

INTRODUÇÃO  
A  
TEORIA  
DA  
OBSTRUÇÃO

G. F. LOIBEL

VOLUMES I-~~II~~

GRUPOS DE HOMOTOPIA  
COMPLEXOS CELULARES

REDAÇÕES:  
A. M. BASTOS  
A. de S. PINHEIRO  
A. RUZANTE  
J. B. BOTELHO  
M. R. SAAB

PUBLICAÇÃO Nº 81

SERVIÇO DE PUBLICAÇÕES  
DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE S. CARLOS



IV COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À TEORIA DA OBSTRUÇÃO

G.F. Loibel

Redações de: A.M. Bastos  
A.S. Pinheiro  
A. Ruzante  
J.B. Botelho  
M.R. Saab

Publicação da Escola de Engenharia de São Carlos  
São Carlos, 1963



## P R E F Á C I O

A presente "Introdução à Teoria da Obstrução" resultou de um curso dado no primeiro semestre de 1963, na Escola de Engenharia de São Carlos.

A teoria da obstrução de S. Eilenberg é uma importante contribuição ao estudo da extensão das funções contínuas. Utiliza-se, como instrumentos principais, dos grupos de homotopia e dos grupos de cohomologia, cujas definições e primeiras propriedades desenvolvemos nos capítulos A e B, respectivamente. Restringimo-nos ali ao essencial para a compreensão do capítulo C que contém o desenvolvimento da teoria da obstrução. O teorema (A-9,10) é a chave para a demonstração dos principais teoremas do capítulo C.

Não entramos nas partes mais avançadas da teoria da obstrução que exige instrumentos mais refinados, como as operações cohomológicas.

Pretendemos apresentar futuramente continuação destas notas onde desenvolveremos algumas técnicas para o cálculo dos grupos de homotopia assim como aplicações da teoria da obstrução.

No fim de cada capítulo, o leitor encontrará uma pequena bibliografia composta de trabalhos consultados para a elaboração do texto ou cuja leitura se sugere para completar os diversos tópicos. As citações bibliográficas são dadas em colchetes.

Em cada capítulo numeramos todos os itens indiscriminadamente (teoremas, definições, fórmulas, etc., ou mesmo, simples seções às quais queremos dar mais destaque) com o número do parágrafo seguido pelo número corrente.

As referências do próprio capítulo são dadas pelo par número ( . ) e as de outro capítulo contêm ainda a maiúscula correspondente.

Estas notas servirão de base para um curso do 4º Colóquio Brasileiro de Matemática. A urgência de sua apresentação forçou-nos imprimir os capítulos A e B antes da redação do capítulo C; devi-

do a isto, neste último capítulo serão dados alguns tópicos cujo tratamento caberia melhor nos capítulos anteriores.

As redações foram realizadas em grande parte por Almerindo M. Bastos, Ary de Souza Pinheiro, Auster Ruzante, Junia B. Botelho e Mario R. Saab. Os Srs. Antonio Espada Filho e Luiz A. Fávaro fizeram a leitura das matrizes e elaboraram alguns dos pormenores. As figuras do texto foram desenhadas por Ary Pinheiro e Luiz Fávaro. Quero agradecer aqui a todos esta indispensável colaboração.

Agradeço também a Escola de Engenharia de São Carlos que possibilitou a impressão destas notas.

A Srta. Arlette Di Nardo pelo trabalho de datilografia e à Secção de Publicações da EESC estendo os meus agradecimentos.

GILBERTO FRANCISCO LOIBEL

Junho, 1963

Escola de Engenharia de São Carlos

## I N T R O D U Ç Ã O

O problema da extensão de funções é central em toda a Matemática. Trata-se de prolongar uma função  $f:A \longrightarrow Y$  a um campo de definição mais amplo  $X \supset A$  mantendo as propriedades particulares (continuidade, aditividade, ser monotônica, etc.) das funções da estrutura em estudo. O estudo desta questão deu origem a inúmeras construções e teorias: a construção dos números negativos surgiu da extensão da subtração a pares onde o minuendo é menor do que o subtraendo, a teoria dos limites procura estender uma função a um ponto sendo conhecida em pontos vizinhos do mesmo, o teorema do prolongamento da base para espaços vetoriais nos garante que uma aplicação linear se estende de um sub-espaço ao espaço todo; já para módulos e seus sub-módulos necessitamos de informações especiais.

Interessamo-nos aqui particularmente pelo problema da extensão de funções contínuas. Sejam dados  $A \subset X, Y$  espaços topológicos e  $f:A \longrightarrow Y$  uma função contínua. Sugerem-se as seguintes questões:

- a) Existe extensão de  $f$  a todo o espaço  $X$ , isto é, existe  $g:X \longrightarrow Y$  contínua e tal que  $g|_A = f$ ?
- a') Como construir efetivamente uma tal extensão?
- b) Existindo extensões, como classificá-las?
- c) Quais as informações que podemos extrair da existência ou não existência de extensões?

As respostas a estas perguntas dependem fundamentalmente dos nossos dados  $(f, X, A, Y)$ .

Existem situações clássicas em que o problema da extensão sempre tem solução:

- a)  $A$  é retracto de  $X$ , isto é, existe uma função contínua (retração)  $\rho:X \longrightarrow A$  que mantém os pontos de  $A$  fixos ( $\rho|_A = 1_A$ ). Realmente, se pusermos  $g = f \circ \rho : X \longrightarrow Y$ ,  $g|_A = f$ .

2)  $X$  é um poliedro,  $A$  um sub-poliedro,  $Y$  um espaço contraível em um ponto  $P$  (isto é, existe contração  $\chi_P: Y \longrightarrow P \in Y$  onde  $\chi_P \sim 1_Y$ ) disto vem que  $f$  é homotópica à constante  $P$ , como esta se estende ao espaço  $X$  segue, pelo fato que o par  $X, A$  possui a propriedade de extensão de homotopias em relação a qualquer espaço (ver Cap. C ou [Hu-1] pg. 13), que  $f$  também possui extensão.

3) O teorema de Urysohn (Bourbaki Topologia Ch. IX § 4) nos afirma que sendo  $X$  um espaço normal (isto é, de Hausdorff e tal que para dois fechados disjuntos  $F_1$  e  $F_2$  existem sempre dois abertos disjuntos  $O_1$  e  $O_2$  tais que  $F_1 \subset O_1$  e  $F_2 \subset O_2$ ),  $A$  um sub-espaço fechado e  $Y = [0, 1]$ , qualquer  $f: A \longrightarrow Y$  se estende a  $g: X \longrightarrow Y$ .

A fim de classificar as extensões vamos considerar equivalentes duas que são homotópicas relativamente ao sub-espaço  $A$ . Isto se justifica pelo fato de que extensões homotópicas têm as principais propriedades em comum e também porque, em geral, é impossível dar uma supervisão sobre todas as extensões. Observamos ainda que para uma larga classe de pares de espaços (ver o exemplo 2) acima) a existência de extensões de uma  $f: A \longrightarrow Y$  implica na existência de extensões para todas as funções  $g: A \longrightarrow Y$  que são homotópicas a  $f$ .

Um exemplo clássico de informação que se extrai de uma resposta negativa a um problema de extensão (a identidade de  $S^1$  não se estende a uma retração de  $B^2$  sobre  $S^1$ ) é o teorema do ponto fixo de Brouwer que diz que toda função contínua  $f: B^2 \longrightarrow B^2$  tem um ponto fixo, isto é, um ponto  $x \in B^2$  tal que  $f(x) = x$ . (Ver, por exemplo, [Ly] pg. 80)

Voltemos às questões a) e a'). Nestas notas trataremos do caso particular em que  $X, A$  é um par de poliedros e preocupamo-nos somente com os primeiros passos da extensão. Esta teoria admite generalizações seja para pares de espaços mais gerais (ver [Hu-1], seja para maior número de passos.

Seja  $K$  um complexo celular (ver Cap. B),  $L$  um sub-complexo. Sejam  $X = |K|$  e  $A = |L|$  os poliedros subjacentes. Seja  $f: A \longrightarrow Y$  contínua. Queremos estender  $f$  a todo  $X$ . Tentamos proceder passo a



passo. Isto é, em primeiro lugar definimos  $f_0$  estendendo  $f$  a todos os vértices de  $K$  não pertencendo a  $L$ . Isto é sempre possível. Seja agora  $b$  uma aresta de  $K$  que não pertence a  $L$ . Sejam  $P$  e  $Q$  seus extremos que são vértices de  $K$ .  $f_0(P) = P' \in Y$ ,  $f_0(Q) = Q' \in Y$ . Estender  $f$  à aresta  $b$  não é outra coisa senão achar um caminho unindo  $P'$  com  $Q'$ . Se o espaço  $Y$  for conexo por caminhos (c.p.c.)  $f_0$  poderá ser estendido simultaneamente a todas as arestas de  $K$ , pois elas não possuem pontos internos em comum. Seja  $f_1$  a extensão.

Se  $Y$  não for c.p.c. pode acontecer que  $P'$  e  $Q'$  estão em componentes conexas distintas. Neste caso, não há possibilidade de estender  $f_0$  a  $b$ : encontramos uma "obstrução". Vamos analisar esta situação. Se os vértices  $P$  e  $Q$  pertencem a  $L$  nada pode ser feito. Porém, se um deles ao menos não pertencer a  $L$  podemos tentar construir uma outra extensão  $f'_0$  de  $f$  aos vértices de  $K$ .

Suponhamos que obtivemos uma extensão  $f_{p-1}$  de  $f$  a todas as células de  $K$  com dimensões menores a  $p$ . Seja  $\sigma^p$  uma  $p$ -célula de  $K$  não pertencente a  $L$ .  $\sigma^p$  é homeomorfa à bola  $B^p \subset \mathbb{R}^p$ ; sua fronteira  $\dot{\sigma}^p$  é homeomorfa à esfera  $S^{p-1}$ . Esta fronteira é composta de células de dimensões menores do que  $p$ , portanto  $f_{p-1}$  é definida sobre  $\dot{\sigma}^p$ . Estender  $f_{p-1}$  sobre  $\sigma^p$  equivale a estender uma função definida na esfera  $S^{p-1}$  à bola  $B^p$ . Tendo em vista que as diversas  $p$ -células de um complexo celular têm as partes internas disjuntas, a obtenção de uma extensão  $f_p$  definida também em todas as  $p$ -células se reduz a diversas extensões simultâneas de funções definidas em  $S^{p-1}$  para  $B^p$ . (O capítulo A trata deste problema.) Também neste passo podemos encontrar uma "obstrução", isto é, a impossibilidade de estender  $f_{p-1}$  ao interior de uma ou mais  $p$ -células de  $K$ . Surge de novo a pergunta se tem significado redefinir  $f_{p-1}$  nas  $(p-1)$ -células a fim de obter uma extensão para todas as  $p$ -células. No capítulo C daremos um critério que responde a esta questão. Com o conhecimento deste critério, o anulamento de certos grupos de cohomologia nos informa sobre a possibilidade de executar diversos passos de nossa extensão.

Paralelamente ao problema da extensão, corre o da homotopia entre duas extensões, que ainda é um problema de extensões. No capítulo C obteremos também resultados sobre o mesmo.



