complexos:

Das propriedades N1 e N2 concluímos que o produto de dois números complexos não nulos é também não nulo, isto é, se indicamos por  $\mathbb{C}^*$  o conjunto dos números complexos não nulos, então

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow z_1 z_2 \in \mathbb{C}^* .$$

Podemos, então, considerar a operação de multiplicação no conjunto  $\mathbb{C}^*$  e vamos verificar que com esta operação  $\mathbb{C}^*$  é um grupo comutativo. De fato, a multiplicação é associativa e comutativa como dizem as propriedades M1 e M2; vejamos as demais:

M3. Existência do elemento unidade (elemento neutro de um grupo com operação de multiplicação): basta considerar o  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}^*$ , pois  $1 \cdot z = z$ , para qualquer  $z \in \mathbb{C}^*$ ;

M4. Existência do inverso (o simétrico num grupo com operação de multiplicação): dado  $z \in \mathbb{C}^*$ , consideremos o número  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$  que já foi definido, pois  $z\bar{z}$  é real, e vejamos que  $z z^{-1} = 1$ . De fato,  $z z^{-1} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1$ . O elemento  $z^{-1}$  será também indicado com  $\frac{1}{z}$  ou  $1/z$ .

Está visto, portanto, que o conjunto dos números complexos forma um grupo comutativo em relação à adição, os complexos não nulos formam um grupo comutativo em relação à multiplicação e que a multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos munido destas operações é um corpo comutativo.

### Exercícios

1. Sendo  $z = 1+i$ , representar geometricamente os pontos  $z$ ,  $\frac{1}{z}$ ,  $z^2$ ,  $z^{-3}$ .

2. Sendo  $z_1 = 1+i$  e  $z_2 = 2-i$ , representar geomètricamente os pontos  $z_1, z_2, z_1+z_2, z_1z_2, (\overline{z_2/z_1})$ .
3. Demonstrar que: a)  $\sqrt{2} \cdot |z| \geq |x| + |y|$     b)  $|z_1-z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
4. Calcular  $z_1+z_2, z_1z_2, z_1\bar{z}_2, \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$  e  $\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$  quando: a)  $z_1 = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$  e  $z_2 = 5(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}})$ ;  
b)  $z_1 = 1+i$  e  $z_2 = 1-i$ .
5. Calcular  $\operatorname{Re} \left[ \frac{(2+r)^2}{(3+4r)} \right]$  e  $\operatorname{Im} \left[ \frac{(1-r + r^2 + r^3 + r^4)}{(1+2r)^2} \right]$

Observação: O leitor pode reconhecer no processo aqui usado para a construção do corpo dos números complexos a partir do corpo dos números reais um caso particular de uma construção algébrica mais geral. De fato, se  $K$  é um corpo comutativo e se  $d \in K$  é um elemento que não seja o quadrado de elemento algum de  $K$ , isto é,  $x^2 \neq d$ , para qualquer  $x \in K$ , então, a construção do menor corpo (a menos de isomorfismo) que contenha  $K$  e no qual  $d$  seja o quadrado de algum elemento é análogo ao que se acabou de fazer. Com efeito, indiquemos por  $K(\sqrt{d})$  o conjunto  $K \times K$  munido das operações de adição e multiplicação definidas como segue:

se  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K(\sqrt{d})$ :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e  $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ ;

em relação às quais valem as propriedades A1-4, D e M1-2. A seguir, consideramos a imersão de  $K$  em  $K(\sqrt{d})$ , identificando os elementos que se correspondem pela aplicação

$$x \in K \longrightarrow \tilde{x} = (x, 0) \in K(\sqrt{d}) ;$$

esta aplicação é biunívoca e conserva as operações de adição e multiplicação.

Considerando o elemento de  $K(\sqrt{d})$ ,  $w = (0,1)$ , verifica-se que  $w^2 = d$  e que qualquer elemento  $(x,y) \in K(\sqrt{d})$  escreve-se como

$$(x,y) = \tilde{x} + \tilde{y}w = x + yw .$$

A seguir, dado  $\alpha = (x,y) = x + yw$ , definimos o conjugado

$$\bar{\alpha} = (x,-y) = x - yw$$

e a função

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = x^2 - dy^2$$

É imediato que:

$$\overline{\bar{\alpha}} = \alpha, \quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

valem também as propriedades:

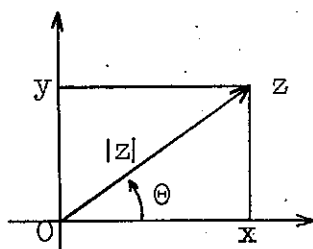
$N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ , pois  $d$  não é quadrado de nenhum elemento em  $K$ ;

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha) N(\beta) .$$

Isto basta para verificar que, se  $\alpha, \beta \in K(\sqrt{d})$  são diferentes de zero, então seu produto  $\alpha\beta$  também o é. Procedendo como para  $\mathbb{C}$ , verifica-se que  $K(\sqrt{d})$  é um corpo. A propriedade triangular  $N_3$  e a representação geométrica não têm análogo no caso geral.

I.7 - Forma polar de um número complexo:

Seja  $z = x + yi$  um número complexo não nulo. Então se têm



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0.$$

Consideremos as equação em  $\theta$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Uma solução  $\theta_1$  destas equa-

ções chama-se argumento do número complexo  $z$  e escrevemos  $\theta_1 = \text{Arg } z$ .

É claro que então, para todo inteiro  $k$ ,  $\theta_1 + 2k\pi = \text{Arg } z$ . Um dos valores de  $\text{Arg } z$  pertence ao intervalo  $[0, 2\pi[$  e este valor chamaremos de valor principal do argumento de  $z$  e o indicamos por  $\arg z$ . Geométricamente, o argumento se interpreta como o ângulo que o vetor  $z$  forma com o eixo dos  $x$ .

Observação: muitas vezes vamos escrever  $\arg z + 2k\pi$  para lembrar a "multivalência" do argumento. Poderíamos também considerar o argumento como uma função definida em  $C^*$  com valores no grupo quociente  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

Sendo, então,  $r$  o módulo de  $z$  e  $\theta$  um de seus argumentos, pode-se escrever

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

que é a forma polar de  $z$ .

A forma polar nos permite dar uma interpretação geométrica para o produto de dois números complexos. Com efeito, sejam  $z_1, z_2 \in C^*$ ,

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1), \quad z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

e 
$$z = z_1 z_2 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Efetuando o produto, obtém-se:

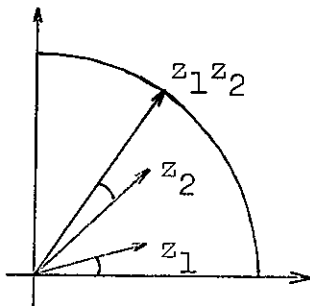
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

e, por comparação, tiremos:

$$r = r_1 r_2 \quad (\text{já visto em N2})$$

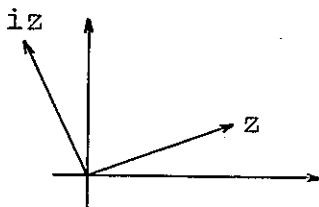
e 
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

esta última igualdade devendo ser entendida no seguinte sentido: dado  $\theta_1$  argumento de  $z_1$  e  $\theta_2$  argumento de  $z_2$ , um valor  $\theta$  do argumento de  $z_1 z_2$ , difere de  $\theta_1 + \theta_2$  por um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .



Geomètricamente, então, multiplicar  $z_1$  por  $z_2$  significa tomar na circunferência de raio  $|z_1||z_2|$  o ponto cujo argumento seja a soma dos argumentos dos fatores.

Por exemplo, a multiplicação de um número complexo por



$i$  corresponde à rotação de  $\pi/2$  do vetor  $z$ , pois  $|i| = 1$  e  $\operatorname{Arg} i = \pi/2 + 2k\pi$ .

A fórmula do argumento do produto de dois números estende-se para o produto de  $m$  números complexos quaisquer (não nulos) assim é que, se

$$z_j = r_j(\cos\theta_j + i \operatorname{sen}\theta_j), \quad j=1,2,\dots,m$$

então 
$$\prod_{j=1}^m z_j = \prod_{j=1}^m r_j \left( \cos \sum_{j=1}^m \theta_j + i \operatorname{sen} \sum_{j=1}^m \theta_j \right)$$

isto é:

$$\operatorname{Arg} \prod_{j=1}^m z_j = \sum_{j=1}^m \operatorname{Arg} z_j .$$

Forma polar da potência m-ésima de um número complexo: na expressão acima, considerando-se  $z_1 = z_2 = \dots = z_m = z$ , obtêm-se a forma de  $z^m$ :

$$z^m = r^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta), \quad (\text{I.1}),$$

isto é,  $\operatorname{Arg} z^m = m \operatorname{Arg} z$ , para  $m$  inteiro positivo. Tomando-se ainda  $|z| = 1$ , obtêm-se a fórmula de Moivre:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^m = \cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta \quad (\text{I.2})$$

que pode ser desdobrada em duas, tomadas as partes real e imaginária do desenvolvimento do primeiro membro.

Forma polar do inverso e do quociente: vamos provar que se  $z \neq 0$ ,  $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ , então

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] = \frac{1}{r} (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

Isto é verdade pois  $z \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] = 1$ . Então,

$$\operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

Daquí segue imediatamente que:

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

isto é, se  $z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$  e  $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] .$$

Mostremos que a expressão (I.1), válida para  $m$  inteiro positivo valerá também se  $m$  fôr inteiro negativo. De fato, se  $m = -n$ ,

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)] .$$

Assim, a fórmula de Moivre (I.2) é válida para  $m$  inteiro qualquer.

Forma polar da raiz  $n$ -ésima de um número complexo: se  $z$  é um número complexo não nulo, raiz  $n$ -ésima de  $z$  será um número  $z_0$  tal que  $z_0^n = z$ . Ora, se  $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$  e  $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i \operatorname{sen}\theta_0)$ , de  $z_0^n = z$ , têm-se

$$r = r_0^n \text{ e, portanto, } r_0 = \sqrt[n]{r}$$

$$\text{e } \cos\theta = \cos n\theta_0, \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} n\theta_0$$

$$\text{ou seja: } \theta - n\theta_0 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

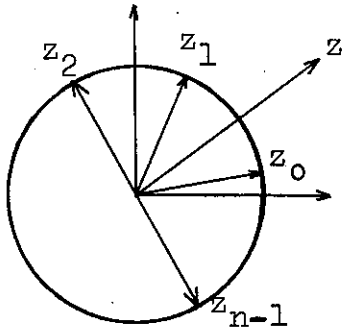
o que equivale a:

$$\theta_0 = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi, k \in \mathbb{Z} .$$

É claro, porém, que se  $k$  assumir um dos valores  $0, 1, \dots, n-1$ , os valores correspondentes para  $\theta_0$  diferirão entre si de menos que  $2\pi$  dando, portanto, valores diferentes de  $z_0$ , e que, a qualquer outro valor de  $k$  corresponderá um valor para  $\theta_0$  que diferirá de um destes de um múltiplo de  $2\pi$ , (basta dividir  $k$  por  $n$  e tomar o resto que está entre  $0$  e  $n-1$ ), resultando, então, para  $z_0$  um número já obtido. Concluindo, haverá exatamente  $n$  valores distintos para a raiz  $n$ -ésima de  $z$ , a saber:

$$z_k = \sqrt[n]{r} (\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k), \text{ onde } \theta_k = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi, k=0, 1, \dots, n-1$$





Geomètricamente, os pontos  $z_k$  pertencem todos à circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt[n]{r}$  e dividem esta circunferência em  $n$  partes iguais. Indicaremos com  $\sqrt[n]{z}$  ou  $z^{1/n}$  qualquer uma destas

raízes.

Raízes n-ésimas da unidade: Como  $1 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ ,  $\arg \sqrt[n]{1} = k \frac{2\pi}{n}$   $k=0,1,\dots,n-1$ .

Em geral, costuma-se escrever:

$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ , então, as raízes n-ésimas de 1 serão  $1 = \omega^0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ .

Exemplos:  $\sqrt{1} = \cos k \frac{2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2}$ ,  $k = 0,1$ , isto é,  $\sqrt{1} = \pm 1$  ;  
 $\sqrt[3]{1} = \cos k \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ ,  $k = 0,1,2$ , ou seja:  
 $\sqrt[3]{1} = 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

### I.8 - Potência de um número complexo com expoente racional:

Se  $m,n,p$  são inteiros,  $p, n \neq 0$ , e  $x$  é um número real estritamente positivo, então

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[np]{x^{mp}}$$

Esta propriedade, com tal generalidade, não se estende aos números complexos, o que se pode verificar com o simples exemplo:  $\sqrt{z^2} = \pm z$ . Veremos, no entanto, que se  $m$  e  $n$  forem inteiros primos entre si, então  $(z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m$  num sentido

evidente: os elementos representados por  $(z^m)^{1/n}$  coincidem com os elementos representados por  $(z^{1/n})^m$  e mais, se definirmos  $z^{m/n}$  como:

$$(I.3) \quad z^{m/n} = r^{m/n} [\cos \frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} \frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)], \quad k=0,1,\dots,n-1$$

onde  $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ ,

$$\text{então} \quad (z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m = z^{m/n}.$$

Em primeiro lugar, vejamos que a expressão (I.3) define exatamente  $n$  números complexos distintos. Para tal, seja  $\theta_k = \frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e vejamos que tomados dois valores distintos  $k_1$  e  $k_2$  entre  $0$  e  $n-1$ , os ângulos correspondentes  $\theta_{k_1}$  e  $\theta_{k_2}$  não serão côngruos mod  $2\pi$  e, por outro lado, dado um  $\bar{k} \in \mathbb{Z}$  qualquer, existirá um número  $k$ , entre  $0$  e  $n-1$ , tal que  $\theta_{\bar{k}} - \theta_k$  seja um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . De fato, se  $k_1$  e  $k_2$  são tais que  $\theta_{k_1}$  e  $\theta_{k_2}$  sejam côngruos mod  $2\pi$ , existe  $\ell \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\theta_{k_2} - \theta_{k_1} = 2\ell\pi, \quad \text{e isto daria} \quad \frac{m}{n} = \frac{\ell}{k_2 - k_1}$$

e, portanto, seria absurdo supor  $0 \leq k_1 < k_2 \leq n-1$  já que a fração  $\frac{m}{n}$  é irredutível e  $0 < k_2 - k_1 < n$ . A segunda parte verifica-se, facilmente, tomando como  $k$  o resto da divisão de  $\bar{k}$  por  $n$ .

Conhecida a forma polar de  $z^m$  e  $z^{m/n}$ , é fácil verificar que  $z^{m/n}$  são as  $n$  raízes  $n$ -ésimas de  $z^m$ , isto é,

$$(z^m)^{1/n} = z^{m/n};$$

também, elevando cada uma das  $n$  raízes  $n$ -ésimas de  $z$  à potência  $m$ , obtém-se cada um dos  $n$  números  $z^{m/n}$ , e então:

$$(z^{1/n})^m = z^{m/n} .$$

No futuro, daremos uma definição geral para  $z^a$ , em que  $z \neq 0$  e  $a$  são números complexos englobando os casos vistos até agora.

### Exercícios

- 1) Verificar que:
  - a)  $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right) = (2,1)$
  - b)  $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{2}i$
- 2) Representar grãficamente  $z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, z_1/z_2, z_1^{-1}, z_2^{-1}, \frac{z_1}{z_2}, \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ , quando:
  - a)  $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i$
  - b)  $z_1 = (-3,1), z_2 = (3,0)$
- 3) Provar que
  - a) se  $z \neq 0, \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$
  - b)  $\text{Im}(iz) = \text{Re}z$
- 4) Quais os argumentos das raízes sextas de um número real negativo?
- 5) Quantos valores admitem  $z^{2/3}, z^{3/2}, z^{1/2}, z^3$  se  $z$  é um número complexo não nulo.
- 6) Determinar a forma polar de  $z_1 = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}, z_2 = \frac{i}{-2-2i}$  e  $z_3 = (\sqrt{3}-i)^6$

- 7) Obter as fórmulas de Moivre equivalentes a (I.2), fazendo o desenvolvimento sugerido no texto.
- 8) Mostrar que  $|z_2 - z_1|$  representa a distância euclidiana no plano entre os pontos representativos de  $z_1$  e  $z_2$ .
- 9) Qual o lugar geométrico dos pontos  $z = x+yi$  que satisfazem à condição:
- a)  $\operatorname{Re} z > 0$
  - b)  $x^2 + y^2 < k^2$
  - c)  $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$
  - d)  $k^2 < z\bar{z} < K^2$
  - e)  $|\frac{1}{z}| < \varepsilon$
  - f)  $|z| > |z-3|$
  - g)  $|z-z_0| > |z_0|$
  - h)  $z = z_0 + re^{i\varphi}$  onde  $0 < r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
  - i)  $|z-z_0| = |\operatorname{Re} z_0|$  onde  $|\operatorname{Re} z_0| \neq 0$
- 10) Mostrar que a circunferência de centro  $z_0$  e raio  $r$  é descrita pelos pontos  $z$  tais que:
- a)  $|z-z_0| = r$
  - b)  $z-z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , com  $\varphi$  real
  - c)  $z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 = r^2$
- 11) Provar que as raízes  $n$ -ésimas não reais de um número real são duas a duas conjugadas.

- 12) Determinar e representar geomètricamente tãdas as raizes da equaãõ  $z^5 + 1 = 0$
- 13) Mostrar que a equaãõ da reta determinada por dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  é:  $\text{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0$
- 14) Representar geomètricamente os números  $(1+i)z$ , quando  $z$  percorre a parte da circunferência unitária de centro na origem, que fica no 1º quadrante.
- 15) Usar a forma polar de um número complexo para demonstrar que
- a)  $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-10}(-1 + i\sqrt{3})$
- b)  $(-1+i)^7 = -8(1+i)$
- 16) Determinar as partes real e imaginária de tãdas as raizes cúbicas de  $(1-i)e^{i\pi}$ .

## Capítulo II

### SÉRIES E FUNÇÕES NO CAMPO COMPLEXO

#### II.1 - Distância e convergência:

Definimos como distância entre dois números complexos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  que indicamos com  $d(z_1, z_2)$ , o módulo da diferença  $z_1 - z_2$

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Esta distância goza das propriedades habituais:

D1.  $d(z_1, z_2) \geq 0$ , para quaisquer  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e

$$d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

D2.  $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$ , quaisquer que sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

D3. (desigualdade triangular):

$$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \text{ para quaisquer } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

A verificação destas propriedades é imediata a partir daquelas válidas para o módulo dos números complexos N1-3.

Munido desta distância, o conjunto dos números complexos passa a ser um espaço métrico herdando, portanto, toda a linguagem, definições e conceitos de espaços métricos, como sejam: convergência, limite, continuidade, etc... Faremos, a seguir, uma exposição de tais definições e alguns resultados. O leitor pode verificar que a maioria deles está ligada somente à estrutura métrica dos números complexos, valendo, portanto, para espaços mais gerais.

Definição - Se  $z_0$  é um número complexo e  $a > 0$  um número real positivo, definimos como bola de centro  $z_0$  e raio  $a$ ,  $B_a(z_0)$ , o conjunto dos números complexos  $z$  cuja distância a  $z_0$  seja menor que  $a$ , isto é,

$$B_a(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, z_0) = |z - z_0| < a\}.$$

Geomêtricamente, os pontos de  $B_a(z_0)$  são os pontos internos ao círculo de centro  $z_0$  e raio  $a$ .

Definição - Dada uma seqüência  $z_n$  de números complexos, diz-se que  $z_n$  converge para um número complexo  $z_0$ ,  $z_n \rightarrow z_0$ , e que  $z_0$  é o limite da seqüência  $z_n$  se, dado um número real  $\varepsilon > 0$ , existir um índice  $n_0$  tal que: para  $n \geq n_0$ ,  $d(z_n, z_0) = |z_n - z_0| < \varepsilon$ , ou seja, a partir de  $n_0$ ,  $z_n \in B_\varepsilon(z_0)$ . Neste caso, a seqüência  $z_n$  diz-se convergente.

A definição de convergência de seqüência de números complexos relaciona-se com a de números reais pela propriedade enunciada a seguir:

Proposição II.1 - Se  $z_n = x_n + y_n i$  e  $z_0 = x_0 + y_0 i$ , então

$$z_n \rightarrow z_0 \text{ se, e somente se, } x_n \rightarrow x_0 \text{ e } y_n \rightarrow y_0.$$

A verificação é imediata a partir do seguinte fato: se  $z = x + yi$ ,  $|x|$ ,  $|y| \leq |z| \leq |x| + |y|$ .

Exercício: Provar que  $z_n \rightarrow z_0$  se, e somente se,  $|z_n| \rightarrow |z_0|$  e

$\text{Arg } z_n \rightarrow \text{Arg } z_0$ . Dar um significado para  $\text{Arg } z_n \rightarrow \text{Arg } z_0$ .

O que acontece quando  $z_0 = 0$ ?

## II.2 - Sequências de Cauchy:

Num espaço métrico qualquer, uma sequência  $z_n$  diz-se sequência de Cauchy se dado  $\varepsilon > 0$ , existir um índice  $n_0$  tal que para  $n, m \geq n_0$ ,  $d(z_n, z_m) < \varepsilon$ . Se num espaço métrico toda sequência de Cauchy for convergente, este espaço diz-se um espaço métrico completo. Como toda sequência convergente é também uma sequência de Cauchy, num espaço métrico completo são equivalentes as condições de uma sequência ser convergente ou de Cauchy. Neste parágrafo nós nos propomos demonstrar que o espaço métrico dos números complexos é completo. Isto é consequência do fato de que os números reais formam um espaço métrico completo.

Diz-se, portanto, que uma sequência de números complexos  $z_n$  é uma sequência de Cauchy se, dado um número real  $\varepsilon > 0$ , existir um índice  $n_0$  tal que, para  $n, m \geq n_0$ , se tenha:

$$d(z_n, z_m) = |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Cabe aqui uma proposição análoga à do parágrafo anterior:

Proposição II.2 - Se  $z_n = x_n + y_n i$ ,  $z_n$  é uma sequência de Cauchy se e somente se, as sequências de números reais  $x_n$  e  $y_n$  forem sequências de Cauchy.

Deixamos ao leitor a verificação do fato geral para espaços métricos de que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy e passamos a provar que a recíproca é verdadeira para sequências de números complexos e que, portanto, os números complexos formam um espaço métrico completo: com efeito, se  $z_n = x_n + y_n i$  é uma sequência de Cauchy, pela proposição II.2  $x_n$  e  $y_n$  também o



são, mas os números reais formam um espaço métrico completo, portanto existem  $x_0$  e  $y_0$  reais tais que  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$ . A proposição II.1 garante, então que  $z_n \rightarrow x_0 + y_0 i$ .

### II.3 - Funções de variável complexa e continuidade:

Consideraremos um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  e uma função  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida em  $\Omega$  e com valores complexos. Do mesmo modo que num espaço métrico qualquer, dado um ponto  $z_0 \in \Omega$ , a função  $f$  diz-se contínua em  $z_0$  se para qualquer sequência  $z_n$  de pontos de  $\Omega$  que converge para  $z_0$ ,  $z_n \in \Omega$  e  $z_n \rightarrow z_0$ , se têm  $(z_n) \rightarrow (z_0)$ .

O leitor pode demonstrar, análogamente ao que é feito no caso real, que esta condição é equivalente à seguinte: dado um número real  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que se  $z \in \Omega$  e  $d(z, z_0) = |z - z_0| < \delta$  então

$$d[f(z), f(z_0)] = |f(z) - f(z_0)| < \epsilon .$$

Análogamente, consideremos dois subconjuntos  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$  e uma função  $g: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , definida para os pares  $(z', z'') \in \Omega_1 \times \Omega_2$  e com valores complexos. A função  $g$ , a duas variáveis complexas, diz-se contínua no ponto  $(z'_0, z''_0) \in \Omega_1 \times \Omega_2$  se, cada vez que tivermos sequências  $z'_n, z''_n$ , de pontos de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente, tais que  $z'_n \rightarrow z'_0$  e  $z''_n \rightarrow z''_0$  então

$$g(z'_n, z''_n) \rightarrow g(z'_0, z''_0) .$$

Uma função diz-se contínua num conjunto se fôr contínua em todos os pontos de tal conjunto.

As propriedades enunciadas a seguir permitirão a construções de funções contínuas a partir de outras:

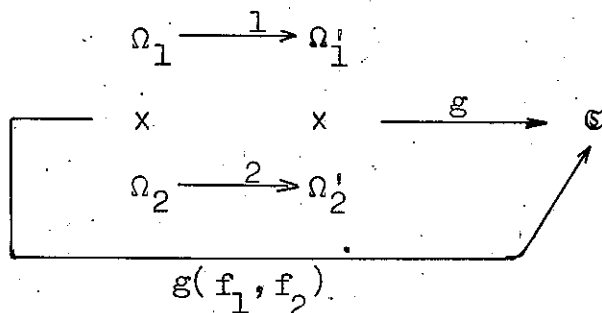
1. A composta de funções contínuas é uma função contínua, isto é, dados subconjuntos  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$  e funções contínuas  $f_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$  de modo que  $f_1(\Omega_1) \subset \Omega_2$ , então a composta  $f_2 \circ f_1$  é uma função contínua de  $\Omega_1$  em  $\mathbb{C}$ .

Lembramos que a função composta

$f_2 \circ f_1$  é aquela que a cada  $z \in \Omega_1$ , faz corresponder o número complexo

$$(f_2 \circ f_1)(z) = f_2(f_1(z))$$

2. Dados subconjuntos  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_1, \Omega'_2 \subset \mathbb{C}$  e as funções contínuas  $f_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega'_1$ ,  $f_2: \Omega_2 \rightarrow \Omega'_2$ ,  $g: \Omega'_1 \times \Omega'_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,



então, é contínua a função  $g(f_1, f_2)$  definidas como: se  $(z_1, z_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $g(f_1, f_2)(z_1, z_2) = g(f_1(z_1), f_2(z_2))$ .

Exemplos:

- 1) A função identidade:  $z \rightarrow z$ , definida em  $\mathbb{C}$  é contínua;
- 2) As funções definidas em  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  que um par de complexos fazem corresponder a sua soma e a sua diferença:

$$(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 + z_2$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 - z_2$$

são funções contínuas.

3) A função que ao par  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  faz corresponder seu produto  $z_1 z_2$  é contínua.

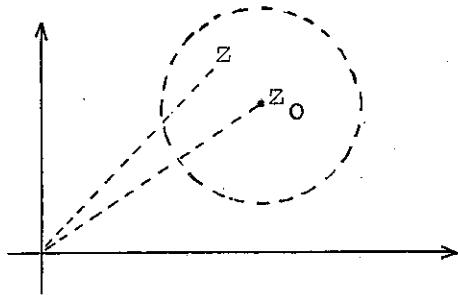
A verificação destes exemplos fica a cargo do leitor.

4) A função que a cada  $z \neq 0$  faz corresponder seu inverso  $\frac{1}{z}$  é contínua. Esta função está definida em  $\mathbb{C}^*$ . Consideremos um número  $z_0 \neq 0$  e vejamos que esta função é contínua em  $z_0$ .

Ora, dado  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \left| \frac{z - z_0}{z z_0} \right| = \frac{1}{|z|} \frac{1}{|z_0|} |z - z_0|,$$

então, se tomamos  $|z - z_0| < \delta$ , com  $\delta > 0$  satisfazendo simultaneamente as condições:



$$\delta < \frac{|z_0|}{2} \text{ e } \delta < \frac{\varepsilon |z_0|^2}{2} \text{ teremos:}$$

$$|z| \geq \frac{|z_0|}{2}, \text{ logo } \frac{1}{|z|} \leq \frac{2}{|z_0|}$$

$$\text{e conseqüentemente } \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| < \varepsilon.$$

5) Dos exemplos e propriedades acima mencionados, vem que: se

$f_1, f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  são funções contínuas definidas em um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , então as funções  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 - f_2$  e  $f_1 f_2$  são funções contínuas. Se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua, então  $\frac{1}{f}$  será contínua em todo ponto  $z \in \Omega$  tal que  $f(z) \neq 0$ .

6) O exemplo anterior garante, então, que todo polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

de variável e coeficientes complexos, é uma função contínua e que se  $P$  e  $Q$  são polinômios, a função racional  $\frac{P}{Q}$  é contínua em todos os pontos  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $Q(z) \neq 0$ .

#### II.4 - Séries:

Diz-se que uma série de números complexos  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente e tem soma  $z$  se a sequência de suas reduzidas  $s_m = \sum_{n=0}^m z_n$  converge para  $z$ , isto é,  $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \Leftrightarrow s_m \rightarrow z$ .

Se  $z_n = x_n + y_n i$ , então  $s_m = \sum_{n=0}^m x_n + i \sum_{n=0}^m y_n$ , tem-se portanto, levando em conta a proposição II.1 o seguinte resultado, análogo àquele:

Proposição II.3 - Se  $z_n = x_n + y_n i$  e  $z = x + y i$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é convergente com soma  $z$  se, e somente se, as séries de números reais  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  fôrem convergentes com somas  $x$  e  $y$ , respectivamente.

É imediato verificar que se as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  são convergentes com somas  $z$  e  $w$ , respectivamente, então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$  será convergente com soma  $z + w$  e que se  $a \in \mathbb{C}$  é um número complexo qualquer, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a z_n$  é convergente com soma  $az$ .

Uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  de números complexos diz-se absolutamente convergente se a série de seus módulos,  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  fôr uma série convergente:

É imediata a verificação de um resultado análogo à Proposição II.3 para a convergência absoluta:

Proposição II.4 - Se  $z_n = x_n + iy_n$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é absolutamente convergente quando, e só quando, as séries reais  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  forem absolutamente convergentes.

A proposição II.4 permite-nos transportar para as séries de números complexos propriedades já conhecidas para séries de números reais, como:

1. Se uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  é absolutamente convergente, então qualquer série obtida desta por mudança de ordem é ainda absolutamente convergente e terá a mesma soma que a série original;
2. Se as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ,  $\sum_{m=0}^{\infty} z'_m$  são absolutamente convergentes, então a série  $\sum_{n,m} z_n z'_m$  é absolutamente convergente e mais:  
$$\sum_{n,m} z_n z'_m = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} z'_m \right)$$

Como no caso real, há interêsse em considerar séries de funções de variável complexa, com valores complexos, e, entre estas as que apresentam maior interêsse são as séries de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_n, a \in \mathbb{C}$$

Um tal série diz-se convergente ou absolutamente convergente num subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  se para cada  $z \in \Omega$ , a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

fôr convergente ou absolutamente convergente, respectivamente.

Isto é, esta série se diz convergente em  $\Omega$  se, para cada  $z \in \Omega$ , dado  $\epsilon > 0$ , existir um índice  $n_0(z)$  - este índice pode variar com  $z$  - e um número complexo  $f(z)$  tais que, para  $m \geq n_0(z)$  se tenha

$$\left| \sum_{n=0}^m a_n (z-\alpha)^n - f(z) \right| < \epsilon .$$

No caso em que exista um índice  $n_0$  satisfazendo a condições acima para todo  $z \in \Omega$ , então a série se diz uniformemente convergente em  $\Omega$ . Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z-\alpha|^n$$

fôr uniformemente convergente em  $\Omega$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$  será dita uniforme e absolutamente convergente em  $\Omega$ .

Observe-se que estas definições são válidas para séries de funções quaisquer.

Critério de Cauchy para séries de funções uniforme e absolutamente convergentes: uma condição necessária e suficiente para que a série de funções  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  seja uniforme e absolutamente convergente num conjunto  $\Omega$  é que dado  $\epsilon > 0$  exista um  $n_0$  tal que para  $p > m \geq n_0$  tenhamos  $\sum_{n=m}^p f_n(z) < \epsilon$  para todo  $z \in \Omega$ .

A respeito de regiões em que uma série de potências converge vejamos o seguinte resultado, enunciado aqui para  $\alpha = 0$ , mas válido no caso geral:

Teorema de Abel - Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  fôr convergente num ponto  $z_0$ , então será absolutamente convergente para qualquer  $z$  tal que  $|z| < |z_0|$  e mais, esta série será uniforme

e absolutamente convergente em qualquer círculo de raio estritamente menor que  $|z_0|$ :  $|z| \leq |z_0| - \varepsilon$ . Finalmente se  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , a função  $f(z)$  é contínua no interior do círculo de raio  $|z_0|$ :  $|z| < |z_0|$ .

Demonstração: Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$  é convergente, então existe  $L > 0$  tal que para todo  $n$ ,  $|a_n z_0^n| \leq L$ , mas  $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$  e  $\left| \frac{z}{z_0} \right| \leq q < 1$ , portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq L \sum_{n=0}^{\infty} q^n = L \frac{1}{1-q}$$

isto é, a série dada é absolutamente convergente para  $|z| < |z_0|$ .

Se é dado  $\varepsilon > 0$ , para os pontos do círculo de raio  $|z_0| - \varepsilon$  é possível determinar o número  $q < 1$  tal que  $\left| \frac{z}{z_0} \right| \leq q$  independentemente do ponto  $z$ , então, neste círculo, a série é uniforme e absolutamente convergente. Para provar a terceira parte, lembramos que,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ então } f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(z), \text{ onde } s_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$$

são polinômios e, portanto, funções contínuas e, para  $|z| \leq |z_0| - \varepsilon$  a convergência é uniforme; usando a propriedade "o limite uniforme de funções contínuas é ainda uma função contínua", fica provado que  $f(z)$  é contínua para  $|z| < |z_0|$  e está demonstrado o Teorema de Abel.

Dada uma série de potências

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

podemos considerar o elemento  $\rho$ , extremo superior dos números reais  $r$  tais que (\*) seja convergente para todo  $z$  que satisfaz  $|z-a| \leq r$ . Podemos ter  $\rho = 0$  (ex.:  $\sum n! z^n$ ) ou  $\rho = \infty$  (ex.:  $\sum \frac{z^n}{n!}$ ). Dizemos que  $\rho$  é o raio de convergência da série (\*) no ponto  $a$  e que  $B_\rho(a)$  é o seu círculo de convergência.

### Exercícios

1. A fórmula de Cauchy-Hadamard: demonstrar que  $\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . [Sugestão: lembrar que dada uma sequência  $r_n$  de números reais definimos  $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq m} r_n)$  e que para uma sequência  $p_n$  de números positivos temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} < 1 \Rightarrow \sum_n p_n < \infty$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} > 1 \Rightarrow \sum_n p_n = +\infty.$$

Tomar então  $p_n = |a_n| |z^n|$ .]

2. Demonstrar que a série (\*) e a série "derivada"  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$  tem o mesmo raio de convergência.

3. Demonstrar que dado  $\beta \in \mathbb{C}$  tal que  $|\beta-a| < \rho$ , a série de potências em  $z-\beta$  obtida a partir de (\*) desenvolvendo  $(z-a)^n = (z - \beta + \beta - a)^n$  têm raio de convergência  $\geq \rho - |\beta-a|$  no ponto  $\beta$ .

4. Determinar o raio de convergência das seguintes séries de potências:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} z^n \quad (\rho > 0).$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n.$



## II.5 - Funções elementares no campo complexo:

Vamos agora estender ao campo complexo algumas funções elementares já conhecidas no campo real. O que devemos esperar de uma tal extensão?

- 1º) Certamente exigiremos que a função prolongada  $f(z)$  coincida com a função  $f(x)$  dada no campo real quando  $z$  fôr real;
- 2º) esperamos que  $f(z)$  conserve o maior número possível de propriedades de  $f(x)$ , como propriedades algébricas, propriedades de diferenciação, propriedades de ordem e majorações (observemos que, em geral, não será possível conservar estas últimas propriedades);
- 3º) seria desejável que o prolongamento nas condições acima fôsse único.

