

U N B

I M P A

TEORIA CLÁSSICA DO POTENCIAL

por

DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

EDITORA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

1963

PREFÁCIO

O presente trabalho foi preparado para ser apresentado como um curso no IV Colóquio Brasileiro de Matemática.

A escolha do assunto se deveu não somente ao interesse do autor como também à ausência de textos em português sobre equações parciais. Estas notas poderiam ser estudadas em um curso de terceiro ano da Faculdade de Filosofia, ou, com certeza, em um primeiro ano de cursos de pós-graduação. O único pré-requisito sendo cálculo, esta apostila poderia constituir um curso introdutório de equações parciais, omitindo-se certos tópicos para que seja possível apresentar um pouco de equações hiperbólicas e parabólicas, isto é, equações da onda e do calor.

Antes de cada capítulo, damos um pequeno sumário do conteúdo do mesmo. Isso dará ao leitor uma ideia dos vários assuntos aqui abordados.

A bibliografia, dividida em três partes, tem a finalidade de orientar estudos colaterais e prosseguimento no sentido das equações elípticas.

O último parágrafo do último capítulo historia, rapidamente, o desenvolvimento das equações elípticas após o princípio de Dirichlet. Obviamente, as referências aí dadas não são exaustivas. Trabalhos importantes omitidos podem ser localizados nas bibliografias dos trabalhos citados.

Dada à premência de tempo não nos foi possível preparar um número maior de exercícios. Para suprir, parcialmente, essa deficiência lembramos que o livro de Epstein, citado na bibliografia, contém interessantes exercícios.

Uma boa base de cálculo é essencial para que o leitor circule livremente nas diversas deduções deste trabalho. Indicamos àqueles que se sintam deficientes um estudo de capítulos do livro de Fulks (vide bibliografia).

Em muitos lugares, soltamos rédeas à imaginação e falamos de certas teorias mais avançadas, não na esperança do que o leitor entendesse completamente o que era dito, mas com o objetivo de ten

tá-lo a investigar melhor essas questões.

Agradecimentos são devidos a Elizabeth, Ida e Romário, datilógrafos do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, e a Wilson do IMPA. À minha espôsa, cujo estímulo e dedicação foram valiosos, expresso minha gratidão.

Djairo Guedes de Figueiredo

Brasília, junho de 1963

ÍNDICE

	Pag.
PREFÁCIO	i
ÍNDICE	iii
 CAPÍTULO I - TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E INTRODUÇÃO	
Sumário	1
§ 1 - Regiões e teorema da divergência	1
§ 2 - Potencial de um campo vetorial	15
§ 3 - Observações sôbre cálculo das variações	21
§ 4 - Problemas variacionais sem condições de contôrno...	28
§ 5 - O equilíbrio da membrana	31
 CAPÍTULO II - FUNÇÕES HARMÔNICAS	
Sumário	35
§ 1 - Funções Harmônicas	37
§ 2 - Problemas de contôrno	43
§ 3 - Primeira identidade de Green	47
§ 4 - Segunda identidade de Green	49
§ 5 - Terceira identidade de Green	49
§ 6 - Propriedade do valor médio	52
§ 7 - Funções de Green	53
§ 8 - Fórmula de Poisson	56
§ 9 - Teorema do Máximo (forma forte)	60
§ 10 - Convergência de funções harmônicas	61
§ 11 - Singularidades Removíveis	71
§ 12 - Equação de Poisson	73
§ 13 - O princípio da reflexão de Schwarz	81
 CAPÍTULO III - O PROBLEMA DE DIRICHLET	
Sumário	83
§ 1 - Funções subharmônicas e superharmônicas	84
§ 2 - O método de Poincaré	89
§ 3 - O método de Perron	92
§ 4 - A noção de barreira e o problema de Dirichlet.....	96

	Pag.
§ 5 - A função de Wiener	106
§ 6 - Regiões ilimitadas e o potencial condutor	111
§ 7 - A noção da capacidade	115
 CAPÍTULO IV - FUNÇÕES HARMÔNICAS NO PLANO	
Sumário	119
§ 1 - Séries de Fourier	119
§ 2 - O problema de Dirichlet para o disco	130
§ 3 - Transformação conforme	135
§ 4 - Função de Green e função de Riemann	137
 CAPÍTULO V - O PRINCÍPIO DE DIRICHLET	
Sumário	140
§ 1 - Comentários sôbre o Princípio de Dirichlet	142
§ 2 - Os espaços H	145
§ 3 - O método das sucessões minimizantes	154
§ 4 - Observações Finais	162
 BIBLIOGRAFIA	 165

CAPÍTULO I

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA E INTRODUÇÃO

Sumário. Este capítulo tem duas finalidades. A primeira é apresentar o teorema de divergência para regiões bastante gerais do \mathbb{R}^n , o que é feito detalhadamente no §1. O teorema da divergência é de tão grande uso na teoria do potencial e a ausência de demonstrações simples e gerais nos livros é tão séria que o §1 é oportuno e útil. A segunda finalidade do capítulo é ser a antesala do curso, que a bem dizer começa no capítulo II. Tentamos por meio de exemplos mostrar ao leitor que funções harmônicas aparecem em problemas de interesse prático, v.g. em campos vetoriais (§2). A seguir visamos ilustrar o aparecimento de problemas de contorno para a equação de Laplace $\Delta u = 0$, os quais são o objetivo central da teoria clássica do potencial, pois são precisamente problemas desse tipo que aparecem em física matemática. O exemplo escolhido é o do equilíbrio da membrana, e visando utilizar o princípio de Hamilton introduzimos nos §3 e 4 um mínimo (autosuficiente) de conceitos sobre cálculo das variações.

§1. Regiões e teorema da divergência

Por região entendemos qualquer conjunto aberto e conexo do espaço euclidiano de dimensão n , que designaremos por R^n . Com o objetivo de fixar a notação definiremos os conceitos que intervêm nas definições acima.

R^n é o conjunto das n -uplas ordenadas de números reais $x = (x_1, \dots, x_n)$ munido de uma estrutura de espaço vetorial com a soma e a multiplicação por um escalar (i.é, número real) definidas como se segue

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

e munido de uma estrutura de espaço métrico com a distância entre dois pontos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ definida como

$$d(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Uma bola (aberta) $B = B_r(x)$ de raio r e centro x em R^n é o conjunto dos pontos y tais que $d(y, x) < r$:

$$B = \{ y \in R^n : d(y, x) < r \}.$$

Um conjunto A é dito aberto se com centro em qualquer de seus pontos existe uma bola inteiramente contida no conjunto A .

Um conjunto A é dito conexo se dados dois quaisquer de seus pontos x e y existe uma função contínua $F(t)$ definida no intervalo fechado $[0, 1]$ com valores em A e tal que $F(0) = x$ e

$F(1) = y$. Em realidade, essa é a definição de conexão por arcos, a qual para o caso de conjuntos abertos no R^n (que é o que nos interessa) é equivalente à conexão como definida nos livros de topologia (cfr. Newman, Elements of the topology of plane sets, 2a. edição, pag. 92).

Neste capítulo consideraremos integrais múltiplas sôbre regiões Ω . Por êsse motivo admitimos, sempre, que Ω tenha conteúdo de Jordán. Para a teoria da integração múltipla de Riemann consulte o livro de Fulks, Advanced Calculus.

As regiões consideradas neste capítulo deverão ser particularizadas mais ainda, pois necessitaremos utilizar o teorema da divergência. Precisaremos: as regiões Ω devem ser tais que, para qualquer função vetorial $F(x)$ contínua $\Omega \cup \Gamma$ (Γ é o contôrno de Ω) e com derivadas de 1a. ordem contínuas em Ω , valha a seguinte fórmula:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\Gamma} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) = \nu(x)$ é a normal unitária exterior a Γ no ponto x , a primeira integral é uma integral múltipla n -dimensional, $F \cdot \nu = F_1 \nu_1 + \dots + F_n \nu_n$ é o produto escalar dos vetores F e ν , e a segunda integral é uma integral de superfície sôbre variedade de dimensão $n - 1$.

É fundamental saber que condições devem ser impostas a Ω para que (1) se verifique. Caracterizações de famílias de regiões Ω para as quais (1) vale são dadas nos livros de cálculo. Por exemplo Fulks, citado anteriormente, considera regiões que são

projetáveis em pelo menos um dos eixos, isto é, x_2 -projetável significa que $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : a < x_1 < b \text{ e } f(x_1) < x_2 < g(x_1)\}$ onde f e g são diferenciáveis por partes } .

Para o caso de regiões planas, citamos o trabalho recente de D.H. Potts no Journal of the London Mathematical Society, vol.26(1951), que demonstra que uma fórmula análoga a (1), isto é,

$$(2) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy ,$$

se verifica para toda região Ω cujo contorno Γ é uma curva re-
tificável.

Devido à dificuldade de encontrar nos livros de cálculo uma demonstração do teorema da divergência em R^n para regiões de tipo bastante geral, resolvemos apresentar aqui um teorema de divergência em R^n bem como sua demonstração. A demonstração apresentada é calcada nas ideias de Whitney (Geometric Integration Theory), o qual apresenta um resultado mais geral válido para formas diferenciáveis. As regiões Ω para as quais demonstramos abaixo que vale a fórmula (1), incluímos tipos usuais inclusive as regiões regulares no sentido de Kellogg (Potential Theory). Com o objetivo de definir as regiões que utilizaremos daremos uma série de definições.

Um conjunto A de R^n é dito ter p-conteúdo zero se para cada $\delta > 0$ existem k_{δ} bolas de raio δ que cobrem A e tal que $k_{\delta} \delta^p \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. Apenas o caso $p \leq n$ tem interesse pois qualquer A de R^n tem p-conteúdo zero se $p > n$. O caso $p < 0$ também não tem interesse pois apenas o conjunto vazio tem

p -conteúdo zero se $p < 0$.

Exemplo: um segmento de reta e, em geral, qualquer curva retificável em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, tem 2-conteúdo zero.

O lema abaixo relaciona o conceito de n -conteúdo zero em \mathbb{R}^n com o de conteúdo de Jordan zero. Um conjunto A de \mathbb{R}^n é dito ter conteúdo Jordan zero se dado $\varepsilon > 0$ existem conjuntos (digamos cubos) A_1, \dots, A_k que cobrem A e tal que $\sum \text{vol}(A_j) < \varepsilon$. Será usado na demonstração de lema abaixo o fato de que na definição de p -conteúdo zero podemos tomar cubos ao invés de esferas.

Lema 1.1 - Um conjunto A em \mathbb{R}^n tem conteúdo de Jordan zero se e só se êle tiver n -conteúdo zero.

1º. Admitamos que A tenha conteúdo de Jordan zero. Suponhamos, por contradição, que A não tem n -conteúdo zero. Isso significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para uma sucessão $\delta_1, \delta_2, \dots$ de números positivos tendendo a zero temos (1) $k_{\delta(j)} \delta_j^n > \varepsilon$, onde $k_{\delta(j)}$ é o número de elementos de uma cobertura arbitrária de A por cubos de lado δ_j . (A relação (1) se verifica para qualquer cobertura de A por cubos de lado δ_j). Por outro lado, tendo A conteúdo de Jordan zero, é possível determinar cubos B_1, \dots, B_ℓ que cobrem A e tais que $\sum \text{vol}(B_j) < \varepsilon$. Por subdivisão, se necessário, determinamos k cubos de lados todos iguais a um determinado δ_j , que cobrem A e cujo somatório dos volumes é menor que ε , isto é

$$k \delta_j^n < \varepsilon,$$

o que contradiz (1).

2º. Suponhamos agora que A tem n -conteúdo zero. Daí se segue que dado $\varepsilon > 0$ pode-se determinar $\delta > 0$ tal que k_δ bolas de raio δ

cobrem A e $k_\delta \delta^n < \epsilon$. A soma dos volumes dessas bolas é menor que $c k_\delta \delta^n$, que por construção será menor que $c\epsilon$.

A seguir demonstramos a invariância de p -conteúdo mediante transformações lipschitzianas.

Uma transformação F entre dois espaços euclidianos (em geral, métricos) R^m e R^n , é lipschitziana se qualquer que sejam x e y em R^m temos

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x-y|$$

onde K é a chamada constante de Lipschitz.

Lema 1.2 - Se A em R^n tem p -conteúdo zero então $F(A)$ tem p -conteúdo zero.

Demonstração - Tendo A p -conteúdo zero podemos determinar k_δ bolas de raio δ/K tal que $k_\delta (\frac{\delta}{K})^p \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. Agora pela transformação F essas bolas irão em conjuntos de diâmetro menor que 2δ os quais estão contidos em bolas de raio δ as quais cobrem $F(A)$. Elas são também em número k_δ e teremos $k_\delta \delta^p \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, provando que $F(A)$ tem p -conteúdo zero.

Uma função (vetorial) F de $A \subset R^m$ em R^n é dita de classe C_k se ela tem tôdas as derivadas parciais contínuas até a ordem k . Representamos $F \in C_k(A)$.

Um elemento de superfície no R^n é a imagem de uma bola do R^{n-1} mediante uma função biunívoca de classe C_1 , cuja matriz jacobiana tem característica $n-1$.

Uma superfície regular Γ é um subconjunto conexo do R^n

com a propriedade que todo ponto $x \in \Gamma$ tem uma vizinhança $V(x)$ tal que $\Gamma \cap V(x)$ é um elemento de superfície.

Introduziremos agora o conceito de integral sobre uma superfície regular Γ . Para fazer as coisas mais simples imaginaremos que Γ é a imagem de uma região A do R^{n-1} pela função $x = E(u) = E(u_1, \dots, u_{n-1})$ de classe C_1 cuja matriz jacobiana tem característica $n-1$ em todos pontos de A . Designamos por $J_1(u), \dots, J_n(u)$ os determinantes das n matrizes de ordem $n-1$ que se pode obter da matriz jacobiana retirando uma linha de cada vez. Seja agora $h(x)$ uma função real contínua definida em Γ ; então definimos

$$(2) \quad \int_{\Gamma} h(x) \, d\sigma = \int_A h(E(u)) (J_1^2 + \dots + J_n^2)^{1/2} \, du,$$

onde devemos supor que A tenha conteúdo de Jordan.

Uma região Ω limitada do R^n é dita de Gauss se sua fronteira Γ é constituída de duas partes Γ_0 e Γ_1 com as seguintes propriedades: 1º) Γ_0 é um conjunto fechado com conteúdo zero. 2º) Cada $x \in \Gamma_1$ tem uma vizinhança $V(x)$ tal que $V(x) \cap \Gamma_1$ é um elemento de superfície; além disso, após uma rotação de eixos fazendo a normal exterior $\nu(x)$ coincidir com a direção positiva do eixo x_1 , $V(x) \cap \Gamma_1$ pode ser representada pela equação $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$, onde h é de classe C_1 e se $x = (x_1, \dots, x_n)$ está em $V(x) \cap \Omega$ então $x_1 < h(x_2, \dots, x_n)$. Esta última condição significa que $V(x) \cap \Omega$ está de um mesmo lado de $V(x) \cap \Gamma_1$.

Observando que o R^n é um espaço separável (i.é, contém um sub-

conjunto enumerável denso nele) segue-se que Γ_1 é uma união finita ou enumerável de superfícies regulares.

Um exemplo de região de Gauss que abrange os tipos usualmente tratados nos é dado por Ω tal que Γ é uma união finita de superfícies regulares e de seus "bordos". Com efeito, seja $\Gamma_1 = \cup \Gamma_{1,j}$, onde $\Gamma_{1,j}$ é a imagem de um aberto $A_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ por uma função E_j de classe C_1 .

Se extendermos E_j até o contorno ∂A_j de A_j de modo que em ∂A_j a função E_j seja lipschitziana, teremos pelo lema 2 que $E_j(\partial A_j)$ que é o contorno $\partial \Gamma_{1,j}$ de $\Gamma_{1,j}$ tem $(n-1)$ -conteúdo zero. Sendo $\Gamma_0 = \cup \partial \Gamma_{1,j}$ concluímos que Γ_0 tem $(n-1)$ -conteúdo zero.

O teorema da divergência será agora enunciado para regiões de Gauss.

Teorema 1.3 - Seja Ω uma região de Gauss, como definida acima.

Seja $F = (F_1, \dots, F_n) = F(x)$ uma função vetorial limitada pertencente a $C_0(\Omega \cup \Gamma_1) \cap C_1(\Omega)$. Além disso, supomos que $\text{div } F$ seja integrável.

Então a seguinte fórmula se verifica:

$$(3) \quad \int_{\Omega} \text{div } F \, dx = \int_{\Gamma_1} F \cdot \nu \, d\sigma$$

A demonstração repousa em uma série de lemas, dois dos quais são o teorema de divergência em casos particulares.

Lema 1.4 - Seja Ω um paralelepípedo $\{x : a_j < x_j < b_j, j=1, \dots, n\}$.

Admitindo tôdas as condições de teorema 1.3, a fórmula

(3) se conserva.

Demonstração - Usando integrais iteradas obtemos

$$(4) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx = \int_{\Omega_1} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

onde $\Omega_1 = \{(x_2, \dots, x_n) : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 2, \dots, n\}$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, em (4) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} [F_1(b_1, x_2, \dots, x_n) - F_1(a_1, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \dots dx_n &= \\ &= \int_{\Gamma(x_1)} F_1 \cdot \nu_1 d\sigma \end{aligned}$$

onde $\Gamma(x_1)$ é a união das duas faces do cubo para $x_1 = a_1$ e $x_1 = b_1$.

De modo análogo para as demais parcelas de divergência e chegamos, por aditividade, a (3).

Lema 1.5 - Seja Ω a região dos pontos $x = (x_1, \dots, x_n)$ tais que $h(x_2, \dots, x_n) < x_1 < 1$ e $-1 < x_j < 1$, ($j=2, \dots, n$), onde h é de classe C_1 . Designamos por A a parte curva do contorno Γ , i.e., a parte dada por $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$. Seja $F = (F_1, \dots, F_n)$ uma função pertencente a $C_0(\Omega \cup \Gamma) \cap C_1(\Omega)$ e $F = 0$ em uma vizinhança de $\Gamma - A$. Então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_A F \cdot \nu d\sigma$$

Demonstração - Mediante a mudança de variáveis dada por

$$(T) \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 - h(x_2, \dots, x_n) \\ y_j &= x_j, \quad (j = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

obtemos a imagem Ω^* de Ω como o conjunto dos pontos $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ tais que

$$0 < y_1 < 1 - h(y_2, \dots, y_n) \quad \text{e} \quad -1 < y_j < 1, \quad (j = 2, \dots, n)$$

Seja K o paralelepipedo $0 < y_1 < 1, -1 < y_j < 1, (j = 2, \dots, n)$. A função $G(y) = F(y_1 + h(y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n)$ definida em Ω^* pode ser estendida a todo K definindo $G(y) = 0$ para y em $K - \Omega^*$, o que implica que $G(y)$ seja de classe C_1 em K . Aplicando o lema 1.4 obtemos

$$(5) \quad \int_K \operatorname{div} G(y) \, dy = - \int_{A^*} G_1(y) \, dy_2 \dots dy_n,$$

onde $A^* = \{y = (y_1, \dots, y_n) : y_1 = 0 \text{ e } -1 < y_j < 1, j = 2, \dots, n\}$. Usando as relações

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \sum_j \frac{\partial G_1}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_1} = \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial G_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \frac{\partial G_k}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial G_k}{\partial y_k}$$

concluimos que pela mudança de variáveis (T) acima $\operatorname{div} F$ transforma-se em $\operatorname{div} G$, pois $(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_1}{\partial x_n})$ é a normal a x de A , a qual pela transformação (T) vai em $(1, 0, \dots, 0)$.

Desde que o jacobiano da transformação (T) é igual a 1, temos

$$(6) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\Omega^*} \operatorname{div} G \, dy = \int_K \operatorname{div} G \, dy$$

Por outro lado, A é a imagem de A^* pela transformação

$$(S) \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 + h(y_2, \dots, y_n) \\ x_j &= y_j, \quad j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

o vetor de componentes $\frac{\partial(-x_1 + h(x_2, \dots, x_n))}{\partial x_j}$, isto é, o vetor

$(-1, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n})$, tem a direção de $\nu(x)$, o qual será

$$\frac{1}{J} (-1, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}), \text{ onde } J = \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Observando que o vetor $\nu(x)$ transforma-se por (S) no vetor $(-1, 0, \dots, 0)$ obtemos pela definição de integral de superfície

$$(7) \quad \int_A F \cdot \nu \, d\sigma = - \int_{A'} G_1(y) \, dy_2 \dots dy_n$$

Finalmente (5), (6) e (7) implicam (3).

Q. E. D.

A demonstração do teorema 1.3 para uma região de Gauss qualquer será feita em duas partes. Primeiro, para funções F que se anulam em uma vizinhança de Γ_0 . Depois o caso geral será feito aproximando-a por funções do tipo anterior.

Lema 1.6 - Suponhamos tôdas as condições do teorema 1.3 e mais que $F = 0$ em uma vizinhança V de Γ_0 . Então (3) se conserva.

Demonstração - Para cada ponto $x \in \Omega - V$ podemos determinar um cubo $U(x)$ que esteja contido em Ω . Para cada ponto $x \in \Gamma - V$ podemos também determinar um cubo $U(x)$ com a propriedade que $U(x) \cap \Omega$ é uma região do tipo definido no lema 1.5, uma vez que Ω é de Gauss.

Agora os $U(x)$ constituindo uma cobertura do conjunto compacto $\tilde{\Omega} = \bar{\Omega} - V$, pode-se pelo teorema de Heine-Borel determinar um número finito U_1, \dots, U_k de tais cubos que cobrem $\tilde{\Omega}$. Em se tratando de um número finito de cubos abertos que cobrem $\tilde{\Omega}$, pode-se determinar cubos $U_j' \subset U_j$ que ainda cobrem $\tilde{\Omega}$. Agora, para cada j consideramos uma função α_j de classe C_1 tal que $\alpha_j = 0$ fora de U_j' e $\alpha_j > 0$ em U_j' . Seja $\alpha = \sum \alpha_j$. Definindo $\beta_j = \alpha_j / \alpha$ obtemos $\sum \beta_j = 1$, e $\beta_j > 0$ em U_j' e zero fora de U_j' . Por linearidade, obtemos:

$$(8) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \sum \int_{\Omega} \operatorname{div} (\beta_j F) \, dx$$

$$(9) \quad \int_{\Gamma_1} F \cdot \nu \, d\sigma = \sum \int_{\Gamma_1} (\beta_j F) \cdot \nu \, d\sigma$$

Para cubos U_j contidos em Ω temos pelo lema 1.4 que

$$(10) \quad \int_{U_j} \operatorname{div} (\beta_j F) \, dx = \int_{\partial U_j} (\beta_j F) \cdot \nu \, d\sigma$$

onde ∂U_j é o contôrno de U_j . Sendo zero a última integral, concluimos que

$$(11) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} (\beta_j F) \, dx = \int_{\Gamma_1} (\beta_j F) \cdot \nu \, d\sigma$$

uma vez que também a última integral em (11) é zero.

Para cubos U_j que contém parte do contôrno Γ_1 temos pelo lema 1.5 que

$$\int_{U_j \cap \Omega} \operatorname{div} (\beta_j F) \, dx = \int_{U_j \cap \Gamma_1} (\beta_j F) \cdot \nu \, d\sigma$$

e daí

$$(12) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} (\beta_j F) \, dx = \int_{\Gamma_1} (\beta_j F) \cdot \nu \, d\sigma .$$

Agora (8), (9), (11), (12) implicam (3), neste caso.

O seguinte lema desempenha papel crucial na parte final da demonstração do teorema 1.3.

Lema 1.7 - Sejam A e B dois conjuntos abertos tais que $\operatorname{dist}(A, B)$ é maior ou igual a d . Então existe uma função $\varphi(x)$ infinitamente diferenciável e tal que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0, & x &\text{ em } A, \\ &= 1, & x &\text{ em } B. \end{aligned}$$

e

$$|\operatorname{grad} \varphi(x)| \leq \frac{c}{d}, \quad x \text{ fora de } A \cup B,$$

onde c é uma constante.

Demonstração - Seja $\psi(x)$ uma função infinitamente diferenciável tal que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0, & |x| &\geq 1 \\ \int \psi(x) \, dx &= 1 \end{aligned}$$

Agora definamos o conjunto C como se segue

$$C = \left\{ x : \operatorname{dist}(x, B) < \frac{d}{2} \right\} .$$

Definamos então

$$\varphi(x) = \left(\frac{d}{2}\right)^{-n} \int_C \psi\left(\frac{y-x}{d/2}\right) \, dy$$

É fácil de verificar que $\varphi(x) = 0$ para x em A é igual a 1

para x em B . E

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} = \left(\frac{d}{2}\right)^{-n} \int_C \frac{-2}{d} \frac{\partial \psi\left(\frac{y-x}{d/2}\right)}{\partial\left(\frac{y_1-x_1}{d/2}\right)} dy$$

Por mudança de variáveis

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} = \frac{2}{d} \int_{|z| \leq 1} \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_1} dz = \frac{c'}{d}$$

Q. E. D.

Agora completamos a demonstração do teorema 1, definimos duas sucessões de conjuntos

$$A_j = \left\{ x : d(x, \Gamma_0) < \frac{1}{2^j} \right\}, j = 1, 2, \dots$$

$$B_j = \left\{ x : d(x, \Gamma_0) > \frac{3}{2^j} \right\}, j = 1, 2, \dots$$

Usando o lema 1.7 será possível determinar uma função infinitamente diferenciável $\varphi_j(x)$ que seja 0 em A_j e 1 em B_j tal que

$$(13) \quad |\text{grad } \varphi_j(x)| < c2^{j-1}$$

para x em $[B_j - A_j]$.

É claro que φ_j^F é uma função contínua em $\Omega \cup \Gamma_1$, com derivadas contínuas em Ω e que se anula em uma vizinhança A_j de Γ_0 .

Portanto vale o teorema 1.3, como foi demonstrado no lema 1.6

$$(14) \quad \int_{\Omega} \text{div}(\varphi_j^F) dx = \int_{\Gamma_1} \varphi_j^F \cdot \nu d\sigma$$

Como φ_j^F converge para F em $\Omega \cup \Gamma_1$ quando $j \rightarrow \infty$ segue-se

$$(15) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} \varphi_j F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\Gamma_1} F \cdot \nu \, d\sigma ,$$

onde a última integral pode ser tomada como integral imprópria.

Por outro lado,

$$(16) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} (\varphi_j F) \, dx = \int_{\Omega} \varphi_j \operatorname{div} F \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi_j \cdot F \, dx$$

A primeira integral no segundo membro tende para $\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx$.

Se demonstrarmos que a segunda integral tende a zero, completaremos a demonstração.

Da hipótese sobre Γ_0 , concluímos que dado $\delta > 0$, o conjunto A_δ (dos pontos x tais que $\operatorname{dist}(x, \Gamma_0) < \delta$) é coberto por k_δ esferas de raio 2δ ; e temos $k_\delta \delta^{n-1} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$.

Assim o conjunto B_j pode ser coberto por k_j bolas de raio $1/2^{j-2}$, digamos, e k_j está relacionado com j pelo fato

$$k_j \left(\frac{1}{2^{j-2}} \right)^{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty .$$

Portanto, chamando M o máximo de $|F|$ em Ω obtemos

$$(17) \quad \left| \int_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi_j \cdot F \, dx \right| \leq M c_1 2^{j-1} k_j \left(\frac{1}{2^{j-2}} \right)^n$$

onde c_1 é o volume de bola unitária em R^n . O segundo membro de

$$(17) \text{ pode ser escrito como } 2^n M c_1 k_j \left(\frac{1}{2^{j-1}} \right)^n = \operatorname{const} k_j \left(\frac{1}{2^{j-1}} \right)^n$$

o qual tende a zero quando $j \rightarrow \infty$.

§2. Potencial de um campo vetorial

Um campo vetorial $F = F(x, y, z)$ é uma função vetorial contínua definida em uma região V do R^3 assumindo valores no

R^3 . Uma imagem geométrica de um campo vetorial é dada imaginando que a cada ponto (x,y,z) de V se acha ligado o vetor $F(x,y,z)$.

Exemplo 1 - Campo gravitacional induzido por uma partícula. Suponhamos que uma partícula de massa m seja posta em um ponto $Q = (x_0, y_0, z_0)$. Pela lei da gravitação universal de Newton essa partícula gera um campo gravitacional $F = (L, M, N)$. Isto é, uma partícula de massa unitária colocada em um ponto $P = (x, y, z)$ é atraída pela primeira por uma força F de componentes L, M e N dadas por

$$L = - \frac{km(x-x_0)}{r^3}, \quad M = - \frac{km(y-y_0)}{r^3}, \quad N = - \frac{km(z-z_0)}{r^3}$$

onde $r^2 = |x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 + |z-z_0|^2$ e k é uma constante. Usando notação vetorial o campo gravitacional pode ser escrito como

$$G = - \frac{km(P - Q)}{r^3}$$

Exemplo 2 - Campo eletrostático. Pela lei de Coulomb o campo eletrostático gerado por uma carga elétrica q colocada em um ponto Q é

$$E = \frac{k'q(P - Q)}{r^3}$$

expressando a força de repulsão sobre uma carga elétrica unitária em P . k' é uma constante que depende do meio.

Exemplo 3 - Campo magnetostático. Pela lei de Coulomb do magnetismo, um polo magnético p colocado em um ponto Q gera um campo magnetostático dado por

$$B = \frac{k''p(P - Q)}{r^3},$$

que é a força de repulsão a um polo magnético unitário colocado em P. k'' é uma constante que depende do meio.

Exemplo 4 - Campo gravitacional gerado por distribuições de massas.

Seja V uma região onde se tem uma distribuição de massas de densidade $\tau(Q)$. Pela lei de Newton o campo gravitacional gerado será

$$F(P) = \int_V \frac{k \tau(Q)(Q-P)}{|Q-P|^2} dV$$

Se se tratar de uma distribuição superficial em S de densidade $\rho(Q)$ então

$$F(P) = \int_S \frac{k \rho(Q)(Q-P)}{|Q-P|^3} dS$$

Exemplo 5 - Campo de velocidades. Suponhamos que uma certa porção

de fluido se acha em movimento. Em cada ponto do espaço (x, y, z) temos em um determinado instante t a velocidade $(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ da partícula que por aí passa. Temos portanto um campo vetorial, chamado um campo de velocidades, o qual varia com o tempo. Um campo de velocidades que não depende de t é chamado estacionário. A equação da continuidade para campos estacionários expressa

$$\text{div}(u, v, w) = u_x + v_y + w_z = \sigma$$

onde σ representa a contribuição das fontes. Se o fluido é incompressível $\sigma = 0$ e a equação da continuidade é

$$u_x + v_y + w_z = 0$$

O trabalho de um campo vetorial F ao longo de uma curva C é definido como sendo a integral de linha

$$(1) \quad W(C) = \int_C F \cdot dP$$

onde a curva C é suposta ser diferenciável por partes, isto C é a imagem do intervalo $[0,1]$ pela função vetorial $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$ onde $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são funções diferenciáveis por partes. Todas as curvas usadas nesse parágrafo são desse tipo. Se $F = (L,M,N)$, a expressão (1) pode ser escrita

$$W(C) = \int_C Ldx + Mdy + Ndz$$

O campo é dito conservativo se $W(C) = W(C')$ quaisquer que sejam os pares de curvas C e C' que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Isso é equivalente a dizer que o trabalho ao longo de qualquer curva fechada é zero.