# C A P Í T U L O A

## GRUPOS DE HOMOTOPIA

Como observamos na introdução, o problema da extensão de uma função  $f_r$  do  $r$ -esqueleto para o  $(r+1)$ -esqueleto se reduz a diversas extensões simultâneas de funções  $g_i$  definidas em  $S^r$  a toda  $B^{r+1}$ .

Um lema que demonstraremos abaixo mostra que  $f: S^r \rightarrow X$  se estende a  $g: B^{r+1} \rightarrow X$  se e somente se  $f$  é homotópica a uma constante. Então, será interessante estudar as classes de homotopia das aplicações de  $S^r$  em  $X$ .

Utilizando primeiro aplicações de cubos  $J^r \rightarrow X$ , que levam a fronteira  $J^r$  em um ponto fixo  $x_0 \in X$ , construímos um conjunto de classes de homotopia em correspondência biunívoca ao das classes de aplicações da esfera  $S^r$  em  $X$ . Para aquêles conjuntos é fácil dar estrutura de grupo. Utilizaremos posteriormente esta estrutura de grupo na resolução de diversos problemas.

Além disto, êstes grupos (os grupos de homotopia) que são invariantes topológicos nos dão importantes informações sôbre a "forma" dos espaços em estudo assim como sôbre o comportamento global de funções contínuas.

Neste capítulo damos a definição e as primeiras propriedades dêstes grupos de homotopia; em um capítulo posterior daremos os primeiros passos para o cálculo dos mesmos. Chamamos a atenção dos leitores para o fato que, apesar de sua definição bastante elementar, o cálculo dos grupos de homotopia de um espaço é extremamente difícil e, na maioria dos casos, ainda não resolvido efetivamente. Por outro lado, os resultados já existentes, por exemplo, sôbre os grupos das esferas e alguns outros tipos de espaços, permitem obter valiosíssimos resultados sôbre espaços e funções contínuas, inclusive pela aplicação sistemática da teoria das obstruções.

No fim deste capítulo daremos algumas proposições que formam a base para a demonstração dos teoremas da teoria da obstrução.

§ 1 - Homotopia. Tipo de homotopia.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos quaisquer,  $f, g: X \rightarrow Y$  funções contínuas e  $I$  o intervalo fechado  $[0, 1]$ .

(1.1) Definição - Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  e escrevemos  $f \sim g$  se existir uma função contínua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$(1.2) \quad F(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$F(x, 1) = g(x)$$

A função  $F$  é chamada homotopia entre  $f$  e  $g$ . Em outras palavras,  $f \sim g$  se existir uma família de funções dependendo continuamente de um parâmetro  $t \in [0, 1]$  através do qual podemos "deformar"  $f$  em  $g$ .

Seja  $A \subset X$  e  $f, g: X \rightarrow Y$  tais que  $f|_A = g|_A$  (isto é,  $f$  e  $g$  coincidem em  $A$ ). Então dizemos que a homotopia  $F$  entre  $f$  e  $g$  é relativa a  $A$  se, além de (1.2), tivermos  $F(a, t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$ . Neste caso escrevemos  $f \sim g \text{ rel } A$ . ( $f$  é homotópica a  $g$  relativa mente ao sub-espaço  $A$ ). Durante tal deformação as imagens dos pontos de  $A$  permanecem fixas.

(1.3) Exemplos - Seja  $X = S^1$  (circunferência) e  $Y$  qualquer.

Duas funções  $f, g: S^1 \rightarrow Y$  são curvas fechadas (imagens de uma circunferência) em  $Y$ . Dizer que  $f \sim g$  significa dizer que existe uma função contínua  $F$  do cilindro  $S^1 \times I$  em  $Y$  tal que, restrita à base inferior, seja igual à função  $f: (F(x, 0) = f(x))$  e, restrita à base superior, seja igual à função  $g: (F(x, 1) = g(x))$ . Isto é, nós podemos deformar a primeira curva, através de uma família contínua de curvas (as imagens das diversas secções do cilindro), na segunda curva.

Consideremos  $X = I$  e  $A = \{0, 1\}$ .

Uma função contínua  $f: I \rightarrow Y$  é um caminho em  $Y$ , de extremos  $a = f(0)$  e  $b = f(1)$ . Se  $g: I \rightarrow Y$  é outro caminho em  $Y$  com os mesmos extremos e se  $f \sim g \text{ rel } A$ , então isto quer dizer que

o caminho  $f$  pode ser deformado no caminho  $g$ , mantendo-se fixos os extremos  $a$  e  $b$  durante a deformação. Quando se fala em homotopia de caminhos fica subentendido que os extremos são fixos, senão todos os caminhos seriam homotópicos (a menos que estejam em componentes distintas).

Frequentemente usaremos "caminhos fechados" ou "laços", isto é, caminhos cujos extremos coincidem em um ponto. Se fixarmos um ponto  $y_0 \in Y$  para ser a origem e extremo de todos os caminhos considerados, este ponto será chamado "ponto base".

Notaremos com  $C(X, Y)$  o conjunto de todas as funções contínuas de  $X$  em  $Y$ .

(1.4) Propriedades da relação  $\sim$  em  $C(X, Y)$ .

$\sim 1: f \sim f \quad \forall f \in C(X, Y)$

Basta tomar  $F: X \times I \rightarrow Y$  como  $F(x, t) = f(x) \quad \forall t \in I$ .

$\sim 2: f \sim g \implies g \sim f$

Se  $F: X \times I \rightarrow Y$  é tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ , basta tomar  $G(x, t) = F(x, 1-t)$  e vem  $G(x, 0) = g(x)$  e  $G(x, 1) = f(x)$ .

$\sim 3: f \sim g \text{ e } g \sim h \implies f \sim h$

De fato, se  $f \sim g$ ,  $\exists F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ . Se  $g \sim h$ ,  $\exists G: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $G(x, 0) = g(x)$  e  $G(x, 1) = h(x)$ . Vamos definir  $H: X \times I \rightarrow Y$  do seguinte modo:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

as quais são contínuas e coincidem em sua intersecção; portanto,  $H$  é contínua, conforme o lema (1.5).

Temos ainda  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = h(x)$ .  $\therefore f \sim h$ .

As propriedades  $\sim 1$ ,  $\sim 2$  e  $\sim 3$  mostram que a relação é uma relação de equivalência  $\rho$  em  $C(X, Y)$  e divide portanto este conjunto em classes de equivalência.

Chamaremos  $\pi(X, Y) = C(X, Y)/\rho$ .

Os elementos de  $\pi(X, Y)$  são chamados classes de homotopia de  $C(X, Y)$ .

(1.5) Lema - Seja o espaço  $X$  a união de dois sub-espaços fechados  $A$  e  $B$ . Sejam  $f:A \rightarrow E$ ,  $g:B \rightarrow E$  duas funções contínuas com valores num espaço topológico  $E$  tais que  $f|_A \cap B = g|_A \cap B$ . Então, a função  $h:X \rightarrow E$  definida por  $h|_A = f$ ,  $h|_B = g$ , é contínua.

Demonstração - Seja  $F$  um conjunto fechado em  $E$ . Temos, evidentemente,

$$h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$$

Como  $f$  é contínua,  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $A$ ; mas  $A$  é fechado em  $X$ , donde  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ .

Analogamente, concluímos que  $g^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ . Logo,  $h^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ , donde  $h$  é contínua. c.q.d.

Vejam, agora, a seguinte propriedade que terá aplicação mais adiante:

(1.6) Lema - Sejam  $f_0 \sim f_1 : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow W$ ,

$$h : Z \rightarrow X.$$

Então,  $gf_0 \sim gf_1 : X \rightarrow W$ ,  $f_0 h \sim f_1 h : Z \rightarrow Y$ .

De fato, seja  $F : X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ :

$$F(x,0) = f_0(x)$$

$$F(x,1) = f_1(x).$$

A função  $gF : X \times I \rightarrow W$  é uma homotopia entre  $gf_0$  e  $gf_1$ :

$$gF(x,0) = gf_0(x)$$

$$gF(x,1) = gf_1(x).$$

Definindo  $G : Z \times I \rightarrow Y$  por  $G(z,t) = F(h(z),t)$   $z \in Z, t \in I$  temos  $G(z,0) = F(h(z),0) = f_0 h(z)$

$$G(z,1) = F(h(z),1) = f_1 h(z)$$

$$\therefore f_0 h \sim f_1 h.$$

(1.7) Definição - Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Dizemos que  $X$  e  $Y$  são do mesmo tipo de homotopia ( $X \sim Y$ ) se existem funções contínuas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tais que  $gf : X \rightarrow X$  é homotópica à função identidade  $l_X$  de  $X$  e  $fg : Y \rightarrow Y$  é homotópica à função identidade  $l_Y$  de  $Y$ .

Dizemos então que  $f, g$  são um par de equivalências de homotopia, ou que  $f$  e  $g$  são equivalências de homotopia.

(1.8) Exemplos -

1. Sejam X o disco e Y um ponto P .

Então  $f: X \rightarrow Y$  é tal que  $f(x) = P \quad \forall x \in X$  .

Seja  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $g(P) = C$  fixo em X , centro do disco.

Temos  $fg(P) = f(C) = P$  .°.  $fg = l_Y$  e  $fg \sim l_Y$  .

$$gf(x) = g(P) = C .$$

Façamos  $F((x,y), t) = (xt, yt)$  onde  $x, y$  são as coordenadas de um ponto do disco e  $0 \leq t \leq 1$  .

$$F((x,y), 0) = (0,0) = C = gf(x,y)$$

$$F((x,y), 1) = (x,y) = l_X(x,y)$$

$$\text{°.°. } gf \sim l_X$$

Portanto, o disco tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

2. Seja X o anel circular e Y a circunferência.

Um ponto qualquer do anel terá coordenadas polares  $(\theta, \rho)$  e um ponto qualquer da circunferência terá uma coordenada angular  $\varphi$  .

Vamos definir  $f: (\theta, \rho) \rightarrow \varphi = \theta$

$g: \varphi \rightarrow (\varphi, \rho_0)$  com  $\rho_1 \leq \rho_0 \leq \rho_2$  sendo  $\rho_1$  e  $\rho_2$  os raios dos círculos que limitam o anel,  $\rho_0$  constante.

Temos:

$$fg(\varphi) = f(\varphi, \rho_0) = \varphi \quad \text{°.°. } fg = l_Y$$

$$gf(\theta, \rho) = g(\theta) = (\theta, \rho_0) .$$

Definimos  $F((\theta, \rho), t) = (\theta, \rho_0 + (\rho - \rho_0)t)$  .

Teremos:

$$F((\theta, \rho), 0) = (\theta, \rho_0) = gf(\theta, \rho)$$

$$F((\theta, \rho), 1) = (\theta, \rho) = l_X(\theta, \rho)$$

$$\text{°.°. } gf \sim l_X .$$

Então o anel circular e a circunferência têm o mesmo tipo de homotopia.

A relação  $X \sim Y$  entre espaços topológicos é uma relação de equivalência:  $X \sim X$  : basta tomar  $f = g = l_X$

$$X \sim Y \implies Y \sim X :$$

$$X \sim Y \implies \exists f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X \text{ tais que } gf \sim l_X \text{ e}$$

$$fg \sim l_Y$$

°.  $\exists g: Y \rightarrow X, f: X \rightarrow Y$  tais que  $fg \sim 1_Y$  e  $gf \sim 1_X$ .  
 $X \sim Y, Y \sim Z \implies X \sim Z$  :

se  $X \sim Y$  sejam  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$  tais que  $gf \sim 1: X \rightarrow X$   
e  $fg \sim 1: Y \rightarrow Y$ .

