

TEXTOS DE MATEMÁTICA
COLEÇÃO PUBLICADA SOB A DIREÇÃO DE
A. PEREIRA GOMES

N.º 12

GEOMETRIA DIFERENCIAL LOCAL

P O R

MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

4º Colóquio Brasileiro de Matemática - 1963

Poços de Caldas

INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE DO RECIFE

1963

Trabalho mimeográfico
de
FERNANDO FIGUEIREDO
Rua Pe. Gabriel Mousinho n.º 47
Transv. à Estrada dos Remédios
Madalena

À Terezinha,
pelo tempo concedido.

- APRESENTAÇÃO -

Essas notas constituem um esquema para a parte básica do Curso de Geometria Diferencial, que está sendo dado no 3º ano da Faculdade de Filosofia da Universidade do Recife, e foram preparadas para o IV Colóquio Brasileiro de Matemática.

O autor adota o ponto de vista de que a Geometria Diferencial Clássica se caracteriza pelo estudo das propriedades locais, em oposição às propriedades globais, que constitui a parte mais interessante dos trabalhos dos últimos anos. Nessas notas, procuramos apresentar aquelas propriedades locais que são consideradas essenciais a um posterior estudo da Geometria Diferencial Global.

Os prerequisites à leitura dessas notas são um Curso de Cálculo (o teorema das implícitas é particularmente importante), noções de Álgebra Linear e de Equações Diferenciais (essencialmente, o enunciado do teorema de existência, unicidade, e dependência das condições iniciais, para as equações ordinárias). Para facilitar a consulta, referimo-nos sistematicamente aos seguintes livros:

- 1) - R. Courant - Differential and Integral Calculus, vols. I e II, 2nd edition, Blackie and Son, 1937 (citado como Courant)

- 2) - Gelfand - Lectures on Linear Algebra, Interscience, 1962, (citado como Gelfand)
- 3) - Pontryagin - Ordinary Differential Equations, Addison Wesley, 1962 (citado como Pontryagin).

Numerosos livros e pessoas influenciaram a exposição dessas notas, e é impossível dar crédito a todos. Em particular, o material do Cap. V encontra-se em Pogorelov, Differential Geometry, P. Noordhoff, e a introdução da diferencial da aplicação normal para definir a segunda forma quadrática foi feita em um curso dado no I.M.P.A. pelo Prof. Elon Lima.

Nossos agradecimentos ao Prof. A. Pereira Gomes pela inclusão dessas notas nos "TEXTOS DE MATEMÁTICA".

Recife, junho de 1963

Manfredo Perdigão do Carmo

CAPÍTULO I

PRELIMINARES SOBRE CURVAS

Estes preliminares contêm os conceitos e propriedades de curvas, que utilizaremos no estudo das superfícies. O tratamento é esquemático, e visa essencialmente servir de referência aos capítulos seguintes. A demonstração do teorema fundamental pode ser omitida em uma primeira leitura.

Por R^3 denotaremos o espaço euclidiano usual, no qual se fixou uma origem O ; as coordenadas de um ponto de R^3 serão denotadas por (x,y,z) e, quando conveniente, pensaremos nesse ponto como um vetor de origem O e extremidade (x,y,z) .

Por R indicaremos a reta real, na qual foi fixada uma origem O ; a abscissa de um ponto de R em relação a O é indicada, salvo menção em contrário, por t . Por I ou J denotaremos um intervalo aberto de R ; não se exclue o caso $I = R$.

Uma aplicação $X:I \rightarrow R^3$ é dita contínua, se escrevendo $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ então as funções reais $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são contínuas. Uma aplicação contínua, biunívoca, cuja inversa é ainda contínua é chama-

da um homeomorfismo.

Definição 1 - Um subconjunto C de \mathbb{R}^3 é uma curva local regular, se existir um homeomorfismo $X: I \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3$ de I sobre C satisfazendo às condições:

- 1) X é diferenciável, isto é, se $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, as funções $x(t), y(t), z(t)$ admitem derivadas de tôdas as ordens para todo $t \in I$.
- 2) (condição de regularidade) X tem característica 1, isto é, as derivadas $x'(t), y'(t), z'(t)$ não são simultaneamente nulas para valor algum de $t \in I$.

A aplicação X é chamada uma parametrização de

C .

Exemplo 1 - A hélice cilíndrica $x = a \cos t$,
 $y = a \sin t$, $z = bt$, $-\infty < t < +\infty$,
é uma curva local (fig.1).

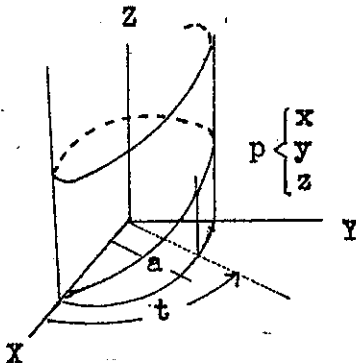


Fig. 1

Exemplo 2 - A circunferência de raio r , me
 nos um ponto, $x = r \cos t$,
 $y = r \sin t$, $0 < t < 2\pi$, (fig. 2) é uma curva local. A
 circunferência inteira não é uma curva local, pois não é
 homeomorfa a um intervalo aberto da reta.

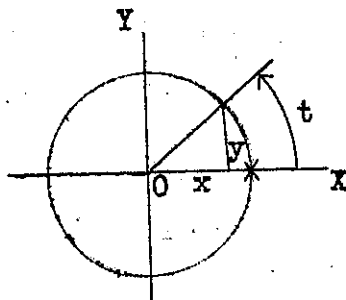


Fig. 2

Exemplo 3 - Considere a curva "valor absolu
 to", dada por $x = t$, $y = |t|$,
 $-1 < t < 1$, (fig. 3). Com a parametrização dada não é pos-
 sível saber se o subconjunto da figura é ou não uma cur-
 va local; com efeito, falta a condição (1), pois $y'(t)$
 não é contínua para $t = 0$. Isso não quer dizer, entre-
 tanto, que não possa haver outra parametrização, satisfa

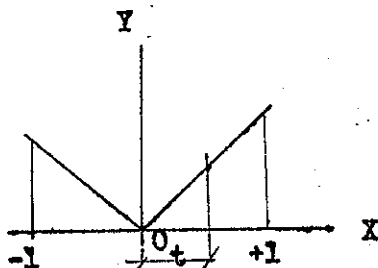


Fig. 3

zendo às condições da definição 1 (V.exemplo 5). Mostraremos adiante, que o significado geométrico da condição de regularidade é assegurar a existência de uma reta tangente para todos os pontos da curva; isso significa que a curva "valor absoluto" não é uma curva local regular.

Exemplo 4 - A curva $x = t^3$, $y = t^2$, $-\infty < t < +\infty$ (fig. 4) é tal

que $x'(0) = y'(0) = 0$, e portanto, falha a condição (2). Levando em conta as observações do exemplo anterior, o leitor se convencerá que essa curva não é uma curva local regular.

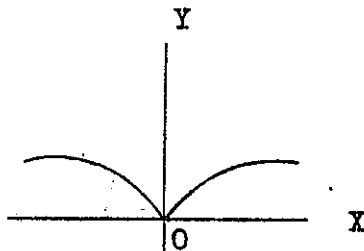


Fig. 4

Exemplo 5 - Se tomarmos a curva dada por $x = t^2$, $y = t^6$, $-\infty < t < +\infty$,

(vêr fig. 5) vemos que $x'(0) = y'(0) = 0$, e portanto a condição (2) não é satisfeita. Entretanto o mesmo conjunto da figura pode ser parametrizado por

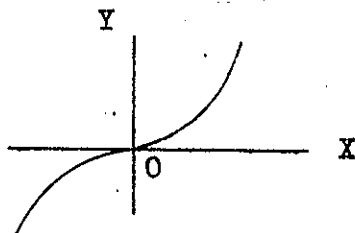


Fig. 5

$x = t$, $y = t^3$, o que mostra que êle constitue uma curva local regular.

Exemplo 6 - Considero a curva em forma de $8 \sin$

terrompido constituída por uma circunferência e uma semi circunferência tangentes (vêr fig. 6), e percorrida no sentido 1,2,3, 4 da figura. Utilizando o parâmetro t indicado na figura, e fazendo t variar de $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{5\pi}{4}$, a curva será representada pelas equações:

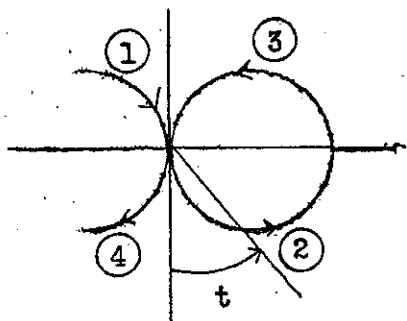


Fig. 6

$$\begin{cases} x = -1 + \cos 2t \\ y = -\sin 2t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{4} < t \leq 0,$$

$$\begin{cases} x = 1 - \cos 2t \\ y = -\sin 2t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\begin{cases} x = -1 + \cos 2t \\ y = -\sin 2t \end{cases}, \quad \pi \leq t < \frac{5\pi}{4},$$

em que no primeiro par de equação, o ponto percorre a parte da curva indicada na figura por 1, no segundo, as partes 2 e 3, e no último a parte 4. A parametrização dada satisfaz a todas as condições de definição 1, exceto de ser um homeomorfismo, porque os pontos $t = 0$ e $t = \pi$ vão em um mesmo ponto de \mathbb{R}^3 . A curva dada, portanto, não é uma curva local regular.

Uma curva local regular C pode ter várias parametrizações. É fácil vêr que se $Y:J \rightarrow C$ é uma parametrização de C e $h:I \rightarrow J$ admite derivada $h'(t)$, contínua e diferente de zero para todo $t \in I$, então a aplicação composta $X = Y \circ h:I \rightarrow C$ é ainda uma parametrização de C .

Dadas duas parametrizações de C , $X:I \rightarrow C$, $Y:J \rightarrow C$, a aplicação composta $h = Y^{-1} \circ X:I \rightarrow J$ é chamada uma mudança de parâmetro.

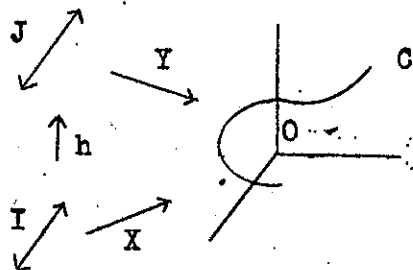


Fig. 7

Proposição 1 - Se $h:I \rightarrow J$ é uma mudança de parâmetro, então $h=h(t)$ admite derivada contínua

$h'(t)$ diferente de zero para todo $t \in I$.

A demonstração dessa proposição é análoga a da proposição 5 do próximo capítulo. Dado o caráter esquemático desses preliminares, omitiremos a demonstração.

Observação - Estritamente falando, uma curva local regular é um conjunto de pontos e uma parametrização. A proposição 1 e as considerações que a precedem, mostram que dadas duas parametrizações, é possível obter tôdas as outras, por meio de funções de intervalos abertos, com derivadas contínuas e não nulas. Em outras palavras, podemos considerar tôdas as parametrizações de C como equivalentes e pensar no

conjunto C como essa classe de parametrizações.

No tratamento de superfícies, precisaremos usar o conceito de curva parametrizada local, que é definida como aquela que satisfaz à definição 1, omitida a condição de regularidade. A proposição 1, que faz uso essencial da condição de regularidade, não vale para essa classe de curvas. Uma curva parametrizada local é portanto um conjunto de pontos e uma parametrização; o mesmo conjunto de pontos com parametrizações distintas é considerado como representando curvas distintas.

Por economia de linguagem, omitiremos de agora por diante o adjetivo local, e diremos simplesmente uma curva regular ou uma curva parametrizada. Quando não houver possibilidade de confusão, diremos simplesmente curvas no lugar de curvas regulares.

As propriedades de uma curva regular C , que não dependem da parametrização, terão certamente uma interpretação geométrica em termos do conjunto C . Por exemplo, o módulo e o sentido do vetor tangente

$(x'(t), y'(t), z'(t)) = X'(t)$ depende da parametrização $X(t)$; entretanto a direção desse vetor tangente é independente da parametrização. Com efeito, para uma mudança de parâmetro $s = h(t)$, temos

$$\pm \frac{X'(t)}{|X'(t)|} = \pm \frac{X'(s) s'(t)}{|X'(s)| |s'(t)|} = \pm \frac{X'(s)}{|X'(s)|}$$

A reta que passa por um ponto p da curva C ,

e tem a direção do vetor tangente a C em p é chamada reta tangente à curva. O significado geométrico é óbvio.

Se em uma mudança de parâmetro $S = h(t)$ de uma curva regular C tivermos $h'(t) > 0$ para algum t , então $h'(t) > 0$ para todo t , uma vez que $h'(t)$ é uma função contínua que não se anula. Diremos, nesse caso, que os parâmetros S e t definem a mesma orientação de C . É fácil de vêr que essa é uma relação de equivalência, e que há apenas duas orientações possíveis, isto é, duas classes nessa relação de equivalência. Quando se faz a escolha de uma orientação para C , diz-se que a curva C está orientada; a outra orientação é chamada oposta. Às vezes será conveniente considerar propriedades que dependem não só do conjunto C mas também de uma orientação escolhida.

Fixando um $t_0 \in I$, a integral $\sigma(t) =$

$$= \left| \int_{t_0}^t |X'(t)| dt \right| \quad \text{não depende da parametrização } X(t).$$

Com efeito, seja $t = h(\tau)$ uma mudança de parâmetro; fazendo a mudança de variável na integral considerada, e sendo $t_0 = h(\tau_0)$, teremos

$$\left| \int_{t_0}^t |X'(t)| dt \right| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} |X'(h(\tau))| \frac{dh}{d\tau} d\tau \right| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} |X'(\tau)| d\tau \right|,$$

o que prova a afirmação feita. O significado geométrico

da integral $\sigma(t)$ é que ela mede o comprimento de arco da curva C entre t_0 e t , definido como o supremo das poligonais inscritas em C ; uma demonstração desse resultado se encontra em Courant, vol I, pg 276 e seguintes.

Por meio de $\sigma(t)$, definiremos uma função $s = s(t)$ chamada comprimento de arco (a partir de t_0): $s(t) = \sigma(t)$ se $t > t_0$, $s(t) = -\sigma(t)$ se $t < t_0$. É claro que $s = s(t)$ é uma função contínua, diferenciável e $s'(t) \neq 0$. Decorre daí que podemos parametrizar a curva pelo comprimento de arco s . A definição de s corresponde a uma escolha de orientação, precisamente a dada pelo parâmetro t ; definindo $s(t) = -\sigma(t)$, para $t > t_0$ e $s(t) = \sigma(t)$, para $t < t_0$, teremos a orientação oposta. Portanto, a parametrização de uma curva pelo comprimento de arco, depende apenas do conjunto C e da escolha de uma orientação para C . Os conceitos e propriedades obtidas em termos dessa representação serão intrínsecas à curva orientada C .

No que se segue, a parametrização de uma curva orientada pelo comprimento de arco, $X = X(s)$, será usada sistematicamente. Observe-se que nessa parametrização, o vetor tangente $X'(s)$ tem módulo unitário, pois

$$|X'(s)| = |X'(t)| \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1.$$

Como o vetor $X'(s)$ é unitário, o módulo de sua derivada $|X''(s)|$ em um ponto, mede a derivada do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente no ponto dado, e dá portanto uma indicação de quão rapidamente a curva se afasta da reta tangente em uma vizinhança do ponto.

Definição 2-Dada uma curva regular orientado C , parametrizada pelo comprimento de arco $X = X(s)$, chama-se curvatura k em um ponto de C ao valor de $|X''(s)|$ no ponto considerado.

A curvatura k é sempre positiva e, como é fácil vêr, não depende da orientação adotada. Para uma reta, a curvatura é idênticamente nula. Reciprocamente, se a curvatura é idênticamente nula, então $X''(s) = 0$, donde $X(s) = As + C$, com A e C vetores constantes, e a curva é uma reta.

Nos pontos onde $k \neq 0$, o vetor $X''(s)$ é bem definido e normal a $X'(s)$; o vetor unitário de $X''(s)$, isto é, o vetor n definido pela equação $X''(s) = kn$ é chamado normal principal à curva no ponto considerado. O plano determinado pelos vetores $X'(s)$ e n é chamado plano osculador à curva. Quando a curva é plana, o plano osculador coincide com o plano da curva.

No que se segue, suporemos a curvatura $k \neq 0$. Como não mais usaremos o parâmetro t , podemos denotar o vetor tangente unitário $X'(s)$ por t .

O vetor $b = t \wedge n$, onde \wedge indica o produto

vetorial, é normal ao plano osculador e chamado binormal a curva. Como b é unitário, a derivada $b'(s)$ é essencialmente a derivada do ângulo do plano osculador no ponto com os planos osculadores vizinhos, e dá portanto uma medida de quanto a curva se afasta do plano osculador em uma vizinhança do ponto.

Para precisar a medida desse afastamento, observemos que de um lado $b'(s)$ é normal a b , e portanto contido no plano t, n ; por outro lado $b'(s) = t'(s) \wedge n + t \wedge n'(s) = t \wedge n'(s)$, e portanto $b'(s)$ é normal a t . Decorre que $b'(s)$ é paralelo a n .

Definição 3—Dada uma curva regular orientada C , parametrizada pelo comprimento de arco $X = X(s)$, chama-se torsão τ em um ponto C ao número definido por $b'(s) = \tau n$.

Observação — A torsão não depende da orientação da curva. Diferentemente da curvatura a torsão pode ser positiva ou negativa.

Para as curvas planas, a torsão é evidentemente nula. Reciprocamente, se a torsão é idênticamente nula, então $b'(s) = 0$ e $b = b_0$ é um vetor constante. Como $X'(s) \cdot b_0 = 0$, onde o ponto indica produto escalar, temos $X(s) \cdot b = \text{const.}$, e a curva $X(s)$ é plana. O significado intuitivo da torsão é indicar o quanto a curva se afasta de ser uma curva plana.

É conveniente, para uso futuro, obter uma expressão explícita para a torsão em termos da representa-

ção paramétrica $X = X(s)$. Por definição $\tau = b'(s) \cdot n = t \wedge n'(s) \cdot n$. Porém

$$n'(s) = \left(\frac{1}{k} X''(s) \right)' = \frac{1}{k} X'''(s) - \frac{k'(s)}{k^2} X''(s),$$

e então,

$$\tau = t \wedge \left(\frac{1}{k} X'''(s) \right) \cdot n = - \frac{X'(s) \wedge X''(s) \cdot X'''(s)}{k^2},$$

que é a expressão procurada.

A cada ponto de uma curva regular orientada C , associamos intrinsecamente três vetores unitários e ortogonais, t, n, b . O

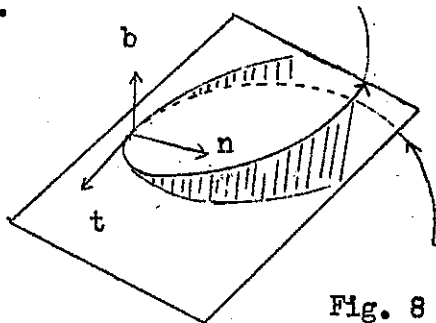


Fig. 8

triedro assim constitui

o chamado triedro de Frenet (vêr fig. 8). As derivadas $t'(s) = kn$ e $b'(s) = \tau n$, expressas nesse triedro, fornecem entidades geométricas, curvatura e torsão, que são em geral independentes, e informam sobre o comportamento da curva na vizinhança do ponto. A procura de outros entes geométricos locais nos levaria a calcular $n'(s)$. Entretanto, como $n = b \wedge t$, teremos

$$n'(s) = b'(s) \wedge t + b \wedge t'(s) = \tau n \wedge t + k b \wedge n = -\tau b - kt,$$

e não obteríamos nada além da curvatura e torsão já conhecidas.

Para uso posterior, vamos destacar as equa -

ções que dão as derivadas dos vetores t, n, b , referidas a esse triedro:

$$\begin{aligned} t'(s) &= kn, \\ n'(s) &= -kt - \tau b, \\ b'(s) &= \tau n, \end{aligned}$$

e chama-las de fórmulas de Frenet.

Refletindo um pouco sobre a construção de uma curva a partir de uma reta, por curvatura (afastamento da reta), e torsão (afastamento do plano), somos levados a conjecturar que, dadas a curvatura (não nula) e a torsão, como função do comprimento do arco, é possível reconstruir toda a curva. Se isso for verdade, qualquer tentativa, como a acima, de obter novos entes geométricos independentes, será inútil e desnecessária. Em outras palavras, demonstrada essa conjectura, a teoria geral das curvas locais fica encerrada, no sentido de que o comprimento de arco, a curvatura e a torsão são suficientes para descrever o comportamento local das curvas.

A formulação correta do fato acima mencionado constitui o

Teorema fundamental da teoria local das curvas.

Se forem dadas funções diferenciáveis $k(s), \tau(s), s \in I$, com $k(s) > 0$, então para todo $s_0 \in I$, existe um intervalo aberto J , contendo s_0 , e uma curva local regular dada por $X: J \rightarrow R^3$, tal que $|s - s_0|$ é o comprimento de arco de $X(s)$ a partir de $X(s_0)$ e a curvatura e torsão de $X(s)$ são dadas por $k(s)$ e $\tau(s)$, respectiva-

mente. Ademais, a menos de sua posição no espaço, essa curva é única.