Um campo F é dito derivar de um potencial se existe uma função escalar ϕ continuamente diferenciável tal que $F = \text{grad } \phi$. A função ϕ é dita o potencial do campo F .

Exemplo 1.A. No exemplo 1, o potencial é $\phi = -\frac{km}{r}$

Exemplo 2.A. No exemplo 2, o potencial seria $\phi = \frac{k'q}{r}$

Teorema 2.1 - Um campo é conservativo se e só se deriva de um potencial.

Demonstração - Suficiência. Seja C uma curva $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$

ligando os pontos Q_0 e Q_1 , isto é, $P(0) = Q_0$ e $P(1) = Q_1$.

Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_C \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$$

ou, desde que C é diferenciável por partes

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} &= \int_0^1 (\varphi_x x'(t) + \varphi_y y'(t) + \varphi_z z'(t)) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(P(t)) dt = \varphi(P(1)) - \varphi(P(0)) = \varphi(Q_1) - \varphi(Q_0) \end{aligned}$$

o que mostra que o trabalho $W(C)$ depende somente dos pontos inicial e final da curva C , isto é, \mathbf{F} é conservativo.

Necessidade. Seja $\mathbf{F} = (L, M, N)$ um campo conservativo. Portanto a função

$$\varphi(P) = \int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P}$$

está bem determinada, isto é, independe da particular curva que ligue P_0 a P . Provamos que $\varphi_x = L$ e análogos, o que mostra que φ é um potencial do campo \mathbf{F} . Com efeito, seja

$P = (x, y, z)$ e $P + \Delta P = (x + h, y, z)$, então.

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{\varphi(P + \Delta P) - \varphi(P)}{h} = \frac{1}{h} \int_P^{P + \Delta P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} L dx$$

e pelo teorema do valor médio para integrais

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = L(x + \theta h, y, z), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Pela continuidade de L obtemos, fazendo h tender para zero,

$$\varphi_x = L.$$

Q.E.D.

Daremos uma outra caracterização mais prática de campos conservativos definidos, porém, em uma região simplesmente conexa.

Teorema 2.2 - Seja $F = (L, M, N)$ um campo vetorial continuamente diferenciável definido em uma região simplesmente conexa V . Então F é conservativo se e só se $\nabla F = 0$.

Omitiremos a demonstração deste teorema, a qual se apoia no teorema de Stokes. Consulte Fulks (bibliogr.) para uma demonstração no caso da região V ser convexa, que é um caso particular de região simplesmente conexa.

Um campo vetorial F é dito solenoidal se $\text{div}F = 0$.

Exemplo: O campo de velocidades de um fluido incompressível em regime estacionário é solenoidal.

Usando o teorema 2.1 concluímos que se um campo solenoidal é conservativo, a função potencial ϕ que o determina será tal que

$$\text{div grad } \phi = 0$$

isto é, usando o laplaciano Δ , que é o operador diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0,$$

ou seja o potencial ϕ de F é uma função harmônica, conceito este que definiremos no próximo parágrafo. Resumiremos isso no

Teorema 2.3 - A função ϕ que gera um campo vetorial solenoidal satisfaz à equação $\Delta \phi = 0$.

Para finalizar este parágrafo observamos que um critério para determinar se um campo é solenoidal pode ser obtido usando o teorema da divergência:

Teorema 2.4 - Um campo F é solenoidal se e só se

$$\int_S F \cdot \nu \, dS = 0$$

qualquer que seja a superfície S limitando uma região de Gauss.

§ 3. Observações sobre cálculo das variações

Neste parágrafo explicaremos sucintamente o objetivo do cálculo das variações e obteremos a equação de Euler, a qual desempenhará papel importante no parágrafo 5 e no capítulo V.

Seja A um conjunto onde se acha definida uma função real I . Supondo que I seja limitada inferiormente (ou superiormente), isto é, existe m (ou M) tal que $I(x) \geq m$ (ou $I(x) \leq M$) para todo $x \in A$, pergunta-se: existirá $x_0 \in A$ tal que $I(x_0) = m$ (ou $I(x_0) = M$) ?

Exemplo 1 - Seja A o intervalo $[0,1]$ e f contínua. Então a resposta à questão acima é sim. De fato, o seguinte teorema vale: Uma função real contínua definida em um intervalo fechado assume seu máximo e seu mínimo em pontos deste intervalo.

Exemplo 2 - Se A é um conjunto compacto em um espaço topológico E e f é uma função real contínua em E , então f assume seu máximo e seu mínimo em pontos de A .

Se A é uma coleção de funções, a função real I acima é chamada um funcional e a pergunta acima, em geral, recebe resposta negativa, como mostra o seguinte

Contra-exemplo: Seja A a coleção das funções contínuas $x = x(t)$ em $[0,1]$ tais que $x(0) = x(1) = 1$. E seja I o seguinte funcional

$$I(x) = \int_0^1 (x(t))^2 dt .$$

É fácil de ver que o infimo de $I(x)$ quando x varia em A é 0, e no entanto não existe x em A tal que $I(x)$ seja 0.

O fato de que a pergunta formulada acima nem sempre recebe resposta positiva, hoje se nos afigura óbvio e o contra-exemplo acima nos convence. Existe, porém, uma história em torno desse problema. Matemáticos do século passado, notadamente Dirichlet e Riemann foram levados a crer que, a semelhança do que acontece no Exemplo 1, funcionais I limitados inferiormente assumiam seu mínimo para um elemento da classe A . Tal aceitação implica, como veremos no Capítulo V, na possibilidade de resolver o problema de Dirichlet para a equação de Laplace (cfr. § 2, capítulo II). Em sua tese de doutoramento, 1851, Riemann apresentou sua teoria geométrica de funções analíticas repousando na solubilidade do problema de Dirichlet, demonstrado usando o fato incorreto observado acima. Em 1869, Weierstrass descobriu a incorreção e o problema de Dirichlet passou a constituir o desafio aos matemáticos da época. O problema esperaria, porém, quase meio século até que, em 1900, Hilbert descobriria um modo de provar que o tal mínimo é realmente

atingido, em muitos casos.

Exemplos importantes de funcionais I são dados por integrais. Neste caso, o problema de achar uma função da coleção A que minimize (ou maximize) o funcional I dado é chamado um problema variacional. Os quatro exemplos a seguir são tipos gerais de problemas variacionais.

Exemplo 3 - Seja A a coleção das funções $x = x(t)$ de classe C_2 em $[a, b]$ e tais que $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$. Seja

$$(1) \quad I(x) = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

onde F é de classe C_2 nas variáveis t, x, \dot{x} .

Vários exemplos de física caem em problemas variacionais desse tipo.

O exemplo seguinte é uma mera extensão do anterior para duas variáveis independentes x e y .

Exemplo 4 - Seja A a coleção dos pares $(x(t), y(t))$ de funções de classe C_2 em $[a, b]$ e tais que $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$, $y(a) = y_1$ e $y(b) = y_2$. Seja

$$(2) \quad I(x, y) = \int_a^b F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

onde F é de classe C_2 nas cinco variáveis de que depende.

Apresentamos agora dois exemplos onde as funções que aparecem dependem de mais de uma variável; para simplificar a notação tomamos o caso de duas variáveis independentes, o caso geral apre-

sentando apenas diferença de notação.

Exemplo 5 - Seja Ω uma região de Gauss em R^2 .

Seja A a coleção das funções $u = u(x, y)$ definidas em Ω , de classe C_2 aí e assumindo valores dados no contôrno Γ de Ω . O funcional sendo

$$(3) \quad I(u) = \int_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) \, dx dy, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

onde F é de classe C_2 nas suas cinco variáveis.

No parágrafo seguinte apresentaremos um problema de mecânica que corresponde a um problema variacional dêste tipo.

Exemplo 6 - Ω como no exemplo 5 e A a coleção dos pares

(u, v) de funções de classe C_2 em Ω e tais que $u = f$ e $v = g$ em Γ , onde f e g são funções dadas. O funcional sendo

$$(4) \quad I(u, v) = \int_{\Omega} F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) \, dx dy, \quad \text{onde } F$$

é de classe C_2 nas suas oito variáveis.

É um problema difícil dizer quando um determinado problema variacional tem solução. Não há condições suficientes amplas que assegurem a existência de solução. Cada problema deve ser examinado de per si. Apresentaremos a seguir condições necessárias para que os problemas variacionais dos Exemplos 4 e 5 tenham solução. O seguinte lema será essencial.

Lema 3.1 ("Lema fundamental do cálculo das variações") - Seja

$f(x)$ uma função real contínua definida em uma certa região Ω do \mathbb{R}^n . Se para toda função $\eta(x)$ real contínua em Ω e se anulando em uma vizinhança de Γ tivermos $\int f\eta dx = 0$ então, $f(x) = 0$ para todo x em Ω .

Demonstração - Por contradição, suponha que existe x^0 em Ω onde $f(x^0) \neq 0$, digamos maior que 0. Sendo f contínua existe uma vizinhança $N(x^0)$ onde $f(x)$ é maior que zero. Tomando agora $\eta(x)$ maior que zero em $N(x^0)$ e 0 fora dela, teremos $\int f\eta dx = \int_{N(x^0)} f\eta dx$, que é obviamente positivo. Absurdo.

Teorema 3.2 - Se $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ são uma solução do problema variacional proposto no exemplo 4, então, também são solução do sistema de equações diferenciais

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} - F_x &= 0 \\ \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} - F_y &= 0 \end{aligned}$$

(Essas equações são chamadas as equações de Euler do problema variacional).

Demonstração - Suponhamos que $I(x,y)$ definido em A assume seu mínimo (análogo raciocínio se fora máximo) em (φ, ψ) . Isso implica que

$$I(\varphi, \psi) \leq I(\varphi + \varepsilon_1 \eta_1, \psi + \varepsilon_2 \eta_2)$$

quaisquer que sejam ε_1 e ε_2 e $\eta_1 = \eta_1(t)$ e $\eta_2 = \eta_2(t)$, funções de classe C_2 em $[a,b]$ e que se anulam em a e b .

Definimos a seguinte função real de duas variáveis ε_1 e ε_2

$$q(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b F(t, \varphi + \varepsilon_1 \eta_1, \psi + \varepsilon_2 \eta_2, \dot{\varphi} + \varepsilon_1 \dot{\eta}_1, \dot{\psi} + \varepsilon_2 \dot{\eta}_2) dt,$$

a qual assume seu mínimo na origem $(0,0)$. Isso implica que suas derivadas primeiras sejam nulas na origem; portanto

$$\int_a^b (\eta_1 F_x(t, \varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) + \dot{\eta}_1 F_{\dot{x}}(t, \varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi})) dt = 0$$

$$\int_a^b (\eta_2 F_y(t, \varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) + \dot{\eta}_2 F_{\dot{y}}(t, \varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi})) dt = 0$$

Integrando por partes a segunda parcela e lembrando que η_1 e η_2 se anulam nas extremidades do intervalo de integração

$$\int_a^b (F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}) \eta_1 dt = 0$$

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}}) \eta_2 dt = 0$$

Usando o lema 3.1, o resultado se segue.

Observação - As equações de Euler após efetuada a derivação em t tornam-se

$$\ddot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x} F_{x\dot{x}} + \dot{y} F_{\dot{x}y} + \dot{y} F_{xy} + F_{xt} - F_x = 0$$

$$\ddot{x} F_{\dot{x}y} + \dot{x} F_{y\dot{x}} + \dot{y} F_{\dot{y}y} + \dot{y} F_{yy} + F_{yt} - F_y = 0$$

Teorema 3.3 - Se $\varphi(x,y)$ é uma solução do problema variacional proposto no Exemplo 5, então φ é também solução da equação diferencial parcial

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0$$

Demonstração - Suponhamos que $I(u)$ assume seu mínimo em A para $u = \varphi$. Então

$$(7) \quad I(\varphi) \leq I(\varphi + \varepsilon\eta)$$

qualquer que seja ε e qualquer η de classe C_2 em Ω e igual a 0 no contôrno Γ . Definimos a seguinte função real

$$q(\varepsilon) = \int_{\Omega} F(x, y, \varphi + \varepsilon\eta, \varphi_x + \varepsilon\eta_x, \varphi_y + \varepsilon\eta_y) dx dy.$$

Em virtude de (6) $q'(0)$ deve ser zero e portanto

$$\int_{\Omega} (\eta F_u(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) + \eta_x F_{u_x}(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) + \eta_y F_{u_y}(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)) dx dy = 0$$

Integrando por partes e usando o fato que η se anula em uma vizinhança do contôrno Γ de Ω obtemos

$$\int_{\Omega} (F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}) \eta dx dy = 0$$

e pelo lema 3.1, segue-se a equação de Euler (6).

Uma boa referência para um estudo mais detalhado de cálculo das variações é o Courant-Hilbert, volume I, Methods of Mathematical Physics.

Exercício 1 - Qual deve ser a forma da curva C ligando os pontos P e Q em um plano vertical para que uma partícula deslizando sôbre C , sem atrito, sômente sob a ação

da gravidade gaste um tempo mínimo?

Sugestão: Sendo m a massa da partícula, a velocidade em um ponto R qualquer será tirada da lei de conservação da energia, isto é, a soma das energias potencial e cinética da partícula deve ser zero $\frac{1}{2} m v_R^2 + mg(y_R - y_P) = 0$. Fazendo $P = (0,0)$ e orientando o eixo dos y para baixo obtemos a forma conhecida da velocidade $v = \sqrt{2gy}$.

Por fim, observe que $\int_P^Q dt = \int_P^Q \frac{ds}{v}$.

Exercício 2 - Ache a função positiva $x = x(t)$ tal que $x(0) = a$ e $x(1) = b$ e que gera, por revolução em torno do eixo t , uma superfície de área mínima.

Exercício 3 - Qual é o trajeto de um raio de luz partindo da origem $(0,0)$ até um ponto (a,b) em um meio de índice de refração $x+1$.

Sugestão: A velocidade $v(x,y)$ da luz no meio é $c/x+1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. O princípio de Fermat afirma que a luz viaja pelo caminho que minimiza o tempo.

§ 4. Problemas variacionais sem condições de contorno.

No parágrafo anterior obtivemos condições necessárias para que uma certa função da classe A fosse solução de um dado problema variacional. Lá, as funções de A deviam satisfazer condições de contorno. No presente parágrafo discutiremos problemas variacionais sem condições de contorno, isto é, as funções

de A não são requeridas satisfazer condições de contôrno. Nos textos em língua inglesa, a terminologia usada é "free boundary problems".

Primeiro introduziremos o conceito de primeira variação do funcional I. A primeira variação de I é a diferencial da função $q(\varepsilon)$, definida no parágrafo anterior, calculada na origem $\varepsilon = 0$. Utilizando a notação

$$[F]_x = F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}$$

obteremos, por cálculo de diferencial de $q(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, que a primeira variação do funcional do exemplo 4 (§ 3) é

$$\begin{aligned} dq(0,0) &= \varepsilon_1 \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_1}(0,0) + \varepsilon_2 \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_2}(0,0) = \\ &= \int_a^b \{ [F]_x \varepsilon_1 \eta_1 + [F]_y \varepsilon_2 \eta_2 \} dt + [F_{\dot{x}} \varepsilon_1 \eta_1 + F_{\dot{y}} \varepsilon_2 \eta_2]_a^b \end{aligned}$$

que designaremos por δI .

Designando por

$$[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}$$

obteremos, facilmente, que a primeira variação do funcional I do exemplo 5 (§ 3) é

$$\delta I = \int_{\Omega} [F]_u \varepsilon \eta \, dx dy + \int_{\Gamma} (F_{u_x} \nu_1 + F_{u_y} \nu_2) \varepsilon \eta \, ds$$

onde (ν_1, ν_2) é a normal unitária exterior a Γ .

Suponhamos agora que o seguinte problema variacional é proposto: minimizar I do exemplo 4 (ou 5) supondo $x(t)$, $y(t)$ (ou $u(x,y)$) livre no contôrno $t = a$ e $t = b$ (ou Γ). Em

pontos externos a diferencial se anula, portanto decorre da arbitrariedade de η_1 e η_2 que no caso do exemplo 4

$$[F]_x = 0, [F]_y = 0, F_{\dot{x}} = F_{\dot{y}} = 0 \text{ em } t = a \text{ e } t = b,$$

onde as duas primeiras expressões são as equações de Euler que são também condições necessárias no caso de problema variacional com condição de contorno.

No caso do exemplo 5 decorre da arbitrariedade de η que

$$[F]_u = 0 \text{ e } F_{u_x} \nu_1 + F_{u_y} \nu_2 = 0 \text{ em } \Gamma,$$

onde a primeira expressão é a equação de Euler do funcional do exemplo 5.

Resumiremos isso nos dois seguintes teoremas:

Teorema 4.1 - Se $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ são uma solução do problema variacional proposto no exemplo 4, sendo A constituído de funções de classe C_2 sem condições impostas nas extremidades a e b do intervalo de definição, então além de φ e ψ serem soluções das equações de Euler $[F]_x = 0$ e $[F]_y = 0$, elas satisfazem às chamadas condições naturais de contorno

$$F_{\dot{x}} = F_{\dot{y}} = 0 \text{ em } t = a \text{ e } t = b.$$

Teorema 4.2 - Se $\varphi(x,y)$ é uma solução do problema variacional proposto no exemplo 5, sendo A constituída de funções de classe C_2 sem condições de contorno, então φ além de ser solução da equação de Euler $[F]_u = 0$, deve satisfazer à condição natural de contorno

$$F_{u_x} \nu_1 + F_{u_y} \nu_2 = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Encerraremos êste parágrafo estudando o funcional

$$(1) \quad I = \int_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) \, dx dy + \int_{\Gamma} G(x, y, u) \, d\sigma .$$

Se $\varphi(x, y)$ é uma minizante de I , então a função

$$q(\varepsilon) = \int_{\Omega} F(x, y, \varphi + \varepsilon\eta, \varphi_x + \varepsilon\eta_x, \varphi_y + \varepsilon\eta_y) \, dx dy + \\ + \int_{\Gamma} G(x, y, \varphi + \varepsilon\eta) \, d\sigma$$

deve ter diferencial nula em $\varepsilon = 0$, isto é, a variação primeira δI de I é zero:

$$0 = \delta I = \varepsilon \int_{\Omega} (\eta F_u + \eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y}) \, dx dy + \varepsilon \int_{\Gamma} G_u \, d\sigma$$

e integrando por partes

$$0 = \delta I = \int_{\Omega} \varepsilon \eta [F]_u \, dx dy + \int_{\Gamma} \varepsilon \eta (G_u + \nu_1 F_{u_x} + \nu_2 F_{u_y}) \, d\sigma$$

Desde que η é arbitrário segue-se que φ deve satisfazer a equação de Euler $[F]_u = 0$ (que é a mesma do funcional do exemplo 5, § 3) e à condição natural de contorno

$$(2) \quad G_u + \nu_1 F_{u_x} + \nu_2 F_{u_y} = 0 .$$

§ 5. O equilíbrio da membrana

Neste parágrafo aplicaremos os resultados dos dois parágrafos anteriores para deduzir a equação diferencial parcial representativa do equilíbrio de uma membrana.

Seja Ω a parte do plano (x,y) ocupada por uma membrana de densidade $\mu(x,y)$ em sua posição de repouso. Tensões são aplicadas à membrana e ela passa a uma posição descrita pela equação $z = u(x,y)$. Consideraremos apenas deslocamentos pequenos com relação à posição de repouso. A energia potencial da membrana em uma posição $u(x,y)$ é dada por

$$(1) \quad U = \int_{\Omega'} \mu d\sigma - \int_{\Omega} \mu dx dy$$

onde Ω' é a superfície $z = u(x,y)$. O deslocamento é suposto pequeno de modo a μ não variar sensivelmente de Ω para Ω' . Pela definição de integral de superfície (1) se torna

$$U = \int_{\Omega} \mu(1 + u_x^2 + u_y^2)^{1/2} dx dy - \int_{\Omega} \mu dx dy$$

e, novamente usando o fato de se ter pequenos deslocamentos, potências de quarta ordem de u_x e de u_y são deixadas de lado:

$$(2) \quad U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu(u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

A energia potencial da membrana dada em (2) é então função da posição $u(x,y)$ da mesma.

Estamos supondo que não existem forças exteriores agindo na membrana.

O primeiro problema que propomos para a membrana é o de equilíbrio da mesma com o contorno fixo ao longo de uma curva reversa $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma$. O problema é determinar dentre todas as posições u aquela que representa a posição de equilíbrio. Do princípio de Hamilton decorre que na posição de equilíbrio a

energia potencial U assume um valor mínimo. Portanto, usando os resultados do parágrafo 3 concluímos que $u(x,y)$ que representa a posição de equilíbrio da membrana deve satisfazer a equação diferencial

$$(\mu u_x)_x + (\mu u_y)_y = 0 \quad \text{em } \Omega$$

e está sujeita às condições de contorno

$$u = f \quad \text{em } \Gamma$$

Admitindo que a membrana é homogênea ($\mu = \text{constante}$) obtemos

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$u = f \quad \text{em } \Gamma$$

que é o problema de Dirichlet para a equação de Laplace.

O segundo problema é também o de equilíbrio de membrana, agora com o contorno Γ ligado à sua posição de repouso por forças elásticas (de módulo de elasticidade ρ) e sujeito à uma força externa p . Neste caso a energia potencial é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu (u_x^2 + u_y^2) \, dx dy + \int_{\Gamma} (p u + \frac{1}{2} \rho u^2) \, d\sigma$$

Usando os resultados do § 4, vemos que a funcional U acima é do tipo (1) do § 4 e portanto a função u que minimiza U deve satisfazer à equação de Euler e à condição natural de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \rho u + p = 0 \quad \text{em } \Gamma.$$

Resumindo, a posição de equilíbrio da membrana neste caso é dada por uma função $u(x,y)$ que é solução do seguinte problema de con

tôrno, supondo $\mu = \text{constante}$,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \rho u = -p \quad \text{em } \Gamma ,$$

que é chamado problema de Robin.

Finalmente, no caso de inexistirem forças elásticas que mantém o contôrno, $\sigma = 0$ e a posição de equilíbrio da membrana é solução de

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -p$$

que é conhecido como problema de Neumann. Sente-se por razões físicas que tal problema pode não ter solução, isto é, o problema variacional pode não ter uma função u que minimize a energia potencial. No capítulo II, veremos que a física é confirmada (ou seja, a matemática da membrana é boa!) provando-se que o problema de Neumann só é solúvel se $\int_{\Gamma} p \, d\sigma = 0$.

CAPÍTULO II

FUNÇÕES HARMÔNICAS

Sumário. Neste capítulo introduzimos as funções harmônicas e estudamos várias de suas propriedades (§ 1). Ainda no § 1 damos exemplos de funções harmônicas e ressaltamos o papel da chamada solução fundamental da equação de Laplace $\Delta u = 0$ na composição de funções harmônicas. No § 2 apresentamos alguns problemas de contorno para a equação de Laplace, isto é, problemas de determinação de funções harmônicas satisfazendo certas condições no contorno da região. São êles os problemas de Dirichlet, Neumann e Robin. A questão de unicidade da solução desses problemas é atacada no § 3 por meio da identidade de Green. Tentamos (§ 7) usar as identidades de Green para resolver a questão de existência da solução dos problemas de contorno em pauta. Chega-se, aí, à conclusão de que por êsse método a questão recai na determinação da função de Green da região, e tal problema resulta tão difícil quanto o (em verdade, equivalente ao) original. Apesar disso no § 8 temos uma recompensa: o método da função de Green funciona para resolver o problema de Dirichlet para a bola; a simetria da bola ajuda a que se determine facilmente a função de Green para a mesma. A solução do problema de Dirichlet para a bola tem uma representação integral, a fórmula de Poisson. Esta, pode-se dizer, é o resultado central do capítulo. Dela se seguem resultados importantes como a analiticidade da função harmônica (§ 8), uma forma

forte do teorema do máximo para funções harmônicas (§ 9), a caracterização das funções harmônicas como as funções contínuas que satisfazem à propriedade do valor médio (§ 9), e finalmente toda a teoria da convergência das funções harmônicas que apresentamos no § 10. O capítulo III sentirá, conseqüentemente, forte influência da fórmula de Poisson, na parte do método Perron. O parágrafo 12 apresenta a equação de Poisson e a discussão do potencial de volume para distribuição de massas dadas por funções Hölder-contínuas.

O capítulo termina com o princípio de reflexão de Schwarz e o celebrado exemplo de Hadamard de um problema de Cauchy que não tem solução.

§ 1. Funções harmônicas

Seja Ω uma região do R^n ; consideraremos sempre regiões de Gauss, as quais foram definidas no Capítulo I. Uma função real $u(x)$ definida em Ω é dita harmônica se é contínua e satisfaz à equação de Laplace $\Delta u = 0$ em todos os pontos de Ω .

Exemplo 1 - Para $n = 2$, uma classe ampla de funções harmônicas é dada pelas partes real e imaginária de qualquer função analítica $u(x,y) + i.v(x,y)$. Das condições de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ segue-se por derivação $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Aqui $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Exemplo 2 - Polinômios homogêneos que satisfazem a equação de Laplace são chamados esféricos harmônicos. Vejamos exemplos para $n = 3$. Qualquer polinômio do 1º grau $ax + by + cz$ é um esférico harmônico de 1ª. ordem. Um polinômio do 2º grau $ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy$ é um esférico harmônico se $a + b + c = 0$.

Na definição de função harmônica é necessário incluir a continuidade, pois a mesma não é implicada pelo fato de existirem as derivadas de segunda ordem de u . Um exemplo é dado pela função

$$u(x,y) = \operatorname{Re} e^{-z^{-4}} , \quad z = x + iy \neq 0 .$$

e

$$u(0,0) = 0 ,$$

a qual satisfaz a equação de Laplace em todo o plano z e é des-

continua para $z = 0$.

Introduzindo coordenadas esféricas (r, ξ_1, \dots, ξ_n) ligadas a (x_1, \dots, x_n) pelas equações

$$x_j = r \xi_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 1$$

obtemos a seguinte expressão para o laplaciano nessas coordenadas:

$$(1) \quad \Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \Lambda [u]$$

onde Λ é um operador diferencial que só envolve derivadas com relação a ξ :

$$\begin{aligned} \Lambda [u] = & \frac{1-n}{r} \sum_{j=1}^n \xi_j u_{\xi_j} - \frac{1}{r^2} \sum_{j,k=1}^n \xi_j \xi_k u_{\xi_j \xi_k} + \\ & + \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^n u_{\xi_j \xi_j} \end{aligned}$$

De (1) concluímos que uma função harmônica $u(x)$ que depende apenas de r , isto é, $u(x) = f(r)$ satisfaz à equação

$$(2) \quad f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$$

A equação diferencial (2) tem, além da solução $f(r) = \text{constante}$, outra solução linearmente independente da primeira que é singular para $r = 0$:

$$(3) \quad f(r) = r^{2-n} \quad \text{se} \quad n > 2$$

ou

$$(3') \quad f(r) = \log r \quad \text{se} \quad n = 2 .$$

Assim $u(x) = |x|^{2-n}$, $n > 2$, é uma função harmônica em todo espaço com exceção da origem.

A solução fundamental da equação de Laplace $\Delta u = 0$ é definida como sendo a função

$$\gamma(|x-x^0|) = \frac{1}{(n-2)c_n} \frac{1}{|x-x^0|^{n-2}}, \quad \text{se} \quad n > 2$$

ou

$$\gamma(|x-x^0|) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-x^0|}, \quad \text{se} \quad n = 2 .$$

Observação. A função $\gamma(|x-x^0|)$ satisfaz à equação $\Delta u = 0$ para todo $x \neq x^0$. Usando a teoria das distribuições podemos provar que tal função é a solução de $\Delta u = \delta(x^0)$ no sentido das distribuições. Aqui $\delta(x^0)$, é a distribuição δ de Dirac, isto é, $\langle \delta(x^0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x^0)$, para as funções "teste" $\varphi(x)$.

A solução fundamental é usada para compor novas funções harmônicas. Seja Γ uma superfície no R^n . Sejam $\rho(x)$ e $\sigma(x)$ funções definidas em Γ . O potencial de camada simples em Γ com densidade superficial $\rho(x)$ é definido por

$$(4) \quad u(y) = \int_{\Gamma} \rho(x) \gamma(|x-y|) d\sigma$$

ou a menos de uma constante multiplicativa

$$(4') \quad u(y) = \int_{\Gamma} \frac{\rho(x)}{|x-y|^{n-2}} d\sigma \quad \text{se} \quad n > 3 .$$

O potencial de camada dupla em Γ com densidade superficial $\sigma(x)$ é definida por

$$(5) \quad u(y) = \int_{\Gamma} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial y} \gamma(|x-y|) \, d\sigma$$

ou a menos de uma constante multiplicativa.

$$(5') \quad u(y) = \int_{\Gamma} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \, d\sigma$$

Teorema 1.1 - Os potenciais de camada simples e de camada dupla são funções harmônicas em $R^n - \Gamma$.

A demonstração é feita lembrando que se y_0 não pertence a Γ , existe uma vizinhança dêle onde cada uma das integrais (4) e (5) converge uniformemente em y . Portanto pode-se permutar o opera-

dor $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ com o sinal de integral. Desde que,

$\gamma(|x-y|)$ é harmônica segue-se então que o potencial de camada simples é uma função harmônica. Para o potencial de camada dupla é preciso ainda observar que $\Delta \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \Delta$ porque o operador $\frac{\partial}{\partial y}$ não depende de y .

Uma mudança de coordenadas $x = \varphi(y)$ pode afetar a harmonicidade, isto é, $u(x)$ harmônica não implica, necessariamente, que $u(\varphi(y))$ seja harmônica em y . É fácil de ver que translações, homotetias e transformações lineares ortogonais das variáveis independentes não afetam a harmonicidade. Isto é, vale o seguinte teorema:

Teorema 1.2 - Seja $u(x)$ harmônica em R^n . Então 1º. $v(y) =$

$= u(y-h)$, onde h é um dado ponto em R^n , é uma função harmônica. 2ª. $v(y) = u(\lambda y)$, onde λ é um número real qualquer, é uma função harmônica. 3ª. $v(y) = u(Ay)$, onde A é uma matriz ortogonal, é uma função harmônica.