Por exemplo, a função exponencial que tem as propriedades  $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$ ,  $(e^x)' = e^x$  terá estas mesmas propriedades no campo complexo. A propriedade  $e^x > 0$ , porém, não será válida no campo complexo.

Para estender funções com  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  vamos lançar mão de suas séries de potências. Lembramos, então, que se

$x \in \mathfrak{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{II.1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\text{II.2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{II.3})$$

Observação: Lembremos ainda que, apesar das funções  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  serem infinitamente deriváveis e que as séries dos 2º membros são seus respectivos desenvolvimentos de Taylor, em torno da origem, isto não é ainda suficiente para que o 2º membro convirja para o 1º. De fato, a função

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

é infinitamente derivável, seu desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem é convergente pois, como  $f^{(n)}(0) = 0$ , tem todos os coeficientes nulos, mas se  $x \neq 0$ ,  $f(x) \neq 0$ , logo  $f(x)$  não é a soma de sua série de Taylor.

Isto não se dá em (II.1), (II.2) ou (II.3) como se pode verificar aplicando os resultados que enumeramos a seguir:

1º) Seja  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida e com  $n+1$  derivadas em  $[\alpha, \beta]$ . Se  $a \in [\alpha, \beta]$ , então

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

onde  $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})$ ,  $\bar{x}$  compreendido entre  $a$  e  $x$ . Este é o desenvolvimento de Taylor de  $f(x)$  em torno do ponto  $a$ , com resto  $R_n$  de Lagrange.

2º) Se  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  fôr infinitamente derivável em  $[\alpha, \beta]$  e existir  $K$  tal que  $|f^{(n)}(x)| \leq K^n$ , para todo  $n=1,2,\dots$  e todo  $x \in [\alpha, \beta]$ , então a série de Taylor (infinita) converge uniformemente para a função.

Demonstração: vejamos que, de fato, dentro de tais condições o

resto de Lagrange tende a 0; quando  $n \rightarrow \infty$  : pondo  $L = K(\beta - \alpha)$ , temos

$$|R_n(x)| \leq \frac{L^{n+1}}{(n+1)!};$$

tomemos  $m$  tal que  $\frac{L}{m+1} = q < 1$ , então, se  $n > m$ :

$$|R_n(x)| \leq \frac{L^m}{m!} \frac{L}{m+1} \frac{L}{m+2} \cdots \frac{L}{n+1} \leq \frac{L^m}{m!} q^{n+1-m} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$  pois  $q < 1$ .

Ora, as funções  $\sin x$  e  $\cos x$  têm derivadas limitadas entre  $-1$  e  $+1$ , logo suas séries de Taylor convergem para as respectivas funções.

Analogamente, em cada intervalo  $[\alpha, \beta]$  as derivadas de  $e^x$  são limitadas por  $e^\beta$ ; logo sua série de Taylor converge, em cada ponto  $x$  para  $e^x$ .

Definimos, então, as funções exponencial, seno e cosseno da variável complexa  $z$  pondo, analogamente a (II.1), (II.2) e (II.3):

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{II.4})$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{e} \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{II.5})$$

Como estas séries convergem para qualquer  $z$  real, em consequência do teorema de Abel convergem também para  $z \in \mathbb{C}$  qualquer e as funções definidas como duas somas são contínuas em todo plano complexo. Ainda mais, as séries são absolutamente convergentes e uniforme e absolutamente convergentes em qualquer círculo.

Por substituição em (II.4) e separando as potências pares e ímpares, tem-se a fórmula de Euler:  $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ .

As funções acima definidas são prolongamentos das funções reais, pela própria definição; vejamos se são conservadas propriedades algébricas como:  $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ ,  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \dots$

Vamos, primeiramente, demonstrar que, se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}; \quad (\text{II.6})$$

como as séries que definem  $e^{z_1}$  e  $e^{z_2}$  são absolutamente convergentes, pode se fazer o produto e somá-lo em qualquer ordem, sendo assim, fazemos:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} \right) = \sum_{n,m \geq 0} \frac{z_1^n z_2^m}{n! m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \frac{z_1^n z_2^m}{n! m!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n+m=k} \frac{k!}{n! m!} z_1^n z_2^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n! (n-k)!} z_1^n z_2^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z_1+z_2)^k = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Está demonstrada a fórmula (II.6).

A partir das definições (II.4) e (II.5) e da fórmula de Euler, o leitor poderá deduzir as seguintes fórmulas:

$$\cos z = \frac{1}{2} [e^{iz} + e^{-iz}], \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} [e^{iz} - e^{-iz}] \quad (\text{II.7})$$

De (II.6) e da fórmula de Euler, segue que se  $z = x+yi$ ,

$$e^z = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (\text{II.8})$$

Daqui segue também que  $|e^z| = e^x$ .

Como aplicação da fórmula (II.6), o leitor pode verificar que ainda valem no campo complexo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 \\ \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \end{aligned}$$

Estendemos ao campo complexo as funções hiperbólicas, definindo

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \quad (\text{II.9})$$

Partindo desta definição, têm-se as séries de potências de  $z$  para  $\sinh z$  e  $\cosh z$ :

$$\begin{aligned} \sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

De (II.7) e (II.9) se concluem, sem dificuldade, as relações:

$$\begin{aligned} \sinh iz &= i \sin z, & \sin iz &= i \sinh z \\ \cosh iz &= \cos z, & \cos iz &= \cosh z \end{aligned}$$

Destas relações vem ainda, se  $z = x + yi$ ,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

Outras relações que se estendem são:

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$$

Uma propriedade da função  $e^z$  que não possui análoga no campo real é a seguinte: a função  $e^z$  é periódica e  $2\pi i$  é um dos seus períodos, de fato,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

Mais ainda, se  $k \in \mathbb{Z}$  é um inteiro qualquer,  $2k\pi i$  é também um período de  $e^z$  e estes são os únicos, isto é,

$$e^{z+\alpha} = e^z \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i, \quad k \text{ inteiro} \quad (\text{exercício}).$$

Este fato aliado às fórmulas (II.7) e (II.9) garante que as funções  $\sin z$  e  $\cos z$  são periódicas com período  $2\pi$  e as funções  $\sinh z$  e  $\cosh z$  são periódicas com período  $2\pi i$ .

O leitor pode, ainda, verificar que são válidas as seguintes relações:

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y ;$$

$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y .$$

Vamos agora demonstrar um teorema que, num certo sentido, "prolonga" as propriedades das funções do campo real ao campo complexo, quando estas forem dadas por série de potências, evitando o cálculo direto como aquele que fizemos para demonstrar (II.6). O teorema que vamos mostrar agora, embora já nos seja suficiente no momento, não é o mais forte que existe neste sentido.

Teorema II.1 - Consideremos duas séries de potências:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

convergentes para  $|z| < \rho$ , tais que exista uma seqüência de pontos  $\alpha_m \rightarrow 0$  de modo que:  $f(\alpha_m) = g(\alpha_m)$ .

Então,  $a_n = b_n$  para todo  $n$  e, portanto,  $f(z) = g(z)$ .

Demonstração: Para demonstrar o teorema basta considerar uma série de potências convergentes para  $|z| < \rho$  :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

tal que  $h(\alpha_m) = 0$  e provar que isto implica  $c_n = 0$ . De fato, mostrando isto, o teorema estará verificado se tomarmos  $h(z) = f(z) + g(z)$  e portanto,  $c_n = a_n - b_n$ . Provemos, então, que  $h(\alpha_m) = 0 \Rightarrow c_n = 0$ . Seja  $k$  o primeiro índice para o qual  $c_n \neq 0$ , então

$$h(z) = z^k (c_k + c_{k+1}z + c_{k+2}z^2 + \dots), \quad c_k \neq 0.$$

Ora, a série do 2º membro é convergente, então a série

$$c_{k+1}z + c_{k+2}z^2 + \dots$$

obtida da anterior multiplicando por  $z^{-k}$  e subtraindo  $c_k$ , é também convergente e para  $z = 0$  têm soma 0, isto é, dado o número real positivo  $|c_k| > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $|z| < \delta$ , então

$$|c_{k+1}z + c_{k+2}z^2 + \dots| < |c_k|,$$

isto é,

$$|c_k + c_{k+1}z + \dots| > 0 \quad \text{para } |z| < \delta$$

o que é absurdo porque existem infinitos pontos  $\alpha_m$  tais que  $|\alpha_m| < \delta$  e  $h(\alpha_m) = 0$  e  $h(z)$  seria o produto de  $z^k$  por um número não nulo, logo  $h(z)$  só se anularia na origem.

Este teorema seria válido se tomássemos  $z - z_0$  ao invés de  $z$ .

Com este resultado, demonstra-se também a fórmula (II.6):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

em dois passos:

1º) fixando  $x_1 \in \mathbb{R}$ , os dois membros da expressão  $e^{x_1+z_2} = e^{x_1} e^{z_2}$  são expressões em séries de potências de  $z_2$  que coincidem sempre que  $z_2$  é real, então coincidem para qualquer complexo  $z_2$ , pelo teorema agora visto.

2º) fixado  $z_2 \in \mathbb{C}$ , faz-se o mesmo para provar que

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

pois ambos os membros são expressões em séries de potências de  $z_1$  coincidentes quando  $z_1$  é real.

Um outro exemplo da aplicação deste teorema seria o de provar que:

$$\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1.$$

De fato, o primeiro membro pode ser desenvolvido numa série de potências de  $z$  que coincide com a do segundo membro, 1, sempre que  $z$  for real.

Analogamente, prova-se que

$$\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$$

Verifica-se, sem dificuldade, a partir de (II.7) ou das expressões que dão  $\operatorname{sen} z$  e  $\operatorname{cos} z$  em função de  $x$  e  $y$ , que as funções  $\operatorname{sen} z$  e  $\operatorname{cos} z$  anulam-se somente nos pontos em que



$\text{sen } x$  e  $\text{cos } x$  são nulos, respectivamente, isto é, os zeros da função  $\text{sen } z$  são unicamente aquêles da função  $\text{sen } x$  :

$z = k\pi$  ,  $k \in \mathbb{Z}$  , e os zeros da função  $\text{cos } z$  :  $z = (k + \frac{1}{2})\pi$  ,  $k \in \mathbb{Z}$  . Sendo assim, se definirmos as demais funções trigonométricas pelas relações:

$$\text{tg } z = \frac{\text{sen } z}{\text{cos } z} , \quad \text{cotg } z = \frac{\text{cos } z}{\text{sen } z} , \quad \text{sec } z = \frac{1}{\text{cos } z} , \quad \text{cosec } z = \frac{1}{\text{sen } z}$$

elas estarão definidas no campo complexo menos os valores reais para os quais  $\text{tg } x$ ,  $\text{cotg } x$ ,  $\text{sec } x$ ,  $\text{cosec } x$  não estavam definidas. São, portanto, prolongamentos contínuos das respectivas funções reais e continuam válidas, no campo complexo, relações que as envolvem como:

$$\text{tg}(z_1 + z_2) = \frac{\text{tg } z_1 + \text{tg } z_2}{1 - \text{tg } z_1 \text{tg } z_2} , \quad 1 + \text{tg}^2 z = \text{sec}^2 z .$$

Análogamente, se definem as funções hiperbólicas

$$\text{tgh } z = \frac{\text{senh } z}{\text{cosh } z} , \quad \text{cotgh } z = \frac{\text{cosh } z}{\text{senh } z}$$

que estão definidas e são contínuas nos pontos em que o denominador não se anule. Como  $\text{senh } z = -i \text{sen } iz$  e  $\text{cosh } z = \text{cos } iz$ ,

$$\text{senh } z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi i , \quad k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\text{cosh } z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = (k + \frac{1}{2})\pi i , \quad k \in \mathbb{Z}$$

O leitor pode verificar que são válidas relações como:

$$\text{tg } iz = i \text{tgh } z$$

$$\text{cotg } iz = -i \text{cotgh } z$$

$$\text{tgh } iz = i \text{tg } z$$

$$\text{cotgh } iz = -i \text{tg } z$$

Exercícios

1. Mostrar que, para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$

2. Mostrar que, para todo  $n \geq 1$  e todo  $z$  complexo vale

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{2 \leq p \leq n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \frac{z^p}{p!}$$

e portanto, para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ .

3. Mostrar que:

a)  $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$

b)  $\exp\left(\frac{\pi}{2} i\right) = i$

c)  $\exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right) = e^{\frac{1+i}{2}}$

4. Mostrar que  $\exp(z + \pi i) = -\exp z$

5. Se  $z = r \exp(i\theta)$  então  $\bar{z} = r \exp(-i\theta)$

6. Mostrar que:  $\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2)$ ,  $\frac{1}{\exp z} = \exp(-z)$

7. Mostrar que  $(\exp z)^n = \exp(nz)$

8. Mostrar que  $(\exp z)^{\frac{m}{n}} = \exp\left[\frac{m}{n}(z + 2\pi ki)\right]$  onde  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

9. Mostrar que  $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$

10. Simplificar  $|\operatorname{Re}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)\right)|$

11. Mostrar que  $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ ,

$$|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$$

12. Mostrar que  $|\sin z| \geq |\sin x|$  e  $|\cos z| \geq |\cos x|$

13. Mostrar que:

a)  $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$

b)  $\operatorname{sen}(i\bar{z}) \neq \overline{\operatorname{sen}(iz)}$ ,

a menos que  $z = \pm n\pi i$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

14. Determinar tôdas as raízes das seguintes equações:

a)  $\cos z = 2$

b)  $\operatorname{sen} z = \cosh 4$

c)  $\cosh z = \frac{1}{2}$

d)  $\operatorname{senh} z = i$

e)  $\cosh z = -2$

15. Mostrar que os zeros das funções  $\cos z$  e  $\operatorname{sen} z$  são somente os seus zeros reais; mostrar que os zeros da função  $\operatorname{senh} z$  são os números  $k\pi i$  e os da função  $\cosh z$  são os números  $(k + \frac{1}{2})\pi i$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

16. Mostrar que:

$$\operatorname{senh}(z + \pi i) = -\operatorname{senh} z$$

$$\cosh(z + \pi i) = -\cosh z .$$

## II.6 - A definição de $\operatorname{Log} z$ ; APLICAÇÕES

Vamos definir a expressão logarítmo da variável complexa  $z$ ,  $\operatorname{Log} z$ , do seguinte modo:

$$w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = e^w$$

Podemos verificar já algumas propriedades:

1ª)  $\operatorname{Log} z$  não está definida para  $z = 0$ , pois  $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w} > 0$ , para todo número complexo  $w$ .

2ª)  $\operatorname{Log} z$  é uma expressão multivalente, o que é consequência da

periodicidade da função exponencial. De fato, verifica-se que

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

o que equivale a dizer que

$$e^{z+\alpha} = e^z \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(exercício do parágrafo anterior)

ou, que

$$e^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstraremos esta última afirmação: sendo  $\alpha = a + ib$ ,  
 $e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^a \cos b = 1 \\ e^a \operatorname{sen} b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b =$   
 $= 2k\pi \text{ e } a = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Daqui, já se conclui que, sendo  $w$  um valor de  $\operatorname{Log} z$ ,  
 $w + 2k\pi i$  também será. Vejamos que se  $k$  é um inteiro qualquer e  
 $w_k = \log |z| + i(\arg z + 2k\pi)$ , onde  $\log$  é a função real logarít-  
mo de um número real positivo e onde se considera o valor principal  
de  $\operatorname{Arg} z$ , então  $w_k$  é um logarítmo de  $z$ . De fato, pois

$$\begin{aligned} e^{w_k} &= e^{\log |z| + i(\arg z + 2k\pi)} = e^{\log |z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = \\ &= |z| (\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z) = z. \end{aligned}$$

Donde se conclui que todos os valores de  $\operatorname{Log} z$  são  
dessa forma, isto é,

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplos:

Se  $a \in \mathbb{R}$  é um número real,  $a > 0$ , então

$$\operatorname{Log} a = \log a + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z};$$

se  $b \in \mathbb{R}$  é um número real,  $b < 0$ :

$$\operatorname{Log} b = \log |b| + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Log } i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z};$$

se  $\alpha \in \mathbb{C}$  é um número complexo qualquer:

$$\text{Log } e^{\alpha} = \alpha + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

É interessante observar que  $e^{\text{Log } \alpha} = \alpha$ , mas, ao contrário do que acontece no caso real e, como acabamos de ver, não é verdade que  $\text{Log } e^{\alpha} = \alpha$ .

Outros fatos assim aparecerão, devido à multiplicidade de valores no estudo das propriedades do  $\text{Log } z$  e de outras expressões que definiremos a partir desta.

Por exemplo, a propriedade

$$\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 \quad (\text{II.10})$$

é verdadeira para quaisquer números complexos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  não nulos, desde que seja entendida da seguinte maneira: dado um valor de  $\text{Log } z_1 z_2$ , existem valores de  $\text{Log } z_1$  e  $\text{Log } z_2$  cuja soma seja o valor dado, e, reciprocamente, a soma de dois valores quaisquer de  $\text{Log } z_1$  e  $\text{Log } z_2$  é sempre um valor de  $\text{Log } z_1 z_2$ . Demonstramos esta propriedade verificando que todos os valores do 1º membro de (II.10) são da forma:

$$\begin{aligned} \text{Log } z_1 z_2 &= \log |z_1 z_2| + i (\arg z_1 z_2 + 2k\pi) = \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i (\arg z_1 + \arg z_2 + 2k'\pi), \quad k, k' \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

e os valores do 2º membro têm a forma:

$$\begin{aligned} &\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \\ &= \log |z_1| + i (\arg z_1 + 2m\pi) + \log |z_2| + i (\arg z_2 + 2n\pi) = \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i (\arg z_1 + \arg z_2 + 2(m+n)\pi), \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Finalmente, como todo número inteiro  $k$  pode ser pôsto sob a forma de soma de dois inteiros  $m+n$  e vice-versa, a propriedade (II.10), com o sentido que lhe foi dado, está demonstrada.

Do mesmo modo, demonstra-se que, sendo  $z_1$  e  $z_2$  não nulos,

$$\text{Log } \frac{z_1}{z_2} = \text{Log } z_1 - \text{Log } z_2 \quad (\text{II.11})$$

e se  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \text{Log } z_1 z_2 = \alpha \text{Log } z_1 + \alpha \text{Log } z_2$ .

De (II.10) tira-se que, se  $z \neq 0$ ,

$$\text{Log } z^n = \text{Log } z + \dots + \text{Log } z \quad (n \text{ parcelas}) \quad (\text{II.12})$$

Não é verdade, porém, que  $\text{Log } z^n = n \text{Log } z$ , pois

$\text{Log } z + \dots + \text{Log } z$  (n parcelas)  $\neq n \text{Log } z$  ! Ilustraremos êste fato mostrando o que acontece no caso particular em que  $n=2$ , isto é, vejamos que  $\text{Log } z + \text{Log } z \neq 2 \text{Log } z$  : realmente, pois

$$\begin{aligned} \text{Log } z + \text{Log } z &= \log |z| + i(\arg z + 2m\pi) + \log |z| + i(\arg z + 2n\pi) = \\ &= 2 \log |z| + 2i \arg z + 2(m+n)\pi i, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \end{aligned}$$

$2 \text{Log } z = 2 \log |z| + 2i \arg z + 4k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e, embora todo número da forma  $4k$  seja da forma  $2(m+n)$ , não é verdade que todo número da forma  $2(m+n)$  seja um múltiplo de 4.

Não levando isto em conta, dá-se uma "demonstração" natural, porém falsa, da relação, igualmente falsa  $\text{Log}(-z) = \text{Log } z$ . Êste é o paradoxo de Bernoulli, que se demonstra assim:

$$\begin{aligned} (-z)^2 = z^2 &\Rightarrow \text{Log } (-z)^2 = \text{Log } z^2 \Rightarrow \text{Log } (-z) + \text{Log } (-z) = \\ &= \text{Log } z + \text{Log } z \stackrel{*}{\Rightarrow} 2 \text{Log } (-z) = 2 \text{Log } z \Rightarrow \text{Log}(-z) = \text{Log } (z) \end{aligned}$$

(a implicação  $\stackrel{*}{\Rightarrow}$  não é verdadeira).

$$\text{Log } i = (2k + \frac{1}{2})\pi i, \quad k \in \mathbb{Z};$$

se  $\alpha \in \mathbb{C}$  é um número complexo qualquer:

$$\text{Log } e^\alpha = \alpha + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

É interessante observar que  $e^{\text{Log } \alpha} = \alpha$ , mas, ao contrário do que acontece no caso real e, como acabamos de ver, não é verdade que  $\text{Log } e^\alpha = \alpha$ .

Outros fatos assim aparecerão, devido à multiplicidade de valores no estudo das propriedades do  $\text{Log } z$  e de outras expressões que definiremos a partir desta.

Por exemplo, a propriedade

$$\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 \quad (\text{II.10})$$

é verdadeira para quaisquer números complexos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  não nulos, desde que seja entendida da seguinte maneira: dado um valor de  $\text{Log } z_1 z_2$ , existem valores de  $\text{Log } z_1$  e  $\text{Log } z_2$  cuja soma seja o valor dado, e, reciprocamente, a soma de dois valores quaisquer de  $\text{Log } z_1$  e  $\text{Log } z_2$  é sempre um valor de  $\text{Log } z_1 z_2$ . Demonstramos esta propriedade verificando que todos os valores do 1º membro de (II.10) são da forma:

$$\begin{aligned} \text{Log } z_1 z_2 &= \log |z_1 z_2| + i (\arg z_1 z_2 + 2k\pi) = \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i (\arg z_1 + \arg z_2 + 2k'\pi), \quad k, k' \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

e os valores do 2º membro têm a forma:

$$\begin{aligned} &\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \\ &= \log |z_1| + i (\arg z_1 + 2m\pi) + \log |z_2| + i (\arg z_2 + 2n\pi) = \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i (\arg z_1 + \arg z_2 + 2(m+n)\pi), \quad m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Finalmente, como todo número inteiro  $k$  pode ser pôsto sob a forma de soma de dois inteiros  $m+n$  e vice-versa, a propriedade (II.10), com o sentido que lhe foi dado, está demonstrada.

Do mesmo modo, demonstra-se que, sendo  $z_1$  e  $z_2$  não nulos,

$$\text{Log } \frac{z_1}{z_2} = \text{Log } z_1 - \text{Log } z_2 \quad (\text{II.11})$$

e se  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \text{Log } z_1 z_2 = \alpha \text{Log } z_1 + \alpha \text{Log } z_2$ .

De (II.10) tirá-se que, se  $z \neq 0$ ,

$$\text{Log } z^n = \text{Log } z + \dots + \text{Log } z \quad (n \text{ parcelas}) \quad (\text{II.12})$$

Não é verdade, porém, que  $\text{Log } z^n = n \text{Log } z$ , pois

$\text{Log } z + \dots + \text{Log } z$  (n parcelas)  $\neq n \text{Log } z$  ! Ilustraremos êste fato mostrando o que acontece no caso particular em que  $n=2$ , isto é, vejamos que  $\text{Log } z + \text{Log } z \neq 2 \text{Log } z$  : realmente, pois

$$\begin{aligned} \text{Log } z + \text{Log } z &= \log |z| + i(\arg z + 2m\pi) + \log |z| + i(\arg z + 2n\pi) = \\ &= 2 \log |z| + 2 i \arg z + 2(m+n)\pi i, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \end{aligned}$$

$2 \text{Log } z = 2 \log |z| + 2 i \arg z + 4k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e, embora todo número da forma  $4k$  seja da forma  $2(m+n)$ , não é verdade que todo número da forma  $2(m+n)$  seja um múltiplo de 4.

Não levando isto em conta, dá-se uma "demonstração" natural, porém falsa, da relação, igualmente falsa  $\text{Log}(-z) = \text{Log } z$ .

Êste é o paradoxo de Bernoulli, que se demonstra assim:

$$\begin{aligned} (-z)^2 = z^2 &\Rightarrow \text{Log } (-z)^2 = \text{Log } z^2 \Rightarrow \text{Log } (-z) + \text{Log } (-z) = \\ &= \text{Log } z + \text{Log } z \stackrel{*}{\Rightarrow} 2 \text{Log } (-z) = 2 \text{Log } z \Rightarrow \text{Log}(-z) = \text{Log } (z) \end{aligned}$$

(a implicação  $\stackrel{*}{\Rightarrow}$  não é verdadeira).



Potência com expoente complexo: Estamos, agora, em condições de definir, como foi prometido no capítulo anterior, o que seja  $a^\beta$ , onde  $a, \beta$  são números complexos,  $a \neq 0$ , de modo a englobar o caso já visto: aquêle em que  $\beta$  é um número racional.

Pomos, por definição:

$$\boxed{a^\beta = e^{\beta \text{Log} a}} \quad (\text{II.13})$$

Ora, no caso em que  $\beta$  é o racional  $r = \frac{p}{q}$  ( $\frac{p}{q}$  fração irredutível), tínhamos, no parágrafo I.8:

$$a^r = |a|^r [\cos r (\arg a + 2k\pi) + i \sin r (\arg a + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z},$$

então  $a^r = e^r \log |a| e^{i r (\arg a + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$   
isto é:  $a^r = e^r [\log |a| + i (\arg a + 2k\pi)] = e^r \text{Log} a$ .

Como  $a^\beta$  é definido a partir de  $\text{Log} a$  pode assumir muitos valores, de fato, se  $\beta$  fôr um inteiro  $a^\beta$  admite um único valor, se  $\beta$  fôr um racional representado pela fração irredutível  $p/q$ ,  $a^\beta$  admite  $q$  valores e se  $\beta$  fôr um outro complexo qualquer  $a^\beta$  admite infinitos valores.

Algumas regras de cálculo, válidas para potências de números reais continuam válidas, quando entendidas convenientemente, dada a existência de muitos valores, como por exemplo: se  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ,  $a$  e  $\beta$  não nulos:

$$(a\beta)^\gamma = a^\gamma \beta^\gamma,$$

isto é, qualquer valor de  $(a\beta)^\gamma$  é o produto de um valor de  $a^\gamma$  por um valor de  $\beta^\gamma$  e vice-versa.

Façamos a demonstração:

$$(\alpha\beta)^\gamma = e^{\gamma \text{Log} \alpha\beta} = e^{\gamma \text{Log} \alpha + \gamma \text{Log} \beta} = e^{\gamma \text{Log} \alpha} e^{\gamma \text{Log} \beta} = \alpha^\gamma \beta^\gamma .$$

Outras já não se estendem ao campo complexo, como por

exemplo:  $\alpha^{\beta_1 + \beta_2} \neq \alpha^{\beta_1} \alpha^{\beta_2}$  (basta considerar  $z^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = z$  e  $z^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} = \pm z$ ),  $(\alpha^\beta)^\gamma \neq \alpha^{\beta\gamma}$  (basta tomar  $(a^p)^{\frac{1}{np}}$  que assume  $np$  valores e  $z^{\frac{1}{n}}$  que assume  $n$  valores) e  $\text{Log} \alpha^\beta \neq \beta \text{Log} \alpha$  (como já se viu no caso em que  $\beta = 2$ ).

Exemplos:  $i^i = e^{i \text{Log} i} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{2k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ;

se  $a = a + ib$ :  $1^a = e^{-2k\pi b} (\cos 2k\pi + i \text{sen } 2k\pi)$ ;

se  $b = 0$ ,  $a = a$ :  $1^a = \cos 2k\pi + i \text{sen } 2k\pi$ ;

se  $a = 0$ ,  $a = ib$ :  $1^{ib} = e^{2k\pi b}$ .

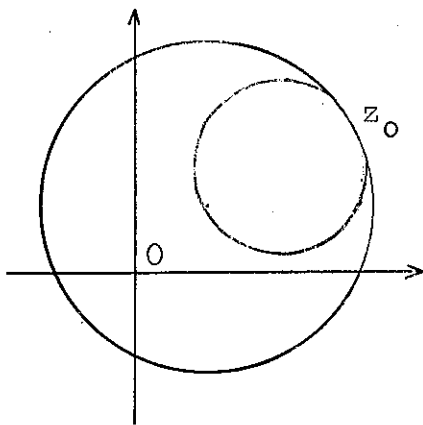
Tendo definido  $\alpha^\beta$ , para cada  $\alpha$  e  $\beta$  fixos podemos considerar as expressões  $\alpha^z$  e  $z^\beta$  que podem ser multivalentes ( $\alpha^z$  sempre o é e  $z^\beta$  o é para  $\beta$  não inteiro) e vamos procurar associar funções (univalentes) ou "ramos" a estas expressões.

Vejamos o que acontece com  $\alpha^z$ , definida, como em (II.13), por:

$$\alpha^z = e^{z \text{Log} \alpha} = e^{z [\log |\alpha| + i (\arg \alpha + 2k\pi)]}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{II.14})$$

Sendo  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha^z$  está definido em todo o plano complexo, podendo assumir diversos valores para um mesmo  $z$ . Fixado, no entanto, um valor de  $\text{Log} \alpha$ , o que corresponde a fixar um valor de  $k$  em (II.14), tem-se, automaticamente, distinguido um único valor de  $\alpha^z$  para cada  $z$  em todo o plano. Esta função univalente, assim construída, diz-se um ramo  $\alpha^z$ . Qualquer ramo satisfaz a se

guinte propriedade: fixemos um ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  e consideremos uma circunferência passando por  $z_0$ . Fazendo  $z$  percorrer esta circunferência a partir de  $z_0$  e retornando a  $z_0$ , o valor que o ramo de  $a^z$  atribui a cada  $z$  varia continuamente. Finda uma volta, isto é, aproximando-se  $z$  de  $z_0$  novamente, os valores do ramo de  $a^z$  "aproximam-se" também do valor de partida de  $a^{z_0}$  (do mesmo ramo).

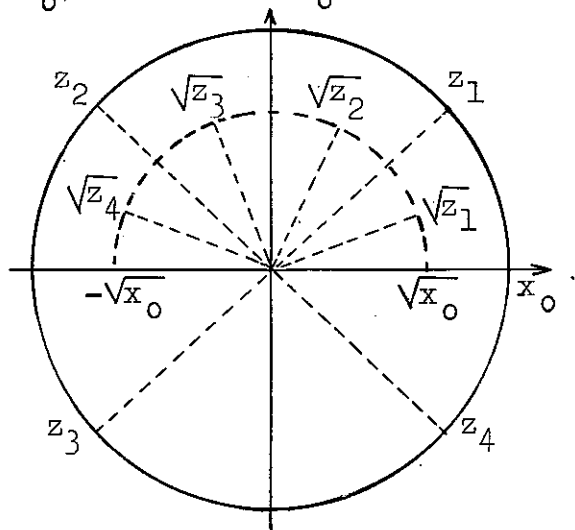


Repitamos esta operação com  $z^\beta$

$$z^\beta = e^{\beta \operatorname{Log} z} = e^{\beta [\log |z| + i (\arg z + 2k\pi)]}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.15})$$

que está definida no plano complexo, menos a origem.

Apenas para fixar idéias, façamos  $\beta = \frac{1}{2}$  e tomemos, como  $z_0$ , um ponto  $x_0 > 0$  no eixo real. Consideremos a circunferência  $C$  com



centro na origem e raio  $x_0$ . Tentemos construir um ramo de  $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2k\pi)}, k=0,1$  de modo a obtermos continuidade sôbre a circunfe<sub>re</sub>nça  $C$ , como no caso

acima descrito. No ponto inicial  $z_0 = x_0$ , é fácil distinguir um dos valores de  $x_0^{1/2}$ . Consideremos, por exemplo, a raiz positiva  $\sqrt{x_0}$  (que corresponde a tomar  $\arg x_0 = 0$  e  $k = 0$ ) cujo argumento é 0. Façamos  $z$  percorrer  $C$  no sentido anti-horário e, enquanto,  $z_1$  está no 1º quadrante, tomemos para a definição deste ramo o valor de  $z_1^{1/2}$  mais próximo de  $\sqrt{x_0}$ , será portanto um ponto da circunferência  $C_1$  de raio  $\sqrt{x_0}$ , localizado no 1º octante. Passando adiante, enquanto  $z_2$  percorre o 2º quadrante de  $C$ , tomemos como  $\sqrt{z_2}$  o valor de  $z_2^{1/2}$  que esteja mais próximo do valor escolhido para  $\sqrt{z_1}$ , isto é, aquele que está no 2º octante de  $C_1$ . Prosseguindo, passamos ao 3º quadrante de  $C$ , com  $z_3$  e escolhendo para  $\sqrt{z_3}$  o valor de  $z_3^{1/2}$  que esteja no 3º octante de  $C_1$  e assim, se  $z_4$  está no 4º quadrante de  $C$ , o valor distinguido  $\sqrt{z_4}$  é um ponto do 4º octante de  $C_1$ . Assim sendo, quando  $z_4$  completando a volta, aproximar-se de  $x_0$  por pontos do 4º quadrante, os valores escolhidos, dentro do critério da continuidade, estarão próximos de  $-\sqrt{x_0}$  e não do valor de partida  $\sqrt{x_0}$ . Realmente, para atingir o valor de partida seria necessário que o ponto  $x$  percorresse mais uma vez a circunferência  $C$ . Não é difícil ver que este fato se repete para outro valor qualquer de  $\beta$ , sendo que se  $\beta$  fôr racional representado pela fração irredutível  $p/q$  serão necessárias  $q$  voltas sôbre  $C$  para que o valor de  $z^{p/q}$  atinja o valor de partida e, se  $\beta$  não fôr racional, qualquer que seja o número de voltas nunca se retorna ao valor inicial. Este fato se repete para outro  $z_0 \neq 0$  qualquer desde que a circunferência  $C$  envolva a origem. Isto nos mostra a impossibilidade de construir ramos para  $z^\beta$  em caráter global como se fêz

para  $a^z$ . Localmente, no entanto, isto é possível, ou seja: para cada ponto  $z_0 \neq 0$  existe uma bola  $B_a(z_0)$  na qual se possa distinguir um ramo de  $z^\beta$ . Em outros termos, tomado  $a$  suficientemente pequeno (basta  $0 < a < |z_0|$ ), e considerados dentre os arcos fechados que passam por  $z_0$  aqueles inteiramente contidos em  $B_a(z_0)$ , sempre que fôr fixado um valor de  $z_0$ , é possível estendê-lo a todo o arco continuamente e de modo que, ao fim de uma volta, se retorne ao valor de partida.

Vamos definir, agora, as expressões inversas das funções introduzidas no parágrafo II.5 e algumas em II.7: arc sen  $z$ , arc cos  $z$ , ar sinh  $z$ , ...

Se  $f(w)$  é uma das funções  $e^w$ , sen  $w$ , cos  $w$ , tg  $w$ , cotg  $w$ , sinh  $w$ , cosh  $w$ , .... e definimos a inversa  $g(z)$  (que em geral será multivalente) por

$$w = g(z) \Leftrightarrow z = f(w),$$

então, quando  $f(w) = e^w$ , já definimos  $g(z)$  como Log  $z$ .

Vamos nos utilizar do logaritmo para exprimir as demais expressões inversas. Assim é que, se pomos

$$w = \text{arc sen } z \Leftrightarrow z = \text{sen } w,$$

tem-se  $z = \frac{1}{2i} (e^{iw} - e^{-iw})$  e, portanto,

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

ou: 
$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

donde: 
$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

logo: 
$$iw = \text{Log} (iz + \sqrt{1 - z^2})$$

e finalmente:

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} [iz + \sqrt{1-z^2}] \quad (\text{II.16})$$

considerando-se  $\sqrt{1-z^2}$  como a expressão bi-valente  $(1-z^2)^{1/2}$  definida no campo complexo para  $z^2 \neq 1$  e como 0 quando  $z = \pm 1$ .