Observação - Dois subconjuntos de R^3 são idênticas a menos de sua posição no espaço se é possível fazê-los coincidir por translações, rotações, simetrias, ou combinações destas.

Demonstração - Considere o sistema de equações diferenciais

$$(1) \begin{cases} \xi'(s) = k(s) \eta, \\ \eta'(s) = -k(s) \xi - \tau(s) \beta, \\ \beta'(s) = \tau(s) \eta, \end{cases}$$

onde $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$, $\beta = \beta(s)$, $s \in I$ são funções vetoriais desconhecidas. Seja $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ a solução desse sistema em um intervalo J' contendo s_0 e tal que os vetores iniciais dados, $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$, sejam unitárias, ortogonais dois a dois, e $t_0 \wedge n_0 \cdot b_0 = 1$. A existência e unicidade de uma tal solução é afirmada pelo teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias (Pontryagin, pg. 20).

Vamos mostrar que os vetores $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ são unitários e ortogonais para todo $s \in J'$.

Com efeito, a partir do sistema (1), obtemos o sistema (2)

$$(2) \begin{cases} (\xi^2)' = 2k(\eta \cdot \xi); & (\eta^2)' = -k(\xi \cdot \eta) - \tau(\beta \cdot \eta); & (\beta^2)' = 2\tau(\eta \cdot \beta) \\ (\xi \cdot \eta)' = k\eta^2 - k\xi^2 - \tau(\xi \cdot \beta); & (\beta \cdot \xi)' = k(\beta \cdot \eta) + \tau(\xi \cdot \eta) \\ (\eta \cdot \beta)' = \tau\eta^2 - \tau\beta^2 - k(\beta \cdot \xi), \end{cases}$$

onde $\xi^2, \eta^2, \beta^2, \xi \cdot \eta, \eta \cdot \beta, \xi \cdot \beta$, são funções desconhecidas de s .

As funções constantes $\xi^2 = \eta^2 = \beta^2 = 1$, $\xi \cdot \eta = \eta \cdot \beta = \xi \cdot \beta = 0$ são, como é imediato verificar, uma solução do sistema (2). Por outro lado, as funções $(t(s))^2, (n(s))^2, (b(s))^2, t(s) \cdot b(s), n(s) \cdot b(s), t(s) \cdot n(s)$, obtidas a partir da solução do sistema (1), formam uma segunda solução para o sistema (2). Como essas duas soluções de (2) coincidem para $s = s_0$ temos, pelo teorema de unicidade citado, que elas devem coincidir para todo $s \in J'$. Decorre que os vetores $t(s), n(s), b(s)$ são unitários e ortogonais, para todo $s \in J'$ o que prova a afirmação feita.

Ademais, como $t \wedge n \cdot b = \pm 1$ é uma função contínua de s , teremos $t \wedge n \cdot b = 1$, para todo s .

Seja agora a aplicação $X: J' \rightarrow R^3$, definida pela integral $X(s) = \int_{s_0}^s t(s) ds$, onde por integral de uma

função vetorial entendemos o vetor cujas componentes são, respectivamente, as integrais das funções componentes. A função $X(s)$ é contínua, diferenciável e $|X'(s)| = |t(s)| = 1$. A condição

$$|X'(s)| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \neq 0$$

mostra que em um certo intervalo J contendo s_0 , uma das derivadas, digamos $z'(s)$, é diferente de zero; então $z = z(s)$ pode ser invertida em J , fornecendo uma

função diferenciável $s = \varphi(z)$. Decorre daí que restringindo $X(s)$ ao intervalo J , a aplicação $X: J \rightarrow R^3$ é biunívoca, e a inversa $X^{-1} = \varphi \circ \pi$, onde π é a projeção de R^3 sôbre o eixo Oz , é contínua. Portanto $X: J \rightarrow R^3$ é uma curva local regular.

Vamos mostrar que essa curva satisfaz às condições do teorema. Com efeito, o comprimento de arco σ do segmento entre s_0 e s é dado por

$$\sigma = \left| \int_{s_0}^s |X'(s)| ds \right| = |s - s_0| .$$

A curvatura de $X(s)$ é dada por

$$|X''(s)| = |t'(s)| = k(s)$$

Finalmente, a torsão é dada por

$$- \frac{X'(s) \wedge X''(s) \cdot X'''(s)}{k^2} = - \frac{t \wedge kn \cdot (k'n + kn')}{k^2} =$$

$$= - t \wedge n \cdot n' = - t \wedge n(-kt - \tau b) = \tau t \wedge n \cdot b = \tau ,$$

o que termina a primeira parte do teorema.

Para mostrar que a curva $X(s)$ é única a menos de posição, imaginemos outra curva $\bar{X}(s) : J \rightarrow R^3$, satisfazendo às condições do Teorema, isto é, com curvatura $k(s)$, torsão $\tau(s)$ e comprimento de arco $s-s_0$, a partir de $\bar{X}(s_0)$.

Por uma translação em \mathbb{R}^3 , é possível trans-
 portar $\bar{X}(s)$ de tal modo que $\bar{X}(s_0) = X(s_0)$. Depois, por
 uma rotação em torno desse ponto comum, levemos os tri-
 edros de Frenet de $X(s)$ e $\bar{X}(s)$, nesse ponto, a coin-
 cidirem, isto é, $t_0 = \bar{t}_0$, $n_0 = \bar{n}_0$, $b_0 = \bar{b}_0$. Ora, co-
 mo $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ e $\bar{t}(s)$, $\bar{n}(s)$, $\bar{b}(s)$ satisfazem às
 equações de Frenet, são soluções do sistema (1), que
 coincidem para $s_0 = s_0$, pelo Teorema de unicidade,
 $t(s) = \bar{t}(s)$, $n(s) = \bar{n}(s)$, $b(s) = \bar{b}(s)$. Integrando $X'(s) =$
 $= \bar{X}'(s)$, e levando em conta que $X(s_0) = \bar{X}(s_0)$, obte-
 mos $X(s) = \bar{X}(s)$. Portanto, as duas curvas diferem por
 uma translação e uma rotação, o que termina a demonstra-
 ção do teorema.

- o -

SUPERFÍCIES LOCAIS REGULARES; PRIMEIRA
FORMA QUADRÁTICA.

1 . Notação.

Indicaremos por R^2 o plano euclideo, no qual se fixou um sistema de coordenadas; um ponto de R^2 será indicado por suas coordenadas (u,v) . R^3 terá o mesmo significado do capítulo I.

Uma vizinhança de um ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ em R^3 é uma esfera aberta centrada em p_0 , isto é, o conjunto dos pontos (x,y,z) de R^3 , satisfazendo:
 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \text{const.}$ Anàlogamente uma vizinhança de (u_0, v_0) em R^2 é um círculo aberto, centrado em (u_0, v_0) . Um subconjunto A de R^2 (ou R^3) é dito aberto se, para todo ponto de A , se pode encontrar uma vizinhança dêsse ponto, em R^2 (ou R^3), contida em A .

Uma aplicação $f:A \rightarrow R^3$ (ou $f:A \rightarrow R^2$), onde A é um aberto de R^2 , é dito contínua se, para tãda vizinhança V de $f(p)$, $p \in A$, existe uma vizinhança U de p , tal que $f(U) \subset V$. Se utilizarmos coordenadas para representar, por exemplo, $f:A \rightarrow R^3$, por

$$x = x(u,v) , \quad y = y(u,v) , \quad z = z(u,v) ,$$

então f é contínua se e só se as funções $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ são contínuas. Uma aplicação $f:A \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou $f:A \rightarrow \mathbb{R}^2$) que é contínua, biunívoca, e cuja inversa é ainda contínua é chamada um homeomorfismo; nêsse caso, os conjuntos A e $f(A)$ são ditos homeomorfos.

2 . Superfícies locais regulares.

Definição 1 - Um subconjunto S de \mathbb{R}^3 é chamado uma superfície local regular, se existir um homeomorfismo $X:A \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, onde A é um aberto de \mathbb{R}^2 homeomorfo a um círculo, satisfazendo às condições:

1) X é diferenciável, isto é, representando X por $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, então as funções $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ admitem derivadas parciais contínuas de tôdas as ordens.

2) (Condição de regularidade). X tem característica 2; isto é, os determinantes jacobinas

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} , \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

não se anulam simultaneamente para ponto algum de A .

A aplicação X será chamada uma parametriza -

ção (ou sistemas de coordenadas) de S .

Uma interpretação da condição de regularidade é a seguinte: Seja $X = X(u,v)$, $X:A \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma parametrização de uma superfície local regular S . Seja (u_0, v_0) um ponto de A , e U uma vizinhança de (u_0, v_0) em \mathbb{R}^2 , contida em A . A interseção de $u = u_0$ com U é homeomorfa a um intervalo aberto; a imagem dessa interseção por X é, pela condição de regularidade, uma curva local regular, contida em S e passando por $X(u_0, v_0)$. Procedendo análogamente com $v = v_0$, vemos que cada ponto de S tem uma vizinhança coberta por duas famílias de curvas locais regulares, imagens por X de $u = \text{const}$, $v = \text{const}$; essas curvas são chamadas curvas coordenadas da parametrização (vêr fig. 1). O vetor tangente à cur-

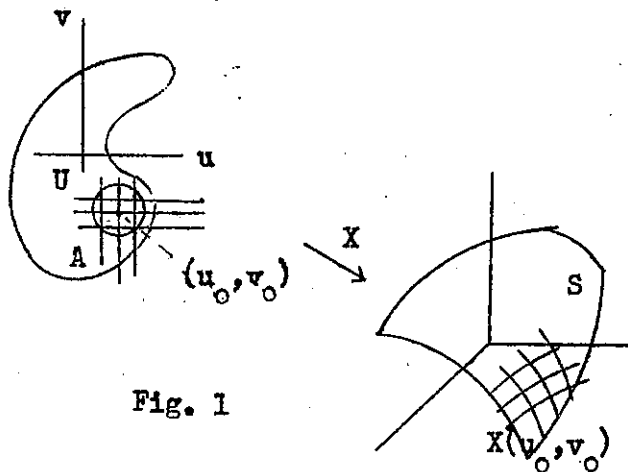


Fig. 1

va coordenada $X(\text{const}, v)$ tem componentes $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, e será indicado por X_v ; análogamente X_u indi-

ca o vetor tangente à curva coordenada $X(u, \text{const})$. Com essa notação, os determinantes jacobianos da condição (2) são precisamente as componentes do produto vetorial $X_u \wedge X_v$. A condição de regularidade (2) é então equivalente ao fato de que $X_u \wedge X_v \neq 0$, isto é, as curvas coordenadas se cortam segundo um ângulo não nulo.

As proposições 1 e 2 abaixo, mostram a relação que existe entre o conceito de superfície local regular e as superfícies usualmente encontradas nos cursos de Cálculo e Geometria. Em particular, essas proposições nos permitirão exibir um grande número de exemplos de superfícies locais.

Proposição 1 - Se $f(x,y) = z$, $f:A \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função diferenciável definida em um aberto A de \mathbb{R}^2 , homeomorfo a um círculo, então o gráfico de f em \mathbb{R}^3 , isto é, o conjunto dos pontos $(x,y,f(x,y))$, é uma superfície local.

Demonstração - Basta mostrar que $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$, é uma parametrização do gráfico. A condição (2) é verificada, porque o jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ nunca é nulo. A verificação das outras condições é imediata.

Proposição 2 - Seja $\varphi(x,y,z)$, $\varphi:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável, com característica 1, isto é, não se anulam simultaneamente as derivadas parciais φ_x , φ_y , φ_z . Seja S o subconjunto dos pontos (x,y,z) de \mathbb{R}^3 satisfazendo a

condição $\varphi(x,y,z) = 0$. Então para cada ponto $s \in S$, existe uma vizinhança V de s em R^3 , tal que a interseção $V \cap S$ é uma superfície local.

Demonstração - Seja (x_0, y_0, z_0) um ponto de S . Como $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, não se

anulam simultaneamente, podemos supor, renumerando os eixos se necessário, que $\varphi_3 \neq 0$ em (x_0, y_0, z_0) . O teorema das funções implícitas (Courant, vol. II, p. 117) afirma então a existência de uma vizinhança V de (x_0, y_0, z_0) e de

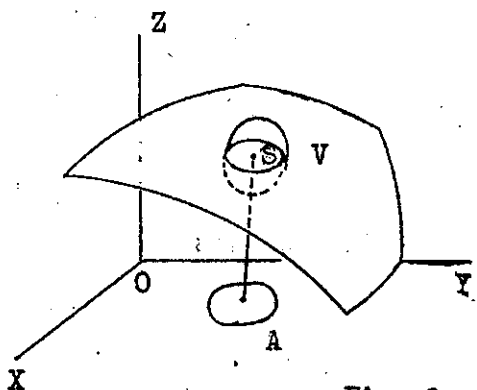


Fig. 2

uma função diferenciável $z = \theta(x,y)$, definida na projeção A dessa vizinhança sobre o plano $X O Y$, e tal que $(x,y,\theta(x,y)) = 0$ em A . Isso significa que $V \cap S$ é o gráfico em R^3 da função diferenciável $z = \theta(x,y)$, definida no círculo aberto A (ver fig. 2), o que, junto com a Proposição 1, termina a demonstração.

Observação - De agora por diante, chamaremos de vizinhança de um ponto s de uma superfície local regular S , a interseção de S com uma vizinhança em R^3 do ponto s .

Exemplo 1 - Cada ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ possui, de acordo com a

Proposição 2, uma vizinhança que é uma superfície local regular.

Exemplo 2 - Cada ponto do cilindro $x^2 + y^2 - 1 = 0$ possui, de acordo com a Proposição 2, uma vizinhança que é uma superfície local regular.

Exemplo 3 - Cada ponto do cone de duas folhas, com vértice na origem, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, exceto o vértice, tem uma vizinhança que é uma superfície local regular. No vértice $(0,0,0)$ não é possível aplicar a pro-

posição 2, porque todas as derivadas parciais aí se anulam. Isso não nos permite afirmar que o vértice não possui vizinhança alguma que seja uma superfície local regular. Entretanto, uma observação direta, mostra que a interseção do cone com qualquer esfera aberta centra-

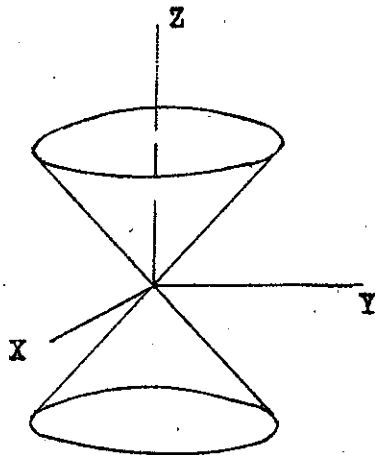


Fig. 3

da no vértice não pode ser sequer homeomorfa a um círculo aberto do plano (ver fig. 3).

Poderíamos tentar superar esse inconveniente, considerando só uma folha do cone, que é dado pela equação $\varphi(x,y,z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, onde convencionamos

mos que a raiz é sempre tomada positiva. Mais uma vez a Proposição 2 não é aplicável, pois φ_y e φ_x não são contínuas no vértice, e, portanto, φ não é diferenciável. Mais tarde, mostraremos que o significado geométrico da condição de regularidade é que tôdas as curvas parametrizadas passando por um ponto de uma superfície local regular têm os seus vetores tangentes contidos em um mesmo plano; isso significa que o vértice de um cone de uma folha não tem vizinhança alguma que seja uma superfície local regular.

Exemplo 4 - O fato de um subconjunto S de R^3 , admitir uma parametrização em que falhe a condição de regularidade, não significa que S deixe de ser uma superfície local regular. Como exemplo dessa situação, consideremos a semi esfera (sem o bordo) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - 1$, onde $x^2 + y^2 < 1$, com a parametrização.

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = \sqrt{1 - \rho^2} - 1,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad -1 < \rho < 1,$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (\text{vêr fig. 4}).$$

É fácil verificar que as três jacobianas $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}$,

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\rho,\theta)}, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\rho,\theta)} \quad \text{são}$$

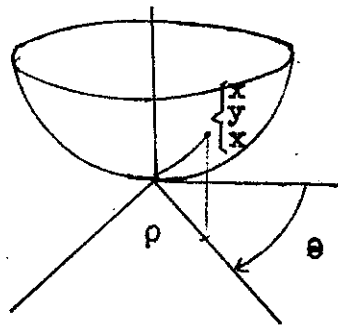


Fig. 4

nulas para $\rho = 0$. Entretanto, de acordo com a Proposição 1, a semi esfera $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - 1$ é uma superfície local regular.

Observação - A essa altura, o leitor se convencerá por si próprio que uma proposição análoga a Proposição 2 é válida para curvas planas. Mais precisamente, o lugar geométrico dos pontos $\varphi(u,v) = 0$, onde $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável e φ_u, φ_v não se anulam simultaneamente, tem, para cada ponto (u_0, v_0) , uma vizinhança de (u_0, v_0) que é uma curva local regular. Esse fato será usado posteriormente.

É usual definir superfície, como o lugar geométrico dos pontos que satisfazem equações paramétricas da forma $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ e que preenchem as condições (1) e (2) da definição 1, omitindo-se a condição de homeomorfismo. A proposição seguinte mostra a relação entre essa definição e o conceito de superfície local regular.

Proposição 3 - Seja $X: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação contínua de um aberto B de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , satisfazendo às condições (1) e (2) da definição 1. Então, para todo ponto $b \in B$, existe uma vizinhança V de b em \mathbb{R}^2 , e contida em B , tal que o conjunto $X(B)$, imagem por X de B , é uma superfície local regular.

Demonstração - Seja $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$,

$z = z(u, v)$ a representação de X em termos de coordenadas, e seja (u_0, v_0) um ponto de B . Como, por (2), os jacobinos $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, não se anulam simultaneamente, podemos supor, renumerando os eixos se necessário, que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ em (u_0, v_0) . Então o

teorema da função inversa (Courant, II, pg. 152) afirma a existência de vizinhanças, V de (u_0, v_0) e U de $(x_0 = \bar{x}(u_0, v_0), y_0 = \bar{y}(u_0, v_0))$, e de funções diferenciáveis $u = \theta(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ definidas em U , tais que $x = \bar{x}(\theta(x, y), \psi(x, y))$ e $y = \bar{y}(\theta(x, y), \psi(x, y))$, para todo ponto (x, y) de U . Então os pontos de $X(V)$ são dados pela função $z = z(\theta(x, y), \psi(x, y))$, que, como composta de funções diferenciáveis, é diferenciável em U . Dêsse modo, $X(V)$ é o gráfico de uma função diferen-

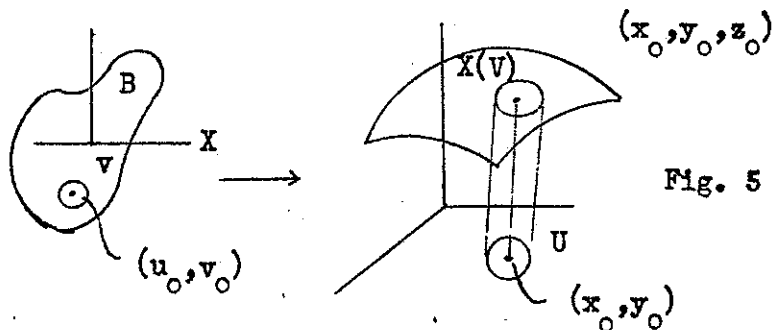


Fig. 5

ciável, o que junto com a Proposição 1, termina a demonstração.

Observação - Note que a Proposição 3 não afirma, como na Proposição 2, que cada ponto do conjunto $X(B)$ em R^3 tem uma vizinhança

que é uma superfície local regular. Em verdade, essa afirmação é falsa, como mostra o exemplo seguinte:

Exemplo 5 - Construindo um cilindro reto sobre a curva do exemplo do Capítulo I (vêr fig. 6), o que equivale a juntar às equações da curva a equação $z = v$, $-\infty < v < +\infty$, teremos uma aplicação de um aberto de \mathbb{R}^2

(domínio das coordenadas t e v) em \mathbb{R}^3 , que satisfaz às hipóteses da Proposição 3. A imagem do aberto em \mathbb{R}^3 , isto é, o cilindro assim construído, tem uma auto-interseção sobre o eixo OZ ; nenhum ponto

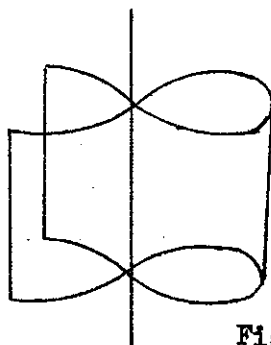


Fig. 6

do eixo possua uma vizinhança em \mathbb{R}^3 , cuja interseção com o cilindro seja uma superfície local.

Para representar uma superfície local regular S é necessário uma parametrização. A proposição seguinte mostra como construir várias parametrizações de S .

Proposição 4 - Seja S uma superfície local regular dada pela parametrização $X: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X = X(u, v)$, e seja $h: B \rightarrow A$ um homeomorfismo diferenciável de um aberto B do plano \bar{u}, \bar{v} sobre A , dado por $u = u(\bar{u}, \bar{v})$, $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ e tal que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$. Então a aplicação composta $\bar{X} = X \circ h: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ é ainda uma parametrização de S .