Se  $Y \sim Z$  sejam  $u: Y \rightarrow Z$  e  $v: Z \rightarrow Y$  tais que  
 $vu \sim 1: Y \rightarrow Y$  e  $uv \sim 1: Z \rightarrow Z$ .

Consideremos as aplicações  $uf: X \rightarrow Z$  e  $gv: Z \rightarrow X$ .

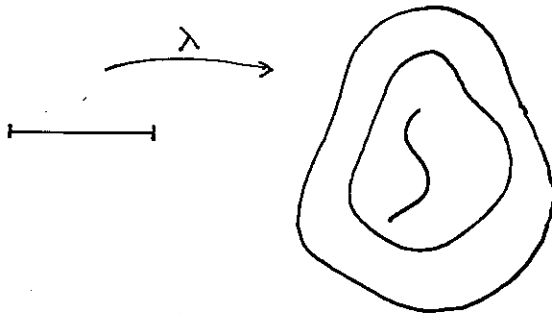
Como  $vu \sim 1: Y \rightarrow Y$ , pelo lema (1.6) vem que  $gvu \sim g: Y \rightarrow X$   
e  $gvuf \sim gf: X \rightarrow X$ . Mas,  $gf \sim 1: X \rightarrow X$ .  $\therefore gvuf \sim 1: X \rightarrow X$ .

Analogamente  $ufgv \sim uv \sim 1: Z \rightarrow Z$ , portanto  $\exists \varphi =$   
 $= uf: X \rightarrow Z$  e  $\phi = gv: Z \rightarrow X$  tais que  $\phi\varphi \sim 1_Z$  e  
 $\varphi\phi \sim 1_X$ , logo  $X \sim Z$ .

§ 2 - O grupo fundamental

Espaços conexos por caminhos. Seja  $E$  um dado espaço topológico e seja  $I$  o intervalo unitário  $0 \leq t \leq 1$ .

(2.1) Definição - Um caminho em  $E$  unindo dois pontos  $a$  e  $b$  de  $E$  é uma aplicação contínua  $\lambda$  de  $I$  em  $E$  tal que  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda(1) = b$ .



Diz-se que o caminho está em um sub-conjunto  $A$  de  $E$  se  $\lambda(I) \subset A$ .

Convém frizar aqui que o caminho  $\lambda$  é a aplicação e não o conjunto  $\lambda(I)$  dos pontos imagens pela aplicação.

(2.2) Definição - Um espaço topológico  $E$  é dito conexo por caminhos se, para cada par de pontos  $a$  e  $b$  de  $E$ , existe um caminho em  $E$  unindo  $a$  e  $b$ .

Se  $A$  é um conjunto em um espaço topológico  $E$ , então  $A$  é conexo por caminhos se cada par de pontos de  $A$  pode ser ligado por um caminho em  $A$ .

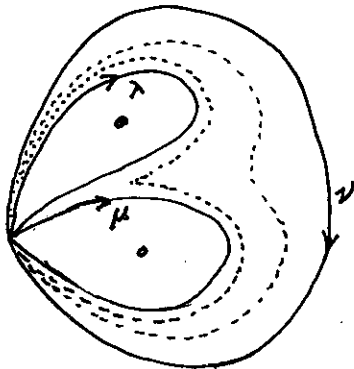
(2.3) Proposição - Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços topológicos e  $f$  uma aplicação contínua de  $E$  sobre  $F$ . Então, se  $E$  é conexo por caminhos,  $F$  também o é.



Demonstração - Basta provar que existe um caminho ligando 2 pontos quaisquer a e b de F .

Como a aplicação é sôbre existem pontos  $a'$  e  $b'$  em E tais que  $f(a') = a$  e  $f(b') = b$  . E como E é conexo por caminhos, existe um caminho  $\lambda$  em E ligando  $a'$  e  $b'$  , isto é, tal que  $\lambda(0) = a'$  e  $\lambda(1) = b'$  . Então  $f \circ \lambda$  é uma aplicação contínua de I em F tal que  $(f \circ \lambda)(0) = a$  e  $(f \circ \lambda)(1) = b$  , isto é,  $f \circ \lambda$  é um caminho em F unindo a e b .

(2.4) O grupo fundamental. Seja o espaço E o plano Euclideo do qual removemos dois pontos p e q e consideremos os laços em E com origem e extremidade em um terceiro ponto a . Se  $\lambda$  ,  $\mu$  e  $\nu$



são três laços conforme a figura, intuitivamente falando, é claro que  $\nu$  pode ser deformado no laço composto de  $\lambda$  e  $\mu$  , como ilustra a figura; em outras palavras, é natural dizer que  $\nu$  é equivalente a  $\lambda$  continuado por  $\mu$  (sob a homotopia dos laços com ponto base 0) .

Um caminho natural de exprimir a deformabilidade de  $\nu$  em  $\lambda$  continuado por  $\mu$  é dizer que é homotópico a  $\lambda \circ \mu$  .

(2.5) Definição - Sejam  $\lambda$  e  $\mu$  dois laços em um espaço topológico E , com base em um ponto a . O símbolo  $\lambda \circ \mu$  indicará a seguinte aplicação de I em E :

$$(\lambda \circ \mu)(s) = \begin{cases} \lambda(2s) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2s-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

É fácil verificar que  $\lambda \circ \mu$  é contínua (aplicar o lema 1.5) então, define um caminho em E ; êste caminho é chamado o produto de  $\lambda$  e  $\mu$  . Ainda, da definição,  $(\lambda \circ \mu)(0) = (\lambda \circ \mu)(1) = a$  e, então, o produto de dois laços com base em a é ainda um laço com base em a .

(2.6) Proposição = Se  $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$  são laços em um espaço topológico  $E$  com base em um ponto  $a$  e se  $\lambda \sim \lambda', \mu \sim \mu'$  então  $\lambda \circ \mu \sim \lambda' \circ \mu'$

Demonstração - Sendo  $\lambda \sim \lambda'$  e  $\mu \sim \mu'$  existem aplicações contínuas  $F$  e  $G$  de  $I^2$  em  $E$  tais que

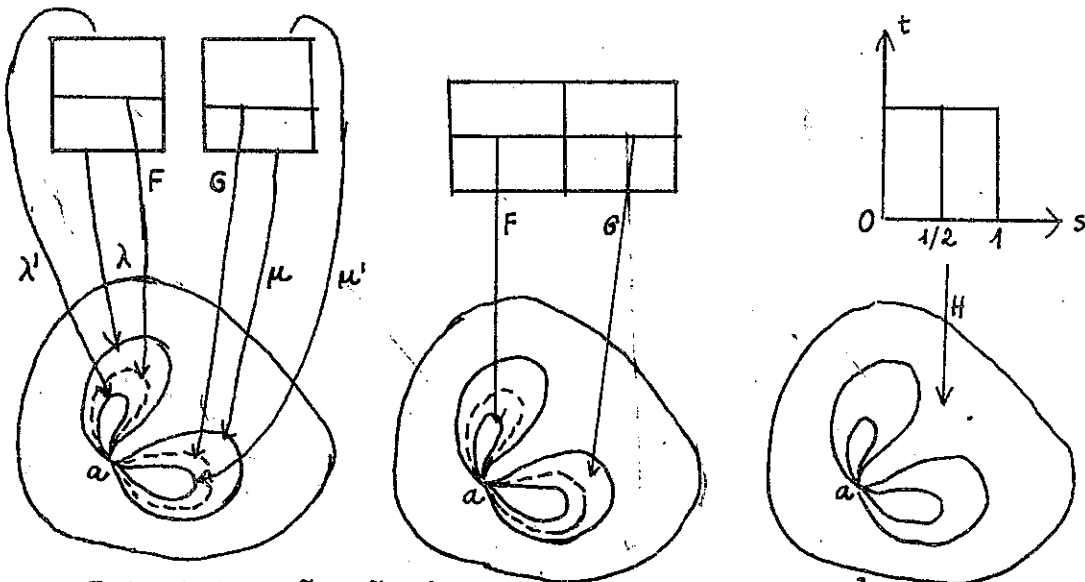
- (1)  $F(s, 0) = \lambda(s)$
- (2)  $F(s, 1) = \lambda'(s)$
- (3)  $G(s, 0) = \mu(s)$
- (4)  $G(s, 1) = \mu'(s)$
- (5)  $F(0, t) = F(1, t) = G(0, t) = G(1, t) = a$ .

Temos:

$$(\lambda' \circ \mu')(s) = \begin{cases} \lambda'(2s) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \mu'(2s-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Seja  $H$  definida por:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1, t) & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Esta definição não é contraditória para  $s = \frac{1}{2}$ , pois, usando a primeira parte da definição de  $H$ ,  $H(\frac{1}{2}, t) = F(1, t) = a$  pela (5) para todo  $t$  e usando a segunda parte da definição de  $H$ ,  $H(\frac{1}{2}, t) = G(0, t) = a$  para todo  $t$ .

A continuidade de  $H$  segue-se do lema (1.5). É imediato verificar que  $H(s,0) = \lambda \circ \mu$  e  $H(s,1) = \lambda' \circ \mu'$ .

(2.7) Definição - Sejam  $[\lambda]$  e  $[\mu]$  duas classes de homotopia de laços com base  $\underline{a}$  e sejam  $\lambda$  e  $\mu$  laços pertencentes a  $[\lambda]$  e  $[\mu]$ , respectivamente. O produto  $[\lambda] \cdot [\mu]$  é, por definição, a classe de homotopia à qual pertence o laço  $\lambda \circ \mu$ . Isto é,

$$[\lambda] \cdot [\mu] = [\lambda \circ \mu].$$

Pela proposição anterior, a classe de homotopia  $[\lambda \circ \mu]$  depende apenas das classes  $[\lambda]$  e  $[\mu]$  e não dos representantes  $\lambda$  e  $\mu$ .

Sejam  $M(E,a)$  o conjunto dos laços em  $E$  com base  $\underline{a}$  e  $\pi_1(E,a)$  o conjunto de tôdas as classes de homotopia dos laços em  $E$  com base  $\underline{a}$ .

Em  $M(E,a)$  foi definida uma lei de composição de laços, a qual induz em  $\pi_1(E,a)$  uma lei de composição de classes de homotopia. Demonstramos, agora, que  $\pi_1(E,a)$  é um grupo (em geral não abeliano), que chamaremos de grupo fundamental de  $E$  com ponto base  $\underline{a}$ .

(2.8) Teorema -  $\pi_1(E,a)$  é um grupo.

Com efeito,

- 1) compondo dois elementos de  $\pi_1$  obtém-se um elemento de  $\pi_1$ .
- 2) Esta lei de composição interna é associativa.

Sejam  $\lambda, \mu, \nu$  três laços com base  $\underline{a}$  em  $E$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  suas classes de homotopia.