A expressão  $iz + \sqrt{1-z^2}$ , da qual se deve calcular o logaritmo, nunca se anula, pois

$$iz + \sqrt{1-z^2} = 0 \Rightarrow -iz = \sqrt{1-z^2} \Rightarrow -z^2 = 1 - z^2 \Rightarrow 1 = 0$$

o que é um absurdo. Isto significa que, para qualquer  $z$ , existem sempre valores  $w$  cujo seno seja  $z$ .

Analogamente, se

$$w = \operatorname{arc} \operatorname{cos} z \Leftrightarrow z = \operatorname{cos} w,$$

teremos, como

$$z = \operatorname{cos} w = \frac{1}{2} (e^{iw} + e^{-iw}) :$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{cos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} [z + \sqrt{z^2-1}] , \quad (\text{II.17})$$

ainda aqui se dá o mesmo sentido a  $\sqrt{z^2-1}$  e a expressão  $z \pm \sqrt{z^2-1}$  nunca se anula, e que significa que  $\operatorname{cos} w$  assume qualquer valor complexo  $z$ .

Já quando definimos:

$$w = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \Leftrightarrow z = \operatorname{tg} w.$$

obtemos de  $z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$  que  $iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$  e

portanto  $e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z}$ , isto é,  $2iw = \operatorname{Log} \frac{i-z}{i+z}$  donde vem

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left( \frac{i-z}{i+z} \right) , \quad z \neq \pm i \quad (\text{II.18})$$

a expressão  $\frac{i-z}{i+z}$  não está definida para  $z = -i$  e se anula para  $z = i$ , por isso temos que eliminar êstes pontos do campo de definição de  $\text{arc tg } z$ . De fato, não existe número complexo cuja tangente seja  $i$  ou  $-i$ .

Passando às funções hiperbólicas, se

$$w = \text{arcsenh } z \Leftrightarrow z = \text{senh } w ,$$

como 
$$z = \text{senh } w = \frac{1}{2} (e^w - e^{-w}) ,$$

$$2z = e^w - e^{-w} \quad \text{ou} \quad e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0, \quad \text{donde}$$

$$e^w = z + \sqrt{z^2+1} , \quad \text{logo:}$$

$$\text{arcsenh } z = \text{Log} (z + \sqrt{z^2+1}) , \quad (\text{II.19})$$

aqui também  $\sqrt{z^2+1} = 0$  quando  $z = \pm i$  e a expressão  $z + \sqrt{z^2+1}$  é sempre diferente de 0.

Analogamente, têm-se:

$$w = \text{arccosh } z \Leftrightarrow z = \text{cosh } w$$

o que nos dá

$$\text{arccosh } z = \text{Log} (z + \sqrt{z^2-1}) \quad (\text{II.20})$$

definido para todo  $z$ ; e, se

$$w = \text{arctgh } z \Leftrightarrow z = \text{tgh } w ,$$

$$\text{arctgh } z = \frac{1}{2} \text{Log} \left( \frac{1+z}{1-z} \right) , \quad z \neq \pm 1 , \quad (\text{II.21})$$

o que se dá aqui para  $z = \pm 1$  é o mesmo que com (II.18) para  $z = \pm i$ .

Encerrando o parágrafo, queremos chamar a atenção do leitor para o seguinte fato: as funções reais, de variável real,

ditas elementares: potências, polinômios, funções racionais (quociente de polinômios), função exponencial ( $e^x$ ,  $a^x$ ), funções trigonométricas ( $\sin x$ ,  $\cos x, \dots$ ), funções hiperbólicas ( $\sinh x$ ,  $\cosh x, \dots$ ), suas inversas ( $\log x$ ,  $\arcsin x, \dots$ ) e tôdas outras, obtidas por meio destas, compondo-as entre si ou ainda com adição, subtração, multiplicação e quociente; tôdas estas funções e ramos de expressões multivalentes quando prolongadas ao campo complexo admitem uma caracterização comum: podem ser expressas a partir da função exponencial  $e^z$  e de sua inversa  $\text{Log } z$  por meio das quatro operações e da composição de funções.

É preciso ressaltar que quando se faz um quociente por alguma expressão ou quando se toma o seu logarítmo, ficam excluídos os pontos em que esta expressão se anula.

A classe das funções elementares tem a seguinte vantagem: dada uma propriedade que se conserva pela composição de funções e pelas quatro operações de número complexos, se ela fôr válida para a função  $e^z$  e os ramos de  $\text{Log } z$  valerá, automaticamente, para tôda função elementar. Veremos isto quando falarmos em derivação de funções de variável complexa, por exemplo.

Observemos porém que a primitiva de uma função elementar não é, necessariamente, uma função elementar. Basta lembrar que existem as chamadas "funções não integráveis elementarmente", que são justamente as funções elementares cuja primitiva não é uma função elementar, por exemplo, as primitivas das funções

$$e^{-x^2}, \frac{\sin x}{x}, \text{ etc...}$$



Exercícios

1. Calcular  $\text{arc sen } 0$ ,  $\text{arc cos } 0$ ,  $\text{arc tg } 0$ ,  $\text{ar sen } 1$ ,  $\text{ar cos } 1$ ,  $\text{arcsenh } 0$ ,  $\text{arccosh } 0$ ,  $\text{arcsenh } i$ .
2. Estudar a variação de  $|\text{sen } z|$  e  $|\text{cos } z|$ :
  - a) ao longo de retas paralelas ao eixo real;
  - b) ao longo de retas paralelas ao eixo imaginário.
3. Mostrar que o logarítmo de um número complexo  $z$  é um imaginário pura se, e somente se,  $z$  tiver módulo 1.
4. Mostrar que se  $z$  percorre uma circunferência com centro na origem, todos os valores de  $\text{Log } z$  pertencem a uma reta paralela ao eixo imaginário.
5. Mostrar que dois pontos distintos pertencentes a uma reta paralela ao eixo real não podem ser logaritmos de um mesmo número complexo  $z$ .
6. Calcular  $\lim_{\text{Re } z \rightarrow 0} |e^z|$ .
7. Estudar a variação de  $|\text{Log } z|$  quando
  - a)  $z$  percorre uma semi-reta que passe pela origem;
  - b)  $z$  percorre uma circunferência com centro na origem.
8. Calcular:
  - a)  $\text{Log } (i^{1/2})$ ;
  - b)  $\text{Log } (1-i)$ ;
  - c)  $\text{Log } (-ei)$ ;
  - d)  $\text{Log } (1^{1/3})$

9. Determinar tôdas as raízes de cada uma das equações:

a)  $\text{Log } z = \frac{\pi}{2} i$

b)  $e^z = -3$

10. Calcular:

a)  $\left[\frac{1}{2} e^{(-1-i\sqrt{3})}\right]^{3\pi i}$

b)  $(1-i)^{4i}$

c)  $(1+i)^{-i}$

d)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{-i}$

11. Mostrar que, se  $z \neq 0$ ,

a)  $z^0 = 1$ ;

b)  $|z^k| = \exp(k \text{Log } |z|) = |z|^k, k \in \mathbb{R}$

12. Determinar os valores de:

a)  $\text{arc tg } 2i$

b)  $\text{arc tg } (1+i)$

c)  $\text{arc cosh } (-1)$

d)  $\text{ar tgh } (0)$

e)  $\text{arc cotg } (-1)$

f)  $\text{ar sinh } \left(-\frac{5i}{4}\right)$

g)  $\text{arc cos } \frac{2i-1}{i-1}$

13. Resolver a equação  $\text{sen } z = 2$ ,

a) identificando as partes real e imaginária em ambos os membros da equação;

b) usando a forma da função trigonométrica inversa.

14. Fazer o mesmo que no exercício anterior para a equação

$\text{cos } z = \sqrt{2}$ .

Capítulo III

DIFERENCIABILIDADE COMPLEXA

III.1 - Derivada de uma função de variável complexa:

Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto de números complexos e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida em  $U$  e com valores complexos. Se  $z_0 \in U$  é um ponto de  $U$ , diz-se que a função  $f$  é derivável no ponto  $z_0$  se existir o limite:

$$c = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (\text{III.1})$$

no caso de existir,  $c$  diz-se o valor da derivada de  $f$  em  $z_0$  e é indicado com  $f'(z_0)$  ou  $\frac{df}{dz}(z_0)$ . Esta definição, formalmente, é a mesma do caso real, o que nos faz esperar que valham as mesmas regras formais de derivação que para o caso real - veremos isto adiante.

Um função  $f$  diz-se derivável num conjunto se fôr derivável em todo ponto do conjunto e a função que a cada ponto  $z$  dêste conjunto faz corresponder o valor  $f'(z)$  diz-se derivada de  $f$ .

Verifica-se que a condição de existência do limite em (III.1) e de que seu valor seja  $c$  é equivalente à seguinte condição: existe uma função  $\varepsilon(z-z_0)$  definida para  $z$  numa vizinhança de  $z_0$ , e tal que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z-z_0) = 0$  e

$$f(z) - f(z_0) = c(z-z_0) + \varepsilon(z-z_0) |z-z_0| \quad (\text{III.2})$$

A condição (III.2) é, portanto, uma condição equivalente para que  $f$  seja derivável no ponto  $z_0$ , com derivada  $c$  e faz-nos lembrar a condição de diferenciabilidade de funções de variável real. Mais tarde situaremos melhor esta analogia.

Embora formalmente a definição de derivabilidade de uma função de variável complexa seja a mesma que no caso de uma função real de variável real, veremos, mais tarde, que para funções de variável complexa esta definição tem consequências bem mais fortes. De fato, uma função de variável real pode ser derivável até uma certa ordem e deixar de sê-lo daí por diante ( $x^{3/2}$  na origem); pode uma função contínua e derivável em todos os pontos ter derivada não contínua ( $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  na origem) ou, ainda, pode uma função admitir derivada de qualquer ordem, não sendo, porém, sua série de Taylor convergente para ela ( $e^{-1/x^2}$  na origem, como vimos em II.5). Nada disto ocorre com as funções de variável complexas deriváveis num conjunto aberto, pois, então, como veremos adiante, sua derivada é ainda uma função derivável, a função admite, portanto, derivada de qualquer ordem e sua série de Taylor converge mesmo para ela.

Observa-se que de (III.2) sai imediatamente que se uma função é derivável em  $z_0$  é também contínua nesse ponto.

### III.2 - Regras formais para o cálculo de derivadas:

Análogas ao caso real e de verificação também análoga são as seguintes regras para o cálculo de derivadas.

dl. Se  $f$  é derivável em  $z_0$  e  $c \in \mathbb{C}$  é um constante, então

a função  $cf$  é derivável em  $z_0$  e

$$(cf)'(z_0) = c f'(z_0) ;$$

d2. Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis em  $z_0$ , então sua soma  $f+g$  é uma função derivável em  $z_0$  e:

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) ;$$

d3. Se  $f, g$  são funções deriváveis em  $z_0$ , então seu produto  $fg$  é derivável em  $z_0$  e

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) ;$$

daqui se conclui que se  $f_1, \dots, f_n$  são funções deriváveis então o produto  $f_1 \dots f_n$  é uma função derivável em  $z_0$  e

$$(f_1 \dots f_n)'(z_0) = \sum_{i=1}^n f_1(z_0) \dots f_{i-1}(z_0) f_i'(z_0) f_{i+1}(z_0) \dots f_n(z_0),$$

portanto, se  $f$  é derivável em  $z_0$ ,  $f^n$  é derivável em  $z_0$  e

$$(f^n)'(z_0) = n f^{n-1}(z_0) f'(z_0) .$$

Das regras d1, d2, d3 segue-se: Como  $\frac{dz}{dz} = 1$  e, se  $c$  é uma função constante,  $\frac{dc}{dz} = 0$ , temos então que um polinômio é derivável em qualquer ponto do plano e

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)' = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1} ;$$

d4. Se  $f, g$  são funções deriváveis em  $z_0$  e se  $g(z_0) \neq 0$  então  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $z_0$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{1}{g^2(z_0)} [f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)] ;$$

As regras acima podem ser enunciadas para funções deri-

váveis em um conjunto e suas derivadas neste conjunto, bastando para isto, fazer  $z_0$  variar no conjunto.

d5. Se as funções  $f$  e  $g$  são deriváveis e podem ser compostas, isto é, se  $U_2, U_1 \subset \mathbb{C}$  são abertos do plano complexo e

$$U_1 \xrightarrow{g} U_2 \xrightarrow{f} \mathbb{C},$$

então a composta  $f(g(z))$  é derivável e:

$$[f(g(z))]' = f'(g(z)) g'(z);$$

pontualmente, diríamos que se  $g$  fôr derivável em  $z_0$  e  $f$  fôr derivável no ponto  $g(z_0)$ , então a composta será derivável em  $z_0$ ;

d6. Teorema da derivação da função inversa (cuja demonstração é análoga à do caso real): sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  conjuntos abertos de números complexos e  $f: U \rightarrow V$  uma função biunívoca definida em  $U$  assumindo os valores de  $V$ , e seja  $g: V \rightarrow U$  é a função inversa de  $f$ .

Se  $f$  é derivável em  $z_0 \in U$  e  $f'(z_0) \neq 0$ , então,  $g$  é derivável em  $w_0 = f(z_0)$  e

$$f'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Ver também o exercício do fim do próximo parágrafo.

Exemplo: Vamos demonstrar que dada uma série de potências

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  de raio de convergência  $\rho > 0$ , se representarmos por  $f(z)$  a sua soma, definida para  $|z| < \rho$ , então  $f$  é uma

função derivável neste aberto. Mais ainda: a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  têm o mesmo raio de convergência (ver II.4, exerc.2) e converge

portanto para uma função  $g(z)$  e vamos demonstrar que em todo ponto  $z_0$  com  $|z_0| < \rho$  temos  $f'(z_0) = g(z_0)$ .

De fato: consideremos a identidade

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \left[ \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right] + [s_n'(z_0) - g(z_0)] + \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0}$$

onde tomamos  $z \neq z_0$  e  $|z|, |z_0| < \rho_0 < \rho$ . ( $s_n(z) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^m$  e  $R_n(z) = \sum_{m \geq n} a_m z^m$ ). Basta demonstrar que cada um dos três somandos se torna arbitrariamente pequeno para  $|z - z_0|$  suficientemente pequeno. Para o 1º somando isto é evidente pois  $s_n$  é um polinômio cuja derivada é  $s_n'$ ; para o segundo somando temos  $s_n(z) \rightarrow g(z)$  se  $|z| < \rho$ . O 3º somando pode ser escrito como

$$\sum_{m \geq n} a_m (z^{m-1} + z^{m-2} z_0 + \dots + z z_0^{m-2} + z_0^{m-1})$$

e temos portanto

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{m \geq n} m |a_m| \rho_0^{m-1}$$

que é convergente para  $\rho_0 < \rho$ .

### Exercício

Demonstrar que  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ .

### III.3 - Condições de Cauchy-Riemann:

A esta altura, poderíamos dar exemplos de funções deriváveis, mostrando diretamente a partir de sua definição que a função

exponencial  $e^z$  é derivável e, então, em abertos onde  $e^z$  fôsse biunívoca, teríamos a função  $\text{Log } z$  derivável e, portanto, com as regras vistas, tôdas as funções elementares seriam deriváveis. Não faremos isto, no momento, pois vamos antes desenvolver um pequeno algoritmo, que nos permite mais fâcilmente verificar quando uma função de variável complexa é derivável, por meio de relações entre suas componentes real e imaginária.

Com efeito, se  $f(z)$  é uma função da variável complexa  $z = x + iy$ , podemos decompô-la em sua parte real e imaginária, escrevendo:

$$f(z) = f(x + iy) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y) .$$

Lembremos que, se  $z_0 = x_0 + iy_0$ , temos:

$$\Re \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + bi \Leftrightarrow \Re \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a \quad \text{e} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b$$

Supondo, agora, que  $f$  seja derivável no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$ , vejamos o que isto acarreta para as funções  $u$  e  $v$ . Sendo  $Z = X + iY$  um número complexo, tem-se:

$$\frac{f(z_0 + Z) - f(z_0)}{Z} = \frac{u(x_0 + X, y_0 + Y) - u(x_0, y_0)}{X + iY} + i \frac{v(x_0 + X, y_0 + Y) - v(x_0, y_0)}{X + iY} \quad (\text{III.3})$$

Ora, quando  $Z \rightarrow 0$ , o 1º membro de (III.3) tem limite e êste limite é  $f'(z_0)$ , além disso,  $Z \rightarrow 0$  equivale a dizer que  $X \rightarrow 0$  e  $Y \rightarrow 0$ . Isto significa que a parte real e a parte imaginária do 2º membro em (III.3) têm limites para  $X \rightarrow 0$  e  $Y \rightarrow 0$ . Pode-se, portanto, calcular o limite dêste 2º membro, fazendo o



ponto  $(X,Y)$  tender à origem por caminhos particulares. Usemos dois destes caminhos, tomando inicialmente o ponto  $(X,Y)$  tendendo à origem sobre o eixo dos  $x$  ( $X \rightarrow 0, Y = 0$ ) e depois fazendo  $(X,Y)$  tender à origem sobre o eixo dos  $y$  ( $X = 0, Y \rightarrow 0$ ), obtendo, assim, respectivamente, os seguintes resultados: as funções  $u, v$  admitem derivadas parciais em relação a  $x$  e  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$  e:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (\text{III.3'})$$

donde concluímos que as funções  $u$  e  $v$  são deriváveis no ponto  $(x_0, y_0)$  e que, neste ponto, suas derivadas satisfazem às condições

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \quad (\text{III.4})$$

que são as chamadas condições ou equações de Cauchy-Riemann.

As condições (III.4) de Cauchy-Riemann válidas no ponto  $(x_0, y_0)$  são condições necessárias para que a função  $f = u + iv$  seja derivável em relação a  $z$  no ponto  $z_0$ . Pergunta-se: seriam estas também suficientes? Não, como se pode ver no exemplo dado pela função

$$f(z) = f(z + iy) = xy + i \sqrt[3]{xy}$$

com  $z_0 = 0$ . De fato, na origem, as funções  $u = xy$  e  $v = \sqrt[3]{xy}$  são deriváveis em relação a  $x$  e  $y$  e têm tôdas as derivadas nulas, satisfazendo, portanto, (III.4). O leitor pode, no entanto, verificar que o 2º membro de (III.3) não tem limite para

$X \rightarrow 0$  e  $Y \rightarrow 0$ , bastando comparar o resultado que se obtém fazendo  $(X, Y) \rightarrow (0, 0)$  sobre um dos eixos ou uma das diagonais ( $X = Y \rightarrow 0$ , por exemplo).

Este fato se dá porque, para mais de uma variável, a condição de derivabilidade é muito fraca. É preciso lançar mão de algo um pouco mais forte que é a diferenciabilidade. Usaremos o parágrafo seguinte para recordar este conceito, comparando-o com o de derivabilidade e enunciando resultados que utilizaremos adiante.

### Exercício

Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  derivável. Demonstrar que para todo ponto  $z_0 \in U$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ , existe uma vizinhança aberta  $U_0$  de  $z_0$  tal que a restrição de  $f$  a  $U_0$  leva  $U_0$  biunivocamente e bicontinua sobre um aberto  $V_0 \subset \mathbb{C}$ . A função inversa  $w \in V_0 \rightarrow z = f^{-1}(w) \in U_0$  é derivável. [Sugestão: Demonstrar que em todo ponto  $z \in U$  o jacobiano da transformação  $(x, y) \rightarrow f(z) = (u(x, y), v(x, y))$  é  $|f'(z)|^2$ ].

### III.4 - Funções diferenciáveis:

Neste parágrafo consideraremos funções de duas variáveis reais. Sejam portanto  $U$  um aberto do plano,  $(x_0, y_0) \in U$  um ponto deste aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida em  $U$  com valores reais ou complexos. Diz-se que  $f$  é diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$  se existem constantes  $a$  e  $b$ , e, uma função  $\varepsilon(X, Y)$  tais que:

$$f(x_0 + X, y_0 + Y) - f(x_0, y_0) = aX + bY + \varepsilon(X, Y) \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (\text{III.5})$$

e

$$\lim_{(X, Y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(X, Y) = 0.$$

É, então, fácil verificar que se  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ ,  $f$  será contínua, derivável e mais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b .$$

É interessante notar que o conceito de função diferenciável coincide com o de função derivável quando lidamos com funções de uma única variável real, mas para duas ou mais variáveis o conceito de função diferenciável é realmente mais forte do que o de função derivável, como se pode ver pela função

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

que é derivável na origem, mas não diferenciável. Aliás, a existência de derivadas parciais nem garante a continuidade da função como se vê pela função

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0, \quad \text{na origem.}$$

Lembramos, agora, um teorema que compara estas duas noções. Daremos somente seu enunciado:

Teorema - Se a função  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  tiver derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas numa vizinhança do ponto  $(x_0, y_0) \in U$ , então  $f$  é diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$ .

A seguir, demonstraremos o teorema que estabelece a relação entre os conceitos de derivabilidade complexa e diferenciabilidade real.

Teorema III.1 - A função  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , considerada como função da variável complexa  $z = x + iy$ , é derivável, em re-

que são funções contínuas em todo o plano e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann. A função exponencial é, portanto, analítica em todo o plano. Para o cálculo de sua derivada, lançamos mão de uma das fórmulas em (III.3') e obtemos:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z .$$

Mais tarde, veremos que o cálculo da derivada pode ser enquadrado num teorema mais geral; se uma função derivável de variável real  $f(x)$  pode ser estendida ao campo complexo de modo que  $f(z)$  seja derivável, então  $f'(z)$  será o prolongamento de  $f'(x)$ .

Usando as regras dl-5, concluímos que são analíticas, em todo o seu campo de definição, as funções construídas a partir da exponencial, pela composição de funções e pelas quatro operações de números complexos. Estão neste caso, por exemplo, as funções  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cosh z$ ,  $\operatorname{tg} z$ , ....

Façamos, a título de exemplo, o cálculo da derivada de  $\sin z$  como

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) , \\ (\sin z)' &= \frac{1}{2i}(i e^{iz} + i e^{-iz}) = \cos z , \end{aligned}$$

o que era esperado depois da observação acima e já que

$$(\sin x)' = \cos x .$$

O leitor poderá, como exercício, verificar as fórmulas seguintes, fazendo o cálculo diretamente pelas componentes reais de cada uma das funções e usando (III.3') ou pelas definições das funções, aplicando as regras dl-5:

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z} ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \operatorname{cosh} z ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tgh} z = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 z} ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cotg} z = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cosh} z = \operatorname{senh} z ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cotgh} z = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 z} .$$

Façamos agora algumas considerações sôbre os ramos (funções) associados a  $\operatorname{Log} z$  e a outras expressões multivalentes : afim de ver o que significa dizer que uma expressão multivalente é analítica. Dizemos que uma expressão multivalente é analítica "num ponto quando cada um de seus ramos - considerados numa vizinhança dêste ponto - é uma função analítica neste ponto".

Por exemplo, como  $z = \log w \Leftrightarrow w = e^z$  e como a função  $e^z$  é periódica com período  $2\pi i$ , se considerarmos como aberto  $U$  a faixa dos pontos  $z$  tais que:

$$a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ qualquer,}$$

neste aberto  $U$  a função exponencial é 1-1.

Por outro lado, se consideramos o aberto  $V$  do plano complexo definido por: (plano complexo menos a semi-reta de argumento  $a$  e a origem)

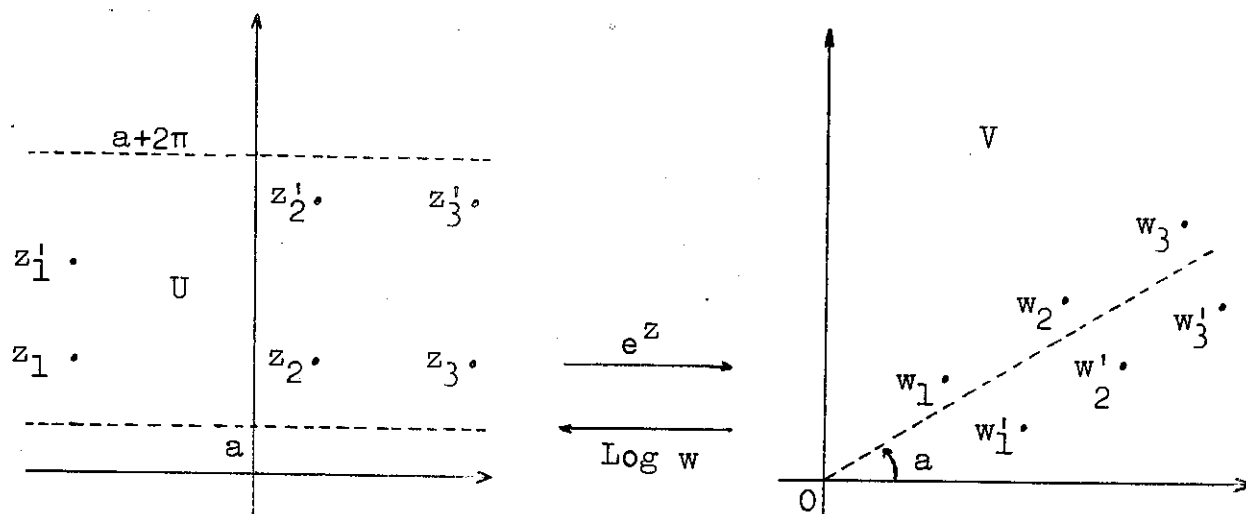
$$w \neq 0 \text{ e } a < \operatorname{Arg} w < a + 2\pi, \text{ isto é,}$$

$\operatorname{Arg} w$  admite um valor neste intervalo (por ora, quando escrevemos  $\operatorname{Arg} w$  estamos considerando somente um valor: êste pertencente ao intervalo  $]a, a+2\pi[$ ), teremos que todo  $w \in V$  é a exponencial de algum  $z \in U$  pois todo  $w$  de  $V$  possui um logaritmo em  $U$ , pre-

cisamente aquêlo dado por:

$z = \log |w| + i \text{Arg } w$  (o valor já destacado), e vice-versa, se  $z \in U$ , então  $e^z \in V$ .

Tem-se então que o aberto  $V$  é a imagem do aberto  $U$  pela função exponencial:



Como  $e^z$  é biunívoca, derivável em  $U$  com derivada  $\neq 0$  sua inversa  $\text{Log } w$  será derivável em  $V$  e sua derivada, calculada pelo teorema de derivação de função inversa, será:

$$(\text{Log } w)' = \frac{1}{(e^z)'}$$

em que  $z$  e  $w$  estão ligados por  $z = \text{Log } w$ , então:

$$(\text{Log } w)' = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{\text{Log } w}} = \frac{1}{w}$$

como no caso real.

Observa-se aqui que a derivada de  $\text{Log } w$  é  $\frac{1}{w}$ , independentemente do ramo que se considere.

Isto já não se dá com  $z^\alpha$ , em que  $\alpha \in \mathbb{C}$  é constante.

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z} ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \operatorname{cosh} z ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tgh} z = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 z} ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cotg} z = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cosh} z = \operatorname{senh} z ;$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cotgh} z = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 z} .$$

Façamos agora algumas considerações sôbre os ramos (funções) associados a  $\operatorname{Log} z$  e a outras expressões multivalentes : afim de ver o que significa dizer que uma expressão multivalente é analítica. Dizemos que uma expressão multivalente é analítica "num ponto quando cada um de seus ramos - considerados numa vizinhança dêste ponto - é uma função analítica neste ponto".

Por exemplo, como  $z = \log w \Leftrightarrow w = e^z$  e como a função  $e^z$  é periódica com período  $2\pi i$ , se considerarmos como aberto  $U$  a faixa dos pontos  $z$  tais que:

$$a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi, \text{ com } a \in \mathfrak{R} \text{ qualquer,}$$

neste aberto  $U$  a função exponencial é 1-1.

Por outro lado, se consideramos o aberto  $V$  do plano complexo definido por: (plano complexo menos a semi-reta de argumento  $a$  e a origem)

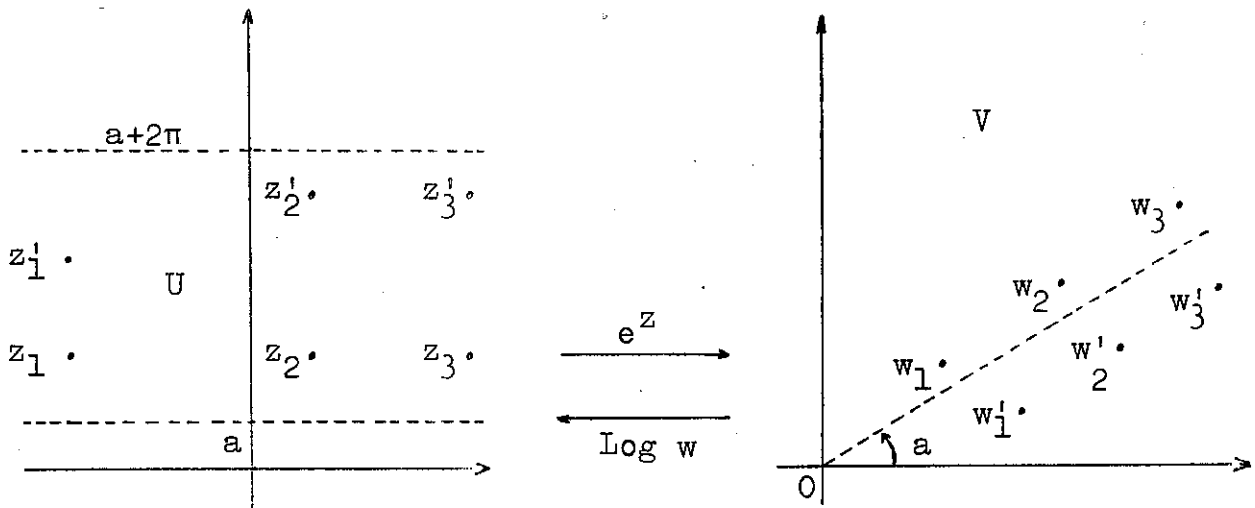
$$w \neq 0 \text{ e } a < \operatorname{Arg} w < a + 2\pi, \text{ isto é,}$$

$\operatorname{Arg} w$  admite um valor neste intervalo (por ora, quando escrevemos  $\operatorname{Arg} w$  estamos considerando sômente um valor: êste pertencente ao intervalo  $]a, a+2\pi[$ ), teremos que todo  $w \in V$  é a exponencial de algum  $z \in U$  pois todo  $w$  de  $V$  possui um logaritmo em  $U$ , pre-

cisamente aquêles dado por:

$z = \log|w| + i \text{Arg } w$  (o valor já destacado), e vice-versa, se  $z \in U$ , então  $e^z \in V$ .

Tem-se então que o aberto  $V$  é a imagem do aberto  $U$  pela função exponencial:



Como  $e^z$  é biunívoca, derivável em  $U$  com derivada  $\neq 0$  sua inversa  $\text{Log } w$  será derivável em  $V$  e sua derivada, calculada pelo teorema de derivação de função inversa, será:

$$(\text{Log } w)' = \frac{1}{(e^z)'} ,$$

em que  $z$  e  $w$  estão ligados por  $z = \text{Log } w$ , então:

$$(\text{Log } w)' = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{\text{Log } w}} = \frac{1}{w} ,$$

como no caso real.

Observa-se aqui que a derivada de  $\text{Log } w$  é  $\frac{1}{w}$ , independentemente do ramo que se considere.

Isto já não se dá com  $z^\alpha$ , em que  $\alpha \in \mathbb{C}$  é constante.



De fato, formalmente, conserva-se a analogia com os reais:

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1},$$

mas esta igualdade devendo ser entendida como igualdade entre expressões multivalentes, isto é, dado um ramo de  $z^\alpha$  sua derivada é um ramo de  $\alpha z^{\alpha-1}$  e, vice-versa, dado um ramo de  $\alpha z^{\alpha-1}$  êle é a derivada de algum ramo de  $z^\alpha$ .

O lêitor pode recorrer às definições de  $z^\alpha$ ,  $a^z$ ,  $\text{arc sen } z$ ,  $\text{arc tg } z$ , para verificar a fórmula acima e as seguintes:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} a^z &= a^z \text{Log } a ; \\ \frac{d}{dz} (\text{arc sen } z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} ; \\ \frac{d}{dz} (\text{arc tg } z) &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\end{aligned}$$

tôdas elas análogas ao caso real, mas devendo ser convenientemente interpretadas como relações que envolvem expressões multivalentes.

### Exercícios

1) Mostrar que  $f'(z)$  não existe em nenhum ponto do plano se:

a)  $f(z) = \bar{z}$

b)  $f(z) = z - \bar{z}$

c)  $f(z) = 2x + xy^2i$

d)  $f(z) = e^x (\cos y - i \text{ sen } y)$

2) Mostrar que  $f'(z)$  e sua derivada  $f''(z)$  existem em todo o plano e calcular  $f'(z)$  e  $f''(z)$  quando:

a)  $f(z) = iz + 2$

b)  $f(z) = e^{-x} (\cos y - i \text{ sen } y)$

c)  $f(z) = z^3$

d)  $f(z) = \cos x \cosh y -$

$- i \text{ senh } x \text{ senh } y.$

3) Verificar quando existe e calcular  $f'(z)$  quando existir se:

a)  $f(z) = 2x + ixy^2$

e)  $f(z) = x^2 + iy^2$

b)  $f(z) = xy + iy$

f)  $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$

c)  $f(z) = z \bar{z}$

g)  $f(z) = e^y(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

d)  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

4) Provar que as seguintes funções são analíticas em todo o plano:

a)  $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ ;

b)  $f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \cosh y$  ;

c)  $f(z) = e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x)$ ;

d)  $f(z) = (z^2 - 2) e^{-x} (\cos y - i \operatorname{sen} y)$

5) Mostrar que se as funções  $f(z) = u + iv$  e  $g(z) = \overline{f(z)}$  são simultâneamente analíticas num aberto  $U$  serão constantes em  $U$ .

### III.6 - Funções harmônicas.

Seja  $D$  uma região do plano, isto é, um aberto conexo.

Uma função real ou complexa  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , definida e derivável (até 2a. ordem, pelo menos) em  $D$ , diz-se uma função harmônica se, e só se, satisfizer à equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

ou  $\Delta u = 0$  se definimos o laplaciano de  $u$ ,  $\Delta u$ , como:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Proposição - Se a função  $f:D \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica em  $D$ , então sua parte real e parte imaginária são funções harmônicas.

Demonstração: Se  $f = u + iv$  é uma função analítica, então, ela é uma função infinitamente derivável, (ver IV.8) logo também o serão as funções reais  $u$  e  $v$ . Além disso, as funções  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (III.4):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

derivando a 1a. delas em relação a  $x$  e a segunda em relação a  $y$  e somando teremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

já que as derivadas no 2º membro são contínuas sendo, portanto, iguais.

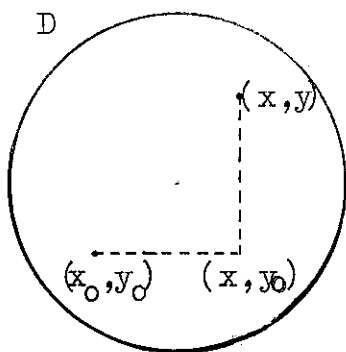
Analogamente, obtém-se, para  $v$ ,  $\Delta v = 0$  se derivarmos a 1a. das equações (III.4) em relação a  $y$ , a 2a. em relação a  $x$  e subtrairmos a 2a. da 1a.

Na realidade, a relação entre funções analíticas e funções harmônicas é mais forte ainda, como se vê no seguinte teorema.

Teorema - Seja  $D$  uma região simplesmente conexa (ver IV.4). Se  $u:D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica em  $D$ , então existe uma função harmônica  $v:D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a função  $f:D \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $f = u + iv$  é uma função analítica. E mais: a função  $v$  está univocamente determinada a menos de uma constante aditiva.