Demonstração - A aplicação $\bar{X} \circ h$ é um ho-

meomorfismo diferenciável, como composta de homeomorfismos diferenciáveis. A condição de regularidade é também verificada, porquê se, digamos, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, então

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \neq 0 ;$$

a proposição está portanto demonstrada.

A proposição seguinte mostra que para superfícies locais regulares, as mudanças de parâmetro descritas na Proposição 4 são as únicas possíveis.

Proposição 5 - Se uma superfície local regular S admite duas parametrizações $X:A \rightarrow R^3$, $X = X(u,v)$, e $\bar{X}:B \rightarrow R^3$, $\bar{X} = \bar{X}(\bar{u},\bar{v})$, então existe um homeomorfismo diferenciável $h:B \rightarrow A$, dado por $u = u(\bar{u},\bar{v})$, $v = v(\bar{u},\bar{v})$, com a propriedade $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \neq 0$.

Demonstração.

Defina-se $h:B \rightarrow A$ como a composta $h = X^{-1} \circ \bar{X}$ (ver fig.7). É claro que h é um homeomorfismo, como composta de homeomorfismos. Não é possível concluir por

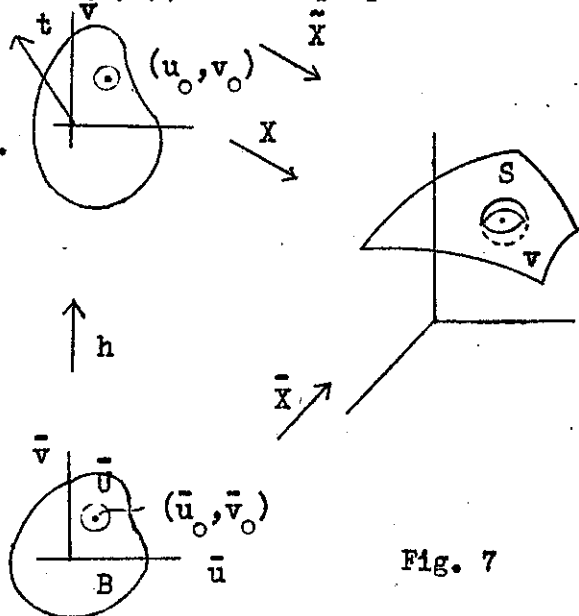


Fig. 7

um argumento análogo que f é diferenciável; com efeito, X^{-1} está definido em S e ainda não definimos o que significa ser diferenciável para uma aplicação em S . Em verdade, a proposição que estamos demonstrando é, como logo veremos, essencial para dar sentido a uma tal definição.

Procederemos da maneira seguinte: seja (\bar{u}_0, \bar{v}_0) um ponto de B , e (u_0, v_0) a sua imagem por h em A . Podemos supor que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ não se anula em (u_0, v_0) . Considere-se a aplicação \tilde{X} do espaço u, v, t no espaço x, y, z , dada por

$$\tilde{X}(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

$\tilde{X}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável, que leva A sobre S , e cujo jacobiano $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ em $(u_0, v_0, 0)$. Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança V de $\tilde{X}(u_0, v_0, 0)$, tal que a inversa \tilde{X}^{-1} de \tilde{X} é definida e diferenciável em V . Por continuidade de \tilde{X} existe uma vizinhança \bar{U} de (\bar{u}_0, \bar{v}_0) tal que $\tilde{X}(\bar{U}) \subset V$. Restrita a \bar{U} , a aplicação h pode ser escrita como $h = \tilde{X}^{-1} \circ \tilde{X}$; h é então diferenciável em (u_0, v_0) , como composta de duas aplicações diferenciáveis. O mesmo raciocínio pode ser repetido para qualquer ponto de B , o que mostra que h é diferenciável em B .

Como h é um homeomorfismo, existe a inversa $h^{-1}: A \rightarrow B$. Um raciocínio análogo ao que fizemos, mos-

trará que h^{-1} é diferenciável. Como, nessas condições $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \cdot \frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = 1$, decorre que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \neq 0$, o que termina a demonstração.

Observação - As definições e propriedades de uma superfície local regular S podem ser dadas ou em termos do conjunto S , ou em termos de uma parametrização $X:A \rightarrow R^3$. No último caso, é necessário mostrar que as definições ou propriedades em questão, não dependem da particular parametrização escolhida. Para isso, o uso da Proposição 5, que caracteriza as possíveis parametrizações, é essencial.

Como aplicação da Proposição 5, vamos mostrar que tem sentido falar em função diferenciável definida em uma superfície local regular S . Seja $X:A \rightarrow R^3$ uma parametrização de S . Diz-se que uma função real $f:S \rightarrow R$ é diferenciável se a função $f \circ X:A \rightarrow R$ é diferenciável, isto é, se existem e são contínuas as derivadas parciais de todas as ordens de $f(u,v)$, considerada como função das variáveis u,v . A Proposição 5 afirma que qualquer mudança de parametrização é dada por uma aplicação diferenciável $h:B \rightarrow A$, isto é, por funções diferenciáveis $u = u(\bar{u},\bar{v})$, $v = v(\bar{u},\bar{v})$. Então a função $f \circ X \circ h : B \rightarrow R^3$, ou seja, $f(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$ expressa nas novas coordenadas \bar{u},\bar{v} é ainda uma função diferenciável. Portanto, o fato de uma função ser diferenciável em S , não depende do particular sistema de coordenadas

empregado para descrevê-la.

Observação - Note-se que a definição dada de diferenciabilidade não faz uso de elementos exteriores à superfície. Uma definição natural, porém fazendo uso do espaço exterior à superfície, é dizer que $f:S \rightarrow R$ é diferenciável, quando f é a restrição de uma função diferenciável em R^3 ; não é difícil verificar que essa definição é equivalente à dada. A definição do texto foi preferida pelo fato de termos de considerar posteriormente superfície "em abstrato", isto é, sem nenhuma menção de um espaço R^3 .

A idéia de diferenciabilidade pode ser generalizada para o caso seguinte, que utilizaremos adiante. Se S e S' são duas superfícies locais regulares, dadas por parametrizações $X:A \rightarrow R^3$ e $X':A' \rightarrow R^3$, respectivamente, então diremos que a aplicação $f:S \rightarrow S'$ é diferenciável se a aplicação composta $X'^{-1} \circ f \circ X : A \rightarrow A'$ é diferenciável. Deixamos aos cuidados do leitor, verificar que essa definição não depende das parametrizações adotadas.

3 . Plano tangente; orientação.

A definição abaixo é feita sem menção alguma a parametrização.

Definição 2 - Seja $s \in S$ um ponto de uma superfície local regular S e $X:I \rightarrow SCR^3$ uma curva parametrizada contida em S e pas

sando por s para um valor $t_0 \in I$. O vetor tangente $X'(t)$ em t_0 é dito um vetor tangente a S no ponto s

Se tomarmos uma parametrização $X: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície local regular S , dada por $X = X(u, v)$, uma maneira de obter vetores tangentes em $X(u_0, v_0)$ é a seguinte. Considere-se uma curva parametrizada $u = u(t)$, $v = v(t)$ em A , passando por (u_0, v_0) para $t = t_0$. A imagem por X dessa curva é uma curva parametrizada $X(t) = X(u(t), v(t))$, contida em S , passando por $X(u_0, v_0)$. O vetor $X'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$ para $t = t_0$ é um vetor tangente a S em $X(u_0, v_0)$. Em particular, os vetores X_u e X_v são tangentes a S . Observe-se que, como S é regular, os vetores X_u e X_v nunca são paralelos e, portanto, $X'(t) = 0$ se e somente se $u'(t) = v'(t) = 0$.

Todo vetor tangente a S pode ser obtido da maneira acima descrita. Para mostrar isso, basta verificar que toda curva parametrizada em S $Y: I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, passando por $X(u_0, v_0)$, onde $X: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma parametrização de S , é a imagem por X de uma curva parametrizada em A , passando por (u_0, v_0) . Com efeito, a curva procurada em A é dada por $X^{-1} \circ Y: I \rightarrow A$, que é evidentemente um homeomorfismo diferenciável (já sabemos o que significa ser X^{-1} diferenciável em S). Não podemos portanto em generalidade, quando fixamos uma parametrização $X(u, v)$ e consideramos na definição de vetor tangente a S , somente as curvas $X(u(t), v(t))$.

As considerações acima mostram que todo vetor tangente a uma curva local regular $X'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$, pertence ao plano determinado pelos vetores X_u e X_v , que não são paralelas pela condição de regularidade, e justifica a seguinte

Definição 3 - O plano que contém todos os vetores tangentes a um ponto de uma superfície local regular S é chamado plano tangente a S nesse ponto.

Como é fácil verificar, todo vetor $\alpha X_u + \beta X_v$, α e $\beta \in \mathbb{R}$, do plano tangente a S em p é o vetor tangente à curva, imagem por X da curva $u - u_0 = \alpha t$, $v - v_0 = \beta t$ em A , e é portanto um vetor tangente a S em p .

Fixada uma parametrização $X(u,v)$, fica determinada uma base X_u, X_v do plano tangente, que é chamada base associada à parametrização.

Observe-se que o significado geométrico da condição de regularidade na definição de superfície local regular é precisamente garantir a existência de um plano tangente em todos os seus pontos.

Definição 4 - Um vetor unitário, normal ao plano tangente em um ponto s de uma superfície local regular S é chamado vetor normal a S em s .

Em cada ponto de S existem dois vetores normais opostos. Dada uma parametrização $X(u,v)$ de S , fi

ca associada a ela um vetor normal $N = N(u, v)$ dado por

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|},$$

onde \wedge indica o produto vetorial e $|\cdot|$ indica o módulo de um vetor em R^3 . Fazendo uma mudança de parâmetros: $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$, $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ é fácil vêr que

$$X_u \wedge X_v = X_{\bar{u}} \wedge X_{\bar{v}} \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)},$$

e portanto o vetor normal N se conserva ou muda de sinal, conforme seja o jacobiano $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}$ positivo ou negativo, respectivamente.

Como no caso das curvas, diremos que duas parametrizações de S , $X(u, v)$ e $X(\bar{u}, \bar{v})$, definem a mesma orientação quando $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$. É fácil vêr que essa é uma relação de equivalência, e que só há duas orientações possíveis. Quando é feita a escolha de uma orientação, a superfície S diz-se orientada.

Pelo que foi visto acima, em uma superfície orientada dada pela parametrização $X(u, v)$, é possível definir o vetor normal $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ à superfície, que varia diferenciavelmente, e não depende escolha de parametrização dentro da classe de orientação fixada. Reciprocamente, a escolha de um vetor normal em cada ponto de uma superfície, que varie continuamente, implica na escolha de uma parametrização, e portanto, de uma orien-

tação.

4 . Primeira forma quadrática.

De agora por diante, utilizaremos os seguintes abusos de linguagem. Superfície designará o que definimos por superfície local regular. A não ser que haja necessidade de especificar o aberto A da parametrização $X:A \rightarrow \mathbb{S}C \mathbb{R}^3$, esta será simplesmente indicada por $X(u,v)$ ou X .

O produto escalar do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente a superfície S um produto escalar, que indicaremos por \langle , \rangle . A esse produto escalar, que é uma forma bilinear, associaremos uma forma quadrática, indicada por I , que faz corresponder a cada vetor tangente o quadrado de sua norma (módulo). Assim

$$I(\bar{X}'(t)) = \langle \bar{X}'(t), \bar{X}'(t) \rangle = |\bar{X}'(t)|^2$$

onde $\bar{X}(t)$ é uma curva parametrizada em S .

Definição 5 - A forma quadrática I associada ao produto escalar, induzido no plano tangente a um ponto s de uma superfície $\mathbb{S}C \mathbb{R}^3$ por \mathbb{R}^3 , chama-se primeira forma quadrática da superfície S no ponto s .

Escolhida uma parametrização $X(u,v)$ da superfície S , e levando em conta que todo vetor tangente a S é o vetor tangente de uma curva $X(u(t), v(t)) = \bar{X}(t)$, teremos

$$\begin{aligned}
 I(\bar{X}'(t)) &= \langle \bar{X}'(t), \bar{X}'(t) \rangle = \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle = \\
 &= \langle X_u, X_u \rangle (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle (v')^2 = \\
 &= E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2,
 \end{aligned}$$

onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = \langle X_v, X_v \rangle$ são os coeficientes da primeira forma quadrática I na base do espaço tangente a S em $X(u, v)$, associada à parametrização \tilde{X} .

O conhecimento da primeira forma quadrática, permite exprimir noções métricas sobre a superfície, sem referência ao espaço ambiente. Assim, o comprimento de arco σ de uma curva parametrizada $X(t) = X(u(t), v(t))$ é dado por

$$\sigma = \int_0^t |\bar{X}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

Decorre daí que podemos escrever

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 = E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2.$$

Por essa razão, a primeira forma quadrática é usualmente referida como o " $d\sigma^2$ " da superfície, e representada simbolicamente por

$$d\sigma^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

A primeira forma quadrática permite calcular o ângulo α de duas curvas sobre uma superfície S . Em particular se a superfície é dada pela parametrização

$X(u,v)$, o ângulo α das curvas coordenadas $u=u_0, v=v_0$, no ponto $X(u_0, v_0)$, é dado por

$$\cos \alpha = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}} .$$

Conclue-se que as curvas coordenadas são ortogonais se e só se $F = 0$.

Como a primeira forma quadrática é definida positiva, os coeficientes E, F, G , satisfazem à desigualdade $EG - F^2 > 0$.

5 - Área de uma superfície.

Seja S uma superfície (local, regular). Nesse parágrafo, e em alguns dos que se seguem, teremos necessidade de considerar em S a imagem homeomorfa de uma circunferência, tal que cada ponto dessa imagem, exceto um número finito, tenha uma vizinhança que é uma curva local regular. Para fixar linguagem, chamaremos um tal conjunto de curva fechada, simples, regular por partes. Como S é a imagem homeomorfa de um círculo, é intuitivamente óbvio que uma tal curva determina em S uma região "interior" que diremos limitada pela curva. A demonstração rigorosa dêsse fato (teorema de Jordan-Brouwer) é, entretanto, bastante delicada.

Seja R a região limitada em uma superfície S por uma curva fechada simples e regular por partes. Vamos definir o que se entende por área da região R . Para isso, faremos uma decomposição da região R em re-

giões R_i , ainda limitadas por curvas fechadas, simples, regulares por partes, fixamos um ponto s_i em cada R_i , e projetamos R_i sobre o plano tangente a superfície em s_i ; a projeção de R_i é denotada por \bar{R}_i e por $A(\bar{R}_i)$ indicaremos a área de \bar{R}_i . A soma

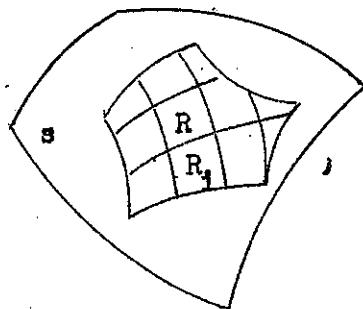


Fig. 8.

$\sum_i A(\bar{R}_i)$ é uma primeira aproximação da área R . Decompondo agora cada R_i da mesma maneira que fizemos para R , obtemos uma segunda decomposição de R , que diremos "refinar" a primeira. Se, tomando decomposições cada vez mais refinadas, e tais que $R_i \rightarrow s_i$, existe o limite de $\sum_i A(\bar{R}_i)$, e é independente do modo como são feitas as decomposições, então diz-se que R tem uma área $A(R) = \lim_{R_i \rightarrow s_i} \sum_i A(\bar{R}_i)$.

Uma discussão instrutiva dessa definição de área de uma superfície, encontra-se em Courant, vol. II, pg. 341.

Vamos mostrar agora que toda região de uma superfície limitada por uma curva fechada, simples, regular por partes, possui de fato uma área; em particular, obteremos a expressão dessa área em termos de uma parametrização.

Seja $X = X(u, v)$ uma parametrização para a su-

perfície S . Seja R a região de S limitada por uma curva fechada, simples, regular por partes e sejam R_i , $i = 1, \dots, n$, as regiões obtidas por uma decomposição de R . Como R é um conjunto limitado e fechado, é possível supor essa decomposição suficientemente refinada, para que cada R_i esteja contido em uma vizinhança na qual um dos jacobianos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,v)}$, $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ não se anule.

Seja R_j uma das regiões R_i (vêr fig. 9) e suponhamos que R_j esteja contida em uma vizinhança V_j na qual $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,v)} \neq 0$. Então pelo teorema da função inversa, é possível representar V_j por $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$. Se s_j é um ponto de R_j , a projeção $A(\bar{R}_j)$ da área $A(R_j)$ sobre o plano tangente em s_j é dada por

$$\frac{A(R'_j)}{\langle N, e_3 \rangle} = A(\bar{R}_j),$$

onde R'_j é a projeção de R_j sobre o plano XOY e e_3 é o vetor unitário de OZ , isto é, $\langle N, e_3 \rangle$ é o cosseno do ângulo α que faz o plano tangente em s_j com o plano XOY .

Como $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$, teremos

$$A(\bar{R}_j) = |X_u \wedge X_v| A(R'_j).$$

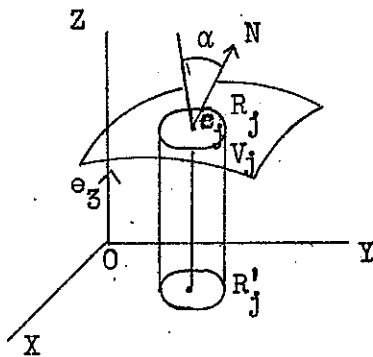


Fig. 9

Pensando em $A(R'_j)$ como uma área do plano u, v , e em $|X_u \wedge X_v|$ como uma função das variáveis u, v , vemos que a expressão de área de R_i será a mesma, qualquer que seja i . Decorre daí que o limite

$$R_1 \lim_{s_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\tilde{R}_i) = R_1 \lim_{s_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |X_u \wedge X_v| A(R'_i),$$

é por definição a integral $\iint_{R'} |X_u \wedge X_v| du dv$, onde R'

é a região correspondente a R no plano u, v , e essa integral existe pela continuidade de $|X_u \wedge X_v|$ em R' . Conclue-se que a área da região R existe, e é dada pela expressão

$$A(R) = \iint_{R'} |X_u \wedge X_v| du dv.$$

6 - Parametrização ortogonal.

Seja $X(u, v)$ uma parametrização de uma superfície S . Nesse parágrafo, para aliviar a linguagem, não faremos menção explícita à parametrização X e pensamos no par (u, v) como coordenadas de um ponto da superfície S . O leitor tomará o cuidado de verificar que certos conceitos e resultados que utilizaremos, como o teorema fundamental das equações diferenciais mencionado abaixo, são ainda verdadeiros quando "transportados" por X à superfície.

A equação $\varphi(u, v) = \text{const}$, com φ_u e φ_v não

simultaneamente nulas em (u_0, v_0) , define uma família de curvas regulares, em uma vizinhança de (u_0, v_0) . Se $u(t), v(t)$ fôr uma parametrização para uma curva de família, teremos

$$\varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t) = 0 \quad (1)$$

isto é, as curvas da família satisfazem a equação diferencial (1). A equação (1) significa simplesmente que a direção da tangente à uma curva da família é a direção do vetor de componentes $(\varphi_v, -\varphi_u)$, na base associada à parametrização u, v .

Reciprocamente, dar uma equação diferencial $A(u, v)u' + B(u, v)v' = 0$, onde A e B são funções diferenciáveis de u e v , não simultaneamente nulas em (u_0, v_0) , significa dar para cada ponto de uma vizinhança V de (u_0, v_0) uma direção definida pela direção do vetor $(B, -A)$, de tal modo que essas direções "veriam diferencialmente". O teorema fundamental das equações diferenciais (Pontryagin, pg. 20) afirma que, em cada ponto de uma vizinhança V de (u_0, v_0) , $U \cap V$, passa uma única curva integral da equação dada, isto é, uma curva, tal que a direção de sua tangente em qualquer ponto seja dada por $(B, -A)$.

Se representarmos a família de curvas integrais, cuja existência é afirmada pelo teorema acima, por $\varphi(u, v) = \text{const}$, teremos, comparando com (1),

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ A & B \end{vmatrix} = 0 \quad \text{em } U; \quad (2)$$

isto é, se $\varphi(u,v) = \text{const}$ é uma curva integral de $Au' + Bv' = 0$, verifica-se (2).

Vamos agora mostrar que é possível parametrizar uma vizinhança de um ponto de uma superfície S , de tal modo que as curvas coordenadas sejam ortogonais. Nas proposições que se seguem, encontraremos uma situação típica da Geometria Diferencial, que consiste na necessidade de contrair várias vezes a vizinhança do ponto na qual se está trabalhando. Mais explicitamente, cada vez que aplicarmos ou o teorema das funções implícitas, ou o teorema da existência e unicidade de equações diferenciais (que são os instrumentos básicos da Geometria Diferencial local), necessitaremos de tomar a interseção da vizinhança em que estamos trabalhando com a vizinhança onde o teorema é válido. Para não sobrecarregar a notação, não especificaremos as várias vizinhanças envolvidas e usaremos a frase "em uma vizinhança" para resumir a situação descrita acima.