Deve-se mostrar que  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  ou, o que é a mesma coisa, pela definição de produto de classes de homotopia, que

$$(\lambda \circ \mu) \circ \nu \sim \lambda \circ (\mu \circ \nu).$$

Temos que

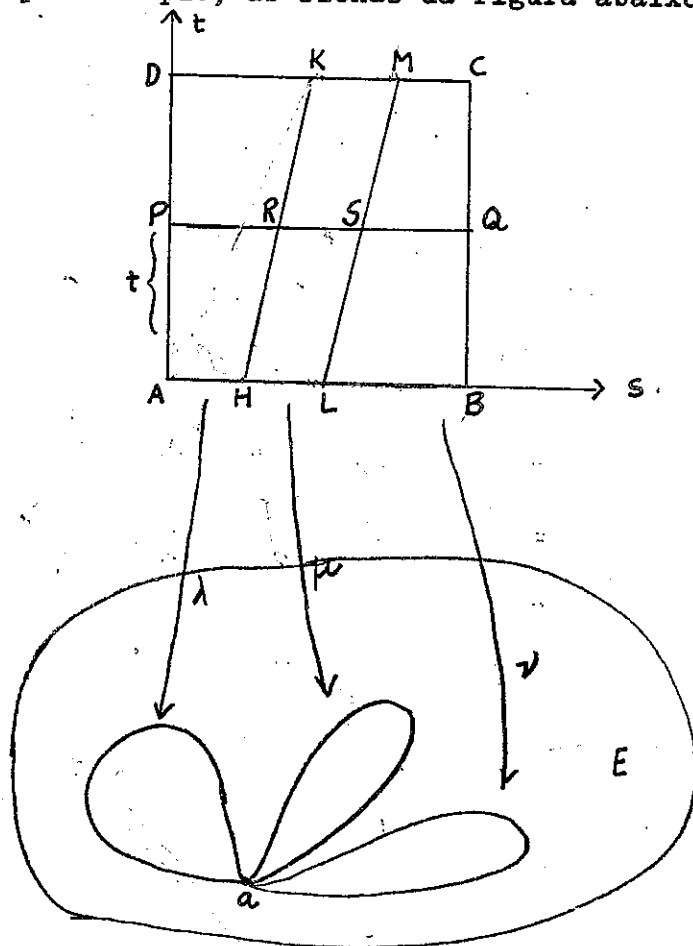
$$(2.9) \quad ((\lambda \circ \mu) \circ \nu)(s) = \begin{cases} \lambda(4s) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \mu(4s-1) & \text{para } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \nu(2s-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(2.10) \quad (\lambda \circ (\mu \circ \nu))(s) = \begin{cases} \lambda(2s) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \mu(4s-2) & \text{para } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \nu(4s-3) & \text{para } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Observando as equações (2.9) vê-se que I está dividido em 3 partes de comprimentos  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $(\lambda \circ \mu) \circ \nu$  é construída aplicando  $\lambda$  ao primeiro destes sub-intervalos,  $\mu$  ao segundo e  $\nu$  ao terceiro, sendo feita em cada caso a apropriada mudança de escala.

$\lambda \circ (\mu \circ \nu)$  é construída de maneira análoga, exceto que as subdivisões são, neste caso, de comprimento  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ .

A idéia, agora, é fazer uma transição contínua de  $(\lambda \circ \mu) \circ \nu$  a  $\lambda \circ (\mu \circ \nu)$  mudando os três sub-intervalos de comprimentos  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  nos de comprimentos  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ , simplesmente esticando o primeiro, comprimindo o terceiro e deslizando o segundo obliquamente, como indicam, por exemplo, as flexas da figura abaixo.



É fácil ver que

$$F(s, t) = \begin{cases} \lambda \left( \frac{4s}{1+t} \right) & \text{em PR (para } 0 \rightarrow \leq s \leq \frac{1}{4}(1+t)) \\ \mu (4s-t-1) & \text{em RS (para } \frac{1}{4}(1+t) \leq s \leq \frac{1}{4}(2+t)) \\ \nu \left( \frac{4s-t-2}{2-t} \right) & \text{em SQ (para } \frac{1}{4}(2+t) \leq s \leq 1) \end{cases}$$

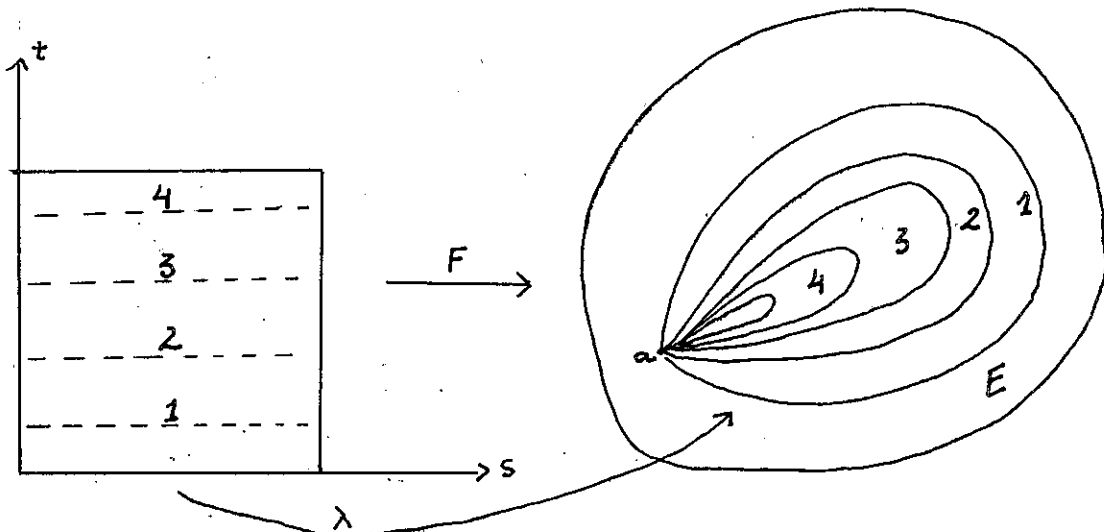
é a homotopia adequada.

3) Existe um elemento identidade - Consideremos, antes, as seguintes definições:

(2.11) Definição - O laço nulo com base  $\underline{a}$ , em  $E$ , é a aplicação constante  $\varepsilon : I \rightarrow E$  definida por  $\varepsilon(s) = a$  para todo  $s \in I$ .

(2.12) Definição - Um laço  $\lambda$  com base  $\underline{a}$ , em  $E$ , é dito contraível a  $\underline{a}$  ou homotópico a uma constante em relação ao ponto base  $\underline{a}$  se  $\lambda$  é homotópico a  $\varepsilon$ .

Observe-se que as linhas horizontais, cada uma correspondente a um determinado valor de  $t$ , são levadas em laços, em  $E$ , que vão se tornando cada vez menores à medida que  $t$  cresce.



Demonstremos, agora, que a classe de homotopia  $[\varepsilon]$  do laço nulo atua como identidade, isto é, que  $[\lambda] \cdot [\varepsilon] = [\varepsilon] \cdot [\lambda] = [\lambda]$  ou que  $\lambda \circ \varepsilon \sim \varepsilon \circ \lambda \sim \lambda$  para todo laço  $\lambda$  com base  $\underline{a}$ , pois

$$F(s, t) = \begin{cases} a & \text{(para } 0 \rightarrow \leq s \leq \frac{1}{2}(1-t)) \\ \lambda \left( \frac{2s+t-1}{t+1} \right) & \text{(para } \frac{1}{2}(1-t) \leq s \leq 1) \end{cases}$$

dá a homotopia desejada.

Analogamente se demonstra que  $\lambda \circ \varepsilon \sim \lambda$ . Portanto,  $[\varepsilon]$  é o elemento unidade.

4) Cada classe de homotopia tem uma inversa.

(2.13) Definição - Seja  $\lambda$  um dado laço com base  $\underline{a}$ , em  $E$ . O laço oposto, que indicaremos com  $\lambda^{-1}$ , será a aplicação de  $I$  em  $E$  definida por

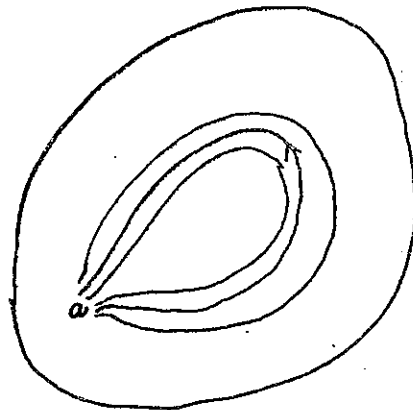
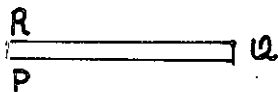
$$\lambda^{-1}(s) = \lambda(1-s).$$

Demonstremos que a classe  $[\lambda^{-1}]$  que indicaremos com  $[\lambda]^{-1}$  é a inversa de  $[\lambda]$ , isto é,

(2.14) -  $[\lambda] \cdot [\lambda]^{-1} = [\varepsilon]$  e  $[\lambda]^{-1} \cdot [\lambda] = [\varepsilon]$  isto é,  
 $\lambda \circ \lambda^{-1} \sim \varepsilon$  e  $\lambda^{-1} \circ \lambda \sim \varepsilon$ .

Demonstremos que é  $\lambda \circ \lambda^{-1} \sim \varepsilon$ .

Sugere-se a construção da homotopia pelo seguinte: o laço  $\lambda$  será representado enfiando um pedaço de fio (representando  $I$ ) num tubo fino, curvo, acompanhando  $\lambda$  conforme mostra a figura.



$\lambda^{-1}$  será representado colocando o fio através do tubo no sentido oposto.

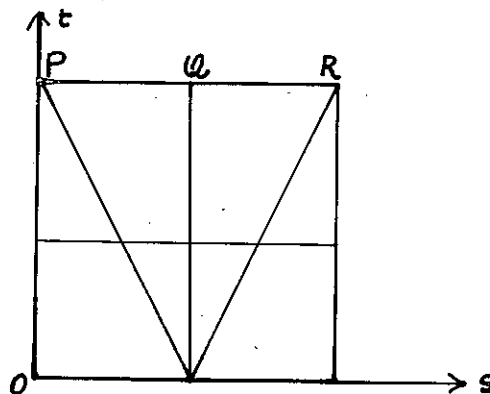
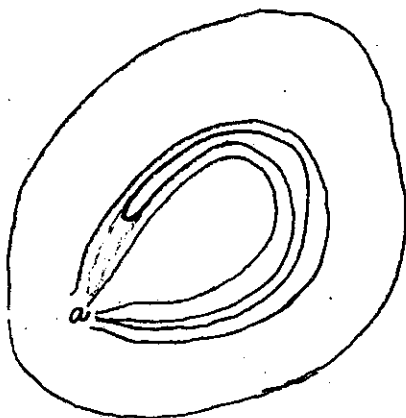
O produto  $\lambda \circ \lambda^{-1}$  é definido aplicando  $\lambda$  à primeira metade PQ de  $I$  e  $\lambda^{-1}$  à segunda metade QR, dobrando a escala em cada caso. Isto significa no modelo esticar PQR duas vezes o seu comprimento, dobrar QR sobre QP e enfiar, depois, o fio duplo no tubo na direção a  $\underline{a}$ , formando uma alça no interior do tubo.

A deformação de  $\lambda \circ \lambda^{-1}$  ao ponto  $\underline{a}$  será representada enrolando a alça a partir de  $\underline{a}$  na direção a  $\underline{a}$ , até reduzi-la ao ponto  $\underline{a}$ .

