INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

PEDRO NOWOSAD

6.° COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

POÇOS DE CALDAS

julho de 1967

APRESENTAÇÃO

Estas notas foram preparadas para um curso introdutório à Análise Funcional a ser apresentado durante o 6º Colóquio Brasileiro de Matemática.

São pré-requisitos os cursos de Álgebra Linear e de Análise Matemática, mas, do ponto de vista formal, o curso também é acessível a quem tenha Cálculo Avançado ao envés de Análise.

Devido ao prazo curto para realização do curso, muitos conceitos e resultados fundamentais nem sequer são citados; mas aqueles que apresentamos procuramos introduzir de maneira razoàvelmente completa. Também tivemos a preocupação de que as notas fossem auto-suficientes nos assuntos de que trata; com isto, aqui figura algo mais além daquilo que será dado no curso.

Ao entregar estas notas aos leitores, o fazemos esperando que lhes sejam úteis e que atinjam seu objetivo de introduzi-los ao estudo da Análise Funcional.

Pedro Nowosad

ÍNDICE

Capítulo 4 - Espaços de Hilbert

.-.-.-.-.

Capítulo 0

PRELIMINARES

Nêste capítulo revemos principalmente alguns conceitos e resultados da Teoria dos Conjuntos; alguns têrmos são utilizados sem que tenha sido dada sua definição.

0.1 - Conjuntos - Nosso objetivo é estudar propriedades de objetos ou relações entre os mesmos. Objetos serão representados por símbolos (letras, em geral); propriedades e relações por combinações dos símbolos dos objetos nelas envolvidos, com símbolos característicos da propriedade ou relação considerada.

Dos objetos que consideraremos temos inicialmente os conjuntos e os elementos. A relação $x \in X$ será lida: " x é um elemento do conjunto X ", ou " x pertence a X ". Sua negação escrever-se-á: $x \notin X$.

Empregaremos, também, as seguintes relações:

i) $x = y$, significando que os objetos x e y são o mesmo objeto; sua negação escrever-se-á $x \neq y$.

ii) Se X e Y são conjuntos a relação $X \subset Y$ significa que todo elemento de X é também elemento de Y; neste caso dizemos que X está contido em Y, ou que Y contém X ou ainda que X é sub-conjunto de Y. A negação desta relação será escrita $X \not\subset Y$.

iii) Se $X \subset Y$ e $Y \subset X$ escrevemos $X = Y$, isto é, dois conjuntos são considerados iguais se e só se tiverem os mesmos elementos.

Por extensão de conceito de conjunto definimos por conveniência o conjunto vazio $\emptyset$ como sendo aquele caracterizado pela relação $x \notin \emptyset$, qualquer que seja o objeto x. Daqui resulta, então, que $\emptyset \subset X$ qualquer que seja o conjunto X (prova por vacuidade; vêr 0.5).

Dado um conjunto X e uma propriedade P há um único sub-conjunto de X cujos elementos são exatamente aqueles elementos $x \epsilon X$ para os quais $P(x)$ é verdadeira; representâmo-lo por $\{x \epsilon X \mid P(x)\}$. É claro que podemos escrever $\emptyset = \{x \epsilon X \mid x \neq x\}$.

0.1.1 <u>Operações com Conjuntos</u> - Diferença de dois conjuntos X e Y nesta ordem é o conjunto $\{x \epsilon X \mid x \notin Y\}$, o qual se escreve $X - Y$. Quando $Y \subset X$ dizemos que $X - Y$ é o <u>complemento</u> de Y em relação a X e escrevemos $X - Y = C_X Y$.

O conjunto $\{x \epsilon X \mid x \epsilon Y\}$ é chamado intersecção de X e Y e escreve-se $X \cap Y$. Quando $X \cap Y \neq \emptyset$ diz-se que X e Y são <u>disjuntos</u>.

O conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos X, Y é chamado <u>união</u> de X e Y e escreve-se $X \cup Y$.

0.2 <u>Produto Cartesiano</u>. <u>Classes de equivalência</u>.

Dados dois objetos a, b podemos formar um novo objeto chamado seu <u>par ordenado</u> e representado por (a,b); entenderemos que $(a,b) = (a',b')$ se e só se $a = a'$ e $b = b'$.

Dados dois conjuntos X e Y, definimos produto cartesiano de X por Y ao conjunto $\{(x,y) | x \epsilon X,\ y \epsilon Y\}$. Êste novo conjunto é representado por $X \times Y$.

0.2.1 Uma relação entre objetos é dita binária quando ela envolve tão sòmente dois objetos de cada vez. Uma relação binária R entre elementos x do conjunto X e elementos y do conjunto Y, nesta ordem, é dita relação de X em Y. Quando $Y = X$ dizemos que a relação é sôbre X.

Ao sub-conjunto de $X \times Y$ formado pelos pares ordenados (x,y) para os quais a relação R é verdadeira, dá-se o nome de gráfico da relação R. É claro que todo subconjunto G de $X{\times}Y$ é o gráfico de uma relação, qual seja a relação $(x,y) \in G$.

Também escreveremos $x\ R\ y$ se R é verdadeira para o par (x,y).

0.22 Uma relação sôbre R é dita relação de equivalência se valem as propriedades:

i) $x\ R\ y \longrightarrow x\ R\ x$ (propriedade reflexiva)

ii) $x,\ y \in X,\ x \in X \longrightarrow yRx$ (propriedade simétrica)

iii) $x,y,z \in X,\ xRy,\ yRz \longrightarrow xRz$ (propriedade transitiva)

Se R é relação de equivalência sôbre X e se $x\ R\ y$, dizemos que x e y são equivalentes pela R e escrevemos também $x = y \mod R$.

0.2.3 Classes de Equivalência.

Dada uma relação de equivalência R sôbre um conjunto X e dado um elemento $x \epsilon X$ definimos classe de equivalência de $x \mod R$ ao sub-conjunto C de X dado por

$$C = \{ y \in X \mid y \, R \, x \}$$

É fácil verificar que todo elemento de X determina uma classe de equivalência mod R e uma só. Se entendermos por partição de X a uma coleção de subconjuntos de X dois a dois disjuntos, cuja união é X, então é claro que a coleção de tôdas as classes de equivalência mod R contidas em X é uma partição de X. Recìprocamente o leitor verificará que uma partição de C define uma relação de equivalência sôbre X.

0.3 Aplicações.

Sejam X e Y dois conjuntos e f uma relação de X em Y; se para todo x de X existe um e um único $y \in Y$ tal que $x \, f \, y$, dizemos que f é uma aplicação de X em Y e escrevemos $f: X \to Y$. f é também chamada função definida em X com valôres em Y. O conjunto X é chamado domínio de f.

O elemento y tal que $x \, f \, y$ será indicado também por $f(x)$ e denominado valor de f em x.

Seja $A \subset X$; chamamos imagem de A pela f ao conjunto representado por $f(A)$ e dado por

$$f(A) = \{ y \in Y \mid \exists \; x \in A : y = f(x) \} .$$

0.3.1 A aplicação $I_X : X \to X$ definida por $I_X x = x$ para todo $x \in X$ é chamada aplicação identidade de X.

0.3.2 Seja $f: X \to Y$ e $B \subset Y$. Chamamos de imagem inversa de B pela f ao subconjunto de X que denotamos por $f^{-1}(B)$ e definimos por

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} .$$

0.3.3 Dizemos que duas aplicações $f:X \to Y$ e $f':X' \to Y'$ são iguais se e só se tivermos $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = f'(x)$ para todo $x \in X$.

0.3.4 Seja $f:X \to Y$. Se A é subconjunto de X, a aplicação $g:A \to Y$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ chama-se <u>restrição da</u> f <u>ao subconjunto</u> A e indica-se por $f|A$.

0.3.5 Seja $f:X \to Y$. Dizemos que f é

i) <u>injetora</u> se $x, x' \in X$ e $f(x) = f(x')$ implicar $x = x'$ (f diz-se também $1:1$);

ii) <u>sobrejetora</u> se $f(X) = Y$, isto é, se para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que $y = f(x)$ (f diz-se também sôbre Y);

iii) <u>bijetora</u> se f fôr injetora e sobrejetora (neste caso diz-se também que f determina uma correspondência biunívoca entre X e Y).

0.3.6 Seja $f:X \to Y$ uma aplicação bijetora; chamamos <u>aplicação inversa</u> da f à aplicação $g:Y \to X$ que a $y \in Y$ associa o elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Denotamos g por f^{-1}.
É fácil ver que f^{-1} é também bijetora e que $(f^{-1})^{-1} = f$.

0.3.7 Sejam $f:X \to Y$ e $g:Y \to Z$. A aplicação $h:X \to Z$ definida por $h(x) = g\,f(x)$ para todo $x \in X$ é denominada <u>aplicação composta</u> de g com f, representando-se por $g \circ f$ ou gf.

<u>Observação:</u> Quando se tem uma aplicação $f:D \to Y$, com $D \subset X$, também se costuma escrever $f:X \to Y$. Neste caso quando não se faz menção explícita do domínio de f entende-se que seu domínio é X.

0.3.8 <u>Famílias.</u>

Sejam L e X dois conjuntos. Uma aplicação de L em X é também chamada uma <u>família de elementos de</u> X <u>indexada por</u> L. Representa-se esta aplicação por $\{x_\lambda\}_{\lambda \in L}$. Um dos casos mais comuns é aquele em que L é um subconjunto infinito do conjunto N dos inteiros positivos. Neste caso a família chama-se <u>sequência</u>. É preciso não confundir a família $\{x_\lambda\}_{\lambda \in L}$ com a imagem de L por esta aplicação. Assim, por exemplo, a sequência $\{x_i\}_{i \in N}$ definida pela condição $x_i = 1$, $i \in N$, tem como imagem tão sòmente o número 1.

Se os elementos da família $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ são subconjuntos de um dado conjunto X definimos <u>união desta família</u> ao conjunto

$$\{ x \in X \mid x \in X_\lambda \text{ para algum } \lambda \in L \},$$

que é denotado por $\bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$.

A intersecção desta família será o conjunto definido por

$$\{ x \in X \mid x \in X_\lambda \text{ para todo } \lambda \in L \},$$

que será denotado por $\bigcap\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$.

O leitor verificará que são válidas as seguintes regras de complementação:

$$\complement_X \left(\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L} \complement_X (X_\lambda) \quad \text{e} \quad \complement_X \left(\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda \right) =$$

$$= \bigcup_{\lambda \in L} \complement_X (X_\lambda).$$

0.4 Conjuntos enumeráveis.

Um conjunto X é dito equipotente a um conjunto Y quando existe uma bijeção, isto é, uma aplicação bijetora, de X sôbre Y. É fácil de verificar que esta relação entre dois conjuntos é uma relação de equivalência; em particular, para verificar a transitividade basta considerar a aplicação composta das duas aplicações envolvidas na definição.

Um conjunto é dito enumerável se e só se fôr equipotente a um subconjunto do conjunto N dos números inteiros positivos. Uma família $\{x_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é dita enumerável se L o fôr. Observamos que vale o seguinte resultado:

0.4.1 "A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável".

0.5 Prova por vacuidade.

Supomos os leitores familiarizados com as noções básicas definidas em Lógica. Aqui apenas analizaremos o tipo de prova chamado prova por vacuidade. Seja π uma proposição condicional, isto é, uma proposição que se expressa por uma sentença do tipo: "para todo x que satisfaz a condição..., vale a relação... ". Sua negação $\bar{\pi}$ é uma proposição existencial, isto é, da forma: "existe um x que satisfaz a condição..., e para o qual não vale a relação ... ". Sabemos que das duas, uma: ou π é verdadeira (e então $\bar{\pi}$ é falsa) ou $\bar{\pi}$ é verdadeira (e π é falsa). Se mostrarmos que $\bar{\pi}$ é falsa, π será verdadeira. Agora se o conjunto dos x que satisfazem a condição ..., é vazio, $\bar{\pi}$ é automàticamente falsa, e daí π é verdadeira. <u>Conclusão</u>: "uma proposição condicional definida sôbre um conjunto vazio X é automàticamente verdadeira". Prova por vacuidade é exatamente aquela que consiste em mostrar que X é vazio.

<u>Exemplo</u>: a proposição $\emptyset \subset X$ diz que todo elemento de $\emptyset$ é também elemento de X; portanto é condicional, e daí verdadeira pois está definida sôbre o conjunto vazio.

Capítulo 1

ESPAÇOS TOPOLÓGICOS . ESPAÇOS MÉTRICOS

ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

1.1 <u>Definição</u> - Um conjunto X com uma família T de subconjuntos de X é chamado um espaço topológico se T satisfaz às condições:

i) $\emptyset, X \in T$.

ii) A união de qualquer subfamília de T pertence a T.

iii) A intersecção de qualquer subfamília finita de T está em T.

A família T é chamada uma <u>topologia</u> em X e os elementos de T são chamados <u>conjuntos abertos</u> de X nesta topologia.

Exemplos: a) Se $X \neq \emptyset$ e $T = \{X, \emptyset\}$, T é claramente uma topologia de X.

b) Se $X \neq \emptyset$ e $T = \mathcal{P}(X)$ = conjunto das partes de X, T é uma topologia em X e é chamada <u>topologia discreta de</u> X.

1.2 <u>Definição</u> - Um conjunto F em um espaço topológico X é dito <u>fechado</u> se o seu complemento $\complement_X(F)$ fôr aberto, isto é, se seu complemento pertencer a T . Daqui resulta logo que $\emptyset$ e X são ao mesmo tempo abertos e fechados. Das regras de complementação vistas em 0.3 e das definições 1.1 e 1.2 resulta que a intersecção de uma família qualquer de fechados é um conjunto fechado e que a união finita de fechados é também é um fechado.

1.3 Definições - Se S é um subconjunto de X chamamos

i) a aderência (ou fêcho) de S à intersecção de todos os fechados que contém S, que é denotada por $\bar{S}$. Da observação imediatamente acima resulta que $\bar{S}$ é fechado. Mais ainda $S \subset \bar{S}$ e $S = \bar{S}$ se e só se S é fechado.

ii) interior de S à união de todos os subconjuntos de S que sejam abertos; êste novo conjunto será denotado por $\overset{\circ}{S}$.

iii) fronteira de S à intersecção $\bar{S} \cap \overline{\complement_X(S)}$, que será denotada por ∂S.

1.4 Definição - Dado um ponto $x \in X$ chamaremos de uma vizinhança dêste ponto x a um qualquer aberto que o contenha. Do mesmo modo dado $S \subset X$, um aberto U tal que $S \subset U$ será dito uma vizinhança do conjunto S.

1.5 Definição - Um ponto x é dito ponto de acumulação de um conjunto S, se qualquer vizinhança de x contiver algum ponto de S distinto de x.

O conjunto dos pontos de acumulação de S é chamado derivado de S e representa-se por S'.

Exercício: Verifique que $\bar{S} = S \cup S'$ e que portanto S é fechado se e só se $S' \subset S$.

1.6 Seja $\mathfrak{B}$ uma família de subconjuntos de um conjunto X

qualquer, satisfazendo às condições:

i) a todo $x \in X$ corresponde um $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$.

ii) se $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, há um $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

A partir de B podemos definir uma <u>topologia</u> T em X como segue. <u>Um conjunto</u> $S \subset X$ <u>será dito um conjunto aberto se para todo</u> $x \in S$ <u>existir um</u> $B \in \mathfrak{B}$ <u>tal que</u> $x \in B \subset S$. Em outras palavras, um aberto é uma união de conjuntos de $\mathfrak{B}$. Verifiquemos que T é topologia em X. De fato, $\emptyset \in T$ por vacuidade; X é aberto pela i). Quanto às demais condições, sejam S_1 e S_2 abertos e seja $S = S_1 \cap S_2$; dado $x \in S$ segue da definição que $x \in B_1 \subset S_1$ e $x \in B_2 \subset S_2$, com B_1 e $B_2 \in \mathfrak{B}$. Daí $x \in (B_1 \cap B_2)$. Pela ii) há um $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ e como $B_1 \cap B_2 \subset S$, segue que S é aberto; para a intersecção de n conjuntos, n inteiro > 2 o resultado segue por indução finita. Que a união de abertos é aberto segue diretamente da definição.

1.6.1 <u>Definição</u> - A família $\mathfrak{B}$ é dita uma <u>base</u> do espaço topológico X, cuja topologia T foi definida através de $\mathfrak{B}$ pelo processo dado acima.

Êste processo de construção de uma topologia é muito útil.

<u>Exemplo</u>: No espaço euclidiano n-dimensional R^n a seguinte família $\mathfrak{B}$ é uma base. Um conjunto B de $\mathfrak{B}$ é definido por meio de um ponto $x_o = (x_o^{(1)}, x_o^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)})$ e de um número real $r > 0$ do seguinte modo: B é o conjunto dos pontos

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$$

do R^n satisfazendo à condição

$$(x^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \ldots + (x^{(n)} - x_0^{(n)})^2 < r^2 .$$

Se $\mathfrak{B}$ fôr então a família de todos possíveis conjuntos B o leitor verá fàcilmente que as condições i) e ii) são satisfeitas. A topologia do R^n definida por esta base é dita <u>topologia habitual</u> do R^n.

1.7 <u>Comparação de Topologias</u>. Se duas topologias T_1 e T_2 em um mesmo conjunto X são tais que $T_1 \subset T_2$ dizemos que T_1 é uma topologia <u>mais fraca</u> que a T_2 e que T_2 é <u>mais forte</u> que T_1. Em outras palavras a topologia mais forte tem mais conjuntos abertos.

1.8 <u>Topologia gerada por uma família $\mathcal{A}$</u>. Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X. A família $T_{\mathcal{A}}$ constituida de $\emptyset$, X e das uniões de intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ é uma topologia em X.