Proposição 6 - Seja $X(u,v)$ uma parametrização de uma superfície S , e considere-se o par

$$A_1 u' + B_1 v' = 0 \quad (3)$$

$$A_2 u' + B_2 v' = 0 \quad (4)$$

de equações diferenciais, onde $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ no pon

to (u_0, v_0) . É possível reparametrizar uma vizinhança de (u_0, v_0) , de tal modo que as curvas integrais de (3) e de (4) passam a ser as curvas coordenadas da nova parametrização.

Demonstração - Pelo teorema fundamental das equações diferenciais, existem vizinhanças de (u_0, v_0) onde estão definidas curvas integrais de (3) e de (4). Seja (u, v) um ponto da interseção dessas vizinhanças e sejam $\varphi(u, v) = \text{const} = \bar{u}$ e $\psi(u, v) = \text{const} = \bar{v}$ as curvas integrais de (3) e de (4), respectivamente, passando por (u, v) .

Vamos mostrar que $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$ em (u_0, v_0) . Com efeito, vimos que (3) e (4) implicam em

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

se fôsse $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0$ em (u_0, v_0) , concluiríamos que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{em } (u_0, v_0), \quad \text{o que contradiz as hipóteses.}$$

Como $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$ em (u_0, v_0) , podemos aplicar o teorema da função inversa, que garante a biunivocidade da aplicação

$$\begin{cases} \bar{u} = \varphi(u, v) \\ \bar{v} = \psi(u, v) \end{cases} \quad (5)$$

em uma vizinhança de (u_0, v_0) , e mostra que (5) é uma mudança de parâmetro nessa vizinhança. É claro que a parametrização \tilde{u}, \tilde{v} satisfaz às condições requeridas, o que termina a demonstração.

Observação - O significado geométrico da condição $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, é que

as curvas integrais de (3) e de (4) se cortam segundo um ângulo não nulo.

Proposição 7 - Seja $X(u, v)$ uma parametrização de uma superfície S e seja $\varphi(u, v) = \text{const}$, com φ_u e φ_v não simultaneamente nulas no ponto (u_0, v_0) , uma família de curvas regulares em uma vizinhança de (u_0, v_0) . É possível reparametrizar uma vizinhança de (u_0, v_0) de tal modo que as curvas coordenadas sejam ortogonais e uma das famílias de curvas coordenadas seja precisamente a família $\varphi(u, v) = \text{const}$.

Demonstração - Como vimos anteriormente, a direção da tangente à uma curva da família $\varphi(u, v) = \text{const}$ é a direção do vetor $r = (\varphi_u, -\varphi_v)$. Se

$$Au' + Bv' = 0 \quad (6)$$

é a equação diferencial de uma família ortogonal a $\varphi(u, v) = \text{const}$ devemos ter $\langle r, q \rangle = 0$, onde q é o vetor $(B, -A)$. Utilizando os coeficientes E, F, G , pode

mos exprimir o anulamento do produto escalar por

$$E \varphi_v B - F \varphi_u B - F \varphi_v A + G \varphi_u A = 0,$$

ou seja

$$(E \varphi_v - F \varphi_u) B = (F \varphi_v - H \varphi_u) A.$$

Note-se que os coeficientes de A e de B não podem ser simultaneamente nulos; caso contrário, o vetor r seria ortogonal a qualquer outro. Podemos então escrever a equação diferencial (6), da família ortogonal a $\varphi(u,v) = \text{const}$, como

$$(E \varphi_v - F \varphi_u) u' + (F \varphi_v - G \varphi_u) v' = 0. \quad (7)$$

Por outro lado, a equação diferencial de família $\varphi(u,v) = \text{const}$ é

$$\varphi_u u' + \varphi_v v' = 0. \quad (8)$$

Calculando o determinante dos coeficientes de (7) e (8), obtemos

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ E \varphi_v - F \varphi_u & F \varphi_v - G \varphi_u \end{vmatrix} = E(\varphi_v)^2 - 2F\varphi_v\varphi_u + G(\varphi_u)^2 = \langle r, r \rangle \neq 0,$$

em (u_0, v_0) . Aplicando a Proposição 6, vemos que é possível reparametrizar uma vizinhança de (u_0, v_0) de tal modo que as curvas integrais das equações (7) e (8) sejam as curvas coordenadas da nova parametrização, o que termina a demonstração.

- o -

CAPÍTULO III

SUPERFÍCIES IMERSAS EM \mathbb{R}^3

1. Propriedades fundamentais.

Neste capítulo, trataremos daquelas propriedades que dependem de como a superfície está imersa no espaço ambiente \mathbb{R}^3 . O fato de que nem todas as propriedades pertencem a essa categoria será melhor compreendido no capítulo seguinte.

Em todo este capítulo, S é uma superfície local regular, em que se fixou uma orientação.

Seja p um ponto de uma superfície S , e N o vetor normal a S em p . Por analogia com o tratamento das curvas, procuremos uma maneira de medir quão rapidamente a superfície se afasta, em uma vizinhança de p , do plano tangente T_p de S em p , ou seja, quanto se afasta de N o vetor normal nessa vizinhança. Uma maneira natural é considerar uma curva parametrizada $X(t)$ em S passando por p ; para os pontos dessa curva, teremos $N = N(t)$, e $N'(t)$ no ponto p indica o grau de variação de N na direção de $X(t)$.

Escolhendo uma parametrização $X(u,v)$ para S ,

e escrevendo $X(t)$ na forma $X(u(t), v(t))$, vê-se que

$$N'(t) = N_u u' + N_v v'$$

depende somente do ponto p e do vetor tangente (u', v') à curva $X(t)$ em p . Como todo vetor tangente em p é o vetor tangente a alguma curva parametrizada

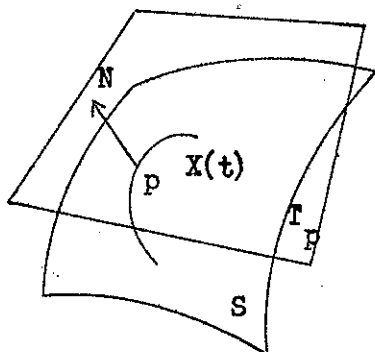


Fig. 1

$X(t)$, passando por p , conclue-se que a cada vetor tangente em p corresponde um vetor $N'(t)$. Além disso, como N é um vetor unitário, $N'(t)$ é normal a $N(t)$, donde pertence ao plano tangente T_p .

Definição 1 - Seja S uma superfície orientada e N o vetor normal a S . Chama-se diferencial de N no ponto $p \in S$, a aplicação $dN: T_p \rightarrow T_p$ no espaço tangente T_p de S em p , que a cada vetor $X'(t)$ faz corresponder o vetor $N'(t)$.

Observação - O vetor $dN(X'(t))$ pode ser nulo para valores não nulos de $X'(t)$. Considere-se, por exemplo, um ponto p sobre o cilindro circular reto (Exemplo 2 do Cap. II) e seja S a vizinhança desse ponto que é uma superfície local. Seja $X(t)$ uma parametrização regular da geratriz do cilindro passando por p . É imediato que $N'(t) = 0$, sem

que seja $X'(t) = 0$.

Lembramos que uma aplicação linear $A: T \rightarrow T$ em um espaço vetorial T , munido de um produto escalar \langle, \rangle , é dita auto adjunta se $\langle Av, u \rangle = \langle Au, v \rangle$, para todo par $u, v \in T$. Em uma base ortonormal de T , uma aplicação auto adjunta é representada por uma matriz simétrica (Gelfand, §12).

Proposição 1 - A diferencial $dN: T_p \rightarrow T_p$ da definição 1 é uma aplicação linear, auto adjunta.

Demonstração - Seja $X = X(u, v)$ uma parametrização de S e seja $X'(t) = X_u u' + X_v v'$, a expressão de um vetor tangente em p na base associada X_u, X_v . Ao longo de $X(t)$ teremos $N(t) = N(u(t), v(t))$, e portanto $N'(t) = N_u u' + N_v v'$ (Note-se que N_u e N_v não são necessariamente linearmente independentes). Como N_u e N_v pertencem ao plano tangente, teremos

$$\begin{cases} N_u = a_{11} X_u + a_{12} X_v, \\ N_v = a_{21} X_u + a_{22} X_v. \end{cases} \quad (1)$$

Substituindo (1) na expressão de $N'(t)$, obtemos

$$N'(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} X'(t),$$

o que prova que dN é uma aplicação linear, representa-
da na base associada X_u, X_v pela matriz (a_{ij}) .

Para mostrar que dN é uma aplicação auto ad-
junta, basta verificar a condição de definição para uma
base de T_p ; escolhendo a base associada, X_u, X_v , tere-
mos de verificar que

$$\langle dN(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN(X_v) \rangle ,$$

ou seja

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle .$$

Para provar a última igualdade, basta deri-
var as relações $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$ em re-
lação a v e u , respectivamente, e observar que $X_{uv} =$
 X_{vu} ; obteremos

$$\langle N_u, X_v \rangle = - \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle ,$$

o que conclue a demonstração.

A aplicação linear dN dá portanto uma medi-
da de como a superfície S se afasta do plano tangente
em $p \in S$, em uma vizinhança de p . No caso das curvas,
o afastamento da reta tangente era caracterizado por um
número, a curvatura; no caso das superfícies êsse afas-
tamento está caracterizado por uma transformação li-
near.

O fato da aplicação linear dN ser auto ad-
junta tem importantes consequências sôbre a estrutura de
 dN , que é completamente descrita pelo seguinte Teorema

de Álgebra Linear (por comodidade, o teorema é enunciado em dimensão 2, sendo entretanto válido em dimensão n).

Teorema - (Gelfand, §12 e §17). Seja

$A: T \rightarrow T$ uma aplicação linear auto-adjunta de um espaço vetorial T , munido de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então:

- a) Existe uma base ortonormal e_1, e_2 , de T , relativa a qual a matriz de A é diagonal; os elementos λ_1, λ_2 da diagonal são, evidentemente, valores próprios de A , e os vetores e_1, e_2 , vetores próprios de A .
- b) Os valores próprios λ_1, λ_2 , mencionados acima, são o máximo e o mínimo da função real $Q(v) = \langle Av, v \rangle$, $|v| = 1$, $v \in T$; ês se máximo e mínimo, existem pela continuidade de $Q(v)$ no círculo unitário $|v|=1$.

Antes de passarmos a aplicar êsse teorema, vamos interpretar geomêtricamente o valor de $Q(X'(s)) = \langle dN(X'(s)), X'(s) \rangle$ no ponto p de uma superfície S , onde $X'(s)$ é um vetor unitário, isto é, o vetor de uma curva $X(s)$ em S , parametrizada pelo comprimento de arco s , e passando por p . Para isso, observemos primeiro que $\langle X'(s), N \rangle = 0$, e portanto $\langle X'(s), N'(s) \rangle = - \langle X''(s), N \rangle$. Se indicarmos por k a curvatura de $X(s)$ em p , por n a normal principal à $X(s)$ em p , e por θ o ângulo de n com o vetor normal N à superfície em p , teremos

$$Q(X'(s)) = \langle dN(X'(s)), X'(s) \rangle = \langle N'(s), X'(s) \rangle = - \\ - \langle X''(s), N \rangle = - \langle kn, N \rangle = - k \cos \theta .$$

Chamaremos $k \cos \theta = k_n$ de curvatura normal da curva $X(s)$ sobre a superfície S , em p . Como $\langle N'(s), X'(s) \rangle$ depende só da superfície e do vetor unitário tangente a curva, obtivemos, de passagem, o seguinte resultado conhecido como Teorema de Meusnier.

Proposição 2 -(Meusnier) - Tôdas as curvas de uma superfície que têm em um ponto a mesma tangente, têm nesse ponto a mesma curvatura normal.

Observação - A curvatura normal não depende do sentido da curva, porém depende da orientação da superfície.

Denotaremos por $-k_1, -k_2$, os valores próprios de $dN: T_p \rightarrow T_p$, correspondentes aos vetores próprios unitários e_1, e_2 ; isto é, $dN(e_1) = -k_1 e_1$, $dN(e_2) = -k_2 e_2$. Para fixar idéias, suponhamos $k_1 \geq k_2$. Pelo que vimos anteriormente, quando o vetor $v \in T_p$, percorre em T_p o círculo unitário $|v| = 1$, então $-Q(v) = \langle dN(v), v \rangle$ percorre o conjunto de valores da curvatura normal. Como os valores próprios são extremais de $Q(v)$, temos que $k_1 = - \langle dN(e_1), e_1 \rangle$ é o máximo, e $k_2 = - \langle dN(e_2), e_2 \rangle$ é o mínimo dos valores da curvatura normal em b .

Definição 2 - As curvaturas normais máxi-

ma k_1 e mínima k_2 , em um ponto p de uma superfície, são chamadas curvaturas principais da superfície em p ; as direções correspondentes (não orientadas) são chamadas direções principais.

Observação - Se p é um ponto de uma esfera ou um plano, então $k_1 = k_2$; nesse caso, todas as curvaturas normais são iguais, todos os vetores tangentes são próprios e todas as direções passando por p são principais.

Definição 3 - Se uma curva regular C em uma superfície S é tal que para todo ponto $p \in C$ a tangente a C é uma direção principal de S em p , então C é dita uma linha de curvatura de S .

Decorre imediatamente da definição de e_1 e e_2 como vetores próprios, o resultado seguinte conhecido sob o nome de Teorema de Olinde Rodrigues.

Proposição 3 - (Olinde Rodrigues). Uma condição necessária e suficiente para que uma curva regular C de uma superfície S seja uma linha de curvatura de S , é que exista uma parametrização $X(t)$ de C tal que

$$N'(t) = \lambda(t) X'(t),$$

onde $\lambda(t)$ é uma função real de t ; nessas condições - $\lambda(t)$ é o valor da curvatura normal de C no ponto $X(t)$.

Uma outra consequência imediata do fato de serem e_1, e_2 vetores próprios e k_1, k_2 valores próprios de dN , é a seguinte. Todo vetor unitário $X'(s)$ em p (tangente a uma curva parametrizada pelo comprimento de arco), se exprime na base ortonormal e_1, e_2 por

$$X'(s) = e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha ,$$

onde α é o ângulo que $X'(s)$ faz com e_1 . A curvatura normal k_n na direção de $X'(s)$ é então dada por

$$\begin{aligned} k_n &= - \langle dN(X'(s)), X'(s) \rangle \\ &= - \langle -k_1 \cos \alpha e_1 - k_2 \sin \alpha e_2, e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha \rangle = \\ &= k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha . \end{aligned}$$

Esta última expressão de k_n em termos das curvaturas principais e do ângulo α é conhecida sob o nome de fórmula de Euler.

Em dimensão 2, uma aplicação linear é caracterizada pelo seu determinante e seu traço. No nosso caso, o determinante, $\det(dN)$, de dN é o produto k_1, k_2 das curvaturas principais e o traço, $\text{tr}(dN)$, é o simétrico da soma, $-(k_1 + k_2)$, das curvaturas principais. Se mudarmos a orientação da superfície, isto é, se trocarmos o sinal de N , o determinante não varia (a dimensão 2 é essencial aqui), porém o traço muda de sinal.

Definição 4 - Seja p um ponto de uma superfície orientada S , e dN

a diferencial de N em p . O determinante de dN é chamado curvatura Gaussiana K de S em p ; o simétrico da metade do traço de dN é chamado curvatura média H de S em p .

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2).$$

Definição 5 - Um ponto p de uma superfície orientada S é chamado:

do:

- 1) elíptico, se $\det(dN) > 0$,
- 2) hiperbólico, se $\det(dN) < 0$,
- 3) parabólico, se $\det(dN) = 0$,
- 4) planar, se $dN = 0$.

Observação - A classificação acima não depende da orientação de S .

Em um ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva. Ambas as curvaturas principais têm o mesmo sinal e, portanto, todas as curvas passando pelo ponto têm a normal principal apontando para o mesmo lado do plano tangente.

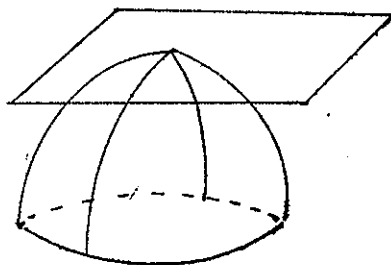


Fig. 2

Um exemplo (ver fig. 2) de uma superfície local constitui

da inteiramente de pontos elípticos é dada por uma vizinhança suficientemente pequena do ponto $(0,0,C)$ do elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (que é uma superfície local; cf. Proposição 2 do Cap. II).

No caso especial em que $k_1 = k_2$, o ponto é elíptico é chamado umbílico. Os pontos de uma esfera e de um plano são umbílicos.

Em um ponto hiperbólico, a curvatura Gaussiana é negativa e, portanto, as curvaturas principais têm sinais contrários; as normais principais às curvas que passam pelo ponto podem apontar para qualquer dos dois lados do plano tangente.

Um exemplo de superfície local, constituída inteiramente de pontos hiperbólicos é dado por uma vizinhança suficientemente pequena do ponto $(0,0,0)$ do

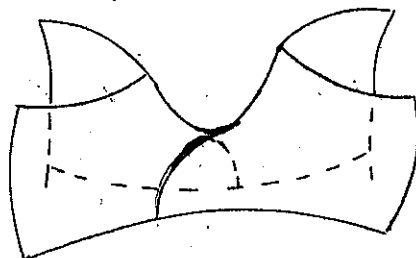


Fig. 3

parabolóide hiperbólico $z - x^2 + y^2 = 0$ (vêr fig. 3).

Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é zero. Uma das curvaturas principais se anula e a outra é diferente de zero. Uma superfície local constituída inteiramente de pontos parabólicos é dada por uma vizinhança suficientemente pequena de qualquer ponto do cilindro $x^2 + y^2 = 0$. (vêr fig. 4 - pg. 60).

Um exemplo de superfície em que se pode encontrar os três tipos de pontos apresentados é o tóro. O tóro é a superfície gerada por uma circunferência girando em torno de um eixo que pertence ao plano de circunferência e não a intercepta. Girando a circunferência de raio r e centro $(a,0)$ do plano $X O Z$, em torno do eixo OZ , e omitindo-se da figura resultante o círculo gerador e o círculo $u = 0$ (vêr fig. 5), obtemos uma superfície local, parametrizada por:

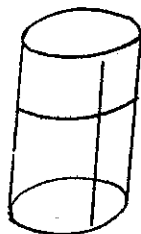


Fig. 4

$$\begin{aligned} x &= (a + r \cos u) \cos v, \\ y &= (a + r \cos u) \sin v, \\ z &= r \sin u, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi; \end{aligned}$$

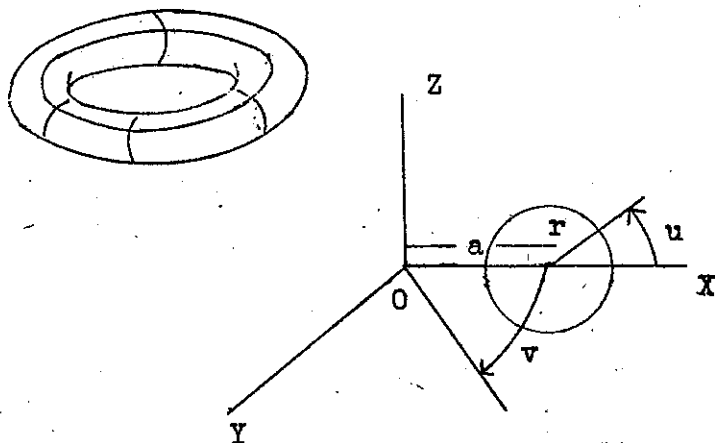


Fig. 5

É fácil ver que os pontos de coordenadas $0 < u < \pi/2$ e $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$ são pontos elípticos, os pontos de coordenadas $u = 0$ e $u = \pi$ são pontos parabólicos e os pontos de coordenadas $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ são pontos hiperbólicos.

Finalmente, em um ponto planar todas as curvaturas principais são nulas. Os pontos de um plano satisfazem trivialmente a essa condição. Um exemplo não trivial de ponto pla

nar é dado pela superfície obtida girando a curva $z = x^4$, do plano $X O Z$, em torno do eixo OZ (ver fig. 6). Uma parametrização dessa superfície é:

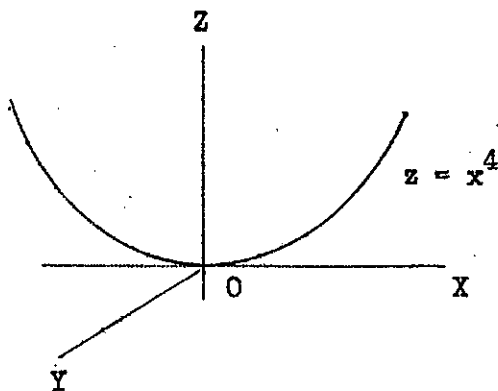


Fig. 6

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= (u+v)^2; \end{aligned}$$

um cálculo simples mostra que N_u e N_v se anulam na origem, donde $dN = 0$ em O , que é portanto um ponto planar.

Os exemplos apresentados de pontos alípticos, parabólicos e hiperbólicos são, em um certo sentido, típicos. Mais precisamente, se p é um ponto de uma superfície S , então existe uma vizinhança de p em S in-

teiramente contida em um mesmo lado do plano tangente a p . O mesmo se passa em um ponto parabólico, podendo, nesse caso, a superfície ter pontos em comum com o plano tangente. Em um ponto hiperbólico $p \in S$, qualquer vizinhança de p em S possui pontos de ambos os lados do plano tangente.