Observe-se que no estágio  $t$  desta operação, um comprimento  $\frac{t}{2}$  de cada metade do intervalo unitário PQR original é acumulado no ponto  $\lambda(1-t)$  a partir de Q enquanto que o restante do intervalo unitário se situa ao longo de, apenas, uma parte do tubo.

Isto sugere que a homotopia procurada é:

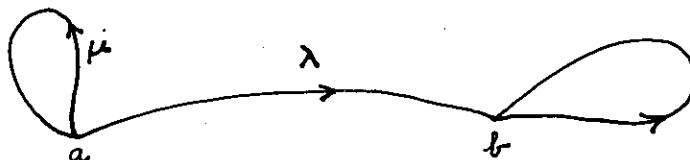
$$(2.15) \quad F(s, t) = \begin{cases} \lambda(2s) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ \lambda(2-2s) & \text{para } \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \\ \lambda(1-t) & \text{para } \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \end{cases}$$



Mudança do ponto base.

(2.15) Proposição - Se  $E$  é um espaço topológico e  $a$  e  $b$  são 2 pontos de  $E$  os quais podem ser ligados por um caminho em  $E$ , então  $\pi(E, a)$  e  $\pi(E, b)$  são isomorfos.

Em outras palavras, o grupo fundamental não depende da escolha do ponto base.



Seja  $\lambda$  um caminho em  $E$  do ponto  $a$  ao ponto  $b$ . À classe  $[\mu] \in \pi(E, a)$  associemos a classe  $[\mu'] = [\lambda^{-1}\mu\lambda] \in \pi(E, b)$ . A classe  $[\mu']$  fica unívocamente determinada pela classe  $[\mu]$ , isto é, não depende da escolha do laço  $\mu$  dentro da sua classe (é suposto  $\lambda$  fixado), como facilmente se verifica.

Seja então  $[\mu'] = \varphi([\mu])$ .

Mostremos que  $\varphi$  é um isomorfismo do grupo  $\pi(E, a)$  sobre o grupo  $\pi(E, b)$ .

A classe  $[\mu'] \in \pi(E, b)$  façamos corresponder a classe  $[\lambda \mu' \lambda^{-1}] \in \pi(E, a)$ . Mas esta classe é precisamente  $[\mu]$ , pois  $[\lambda \mu' \lambda^{-1}] = [\lambda \lambda^{-1} \mu \lambda \lambda^{-1}] = [\mu]$  e é, por sua vez, unívocamente determinada pela classe  $[\mu']$ . Logo, a correspondência  $[\mu'] \rightarrow [\mu]$  é precisamente a inversa da anterior e a aplicação  $\varphi$  é biunívoca sobre. Mostremos que é também um homomorfismo, isto é, preserva a lei da multiplicação. Com efeito, sejam  $[\mu]$  e  $[\nu]$  dois elementos de  $\pi(E, a)$  e  $[\mu'] = \varphi([\mu])$ ,  $[\nu'] = \varphi([\nu])$  as classes correspondentes de  $\pi(E, b)$ . Temos:

$$\begin{aligned} \varphi([\mu][\nu]) &= \varphi([\mu\nu]) = [\lambda^{-1} \mu \nu \lambda] = [\lambda^{-1} \mu \lambda \lambda^{-1} \nu \lambda] = \\ &= [\lambda^{-1} \mu \lambda][\lambda^{-1} \nu \lambda] = \varphi([\mu]) \cdot \varphi([\nu]) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Portanto,  $\varphi$  estabelece o isomorfismo do grupo  $\pi(E, a)$  sobre o grupo  $\pi(E, b)$ .

Observação - Nas transformações que acabamos de empregar, apoiamo-nos sempre no fato de que, sendo  $\lambda \lambda^{-1}$  homotópico a zero, não varia a classe dos laços quando são compostos com laços homotópicos a zero.

O isomorfismo entre o grupo fundamental  $\pi(E, a)$  e o  $\pi(E, b)$  depende ainda da escolha do caminho auxiliar  $\lambda$ . Se, em lugar de  $\lambda$ , tomarmos outro caminho  $\omega$  no posto da correspondência

$$[\mu] \rightarrow [\lambda^{-1} \mu \lambda] \quad (1) \text{ aparecerá}$$

$$\begin{aligned} [\mu] \rightarrow [\omega^{-1} \mu \omega] &= [\omega^{-1} \lambda \lambda^{-1} \mu \lambda \lambda^{-1} \omega] = \\ &= [(\omega^{-1} \lambda) \lambda^{-1} \mu \lambda (\omega^{-1} \lambda)^{-1}] \quad (2). \end{aligned}$$

Logo, para obter o isomorfismo (2) a partir de (1) é necessário transformar todos os elementos de  $\pi(E, b)$  mediante o elemento fixo  $[\omega^{-1} \lambda]$ : isto é, o isomorfismo entre  $\pi(E, a)$  e  $\pi(E, b)$  somente fica determinado a menos dos automorfismos interiores de  $\pi(E, b)$ .

(2.16) - O grupo fundamental é um invariante topológico. A demonstração deste fato se dá análogamente à demonstração do § 7.



§ 3 - Construções geométricas

Sejam  $I = [0, 1]$  e  $J = [-1, 1]$  .

Definimos

$$I^n = \underbrace{I \times I \times \dots \times I}_n = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_i \leq 1 \} .$$

$$J^n = \underbrace{J \times J \times \dots \times J}_n = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \mid -1 \leq t_i \leq 1 \}$$

$$I^n[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad 0 \leq a_i < b_i \leq 1$$

temos  $I^n[a_i, b_i] \subset I^n$

$$J^n[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad -1 \leq a_i < b_i \leq 1$$

temos  $J^n[a_i, b_i] \subset J^n$  .

$I^n[a_i, b_i]$  e  $J^n[a_i, b_i]$  , no fundo, são a mesma coisa; usamos notações diferentes para indicar a inclusão em  $I^n$  e  $J^n$  respectivamente.

As fronteiras dos cubos  $I^n$  e  $J^n$  são:

$$\dot{I}^n = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n \mid \exists i \mid t_i = 0 \text{ ou } t_i = 1 \}$$

$$\dot{J}^n = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in J^n \mid \exists i \mid t_i = \pm 1 \} .$$

Analogamente se definem as fronteiras dos sub-paralelepípedos.

(3.1) - Vamos construir uma aplicação  $\mathcal{E}_a: J^n \rightarrow J^n$  (expansão do sub-cubo  $J_a^n$ , onde  $J_a^n = J^n[-a, a]$  é o sub-cubo concêntrico de  $J^n$ , de aresta  $2a$ ) que leva  $J_a^n$  homeomórficamente sobre  $J^n$  e leva  $J^n - J_a^n$  em  $\dot{J}^n$  .

Façamos:

$$\mathcal{E}_a(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \frac{1}{a}(t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } |t_i| \leq a \\ \frac{1}{\max |t_i|} (t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \max |t_i| \geq a . \end{cases}$$

Considerando a função  $F: J^n \times I \rightarrow J^n$  dada por  $F(t_1, t_2, \dots, t_n, s) = (1-s)(t_1, t_2, \dots, t_n) + s \cdot \varepsilon_a(t_1, t_2, \dots, t_n)$  vemos que  $\varepsilon_a \sim 1_{J^n}$  rel  $J^n$ .

(3.2) Definição - Uma função  $g: J^n, J^n \rightarrow X, x_0$  diz-se "concentrada" ao sub-conjunto  $Q \subset J^n$  se  $g((t_i)) = x_0$  qualquer que seja  $(t_i) \in J^n - Q$ .

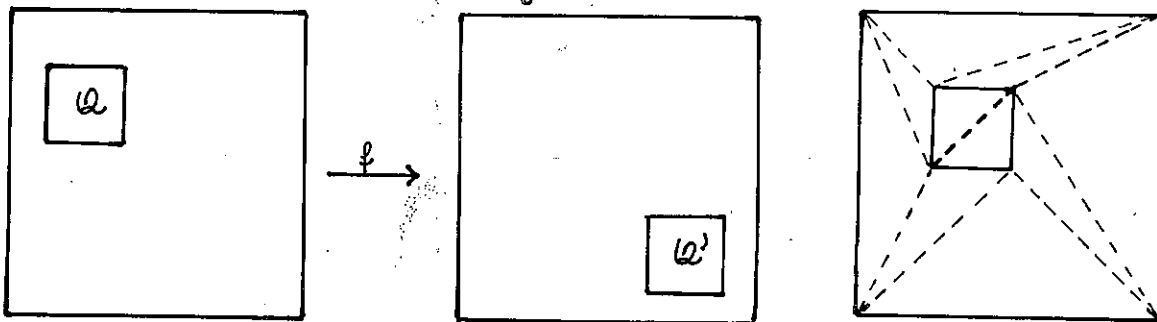
Por intermédio de  $\varepsilon_a$  podemos "concentrar" uma função  $f: J^n, J^n \rightarrow X, x_0$  (isto é,  $f(J^n) = \{x_0\}$ ) ao sub-cubo  $J_a^n$ , isto é, podemos construir uma função  $\bar{f}_a: J^n, J^n \rightarrow X, x_0$  tal que

- a)  $f \sim \bar{f}_a$  rel  $J^n$
- b)  $\bar{f}_a(t_1, t_2, \dots, t_n) = x_0$  se  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \notin J_a^n$  (ou seja,  $\bar{f}_a$  é concentrada a  $J_a^n$ ).

Para isto, basta pôr  $\bar{f}_a = f \circ \varepsilon_a$ .

(3.3) Lema - Podemos determinar um homeomorfismo  $f: J^2 \rightarrow J^2$  que leva  $Q \subset J^2$  homeomorficamente sobre  $Q' \subset J^2$  e tal que:

$$f \sim 1_{J^2} \text{ rel } J^2$$



Demonstração - Para tanto, basta subdividir de duas maneiras o quadrado  $J^2$  em triângulos (por exemplo, como é indicado na última figura acima), uma vez utilizando os lados de  $Q$  e outra os lados de  $Q'$  e depois transformar linearmente os triângulos da primeira subdivisão em seus correspondentes da segunda. (Ver para tanto, Cap. B)

Vamos supor agora que temos  $g: J^2, J^2 \rightarrow X, x_0$  e que  $g$  seja concentrada sobre  $Q'$  (não somente a fronteira  $J^2$  é levada em  $x_0$ , mas também  $J^n - Q'$  é levado em  $x_0$ ).

Sendo  $f: J^2 \rightarrow J^2$  a aplicação acima, então  $gf: J^2 \rightarrow X$  resulta concentrada sobre  $Q$  pois se  $x \notin Q$  então  $f(x) \notin Q' = f(Q)$

°.°.  $g(f(x)) = x_0$  se  $x \notin Q$ . E ainda temos, como  $f \sim 1_{J_2}$  rel  $J^2$ , então  $gf \sim g1_{J_2} = g$ .°.  $gf \sim g$  rel  $J^2$ .

O fato acima generaliza-se para  $J^n$  e dois subparalelepípedos  $Q$  e  $Q'$  de  $J^n$ .