Demonstração: Em primeiro lugar, consideremos o caso em que  $D$  é um círculo. Se existir a função  $v$ , ela deve ser





tal que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

isto é, se existir  $v$  e se  $(x_0, y_0)$  é um ponto do círculo  $D$  então, certamente,  $v$  será tal que:

$$v(x, y) = v(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial v}{\partial y}(x, t) dt = v(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt$$

e pela segunda equação:

$$v(x, y_0) = v(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial x}(s, y_0) ds = v(x_0, y_0) - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds$$

Assim, teríamos para  $v$  a expressão:

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt \quad (\text{III.8})$$

Isto já nos mostra que, se existir, a função  $v$  está definida unívocamente a menos da constante aditiva  $v(x_0, y_0)$ . Mostremos agora que se  $u$  é harmônica, a função  $v$  definida em (III.8) é tal que  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann: de fato,

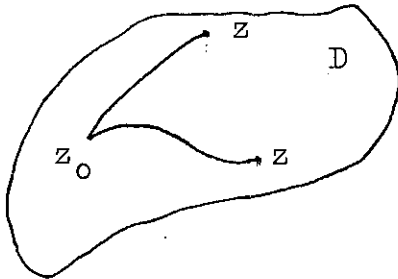
$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dt = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

e ainda:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) .$$

Está demonstrado o teorema para o caso do círculo.

No caso de  $D$  qualquer, considera-se para definição de  $v$ , não mais o caminho



$(x_0, y_0) \rightarrow (x, y_0) \rightarrow (x, y)$  que pode não estar contido em  $D$ , mas substitui-se este por outro caminho liso por partes que vá de  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$

e tomam-se integrais curvilíneas (ver IV.1 e IV.2 para a definição de "caminho" e "integral curvilínea").

Um exemplo nos mostrará que a hipótese de que  $D$  seja simplesmente conexo é essencial neste teorema: tomemos como  $u$  a função real (univalente), definida e harmônica plano menos a origem:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} (\operatorname{Log}(x + iy)) = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$$

sabemos que a função  $v$  tal que  $u + iv$  seja analítica,  $v = \operatorname{Im} (\operatorname{Log}(x + iy))$  não é univalente.

Se as funções harmônicas  $u$  e  $v$  satisfazem, nesta ordem, as equações de Cauchy-Riemann (III.4), elas se dizem funções harmônicas conjugadas.

### Exercícios

1) Verificar que cada uma das funções abaixo é harmônica e calcular a função harmônica conjugada:

a)  $u = x + y$  ;

b)  $u = x^2 - y^2$  ;

c)  $u = xy$  .

- 2) Demonstrar o teorema precedente usando o teorema de Green (ver IV.4).
- 3) Mostrar que, se  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  são funções harmônicas conjugadas, então  $v(x,y)$  e  $-u(x,y)$  também são harmônicas conjugadas.
- 4) Mostrar que, a função  $u(x,y)$  é harmônica em algum domínio e achar uma harmônica conjugada  $v$ , quando:
- a)  $u = 2x(1 - y)$                       Resp:  $(v = x^2 - y^2 + 2y)$
- b)  $u = 2x - x^3 + 3xy^2$
- c)  $u = \sinh x \operatorname{sen} y$                       Resp:  $(v = -\cosh x \cos y)$
- d)  $u = y(x^2 + y^2)^{-1}$ .

Capítulo IV

INTEGRAL COMPLEXA

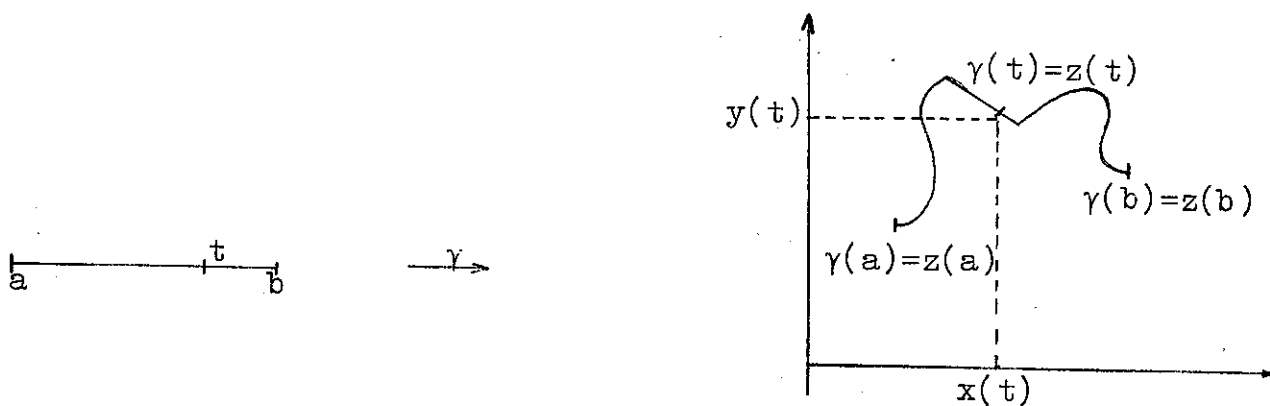
IV.1 - Curvas no plano complexo.

Para funções complexas, vamos definir integrais curvilíneas  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . Façamos, para isto, uma introdução a fim de estabelecer algumas notações a respeito de curvas.

Definição - Chamaremos de curva do plano complexo a uma função contínua  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$  definida num intervalo  $[a,b]$  da reta e com valores no plano complexo. Se  $t \in [a,b]$ , o ponto  $\gamma(t) \in \mathbb{C}$  será indicado de uma das seguintes maneiras:

$$\gamma(t) = z(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + i y(t) .$$

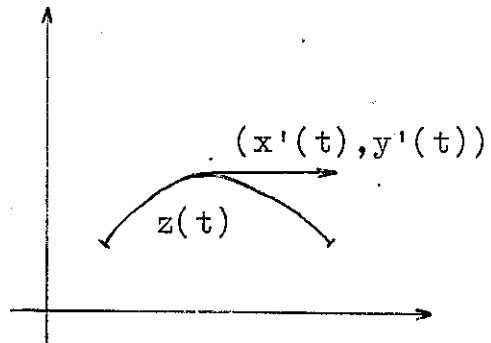
As funções reais  $x(t)$  e  $y(t)$ , componentes da curva  $\gamma$ , são funções contínuas.



Uma tal curva diz-se uma curva lisa se as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são deriváveis em  $[a,b]$  e se suas derivadas são contínuas e não se anulam simultaneamente no mesmo ponto. Isto é, existem e

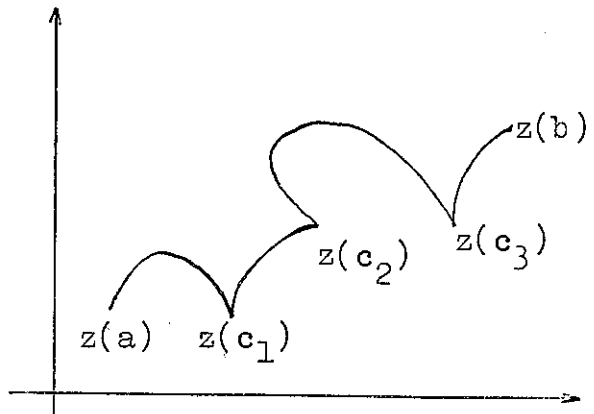
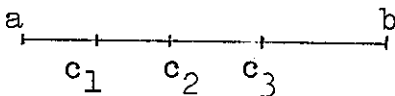


são contínuas as derivadas de  $x'(t)$  e  $y'(t)$  e, para cada  $t$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ . Neste caso, a curva  $\gamma$  admite tangente em cada ponto, de fato, em cada ponto  $\gamma(t) = z(t)$ , o vetor  $(x'(t), y'(t))$  é tangente à curva  $\gamma$ :



Assim,  $\gamma$  é uma curva lisa quando, e só quando, existe e é contínua a derivada  $\gamma'(t) (= z'(t))$  e esta nunca se anula:  $z'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Uma curva diz-se uma curva lisa por partes se for possível subdividir o intervalo  $[a, b]$  em um número finito de intervalos, em cada um dos quais a função  $\gamma$  seja uma curva lisa.



Nos pontos  $c_i$ , existem as derivadas à esquerda e à direita,  $z'(c_{i-})$  e  $z'(c_{i+})$ , no entanto  $z'(c_{i-}) \neq z'(c_{i+})$ .

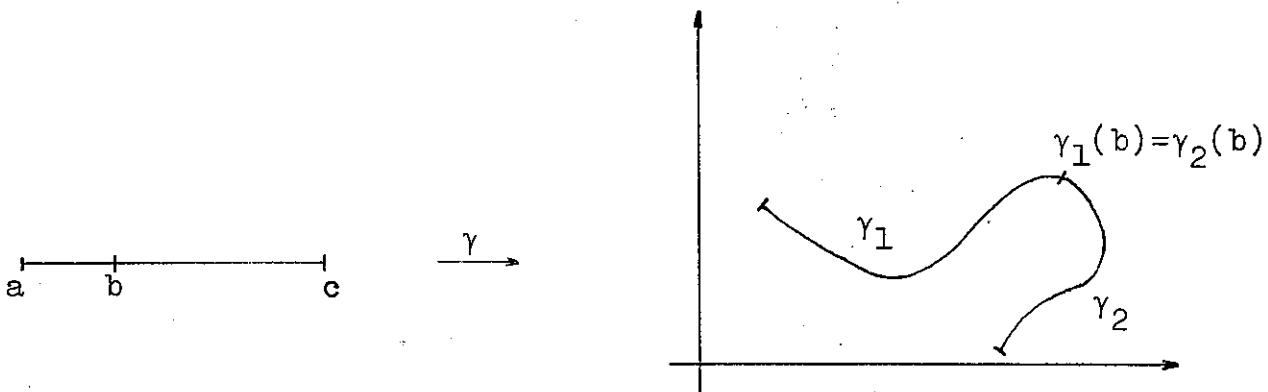
Lembremos que, se  $\gamma$  é uma curva lisa ou lisa por partes -  $z'(t)$  é contínua em todo o  $[a, b]$  ou contínua em  $[a, b]$  com exceção de um número finito de pontos - o comprimento de  $\gamma$ , que se indica com  $|\gamma|$ , é dado por

$$|\gamma| = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |x'(t)^2 + y'(t)^2|^{\frac{1}{2}} dt \quad (\text{IV.1})$$

Dadas duas curvas  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$  definidas em dois intervalos consecutivos e tais que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , podemos definir uma curva  $\gamma: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$  que vamos indicar com

$\gamma_1 + \gamma_2$ , pondo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \text{ quando } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & , \text{ quando } t \in [b, c] \end{cases}$$

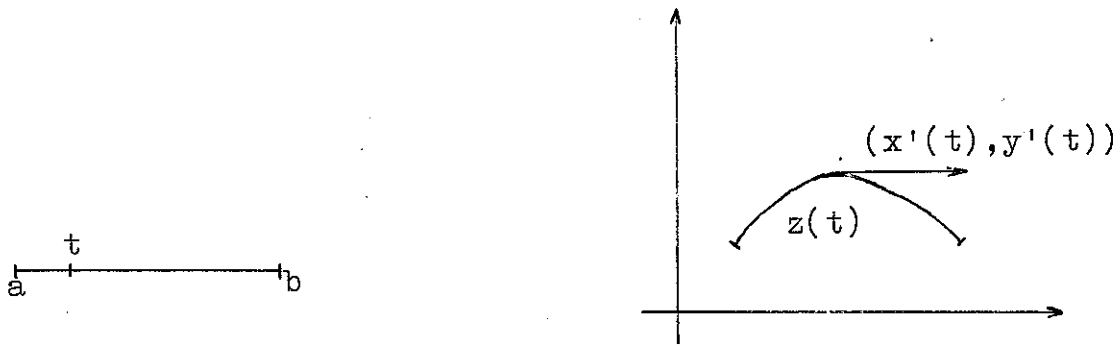


Obviamente,  $\gamma$  é uma função contínua. Sempre que escrevermos  $\gamma_1 + \gamma_2$  fica subentendido que estão satisfeitas as condições que possibilitam a construção da curva soma. Está, portanto, definida a soma  $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$  de  $n$  curvas tais que

$$\gamma_i: [b_{i-1}, b_i] \rightarrow \mathbb{C} \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{e} \quad \gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(b_i) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

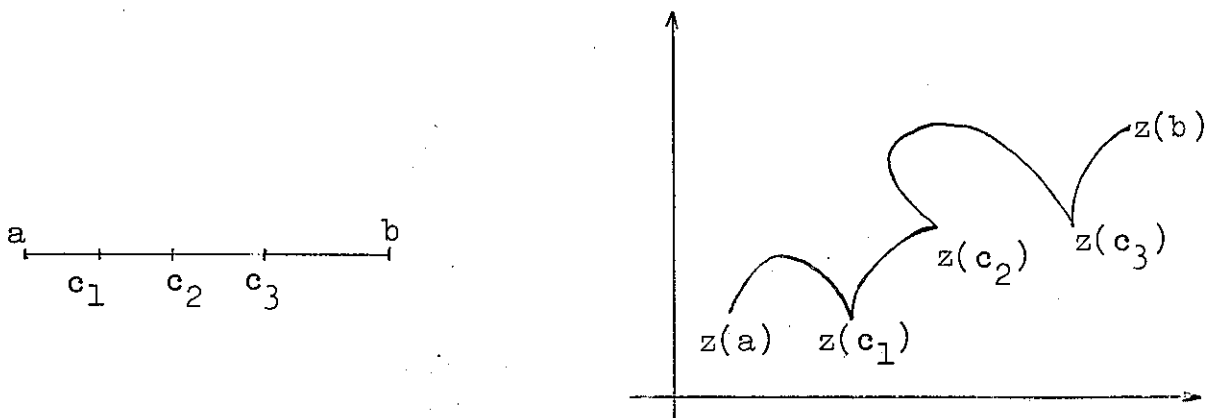
Dadas duas curvas  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  de modo

são contínuas as derivadas de  $x'(t)$  e  $y'(t)$  e, para cada  $t$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ . Neste caso, a curva  $\gamma$  admite tangente em cada ponto, de fato, em cada ponto  $\gamma(t) = z(t)$ , o vetor  $(x'(t), y'(t))$  é tangente à curva  $\gamma$ :



Assim,  $\gamma$  é uma curva lisa quando, e só quando, existe e é contínua a derivada  $\gamma'(t) (= z'(t))$  e esta nunca se anula:  $z'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Uma curva diz-se uma curva lisa por partes se for possível subdividir o intervalo  $[a, b]$  em um número finito de intervalos, em cada um dos quais a função  $\gamma$  seja uma curva lisa.



Nos pontos  $c_i$ , existem as derivadas à esquerda e à direita,  $z'(c_{i-})$  e  $z'(c_{i+})$ , no entanto  $z'(c_{1-}) \neq z'(c_{1+})$ .

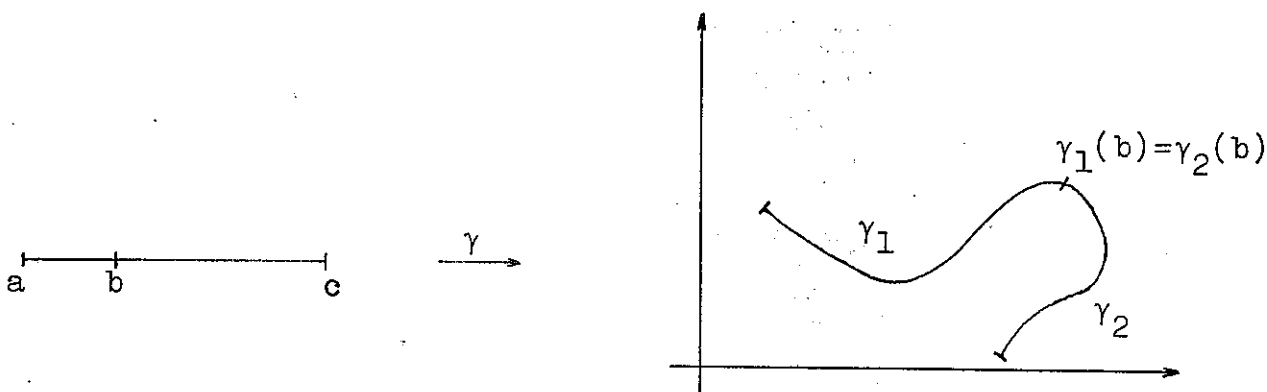
Lembremos que, se  $\gamma$  é uma curva lisa ou lisa por partes -  $z'(t)$  é contínua em todo o  $[a,b]$  ou contínua em  $[a,b]$  com exceção de um número finito de pontos - o comprimento de  $\gamma$ , que se indica com  $|\gamma|$ , é dado por

$$|\gamma| = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |x'(t)^2 + y'(t)^2|^{\frac{1}{2}} dt \quad (\text{IV.1})$$

Dadas duas curvas  $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2: [b,c] \rightarrow \mathbb{C}$  definidas em dois intervalos consecutivos e tais que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , podemos definir uma curva  $\gamma: [a,c] \rightarrow \mathbb{C}$  que vamos indicar com

$\gamma_1 + \gamma_2$ , pondo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \text{ quando } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & , \text{ quando } t \in [b,c] \end{cases}$$

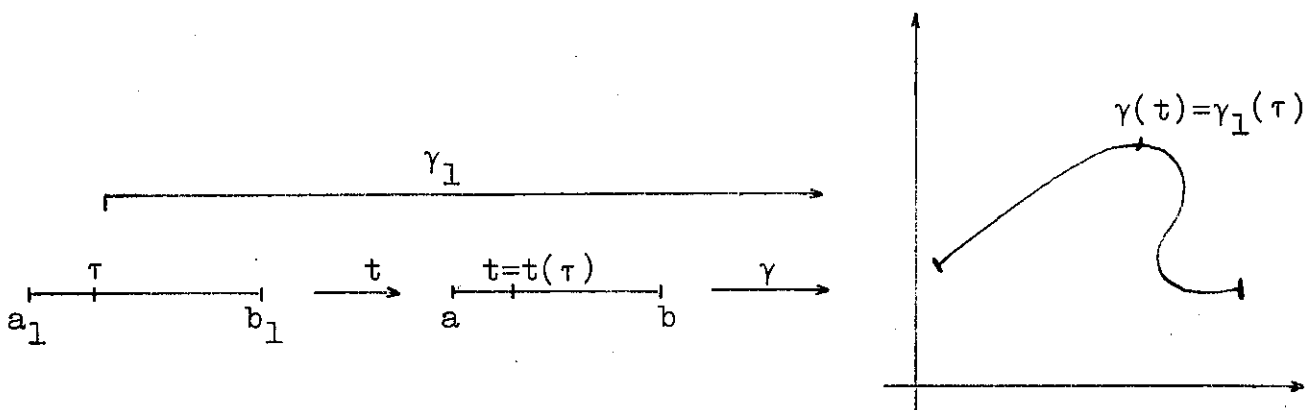


Obviamente,  $\gamma$  é uma função contínua. Sempre que escrevermos  $\gamma_1 + \gamma_2$  fica subentendido que estão satisfeitas as condições que possibilitam a construção da curva soma. Está, portanto, definida a soma  $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$  de  $n$  curvas tais que

$$\gamma_i: [b_{i-1}, b_i] \rightarrow \mathbb{C} \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{e} \quad \gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(b_i) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

Dadas duas curvas  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$  de modo

que exista uma aplicação  $t: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$  biunívoca, contínua e crescente e que se tenha para todo  $\tau \in [a_1, b_1] : \gamma(t(\tau)) = \gamma_1(\tau)$ ,



e se  $\gamma_1(\tau) = z_1(\tau) = (x_1(\tau), y_1(\tau))$  e  $\gamma(t) = z(t) = (z(t), y(t))$ , diz-se que  $z_1(\tau)$  e  $z(t)$  são parametrizações diferentes da mesma curva ( $\gamma$  ou  $\gamma_1$ ) e que a função  $t(\tau)$  é a mudança de parâmetro.

Costuma-se também chamar uma curva de arco ou caminho.

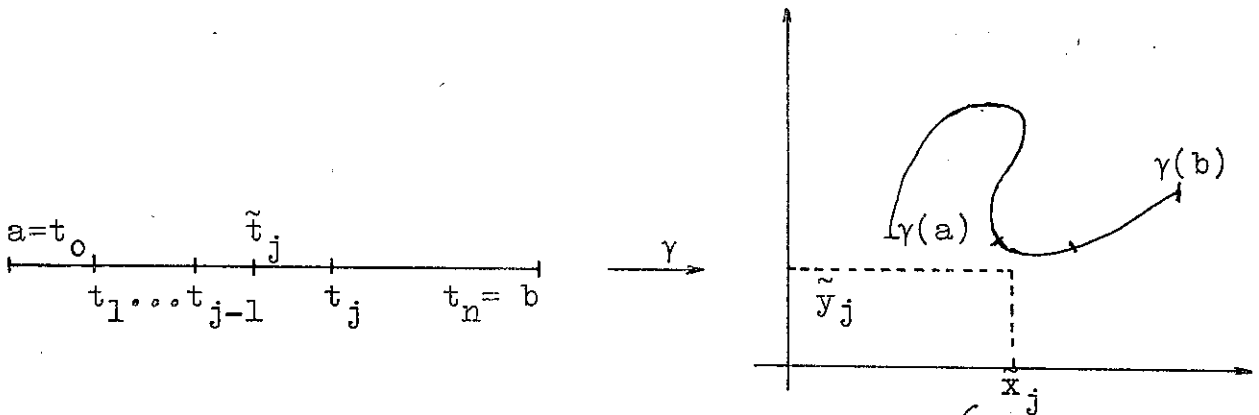
Os pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  dizem-se, respectivamente, ponto inicial e final de  $\gamma$  ou, simplesmente, extremidades de  $\gamma$ .

#### IV.2 - Integrais curvilíneas reais

Lembremos a definição de integral curvilínea de funções reais para facilitar a comparação com o que faremos no caso complexo. Citaremos também resultados que nos serão úteis nos próximos parágrafos.

Sejam  $\gamma$  uma curva do plano,  $f$  e  $g$  funções definidas sobre os pontos da imagem de  $\gamma$ .





Vamos definir a integral curvilínea  $\int_{\gamma} f(x,y) dg(x,y)$ . Partimos tomando subdivisão  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  do intervalo  $[a,b]$  e sejam, correspondentemente a esta subdivisão:

$$\delta = \sup_{j=1, \dots, n} (t_j - t_{j-1}), \quad x_j = x(t_j), \quad y_j = y(t_j) \quad \text{e}$$

$$\Delta g_j = g(x_j, y_j) - g(x_{j-1}, y_{j-1}) .$$

Sendo  $\tilde{t}_j$  um ponto qualquer do intervalo  $[t_{j-1}, t_j]$ , ponhamos  $\tilde{x}_j = x(\tilde{t}_j)$  e  $\tilde{y}_j = y(\tilde{t}_j)$  e consideremos a seguinte soma tória:

$$\sum_{j=1}^n f(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \Delta g_j .$$

Se existir o limite das somas dêste tipo quando se consideram tôdas as subdivisões possíveis tomados os  $\tilde{t}_j$  de todos os modos, limite êste para  $\delta$  tendendo a zero, o valor dêste limite é a integral curvilínea, ao longo de  $\gamma$ , de  $fdg$ .

Exemplos: Como exemplos, lembramos os seguintes resultados:

1º) Se a função  $t \rightarrow f(x(t), y(t))$  é contínua em  $[a,b]$  e a função  $t \rightarrow g(x(t), y(t))$  é derivável em  $[a,b]$ , então existe a integral curvilínea que pode ser calculada por meio de uma integral

comum segundo a fórmula:

$$\int_{\gamma} f(x,y) dg(x,y) = \int_a^b f(x(t),y(t)) \frac{d}{dt} g(x(t),y(t)) dt \quad (IV.2)$$

2ª) Se as funções  $P$  e  $Q$  são definidas e contínuas na imagem da curva  $\gamma$  e esta é lisa por partes, então existe a integral curvilínea, sobre  $\gamma$ , de  $Pdx + Qdy$ , cujo cálculo pode também ser feito por meio de integral comum:

$$\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x(t),y(t)] x'(t) + Q[x(t),y(t)] y'(t)\} dt \quad (IV.3)$$

Pomos, por definição:

$$\int_{-\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_b^a \{P[x(t),y(t)] x'(t) + Q[x(t),y(t)] y'(t)\} dt$$

e então:

$$\int_{-\gamma} Pdx + Qdy = - \int_{\gamma} Pdx + Qdy \quad (IV.4)$$

Observações: 1) Se nós interpretarmos  $\gamma$  como um "caminho orientado", percorrido de  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  então  $-\gamma$  será considerado como percorrido de  $\gamma(b)$  a  $\gamma(a)$ . Naturalmente como nós só vamos usar caminhos para considerar integrais curvilíneas sobre eles, então basta a definição (IV.4) e podemos prescindir de discutir caminhos orientados.

2) Recordemos também que a existência e o valor da integral curvilínea  $\int_{\gamma} f(x,y) dg(x,y)$  é invariante por mudanças de parâmetro do tipo descrito no parágrafo anterior, isto é, conservando



aquele notação, onde  $\gamma(t(\tau)) = \gamma_1(\tau)$ ,

$$\int_{\gamma} f(x,y) dg(x,y) = \int_{\gamma_1} f(x,y) dg(x,y) .$$

3) Daí segue em particular que quando a imagem de  $\gamma$  fôr um segmento,  $\int_{\gamma} f(x,y) dg(x,y)$  só depende do sentido em que  $\gamma$  é percorrido e não da representação paramétrica do segmento. O mesmo, portanto, também vale para uma linha poligonal ou uma reunião de linhas poligonais: a integral só depende dos segmentos e do número de vezes que êles são percorridos em cada sentido.

### Exercício

Demonstrar que dado um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , então  $\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  (onde  $\gamma$  é uma curva lisa por partes em  $\Omega$ ) só depende dos pontos inicial e final de  $\gamma$  se e somente se existir uma função  $U$  definida em  $\Omega$  e tal que  $\frac{\partial U}{\partial x} = P$  e  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ . Diz-se então que  $P dx + Q dy$  é um diferencial exato em  $\Omega$ .

### IV.3 - Integral de funções de variável complexa

Para definir  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $\gamma$  é uma curva no plano complexo e  $f$  uma função definida na imagem de  $\gamma$ , procedemos de modo análogo ao que se fez com funções de variáveis reais:

se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva em questão, considera-se uma subdivisão do intervalo  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  e tomam-se pontos  $\tilde{t}_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ .

Sejam  $\delta = \sup_{j=1, \dots, n} [t_j - t_{j-1}]$ ,  $z_j = z(t_j) = \gamma(t_j)$ ,

$\tilde{z}_j = z(\tilde{t}_j) = \gamma(\tilde{t}_j)$  e  $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ . Tomadas as somatórias

$$\sum_{j=1}^n f(\tilde{z}_j) \Delta z_j$$

de todos os modos possíveis e se existir seu limite para  $\delta \rightarrow 0$  a função  $f$  diz-se integrável sôbre  $\gamma$  e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(\tilde{z}_j) \Delta z_j. \quad (\text{IV.5})$$

Com esta definição, poderíamos elaborar condições sôbre  $f$  e  $\gamma$  para a existência do limite em (IV.5) e, por conseguinte, da integral de  $f$  sôbre  $\gamma$ . Deixaremos de fazê-lo preferindo reduzir a situação para o caso real, tomando as componentes de  $f$  e de  $\gamma$ . Com efeito, se  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $\tilde{z}_j = (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$  e

$\Delta z_j = \Delta x_j + i \Delta y_j$ , tem-se, para cada divisão e cada escolha dos  $\tilde{z}_j$ :

$$\sum_{j=1}^n f(\tilde{z}_j) \Delta z_j = \sum_{j=1}^n [u(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \Delta x_j - v(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \Delta y_j] + \\ + \sum_{j=1}^n [v(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \Delta x_j + u(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \Delta y_j]$$

e, como o 1º membro terá limite se, e somente se, a parte real e a parte imaginária do 2º membro tiverem limites e ainda estes limites são, respectivamente, as integrais curvilíneas, sobre  $\gamma$ , de  $u dx - v dy$  e  $v dx + u dy$ , conclui-se que a função  $f$  é integrável sobre a curva  $\gamma$  se, e somente se, fôrem integráveis, sobre  $\gamma$ , as formas  $u dx - v dy$  e  $v dx + u dy$  e, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x,y) dx - v(x,y) dy + i \int_{\gamma} v(x,y) dx + u(x,y) dy \quad (\text{IV.6})$$

Assim sendo, no caso em que a curva  $\gamma$  for uma curva lisa por partes e as funções  $u$  e  $v$  forem contínuas sobre  $\gamma$  (o que equivale a dizer que  $f$  é uma função contínua sobre  $\gamma$ ) existe a integral e pode ser calculada por meio de integrais comuns, de (IV.6) e (IV.3):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \{u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t)\} dt + \\ + \int_a^b \{v[x(t), y(t)] x'(t) + u[x(t), y(t)] y'(t)\} dt ,$$

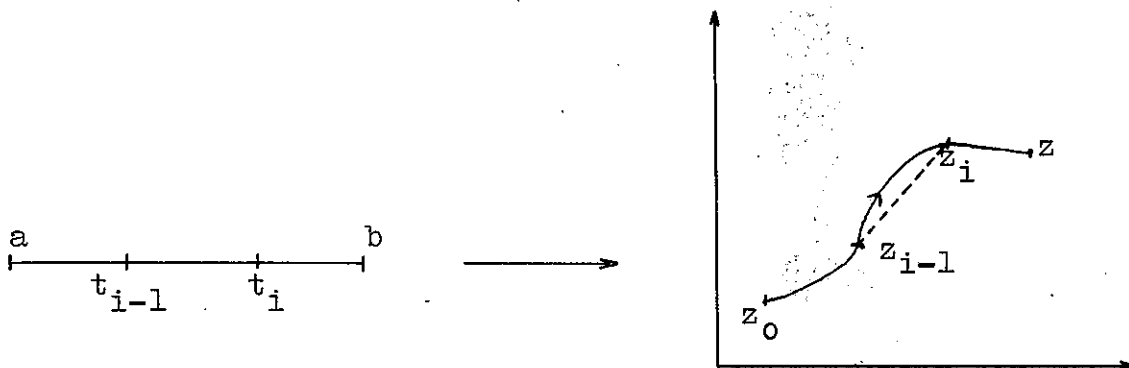
ou seja, como  $\gamma(t) = z(t) = x(t) + i y(t)$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z(t)) z'(t) dt . \quad (\text{IV.7})$$

Exemplos:

1) Seja  $\gamma$  um caminho liso por partes com ponto inicial  $z_0$  e extremidade  $z$ , calculemos

$$\int_{\gamma} dz .$$



Como  $\gamma$  é lisa por partes e  $f(z) \equiv 1$  é contínua, a integral existe. Para o cálculo de seu valor recorramos, a título de exemplo, à definição da integral,

$$\sum_{j=1}^n \Delta z_j = \sum_{j=1}^n (z_j - z_{j-1}) = z - z_0 ,$$

donde  $\int_{\gamma} dz = z - z_0$ , e, como o seu valor depende tão somente dos pontos extremos  $z_0$  e  $z$ , pode-se escrever

$$\int_{z_0}^z dz = z - z_0 .$$

2) Sôbre o mesmo arco  $\gamma$ , calculemos  $\int_{\gamma} z dz$ . De acôrdo com a notação, até agora utilizada, tomemos uma subdivisão do intervalo  $[a, b]$  e, como  $\tilde{t}_j$  consideremos primeiramente  $t_{j-1}$  e depois  $t_j$ , obtendo assim, duas somas:

$$S_1 = \sum_{j=1}^n \tilde{z}_j \Delta z_j = \sum_{j=1}^n z_{j-1} (z_j - z_{j-1})$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^n \tilde{z}_j \Delta z_j = \sum_{j=1}^n z_j (z_j - z_{j-1})$$

Ora, a função  $f(z) = z$  é contínua em todo o plano, então existe a integral, logo  $S_1$  e  $S_2$  têm limites - e o mesmo limite - para  $\delta \rightarrow 0$ , logo  $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$  também tenderá a este limite que é o valor da integral em questão, mas

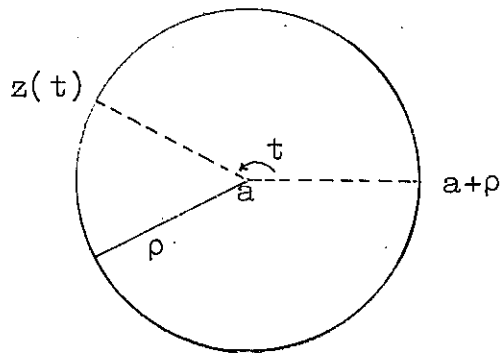
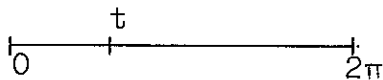
$$\frac{1}{2} (S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (z_j^2 - z_{j-1}^2) = \frac{1}{2} [z^2 - z_0^2],$$

então,  $\int_{\gamma} z dz = \frac{1}{2} [z^2 - z_0^2]$ . Mais uma vez, a integral independe do particular caminho liso por partes que une os pontos  $z_0$  e  $z$ ; podemos então escrever

$$\int_{z_0}^z z dz = \frac{1}{2} [z^2 - z_0^2].$$

3) Sendo  $a \in \mathbb{C}$  e  $\rho > 0$ , indicamos com  $\gamma_{\rho, a}$  o seguinte caminho:

$$\gamma_{\rho, a}: t \in [0, 2\pi] \longrightarrow z(t) = a + \rho e^{it}$$



a imagem de  $\gamma_{\rho, a}$  é a circunferência de centro  $a$  e raio  $\rho$ , o sentido de percurso - para  $t$  crescendo - é o sentido anti-horário. Calculemos

$$\int_{\gamma_{\rho, a}} \frac{dz}{z - a}$$

Como  $z(t) - a = \rho e^{it}$  e  $z'(t) = i \rho e^{it}$ , usando a fórmula (IV.7),

$$\int_{\gamma_{\rho,a}} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)}{z(t)-a} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i \rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = 2\pi i .$$

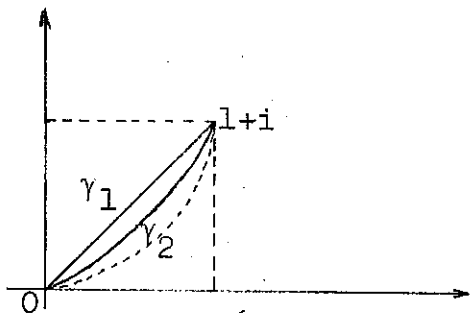
As integrais que estamos considerando são invariantes por mudança de parâmetros, podemos portanto deixar de especificar qual a parametrização da circunferência em questão, bastando indicar o sentido do percurso. No que segue, salvo citação em contrário, estaremos tomando como sentido positivo de percurso de uma circunferência o sentido anti-horário e com esta convenção, escrevemos sempre  $\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$  para indicar  $\int_{\gamma_{\rho,a}} f(z)dz$ .

### Exercícios

1) Mostrar que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 1 & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1, n \in \mathbb{Z} . \end{cases}$

2) Para cada  $n=1,2,3,\dots$  consideremos o arco

$$\gamma_n: t \in [0,1] \rightarrow z_n(t) = (t, t^n) = t + i t^n ,$$



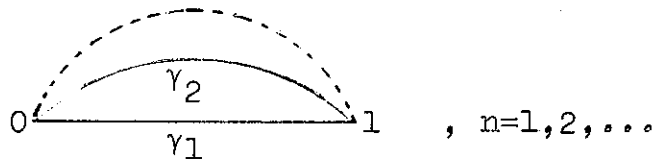
calcular  $\int_{\gamma_n} \bar{z} dz$ ,  $\int_{\gamma_n} z dz$ .