<u>Exercício</u>: Verifique esta asserção.

$T_{\mathcal{A}}$ é dita <u>topologia gerada por</u> $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}$ é chamada <u>sub-base</u> da topologia $T_{\mathcal{A}}$.

1.9 Sejam $x_1, x_2 \in X$ pontos distintos e suponhamos X munido da topologia $T = [\phi, X]$. Então qualquer vizinhança de x_2 contém x_1, isto é, x_2 é ponto de acumulação do subconjunto $\{x_1\}$ de X; portanto pontos isolados de X não são conjuntos fechados nesta topologia. Interessa-nos topologias em que tal fato não ocorre, para os quais valem os seguintes axiomas ditos de <u>separação</u>:

1.9.1 <u>Definição</u> - Um espaço topológico X é dito um espaço do <u>tipo</u> T_1 se dados $x_1 \neq x_2$ em X, existe um aberto S tal que $x_1 \in S$ e $x_2 \notin S$. Isto equivale a dizer qu todo subconjunto constituído de um único ponto é fechado (verifique).

1.9.2 <u>Definição</u> - Um espaço topológico é do tipo T_2 (ou de Hausdorff) se $x_1 \neq x_2$ implicar a existência de abertos S_1 e S_2 com $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

1.10 <u>Topologia relativa</u>.

Seja X um espaço topológico com topologia T e seja $X_0 \subset X$. Podemos definir uma topologia T_0 em X_0 definindo T_0 como a família dos conjuntos da forma $X_0 \cap S$, com $S \in T$. Um subconjunto de X_0 que é aberto (ou fechado) na topologia T_0 é dito <u>relativamente aberto</u> (ou <u>relativamente fechado</u>, resp. Observemos que um conjunto $F \subset X_0$ é relativamente fechado se só se fôr da forma $A \cap X_0$ com A fechado. De fato, F é rel tivamente fechado se e só se $\complement_{X_0}(F)$ fôr relativamente aberto; daí $\complement_{X_0}(F) = S \cap X_0$ com $S \in T$ e portanto $F = X_0 - S \cap X_0$ Mas $X_0 - S \cap X_0 = X_0 \cap \complement_X(S)$; portanto $F = X_0 \cap A$, com $A = \complement_X(S)$ fechado.

1.11 <u>Funções contínuas</u>.

1.11.1 <u>Definição</u> - Seja $f: X \to Y$, com X e Y espaços topológ cos. A aplicação f é dita contínua no pont

$x_o \in X$ se a cada vizinhança V de $f(x_o)$ corresponde uma vizinhança U de x_o tal que $f(U) \subset V$. Isto equivale a dizer que f é contínua em x_o se para cada vizinhança V de $f(x_0)$ a imagem inversa $f^{-1}(V)$ contiver uma vizinhança de x_0.

Dizemos que f é contínua em X se f fôr contínua em todos os pontos de X.

1.11.2 <u>Teorema</u> - Uma função $f:X \to Y$, com X e Y espaços topológicos, é contínua em X se e só se a imagem inversa de abertos (fechados) fôr aberta (fechada, respectivamente).

<u>Prova</u>: Suponhamos que V aberto implica $f^{-1}(V)$ aberto. Seja $x_o \in X$ e V vizinhança de $f(x_o)$. Então $f^{-1}(V)$ é aberto e contém x_o, isto é, $f^{-1}(V)$ é vizinhança de x_o e portanto a segunda expressão da definição de continuidade no ponto x_o é verificada.

No outro sentido, seja f contínua em X e V um aberto em Y. Então se $x \in f^{-1}(V)$, V é uma vizinhança de $f(x)$ e portanto $f^{-1}(V)$ contém uma vizinhança de x. Logo $f^{-1}(V)$ é aberto. A parte relativa aos fechados segue da relação

$$f^{-1}(\complement_Y(S)) = \complement_X(f^{-1}(S)) .$$

<u>Corolário</u> - Se $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$, sendo X, Y, Z espaços topológicos, são contínuas então a composta $gf:X \to Z$, também é contínua.

<u>Prova</u>: imediata.

1.11.3 - Se $f: X \to Y$ (com X e Y espaços topológicos) fôr bijetora e se tanto f quando f^{-1} são contínuas, f é chamada homeomorfismo de X sôbre Y, e X e Y são ditos homeomorfos.

1.12 Compacidade.

Seja S um subconjunto de um conjunto X e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos de X tal que $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então a família dada é dita uma cobertura de S. Se X é um espaço topológico e todos A_λ são abertos a cobertura é dita aberta.

1.12.1 Definição - Um subconjunto S de um espaço topológico X é dito compacto se tôda cobertura aberta de S contiver uma subcobertura finita de S.

Daqui segue que o conjunto vazio é compacto e também que qualquer conjunto constituído por um número finito de elementos é compacto (verifique).

1.12.1 Teorema - Sejam X, Y espaços topológicos e $f: X \to Y$ contínua. Então se $K \subset X$ é compacto, também $f(K)$ é compacto.

Prova: Seja $\mathfrak{F}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Então $\{f^{-1}(A)\}_{A \in \mathfrak{F}}$ é cobertura aberta de K, pelo teorema 1.11.2. Por ser K compacto há uma subcobertura $\left\{f^{-1}(A_i)\right\}_{i=1}^{n}$, $A_i \in \mathfrak{F}$, e daí segue que $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ cobre $f(K)$.

C.Q.D.

1.12.2 Teorema - Um subconjunto fechado de um compacto é compacto.

Prova: Seja K compacto e $F \subset K$ fechado. Em primeiro lugar o leitor verificará que K é compacto se e só se K é compacto em relação à topologia relativa de K. Em segundo lugar F sendo fechado e estando contido em K, F é também relativamente fechado. Portanto basta provar o teorema para o caso em que K é o espaço todo.

Seja então $\mathfrak{F}$ uma cobertura aberta de F. Como $\complement_K(F)$ é aberto a família $\mathfrak{F}'$ obtida acrescentando-se $\complement_K(F)$ a $\mathfrak{F}$ é uma cobertura aberta de K. Sendo K compacto há conjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ tais que $K \subset \complement_K(F) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$. Disto e do fato de que $F \subset K$ segue imediatamente $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. C.Q.D.

1.12.3 <u>Definição</u> - Um conjunto S cuja aderência $\bar{S}$ é compacta diz-se relativamente compacto.

1.13 - <u>Definições</u> - Seja X um espaço topológico. Um subconjunto S de X é dito:

i) <u>denso</u> em X se $\bar{S} = X$.

ii) <u>magro</u> em X se o interior de $\bar{S}$ fôr vazio, isto é, se $\bar{S} = \partial S$.

1.13.1 - <u>Definição</u> - Um conjunto $S \subset X$ é dito de <u>1a. categoria</u> se S fôr a união enumerável de conjuntos magros em X. Caso contrário S é dito de 2a. categoria.

1.13.2 <u>Definição</u> - Um espaço topológico X é dito <u>separável</u> se contiver um conjunto finito ou enumerável denso em X.

1.13.3 <u>Definição</u> - Um espaço topológico é dito <u>localmente com-</u>

pacto se todo ponto tiver uma vizinhança relativamente compacta.

1.13.4 <u>Produto cartesiano de espaços topológicos</u>.

Sejam X, Y espaços topológicos com topologias T_X e T_Y respectivamente. Podemos definir uma topologia no produto cartesiano $X \times Y$ do seguinte modo. Construimos a família

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \in T_X \, , \, V \in T_Y \}$$

A topologia $T_{\mathcal{B}}$ gerada por $\mathcal{B}$ será então uma topologia em $X \times Y$. Como a intersecção de conjuntos de $\mathcal{B}$ pertence a $\mathcal{B}$ segue que $\mathcal{B}$ é uma base, isto é, os abertos de $T_{\mathcal{B}}$ são simplesmente as uniões de elementos de $\mathcal{B}$.

Esta definição se estende a um produto cartesiano finito qualquer da maneira óbvia.

Quando nos referirmos ao produto cartesiano de espaços topológicos estaremos implìcitamente atribuindo a topologia definida acima, salvo menção em contrário.

ESPAÇOS MÉTRICOS

1.14 <u>Distâncias</u>.

1.14.1 <u>Definição</u> - Seja X um conjunto. Uma <u>distância sôbre</u> X é uma aplicação d de $X \times X$ no conjunto dos números reais R, gozando das seguintes propriedades:

i) $d(x,y) \geq 0$ para todo par x, y de X, sendo $d(x,y) = 0$ se e só se $x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para x, y em X;

iii) $d(x,y) \leq d(x,y) + d(z,y)$ para quaisquer elementos x, y, z, de X.

Esta última desigualdade chama-se <u>desigualdade triangular</u>.

<u>Espaço métrico</u> é um conjunto X juntamente com uma distância sôbre X. Por abuso de linguagem chamaremos X de espaço métrico omitindo a referência à distância, sempre que não houver possibilidade de confusão.

1.14.2 <u>Exemplos</u>:

a) No conjunto dos números reais a função $d(x,y) = |x-y|$ satisfaz às três condições acima. Ao conjunto dos reais munidos desta métrica chamamos <u>reta real R</u>.

b) No plano euclidiano $R^2 = R \times R$, qualquer uma das seguintes funções é uma distância:

$$d_1(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_2(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d_3(x,y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_{12} - y_2|\}$$

sendo $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$. Fórmulas análogas a estas definem distâncias no R^n.

c) Se excluirmos do R^2 o disco unitário de centro na origem, digamos, e se definirmos a distância entre dois pontos quaisquer do conjunto restante como o ínfimo dos comprimentos das poligonais contidas neste conjunto, que unem os dois pontos dados, podemos verificar que tal função é mesmo uma distância. De fato as i) e ii) são trivialmente válidas. Quanto à iii) basta observar que a soma de uma poligonal de x a y com uma poligonal de y a z é uma poligonal de x a z (a soma é no sentido de soma de arcos orientados), e que o ínfimo de uma soma algébrica é menor ou igual à soma dos ínfimos.

d) Seja $C[a,b]$ o conjunto das funções complexas contínuas, definidas no intervalo finito $[a,b]$, munido da distância

$$d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \ .$$

O leitor verificará fàcilmente que $C[a,b]$ é espaço métrico.

e) Como qualquer subconjunto S de um conjunto X no qual está definida uma distância d é também um espaço métrico com a métrica $d/S{\times}S$, qualquer subconjunto dos espaços métricos dados acima fornecem novos exemplos.

1.15 Topologia dos espaços métricos.

1.15.1 Definição - Dado um ponto x de um espaço métrico X e um real $r > 0$ chamamos bola aberta de centro em x e raio r ao conjunto

$$B_r(x) = \{ y \epsilon X \mid d(x,y) < r \} .$$

Por brevidade diremos às vêzes bola ao invés de bola aberta.

Observação: Da definição acima segue que se $y \in B_r(x)$ então há uma bola aberta de centro em y contida em $B_r(x)$, qual seja $B_\rho(y)$, onde $\rho = r - d(x,y)$. De fato por definição temos $\rho > 0$; por outro lado se $z \in B_\rho(y)$ temos, pela desigualdade triangular:

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(x,y) ,$$

e como

$$d(z,y) < \rho \qquad \text{segue:}$$

$$d(z,x) < \rho + d(x,y) = r ,$$

isto é

$$z \in B_r(x) .$$

1.15.2. Seja $\mathfrak{B} = \{B_r(x) \mid x \in X \text{ e } r > 0\}$. $\mathfrak{B}$ satisfaz às condições que uma base de uma topologia deve verificar (i) e ii) em 1.6.). De fato a i) é satisfeita por definição. Quanto à ii) suponhamos que x pertence à intersecção de duas bolas abertas; pela observação acima há duas bolas de centro em x contidas na primeira e na segunda dessas, respectivamente. A de menor raio está contida na outra e portanto também na intersecção das duas bolas inicialmente dadas.

Entendemos por <u>topologia de um espaço métrico</u> exatamente aquela definida pela família $\mathfrak{B}$ das suas bolas abertas.

Tôdas as definições anteriormente dadas para espaços topológicos são aplicáveis, portanto, ao caso particular dos espaços métricos. Notemos que todo espaço métrico é de Hausdorff (verifique).

1.15.3. <u>Definições</u> - Uma sequência $\{x_n\}$ de um espaço métrico X é dita <u>convergente</u> se existe um ponto $x \in X$ tal que $d(x_n,x) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Chamamos x de <u>limite</u> da sequência dada e escrevemos $x_n \to x$. De $d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(y,x_n)$, de $x_n \to x$ e de $x_n \to y$ segue $d(x,y) \leq 0$, isto é, $x = y$; portanto o limite é único quando existe.

Exercícios: 1. Prove que num espaço métrico um conjunto S é fechado se e só se $x_n \in S$, $x_n \to x$ implica $x \in S$.

2. x é ponto de acumulação de um conjunto E se e só se existe uma sequência que converge para x, formada de pontos de E, distintos entre si.

3. Seja X um espaço métrico com mais de um ponto, com a distância definida por $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$, e $d(x,y) = 0$ se $x = y$. Verifique que o fêcho da bola de raio 1 e centro em um ponto x de X não coincide com o conjunto $\{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\}$, estando nele contida pròpriamente.

1.15.4 Proposição - Se X e Y são espaços métricos, uma aplicação $f: X \to Y$ é contínua num ponto x_0 se e só se a condição $x_n \to x_0$ implicar $f(x_n) \to f(x_0)$.

Prova: Seja dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, e suponhamos que $x_n \to x_0$.

Se f é contínua em x_0 então dada a bola $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset Y$ sua imagem inversa contém uma vizinhança de x_0 e portanto também contém uma bola $B_\rho(x_0)$, para um certo $\rho > 0$. Como por outro lado existe N inteiro tal que $n > N$ implica $d(x,x_n) < \rho$ segue $d(f(x_0),f(x_n)) < \varepsilon$ para $n > N$; portanto $f(x_n) \to f(x_0)$. (Aqui usamos a mesma letra d para representar a função distância em ambos espaços; não há como confundi-las).

Suponhamos agora, que f é discontínua em x_0. Então existe uma vizinhança V de $f(x_o)$ cuja imagem inversa $f^{-1}(V)$ não contém x_o como ponto interior, isto é, x_o é ponto da sua fronteira; logo, existe uma sequência $\{x_n\}$ de pontos fora de $f^{-1}(V)$, tais que $x_n \to x$. Para esta sequência $f(x_n) \notin V$, isto é $f(x_n) \not\to f(x_o)$. Portanto se $x_n \to x_o$ sempre implicar $f(x_n) \to f(x_o)$, f é necessàriamente contínua em x_o. C.Q.D.

1.15.5 Definição - Em um espaço métrico um conjunto S é dito limitado se estiver contido em uma bola. Neste caso definimos seu diâmetro como $\sup d(x,x')$ para $x,x' \in S$. O leitor verificará que o conjunto $\{x_1\}$ dado em 1.9 é compacto mas não é fechado. Em contra posição a isto, temos o seguinte teorema em espaços métricos.

1.15.6. Teorema - Em um espaço métrico X todo conjunto compacto é fechado e limitado.

Prova: Seja K compacto e suponhamos que $x_o \notin K$. Como X é de Hausdorff para cada $x \in K$ existem abertos $V(x)$ e $U(x)$ tais que $x \in V(x)$, $x_o \in U(x)$ e $V(x) \cap U(x) = \emptyset$. A família $\{V(x)\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K e portanto existe uma subcobertura finita $\{V(x_i)\}_{i=1}^{n}$. Seja $W = \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)$ e $W' = \bigcap_{i=1}^{n} U(x_i)$. Então W e W' são abertos e disjuntos, sendo $x_o \in W'$ e $K \subset W$; portanto $x_o \notin K$ implica $x_o \notin \bar{K}$. Logo $\bar{K} \subset K$, isto é, K é fechado. (Note o leitor que a prova vale para qualquer espaço de Hausdorff).

Para provar que K é limitado basta tomar a família de tôdas as bolas de centro em K e raio igual a um. Desta cobertura aberta extraimos uma subcobertura finita; sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os centros das bolas das subcoberturas. Tomando uma bola B de centro em x_1 digamos, e raio $r = 1 + d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{n-1},x_n)$ teremos $K \subset B$. De fato se $x \in K$ temos que $x \in B_1(x_k)$ para um certo k, $(1 \leq k \leq n)$. Daí segue:

$d(x_1,x) \leq d(x_1,x_2) + \ldots + d(x_{k-1},x_k) + d(x_k,x) < r$. C.Q.D.

Ressaltemos que a recíproca dêste teorema não é necessàriamente verdadeira; ver o corolário e o exemplo após o teorema seguinte.

1.15.7. <u>Teorema</u> - Em um espaço métrico, um conjunto K é compacto se e só se tôda sequência em K contém um subsequência convergente cujo limite está em K.

<u>Prova</u>: Seja $\{x_n\} \subset K$, K compacto. Se o conjunto formado pelos pontos x_n, $n=1,2,\ldots$, é finito então há um dêles que figura um número infinito de vêzes na sequência; a sub-sequência assim formada satisfaz ao enunciado do teorema. Em caso contrário podemos supôr, sem perda de generalidade, que todos os pontos da sequência são distintos entre si. Mostraremos, então, que o conjunto S dêstes pontos tem um ponto de acumulação $x \in K$. Admitamos que S não tivesse nenhum ponto de acumulação. Então teríamos $\bar{S} = S$ e pelo teorema 1.12.2 S seria compacto, por ser um fechado contido num conjunto compacto. Mais ainda para todo x_n, $n=1,2,\ldots$, haveria uma bola de centro neste ponto cuja intersecção com K conteria sòmente x_n. O conjunto formado por estas bolas seria uma cobertura aberta e portanto haveria uma subcobertura finita. Mas então S seria finito pois sòmente o centro destas bolas pertence a S, o que contradiz a

hipótese. Logo há um x que é ponto de acumulação de S e portanto pertence a K, pois K é fechado. Para extrair a subsequência basta considerar as bolas $B_{1/m}(x)$, $m=1,2,3,\ldots$. Para $m = 1$ tomamos $x_{n_1} \in S \cap B_1(x)$. Para $m = 2$ tomamos $x_{n_2} \in S \cap B_{1/2}(x)$, com $x_{n_2} \neq x_{n_1}$ e, assim por diante; dêste modo construimos a subsequência convergente para x.