O que foi visto quer dizer que, dada uma aplicação  $g: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  concentrada sôbre  $Q' \subset J^n$ , podemos determinar uma aplicação  $\bar{g}: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  concentrada sôbre  $Q \subset J^n$  e tal que  $\bar{g} \sim g$  rel  $J^n$ . Portanto, como foi visto que podemos concentrar uma função  $J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  a um sub-cubo  $J_a^n$ , podemos determinar uma função homotópica à primeira concentrada num outro subparalelepípede do interno qualquer.

#### § 4 - Grupos de Homotopia

Vamos generalizar agora a construção do § 2. Como algumas dificuldades daquela construção não comparecem aqui, vamos considerar neste parágrafo  $n \geq 2$ .

Seja  $X$  um espaço topológico,  $x_0 \in X$ .

Consideremos o conjunto  $F_n(X, x_0)$  de tódas as funções contínuas  $f: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$ .

A relação  $f \sim g$  rel  $J^n$  com  $f, g \in F_n(X, x_0)$  é uma relação de e quivalência  $\rho$ .

Notaremos  $F_n(X, x_0)/\rho = \pi_n(X, x_0)$ .

Observa-se que, dada  $f \in F_n(X, x_0)$ , chamando  $\bar{f}_A$  uma concentração de  $f$  a um subparalelepípede qualquer  $A$  de  $J^n$ , como  $f \sim \bar{f}_A$ , temos que  $f$  e  $\bar{f}_A$  determinam o mesmo elemento de  $\pi_n(X, x_0)$  ou seja, se  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ , podemos determinar  $\varphi \in \alpha$  tal que  $\varphi$  é con centrada sôbre  $A$ .

Consideremos duas classes  $\alpha, \beta \in \pi_n(X, x_0)$ . Sejam  $A$  e  $B$  dois subparalelepípedos de  $J^n$ , disjuntos.

Sejam ainda  $f \in \alpha$ ,  $g \in \beta$ ,  $\bar{f}_A$  a concentração de  $f$  a  $A$  e  $\bar{g}_B$  a concentração de  $g$  a  $B$ .

Vamos construir  $h: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  do seguinte modo:

$$(4.1) \quad h(P) = \begin{cases} \bar{f}_A(P) & \text{se } P \in A \\ \bar{g}_B(P) & \text{se } P \in B \\ x_0 & \text{se } P \notin A \cup B \end{cases}$$

$h$  é contínua e bem definida.

Então  $h \in F_n(X, x_0)$  define  $\gamma \in \mathcal{T}_n(X, x_0)$ .

(4.2) Lema - A classe  $\gamma$  de  $h$  depende somente das classes  $\alpha$  e  $\beta$  e não dos particulares representantes  $f$  e  $g$ .

Sejam  $f, f' \in \alpha$  e  $g, g' \in \beta$ ;  $\bar{f}_A$  e  $\bar{f}'_A$  as concentrações de  $f$  e de  $f'$  a  $A$ ,  $\bar{g}_B$  e  $\bar{g}'_B$  as concentrações de  $g$  e  $g'$  a  $B$ .

Como  $f \sim f' \text{ rel } J^n$ , é fácil ver que  $\bar{f}_A$  e  $\bar{f}'_A$  são homotópicos relativamente a  $J^n - A$ , seja  $F_1$  esta homotopia, análogamente existe  $F_2$  que dá homotopia entre  $\bar{g}_B$  e  $\bar{g}'_B \text{ rel } J^n - B$ .

Definindo  $h$  como acima e análogamente  $h'$ , utilizando  $f'$  e  $g'$ :

$$(4.3) \quad h'(P) = \begin{cases} \bar{f}'_A(P) & \text{se } P \in A \\ \bar{g}'_B(P) & \text{se } P \in B \\ x_0 & \text{se } P \notin A \cup B. \end{cases}$$

Vamos definir  $H: J^n \times I, J^n \times I \rightarrow X, x_0$  como

$$(4.4) \quad H(P, t) = \begin{cases} F_1(P, t) & \text{se } P \in A \\ F_2(P, t) & \text{se } P \in B \\ x_0 & \text{se } P \notin A \cup B \end{cases}$$

Então:

$$H(P, 0) = \begin{cases} F_1(P, 0) = \bar{f}_A(P) & \text{se } P \in A \\ F_2(P, 0) = \bar{g}_B(P) & \text{se } P \in B \\ x_0 & \text{se } P \notin A \cup B \end{cases}$$

isto é,  $H(P, 0) = h(P)$ , e também temos  $H(P, 1) = h'(P)$ . Portanto,  $h \sim h' \text{ rel } J^n$  e  $\gamma$  não depende dos representantes de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Resta examinar se  $\gamma$  depende dos subparalelepípedos  $A$  e  $B$  utilizados para definir  $h$ . Demonstra-se que  $\gamma$  também não depende dos subparalelepípedos utilizados.

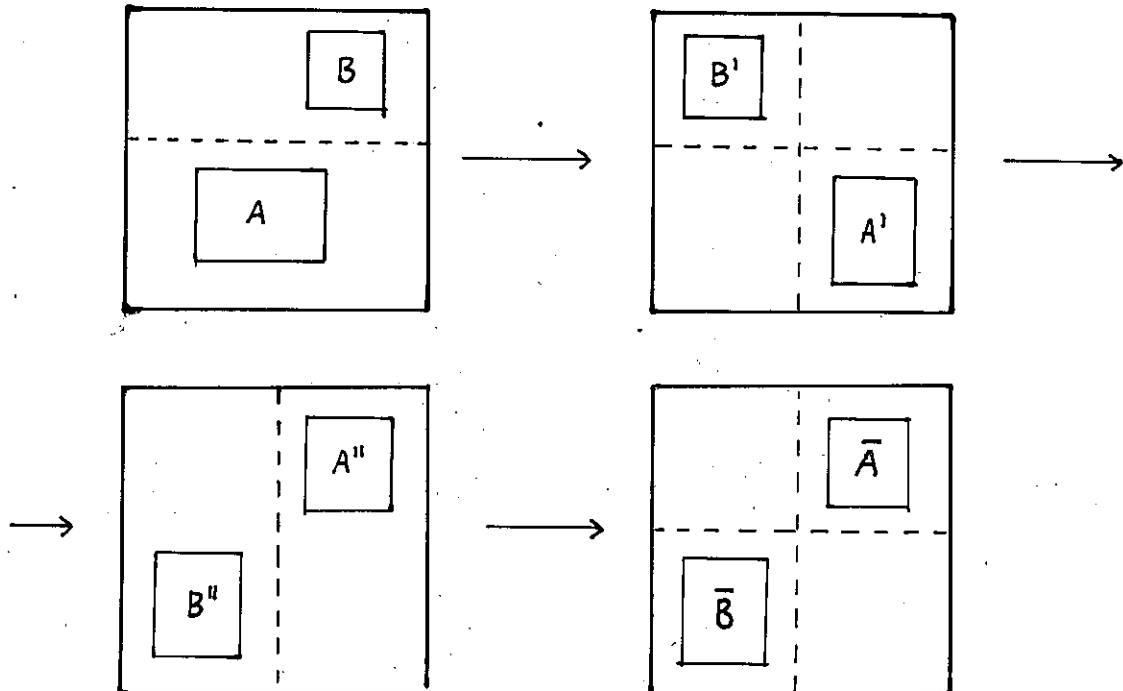
(4.5) Lema - Sejam  $A$  e  $B$  dois subparalelepípedos disjuntos in ternos a  $J^n$ ; existe um homeomorfismo  $f: J^n \rightarrow J^n$  tal que

- 1º  $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ é levado sobre } \bar{A} = \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]^n \\ B \text{ é levado sobre } \bar{B} = \left[ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4} \right]^n \end{array} \right.$
- 2º  $f \sim 1_{j^n} \text{ rel } j^n$

Utilizamos para tanto o lema (3.3) que obviamente se aplica a paralelepípedos quaisquer e não somente a cubos.

Como  $A \cap B = \emptyset$  existe sempre um hiperplano  $x_i = \xi$  (para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) que deixa  $A$  e  $B$  em semi-espacos distintos. Se  $A$  está na parte  $x_i \geq \xi$  e  $B$  em  $x_i \leq \xi$  ponos  $A' = A$  e  $B' = B$  e o passo seguinte é supérfluo. Suponhamos então que nós temos  $A$  em  $x_i \leq \xi$  e  $B$  em  $x_i \geq \xi$ . Escolhamos uma outra coordenada  $x_j$ ,  $j \neq i$ . Em  $x_i \leq \xi$  deslocamos  $A$  até uma posição  $A'$  para a qual todos seus pontos tenham  $x_j > 0$ , mantendo os pontos de  $x_i \geq \xi$  fixos. Análogamente desloca-se  $B$  para  $B'$  contido em  $x_j < 0$  sem mover os pontos de  $x_i \leq \xi$ .

Uma vez chegado a esta posição podemos deslocar  $A'$  para uma posição  $A''$  onde tôdas as coordenadas são positivas sem mover os pontos do semi-espaco que contém  $B'$ . Depois deslocamos  $B'$  para  $B''$  com tôdas as coordenadas negativas. Desta situação vemos que é possível chegar à posição  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ .

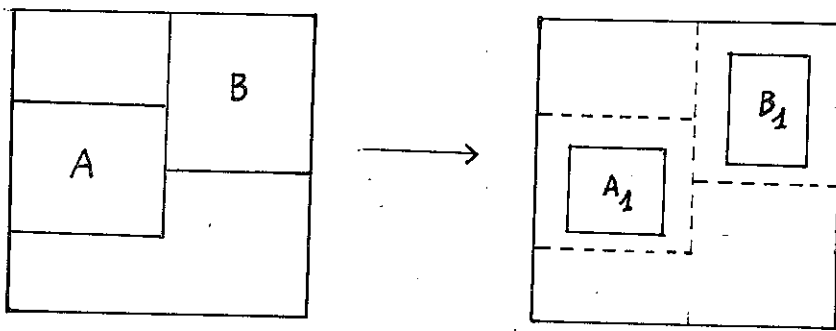


(4.6) Corolário - Sejam A e B dois subparalelepípedos disjuntos e internos a  $J^n$  e análogamente A' e B'. Então existe um homeomorfismo f de  $J^n$  sobre si mesmo tal que

1ª) A é levado sobre A' e B sobre B'

2ª)  $f \sim 1_{J^n}$  rel  $J^n$ .

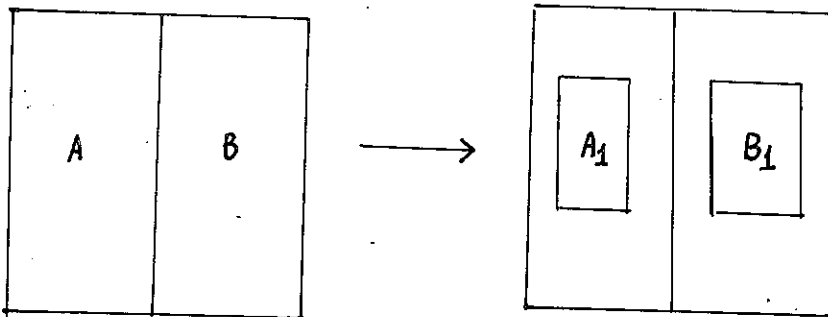
(4.7) Observação - Se A e B têm pontos sobre suas fronteiras em comum, ou têm pontos com a fronteira de  $J^n$  em comum, concentramos em cada parte a função a algum subparalelepípedo  $A_1, B_1$  e depois prosseguimos no nosso raciocínio.