Demonstração da 3a. parte - Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz ortogo-

$$\text{nal e } x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j .$$

Calculando as derivadas de v

$$\frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = \sum_{i,k=1}^n a_{ij} a_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} .$$

Pela ortogonalidade de A obtemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} .$$

Q.E.D.

Para $n = 2$ um resultado muito mais forte que o teorema 1.2 vale, conforme mostra o teorema abaixo

Teorema 1.3 - Seja $u(x,y)$ harmônica no plano x,y . Fazendo a mudança de variáveis

$$x = \varphi(\xi, \eta) \quad y = \psi(\xi, \eta) ,$$

a função $v(\xi, \eta) = u(\varphi(\xi, \eta) , \psi(\xi, \eta))$ é harmônica em ξ e η se $\varphi(\xi, \eta) + i \psi(\xi, \eta)$ é uma função analítica da variável complexa $\xi + i\eta$.

A demonstraçãõ faz-se fãcilmente usando as condições de Cauchy-Riemann.

O teorema 1.3 nos diz que transformações conforme no plano preservam a harmonicidade. O que acontece para $n \geq 3$? Em primeiro lugar vejamos quais sãõ as representações conforme no espaço. Temos o seguinte

Teorema 1.4 (Liouville) - No espaço, as ùnicas representações conforme sãõ

1º) Translaçãõ: $x \longrightarrow x + h$

2º) Homotetia : $x \longrightarrow \lambda x$

3º) Rotaçãõ : $x \longrightarrow Ax$, onde A é uma matriz ortogonal

4º) Inversãõ : $x \longrightarrow \frac{x}{|x|^2}$,

ou combinações das mesmas.

Para uma demonstraçãõ dêste teorema consulte Kreyszig (Bibl.), ou Nevanlinna (Bibl.).

Exercício: Prove que a inversãõ com relaçãõ à esfera unitãria é uma representaçãõ conforme.

O teorema 1.2 assegura que as representações conforme 1º, 2º e 3º preservam a harmonicidade. E a inversãõ, preserva harmonicidade? Nãõ, mas o seguinte vale:

Teorema 1.5 (Transformaçãõ de Kelvin) - Seja $u(x)$ harmônica em \mathbb{R}^n . Entãõ

$$v(y) = \frac{1}{|y|^{n-2}} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$$

é uma funçãõ harmônica.

A demonstraçãõ faz-se por um uso repetido da regra da cadeia.

O teorema 1.5 será importante mais adiante no tratamento dos chamados problemas exteriores, cujas regiões contendo uma vizinhança do infinito podem ser transformadas por inversãõ em regiões limitadas.

§ 2. Problemas de contõrno

Em muitos problemas físicos em que aparece a equaçãõ de Laplace, procura-se achar uma funçãõ harmônica em uma certa regiãõ Ω limitada e que satisfaça uma condiçãõ no contõrno Γ . Problemas de contõrno para regiões ilimitadas serãõ estudados no Capitulo III. Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções contínuas dadas em Γ . Temos os seguintes problemas de contõrno

1º. Problema de Dirichlet: achar $u(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$ tal que

$$\Delta u = 0 \text{ em } \bar{\Omega}$$

$$u = f \text{ em } \Gamma$$

2º. Problema de Neumann: achar $u(x)$ contínua em Ω tal que

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ em } \Gamma,$$

onde $\nu = \nu(x)$ é a normal exterior no ponto x em Γ .

3º. Problema de Robin: achar $u(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$ tal que

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$a u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ em } \Gamma,$$

onde $a = a(x)$ é uma função positiva em Γ , isto é, existe $k > 0$ tal que $a(x) \geq k$, para x em Γ .

Abaixo provaremos o teorema do máximo na forma fraca, o qual implicará a unicidade de solução do problema de Dirichlet. A unicidade de solução dos demais problemas será demonstrada no parágrafo 3 pelo método das integrais de energia de vasto uso em equações parciais, hoje em dia. A questão de existência de solução é bastante delicada e a ela consagraremos todo o capítulo III.

Teorema 2.1 (Teorema do máximo na forma fraca) - Seja $u(x)$ uma função harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Então $u(x)$ assume seu máximo e seu mínimo no contorno Γ de Ω .

Demonstração (Privalov) - Seja M o máximo de $u(x)$ em $\bar{\Omega}$, o qual, por contradição, supõe-se assumido apenas em pontos interiores de Ω . Admitamos que na origem a função $u(x)$ é igual a M , o que será conseguido por uma translação das variáveis independentes, operação que preserva a harmonicidade de função.

Definamos a função

$$v(x) = u(x) + \frac{M-m}{2d^2} |x|^2$$

onde d é o diâmetro da região Ω e m é o máximo de $u(x)$ em Γ , o qual é menor que M .

A função $v(x)$ assume seu máximo em pontos de Ω , pois

$$v(x) \leq m + \frac{M-m}{2d^2} d^2 < M, \quad x \text{ em } \Gamma,$$

e

$$v(0) = u(0) = M$$

Por outro lado

$$\Delta v(x) = \Delta u(x) + \frac{(M - m)n}{d^2}$$

que é maior que zero para todo x em Ω .

Isso, porém, contradiz o fato de que em um ponto P de Ω onde um máximo é assumido deve-se ter $\Delta v(P) \leq 0$.

Para demonstrar que $u(x)$ assume seu mínimo em Γ , tomaremos a função $-u(x)$, que tem máximos onde $u(x)$ tem mínimos.

Q.E.D.

Teorema 2.2 (Únicidade da solução do problema de Dirichlet) - Se

u_1 e u_2 são duas soluções do problema de Dirichlet, então $u_1 = u_2$.

Demonstração - A função $u = u_1 - u_2$ é solução do problema

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ em } \Gamma.\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.1, a função $u(x)$ em Ω está limitada pelos seus valores mínimo e máximo em Γ . Desde que êsses são zero, segue-se que $u = 0$.

Um conceito de significativa importância histórica é o de problema bem posto, introduzido por Hadamard. A grosso modo, um problema é dito bem posto se a solução depender continuamente dos dados no contôrno. A importância disso se prende ao fato de que, os dados sendo determinados apenas aproximadamente, uma pequena variação de dados não deveria afetar muito a solução.

Para a equação de Laplace o problema de Dirichlet é bem posto, isto é, vale o seguinte

Teorema 2.3 - (Continuidade da solução com os valores iniciais).

Sejam f_1 e f_2 duas funções contínuas em Γ e tais que

$$\max_{x \in \Gamma} |f_1(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon$$

Então, se os problemas de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega & u &= f_1 \text{ em } \Gamma \\ \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega & u &= f_2 \text{ em } \Gamma, \end{aligned}$$

têm solução u_1 e u_2 respectivamente, então

$$\max_{x \in \Omega} |u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon$$

Este teorema decorre do teorema 2.1 aplicado à função $u = u_1 - u_2$.

É interessante observar que o problema de Cauchy para a equação de Laplace não é bem posto, neste sentido.

De fato, uma solução do problema

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \text{ no semiplano } y > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ v(x, 0) &= 0 \\ v_y(x, 0) &= n^{-k} \text{ sen } nx \end{aligned}$$

é

$$v(x, y) = n^{-(k+1)} \text{ sen } nx \text{ sinh } ny.$$

Observe que se n tender para infinito os dados iniciais tendem uniformemente para zero, mas em pontos do semiplano para y tão pequeno quanto se queira $v(x, y)$ tende para infinito.

Portanto, os problemas de Cauchy

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_y(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_n = 0, & y > 0 \\ u_n(x, 0) = f(x) \\ u_{n,y}(x, 0) = g(x) + n^{-k} \text{ sen } nx \end{cases}$$

cujas soluções $u(x, y)$ e $u_n(x, y)$ podem diferir muito se n for grande, correspondem a dados iniciais muito próximos!

Hadamard introduzindo o conceito de bem posto e dando exemplos de problemas não bem postos chamou a atenção para o erro da atitude de que a teoria analítica de equações parciais era o bastante para as aplicações, atitude justificada pelo fato de que funções não analíticas (digamos apenas contínuas) podiam ser aproximadas por funções analíticas. Tinha-se como óbvio que ao aproximar-se os dados iniciais ter-se-ia consequente aproximação das soluções.

§ 3. Primeira identidade de Green

Apresentaremos neste parágrafo uma consequência imediata do teorema da divergência. Seja Ω uma região em R^n . Consideremos as funções $u(x) \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C_1(\Omega)$ e $v(x) \in C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$. Temos a seguinte identidade em Ω :

$$u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v = \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)$$

e pelo teorema da divergência

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Gamma} u \sum_1^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \nu_j \, d\sigma$$

onde $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal exterior a x em Γ . Como o somatório no segundo membro nada mais é que a derivada

direcional $\frac{\partial v}{\partial \nu}$, obtemos:

$$(I) \quad \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma ,$$

para toda função $u \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C_1(\Omega)$ e toda $v \in C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$.

Supondo que $u = v$ e que u é uma função harmônica obtemos de (I)

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } u \, dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma .$$

Daí concluímos:

(a) Se $u = 0$ em Γ , então $\text{grad } u = 0$ em Ω , o que implica $u = \text{const.}$ em Ω . Como u é contínua em $\bar{\Omega}$ e é igual a 0 em Γ , segue-se que $u = 0$ em Ω .

(b) Se $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em Γ , temos que $u = \text{const.}$ em Ω .

(c) Se $a(x)u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em Γ , onde $a(x) > 0$, temos

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } u \, dx + \int_{\Gamma} a u^2 \, d\sigma = 0 ,$$

o que implica o anulamento da primeira integral, e daí $u = \text{const.}$ (como nos casos anteriores), e $\int_{\Gamma} a u^2 \, d\sigma = 0$. O fato de que $a > 0$, e o anulamento desta última integral implicam $u = 0$ em Γ . Sendo u contínua em $\bar{\Omega}$ e constante em Ω , concluímos $u = 0$ em Ω .

De (a) inferimos que o problema de Dirichlet tem no máximo uma solução u em $C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$. Foi provado no § 2 deste capítulo, usando o Teorema do Máximo, a unicidade da solução do problema de Dirichlet na classe mais ampla $C_0(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$.

De (b) segue-se que se u_1 e u_2 em $C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$ são

soluções do problema de Neumann então $u_1 - u_2$ é uma constante.

De (c) segue-se que o problema de Robin tem no máximo uma solução em $C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$.

Supondo $u = 1$ em $\bar{\Omega}$ e que v seja uma função harmônica em Ω , obtemos de (I):

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma = 0$$

que é o teorema de Gauss: "a integral no contorno Γ da derivada normal de uma função v harmônica em Ω é zero". Este teorema implica que a função $g(x)$ do problema de Neumann (cfr. § 2) deve satisfazer à relação $\int_{\Gamma} g(x) d\sigma = 0$, para que o problema tenha solução.

§ 4. Segunda identidade de Green

Suponhamos que tanto u como v pertencem a $C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$. Aplicando a identidade (I) dos dois modos possíveis a u e v , e subtraindo os resultados obtemos

$$(II) \quad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\Gamma} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\sigma$$

que é a segunda identidade de Green.

§ 5. Terceira identidade de Green

Seja x^0 um ponto de Ω . Tome, em (II), $v(x) = |x-x^0|^{-(n-2)}$, $n \geq 3$, e $u(x)$ uma função qualquer de $C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$. Vimos no § 1 que uma tal $v(x)$ é harmônica em to-

do o espaço menos o ponto x^0 . Aplicamos a identidade (II) ao par u, v na região $\Omega - B_\varepsilon$, onde $B_\varepsilon = B_\varepsilon(x^0)$. Temos

$$(1) \quad - \int_{\Omega - B_\varepsilon} |x - x^0|^{2-n} \Delta u \, dx = \int_{\partial(\Omega - B_\varepsilon)} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} |x - x^0|^{2-n} - |x - x^0|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

onde $\partial(\Omega - B_\varepsilon)$ representa a fronteira de $\Omega - B_\varepsilon$.

Considerando a orientação das normais nas duas componentes de $\partial(\Omega - B_\varepsilon)$, temos

$$(2) \quad \begin{aligned} & - \int_{\Omega} |x - x^0|^{2-n} \Delta u \, dx + \int_{B_\varepsilon} |x - x^0|^{2-n} \Delta u \, dx = \\ & = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} |x - x^0|^{2-n} - |x - x^0|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma \\ & - \int_{|x - x^0| = \varepsilon} \left(u \frac{d}{dr} r^{2-n} - r^{2-n} \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma_\varepsilon \end{aligned}$$

onde $r = |x - x^0|$ e $d\sigma_\varepsilon$ indica integração sobre a esfera de raio ε . Procederemos agora para obter majoração para as integrais que dependem de ε .

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_{B_\varepsilon} |x - x^0|^{2-n} \Delta u \, dx \right| \leq M \int_{B_\varepsilon} |x - x^0|^{2-n} \, dx = \\ &= M \sigma_n \int_0^\varepsilon r \, dr = \frac{M \sigma_n}{2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

onde σ_n é a área da esfera unitária em R^n , e M é o máximo de Δu em B_ε .

Do mesmo modo

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|x - x^0| = \varepsilon} u \frac{d}{dr} r^{2-n} \, d\sigma_\varepsilon = (2-n) \varepsilon^{1-n} \int_{|x - x^0| = \varepsilon} u(x) \, d\sigma_\varepsilon \\ &= (2-n) \varepsilon^{1-n} \int_{|y|=1} u(x^0 + \varepsilon y) \varepsilon^{n-1} \, d\sigma_1 = \end{aligned}$$

$$= (2-n) \int_{|y|=1} u(x^0 + \varepsilon y) d\sigma_1,$$

onde foi feita a mudança de variável $x - x_0 = \varepsilon y$.

$$I_3 = \left| \int_{|x-x^0|=\varepsilon} r^{2-n} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma_\varepsilon \right| \leq K \varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} \sigma_n = K \sigma_n \varepsilon$$

onde K é o máximo de $\frac{\partial u}{\partial r}$ em $|x-x^0| \leq \varepsilon$.

Fazendo ε tender para zero obtemos $\lim I_1 = 0$, $\lim I_3 = 0$ e $\lim I_2 = (2-n)\sigma_n u(x^0)$. Portanto em (2) temos

$$-\int_{\Omega} |x-x^0|^{2-n} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} |x-x^0|^{2-n} - |x-x^0|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - (2-n) \sigma_n u(x^0)$$

e daí concluímos:

$$(III) \quad u(x^0) = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \int_{\Omega} \frac{\Delta u}{|x-x^0|^{n-2}} dx + \\ + \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-x^0|^{n-2}} - \frac{1}{|x-x^0|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

que é a terceira identidade de Green, onde $u \in C_1(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$. Se $n=2$, usaremos no argumento anterior a função $\log|x-x^0|$ e obteremos

$$(III,2) \quad u(x^0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \log|x-x^0| \Delta u dx + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} \log|x-x^0| - \log|x-x^0| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

§ 6. Propriedade do valor médio

Suponhamos que Ω seja a bola aberta $B = B_R(x^0)$, onde uma função harmônica $u(x)$ se acha definida. Admitamos, mais ainda, que $u(x) \in C_1(\bar{B})$. Pela identidade (III) temos,

$$\begin{aligned} u(x^0) &= \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \int_{|x-x^0|=R} \left(u(x) \frac{d}{dr} r^{2-n} - r^{2-n} \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{|x-x^0|=R} u(x) d\sigma + \frac{1}{(n-2)\sigma_n R^{n-2}} \int_{|x-x^0|=R} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência

$$\int_{|x-x^0|=R} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma = \int_{|x-x^0|=R} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j d\sigma = \int_B \Delta u dx$$

a qual se anula pois u é suposta harmônica em B .

Portanto

$$u(x^0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{|x-x^0|=R} u(x) d\sigma$$

o que quer dizer que o valor da função harmônica $u(x)$ no centro x^0 da bola B é a média dos valores da mesma na superfície da bola.

Diz-se que uma função $u(x)$ definida em uma região Ω satisfaz a propriedade do valor médio se para todo ponto x^0 em Ω e todas as esferas S com centro em x^0 e contidas em Ω tem-se

$$u(x^0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S u(x) \, d\sigma$$

onde R é o raio de S .

Acabamos de provar que se u é harmônica em Ω então ela satisfaz a propriedade de valor médio. A recíproca é verdadeira: se $u(x)$ é contínua e satisfaz a propriedade de valor médio em Ω então $u(x)$ é harmônica. Demonstraremos este fato mais tarde.

Exercício: Demonstre que se $u(x)$ é harmônica na bola $B = B_R(x^0)$ então

$$u(x^0) = \frac{1}{w_n R^n} \int_B u(x) \, dx,$$

onde w_n é o volume da bola unitária.

§ 7. Função de Green

Suponhamos que $u(x)$ seja harmônica em Ω e pertença a $C_1(\bar{\Omega})$. Pela identidade (III):

$$(1) \quad u(x^0) = \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-x^0|^{n-2}} \, d\sigma - \frac{1}{(2-n)\sigma_n} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-x^0|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

A fórmula (1) expressa uma função harmônica qualquer como soma de um potencial de camada simples de densidade superficial $\rho = -\partial u / \partial \nu$ e de um potencial de camada dupla de densidade superficial $\sigma = u$. Observe que (1) não é uma boa fórmula de representação da solução do problema de Dirichlet ou do problema de Neumann

pois para cada desses problemas apenas uma das funções $u(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é dada em Γ .

Na tentativa de usar (1) para resolver o problema de Dirichlet, nós a modificamos de modo que o potencial de camada simples não figure em (1). Para isso, se ao deduzirmos (III) usarmos como $v(x)$ a função

$$\frac{k}{|x-x^0|^{n-2}} + h(x, x^0), \quad k = \frac{1}{(2-n)\sigma_n}$$

onde $h(x, x^0)$ é uma função harmônica de x para cada fixado x^0 , obtemos então

$$(2) \quad u(x^0) = \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{k}{|x-x^0|^{n-2}} + h(x, x^0) \right) d\sigma - \int_{\Gamma} \left(\frac{k}{|x-x^0|^{n-2}} + h(x, x^0) \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

Uma região Ω é dita ter uma função de Green $G(x, x^0)$ se, para cada x^0 em Ω , o problema de Dirichlet

$$\Delta h(x, x^0) = 0, \quad \text{em } \Omega$$

$$h(x, x^0) = - \frac{k}{|x-x^0|^{n-2}}, \quad x \text{ em } \Gamma$$

tem solução $h(x, x^0)$. Neste caso, a função de Green é

$$G(x, x^0) = \frac{k}{|x-x^0|^{n-2}} + h(x, x^0).$$

Supondo que Ω tem uma função de Green $G(x, x^0)$, (2) se torna:

$$(3) \quad u(x^0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, x^0) u(x) d\sigma,$$

que é uma fórmula de representação de uma função harmônica $u(x)$

em termos de seus valores u no contorno Γ . Esta fórmula foi, porém, deduzida com a hipótese adicional de $u(x)$ pertencer a $C_1(\bar{\Omega})$. Não é verdade, porém, que dado um problema de Dirichlet

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{em } \Omega \\ u &= f && \text{em } \Gamma, \end{aligned}$$

onde Ω tem função de Green $G(x,y)$, não é verdade que a solução $u(x)$ seja de $C_1(\bar{\Omega})$. Daí, a seguinte expressão obtida de (3)

$$(5) \quad u(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,y) f(x) d\sigma.$$

não é necessariamente a solução de (4).

Isso, porém, é verdade feitas algumas restrições em Ω , como foi demonstrado por Liapounov (Bibl.). No próximo parágrafo nós adotamos esse procedimento para determinar a solução do problema de Dirichlet para a esfera. Lá, deveremos proceder diretamente para demonstrar que a expressão (4) é a solução do problema.

Observamos, pois, que o conhecimento da função de Green para uma certa região Ω nos permite resolver o problema de Dirichlet sob restrições próprias em Ω e $f(x)$. A recíproca é verdadeira: se o problema de Dirichlet tem solução para $f(x)$ contínua em Γ , então a função de Green para Ω existe. Isso decorre da própria definição de tal função. Vê-se assim que os dois problemas são equivalentes, e portanto o método acima de resolução do problema de Dirichlet não parece bom, excepto quando por outros argumentos obtemos a função de Green. É o que acontece no caso do semi-plano e da esfera, por exemplo, cujas funções de Green são obtidas por métodos geométricos.

Exemplo - Seja Ω o semiespaço $x_n > 0$. A função de Green é, por definição:

$$G(x,y) = \frac{k}{|x-y|^{n-2}} + h(x,y)$$

onde $h(x,y)$ é harmônica em x para todo y em Ω , e tal que $G(x,y) = 0$ para x em $x_n = 0$. Tomamos

$$h(x,y) = \frac{-k}{|x-y'|^{n-2}}$$

onde $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n)$ sendo $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Exercício 1 - Mostre que a função de Green é positiva em Ω .

Exercício 2 - Mostre que a função de Green para a esfera de raio R e centro na origem é

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[|x-y|^{2-n} - R^{n-2} |y|^{2-n} \left| x - \frac{R^2}{|y|^2} y \right|^{2-n} \right]$$

A função de Green é simétrica, isto é, $G(x,y) = G(y,x)$.

Para demonstrar isso aplique a segunda identidade de Green às funções $u(z) = G(z,x)$ e $v(z) = G(z,y)$ na região

$\Omega' - (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y))$, onde Ω' é uma subregião contendo x e y e cujo fêcho está contido em Ω . Fazendo a seguir $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se a igualdade desejada.

Exercício 3 - Obtenha de (2) uma fórmula de representação de $u(x)$ em função dos valores $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ em Γ . A função que desempenha aqui o papel de função de Green é a função de Neumann.

§ 8. Fórmula de Poisson

Aplicando a fórmula (4) do § 7 para o caso da esfera de

raio R e centro na origem, obtemos

$$(1) \quad u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{R\sigma_n} \int_{|x|=R} \frac{1}{|x-y|^n} \varphi(x) d\sigma,$$

que é chamada fórmula de Poisson.

Como foi observado no parágrafo anterior, as hipóteses utilizadas para chegar à fórmula (1) restringem os nossos resultados ao seguinte teorema

"Se o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{para } |x| < R \\ u &= \varphi \quad \text{para } |x| = R \end{aligned}$$

tem uma solução em $C_1(|x| \leq R)$, então essa solução é representável pela fórmula (1); $\varphi(x)$ é suposta contínua em $|x| = R$."

Procederemos diretamente para mostrar que (1) representa a solução do problema de Dirichlet acima, não sendo necessária fazer a hipótese inicial que a solução é de classe C_1 na esfera fechada. Isto é, o seguinte teorema vale

Teorema 8.1 - Seja $\varphi(x)$ contínua em $|x| = R$, então o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{em } |x| < R \\ u &= \varphi \quad \text{em } |x| = R \end{aligned}$$

tem por solução a função definida em (1).

Demonstração - Em primeiro lugar, para demonstrar que a função $u(y)$ dada em (1) é harmônica basta lembrar que (1) nada mais é que

$$u(y) = \int_{|x|=R} \frac{\partial}{\partial y} G(x,y) \varphi(x) d\sigma$$

a qual converge uniformemente em uma vizinhança de todo $y \in \Omega$ onde $G(x,y)$ é harmônica para cada x fixado no contorno Γ .

Demonstraremos agora que quando y tende para $x^0 \in \Gamma$, $u(y)$ dada em (1) converge para $\varphi(x^0)$. Observando que (1) vale para $u(x) = 1$, para $|x| \leq R$, temos

$$(2) \quad 1 = \frac{R^2 - |y|^2}{R\sigma_n} \int_{|x|=R} \frac{1}{|x-y|^n} d\sigma.$$

De (1) e (2) obtemos

$$u(y) - \varphi(x^0) = \frac{R^2 - |y|^2}{R\sigma_n} \int_{|x|=R} \frac{1}{|x-y|^n} (\varphi(x) - \varphi(x^0)) d\sigma$$

Deveremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ pode-se determinar uma esfera de raio δ em torno de x^0 tal que para y nela $|u(y) - \varphi(x^0)| < \varepsilon$. Para isso explora-se a continuidade de φ e o núcleo da integral, decompondo a integral acima em duas, I_1 e I_2 , onde I_1 é a integral sôbre $S_R - B_\eta$ e I_2 é a integral sôbre $S_R \cap B_\eta$, onde S_R é a superfície da bola de raio R e centro na origem e $B_\eta = B_\eta(x^0)$.

Seja M o máximo de φ em $|x| = R$, então

$$|I_1| \leq \frac{R^2 - |y|^2}{R\sigma_n} 2M \int_{S_R - B_\eta} \frac{1}{|x-y|^n} d\sigma$$

Tomando agora $\delta < \eta$, obtemos para $y \in B_\delta(x^0)$

$$(3) \quad |I_1| \leq \frac{R^2 - |y|^2}{R\sigma_n} 2M \frac{1}{(\eta - \delta)^n} R^{n-1} \sigma_n$$

Por outro lado

$$(4) \quad |I_2| \leq \frac{R^2 - |y|^2}{R\sigma_n} w(\eta) \int_{S_R} \frac{1}{|x-y|^n} d\sigma = w(\eta)$$

de acôrdo com (2); aqui $w(\eta)$ representa o módulo de continuidade de $\varphi(x)$.

Portanto dado $\varepsilon > 0$ determinamos η de modo que $w(\eta) < \varepsilon/2$.

Uma vez η conhecido, δ será determinado de modo que o segundo membro de (3) seja menor que $\varepsilon/2$.

Uma consequência importante da fórmula de Poisson é o seguinte

Teorema 8.2 - Toda função $u(x)$ harmônica em Ω é analítica aí.

Lembramos que uma função real $u(x)$ definida em Ω é analítica se ela tem tôdas as derivadas de tôdas as ordens e se cada ponto x de Ω tem uma vizinhança contida em Ω onde $f(x)$ é igual a sua série de Taylor em tôrno desse ponto. É fácil de ver que se $u(x)$ é uma série de potências em uma vizinhança $V(x)$ de cada ponto x de Ω , então $u(x)$ é analítica.

A demonstração do teorema 8.2 é feita usando a fórmula (1) de Poisson, sendo R o raio de uma bola centrada em y e contida em $V(y)$. Desenvolvendo $|x-y|^{-n}$ em série de potências em y e usando o fato que a série converge uniformemente podemos permutar o somatório com o sinal de integral e obter $u(y)$ como uma série de potências, como queríamos fazer.

§ 9. Teorema do Máximo (forma forte)

O teorema do máximo para funções harmônicas será aqui demonstrado de modo indireto via dois teoremas que apresentaremos a seguir: o primeiro é o teorema do máximo para funções que satisfazem a propriedade do valor médio (cfr. § 6) e o segundo é a caracterização das funções harmônicas como aquelas que satisfazem a propriedade do valor médio.

Teorema 9.1 - Seja $u(x)$ contínua em Ω onde satisfaz a propriedade do valor médio. Se o supremo M de $u(x)$ em Ω é assumido em um ponto x^0 de Ω , então $u(x) = M$ para todo x de Ω .

Demonstração - Seja A o conjunto dos pontos x de Ω tais que $u(x) = M$. Por hipótese, A é não vazio. Da continuidade de $u(x)$ segue-se que A é fechado.

Provaremos que A é aberto. Por absurdo, admitamos que existe y em A tal que qualquer bola de centro em y contém um ponto z não de A , isto é, tal que $u(z) < M$. Seja $S(y)$ a esfera de centro em y e contendo z . Pela continuidade de u , segue-se que existe uma vizinhança de z em $S(y)$ onde $u < M$. Isso implica que o valor médio de u sobre tal esfera é menor que M e daí $u(y) < M$, o que é absurdo.

Finalmente, A sendo aberto e fechado em Ω , que é conexo, segue-se que $A = \Omega$.

Teorema 9.2 - Se $u(x)$ é contínua em Ω e satisfaz a propriedade do valor médio aí, então $u(x)$ é harmônica em Ω .

Demonstração - Mostraremos que $u(x)$ é harmônica em toda bola B contida em Ω , o que implica o resultado do teorema.

Seja S a superfície da bola B . A fórmula de Poisson nos assegura que o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0 & \text{em } B \\ v &= u & \text{em } S\end{aligned}$$

tem solução $v(x)$.

A função $v(x)$, sendo harmônica em B , satisfaz a propriedade do valor médio, cfr. § 6. Portanto $u(x) - v(x)$ satisfaz a propriedade do valor médio em B . Pelo teorema 9.1, $u(x) - v(x) = 0$ para $x \in B$, uma vez que $u(x) - v(x) = 0$ em S . Portanto $u(x) = v(x)$, $x \in B$, implica $u(x)$ harmônica em B .

Q.E.D.

Como corolário desses dois teoremas temos o teorema do máximo para funções harmônicas.

Teorema 9.3 - Seja $u(x)$ uma função harmônica em Ω . Se o supremo M de $u(x)$ é atingido em um ponto de Ω , então $u(x) = M$ qualquer que seja x em Ω .

§ 10. Convergência de funções harmônicas

O teorema 2.2 expressa o fato de que a solução do problema de Dirichlet depende continuamente dos dados de contorno. Esse fato pode ser expresso, de modo equivalente, pelo teorema 10.1 abaixo. Este resultado tem grande interesse prático, pois resol-

vido o problema de Dirichlet para dados de contorno que sejam polinômios, obteremos utilizando o teorema de Weierstrass (aproximação de funções contínuas por polinômios) e os teoremas 10.1 e 10.2 abaixo, aproximações para a solução do problema cujo dado de contorno seja uma função contínua qualquer.

Teorema 10.1 - Seja $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, uma sucessão de funções harmônicas em Ω e contínuas em $\bar{\Omega}$. Se a sucessão $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, dos valores de $u_k(x)$ no contorno Γ de Ω converge uniformemente, então $u_k(x)$ converge uniformemente.

A demonstração desse teorema usa tão somente o teorema do máximo na forma fraca.

Teorema 10.2 - Seja $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, uma sucessão uniformemente convergente de funções harmônicas em Ω .

Então, o limite $u(x)$ é harmônica em Ω .

Demonstração - Da continuidade de $u_k(x)$ e da convergência uniforme segue-se que a função limite $u(x)$ é contínua em Ω . Para mostrar que $u(x)$ é harmônica bastará pois, de acordo com o teorema 9.2, provar que $u(x)$ satisfaz a propriedade do valor médio. Seja $B = B_R(x^0)$ uma bola qualquer contida em Ω . S a superfície de B . Usando o teorema do valor médio para $u_k(x)$:

$$(1) \quad u_k(x^0) = \frac{1}{R^{n-1} \sigma_n} \int_S u_k(x) d\sigma$$

Do fato que $u_k(x)$ converge uniformemente para $u(x)$, segue-se passando ao limite nos dois membros de (1)

$$u(x^0) = \frac{1}{R^{n-1}\sigma_n} \int_S u(x) d\sigma ,$$

como queríamos demonstrar.