Reciprocamente, suponhamos que tôda sequência em K contém uma subsequência convergente para um ponto de K. Então para cada inteiro positivo n existe um número finito de pontos de K tais que as bolas de raio $1/n$ neles centradas cobrem K, isto é, qualquer $x \in K$ está à distância $< 1/n$ de pelo menos um dêstes pontos. De fato, em caso contrário, existiria um N tal que para qualquer conjunto finito de pontos $x_1,\ldots,x_m$ de K sempre haveria um ponto x_{m+1} de K tal que $d(x_{m+1},x_j) \geq 1/n$, $j=1,\ldots,m$; partindo de um x_1 de K e aplicando esta propriedade construiríamos por indução uma sequência $\{x_n\}$ de K tal que $d(x_i,x_j) \geq 1/n$ se $i \neq j$. Isto contraria a hipótese, pois $\{x_n\}$ não teria nenhuma subsequência convergente. Seja então $\mathcal{N}$ a família de tôdas as bolas assim obtidas para todos $n=1,2,\ldots$ Por 0.4.1 $\mathcal{N}$ é enumerável. Seja agora $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta qualquer de K. Construimos uma subcobertura $\mathcal{C}^*$ enumerável, como segue. Dado $x \in K$ há um $A \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A$ e portanto $B_\rho(x) \subset A$ para um certo $\rho > 0$; tomando $n \geq 2/\rho$, x pertencerá a pelo menos uma das bolas de raio $1/n$ de $\mathcal{N}$, a qual estará contida em $B_\rho(x)$ e portanto em A. Escolhemos uma destas bolas e a designamos por $B(x)$. Do conjunto de todos A de $\mathcal{C}$ que

que contém $B(x)$ escolhemos um que designamos por $A(x)$. Então $\mathscr{C}^*$ definido por $\mathscr{C}^* = \{A(x)\}_{x\epsilon K} \subset \mathscr{C}$ é uma subcobertura aberta de K que é enumerável ou finita por ser equipotente a $\{B(x)\}_{x\epsilon K} \subset \mathscr{N}$. Se não fôr finita escrevamos

$$\mathscr{C}^* = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}\ , \quad A_n \in \mathscr{C}\ , \quad n=1,2,\ldots\ .$$

Mostremos que existe N inteiro tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} A_i$. De fato se para todo n houvesse em K um $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, então da sequência $\{x_n\}$ assim formada extrairíamos uma subsequência $\{x_{n'}\}$ com $x_{n'} \rightarrow x \in K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, o que seria uma contradição, pois daí seguiria que $x \in A_n$ para um certo m, o que implicaria $x_{n'} \in A_m$ para todo $n' \geq N$, com N suficientemente grande. C.Q.D.

1.15.7 a) <u>Corolário</u> - Todo fechado e limitado do R^n é compacto.

<u>Prova:</u> Como consequência do teorema de Bolzano-Weierstrass tôda sequência limitada do R^n contém uma subsequência convergente. Basta agora aplicar o teorema acima.

b) Êste corolário não é verdadeiro no caso geral. Basta considerar em $C[0,1]$ o conjunto F das funções $x_n(t) = t^n$ $(0 \leq t \leq 1)$, para $n=1,2,\ldots$. F é limitado pois $\|x_n\| = 1$. Qualquer subsequência de F converge pontualmente para a função descontínua dada por $s(1) = 1$, $s(t) = 0$ $(0 \leq t < 1)$. Como o limite pontual é único, nenhuma subsequência de F pode convergir para uma função contínua.

Por um lado isto mostra que F é fechado (por vacuidade) e por outro lado que F <u>não</u> é compacto.

<u>Exercício</u>: Prove o teorema de Weierstrass: tôda função real contínua num compacto atinge seu máximo.

<u>Sugestão</u>: use os teoremas 1.12.1 e 1.15.6.

1.15.8 <u>Produto cartesiano de espaços métricos</u>.

Consideremos o caso de dois espaços métricos X e Y. É fácil verificar que $\hat{d}(x,y);(x',y') = \max\{d(x,x');d(y,y')\}$ é uma distância sôbre $X \times Y$. Queremos mostrar que a topologia T dêste espaço métrico coincide com a topologia T' definida para o produto $X \times Y$ em 1.13.4. Uma base de T' é dada pelos conjuntos $U \times V$, sendo U e V abertos de X e Y, respectivamente. Por outro lado é fácil de vêr que as bolas de T são exatamente o produto de bolas de X e Y, de mesmo raio. Daquí segue fàcilmente que $T = T'$.

Da definição da distância $\hat{d}$ segue imediatamente que $(x_n,y_n) \to (x,y)$ se e só se $x_n \to x$ e $y_n \to y$.

1.15.9 <u>Continuidade da distância</u>.

A aplicação $d: X \times X \to R$ é contínua.

De fato aplicando a desigualdade triangular também na forma $d(a,b) \geq |d(a,c) - d(c,b)|$ vem:

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x_n,y)| + |d(x_n,y) - d(x,y)|$$

$$\leq d(y,y_n) + d(x,x_n) \leq 2\,\hat{d}((x_n,y_n);(x,y))$$

Logo $(x_n,y_n) \to (x,y)$ implica $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

Pela proposição 1.15.4 d é contínua.

1.15.10 Definição - Dados um ponto x e um subconjunto S de um espaço métrico definimos distância de x a S por

$$d(x,S) = \inf_{s \in S} d(x,s) .$$

Exercício: Mostre que em um espaço métrico $x \in \bar{S}$ se e só se $d(x,S) = 0$.

1.16 Espaços métricos completos.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente em um espaço métrico X, com limite x. Da desigualdade $d(x_n,x_m) = d(x_n,x) + d(x,x_m)$ segue que $d(x_n,x_m) \to 0$ quando $n,m \to \infty$. No entanto a recíproca não é necessàriamente verdadeira, isto é, dada uma sequência $\{x_n\}$, podemos ter $d(x_n,x_m) \to 0$ quando $n,m \to \infty$ sem que $\{x_n\}$ seja convergente. Exemplo típico desta situação é a que ocorre no espaço métrico dos números racionais munidos da distância $d(x,y) = |x-y|$. Assim, a seguinte sequência de números racionais dados pelas suas representações decimais 0,1; 0,101; 0,101001; 0,1010010001; .... não é convergente (verifique), e no entanto vê-se de imediato que satisfaz à condição acima citada.

Êstes fatos motivam as seguintes definições.

1.16.1 Definição - Uma sequência $\{x_n\}$ de um espaço métrico X é dita fundamental, ou sequência de Cauchy, se $d(x_n,x_m) \to 0$ quando $n,m \to \infty$; isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente inteiro N tal que $n,m \geq N$ implica $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Desta definição resulta que tôda sequência de Cauchy $\{x_n\}$ é limitada; basta fixar um certo $\varepsilon > 0$, por exemplo $\varepsilon = 1$, e tomar a bola de centro em x_N e raio

$$r = \max \{d(x_1,x_N);d(x_2,x_N);\ldots;d(x_{N-1},x_N);\ \varepsilon\}.$$

1.16.2 Definição - Um espaço métrico X é dito completo se tôda sequência de Cauchy nele contida fôr convergente.

O exemplo dado acima mostra que o conjunto dos racionais com a métrica dada, não constitue espaço métrico completo. Em contraposição, o conjunto dos reais constitue um espaço métrico completo, como o leitor verificará combinando a propriedade de que tôda sequência de Cauchy é limitada com o fato de que todo conjunto limitado de reais tem um supremo. [Basta definir $s_n = \sup\{x_n,x_{n+1},\ldots\}$ e $x = \inf_n s_n$ e verificar que $x_n \to x$].

1.16.3 Definição - Dois espaços métricos X,Y são ditos isométricos quando há uma bijeção $f:X \to Y$, que mantém as distâncias, isto é, que satisfaz

$$d_X(x_1,x_2) = d_Y(f(x_1),f(x_2)) \quad \text{para todo par } x_1,x_2 \text{ em } X.$$

1.16.4 Definição - Um espaço métrico completo Y é chamado completamento de um espaço métrico X se X fôr isométrico a um subespaço Y_0 de Y, denso em Y.

1.16.5 Teorema - Todo espaço métrico X possui um completamento.

Prova: Diremos que duas sequências de Cauchy $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ em X são equivalentes, escrevendo-se $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, se $d(x_n,x'_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. O leitor verificará fàcilmente que esta relação é uma relação de equivalência; em consequência, o conjunto de tôdas as sequências de Cauchy em X fica particionado em classes de equivalência. Seja Y o conjunto destas classes de equivalência. Definimos distância de dois elementos quaisquer y, y' de Y pela fórmula

$$d(y,y') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n')$$

onde $\{x_n\}$ e $\{x_n'\}$ são duas sequências de Cauchy quaisquer pertencentes a y e y', respectivamente. Devemos mostrar que esta função está bem definida, isto é, que o limite citado existe e que é o mesmo para qualquer escolha das duas sequências de Cauchy extraidas das classes y e y'.

A primeira asserção decorre da desigualdade

$$\begin{aligned} |d(x_n,x_n') - d(x_m,x_m')| &\leq |d(x_n,x_n') - d(x_n,x_m')| + \\ &+ |d(x_n,x_m') - d(x_m,x_m')| \\ &\leq d(x_n',x_m') + d(x_n,x_m) . \end{aligned}$$

(Aqui usamos a desigualdade triangular na forma $d(a,b) \geq |d(a,c) - d(c,b)|$. Iso mostra que $\{d(x_n,x_n')\}$ é uma sequência de Cauchy de números reais.

Quanto à segunda sejam $\{z_n\} \in y$ e $\{z_n'\} \in y'$ duas outras sequências de Cauchy. Temos anàlogamente

$$|d(x_n,x_n') - d(z_n,z_n')| \leq d(x_n',z_n') + d(x_n,z_n) .$$

Como $\{x_n'\} \sim \{z_n'\}$ e $\{x_n\} \sim \{z_n\}$, o limite do 2º membro na última desigualdade quando $n \to \infty$, é zero; isto prova a segunda asserção.

<u>Y é um espaço métrico</u>. A condição i), da definição 1.14.1, segue diretamente da definição de Y. A validade da condição ii) em Y é decorrência da sua validade em X, e o mesmo ocorre com a condição iii).

Definamos Y_o como o subespaço de Y constituido pelas classes de equivalência determinadas pelas sequências de Cauchy em X da forma $\{x,x,x,\ldots\}$. Em outras palavras um elemento de Y_o é uma classe de equivalência que contém uma sequência da forma $\{x,x,x,\ldots\}$, para algum $x \in X$. Daquí resulta imediatamente que X e Y_o são isométricos. Mostremos que Y_o é denso em Y. Seja $y \in Y$; consideremos uma bola qualquer de centro em y; seja ε seu raio. Tomemos $\{x_n\} \in y$; por definição existe N inteiro tal que $d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$ para $n,m \geq N$. Tomemos a classe de equivalência $\hat{y}$ determinada pela sequência $\{x_N,x_N,x_N,\ldots\}$. Temos, por definição:

$$d(y,\hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_N) .$$

De $d(x_n,x_N) < \varepsilon/2$ para $n \geq N$, segue $d(y,\hat{y}) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Logo tôda bola de centro em $y \in Y$ contém um $\hat{y} \in Y_o$; portanto $\bar{Y}_o = Y$.

Provemos, agora, que Y é completo.

Seja $\{y_n\}$ uma sequência de Cauchy em Y. Como $\bar{Y}_o = Y$, para todo n existe $\hat{y}_n \in Y_o$ tal que $d(y_n,\hat{y}_n) < 1/n$. A sequência $\{\hat{y}_n\}$ é de Cauchy pois

$$\begin{aligned} d(\hat{y}_n,\hat{y}_m) &\leq d(\hat{y}_n,y_n) + d(y_n,y_m) + d(y_m,\hat{y}_m) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d(y_n,y_m) . \end{aligned}$$

Como Y_o e X são isométricos a sequência $\{x_n\}$, onde x_n é o elemento de X correspondente ao elemento $\hat{y}_n$ de Y_o, é também de Cauchy.

Seja y a classe de equivalência que contém $\{x_n\}$. Como

$\{x_n, x_n, x_n, \ldots\} \in \hat{y}_n$, vem

$$d(\hat{y}_n, y) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) .$$

Daqui segue $\lim_{n\to\infty} d(\hat{y}_n, y) = 0$. Por outro lado a desigualdade

$$d(y_n, y) \leq d(y_n, \hat{y}_n) + d(\hat{y}_n, y) < 1/n + d(\hat{y}_n, y)$$

implica também $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0$. Portanto $y_n \to y$, isto é, tôda sequência de Cauchy em Y é convergente. C.Q.D.

Um espaço métrico pode ter mais de um completamento. Por exemplo, os números reais definidos através dos cortes de Dedekind constituem um completamento dos racionais; por outro lado o processo usado na prova do teorema anterior também serve para obter um completamento dos racionais, o qual é evidentemente distinto do primeiro. A êste respeito temos o seguinte teorema.

1.16.6 Teorema - Dois completamentos quaisquer de um mesmo espaço métrico são isométricos.

Prova: Seja X o espaço métrico do qual Y e Z são completamentos. Definimos a bijeção $b: Y \to Z$ como segue.

Seja $y \in Y$; por definição existe $\{x_n\}$ em X tal que $x_n \to y$. (Aqui nos beneficiamos da simplificação que consiste em identificar X com Y_0). Como X também pode ser identificado com $Z_0 \subset Z$, e como $\{x_n\}$ também é sequência de Cauchy em Z, existe $z \in Z$ tal que $x_n \to z$. Definimos então $f(y) = z$.

É fácil verificar que f é uma bijeção de Y sôbre Z.

Sejam agora $y, y' \in Y$, quaisquer. Sejam $z = f(y)$ e $z' = f(y')$.

Pela definição de f, existem $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ em X, tais que $x_n \to y$, $x'_n \to y'$ em Y e $x_n \to z$, $x'_n \to z'$ em Z. Como a distância é uma aplicação contínua vem:

$$d(y,y') = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x'_n)$$

$$d(z,z') = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x'_n) \ ;$$

daí segue $d(y,y') = d(z,z')$. Portanto f é uma isometria.

C.Q.D.

1.16.7 Observação: Podemos também construir um completamento de um espaço métrico X em que o próprio X é um subconjunto denso. Basta tomar o completamento Y dado pelo teorema 1.16.5 e construir o espaço métrico $\hat{X} = X \cup (Y-Y_o)$ com a distância definida do modo óbvio, sugerido pelo teorema 1.16.6.

1.17 Exercício 1 - Mostre que o espaço métrico $C[a,b]$ definido em 1.14.2 d) é completo.

Exercício 2 - Mostre que o R^n, com qualquer uma das métricas correspondentes às dadas em 1.14.2, é completo.

Capítulo 2

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS:
ALGUNS RESULTADOS FUNDAMENTAIS

2.1 Aplicações contrativas

2.1.1 Definição - Seja $T: X \longrightarrow X$ uma aplicação em um espaço métrico X. A aplicação T é dita aplicação contrativa, ou simplesmente contração, se existe uma constante Θ satisfazendo $0 < \Theta < 1$, tal que

$$d(T(x),T(y)) \leq \Theta . d(x,y) \qquad (1)$$

para todo par de elementos $x,y \in X$.

Observemos que tôda contração é uma aplicação contínua pois de $d(x,y) < \varepsilon$ segue $d(T(x),T(y)) < \varepsilon$ também.

2.1.2 Teorema - Tôda contração T em um espaço métrico completo X tem exatamente um ponto fixo, isto é, um x tal que $T(x) = x$.

Prova: Tomemos um qualquer $x_o \in X$ e definamos $x_n = T(x_{n-1})$ $(n=1,2,\ldots)$. Temos

$$d(x_{n+1},x_n) = d(T(x_n),T(x_{n-1})) \leq \Theta . d(x_n,x_{n-1})$$

Por indução sôbre n obtemos

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \Theta^n . d(x_1,x_o) .$$

Por outro lado se $n > m$ temos:

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1} + d(x_{n-1},x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1},x_m)$$
$$\leq (\Theta^{n-1} + \Theta^{n-2} + \dots + \Theta^m)\, d(x_1,x_o)$$
$$\leq \frac{\Theta^m}{1-\Theta}\, d(x_1,x_o) .$$

Logo $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy pois $\Theta^m \to 0$ quando $m \to \infty$. Como X é completo, $x_n \to x$, para um certo $x \in X$. Como T é contínua temos $T(x_n) \to T(x)$ (proposição 1.15.4). Portanto fazendo $n \to \infty$ na expressão $x_{n+1} = T(x_n)$ obtemos $x = T(x)$. Seja agora $y \in X$ tal que $T(y) = y$. De $d(x,y) = d(T(x),T(y) < \Theta.d(x,y)$ concluimos que $d(x,y) = 0$, pois $\Theta < 1$. Logo $y = x$; isto prova a unicidade do ponto fixo. C.Q.D.