(Resp.  $\int_{\gamma_n} \bar{z} dz = 1 + i \frac{n-1}{n+1}$ ;  $\int_{\gamma_n} z dz = \frac{(1+i)^2}{2}$  )

3) Idem, idem,

sendo  $\gamma_n$  o caminho definido como:

$$\gamma_n: t \in [0, 1] \longrightarrow z_n(t) = (t, t-t^n) = t + i(t-t^n),$$



4) Sendo  $\gamma(r)$  o arco de circunferência  $|z| = r$  contido no semi-plano  $\text{Im } z \geq 0$  e percorrido no sentido anti-horário, calcular

$$F(r) = \int_{\gamma(r)} (z - \bar{z}) dz .$$

5) Sendo  $\gamma$  o arco de elipse  $x^2/4 + y^2 = 1$  contido no 1º quadrante, do ponto 2 ao ponto  $i$ , calcular  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ .

Enunciámos a seguir propriedades formais da integral complexa:

i1. Se  $f$  é integrável ao longo de  $\gamma$  e  $c \in \mathbb{C}$  é uma constante, a função  $cf$  será integrável sobre  $\gamma$  e

$$\int_{\gamma} cf(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz ;$$

i2. Se  $f$  e  $g$  são funções integráveis sobre a curva  $\gamma$ , então sua forma  $f+g$  também o será e

$$\int_{\gamma} [f(z) + g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz ;$$

i3. Se  $f$  é integrável ao longo de  $\gamma$ , então pela definição dada em IV.2 de integral sobre  $-\gamma$  e, levando em conta (IV.6) e (IV.4), tem-se:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz ;$$

i4. Se  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são curvas tais que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  e se  $f$  é uma função integrável ao longo de  $\gamma_1$  e ao longo de  $\gamma_2$ , então  $f$  será integrável sobre  $\gamma$  o:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz ;$$

i5. Se  $\gamma$  é uma curva lisa por partes e  $f$  é uma função contínua nos pontos de  $\gamma$  (isto é, contínua na imagem de  $\gamma$ ), então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq |\gamma| \sup_{\gamma} |f(z)| .$$

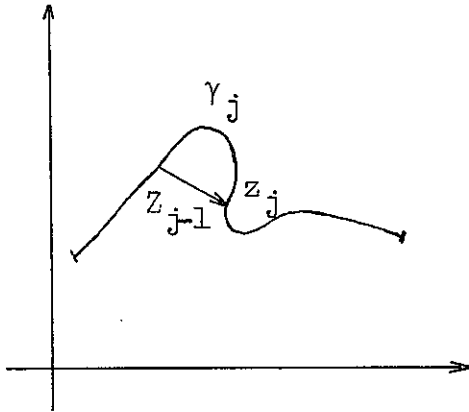
Note-se que as hipóteses feitas garantem a existência da integral do 1º membro como foi visto acima, está também definido o comprimento de  $\gamma$ ,  $|\gamma|$ , e o  $\sup_{\gamma} |f(z)|$  é finito pois  $f$  é uma função contínua sobre a imagem de  $\gamma$  e esta imagem é um conjunto fechado e limitado. Para demonstrar a relação acima, lembremos que a integral foi definida como um limite de somatórias do tipo

$$\sum_{j=1}^n f(\tilde{z}_j) (z_j - z_{j-1}) ,$$

bastante, portanto, verificar que estas somas são, em módulo, majoradas pela expressão do 2º membro da referida relação. Com efeito,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(\tilde{z}_j) (z_j - z_{j-1}) \right| &\leq \sum_{j=1}^n |f(\tilde{z}_j)| |z_j - z_{j-1}| \leq \\ &\leq \sup_{\gamma} |f(z)| \sum_{j=1}^n |z_j - z_{j-1}| \end{aligned}$$





Ora, se chamarmos de  $\gamma_j$  o arco de curva compreendido entre  $z_{j-1}$  e  $z_j$  (isto é, a restrição de  $\gamma$  ao intervalo  $[t_{j-1}, t_j]$ ), teremos, para cada  $j$  :

$$|z_j - z_{j-1}| \leq |\gamma_j| \text{ e, como}$$

$\sum_{j=1}^n |\gamma_j| = |\gamma|$ , tem-se, finalmente:

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\tilde{z}_j)(z_j - z_{j-1}) \right| \leq |\gamma| \sup_{\gamma} |f(z)| ,$$

valendo, portanto, o mesmo resultado para o limite das somas;

i6. Se sobre um arco  $\gamma$  estão definidas e são contínuas as funções  $f$  e  $f_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) e se  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente na imagem de  $\gamma$ , então a sequência das integrais  $\int_{\gamma} f_n(z) dz$  é convergente e

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz .$$

Observe-se que o fato das  $f_n$  serem contínuas e convergirem uniformemente para  $f$  já garante a continuidade de  $f$  e lembremos que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente equivale a dizer que, dado  $\epsilon > 0$ , existe um índice  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$ :

$|f_n(z(t)) - f(z(t))| < \epsilon$ , para todo  $t$  em  $[a, b]$  e onde  $z(t) = \gamma(t)$  como anteriormente. Em vista disso, para  $n \geq n_0$

$$\sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon ,$$

donde, usando i2. e i5.,

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| dz \right| \leq \\ \leq |\gamma| \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| < |\gamma| \varepsilon$$

o que demonstra a propriedade enunciada.

17. A propriedade anterior pode ser transcrita na linguagem de séries, assim é que, se  $f$  e  $f_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) são funções definidas e contínuas sôbre a curva  $\gamma$  (também torna-se supérflua a hipótese de continuidade da  $f$ ) e se

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z) ,$$

uniformemente na imagem de  $\gamma$ , então a série das integrais  $\int_{\gamma} f_n(z)$  é convergente e sua soma é  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , isto é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz .$$

Basta aplicar 16 à sequência das reduzidas  $g_n(z) = f_1(z) + \dots + f_n(z)$ , pois dizer que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

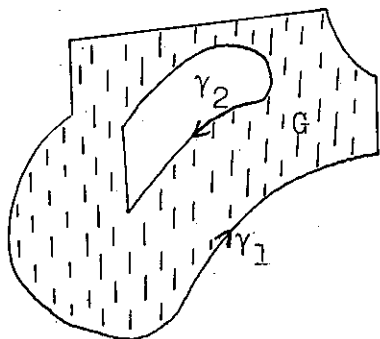
é uniformemente convergente equivale a dizer que a sequência das reduzidas  $g_n$  converge uniformemente para a soma da série  $f(z)$ .

#### IV.4 - Teorema integral de Cauchy

Um primeiro teorema fundamental no curso atual é o teorema de Cauchy que se demonstra sem dificuldade com o auxílio do teorema de Green para o plano. Lembremos, portanto, o enunciado dêste

teorema.

Teorema de Green (no plano) - Seja  $G$  uma região do plano limitada por um número finito de curvas lisas por partes



$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , (orientadas de modo que ao serem percorridas no sentido positivo os pontos de  $G$  fiquem à esquerda); se  $P$  e  $Q$  são funções definidas, contínuas e com derivadas primeiras  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$  contínuas em

$\bar{G}$  (= aderência de  $G$  = conjunto dos pontos de  $G$  e dos pontos da fronteira de  $G$ ), então

$$\int_{fr.G} P(x,y)dz + Q(x,y)dy = \iint_G \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy \quad (IV.8)$$

onde por  $fr G$  entenda-se fronteira de  $G$  e por  $\int_{frG}$  considere-se a soma  $\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \dots + \int_{\gamma_n}$ .

Bastava exigir a existência e continuidade das derivadas envolvidas em (IV.8):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial P}{\partial y} .$$

Teorema de Cauchy - Sejam  $D$  uma região do plano complexo,  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $f$  uma função analítica e com derivada contínua em  $D$ . Se  $G$  é uma região como a descrita no teorema de Green e tal que  $\bar{G} \subset D$ , então

$$\int_{fr.G} f(z)dz = 0 .$$

Observação: Como já observamos antes, uma função analítica num aberto tem tôdas as derivadas contínuas e, portanto, a hipótese da continuidade da derivada de  $f'$  neste teorema é supérflua. E, de fato, o teorema de Cauchy-Goursat demonstra a mesma tese sem usar a continuidade de  $f'$ . Demonstraremos mais adiante êste teorema; por enquanto, utilizaremos a hipótese da continuidade de  $f'$  que simplifica grandemente a demonstração.

Demonstração do teorema de Cauchy: Usando a decomposição (IV.6)

sôbre a curva  $\gamma_j$  tem-se, sendo  $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ ,

$$\int_{frG} f(z)dz = \int_{frG} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_{frG} v(x,y)dx + u(x,y)dy ,$$

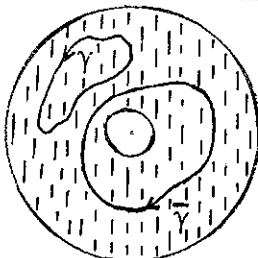
sendo  $f$  derivável e com derivada contínua têm-se que: as funções  $u$  e  $v$  são deriváveis em  $D$ , com derivadas parciais contínuas podemos, portanto, aplicar o teorema de Green:

$$\int_{frG} f(z)dz = - \iint_G \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + i \iint_G \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0 ,$$

pois as duas funções integrantes anulam-se idênticamente em  $D$  pois estão satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann (III.4).

### Consequências do Teorema de Cauchy

Corolário 1 - Seja  $D \subset \mathbb{C}$  uma região na qual  $f$  é analítica e



e  $f'$  contínua. Se  $\gamma$  é uma curva lisa por partes contida em  $D$  (isto é, cuja imagem está contida em  $D$ ) que limita uma região também contida em  $D$ ,

então:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 .$$

Exemplo - Tomada a função  $f(z) = \frac{1}{z-a}$ , podemos tomar como  $D$  o plano menos o ponto  $a$ . Então, sôbre qualquer curva  $\gamma$  que não envolva o ponto  $a$  nem passe por êle:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 0 ,$$

o mesmo não se dá se a curva em questão envolver o ponto  $a$ , de fato, no exemplo 3 do parágrafo anterior, vimos que

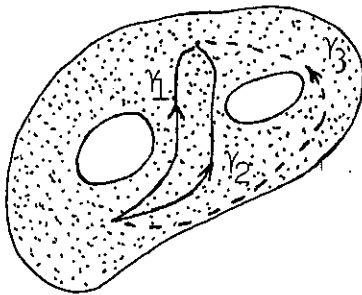
$$\int_{|z-a|=p} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i .$$

Na figura acima,  $\int_{\gamma} f(z) dz$  não é necessariamente nula.

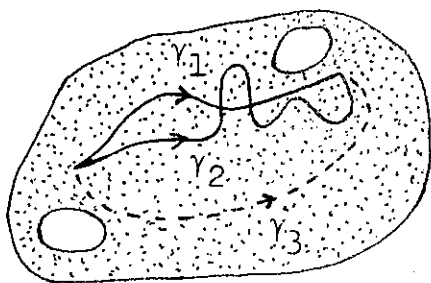
Corolário 2 - Se temos na região  $D$ , em que  $f$  é analítica e  $f'$  contínua, dois caminhos lisos por partes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que tenham em comum os pontos inicial e final, e sômente êstes, e de modo que a região compreendida entre êles esteja em  $D$ , então

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz .$$

Observações: Na figura, os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  satisfazem à hipótese do corolário, o mesmo não acontecendo com os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$ .



Se os caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  encontram-se em mais pontos ou mesmo tenham partes em comum, o corolário continua.

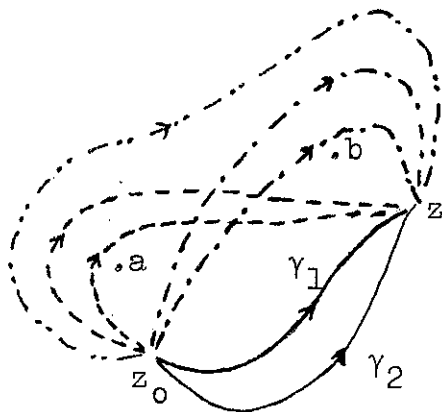


válido bastando, para demonstrá-lo, considerar um conveniente caminho liso por partes  $\gamma_3$  que só tenha em comum com  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  os pontos inicial e final.

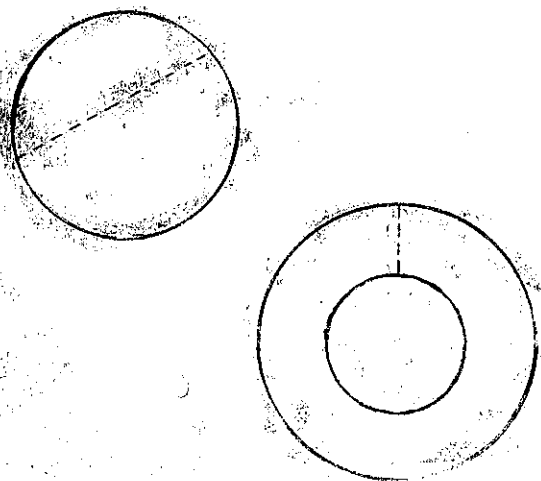
Exemplo - Consideremos a função  $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ . Esta função é analítica, com derivada contínua no plano menos os pontos  $a$  e  $b$ . Tomados dois pontos  $z_0, z \in \mathbb{C}$  distintos de  $a$  e  $b$  a integral

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

pode assumir valores distintos, conforme se considerem entre  $z_0$  e  $z$ , caminhos desenhados com  $\rightarrow$  ou  $-\rightarrow$  ou  $\cdots\rightarrow$  ou ainda  $\cdots\cdots\rightarrow$ , mas sôbre dois caminhos desenhados - na figura abaixo - do mesmo modo o valor é da integral também é o mesmo.



Para enunciarmos o 3º corolário, vejamos algumas definições: um conjunto do plano diz-se conexo se dois quaisquer de seus pontos podem ser ligados por uma curva tãda contida no conjunto.



Uma região (conjunto aberto conexo) diz-se simplesmente conexa se unindo dois pontos quaisquer de sua fronteira por uma curva contida na região nos desconectamos a região, isto é, se excluída da região uma curva qualquer com

ponto inicial e final na fronteira da região o conjunto obtido não mais será conexo. Exemplo de região simplesmente conexa é o interior de um círculo, o exemplo de região que não seja simplesmente conexa é o interior de uma coroa circular.

Uma outra caracterização de regiões planas simplesmente conexas é a seguinte: uma região plana é simplesmente conexa se, e somente se, dados dois pontos quaisquer desta região e duas curvas - que os unem, contidas na região, uma das curvas pode ser "continuamente deformada" na outra sem sair da região. A idéia de "deformação contínua" pode ser definida com rigor, mas deixamos a cargo da intuição do leitor o bom entendimento das definições acima.

Corolário 3 - Se  $D$  é uma região simplesmente conexa e  $f$  é uma função analítica com derivada contínua em  $D$ , então a integral  $\int_{\gamma} f(z)dz$  não depende do particular caminho liso por partes  $\gamma$ , contido em  $D$ , unindo os pontos  $z_0$  e  $z$  de  $D$ , mas somente de  $z_0$  e  $z$ .

Exercícios

1) Verificar a existência e calcular o valor de  $\int_{\gamma} f(z)dz$  quando

a)  $f(z) = y - x - 3x^2i$ ,  $\gamma$  é o segmento retilíneo que vai da origem ao ponto  $1+i$ . (Resp.  $1-i$ )

b)  $f(z) = y - x - 3x^2i$ ,  $\gamma$  é o caminho composto do segmento que vai da origem a  $i$  e do segmento que vai de  $i$  a  $1+i$ . (Resp.  $\frac{1}{2}(1-i)$ ).

c)  $f(z) = \frac{z+2}{z}$ ,  $\gamma$  é o semicírculo  $z = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ ,  
ou  $\gamma$  é o semicírculo  $z = 2e^{it}$ ,  $-\pi \leq t \leq 0$ ,  
ou  $\gamma$  é o círculo  $z = 2e^{it}$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ .

(Resp.  $-4+2\pi i$ ,  $4+2\pi i$ ,  $4\pi i$ )

d)  $f(z) = \begin{cases} 4y & \text{quando } y > 0 \\ 1 & \text{quando } y < 0 \end{cases}$   $\gamma$  é o arco da curva  $y=x^3$  que vai de  $-1-i$  a  $1+i$ . (Resp.  $2+3i$ )

2) Se  $\gamma$  é o contorno do quadrado com vértices nos pontos  $0$ ,  $1$ ,  $1+i$  e  $i$ , calcular

$$\int_{\gamma} (3z+1)dz, \quad \int_{\gamma} \pi \exp(\pi \bar{z})dz.$$

(Resp.  $0$ ,  $4(e^{\pi}-1)$ )

3) Mostrar que  $\int_{|z|=1} f(z)dz = 0$  quando:

a)  $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$

b)  $f(z) = \operatorname{sech} z$

c)  $f(z) = \operatorname{tg} z$

4) Tomando um caminho conveniente, calcular:



a)  $\int_i^{1/2} e^{\pi z} dz$

b)  $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$

c)  $\int_1^3 (z-2)^3 dz$

(Resp.  $\frac{1+i}{\pi}$  ;  $e + \frac{1}{e}$  ; 0)

5) Calcular as seguintes integrais:

a)  $\int_0^{1+i} z e^{\pi z} dz$

b)  $\int_{\pi/2}^{-\pi x} z \cos z dz$

c)  $\int_{|z|=8} \frac{\sinh z}{(z-2\pi i)^2} dz$

#### IV.5 - Primitiva de uma função complexa

Dada uma função  $f$  definida num aberto  $U$  de  $\mathbb{C}$ ,  $f:U \rightarrow \mathbb{C}$ , diz-se que a função  $F$  é uma primitiva de  $f$  se  $F$  é analítica e  $F' = f$ .

Neste parágrafo vamos construir primitivas de uma função analítica. De fato, pelo corolário 3 do teorema de Cauchy (IV.4), se  $f$  é uma função analítica numa região simplesmente conexa  $D$  (com derivada contínua - exigência removível em parágrafo posterior), a  $\int_{\gamma} f(z) dz$  onde  $\gamma$  é o caminho liso por partes contido em  $D$  com ponto inicial  $z_0$  e ponto final  $z$ , não varia se considerarmos outros caminhos com estas mesmas propriedades. Esta integral depende, portanto, somente de  $z_0$  e  $z$ , logo, podemos es-

crever:

$$\int_{z_0}^z f(z) dz \quad \text{ou} \quad \int_{z_0}^z f(w) dw .$$

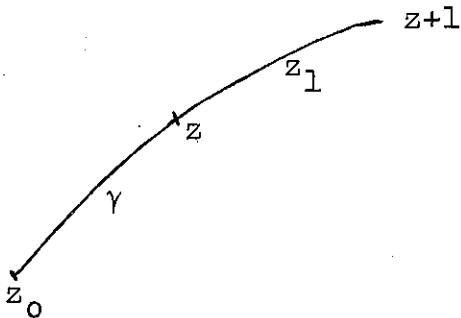
Ora, se  $D$  e  $f$  satisfazem às condições acima enunciadas e se fixamos o ponto  $z_0 \in D$ , a integral acima define uma nova função em  $D$ :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw .$$

Vamos mostrar que, análogamente ao que se dá com funções contínuas num intervalo fechado, esta é uma primitiva de  $f$ . Para tanto, mostremos que  $F$  é derivável em cada ponto  $z \in D$  e que sua derivada nesse ponto é  $f(z)$ , isto é, mostremos que existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}$$

e que este limite é  $f(z)$ . Se, no cálculo de  $F(z) = \int_{z_0}^z \dots$



usarmos um conveniente caminho  $\gamma$  e no cálculo de

$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} \dots$$

usarmos o caminho  $\gamma + \gamma_1$  (onde  $\gamma_1$  é o segmento retilíneo de

$z$  a  $z+h$  - para  $|h|$  suficientemente pequeno o arco  $\gamma_1$  está todo contido em  $D$ ), então tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [F(z+h) - F(z)] &= \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma + \gamma_1} f(w) dw - \int_{\gamma} f(w) dw \right] = \frac{1}{h} \int_{\gamma_1} f(w) dw = \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(w) dw = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) dw + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(w) - f(z)] dw . \end{aligned}$$

$$\text{Ora, } \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\omega = \frac{d(z)}{h} \int_z^{z+h} d\omega = \frac{f(z)}{h} (z + h - z) = f(z)$$

(v. Exemplo 1 em IV.3), donde:

$$\frac{1}{h} [F(z+h) - F(z)] - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\omega) - f(z)] d\omega .$$

Vejamos que o módulo do segundo membro tende a 0 quando  $h \rightarrow 0$ , ficando assim provado que  $F$  é derivável e que  $F'(z) = f(z)$ .

Tem-se que dado um número real  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta$  tal que para  $|\omega - z| < \delta$  tem-se  $|f(\omega) - f(z)| < \epsilon$  porque  $f$  é contínua. Tomando-se, então  $|h| < \delta$  temos  $|\omega - z| \leq |h| < \delta$  quando  $\omega$  fôr um ponto da imagem de  $\gamma_1$ , logo, como  $|\gamma_1| = |h|$ :

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} |f(\omega) - f(z)| d\omega \right| < \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon .$$

Observação: É interessante notar que só utilizamos a hipótese de que a função  $f$  é contínua e de que sua integral ao longo de um caminho  $\gamma$  qualquer só depende do ponto inicial e final dêste caminho. Mais tarde, utilizaremos esta observação.

Note-se também que, das condições de Cauchy-Riemann, conclui-se que uma função analítica num aberto com derivada nula nesse aberto é constante. Assim, dadas duas primitivas  $F, G$  da mesma função analítica  $f$  elas diferem, necessariamente, de uma constante.

#### IV.6 - Teorema de Cauchy-Goursat

Vamos agora demonstrar o teorema de Cauchy-Goursat que, como já foi dito, é o mesmo teorema de Cauchy (§IV.4) em que se prescindir da hipótese de continuidade da derivada da função analítica  $f$ .

Teorema de Cauchy-Goursat - Seja  $f:D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica num domínio simplesmente conexo  $D \subset \mathbb{C}$ .

Se  $\gamma$  é uma curva lisa por partes fechada contida em  $D$ , então

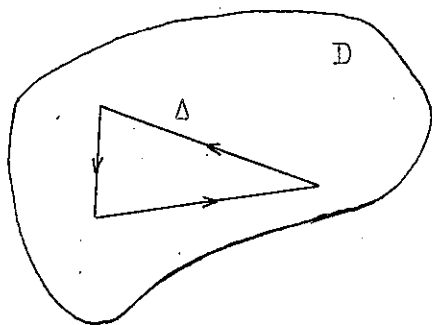
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 .$$

Observações: 1. Lembramos desde já que, como demonstraremos no §IV.8, se  $f$  é analítica numa região do plano, ela é infinitamente derivável nesta região e portanto  $f'$  é contínua nessa região.

2. A demonstração será feita em diversas etapas: começamos por mostrar que o teorema é válido quando  $\gamma$  for o contorno de um triângulo, passamos então a considerar poligonais quaisquer e, com estes elementos, construímos, num terceiro lema, uma primitiva de  $f$  que resolverá o problema para curvas quaisquer. Demonstremos, portanto, estes lemas:

Lema 1 - O teorema de Cauchy-Goursat é válido quando  $\gamma = \Delta$  é o contorno de um triângulo contido em  $D$ .

Demonstração: Seja  $\Delta$  o contorno de um triângulo contido em  $D$  orientado, por exemplo, no sentido anti-horário.



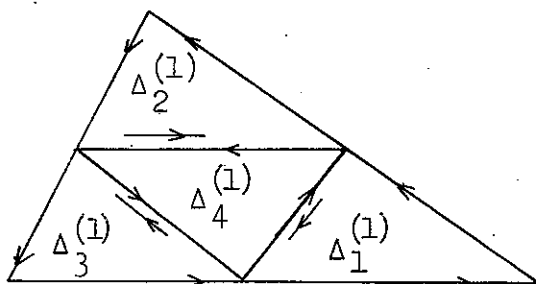
Seja

$$M = \left| \int_{\Delta} f(z) dz \right|,$$

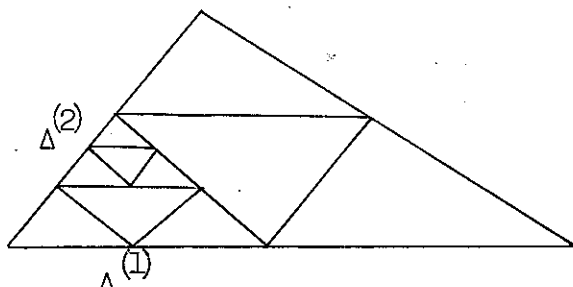
sabemos que  $M \geq 0$ , provemos que  $M = 0$ .

Para isto, sôbre cada lado do triângulo  $\Delta$  consideremos os pontos médios e unamos êstes

pontos médios obtendo quatro triângulos cujos contôrnos, orientados sempre no sentido anti-horário, chamaremos de  $\Delta_1^{(1)}$ ,  $\Delta_2^{(1)}$ ,  $\Delta_3^{(1)}$  e  $\Delta_4^{(1)}$ .



Usando as propriedades i3 e i4 relativas à integral de uma função sôbre curvas que se somam, podemos escrever:



$$\int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta_1^{(1)}} f(z) dz + \int_{\Delta_2^{(1)}} f(z) dz + \int_{\Delta_3^{(1)}} f(z) dz + \int_{\Delta_4^{(1)}} f(z) dz,$$

donde se conclui que

$$0 \leq M \leq \left| \int_{\Delta_1^{(1)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_2^{(1)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_3^{(1)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_4^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Tem-se então que, pelo menos uma das parcelas do último

membro não pode ser inferior a  $M/4$ . Chamemos de  $\Delta^{(1)}$  o triângulo relativo a esta parcela. Teremos, então:

$$\left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

É claro, pela construção, que, sendo  $|\Delta|$  e  $|\Delta^{(1)}|$  os comprimentos destes arcos (perímetros dos respectivos triângulos), temos

$$|\Delta^{(1)}| = \frac{\Delta}{2}$$

o mesmo acontecendo com seus diâmetros.

Procedendo com o triângulo  $\Delta^{(1)}$  (na figura:  $\Delta^{(1)} = \Delta_3^{(1)}$ ) de maneira análoga ao que se fez em  $\Delta$ , obtemos um novo triângulo  $\Delta^{(2)}$  de comprimento e diâmetro iguais, respectivamente, à metade do comprimento e diâmetro de  $\Delta^{(1)}$  e tal que

$$\left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2} .$$

Prosseguindo do mesmo modo, construímos, por indução, uma sequência de triângulos de contornos  $\Delta^{(n)}$  tais que:

$$|\Delta^{(n)}| = \frac{\Delta}{2^n} ,$$

os diâmetros de  $\Delta^{(n)}$  tendendo a 0 e

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}$$

Estes triângulos (o contorno e os pontos interiores) formam uma sequência de conjuntos fechados, embutidos cujos diâmetros tendem a 0, então sua intersecção se reduz a um ponto  $z_0 \in D$ .

Sabemos que, em  $z_0$ , a função  $f$  é analítica, isto é, se

$$(*) \quad A(z, z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \quad ,$$

para um dado número real positivo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que  $|z - z_0| < \delta$ , então  $|A(z, z_0)| < \varepsilon$ .

Ora, de (\*) tem-se:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + A(z, z_0)(z - z_0)$$

donde, sôbre um triângulo  $\Delta^{(n)}$  de diâmetro suficientemente pequeno de modo que todo o triângulo esteja contido no círculo de centro  $z_0$  e raio  $\delta$  :  $|z - z_0| < \delta$  (o que é possível pois  $z_0$  é ponto de qualquer triângulo  $\Delta^{(n)}$  e os diâmetros de  $\Delta^{(n)}$  tendem a zero), teremos:

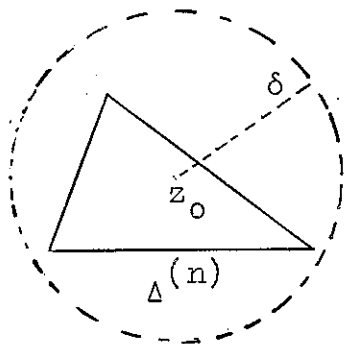
$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = f(z_0) \int_{\Delta^{(n)}} dz + f'(z_0) \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) dz +$$

$$+ \int_{\Delta^{(n)}} A(z, z_0)(z - z_0) dz .$$

Ora, as funções  $g(z) \equiv 1$  e  $g(z) = z - z_0$  têm derivadas contínuas e satisfazem, portanto, ao teorema de Cauchy, logo, suas integrais sôbre  $\Delta^{(n)}$  são nulas e ficamos com

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = \int_{\Delta^{(n)}} A(z, z_0)(z - z_0) dz .$$

Como  $\Delta^{(n)} \subset B_\delta(z_0)$  e, na bola  $B_\delta(z_0)$ , temos  $|A(z, z_0)| <$



$\epsilon$ , além disso, se  $z$  é um ponto do contorno de  $\Delta^{(n)}$ , certamente,  $|z-z_0| \leq |\Delta^{(n)}|$  temos, portanto, para o módulo da integral acima a seguinte majoração:

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} A(z, z_0)(z-z_0) dz \right| \leq \epsilon |\Delta^{(n)}| |\Delta^{(n)}| = \epsilon \frac{|\Delta|^2}{4^n}.$$

Por outro lado, o triângulo  $\Delta^{(n)}$  foi construído de modo a que

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta^{(n)}} A(z, z_0)(z-z_0) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

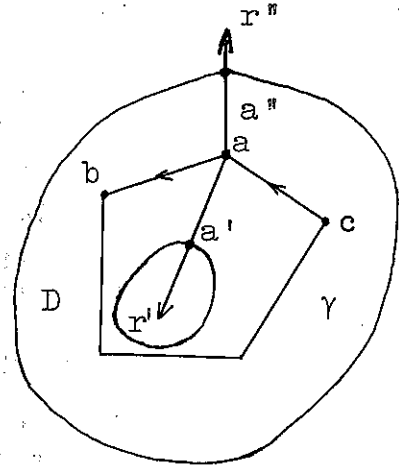
Destas duas relações, obtemos  $M \leq \epsilon |\Delta|^2$  e, como  $\epsilon > 0$ , é um número arbitrariamente pequeno mostramos que  $M = 0$  e encerramos a demonstração do Lema 1.

Lema 2 - Seja  $D$  um aberto simplesmente conexo do plano complexo e seja  $\gamma$  um poligonal simples (i.e. sem auto-intersecções) fechada; tomemos um vértice  $a$  de  $\gamma$  e sejam  $b$  e  $c$  os vértices que lhe são adjacentes. Em um dos ângulos determinados no vértice  $a$  pelos segmentos  $ab$  e  $ac$  existe uma semireta  $ar$  que não encontra a fronteira de  $D$  sem antes encontrar  $\gamma$ .

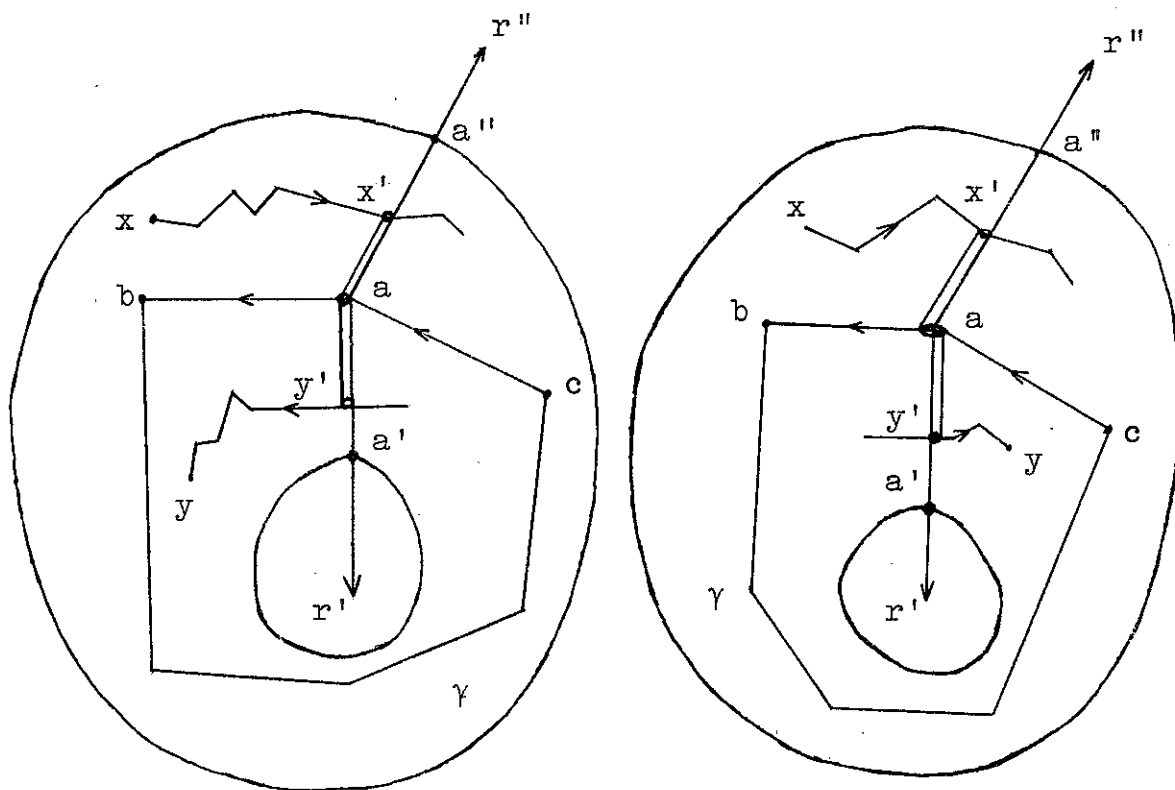
Observação: lembremos que um aberto anexo  $D$  do plano complexo se diz simplesmente conexo se o complementar, em  $D$ , de toda curva que une dois pontos da fronteira de  $D$  for um conjunto não conexo. Lembremos ainda que quando o aberto  $D$  não for limitado, consideramos o "ponto no infinito" como sendo da fronteira do  $D$ .  $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} - \{0\}$  não é portanto simplesmente conexo.



Demonstração: Se em ambos os ângulos houver semiretas  $ar'$  e  $ar''$ , encontrando a fronteira de  $D$  antes de encontrar  $\gamma$ , indiquemos por  $a'$  e  $a''$ , o 1º ponto de encontro de  $ar'$  e  $ar''$ , respectivamente, com a fronteira. Vamos demonstrar que nestas condições  $D$  não é simplesmente conexo, isto é, vamos demonstrar que o aberto  $D_1$  obtido de  $D$  retirando a poligonal  $[a',a] \cup [a,a'']$  que vai do ponto  $a'$  da fronteira de  $D$  ao ponto  $a''$  da fronteira de  $D$  ainda é conexo. De fato; lembremos que num aberto conexo do  $\mathbb{R}^n$  dois pontos quaisquer podem ser ligados por uma poligonal. Sejam  $x$  e  $y$  dois pontos de  $D_1$ ;  $D$  sendo um aberto conexo, existe uma poligonal  $\gamma_0$  contida em  $D$  que vai de  $x$  a  $y$ . Vamos a partir dela construir uma poligonal  $\gamma_1$  tãda contida em  $D_1$  e que liga  $x$  a  $y$ ; se a poligonal  $\gamma_0$  não encontra  $[a',a] \cup [a,a'']$  não há o que demonstrar. Em caso contrário seja  $x'$  o 1º ponto de encontro de  $\gamma_0$  com  $[a',a] \cup [a,a'']$  e seja  $y'$  o último ponto de encontro de  $\gamma_0$  com esta mesma  $[a',a] \cup [a,a'']$ .