O teorema acima traduz o fato que o espaço vetorial das funções harmônicas é completo com relação à topologia da divergência uniforme.

Corolário 10.3 - Seja $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, uma sucessão de funções que converge uniformemente para $f(x)$ em Γ .

Se os problemas de Dirichlet

$$\Delta u_k = 0 \text{ em } \Omega$$

$$u_k = f_k \text{ em } \Gamma$$

têm solução u_k , então o problema

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$u = f \text{ em } \Gamma$$

tem solução u dada pelo $\lim u_k$, quando $k \rightarrow \infty$.

O teorema do valor médio nos sugere que o comportamento de uma sucessão de funções harmônicas em um ponto pode dar informações do que se passa em outros pontos. O teorema 10.5 abaixo descreve rigorosamente essa situação. Antes, porém, necessitamos uma desigualdade.

Teorema 10.4 - (Desigualdade de Harnack). Seja $u(x)$ uma função contínua não negativa em \bar{B} e harmônica em B ,

onde $B = B_R(0)$.

Então

$$(2) \quad \frac{1 - \frac{r}{R}}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0) \leq u(y) \leq \frac{1 + \frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{n-1}} u(0)$$

para $|y| = r < R$.

Demonstração - Usando a fórmula de Poisson

$$u(y) = \frac{R^2 - r^2}{R\sigma_n} \int_{|x|=R} \frac{1}{|x-y|^n} u(x) d\sigma$$

para $|y| = r$.

Desde que para $|x| = R$ e $|y| = r$

$$R - r \leq |x-y| \leq R + r$$

teremos:

$$\frac{R^2 - r^2}{R\sigma_n} \frac{1}{(R+r)^n} \int_{|x|=R} u(x) d\sigma \leq u(y) \leq \frac{R^2 - r^2}{R\sigma_n} \frac{1}{(R-r)^n} \int_{|x|=R} u(x) d\sigma$$

e pelo teorema do valor médio

$$\frac{R^2 - r^2}{R\sigma_n} \frac{1}{(R+r)^n} \sigma_n R^{n-1} u(0) \leq u(y) \leq \frac{R^2 - r^2}{R\sigma_n} \frac{1}{(R-r)^n} \sigma_n R^{n-1} u(0)$$

que, após simplificações, nada mais é que a desigualdade (2).

Q.E.D.

Uma consequência imediata da desigualdade de Harnack é o seguinte teorema que lembra o teorema de Liouville para funções analíticas:

Teorema 10.5 - Uma função harmônica em todo o espaço R^n não pode ser limitada, a menos que seja constante.

De fato, suponha que existe c tal que $u(x) \leq c$. Tome a função

$v(x) = c - u(x)$ à qual, sendo harmônica e não negativa, podemos aplicar a desigualdade de Harnack e fazendo R tender para infinito

$$v(0) \leq v(y) \leq v(0)$$

e daí $c - u(x) = \text{const.}$, isto é, $u(x) = \text{const.}$.

Chegaríamos à mesma conclusão se supuséssemos que existisse c tal que $u(x) \geq c$.

Teorema 10.6 - Seja $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, uma sucessão não decrescente de funções harmônicas em Ω . Se para um ponto x^0 de Ω , a sucessão $u(x^0)$ converge, então a sucessão $u_k(x)$ converge uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω .

Demonstração - Suponhamos que $x^0 = 0$, o que se conseguirá por uma translação, a qual preserva a harmonicidade de $u_k(x)$ e o caracter não decrescente da sucessão. Usando a desigualdade de Harnack para a função $u_k(x) - u_l(x)$ veremos que $u_k(x)$ é uma sucessão de Cauchy para todo x em uma bola $B_r = B_r(0)$ concêntrica a uma bola B_R de raio R , tal que $\bar{B}_r \subset \Omega$. Temos, pois, que a convergência de u_k em um ponto implica convergência uniforme em toda bola B_r cujo fêcho esteja contido em Ω .

Seja A o conjunto dos pontos x de Ω tais que $u_k(x)$ converge. Pelo que foi demonstrado acima A é aberto.

Mostraremos que A é fechado. Teremos, então, $A = \Omega$, o que quer dizer que $u_k(x)$ converge em todos os pontos de Ω . Desde que qualquer compacto contido em Ω pode ser coberto por um número finito de bolas, segue-se que a convergência de u_k em compactos

é uniforme. Para demonstrar que \mathcal{A} é fechado, procederemos do seguinte modo. Seja (x^j) uma sucessão em \mathcal{A} que converge para x . Seja $B_R(x^0)$ uma bola de centro x^0 contida em Ω . Para j suficientemente grande $|x^j - x^0| < \frac{R}{3}$. Pelo que foi demonstrado acima, segue-se que $u_k(x)$ converge em $|x - x^j| \leq \frac{R}{3}$ e portanto, em particular, em x^0 .

O teorema de Arzellà diz que "um conjunto \mathcal{F} de funções reais contínuas definidas em uma região fechada F é compacto se e só \mathcal{F} é limitado e equicontínuo". Definiremos os conceitos que intervêm no enunciado.

O espaço das funções reais contínuas definidas em F formam um espaço métrico $C(F)$ com a chamada métrica do supremo: $d(f, g) = \max_{x \in F} |f(x) - g(x)|$. Um conjunto \mathcal{F} em um espaço métrico é dito compacto se toda sucessão de elementos tem uma subsucessão convergente.

Um subconjunto \mathcal{F} de $C(F)$ é dito limitado se existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in \mathcal{F}$ e todo $x \in F$.

Um subconjunto \mathcal{F} de $C(F)$ é dito equicontínuo se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, dependendo somente de ε , tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$ e para todo par x_1, x_2 com $|x_1 - x_2| < \delta$. (Para uma demonstração dêste teorema consulte, por exemplo, Goffman (Bibl.)).

Se no teorema de Arzellà introduzirmos a hipótese adicional de que as $f \in \mathcal{F}$ são harmônicas, deveremos esperar que as condições equivalentes sejam enfraquecidas.

O teorema 10.8 descreve a situação. Necessitamos, porém, o

Lema 10.7 - Seja $u(x)$ harmônica em Ω , e tal que $|u(x)| \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Então

$$\left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{c}{R} M, \quad c - \text{constante},$$

para todo x a uma distância de Γ maior do que R .

Demonstração - As derivadas de uma função harmônica são harmônicas e, portanto, usando o teorema do valor médio:

$$\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} = \frac{1}{w_n R^n} \int_B \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n,$$

onde $B = B_R(x^0)$ tal que $\bar{B} \subset \Omega$.

Pelo teorema da divergência

$$\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} = \frac{1}{w_n R^n} \int_S u \nu_i d\sigma,$$

onde $\nu_i = \nu_i(x)$ é a componente na direção x_i da normal unitária exterior ν no ponto x .

Portanto

$$\left| \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{\sigma_n}{w_n} \frac{M}{R},$$

o que vale para todo ponto x^0 que pode ser o centro de uma bola de raio R , cujo fecho esteja contida em Ω .

Q.E.D.

Observação: À proporção que x^0 se aproxima do contorno, a estimativa do lema torna-se cada vez pior.

Teorema 10.8 - Seja \mathcal{F} um conjunto limitado de funções harmônicas em Ω . Então, para todo compacto K contido em Ω , o conjunto $\mathcal{F}|K$ é compacto.

($\mathcal{F}|K$ é o conjunto das funções f de \mathcal{F} restritas a K).

Demonstração - Sendo K um conjunto compacto contido em Ω , segue-se que a distância d de K a Γ é positiva.

Pelo lema

$$(3) \quad \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{2c}{d} M, \quad u \in \mathcal{F}, \quad \text{e } x \text{ tal que } \text{dist}(x, \Gamma) > \frac{d}{2},$$

onde M é uma constante que limita todas as funções $u \in \mathcal{F}$.

O conjunto $\mathcal{F}|K$ é limitado; demonstrando que o mesmo é equicontínuo, uma aplicação imediata do teorema de Arzellà conduzirá ao resultado do presente teorema.

Para demonstrar a equicontinuidade de $\mathcal{F}|K$ usaremos o teorema da média para funções de várias variáveis: sejam $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos de K e tais que $|z-y| < d/2$, então

$$u(z) - u(y) = (z-y) \cdot \text{grad } u(\xi),$$

onde \cdot designa o produto escalar de dois vetores no R^n e o $\text{grad } u$ é calculado num ponto ξ do segmento que liga z a y .

Pela desigualdade do triângulo segue-se que $\text{dist}(\xi, \Gamma) > \frac{d}{2}$.

Portanto, aplicando o lema 10.7

$$|u(z) - u(y)| \leq |z-y| n \frac{2c}{d} M,$$

o que expressa a equicontinuidade das funções de $\mathcal{F}|K$.

Q.E.D.

Designaremos por H o espaço vetorial das funções harmônicas em uma certa região Ω e contínuas em $\bar{\Omega}$. O teorema 10.2 estabelece o fato de que se em H introduzirmos a topologia da convergência uniforme êle se torna um espaço de Banach, isto é,

um espaço normado completo.

Outras normas podem ser definidas em H . Por exemplo, a norma p , para $1 \leq p < \infty$:

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Com esta norma H é ainda um espaço de Banach. De fato o seguinte teorema mais geral vale:

Teorema 10.9 - Seja (u_k) uma sucessão de funções harmônicas em Ω . Se essa sucessão converge na norma p , então existe uma função harmônica u para a qual ela converge na norma p .

Demonstração - Em primeiro lugar demonstramos que (u_n) converge uniformemente em toda bola $B = B_r(x^0)$ contida em Ω . Pelo teorema do valor médio:

$$u_j(x^0) - u_k(x^0) = \frac{1}{w_n r^n} \int_B (u_j(x) - u_k(x)) dx$$

e pela desigualdade de Hölder

$$|u_j(x^0) - u_k(x^0)| \leq \frac{1}{w_n r^n} \left[\int_B |u_j(x) - u_k(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_B dx \right]^{1/q}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$|u_j(x^0) - u_k(x^0)| \leq (w_n r^n)^{-1/p} \|u_j - u_k\|_p.$$

A convergência uniforme em B será agora obtida observando que existe uma bola fechada de raio R maior que r , concêntrica com B e inteiramente contida em Ω , e usando a desigualdade de Harnack.

Portanto usando o teorema 10.2, concluímos que existe uma função harmônica $u(x)$ em Ω para a qual $u_k(x)$ converge uniformemente em cada compacto contido em Ω .

Sendo o espaço L_p completo, êle tem uma função $f(x)$ para o qual u_k converge na norma p . Mostraremos que a função harmônica $u(x)$ é equivalente a $f(x)$, isto é, $u(x)$ difere de $f(x)$ apenas num conjunto de medida 0 em Ω . Para isso basta mostrar que em todo compacto K contido em Ω $u(x)$ é igual a $f(x)$ a menos de um conjunto de medida 0, pois Ω pode ser escrito como uma reunião enumerável de conjuntos compactos. Pela desigualdade de Minkowsky

$$\left(\int_K |u(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_K |u(x) - u_n(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_K |f(x) - u_n(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$M \cdot \max_{x \in K} |u(x) - u_n(x)| + \|f - u_n\|_p$$

onde M é a raiz p do volume de K . Fazendo n tender para infinito obtemos

$$\int_K |u(x) - f(x)|^p dx = 0$$

o que implica por um teorema bem conhecido de integral de Lebesgue que $|u(x) - f(x)|^p = 0$ ou $u(x) = f(x)$ a menos de um conjunto de medida 0.

§ 11. Singularidades Removíveis

Um resultado da teoria das funções analíticas estabelece que se uma função f da variável complexa $z = x + iy$ é analítica em uma certa região Ω , excepto em um ponto z_0 , e se em uma vizinhança de z_0 a função $f(z)$ é limitada, então, definindo $f(z_0)$ como o limite de $f(z)$ quando z tende a z_0 , a função resultante será analítica também em z_0 .

Para funções harmônicas vale um resultado análogo

Teorema (Picard) - Seja $u(x)$ harmônica em $\Omega - x^0$. Se $u(x)$ é limitada em uma vizinhança de x^0 , então, é possível definir $u(x^0)$ de tal modo que a função $u(x)$ resultante seja harmônica em Ω .

Demonstração - Suponhamos que x^0 seja a origem. Seja $B = B_R(0)$ cuja superfície designamos por S .

O problema de Dirichlet

$$\Delta v = 0 \text{ em } B$$

$$v = u \text{ em } S$$

tem uma solução única v . Seja $w(x) = v(x) - u(x)$ uma função definida em $\bar{B} - 0$. A função $w(x)$ é igual a zero em S . Mostraremos agora que $w(x) = 0$ para todo x em $B - 0$, e daí decorre que se definirmos $u(0) = v(0)$, a função u resultante será harmônica em B . Para provar que $w(x) = 0$ em $B - 0$, tomemos uma bola $B_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$ tal que $\varepsilon < R$. Seja M o supremo de $w(x)$ em B_ε , o qual existe pois $u(x)$ é limitado perto da origem. Definamos

$$(1) \quad w_\varepsilon(x) = \frac{M}{\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}} \left[\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right]$$

A função $w_\varepsilon(x) - w(x)$ é harmônica em $B - \bar{B}_\varepsilon$ e daí usando o teorema do máximo

$$(2) \quad w_\varepsilon(x) - w(x) > 0 \quad x \text{ em } B - \bar{B}_\varepsilon$$

pois tal função se anula em S .

Fazendo ε tender a 0 em (1), $w_\varepsilon(x)$ tende a 0 e de (2) segue-se que $w(x) \leq 0$.

Por outro lado designando por m o mínimo de $w(x)$ em B_ε , definindo uma função $w'_\varepsilon(x)$ como em (1) usando porém m em vez de M e fazendo um raciocínio análogo ao precedente, obtemos $w(x) \geq 0$. Isso junto com a desigualdade da sentença anterior implica $w(x) = 0$ em $B - 0$, como queríamos demonstrar.

O teorema precedente pode ser utilizado para demonstrar que um certo problema de Dirichlet não tem solução. Este exemplo que se deve a Zaremba (1909) estabeleceu definitivamente o fato de que restrições no contorno Γ devem ser feitas para que o problema de Dirichlet tenha solução para qualquer função contínua dada em Γ . Até então, pensava-se que as restrições impostas ao contorno para demonstrar a existência de solução eram provenientes das deficiências dos métodos utilizados. Lebesgue (1913) daria um exemplo menos artificial.

Exemplo (Zaremba) - Seja Ω a região $0 < |x| < 1$ cujo contorno é formado de duas partes, a origem e a superfície $|x| = 1$ de bola unitária. Os dados de contorno são $f(0) = 0$ e $f(x) =$

$= 1$, para $|x| = 1$. Suponhamos, agora, que existe uma função harmônica $u(x)$ em $0 < |x| < 1$ e contínua em $|x| \leq 1$ satisfazendo os dados de contorno. Aplicando o teorema anterior, veremos que $u(x)$ é harmônica em $|x| < 1$ e pelo teorema do máximo $u(x) = 1$ para todo x em $|x| \leq 1$. Isso contradiz $u(0) = 0$! Portanto o problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ em } 0 < |x| < 1$$

$$u(0) = 0 \text{ e } u(x) = 1 \text{ para } |x| = 1$$

não tem solução.

§ 12. Equação de Poisson

A equação de Laplace não homogênea $\Delta u = \rho$ é chamada equação de Poisson. Neste parágrafo, mostraremos, em primeiro lugar, que o potencial de uma distribuição volumétrica de massas em Ω satisfaz à equação de Poisson em Ω . Em seguida, mostraremos que resolver o problema de Dirichlet para a equação de Poisson é equivalente a resolver o referido problema para a equação de Laplace. Finalmente, exibiremos a solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson usando a função de Green de Ω .

Uma função real (ou complexa) $\rho(x)$ definida em Ω é Hölder-contínua em um ponto x^0 de Ω se existem constantes $K > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que

$$(1) \quad |\rho(x^0 + h) - \rho(x^0)| \leq K|h|^\alpha$$

para todo h em uma certa vizinhança de 0 .

A função $\rho(x)$ será Hölder-contínua em Ω se ela é Hölder-con-

tínua em todos os pontos x^0 de Ω com as constantes K e α independentes de x^0 .

Exercícios: 1. Prove que Hölder-continuidade implica continuidade.

2. Se $\rho(x)$ é Hölder-continua em x^0 de Ω e $u(x)$ é limitada em uma vizinhança V de x^0 , então u é Hölder-continua em x^0 .

3. Mostre que se $\rho(x)$ é derivável em Ω e tem derivada limitada aí, então $\rho(x)$ é Hölder-continua com qualquer expoente α .
Em verdade, (1) se verifica com $\alpha = 1$, isto é, $\rho(x)$ é Lipschitziana.

Teorema 12.1 - Seja $\rho(x)$ uma função Hölder-continua em uma região limitada Ω . Então

$$(2) \quad v(x) = \int_{\Omega} |x-y|^{2-n} \rho(y) dy$$

pertence a $C_2(\Omega)$ e $\Delta v = (2-n)\sigma_n \rho$.

Na demonstração do teorema 12.1 necessitaremos do

Lema 12.2 - Seja $B = B_R(x^0)$. Então para todos os pontos x da bola B' concêntrica a B e de raio $R/2$, temos:

$$(3) \quad \int_B |x-y|^{2-n} dy \leq k \int_B |x^0-y|^{2-n} dy$$

Demonstração - Seja B^* a bola de centro x e raio $R/2$, a qual estará contida em B . Portanto

$$\int_B |x-y|^{2-n} dy = \int_{B^*} |x-y|^{2-n} dy + \int_{B-B^*} |x-y|^{2-n} dy$$

Desde que para $y \in B-B^*$, $|x-y| \geq R/2$ e $|x^0-y| \leq R$, obtemos

$|x-y| \geq |x^0-y|/2$. Daí

$$\int_B |x-y|^{2-n} dy \leq \int_{B'} |x^0-y|^{2-n} dy + 2^{n-2} \int_{B-B^*} |x^0-y|^{2-n} dy$$

o que implica (3) com $k = 1+2^{n-2}$.

Q.E.D.

Lema 12.3 - Seja B uma bola de raio ϵ e centro x . Então

$$\int_B |x-y|^\lambda dy = c \epsilon^{n+\lambda} ,$$

onde c é uma contante. Assim se λ é $1-n$ ou $2-n$, a integral acima tende a zero quando ϵ tende a zero.

A demonstração do lema 3 faz-se por uma mudança de variáveis $z = x - y$.

Demonstração do Teorema 12.1 - A demonstração far-se-á em 5 partes.

(I) $v(x)$ é bem definida. Com efeito. Se x é um ponto do exterior de Ω , a integral (2) converge e representa aí uma função harmônica. Se x está em Ω , procederemos do seguinte modo: seja $B = B_\epsilon(x)$, então

$$(4) \quad v(x) = \int_{\Omega-B} |x-y|^{2-n} \rho(y) dy + \int_B |x-y|^{2-n} \rho(y) dy .$$

A primeira integral é bem definida, e a segunda pode ser majorada por $Mc \epsilon^2$, pelo lema 12.3. M é o máximo de $\rho(x)$ em $B_r(x)$ para fixo r . Assim a última integral em (4) tende a zero, o que assegura a convergência da integral em (2).

(II) $v(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Com efeito. Só falta provar que $v(x)$ é contínua em x^0 de Ω . Então

$$(5) \quad v(x) - v(x^0) = \int_{\Omega-B} [|x-y|^{2-n} - |x^0-y|^{2-n}] \rho(y) dy \\ + \int_B [|x-y|^{2-n} - |x^0-y|^{2-n}] \rho(y) dy$$

onde $B = B_\varepsilon(x^0)$.

Tomando x em B , teremos, usando a continuidade da integral do tipo de (2) nos pontos fora de Ω , que a primeira integral em (5) pode ser feita suficientemente pequena se $x-x^0$ for pequeno. A segunda integral em (5) pode ser majorada por

$$M \int_B |x-y|^{2-n} dy + M \int_B |x^0-y|^{2-n} dy$$

que pelo uso do lema 12.2 é menor que

$$M(1+k) \int_B |x^0-y|^{2-n} dy$$

a qual por sua vez, pelo lema 12.3, é igual a

$$M(1+k) c\varepsilon^2,$$

que tende para zero quando ε tende para zero.

(III) $v(x) \in C_1(\mathbb{R}^n)$. Com efeito. Procedendo formalmente, tomamos a derivada primeira dentro do sinal de integral:

$$(6) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} |x-y|^{2-n} \rho(y) dy = \int_{\Omega} (2-n) |x-y|^{-n} (x_j-y_j) \rho(y) dy.$$

Provaremos que a última integral converge absolutamente e uniformemente, pois

$$(7) \quad \left| \int_B \frac{1}{|x-y|^n} (x_j-y_j) \rho(y) dy \right| \leq M \int_B \frac{dy}{|x-y|^{n-1}}$$

onde $B = B_\varepsilon(x)$ e M é o máximo de $|\rho(y)|$ em uma vizinhança de

x . Pelo lema 12.3, o segundo membro de (7) é igual a $M\epsilon$, o qual tende para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Isso implica que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) = \int_{\Omega} \frac{(2-n)(x_j - y_j)}{|x-y|^n} \rho(y) dy$$

a qual é contínua em Ω .

(IV) $v(x) \in C_2(\mathbb{R}^n)$. Com efeito. Se procedermos como em (III) obteremos que a integral majorante é da ordem de uma constante. Deveremos mudar o raciocínio e explorar o fato, até agora não utilizado, de que ρ é Hölder-contínua. Seja x^0 o ponto de Ω onde queremos demonstrar que $v \in C_2$. Seja $B = B_R(x^0)$ e $B' = B_{R'}(x^0)$ com $R < R'$. Designando por $\lambda(x)$ uma função contínua igual a 1 em B e igual a 0 fora de B' temos

$$\rho(x) = \lambda(x) \rho(x) + (1 - \lambda(x)) \rho(x)$$

e em (2)

$$(8) \quad v(x) = \int_{\Omega} \frac{\lambda(y) \rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy + \int_{\Omega} \frac{(1-\lambda(y)) \rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

$$= \int_{B'} + \int_{\Omega - B}$$

Sendo harmônica (em B) a última integral em (8), o problema se reduz a demonstrar que

$$(9) \quad I(x) = \int_{B'} \frac{\lambda(y) \rho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

é de classe C_2 em x^0 . Pelo exercício 2, $\phi(y) = \lambda(y) \rho(y)$ é Hölder-contínua em B' . Aplicando a 3a. identidade de Green para $|x-x^0|^2 - R'^2$ obtemos

$$(10) \quad |x-x^0|^2 - R'^2 = \frac{2n}{(2-n)\sigma_n} \int_{B'} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy - \frac{2R'^2}{(2-n)}$$

De (9) e (10) obtemos:

$$(11) \quad I(x) = \int_{B'} \frac{\varphi(y) - \varphi(x^0)}{|x-y|^{n-2}} dy + \frac{(2-n)\sigma_n}{2n} (|x-x^0|^2 - R'^2) \varphi(x^0) + \text{const.}$$

O problema agora reduz-se a demonstrar que a integral em (11) é de classe C_2 . Tomando, formalmente, as derivadas da 2ª ordem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \int_{\Omega} \frac{\varphi(y) - \varphi(x^0)}{|x-y|^{n-2}} dy &= -n(2-n) \int_{B'} \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+2}} [\varphi(y) - \\ &- \varphi(x^0)] dy + (2-n)\delta_{jk} \int_{B'} \frac{\varphi(y) - \varphi(x^0)}{|x-y|^n} dy. \end{aligned}$$

As integrais do 2º membro de (12) convergem uniformemente pois tomando suas contribuições em uma bola B_ε em torno da singularidade x obtemos que ambas são inferiores a

$$(13) \quad \int_{B_\varepsilon} \frac{|\varphi(y) - \varphi(x^0)|}{|x-y|^n} dy \leq M \int_{B_\varepsilon} \frac{|y-x^0|^\alpha}{|x-y|^n} dy$$

usando o fato de que φ é Hölder-contínua de expoente α .

O segundo membro de (13) é menor que $M\varepsilon^\alpha \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^n} dy$ que é igual a $Mc\varepsilon^\alpha$ pelo lema 13.3, o que tende a zero $\varepsilon \rightarrow 0$. Isso completa a demonstração de que $v(x)$ é de classe C_2 em x^0 .

(V) $v(x)$ satisfaz à equação de Poisson. De fato

$$\Delta v(x) = \Delta I(x) = (2-n)\sigma_n \varphi(x^0) = (2-n)\sigma_n \rho(x^0).$$

O problema de Dirichlet para a equação de Poisson

$$\begin{aligned} (P_g) \quad \Delta w &= \mu && \text{em } \Omega \\ w &= g && \text{em } \Gamma \end{aligned}$$

é equivalente ao problema aparentemente menos geral

$$\begin{aligned} (P) \quad \Delta v &= \rho && \text{em } \Omega \\ v &= 0 && \text{em } \Gamma \end{aligned}$$

De fato, suponhamos que sabemos resolver o problema (P).

Mostraremos como resolver o problema P_g . Seja g^* uma função pertencente a $C_0(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$ e igual a g em Γ . Definindo $v = w - g^*$ resulta que v deve ser solução do problema (P) com $\rho = \mu - \Delta g^*$. Portanto, a solução w de (P_g) será $v + g^*$. Quão prática será redução depende de como se determina g^* .

Agora provaremos o

Teorema 12.4 - O problema (P) tem solução qualquer que seja ρ se e só se o problema

$$\begin{aligned} (L) \quad \Delta u &= 0 && \text{em } \Omega \\ u &= f && \text{em } \Gamma \end{aligned}$$

tem solução.

Demonstração - 1º) Suponha que (P) tem solução. Seja $f^* \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$ e $f^* = f$ em Γ . Resolvendo o problema (P) com $\rho = -\Delta f^*$ obtemos uma função v . A solução de (L) será então $u = v + f^*$.

2º) Suponha que (L) tem solução. Seja $\varphi(x)$ a função definida em (2), a menos de uma constante. $\Delta \varphi = \rho$. Seja u a solução de (L) com $f(x) = \varphi(x)$ em Γ . É claro, então, que $v = \varphi - u$ é solução de (P).

Q.E.D.

Teorema 12.5 - Seja Ω uma região para a qual existe a função Green $G(x,y)$. Então, para qualquer função Hölder-contínua $\rho(x)$ o problema (P) tem por solução

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x,y) \rho(y) dy$$

Demonstração - Ora

$$v(x) = \int_{\Omega} \frac{k}{|x-y|^{n-2}} \rho(y) dy + \int_{\Omega} h(x,y) f(y) dy$$

e sendo h harmônica segue-se que a segunda integral é harmônica. Quanto à primeira, foi provado pelo teorema 12.1 que o laplaciano dela é $k(2-n)\sigma_n \rho = \rho$.

Resta agora provar que $v = 0$ em Γ . Seja $x^0 \in \Gamma$ e provemos que $v(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x^0$. Seja $B = B_{\epsilon}(x^0)$.

$$v(x) = \int_{\Omega \cap B} G(x,y) \rho(y) dy + \int_{\Omega - B} G(x,y) \rho(y) dy$$

Quando $x \rightarrow x^0$, a última integral tende a zero pois $G(x,y) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x^0$. A primeira integral será estimada em termos de ϵ . Sendo M o máximo de ρ :

$$\left| \int_{\Omega \cap B} \right| \leq M \int_{\Omega \cap B} \frac{k}{|x-y|^{n-2}} dy + M \int_{\Omega \cap B} h(x,y) dy$$

A primeira integral de acôrdo com o lema 12.3 é menor ou igual que $Mkc \epsilon^2$, que tende a 0 com ϵ . A segunda tende a zero com ϵ pois h é limitada em $B \cap \Omega$.

Q.E.D.

§ 13. O princípio da reflexão de Schwarz

Na teoria das funções analíticas de variável complexa estuda-se a questão do prolongamento analítico e vê-se que, em geral, uma função analítica dada em uma região pode ser estendida a uma região mais ampla. Aqui com funções harmônicas temos resultados análogos. Um deles é

Teorema 13.1 (Schwarz) - Seja Ω uma região cujo contôrno contém uma parte plana P (sem perda de generalidade suporemos que Γ contém uma parte P do hiperplano $x_1 = 0$ e Ω está contida em $x_1 > 0$). Seja u contínua em $\bar{\Omega}$, harmônica em Ω e $u = 0$ em P . Designando por Ω' a região refletida de Ω em $x_1 = 0$, então existe uma função harmônica w em $\Omega \cup P \cup \Omega'$ e tal que $w = u$ em $\bar{\Omega}$.

Demonstração - Na região $\Pi = \Omega \cup P \cup \Omega'$ consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 \text{ em } \Pi \\ w &= F \text{ em } \partial\Pi \text{ (o contôrno de } \Pi \text{),} \end{aligned}$$

onde $F(x) = u(x)$ para $x \in \Gamma - P$

$F(x) = -u(x')$ no resto do contôrno.

Aqui $x' = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o refletido de x no hiperplano $x_1 = 0$.

Mostraremos agora que a solução w do problema de Dirichlet acima coincide com u em Ω . Com efeito, $v(x) = w(x) + w(x')$ é solução do problema $\Delta v = 0$ em Π e $v = 0$ em $\bar{\Pi}$. Poranto,

$w(x) + w(x') = 0$. Se $x \in P$, temos $2w(x) = 0$ e portanto $w = u$ em P . Assim w é uma função harmônica que coincide com u em Γ , logo $w = u$ em Ω .

Q.E.D.

Um teorema análogo vale no caso em que Γ contém uma parte de uma esfera.

O problema de Cauchy para a equação de Laplace foi provado (§ 2) ser não bem posto. Mostraremos agora que algo bem mais grave acontece. A própria existência da solução fica em jôgo se não tivermos dados iniciais analíticos. A existência de solução quando os dados iniciais são analíticos é garantida pela teoria geral de Cauchy-Kowalevski.

Exemplo (Hadamard) - O seguinte problema de Cauchy é proposto.

Seja P um subconjunto fechado e limitado de $x_1 = 0$. Determinar uma função harmônica $u(x)$ em uma certa vizinhança N de P , e tal que $u(x) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1} = g$ em P , onde g é uma função não analítica. Mostraremos que tal problema não tem solução.

Suponhamos, por contradição, que existe uma função harmônica u em $\Omega = N \cap \{x_1 > 0\}$, contínua em $\bar{\Omega}$, $u(x) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x_1} = g$ em P . Pelo princípio da reflexão $u(x)$ pode ser continuada para a região simétrica, o resultado sendo uma função w harmônica em uma região contendo P . Sendo w harmônica, ela é analítica e suas derivadas também o serão.