<u>Observação</u>: Nas aplicações práticas sucede muitas vezes que T não é uma contração, mas sua restrição $T|S$ a um subconjunto fechado S do espaço métrico completo X satisfaz à desigualdade (1). Neste caso se poudermos assegurar que $T(S) \subset S$ então podemos aplicar o teorema anterior à aplicação $T|S:S \to S$, levando-se em conta que o fechado S também é um espaço métrico completo. Uma condição simples que assegura a inclusão acima pode ser dada quando S é o fêcho de uma bola, isto é, $S = \overline{B_r}(x_o)$; esta condição é: $d(x_o,T(x_o)) < r(1-\Theta)$. De fato de $y \in \overline{B_r}(x_o)$ segue $d(x_o,T(y)) \leq d(x_o,T(x_o)) + d(T(x_o),T(y)) < r(1-\Theta) + \Theta r = r$. De $d(x_o,T(y)) < r$ segue $T(y) \in \overline{B_r(x_o)}$. Note o leitor que esta condição adicional refere-se apenas a x_o e à sua imagem $T(x_o)$.

Capítulo 2

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS: ALGUNS RESULTADOS FUNDAMENTAIS

2.1 Aplicações contrativas

2.1.1 Definição - Seja $T: X \longrightarrow X$ uma aplicação em um espaço métrico X. A aplicação T é dita aplicação contrativa, ou simplesmente contração, se existe uma constante Θ satisfazendo $0 < \Theta < 1$, tal que

$$d(T(x),T(y)) \leq \Theta . d(x,y) \tag{1}$$

para todo par de elementos $x,y \in X$.

Observemos que tôda contração é uma aplicação contínua pois de $d(x,y) < \varepsilon$ segue $d(T(x),T(y)) < \varepsilon$ também.

2.1.2 Teorema - Tôda contração T em um espaço métrico completo X tem exatamente um ponto fixo, isto é, um x tal que $T(x) = x$.

Prova: Tomemos um qualquer $x_0 \in X$ e definamos $x_n = T(x_{n-1})$ $(n=1,2,\ldots)$. Temos

$$d(x_{n+1},x_n) = d(T(x_n),T(x_{n-1})) \leq \Theta . d(x_n,x_{n-1})$$

Por indução sôbre n obtemos

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \Theta^n . d(x_1,x_0)$$

Por outro lado se $n > m$ temos:

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1} + d(x_{n-1},x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1},x_m)$$
$$\leq (\Theta^{n-1} + \Theta^{n-2} + \ldots + \Theta^m)\, d(x_1,x_o)$$
$$\leq \frac{\Theta^m}{1-\Theta}\, d(x_1,x_o) \; .$$

Logo $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy pois $\Theta^m \to 0$ quando $m \to \infty$. Como X é completo, $x_n \to x$, para um certo $x \epsilon X$. Como T é contínua temos $T(x_n) \to T(x)$ (proposição 1.15.4). Portanto fazendo $n \to \infty$ na expressão $x_{n+1} = T(x_n)$ obtemos $x = T(x)$. Seja agora $y \in X$ tal que $T(y) = y$. De $d(x,y) = d(T(x),T(y) < \Theta.d(x,y)$ concluimos que $d(x,y) = 0$, pois $\Theta < 1$. Logo $y = x$; isto prova a unicidade do ponto fixo. C.Q.D.

<u>Observação</u>: Nas aplicações práticas sucede muitas vezes que T não é uma contração, mas sua restrição $T|S$ a um subconjunto fechado S do espaço métrico completo X satisfaz à desigualdade (1). Neste caso se poudermos assegurar que $T(S) \subset S$ então podemos aplicar o teorema anterior à aplicação $T|S:S \to S$, levando-se em conta que o fechado S também é um espaço métrico completo. Uma condição simples que assegura a inclusão acima pode ser dada quando S é o fêcho de uma bola, isto é, $S = \overline{B_r}(x_o)$; esta condição é: $d(x_o,T(x_o)) < r(1-\Theta)$. De fato de $y \in \overline{B_r}(x_o)$ segue $d(x_o,T(y)) \leq d(x_o,T(x_o)) + d(T(x_o),T(y)) < r(1-\Theta) + \Theta r = r$. De $d(x_o,T(y)) < r$ segue $T(y) \in \overline{B_r(x_o)}$. Note o leitor que esta condição adicional refere-se apenas a x_o e à sua imagem $T(x_o)$.

2.1.3 Aplicação à solução de equações diferenciais ordinárias.

Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária de 1a. ordem $\frac{dx}{dt} = g(t,x)$ com a condição inicial $x(0) = a$. Suponhamos que $g(t,x)$ está definida para $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq b$ sendo contínua nesta região e Lipschitz-contínua com constante M na 1a. variável uniformemente no intervalo $[0,b]$, com $b > 0$; isto é, quanto à 1a. variável g deve satisfazer à condição

$$|g(t,x) - g(t,y)| \leq M \cdot |x-y| \qquad (2)$$

para quaisquer x,y reais e t em $[0,b]$.
A equação diferencial, junto com a condição inicial dada, é equivalente à equação integral

$$s(t) = a + \int_0^t g(x,s(x))ds \quad 0 \leq t \leq b$$

como se vê fàcilmente.

Consideremos o espaço métrico $C[0,b]$ definido em 1.17; sabemos que é completo. Por outro lado se definirmos a aplicação $T: C[0,b] \longrightarrow C[0,b]$ pela fórmula $(T(x))(t) = a + \int_0^t g(s,x(s))ds$, para $0 \leq t \leq b$, podemos reescrever a equação integral como $x = T(x)$.

De (2) resulta então para todo $t \in [0,b]$:

$$|(T(x))(t) - (T(y))(t)| \leq \int_0^t |g(t,x) - g(t,y)|\, dt$$

$$\leq M \int_0^t |x-y|\, dt$$

$$\le M. \max_{a\le t\le b} |x-y| \,.\, \int_0^t dt \le Mb.d(x,y) \,.$$

Portanto temos:

$$d(T(x),T(y)) \le Mb.d(x,y) \,.$$

Se tomarmos $b < \frac{1}{M}$, a aplicação T será uma contração. Aplicando o teorema 2.1.2 concluimos pela existência e unicidade da solução da equação diferencial com valor inicial, no intervalo $[0,b]$ com $b < \frac{1}{M}$.

Observação: É mais comum, porém, o caso em que a função $g(t,x)$ está definida tão sòmente em um aberto A limitado contendo o ponto $(0,a)$, sendo contínua em t e Lipschitz-contínua em relação a x. Neste caso tomando-se um retângulo R_1 todo contido em A, dado por $a-r_1 \le x \le a + r_1$, $-b_1 \le t \le b_1$, com r_1, $b_1 > 0$, a aplicação T anteriormente definida passa a ser uma aplicação de $\overline{B_r(x_0)}$ em $C[-b,b]$, para todo $0 < r \le r_1$ e $0 < b \le b_1$, onde x_0 é definida por $x_0(t) = a$ para $|t| \le b$.

A constante de contração será, como antes, $\Theta = Mb$. Pela observação anterior devemos escolher r e Θ de modo que $d(x_0,T(x_0)) < r(1-\Theta)$ (*)

Temos

$$(T(x_0))(t) = a + \int_0^t g(t,a)dt$$

e portanto

$$d(x_0,T(x_0)) = \max_{|t|\le b} \left| \int_0^t g(t,a)dt \right| .$$

Como g é contínua em R_1, $|g|$ é limitada em R_1, digamos por K. Daí: $d(x_0,T(x_0)) \leq Kb$. Basta então tomar r e b de modo que $Mb < 1$ e $Kb < r(1-Mb)$ para assegurar as condições $\Theta < 1$ e (*), respectivamente. Fixando $r = r_1$ obtemos daí $b < \dfrac{r_1}{K+Mr_1}$, que preenche a ambas. Daquí segue, então, a existência e a unicidade da solução no intervalo $[-b,b]$ assim escolhido.

<u>Exercício</u> - Aplique o teorema do ponto fixo à equação integral linear não homogênea de Fredholm:

$$s(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds + \varphi(t) , \qquad a \leq t \leq b ,$$

onde $K(t,s)$ e $\varphi(t)$ são funções contínuas conhecidas, $x(t)$ é a função a determinar e λ é um parâmetro. Determine valores de λ para os quais há solução.

2.2 <u>Categoria de um espaço métrico completo</u>.

2.2.1 <u>Lema</u> - Seja X um espaço métrico completo e $\{S_n\}$ uma sequência de subconjuntos fechados não vazios tais que $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots$ e para os quais $\text{diam}(S_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ consiste exatamente de um ponto x de X.

<u>Prova</u>: Escolhemos um ponto $x_n \in S_n$ para cada $n=1,2,\ldots$.

Se $m < n$, tanto x_m como x_n estão em S_m e portanto $d(x_n,x_m) \leq \text{diam}(S_m)$. Daqui segue que $d(x_n,x_m) \to 0$ quando $m,n \to \infty$; isto é, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy e portanto $\{x_n\}$ converge para um certo x, por ser X completo. Êste x pertence a $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, pois em caso contrário, se x pertencesse ao complemento de algum S_m, haveria uma bola $B_r(x)$ tôda contida neste complemento, por ser êste aberto. Então seria $d(x,x') \geq r$ para todo $x' \in S_m$ e em consequência também para $x' \in S_n$, com $n \geq m$. Daí não teríamos $x_n \longrightarrow x$.

É imediato que x é o único ponto na intersecção dada.

C.G.D.

2.2.2 <u>Teorema</u> (Baire) - Seja X um espaço métrico completo não vazio e $\{A_n\}$ uma coleção enumerável de conjuntos abertos, densos em X. Então $\bigcap_n A_n$ também é denso em X.

<u>Prova</u>: Dado um ponto x qualquer de X e uma bola B de centro em x há um x_1 de A_1 nesta bola, por ser A_1 denso em X. Como A_1 é aberto há uma bola B_1 de centro em x_1 cujo fêcho está contido em A_1; podemos tomar seu raio suficientemente pequeno para que também tenhamos $\bar{B}_1 \subset B$; isto é, temos $\bar{B}_1 \subset A_1 \cap B$. Como A_2 é denso há um x_2 de A_2 em B_1. Como A_2 é aberto podemos tomar uma bola B_2 de centro em x_2 tal que $\bar{B}_2 \subset A_2 \cap B_1$, pelo mesmo crtiério usado na escolha de B_1. Podemos ainda impôr que $\mathrm{diam}(B_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(B_1)$. Por indução construimos por êste processo uma sequência de bolas $\{B_n\}$ tais que

$$\bar{B}_n \subset A_n \cap B_{n+1} \quad \text{e} \quad \mathrm{diam}(B_n) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(B_{n-1})$$

$n=2,3,\ldots$. Esta última condição garante que $\mathrm{diam}(\bar{B}_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Como por outro lado vale $\bar{B}_n \subset \bar{B}_{n-1}$ para $n=2,3,\ldots$ o lema anterior nos diz que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n = \{p\}$ para um certo $p \in X$. Por construção temos $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ e também $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \subset B$.

Logo dado $x \in X$ e dada a bola B de centro em x há um

$p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ também nesta bola. Como x e B são quaisquer isto prova que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em X. C.Q.D.

Os três enunciados seguintes são formas equivalentes do teorema de Baire.

2.2.3 <u>Teorema de Baire</u> - Em um espaço métrico completo $X \neq \emptyset$ valem os enunciados:

I) Seja $\{A_n\}$ família enumerável de abertos densos; então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso.

II) X é de segunda categoria.

III) Se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n fechados $n=1,2,\ldots$ então pelo menos um F_n contém uma bola.

<u>Prova</u>: I $\Rightarrow$ II - Seja $\{E_n\}$ uma família enumerável de conjuntos magros em X. Então $\bar{\bar{E}}_n = \partial E_n$ e portanto $A_n = C(\bar{\bar{E}}_n)$ são abertos densos em X. Pela I) há $x \in \bigcap_n A_n$ e daí $x \notin \bigcup_n E_n$, isto é $X - \bigcup_n E_n \neq \emptyset$. Logo X não pode ser de 1a. categoria.

II $\Rightarrow$ III: Se nenhum F_n contivesse uma bola, os F_n seriam magros e daí X seria de 1a. categoria.

III $\Rightarrow$ I: Se $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ não fôsse denso haveria uma bola cujo fêcho B estaria contido no seu complemento, i.e, em $\bigcup_{n=1}^{\infty} C(A_n)$.
Como B é um espaço métrico completo por ser fechado $\subset X$, como $B = \bigcup_n [B \cap C(A_n)]$ e como estas intersecções são conjuntos relativamente fechados, III implica a existência de uma bola B'

contida em um certo $B \cap C(A_n)$. Mas então A_n não seria denso em X, o que contraria a hipótese. C.Q.D.

Como a aplicação do teorema de Baire provaremos os seguintes resultados.

2.2.4 Teorema - Dada uma família $\mathfrak{F}$ de funções reais contínuas em um espaço métrico completo X que são limitadas pela mesma constante $K(x)$ para cada $x \in X$, existe uma bola na qual as funções são uniformemente limitadas.

Prova: Seja $F_n = \{x \in X \mid f(x) \leq n$ para qualquer $f \in \mathfrak{F}\}$ $n=1,2,\ldots$. Pela continuidade das funções os F_n são fechados. Para cada x basta tomar $n \geq K(x)$ para ver que $x \in F_n$. Portanto $X = \bigcup_n F_n$. Pela forma III do Teorema de Baire, há uma bola contida em um certo A_N. Como em A_N tôdas as funções são limitadas por N, segue o resultado. C.Q.D.

2.2.5 Teorema - Há funções contínuas no intervalo $[0,1]$ que não são diferenciáveis em nenhum ponto dêste intervalo.

Prova: Seja $X = C[0,1]$; já vimos que êste espaço métrico é completo. Definimos o conjunto

$$K_n = \left\{x \,\middle|\, \left|\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right| \leq n \text{ para todo } h \neq 0 \text{ e algum } t\right\}$$

$(n=1,2,3,\ldots)$.

Mostremos que:

a) K_n são fechados. Seja $\{x_j\}$ uma sequência convergente a x, com $x_j \in K_n$, $j=1,2,\ldots$, n fixo. Por definição há pontos

$t_j \in [0,1]$, $j=1,2,\ldots$, para os quais vale

$$\left|\frac{x_j(t_j+h) - x_j(t_j)}{h}\right| \leq n \quad \text{para todo} \quad h \neq 0 .$$

Como consequência do teorema de Bolzano-Weierstrass $\{t_j\}$ contém uma subsequência $\{t_{j'}\}$ convergente a um ponto t_o.

De $|x_j(t_j) - x(t_o)| \leq |x_j(t_j) - x(t_j)| + |x(t_j) - x(t_o)|$

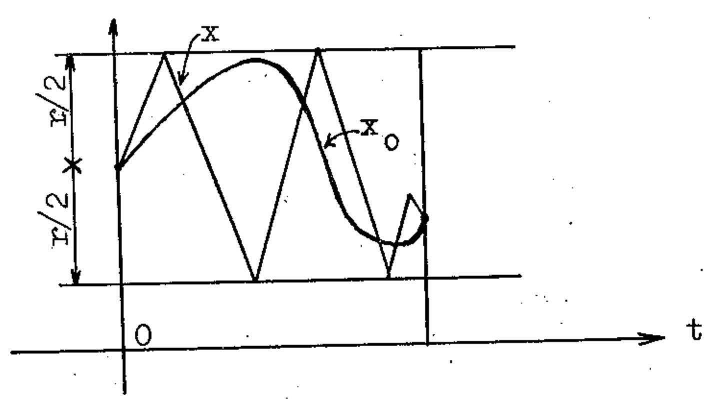
$$\leq d(x_j, x) + |x(t_j) - x(t_o)|$$

obtemos que $x_{j'}(t_{j'}) \longrightarrow x(t_o)$, quando $j' \to \infty$. Anàlogamente para h fixo vem $x_{j'}(t_{j'}+h) \longrightarrow x(t_o+h)$. Portanto obtemos

$$\left|\frac{x(t_o + h) - x(t_o)}{h}\right| \leq n \quad \text{para todo} \quad h \neq 0 ,$$

isto é $x \in K_n$.

b) K_n <u>não contém nenhuma bola</u>. Dado $x_o \in C[0,1]$ seja $B_r(x_o)$ a bola de raio r e centro em x_o. Pela continuidade uniforme de x_o há um $\delta > 0$ tal que $|x_o(t) - x_o(t')| < \frac{r}{2}$ sempre que $|t-t'| < \delta$. Dividimos o intervalo $[0,1]$ em intervalos sucessivos de comprimento $< \delta$, e em cada um dêstes intervalos definimos uma função contínua x cujo gráfico é constituído por segmentos retilíneos com coeficiente angular $> n$, em módulo, como indica a figura:



É claro que x é contínua em $[0,1]$ e que $x \in B_r(x_0)$; no entanto $x \notin K_n$. Como x_0 e r são arbitrários segue a b). Como $\bar{K}_n$ não contém nenhuma bola (temos $\bar{K}_n = K_n$), K_n é magro. Pela forma II do teorema de Baire há um x em $C[0,1]$ que não pertence a $\bigcup_n K_n$. Mas como uma função contínua é diferenciável em algum ponto se e só se pertence a algum K_n, segue que x não é diferenciável em nenhum ponto. C.Q.D.