Para provar a afirmação feita, considere uma curva regular $X(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , contida na superfície S e passando por $p \in S$ para $t = 0$. A distância d do ponto $X(s)$ ao plano tangente T_p em p é dada por

$$d = \langle X(s) - X(0), N \rangle .$$

Como $X(s)$ é diferenciável, existe o desenvolvimento de Taylor

$$X(s) - X(0) = X'(0)s + \frac{1}{2} X''(0)s^2 + \dots ,$$

onde \dots indica os termos de ordem superior a 2. Introduzindo o desenvolvimento acima na expressão de d , obtemos

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} \langle X''(0), N \rangle s^2 + \dots = \frac{1}{2} k \langle n, N \rangle s^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} k_n s^2 + \dots , \end{aligned}$$

onde k , n , k_n são, respectivamente, a curvatura, a normal principal e a curvatura normal de $X(s)$, para $s = 0$. Da expressão acima, decorre que se s é suficientemente pequeno, digamos $|s| < \varepsilon$, onde ε depende da curva

$X(s)$, então o sinal de d é dado pelo sinal de k_n . Para terminar a demonstração, basta mostrar que o ínfimo desses ε é positivo, o que dará o raio de uma vizinhança com as propriedades acima mencionadas.

Daremos um esboço de demonstração dessa última afirmação. É conveniente fazer uso da seguinte propriedade, a ser provada no Cap. IV. Todo ponto p de uma superfície S possui uma vizinhança inteiramente coberta por curvas $X(s)$ (chamadas geodésicas) partindo de p , que ficam perfeitamente determinadas pelo vetor unitário tangente $v = X'(0)$ em p e variam diferenciavelmente com $v = X'(0)$, isto é, $X(s;v)$ é, para s fixo, uma função diferenciável de v . Calculando a distância d acima com essas curvas, vê-se que é possível estabelecer o ε mencionado como função contínua (aliás diferenciável) de $v \in T_p$, $|v| = 1$. Como v percorre um círculo unitário (compacto), a função $\varepsilon = \varepsilon(v)$ assume um valor mínimo. O ínfimo dos ε é, portanto, positivo, o que termina a demonstração.

Nenhuma afirmação sobre a posição da superfície relativamente ao plano tangente pode ser feita em vizinhança alguma de um ponto planar. Nos exemplos vistos de ponto planar, a superfície estava de um mesmo lado do plano tangente (ou coincidia com êle no caso trivial do plano). Entretanto, o ponto $(0,0,0)$ da superfície (ver fig. 7 - pg. 64)

$$x = u$$

$$y = v$$

$$z = v^3 - 3u^2v$$

é um ponto planar, e em qualquer vizinhança desse ponto existem pontos da superfície de ambos os lados do plano tangente à superfície em $(0,0,0)$.

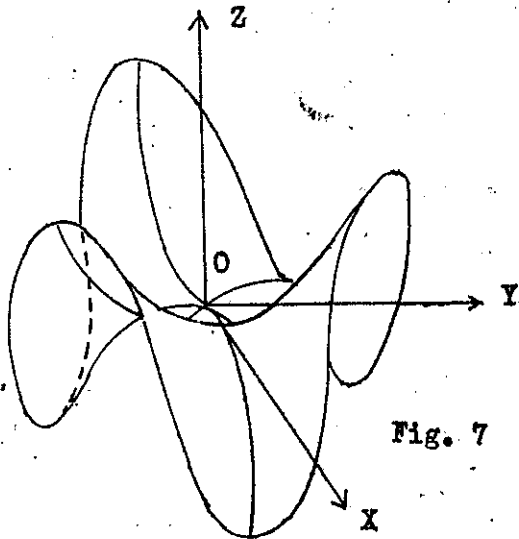


Fig. 7

Como vimos anteriormente, os pontos de um plano e de uma esfera são pontos umbílicos. A proposição seguinte mostra que a recíproca é verdadeira.

Proposição 4 - Se todos os pontos de uma superfície local S são umbílicos, então S está contida em um plano ou uma esfera.

Demonstração - Seja $X(t)$ uma curva parametrizada passando por $p \in S$, e dN a diferencial de N em p . Como todo vetor tangente em p é próprio, devemos ter

$$dN(X'(t)) = N'(t) = \rho(p) X'(t),$$

onde $\rho = \rho(p)$ é uma função real diferenciável em S . Vamos mostrar primeiro que $\rho(p) = \text{const}$ em S .

Para isso, introduzamos uma parametrização

$X(u,v)$ em S ; então podemos escrever

$$N_u u' + N_v v' = \rho X_u u' + \rho X_v v', \quad \rho = \rho(u,v)$$

Como a equação acima é válida para qualquer par (u',v') , teremos

$$N_u = \rho X_u,$$

$$N_v = \rho X_v.$$

Derivando a primeira equação em ordem a v , a segunda em ordem a u , e subtraindo as equações resultantes, obteremos

$$\rho_u X_v - \rho_v X_u = 0$$

Como X_u e X_v não são paralelos, concluímos que $\rho_u = \rho_v = 0$, e, portanto, $\rho = \text{const}$, como havíamos afirmado.

Se $\rho = 0$, então $N_u = N_v = 0$ e $N = \text{vetor const.}$

Portanto

$$\langle X(t), N \rangle' = \langle X'(t), N \rangle = 0,$$

donde se conclue que $\langle X(t), N \rangle = \text{const}$, para qualquer $X(t)$ em S , e portanto os pontos de S estão todos em um mesmo plano.

Se $\rho \neq 0$, então o ponto $X(u,v) - \frac{1}{\rho} N(u,v) = Y(u,v)$ é fixo, pois

$$(X(u,v) - \frac{1}{\rho} N(u,v))_u = (X(u,v) - \frac{1}{\rho} N(u,v))_v = 0.$$

Como

$$(X(u,v) - Y)^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

vemos que os pontos de S estão contidos em uma esfera de centro Y e raio $\frac{1}{\rho}$, o que termina a demonstração.

Definição 6 - Seja S uma superfície e T_p o plano tangente a S em um ponto $p \in S$. As direções de T_p para as quais se anula a curvatura normal de S em p são chamadas direções assintóticas. Uma curva de S que em cada ponto é tangente a uma direção assintótica é chamada uma linha assintótica de S .

Decorre imediatamente da definição que em um ponto elíptico não há direções assintóticas.

Uma interpretação geométrica útil das direções assintóticas é obtida utilizando a indicatriz de Dupin, que passamos a descrever.

Como vimos, os vetores próprios e_1, e_2 da aplicação dN formam uma base ortonormal do plano tangente T_p à superfície S em p . Marquemos em T_p , sobre a direção do vetor unitário que faz um ângulo α com e_1 , um comprimento igual a $\rho = \frac{1}{\sqrt{k_n}}$, onde k_n é a curvatura normal na direção considerada; o ponto assim obtido é denotado por q . Utilizando a fórmula de Euler, obteremos

$$1 = k_1 \cos^2 \alpha \rho^2 + k_2 \sin^2 \alpha \rho^2.$$

Denotando por ξ, η as coordenadas do ponto q no sistema p_1, e_1, e_2 , temos que $\xi = \rho \cos \alpha$, $\eta = \rho \sin \alpha$, e portanto

$$\pm 1 = k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2. \quad (2)$$

Em outras palavras, a medida que o ângulo α varia, o ponto q descreve no plano T_p a cônica representada pela equação (2); a cônica (2) é chamada indicatriz de Dupin no ponto p .

Nos pontos elípticos, k_1 e k_2 têm o mesmo sinal e a curva (2) é uma elipse (ver fig.8). Quando o ponto é um umbílico, $k_1 = k_2$, e a elipse degenera em uma circunferência.

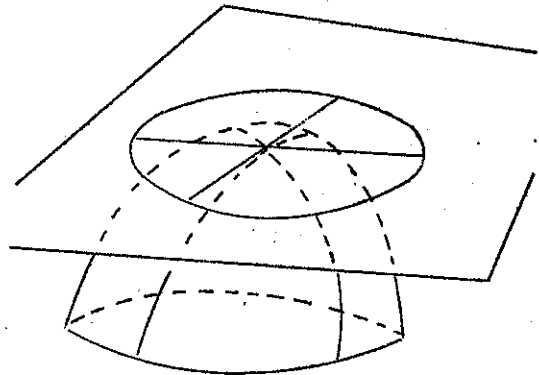


Fig. 8

Nos pontos hiperbólicos, k_1 e k_2 têm sinais distintos; a cônica (2) é um par de hipérbolas conjugadas (ver fig. 9). É claro que nas direções das assíntotas comuns a essas hipérbolas, a curvatura normal se anula. Essas direções são portanto direções assintóticas, o que justifica o nome utilizado.

Nos pontos parabólicos, uma das curvaturas principais se anula, e a cônica (2) degenera em um par de

retas paralelas. A direção dessa rota determina a única direção assintótica no ponto.

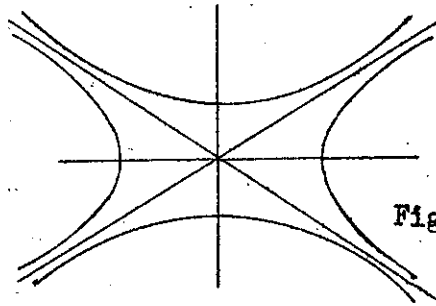


Fig. 9

2. A aplicação normal e a curvatura Gaussiana

Daremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana K , que mostra ser K um análogo para as superfícies da idéia de curvatura para as curvas. Precisaremos de alguns preliminares.

Definição 7 - Seja S uma superfície orientada, contida em \mathbb{R}^3 e Σ uma esfera de raio unitário, centrada em um ponto $q \in \mathbb{R}^3$. Para cada ponto $p \in S$, transporte-se, por translação, o vetor normal $N(p)$ de S em p , de tal modo que sua origem coincida com q ; a sua extremidade será então um ponto de Σ , de

notado ainda por $N(p)$. A aplicação $N: S \rightarrow \Sigma$ assim definida é chamada aplicação normal de Gauss (ver fig. 10).

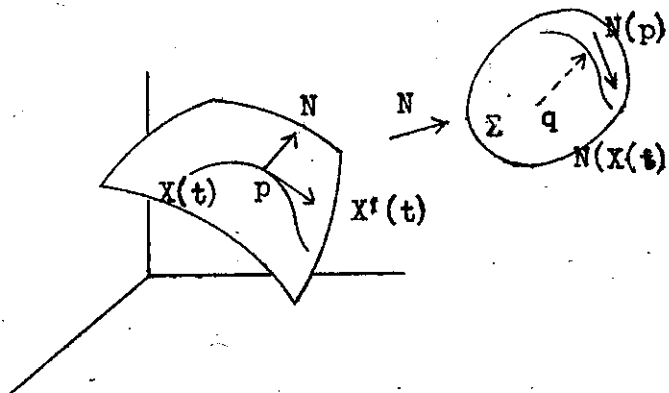


Fig. 10

Podemos agora reformular a definição da aplicação dN em termos de aplicação normal N : Fixado $p \in S$, cada vetor do plano tangente T_p é o vetor tangente de uma curva parametrizada diferenciável $X(t)$, passando por p . Ao vetor $X'(t)$ fazemos corresponder um vetor do plano tangente $\tau_{N(p)}$ à esfera Σ no ponto $N(p)$, construído da maneira seguinte. A imagem de $X(t)$ pela aplicação N é uma curva parametrizada $N(X(t))$ em Σ , passando por $N(p)$; o vetor tangente a curva $N(X(t))$ em $N(p)$ é por definição, o vetor de $\tau_{N(p)}$ correspondente a $X'(t) \in T_p$.

Identificando os planos tangentes T_p e $\tau_{N(p)}$ por uma translação de R^3 , vemos que a correspondência assim definida é precisamente a aplicação linear $dN: T_p \rightarrow T_p$ construída no §1 desse Capítulo.

A definição acima é usualmente expressa, dizendo que dN é a diferencial no ponto p da aplicação normal N , o que justifica a nomenclatura adotada na Definição 1.

Seja agora $X(u,v)$ uma parametrização de S . Se, para os pontos de uma vizinhança V de $p \in S$, tem-se $\det(dN) \neq 0$ (isto é, a curvatura Gaussiana não se anula), então pela expressão (1) do §1, os vetores N_u e N_v são linearmente independentes. Decorre que a imagem de V pela aplicação N é ainda uma superfície regular parametrizada por $N \circ X(u,v)$. É claro que uma orientação em V induz uma orientação na imagem de V .

Utilizando mais uma vez a expressão (1) obteremos.

$$N_u \wedge N_v = (\det(dN)) X_u \wedge X_v. \quad (3)$$

Como a imagem de V por N está sobre uma esfera (menos um ponto), que podemos supor orientada, a equação acima significa que a orientação induzida em V por N é a mesma ou a oposta da orientação da esfera, conforme o sinal da curvatura Gaussiana de V (ôsse sinal é constante, pois $K \neq 0$ em V).

Uma interpretação geométrica dessa situação é obtida levando em conta que tanto V como sua imagem estão imersas no espaço R^3 , que pode ser suporte orientado. Orientando uma curva fechada suficientemente pequena em torno de p , isto é, orientando o plano tangente em p , vemos que (fig. 11) a orientação induzida no

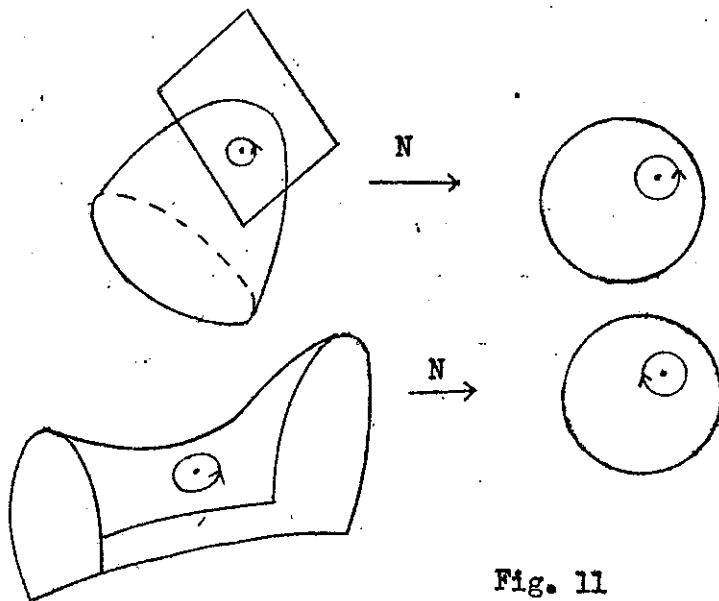


Fig. 11

plano tangente da imagem é a mesma ou a oposta, conforme seja p elíptico ou hiperbólico.

Para levar em conta o fato acima mencionado, diremos que a área de um domínio contido em V e a área da imagem por N dêsse domínio, têm o mesmo sinal ou sinais contrários, conforme sejam os pontos de V elípticas ou hiperbólicas.

Estamos agora em condições de estabelecer a prometida interpretação de K , para $K \neq 0$.

Proposição 5 - Seja p um ponto de uma superfície S , onde a curvatura Gaussiana $K \neq 0$, e V uma vizinhança de p , tal que $K \neq 0$ em V . Então o valor de K em p é dado por

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = K,$$

onde A é a área de um domínio B em V , contendo p , A' é a área da imagem dêsse domínio pela aplicação normal N , e o limite é tomado quando $B \rightarrow p$.

Demonstração - A área A de B é dada por

$$\iint_R |X_u \wedge X_v| du dv = A,$$

onde $X(u,v)$ é uma parametrização de S e R é o domínio do plano u,v correspondente a B . Por outro lado, a área A' da imagem de B por N é dada por

$$\iint_R |N_u \wedge N_v| du dv = A'$$

Utilizando a expressão (3), a definição de K , e a convenção de sinal mencionada anteriormente, podemos escrever

$$A' = \iint_R K |X_u \wedge X_v| \, dudv.$$

Passando ao limite,

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{R} \iint_R K |X_u \wedge X_v| \, dudv}{\frac{1}{R} \iint_R |X_u \wedge X_v| \, dudv} = \\ &= \frac{K |X_u \wedge X_v|}{|X_u \wedge X_v|} = K, \end{aligned}$$

(para a penúltima igualdade, veja-se Cousant II, pr.235), o que termina a demonstração.

Observação - No caso das curvas, é natural substituir a aplicação normal de Gauss pela aplicação tangente t : transportem-se todos os vetores tangentes unitários de uma curva orientada C para uma origem fixa q ; cada ponto $p \in C$ é levado por t na extremidade do vetor tangente a p , unitário. Quando p varia em C , $t(p)$ descreve uma curva em um círculo unitário, chamada indicatriz tangente de C . Se p percorre um arco s em C , $t(p)$ percorre, na indicatriz tangente um arco $\alpha = \alpha(s)$, que mede o ângu-

lo formado pelas tangentes às extremidades de s . Como o vetor tangente t é unitário, a curvatura k em p é dada por

$$k = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{s} \right| .$$

Comparando a expressão acima com a Proposição 5, vemos que a curvatura Gaussiana K é de fato o análogo para superfícies da curvatura k para as curvas.

3. Segunda forma quadrática.

Nas exposições tradicionais de Geometria Diferencial, o material tratado nos §1 e 2 dêsse Capítulo é obtido a partir da segunda forma quadrática, que passamos a descrever.

Recordemos de Álgebra Linear que a uma aplicação linear auto-adjunta $dN: T_p \rightarrow T_p$, em um espaço vetorial T_p munido de um produto escalar \langle , \rangle , corresponde uma forma quadrática Q definida por

$$Q(X'(t)) = \langle dN(X'(t)), X'(t) \rangle , \quad X'(t) \in T_p .$$

Reciprocamente, dada uma forma quadrática Q em T_p com um produto escalar \langle , \rangle , existe uma aplicação linear auto-adjunta $A: T_p \rightarrow T_p$, dada por

$$\langle Av, u \rangle = B(u, v) , \quad u, v \in T ,$$

onde B é a aplicação bilinear em T_p induzida por Q .

A correspondência acima é biunívoca, e estabe-

lece uma equivalência entre as formas quadráticas e as aplicações lineares auto-adjuntos, em um espaço vetorial munido de um produto escalar.

Para vetores unitários $X'(s)$ do plano tangente de uma superfície S , vimos no §1 dêsse Capítulo que o valor da forma quadrática $Q(X'(s))$ é precisamente o simétrico da curvatura normal na direção de $X'(s)$.

Definição - Seja p um ponto de uma superfície orientada S e dN a diferencial da aplicação normal em p . A forma quadrática II do espaço tangente T_p a superfície S em p , dada por

$II(X'(t)) = - \langle dN(X'(t)), X'(t) \rangle = - \langle N'(t), X'(t) \rangle$,
para $X'(t) \in T_p$, é chamada a segunda forma quadrática de S em p .

Do ponto de vista geométrico, é indiferente tratar com dN ou com II . Entretanto, por apresentar vantagens para o cálculo, e para podermos comparar as expressões analíticas obtidas com as exposições tradicionais, estabelecermos algumas relações entre II e dN .

Dada uma parametrização $X(u,v)$ de S , a expressão da segunda forma quadrática II na base associada X_u, X_v à parametrização é dada por

$$\begin{aligned} II(X'(t)) &= - \langle N'(t), X'(t) \rangle = - \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle = \\ &= e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde os coeficientes e, f, g são definidos como

$$e = - \langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$

$$f = - \langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$$

$$g = - \langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

Nos pontos elípticos, II é sempre positiva, isto é, $eg - f^2 > 0$, e reciprocamente. Nos pontos hiperbólicos, II torna valores positivos e negativos, isto é, $eg - f^2 < 0$, e reciprocamente. Nos pontos parabólicos II se anula para uma única direção, isto é $eg - f^2 = 0$, e reciprocamente. Finalmente, um ponto é planar se e só se $e = g = f = 0$.

Vamos agora obter uma relação entre a matriz (a_{ij}) de dN na base X_u, X_v e a matriz simétrica $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ dos coeficientes de II nessa base. Utilizando a expressão (1) do §1, obtemos as seguintes relações:

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11} F + a_{12} G ,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{21} E + a_{22} F ,$$

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11} E + a_{12} F ,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{21} E + a_{22} G ,$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma quadrática na parametrização $X(u, v)$. As relações acima podem ser resumidas no seguinte produto de matrizes:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad (4)$$

que é a expressão procurada. Observe-se que a matriz (a_{ij}) da relação (4) é a transposta da matriz de dN . (4) pode ser ainda escrita

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde a última matriz é a inversa de $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Como pode ser facilmente verificado,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

donde as expressões

$$a_{11} = \frac{fF-eG}{EG-F^2},$$

$$a_{12} = \frac{eF-fE}{EG-F^2},$$

$$a_{21} = \frac{gF-fG}{EG-F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}.$$

Da relação (4) conclue-se imediatamente, a expressão da curvatura Gaussiana $\det(a_{ij}) = K$, em termos dos coeficientes da 1ª e 2ª formas quadráticas:

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que $-k_1, -k_2$ são valores próprios de (a_{ij}) , e portanto satisfazem à equação

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}+k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}+k \end{pmatrix} = 0 ;$$

ou seja,

$$k^2 + k(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = 0 .$$

Como k_1 e k_2 são raízes da equação do segundo grau acima, e a curvatura média $H = 1/2(k_1+k_2)$, concluímos que

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$$

- o -

4 . Linhas assintóticas e linhas de curvatura.