Mas $\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = g$ que não é analítica. Absurdo!

CAPÍTULO III

O PROBLEMA DE DIRICHLET

Sumário. O problema de Dirichlet apresentado no parágrafo II-2 consiste em determinar uma função $u(x)$ que seja contínua em $\bar{\Omega}$, harmônica em Ω e igual a uma função $f(x)$ contínua no contôrnio Γ de Ω . Naquele mesmo parágrafo foi demonstrada a unicidade da solução problema sem muito requerer da região Ω , exceto que fosse limitada. O problema de existência da solução foi considerado no parágrafo II-7, em conexão com a função de Green para Ω . No parágrafo II-8 a fórmula de Poisson foi demonstrada ser a solução do problema de Dirichlet para o caso em que Ω é uma bola. O exemplo de Zaremba (II-11) mostra que nem sempre o problema de Dirichlet, tem solução, isto é, restrições devem ser impostas a Ω para que o problema de Dirichlet tenha solução qualquer que seja a função $f(x)$ contínua dada em Γ .

O objetivo central deste capítulo será determinar a que condições deve satisfazer a região Ω para que o problema de Dirichlet tenha solução, qualquer que seja a função $f(x)$ contínua em Γ . (É claro que para qualquer região Ω , existem problemas de Dirichlet que têm solução. Com efeito, seja B uma bola contendo Ω e considere a função $u(x)$ que é harmônica em B e satisfaz certas condições de contôrnio. Seja $f(x)$ o valor que $u(x)$ assume em Γ . Então o problema de Dirichlet para Ω com condições de contôrnio $f(x)$ tem solução, a qual nada mais é que $u(x)$!).

No parágrafo 1 introduzimos o conceito de função subharmônica que será de grande importância em todo o capítulo. O método da "balayage" de Poincaré é apresentado no parágrafo 2, e o método de Perron no parágrafo 3. Também no parágrafo 3 a noção de ponto regular é introduzida. O parágrafo 4 apresenta condições suficientes de solubilidade do problema de Dirichlet com o auxílio da noção de barreira. Aí, as condições da esfera (Poincaré), do cone (Poincaré e Zaremba) são apresentadas. Visando o critério de Wiener (§ 7) definimos a função de Wiener (§ 5), o potencial condutor (§ 6) e capacidade (§ 7). No parágrafo 7 apresentamos o famoso exemplo de Lebesgue de uma região no R^3 com um ponto não regular na fronteira.

§ 1. Funções subharmônicas e superharmônicas

Uma função real contínua $u(x)$ definida em uma certa região Ω do R^n é dita subharmônica se para todo ponto x^0 de Ω e toda bola B de raio R centrada em x^0 e contida em Ω tem-se

$$(1) \quad u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S u(x) d\sigma,$$

onde S é a superfície da bola B .

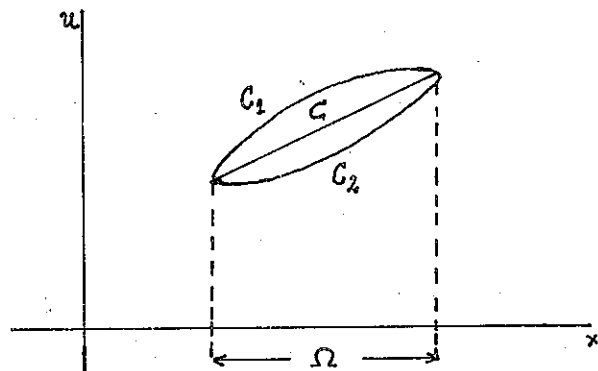
Uma definição análoga se dá para função superharmônica, com o \leq substituído por $>$.

Usando o fato de que toda função harmônica satisfaz a propriedade do valor médio, concluimos que uma função harmônica é também subharmônica. Análogamente, será, também, superharmônica.

Reciprocamente, usando a caracterização das funções harmônicas como as funções contínuas que satisfazem a propriedade do valor médio, concluímos que uma função que é, ao mesmo tempo, subharmônica e superharmônica, é, também, harmônica. Em resumo, o seguinte teorema vale.

Teorema 1.1 - Uma função u é harmônica em Ω se e só se é, ao mesmo tempo, subharmônica e superharmônica.

Exemplo - As funções subharmônicas de uma variável ($n = 1$) são as funções contínuas convexas, enquanto que as funções superharmônicas são as funções contínuas côncavas. As funções harmônicas são as retas. Uma motivação para os nomes sub e superharmônicas nos é dada pela figura 1. As curvas C, C_1 e C_2 são



os gráficos de uma função harmônica, subharmônica e superharmônica, respectivamente. Observe que a função subharmônica está por baixo da função harmônica que tem os mesmos valores de contôrno; mais adiante, daremos uma caracterização das funções subharmônicas que justificará essa motivação. O conceito de harmonização será, então, importante.

Seja $u(x)$ uma função contínua em Ω e seja B uma bola contida em Ω . A operação de harmonização de $u(x)$ na bola

B consiste em substituir $u(x)$ aí pela solução $v(x)$ do problema de Dirichlet

$$\Delta v = 0 \quad \text{em } B$$

$$v = u \quad \text{em } S \quad (S - \text{o contorno de } B)$$

A nova função obtida por essa operação será representada por u_B e será chamada a harmonização de u em B .

A caracterização anunciada acima será a seguinte: a função real contínua $u(x)$ definida em Ω é subharmônica se e só se para qualquer bola B contida em Ω temos $u \leq u_B$. Analogamente, $u(x)$ será superharmônica se a desigualdade oposta se verifica. Provaremos êsse fato adiante.

Exercício - Se $u(x) \in C^2(\Omega)$ é subharmônica, então $\Delta u \geq 0$.

O seguinte teorema contém propriedades das funções subharmônicas e superharmônicas que são conseqüências triviais das definições.

Teorema 1.2 - a) Se u é subharmônica (superharmônica), então $-u$ é superharmônica (subharmônica).

b) A soma de duas funções subharmônicas (superharmônicas) é subharmônica (superharmônica).

b') Em particular, se u é subharmônica (superharmônica) e c é uma constante, então $u + c$ é subharmônica (superharmônica).

c) Se u é subharmônica e v é superharmônica, então $u - v$ é subharmônica.

c') Em particular, se v é harmônica, então c) se verifica.

No parágrafo 9 do capítulo II foi demonstrado o teorema do máximo (forma forte) para funções harmônicas. A mesma demonstração vale para o

Teorema 1.3 - Seja $u(x)$ subharmônica em Ω . Se $u(x)$ tem supremo M , o qual é assumido em um ponto interior de Ω , então $u(x) = M$ em Ω .

Corolário 1.4 - Se $u(x)$ é subharmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$, então o máximo de $u(x)$ é assumido em um ponto do contorno Γ de Ω .

Corolário 1.5 - Seja $u(x)$ uma função subharmônica em Ω . Defina $f(x)$ para $x \in \Gamma$ como sendo $\lim u(y)$ quando y tende para x . Então, para todo ponto y de Ω , temos

$$u(y) \leq \sup_{x \in \Gamma} f(x)$$

Demonstração - Tudo que devemos fazer é demonstrar que a função $v(x)$, definida como $u(x)$ em Ω e como $f(x)$ em Γ , é contínua. E para isso basta demonstrar que $f(x)$ está bem definida. Suponhamos que $y_n \rightarrow x$ e $y'_n \rightarrow x$ e provemos que $\lim u(y_n) = \lim u(y'_n)$.

A parte a) do teorema 1.2 e o teorema 1.3 implicam

Teorema 1.5 - Seja $u(x)$ superharmônica em Ω . Se $u(x)$ tem infimo m , o qual é assumido em um ponto interior de Ω , então $u(x) = m$ em Ω .

Corolário 1.6 - Se $u(x)$ é superharmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$, então o mínimo de $u(x)$ é assumido em um

ponto de Γ .

O seguinte teorema decorre trivialmente do teorema 2.2 e do corolário 1.4 acima.

Teorema 1.7 - Seja u subharmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$, e seja v superharmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Então, se $u \leq v$ em Γ , segue-se $u \leq v$ em Ω .

Voltamos agora à caracterização das funções subharmônicas e provaremos o

Teorema 1.8 - A função u é subharmônica em Ω se e só se para toda bola $B \subset \Omega$, $u \leq u_B$.

Demonstração - A condição é necessária. De fato, se u é subharmônica, a harmonização u_B é tal que $u_B(x) = u(x)$ para x em $\Omega - B$. Dê-se que $u \leq u_B$ no contôrno S de B (em verdade, temos igualdade), o teorema 1.7 implica $u(x) \leq u_B(x)$ em B .

A condição é suficiente. Seja B uma bola arbitrária contida em Ω . Designemos por x^0 , S e R , respectivamente, o centro, o contôrno e o raio de B . Desde que $u(x) \leq u_B(x)$ qualquer que seja x em Ω , igualdade se verificando em $\Omega - B$ obtemos:

$$u(x^0) \leq u_B(x^0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S u(x) d\sigma,$$

que é a condição para u ser subharmônica.

Para finalizar êste parágrafo apresentamos um resultado que será útil no parágrafo 3.

Teorema 1.9 - Se u e v são subharmônicas, então $w = \max(u, v)$

é subharmônica.

Demonstração - Da continuidade de u e v segue-se a de w .

Resta provar que se B é uma bola arbitrária com x^0 , S e R com os significados usuais, então

$$(2) \quad w(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S w(x) \, d\sigma .$$

Usando os fatos que u e v são subharmônicas e $u \leq w$ e $v \leq w$ obtemos:

$$u(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S u(x) \, d\sigma \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S w(x) \, d\sigma$$

$$v(x^0) \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S v(x) \, d\sigma \leq \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_S w(x) \, d\sigma$$

de onde se segue a desigualdade (2).

Por indução, concluímos que se u_1, \dots, u_k são subharmônicas então $\max(u_1, \dots, u_k)$ também o é.

Um teorema análogo pode ser demonstrado para funções superharmônicas usando o mínimo em vez do máximo.

§ 2. O método de Poincaré

Apresentaremos aqui o famoso método da "balayage" de Poincaré (1887) que pode ser utilizado para construir a solução do problema de Dirichlet, quando o mesmo tem solução. Nosso espírito é apenas ilustrar o método, e portanto não nos deteremos, neste parágrafo, estudando condições em Γ para que a função u

que determinaremos pela balayage seja solução do problema de Dirichlet. Esta importante questão será exaustivamente estudada nos parágrafos seguintes.

Seja f contínua em Γ . Pelo teorema de extensão, f pode ser estendida para Ω de modo a ser contínua em $\bar{\Omega}$. Pelo teorema de Weierstrass f pode ser aproximada uniformemente por polinômios e como foi observado no parágrafo 10 do capítulo II basta, então, resolver o problema de Dirichlet para f que seja um polinômio, e o caso de f contínuo seguir-se-á por aproximação. Admitamos, então, que f seja um polinômio.

A região Ω sendo um aberto em R^n pode ser coberto por um número enumerável de bolas B_1, B_2, B_3, \dots . Formaremos uma sucessão com essas bolas de modo que cada bola apareça infinitas vezes: $B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$. Essa sucessão será designada por $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$.

O processo da balayage é o seguinte: dado f e a sucessão (Δ_n) como acima, construímos a seguinte sucessão de funções:

$$f_0 = f, f_1 = (f_0)_{\Delta_1}, f_2 = (f_1)_{\Delta_2}, \dots, f_j = (f_{j-1})_{\Delta_j}, \dots$$

onde $()_{\Delta}$ significa harmonização em Δ (cfr. § 1).

Então o seguinte teorema vale.

Teorema 2.1 - Seja (f_j) , $(j = 0, 1, 2, \dots)$, a sucessão construída pelo processo da balayage, correspondente a função f e a sucessão (Δ_j) , $(j = 1, 2, \dots)$. Então, 1º) f_j converge para uma função harmônica u em Ω ; 2º) se o problema de Diri-

chlet tem solução, então essa será função u .

Demonstração - Primeiro mostraremos que se pode supor f subharmônica em Ω , sem perda de generalidade. Pois

$$f(x) = [f(x) + A|x|^2] - A|x|^2 = f^{(1)} - f^{(2)}$$

e daí

$$\Delta f^{(1)} = \Delta f + 2A \quad \text{e} \quad \Delta f^{(2)} = 2A.$$

Sendo f de classe C_2 em $\bar{\Omega}$, segue-se que Δf é limitada e portanto tomando A suficientemente grande $\Delta f^{(1)}$ será positivo em Ω o que implica que $f^{(1)}$ seja subharmônica. Sendo A positivo, segue-se que $f^{(2)}$ é também subharmônica. Observando que o processo de determinação da sucessão f é linear em f , concluímos que, realmente, podemos supor f subharmônica. Por indução, concluímos que f_j são subharmônicas, e formam uma sucessão não decrescente. Tal sucessão é limitada, pois para qualquer y em Ω : $|f_j(y)| \leq \max_{x \in \Gamma} |f(x)|$.

Define-se então $u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$.

Provaremos que u é harmônica em uma bola qualquer Δ de sucessão (Δ_n) , e portanto harmônica em Ω . As funções f_j restritas a Δ contém uma subsucessão (infinita) (g_j) de função harmônicas em Δ . Sendo $(g_j(x))$, x o centro de Δ , uma sucessão limitada e crescente, segue-se que ela converge e pode-se aplicar o teorema de Harnack (cfr. § 10, cap. II) para concluir que g_j converge para uma função harmônica h em Δ , e portanto f_j também converge para h . Daí se segue $h = u$, e portanto u harmônica em Δ .

A segunda parte do teorema é demonstrada do seguinte modo. Seja $v(x)$ a solução do problema de Dirichlet. Então $u - v$ é harmônica em Ω , $u - v = 0$ em Γ e sendo $u - v$ contínua em $\bar{\Omega}$, segue-se pelo teorema 2.1 (cap. II) que $u - v = 0$ em Ω .

Pode parecer que a função u acima determinada depende da particular extensão de f para a região Ω , e da particular sucessão (Δ_n) . O teorema abaixo desfaz essa dúvida e legitima o processo, tornando-o algo que conduz a um resultado bem definido.

Teorema 2.2 - Sejam f' e f'' duas extensões de f a Ω e sejam (Δ'_j) e (Δ''_j) duas sucessões de regiões como acima. Então as funções u' e u'' definidas pelo processo da balayage aplicado aos dados f' e f'' , respectivamente, são idênticas em Ω .

A demonstração desse teorema será omitida. Consulte Epstein, por exemplo.

§ 3. O método de Perron

Seja Ω uma região limitada do R^n . Nesta secção, estabeleceremos condições em Γ para que o problema de Dirichlet $\Delta u = 0$ em Ω e $u = f$ em Γ tenha solução qualquer que seja a função contínua f dada em Γ .

O método que descreveremos consiste em determinar, correspondendo ao problema de Dirichlet dado, uma função $U(x)$, que chamaremos de função de Perron, a qual é contínua em $\bar{\Omega}$, harmônica em Ω e será a solução do problema de Dirichlet, se o mesmo tiver uma solução.

Seja \mathcal{F} a classe das subfunções; a função $u(x)$ é uma subfunção se é subharmônica em Ω , contínua em $\bar{\Omega}$ e menor ou igual a $f(x)$ em Γ . A classe \mathcal{F} é não vazia pois a função constante $c = \min |f(x) : x \in \Gamma|$ é uma subfunção. Agora definimos a função de Perron correspondente aos dados de contôrno f como sendo

$$U(x) = \sup_{u \in \mathcal{F}} u(x)$$

Teorema 3.1 - A função de Perron $U(x)$ é limitada em $\bar{\Omega}$.

Demonstração - Seja M o máximo de $|f|$ em Γ . Pelo corolário 1.4, segue-se que para todo $u(x) \in \mathcal{F}$ teremos $|u(x)| \leq M$, o que implica $|U(x)| \leq M$.

Teorema 3.2 - A função $U(x)$ é harmônica em Ω .

Demonstração - Para isso provaremos que U é harmônica em qualquer bola $B \subset \Omega$. Sejam x^0 e R o centro e o raio de B , respectivamente.

Seja a sucessão $(u_j) \subset \mathcal{F}$ tal que $\lim u_j(x^0) = U(x^0)$.

Definimos a sucessão (v_j) como $v_j = \max(u_1, \dots, u_j)$. Pelo teorema 1.9 segue-se que v_j é subharmônica. Daí, concluímos, facilmente, que (v_j) é uma sucessão não decrescente de subfunções tal que $\lim v_j(x^0) = U(x^0)$.

Agora, tomaremos a sucessão (w_j) das harmonizações de v_j em B . A desigualdade $w_j \leq w_{j+1}$ verifica-se em S (contôrno de B); então, pelo teorema do máximo para funções harmônicas (w_j é harmônica em B) a desigualdade se estende a B . Logo (w_j) é uma sucessão não decrescente de subfunções tal que $\lim w_j(x^0) = U(x^0)$.

Observando que w_j é harmônica em B , podemos aplicar o teorema de Harnack (II - 10.5) e concluir que existe uma função $W(x)$ harmônica em B para a qual $w_j(x)$ converge uniformemente em todo compacto contido em B .

A demonstração do teorema estará completa se $U = W$. Pelas definições de U e W concluímos que $W \leq U$. Suponhamos que existe y em B onde $W(y) < U(y)$ e mostremos que isso conduz a um absurdo. Seja agora a sucessão $(p_j) \subset \mathcal{J}$ tal que $\lim p_j(y) = U(y)$. Definimos $q_j = \max(p_1, \dots, p_j; w_1, \dots, w_j)$. Então (q_j) é uma sucessão não decrescente de subfunções tal que $\lim q_j(y) = U(y)$ e $w_j \leq q_j$, ($j = 1, 2, \dots$).

Definimos (s_j) como sendo a sucessão das harmonizações de q_j em B . Como antes, concluímos que (s_j) é uma sucessão não decrescente de subfunções tal que $\lim s_j(y) = U(y)$ e $w_j \leq s_j$. ($j = 1, 2, \dots$). Assim pelo teorema de Harnack aplicado às funções s_j restritas a B , obtemos uma função harmônica $\Sigma(x)$ para a qual $s_j(x)$ converge. Por construção, segue-se que

$$(1) \quad W(x) \leq \Sigma(x) \leq U(x) \text{ para } x \text{ em } B.$$

Para $x = x^0$, temos $U(x^0) = W(x^0)$ e portanto

$$(2) \quad \Sigma(x^0) - W(x^0) = 0.$$

Para $x = y$, temos $\Sigma(y) = U(y)$ e, portanto,

$$(3) \quad \Sigma(y) - W(y) \geq 0,$$

em virtude da hipótese de que $W(y) < U(y)$.

Agora pelo teorema da média para funções harmônicas

$$(4) \quad \sum(x^0) - W(x^0) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S'} [\sum(x) - W(x)] d\sigma$$

onde S' é a bola de centro x^0 e que contém y , e $r = |y - x^0|$. Mas, em virtude de (1), (2) e (3), a igualdade (4) não pode se verificar. Isso completa a demonstração do teorema 3.2.

Teorema 3.3 - Se o problema de Dirichlet tem solução, então esta será a função de Perron $U(x)$ a êle associado.

Demonstração - Admitamos que exista uma função $u(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$, harmônica em Ω e igual a f em Γ , isto é, u é a solução do problema de Dirichlet. Observamos, em primeiro lugar, que $u \in \mathcal{J}$, o que implica

$$(5) \quad u \leq U$$

Por outro lado seja $v \in \mathcal{J}$. Pelo teorema 2.2 $v-u$ é subharmônica. No contôrno Γ , $v-u$ é ≤ 0 . Portanto, pelo teorema do máximo (Teorema 1.3) para funções subharmônicas $v-u \leq 0$ em Ω . Agora, $v \leq u$ para todo $v \in \mathcal{J}$, implica $U \leq u$, que juntamente com (5) dá $u = U$. Q.E.D.

O problema crucial é, porém, saber quando é que o problema de Dirichlet tem solução. Nesta direção o teorema 3.3 é de pouca valia. Voltemos a função de Perron $U(x)$. O teorema 3.2 nos garante que U é harmônica. O que faltaria a ela para ser solução do problema de Dirichlet? Falta a continuidade em $\bar{\Omega}$ e a admissão dos valores de contôrno f , isto é, $U = f$ em Γ . Se, portanto, conseguirmos provar que $U(x)$ tende para $f(x^0)$ quando

x tende para x^0 , de modo arbitrário, teremos completado as lacunas indicadas acima. Mais precisamente temos o

Teorema 3.4 - Se todo ponto x^0 de Γ é tal que $\lim U(x) = f(x^0)$, qualquer que seja o modo como x tende para x^0 , então o problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$u = f \text{ em } \Gamma$$

tem solução. A solução u é tal que $u(x) = U(x)$ para x em Ω .

Seguindo Lebesgue definimos um ponto regular como sendo um ponto x^0 de Γ tal que para qualquer função contínua $f(x)$ em Γ , tem-se

$$\lim U(x) = f(x^0)$$

qualquer que seja o modo como x tende a x^0 .

Uma região Ω é dita de Dirichlet se o problema de Dirichlet tem solução qualquer que seja a função $f(x)$ contínua dada em Γ .

Vimos em II-11 que o círculo perfurado (Zaremba) não é uma região de Dirichlet.

Usando as definições acima, concluímos dos teoremas 3.3 e 3.4 o seguinte

Teorema 3.5 - Uma região Ω é de Dirichlet se e somente se todo ponto do contorno Γ é regular.

§ 4. A noção de barreira e o problema de Dirichlet

No sentido de obter caracterizações melhores para as re-

giões de Dirichlet, introduziremos o conceito de barreira. Uma região Ω é dita ter uma barreira em um ponto x^0 de Γ se existe uma função real contínua $w(x)$ definida em $\bar{\Omega}$, a qual é superharmônica em Ω , $w(x^0) = 0$ e $w(x) > 0$ para todo $x \neq x^0$. Usando êsse conceito teremos uma caracterização das regiões de Dirichlet do seguinte modo.

Teorema 4.1 - Uma região Ω é de Dirichlet se e só se Ω tem uma barreira em todo ponto de Γ .

Em vista do teorema 3.5, basta provar o

Teorema 4.2 - Γ é constituído de pontos regulares se e só se Ω tem barreira em todos os pontos de Γ .

Demonstração - 1a. parte: Γ constituído de pontos regulares implica que Ω tem uma barreira em um ponto arbitrário x^0 de Γ .

Com efeito, seja $w(x)$ a função de Perron correspondente à função $f(x) = |x-x^0|$ dada no contôrno. Pela hipótese em Ω segue-se que $w(x)$ é contínua em $\bar{\Omega}$, harmônica em Ω e igual a $f(x)$ em Γ . Agora, observamos que $w(x)$ é uma barreira, pois: a) $w(x)$ é superharmônica, desde que é harmônica; b) $w(x^0) = f(x^0) = 0$; c) para $x \in \Gamma - \{x^0\}$, $w(x) = |x-x^0| \neq 0$ e para $x \in \Omega$, $w(x) > 0$ porque se w fôsse zero em algum ponto de Ω então w seria zero em todo Ω e pela continuidade de w em $\bar{\Omega}$ seguir-se-ia $w = 0$ em $\bar{\Omega}$, o que é impossível pois w é > 0 em pontos de Γ .

2a. parte: Ω ter uma barreira $w(x)$ em x^0 de Γ implica que x^0 é um ponto regular. Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe

$\delta > 0$ tal que

$$(1) \quad |U(x) - f(x^0)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |x - x^0| < \delta .$$

Para isso determinaremos uma constante A tal que

$$(2) \quad -A w(x) - \varepsilon + f(x^0) < U(x) < A w(x) + \varepsilon + f(x^0)$$

se verifique para todo $x \in \Omega$. Feito isso, usamos o fato que $w(x)$ é contínua em $\bar{\Omega}$ e portanto existe $\delta > 0$ tal que $\varepsilon > |w(x) - w(x^0)| = |w(x)|$. Usando êsse resultado em (2) obtemos $-(1 + A)\varepsilon + f(x^0) < U(x) < (1 + A)\varepsilon + f(x^0)$ que é equivalente a (1). Resta provar (2).

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que

$$(3) \quad |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$$

para x em $B_\eta(x^0) \cap \Gamma$. Sendo $f(x)$ limitada e sendo $w(x)$ estritamente positiva em $\Gamma - B_\eta(x^0)$ existirá A tal que

$$(4) \quad |f(x) - f(x^0)| < A w(x) + \varepsilon$$

para todo x em $\Gamma - B_\eta(x^0)$.

De (3) e (4) concluímos

$$|f(x) - f(x^0)| < A w(x) + \varepsilon$$

ou

$$(5) \quad -A w(x) + \varepsilon + f(x^0) < f(x) < A w(x) + \varepsilon + f(x^0) ,$$

para todo x em Γ .

A função no 1º membro de (5) é subharmônica e sendo uma subfunção, em virtude de (5) obtemos

$$(6) \quad -A w(x) - \varepsilon + f(x^0) < U(x) \quad .$$

Por outro lado, a função no último membro de (5) é superharmônica e sendo maior que a função subharmônica $U(x)$ no contorno, segue-se que

$$(7) \quad U(x) < A w(x) + \varepsilon + f(x^0)$$

Finalmente, (7) e (8) dão (2), o que completa a demonstração do teorema 4.2.

Enunciamos, em separado, a 2a. parte do teorema anterior.

Teorema 4.3 - Se Ω tem uma barreira em um ponto x^0 de Γ , então x^0 é um ponto regular, isto é, $U(x) \rightarrow f(x^0)$ quando $x \rightarrow x^0$.

O teorema 4.3 acima nos dá um critério de solubilidade do problema de Dirichlet, isto é, se dada uma região Ω podemos decidir a existência ou não de uma barreira em cada ponto de Γ teremos a existência ou não de solução para o problema de Dirichlet. O problema se reduz inteiramente a existência de uma barreira em cada ponto x^0 de Γ . Se Ω é uma região do R^n , $n \geq 3$, a existência de uma barreira é garantida em um ponto que goza da chamada condição da esfera (Poincaré). Isto é, Ω satisfaz à condição da esfera em um ponto x^0 de Γ se existe uma esfera contida no complemento de Ω , e cujo único ponto comum com Γ é o ponto x^0 . Vale o seguinte

Teorema 4.4 - Seja Ω uma região do R^n , $n \geq 3$, que satisfaz à condição da esfera em um ponto x^0 de Γ . Então

Ω tem uma barreira x^0 .

Demonstração - Seja z o centro da tal esfera. É fácil de ver que a função

$$w(x) = \frac{1}{|x^0 - z|^{n-2}} - \frac{1}{|x - z|^{n-2}}$$

definida para todos os pontos de $\bar{\Omega}$ é uma barreira.

Para regiões planas provaremos o seguinte teorema. Uma curva plana é dita simples se ela é a imagem do intervalo $[0,1]$ por uma função contínua $F(t)$ tal que para $t_0 \neq t_1$ tem-se $F(t_0) \neq F(t_1)$. Uma curva simples é fechada se $F(0) = F(1)$.

Teorema 4.5 - Seja Ω uma região do R^2 limitada por uma curva fechada simples. Então, Ω tem uma barreira em cada ponto do contôrno Γ .

Demonstração - Vamos construir uma barreira em um ponto x^0 de Γ que para simplificar a notação supomos ser a origem $(0,0)$. Definimos

$$(8) \quad w(x) = - \frac{\operatorname{Re} \log \frac{x_1 + ix_2}{2D}}{\left| \log \frac{x_1 + ix_2}{2D} \right|^2} \quad \text{para } x \neq 0$$

$$w(0) = 0,$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e D é o diâmetro de Ω .

Em primeiro lugar, observamos que $w(x)$ é bem definido. Com efeito, sendo Γ uma curva simples existe um arco simples Δ com extremidade na origem e indo para infinito tal que Ω está contido no plano cortado por Δ . Isso permite definir unívocamente o logarítmo. Se Ω é convexo, Δ pode ser uma semireta. Pro-

vamos a seguir que $w(x)$ é contínua. Seja $x \in \bar{\Omega} - \{(0,0)\}$, segue-se que o numerador de $w(x)$ é contínuo em x e o denominador é uma função contínua diferente de zero pois

$$\frac{|x_1 + i x_2|}{2 D} \leq \frac{1}{2} .$$

Agora $|w(x)| \leq \left| \log \frac{|x_1 + i x_2|}{2 D} \right|^{-1}$ o qual tende a zero quando $x \rightarrow 0$, e isso estabelece a continuidade de w na origem.

Finalmente, fato que $w(x) > 0$ é óbvio e a superharmonicidade de w segue-se do fato de $w(x)$ ser a parte real de uma função analítica.

A função exibida na demonstração do teorema anterior deixaria de ser bem definida se o domínio não fôsse simplesmente conexo. Por exemplo, se Ω fôsse o anel compreendido entre duas circunferências concêntricas de raios distintos e se x^0 fôsse um ponto sôbre a circunferência interior não seria possível dar um corte Δ no plano de modo que Ω ficasse contido em $R^2 - \Delta$. Portanto, o logaritmo da fórmula não ficaria bem definida. Concluimos que por êsse processo uma barreira não pode ser construída. Acontece, porém, que o problema de Dirichlet para o anel é sabido ter solução quando os dados de contôrno são contínuos. O que parece estar atrapalhando é a consideração global de Ω . Se fôsse possível concluir a existência de barreira pelo exame local de Ω na vizinhança de x^0 talvez fôssemos mais bem sucedidos. Com êsse espírito introduzimos o conceito de barreira local.

Uma região Ω é dita ter uma barreira local em um ponto x^0 de Γ se existe uma bola $B = B(x^0)$ e uma função real $W(x)$

definida e continua em $\bar{\Omega} \cap \bar{B}$ tal que $W(x)$ seja superharmônica em $\Omega \cap B$, $W(x) > 0$ em $\bar{\Omega} \cap \bar{B} - \{x^0\}$ e $W(x^0) = 0$.

Provaremos agora que a existência de barreira local implica a de barreira (global).

Teorema 4.6 - Seja $W(x)$ uma barreira local para Ω em x^0 . Então Ω tem uma barreira w em x^0 .

Demonstração - Seja r tal que $B_r(x^0) \subset B$, onde B é a bola da definição de barreira local. Da definição de barreira local segue-se que existe $\epsilon > 0$ tal que $W(x) > W_0$ para todo x em $|x - x^0| = r$. Definimos $w(x)$ como se segue

$$w(x) = \begin{cases} \min (W(x), W_0) & \text{para } |x - x^0| \leq r \\ W_0 & \text{no resto de } \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Observamos que: 1º) $w(x)$ é contínua em $\bar{\Omega}$, a continuidade em $|x - x^0| = r$ seguindo do fato que aí $W(x) > W_0$; 2º) $w(x)$ é superharmônica em Ω , como consequência do teorema 1.9; 3º) $w(x^0) = W(x^0) = 0$; 4º) $w(x) > 0$ para $x \neq x^0$. Poranto $w(x)$ é uma barreira.