Capítulo 3

ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

3.0 Espaço vetorial.

Sejam E um conjunto e K um corpo. Suponhamos que existem aplicações de $E \times E$ em E e de $K \times E$ em E, as quais denotaremos por $(x,y) \longrightarrow x+y$ e $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$, respectivamente, satisfazendo às condições:

1) $x+y = y+x$
2) $x + (y+z) = (x+y) + z$
3) existe um elemento Θ de E tal que $x + \Theta = x$ para todo x.
4) a todo x de E corresponde um elemento, que denotamos por $-x$, tal que $x + (-x) = \Theta$.
5) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
6) $(\lambda+\vartheta)x = \lambda x + \vartheta x$
7) $(\lambda\vartheta)x = \lambda(\vartheta x)$
8) $0.x = \Theta$
9) $1.x = x$.

Dizemos que E, com estas duas aplicações, constitue um espaço vetorial sôbre K. Chamamos vetores aos elementos de E, escalares aos de K; o vetor $x+y$ é chamado soma dos vetores x e y e o vetor λx diz-se produto de x pelo escalar λ.

Suporemos o leitor já familiarizado com tôdas as noções relativas aos espaços vetoriais de dimensão finita, estudados na

Álgebra Linear. Sòmente consideraremos aqui os casos em que K é o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o dos complexos $\mathbb{C}$, e em geral, omitiremos referência específica.

3.1 Definição - Uma norma em um espaço vetorial E é uma aplicação $\| \, \|: E \to R$, satisfazendo as seguintes condições:

i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e só se $x = \Theta$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Destas propriedades resulta imediatamente que a função definida por $d(x,y) = \|x-y\|$ é uma distância (verifique); em particular, a desigualdade triangular decorre de $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$.
Um espaço vetorial considerado também como espaço métrico, com a métrica induzida por esta norma, é dito espaço vetorial normado.

3.1.1 Exemplos: Nos exemplos a seguir consideraremos espaços constituidos por funções reais ou complexas definidas em um certo conjunto T. O leitor verificará que êstes espaços se tornam espaços vetoriais se a soma e o produto por escalar são definidos por

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t), \quad t \in T$$

Em particular se $T = \{1,2,3,\ldots,n\}$ obtemos os espaços $V_n(\mathbb{R})$ ou $V_n(\mathbb{C})$, das n-uplas de reais ou complexos com soma e produto escalar definidos pelas operações correspondentes sôbre as componentes. Se T = conjunto dos inteiros naturais, obtemos espaços vetoriais de sequências.

Exemplo 1 - Podemos introduzir vários tipos de normas em $V_n(\mathbb{C})$ (e em consequência em $V_n(\mathbb{R})$). Para $p \geq 1$ e $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in V_n(\mathbb{C})$ façamos

$$\|x\| = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} \qquad (3.1)$$

É imediato que os axiomas i) e ii) são satisfeitos. Quanto ao axioma iii) sua expressão em têrmos de (3.1) é:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{1/p}, \qquad (3.2)$$

que se chama desigualdade de Minkowski; sua validez é provada a seguir, bastando considerar o caso $p > 1$, pois para $p = 1$ ela é imediata.

Desigualdades de Holder e de Minkowski

A desigualdade de Holder é:

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i \cdot \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q\right)^{1/q} \qquad (3.3)$$

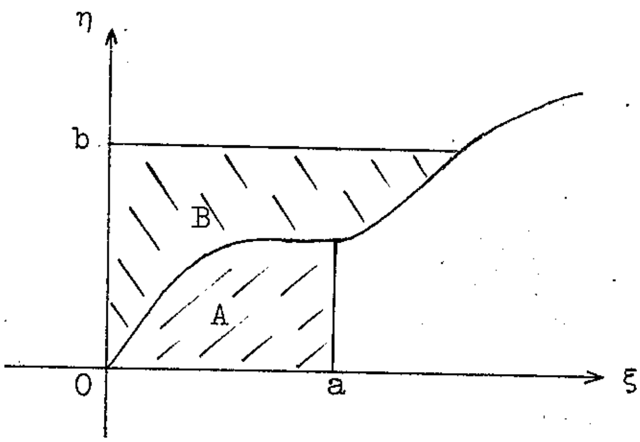
onde q é definido por $q = \frac{p}{p-1}$ e portanto satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (3.4)$$

Como a (3.3) é homogênea, isto é, contínua válida ao substituirmos x por λx e y por λy, λ escalar, basta prová-la no caso em que

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^q = 1 \qquad (3.5)$$

Neste caso o 2º membro da (3.3) é igual a 1. Para tanto observemos que se $\eta = f(\xi)$, com η, ξ reais ≥ 0, fôr uma função contínua monótona não decrescente, tal que $f(0) = 0$ e $f(\xi) \to \infty$ quando $\xi \to \infty$, então, dados dois números positivos a, b quaisquer a soma das áreas A, B indicadas na figura é $\geq ab$.



Aplicando êste resultado no caso em que $\eta = f(\xi) = \xi^{p-1}$ e portanto

$$\xi = \eta^{\frac{1}{p-1}} = \eta^{q-1} \text{ , obtemos}$$

$$A = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = a^p/p$$

$$B = \int_0^a \eta^{q-1} d\eta = b^q/q$$

$$\text{Daí} \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Pondo $a = |\xi_i|$, $b = |\eta_i|$ e somando sôbre i de 1 a n obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i \eta_i| \leq 1 \quad ,$$

levando em conta (3.5) e (3.4), que é o que queríamos provar.

Para provar a desigualdade de Minkowski pomos $a = |\xi_i|$, $b = |\eta_i|$ na identidade

$$(a+b)^p = (a+b)^{p-1}.a + (a+b)^{p-1}.b \ ,$$

válida para $a, b \geq 0$, e somamos sôbre i de 1 a n. Obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (|\xi_i| + |\eta_i|)^p = \sum_{i=1}^{n} (|\xi_i| + |\eta_i|)^{p-1} . |\xi_i| + $$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (|\xi_i| + |\eta_i|)^{p-1} . |\eta_i| \ .$$

Aplicando a desigualdade de Holder a cada um dos somatórios no 2º membro desta igualdade, separadamente, e levando em conta que $(p-1)q = p$ obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i| + |\eta_i|)^p \leq$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i| + |\eta_i|)^p\right]^{1/q} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

Dividindo os dois membros desta desigualdade pelo primeiro fator do 2º obtemos a (3.2).

Nota - O espaço vetorial normado assim obtido é denotado por $\ell^p(n)$. Ao espaço vetorial normado obtido com esta norma definida sôbre $V_n(\mathbb{R})$ chamaremos $\ell^p(n)$ sôbre os reais. Uma outra norma em $V_n(\mathbb{C})$ é dada por

$$\|x\| = \max\left\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\right\}.$$

Neste caso se denota o correspondente espaço vetorial normado por $\ell^\infty(n)$, o que é motivado pelo fato que

$$\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i| = \lim_{p\to\infty} (|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} .$$

Exercício: Prove esta igualdade.

Exemplo 2 - Definimos o espaço ℓ^p, $p \geq 1$, como o espaço vetorial das sequencias $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ para as quais vale $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$, sendo a norma definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} .$$

Exercício: Prove que ℓ^p é um espaço vetorial e que $\|x\|_p$ é de fato uma norma. (Sugestão: estenda a desigualdade de Minkowski para séries; para isto note que $\|x\|_p + \|y\|_p$ é maior ou igual do que o 2º membro da (3.2), e portanto as somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i+\eta_i|^p$ são limitadas).

O espaço ℓ^∞ é definido como o espaço vetorial das sequências $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ limitadas, com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_i |\xi_i|$$

Nota - No caso em que $p = 2$, o espaço ℓ^2, que é a generalização dos espaços $\ell^2(n)$ = espaço unitário de dimensão n, chama-se espaço de Hilbert das sequências de quadrado somável. Neste caso $q = 2$ também e as desigualdades de Holder e de Minkowski tomam as formas, respectivamente,

$$\sum_i |\xi_i \eta_i| \le \left(\sum_i |\xi_i|^2 \cdot \sum_i |\eta_i|^2 \right)^{1/2}$$

e

$$\left(\sum_i |\xi_i+\eta_i|^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_i |\xi_i|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_i |\eta_i|^2 \right)^{1/2} .$$

A primeira é a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a segunda simplesmente expressa o fato de que o comprimento do lado de um triângulo (no caso $\|x+y\|_2$) é menor ou igual do que a soma do comprimento dos outros dois (no caso $\|x\|_2$ e $\|y\|_2$).

Exemplo 3 - a) Se T é um conjunto qualquer não-vazio, chamamos $B(T)$ ao espaço vetorial de tôdas funções complexas limitadas definidas em T, com a norma $\|x\| = \sup_{t\in T} |x(t)|$. Em particular $\ell_\infty = B(N)$, N = conjunto dos inteiros naturais.

b) Se T além disso fôr um espaço topológico, podemos falar em funções complexas contínuas sôbre T; ao espaço vetorial formado pelas funções contínuas limitadas, com a mesmo norma que em a) representamos por $C(T)$.

Exemplo 4 - Seja $p \geq 1$; no intervalo finito $[a,b]$ consideremos o espaço vetorial de tôdas funções complexas contínuas e definiremos sua norma por

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} .$$

Como no Exemplo 1, prova-se que esta é de fato uma norma; para tanto usa-se a desigualdade de Minkowski para integrais

$$\left(\int_a^b |x+y|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} ,$$

cuja prova se obtém simplesmente substituindo o símbolo de somatório pelo de integral nas etapas da prova dada no Exemplo 1. Denotaremos êste espaço vetorial normado por $\mathcal{C}^p[a,b]$.

3.1.2 Seja E um espaço vetorial normado e $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) seu corpo de escalares.

Notemos que $\mathbb{K}$ é também espaço vetôrial normado, quando se toma como norma o valor absoluto. Consideremos o espaço métrico $\mathbb{K} \times E$ (ver 1.15.8). O produto por escalar está definido em $\mathbb{K} \times E \to E$. Vamos mostrar a continuidade desta aplicação. Temos

$$\|\lambda x - \lambda_o x_o\| = \|(\lambda - \lambda_o) x_o + \lambda (x - x_o)\| \leq |\lambda - \lambda_o| \cdot \|x_o\| + |\lambda| \cdot \|x - x_o\| .$$

Daqui resulta que de $(\lambda_n, x_n) \longrightarrow (\lambda_o, x_o)$ quando $n \to \infty$ segue $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda_o x_o$, pois $\lambda_n \to \lambda$ e $x_n \to x_o$, separadamente e λ_n é

limitada. Pelo teorema 1.15.4 a aplicação é contínua.
Da desigualdade

$$\|(x+y) - (x_0+y_0)\| \leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\|$$

segue, anàlogamente, que a soma, como aplicação de $E \times E \longrightarrow E$, é também contínua.

Que a norma também é função contínua segue de $\big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x-x_0\|$ (bastando usar a desigualdade triangular para obter esta última).

Observemos, de passagem, que um espaço vetorial no qual está definida uma topologia tal que a soma de vetores e o produto por escalar são funções contínuas é <u>chamado espaço vetorial topológico</u> (abreviadamente EVT). Portanto todo espaço vetorial normado é um EVT; a recíproca não vale, porém.

3.2 <u>Subespaços e esfera unitária</u>.

3.2.1 <u>Definição</u> - Um <u>subespaço</u> S de um espaço vetorial E é um subconjunto de E tal que se $x, y \in S$ então também $\lambda x + \mu y \in S$.

Um subespaço S de um espaço vetorial normado E pode ser ou não ser um conjunto fechado. Se fôr fechado diremos que é um subespaço fechado.

Da continuidade da soma e do produto escalar em um espaço vetorial normado resulta imediatamente que o fêcho $\bar{S}$ de um subespaço S é também um subespaço.

Chamamos de esfera unitária em E ao conjunto

$$\{ x \in E \mid \|x\| = 1 \} .$$

Observemos que se S é um subespaço, então todos os pontos da esfera unitária estão a uma distância ≤ 1 de S (basta notar que $\Theta \in S$ e que $\|x-\Theta\| = 1$ se $\|x\| = 1$; portanto $d(x,S) = \inf_{s\in S} \|x-s\| \leq 1$). Se o leitor traçar no plano o círculo de raio 1 e uma reta qualquer pela origem, verá que há um ponto do círculo cuja distância a S é exatamente 1; basta procurá-lo sôbre a normal à reta, tirada pela origem. Cabe perguntar se algo semelhante sucede no caso de um espaço vetorial normado E qualquer. A êste respeito temos o seguinte

3.2.2 <u>Teorema</u> (Lema de Riesz) - Seja E espaço vetorial normado. Se S é um subespaço fechado próprio de E, então há pontos na esfera unitária de E cuja distância a S é arbitràriamente próxima de 1.

<u>Prova</u>: Seja dado θ arbitrário tal que $0 < \theta < 1$. Tomemos $x_1 \in E-S$; seja

$$d = d(x_1,S) .$$

Como S é fechado temos $d > 0$ (ver Exercício em 1.15.9). Como $\theta^{-1}d > d$ existe $s_o \in S$ tal que $\|s_o-x_1\| \leq \theta^{-1}d$, pela definição de d. Seja $\alpha = \|s_o-x_1\|^{-1}$. O vetor $x_\theta = \alpha(s_o-x_1)$ está na esfera unitária. Se $s \in S$ temos:

$$\|s-x_o\| = \|s - \alpha(s_o-x_1)\| = \alpha \|(\alpha^{-1}s + s_o) - x_1\| \geq \alpha d$$

pois $\alpha^{-1}s + s_o \in S$ e daí $\|(\alpha^{-1}s + s_o) - x_1\| \geq d$.
Mas s_o foi escolhido de modo que $\theta \leq \alpha d$; logo $\|s-x_o\| \geq \theta$ para todo $s\in S$, como requerido. C.Q.D.

Todavia não é necessàriamente verdade que haja um vetor x na es fera unitária tal que* $d(x,S)$ seja exatamente igual a 1, como nos mostra o exemplo seguinte.

<u>Exemplo</u>: Seja E o subespaço de $C[0,1]$ das funções tais que $x(0) = 0$; como tal, E também é um espaço vetorial normado com a mesma norma de $C[0,1]$. Seja $S = \left\{x\epsilon E \mid \int_0^1 x(t)dt = 0\right\}$. É claro que S é um subespaço de E, fechado, pois de $x_n \in S$, x_n convergindo uniformemente para x, segue $\int_0^1 x(t)dt = 0$, isto é, $x\epsilon S$.

Suponhamos que houvesse $x\epsilon E$, com $\|x\| = 1$ tal que $d(x,S) = 1$. Então seria $\|x-s\| \geq 1$ para todo $s\epsilon S$. Tomemos em particular a função $s_n \in S$ dada por:

$$s_n(t) = t^{1/n}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \text{ inteiro } >0 .$$

Temos:

$$\|s_n\| = 1$$

$$\therefore \quad \int_0^1 s_n(t)dt = \frac{n}{n+1} .$$

O vetor $y = x - \left[\frac{n+1}{n} \cdot \int_0^1 x(t)dt\right] . s_n$ pertence a S.

Logo

$$1 \leq \|x-y\| = \frac{n+1}{n} \cdot \int_0^1 x(t)dt$$

Como isto vale para todo n inteiro positivo segue daí que

$$\int_0^1 x(t)dt \geq 1$$

o que é um absurdo pois como $x(t) \leq 1$ $(0 \leq t \leq 1)$ e $x(0) = 0$ a continuidade de x obriga que esta integral seja menor do que 1.

3.3 <u>Teorema</u> - A esfera unitária de um espaço vetorial normado E é compacta se e só se E tiver dimensão finita.

<u>Prova</u>: Se E tem dimensão finita $n \geq 1$, E tem uma base $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que todo $x \epsilon E$ se expressa por uma única combinação linear dos vetores desta base, i.e.

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n .$$

Êste fato estabelece um isomorfismo entre E e $\ell^1(n)$ (ou então entre E e $\ell^1(n)$ sôbre os reais se E também fôr sôbre os reais) dado por

$$x \longleftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) .$$

Consideremos a função f definida em $\ell^1(n)$ por

$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \|\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n\|$.

Seja $A = \max\limits_i \|x_i\|$; então vem:

$$\|\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n\| \leq A(|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|) \tag{3.5'}$$

Daquí segue que f é contínua em $\ell^1(n)$. Como a esfera unitária de $\ell^1(n)$ é compacta (Corolário 1.15.7 a)), o teorema de Weierstrass nos diz que f atinge seu mínimo $\alpha \geq 0$ nesta esfera. Se α fôsse zero teríamos $\|\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n\| = 0$ para um certo ponto de $\ell^1(n)$, e daí $\{x_1, \ldots, x_n\}$ não seria uma base. Logo

$$\|\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n\| \geq \alpha . (|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|) \tag{3.6}$$

com $\alpha > 0$.

Seja agora $\{x^{(m)}\}$ uma sequência qualquer da esfera unitária de E. Pela (3.6) vem

$$|\xi_1^{(m)}| + \dots + |\xi_n^{(m)}| \leq 1/\alpha \,, \quad m=1,2,\dots \,.$$

Logo a sequência $\{(\xi_1^{(m)},\dots,\xi_n^{(m)})\}_m$ contém uma subsequência convergente. Pela continuidade do produto por escalar e da soma a subsequência correspondente de $\{x^{(m)}\}$ também é convergente e converge para um x com $\|x\| = 1$ (pela continuidade da norma). Pelo teorema 1.15.7, segue a tese. O caso $n=0$ é trivial.

Reciprocamente, tomemos a cobertura aberta da esfera unitária de E constituida de tôdas as bolas de raio 1/2 e centro nesta esfera. Por ser esta compacta, por hipótese, há uma subcobertura finita, de centro em certos pontos $x_1,x_2,\dots,x_n$. Seja S o subespaço gerado por êstes vetores. Admitamos que S fôsse um subespaço próprio de E. Como S é fechado, o lema de Riesz asseguraria a existência de um ponto na esfera unitária de E, cuja distância a S seria $> 1/2$; em particular teríamos $\|x-x_i\| > 1/2$, $i=1,\dots,n$. Portanto x não estaria na subcobertura citada, o que é um absurdo. C.Q.D.