Usando a poligonal  $\gamma$  é fácil construir uma poligonal (ver a figura a seguir) contida em  $D_1$  e unindo  $x$  a  $y$ .



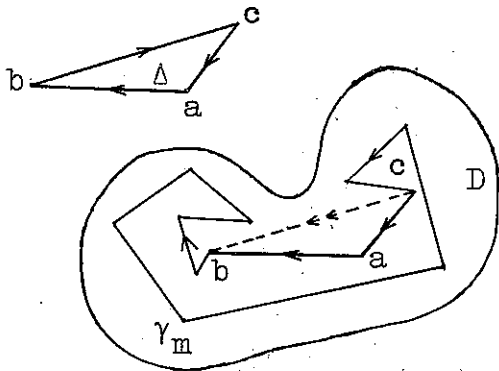
Lema 3 - O Teorema de Cauchy-Goursat é válido quando  $\gamma$  é uma poligonal simples e fechada.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por recorrência sôbre o número  $n$  de lados da poligonal  $\gamma$ .

Se  $n = 3$  o resultado foi demonstrado no Lema 1. Suponhamos o resultado verdadeiro para poligonais simples e fechadas de  $n$  lados, com  $n < m$ , e vamos demonstrar que o mesmo vale para uma poligonal simples e fechada,  $\gamma_m$ , de  $m$  lados. Tomemos um vértice  $a$  de  $\gamma_m$  e sejam  $b$  e  $c$  os vértices que lhe são adjacentes; supomos a poligonal orientada no sentido  $c$  a  $b$ .

Vamos agora examinar sucessivamente diferentes casos possíveis.

Em cada caso nós supomos que os anteriores já estão excluídos, isto é, não se realizam.

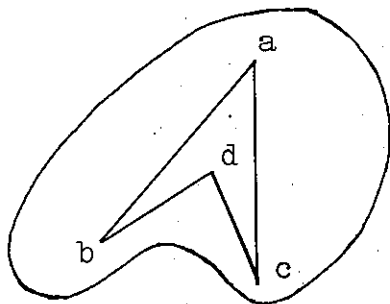


1º caso: o segmento  $bc$  está todo contido em  $D$  e não encontra  $\gamma_m$ ; então fazemos a seguinte decomposição

$$(+)\int_{\gamma_m} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz + \int_{\gamma_{m-1}} f(z)dz,$$

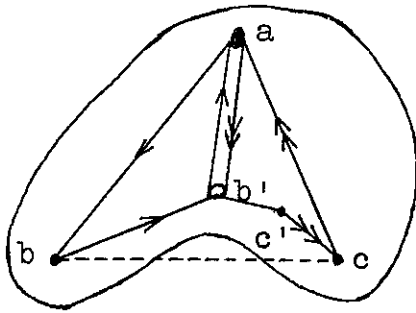
onde  $\Delta$  é o triângulo de vértice  $a$ ,  $b$  e  $c$  e  $\gamma_{m-1}$  é a poligonal de  $m-1$  lados obtida da anterior pela substituição dos lados  $ca$  e  $ab$  pelo lado  $cb$ . (Cf. a observação 3, no fim do §2). Em (+) as parcelas do segundo membro anulam-se, respectivamente, pelo lema anterior e pela hipótese de indução. Isto demonstra o lema para este caso.

Daí segue em particular que o Teorema de Cauchy-Goursat é verdade quando  $m = 4$  pois pelo lema precedente numa poligonal fechada  $a b d c a$  de 4 lados, contida numa região simplesmente anexa  $D$ , um dos segmentos  $ad$  ou  $bc$  está todo contido em  $D$ .



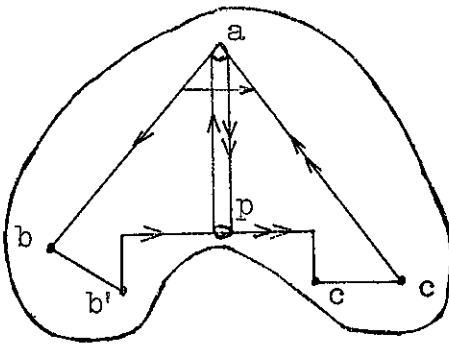
Podemos pois supor que  $m \geq 5$ ; seja  $b'$  o vértice que segue  $b$  e  $c'$  o vértice que precede  $c$ .

2º caso: o segmento  $ab'$  (ou, análogamente, o segmento  $ac'$ ) está todo contido no interior de  $D$  e não encontra outros pon-



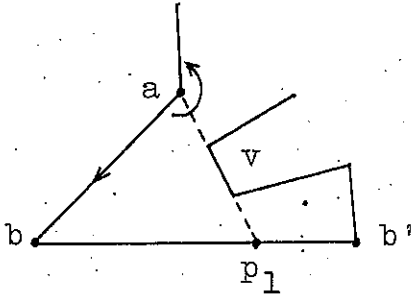
tos de  $\gamma_m$ . Neste caso podemos usar este segmento para fazer uma decomposição semelhante a que fizemos no 1º caso caindo no caso de duas poligonais com  $n < m$  lados.

Não se verificando nenhum dos dois casos precedentes, lembramos que do Lema 2 segue que em um dos 2 ângulos determinados no vértice  $a$  pelos lados  $ab$ ,  $ac$  não há nenhuma semireta de origem  $a$  que encontre a fronteira de  $D$  sem antes encontrar  $\gamma_m$ . Fazamos pois a escolha do ângulo com esta propriedade e sobre uma das semiretas interiores a este ângulo tomamos o seu 1º ponto de encontro,  $p$ , com  $\gamma_m$ ; o segmento  $[a,p]$  não contém então outros pontos de  $\gamma_m$ .

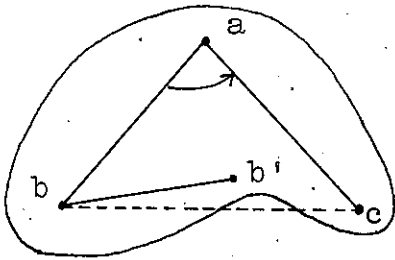


3º caso:  $p$  não se encontra sobre  $[b,b']$  nem sobre  $[c,c']$ ; então podemos usar o segmento  $ap$  para decompor  $\gamma_m$  em duas poligonais simples e fechadas de  $n < m$  lados. Observação: quando  $p$  está sobre  $[b,b']$  ou sobre  $[c,c']$

este raciocínio não funciona pois na decomposição, uma das novas poligonais ainda terá  $m$  lados.

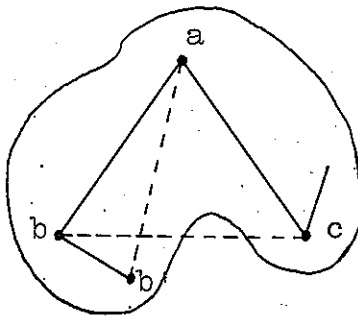


4º caso: a) Se o ponto  $p$  está sobre o segmento  $bb'$  (ou sobre  $cc'$ ; o raciocínio é análogo) e se o ângulo  $bac$  que tínhamos escolhido for  $> \pi$ , estão percorrendo o segmento  $bb'$  (neste sentido) tomemos o 1º ponto  $p_1$  que encontramos que seja tal que o segmento  $ap_1$  encontra  $\gamma_m$  [existe um ponto assim (eventualmente  $p_1 = b'$ ) pois senão  $[a, b']$  estaria contido em  $D$  e não encontraria  $\gamma_m$ , isto é, estaríamos no 2º caso]. O ponto  $v$  de  $\gamma_m$  sobre  $ap_1$  que está mais próximo de  $a$  é necessariamente um vértice e podemos usá-lo para decompor  $\gamma_m$  em duas poligonais simples e fechadas com  $n < m$  lados.



b) Se o ângulo  $\widehat{bac}$  escolhido for  $< \pi$ , o mesmo argumento ainda vale se

$$\widehat{abb'} \leq \widehat{abc}$$

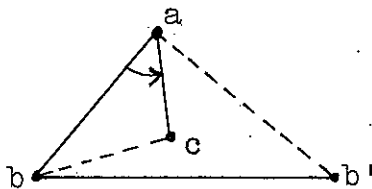


c) e também vale se

$$\widehat{abb'} > \widehat{abc}$$

mas

$$\widehat{bab'} < \widehat{bac}$$



d) finalmente, o mesmo argumento ainda vale quando temos  $\widehat{abb'} > \widehat{abc}$  e  $\widehat{bab'} \geq \widehat{bac}$ : quando o ponto  $p$  percorre

o segmento  $bb'$  então no ângulo  $bac$  o segmento  $ap$  encontra necessariamente pontos de  $\gamma_m$  pois senão o segmento  $bc$  estaria todo contido em  $D$  e não encontraria  $\gamma_m$ , isto é, estaríamos no 1º caso.

Com isto esgotamos todos os casos possíveis, terminando pois demonstração do Lema 3.

Observação: Ao contrário do que acontece nas demonstrações elementares habituais deste lema, na demonstração acima nós não usamos o Teorema de Jordan [que diz que uma curva simples e fechada decompõe o plano em dois abertos conexos, o "interior" da curva e o seu "exterior"] e nem demonstramos ou usamos o fato que o polígono determinado por uma linha poligonal simples e fechada pode ser decomposto em um número finito de triângulos.

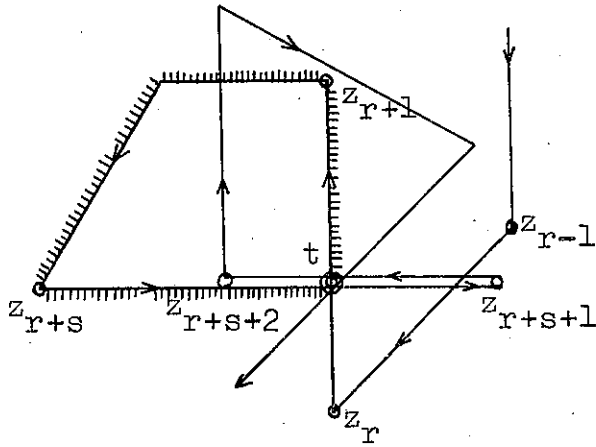
Lema 4 - O Teorema de Cauchy-Goursat é válido quando  $\gamma$  é uma poligonal fechada qualquer (eventualmente com auto intersecções).

Demonstração: Vamos demonstrar o lema por recorrência sobre o número  $m$  de vértices da poligonal fechada. O lema é evidente quando  $m = 2$  [ $\gamma = (z_1z_2, z_2z_1)$ ] ou quando  $m = 3$ ; suponhamos o lema demonstrado para poligonais fechadas com  $n < m$  vértices e vamos demonstrá-lo para poligonais fechadas  $\gamma_m$  de  $m$ -vértices,  $\gamma_m = (z_1z_2, z_2z_3, \dots, z_mz_1)$ . (Lembramos que, do mesmo modo que os segmentos geométricos, um mesmo ponto pode dar lugar a mais de um vértice).

Vamos percorrer a poligonal a partir do ponto  $z_1$  até encontrar pela 1ª vez um ponto pelo qual já passamos. Há duas

possibilidades

1 - encontrarmos um 1º ponto assim,  $t$ , num segmento  $[z_{r+s}, z_{r+s+1}]$  ( $s > 1$ ) com  $t \in [z_r, z_{r+1}]$ ;



então

$$\gamma' = (tz_{r+1}, z_{r+1}z_{r+2}, \dots, z_{r+s}t)$$

é uma poligonal simples e fechada e pelo Lema 3 temos  $\int_{\gamma'} f(z)dz = 0$ ; por outro lado

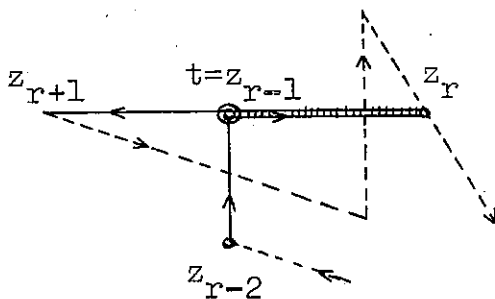
$\gamma'' = (z_1z_2, \dots, z_r t, tz_{r+s+1}, \dots, z_m z_1)$  é uma poligonal fechada com  $n < m$  vértices e pela hipótese de indução temos, portanto,

$$\int_{\gamma''} f(z)dz = 0 \text{ donde segue que}$$

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz + \int_{\gamma''} f(z)dz = 0$$

2 - Depois de um vértice  $z_r$  encontramos não um ponto mas todo um segmento  $[z_r, t] \subset [z_r, z_{r+1}]$  por cujos pontos já passamos; temos então necessariamente  $[z_{r-1}, z_r] \cap [z_r, z_{r+1}] = [z_r, t]$  e portanto  $t = z_{r-1}$  ou  $t = z_{r+1}$ . No 1º caso temos

$$\int_{z_{r-1}}^{z_r} f(z)dz + \int_{z_r}^{z_{r-1}} f(z)dz = 0 \text{ e a poligonal fechada}$$



$(z_1z_2, \dots, z_{r-2}z_{r-1}, z_{r-1}z_{r+1}, \dots, z_m z_1)$  tem  $m-1$  vértices e o resultado segue pela hipótese de indução. De modo análogo

procedemos quando  $t = z_{r+1}$ . Terminamos assim a demonstração do Lema 4; esta demonstração é de Markuchewitch: "Pequeno curso de Funções Analíticas" (em russo).

Corolário - Se  $z_0$  e  $z$  são pontos do domínio simplesmente conexo  $D$  no qual  $f$  é analítica, então a integral de  $f$  estendida a duas poligonais contidas em  $D$ , com origem em  $z_0$  e extremidade  $z$  é a mesma.

Demonstração: Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são estas poligonais, o resultado segue do Lema 4 considerando a poligonal fechada

$$\gamma_1 - \gamma_2.$$

Lema 5 - Nas condições do teorema de Cauchy-Goursat (  $f$  função analítica num domínio simplesmente conexo  $D$  ) a função  $f$  admite, em  $D$ , uma primitiva.



Demonstração: Fixamos um ponto  $z_0 \in D$  e construímos a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw,$$

onde a integral é estendida a uma poligonal qualquer que vá de  $z_0$  a  $z$ . Demonstra-se, então, que  $F$  é analítica e que é uma primitiva de  $f$ , isto é, que  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in D$ , de maneira análoga ao que se fez no §IV.5 - aqui, as curvas consideradas devem ser só poligonais.

Demonstração do Teorema de Cauchy-Goursat - A demonstração agora é simples. De fato,

se  $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{C}$  é uma curva lisa por partes de  $D$ , fechada, isto é, tal que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , então como  $f$  admite uma primitiva  $F$  e levando em conta a fórmula (IV.7) para o cálculo da integral, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} F'(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt} dt = \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0, \text{ pois } \gamma(a) = \gamma(b). \end{aligned}$$

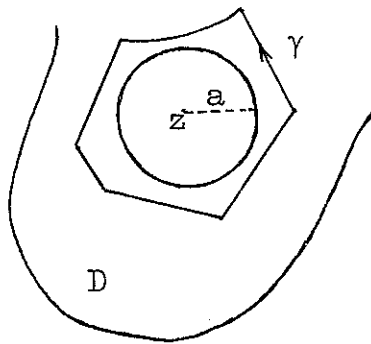
#### IV.7 - Fórmula integral de Cauchy

Seja  $f$  uma função analítica numa região  $D$  e seja  $z \in D$  um ponto qualquer.

Se  $\gamma$  é um caminho satisfazendo as seguintes condições:

$\gamma_1$ : é liso por partes;





A curva  $\gamma$  e a circunferência  $|w - z| = a$  (percorrida no sentido negativo) formam a fronteira de uma região  $G$  que satisfaz as condições do teorema de Cauchy-Goursat relativamente à função  $\frac{f(w)}{w-z}$  que é definida e

analítica nos pontos  $w$  de  $D$  menos o ponto  $z$ , então, pelo referido teorema temos

$$\int_{\text{fr.}G} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{|w-z|=a} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0 .$$

Temos, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{f(w)}{w-z} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{f(z)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw . \end{aligned}$$

$$\text{Como } \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{f(z)}{w-z} dw = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{dw}{w-z} = f(z)$$

(v. exemplo 3 em IV.3), a fórmula (IV.( )) estará demonstrada se verificarmos que

$$\int_{|w-z|=a} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw$$

é nula. Faremos o seguinte: pela continuidade de  $f$ , dado  $\epsilon > 0$ ,

tomemos  $\delta > 0$  tal que para  $w-z \leq \delta$  se tenha  $|f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$  então, se  $a \leq \delta$ , teremos:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{a} 2\pi a = \varepsilon .$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, a diferença  $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z)$  é, em módulo, menor do que qualquer  $\varepsilon$ , sendo nula portanto.

Assim, fica demonstrada a fórmula (IV.9) e mais, tendo em vista a última parte da demonstração, vemos em particular que, se sobre a circunferência  $|w-z|=a$  tivermos  $|f(w)| \leq M$  então, como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=a} \frac{f(w)}{w-z} dw ,$$

também  $|f(z)| \leq M$ .

### Exercício

(Teorema do máximo módulo): Demonstrar que se o módulo de uma função analítica numa região, atingir seu máximo num ponto desta região, ela é uma função constante.

Passamos, agora, a mostrar que valem, para as derivadas de  $f(z)$  fórmulas análogas à (IV.9), obtidas como se fôsse possível permutar as operações de derivação e integração (o que, sob certas condições, é possível, como veremos a seguir). Isto é, veremos que

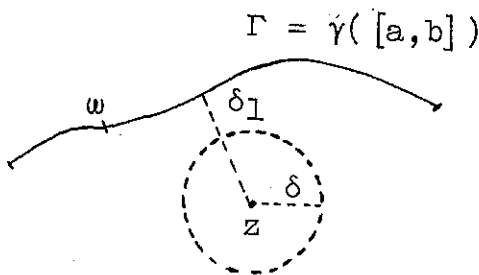
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad (\text{IV.10})$$

e, sucessivamente:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n=1,2,\dots \quad (\text{IV.11})$$

Faremos a demonstração de (IV.11) por indução, começando por mostrar que vale (IV.10). Tomemos, porém, uma situação um pouco mais geral do que esta: consideremos um caminho  $\gamma$  liso por

partes e seja  $\Gamma = \gamma([a,b])$  a imagem do intervalo  $[a,b]$ , em  $\mathbb{C}$ , por  $\gamma$ . Se  $g:\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função definida e contínua em  $\Gamma$ , podemos definir em  $\mathbb{C} - \Gamma$ , isto é, para todo complexo  $z \notin \Gamma$ , a função  $h$  como:



$$h(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w-z} dw. \quad (\text{IV.12})$$

Vamos mostrar que  $h$  é analítica no seu campo de definição e que

$$h'(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w-z)^2} dw, \quad (\text{IV.13})$$

isto significa que, neste caso, se pode permutar derivação com integração. Se tivermos demonstrado isto, a fórmula (IV.10) está verificada como caso particular, em que  $\gamma$  é um caminho que satisfaz as condições  $\gamma 1-5$  e  $g$  é a restrição de  $f$  a  $\Gamma$  (multiplicada pelo fator constante  $1/2\pi i$ ).

Mostremos, então, que  $h$  é analítica provando que

$$\frac{h(z + \Delta z) - h(z)}{\Delta z}$$

tem o limite dado em (IV.13). Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{h(z + \Delta z) - h(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \int_{\gamma} \left[ \frac{g(w)}{w - z - \Delta z} - \frac{g(w)}{w - z} \right] dw = \\ &= \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z - \Delta z)(w - z)} dw, \end{aligned}$$

$$\text{mas } \frac{g(w)}{(w - z - \Delta z)(w - z)} - \frac{g(w)}{(w - z)^2} = \frac{\Delta z g(w)}{(w - z - \Delta z)(w - z)^2}.$$

Se provarmos que esta expressão tende a 0 quando  $\Delta z \rightarrow 0$  uniformemente (isto é essencial) em  $\Gamma$ , então sua integral ao longo de  $\gamma$  também tenderá a 0 e estará demonstrada a fórmula (IV.13). Chamando de  $\delta_1$  a distância de  $z$  a  $\Gamma$ , de  $M$  uma qualquer majoração de  $|g(w)|$  em  $\Gamma$ ,  $|g(w)| \leq M \quad \forall w \in \Gamma$ , então sempre que  $|\Delta z| \leq \delta \leq \delta_1$ , teremos: como  $|w - z - \Delta z| \geq \delta_1 - \delta > \delta$  e  $|w - z|^2 \geq \delta_1^2$ :

$$\left| \frac{\Delta z g(w)}{(w - z - \Delta z)(w - z)^2} \right| \leq M \frac{\delta}{(\delta_1 - \delta)\delta_1^2}$$

e nesta relação o 2º membro tende a 0 quando  $\delta \rightarrow 0$ , independentemente do particular ponto  $w \in \Gamma$ , logo o 1º membro converge uniformemente em  $\Gamma$ . Fica assim verificada a fórmula (IV.10) que é a mesma que (IV.11) para  $n=1$ . Para prosseguir com a indução, estudemos novamente algo um pouco mais geral do que nosso caso, considerando uma curva  $\gamma$  lisa por partes, cuja imagem seja  $\Gamma = \gamma([a, b])$  e  $D \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto. Consideremos uma função  $g(w, z)$  definida para  $w \in \Gamma$  e  $z \in D$ , contínua em ambas as

variáveis e tal que para todo  $w$  fixo em  $\Gamma$ ,  $g(w, z)$  seja analítica em relação a  $z$  e de modo que a derivada  $g'_z(w, z)$  seja ainda contínua em  $w$  e  $z$ . Vamos, então, provar que a função

$$G(z) = \int_{\Gamma} g(w, z) dw \quad (\text{IV.14})$$

é analítica em  $D$  e que

$$G'(z) = \int_{\Gamma} g'_z(w, z) dw .$$

Como, por hipótese, a função  $g(w, z)$  é analítica em  $z$ , podemos usar a fórmula de Cauchy (IV.9) e escrever:

$$g(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{g(w, s)}{s-z} ds ,$$

onde  $a$  é suficientemente pequeno de modo que o círculo  $|s-z| \leq a$  esteja todo contido em  $D$ , mas então, substituindo esta expressão na definição de  $G(z)$  teremos duas integrais - em relação a  $s$  e a  $w$  - para as quais se pode inverter a ordem de integração, desde que as funções integrandas envolvidas são tôdas contínuas (esta permuta vale para integrais complexas pois estas se reduzem a integrais em intervalos fechados para as quais a permuta é lícita tendo em vista a continuidade das funções integrandas). Obtemos, então:

$$G(z) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{g(w, s)}{s-z} ds \right] dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{1}{s-z} \left[ \int_{\Gamma} g(w, s) dw \right] ds ,$$

donde:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{G(s)}{(s-z)^2} ds .$$

$G(z)$  é, então, uma função da forma de  $h(z)$  em (IV.12), será então uma função analítica em  $D$  e com derivada

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{G(s)}{(s-z)^2} ds ,$$

conforme (IV.13).

Por outro lado, sendo  $g(w, z)$  analítica em  $z$ , podemos calcular sua derivada por (IV.10), obtendo:

$$g'_z(w, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{g(w, s)}{(s-z)^2} ds ,$$

e, integrando esta expressão sobre  $\gamma$ , mudando depois a ordem de integração (com justificação análoga à precedente), teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g'_z(w, z) dw &= \int_{\gamma} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{g(w, s)}{(s-z)^2} ds \right] dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{1}{(s-z)^2} \left[ \int_{\gamma} g(w, s) dw \right] ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z|=a} \frac{G(s)}{(s-z)^2} ds = G'(z), \end{aligned}$$

de acôrdo com o que vimos acima. Está assim verificada a relação (IV.15).

Usamos êste resultado com  $g(w, z) = \frac{f(w)}{(w-z)^n}$  que satisfaz as condições impostas para  $z \notin \Gamma$  e completamos o processo de indução para a demonstração das fórmulas em (IV.11).

Assim demonstramos que o simples fato de uma função ser analítica já implica que existam tôdas as derivadas sucessivas, que serão pois funções analíticas e portanto contínuas, como já tínhamos adiantado várias vezes.



IV.8 - Consequências da fórmula de Cauchy:

A primeira consequência do que se viu é uma recíproca do teorema de Cauchy-Goursat:

Teorema de Morera - Se  $f$  é uma função contínua numa região simplesmente conexa tal que sua integral sôbre qualquer caminho fechado liso por partes (contido nessa região) se anule, então  $f$  é analítica nessa região.

Observações:

1. A demonstração que faremos dêste teorema diz um pouco mais, pois exige menos. De fato, mostraremos que  $f$  é analítica, supondo apenas que  $f$  é contínua numa região (não necessariamente, simplesmente conexa), e tal que para todo o ponto  $z$  dessa região seja possível tomar um círculo fechado, com centro  $z$ , contido ainda na região e de modo que sôbre caminhos fechados, lisos por partes, dêste círculo a integral de  $f$  se anule.
2. Dizer que a integral de  $f$  se anula sôbre qualquer caminho fechado liso por partes numa região é o mesmo que dizer que a integral de  $f$  ao longo de caminhos (lisos por partes) quaisquer depende tão somente dos pontos inicial e final, isto é, pode-se definir

$$\int_{z_0}^z f(w)dw$$

para  $z_0$  e  $z$  nessa região.

Demonstração: Seja  $z_0$  um ponto da região  $D$  em que  $f$  está definida e é contínua. Consideremos o círculo com centro em  $z_0$  que satisfaça a hipótese da observação 1 acima e escre

mos, para  $z$  neste círculo:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)dw ,$$

ntão, como primitiva de  $f$ , a função  $F$  é analítica neste círculo, e  $F' = f$  é contínua. Logo,  $F$  admite derivadas sucessivas e qualquer ordem, então  $f$  é analítica neste círculo e, como  $z_0$  qualquer,  $f$  é analítica na região de partida.

Corolário - Seja  $f_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) uma seqüência de funções analíticas numa região de modo que, cada ponto desta região é centro de um círculo, ainda contido na região, e no qual  $f_n \rightarrow f$  uniformemente. Então  $f$  é também analítica.

Demonstração: Se, localmente,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, então  $f$  é contínua.

Dado um ponto  $z_0$ , consideremos um círculo no qual a convergência  $f_n \rightarrow f$  seja uniforme. Então, sôbre qualquer caminho liso por partes contido nesse círculo, tem-se

$$\int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f .$$

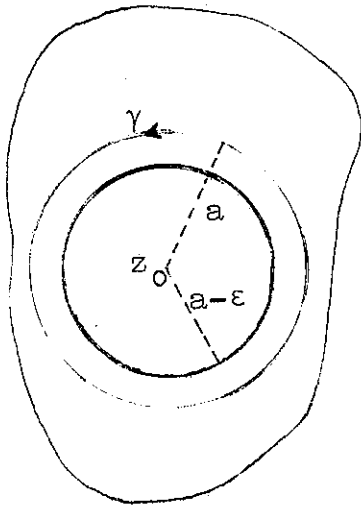
Ora, se  $\gamma$  é também fechado, pelo teorema de Cauchy  $\int_{\gamma} f_n = 0$ , então  $\int_{\gamma} f = 0$  e estão satisfeitas as hipóteses do teorema de Morera (observação 1), logo  $f$  é analítica.

Note-se, que na reta, podemos ter funções analíticas convergindo uniformemente numa vizinhança de cada ponto (isto é, localmente) para  $f(x)$  sem que  $f(x)$  seja analítica. De fato, já vimos da existência de funções contínuas (e mesmo deriváveis) na reta que não são analíticas, mas, pelo teorema de Weierstrass,

tôda função contínua é o limite (localmente uniforme) de uma sequência de polinômios.

Proposição - Nas hipóteses do último corolário tem-se também que  
 $f'_n \rightarrow f'$  e cada ponto é centro de um círculo em que  
a convergência é uniforme.

Demonstração: Sejam  $z_0$  um ponto da região considerada e  
 $|z-z_0| \leq a$  um círculo desta região no qual a convergência  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  é uniforme. Se  $\epsilon$  é tal que  $0 < \epsilon < a$ , vamos mostrar que



$f'_n(z) \rightarrow f'(z)$  uniformemente no círculo de centro  $z_0$  e raio  $a - \epsilon$ . Podemos escrever, por (IV.10) para qualquer  $z$  dêsse círculo:  $|z-z_0| \leq a - \epsilon$ ,

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=a} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$$

e como  $f'$  também é analí-

tica

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=a} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

Daqui segue a tese pois, para índices  $n$  suficientemente grandes tem-se  $f_n(w) - f(w) < \delta$  para todo  $w$  da circunferência  $w-z_0 = a$ , logo para tais índices

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\delta}{(2a)^2} 2\pi a = \frac{\delta}{4a}$$

que tende a 0 quando  $\delta \rightarrow 0$ , independentemente de  $z$ .

Note-se que esta proposição não é válida na reta.

Tudo isto pode ser reescrito para séries. Assim que, se as funções  $f_n$  são analíticas numa região e se

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$$

de modo que localmente a convergência seja uniforme, então  $f$  é analítica e

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z) = f'(z) .$$

Em particular, se tivermos uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

que converge num ponto  $z_1$ , já sabemos que sendo  $\rho = |z_1 - z_0|$ , a série será uniforme e absolutamente convergente em qualquer círculo  $|z - z_0| \leq \rho - \epsilon$ , então teremos que a série das derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

também será uniformemente convergente (e, então, também absolutamente) em qualquer círculo dêesses.

Isto já foi demonstrado diretamente para as séries de potências por meio de um cálculo direto, dispensando tôda esta bagagem de funções analíticas (ver II.4).

### Consequências das fórmulas (IV.11):

1. Limitação para as derivadas. Seja, novamente,  $f$  uma função analítica numa região  $D$ ,  $z$  um ponto de  $D$  e  $\rho > 0$  tal que o círculo  $|w - z| \leq \rho$  esteja todo contido em  $D$ . A função  $f(w)$  é contínua na circunferência

$|w-z| = \rho$  sendo, portanto, limitada, suponhamos que por  $M_\rho$ , isto é:

$$|f(w)| \leq M_\rho \quad \text{se} \quad |w - z| = \rho,$$

então, como

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw,$$

teremos:

$$f^{(n)}(z) \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M_\rho \cdot 2\pi\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{n! M_\rho}{\rho^n}.$$

2. Teorema de Liouville: Se  $f$  é uma função definida analítica em todo o plano, se  $f$  for limitada, então  $f$  é uma constante.

Demonstração: Aplicando (IV.16) no caso em que  $n = 1$ , tem-se

$$|f'(z)| \leq \frac{M_\rho}{\rho},$$

mas como  $f$  é limitada,  $|f(z)| \leq M$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , então, para qualquer  $\rho > 0$  real, temos  $M_\rho \leq M$  e

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\rho}, \quad \forall \rho,$$

isto é,  $f'(z)$  é, em módulo, arbitrariamente pequena, logo  $f'(z) = 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , donde  $f$  é constante.

Uma função definida e analítica em todo o plano diz-se uma função inteira (as funções  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $a_0 + \dots + a_n z^n$  são inteiras; as funções  $\operatorname{tg} z$ ,  $\frac{1}{z-a}$  não são). Então, o teorema de Liouville diz que as únicas funções inteiras limitadas são as

constantes.

3. Teorema fundamental da Álgebra - Como aplicação do teorema de Liouville, podemos demonstrar

o teorema fundamental da Álgebra: Todo polinômio de grau  $n \geq 1$  (isto é, não constante) admite pelo menos um zero. Isto é, se

$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  (de grau  $n \geq 1$ ), então existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$ .

Mostremos que se  $P(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  então, certamente,  $P(z)$  será constante.

De fato, podemos escrever:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \\ &= z^n \left[ a_n + \frac{1}{z} \left( a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^{n-1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Suponhamos  $P(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , então a função  $\frac{1}{P(z)}$  está definida e é analítica em todo o plano complexo.

Pelo que vimos, se  $|z| \geq K \geq 1$ , teremos:

$$|P(z)| \geq K^n \left[ |a_n| - \frac{1}{K} (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) \right]$$

e, então, para  $K$  suficientemente grande, temos

$$|P(z)| \geq K^n [ |a_n| - \epsilon ] > 0$$

onde, invertendo

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{1}{K^n [ |a_n| - \epsilon ]}, \quad \text{para } |z| \geq K.$$

Por outro lado, sendo  $\frac{1}{P(z)}$  contínua em todo o plano, será limitada no círculo  $|z| \leq K$  por uma constante  $M$ :

$$\frac{1}{P(z)} \leq M, \text{ para } |z| \leq K.$$

Concluimos então que a função inteira  $\frac{1}{P(z)}$  é limitada, logo, pelo teorema de Liouville é constante, sendo também constante seu inverso  $P(z)$ .

#### IV.9 - Série de Taylor de uma função analítica.

Para as funções elementares, demonstramos algumas propriedades interessantes - como a unicidade do prolongamento analítico  $f(z)$  de  $f(x)$  - usando seu desenvolvimento em série de Taylor. Vamos mostrar que toda função analítica numa região admite um desenvolvimento em série de Taylor para cada ponto desta região.

Seja  $f$  uma função analítica numa região  $D$  seja  $z_0$  um ponto de  $D$ . Tomando o número real positivo  $\rho$  tal que:

$$0 < \rho < \text{dist}(z_0, \text{fr}.D)$$

temos garantido que o círculo  $|z-z_0| \leq \rho$  está todo contido em  $D$ .

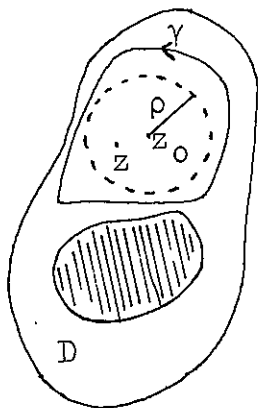
Seja  $\gamma$  um caminho satisfazendo as condições  $\gamma 1-5$  e contendo em

seu interior todo o círculo  $|z-z_0| \leq \rho$ , então, para qualquer ponto  $z$  deste círculo podemos escrever, segundo

(IV.9):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Mas:



$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}$$

Ora, se  $w$  é um ponto da imagem de  $\gamma$  e  $z$  um ponto tal que  $|z-z_0| < \rho$ , então:

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$$

e, nestas condições, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$  converge para

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}$$

Podemos, então, escrever:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

Se, além disso, consideramos um número real  $0 < q < 1$  e tomamos um círculo um pouco menor  $|z-z_0| \leq q\rho$ , teremos

$$\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| \leq q < 1$$

a convergência da série acima será uniforme, e então poderemos multiplicá-la por  $f(w)$  (cujo módulo é limitado para que  $w$  na imagem de  $\gamma$ ) e integrá-la termo a termo:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right] dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right] (z-z_0)^n. \end{aligned}$$



Obtivemos, então, um desenvolvimento em série de potências para  $f(z)$  da forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{IV.17})$$

convergente para todo  $z : |z - z_0| < \rho$ .

Ainda mais, tem-se como coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (\text{IV.18})$$

Acabamos, então, de provar que  $f$  admite um desenvolvimento em série de Taylor numa vizinhança de  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (\text{IV.19})$$

Esta série é convergente no círculo  $|z-z_0| < d(z_0, \text{fr}.D)$  e uniformemente convergente em qualquer círculo fechado contido neste. Portanto, o raio de convergência da série do 2º membro de (IV.19) é  $\geq d(z_0, \text{fr}.D)$ .

Temos, agora, para funções analíticas quaisquer corolários análogos aos que foram vistos para funções elementares.