Em particular, a função definida por

$$k(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

pertence à classe  $\gamma$ , pois podemos concentrar a primeira metade a um  $A_1$  e a segunda a um  $B_1$  internos.



Então, dadas duas classes  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n(X, x_0)$  fica bem determinada a classe  $\gamma$ . Vamos escrever  $\gamma = \alpha + \beta$ . Temos assim uma lei de composição em  $\mathcal{T}_n(X, x_0)$ .

(4.8) Teorema -  $\pi_n(X, x_0)$  com esta lei de composição é um grupo abeliano.

Observação - Lembramos que  $n \geq 2$ , pois o grupo fundamental não é necessariamente comutativo.

Demonstração - 1) A classe  $\eta$  que contém a função  $x_0: J^n \rightarrow X$  definida como  $\bar{x}_0(P) = x_0 \quad \forall P \in J^n$  é identidade para esta operação.

Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0), f \in \alpha$ . Observemos que  $\bar{x}_0$  pode ser considerada como sendo concentrada sobre qualquer sub-conjunto.

Temos então que  $\alpha + \eta$  é representada por:

$$h(P) = \begin{cases} \bar{f}_A(P) & \text{se } P \in A \\ \bar{x}_0(P) = x_0 & \text{se } P \in B \\ x_0 & \text{se } P \notin A \cup B \end{cases}$$

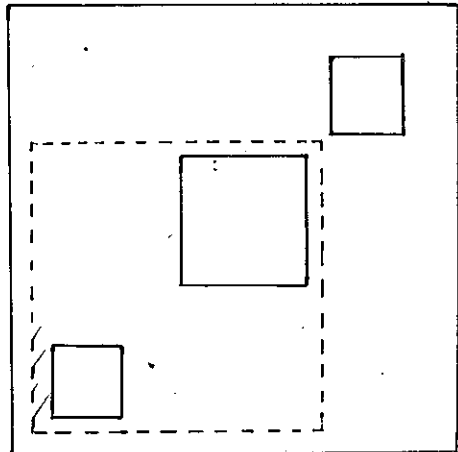
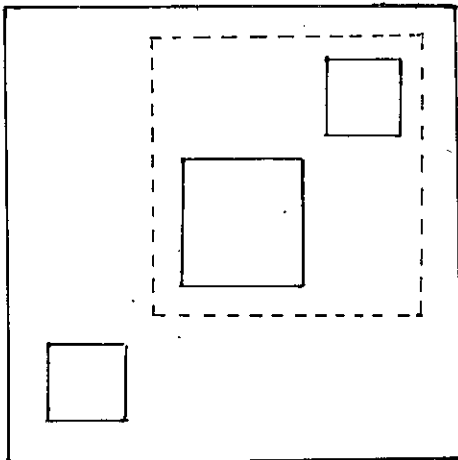
e como  $\bar{f}_A \sim f$  vem  $\alpha + \eta = \alpha$ .

2) A operação é associativa.

Sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_n(X, x_0)$  e  $f \in \alpha, g \in \beta, h \in \gamma$ . Concentremos  $f$  a  $K_1 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]^n$  dando  $\bar{f}$ ,  $g$  a  $K_2 = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^n$  dando  $\bar{g}$  e  $h$  a  $K_3$  dando  $\bar{h}$ .

$$\text{Seja } \varphi(P) = \begin{cases} \bar{f}(P) & \text{se } P \in K_1 \\ \bar{g}(P) & \text{se } P \in K_2 \\ h(P) & \text{se } P \in K_3 \\ x_0 & \text{no resto.} \end{cases}$$

Observando as figuras



vemos que  $\varphi$  representa tanto  $(\alpha + \beta) + \gamma$  como  $\alpha + (\beta + \gamma)$ .

3) A operação é comutativa; isto segue imediatamente da definição, pois não há ordem nas posições mútuas de A e B.

4) Finalmente, vamos mostrar que toda classe  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  admite um oposto.

Seja  $f \in \alpha$ . Vamos notar com  $\alpha'$  a classe que contém a função  $f'$  definida como  $f'(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1-t_1, t_2, \dots, t_n)$ . (4.7)

Levando em conta o que foi dito no fim da observação (4.7), a classe  $\alpha + \alpha'$  contém a função  $g$  definida por:

$$g(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f'(2t_1-1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Vamos definir

$$H(t_1, t_2, \dots, t_n, s) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}(1-s) \\ f(1-s, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2}(1-s) \leq t_1 \leq 1-\frac{1}{2}(1-s) \\ f'(2t_1-1, t_2, \dots, t_n) & 1-\frac{1}{2}(1-s) \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Temos

$$H(t_1, t_2, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f'(2t_1-1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$H(t_1, t_2, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} f(0, t_2, \dots, t_n) = x_0 & t_1 = 0 \\ = x_0 & 0 \leq t_1 \leq 1 \\ f'(0, t_2, \dots, t_n) = f(1, t_2, \dots, t_n) = x_0 & t_1 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore g \sim x_0 \implies \alpha + \alpha' = \eta$$

### § 5 - Mudança do ponto base. Operação de $\pi_1$ sobre $\pi_n$

Havíamos considerado o conjunto de todas as funções contínuas  $f: J^n, j^n \rightarrow X, x_0$  e obtido o grupo comutativo  $\pi_n(X, x_0)$ , chamado n-ésimo grupo de homotopia do espaço X com base no ponto  $x_0 \in X$ .

Se  $x_1$  é um outro ponto de X, podemos também obter o grupo  $\pi_n(X, x_1)$ .



Vamos supor que  $X$  seja um espaço conexo por caminhos (c.p.c.) isto é, tal que, dados dois pontos distintos quaisquer  $x$  e  $y$ , em  $X$  eles podem ser ligados por um caminho, isto é,  $\exists$  função contínua  $C: I \rightarrow X$  tal que  $C(0) = x$  e  $C(1) = y$ , o que notaremos com  $C: I, 0, 1 \rightarrow X, x, y$ .

Mostraremos que se  $X$  é c.p.c. e  $x_0, x_1$  são dois pontos distintos de  $X$ , então os grupos  $\pi_n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_1)$  são isomorfos, sendo que, para cada caminho  $C$  ligando  $x_1$  e  $x_0$  fica definido um isomorfismo que dependerá somente da classe de homotopia de  $C$ .

Dado um caminho  $C: I, 0, 1 \rightarrow X, x_1, x_0$  vamos chamar  $\bar{C}: I, 0, 1 \rightarrow X, x_0, x_1$  o caminho definido por  $\bar{C}(t) = C(1-t)$ , caminho inverso de  $C$ .

Seja agora  $f: J^n, J^n \rightarrow X, x_0$ . Vamos construir uma aplicação  $J^n, J^n \rightarrow X, x_1$  utilizando o caminho  $C$  considerado.

(5.1) Consideremos o sub-cubo  $J_{1/2}^n$  e seu complemento  $J^n - J_{1/2}^n$  em  $J^n$ .

Observemos que, para construir uma função  $J^n, J^n \rightarrow X, x_1$  devemos construir uma função  $J^n \rightarrow X$  que leve toda a fronteira  $J^n$  no ponto  $x_1 \in X$ . Vemos ainda que para todo ponto  $(t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n$  temos  $\max |t_i| \leq \frac{1}{2}$  e para todo ponto  $(t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n$  temos  $\max |t_i| \geq \frac{1}{2}$ .

Então, se  $(t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n, -\frac{1}{2} \leq t_i \leq \frac{1}{2}$ .  $\therefore -1 \leq 2t_i \leq 1$  logo  $(2t_1, \dots, 2t_n) \in J^n$ .

Se  $(t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n, \max |t_i| \geq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq \max |t_i| \leq 1$ .  $\therefore 1 \leq 2 \max |t_i| \leq 2$ .  $\therefore 0 \leq 2 \max |t_i| - 1 \leq 1$ .

Dada  $f: J^n, J^n \rightarrow X, x_0$  vamos por:

$$(5.2) \quad C_{\#} f(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, 2t_n) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n \\ \bar{C}(2 \max |t_i| - 1) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n \end{cases}$$

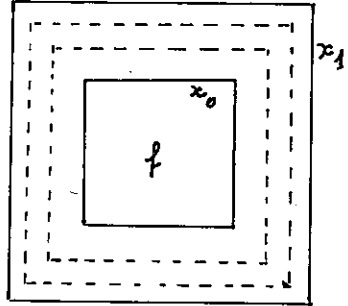
$C_{\#} f$  é uma função definida em  $J^n$  com valores em  $X$  e observando que  $C_{\#} f|_{J_{1/2}^n}$  e  $C_{\#} f|_{(J^n - J_{1/2}^n)}$  são contínuas e coincidem sobre a parte comum  $(J_{1/2}^n)$  valendo aí  $x_0$ , temos que  $C_{\#} f$  é contínua.

Além disso, em todo ponto  $(t_1, \dots, t_n)$  de  $J^n$  temos  $\max |t_i| = 1$  .  
 $C_{\#} f(t_1, \dots, t_n) = \bar{C}(1) = x_1$  .

Então temos  $C_{\#} f: J^n, J^n \rightarrow X, x_1$  .

Observação -  $C_{\#} f$  é constante nas linhas pontilhadas da figura.

Mostremos que a classe  $\beta$  de  $C_{\#} f$  em  $\mathcal{T}_n(X, x_1)$  depende somente da classe  $\alpha$  de  $f$  em  $\mathcal{T}_n(X, x_0)$  e não do representante  $f$  .



Seja  $g \sim f: J^n, J^n \rightarrow X, x_0$  e  $F: J^n \times I, J^n \times I \rightarrow X, x_0$  uma homotopia entre  $f$  e  $g: F(x, 0) = f(x)$   $F(x, 1) = g(x)$   $F(x, s) = x_0$  se  $x \in J^n$ .

Temos, por definição de  $C_{\#} g$ :

$$(5.3) \quad C_{\#} g(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} g(2t_1, \dots, 2t_n) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n \\ \bar{C}(2 \max |t_i| - 1) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n \end{cases}$$

Seja  $H: J^n \times I, J^n \times I \rightarrow X, x_1$  definida como

$$(5.4) \quad H(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} F(2t_1, \dots, 2t_n, s) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n \\ \bar{C}(2 \max |t_i| - 1) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n \end{cases}$$

Dai vem  $H(t_1, \dots, t_n, 0) = C_{\#} f(t_1, \dots, t_n)$  e

$$H(t_1, \dots, t_n, 1) = C_{\#} g(t_1, \dots, t_n) \text{ . . . } C_{\#} f \sim C_{\#} g \text{ .}$$

Portanto, dada a classe  $\alpha \in \mathcal{T}_n(X, x_0)$  e  $f \in \alpha$  construímos a função  $C_{\#} f$ . Chamando  $C_*(\alpha) = [C_{\#} f]$  (classe de homotopia de  $C_{\#} f$  em  $\mathcal{T}_n(X, x_1)$ ), construímos uma aplicação bem definida

$$C_*: \mathcal{T}_n(X, x_0) \rightarrow \mathcal{T}_n(X, x_1) \text{ .}$$

Vamos verificar que a classe de  $C_{\#} f$  não depende do particular caminho  $C$  que foi utilizado, mas depende apenas da classe de homotopia de  $C$ , ou seja, vamos mostrar que se  $D$  é outro caminho unindo  $x_1$  e  $x_0$ , tal que  $D \sim C$  rel  $\{0, 1\}$ , então

$$D_{\#} f \sim C_{\#} f: J^n, J^n \rightarrow X, x_1 \text{ .}$$

Seja  $D \sim C$  e  $F(x, u): I \times I, \{0\} \times I, \{1\} \times I \rightarrow X, x_1, x_0$  tal que  $F(s, 0) = D(s)$  e  $F(s, 1) = C(s)$  .