3.4 <u>Transformações lineares</u>.

3.4.1 <u>Definição</u> - Sejam X e Y espaços vetoriais sôbre o mesmo corpo de escalares. Uma aplicação $T:X \to Y$ será dita <u>transformação linear</u> ou <u>operador linear</u> se seu domínio D fôr um subespaço vetorial de X e se fôr

i) <u>homogênea</u>, isto é, se $T(\lambda x) = \lambda Tx$ para todo escalar λ e todo x em D;

ii) <u>aditiva</u>, isto é, se satisfizer $T(x_1+x_2) = Tx_1 + Tx_2$, $x_1,x_2 \in D$.

Sòmente nos interessarão os casos em que os escalares são os reais ou os complexos.

Notas - Da definição é imediato que $T\Theta = \Theta$.

Quando $Y = R$ ou C costuma-se chamar as transformações lineares de funcionais lineares.

Uma aplicação linear também é chamada homomorfismo (de espaços vetoriais). Se além disto é bijetora diz-se isomorfismo (de espaços vetoriais).

Exemplos: 1) No espaço $V_n(\mathbb{C})$ a multiplicação por uma matriz $m \times n$ de números complexos é uma transformação linear de $V_n(\mathbb{C})$ em $V_m(\mathbb{C})$.

2) Se $K(s,t)$ é uma função real e contínua para $0 \leq s,t \leq 1$, a transformação dada por $x \to y$, com $y(t) = \int_0^1 K(s,t)ds$, $0 \leq t \leq 1$, é um operador linear em $C[0,1]$.

Já a transformação $x \to \lambda = \int_0^1 x(t)dt$ é um funcional linear em $C[0,1]$.

Representaremos o domínio de T pelo símbolo D_T ou por $D[T]$. A imagem de D_T pela T representaremos por $R[T]$. O leitor verificará fàcilmente que $R[T]$ é um subespaço de Y. O conjunto $N[T] = \{x \epsilon D_T \mid Tx = \Theta\}$ é òbviamente um subespaço de X e será denominado espaço nulo de T.

Observação: Quando não fizermos menção explícita do domínio de T estaremos supondo que $D[T] = X$.

3.4.2 Inversa - Sejam X e Y espaços vetoriais e T uma transformação linear de X em Y, com domínio

$D[T]$. Se a transformação T fôr injetora, então $T: X \longrightarrow R[T]$ tem uma aplicação inversa T^{-1}; T^{-1} será chamada simplesmente inversa da T. O leitor verificará que $T^{-1}: Y \rightarrow X$ é linear e que $D[T^{-1}] = R[T]$ e $R[T^{-1}] = D[T]$.

Exercício - Faça a verificação citada e mostre que T, sendo linear, é injetora se e só se $Tx = 0$ implicar $x = 0$.

3.4.3 Norma de uma transformação linear.

a) Definição - Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T: X \rightarrow Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é limitada se existe uma constante M tal que $\|Tx\| \leq M.\|x\|$ para todo x de X. (Aqui e no que segue representaremos as normas em X e Y pelo mesmo símbolo, a fim de simplificar a notação).

b) Definição - Se T fôr limitada definimos sua norma como o número $\|T\|$ dado por

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Devido à linearidade de T temos também:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

3.4.3 Teorema - Se X e Y são espaços vetoriais normados e $T: X \rightarrow Y$ é linear, então

i) se T é contínua em $x_0 \in X$, T é contínua em X;

ii) T é contínua se e só se T é limitada.

Prova: Suponhamos que T é contínua em x_0 e seja x_1 um outro ponto qualquer de X. Dado $\varepsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que $\|x-x_0\| < \delta$ implica $\|T(x-x_0)\| < \varepsilon$.

Seja agora $\|x-x_1\| < \delta$; como $\|x-x_1\| = \|(x+x_0-x_1) - x_0\| < \delta$ segue então $\|T(x-x_1)\| < \varepsilon$; isto é T é contínua em x_1, e isto prova i).

Seja agora T limitada; então de $\|Tx-Tx_n\| = \|T(x-x_n)\| \leq M\|x-x_n\|$ e de $x_n \to x$ segue $Tx_n \to Tx$. Logo T é contínua.

Recìprocamente suponhamos que T não é limitada. Então existe uma sequência x_n tal que $\|Tx_n\| \geq n\|x_n\|$. Considerando a sequência dada por $y_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$ vemos que $y_n \to 0$; porém $Ty_n \not\to \Theta$ pois $\|Ty_n\| \geq 1$. Logo T é descontínua na origem e portanto em todo espaço X, pela i). C.Q.D.

3.4.4 <u>Teorema</u> - Seja $T:X \to Y$ uma transformação linear e X e Y espaços vetoriais normados. Então os enunciados seguintes são equivalentes:

i) T^{-1} existe e é contínua em $R[T]$.

ii) Há uma constante $m > 0$ tal que
$\|Tx\| \geq m\|x\|$, $x \in X$.

<u>Prova</u>: Se T^{-1} existe e é contínua no seu domínio então para todo $y \in R[T]$ vale $\|T^{-1}y\| \leq M\|y\|$, para uma certa constante $M > 0$. Dado $x \in X$ temos então:

$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq M.\|Tx\|$. Basta agora tomar $m = \dfrac{1}{M}$.

Recìprocamente de ii) segue que se $Tx = \Theta$ então $x=\Theta$. Pelo exercício em 3.4.2 T é uma injeção e portanto tem inversa T^{-1} sôbre $R[T]$. Se $y \in R[T]$ então $y = Tx$ para um certo x

de X e daí de $x = T^{-1}y$ e da ii) segue:

$$m.\|T^{-1}y\| = m\|x\| \leq \|Tx\| = \|y\|$$

isto é

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| . \qquad \text{C.Q.D.}$$

Basta agora aplicar o teorema anterior.

3.4.5 <u>Definição</u> - Duas normas definidas sôbre o mesmo espaço vetorial E são ditas <u>equivalentes</u> se as topologias induzidas pelas métricas correspondentes forem coincidentes.

3.4.6 <u>Teorema</u> - Duas normas $\| \|_1$ e $\| \|_2$ sôbre um espaço vetorial E são equivalentes se e só se existirem constantes positivas m e M tais que

$$m\|x_1\| \leq \|x\|_2 \leq M.\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \text{ de } E.$$

<u>Prova</u>: Sejam E_1 e E_2 os espaços vetoriais normados obtidos de E por introdução das normas $\| \|_1$ e $\| \|_2$, respectivamente. Definimos a transformação linear $T: E_1 \longrightarrow E_2$ pela expressão $Tx = x$. Pelo teorema 3.4.4, as desigualdades

$$m\|x\|_1 \leq \|Tx\|_2 \leq M.\|x\|_1$$

são exatamente as condições que asseguram a continuidade simultâneamente de T e de T^{-1}. Porém como $T^{-1}(A) = A$ e $(T^{-1})^{-1}(A) = A$ para qualquer subconjunto A de E segue que T e T^{-1} são contínuas simultâneamente se e só se os abertos de E_1 forem abertos de E_2 e vice-versa. C.Q.D.

3.4.7 Corolário - Os espaços $\ell^p(n)$, $1 \leq p \leq \infty$, têm a mesma topologia.

Exercício: Prove êste corolário calculando as constantes m e M para os diversos casos. (Como a equivalência de normas é uma relação de equivalência é suficiente fixar uma delas e variar as demais).

3.4.8 Espaços vetoriais de aplicações lineares.

O conjunto de tôdas transformações lineares de um espaço vetorial X em outro espaço vetorial Y, constitue um espaço vetorial sôbre o mesmo corpo de X e Y, desde que munido das seguintes operações:

i) soma, definida por $(T_1+T_2)(x) = T_1x + T_2x$

ii) produto por escalar, definido por $(\lambda T)(x) = \lambda(Tx)$, isto para todos $x \in X$ e λ no corpo dado.

Exercício: Verifique esta asserção.

3.4.9 - Agora suponhamos que X e Y são espaços vetoriais normados. Então sendo $T: X \to Y$ linear e limitada, já definimos sua norma por $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$. É imediato que $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0$ se e só $T = \Theta$ onde Θ é a transformação linear definida por $\Theta.x = \Theta$ para todo x de X. Mais ainda vale $\|\lambda T\| = |\lambda| . \|T\|$. A desigualdade triangular resulta de

$$\|(T_1+T_2)x\| = \|T_1x + T_2x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

para $\|x\| = 1$. Em consequência disto introduzimos a seguinte notação.

3.4.10 - Sejam X,Y espaços vetoriais normados. Por $\mathcal{L}(X,Y)$ representaremos o espaço vetorial normado das transformações lineares contínuas de X em Y, com a norma dada acima.

3.5 Espaços de Banach.

3.5.1 Definição - Um espaço vetorial normado completo chama-se espaço de Banach.

Exemplo 1 - Por 1.17 $C[0,1]$ é completo e pelo Exemplo 3a) em 3.1.1 $C[0,1]$ é um espaço vetorial normado. Logo é espaço de Banach.

Exemplo 2 - Todo espaço vetorial normado E de dimensão finita n, é de Banach. Basta observar que o isomorfismo de E sôbre $\ell^1(n)$ definido em 3.3:

$$x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n \longrightarrow (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

é um homeomorfismo, isto é, é uma aplicação contínua (pela (3.6)) que tem inversa contínua (pela (3.5')). Daí, se $\{y_n\}$ em E é de Cauchy, sua imagem em $\ell^1(n)$ também o será; como $\ell^1(n)$ é completo, esta sequência será convergente; pela continuidade da aplicação inversa a sequência $\{y_n\}$ deverá convergir para a imagem inversa dêste limite.

Exemplo 3 - ℓ^p, $p \geq 1$, é espaço de Banach.

De fato, seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy, $x_n \in \ell^p$, $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots)$, $n=1,2,\dots$. Escrevendo a tabela infinita,

$$\begin{array}{lllll} x_1 : & \xi_1^{(1)} & \xi_2^{(1)} & \xi_3^{(1)} & \cdots \\ x_2 : & \xi_1^{(2)} & \xi_2^{(2)} & \xi_3^{(2)} & \cdots \\ x_3 : & \xi_1^{(3)} & \xi_2^{(3)} & \xi_3^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

vamos mostrar que o conjunto das entradas de uma coluna k qualquer constitue sequência de Cauchy de números complexos.

Isto segue imediatamente de:

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| = (|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p)^{1/p} \leq \|x_n - x_m\| .$$

Seja então $\xi_k = \lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)}$.

Agora construimos o vetor $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ cujas entradas são exatamente os limites das diversas colunas. Mostraremos que:

a) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell^p$. De fato, por ser de Cauchy, $\{x_n\}$ é limitada, isto é $\|x_n\| \leq M$, para um certo M. Daí

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)}|^p\right)^{1/p} \leq \|x_n\| \leq M .$$

Fazendo $n \to \infty$, e observando que $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$, obtemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \leq M .$$

Como k é qualquer, isto mostra que $x \in \ell^p$.

b) $\|x_n - x\| \to 0$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Daí há N tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ se $n,m \geq N$. Portanto

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p\right)^{1/p} \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

para $n,m \geq N$ e k qualquer. Com n e k fixos, façamos $m \to \infty$. Obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \;, \quad \text{se} \quad n \geq N.$$

Como k é arbitrário isto significa que $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ se $n \geq N$, isto é, $x_n \to x$ e ℓ^p é completo.

<u>Exemplo 4</u> - O espaço vetorial normado $\mathcal{C}^p[a,b]$, $p \geq 1$, dado em 3.1.1 <u>não</u> é de Banach. Vamos considerar o caso em que $p = 1$, $a = 0$, $b = 2$ e definir as funções contínuas

$$x_n(t) = \begin{cases} t^n \;, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \;, & 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Então $\{x_n\}$ é de Cauchy pois

$$\int_0^2 |x_n - x_m|\, dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \quad \text{se} \quad n \geq m \;.$$

Mas $x_n(t)$ converge pontualmente para a função discontínua

$$x_o(t) = \begin{cases} 0 \;, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \;, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Como a desigualdade triangular ainda valeria se permitissemos funções contínuas por partes, a existência de uma função limite $x(t)$ contínua implicaria que

$$\int_0^2 |x(t) - x_o(t)|\, dt = 0$$

o que não é possível.

3.5.2 Completamento.

Se um espaço vetorial normado X não fôr completo, podemos completá-lo como espaço métrico, pelo processo descrito no teorema 1.16.5, ou por algum outro processo. No entanto se quizermos obter um espaço de Banach a partir de X, precisamos estender a estrutura vetorial e a norma ao completamento, garantindo ainda a continuidade das operações vetoriais. Vamos usar o completamento e a notação dada em 1.16.5. Dados $y,v \in Y$, sejam $\{x_n\} \in y$ e $\{u_n\} \in v$. Então $\{x_n+u_n\}$ também é sequência de Cauchy e portanto pertence a um z de Y. Êste z só depende de y e v e não da escolha particular das sequências pois de $\{x_n'\} \in y$ e $\{u_n'\} \in v$ segue

$$\{x_n + u_n\} \sim \{x_n' + u_n'\} \quad . \qquad \text{(Verifique)}.$$

Então definimos a soma por $y+v = z$. Anàlogamente definimos λy. A norma seria definida por $\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$, sendo $\{x_n\} \in y$. O zero de Y seria a classe contendo a sequência $\{\Theta,\Theta,\Theta,\ldots\}$, $\Theta \in X$. É uma simples questão de rotina verificar que estas definições estão bem dadas, que X é isomorfo a Y_o e que a métrica de Y é derivada desta norma assim introduzida, o que deixamos a cargo do leitor. Como em 1.16.7, podemos agora obter o completamento $\hat{X}$, o qual será um espaço de Banach do qual X é um subespaço denso.

Informamos ao leitor que o espaço $L^p(a,b)$, com $p \geq 1$, dito das funções de potência p integrável, é um espaço de Banach isométrico e isomorfo ao espaço de Banach obtido de $\mathscr{C}^p(a,b)$ pelo processo acima descrito. Isto é mostrado em teoria

da integração, onde se constroe os elementos de $L^p(a,b)$ como classes de equivalência de funções que diferem apenas em conjuntos ditos de medida nula, com uma norma apropriada; no caso particular em que $p = 1$ e em que a classe contém uma função não negativa esta norma coincide com a integral de Lebesgue das funções da classe dada. Esta integral generaliza o conceito de integral de Riemann, via um processo de completamento. Com isto, o leitor que desconhece integral de Lebesgue, fica no entanto conhecendo sua ligação com o que aqui estudamos.
Um tipo de espaço de Banach muito importante é o que nos é dado pelo seguinte teorema.

3.5.3 <u>Teorema</u> - Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Se Y é de Banach então também $\mathcal{L}(X,Y)$ é espaço de Banach.

<u>Prova:</u> $\mathcal{L}(X,Y)$ foi definido como espaço vetorial normado em 3.4.10, com norma $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Vamos mostrar que é completo. Seja $\{T_n\}$ uma sequência de Cauchy; dado $\varepsilon > 0$ há N tal que $n,m \geq N$ implica $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$. Daí obtemos $\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|$, usando a definição da norma dada acima. Logo $\{T_n x\}$ é uma sequência de Cauchy em Y, para todo x, e portanto tem um limite em Y por ser êste completo. Definimos uma aplicação $T: X \longrightarrow Y$ dada exatamente por êste limite, isto é fazemos $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Da continuidade das operações vetoriais resulta imediatamente que T é linear. Por ser de Cauchy, $\{T_n\}$ é limitada, isto é, vale $\|T_n\| \leq M$ para certo M. Daí também $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ para todo x e portanto pela con-

tinuidade da norma segue $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Logo T é limitado; pelo teorema 3.4.3 T é contínua isto é $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade $\|T_m x - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\|$, $n,m \geq N$, obtemos $\|T_m x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$ e em consequência $\|T_m - T\| \leq \varepsilon$ para $m \geq N$. Logo $T_m \to T$, isto é, $\mathcal{L}(X,Y)$ é completo. C.Q.D.

3.6 Dual de um espaço vetorial normado.

Seja E um espaço vetorial normado, sôbre o corpo dos reais ou dos complexos. Introduzindo o valor absoluto como norma dos escalares êstes passam a ser espaços de Banach, respectivamente $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$; representemo-los indistintamente por $\mathbb{K}$. Então pelo teorema anterior $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ é um espaço de Banach e seus elementos são exatamente os funcionais lineares contínuos sôbre E.

3.6.1 Definição - Chamamos $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ dual, ou adjunto, do espaço vetorial normado E, e o denotamos por E^*.

Em um espaço vetorial normado E_n de dimensão finita $n > 0$, todo funcional linear f pode ser escrito

$$f(x) = \xi_1 f(x_1) + \dots + \xi_n f(x_n) \tag{3.7}$$

onde $x_1, \dots, x_n$ constituem uma base de E_n e $x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$. Como as aplicações $x \to \xi_i$, $i=1,\dots,n$, são contínuas em E_n (verifique), resulta daqui que todo funcional linear sôbre E_n é contínuo. Portanto o espaço vetorial que integra E_n^* é o de todos funcionais lineares, independentemente da norma de E_n, e tem dimensão n também. No entanto a norma de E_n^* dependerá da norma de E_n.

<u>Exemplos</u>: 1) <u>Dual de $\ell^p(n)$</u>, $1 \le p \le \infty$.