O teorema 4.6 tem um significado profundo: êle reduz a questão de existência de solução do problema de Dirichlet que é um problema global à pesquisa de uma barreira local $W(x)$ em cada ponto x^0 de Γ , que é um problema local. Êste último problema é mais susceptível de sucesso. Os dois teoremas abaixo dão condições suficientes para a existência de barreira local. As condições dos teoremas 4.7 e 4.8 abaixo são mais fracas que as dos teoremas 4.5 e 4.4, respectivamente.

Teorema 4.7 - Seja Ω uma região do R^2 tal que para todo ponto x^0 em Γ existe uma vizinhança $V(x^0)$ com a seguinte propriedade (P): em $V(x^0) \cap \Omega$ não existe nenhuma curva fechada contendo x^0 em seu interior e formada somente de pontos de Ω . Então, podemos construir uma barreira para cada ponto de Γ .

Demonstração - Construiremos uma barreira local $W(x)$ em $\bar{B} \cap \bar{\Omega}$ onde $B = B_r(x^0) \subset V(x^0)$ e $r < 1$. Sem perda de generalidade podemos admitir que $x^0 = 0$. Definimos então

$$W(x) = - \frac{\operatorname{Re} \log(x_1 + ix_2)}{|\log(x_1 + ix_2)|^2}$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in \bar{B} \cap \bar{\Omega}$. A propriedade (P) implica a existência de uma curva ligando 0 a um ponto de ∂B (contorno de B), curva está constituída só de pontos exteriores a Ω . Isso implica que o \log na definição de W está unívocamente definido. Como no teorema 4.5 vê-se facilmente que W é uma barreira local.

Exemplo - Em um ponto isolado de Γ , a propriedade (P) não se verifica.

O teorema 4.7 resolve o problema do anel que não pode ser resolvido com o teorema 4.5.

Um cone circular reto $K = K(x^0, \lambda, a, b)$ com vértice x^0 é o conjunto dos pontos x de R^n que pertencem a

$$B_a(x^0) \cap \left\{ x : \frac{(x-x^0, \lambda)}{|x-x^0|} > b \right\}$$

onde $a, b > 0$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é o chamado eixo do cone.

Aqui $(,)$ significa o produto escalar de vetores no R^n .

Uma região Ω satisfaz à condição do cone em um ponto x^0 de Γ se é possível construir um cone circular reto contido no exterior de $\bar{\Omega}$ e com vértice em x^0 . (Zaremba).

Teorema 4.8 - Se Ω satisfaz à propriedade do cone em x^0 , então Ω tem uma barreira local em x^0 .

O teorema 4.4 nos permite concluir que qualquer região convexa limitada em R^n , mesmo com arestas, é uma região de Dirichlet. Além disso, toda região lisa (isto é, um domínio tal que todo ponto do contorno tem uma vizinhança que pode ser representada como imagem de uma bola em R^{n-1} por meio de uma função de classe C_1) é uma região de Dirichlet. Com o teorema 4.8, novas regiões são vistas serem de Dirichlet. Por exemplo, a região formada por uma bola $B = B(0)$ menos os pontos de 1º "quadrante", isto é, os pontos da forma $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Demonstração do teorema 4.8 - Para simplificar, suponhamos $x^0 =$

$= 0$. Seja K o cone com vértice em 0 e exterior a $\bar{\Omega}$ e seja $B = B(0)$ uma bola que intercepta K segundo uma superfície S . Designemos $G = B - \bar{K}$. Consideremos agora a função de Perron $U(x)$ correspondente a G e à condição de contorno $f(x) = |x|$ em ∂G (o contorno de G).

Provaremos que $U(x)$ é uma barreira local para Ω em $0 \in \Gamma$. De fato, 1º) $U(x)$ é harmônica em $\Omega \cap B$, em virtude de ser função de Perron. 2º) De acordo com os teoremas 4.3 e 4.4, segue-se que $U(x)$ é contínua em todos os pontos de $\bar{G} - \{0\}$. 3º) $U(0) = 0$, provaremos a seguir. 4º) Admitindo que $U(0) = 0$ segue-se que

$U(x) > 0$ para $x \in \Omega \cap B$ pelo teorema do máximo - mínimo para funções harmônicas. Resta provar 3º. Para isso definimos associado a cada $\varepsilon > 0$ os números:

$$m_\varepsilon = \min_{|x| = \varepsilon} U(x) \quad \text{e} \quad M_\varepsilon = \max_{|x| = \varepsilon} U(x)$$

Desde que $u = 0$ é uma subfunção, obtemos $0 \leq m_\varepsilon \leq M_\varepsilon$ e portanto

$$0 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon$$

Se provarmos que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon \leq 0$, as desigualdades acima transformam-se em igualdades e teremos que $U(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, finalizando a demonstração. Suponhamos, por contradição que

$$(9) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon = a > 0 .$$

Sendo $B = B_R(0)$ tomamos $B' = B_{R/k}(0)$ onde $k > 1$.

Definimos $U'(x) = U(kx)$ para todo $x \in \bar{G}'$, onde $G' = B' - \bar{K}$.

É claro que U' é harmônica (II-teorema 1.2). Sendo $M'_\varepsilon =$

$= \max_{|x| = \varepsilon} U'(x)$, então $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M'_\varepsilon = a$. Agora, para

$x \in \partial G' \cap \partial B'$ temos $U'(x) = R$ e pelo teorema do máximo para funções harmônicas $U(x) < R$. Desde que $\partial G' \cap \partial B'$ é compacto existe $c < 1$ (independente de x) tal que

$$(10) \quad U(x) < c U'(x) \quad \text{para} \quad x \in \partial G' \cap \partial B' .$$

Para a parte restante do contorno de G' , isto é, $\partial G' \cap \bar{K}$, temos $U(x) = |x|$ e $U'(x) = U(kx) = k|x|$. Portanto

$$(11) \quad U(x) = \frac{1}{k} U'(x) \quad \text{para} \quad x \in \partial G' \cap \bar{K} .$$

De (10) e (11) resulta $U(x) < d U'(x)$, $d < 1$, para todo $x \in \partial G'$.

Se mostrarmos que

$$(12) \quad U(x) \leq d U'(x) \quad \text{para } x \in G'$$

obteremos

$$\limsup M_\varepsilon \leq d \limsup M'_\varepsilon = d \quad a < a,$$

o que contradiz (9), e a demonstração do teorema estará terminada. Para demonstrar (12), procedemos do seguinte modo: seja

$$M = \sup_{x \in G'} [U(x) - d U'(x)]$$

A função

$$u_\varepsilon(x) = M \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}}}{\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}}} \quad \text{para } x \neq 0$$

(onde R_1 é o raio B' , isto é, $R_1 = R/k$), é harmônica em $R^n - \{0\}$ e $u_\varepsilon(x) = M$ para $|x| = \varepsilon$ e $u_\varepsilon(x) = 0$ para $|x| = R$. Desde que $U(x) - d U'(x)$ é harmônica em G' e menor ou igual a $u_\varepsilon(x)$ no contorno de $G'_\varepsilon = (B' - B_\varepsilon(0)) - \bar{K}$, segue-se que $U(x) - d U'(x) \leq u_\varepsilon(x)$ para todo $x \in G'_\varepsilon$. Agora dado $x \in G'$ $u_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e portanto $U(x) - d U'(x) \leq 0$ se $x \in G'$, que é precisamente (12).

§ 5. A função de Wiener

Seja Ω uma região limitada do R^n com conteúdo de Jordan. Então existe uma sucessão de regiões Ω_k tais que:

1º) $\cup \Omega_k = \Omega$; 2º) Ω_k é uma região de Dirichlet, isto é, o problema de Dirichlet para dados contínuos em Γ_k (o contorno de Ω_k) é solúvel.

A existência de uma tal sucessão pode ser vista do seguinte modo. Tomamos reticulados do R^n por planos

$$x_j = m\alpha, \quad j = 1, \dots, n; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

onde α é feito, sucessivamente, igual a $1, 1/2, \dots, 1/2^k, \dots$.

Para cada valor de α , por exemplo $1/2^k$, tomamos o conjunto Ω_k dos cubos do reticulado de malha $1/2^k$ interiores a Ω .

Pelo fato de Ω ter conteúdo de Jordan, segue-se que a condição 1º) é satisfeita. E do fato de que Ω_k satisfaz à condição do cone segue-se que elas são regiões de Dirichlet.

Agora, associada a uma dada função contínua $f(x)$ em Γ determinaremos uma função harmônica $u(x)$ em Ω , que, no caso de o problema de Dirichlet ter solução coincide com $f(x)$ em Γ . Chamaremos essa função $u(x)$ de função de Wiener. A idéia de separar a resolução de problema de Dirichlet em duas etapas: 1a. a determinação da função de Wiener $u(x)$, 2a. a questão dos valores de $u(x)$ no contorno, essa idéia se deve a Lebesgue e Wiener, sendo que o último pôs a questão em termos precisos em um artigo publicado em 1924 no Journal of Mathematics and Physics (MIT).

A função de Wiener, associada a uma região Ω e a uma função $f(x)$ contínua em Γ , é construída do seguinte modo. Primeiro, extendemos $f(x)$ continuamente ao interior de Γ , isto é, à região Ω . Segundo, consideramos uma sucessão de re-

giões Ω_k como acima. Terceiro, seja $u_k(x)$ a solução do problema de Dirichlet na região Ω_k com dados do contorno $f(x)$ sobre Γ_k . Quarto, resulta que a sucessão (u_k) é uniformemente convergente e, portanto, ela define uma função harmônica $u(x)$ em Ω . (Cfr. teorema II-10.2). Essa é a função de Wiener. Dos quatro passos acima, três merecem comentários. Isso será feito nos três lemas seguintes.

Lema 5.1 - A sucessão (u_k) definida acima converge uniformemente em Ω .

Demonstração - Dividiremos esta demonstração em três partes.

1a. parte. Se $f(x)$ é um polinômio subharmônico em Ω , então a sucessão (u_k) associada converge uniformemente. De fato, pelo teorema do máximo para funções subharmônicas segue-se que a sucessão (u_k) é não decrescente. E desde que, as funções $|u_k(x)|$ são limitadas pelo máximo de $|f(x)|$ em Γ , segue-se que $u_k(x)$ converge pontualmente. Usando o teorema II-10.6 concluímos que (u_k) converge uniformemente sobre compactos contidos em Ω . Além disso, sendo u_k uniformemente limitadas, segue-se que (u_k) converge uniformemente em Ω .

2a. parte. Se $f(x)$ é um polinômio em Ω , então (u_k) converge uniformemente. De fato, seja M uma constante tal que $|\Delta f(x)| \leq M$ para todo x em Ω . Portanto, $f(x)$ pode ser escrita como a diferença de dois polinômios subharmônicos

$$f(x) = (f(x) + M|x|^2) - M|x|^2, \quad |x|^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Sejam (u_k) , (v_k) e (w_k) as sucessões associadas com as funções $f(x)$, $f(x) + M|x|^2$ e $M|x|^2$. De acordo com a 1a. parte

temos que (v_k) e (w_k) convergem uniformemente; desde que, $u_k = v_k - w_k$ segue-se que (u_k) também converge uniformemente.

3a. parte. Se $f(x)$ é uma função contínua qualquer em $\bar{\Omega}$, então a sucessão (u_k) a ela associada converge uniformemente. De fato, dado $\varepsilon > 0$ determinamos, pelo teorema de aproximação por polinômios (Weierstrass), um polinômio $P(x)$ tal que

$$(1) \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon .$$

Sejam (u_k) e (v_k) , as sucessões associadas a f e P , respectivamente. Pela 2a. parte, a sucessão (v_k) converge uniformemente e portanto

$$(2) \quad |v_j - v_k| < \varepsilon \quad \text{para } j, k > J .$$

Por outro lado, segue-se de (1) usando o teorema de máximo para funções harmônicas que

$$(3) \quad |u_k - v_k| < \varepsilon \quad \text{para todo } k .$$

De (2) e (3) obtemos pela desigualdade do triângulo que

$$|u_j - u_k| < \varepsilon \quad \text{para } j, k > J ,$$

o que conclue a demonstração do lema 5.1.

O lema 5.1 garantindo a convergência uniforme de (u_k) traz como consequência a construção de uma função harmônica $u(x)$ que parece depender dos passos 1 e 2 acima, isto é, da sucessão (Ω_k) e da extensão de $f(x)$ para Ω , coisas que obviamente não são unívocamente determinados por Ω e $f(x)$ em Γ . Os lemas, abaixo, mostram porém, que $u(x)$ independe de (Ω_k) e da

extensão de $f(x)$.

Lema 5.2 - A função de Wiener $u(x)$ independe da particular sucessão de regiões (Ω_k) .

Demonstração - Basta provar o lema para o caso em que $f(x)$ é um polinômio subharmônico. Neste caso, sejam (Ω_k) e (Ω'_k) duas sucessões de regiões de Dirichlet tais que $\cup \Omega_k = \cup \Omega'_k = \Omega$. Sejam (u_k) e (u'_k) as sucessões não decrescentes de funções harmônicas associadas. Como foi visto na 1ª parte do lema 5.1 ambas as sucessões convergem uniformemente para funções harmônicas $u(x)$ e $u'(x)$ respectivamente. Provaremos que $u = u'$. Pela construção de u e u' a partir do polinômio subharmônico $f(x)$ segue-se que

$$(3) \quad f \leq u \quad \text{e} \quad f \leq u' .$$

Por outro lado, dado $x \in \Omega$, êle pertencerá aos Ω_k a partir de k , digamos, e aos Ω'_k a partir de k' . Desde que em $\Gamma'_{k'}$ $u'_{k'} = f$, segue-se pelo teorema do máximo para funções harmônicas que

$$u'_{k'}(x) \leq u(x)$$

e portanto $u'_j(x) \leq u(x)$ para todo $j > k'$. Daí $u'(x) \leq u(x)$. Anàlogamente, prova-se $u(x) \leq u'(x)$. Concluída a prova do lema.

Lema 5.3 - A função de Wiener $u(x)$ independe da particular extensão de $f(x)$.

Demonstração - Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ duas extensões contínuas da função $f(x)$ dada em Γ . Então $f_1 - f_2$ é zero

em Γ . Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos uma vizinhança de Γ onde $|f_1 - f_2| < \varepsilon$. Se tomarmos k suficientemente grande de modo que Γ_k esteja contido nessa vizinhança, então

$$(3) \quad |u_k - v_k| < \varepsilon$$

onde (u_k) e (v_k) são as sucessões associadas a f_1 e f_2 respectivamente. De (3) concluimos que sendo ε arbitrário teremos $u = v$.

§ 6. Regiões ilimitadas e o potencial condutor

Até agora nos limitamos ao estudo das regiões limitadas. Regiões ilimitadas são, porém, importantes e para resultados do próximo parágrafo necessitamos estudar o problema de Dirichlet para tais regiões.

Seja Ω' uma região limitada do R^n . Consideraremos o problema de Dirichlet na região Ω definida como o exterior de Ω' . Tal problema recebe o nome de problema exterior. Observe que o tipo de região ilimitada considerada aqui é um tipo particular: Ω contém uma vizinhança do infinito. Regiões do tipo quadrante, isto é, quando o contorno torna-se ilimitado, não serão consideradas aqui.

O problema de Dirichlet seria determinar uma função $u(x)$ harmônica em Ω e igual a uma função contínua $f(x)$ dada em Γ . Tal problema, em geral, não teria solução única, como mostram os seguintes exemplos.

Exemplo 1 - Região: exterior da bola unitária no plano. Dados de

contorno: $f(x) = 1$. Soluções do problema de Dirichlet exterior: $u(x) = 1$ e $u(x) = \log(e|x|)$.

Exemplo 2 - Região: exterior da bola unitária em R^n , $n \geq 3$. Dados de contorno: $f(x) = 1$. Soluções do problema exterior: $u(x) = 1$ e $u(x) = 1/|x|^{n-2}$. Para termos unicidade deveremos impor alguma condição no infinito. Mostraremos que se a seguinte condição adicional for imposta ter-se-á unicidade.

Caso $n = 2$ - $u(x)$ é limitada.

Caso $n \geq 3$ - Existe uma constante $M > 0$ e um ponto y tal que para todo $x \in \Omega$ temos $|u(x)| \leq M/|x-y|^{n-2}$.

O estudo do problema de Dirichlet para regiões ilimitadas será feito com a ajuda de inversões. Seja B uma bola contida em Ω que sem perda de generalidade suporemos unitária e centrada na origem. Então, inverteremos Ω com relação a B obtendo uma região Ω^* . Designaremos os pontos de Ω^* por x^* isto é, x^* é a imagem de um ponto x de Ω . O contorno Γ^* de Ω^* é a imagem de Γ .

Teorema 6.1 - (Unicidade). O problema exterior de Dirichlet com a condição adicional tem, no máximo, uma solução.

Demonstração - Seja $u(x)$ uma função harmônica em Ω que é igual a $f(x)$ em Γ e que satisfaz à condição adicional. Usando o teorema da transformação de Kelvin concluímos que

$$(1) \quad u^*(x^*) = \frac{1}{|x^*|^{n-2}} u(x) \quad ,$$

onde $x^* = x/|x|^2$, é uma função harmônica em Ω^* menos a origem.

Mas nas vizinhanças de $x^* = 0$, obtemos usando a condição adicional,

$$(2) \quad |u^*(x^*)| \leq \frac{1}{|x^*|^{n-2}} \cdot \frac{M}{|x|^{n-2}} = M,$$

o que implica que a origem seja uma singularidade removível da função harmônica $u^*(x^*)$. Daí se segue que $u^*(x^*)$ é a solução do problema de Dirichlet (interior) na região Ω^* com dados de contôrno

$$(3) \quad f^*(x^*) = \frac{1}{|x^*|^{n-2}} f(x) \quad \text{em} \quad \Gamma^*.$$

Isso completa a demonstração da unicidade.

Teorema 6.2 (Existência) - Se a região Ω^* é de Dirichlet, então o problema exterior com a condição adicional tem solução.

Demonstração - Partimos agora da região Ω^* com os dados de contôrno $f^*(x^*)$ em (3). Desde que Ω^* é de Dirichlet segue-se que o problema de Dirichlet (interior) tem solução $u^*(x^*)$. A função

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u^*(x^*)$$

é harmônica em Ω e para x em Γ temos

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} f^*(x^*)$$

que por (3) é igual a

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} \cdot \frac{1}{|x^*|^{n-2}} f(x) = f(x).$$

Além disso desde que $u^*(x^*)$ é contínua em $\bar{\Omega}^*$ temos que a condição adicional para $u(x)$ é satisfeita. Isso completa a demonstração do teorema 6.2.

O teorema 6.2 nos diz que o problema de Dirichlet exterior para Ω será solúvel se o for para Ω^* . Mesmo que o problema exterior para Ω não tenha solução é importante ter a função de Wiener. Esta será definida por inversão. Sejam (Ω_k) uma sucessão não decrescente de regiões ilimitadas cuja união é Ω e tais que Ω_k^* são de Dirichlet. Dada a função $f(x)$ contínua em Γ definimos a função de Wiener $u(x)$ como o limite de $u_k(x)$ onde

$$u_k(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u_k^*(x^*)$$

sendo $u_k^*(x^*)$ a solução do problema de Dirichlet em Ω_k^* com dados de contorno

$$f^*(x^*) = \frac{1}{|x^*|^{n-2}} f(x) \text{ em } \Gamma_k^* .$$

A convergência uniforme de (u_k) é consequência do fato de $u_k^*(x^*)$ também convergir uniformemente.

Uma função de Wiener particularmente importante é o chamado potencial condutor que corresponde aos dados de contorno $f(x) = 1$ para x em Γ e $f(x)$ zero no infinito, ou mais precisamente $f(x)$ satisfazendo à condição adicional do começo deste parágrafo.

Repetimos o conceito de potencial condutor de um conjunto fechado limitado $\bar{\Omega}'$: é a função de Wiener que corresponde ao problema de Dirichlet exterior em Ω (o complemento de $\bar{\Omega}'$) com

os dados de contorno Γ e zero no infinito. Com ela definiremos a noção de capacidade no próximo parágrafo.

§ 7. A noção da capacidade

Neste parágrafo introduziremos a noção de capacidade no sentido de Wiener. Apresentaremos algumas propriedades da mesma e uma importante caracterização dos domínios de Dirichlet usando êsse conceito. Todos êsses resultados foram desenvolvidos por Wiener, Kellogg e Bouligand na década de 1920. Mais tarde de la Vallée-Poussin estendeu e melhorou o conceito de capacidade. Bases mais axiomáticas foram lançadas por Frostman em sua tese (Lund, 1935). Trabalhos mais modernos devem-se a Henri Cartan, Choquet e Brelot. Consulte a bibliografia no fim do nosso trabalho.

Seja A um conjunto limitado do R^n . A capacidade de A é definida como sendo

$$\gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma ,$$

onde u é o potencial condutor de \bar{A} (o fecho de A), Γ é uma superfície que contém A em seu interior e a derivada tomada é a derivada na direção da normal interior.

Pelo teorema de Gauss segue-se que a definição acima independe da particular superfície Γ tomada.

Os dois seguintes lemas sôbre capacidades são utilizados na demonstração do critério de Wiener.

Lema 7.1 - Se A é um subconjunto de B então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

Lema 7.2 - Seja A um conjunto limitado fechado do R^n com capacidade $\gamma > 0$. Então, o potencial condutor $u(x)$ de A satisfaz à desigualdade

$$\frac{\gamma}{|x-p|^{n-2}} \leq u(x) \leq \frac{\gamma}{|x-P|^{n-2}}$$

onde

$$|x-p| = \inf [|x-y| : y \in A] \quad \text{e}$$
$$|x-P| = \sup [|x-y| : y \in A] \quad .$$

Para a demonstração dos lemas acima, citamos o artigo de Kellogg no Proceedings of the National Academy of Sciences, em 1926.

Teorema 7.3 (Wiener) - Seja p um ponto do contôrno Γ de uma região limitada Ω em R^n , e seja λ um número fixo, $0 < \lambda < 1$. Seja γ_n a capacidade do conjunto $(B_k - B_{k+1}) \cap \Omega$, onde B_j é a bola do centro p e raio λ^j . Então, o ponto p é regular ou não, conforme a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n / \lambda^n)$$

diverja ou convirja.

Uma demonstração do teorema acima pode ser encontrada no livro de Kellogg, páginas 331 a 334. Essa demonstração é mais simples que a dada originariamente por Wiener.

Usando o teorema 7.3 prova-se (confira Wiener - The Dirichlet Problem, Journal of Math. Phys, 1924) que a origem nos exemplos 1 e 2, abaixo, é, respectivamente, um ponto regular e um ponto não regular. Os exemplos se devem a Lebesgue.

Exemplo 1 - Seja S a superfície obtida pela rotação da curva $y = x^m$, $x \geq 0$, em torno do eixo dos x . Seja Ω a região entre S e a superfície da bola unitária, de modo que se tenha um ponto cuspidal reentrante. A origem que pertence ao contôrno de Ω é regular.

Exemplo 2 - Uma região análoga à do exemplo anterior com a diferença que a curva que gera o ponto cuspidal é

$$y = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x \geq 0.$$

A origem é um ponto não regular.

CAPÍTULO IV

FUNÇÕES HARMÔNICAS NO PLANO

Sumário. Neste capítulo, deter-nos-emos examinando questões intrínsecas do caso plano. O método de Fourier é apresentado no § 2, sendo precedido de uma introdução à teoria clássica das séries de Fourier no § 1. O autor não resistiu a tentação de discutir em de talhe condições suficientes para a convergência pontual da série de Fourier, e resultou o § 1 mais longo do que é necessário para o uso no presente capítulo. Nossas demonstrações, no § 2, fazem uso de propriedades gerais de funções harmônicas demonstradas no capítulo II. No § 3 introduzimos os conceitos e teoremas sobre representação conforme que serão utilizados no parágrafo seguinte. Neste parágrafo (§ 4) estabelecemos a equivalência entre a possibilidade de transformar conformemente uma região no interior do disco unitário e a solubilidade do problema de Dirichlet, isto é, existência de função de Green. Isso nos oferece um método de resolver o problema de Dirichlet no plano usando representação conforme.

§ 1. Séries de Fourier

Consideramos aqui a classe ρ das funções f satisfazem do às seguintes propriedades: 1) f é uma função real de variável real; 2) f é periódica de período 2π ; 3) f é localmente integrável a Riemann, isto é, integrável em intervalos. Essa classe inclui as funções contínuas, as funções contínuas por partes, as funções de variação limitada, todas elas definidas em $[-\pi, \pi]$ e prolongadas periodicamente (período 2π) para a reta inteira.

Uma função $f(x)$ é dita contínua por partes se ela tem apenas um número finito de pontos de descontinuidade x_1, \dots, x_n e em cada ponto x_k a função tem limite à direita $f(x_k + 0)$ e limite à esquerda $f(x_k - 0)$.

Os coeficientes de Fourier de uma função f de ρ são definidos por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n=0,1,2,\dots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt, \quad n=1,2,\dots$$

e a série de Fourier associada à $f(x)$ é

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

A pergunta natural que se apresenta é se a série de Fourier da função $f(x)$ representa essa função. Mais precisamente, a sucessão das reduzidas da série

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx)$$

convergem para $f(x)$.

Em se tratando de convergência de uma sucessão de funções deve-se precisar que tipo de convergência consideramos: convergência pontual, convergência uniforme, convergência na norma do L_2 , etc. Neste parágrafo consideraremos apenas os dois primeiros tipos de convergência. No capítulo V trabalharemos com espaços de funções e teremos oportunidade de considerar outros tipos de convergência. O espaço L_2 das funções de quadrado somáveis a Lebesgue será introduzido e mostraremos que as funções desse espaço são representáveis por suas séries de Fourier, i.e., a sucessão das reduzidas $s_n(x)$ converge para a função no sentido da norma do espaço. No presente parágrafo daremos uma condição necessária e suficiente para que em um ponto x , s_n convirja para f . Desde que não é óbvio decidir se uma função satisfaz a tal condição, vários testes foram imaginados, os mais convincentes sendo os de Dini, Jordan e De la Vallée-Pousin.

Visando a análise da diferença $s_n(x) - f(x)$, temos os dois seguintes lemas de fácil demonstração.

Lema 1.1 - Para $f(x)$ em \mathcal{P} temos

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

onde $D_n(t)$ é o n -ésimo núcleo de Dirichlet

$$D_n(t) = \frac{\text{sen } (n+1/2)t}{2 \text{ sen } t/2}$$

Lema 1.2 - Para $f(x)$ em \mathcal{P} , temos

$$s_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x,t) D_n(t) dt$$

onde

$$(2) \quad \varphi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t) - f(x)]$$

Na demonstração do lema 1.2 utilizamos a identidade

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt$$

que pode ser obtida aplicando o lema 1.1 à função $f(x) = 1$, lembrando que os coeficientes de Fourier de tal função são todos nulos, a exceção de a_0 .

A seguir demonstraremos o importante lema de Riemann-Lebesgue que terá grandes implicações nas nossas considerações posteriores, como sejam "localizar" o problema da convergência da série de Fourier e dar o comportamento dos coeficientes de Fourier quando $n \rightarrow \infty$.

Lema 1.3 (Riemann-Lebesgue) - Para $f(x)$ integrável em um intervalo $[a, b]$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos nt dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt dt = 0$$

Demonstração - 1º) Se $f(x)$ é constante em $[a, b]$, o resultado segue-se imediatamente porque ambas as integrais são majoradas por M/n onde M é uma constante. 2º) Se $f(x)$ for uma função simples, isto é, $[a, b] = \bigcup_{j=1}^k I_j$ e f constante em cada I_j , então o resultado se segue pela linearidade da integral e aplicando 1º. 3º) Se $f(x)$ é uma função integrável, arbitrária, ela pode ser aproximada, a menos de qualquer ϵ dado, por uma função simples $\varphi(x)$; isto é:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt \right| < \varepsilon$$

Isso pela própria definição de integral, pois a segunda integral acima pode ser tomada como uma soma inferior de Riemann da função $f(x)$. Então

$$\left| \int_a^b f(t) \operatorname{sen} nt dt \right| \leq \left| \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] \operatorname{sen} nt dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) \operatorname{sen} nt dt \right|$$

onde a última integral tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ em virtude de 1º, e a primeira integral no segundo membro, em virtude de ser $\varphi(t) \leq f(t)$, é menor que $\varepsilon(b - a)$.

Inspirados no lema de Riemann-Lebesgue e observando que a integral em (1) pode vir a dar dificuldades nas vizinhanças de $t = 0$, onde o $\operatorname{sen}(t/2)$ se anula, separamos a referida integral em duas: \int_0^δ e \int_δ^π ; δ é um número fixado $0 < \delta < \pi$. A segunda integral pode ser escrita como

$$\int_\delta^\pi \frac{\varphi(x, t)}{2 \operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}(n + 1/2)t dt$$

que é igual a

$$\int_\delta^\pi \frac{\varphi(x, t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} \operatorname{sen} nt dt + \int_\delta^\pi \varphi(x, t) \cos nt dt$$

as quais pelo lema de Riemann-Lebesgue tendem a zero quando $n \rightarrow \infty$ uma vez que em $[\delta, \pi]$ a tangente no denominador não causa embaraços. A primeira integral, também pelo lema de Riemann-Lebesgue terá o mesmo limite quando $n \rightarrow \infty$ que a integral

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi(x, t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} \operatorname{sen} nt \, dt \quad ,$$

a qual por sua vez tem o mesmo limite que a integral

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi(x, t)}{t} \operatorname{sen} nt \, dt$$

pois

$$\int_0^{\delta} \varphi(x, t) \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)} - \frac{1}{t} \right] \operatorname{sen} nt \, dt \rightarrow 0 \quad , \quad n \rightarrow \infty$$

Resumindo, temos o seguinte resultado conhecido como o princípio da localização de Riemann.

Teorema 1.4 - Seja $f(x) \in \mathcal{P}$. Então, a condição necessária e suficiente para que $s_n(x)$ convirja para $f(x)$ em um determinado ponto x é que, para qualquer $\delta > 0$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\varphi(x, t)}{t} \operatorname{sen} nt \, dt = 0 \quad ,$$

onde $\varphi(x, t)$ está definido em (2).

Vemos pelo teorema acima que a convergência da série de Fourier em um certo ponto x depende tão somente do comportamento de $f(x)$ na vizinhança daquele ponto.