Corolário 1 - Uma função analítica só tem zeros de ordem inteira.

Isto é, se  $f$  é analítica na região  $D$  e se  $z_0 \in D$  e tal que  $f(z_0) = 0$ , então numa vizinhança de  $z_0$ ,  $f$  escreve-se como

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

em que  $g$  é analítica e  $g(z_0) \neq 0$ .

De fato, basta considerar o desenvolvimento (IV.17):

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

onde  $f(z_0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ . Seja então  $m$  ( $m > 0$ ) o 1º inteiro para o qual se tenha  $a_m \neq 0$ , então teremos:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots = \\ &= (z - z_0)^m a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots = (z - z_0)^m g(z), \end{aligned}$$

onde  $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots$  é, obviamente analítica e  $g(z_0) \neq 0$ .

Corolário 2 - Os zeros de uma função analítica numa região  $D$  e não nula são pontos isolados nessa região. Isto é, os zeros duma função analítica, não idênticamente nula, só podem acumular-se na fronteira de  $D$ , nunca no interior.

Da fato, suponhamos por absurdo, que  $z_0 \in D$  fôsse um ponto de acumulação de zeros de  $f$ , mas então, como  $f$  é contínua em  $z_0$ ,  $f(z_0) = 0$  e teríamos, pelo corolário anterior, numa vizinhança de  $z_0$ :

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

onde  $g$ , sendo analítica (e, então, contínua) e não nula em  $z_0$ , é diferente de zero ainda numa vizinhança de  $z_0$ , então nesta vizinhança  $f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - z_0)^m = 0 \Leftrightarrow z = z_0$  o que contradiz a hipótese de existência de outros zeros em qualquer vizinhança de  $z_0$ .

Corolário 3 - Se duas funções  $f$  e  $g$  são analíticas numa região  $D$  e coincidem num conjunto de pontos que tenha pon-

to de acumulação em  $D$ , então elas são iguais em tôda a região  $D$ .

É claro porque, então  $f - g$  é uma função analítica cujos zeros têm ponto de acumulação em  $D$ , logo  $f - g = 0$  em  $D$ . O leitor pode verificar que êste corolário é uma generalização do Teorema II.1 demonstrado no capítulo II.

Em seguida, observemos que êste corolário garante a unicidade do prolongamento analítico de uma função real qualquer para o campo complexo. De fato, se  $f(x)$  é uma função real, duas funções analíticas  $f(z)$  e  $g(z)$  que a estendam ao campo complexo, coincidem sôbre o eixo real, então, pelo Corolário 3,  $f(z) = g(z)$  em todo o seu campo de definição.

Conclusão: Embora se pudesse fazer diretamente a demonstração para séries de potências, vimos neste capítulo, como aplicação de resultados para funções analíticas que, se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge num círculo  $|z - z_0| < \rho$ , com soma  $f(z)$ , então, como num raio um pouco menor a convergência é uniforme, temos que a série das derivadas converge também, que  $f(z)$  é analítica e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = f'(z) .$$

Temos, com isto, fechado o circuito, mostrando que são equivalentes as seguintes condições:

1.  $f$  é derivável na região  $D$  (analítica em  $D$ );
2. em todo ponto de  $D$ ,  $f$  admite um desenvolvimento em série de Taylor.

Uma condição menos importante mas também equivalente às anteriores, como vimos, é:

3.  $f$  é contínua em  $D$  e, localmente, a integral de  $f$  entre dois pontos independe do caminho.

Qualquer uma destas condições serviria, portanto, para a definição de função analítica na região  $D$ .

### Exercícios

1) Se para  $|z| \neq 3$ :

$$g(z) = \int_{|w|=3} \frac{2w^2 - w - 2}{w - z} dz,$$

mostrar que  $g(2) = 8\pi i$ . Qual o valor de  $g(z)$  quando  $|z| > 3$ ?

2) Usar as fórmulas (IV.9) e (IV.11) para calcular as seguintes integrais:

a)  $\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z - \frac{1}{\pi^2}} dz$

b)  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$  ;

c)  $\int_{\gamma} \frac{z dz}{2z + 1}$

d)  $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{tg} \frac{z}{2}}{(z-x_0)^2} dz$  ( $|x_0| < 2$ ); e)  $\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{z^4} dz$  ,

onde  $\gamma$  é o caminho formado pelos lados do quadrado de vértices  $\pm 2 \pm 2i$ , percorrido no sentido anti-horário.

Resp:  $(2\pi, \frac{\pi i}{4}, -\pi \frac{1}{2}, i \pi \sec^2(\frac{x_0}{2}), 0)$

- 3) Se  $f$  é analítica numa região  $D$  e se  $\gamma$  é um caminho fechado de  $D$  cujos pontos interiores sejam ainda de  $D$ , mostrar que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} ,$$

para  $z_0 \in D$  não na imagem de  $\gamma$ .

- 4) Dar o desenvolvimento em série de Taylor:

- a) para  $\cos z$  numa vizinhança do ponto  $z_0 = \frac{\pi}{2}$  ;
- b) para os diferentes ramos de  $\text{Log } z$  numa vizinhança do ponto  $z = 1$  ;
- c) para  $\frac{z^3}{z-2i}$  na origem.

- 5) Determinar dentre as seguintes funções, quais as que admitem desenvolvimento de Taylor em torno da origem:

- a)  $e^{-1/z^2}$
- b)  $\frac{z^2 + 3}{\cosh z}$
- c)  $\frac{\cos z - 1}{z^2}$
- d)  $e^{1/\cos z}$
- e)  $\frac{e^z - 1}{z}$
- f)  $\frac{z^2 - 1}{\sin z}$

#### IV.10 - Resumo - Recapitulação

Reverendo o que se fêz até aqui, lembremos as propriedades que caracterizam as funções analíticas numa região. Se  $D \subset \mathbb{C}$  é um aberto do plano complexo, e se  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função definida em  $D$ , são equivalentes as seguintes condições:

FA 1. Localmente,  $f$  é a soma de uma série de potências, i.e.:

Todo ponto  $z_0 \in D$  é centro de um círculo no qual  $f$  admite um desenvolvimento em série de potências de  $z - z_0$ , isto é, para cada  $z_0 \in D$ , existe  $\rho > 0$  tal que se  $|z - z_0| < \rho$ , a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é convergente com soma  $f(z)$ ;

FA 2.  $f$  é derivável em  $D$ , isto é, para todo ponto  $z \in D$ , existe a derivada  $f'(z)$ , (esta é a condição que usamos como definição de função analítica);

FA 3. (esta condição é formulada em termos de funções reais de duas variáveis reais): se a função  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $f$  é diferenciável, como função de  $x$  e  $y$ , para todo ponto  $(x, y) = z \in D$  e estão satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann (III.4):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} ;$$

FA 4. Localmente,  $f$  é integrável:  $f$  é contínua em  $D$  e admite uma primitiva local, ou seja, cada ponto de  $D$  é centro de um círculo contido em  $D$ , tal que, a integral de  $f$  estendida a um caminho todo contido nesse círculo depende somente dos pontos inicial e final de tal caminho.

Qualquer uma destas condições pode, portanto, ser usada como definição de função analítica em  $f$ . Isto nos dá uma idéia da riqueza desta teoria e de quantos modos diferentes ela pode ser construída.

A demonstração das equivalências acima já foi feita.

no transcorrer dêste curso. A título de recapitulação, citaremos o roteiro para algumas demonstrações, que o leitor poderá rever.

A demonstração de que uma série de potências é derivável no seu círculo de convergência (FA 1  $\Rightarrow$  FA 2) foi obtida de dois modos; primeiro diretamente por cálculos sôbre os coeficientes (exemplo em III.2) e, depois - um tanto sofisticadamente - como consequência do teorema de Morera e da fórmula de Cauchy.

A recíproca (FA 2  $\Rightarrow$  FA 1) foi vista no §IV.9.

A equivalência de "derivabilidade complexa" e "diferenciabilidade real + condições de Cauchy-Riemann" (FA 2  $\Rightarrow$  FA 3) foi vista no Teorema III. 1 (§III.4).

Finalmente, demonstramos que FA 2  $\Rightarrow$  teorema de Cauchy-Goursat  $\Rightarrow$  FA 4 e a recíproca, FA 4  $\Rightarrow$  FA 2 é demonstrada usando o Teorema de Morera (§IV.8) no qual se tomam as hipóteses mais fracas das observações feitas naquela ocasião.

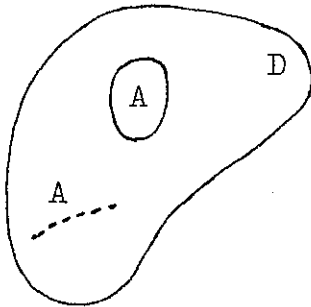
Chamamos a atenção do leitor para o fato de que as condições FA 1, FA 2 e FA 4 são de naturezas bem distintas entre si, não tendo relação aparente. Assim sendo, certas propriedades de que gozam as funções analíticas são quase surpreendentes quando se toma uma das definições acima (e, quase sempre de demonstração direta difícil) mas são naturais (e de verificação imediata) se uma outra definição é a considerada. Quando fôr, pois, preciso mostrar uma propriedade qualquer de funções analíticas, pode-se escolher dentre as definições FA 1-4 aquela que torne mais simples a demonstração da propriedade procurada.

Como ilustração, lembremos algumas consequências tri-

viais de cada uma destas definições de função analítica:

Assim é que, se considerarmos como função analítica aquela que, localmente, é desenvolvível em série de potências, FA 1, têm-se imediatamente:

- i. os zeros de uma função analítica são de ordem inteira (corolário 1 do §IV.9);
- ii. (consequência de i): uma função analítica em  $D$  e não identicamente nula, não admite, em  $D$ , ponto de acumulação de zeros. (corolário 2 do §IV.9);
- iii. (consequência de ii): se duas funções analíticas em  $D$  coincidem num subconjunto de pontos de  $D$  com ponto de acumulação então elas coincidem em todo o aberto  $D$  (corolário 3 do §IV.9);
- iv. (consequência de iii): Unicidade do prolongamento analítico: dados um subconjunto  $A$  de  $D$  com ponto de acumulação (por exemplo uma parte aberta de  $D$ ) e uma função  $f$  definida em  $A$  com valores complexos, se esta função admitir um prolongamento analítico a todo o aberto  $D$  (isto é, se existe uma função  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  analítica e que coincida com  $f$  nos pontos de  $A$ ), então êsse prolongamento é único.



- v. a derivada de uma função analítica é uma função analítica (segue do cálculo elementar do exemplo em III.2);
- vi. (consequência de iv e v): se  $f(z)$  é o prolongamento analítico



co de  $f(x)$ , então  $f'(z)$  é o prolongamento analítico de  $f'(x)$  (resultado prometido em III.5).

Partindo agora da definição FA 2 - a adotada neste texto: função analítica é uma função derivável - têm-se, de imediato:

- i. são válidas as regras formais de derivação na reta (d 1 - 6 no § III.2). Assim é que a soma, o produto e a composta de funções analíticas são funções analíticas, o produto de uma função analítica por uma constante é uma função analítica; o quociente de duas funções analíticas é uma função analítica nos pontos em que o denominador não se anula; a inversa de uma função analítica (biunívoca) é analítica nos pontos em que a derivada da primeira não se anula;
- ii. (consequência de i): levando em conta que a exponencial  $e^z$  é uma função analítica, concluimos que são analíticas tôdas as funções elementares.

A definição FA 3 serve para reduzir o cálculo de derivadas no campo complexo ao cálculo de derivadas de variáveis reais e, finalmente, em parágrafos futuros, usaremos a definição FA 4 para simplificar o cálculo de integrais no campo complexo e mesmo calcular integrais de funções reais, cujo tratamento elementar é artificioso e difícil - isto será feito na Teoria dos Resíduos.

Capítulo V

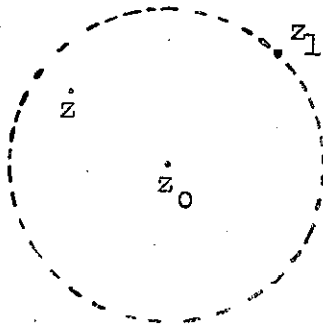
CÁLCULO DE RESÍDUOS

V.1 - Séries de Laurent

Já foi visto que se uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{V.1}$$

convergir para  $z = a_1$ , então a série será convergente em todo ponto  $z$  do círculo  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  e mais, considerado um



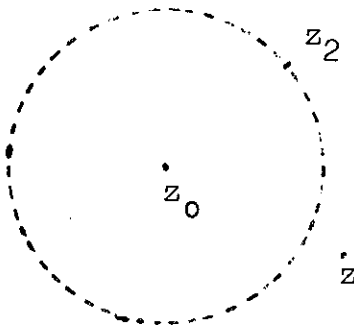
raio um pouco menor que  $|z_1 - z_0|$ , isto é, para  $\epsilon > 0$ , a série será uniforme e absolutamente convergente no círculo

$$|a - a_0| \leq |a_1 - z_0| - \epsilon$$

Do mesmo modo, teremos que se uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{V.2}$$

fôr convergente para  $z = z_2$ , então a série convergirá para todo



ponto  $z$  tal que  $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$  e mais, se  $\epsilon > 0$ , então a série (V.2) converge uniforme e absolutamente fora do círculo de raio  $|z_2 - z_0| + \epsilon$  isto é, no conjunto dos  $z$  tais que

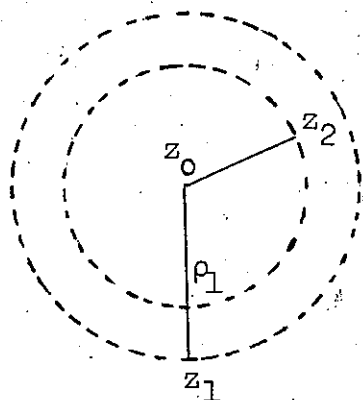
$$|z - z_0| \geq |z_2 - z_0| + \varepsilon$$

Então, onde convergem uniformemente, cada uma das séries acima tem como soma uma função analítica. Combinando as duas séries acima, obtemos uma série que se diz série de Laurent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z-z_0)^n \quad (V.3)$$

que é tal que: se existirem dois pontos  $z_1$  e  $z_2$  situados a distâncias diferentes de  $z_0$ :  $\rho_2 = |z_2 - z_0| < |z_1 - z_0| = \rho_1$ , para os quais a série converge, então a série converge na coroa:

$$\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1$$



e, tomados  $\varepsilon_1 > 0$  e  $\varepsilon_2 > 0$ , a convergência na coroa

$$\rho_2 + \varepsilon_2 \leq |z - z_0| \leq \rho_1 - \varepsilon_1$$

é absoluta e uniforme. Assim sendo, na coroa

$$\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1, \text{ a soma da}$$

série (V.3) é uma função analítica.

Seja  $f(z)$  esta função. Vejamos qual a relação que há entre a soma  $f$  e os coeficientes  $A_n$  da série (V.3). Se  $\gamma$  é uma circunferência de centro  $z_0$  e raio  $\rho$ , tal que  $\rho_2 < \rho < \rho_1$ , mostremos que

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}} dw \quad (V.4)$$

(como já vimos, esta expressão é válida no caso em que só existam

coeficientes com índices positivos). De fato, se  $\Gamma = \gamma(|a, b|)$  é a imagem de  $\gamma$ , então sobre  $\Gamma$  a convergência de (V.3) é uniforme e, fixado um índice  $m$  é possível multiplicá-la, termo a termo, por

$$\frac{1}{(w - z_0)^{m+1}}$$

que teremos, ainda, uma série uniforme absolutamente convergente, dando:

$$\frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (w - z_0)^{n-m-1}$$

Esta série pode, portanto, ser integrada termo a termo sobre  $\gamma$ , e, como

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (w-z_0)^{n-m-1} dw = \begin{cases} 0 & \text{se } n-m-1 \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n-m-1 = -1 \end{cases}$$

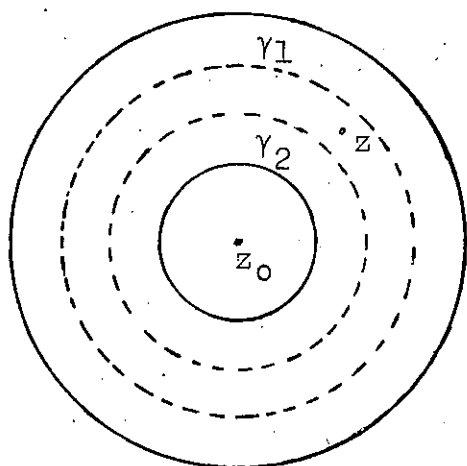
obtemos o seguinte resultado:

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{m+1}} dw = 2\pi i A_m, \text{ o que demonstra (V.4).}$$

Veremos a seguir que vale a recíproca dêste fato, isto é, se  $f$  é uma função analítica numa coroa  $\rho_2 < |z-z_0| < \rho_1$ , então  $f$  admite um desenvolvimento em série de Laurent. As fórmulas (V.4) mostram que se existir o desenvolvimento êle é único.

Demonstramos, então, a existência do desenvolvimento de Laurent para a função  $f$  analítica na coroa  $\rho_2 < |z-z_0| < \rho_1$ .

Seja  $z$  um ponto qualquer da coroa e consideremos circunferências  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  de centro  $z_0$  e tais que



$\rho_2 < \text{raio de } \gamma_2 < |z-z_0| < \text{raio de } \gamma_1 < \rho_1$ .

Pela fórmula de Cauchy relativamente à fronteira da coroa limitada por  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  teremos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw ;$$

ora, quando  $w$  é um ponto de  $\gamma_1$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \\ &= \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

porque então:  $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$  e a série em questão converge (e mais, como raio de  $\gamma_1 < \rho_1$ , a série converge uniforme e absolutamente).

Então, podemos escrever:

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw .$$

Donde, se pusermos:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad (V.5)$$

( $\gamma$  uma circunferência qualquer da coroa em questão e de centro  $z_0$ ), teremos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Observe-se que, pelo teorema de Cauchy-Goursat, no cálculo dos  $a_n$  pode-se tomar a integral sôbre uma circunferência  $\gamma$  qualquer não precisando ser  $\gamma_1$ .

Analogamente, se  $w$  é um ponto de  $\gamma_2$  teremos:

$$\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| < 1$$

e podemos escrever:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(z-z_0) - (w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = \\ &= \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

o que é, de modo análogo, uniforme e absolutamente convergente e podemos, então, integrar:

$$-\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} \int_{\gamma_2} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw,$$

donde, se pusermos

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw, \quad (V.6)$$

teremos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Concluindo, podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad (V.7)$$

que é o desenvolvimento em série de Laurent para  $f(z)$ .

Observe-se que as fórmulas (V.5) e (V.6) são as mesmas (V.4), em que  $A_m = a_m$  para  $m \geq 0$  e  $A_m = b_{-m}$  para  $m < 0$ .

Como exemplo, vejamos as funções seguintes:

1.  $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$  que é analítica para  $z \neq z_0$  e cujos coeficientes de Laurent são, obviamente,  $A_m = 0$ ,  $m \neq -n$  e

$$A_{-n} = 1.$$

2.  $f(z) = \frac{e^z}{z}$ , analítica para  $z \neq 0$ , cujo desenvolvimento de Laurent é obtido a partir do desenvolvimento em série de

Taylor de  $e^z$ :

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \text{ isto é,}$$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad b_1 = 1 \quad \text{e} \quad b_n = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

3.  $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$  que é analítica para  $z \neq 0$ ,  $z \neq i$  e

$z \neq -i$ . Podemos considerar duas coroas com centro na origem nas quais  $f$  seja analítica:  $0 < |z| < 1$  e  $|z| > 1$ :

$z_0$ . O ponto singular removível pode aparecer de duas maneiras:

- a partir de uma função analítica, em que se muda o valor no ponto  $z_0$  como no seguinte exemplo: a função  $f(z) = \text{sen } z$ , para  $z \neq 0$  e  $f(0) = 1000$  tem um ponto singular removível na origem, pois volta a ser analítica, se consideramos  $f(0) = 0$ ;

- funções definidas por expressões aparentemente indeterminadas, como é o caso, por exemplo, da função  $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$  que aparentemente, não está definida para  $z = 0$ . Demonstra-se que, se pusermos  $f(0) = 1$ , obtemos uma função analítica na origem: de fato, como  $\text{sen } z$  tem um zero na origem e é uma função analítica, sabe-se, pelo corolário 1 do §IV.9, que se pode escrever

$$\text{sen } z = z^m g(z) ,$$

em que  $m \geq 1$  e  $g$  é uma função analítica numa vizinhança da origem e  $g(0) \neq 0$ . Se  $m > 1$  também a derivada de  $\text{sen } z$  se anularia na origem, o que não é verdade, então  $m = 1$  e tem-se

$$\text{sen } z = z g(z) ,$$

donde  $\frac{\text{sen } z}{z} = g(z)$  é analítica na origem. Então, como sôbre a reta real tem-se  $\frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow 0$ , certamente, teremos também  $g(0) = 1$ , isto é,  $f(z) = g(z)$  é uma função analítica também na origem, desde que se faça  $f(0) = g(0) = 1$ .

2. um ponto singular isolado  $z_0$  da função  $f$  diz-se um polo de ordem  $m$  - com  $m$  inteiro,  $m \geq 1$  - se a função

$g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ , definida numa vizinhança de  $z_0$ , fôr uma função analítica em  $z_0$  e tal que  $g(z_0) \neq 0$ . No caso de  $m = 1$ ,  $z_0$  diz-se um polo simples de  $f$ , quando  $m = 2$ ,  $z_0$  é polo du-



plo, etc. Condições equivalentes a esta são:

-  $z_0$  é polo de ordem  $m$  de  $f \Leftrightarrow f$ , numa vizinhança de  $z_0$ , tem a forma seguinte:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z), \text{ onde } g(z) \text{ é analítica e não nula em } z_0.$$

-  $z_0$  é polo de ordem  $m$  de  $f \Leftrightarrow \frac{1}{f(z)}$  é analítica numa vizinhança de  $z_0$  e tem, em  $z_0$ , um zero de ordem  $m$ .

Exemplos:  $f(z) = \cotg z$  tem, na origem, um polo simples.

Com efeito, pois,  $z \cotg z = \cos z \frac{z}{\sen z}$  é uma função analítica numa vizinhança da origem como produto das funções  $\cos z$ , que é inteira, e do inverso da função analítica  $\frac{\sen z}{z}$  que não se anula na origem. Aliás, é fácil verificar que todos os pontos singulares de  $\cotg z$  são polos simples.

3. um ponto singular isolado  $z_0$  da função  $f$  que não seja removível nem um polo, diz-se, um ponto singular essencial. Mais adiante, daremos um modo simples para verificar que a função  $e^{1/z}$  tem um ponto singular essencial na origem.

A seguir, veremos como é possível o reconhecimento destes pontos a partir do desenvolvimento de Laurent de  $f$ : Lembremos que, sendo  $z_0$  um ponto singular isolado de  $f$  e, portanto, sendo  $f$  analítica na região  $0 < |z-z_0| < \rho$ , com o que vimos no §V.1,  $f$  admite, nessa região, um desenvolvimento em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

onde os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são definidos como em (V.5) e (V.6).

Podemos enunciar as seguintes proposições que servem para classificar o ponto singular isolado  $z_0$  de acordo com os coeficientes  $b_n$  desse desenvolvimento.

Proposição V.1 - O ponto  $z_0$  será removível quando, e só quando, todos os  $b_n$  fôrem nulos, isto é,  $b_n = 0$ ,  $n=1,2,\dots$ . Neste caso, o valor que se deve atribuir a  $f$ , em  $z_0$ , para torná-la analítica é  $a_0$ .

A demonstração é evidente e se conclui da unicidade do desenvolvimento de Laurent. De fato, dizer que  $z_0$  é ponto removível equivale a dizer que a função  $g(z) = f(z)$  quando  $z \neq z_0$  e  $g(z_0) = c_0$  é analítica numa vizinhança de  $z_0$ , isto é,  $g$  admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de  $z_0$

$$g(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

e este é o desenvolvimento de Laurent para  $f$ , quando  $z \neq z_0$ . Ou seja,  $g(z_0) = c_0 = a_0$ , em geral,  $a_n = c_n$  e  $b_n = 0$ ,  $n=1,2,\dots$

Proposição V.2 - O ponto  $z_0$  será um polo de ordem  $m$  quando, e só quando, os  $b_n$  se anularem de  $m+1$  em diante ou mais precisamente:  $b_m \neq 0$  e  $b_n = 0$ ,  $n=m+1,m+2,\dots$

Demonstração: Se  $z_0$  é polo de ordem  $m$ , a função  $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$  é analítica numa vizinhança de  $z_0$  admitindo, portanto, um desenvolvimento de Taylor da forma:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z_0) = c_0 \neq 0.$$

Então, para  $z \neq z_0$ , teremos, efetuando a divisão por  $(z-z_0)^m$

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z-z_0} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-z_0)^n$$

que é seu desenvolvimento de Laurent em torno de  $z_0$ , donde, por identificação dos coeficientes, tiramos:

$$b_m = c_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad b_n = 0, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

Reciprocamente, se o desenvolvimento de Laurent de  $f$  tem os coeficientes  $b_n = 0$  para  $n > m$  e  $b_m \neq 0$ , então a função

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \\ + \dots$$

é a soma de uma série de potências convergentes do tipo (V.1) sendo, portanto uma função analítica numa vizinhança de  $z_0$  e, mais,

$$g(z_0) = b_m \neq 0, \quad \text{c.q.d.}$$

Destas duas proposições e já que a definição de ponto singular essencial é a negativa das anteriores, conclui-se que vale o seguinte:

Proposição V.3 - O ponto singular isolado  $z_0$  será essencial quando, e só quando, houver uma infinidade de coeficientes  $b_n$  não nulos.

Daqui se conclui, que, realmente a função  $e^{1/z}$  tem na origem um ponto singular isolado essencial, pois seu desenvolvimento em série de Laurent em torno da origem é o seguinte: para  $z \neq 0$ ,

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

### V.3 - Resíduos

Se  $z_0$  é um ponto singular isolado da função  $f$ , define-se o resíduo de  $f$  no ponto  $z_0$ , que se indica com  $\text{res } f_{z_0}$ , como:

$$\boxed{\text{res } f_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz}, \quad (V.8)$$

onde a integral é calculada, como foi convencionado, sobre uma curva lisa por partes, fechada, simples (isto é, sem auto-intersecções) que contenha  $z_0$  no seu interior, mas não contenha nenhum outro ponto singular de  $f$ , orientada positivamente. Tomando nas fórmulas (V.6) que definem os coeficientes  $b_n$ ,  $n=1$ , verifica-se que

$$\text{res } f_{z_0} = b_1 \quad (V.9)$$

em que  $b_1$  é o coeficiente de  $\frac{1}{z-z_0}$  no desenvolvimento de Laurent de  $f$  para  $0 < |z-z_0| < \rho$ .

Segue-se imediatamente o seguinte:

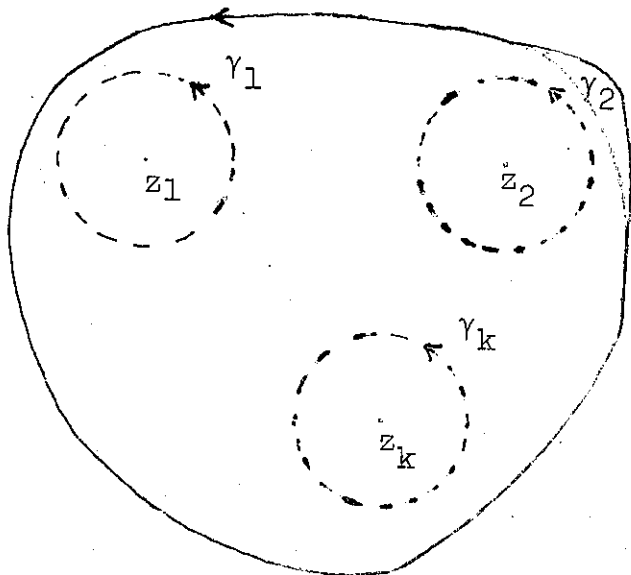
Teorema V.1 - Seja  $f$  uma função analítica numa região do plano complexo. Se  $\gamma$  é uma curva simples, fechada e li-

sa por partes orientada positivamente que contenha no seu interior sòmente um número finito de pontos singulares isolados de  $f$ :

$z_1, z_2, \dots, z_k$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_2} f + \dots + \operatorname{res}_{z_k} f)$$

Demonstração: A verificação é imediata. Como os pontos  $z_j$  são



isolados e estão no interior de  $\gamma$ , é possível considerar circunferências  $\gamma_j$  orientadas positivamente e de modo que: cada  $\gamma_j$  contém  $z_j$  no interior e nenhum outro ponto singular de  $f$ , as  $\gamma_j$  não se encontram entre si e estão tôdas

contidas no interior de  $\gamma$ . Nestas condições, a curva  $\gamma$  e as curvas  $-\gamma_1, \dots, -\gamma_k$  (isto é, percorridas no sentido negativo!) são a fronteira de uma região em que  $f$  é analítica, então, pelo teorema de Cauchy-Goursat (§IV.12), temos:

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} \dots - \int_{\gamma_2} \dots - \dots - \int_{\gamma_k} \dots = 0.$$

Ora, por (IV.8), temos que  $\int_{\gamma_j} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_j} f$ .

Levando isto na expressão acima, fica demonstrado o teorema.

O teorema V.1 mostra a vantagem do cálculo dos resíduos para o cálculo de integrais complexas. Esta vantagem é ainda maior pois, como veremos no próximo parágrafo e em outros, há algumas integrais reais, cujo cálculo elementar pode ser muito difícil, que se calculam facilmente por meio de integrais complexas e, portanto, por meio dos resíduos. Isto nos mostra a necessidade de construir algoritmos que facilitem o cálculo dos resíduos. Deixaremos, porém, isto para mais tarde, utilizando o próximo parágrafo com exemplos que bem ilustram a aplicação dos resíduos no cálculo de integrais reais.

Exemplos:

1. Sendo  $a > 0$ , calculemos a integral real

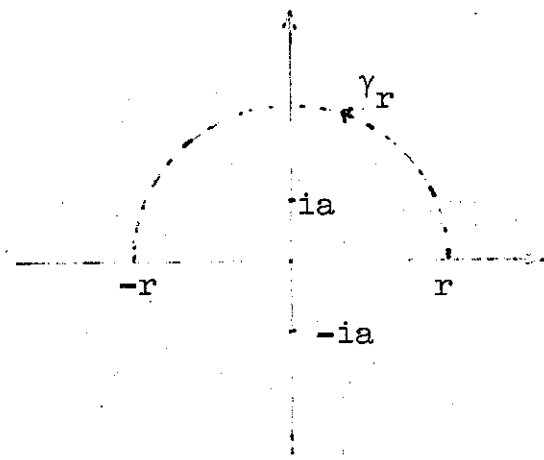
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$$

Tem-se

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{dx}{x^2+a^2}$$

A integral real  $I_r = \int_{-r}^r \frac{dx}{x^2+a^2}$  pode ser considerada como integral da função complexa  $\frac{1}{z^2+a^2}$  sobre o segmento do eixo real que vai de  $-r$  a  $r$ , isto é:

$$I_r = \int_{-r}^r \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_{-r}^r \frac{dz}{(z+ia)(z-ia)}$$



A função  $f(z) = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}$  tem dois pontos singulares isolados  $ia$  e  $-ia$  que são ambos polos simples, como se vê diretamente pela definição.

Se considerarmos a semi-circunferência  $\gamma_r$  de centro na origem e raio  $r$  contida no semi-

plano  $\text{Im } z \geq 0$ , e pelo Teorema V.1, onde tomamos como  $\gamma$  o caminho composto do segmento do eixo real que vai de  $-r$  a  $r$  e o arco  $\gamma_r$ , tem-se sempre que  $r > a$ :

$$I_r + \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z+ia)(z-ia)} = 2\pi i \text{ res}_{ia} f.$$

Primeiramente, pela fórmula de Cauchy, pode-se calcular o resíduo de  $\frac{1}{(z+ia)(z-ia)}$  no ponto  $ia$  e obtemos  $\frac{1}{2ia}$ . Calculemos, agora, a integral sobre  $\gamma_r$  e mostremos que ela tende a 0 quando  $r \rightarrow \infty$ :

Em  $\gamma_r$ , tem-se  $z = r e^{i\theta}$ , onde  $0 \leq \theta \leq \pi$ , logo:

$$\int_{\gamma_r} \dots = \int_0^\pi \frac{r i e^{i\theta}}{r^2 e^{2i\theta} + a^2} \cdot d\theta = \frac{i}{r} \int_0^\pi \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + \frac{a^2}{r^2}} \cdot d\theta$$

que, como a função integranda tem módulo limitado para  $r$  arbitrariamente grande, tende a 0 quando  $r \rightarrow \infty$  pois vem multiplicada por  $\frac{1}{r}$ .

$$\text{Logo, } I = \lim_{r \rightarrow \infty} I_r = 2\pi i \text{ res}_{ia} f - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \dots =$$

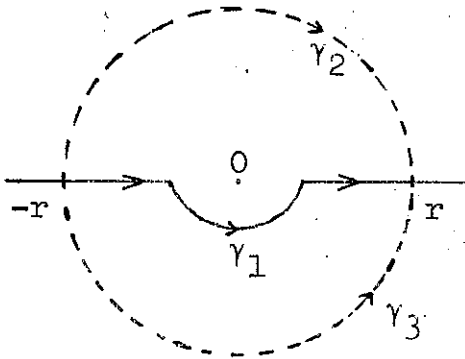
$$= 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a}$$

Temos, então o seguinte resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}$$

2. Calculemos a integral:  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$  .

$$\begin{aligned} \text{Ora; } I &= \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{\text{sen } x}{x} dx . \end{aligned}$$



Novamente, se pomos

$$I_r = \int_{-r}^r \frac{\text{sen } z}{z} dz ,$$

podemos considerá-la como integral complexa da função inteira  $\frac{\text{sen } z}{z}$  :

$$I_r = \int_{-r}^r \frac{\text{sen } z}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\text{sen } z}{z} dz , \text{ pois, sendo a função inte-}$$

granda analítica em todo o plano, podemos considerar o caminho  $\gamma_1$  que substitui um intervalo contido em  $]-r, r[$  por uma semi-circunferência do semi-plano  $\text{Im } z \leq 0$ , como na figura.

Levando (II.7) em conta, podemos ainda escrever:

$$I_r = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{-iz}}{z} dz .$$



A função  $\frac{e^{iz}}{z}$  tem um polo simples na origem onde se pode calcular o resíduo pela fórmula de Cauchy e obtém-se:

$$\operatorname{res}_0 \frac{e^{iz}}{z} = 1$$

Por outro lado, se  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  são, respectivamente, a semi-circunferência superior e inferior da circunferência de centro na origem e raio  $r$  orientadas como na figura, então:

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + 2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{e^{iz}}{z} \quad e$$

$$\frac{-1}{2i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{-iz}}{z} dz = \frac{-1}{2i} \int_{\gamma_3} \frac{e^{-iz}}{z} dz .$$

Mostremos, que, nas expressões acima, as integrais sôbre  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  tendem a 0 quando  $r \rightarrow \infty$ . De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz &= - \int_0^\pi \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi e^{ir(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} d\theta = \\ &= -i \int_0^\pi e^{ircos\theta} e^{-r\operatorname{sen}\theta} d\theta . \end{aligned}$$

Em módulo, tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &\leq \int_0^\pi |e^{ircos\theta} e^{-r\operatorname{sen}\theta}| d\theta = \int_0^\pi e^{-r\operatorname{sen}\theta} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\operatorname{sen}\theta} d\theta . \end{aligned}$$

Tem-se, ainda que para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $1 \geq \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$ , logo  $\operatorname{sen} \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ , donde

$$\int_{\gamma_2} \dots \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2r\theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi}{r} \left[ e^{-r \frac{2\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{r} [1 - e^{-r}]$$

que tende a 0 quando  $r \rightarrow \infty$ .