Nesse parágrafo determinaremos as equações diferenciais das linhas assintóticas e das linhas de curvatura sobre uma superfície S com uma parametrização

$X(u, v)$.

Como uma linha assintótica $X(t) = X(u(t), v(t))$ é tangente em cada ponto a uma direção de curvatura normal nula, teremos

$$\text{II } (X'(t)) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0 \quad (5)$$

Na vizinhança de um ponto hiperbólico ($eg - f^2 < 0$) a equação (5) se desdobra em duas equações diferenciais da forma $Au' + Bv' = 0$, que tendem a se confundir quando nos aproximamos de um ponto parabólico; em um ponto elíptico ($eg - f^2 > 0$) a equação (5) não pode ser resolvida em equações diferenciais reais. Para abreviar a linguagem, diremos que (5) é a equação diferencial da família de linhas assintóticas.

De acordo com a Proposição 6 do Cap. II, é possível parametrizar uma vizinhança V de um ponto hiperbólico (tal que $eg - f^2 < 0$ para todo ponto de V), de modo que as curvas coordenadas sejam as linhas assintóticas. Se denotarmos ainda por u, v essas coordenadas, as curvas $u = \text{const}$ e $v = \text{const}$ devem satisfazer (5), e portanto $e = g = 0$. Reciprocamente, se $e = g = 0$, então as curvas $u = \text{const}$ e $v = \text{const}$ satisfazem (5), donde se conclui que as curvas coordenadas são linhas assintóticas.

Uma linha de curvatura $X(u(t), v(t))$ satisfaz a equação de Olinde Rodrigues

$$dN(X'(t)) = \lambda(t) X'(t),$$

que, em termos da parametrização $X(u,v)$, dá origem ao sistema

$$\begin{cases} a_{11} u' + a_{21} v' = \lambda u' , \\ a_{12} u' + a_{22} v' = \lambda v' . \end{cases}$$

Para escrever essas equações em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas, usaremos os valores de a_{ij} calculados no parágrafo anterior, obtendo

$$\begin{cases} \frac{fF-eG}{EG-F^2} u' + \frac{gF-fG}{EG-F^2} v' = \lambda u' \\ \frac{eF-fF}{EG-F^2} u' + \frac{fF-gE}{EG-F^2} v' = \lambda v' . \end{cases}$$

Eliminando λ nas equações acima, obtemos a equação diferencial da família de linhas coordenadas

$$(gF-fG)(u')^2 + (gE-eG)u'v' + (fE-eF)(v')^2 = 0 ,$$

que pode ser escrita, de maneira mais simétrica, como

$$\begin{vmatrix} (u')^2 & -u'v' & (v')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 . \quad (6)$$

Exceto nos pontos umbílicos e planares, sabemos que existe um par ortogonal de direções principais. Portanto em uma vizinhança de um ponto, que não seja umbílico ou planar, é possível decompor (6) em um par de

equações diferenciais satisfazendo às condições da Proposição 6 do Cap. II, e, portanto parametrizar essa vizinhança de modo que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura. Como $F = 0$ é uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas sejam ortogonais, conclue-se facilmente que as curvas coordenadas são linhas de curvatura se e só se $f = F = 0$.

- o -

C Á P I T U L O I V

G E O M E T R I A I N T R Í N S E C A D A S S U P E R F Í C I E S

1 . O Teorema "egregium"; isometrias.

No capítulo anterior introduzimos a curvatura Gaussiana de uma superfície $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$. Nesse parágrafo vamos mostrar que K depende apenas dos coeficientes da primeira forma quadrática, e de suas derivadas.

Para isso, introduzimos na expressão dada de K os valores

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} .$$

$$f = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}} ,$$

$$g = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}} .$$

onde $(, ,)$ indica o produto mixto, e obtemos

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ (X_{uu}, X_u, X_v)(X_{vv}, X_u, X_v) - (X_{uv}, X_u, X_v)^2 \right\}.$$

Aplicando à expressão acima a identidade

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = \begin{vmatrix} \langle a_1, a_2 \rangle & \langle a_1, b_2 \rangle & \langle a_1, c_2 \rangle \\ \langle b_1, a_2 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \langle b_1, c_2 \rangle \\ \langle c_1, a_2 \rangle & \langle c_1, b_2 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle \end{vmatrix},$$

onde $|a_{ij}|$ indica o determinante da matriz (a_{ij}) , concluimos que

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{vmatrix} \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle & \langle X_{uu}, X_u \rangle & \langle X_{uu}, X_v \rangle \\ \langle X_u, X_{vv} \rangle & E & F \\ \langle X_v, X_{vv} \rangle & F & G \end{vmatrix} \right\} -$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} (X_{uv})^2 & \langle X_{uv}, X_u \rangle & \langle X_{uv}, X_v \rangle \\ \langle X_u, X_{uv} \rangle & E & F \\ \langle X_v, X_{uv} \rangle & F & G \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{vmatrix} \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - (X_{uv})^2 & \langle X_{uu}, X_u \rangle & \langle X_{uu}, X_v \rangle \\ \langle X_u, X_{vv} \rangle & E & F \\ \langle X_v, X_{vv} \rangle & F & G \end{vmatrix} \right\} -$$

$$- \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \langle X_{uv}, X_u \rangle & \langle X_{uv}, X_v \rangle \\ \langle X_u, X_{uv} \rangle & E & F \\ \langle X_v, X_{uv} \rangle & F & G \end{array} \right\}.$$

Para calcular os produtos escalares indicados acima, derivamos $E = \langle X_v, X_u \rangle$, $F = \langle X_v, X_v \rangle$ e $G = \langle X_u, X_u \rangle$ em relação a u e a v , obtendo as relações,

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} E_u, \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{1}{2} E_v, \\ \langle X_{vu}, X_v \rangle &= \frac{1}{2} G_u, \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle &= \frac{1}{2} G_v, \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle &= F_v - \frac{1}{2} G_u; \end{aligned}$$

derivando a 3ª equação em relação a v , a 5ª equação em relação a u , e subtraindo as equações resultantes, concluimos que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - (X_{uv})^2 &= \\ = F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu}. \end{aligned}$$

Introduzindo essas relações na expressão de K , temos finalmente

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \left\{ \begin{array}{ccc} F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} & \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{1}{2} E_v \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{array} \right\}, \quad (1)$$

que é a expressão procurada.

Conclue-se que a curvatura Gaussiana depende somente da primeira forma quadrática. Essa conclusão, conhecida como "Teorema egregium", é devida a Gauss e é considerada, pela extensão de suas consequências, como um dos resultados mais importantes da Geometria Diferencial.

A importância dêsse teorema pode ser ilustrada com o exemplo seguinte. Considere-se o cilindro circular reto (menos uma geratriz) $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$, onde u e v percorrem o aberto A de R^2 dado por $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$. A primeira forma quadrática dêsse cilindro ($E = G = 1$, $F = 0$) é idêntica à do plano euclideo. Como a medida de distâncias depende só da primeira forma quadrática, a aplicação $X(u,v)$,

entre o aberto A de \mathbb{R}^2 e o cilindro, preserva as distâncias; isto é, o aberto A aplica-se sem distensões sobre o cilindro. Pelo Teorema de Gauss, a curvatura Gaussiana em um ponto do cilindro é igual à curvatura do ponto correspondente do plano; isto é, para o cilindro $K = 0$.

No caso particular do cilindro, é geométrica^{ca}mente trivial concluir que a curvatura é zero (uma das curvaturas principais se anula). Observe-se, entretanto, que o argumento apresentadô faz apenas uso do fato de que o cilindro é a imagem sem distensões de uma superfície de curvatura conhecida, e pode ser aplicado em situações geométrica^{ca}mente mais complicadas.

Para dar mais precisão a essa idéia, necessitamos de algumas definições.

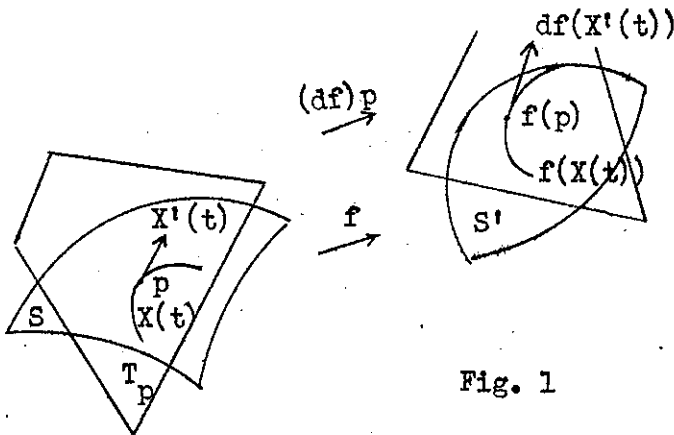


Fig. 1

Como vimos no estudo da aplicação normal, uma aplicação diferenciável $f: S \rightarrow S'$ entre duas super-

fícies, induz, para cada $p \in S$, uma aplicação $df: T_p \rightarrow T'_{f(p)}$ entre os planos tangentes T_p de S em p e $T'_{f(p)}$ de S' em $f(p)$. Por definição $df(X'(t))$, onde $X(t)$ é uma curva parametrizada em S passando por p , é o vetor tangente em $f(p)$ à curva $f(X(t))$ de S' (ver fig. 2 - pg. 85).

Definição 1 - Duas superfícies S e S' são ditas isométricas se existir uma aplicação $f: S \rightarrow S'$, biunívoca, diferenciável e com inversa diferenciável, tal que as primeiras formas quadráticas I, I' de S e S' , respectivamente, são iguais em pontos correspondentes; isto é, para todo $p \in S$ e todo $v \in T_p$, plano tangente a S em p , tem-se

$$I_p(v) = I'_{f(p)}(df(v)).$$

A aplicação f é chamada uma isometria.

Se existe uma isometria $f: S \rightarrow S'$ e $X(u,v)$ é uma parametrização de S , então $f \circ X(u,v) = X'(u,v)$ é uma parametrização de S' . Decorre que para superfícies isométricas S e S' existem parametrizações $X(u,v)$ e $X'(u,v)$, tais que $E(u,v) = E'(u,v)$, $F(u,v) = F'(u,v)$ e $G(u,v) = G'(u,v)$. Reciprocamente, se existem parametrizações $X(u,v)$ e $X'(u,v)$ de S e S' (X e X' são aplicações de um mesmo aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3), tais que para todo ponto de coordenadas (u,v) se tenha $E(u,v) = E'(u,v)$, $F(u,v) = F'(u,v)$ e $G(u,v) = G'(u,v)$, então S e S' são isométricas.

Os conceitos e propriedades que dependem somente da primeira forma quadrática, por exemplo, comprimento, ângulo, área, são invariantes por isometrias.

Com essa linguagem, o teorema egregium pode ser expresso dizendo que a curvatura Gaussiana é um invariante por isometrias. É de fato um resultado notável, que um conceito como a curvatura Gaussiana, cuja definição fazia uso essencial da posição da superfície no espaço, não dependa dessa posição, mas só da estrutura métrica (1^{a} forma quadrática) da superfície.

Veremos a seguir, que muitos outros conceitos interessantes da Geometria Diferencial estão nas mesmas condições que a curvatura Gaussiana, isto é, só dependem da estrutura métrica e não da maneira como a superfície está imersa no meio ambiente. Tem então sentido separar as propriedades das superfícies em dois grupos:

- a) aquelas que dependem do espaço ambiente, e foram objeto (com exceção da curvatura Gaussiana) do Capítulo anterior;
- b) aquelas que só dependem da 1^{a} forma quadrática, e constituem um corpo de propriedades que chamaremos "geometria intrínseca das superfícies".

2 . Símbolos de Christoffel.

No estudo das propriedades intrínsecas, aparecerão alguns coeficientes que só dependem da 1^{a} for

ma quadrática. Por comodidade de exposição, introduzimos êsses coeficientes em separado, nesse parágrafo.

Seja $X(u,v)$ uma parametrização de uma superfície S . Como os vetores X_u , X_v e N são linearmente independentes, podemos exprimir X_{uu} , X_{uv} , X_{vv} , como combinação dos primeiros por meio das expressões

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_{11} N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_{12} N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_{22} N. \end{aligned} \quad (2)$$

Multiplicando cada equação acima por X_u e por X_v , e usando as relações do parágrafo anterior, obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} E_u &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \\ F_u - \frac{1}{2} E_v &= \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \frac{1}{2} E_v &= \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \\ \frac{1}{2} G_u &= \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\ F_v - \frac{1}{2} G_u &= \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \\ \frac{1}{2} G_v &= \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G. \end{aligned} \right.$$

Os seis coeficientes Γ_{ij}^k , chamados símbolos

de Christoffel, podem ser obtidos, em termos dos coeficientes da primeira forma quadrática e suas derivadas, resolvendo o sistema acima. Não obteremos as expressões explícitas dos Γ_{ij}^k e nos contentaremos com a observação, importante para o que se segue, de que os conceitos e propriedades expressas em termos dos símbolos de Christoffel pertencem à geometria intrínseca das superfícies.

3 . Derivação covariante; transporte paralelo; geodésicas.

A partir dêsse parágrafo, passaremos a uma exposição sistemática da geometria intrínseca das superfícies. A fim de não perder uma parte apreciável do conteúdo intuitivo, serão dadas frequentemente definições e interpretações envolvendo o espaço exterior à superfície. Teremos, entretanto, o cuidado de demonstrar, como no caso da curvatura Gaussiana, que os conceitos introduzidos dependem da primeira forma quadrática.

Tomaremos como ponto de partida o conceito de derivação covariante de um campo de vetores, que desempenha para as superfícies um papel análogo à derivação usual dos espaços euclidianos.

Definição 2 - Seja S uma superfície regular e $X(t)$ uma curva regular em S . Seja $v = v(t)$ um campo de vetores tangentes ao longo de $X(t)$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto $X(t)$ um vetor $v(t)$ do plano tan-

gente a S em $X(t)$. Chama-se derivada covariante de $v(t)$, denotada por $\frac{Dv}{dt}$, o campo vetorial ao longo de $X(t)$ obtido pela projeção normal de $\frac{dv}{dt}$ sobre o plano tangente a S em $X(t)$.

A derivada covariante é assim a parte tangencial da derivada usual. Decorre daí que se duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva, a derivada covariante de um campo vetorial ao longo dessa curva é a mesma para ambas as superfícies.

A definição de derivada covariante faz uso do espaço exterior à superfície; para mostrar que essa derivação é um conceito intrínseco, vamos obter sua expressão em termos de uma parametrização $X(u,v)$ da superfície S . Seja $v(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$ a expressão do campo vetorial ao longo de $X(u(t), v(t))$, referido à base associada X_u, X_v . Então

$$\frac{dv}{dt} = a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') + a'(t)X_u + b'(t)X_v.$$

Como $\frac{Dv}{dt}$ é a componente de $\frac{dv}{dt}$ segundo o plano tangente, substituiremos X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} pelas expressões (2) do §2 e, desprezando a componente segundo N , obteremos

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{dt} = & (a'(t) + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')X_u + \\ & + (b'(t) + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')X_v. \quad (3) \end{aligned}$$

A expressão (3) mostra que a derivada cova-

riante depende da curva $X(u(t), v(t))$, do vetor $v(t) = (a(t), b(t))$ e dos símbolos de Christoffel, ou seja, da primeira forma quadrática.

Como observamos antes, o plano euclideo é uma superfície local que pode ser parametrizada de tal modo que $E = G = 1$ e $F = 0$. Uma rápida inspeção nas equações do §2 que dão os símbolos de Christoffel, mostra que, nesse caso, os Γ_{ij}^k se anulam. Conclue-se que no plano euclideo, a derivada covariante coincide com a derivada usual.

No plano euclideo, dizemos que um campo de vetores é paralelo quando sua derivada usual é nula. Utilizando essa analogia, introduziremos para uma superfície qualquer a seguinte

Definição 3 - Seja S uma superfície regular e $X(t)$ uma curva regular em S . Um campo de vetores $v(t)$ ao longo de $X(t)$ é dito paralelo quando $\frac{Dv}{dt} = 0$.

De um ponto de vista externo à superfície, dizer que um campo $v(t)$ é paralelo, significa dizer que a derivada $v'(t)$ é normal ao plano tangente à superfície, ou seja $\langle v, v' \rangle = 0$, para todo t . Decorre daí que se $v(t)$ é um campo paralelo, então $|v(t)| = \text{const}$. Uma outra consequência imediata, é que se $v(t)$ e $w(t)$ são campos paralelos ao longo de uma mesma curva, então

$$\langle v(t), w(t) \rangle = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0;$$

como $|v(t)|$ e $|\omega(t)|$ são constantes, conclue-se que o ângulo formado por dois campos paralelos é constante.

Pela observação feita após a definição de derivada covariante, conclue-se que se duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva, um campo de vetores ao longo dessa curva é paralelo em relação a uma das superfícies se e só se fôr paralelo em relação a outra.

Uma questão que se põe perante a definição 2 é a seguinte. Dada uma curva regular $X(t)$ em S , fixado um ponto $X(t_0)$ e um vetor v_0 , tangente a S em $X(t_0)$, existirá um campo vetorial paralelo $v(t)$ ao longo da $X(t)$, que coincide com v_0 para $t = t_0$?

Para resolver esta questão, observemos que, por (3), a condição de ser um campo $v(t) = (a(t), b(t))$ paralelo ao longo de $X(u(t), v(t))$ é dada pelo sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} a'(t) + \Gamma_{11}^1 a v'(t) + \Gamma_{12}^1 a v'(t) + \Gamma_{12}^1 b u'(t) + \Gamma_{22}^1 b v'(t) = 0, \\ b'(t) + \Gamma_{11}^2 a v'(t) + \Gamma_{12}^2 a v'(t) + \Gamma_{12}^1 b u'(t) + \Gamma_{22}^1 b v'(t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Pelo teorema global de existência e unicidade das equações diferenciais lineares (Pontryagin, pg 22), o sistema admite uma única solução $v(t)$, definida para qualquer t , e tomando o valor v_0 para $t = t_0$. A questão proposta é portanto resolvida na afirmativa, e o valor de $v(t)$ assim obtido é chamado transporte para-

lelo de v_0 , ao longo de $X(t)$, de t_0 a t .

Observação - A aplicação do teorema de unicidade ao sistema (4), exige que os Γ_{ij}^k sejam funções diferenciáveis de t , o que só tem sentido quando $X(t)$ é regular.

As retas do plano euclídeano são caracterizadas pela condição de constituírem os seus vetores tangentes um campo de vetores paralelo. Para as superfícies, as linhas que satisfazem uma condição análoga são chamadas geodésicas.

Definição 4 - Uma curva regular $X(s)$, parametrizada pelo arco s , sobre uma superfície S é dita uma geodésica de S , se os vetores $X'(s)$ formarem um campo de vetores paralelos.

De um ponto de vista externo, uma curva sobre uma superfície é uma geodésica quando a derivada do vetor unitário tangente for paralelo ao vetor normal N da superfície. Isso significa que a normal n à curva e o vetor N são paralelos, ou seja, o plano osculador à curva contém o vetor N .

As considerações geométricas acima, permitem identificar facilmente algumas geodésicas.

Exemplo 1 - Na esfera menos um ponto, qualquer círculo máximo é uma geodésica.

Exemplo 2 - Cilindro circular reto menos uma

geratriz; as geratrizes, e os círculos normais a elas, são geodésicas.

Exemplo 3 - Os círculos de tóro, obtidas como secções por um plano que contém o eixo de rotação, são geodésicas.

De um modo geral, uma geodésica $X(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , satisfaz ao sistema de equações diferenciais abaixo, que provém de (4), fazendo $t = s$ e $a = u'(s)$, $b = v'(s)$,

$$\begin{cases} u''(s) + \Gamma_{11}^1 (u'(s))^2 + 2 \Gamma_{12}^1 u'(s)v'(s) + \Gamma_{22}^1 (v'(s))^2 = 0, \\ v''(s) + \Gamma_{11}^2 (u'(s))^2 + 2 \Gamma_{12}^2 u'(s)v'(s) + \Gamma_{22}^2 (v'(s))^2 = 0. \end{cases} \quad (4')$$

Aplicando o teorema de existência e unicidade de equações diferenciais (Pontryagin, pg. 20), vê-se que, fixado um ponto p em uma superfície S , e uma direção nesse ponto, existe uma e uma única geodésica de S , passando por p , tangente a essa direção, e definida em uma vizinhança de p .

O transporte paralelo de um vetor entre dois pontos do plano euclídeano, goza da propriedade de ser independente da curva usada para realizá-lo. Vamos mostrar que o mesmo não se dá para uma superfície qualquer. Em outras palavras, dados dois pontos p e q de uma superfície qualquer, e duas curvas distintas ligando p a q , pode acontecer que, fixando um vetor v em p e transportando v paralelamente ao longo de cada uma das

curvas, cheguemos a q com dois vetores distintos,

Para um exemplo dessa situação, considere na esfera menos um ponto dois círculos máximos C e C' , ligando os pontos antípodos p e q e fazendo um ângulo $\frac{\pi}{2}$ em p (ver fig. 2). Fixemos em p o vetor v , tangente ao círculo máximo C .