Pela observação anterior o espaço vetorial de $(\ell^p(n))^*$ está em isomorfismo com $V_n(\mathbb{C})$, dado por

$$f \longleftrightarrow (f_1,\ldots,f_n) ,$$

onde $f_i = f(x_i)$, $i=1,\ldots,n$, e $x_1,\ldots,x_n$ constituem base de $\ell^p(n)$. Tomemos a base constituida por $x_1 = (1,0,\ldots,0)$; $x_2 = (0,1,0,\ldots,0)$;...; $x_n = (0,\ldots,0,1)$.

Seja $1 < p < \infty$. Pela desigualdade de Holder ((3.3)) aplicada a (3.7) obtemos:

$$|f(x)| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{1/q} \cdot \|x\|_p$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$. Portanto $\|f\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{1/q}$. Tomemos o vetor x^o de componentes $\xi_k^o = |f_k|^{q-1} \cdot C^{-i\Theta}$ onde $\Theta_k = \arg f_k$, $k=1,\ldots,n$. Daí então:

$$f_k\, \xi_k^o = |f_k|^q = |\xi_k^o|^{\frac{q}{q-1}} = |\xi_p^o|^p$$

Portanto:

$$\|x^o\|_p = \left(\sum_k |\xi_k^o|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_k |f_k|^q \right)^{1/p} ,$$

$$f(x^o) = \sum_k |f_k|^q = \left(\sum_k |f_k|^q \right)^{1/q} \cdot \|x^o\|_p ,$$

por ser $1/p + 1/q = 1$.

Logo a norma de f é exatamente

$$\|f\| = \left(\sum_k |f_k|^q \right)^{1/q} = \|(f_1,\ldots,f_n)\|_q ,$$

isto é, $(\ell^p(n))^*$ é isomètricamente isomorfo a $\ell^q(n)$, através do isomorfismo dado acima; aqui $q = \frac{p}{p-1}$.

Exercício: Mostre que um resultado correspondente vale para os casos $p = 1$ e $p = \infty$.

2) Dual de ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.

Denotemos os vetores unitários por $e_1 = (1,0,\ldots)$ $e_2 = (0,1,\ldots)$, etc. Seja $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots) \in \ell^p$; então os vetores $x^{(n)}$ definidos mantendo-se as n primeiras componentes de x e fazendo-se as demais iguais a zero, para $n = 1,2,\ldots$, também estão em ℓ^p e convergem para x, nos casos $p \geq 1$, $p < \infty$ (verifique). Seja f um funcional linear contínuo sôbre ℓ^p. Escrevamos $f_i = f(e_i)$, $i=1,2,\ldots$. Então $f(x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i$, pela linearidade de f, pois $x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i$. Como f é contínua, $x^{(n)} \to x$ implica $f(x^{(n)}) \to f(x)$. Portanto $\sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \to f(x)$, isto é, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i$ é convergente e vale:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i \quad , \quad (1 \leq p < \infty) \tag{3.8}$$

Agora consideremos primeiramente o caso $1 < p < \infty$.
Tomemos em particular o vetor $x^{(n)}$ dado por

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} |f_k|^{q-1} \cdot e^{-i\,\Theta_k} & , \quad k=1,\ldots,n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

onde $\Theta_k = \arg f_k$; òbviamente $x^{(n)} \in \ell^p$.

Como no exemplo anterior obtemos aqui:

$$|f(x^{(n)})| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{1/q} \cdot \|x^{(n)}\|_p$$

Portanto

$$\|f\| \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{1/q} \quad , \text{ para qualquer } n.$$

Isto mostra que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{1/q}$$

é convergente e é $\leq \|f\|$.

Em particular da desigualdade de Holder aplicada à (3.8) segue que

$$\|f\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^q \right)^{1/q} \quad ;$$

portanto vale o sinal da igualdade. Então a correspondência $f \leftrightarrow (f_1, f_2, \ldots)$ é um isomorfismo entre $(\ell^p)^*$ e ℓ^q é também uma isometria, nos casos $1 < p < \infty$. Para o caso $p = 1$, tomamos para $x^{(n)}$ o vetor dado por

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} e^{-i\Theta_k} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Então $\|x^{(n)}\|_1 = 1$ e $f(x^{(n)}) = |f_n|$. Daí $\|f\| \geq |f_n|$ para todo n implica $\sup_n |f_n| \leq \|f\|$ logo o vetor $(f_1, f_2, \ldots) \in \ell^\infty$. Agora de (3.8) obtemos

$$|f(x)| \leq \sup_n |f_n| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$$

o que mostra que $\|f\| \leq \sup_n |f_n|$. Portanto vale o sinal de igualdade; logo $(\ell^1)^*$ é isomètricamente isomorfo a ℓ^1.

3) A recíproca não é verdadeira, isto é, $(\ell^\infty)^*$ não é isomètricamente isomorfo a ℓ^1, porém isto não será provado aqui. Já o dual do subespaço c de ℓ^∞, dos vetores $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ para os quais vale $\xi_n \to 0$, quando $n \to \infty$, é isomètricamente isomorfo a ℓ^1.

Exercício: Prove a asserção acima acêrca de c^*.

4) Dual de $C[a,b]$.

Mostra-se que a todo elemento f do dual de $C[a,b]$ corresponde uma função v de variação limitada em $C[a,b]$ tal que $f(x)$ se expressa pela integral de Riemann-Stieltjes

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dv(t),$$

sendo ainda válido que $\|f\|$ = Variação de v em $[a,b]$. Omitimos a prova.

3.7 Espaços reflexivos.

O dual E^* de um espaço vetorial normado E, também tem, por sua vez, um dual que denotaremos por E^{**}.

Observemos que tomando x de E e definindo a aplicação $\ell_x : E^* \to \mathbb{K}$ por $\ell_x[f] = f(x)$, para todo f de E^*, resulta fàcilmente que ℓ_x é linear. Mais ainda ℓ_x é contínuo pois $|\ell_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| . \|f\|$. Portanto $\|\ell_x\| \leq \|x\|$ e $\ell_x \in E^{**}$. Pode-se provar que $\|\ell_x\| = \|x\|$, mas não o faremos aqui. É fácil de ver que a aplicação $x \to \ell_x$ é linear, isto é, que

$\ell_{\alpha x+\beta y} = \alpha\ell_x + \beta\ell_y$. Portanto esta aplicação leva E em um subespaço de E^{**}, isto é E é isomètricamente isomorfo a um subespaço de E^{**}.

3.7.1 <u>Definição</u> - Se suceder que a aplicação $x \longrightarrow \ell_x$ de E em E^{**} fôr sobrejetora, isto é, se para todo φ de E^{**} houver um correspondente x de E tal que $\varphi(f) = f(x)$ qualquer que seja f de E^*, dizemos que E é <u>reflexivo</u>.

Em particular, segue que se E é reflexivo então E e E^* são isomètricamente isomorfos.

<u>Exemplos</u>: 1) Os espaços ℓ^p, $1 < p < \infty$, são reflexivos. De fato, representemos por T o isomorfismo $(f_1,f_2,\ldots) \longrightarrow f$ de ℓ^q em $(\ell^p)^*$, tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\xi_i$, para todo $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots) \in \ell^p$.

Seja $\varphi \in (\ell^p)^{**}$ e $f \in (\ell^p)^*$ quaisquer. Por definição de T, $f = T\tilde{f}$, onde $\tilde{f} = (f_1,f_2,\ldots) \in \ell^q$. Daí $\varphi(f) = \varphi(T\tilde{f}) = (\varphi T)(\tilde{f})$.

Como $\varphi T:\ell^q \longrightarrow \mathbb{C}$ é também um funcional linear contínuo, por ser composição de aplicações lineares contínuas, temos que $\varphi T \in (\ell^q)^*$. Daí

$$(\varphi T)(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi T)(e_i).f_i ,$$

e o vetor $((\varphi T)(e_1),(\varphi T)(e_2),\ldots) \in \ell^p$; chamemos a êste vetor de x^o. Então vem:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi T)(e_i).f_i = f(x^o) .$$

Logo para todo φ de $(\ell^p)^{**}$ o elemento $x^o = ((\varphi T)(e_1), (\varphi T)(e_2), \ldots) \in \ell^p$ e satisfaz $\varphi(f) = f(x^o)$, para qualquer f de $(\ell^p)^*$. Logo ℓ^p, $1 < p < \infty$, é reflexivo.

2) Já o espaço ℓ^1 não é reflexivo pois, como vimos, $(\ell^1)^*$ é isomètricamente isomorfo a ℓ^∞ mas a recíproca não é verdadeira.

3) Qualquer espaço vetorial normado E incompleto é <u>não</u> reflexivo. De fato, como os duais são sempre completos e como um espaço vetorial normado isomètricamente isomorfo a um espaço de Banach também é completo, E não pode ser isomètricamente isomorfo a E^{**}; portanto como esta condição é necessária para a reflexividade, E não é reflexivo.

Capítulo 4

ESPAÇOS DE HILBERT

Consideremos o caso particular dos espaços ℓ^p quando $p = 2$. Como $p = 2$ implica $q = \frac{p}{p-1} = 2$ também, os resultados em 3.6.1 nos dizem que $(\ell^2)^*$ é isomètricamente isomorfo a si próprio e que a todo funcional linear contínuo f sôbre ℓ^2 corresponde um único elemento $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots.)$ de ℓ^2 tal que para todo $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ vale

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\eta}_i \cdot \xi_i \qquad (4.1)$$

Se definirmos $\langle y,x\rangle$ por $\langle y,x\rangle = f(x)$, (4.1) nos mostra então que a aplicação $\langle\ ,\ \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{K}$ goza das propriedades

i) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $= 0$ se e só se $x = \Theta$

ii) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$

iii) $\langle y,x\rangle$ é linear em x.

4.1 <u>Definição</u> - Em um espaço vetorial E sôbre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ gozando das propriedades i,ii,iii) acima, é chamada <u>produto escalar</u>. Ao escalar $\langle y,x\rangle$ chama-se produto escalar dos vetores y e x, nesta ordem.

De ii) e iii) resulta que o produto escalar é anti-linear na 1a. variável, isto é, que

$$<\alpha z + \beta y, x> = \bar{\alpha}.<z,x> + \bar{\beta}.<y,x> .$$

Por simplicidade vamos sempre tratar sòmente o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; o caso real pode ser tratado anàlogamente.

4.2 Desigualdade de Schwarz.

Vamos provar que vale a seguinte desigualdade (dita de Schwarz) em um espaço vetorial normado provido de produto escalar:

$$|<y,x>|^2 \leq <y,y> . <x,x> \tag{4.2}$$

Temos que $<x-\lambda y, x-\lambda y> \geq 0$. Desenvolvendo:

$$<x,x> - \bar{\lambda}<y,x> - \lambda<x,y> + |\lambda|^2.<y,y> \geq 0$$

Se $<y,y> = 0$ obtemos

$$<x,x> \geq 2 \text{ Re } (\lambda.<x,y>)$$

Como λ é arbitrário podemos tomar $\lambda = \alpha.\overline{<x,y>}$, com α real. Daí

$$<x,x> \geq 2\alpha \ |<x,y>|^2$$

o que implica $<x,y> = 0$ pois α é arbitrário. Neste caso a (4.2) é válida trivialmente.

Se $<y,y> \neq 0$ podemos tomar $\lambda = \dfrac{<y,x>}{<y,y>}$; obtemos

$<x,x> - \dfrac{|<x,y>|^2}{<y,y>} \geq 0$ que é equivalente a (4.2).

Exercício: Prove que o sinal de igualdade vale na desigualdade de Schwarz se e só se ou $x = \alpha y$ ou $y = \lambda x$.

4.3 Desigualdade triangular.

Observemos inicialmente que da ii) segue

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2 \operatorname{Re} \langle y,x\rangle \le 2 |\langle y,x\rangle|$$

Como

$$\langle x+y,x+y \rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

obtemos

$$\langle x+y,x+y \rangle \le \langle x,x\rangle + 2 |\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$$

Usando a desigualdade de Schwarz obtemos

$$\langle x+y,x+y \rangle \le (\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2$$

pondo então $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ esta última desigualdade pode ser escrita, após extração de raiz quadrada:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| .$$

Pelas condições i) e iii) e por esta desigualdade resulta que $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ é uma norma. Dizemos que esta norma se deriva do produto escalar dado.

4.4 Definição - Um espaço de Hilbert H é um espaço de Banach cuja norma deriva de um produto escalar.

Como exemplo temos o espaço ℓ^2 que motivou a presente definição. Do mesmo modo $\ell^2(n)$ sôbre os reais, dito também espaço euclidiano de dimensão n, nos dá um exemplo de espaço de Hilbert, com o produto escalar $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$.

4.4.1 Lema - O produto escalar em um espaço de Hilbert H é uma função contínua sôbre $H \times H$.

<u>Prova</u>: Temos

$$
\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle| &= |\langle x-u,y\rangle + \langle u,y-v\rangle| \\
&\leq |\langle x-u,y\rangle| + |\langle u,y-v\rangle| \qquad (4.3)\\
&\leq \| x-u \| . \| y\| + \| y-v\| . \| u\|
\end{aligned}
$$

Se agora $(x_n,y_n) \longrightarrow (u,v)$ em $H \times H$ então $x_n \rightarrow u$ e $y_n \longrightarrow v$ (ver 1.15.8); daí $\| y_n\|$ é limitada e portanto substituindo-se x por x_n e y por y_n nas desigualdades acimas, decorre que $\langle x_n,y_n\rangle \longrightarrow \langle u,v\rangle$ Q.E.D.

4.4.2 <u>Pré-espaços de Hilbert.</u>

Já vimos que um espaço vetorial normado incompleto pode ser completado de modo a se obter um espaço de Banach (ver 3.5.2) Se tivermos um espaço vetorial normado incompleto E cuja norma se deriva de um produto escalar, (também chamado pré-espaço de Hilbert), podemos então completá-lo obtendo-se um espaço de Banach. Para que o completamento seja além disso um espaço de Hilbert H, devemos estender a definição do produto escalar a $H \times H$, assegurando que goze das propriedades i), ii) e iii) requeridas. Pelo lema anterior o produto escalar é contínuo; portanto só pode haver uma única maneira de fazer esta extensão, como seja definindo-o por

$$\langle y,v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n,u_n\rangle \quad , \quad y,v \in H ,$$

onde $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ são sequências de Cauchy pertencentes a y, v respectivamente (ver notação em 3.5.2). Que $\langle y,v\rangle$ está bem definido vê-se de (4.3) aplicado a $\langle x_n,u_n\rangle$ e $\langle x_n',u_n'\rangle$ sendo

$\{x'_n\} \in y$, $\{u'_n\} \in v$. As propriedades i), ii) e iii) saem imediatamente desta definição. Daquí segue que todo pré-espaço de Hilbert admite um completamento que é um espaço de Hilbert, estendendo-se o produto escalar pela fórmula acima.

Exemplo: O espaço vetorial normado $\mathcal{C}^2[a,b]$ dado em 3.1.1 é um pré-espaço de Hilbert, pois sua norma se deriva do produto escalar definido por

$$<x,y> = \int_a^b \overline{x(t)}y(t)dt$$

como o leitor verificará fàcilmente. Daquí segue que o espaço $L^2(a,b)$ citado em 3.5.2 é um espaço de Hilbert, com o produto escalar definido via o processo limite acima referido.

Observação: O processo aqui referido dá então um instrumento para a construção de espaços de Hilbert, bastando inicialmente definir um produto escalar em um espaço vetorial complexo ou real.

Exercício: Verifique que no espaço vetorial das funções complexas com derivadas contínuas no intervalo finito a,b o funcional

$$\int_a^b \bar{x}(t)y(t)dt + \int_a^b \bar{x}'(t)y'(t)dt$$

$$(x' = \frac{dx}{dt} , \quad y' = \frac{dy}{dt})$$

é um produto escalar, Tire daí uma conclusão.

4.5 Geometria dos espaços de Hilbert.

Retornemos ao estudo dos espaços de Hilbert.

4.5.1 Lei do paralelogramo. De

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} <x,y>$$

obtemos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

que é dita lei do paralelogramo.

Pode-se provar fàcilmente que se em um espaço de Banach a norma satisfaz à lei do paralelogramo então ela se deriva de um produto escalar, isto é, o espaço também é de Hilbert. Em outras palavras esta lei é uma propriedade exclusiva dos espaços de Hilbert.

Exercício: Prove esta asserção se o espaço é real. (Sugestão: defina $<x,y> = \frac{1}{4} \left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$

Ângulo entre dois vetores.

O cosseno do ângulo formado por dois vetores não nulos $x = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ e $y = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ do R^3 é dado por $\sum_{i=1}^{3} \frac{\xi_i \ \eta_i}{\|x\| \cdot \|y\|}$, que também se pode escrever $\frac{<x,y>}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Em particular o ângulo por êles formado será de 90^o se e só se $<x,y> = 0$.

Isto motiva a seguinte definição no caso geral.

4.5.2 Definição - Dois vetores x,y de um espaço de Hilbert são ditos ortogonais quando $<x,y> = 0$.

Neste caso também escrevemos $x \perp y$; notemos que $x \perp y$ equivale a $y \perp x$ e que sempre $x \perp \theta$.

4.5.3 <u>Definição</u> - Um conjunto S de vetores de um espaço de Hilbert diz-se <u>ortogonal</u> quando $x \perp y$ para todo par de elementos distintos x,y de S. Se além disto $\|x\| = 1$ para todos x de S, S é dito <u>ortonormal</u>.

4.5.4 <u>Exemplos</u>: Os vetores $e_1 = (1,0,\dots)$; $e_2 = (0,1,0,\dots)$;... do ℓ^2 constituem um conjunto ortonormal.