Analogamente, demonstra-se que  $\int_{\gamma_3} \frac{e^{-iz}}{z} dz \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , donde se conclui finalmente, que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

### 3. Cálculo das integrais de Fresnel (que aparecem na Ótica):

Provemos que:

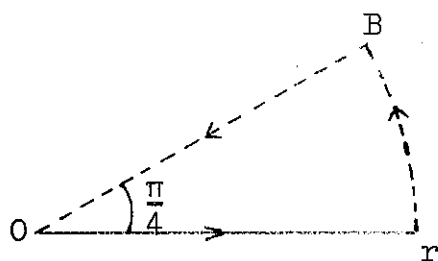
$$I = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \text{sen } x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

Ora,  $\cos x^2$  e  $\text{sen } x^2$  são, respectivamente, parte real e imaginária da função analítica  $e^{iz^2}$  quando  $z$  está no eixo real.

Seja  $\gamma$  o caminho que vai da origem ao ponto  $r$ , daí ao ponto

$$B = r e^{i\pi/4}$$

sobre a circunferência de raio  $r$  e voltando a origem por um segmento. Como a função  $e^{iz^2}$



é inteira, tem-se

$$\int_{\gamma} e^{iz^2} dz = 0 .$$

Esta integral pode ser decomposta do seguinte modo:

$$0 = \int_{\gamma} \dots = \int_{0r} e^{iz^2} dz + \int_{rB} e^{iz^2} dz + \int_{B0} e^{iz^2} dz .$$

Calculemos cada uma das integrais do 2º membro:

$$\text{Or } \int_0^r e^{iz^2} dz = \int_0^r e^{ix^2} dx = \int_0^r \cos x^2 dx + i \int_0^r \sin x^2 dx, \quad \text{que}$$

tendem para a integrais que pretendemos calcular:

$$\int_{rB} e^{iz^2} dz = \int_0^{\pi/4} e^{ir^2 e^{2i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = ir \int_0^{\pi/4} e^{ir^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} e^{i\theta} d\theta =$$

$$= ir \int_0^{\pi/4} e^{i(r^2 \cos 2\theta + \theta)} e^{-r^2 \sin 2\theta} d\theta, \text{ então, tomando os módulos:}$$

$$\left| \int_{rB} \dots \right| \leq r \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 \sin 2\theta} d\theta.$$

Pelo que vimos no caso anterior, considerando agora  $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$ , temos:

$$\sin 2\theta \geq \frac{4\theta}{\pi}$$

logo

$$\left| \int_{rB} \dots \right| \leq r \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 \frac{4\theta}{\pi}} d\theta = r \left[ -\frac{\pi}{4r^2} e^{-r^2 \frac{4\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4r} [1 - e^{-r^2}]$$

que tende a 0 quando  $r \rightarrow \infty$ .

Continuando:

$$\begin{aligned} \int_{B0} e^{iz^2} dz &= - \int_0^B e^{iz^2} dz = - \int_0^r e^{i\rho^2} e^{i \frac{\pi}{2}} e^{i \frac{\pi}{4}} d\rho = \\ &= - e^{i \frac{\pi}{4}} \int_0^r e^{-\rho^2} d\rho \xrightarrow{r \rightarrow \infty} - e^{i \frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Lembremos como se pode calcular a integral real

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx :$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \left[ \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]^{\frac{1}{2}}$$

fazemos agora a transformação para coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

e obtemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right)_0^{\infty} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Temos então:

$$\int_{B0} e^{iz^2} dz \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} (1+i) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Agrupando os resultados temos, finalmente:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+i}{2}, \text{ o que demonstra que}$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

#### V.4 - Cálculo do resíduo num polo simples.

Seja  $z_0$  um polo simples (polo de ordem  $m=1$ ) da função  $f$ .

Lembramos que, nestas condições, numa vizinhança de  $z_0$  e para  $z \neq z_0$  pode-se escrever

$$f(z) = \frac{b_+}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

em que  $b_1 \neq 0$  é o resíduo de  $f$  no polo  $z_0$ .

Neste parágrafo, veremos algumas regras práticas para o cálculo do  $\text{res}_f^{z_0}$  que podem ser aplicadas uma ou outra conforme seja mais conveniente.

Vejam os em primeiro lugar que

$$\text{res}_f^{z_0} = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] \quad (\text{V.10})$$

De fato, dizer que  $z_0$  é polo simples equivale a dizer que a função  $g(z) = (z - z_0)f(z)$  é analítica em  $z_0$  com  $g(z_0) \neq 0$ ; então:

$$g(z) = g(z_0) + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \dots$$

logo para  $z \neq z_0$ :

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} = \frac{g(z_0)}{z - z_0} + C_1 + C_2(z - z_0) + \dots$$

que deve ser portanto, o desenvolvimento em série de Laurent de  $f$  em torno de  $z_0$ , logo  $b_1 = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$ .

Vejam os que o resíduo pode também ser calculado por

$$\text{res}_f^{z_0} = b_1 = \left\{ \left[ \frac{d}{dz} \frac{1}{f} \right]_{z_0} \right\}^{-1} \quad (\text{V.11})$$

Conservando a mesma notação temos:

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{f(z)} = \frac{d}{dz} \frac{z - z_0}{g(z)} = \frac{1}{g(z)} - (z - z_0) \frac{g'(z)}{g^2(z)},$$

donde:

$$\left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{f(z)} \right) \right]_{z=z_0} = \frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{\text{res}_f^{z_0}},$$

o que demonstra a fórmula (V.11). A fórmula (V.11) envolve os

seguintes passos: "inverter, derivar, substituir e inverter".

No caso em que  $f(z)$  seja um quociente de forma

$$f(z) = \frac{h(z)}{k(z)},$$

com  $k$  e  $h$  funções analíticas numa vizinhança de  $z_0$  tais que:  $h(z_0) \neq 0$ ,  $k(z_0) = 0$  e  $k'(z_0) \neq 0$ , então  $f$  tem, em  $z_0$ , um polo simples e seu resíduo pode ser calculado por

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \frac{h(z_0)}{k'(z_0)} \quad (\text{V.12})$$

Basta, para verificar a fórmula acima, aplicar uma das fórmulas (V.11) ou (V.10).

Por (V.11), por exemplo

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_0} \frac{h}{k} &= \left\{ \left[ \frac{d}{dz} \frac{k}{h} \right]_{z_0} \right\}^{-1} = \frac{h(z_0) k'(z_0) - h'(z_0) k(z_0)}{h^2(z_0)} = \\ &= \frac{h(z_0)}{k'(z_0)}. \end{aligned}$$

Exemplos:

1. Consideremos a função  $\operatorname{tg} z$ , cujos pontos singulares

$z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , são polos simples (pois,  $\frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{\cos z}{\sin z}$  tem, nesses pontos, zeros simples) e calculemos seu resíduo em cada um desses polos. Sendo  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , podemos tomar  $h(z) = \sin z$  e  $k(z) = \cos z$  e aplicar a fórmula (V.12), pois estão satisfeitas as condições exigidas e obtemos:

$$\operatorname{res}_{z_k} \operatorname{tg} z = \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. Calculemos o resíduo de  $f(z) = \frac{\log z}{z^2+1}$  nos polos simples  $z_0 = i$  e  $z_1 = -i$ . Usando a regra (V.10), temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f &= \lim_{z \rightarrow i} \left[ (z-i) \frac{\log z}{(z+i)(z-i)} \right] = \frac{\log i}{2i} = \frac{1}{2i} i \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

### V.5 - Cálculo do resíduo num polo de ordem m:

Mostraremos que em geral, se  $z_0$  é um polo de ordem  $m$  de  $f$ , a fórmula (V.10) se generaliza da seguinte maneira:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-z_0)^m f(z) \right]_{z=z_0} \quad (\text{V.14})$$

Como  $f$  tem 1 polo de ordem  $m$  em  $z_0$ , para  $z$  numa vizinhança de  $z_0$  a função  $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$  é analítica e  $g(z_0) \neq 0$ . Então, numa vizinhança de  $z_0$  temos:

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

logo, para  $z \neq z_0$  nesta vizinhança:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)^m} + \frac{g'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{g''(z_0)}{2!} \frac{1}{(z-z_0)^{m-2}} + \dots + \\ &+ \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{z-z_0} + \dots \end{aligned}$$

que será, portanto, o desenvolvimento de  $f(z)$ , em série de Laurent na vizinhança do polo  $z_0$ , donde tiramos:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

que é a mesma fórmula (V.14).

Exemplos:

1. Calcular  $\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{(z^3+1)^3}$ . Ora  $(z^3+1)^3 = (z+1)^3 \cdot (z^2-z+1)^3$

tem um zero de ordem 3 no ponto  $-1$ , logo para  $f(z) = \frac{1}{(z^3+1)^3}$ ,  $z_0 = -1$  é um polo de ordem 3. Aplicando a fórmula (V.14),

com  $m = 3$ , para calcular o resíduo, tem-se:

$$\operatorname{res}_{-1} f = \frac{1}{2} \left[ (z+1)^3 \frac{1}{(z^3+1)^3} \right]''_{z=-1} = \frac{1}{2} \left[ (z^2-z+1)^{-3} \right]'_{z=-1}, \text{ ora:}$$

$$\left[ (z^2-z+1)^{-3} \right]'' = -3 \cdot \left[ (z^2-z+1)^{-4} (2z-1) \right]' = 6 \left[ 2(z^2-z+1)^{-5} (2z-1)^2 - (z^2-z+1)^{-4} \right]$$

logo, com a substituição  $z = -1$ :  $\operatorname{res}_{-1} f = \frac{5}{27}$ .

2. Calcular  $\operatorname{res}_0 \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$ . A função  $1 - e^{2z}$  tem um zero simples

na origem enquanto  $z^4$  tem um zero de ordem 4, logo  $f(z) =$

$(1 - e^{2z}) : z^4$  tem um polo de ordem  $m = 3$  na origem. Neste

caso, o mais fácil é recorrer diretamente ao desenvolvimento de

Laurent de  $f(z)$  na origem:

$$\frac{1 - e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!} \right) = -\frac{2}{z^3} - \frac{2^2}{2!z^2} - \frac{2^3}{3!z} - \frac{2^4}{4!} - \frac{2^5}{5!} z - \dots$$

Donde se tira o coeficiente de  $\frac{1}{z}$ :  $b_1 = -\frac{4}{3}$ .

3. Calcular  $\operatorname{res}_1 \frac{(\log z)^3}{(z-1)^5}$ . Como a função  $\operatorname{Log} z$  é multivalente

e  $\operatorname{Log} 1 = 2k\pi i$ ,  $K \in \mathbb{Z}$ , apresentam-se aqui 2 casos diferentes:

1º: quando  $K = 0$  (i.e. consideramos, a determinação principal



de  $\text{Log } z$  : aquela em que se toma  $-\pi < \arg z < \pi$  e  $\text{Log } z = \log |z| + i \cdot \arg z$ .  $\text{Log } z$  tem um zero simples no ponto  $z_0 = 1$ , pois  $\text{Log } 1 = 0$  e  $(\text{Log})'(1) = 1 \neq 0$ . Então a função  $f(z) = (\text{Log } z)^3 / (z-1)^5$  tem, no ponto 1, um polo de ordem  $m=2$ . Pela fórmula (V.14), devemos calcular a derivada da função

$$g(z) = (z-1)^2 f(z) = \left(\frac{\text{Log } z}{z-1}\right)^3, \text{ ora:}$$

$$g'(z) = 3 \left(\frac{\text{Log } z}{z-1}\right)^2 \left(\frac{\text{Log } z}{z-1}\right)'$$

Como, nesta forma,  $g'(1)$  envolve expressões indeterminadas, recorramos à série de Taylor de  $\text{Log } z / (z-1)$  para tais cálculos. De fato, para  $|z-1| < 1$ .

$$\frac{\text{Log } z}{z-1} = 1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{3} - \frac{(z-1)^3}{4} + \dots, \quad \text{logo}$$

$$\left(\frac{\text{Log } z}{z-1}\right)' = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(z-1) - \frac{3}{4}(z-1)^2 + \dots, \quad \text{donde}$$

pela substituição  $z = 1$ , tem-se:

$$g'(1) = 3 \cdot 1^3 \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \text{res}_1 f = g'(1) = -\frac{3}{2}.$$

2º: quando  $K \neq 0$ , então  $\text{Log } 1 = 2K\pi i \neq 0$  e  $f(z) = (\text{Log } z)^3 / (z-1)^5$  tem no ponto 1 um polo de ordem  $m=5$ . Donde:

$$\begin{aligned} \text{res}_1 f &= \frac{1}{4!} \left[ (z-1)^5 (\text{Log } z)^3 / (z-1)^5 \right]_{z=1}^{\text{IV}} = \frac{1}{4!} \left[ (\text{Log } z)^3 \right]_{z=1}^{\text{IV}} = \\ &= \frac{1}{4!} \left[ -\frac{36}{z^4} - \frac{18(\text{Log } z)^2}{z^4} + \frac{66 \text{Log } z}{z^4} \right]_{z=1} = \frac{3}{2} [2K^2\pi^2 - 1] + \frac{11}{2} K\pi i. \end{aligned}$$

4. Dada a função  $f(z) = \frac{1}{(z^3 + 1)^2}$ , calcular  $I(z_0, r) =$

$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$ , onde  $z_0$  e  $r$  devem ser tais que a circunferência  $|z-z_0|=r$

$|z-z_0| = r$  não passe por ponto singular de  $f(z)$ .

Os pontos singulares de  $f(z)$  são os pontos  $-1, \alpha, \bar{\alpha}$ , onde

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}), \text{ pois}$$

$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2-z+1) = (z+1)(2-\alpha)(z-\bar{\alpha}).$$

São todos zeros simples de  $z^3+1$ , portanto, serão polos de ordem 2 de  $f(z)$ . Calculando os resíduos em  $-1$  e  $\alpha$ , por meio de (V.e), obtêm-se:

$$\text{res}_1 f = \left[ (z+1)^2 f(z) \right]'_{z=-1} = \left[ (z^2-z+1)^{-2} \right]'_{z=-1} = \frac{2}{9};$$

$$\text{res}_\alpha f = \left[ (z-\alpha)^2 f(z) \right]'_{z=\alpha} = \left[ (z+1)^{-2} (z-\bar{\alpha})^{-2} \right]'_{z=\alpha} = -\frac{1}{9} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Comparando a expressão acima de  $\text{res}_\alpha f$  e a que nos daria  $\text{res}_{\bar{\alpha}} f$ , observa-se que, neste caso,  $\text{res}_{\bar{\alpha}} f = \overline{\text{res}_\alpha f}$ , logo

$$\text{res}_{\bar{\alpha}} f = -\frac{1}{9} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, o valor de  $I(z_0, r)$  é facilmente calculado pelo Teorema V.I bastando verificar quais dos pontos  $-1, \alpha, \bar{\alpha}$  pertencem ao círculo  $|z-z_0| < r$ , lembrando que  $\text{res}_z f = 0$  se  $f$  é analítica em  $z$ . Podemos escrever:

$$I(z_0, r) = 2\pi i \sum_{|z-z_0| < r} \text{res}_z f,$$

pois esta soma terá, no máximo, 3 parcelas não nulas.

Exercícios

1. Se uma função  $h$  é analítica em um ponto  $z_0$  e  $h(z_0) \neq 0$ , mostrar que  $z_0$  é um polo simples da função  $f(z) = \frac{h(z)}{z-z_0}$  e que  $h(z_0)$  é o resíduo de  $f$  nesse polo. Dar exemplos.
2. Se  $h(z_0) = 0$  no exercício anterior, provar que  $z_0$  é um ponto singular removível de  $f$ .
3. Mostrar que todos os pontos singulares de cada uma das seguintes funções são polos. Determinar a ordem  $m$  de cada polo e o resíduo da função nesse polo:

a)  $\frac{z+1}{z^2 - 2z}$   $[m = 1; -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

b)  $\operatorname{tgh} z$   $[m = 1; 1]$

c)  $\frac{1 - e^{2z}}{z^4}$   $[m = 3; -\frac{4}{3}]$

d)  $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

e)  $\frac{z}{\cos z}$

f)  $\frac{e^z}{z^2 - \pi^2}$

4. Achar o resíduo no ponto  $z = 0$  das funções:

a)  $\operatorname{cossec}^2 z$ ;    b)  $z^{-3} \operatorname{cossec} z^2$ ;    c)  $z \cos \frac{1}{z}$

(Resp.: a) 0; b)  $\frac{1}{6}$ ; c)  $-\frac{1}{2}$ ).

V.6 - Cálculo de integrais reais (impróprias) por meio de resí-  
duos.

Acompanhando o que foi feito no cálculo da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (\text{exemplo 1 do §V.5})$$

vemos que houve duas propriedades de  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ , que influíram essencialmente na conveniência do artifício usado:

1º: a função  $f(x)$  se estende a uma função analítica  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$  com um número finito de pontos singulares no semiplano superior: isto possibilitou a existência de um  $r$  de modo que ao substituir a integral de  $f$  sobre o segmento  $-r, r$  pela integral de  $f$  sobre a semi-circunferência  $S_r$  de raio  $r$ , centro na origem e contida no semiplano  $\text{Im } z \geq 0$ , acrescentávamos um termo (envolvendo a soma dos resíduos) - que era uma soma finita que se conservava constante quando  $r$  crescia para o  $\infty$ ;

$$2^\circ: \int_{S_r} f(z) dz \Rightarrow 0 \quad \text{quando } r \Rightarrow \infty .$$

Isto quer dizer que o mesmo artifício pode ser usado para o cálculo da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx ,$$

no caso em que  $f$  satisfizer as seguintes condições:

f1.  $f(x)$  é analítica para todo  $x \in \mathbb{R}$  e pode ser estendida a uma função analítica  $f(z)$ , que no semiplano  $\text{Im } z > 0$  tenha somente um número finito de pontos singulares (que, serão, portan

to, isolados);

f2.  $\int_{S_r} f(z)dz$  tende a 0 quando  $r \rightarrow \infty$ .

Com o mesmo processo, obtém-se então;

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}z > 0} \text{res}_z f \quad (V.15)$$

em que o 2º membro representa sempre uma soma finita graças à hipótese f1.

A seguir, vejamos alguns casos particulares em que estão satisfeitas as condições f1 e f2 e podemos, portanto, usar a fórmula (V.15).

Caso A em que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

é o quociente de dois polinômios P e Q, tais que:

=  $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , isto é, Q não se anula na reta real;

= grau Q  $\geq$  grau P + 2.

Vejamos, primeiramente, que nestas condições, existe a integral:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Sejam grau P = n e grau Q = m (m  $\geq$  n+2), então, se  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}$$

Seja  $p = m - n \geq 2$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^p} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \frac{b_0}{z^m}}$$

$\frac{P(z)}{Q(z)} = 0$  quando  $|z| \rightarrow \infty$  e mais, para  $|z|$  suficientemente grande, ou seja, para  $|z| > r_0$  ( $r_0$  conveniente):

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| < \frac{1}{|z|^p} M, \text{ em que se toma}$$

$$M = \left| \frac{a_n}{b_m} \right| + 1, \text{ já que } z^p \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ quando } |z| \rightarrow \infty.$$

Dada, então a integral  $I$ , fazemos a decomposição:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{-r} \dots + \int_{-r}^{+r} \dots + \int_{+r}^{+\infty} \dots,$$

ora a integral  $\int_{-r}^{+r} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  existe pois a função integranda é contínua nesse intervalo ( $Q(x) \neq 0$ ) e, se tomamos

$r > r_0$  :  $\left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \leq \frac{M}{x^p}$  e, sendo a função  $\frac{1}{x^p}$  ( $p \geq 2$ ) integrável nos intervalos  $[-s, -r]$  e  $[+r, +s]$ , fica provado que converge a integral  $I$  e que pode ser calculada como:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} \dots$$

Vejam se estão satisfeitas as condições  $f_1$  e  $f_2$ :

sendo  $Q(z)$  um polinômio tem um número finito de zeros, logo,

$f(z)$  tem um número finito de polos e, portanto, um número finito de polos no semiplano  $\text{Im}z > 0$  ( $f_1$ );

Quanto a f2: para  $r > r_0$ :

$$\left| \int_{S_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \pi r \frac{1}{r^p} M = \frac{\pi M}{r^{p-1}} \text{ que tende a } 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty$$

(pois  $p \geq 2$ ).

Pode-se, portanto, aplicar a fórmula (V.15) para o cálculo desta integral.

Exemplos:

1. Calcular  $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ .

Ora,  $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$  e esta integral enquadra-se no caso que vimos acima, logo teremos:

$$I = \pi i \sum_{\text{Im}z > 0} \text{res}_z \frac{1}{z^4 + 1}$$

Ora,  $z^4 + 1 = (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})(z - \beta)(z - \bar{\beta})$ , onde

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i)$$

Os polos de  $f(z)$  são  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$  e  $\bar{\beta}$  e são todos simples, mas somente  $\alpha$  e  $\beta$  estão no semiplano  $\text{Im}z > 0$ , temos então:

$$I = \pi i \left[ \text{res}_{\alpha} \frac{1}{z^4 + 1} + \text{res}_{\beta} \frac{1}{z^4 + 1} \right]$$

Calculemos êstes resíduos por (V.13), por exemplo:

$$\text{res}_{\alpha} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z^4 + 1)'_{z=\alpha}} = \frac{1}{4\alpha^3} = -\frac{\alpha}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8} (1 + i)$$

e  $\text{res}_{\beta} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4\beta^3} = -\frac{\beta}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{8} (-1 + i)$ .

Então  $I = -\pi i \frac{\sqrt{2}}{8} [1 + i - 1 + i] = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$ .

2. Calcular  $I = \int_0^{\infty} \frac{x^6}{(x^4+1)^2} dx$ .

Analogamente ao caso anterior:

$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+1)^2} dx$ , pode ser calculada do mesmo modo.

Os polos de  $f(z) = \frac{z^6}{(z^4+1)^2}$  são ainda os zeros de  $z^4 + 1$ :  $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$  e  $\bar{\beta}$  como no exemplo 1, aqui, no entanto estes pontos são polos duplos de  $f(z)$ .

$I = \pi i \left[ \underset{\alpha}{\text{res } f} + \underset{\beta}{\text{res } f} \right]$ .

Cálculos análogos ao caso precedente, mais longos, porém levam ao resultado final

$I = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$ .

Exercícios

1. Calcular  $\int_c \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$ , onde  $c$  é a circunferência percorrida no sentido antihorário:

a)  $|z-2| = 2$  [ $\pi i$ ]

b)  $|z| = 4$  [ $6\pi i$ ]

2. Achar o valor da integral da função  $\frac{1}{z^3(z+4)}$  ao longo da circunferência:

a)  $|z| = 2$  [ $\frac{\pi i}{32}$ ];      b)  $|z + 2| = 3$  [0].



3. Sendo  $C$  a circunferência  $|z| = 2$  descrita no sentido positivo, calcular:

a)  $\int_C \operatorname{tg} z \cdot dz$   $[-4\pi i]$  ;      b)  $\int_C \frac{dz}{\operatorname{senh} 2z}$   $[-\pi i]$

c)  $\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2 + 1)} dz$

4. Calcular a integral de  $f$  no sentido positivo ao longo da circunferência unitária em torno da origem, gerando  $f(z)$  é:

a)  $z^{-2} e^{-z}$   $[-2\pi i]$       b)  $z^{-1} \operatorname{cosec} z$   $[0]$

c)  $z^{-2} \operatorname{cosec} z$       d)  $z e^{\frac{1}{z}}$   $[\pi i]$

5. Se  $f$  é analítica em  $z_0$  e  $z_0$  é zero de ordem  $m$  de  $f$ , provar que  $\frac{1}{f}$  tem um polo de ordem  $m$  em  $z_0$ .

6. Seja uma função  $f$  analítica em um domínio  $D$  e seja  $z_0$  o único zero de  $f$  em  $D$ . Se  $\gamma$  é um contorno em  $D$  que envolve  $z_0$ , percorrida no sentido positivo, mostrar que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m$$

onde  $m$  é a ordem do zero  $z_0$ .

7. Mostrar, pelo método dos resíduos, que:

a)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = -\frac{\pi}{5}$

8. Calcular, pelo método dos resíduos:

a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 9^2}$

d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$

9. Se  $z_0$  fôr um zero simples de  $f(z)$ , mostrar que:

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint z \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

Cálculo de integrais reais (impróprias) por meio de resíduos:

Caso B.

Vejamos um 2º caso em que, estando satisfeitas as condições  $f_1$  e  $f_2$ , podemos aplicar a fórmula (V.15) para o cálculo de uma integral.

Seja  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx}$ , onde  $P$  e  $Q$  são polinômios tais que

- $Q(x)$  não tem raízes reais, isto é,  $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- grau de  $Q \geq$  grau de  $P + 1$ ;

$m$  é um número real:  $m \neq 0$ .

Vejamos que então, existe a integral de  $f(x)$  estendida toda a reta e pode ser calculada pela fórmula (V.15), dando-nos:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} . \quad (\text{V.16})$$

Mostremos a existência da integral  $I$

como

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a \dots + \int_c^b \dots + \int_b^{+\infty}$$

vejamos que existe cada uma das integrais do 2º membro: como  $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , então  $f(x)$  é contínua em toda a reta sendo, portanto, integrável no intervalo fechado  $[a, b]$ . Quanto à integral no intervalo  $[b, +\infty[$ , podemos fazer a integração por partes que é lícita já que os limites envolvidos existem, como o leitor pode verificar: de fato, se tomamos:

$$\int_b^B \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx = \frac{1}{im} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} \Big|_b^B - im \int_b^B \left[ \frac{P(x)}{Q(x)} \right]' e^{imx} dx \quad (V.17)$$

e se fizermos  $B \rightarrow +\infty$ :

$\left[ \frac{P(B)}{Q(B)} e^{imB} \right] = \left[ \frac{P(B)}{Q(B)} \right] \rightarrow 0$  quando  $B \rightarrow \infty$  porque, por hipótese, grau de  $Q \geq$  grau  $P+1$ , então o 1º termo no 2º membro de (V.17) tem limite finito para  $B \rightarrow \infty$ .

O 2º termo envolve a integral:

$$\left| \int_b^B \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} e^{imx} dx \right| \leq \int_b^B \left| \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} \right| dx$$

e temos, novamente, como no caso anterior (caso A do § V.8), um quociente de polinômios, onde o denominador tem grau  $\geq$  grau do numerador  $+2$  sendo, portanto, convergente a integral.

Raciocínio análogo mostra-nos ser convergente a integral

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx ,$$

logo, existe a integral  $I$  que pode ser calculada por:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx .$$

Podemos, então, considerar esta última integral como integral no campo complexo:

$$I_r = \int_{-r}^r \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx = \int_{-r}^r \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz$$

e, como anteriormente, considerar a semi-circunferência  $S_r$  com centro na origem e orientada de  $-r$  a  $r$  obtemos:

$$I_r = \int_{S_r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz + 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } z > 0 \\ |z| < r}} \text{res } \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz}$$

Sendo  $Q(z)$  um polinômio terá um número finito de zeros que são os únicos polos da função  $f(z)$  (que não apresenta outros tipos de singularidades). Tomemos  $r$  suficientemente grande de modo que  $f(z)$  seja analítica para  $|z| > r$  e, então, o termo  $\sum \text{res} \dots$  não varia se fizermos  $r \rightarrow \infty$  e mostremos que

$$J_r = \int_{S_r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty .$$

Sobre  $S_r$ , podemos fazer  $z = r e^{i\theta}$  e teremos:

$$J_r = - \int_0^\pi \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imre^{i\theta}} (i r e^{i\theta}) d\theta ,$$

onde:

$$|J_r| \leq \int_0^\pi \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \left| e^{imre^{i\theta}} \right| r d\theta \leq$$

$$\leq r \sup_{z \in S_r} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \int_0^\pi e^{-mr \sin \theta} d\theta,$$

vimos, no caso A, do §V.8, que se grau de  $Q = \text{grau de } P + p$ , com  $p \geq 1$ , então, existem  $M$  e  $r_0$  tais que, para  $r = |z| \geq r_0$ :

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{r^p}$$

e também que para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ :  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ , donde

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{mr \sin \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-mr \sin \theta} d\theta \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2mr}{\pi} \theta} d\theta = \left[ \frac{-\pi}{2mr} \right] e^{-\frac{2mr}{\pi} \theta} \Big|_0^{\pi/2} = \left[ \frac{-\pi}{2mr} \right] (e^{-mr} - 1). \end{aligned}$$

Usando estes dois fatos obtemos:

$|J_r| \leq \frac{M}{m^{p-1}} \left( -\frac{\pi}{mr} \right) (e^{-mr} - 1) \rightarrow 0$  quando  $r$  tende a infinito porque  $p \geq 1$ . C.Q.D.

Desdobrando a integral  $I$  em sua parte real e imaginária obtemos de (V.16) as seguintes fórmulas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos mx \, dx = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} \right] \quad (\text{V.18})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin mx \, dx = \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} \right] \quad (\text{V.19})$$

No caso em que  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  é uma função ímpar, a primeira

tas integrais se anula e, então, o 2º membro de (V.19) é um nú-  
o imaginário puro e temos, diretamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen} mx \, dx = 2\pi \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} . \quad (\text{V.20})$$

Anàlogamente, se  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  é uma função par, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos mx \, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} \quad (\text{V.21})$$

Exemplos:

Calcular  $I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{1+x^2} \, dx \quad (m \neq 0)$

Tem-se:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \operatorname{sen} mx \, dx ,$$

se enquadra no vaso estudado acima, em que  $\frac{x}{1+x^2}$  é função  
par, logo, por (V.20),

$$I = \pi \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \frac{z e^{imz}}{1+z^2} = \pi \operatorname{res}_i \frac{z e^{imz}}{1+z^2} ,$$

que esta função só tem os pontos singulares  $+i$  e  $-i$  que são  
os simples. Prosseguindo no cálculo:

$$\operatorname{res}_i \frac{z e^{imz}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \left[ (z-i) \frac{z e^{imz}}{1+z^2} \right] = \left[ \frac{z e^{imz}}{z+i} \right]_{z=i} = \frac{e^{-m}}{2}$$

Logo:

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-m} .$$

2. Calcular 
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4x + 5} dx .$$

Sendo  $z^2 + 4z + 5 = (z + 2 - i)(z + 2 + i)$ , a função

$$\frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5}$$

terá, como singularidades, os polos simples  $-2 + i$  e  $-2 - i$ , dos quais somente  $-2 + i$  está no semi-plano superior. Temos, portanto:

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{-2+i} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4z + 5} = 2\pi i \left[ \frac{e^{-2i-1}}{2i} \right] = \frac{\pi}{e} (\cos 2 - i \operatorname{sen} 2)$$

Daqui, tiramos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 4x + 5} = \frac{\pi}{e} \cos 2 \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{x^2 + 4x + 5} = -\frac{\pi}{e} \operatorname{sen} 2 .$$

### Exercícios

Calcular, por meio dos resíduos, as seguintes integrais:

1. 
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (a > 0)$$

2. 
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

3. 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2} \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \quad (a > b > 0)$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3} (1+ab) e^{-ab} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$5. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \operatorname{sen} a \quad (a > 0)$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = ?$$

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^2 + 4x + 5} = -\frac{\pi}{e} \operatorname{sen} 2$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^2 + b^2} dx = ?$$

$$9. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$10. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 1} dx$$



V.7 - Integrais envolvendo funções trigonométricas.

Veremos neste parágrafo, um outro tipo de integral real que pode ser calculada por meio de resíduos.

Seja

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta,$$

em que  $R$  é uma função racional de  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , contínua no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Observe-se que, sendo  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  funções periódicas de período  $2\pi$ , o intervalo  $[0, 2\pi]$  pode ser substituído por qualquer outro de amplitude  $2\pi$ :  $[a, a + 2\pi]$ .

Desta vez, consideraremos  $I$  como integral no campo complexo, efetuando a seguinte substituição:

$$z = e^{i\theta}$$

que nos dá:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [e^{i\theta} + e^{-i\theta}] = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} [e^{i\theta} - e^{-i\theta}] = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$i e^{i\theta} d\theta = dz \quad \therefore \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

obtemos então:

$$I = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz$$

e, pelas hipóteses feitas, sobre a circunferência  $|z|=1$  a função integranda é contínua. Apliquemos, agora, a esta integral o

Teorema V.1 e obtemos:

$$I = 2\pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{res}_z \frac{1}{z} R \left( \frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz} \right) \quad (\text{V.22})$$

Exemplos:

1. Calcular

$$I = \int_{-\pi}^0 \frac{d\theta}{4 - \cos \theta}$$

Podemos escrever

$$I = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{d\theta}{-4 + \cos \theta}$$

e esta integral, graças à observação feita a respeito do inter-

valo de integração, enquadrar-se no caso anterior e pode ser cal-

culada por (V.22), onde se tem:

$$R \left( \frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz} \right) = \frac{-z^2 + 8z - 1}{2z}$$

Sendo  $-z^2 + 8z - 1 = -(z - \alpha)(z - \beta)$ , com  $\alpha = 4 - \sqrt{15}$

e  $\beta = 4 + \sqrt{15}$  as singularidades da função são somente os polos simples  $\alpha$  e  $\beta$  e destes somente  $\alpha$  é interior ao círculo uni-

tário. Logo, por (V.22):

$$I = \pi \operatorname{res}_\alpha \frac{-z^2 + 8z - 1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{\pi}$$

2. Calcular  $I = \int_{2\pi}^0 \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta}$

Também esta integral pode ser calculada por (V.22) e teremos:

$$I = 2\pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{res}_z \frac{1}{z} \frac{1}{5 + 3 \frac{z^2 + 1}{2z}} = 2\pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{res}_z \frac{2}{3z^2 + 10z + 3}$$

Sendo  $3z^2 + 10z + 3 = 3(z - \alpha)(z - \beta)$ , com  $\alpha = -\frac{1}{3}$  e  $\beta = -3$ , estes serão os polos simples da função e são suas únicas singularidades.

Como  $|\alpha| < 1$  e  $|\beta| > 1$ , temos:

$$I = 4\pi \operatorname{res}_{-\frac{1}{3}} \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{\pi}{2}.$$

### Exercícios

Calcular, por meio dos resíduos, as seguintes integrais:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \pi \cdot 2$$

$$3. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (k^2 < 1)$$

$$4. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (k^2 < 1)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 + k^2 - 2k \cos \theta} d\theta = \frac{\pi k^2}{1 - k^2} \quad (k^2 < 1)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \pi a (a^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \quad (a > 1)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} \theta = \pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Integrar a função  $f(z) = e^{-z^2}$  sobre o contorno do retângulo  $-a \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq b$ . Em seguida, fazer  $a \rightarrow \infty$  para provar que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-b^2}$$

Integrar uma função  $f(z)$  conveniente sobre o contorno do retângulo  $-a \leq x \leq a$  e  $0 \leq y \leq 2\pi$ . Em seguida, fazer  $a \rightarrow \infty$  para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx} dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\sin k\pi}, \quad \text{onde } 0 < k < 1$$

Calcular  $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(b + \cos \theta)^2}$

Determinar e calcular as integrais que puderem ser calculadas por meio de resíduos:

a) 
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta + 2}$$

b) 
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$$

c) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 2x + 4}$$

d) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x + 2i} dx$$

e) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x + 2i} dx$$

f) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4 + \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

g) 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x+1} dx$$

.....