Como C é uma geodésica, o vetor v transportado paralelamente ao longo de C , chega em q como o vetor tangente ω a C em q .

Como o transporte paralelo preserva os ângulos, se transportarmos agora v ao longo de C' , chegaremos em

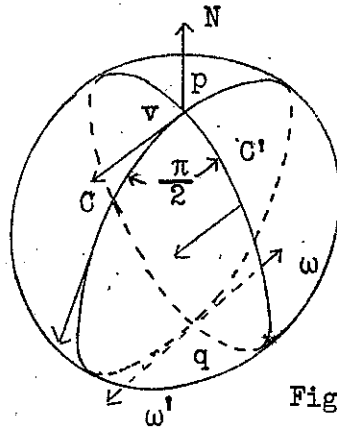


Fig. 2

q com um vetor ω' , fazendo ainda um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ com a tangente a C' em q . Assim, os vetores ω e ω' são opostos, e o transporte paralelo depende da curva, escolhida para realizá-lo.

Observação - Mais geralmente, se o ângulo de C e C' em p é φ , então os vetores ω e ω' descritos acima, formam um ângulo 2φ .

O exemplo acima levanta a questão seguinte: É possível caracterizar as superfícies locais para as quais o transporte paralelo não depende da curva escolhida para realizá-lo? Note-se que a condição é equivalente ao fato de que o transporte paralelo de qualquer vetor v ao lon

go de qualquer curva fechada, reproduz o vetor v . É claro que isso se passa para as superfícies locais isométricas ao plano euclidiano. Voltaremos a essa questão nos parágrafos seguintes.

Prosseguindo na analogia com o plano euclidiano, recordemos que as retas do plano são caracterizadas como curvas de curvatura nula. Por outro lado, a curvatura é definida como o módulo da derivada do vetor tangente unitário.

Definição 5 - Chama-se curvatura geodésica k_g de uma curva regular $X(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco s em uma superfície S , o módulo da derivada covariante do campo de vetores tangentes unitários.

Dêsse modo, as geodésicas passam a ser caracterizadas como curvas de curvatura geodésica nula.

De um ponto de vista exterior à superfície, a curvatura geodésica k_g é a componente tangencial da curvatura k da curva considerada. Lembrando que a curvatura normal k_n é a componente de k segundo a normal à superfície, temos

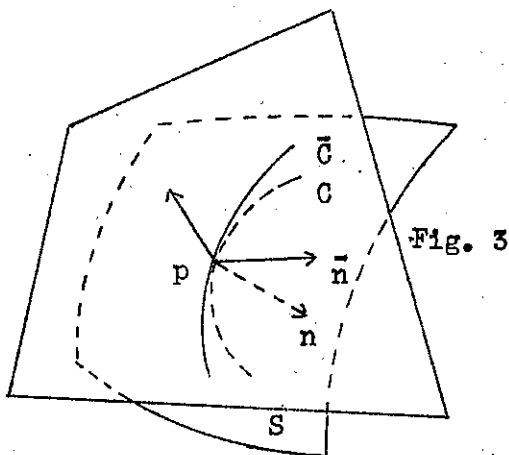
$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Uma interpretação interessante da curvatura geodésica é obtida da maneira seguinte. Seja C uma curva que passa por um ponto p de uma superfície S , e seja \bar{C} a projeção normal de C sobre o plano tangente a S

em p (ver fig. 3). Notando que a normal principal \bar{n} é o vetor normal ao cilindro projetante, aplicamos o teorema de Meusnier a êsse cilindro e obtemos

$$k_g = k \langle n, \bar{n} \rangle = \bar{k},$$

onde k e n são a curvatura e a normal de C e a barra indica o correspondente objeto de \bar{C} . Conclue-se que a curvatura geodésica de C



em p é a curvatura da curva plana \bar{C} , obtida projetando normalmente C sobre o plano tangente a S em p .

Decorre daí que se duas superfícies são tangentes segundo uma linha, a curvatura geodésica dessa linha é a mesma relativamente a qualquer das duas superfícies consideradas. A mesma conclusão é obtida a partir das observações feitas anteriormente sobre superfícies tangentes ao longo de uma curva.

4 . Teorema de Gauss Bonnet (local).

Dada uma curva fechada regular por partes C , limitando uma região A de uma superfície local regular S , existe uma relação notável, conhecida sob o nome de Teorema de Gauss-Bonnet, entre a integral da curvatura geodésica ao longo de C e a integral da curvatu-

ra Gaussiana estendida a A .

Para estabelecer êsse resultado, necessitamos de alguns preliminares. Como sempre, superfície significará superfície local regular.

Proposição 1 - Seja S uma superfície, $X(t)$ uma curva regular em S e $v(t)$, $\omega(t)$, dois campos de vetores unitários ao longo de $X(t)$. Então

$$\left| \frac{D}{dt} \right| - \left| \frac{Dv}{dt} \right| = \varphi'(t),$$

onde $\cos \varphi(t) = \langle v(t), \omega(t) \rangle$.

Demonstração - Como $\langle v, \omega \rangle = \cos \varphi$, temos

$$\langle v', \omega \rangle + \langle \omega, v' \rangle = -\operatorname{sen} \varphi'. \quad (5)$$

Por outro lado, $\omega \wedge v = N \operatorname{sen} \varphi$, donde

$$\omega \wedge (\omega \cdot v) = \langle \omega, v \rangle \omega - \langle \omega, \omega \rangle v = \omega \wedge N \operatorname{sen} \varphi.$$

$$\text{Como } \langle \omega, \omega' \rangle = 0 \text{ e } \langle \omega \wedge N, \omega' \rangle = \left| \frac{D\omega}{dt} \right|,$$

concluimos

$$\langle v, \omega' \rangle = - \left| \frac{D\omega}{dt} \right| \operatorname{sen} \varphi. \quad (6)$$

De modo análogo, tomando $v \wedge (\omega \wedge v) = v \wedge N \operatorname{sen} \varphi$, desenvolvendo o duplo produto vetorial e multiplicando escalarmente por v' , temos

$$\langle \omega, v' \rangle = \left| \frac{Dv}{dt} \right| \operatorname{sen} \varphi. \quad (7)$$

Introduzindo (5) e (6) em (7), obtemos a relação procurada

$$\left| \frac{D\omega}{dt} \right| - \left| \frac{Dv}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt},$$

o que termina a demonstração.

Em particular, quando v é um campo paralelo e ω é o campo de vetores unitários tangentes a $X(s)$, temos $k_g = \varphi'(s)$, o que mostra que a curvatura geodésica é a velocidade de variação do ângulo que faz a tangente à curva com uma direção paralela. No caso euclídeo, as direções paralelas são fixas, e a curvatura geodésica reduz-se mais uma vez à curvatura usual.

De acôrdo com os resultados do § do Capítulo II, é sempre possível introduzir, em uma vizinhança de um ponto de uma superfície S , uma parametrização cujas curvas coordenadas sejam ortogonais. Seja $X(u,v)$ uma tal parametrização, $X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada nessa vizinhança e $\omega(t)$ um campo de vetores ao longo de $X(t)$. Vamos obter uma expressão para o módulo da derivada covariante $\left| \frac{D\omega}{dt} \right|$ de ω nessa parametrização.

Para isso, sejam $e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$ e $e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}}$ os vetores unitários tangentes às curvas coordenadas, e seja $\cos \varphi = \langle \omega, e_1 \rangle$. De acôrdo com a Proposição 1.

$$\begin{aligned} \left| \frac{D\omega}{dt} \right| &= \left| \frac{De_1}{dt} \right| + \varphi'(t) = \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle + \varphi'(t) = \\ &= \langle e_{1u}, e_2 \rangle u'(t) + \langle e_{1v}, e_2 \rangle v'(t) + \varphi'(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $F = 0$, teremos (cf. §2)

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = E_u - \frac{1}{2} E_v = -\frac{1}{2} E_v,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \langle e_{1u}, e_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\langle e_{1v}, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

Conclue-se que

$$\left| \frac{D\omega}{dt} \right| = \frac{1}{2 \sqrt{EG}} \left[G_u v'(t) - E_v u'(t) \right] + \varphi'(t), \quad (8)$$

que é a expressão procurada.

Em particular, se ω é o campo de vetores tangentes a $X(s)$, onde s é o comprimento de arco

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[G_u v'(s) - E_v u'(s) \right] + \varphi'(s). \quad (9)$$

Estamos agora em condições de demonstrar o

Teorema de Gauss-Bonnet (local). Seja p um

ponto de uma superfície S e V uma vizinhança de p para a qual é válida uma parametrização ortogonal. Seja C uma curva fechada, regular por partes, limitando uma região A

em V , e sejam α_i , $i = 1, \dots, n$, os ângulos das tangentes nos pontos não regulares de C . Então

$$\int_C k_g ds + \iint_A k d\sigma - \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

onde k_g é a curvatura geodésica e s o comprimento de arco de C , e K é a curvatura Gaussiana de S .

Demonstração - Sejam C_i , $i = 1, \dots, n$, as partes regulares de C , $X(u, v)$ uma parametrização ortogonal de V e $X(u(s), v(s))$ a expressão de C nessa parametrização. Integrando (9), obtemos

$$\begin{aligned} \int_C k_g ds &= \sum_i \int_{C_i} \left(\frac{1}{2\sqrt{EG}} G_u du - \frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v dv \right) + \\ &+ \sum_i \int_{C_i} \varphi'(s) ds \end{aligned}$$

Utilizaremos agora o teorema de Gauss-Green para o plano $u-v$ o qual afirma que se $P(u, v)$ e $Q(u, v)$ são funções diferenciáveis então

$$\sum_i \int_{C_i} Pdu + Qdv = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv.$$

Decorre daí que

$$\int_C k_g ds = - \iint_A \left\{ \left(\frac{E_v}{2 EG} \right)_u + \left(\frac{G_u}{2 EG} \right)_v \right\} du dv +$$

$$+ \sum_i \int_{C_i} \frac{d\varphi}{ds} ds .$$

Utilizando a fórmula de Gauss (Cf. §1) para $F=0$, é fácil ver que o integrando da integral dupla é a curvatura Gaussiana. Então

$$\int_C k_g ds + \iint_A K d\sigma = \sum_i \int_{C_i} \frac{d\varphi}{ds} ds .$$

Se C fôsse uma curva regular, a integral do segundo membro seria a variação total do ângulo da tangente, até voltar à sua posição inicial. Esse ângulo é evidentemente um múltiplo de 2π , e deve variar continuamente, quando contrairmos a curva de um modo contínuo. Como para uma curva suficientemente pequena, o ângulo é 2π , o valor da integral do segundo membro para uma curva regular é 2π . É possível dar uma demonstração rigorosa desse fato mas nos contentaremos com o argumento acima.

Para uma curva regular por partes, teremos, levando em conta os "saltos" α_i dos ângulos das tangentes,

$$\sum_i \int_{C_i} \frac{d\varphi}{ds} ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

o que dá finalmente

$$\int_C k_g ds + \int_A K d\sigma + \sum \alpha_i = 2\pi,$$

e conclue a demonstração.

O Teorema de Gauss-Bonnet, permite obter informações sôbre a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico (isto é, um triângulo cujos lados sejam geodésicas) suficientemente pequeno de uma superfície S . Seja T um triângulo geodésico contido na vizinhança V de S , onde vale o teorema de Gauss-Bonnet, e sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ os seus ângulos internos (ver fig. 4).

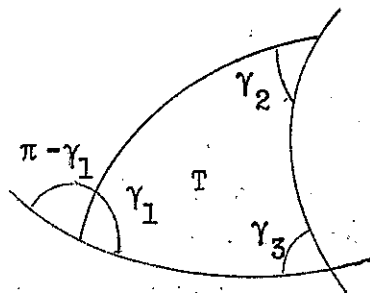


Fig. 4

Aplicando o teorema,

$$\iint_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 (\pi - \gamma_i) = 2\pi$$

ou seja,

$$\iint_{\mathcal{T}} K \, d\sigma = \sum_{i=1}^3 \gamma_i - \pi .$$

Conclue-se que se K é estritamente positivo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que π . Se $K < 0$, essa soma é menor do que π e se $K = 0$, o triângulo geodésico se comporta como um triângulo plano, isto é, a soma dos ângulos internos é igual a π .

O fato acima é usado para construir modelos locais de geometrias não euclidianas. Para detalhes, veja-se Struik, Classical Differential Geometry, Chap IV, 4-7.

A técnica usada para demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet, pode servir para obter uma interpretação da curvatura Gaussiana em termos do paralelismo. Para isso, seja C uma curva regular fechada, limitando uma região A contida em uma vizinhança onde é válido um sistema ortogonal de coordenadas, e voltemos a expressão (9). Pelo argumento usado na demonstração do teorema de Gauss-Bonnet, concluímos de (9) que

$$\int_C \left| \frac{D\omega}{dt} \right| ds = - \iint_A K d\sigma + \int_C \frac{d\varphi}{ds} ds . \quad (10)$$

Se ω é um campo paralelo, o primeiro membro se anula. Seja φ o ângulo que faz ω com uma dada posição inicial, após o transporte paralelo ao longo de C ,

voltando a essa posição inicial. O ângulo φ não depende da escolha do campo paralelo ω , e, de acôrco com (10), é dado por

$$\varphi = \iint_A K d\sigma .$$

Da expressão de φ , é claro que êle também não depende da posição inicial escolhida. Tomando o limite do quociente $\frac{\varphi}{A}$ quando a curva se contrae a um ponto p , temos

$$\lim_{C \rightarrow p} \frac{\varphi}{A} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint_A K d\sigma = K . \quad (11)$$

A expressão (11) pode ser usada para definir intrinsecamente a curvatura Gaussiana em termos do paralelismo.

A expressão (11) relaciona-se com o problema, que levantamos no §3 dêsse capítulo, de caracterizar as superfícies locais S para as quais o transporte paralelo ao longe de qualquer curva fechada, reproduz o vetor inicial. Tomando curvas suficientemente pequenas em torno de um ponto $p \in S$, vemos que a curvatura Gaussiana em p deve ser nula. Como p é arbitrário, a curvatura Gaussiana de S é nula. Mostraremos no parágrafo seguinte que isso implica em que todo ponto de S tem uma vizinhança isométrica a uma vizinhança do plano euclideano.

Observação - Como vimos no tratamento do teo

rema de Gauss-Bonnet, o uso de coordenadas especiais é um artifício conveniente para obter propriedades geométricas, que independem das coordenadas escolhidas. Entretanto, as propriedades obtidas por esse método são válidas em vizinhanças de pontos da superfície local e não na superfície local "inteira". Aparece mais uma vez o fenômeno de "contração" de superfícies locais, que é uma dificuldade intrínseca dos instrumentos naturais da Geometria Diferencial Clássica (teorema das funções implícitas, existência de equações diferenciais, etc.)

5 . Coordenadas geodésicas; superfícies de curvatura constante.

Nesse parágrafo obteremos um sistema de coordenadas locais em uma superfície S , para o qual a expressão da primeira forma quadrática é particularmente simples.

Esse sistema, que chamaremos coordenadas geodésicas, é obtido em uma vizinhança de $p \in S$ da seguinte maneira. Toma-se uma curva regular C passando por p , e considera-se a família de geodésicas normais a C . A família ortogonal a essas geodésicas contém, em particular, C . Vamos mostrar que é possível, em uma vizinhança de p , tomar essas duas famílias ortogonais como curvas coordenadas.

Para isso, seja $X(u,v)$ uma parametrização de S , na qual p tem coordenadas (u_0, v_0) e uma parame-

trização de C é dada por $X(u(t), v(t))$, com $X(t_0)=p$.
 Suponhamos que $v'(t_0) \neq 0$,
 o que permite representar
 C por $u = u(t(v))$ em
 uma vizinhança de p . A
 curva C é um membro da
 família $u = u(t(v))+\text{const}$
 tante. Como foi visto no
 Capítulo II, é possível
 parametrizar uma vizinhança
 de p de tal modo que
 essa família e sua famí-

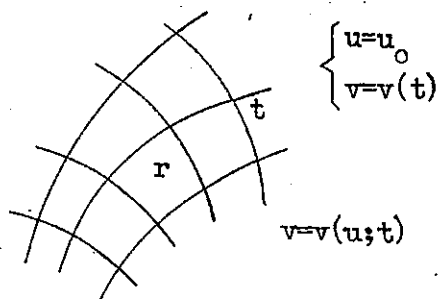


Fig. 5

lia ortogonal sejam as curvas coordenadas. Denotamos
 ainda por $X(u,v)$ essa parametrização e seja $u = u_0$,
 $v = v(t)$ a representação de C nessa nova parametriza-
 ção (ver fig. 5).

Por cada ponto de parametro t de C , traça-
 mos a geodésica normal a C , dada pela equação $v=v(u;t)$,
 onde t indica a dependência da geodésica da condição
 inicial t . Como as soluções das equações diferenciais,
 dependem diferenciavelmente das condições iniciais (Pon-
 tryagin, §22, pg. 170 e seguintes), $v(u;t)$ é diferen-
 ciável em t ; além disso, para todo t , tem-se
 $v(u_0;t) = v(t)$, que diferenciada dá

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} v(u_0;t)\right)_{t_0} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0} \neq 0.$$

Aplicando o teorema das funções implícitas, é possível resolver $v = v(u; t)$ em uma vizinhança de p , obtendo

$$t = \varphi(u, v), \text{ com } \varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0.$$

A equação $\varphi(u, v) = \text{const.}$ representa, portanto, a família de geodésicas normal a C , em uma vizinhança de p .

Dessa maneira, recaímos de novo na situação do Teorema do Capítulo II; tomando a família ortogonal às geodésicas $\varphi(u, v) = \text{const.}$, podemos parametrizar uma vizinhança de p de tal modo que as geodésicas e sua família sejam as curvas coordenadas.

Vamos ver como se exprime a primeira forma quadrática em um sistema de coordenadas geodésicas, que indicaremos ainda por $X(u, v)$. Como as curvas coordenadas são ortogonais, $F = 0$ e portanto

$$I = E(u, v)du^2 + G(u, v)dv^2.$$

Tomando a família de geodésicas como curvas $v = \text{const.}$, e introduzindo êsse fato na equação (4') das geodésicas (Cf. §3) concluímos que $\Gamma_{11}^2 = 0$. Por outro lado, como $F = 0$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{G} = 0$ (Cf. §2), e portanto, E não depende de v . Como E não depende de v , podemos introduzir um novo parâmetro $\bar{u} = \int \sqrt{E} du$, com o que a primeira forma quadrática simplifica-se

$$I = d\bar{u} + G(\bar{u}, v)dv^2.$$

O significado geométrico dessa mudança de parâmetro é que o novo parâmetro \bar{u} mede o comprimento de arco ao longo das geodésicas $v = \text{const.}$ Em outras palavras, o comprimento do segmento de qualquer geodésica $v = \text{const.}$, entre as curvas $\bar{u} = C_1$, $\bar{u} = C_2$ é dada por $|C_1 - C_2|$. As curvas $u = \text{const.}$ são chamadas por isso de paralelas geodésicas.

Introduzindo um novo parâmetro $\bar{v} = \int \sqrt{G(\bar{u}, v)} dv$, obtemos I na forma

$$I = d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{v}^2,$$

onde $\bar{G}(\bar{u}_0, \bar{v}) = \frac{G(\bar{u}_0, \bar{v})}{G(\bar{u}_0, v)} = 1$. A transformação feita significa tomar \bar{v} como comprimento de arco ao longo de C.

Finalmente, se C é uma geodésica, obtemos, substituindo $\bar{u} = \bar{u}_0$ nas equações (4') de uma geodésica, que $\bar{G}_u(\bar{u}_0, \bar{v}) = 0$.

As coordenadas geodésicas que acabamos de estabelecer, e que denotaremos ainda por $X(u, v)$, podem ser usadas para estudar as superfícies de curvatura K constante.

Utilizando a fórmula de Gauss (Cf. §1), a curvatura K em um sistema de coordenadas geodésicas é expressa por

$$K = - \frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} \quad (12)$$

A expressão (12) pode ser olhada como a equação diferencial a que deve satisfazer $G(u,v)$, para que a superfície tenha curvatura K . Se K é constante, a equação (12), que se escreve

$$(\sqrt{G})_{uu} + K(\sqrt{G}) = 0,$$

é uma equação diferencial linear de segunda ordem, com coeficientes constantes.

Consideraremos separadamente os casos: (1) $K=0$; (2) $K>0$; (3) $K<0$, e admitiremos que a curva básica do sistema $X(u,v)$ é uma geodésica, o que implica $G_u(u_0, v) = 0$.

(1) Se $K=0$, então $(\sqrt{G})_{uu} = 0$, donde $(\sqrt{G})_u = \text{const.}$ Como $(\sqrt{G})_u = \frac{G_u}{2\sqrt{G}}$, $G_u(u_0, v) = 0$ e $G(u_0, v) = 1$, concluímos que a constante de integração é nula, isto é, $(\sqrt{G})_u = 0$. Integrando mais uma vez, obtemos $\sqrt{G} = \text{const.}$; como $G(u, v) = 1$ a nova constante de integração é 1 e a primeira forma quadrática se escreve

$$I = du^2 + dv^2.$$

A expressão de I mostra que é possível estabelecer uma isometria entre a vizinhança da superfície onde é válido o sistema de coordenadas geodésicas e uma vizinhança do plano $u-v$. Para exprimir êsse fato, dizemos que as superfícies de curvatura nula são localmente isométricas ao plano euclídeo. Êsse fato foi mencionado no parágrafo anterior

(2) Se $K > 0$, a solução geral de (12) é dada por

$$\sqrt{G} = A(v) \cos \sqrt{K} u + B(v) \operatorname{sen} \sqrt{K} u .$$

Usando o fato de que $G_u(u_0, v) = 0$ e $G(u_0, v) = 1$, concluímos que $A(v) = 1$ e $B(v) = 0$. A primeira forma quadrática se escreve então

$$I = du^2 + (\cos^2 \sqrt{K} u) dv^2 .$$

Concluimos que as superfícies de curvatura K , estritamente positiva e constante, são localmente isométricas.