No espaço $\mathscr{C}^2(0,2\pi)$ referido em 4.4.2 o conjunto formado pelas funções S: $\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$, $n = 0,1,2,\dots$, $0 \le t \le 2\pi$, satisfaz à relação

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}\, e^{-int}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Portanto no completamento $L^2(0,2\pi)$ dêste espaço as classes determinadas pelos elementos de S constituirão um conjunto ortonormal, em vista do que se vire em 4.4.2. O leitor poderá verificar também que no espaço $\mathscr{C}^2(0,2\pi)$ sôbre os reais, as funções

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t\,,\dots & \\ & (0 \le t \le 2\pi) \\ \qquad\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{sen}\, t\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{sen}\, 2t\,,\dots & \end{array}$$

também satisfazem às condições de ortonormalidade.

<u>Exercício</u>: Verifique esta asserção.

4.5.6 <u>Definição</u> - Dada uma sequência ortonormal $\{e_n\}$ em um espaço de Hilbert H chamamos os escalares $\langle e_n,h\rangle$, $n=1,2,\dots$, de <u>coeficientes de Fourier</u> de h com respeito à sequência $\{e_n\}$.

Veremos agora uma desigualdade fundamental relacionando a norma e os coeficientes de Fourier de um elemento qualquer em relação a uma dada sequência ortonormal.

4.6 Desigualdade de Bessel.

Seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal e x um elemento de H. Chamemos de S_n o subespaço gerado por $e_1,\ldots,e_n$, $n=1,2,\ldots$. Calculemos o quadrado da distância de x a um vetor $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ de S_n:

$$\begin{aligned}\|x - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i|^2 - 2\ \mathrm{Re}\ <\alpha_i e_i, x>\right\} \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left\{|\alpha_i|^2 - 2\mathrm{Re}<\alpha_i e_i, x> + |<e_i,x>|^2 - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - |<e_i,x>|^2\right\} \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i - <e_i,x>|^2 - \sum_{i=1}^{n}|<e_i,x>|^2 .\end{aligned}$$

Como o segundo têrmo no último membro da igualdade acima é não negativo segue daí

$$\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|<e_i,x>|^2 \quad , \text{ para todo } y \text{ de } S_n .$$

Em particular quando tomamos $\alpha_i^o = <e_i,x>$, $i=1,2,\ldots,n$ o vetor $y^o = \alpha_1^o e_1 + \ldots + \alpha_n^o e_n$ de S_n satisfaz

$$\|x-y^o\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|<e_i,x>|^2 .$$

Daqui segue

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |<e_i,x>|^2 \quad \text{e} \quad d(x,S_n) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |<e_i,x>|}$$

Como isto vale para todo n obtemos daqui a desigualdade de Bessel:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |<e_i,x>|^2 .$$

Ao mesmo tempo obtivemos uma expressão que dá a distância de x a S_n.

4.7 Ortonormalização de Gramm-Schmidt.

Dada uma sequência $\{x_n\}$ qualquer em um espaço de Hilbert podemos construir a partir dela um conjunto ortonormal, desde que pelo menos um $x_n \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos supôr os seus vetores linearmente independentes, pois em caso contrário extraimos primeiramente um subconjunto com esta propriedade. Pomos então:

$$y_1 = x_1 \qquad\qquad e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - <x_2,e_1>.e_1 \qquad\qquad e_2 = \frac{\|y_2\|}{\|y_2\|}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} <x_i,e_i>.e_i \qquad\qquad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

(Observemos que sempre será $y_n \neq \Theta$ por causa da independência linear suposta). É fácil verificar que $\{e_n\}$ é ortonormal.

4.8 Teorema (Riesz-Fischer).

Se $\{e_n\}$ é uma sequência ortonormal em um espaço de Hilber H e se a sequência de escalares $\{\alpha_n\}$ é tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$ então há um elemento x de H tal que $\alpha_n = \langle e_n, x\rangle$, isto é, cujos coeficientes de Fourier com respeito a $\{e_n\}$ são os escalares dados. Vale ainda $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Prova: Pondo $x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $n=1,2,\ldots$, obtemos, sendo $m\geq n$:

$$\| x_m - x_n \|^2 = \| \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i e_i \| = \sum_{i=n+1}^{m} |\alpha_i|^2 \longrightarrow 0$$

quando $n,m \to \infty$, por ser convergente a série $\sum_i |\alpha_i|^2$. Logo $\{x_n\}$ é de Cauchy e daí $x_n \to x$ para um certo x de H.

Para $m \geq n$ temos $\langle e_n, x_m\rangle = \alpha_n$; pela continuidade do produto escalar obtemos, fazendo $m \to \infty$:

$$\langle e_n, x\rangle = \alpha_n \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

Pela construção de x_n temos $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. C.Q.D.

Aplicação - Uma aplicação clássica dêste teorema diz respeito às séries de Fourier. De fato se $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots$ são sequências de reais tais que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty \quad ,$$

então como a sequência de funções trigonométricas dadas em 4.5.4 é ortonormal há uma função x em alguma classe de $L^2(0,2\pi)$ sôbre os reais, cujos coeficientes de Fourier são exatamente os nú meros dados, isto é:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt\,dt \; ; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\,dt$$

4.9 <u>Definição</u> - Seja S um subconjunto do espaço de Hilbert H. Definimos seu <u>complemento ortogonal</u> como o conjunto S dado por

$$S^{\perp} = \left\{ x\epsilon H \;\middle|\; \langle s,x\rangle = 0 \quad \forall\, s\epsilon S \right\}.$$

É fácil de ver que $S^{\perp}$ é sempre um subespaço fechado. De fato que é um subespaço segue da linearidade de $\langle s,x\rangle$ em x. Que é fechado segue da continuidade do produto escalar pois se $x_n \to x$, $x_n \in S$, $n=1,2,\ldots,$ então $\langle s,x_n\rangle \to \langle s,x\rangle$ e daí $\langle s,x\rangle = 0$.

4.10 <u>Definição</u> - Um subconjunto C de um espaço vetorial real ou complexo é dito <u>convexo</u> se para todo par x,y de C também o subconjunto $\{\theta x + (1-\theta)y \mid 0 \le \theta \le 1\}$ está contido em C.

4.11 <u>Teorema</u> - Se C é um subconjunto convexo fechado de um espaço de Hilbert H então dado $h \in H$ existe um e um só x_0 de C tal que

$$\| x_0 - h \| = d(C,h) .$$

<u>Prova</u>: Por definição $d = d(C,h) = \inf_{x\epsilon C} \|x-h\|$; daí existe $x_n \in C$ tal que $\|x_n - h\| \to d$ quando $n \to \infty$. Apliquemos a lei do paralelogramo aos vetores $\frac{1}{2}(x_n-h)$ e $\frac{1}{2}(x_m-h)$; obtemos:

$$\|\tfrac{1}{2}(x_n+x_m)-h\|^2 + \|\tfrac{1}{2}(x_n-x_m)\|^2 = 2\,\|\tfrac{1}{2}(x_n-h)\|^2 + 2\,\|\tfrac{1}{2}(x_m-h)\|^2 \qquad (4.4)$$

Como C é convexo $\frac{1}{2}(x_n+x_m) \in C$ e daí $\|\frac{1}{2}(x_n+x_m)-h\|^2 \geq d^2$. Logo substituindo acima vem:

$$\|x_n-x_m\|^2 \leq 2\,\|x_n-h\|^2 + 2\|x_m-h\|^2 - 4\,d^2 .$$

Como $\|x_n-h\|^2 \longrightarrow d^2$ quando $n \to \infty$ segue daí que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Portanto há um x_o tal que $x_n \to x_o$; x_o pertence a C por ser C fechado. Daí $\|x_o-h\| = d$ pois $\|x_n-h\| \longrightarrow \|x_o-h\|$. A unicidade se prova fàcilmente também; seja $\hat{x}_o \in C$ tal que $\|\hat{x}_o-h\| = d$. Substituindo na (4.4) x_n e x_m por x_o e $\hat{x}_o$ respectivamente obtemos:

$\|\frac{1}{2}(x_o+\hat{x}_o)-h\|^2 + \|\frac{1}{2}(x_o-\hat{x}_o)\|^2 = \frac{1}{2}\,d^2 + \frac{1}{2}\,d^2 = d^2$. Como

$$\|\tfrac{1}{2}(x_o+\hat{x}_o) - h\|^2 \geq d^2$$

segue daí que:

$$\|\tfrac{1}{2}(x_o-\hat{x}_o)\|^2 = 0 \text{ isto é } \hat{x}_o = x_o .$$

C.Q.D.

Observação: Êste resultado não é necessàriamente válido em espaços de Banach. De fato se o fôsse, então considerando o caso em que C é um subespaço fechado próprio e $h \notin C$ teríamos que $\frac{1}{d}(h-x_o)$ pertenceria à esfera unitária e estaria à distância $=1$ de C. Portanto o lema de Riesz (3.2.2) valeria com $\Theta = 1$. Mas alí já vimos um contraexemplo a esta possibilidade.

4.11.1 Corolário - Usando a mesma notação do teorema temos que vale $\operatorname{Re} \langle x-x_o, h-x_o \rangle \leq 0$ para qualquer $x \in C$.

Prova: Tomemos $0 \le \Theta \le 1$. Daí:

$$d^2 \le \|\Theta x + (1-\Theta)x - h\|^2 = \|\Theta(x-x_0) - (h-x_0)\|^2$$
$$= \Theta^2 \|x-x_0\|^2 - 2\Theta \,\mathrm{Re}\, \langle h-x_0, x-x_0\rangle + \|h-x_0\|^2$$
$$= \Theta^2 \|x-x_0\|^2 - 2\Theta \,\mathrm{Re}\, \langle h-x_0, x-x_0\rangle + d^2$$

Portanto

$$2\Theta.\mathrm{Re}\, \langle h-x_0, x-x_0\rangle \le \Theta^2 . \|x-x_0\| .$$

Dividindo por Θ e fazendo $\Theta \to 0$ obtemos

$$\mathrm{Re}\, \langle h-x_0, x-x_0\rangle \le 0$$

C.Q.D.

Recordemos o seguinte conceito:

4.12 <u>Definição</u> - Um espaço vetorial V diz-se <u>soma direta</u> de dois subespaços W e U quando todo v de V se escreve de um modo único como soma de elementos u de U e w de W. Neste caso escrevemos $V = U \dotplus W$.

4.13 <u>Teorema da projeção</u> - Se S é um subespaço fechado do espaço de Hilbert H então $H = S \dotplus S^\perp$.

<u>Prova</u>: Um subespaço sempre é convexo. Como S é fechado, por hipótese, podemos aplicar o teorema 4.11. Para todo $h \in H$ existe $s_0 \in S$ tal que $d(h,S) = \|h-s_0\|$. Ponhamos $g = h-s_0$. Pelo corolário 4.11.1 vale

$$\mathrm{Re}\, \langle s-s_0, g\rangle \le 0 \quad \text{para qualquer } s \text{ de } S.$$

Para um dado s de S seja $\alpha = (s,g)$. Como $s_0 - \alpha s \in S$ a desigualdade aplicada a êste vetor nos dá:

$$\mathrm{Re}\, \langle \alpha s, g\rangle \le 0 .$$

Mas $\qquad <\alpha s,g> = \bar{\alpha}.<s,g> = |<s,g>|^2$

Logo de $|<s,g>|^2 \leq 0$ obtemos $<s,g> = 0$ para todo s de S. Portanto $g \in S^\perp$. Daquí segue que $h = s_0 + g$, $s_0 \in S$, $g \in S^\perp$. Falta provar a unicidade. Se também fôsse $h = s_0' + g'$, com $s_0' \in S$, $g' \in S$, teríamos então

$$s_0 + g = s_0' + z' \quad \text{e daquí:}$$

$$s_0 - s_0' = g' - g.$$

Como $s_0 - s_0' \in S$ e $g' - g \in S^\perp$ e como $S \cap S^\perp = \Theta$ segue daquí que $s_0 = s_0'$ e $g = g'$. $\qquad$ C.Q.D.

4.14 <u>Teorema da representação de Riesz.</u>

Se ℓ é um funcional linear contínuo sôbre H então há um único elemento f de H tal que $\ell(x) = <f,x>$ para todo x de H. Além disto $\|\ell\| = \|f\|$.

<u>Prova</u>: O espaço-nulo S da aplicação linear ℓ,

$S = \{x \in H \mid \ell(x) = 0\}$, é um subespaço fechado pois de $s_n \in S$, $s_n \to s$ segue $\ell(s) = \lim \ell(s_n)$ devido à continuidade de ℓ. Pelo teorema da projeção $H = S \dotplus S^\perp$. Se $\ell(x) = 0$ para todo x de H então $f = \Theta$ satisfaz ao teorema.

Se $\ell(x)$ não é idênticamente zero então S é subespaço próprio e neste caso $\dim S^\perp = 1$. De fato sejam $p,g \in S^\perp$ com $g \neq \Theta$. Como $z = p - \frac{\ell(p)}{\ell(g)}. g \in S^\perp$ e como também $z \in S$ por ser $\ell(z) = 0$, segue que $z = \Theta$ isto é $p = \frac{\ell(p)}{\ell(g)}. g$. Logo $S^\perp$ tem dimensão 1. Podemos supor sem perda de generalidade que $\|g\| = 1$. Agora todo $x \in H$ se escreve $x = s + \alpha g$, com $s \in S$.

Daquí vem

$$\ell(x) = \ell(s) + \alpha\ell(g) = \alpha.\ell(g) \ ,$$

e também vem

$$<g,x> = <g,s> + \alpha \ \|g\|^2 = \alpha$$

por ser $g \perp s$. Substituindo α na igualdade anterior vem

$$\ell(x) = \ell(g). <g,x>$$

Se puzermos $f = \ell(g).g$ obtemos $\ell(x) = <f,x>$ para todo $x \in H$. A unicidade de f se prova fàcilmente pois se também $\ell(x) = <f',x>$ para todo x de H obtemos $<f-f',x> = 0$; daí tomando $x = f-f$ isto nos diz que $\|f-f'\| = 0$ isto é $f' = f$. Finalmente temos

$$|\ell(x)| = |<f,x>| \leq \|f\|.\|x\|$$

e portanto $\|\ell\| \leq \|f\|$. Como porém $|\ell(f)| = \|f\|.\|f\|$ vem daí $\|\ell\| = \|f\|$. C.Q.D.

4.15 <u>Espaço dual H^*</u>. Seja H^* o espaço de Banach de todos os funcionais lineares contínuos sôbre H. A aplicação $\sigma: H^* \to H$ que associa a todo funcional linear ℓ de H^* o elemento f dado pelo teorema de Riesz é tal que

$$\ell(x) = <f,x> \quad , \quad x \in H \ ,$$

é bijetora. De fato pela unicidade de f ela é injetora. Como todo h de H é a imagem pela σ do funcional linear contínuo $\ell_h(x) = <h,x>$ ela é sobrejetora. Esta aplicação também é uma isometria pois vale $\|\ell\| = \|f\|$. No entanto σ é antilinear pois de

$$(\alpha\ell + \beta\ell')(x) = \alpha\ell(x) + \beta\ell'(x) = <\bar{\alpha}f + \bar{\beta}f', x>$$

segue que $\sigma(\alpha\ell + \beta\ell') = \bar{\alpha}.\sigma(\ell) + \bar{\beta}.\sigma(\ell')$.

Porém se H é real então σ é isomorfismo, isto é, no caso real H é isomètricamente isomorfo a H^*. (Observe o leitor que ao tratarmos do ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, escrevemos $f(x) = \sum_i f_i \xi_i$ e não $f(x) = \sum_i \bar{f}_i \xi_i$; com isto a aplicação lá definida era um isomorfismo. Porém no caso de um espaço de Hilbert qualquer, não está necessàriamente definida uma aplicaão com propriedades equivalentes às da aplicação $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \longrightarrow (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots)$ que permite passar de uma a outra das representações acima dadas para $f(x)$).

4.15.1 <u>Produto escalar em H^*.</u>

Podemos introduzir um produto escalar em H^* de modo a torná-lo também espaço de Hilbert. Basta definir o produto escalar de ℓ e ℓ' em H^* por

$$<\ell, \ell'>_* = <\sigma(\ell'), \sigma(\ell)> ;$$

em outros têrmos, se $\ell(x) = <f,x>$ e $\ell'(x) = <f',x>$ para todo x de H, definimos

$$< \ell, \ell' >_* = < f', f > .$$

O fato de que σ é antilinear fica compensado pela antilinearidade de $<f',f>$ em f'. Resulta daí que H^* também é espaço de Hilbert.

<u>Exercício</u>: Verifique que $<\ell, \ell'>_*$ é produto escalar e que a norma de H^* dêle se deriva.

Reflexividade dos espaços de Hilbert

4.16 Teorema - Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Seja $\sigma_*: H^* \to H^{**}$ a aplicação definida em 4.15 correspondente ao espaço de Hilbert H^*.

Dado $\varphi \in H^{**}$ queremos mostrar que existe $x \in H$ tal que

$$\varphi(\ell) = \ell(x) \quad \text{para todo} \quad \ell \in H^* .$$

Para tanto basta tomar $x = \sigma\sigma_*(\varphi)$. Daí, usando as definições de σ e σ_* e do produto escalar $<\ ,\ >_*$ obtemos:

$$\ell(x) = \ell(\sigma\sigma_*(\varphi)) = <\sigma(\ell), \sigma\sigma_*(\varphi)> = <\sigma_*(\varphi), \ell>_* = \varphi(\ell) .$$

Portanto todo espaço de Hilbert é reflexivo. C.Q.D.