Como observamos antes, a condição acima dada no teorema 1.4 não lança muita luz na questão de como é a função $f(x)$ para que sua série de Fourier a represente. Conhece-se várias condições suficientes a que f deve satisfazer para que (3) se verifique. Nenhuma condição necessária e suficiente simples foi descoberta até hoje. Sabe-se que somente continuidade da função $f(x)$

não é suficiente, conforme um exemplo de Fejer (cfr. Titchmarsh, p. 416). Uma demonstração de que existem funções contínuas cujas séries de Fourier são divergentes pode ser dada usando o teorema da limitação uniforme, que é um resultado básico em análise funcional. A derivabilidade de $f(x)$ é condição suficiente mas muito forte para muitos propósitos. Apresentaremos aqui dois teoremas que dão condições suficientes mais fracas que a continuidade. Uma função $f(x) \in \mathcal{P}$ é dita satisfazer à condição de Dini em um ponto x se existir $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(x,t)|}{t} dt$$

é uma integral convergente.

Teorema 1.5 - Se $f(x) \in \mathcal{P}$ satisfaz à condição de Dini em um ponto x , então s_n converge para f naquele ponto.

A demonstração é uma consequência trivial do teorema 1.4 e do lema 1.3.

Surge agora a pergunta: que funções satisfazem à condição de Dini? Pesquisemos a forma de $\varphi(x,t)/t$:

$$\frac{\varphi(x,t)}{t} = \frac{1}{t} \left\{ \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] - f(x) \right\}.$$

Supondo $f(x)$ normalizada, isto é, $f(x) = 1/2 [f(x+0) + f(x-0)]$ teremos

$$\frac{\varphi(x,t)}{t} = \frac{1}{2} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{1}{2} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

e supondo que os limites das duas expressões no 2º membro existem quando $t \rightarrow 0$, chegaremos a que

$$\frac{|\varphi(x,t)|}{t} \leq M ,$$

e supondo $f(x)$ contínua em um intervalo em torno de t (possivelmente descontínua em t), teremos que $\varphi(x,t)/t$ é contínua em um certo intervalo $[0, \delta]$ e portanto a condição de Dini fica satisfeita.

Resumindo temos

Teorema 1.6 - Seja $f \in \mathcal{P}$ e suponhamos que em um ponto x ela satisfaz às seguintes propriedades:

(i)
$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

(ii) existe $\eta > 0$ tal que $f(t)$ é contínua em $(x, x+\eta)$ e $(x-\eta, x)$

(iii) os dois limites abaixo existem.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

Então, neste ponto x , s_n converge para f .

Exemplos de funções que satisfazem a essas propriedades em todos os pontos: 1) funções de classe C_1 ; 2) funções contínuas com derivadas à esquerda e à direita em todos os pontos; 3) funções contínuas por partes e tais que os dois limites em (iii) existem; essas são as funções quase diferenciáveis (cfr. Fulk). No exemplo 3) elas são normalizadas, isto é, (i) é satisfeito, e para isso modificaremos se necessário o valor da função em um número finito de pontos no intervalo $[-\pi, \pi]$. Apesar disso, os coeficientes de Fourier ficam inalterados e igual-

mente a questão da convergência da série de Fourier nos demais pontos. O exemplo 3) dá uma classe mais geral de funções que include as do exemplo 2) e portanto, também do exemplo 1).

Dessas observações concluímos que vale o seguinte

Teorema 1.7 - Seja $f(x)$ contínua por partes em $[-\pi, \pi]$ e tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Suponhamos além disso que em todo ponto x de $[-\pi, \pi]$ as condições (i) e (iii) do teorema 1.6 se conservam. Então $s_n(x)$ converge para $f(x)$ em todos os pontos de $[-\pi, \pi]$.

O teorema 1.5 nos dá uma condição suficiente para que $s_n(x)$ convirja para $f(x)$. Uma outra condição, devida a Jordan é apresentada no teorema abaixo.

Teorema 1.8 - Se $f \in \mathcal{P}$ é tal que em torno do ponto x existe um intervalo $[x-\delta, x+\delta]$ onde f é de variação limitada e normalizada, i.e., $f(x) = 1/2 [f(x+0) + f(x-0)]$ então $s_n(x)$ converge para $f(x)$.

Demonstração - Sendo f de variação limitada, decorre que $\varphi(x, t)$ também o é, e como

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] - \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

segue-se que quando $t \rightarrow 0$, então $\varphi(x, t) \rightarrow 0$.

Ora, toda função de variação limitada é a diferença de duas funções positivas crescentes

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

onde φ_1 e φ_2 podem ser tomadas de tal modo que tendam a zero

quando $t \rightarrow 0$.

O resultado do teorema seguir-se-á pelo teorema 1.4 se mostrarmos que existe $\delta > 0$ tal que

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{\varphi_1(t)}{t} \operatorname{sen} nt \, dt = 0$$

e fato análogo para $\varphi_2(t)$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe η tal que $\varphi_1(t) < \varepsilon$ para $t < \eta$. A integral em (4) será decomposta em duas: \int_0^{η} e \int_{η}^{δ} . A última tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ pelo lema de Riemann-Lebesgue. A segunda será calculada pelo segundo teorema da média do cálculo integral

$$\int_0^{\eta} \frac{\varphi_1(t)}{t} \operatorname{sen} nt \, dt = \varphi_1(\xi) \int_{n\xi}^{n\eta} \frac{\operatorname{sen} s}{s} \, ds, \quad 0 < \xi < \eta,$$

a qual é igual a

$$\varphi_1(\xi) \int_{n\xi}^{n\eta} \frac{\operatorname{sen} s}{s} \, ds$$

que tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

O teorema 1.8 contém como caso particular o resultado de Dirichlet para funções com um número finito de pontos de descontinuidade e de máximos e mínimos em $[-\pi, \pi]$. Funções satisfazendo a essas condições são ditas satisfazer às condições de Dirichlet.

Determos-emos um pouco para examinar a convergência uniforme da série de Fourier. Temos o seguinte

Teorema 1.9 - Se $f(x)$ é contínua em $[-\pi, \pi]$, com derivada contínua por partes e $f(-\pi) = f(\pi)$, então $s_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Demonstração - Designando por a'_n e b'_n os coeficientes de Fourier de $f'(x)$ obtemos $a'_n = nb_n$ e $b'_n = na_n$.

Usando a desigualdade de Bessel temos

$$(5) \quad \frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 dt$$

Usando a desigualdade de Schwarz temos

$$\begin{aligned} |s_m(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{n+1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n+1}^m (a_j^2 + b_j^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Schwarz:

$$\sum_{n+1}^m (a_j^2 + b_j^2)^{1/2} = \sum_{n+1}^m \frac{1}{j} (a_j^2 + b_j^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{n+1}^m \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n+1}^m (a_j^2 + b_j^2) \right)^{1/2}$$

que é menor ou igual a

$$\left(\sum_{n+1}^m \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 dt .$$

que tende a zero quando $n \rightarrow \infty$.

Isso garante que $s_n(x)$ é uma sucessão de Cauchy na norma do máximo. Desde que $s_n(x)$ converge pontualmente para $f(x)$, de acôrdo com o teorema 1.7, segue-se que $s_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $[-\pi, \pi]$.

Uma aplicação final do lema de Riemann-Lebesgue é o seguinte

Lema 1.10 - Se $f(x)$ é de classe C_j em $[-\pi, \pi]$, então existe uma constante c independente de n tal que

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^j} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{c}{n^j}$$

A demonstração é feita simplesmente usando a fórmula de integração por partes j vezes.

Corolário 1.11 - Se $f(x)$ é de classe C_2 em $[-\pi, \pi]$, então

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

O corolário 1.11 vale com condições mais fracas sobre $f(x)$, isto é, admitindo apenas que $f(x)$ seja de classe C_1 . A demonstração é como se segue. Tendo $f(x)$ derivada contínua concluimos, como na demonstração do teorema 1.9 que (5) se verifica. Então, usando a relação entre os coeficientes de Fourier de $f(x)$ e os de $f'(x)$ temos

$$\sum_{n=1}^m (|a_k| + |b_k|) = \sum_{n=1}^m \left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k} \right)$$

que pela desigualdade de Schwarz é menor ou igual a

$$\left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^m (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right)^{1/2}$$

a qual pode ser majorada por

$$C \left(\sum_{n=1}^m (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right)^{1/2}$$

onde C independe de m e n ; pode ser $C^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Usando (5) o resultado se segue.

§ 2. O problema de Dirichlet para o disco

Nesta secção ilustraremos o método de Fourier que é muito proficuo na resolução de problemas em equações diferenciais parciais. Este método, também chamado de método de separação de variáveis, consiste, essencialmente, em separar as variáveis independentes obtendo equações diferenciais ordinárias e expressar a solução como uma série de Fourier.

Usando coordenadas polares o problema de Dirichlet para o disco pode assim ser enunciado: dada $f(\theta)$ contínua em $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e tal que $f(0) = f(2\pi)$, determinar $u(\rho, \theta)$ contínua no disco $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e tal que

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$(2) \quad u(r, \theta) = f(\theta) .$$

Inicialmente, inspirados pela excelente simetria do círculo tentamos a solução de (1) na forma $u(\rho, \theta) = P(\rho) Q(\theta)$. Substituindo em (1) e lembrando que $P \equiv 0$ ou $Q \equiv 0$ implica $u \equiv 0$, o que não nos interessa, obtemos

$$(3) \quad \frac{\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho}}{\frac{1}{\rho^2} P} = \frac{-\frac{d^2 Q}{d\theta^2}}{Q}$$

Sendo o primeiro membro de (3) função somente de ρ e o segundo membro função somente de θ , concluímos que tanto um como outro deve ser igual a um parâmetro λ , independente de ρ e θ . De

(3)

$$(4) \quad \frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \lambda Q = 0$$

$$(5) \quad \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} - \frac{\lambda}{\rho^2} P = 0$$

Devemos restringir λ de tal modo que as soluções de (4) sejam periódicas em θ . Examinando as soluções de (4) concluímos que λ deve ser da forma m^2 , onde m é inteiro. Com $\lambda = m^2$ a solução geral de (4) é

$$a'_m \cos m\theta + b'_m \sin m\theta,$$

onde a'_m e b'_m são constantes.

Por outro lado (5) tem duas soluções linearmente independentes, ρ^m e ρ^{-m} . A última não interessa, pois conduziria a u descontínua na origem.

Portanto, para todo m inteiro

$$\rho^m (a'_m \cos m\theta + b'_m \sin m\theta)$$

é uma solução de (1).

Não é de se esperar que nenhuma dessas soluções satisfaça à condição de contorno (2). Se tal coisa acontecesse f seria da forma de seno ou cosseno, o que obviamente não cobre o caso geral.

Tentaremos obter uma solução u de (1) que satisfaça (2) combinando as soluções acima. Nessa conexão, indagamos se existem constantes a'_m , b'_m tais que

$$(6) \quad a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a'_m \cos m\theta + b'_m \operatorname{sen} m\theta) = f(\theta) .$$

Usando os resultados da secção anterior vemos que sendo $f(\theta)$ contínua em $0 \leq \theta \leq 2\pi$, continuamente derivável em $0 < \theta < 2\pi$ e $f(0) = f(2\pi)$ segue-se que ela é desenvolvível em série de Fourier. Então, para que (6) se verifique basta tomar

$$a'_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad r^m a'_m = a_m \quad \text{e} \quad r^m b'_m = b_m$$

isto é

$$(7) \quad a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

$$(8) \quad a'_m = \frac{1}{\pi r^m} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta$$

$$(9) \quad b'_m = \frac{1}{\pi r^m} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} m\theta d\theta .$$

Agora provaremos que

$$a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (a'_m \cos m\theta + b'_m \operatorname{sen} m\theta)$$

é solução do problema (1) - (2) . Em primeiro lugar, a série (10) é uniformemente convergente pois ela é majorada pela série

$$(10) \quad \frac{1}{2} |a_0| + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) ,$$

a qual converge (cfr. § 1). Da convergência uniforme em $0 \leq \rho \leq r$, segue-se que a função definida pela série (10) é contínua aí. Resta demonstrar que a mesma é harmônica em $0 \leq \rho < r$, isto é, no disco aberto. Para demonstrar que a série (10) é harmônica em

$0 \leq \rho < r'$, mostraremos, em primeiro lugar, que em qualquer disco $0 \leq \rho < r'$, com $r' < r$, a série (10) pode ser derivada termo a termo tantas vezes quantas quizermos. Isso por que a série

$$(11) \quad M \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^m$$

majora (10), e as derivadas de (11), que são convergentes, majoram as derivadas de (10).

A harmonicidade de (10) segue-se, então, do fato que cada termo de (10) é harmônico.

A discussão precedente pode ser enfeixada no seguinte

Teorema 2.1 - O problema de Dirichlet para o disco $0 \leq \rho \leq r$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$(2) \quad u(r, \theta) = f(\theta) \quad ,$$

onde $f(\theta)$ é contínua em $[0, 2\pi]$, continuamente derivável em $(0, 2\pi)$ e $f(0) = f(2\pi)$, tem por solução

$$(12) \quad u(\rho, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)$$

Observação: No teorema 2.1 foi feita a hipótese que $f(\theta)$ seja continuamente derivável. Isso, porém, não é essencial para que o resultado do teorema seja válido. Isto é, o seguinte teorema vale.

Teorema 2.2 - A função $u(\rho, \theta)$ definida pela série (12) para $\rho < r$, e definida como sendo $f(\theta)$ para $\rho = r$,

é solução do problema de Dirichlet (1) - (2), supondo apenas que $f(\theta)$ é contínua em $[0, 2\pi]$ e $f(0) = f(2\pi)$.

Demonstração - Usando o teorema da aproximação de Weierstrass

$f(\theta)$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios trigonométricos $f_k(\theta)$, tais que $f_k(0) = f_k(2\pi)$. Para cada k , a função

$$(13) \quad u_k(\rho, \theta) = \frac{1}{2} a_0^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^m (a_m^{(k)} \cos m\theta + b_m^{(k)} \sin m\theta)$$

definida no disco $0 \leq \rho \leq r$ é solução do problema de Dirichlet com $f_k(\theta)$ dado no contórno. Aqui $a_m^{(k)}$, $b_m^{(k)}$ são os coeficientes de Fourier de $f_k(\theta)$.

Desde que $f_k(\theta)$ converge uniformemente para $f(\theta)$, segue-se que $a_m^{(k)}$ ($b_m^{(k)}$) converge uniformemente em m para a_m (b_m). Portanto $u_k(\rho, \theta)$ converge uniformemente para $u(\rho, \theta)$ em todo o disco $0 \leq \rho \leq r'$, $r' < r$.

Então, aplicando o teorema 10.3 do capítulo II segue-se que a solução do problema (1) - (2) é a função definida em $0 \leq \rho < r$ pela série (12) e em $\rho = r$ sendo igual a $f(\theta)$.

Não é de se esperar que (12) represente a solução do problema de Dirichlet no disco fechado, isto é, inclusive no contórno, pois em tal caso $u(r, \theta)$ seria o desenvolvimento em série de Fourier de $f(\theta)$ e sabemos que nem sempre tal desenvolvimento é $f(\theta)$.

Finalizaremos este parágrafo mostrando que a representação de $u(\rho, \theta)$ pela série (12) conduz à fórmula de Poisson, deduzida no capítulo II por outro processo. Com efeito, usando a

definição dos coeficientes de Fourier

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \int_0^{2\pi} (\cos m\alpha \cos m\theta + \operatorname{sen} m\alpha \operatorname{sen} m\theta) f(\alpha) d\alpha$$

e pela convergência uniforme da série com relação a α , $u(\rho, \theta)$ é dado pela expressão

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^m (\cos m\theta \cos m\alpha + \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} m\alpha) \right] d\alpha$$

Lembrando que $\cos m\theta \cos m\alpha + \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} m\alpha = \cos m(\alpha - \theta) = \operatorname{Re} \exp [im(\alpha - \theta)]$, obtemos

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\operatorname{Re} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i(\alpha - \theta)}} - \frac{1}{2} \right] d\alpha$$

ou

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\alpha - \theta) + \rho^2} f(\alpha) d\alpha$$

§ 3. Transformação conforme

Lembremos a definição de transformação (ou representação) conforme. Uma transformação f definida em R^n tomando valores no R^n é dita conforme em um ponto x^0 se para qualquer par de curvas Γ_1 e Γ_2 que se interceptam em x^0 temos o ângulo entre Γ_1 e Γ_2 é igual ao ângulo entre $f(\Gamma_1)$ e $f(\Gamma_2)$. No parágrafo 1 do capítulo II observamos que no R^n , $n \geq 3$, há um número pequeno de transformações conforme enquanto que a teo-

ria no R^2 é muito mais rica. E isso se deve ao teorema seguinte

Teorema 3.1 - Seja $w = f(z)$ uma função analítica definida em uma certa região Ω do plano. Então $f(z)$ é conforme em todo ponto z_0 onde $f'(z_0) \neq 0$.

Demonstração - Seja $z = z(t)$ a equação de uma curva Γ que passa por z_0 . Seja $w(t)$ a imagem da curva Γ por f . O ângulo de Γ com o eixo real no ponto z_0 é dado pelo argumento de $z'(t_0)$, onde $z_0 = z(t_0)$. Portanto a conformalidade estará provada se demonstrarmos que $\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0)$ é uma constante independente da curva Γ . Mas, isso é verdade pois $w(t) = f(z(t))$; daí $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$ e

$$w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0)$$

o que implica

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

Um fato notável é o de que toda região do plano pode ser transformada conformemente sobre o interior do disco unitário. Este teorema se deve a Riemann, e será assim enunciado.

Teorema 3.2 ("Riemann mapping theorem") - Seja Ω uma região (i.e. conjunto aberto e conexo) simplesmente conexo que não é o plano todo. Seja $z_0 \in \Omega$. Então, existe uma e somente uma função analítica $w = f(z)$ tal que $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ e $f(z)$ cobre de modo biunívoco o interior do disco unitário $|w| < 1$. Uma demonstração deste teorema pode ser achada em Ahlfors (Bibl.) pg. 172.

Uma pergunta natural é a seguinte: que relação existe en-

tre o contorno de Ω e a periferia do disco $|w| = 1$? O seguinte teorema de Carathéodory dá uma resposta.

Teorema 3.3 - Se a região Ω tem por contorno uma curva simples Γ , então a função f do teorema anterior pode ser estendida continuamente até Γ e estabelece uma correspondência biunívoca entre Γ e $|z| = 1$.

Observemos que no teorema 3.1 exigia-se que Ω fosse simplesmente conexa. E se isso não acontecer? As coisas se complicam; e podemos ter dois anéis circulares que não possam ser transformados conformemente um no outro. Para maiores detalhes consulte o livro de Ahlfors, citado acima.

§ 4. Função de Green e função de Riemann

Seja Ω uma região nas condições do teorema 3.3. Mostraremos que podemos determinar a função de Green para Ω em termos da função f que aparece no teorema de Riemann.

Com efeito, definamos

$$(1) \quad G(z, w) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \log \frac{f(z) - f(w)}{f(z) f(w) - 1} .$$

1º. A expressão (1) está bem definida pois se $z \in \Omega$, por exemplo, $|f(z)| < 1$, o que implica que o denominador em (1) nunca é igual a zero.

2º. Nas vizinhanças de w , G é da forma $-1/2\pi \log |z-w| + h(z, w)$ onde h é harmônica em z . De fato

$$f(z) = f(w) + (z-w) f'(w) + (z-w)^2 f''(w) + \dots$$

e daí

$$\begin{aligned} F(z,w) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\log(z-w) + \log \frac{k(z,w)}{f(z) f(w) - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \log |z-w| + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log \frac{k(z,w)}{f(z) f(w) - 1}, \end{aligned}$$

onde a última expressão resulta sendo harmônica por ser a parte real de uma função analítica.

3º. Dado $w \in \Omega$ e $z \in \Gamma$, temos $G(z,w) = 0$. Pois em (1) temos com $z \in \Gamma$

$$G(z,y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\log \frac{e^{i\theta} - f(w)}{e^{-i\theta} f(w) - 1} \right] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log e^{i\theta} = 0$$

Resumindo a discussão acima temos o

Teorema 4.1 - Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano, que não é o plano todo. Seja $f(z)$ uma função de Riemann do tipo do teorema 3.3. Então, Ω tem função de Green, a qual está definida em (1).

A recíproca é também verdadeira.

Teorema 4.2 - Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano que tem uma função de Green $G(z,w)$. Então Ω pode ser transformado conformemente no círculo unitário.

Demonstração - Seja z_0 o ponto de Ω que irá no 0 pela transformação conforme $f(z)$. Então, a função $f(z)$ a determinar deve ser, utilizando (1):

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log f(z) .$$

Por outro lado

$$G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \log |z-z_0| + h(z, z_0)$$

a designando por $h^*(z, z_0)$ um conjugado harmônico de $h(z, z_0)$ te remos que $G(z, z_0)$ é a parte real da função analítica

$$G(z, z_0) + i H(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \left[\log |z-z_0| + i \arg(z-z_0) \right] + h(z, z_0) + i h^*(z, z_0) .$$

Portanto

$$\log f(z) = G(z, z_0) + i H(z, z_0) + i c'$$

uma vez que dois conjugados harmônicos de uma mesma função harmônica diferem por uma constante. Daí

$$f(z) = c \exp (G(z, z_0) + i H(z, z_0)) .$$

CAPÍTULO V

O PRINCÍPIO DE DIRICHLET

Sumário. Dedicamos o capítulo final ao princípio de Dirichlet, porque êste representa a transição entre a teoria clássica das equações elípticas e a teoria moderna. Em verdade, foi êle que forneceu as ideias para o grande desenvolvimento que as equações elípticas tiveram recentemente. Em suma, o princípio de Dirichlet iniciou tãda uma nova série de métodos que se mostraram fortes para abordar não só a equação de Laplace e o problema de Dirichlet, mas também, equações elípticas de ordem superior e problemas gerais de contôrno.

No parágrafo 1 fazemos alguns comentários sôbre o princípio de Dirichlet e apresentamos a ligação entre o problema variacional e o problema de Dirichlet; o raciocínio, ai, é informal e cremos ser o que era utilizado por Dirichlet e Riemann. Como lá observamos, as hipóteses A, B e C não os preocupavam motivo pelo qual seus argumentos careciam de justificação rigorosa. Logo, portanto, o princípio foi desacreditado e foi necessário quase meio século para que o mesmo fosse rehabilitado. Coube a Hilbert o trabalho de pôr o princípio em bases sólidas.

No parágrafo 2 discutimos dois subespaços do L_2 que constituem os espaços das funções que entram em competição no problema de Dirichlet.

O parágrafo 3 é constituído de resultados apresentados no Courant-Hilbert II e, provàvelmente, devidos a Courant nessa

formulação. Um problema variacional generalizado é mostrado ter solução u . Essa função é também solução de um problema de Dirichlet generalizado. Se certas condições são satisfeitas essa função representa a solução do problema clássico de Dirichlet.

O parágrafo final contém informações sobre os progressos na teoria das equações elípticas, principalmente indicações bibliográficas para aqueles que queiram prosseguir estudos.

§ 1. Comentários sôbre o Princípio de Dirichlet

No capítulo I foi observado que o problema variacional de minimizar o funcional

$$(1) \quad D(u) = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \, dx dy$$

na coleção $A(f)$ das funções u de classe C_2 em Ω e que são iguais a uma dada função f em Γ (o contôrno de Ω), tem por equação de Euler $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Isto significa que se o problema variacional (1) tiver solução u , então essa função u é também solução do problema de Dirichlet

$$(2) \quad \begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{em } \Omega \\ u &= f && \text{em } \Gamma . \end{aligned}$$

A integral (1) é conhecida como integral de Dirichlet.

Reciprocamente, se u é uma solução do problema de Dirichlet (2), então u resolve o problema variacional; pois se v é outra função da classe $A(f)$ temos, fazendo $\omega = v - u$,

$$D(v) = D(u) + D(\omega) + 2 \int_{\Omega} (u_x \omega_x + u_y \omega_y) \, dx dy$$

e supondo Ω uma região de Gauss e as derivadas primeiras de u contínuas em Γ vem pelo teorema da divergência

$$D(v) = D(u) + D(\omega) \geq D(u) ,$$

provando que $D(u)$ é um mínimo na classe $A(f)$.

Certo cuidado deve ser tomado com o argumento acima. Foi assumido, implicitamente, que existe uma função v , pelo menos, da classe

$A(f)$ para a qual $D(v) < \infty$, e também que a solução u do problema de Dirichlet tem derivadas primeiras contínuas em Γ .

Então, se os três fatos seguintes, que denominaremos hipóteses A, B e C, ocorrerem:

Hipótese A - O problema variacional (1) tem solução ;

Hipótese B - A classe $A(f)$ contém pelo menos uma função v para a qual $D(v) < \infty$;

Hipótese C - A solução u do problema de Dirichlet tem derivadas primeiras contínuas em Γ ;

teremos demonstrado o seguinte teorema que Riemann denominou de Princípio de Dirichlet:

"A solução do problema variacional (1) coincide com a solução do problema de Dirichlet (2)" .

As hipóteses A e B foram postas de lado como fatos inconteste pelos matemáticos que criaram esse método de resolver o problema de Dirichlet. Ocorre porém, que ambas são falsas, em geral, como prova o seguinte exemplo devido a Hadamard.

Exemplo de Hadamard - Deixamos ao leitor o exercício de fazer uma mudança para coordenadas polares na fórmula

(1) e obter

$$(3) \quad D(u) = \int_{\Omega'} (u_r^2 + r^{-2} u_\theta^2) r dr d\theta .$$

Suponhamos agora que Ω' seja o círculo unitário $r < 1$ e $f(\theta)$ seja uma função contínua qualquer no contorno $r = 1$. Vimos no capítulo IV que o problema de Dirichlet para o disco unitário com esses dados de contorno $f(\theta)$ tem solução dada pela série

$$(4) \quad u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad r < 1,$$

onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier da função $f(\theta)$.

Agora, se a integral (3) converge, teremos

$$D(u) = \lim D_t(u)$$

onde $D_t(u)$ é a integral de Dirichlet no disco de raio $t < 1$.

Usando (4) obtemos

$$D_t(u) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) t^{2k}$$

Dai se segue que para cada N , temos

$$\pi \sum_{k=1}^N k(a_k^2 + b_k^2) t^{2k} \leq D_t(u) \leq \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2)$$

Fazendo t tender a 1, vemos que $D(u)$ converge ou diverge juntamente com a série

$$(5) \quad \sum k(a_k^2 + b_k^2).$$

O exemplo de Hadamard repousa nesta última sentença.

Trata-se de exhibir uma função contínua $f(\theta)$ de período 2π e tal que a série (5) diverja.

Tomemos a função $f(\theta)$ cuja série de Fourier é

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j!\theta)}{j^2}.$$

Os coeficientes de Fourier de $f(\theta)$ são $a_k = 0$, $b_k = \frac{1}{j^2}$ se $k = j!$ e $b_k = 0$ para os demais k , e portanto a série (5) será

$$\sum_{j=1}^{\infty} j! j^{-4}$$

a qual diverge.

Resumindo, o problema de Dirichlet para o disco com os dados de contorno $f(\theta)$ definido em (5) tem solução $u(r, \theta)$ definida em (4) a qual não tem uma integral de Dirichlet divergente. Daí, neste caso, ambas as hipóteses A e B não se verificam.

Concluimos que se queremos aplicar o método variacional para resolver o problema de Dirichlet deveremos nos restringir a funções f dadas no contorno de modo que a hipótese B se verifique.

O objetivo deste capítulo será demonstrar que sob certas condições em Ω , a hipótese A também se verifica.

Exercício - Demonstre que definindo

$$D(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \text{grad } \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2 \, dx$$

temos

$$D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + 2D(\varphi_1, \varphi_2) + D(\varphi_2) \quad .$$

§ 2. Os espaços H

Seja Ω uma região limitada do R^n que é suposta ter conteúdo de Jordan para que se possa tomar integrais múltiplas sobre elas. Como em capítulos anteriores C_0 , designa o conjunto das funções reais contínuas em Ω e C_1 o conjunto das funções reais contínuas e com derivadas primeiras contínuas em Ω .

Os seguintes espaços de funções desempenharão um papel

fundamental neste capítulo.

H_0 - espaço vetorial das funções φ de C_0 tais que
$$\int_{\Omega} \varphi^2 dx < \infty .$$

H_1 - espaço vetorial das funções φ de C_1 tais que
$$\int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_{\Omega} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi dx < \infty .$$

A demonstração de que H_0 e H_1 são espaços vetoriais repousa na desigualdade de Schwarz

$$\left(\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 dx \right)^2 \leq \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx \int_{\Omega} \varphi_2^2 dx$$

para todo par de funções φ_1 e φ_2 de H_0 .

É fácil verificar que tanto H_0 como H_1 são espaços prehilbertianos com os produtos internos

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 dx$$

e

$$(\varphi_1, \varphi_2)_1 = \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 dx + \int_{\Omega} \text{grad } \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2 dx$$

respectivamente. As normas associadas a êsses produtos internos são designadas por $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|_1$, respectivamente. Os espaços H aqui definidos não correspondem aos espaços H tão populares hoje em dia na comunidade das equações elípticas. Enquanto êstes são completos (i.e., são espaços de Hilbert) os nossos são incompletos. Em verdade, os outros espaços serão obtidos por completamento dos nossos. Não nos preocupamos em completá-los, aqui, porque não exploraremos o fato de H ser completo. Mais adiante introduziremos um certo espaço obtido por completamento para atender ao problema das condições de contorno.

Um teorema de densidade que será utilizado mais tarde é agora apresentado.

Teorema 2.1 - O conjunto C_{∞}^0 das funções reais infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω é denso em H_0 .

Exercício 1 - Dê exemplo de uma função real $k(x)$ definida em \mathbb{R}^n que satisfaça às seguintes condições: 1º. $k(x)$ é de classe C_{∞}^0 ; 2º. $k(x) \geq 0$; 3º. $k(x) = 0$ para $|x| > 1$; 4º. $k(x) = k(-x)$; 5º. $\int k(x) dx = 1$.

Exercício 2 - A função $k_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} k(\frac{x}{\varepsilon})$, onde k é a função do exercício anterior, satisfaz tôdas as propriedades acima com excepção de 3º. que é substituída por: $k_{\varepsilon}(x) = 0$ para $|x| > \varepsilon$.

Demonstração do teorema 2.1 - Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos a sub-região Ω_{ε} dos pontos de Ω a uma distância maior do que 2ε da fronteira Γ de Ω .

Dada $f(x) \in H_0$, a ela associaremos uma sucessão de funções de C_{∞}^0 assim definidas

$$f_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega_{\varepsilon}} k_{\varepsilon}(x-y) f(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Mostraremos que $f_{\varepsilon}(x)$ tende a $f(x)$ na norma do H_0 . Com êsse intuito provaremos que $f_{\varepsilon} \in H_0$ e $\|f_{\varepsilon}\| \leq M$, onde M independe de ε . De fato,

$$\int_{\Omega} |f_{\varepsilon}(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega_{\varepsilon}} k_{\varepsilon}(x-y) f(y) dy \right|^2 dx$$

que pela desigualdade de Schwarz é menor ou igual que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega_{\varepsilon}} k_{\varepsilon}^2(x-y) dy \int_{\Omega_{\varepsilon}} f^2(y) dy dx$$

que é menor que $c \|f\|$, onde c é uma constante.