(3) Para $K < 0$, verifica-se, de maneira análoga, que

$$I = du^2 + (\cosh^2 \sqrt{-K} u) dv^2 ,$$

e portanto todas as superfícies de curvatura negativa K , constante, são localmente isométricas.

6 . Coordenadas normais.

Vamos agora mostrar que, dado um ponto p de uma superfície S , existe uma vizinhança V de p , tal que todo ponto $q \in V$ pode ser ligado a p por uma única geodésica contida em V . Esse fato foi usado no § do Capítulo III.

Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S , que podemos supor ortogonal, e sejam (u_0, v_0) as coordenadas de p nessa parametrização. Uma observação de caráter ge

ral sôbre $X(u,v)$ é que, como podemos supor o jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ em (u_0, v_0) , e portanto parametrizar uma vizinhança de p por $x = u$, $y = v$, $z = \theta(u,v)$, não perdemos em generalidade quando tornamos o plano tangente a p como plano $X O Y$. Isso implica em que $\theta(u_0, v_0) = 0$, $\theta_u(u_0, v_0) = \theta_v(u_0, v_0) = 0$. Decorre daí que podemos supor $|X_u| = |X_v| = 1$ em (u_0, v_0) .

Considere agora as equações diferenciais (4') (Cf. §3) das geodésicas parametrizadas pelo arco s . Pelo teorema de existência e unicidade existe uma vizinhança de p , na qual está definida a única solução $X(s) = X(u(s), v(s))$ de (4'), tal que $X(0) = p$ e $X'(0) = c_1 X_u + c_2 X_v$, onde c_1 e c_2 são dados e de modo que $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Como interessa considerar a dependência de $X(s)$ da condição inicial $X'(0)$, escrevemos as equações de $X(s)$ como

$$\begin{aligned} u(s) &= f_1(s; c_1, c_2) \\ v(s) &= f_2(s; c_1, c_2). \end{aligned}$$

Primeiro provaremos que $f_i(s; c_1, c_2)$, $i=1,2$, dependem realmente só dos produtos sc_1, sc_2 ; isto é, que podemos escrever

$$f_i(s; c_1, c_2) = F_i(sc_1, sc_2), \quad i = 1, 2.$$

Para isso, observe-se que, se λ é uma constante, as funções

$$u = f_1(\lambda s; c_1, c_2),$$

$$v = f_2(\lambda s; c_1, c_2),$$

são soluções de (4') que satisfazem às condições iniciais

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial s} \right)_{s=0} = \lambda c_i, \quad i = 1, 2.$$

Pela identidade das soluções que satisfazem às mesmas condições iniciais, conclue-se que

$$f_i(\lambda s; c_1, c_2) = f_i(s; \lambda c_1, \lambda c_2), \quad i=1,2, \quad (13)$$

para todo s . Fazendo em (13) $s = 1$, obtemos

$$f_i(\lambda; c_1, c_2) = f_i(1, \lambda c_1, \lambda c_2), \quad i=1,2.$$

Como a expressão acima é válida para qualquer λ , podemos fazer $\lambda = s$ e escrever

$$f_i(s; c_1, c_2) = f_i(1; sc_1, sc_2) = F_i(sc_1, sc_2), \quad i=1,2,$$

o que prova a afirmação feita.

Em seguida, fazemos $sc_1 = \bar{u}$, $sc_2 = \bar{v}$, e escrevemos

$$\begin{aligned} u &= F_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ v &= F_2(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned} \quad (14)$$

Como as soluções de (4') dependem diferencialmente das condições iniciais (Pontryagin, §22, pg. 170 e seguintes), as funções F_i são diferenciáveis. Além disso, as equações

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{u}} \right)_o \alpha_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{v}} \right)_o \alpha_2 = \alpha_1 ,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{u}} \right)_o \alpha_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{v}} \right)_o \alpha_2 = \alpha_2 ,$$

são válidas para quaisquer α_1 e α_2 , donde

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{u}} \right)_o = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{v}} \right)_o = 1 ,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{v}} \right)_o = \left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{u}} \right)_o = 0 ,$$

(15)

e, portanto,

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0 \quad \text{em } (0,0)$$

Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança U de $(0,0)$ no plano $\bar{u} - \bar{v}$, tal que a aplicação $h: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do plano $\bar{u} - \bar{v}$ no plano $u - v$, definida por (14), é biunívoca e sôbre uma vizinhança W de (u_0, v_0) ; além disso, a inversa dessa aplicação é diferenciável. Em outras palavras, dado um ponto $q \in X(W) = V$, de coordenadas (u, v) , existe um e um único par $\bar{u} = c_1 s$, $\bar{v} = c_2 s$, correspondente a q , e portanto uma e uma única geodésica (de vetor tangente (c_1, c_2) ligando p a q .

Para mostrar que essa geodésica está contida

em V , observamos que o que foi provado equivale a introduzir \bar{u}, \bar{v} como coordenadas em V . Nestas coordenadas, as equações das geodésicas passando por p são lineares: $\bar{u} = c_1 s$, $\bar{v} = c_2 s$; isto é, são imagens por X dos raios de um círculo aberto W centrado em (u_0, v_0) , e estão portanto contidos em $V = X(W)$.

Dessa maneira, a afirmação feita no começo dês se parágrafo, está completamente provada.

As coordenadas \bar{u}, \bar{v} , introduzidas no curso da demonstração, são chamadas coordenadas normais de Riemann.

Uma propriedade importante das coordenadas normais \bar{u}, \bar{v} em uma vizinhança de p , é que os coeficientes da primeira forma quadrática têm em p os valores $\bar{E} = \bar{G} = 1$, $\bar{F} = 0$, e as derivadas em ordem e \bar{u} a \bar{v} dêsseos coeficientes são nulas em p .

Com efeito, como $X(u, v)$ é uma parametrização ortogonal, com $E = G = 1$ em p , temos, por (14)

$$\begin{aligned} \bar{E}(0,0) &= E(u_0, v_0) \left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{u}} \right)_0^2 + G(u_0, v_0) \left(\frac{\partial F_2}{\partial \bar{u}} \right)_0^2 = \\ &= E(u_0, v_0) = 1 ; \end{aligned}$$

análogamente, obteríamos $\bar{F}(0,0) = F(u_0, v_0) = 0$ e $\bar{G}(0,0) = G(u_0, v_0) = 1$. Além disso, como as expressões lineares $\bar{u} = c_1 s$, $\bar{v} = c_2 s$, devem satisfazer às equações diferenciais (4') das geodésicas, concluimos que

$$\Gamma_{11}^1 c_1^2 + 2 \Gamma_{12}^1 c_1 c_2 + \Gamma_{22}^1 c_2^2 = 0 ,$$

$$\Gamma_{11}^2 c_1^2 + 2 \Gamma_{12}^2 c_1 c_2 + \Gamma_{22}^2 c_2^2 = 0 .$$

Os polinômios acima, em c_1 e c_2 , são nulos para todos os valores de c_1 e c_2 em p . Conclue-se que os símbolos de Christoffel são todos nulos em p . Utilizando as expressões do §2, vê-se imediatamente que as derivadas de E , F e G em ordem a \bar{u} e \bar{v} são nulas em p , o que demonstra a afirmação feita.

- o -

CAPÍTULO V

O TEOREMA FUNDAMENTAL

Nesse capítulo, procuraremos responder, para as superfícies locais regulares, uma pergunta análoga a que fizemos para as curvas no fim do Capítulo I. Todos os conceitos introduzidos até agora estão contidos na primeira e segunda formas quadráticas. Existirá a possibilidade de obter novas entidades independentes, ou a primeira e segunda formas quadráticas caracterizam localmente a superfície? Esse é um problema fundamental, que necessita ser resolvido antes de abandonarmos a teoria das superfícies locais.

Seja $X(u,v)$ uma parametrização de uma superfície S . Uma primeira observação a ser feita é que a primeira e segunda formas quadráticas não são independentes. Em verdade, a fórmula de Gauss (Cf. §1 do Cap. IV), fornece uma relação de dependência entre essas formas quadráticas, pois permite exprimir $eg-f^2$ em termos de E, F, G e suas derivadas. Dêsse modo, as funções E, F, G, e, f, g , não podem ser dadas arbitrariamente, mas certas condições de compatibilidade devem ser satisfeitas,

Para obter outras relações entre a primeira e

segunda formas quadráticas, observe-se que, como os vetores X_u, X_v, N são linearmente independentes, podemos escrever

$$(1) \quad \begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_{11} N, \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_{12} N, \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_{22} N, \\ N_u = \lambda_{11} X_u + \lambda_{12} X_v + \lambda_{10} N, \\ N_v = \lambda_{21} X_u + \lambda_{22} X_v + \lambda_{20} N. \end{cases}$$

Antes de mostrar que o sistema (1) pode fornecer as relações procuradas, precisamos verificar que os coeficientes de (1) podem ser expressos em termos da primeira e segunda formas quadráticas.

As três primeiras das equações de (1) foram obtidas no §3 do Capítulo IV, onde verificamos que os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k só dependem dos coeficientes E, F, G , e suas derivadas. Multiplicando escalarmente as três primeiras equações por N , vê-se que $L_{11} = e$, $L_{12} = f$, $L_{22} = g$. Para calcular os λ_{ij} , observamos que N_u e N_v pertencem ao plano tangente, e portanto, $\lambda_{10} = \lambda_{20} = 0$. Em seguida multiplicando escalarmente a expressão de N_u por X_u e X_v , obtemos

$$- e = \lambda_{11} E + \lambda_{12} F,$$

$$- f = \lambda_{11} E + \lambda_{12} G,$$

donde

$$\lambda_{11} = \frac{-e G + f F}{E G - F^2}, \quad \lambda_{12} = \frac{-E f + F e}{E G - F^2}$$

Analogamente, obteríamos

$$\lambda_{21} = \frac{g F - e G}{E G - F^2}, \quad \lambda_{22} = \frac{-g E + f E}{E G - F^2}$$

Portanto, os coeficientes de (1) podem ser expressos em termos da primeira e segunda formas quadráticas.

Uma maneira natural de se obter relação entre os coeficientes de (1) (e suas derivadas), é lembrar que a ordem das derivações parciais não afeta o resultado, isto é,

$$(2) \quad \begin{cases} (X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0, \\ (X_{vv})_u - (X_{vu})_v = 0, \\ N_{uv} - N_{vu} = 0. \end{cases}$$

Introduzindo os valores de (1) em (2), podemos escrever as equações (2) na forma

$$(2') \quad \begin{cases} A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N = 0, \\ A_2 X_u + B_2 X_v + C_2 N = 0, \\ A_3 X_u + B_3 X_v + C_3 N = 0, \end{cases}$$

onde $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$, são expressos em termos

de E, F, G, e, f, g , e suas derivadas. (2') implica na existência de nove relações

$$A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad C_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

entre a primeira e segunda formas quadráticas.

Em verdade, é possível verificar, que das equações acima, apenas 3 são independentes. Uma delas é a fórmula de Gauss já mencionada, e as outras duas

$$\left\{ \begin{array}{l} (EG - 2FF + GE)(e_v - f_u) - (Eg - 2Ff + Ge)(E_v - F_u) + \\ (EG - 2FF + GE)(f_v - g_u) - (Eg - 2Ff + Ge)(F_v - G_u) + \end{array} \right. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} E & E_u & e \\ F & F_u & f \\ G & G_u & g \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} E & E_v & e \\ F & F_v & f \\ G & G_v & g \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

são chamadas equações de Mainardi-Codazzi.

O aparecimento de relações de dependência entre as formas quadráticas vem, aparentemente, complicar o nosso problema, pois ainda não sabemos se elas são as únicas relações independentes possíveis. Que essas relações constituem precisamente as condições de integrabilidade que permitem reconstruir localmente a superfície a partir das duas formas quadráticas, é o conteúdo do teorema seguinte, demonstrado por O. Bonnet.

Teorema fundamental da teoria local das superfícies.

Sejam E, F, G, e, f, g , funções diferenciáveis definidas em um aberto A do plano $u-v$, tais que

$EG - F^2 > 0$ e verifiquem formalmente as equações de Gauss e de Mainardi-Codazzi, e seja (u_0, v_0) um ponto de A . Então existe uma vizinhança V de (u_0, v_0) em A e uma superfície local regular $X: V \rightarrow R^3$ que tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas, respectivamente. Além disso, a superfície $X(u, v)$ é única a menos de sua posição no espaço.

Demonstração - Motivado por (1), considere o seguinte sistema de equações diferenciais parciais nos vetores $\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)$

$$(1') \left\{ \begin{array}{l}
 \xi_u = \Gamma_{11}^1 \xi + \Gamma_{11}^2 \eta + L_{11} \zeta, \\
 \xi_v = \Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + L_{12} \zeta, \\
 \eta_u = \Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + L_{12} \zeta, \\
 \eta_v = \Gamma_{22}^1 \xi + \Gamma_{22}^2 \eta + L_{22} \zeta, \\
 \zeta_u = \lambda_{11} \xi + \lambda_{12} \eta, \\
 \zeta_v = \lambda_{21} \xi + \lambda_{22} \eta,
 \end{array} \right.$$

onde os coeficientes $\Gamma_{ij}^k, \lambda_{ij}, L_{ij}$, são obtidos a partir de E, F, G, e, f, g , como se fosse em uma superfície. A condição necessária e suficiente (condição de integrabilidade) para que um sistema desse tipo (linear e de primeira ordem) tenha uma única solução local para dadas con

dições iniciais, é que

$$\xi_{uv} = \xi_{vu}$$

$$\eta_{uv} = \eta_{vu}$$

$$\zeta_{uv} = \zeta_{vu} ;$$

para uma demonstração dêsse fato, veja-se J. Stoker, *Differential Geometry*, New York University, mimeografado 1956, Cap. V, §19. As equações acima dão, como vimos, precisamente as equações de Gauss e de Mainardi-Codazzi, que são satisfeitas por hipótese. O sistema (1') é portanto integrável.

Seja ξ, η, ζ uma solução de (1'), definida em uma vizinhança de (u_0, v_0) e tal que $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$, $\eta(u_0, v_0) = \eta_0$, $\zeta(u_0, v_0) = \zeta_0$, onde os vetores dados ξ_0, η_0, ζ_0 satisfazem às condições

$$\xi_0^2 = E(u_0, v_0), \quad \eta_0^2 = G(u_0, v_0), \quad \langle \xi_0, \eta_0 \rangle = F(u_0, v_0),$$

$$\langle \xi_0, \zeta_0 \rangle = \langle \eta_0, \zeta_0 \rangle = 0, \quad \zeta_0^2 = 1.$$

Como em (1') $\xi_v = \eta_u$, a condição de integrabilidade do sistema em $X(u, v)$,

$$X_u = \xi,$$

$$X_v = \eta,$$

onde ξ e η são dados pela solução mencionada de (1'), é satisfeita. Existe portanto, uma vizinhança V de

(u_0, v_0) e uma função vetorial diferenciável $X(u, v)$, definida em V , tal que $X(u_0, v_0) = p$, onde p é um ponto dado de R^3 .

Vamos mostrar que $X(u, v)$ é uma superfície local regular cujos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas são, respectivamente E, F, G , e e, f, g .

Expressando as derivadas de ξ^2, η^2, ζ^2 , $\langle \xi, \eta \rangle, \langle \xi, \zeta \rangle, \langle \eta, \zeta \rangle$ em termos dessas 6 quantidades por meio de (1'), obtemos um sistema de 12 equações diferenciais

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi^2)_u = F_1(\xi^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle), \\ (\xi^2)_v = F_2(\xi^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle), \\ \vdots \\ (\eta, \zeta)_v = F_{12}(\xi^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle). \end{array} \right.$$

Uma primeira solução do sistema (2') é certamente $\xi^2 = E, \eta^2 = G, \langle \xi, \eta \rangle = F, \langle \eta, \zeta \rangle = 0, \langle \xi, \zeta \rangle = 0, \zeta^2 = 1$. Por outro lado, formando, a partir da solução ξ, η, ζ , de (1'), as expressões $\xi^2, \eta^2, \dots, \langle \eta, \zeta \rangle$, teremos uma outra solução de (2) que tem as mesmas condições iniciais que a primeira.

Por unicidade, concluímos que

$$\xi^2 = E, \eta^2 = G, \zeta^2 = 1, \langle \xi, \eta \rangle = F, \langle \zeta, \xi \rangle = \\ = \langle \zeta, \eta \rangle = 0.$$

Usando o fato de que $X_u = \xi$, $X_v = \eta$, te-
mos

$$|X_u|^2 = E, \quad \langle X_u, X_v \rangle = F, \quad |X_v|^2 = G. \quad (3)$$

Como,

$$|X_u X_v|^2 = X_u^2 X_v^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0,$$

por hipótese, concluímos que $X_u X_v \neq 0$, e a superfície $X(u,v)$ é regular. Além disso, as expressões (3) mostram que a primeira forma quadrática de $X(u,v)$ tem coeficientes E, F, G .

Uma vez que $\langle \xi, \zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle = 0$, $\zeta^2 = 1$, ζ é um vetor normal a $X(u,v)$ e portanto os coeficientes da segunda quadrática são dadas por

$$\langle \zeta, \xi_u \rangle, \quad \langle \zeta, \xi_v \rangle, \quad \langle \zeta, \eta_v \rangle.$$

Os valores acima podem ser obtidos a partir do sistema (1'), dando

$$\langle \zeta, \xi_u \rangle = e, \quad \langle \zeta, \xi_v \rangle = f, \quad \langle \zeta, \eta_v \rangle = g,$$

o que mostra que e, f, g são os coeficientes da segunda forma quadrática de $X(u,v)$, e termina a primeira parte do teorema.

Para mostrar que a superfície é única a menos de sua posição no espaço, sejam $X(u,v)$ e $\bar{X}(u,v)$ duas superfícies, cujas primeira e segunda formas quadráticas coincidem. Fixamos um ponto $X(u_0, v_0)$ e transportamos

$\bar{X}(u,v)$ por uma translação, de modo que $\bar{X}(u_0, v_0) = X(u_0, v_0)$.

Como as primeiras e segundas formas quadráticas são iguais, é possível fazer o triedro $X_u(u_0, v_0)$, $X_v(u_0, v_0)$, $N(u_0, v_0)$ coincidir com o triedro $\bar{X}_u(u_0, v_0)$, $\bar{X}_v(u_0, v_0)$, $\bar{N}(u_0, v_0)$ por uma rotação.

O sistema (1') é satisfeito fazendo

$$\xi = X_u, \quad \eta = X_v, \quad \zeta = N$$

$$\xi = \bar{X}_u, \quad \eta = \bar{X}_v, \quad \zeta = \bar{N}.$$

Como ambas as soluções coincidem em (u_0, v_0) , temos, por unicidade

$$X_u = \bar{X}_u, \quad X_v = \bar{X}_v, \quad N = \bar{N}, \quad \text{para todo } (u,v).$$

Das duas primeiras equações concluímos que

$$X(u,v) = \bar{X}(u,v) + C,$$

onde C é um vetor constante; $X(u_0, v_0) = \bar{X}(u_0, v_0)$, temos que $C = 0$, o que termina a demonstração do teorema.

Observação - Dar a segunda forma quadrática, equivale a dar à diferencial dN da aplicação normal ou, o que é o mesmo, dar a curvatura Gaussiana e a curvatura média.

- Í N D I C E -

	Páginas
Apresentação	3
CAPÍTULO I - <u>Preliminares sobre curvas</u>	5-21
Teorema fundamental da teoria local das curvas.	17
CAPÍTULO II - <u>Superfícies locais regulares; primeira forma quadrática</u>	22-49
1 - Notação	22
2 - Superfícies locais regulares.	23
3 - Plano tangente; orientação.	35
4 - Primeira forma quadrática	39
5 - Área de uma superfície.	41
6 - Parametrização ortogonal.	44
CAPÍTULO III - <u>Superfícies imersas em R^3</u>	50-80
1 - Propriedades fundamentais	50
2 - A aplicação normal e a curvatura Gaussiana	68
3 - Segunda forma quadrática.	73
4 - Linhas assintóticas e linhas de curvatura.	77
CAPÍTULO IV - <u>Geometria intrínseca das superfícies</u> 81-116	81-116
1 - O Teorema "egregium"; isometrias.	81
2 - Símbolos de Christoffel	87
3 - Derivação covariante; transporte paralelo; geodésicas.	89
4 - Teorema de Gauss Bonnet (local)	97

	Páginas
5 - Coordenadas geodésicas; superficies de curvatura constante	106
6 - Coordenadas normais	111
CAPÍTULO V - <u>O Teorema fundamental</u>	117-125
Teorema fundamental da teoria local das superficies	120

- * -