Portanto, para demonstrar que $\|f_{\varepsilon} - f\| \rightarrow 0$ basta mostrar que

$$\int_A |f_{\varepsilon}(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

para conjuntos compactos A contidos em Ω .

Esta última questão será demonstrada se provarmos que $f_{\varepsilon}(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente em A . Esse fato é, porém, provado por um argumento bem conhecido: para x em A temos

$$f_{\varepsilon}(x) - f(x) = \int_{\Omega_{\varepsilon}} k_{\varepsilon}(x-y) [f(y) - f(x)] dy$$

se ε for tomado suficientemente pequeno de modo que uma esfera de raio ε centrada em um ponto de A fique contida em Ω_{ε} . Agora a integral acima desdobra-se em duas: uma sôbre $|x-y| < \delta$ e outra sôbre $\{|x-y| > \delta\} \cap \Omega_{\varepsilon}$. A primeira pode ser estimada por $\rho(\delta)$ onde ρ é o módulo de continuidade de f . A segunda será zero se $\varepsilon < \delta$.

Conclui-se pois que

$$|f_{\varepsilon}(x) - f(x)| < \rho(\delta) \quad \text{se} \quad \varepsilon < \delta$$

e daí, desde que, dado η existe δ tal que $\rho(\delta) < \eta$ vemos que

$$|f_{\varepsilon}(x) - f(x)| < \eta \quad \text{se} \quad \varepsilon < \delta$$

O nosso objetivo seguinte é fornecer um critério para determinar se uma sucessão de Cauchy em H_1 é convergente nesse espaço.

Teorema 2.2 - Seja (φ_k) uma sucessão de Cauchy em H_1 . Suponha que existe $u \in C_1$ tal que para qualquer sub-região Ω' de Ω se tenha

$$(4) \quad \int_{\Omega'} (\varphi_k - u) v \, dx \rightarrow 0$$

para qualquer $v \in H_0$. Então $u \in H_1$ e φ_k tende para u na norma de H_1 .

A demonstração repousa nos dois lemas seguintes

Lema 2.3 - Seja (g_k) uma sucessão de Cauchy em H_0 e tal que $(g_k, v) \rightarrow 0$ para qualquer $v \in H_0$. Então g_k tende a zero na norma de H_0 .

Demonstração - Da identidade

$$\|g_k - g_j\|^2 = \|g_k\|^2 - 2(g_k, g_j) + \|g_j\|^2$$

segue-se

$$(5) \quad \|g_k\|^2 \leq \|g_k - g_j\|^2 + 2(g_k, g_j)$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $K_1 > 0$ tal que $\|g_k - g_j\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ para $k, j \geq K_1$, pois (g_k) é de Cauchy em H_0 . Por outro lado fixado $j = K_1$ existe K_2 tal que para $k > K_2$ se tem $|(g_k, g_j)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Tomando $k > \max(K_1, K_2)$ obtemos de (5) $\|g_k\|^2 < \varepsilon$, o que finaliza a demonstração do lema 2.3.

Lema 2.4 - Seja (g_k) uma sucessão de Cauchy em H_1 e tal que $(g_k, v) \rightarrow 0$ para qualquer $v \in H_0$. Então g_k tende a zero na norma de H_1 .

Demonstração - Queremos demonstrar que

$$\|g_k\|_1^2 = \|g_k\|^2 + \sum_{i=1}^n \|g_{k,x_i}\|^2 \rightarrow 0.$$

Aqui g_{k,x_i} designa a derivada parcial de g_k com relação a x_i . Em primeiro lugar, observamos que $\|g_k\| \rightarrow 0$. De fato, (g_k) sendo de Cauchy em H_1 , também o será em H_0 (do qual H_1 é um subespaço), pois a norma de H_0 é menor que a norma de H_1 . Então aplicamos o lema 2.3 e obtemos $\|g_k\| \rightarrow 0$.

Para demonstrar que $\|g_{k,x_i}\| \rightarrow 0$, tentaremos usar também o lema 2.3. Para isso devemos mostrar que a sucessão (g_{k,x_i}) é de Cauchy e que $(g_{k,x_i}, v) \rightarrow 0$ para qualquer $v \in H_0$. A primeira assertiva é hipótese do presente lema. Para demonstrar a segunda observaremos primeiro que com a ajuda do teorema 2.1 basta fazê-lo para $v \in C_{00}^0$. De fato, seja M tal que $\|g_{k,x_i}\| \leq M$ para todo k , e seja dado $v \in H_0$. Então dado $\varepsilon > 0$ podemos determinar (pelo teorema 2.1) $w \in C_{00}^0$ tal que $\|v-w\| < \varepsilon/M$. Portanto pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} |(g_{k,x_i}, v)| &\leq |(g_{k,x_i}, w)| + |(g_{k,x_i}, v-w)| \leq \\ &\leq |(g_{k,x_i}, w)| + \|g_{k,x_i}\| \|v-w\| \leq \\ &\leq |(g_{k,x_i}, w)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, para provar que $(g_{k,x_i}, w) \rightarrow 0$ para qualquer $w \in C_{00}^0$ usamos o teorema da divergência e

$$(g_{k,x_i}, w) = - (g_k, w_{x_i}) \rightarrow 0$$

pela hipótese do lema. Isso completa a demonstração do lema 2.4.

Demonstração do lema 2.2 - Aplicamos o lema 2.4 às funções $g_k = \varphi_k - u$ restritas a Ω' . Sendo $\bar{\Omega}'$ compacto, todas as hipóteses do lema 2.4 ficam satisfeitas e segue-se que $\|\varphi_k - u, \Omega'\|_1 \rightarrow 0$. Aqui $\|\cdot, \Omega'\|_1$ designa a norma de H_1 para funções definidas (e as integrais, que aparecem nas normas, tomadas) em Ω' .

Pela desigualdade do triângulo para normas ($||a| - |b|| \leq |a - b|$) temos que

$$(6) \quad \|\varphi_k, \Omega'\|_1 \longrightarrow \|u, \Omega'\|_1 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Desde que $\|\varphi_k, \Omega'\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1$, e que pelo fato de (φ_k) ser de Cauchy em H_1 temos $\|\varphi_k\|_1 \leq M$, segue-se de (6) que $\|u, \Omega'\|_1 \leq M$, para todo Ω' , o que acarreta $\|u\|_1 \leq M$, i.e. $u \in H_1$.

Agora, provaremos que $(\varphi_k - u, v) \rightarrow 0$ para todo $v \in H_0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ determinamos Ω' tal que

$$\|\varphi_k, \Omega - \Omega'\| < \varepsilon/2K \quad \text{e} \quad \|u, \Omega - \Omega'\| < \varepsilon/2K$$

onde $K = \|v\|$. Agora

$$(\varphi_k - u, v) = \int_{\Omega'} (\varphi_k - u)v \, dx + \int_{\Omega - \Omega'} (\varphi_k - u)v \, dx$$

e pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} |(\varphi_k - u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega'} (\varphi_k - u)v \, dx \right| + \|\varphi_k - u, \Omega - \Omega'\| \|v, \Omega - \Omega'\| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega'} (\varphi_k - u)v \, dx \right| + (\|\varphi_k, \Omega - \Omega'\| + \|u, \Omega - \Omega'\|) \|v\| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega'} (\varphi_k - u)v \, dx \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Usando agora esse fato, $(\varphi_k - u, v) \rightarrow 0$, obteremos usando o lema 2.4 que φ_k converge para u na norma de H_1 . Isso finaliza a demonstração do teorema 2.2.

Para atender à questão de condições de contorno que aparecerá adiante, vamos introduzir o seguinte espaço.

Definição - H_1^0 é o completamento de C_{∞}^0 com relação à norma do H_1 .

Segue-se que H_1^0 é um espaço de Hilbert constituído de elementos que não são necessariamente funções contínuas. Consulte um livro de análise funcional para êsse problema de completamento de espaços prehilbertianos. Dados $g, h \in H_1^0$ definimos

$$\|g\| = \lim \|g_k\|$$

$$D(g, h) = \lim D(g_k, h_k)$$

onde (g_k) e (h_k) são sucessões de Cauchy na norma de H_1 que representam a classe de equivalência g e h , respectivamente. O fato de ambas as sucessões serem de Cauchy em H_1 implica que ambos os limites acima existam.

Para elementos de H_1^0 provaremos a seguinte desigualdade, devida a Poincaré.

Teorema 2.5 - Existe uma constante c tal que

$$(7) \quad \|g\|^2 \leq c D(g)$$

para todo $g \in H_1^0$.

Demonstração - Por continuidade, basta demonstrar essa desigualdade para $g \in C_{\infty}^0$. Nessas condições, sendo Q um hipercubo com lados paralelos aos eixos coordenados, o qual contém Ω , prolongue a função g para $Q - \Omega$ definindo-a aí como zero. A função prolongada que também designamos por g é ainda

de C_{∞}^0 .

Se $Q = \{x : -a < x_j < a, j=1, \dots, n\}$ temos

$$(8) \quad g(x) = \int_{-a}^{x_1} g_t(t, x') dt$$

onde $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

Pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} |g(x)|^2 &\leq \int_{-a}^{x_1} dt \int_{-a}^{x_1} g_t^2(t, x') dt \\ &\leq 2a \int_{-a}^{x_1} g_t^2(t, x') dt \end{aligned}$$

Integrando com relação às demais variáveis

$$\begin{aligned} \int_{Q'} |g(x)|^2 dx' &\leq 2a \int_{Q'} \int_{-a}^{x_1} g_t^2(t, x') dt dx' \leq \\ &\leq 2a \int_Q g_t^2(t, x') dt dx' \end{aligned}$$

onde $Q' = \{x' : -a < x_j < a, j=2, \dots, n\}$ e $dx' = dx_2, \dots, dx_n$.

Integrando mais uma vez com relação a x_1 :

$$\int_{-a}^a \int_{Q'} |g(x)|^2 dx' dx_1 \leq (2a)^2 \int_Q g_t^2(t, x') dt dx'$$

ou

$$\|g\|^2 \leq 4a^2 \int_Q g_t^2(t, x') dt dx' \leq 4a^2 D(g)$$

e portanto a constante do teorema 2.5 pode ser tomada $c = 4a^2$.

§ 3. O método das sucessões minimizantes

Neste parágrafo estabelecemos a existência da função μ que minimiza o problema variacional usando as chamadas sucessões minimizantes que a seguir definimos.

Seja d o infimo do conjunto $\{D(\varphi), \varphi \in A(f)\}$, podemos determinar uma sucessão φ_n de funções de $A(f)$ tal que $D(\varphi_n) \rightarrow d$. Tal sucessão é chamada uma sucessão minimizante. Um processo clássico de resolver o problema variacional consiste em construir a função minimizante u a partir de uma tal sucessão, tomando médias aritméticas de modo conveniente. Seguimos um procedimento devido a Courant dividindo a questão em duas partes: 1ª. determinamos uma função harmônica u que satisfaz às condições de contorno em um certo sentido generalizado; 2ª. mostramos que u satisfaz às condições de contorno no sentido usual. Esta segunda parte será feita apenas no caso plano.

A classe $A(f)$ na qual buscamos a solução do problema variacional é caracterizada por satisfazer à condição de contorno: $\varphi \in A(f)$ então $\varphi - f = 0$ no contorno Γ . À luz do parágrafo 1 vemos que só faz sentido considerar o caso $f \in H_1$. A condição de contorno será generalizada do seguinte modo:

Definição - $\varphi \in H_1$ satisfaz à condição de contorno generalizada determinada por $f \in H_1$ se $\varphi - f \in H_1^0$.

O problema variacional que estudaremos será o seguinte:

"Dado $f \in H_1$, determinar $u \in H_1$ tal que $u - f \in H_1^0$ e $D(u) = d$ onde $d = \inf [D(\varphi); \varphi \in H_1 \text{ e } \varphi - f \in H_1^0]$."

Resultará que a função u que minimiza $D(\varphi)$ é harmônica em Ω e portanto ela é solução de um problema de Dirichlet generalizado.

Determinemos em primeiro lugar uma sucessão minimizante (φ_j) , isto é, $\varphi_j \in H_1$, $\varphi_j - f \in H_1^0$ e $D(\varphi_j) \rightarrow d$. A seguir apresentamos duas propriedades das sucessões minimizantes.

Lema 3.1 - Dado $g \in H_1^0$, temos $D(\varphi_k, g) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Demonstração - Por continuidade, basta estabelecer o lema para $g \in C_{\infty}^0$. Agora, a forma quadrática em ε

$$D(\varphi_j + \varepsilon g) - d = D(\varphi_j) + 2\varepsilon D(\varphi_j, g) + \varepsilon^2 D(g) - d$$

é não negativa para qualquer ε , pois d é o $\inf [D(\varphi) ; \varphi \in H_1 \text{ e } \varphi - f \in H_1^0]$ e $\varphi_j + \varepsilon g$ pertencem a êsse conjunto. O discriminante do trinômio será então ≤ 0 :

$$(1) \quad [D(\varphi_j, g)]^2 \leq [D(\varphi_j) - d] D(g)$$

Sendo φ_j minimizante, o resultado do lema seguir-se-á de (1).

Lema 3.2 - A sucessão minimizante (φ_k) é de Cauchy em H_1 .

Demonstração - Da identidade

$$D(\varphi_j - \varphi_k) = D(\varphi_j, \varphi_j - \varphi_k) - D(\varphi_k, \varphi_j - \varphi_k)$$

segue-se usando a desigualdade (1) do lema 3.1:

$$(2) \quad D(\varphi_j - \varphi_k) \leq [D(\varphi_j) - d]^{\frac{1}{2}} [D(\varphi_j - \varphi_k)]^{\frac{1}{2}} + [D(\varphi_k) - d]^{\frac{1}{2}} [D(\varphi_j - \varphi_k)]^{\frac{1}{2}}$$

Desde que existe $M > 0$ tal que $D(\varphi_j) \leq M$ para todo j , temos

de (2) que

$$(3) \quad D(\varphi_j - \varphi_k) \rightarrow 0$$

Usando a desigualdade de Poincaré (teorema 2.5) temos $\|\varphi_j - \varphi_k\| \rightarrow 0$, que junto com (3) implica que $\|\varphi_j - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$.

Agora usaremos a sucessão minimizante para construir a função minimizante u .

Para $R > 0$ seja Ω_R o conjunto dos pontos x de Ω tais que $\text{dist}(x, \Gamma) > R$. Definimos em Ω_R uma função $u_{j,R}$ como se segue

$$u_{j,R}(x) = (\omega_n R^n)^{-1} \int_B \varphi_j(y) dy$$

onde $B = B_R(x)$ e ω_n é o volume da bola unitária.

Lema 3.3 - A sucessão $(u_{j,R})$ é uniformemente convergente em Ω_R .

Demonstração - Pela desigualdade de Schwarz temos

$$\begin{aligned} |u_{j,R}(x) - u_{k,R}(x)|^2 &\leq (\omega_n R^n)^{-2} \left[\int_B (\varphi_j(y) - \varphi_k(y)) dy \right]^2 \leq \\ &\leq (\omega_n R^n)^{-2} \int_B dy \int_B (\varphi_j(y) - \varphi_k(y))^2 dy \leq \\ &(\omega_n R^n)^{-1} \|\varphi_j - \varphi_k\| \end{aligned}$$

e esta última expressão tende a zero em virtude do lema 3.2. E isso finaliza a demonstração.

O lema 3.3 nos permite então determinar uma função contínua em Ω_R : $u_R = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{j,R}$. A função $u_R(x)$ parece depender de R . Surpreendentemente, isso não acontece como mostra o lema abaixo.

Lema 3.4 - Seja $r < R$. Então u_r coincide com u_R em Ω_R .

Demonstração - Associado a um ponto x^0 de Ω_R definamos a função

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{n}{2-n} (r^{2-n} - R^{2-n}) + |x-x^0|^2 (r^{-n} - R^{-n}), & |x-x^0| \leq r \\ \frac{n}{2-n} (|x-x^0|^{2-n} - R^{2-n}) + (|x-x^0|^{2-n} - |x-x^0|^2 R^{-n}), & r \leq |x-x^0| \leq R \\ 0, & |x-x^0| \geq R. \end{cases}$$

Um simples cálculo de derivadas mostrará que $\alpha(x)$ pertence C_1 .

Desde que ela tem suporte compacto em Ω , segue-se que

$$D(\varphi_j, \alpha) \rightarrow 0.$$

Aplicando o teorema da divergência às três regiões B_r , $B_R - B_r$ e $\Omega - B_R$ temos:

$$D(\varphi_j, \alpha) = - \int_{B_R} \varphi_j \Delta \alpha \, dx$$

Mas, $\Delta \alpha = 2n(r^{-n} - R^{-n})$ em B_r , e $\Delta \alpha = -2nR^{-n}$ em $B_R - B_r$.

Portanto

$$D(\varphi_j, \alpha) = + 2nR^{-n} \int_{B_R} \varphi_j \, dx - 2nr^{-n} \int_{B_r} \varphi_j \, dx$$

e quando j tende a infinito

$$0 = 2n \omega_n u_R(x^0) - 2n \omega_n u_r(x^0)$$

isto é $u_r(x^0) = u_R(x^0)$, como queríamos provar.

Deste modo, segue-se como consequência dos lemas 3.3 e 3.4 que a partir de uma dada sucessão minimizante (φ_j) determinamos, tomando médias aritméticas e passando ao limite, uma única função $u(x)$ a qual é contínua em Ω . Essa função será a candidata para

solução do problema variacional. Para elegê-la devemos demonstrar três fatos: 1º. $u \in H_1$; 2º. $u-f \in H_1^0$; 3º. $D(u)$ é um mínimo na classe das funções que satisfazem a 1º e 2º. Com intenção de aplicar resultados do § 2 demonstraremos o teorema 3.8 abaixo. Antes, porém, demonstraremos dois lemas.

Lema 3.5 - Seja A um conjunto que tem conteúdo de Jordan, isto é, $\text{vol}(A)$ é finito. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem bolas abertas disjuntas $B_1 = B_{r_1}(x_1), \dots, B_N = B_{r_N}(x_N)$ contidas em A e tais que: 1º. $r_j < \varepsilon$, $j=1, \dots, N$; 2º. $\text{vol}(A - \cup B_j) < \varepsilon$.

Demonstração - Seja $k = (2^n - \omega_n)/2^n$ a relação entre o volume compreendido entre a bola unitária e o cubo circunscrito, e o volume do cubo circunscrito. Dado $\varepsilon > 0$ podemos determinar um reticulado de malha menor que ε , de modo que o volume dos cubos desse reticulado totalmente contidos em A difere do $\text{vol } A$ de menos que $\varepsilon/2$. Se em cada desses cubos inscrevermos uma bola, teremos que essas bolas cobrem uma região R_1 contida em A , e o volume da parte não coberta $A_1 = A - R_1$ é tal que

$$\text{vol } A_1 \leq k \text{ vol } A + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Faremos para A_1 o mesmo raciocínio que para A , só que com um diferente ε , no caso $(1-k)\varepsilon/2$. Resulta que uma região $R_2 \subset A_1$ pode ser coberta por bolas de raio menor que ε e o volume da região não coberta $A_2 = A_1 - R_2$ é tal que

$$\text{vol } A_2 \leq k(k \text{ vol } A + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{(1-k)\varepsilon}{2} = k^2 \text{ vol } A + \frac{\varepsilon}{2} .$$

E assim sucessivamente, desde que $k < 1$, tomando j suficiente-

mente grande k^j $\text{vol } A < \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto $\text{vol } A_n < \varepsilon$. Agora a região $A - A_n$ é a união de um número finito de bolas de raio $< \varepsilon$, o que demonstra o lema.

Lema 3.6 - Seja (φ_k) uma sucessão minimizante e seja u a função contínua a ela associada pelo processo das médias aritméticas. Então, para qualquer subregião A , cujo fecho \bar{A} está contido em Ω , temos

$$(4) \quad \int_A (\varphi_k - u) dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Demonstração - Dado $\varepsilon > 0$ determinamos, pelo lema 3.5, bolas B_1, \dots, B_N de raio menor que ε e tal que o volume do conjunto $A' = A - \cup B_j$ é menor que ε . A integral acima sôbre se decompõe em $N+1$ que avaliaremos a seguir.

$$(5) \quad \left| \int_{A'} (\varphi_k - u) dx \right| \leq \int_{A'} |\varphi_k| dx + \varepsilon \max_{x \in A} |u(x)|$$

que pela desigualdade de Schwarz é menor que

$$(5') \quad \varepsilon^{1/2} \|\varphi_k\| + \varepsilon \max_{x \in A} |u(x)|$$

As integrais sôbre as bolas são assim estimadas; aqui B designa uma das bolas B_j .

$$(6) \quad \left| \int_{B_j} (\varphi_k - u) dx \right| \leq \left| \int_{B_j} (\varphi_k - u(x_j)) dx \right| + \left| \int_{B_j} (u(x_j) - u) dx \right| \leq \\ \leq \omega_n r_j^n |u_{k,r_j}(x_j) - u(x_j)| + \omega_n r_j^n \rho(\varepsilon)$$

onde $\rho(\cdot)$ é o módulo de continuidade da função $u(x)$ que é con

tínua em \bar{A} . De (6) concluímos que

$$(7) \quad \sum_{j=1}^N \left| \int_{B_j} \right| \leq \text{vol } A \left[\sum_{j=1}^N |u_{k,r_j}(x_j) - u(x_j)| + \rho(\varepsilon) \right].$$

Agora, (5) + (5') e (7) implicam (4).

O lema 3.6 implica imediatamente que $u(x)$ seja harmônica em Ω , conforme o

Corolário 3.7 - A função $u(x)$ é harmônica em Ω .

Demonstração - Basta demonstrar que $u(x)$ satisfaz à propriedade do valor médio, isto é, para uma bola qualquer

$B = B_R(y)$ contida em Ω :

$$(8) \quad u(y) = (\omega_n R^n)^{-1} \int_B u(x) dx$$

Ora, pelo lema anterior temos que

$$(9) \quad \int_B (\varphi_k - u) dx = \int_B \varphi_k dx - \int_B u dx \rightarrow 0$$

Mas pela definição de u :

$$u(y) = \lim (\omega_n R^n)^{-1} \int_B \varphi_k dx$$

De (9) e (10) concluímos (8).

Teorema 3.8 - Seja (φ_k) uma sucessão minimizante e seja u a função contínua a ela associada pelo processo das médias aritméticas. Então, para toda subregião Ω' , cujo fecho $\bar{\Omega}'$ está contido em Ω , temos

$$\int_{\Omega'} (\varphi_k - u) v dx \rightarrow 0$$

qualquer que seja $v \in H_0$.

Demonstração - Sendo v contínua em Ω' , dado $\varepsilon > 0$ existe uma função simples ω tal que

$$|v(x) - \omega(x)| < \varepsilon, \quad x \in \Omega'.$$

A função $\omega(x) = \omega_j$ para $x \in A_j$ e $\bigcup_{j=1}^N A_j = \Omega'$; $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ são números reais.

Agora

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega'} (\varphi_k - u) v dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega'} (\varphi_k - u) (v - \omega) dx \right| + \left| \int_{\Omega'} (\varphi_k - u) \omega dx \right| \leq \\ &\leq c\varepsilon + \sum_{j=1}^N |\omega_j| \left| \int_{A_j} (\varphi_k - u) dx \right|, \quad c = \text{const.} \end{aligned}$$

e o teorema seguir-se-á do lema 3.6.

Dos teoremas 2.2 e 3.8 segue-se que a função u definida pelo processo da sucessão minimizante é a solução do problema variacional generalizado. Isto é, vale o seguinte

Teorema 3.9 - A função $u \in H_1$ e é tal que $u - f$ está em H_1^0 e $D(u) = d$.

Demonstração - 1º. Que u está em H_1 segue-se dos teoremas 2.2 e 3.8. 2º. Também pelo teorema 2.2 concluímos que $\varphi_k - f$ converge para $u - f$ na norma do H_1 . Desde que $\varphi_k - f$ pertence a H_1^0 e este espaço é fechado com relação à norma de H_1 , segue-se que $u - f \in H_1^0$. 3º. Desde que $D(\varphi)$ é dominada por $\|\varphi\|_1^2$, segue-se que φ_k convergir para u na norma de H_1 implica

$$D(\varphi_k) \longrightarrow D(u) \quad \text{e portanto} \quad D(u) = d .$$

Encerraremos êste parágrafo estudando a questão dos valores de contôrno. No estudo que acabamos de fazer do problema variacional generalizado as funções eram dadas em Ω somente (nada em Γ) e a solução era procurada como uma função definida em Ω somente (não em $\bar{\Omega}$). Este, porém, não é o problema clássico de Dirichlet. Atacaremos, agora, êsse problema usando, porém, a função u construída acima. Será mostrado que se a função dada f é contínua em $\bar{\Omega}$ e Ω satisfaz certas condições, então a função u se estende a Γ e é igual a f aí. Exatamente, temos:

Teorema 3.10 - Seja Ω uma região no plano gozando da seguinte propriedade: para cada ponto x^0 de Γ existe um número $R > 0$ tal que todo círculo de raio menor que R e centrado em x^0 intercepta Γ . Então, dada $f(x)$ contínua em $\bar{\Omega}$ e pertencente a H_1 , a função $u(x)$ acima determinada é tal que

$$u(x) \longrightarrow f(x^0) \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow x^0 .$$

A demonstração dêsse teorema pode ser encontrada no livro de Epstein, página 196.

§ 4. Observações Finais

O princípio de Dirichlet para tratamento do problema de Dirichlet teve as mais profundas implicações em todo o desenvolvimento posterior das questões de existência de soluções para problemas de contôrno das equações elípticas. Observou-se que a função minimizante u do parágrafo anterior podia ser considerada como

uma projeção sôbre certo espaço. Isso deu surgimento ao método de projeção ortogonal. Recomendamos nessa direção os artigos de Weyl [1], Lax [1] e Brelot [2]. Com isso entraram em cena métodos de análise funcional que resultaram adequados para o tratamento de outros problemas de contôrno para equações mais gerais que a de Laplace.

A ideia de usar um teorema de projeção em espaço de Hilbert é de certo modo equivalente a teoremas de representação de funcionais lineares limitados. O conceito de solução fraca surgiu de modo natural como uma espécie de pré-solução do problema. Consulte Friedrichs [1].

Em se tratando de ter uma limitação dos funcionais desenvolveu-se um intenso estudo de desigualdades. Ressaltamos o trabalho de Gôrding [1] que abriu o estudo do problema de Dirichlet para equações elípticas de ordem superior. Recomendamos os artigos de Lax [2], Nirenberg [1], [2]. Um bom trabalho expositório sôbre o problema de Dirichlet para equações elípticas é a apostila de Douglis, citada na bibliografia.

Problemas mais gerais de contôrno para equações elípticas são tratados em Schechter [1], [2], Agmon-Douglis-Nirenberg [1], por exemplo. Uma boa referência é a apostila de Peetre [1] citada na bibliografia.

As chamadas desigualdades "a priori" foram desenvolvidas, entre outros, por Aronszajn, Schechter e Agmon. A introdução do artigo [1] do autor do presente trabalho faz um apanhado dos resultados até aquela época.

Finalmente, os trabalhos mais indicados ao leitor interessado a prosseguir os estudos aqui iniciados são as apostilas de Peetre [2] e Douglis.

BIBLIOGRAFIA

Nota explicativa - A bibliografia divide-se em três partes: livros, apostilas e artigos. Citamos não só o material usado na preparação deste trabalho como também certos livros que julgamos serem de utilidade ao estudante. A bibliografia dos artigos procura orientar o estudante interessado em prosseguir os estudos.

A. Livros.

- Ahlfors - Complex Analysis - McGraw Hill (1953)
Courant - Dirichlet Principle - Interscience (1950)
Courant-Hilbert - Methods of Mathematical Physics (vols.I e II)
Interscience
Courant-Hilbert - Mathematische Physik - vol.II - Springer (1937)
Epstein - Partial Differential Equations - McGraw Hill (1962)
Fulks - Advanced Calculus
Kellogg - Foundations of Potential Theory - Dover (1953)
Kreyszig - Differential Geometry
Miranda - Equazioni Alle Derivate Parziali di tipo ellittico
Springer (1955)
Nevanlinna - Analytic Functions
Newmann - Topology of plane sets - Cambridge (1954)
Petrovsky - Partial Differential Equations - Interscience (1954)
Titchmarsh - Theory of functions - Oxford (1939)
Vasilesco - La Notion de Capacité - Hermann (1937)
Vasilesco - La Notion de Point Irrégulier - Hermann (1938)
Whitney - Geometric Integration Theory - Princeton

B. Apostilas

- Douglis - Dirichlet's problem for linear elliptic equations.
Lecture Series nº 35 (Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics).
John - Partial Differential Equations - New York University
Lax - Partial Differential Equations - New York University

- Peetre [1] - Elliptic Partial Differential of Higher Order -
Lecture Series nº 40 (Inst. for Fluid Dynamics...).
- Peetre [2] - Introduction to partial differential equations - Uni-
versidade de Brasília.

C. Artigos

Para o capítulo III:

- Wiener - Journal of Mathematics and Physics (1924) - 2 artigos.
- Kellogg - Proceedings of the National Academy of Science (1926)
- Kellogg - Bulletin of the A.M.S. (1926) p. 601.
- Brelot [1] - Annales de l'Institut Fourier (1952) p. 113, onde
se encontra uma completa bibliografia.

Para o capítulo V:

- Agmon - Journal d'Analyse (1958) p.183
- Agmon - Douglis - Nirenberg - Communications Pure and Applied Math.
(1959)
- Aronszajn - Technical Report (University of Kansas) (1954)
- Brelot [2] - Annales de l'Institut Fourier, tome V (1953-1954)
- Figueiredo - Communications Pure and Applied Math. (1963)
- Friedrichs - Transactions of the A.M.S. (1944) p. 132
- Gårding - Mathematica Scandinavica (1953) p. 55
- Lax [1] - Communications Pure and Applied Math. (1951) p.457
- Lax [2] - Communications Pure and Applied Math. (1955) p.615
- Nirenberg [1] - Communications Pure and Applied Math. (1955) p.649
- Nirenberg [2] - Annali della Scuola Norm.Sup.di Pisa (1959)
- Schechter [1] - Communications Pure and Applied Math. (1959)
3 artigos: p.37, p. 457, p.561.
- Schechter [2] - Annals of Mathematics (1960) p. 581
- Weyl [1] - Duke Math. Journal (1940)