Como  $\bar{D}(s) = D(1-s)$  e  $\bar{C}(s) = C(1-s)$  teremos  
 $F(1-s, u) = \bar{F}(s, u) : I \times I, \{0\} \times I, \{1\} \times I \rightarrow X, x_0, x_1$  tal que  
 $\bar{F}(s, 0) = F(1-s, 0) = D(1-s) = \bar{D}(s)$   
 $\bar{F}(s, 1) = F(1-s, 1) = C(1-s) = \bar{C}(s) \quad \therefore \quad \bar{D} \sim \bar{C}.$

Se considerarmos agora as funções  $D_{\#} f$  e  $C_{\#} f$  vemos que ambas tomam valores iguais nos pontos  $(t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n$  enquanto que, para  $(t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n$ , temos

$$D_{\#} f(t_1, \dots, t_n) = \bar{D}(2 \max |t_i| - 1)$$

$$C_{\#} f(t_1, \dots, t_n) = \bar{C}(2 \max |t_i| - 1).$$

Definindo  $H: J^n \times I \rightarrow X$  por

$$H(t_1, \dots, t_n, u) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, 2t_n) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J_{1/2}^n \\ \bar{F}(2 \max |t_i| - 1, u) & \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in J^n - J_{1/2}^n \end{cases}$$

vemos que  $H: J^n \times I, J^n \times I \rightarrow X, x_1$  é uma homotopia entre  $D_{\#} f$  e  $C_{\#} f$ , isto é,  $D_{\#} f \sim C_{\#} f \text{ rel } J^n$ .

Temos então que a aplicação  $C_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$  é bem definida, não dependendo da função que se toma para definir  $C_*(\alpha)$  mas somente depende da classe  $\alpha$  e também não depende do particular caminho  $C$ , somente da sua classe de homotopia.

Pode-se demonstrar também que concentrando  $f$  a um outro sub-cubo obtemos resultados análogos.

Dito isto, vamos demonstrar o

$$(5.5) \text{ Teorema} - C_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1) \text{ é}$$

1º) biunívoca e sôbre

2º) aditiva.

Além disso, se  $D: I, 0, 1 \rightarrow X, x_2, x_1$  vale

$$3º) (DC)_* = D_* C_*.$$

Demonstração - 1º) Vamos mostrar que  $\bar{C}_*$  é o inverso de  $C_*$ .  
 Para tanto, mostremos que  $(\bar{C})_{\#} (C_{\#} f) \sim f \text{ rel } J^n$ .

Temos, como anteriormente:

$$(5.6) (\bar{C})_{\#} (C_{\#} f)(t) = \begin{cases} f(4t_1, \dots, 4t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{4} \\ \bar{C}(4 \max |t_i| - 1) & \frac{1}{4} \leq \max |t_i| \leq \frac{1}{2} \\ C(2 \max |t_i| - 1) & \frac{1}{2} \leq \max |t_i| \leq 1 \end{cases}.$$

Vamos construir  $F(t_1, \dots, t_n, s)$  do seguinte modo:

$$(5.7) \quad F(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} f(4t_1, \dots, 4t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{4} \\ \bar{C}(4 \max |t_i| - 1) & \frac{1}{4} \leq \max |t_i| \leq \frac{2-s}{4} \\ \bar{C}(1-s) = C(s) & \frac{2-s}{4} \leq \max |t_i| \leq \frac{1+s}{2} \\ C(2 \max |t_i| - 1) & \frac{1+s}{2} \leq \max |t_i| \leq 1 \end{cases}$$

Temos  $F(t_1, \dots, t_n, 0) = (\bar{C})_{\#} (C_{\#} f)(t_1, \dots, t_n)$

$F(t_1, \dots, t_n, 1) = f(t_1, \dots, t_n)$

$\dots (\bar{C})_{\#} (C_{\#} f) \sim f$

ou seja,  $(\bar{C})_{*} [(C_{*})(\alpha)] = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{T}_n(X, x_0)$ .

Analogamente pode-se verificar que  $(C_{*})[(\bar{C})_{*}(\beta)] = \beta$

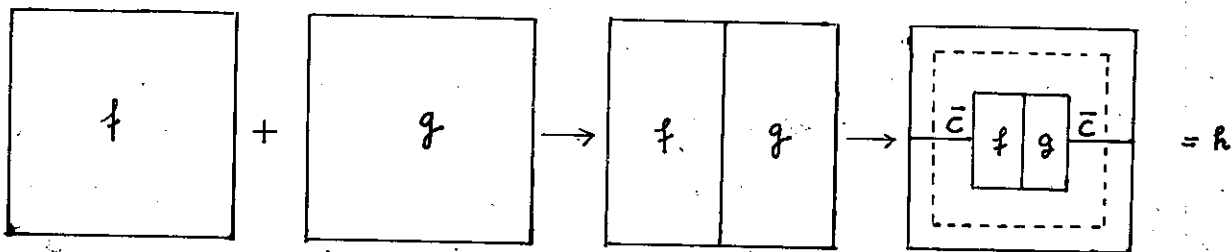
$\forall \beta \in \mathcal{T}_n(X, x_1)$ .

Então,  $(C_{*})^{-1} = (\bar{C})_{*}$ .  $\dots C_{*}$  tem inverso, logo é biunívoco e sôbre.

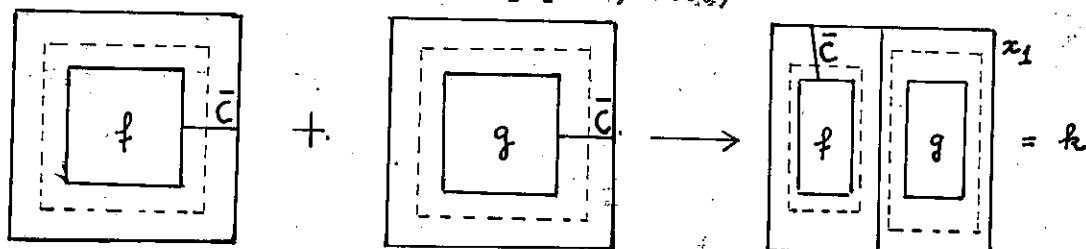
2º)  $C_{*}$  é aditiva

Vamos ilustrar por intermédio de algumas figuras a aditividade de  $C_{*}$  (alguns detalhes de cálculo serão dados em nota no fim deste capítulo).

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n(X, x_0)$ ,  $f \in \alpha$ ,  $g \in \beta$  :

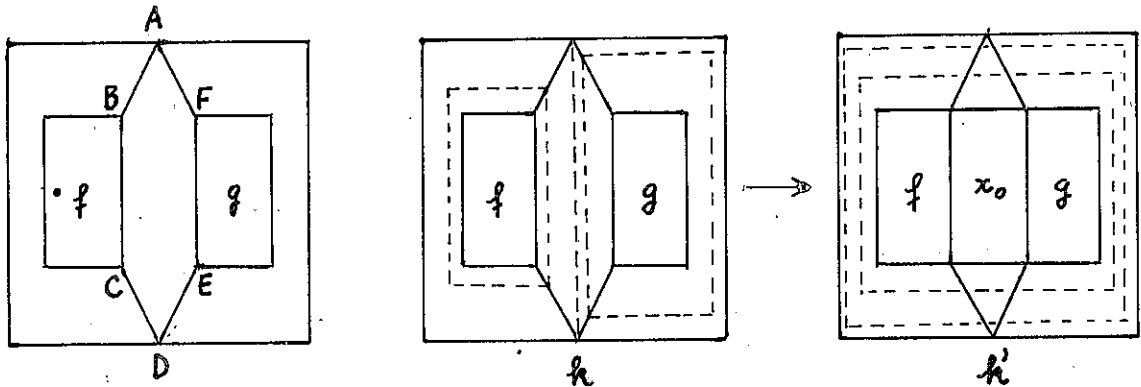


$h$  representa  $C_{*}(\alpha + \beta)$  (mantivemos o mesmo símbolo para  $f$  e para a concentração sôbre um paralelepípedo, etc.)



$k$  representa  $C_*(\alpha) + C_*(\beta)$ . (As funções em questão tomam o mesmo valor (em  $C(I)$ ) ao longo das linhas pontilhadas.)

Para mostrar que  $C_*(\alpha + \beta) = C_*(\alpha) + C_*(\beta)$  precisamos ter  $h \sim k$  rel  $\dot{J}^n$ . Vamos, para tanto, sujeitar  $k$  a uma homotopia transformando somente a parte interna ao hexágono ABCDEF e deixando o resto fixo. (As funções são constantes ao longo das linhas pontilhadas.)

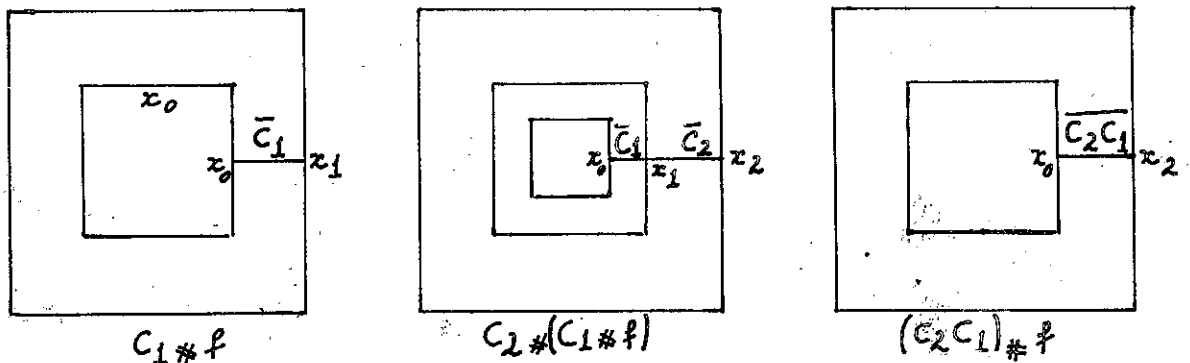


É fácil verificar que por sua vez  $k'$  é homotópico a  $h$  (basta deixar aproximar-se gradativamente as partes contendo  $f$  e  $g$  e dilatando as partes que são levadas nos pontos do caminho  $C$ ). Isto completa a prova de 2º).

3º) Mostremos agora que se  $C_2: I, 0, 1 \rightarrow X, x_2, x_1$  e  $C_1: I, 0, 1 \rightarrow X, x_1, x_0$  então  $(C_2 C_1)_* = C_{2*} C_{1*}$ .

Notemos que  $C_2 C_1: I, 0, 1 \rightarrow X, x_2, x_0$  e  $\overline{C_2 C_1} = \overline{C_1} \overline{C_2}$ .

Temos



$$(5.8) \quad C_{1\#} f(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, 2t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{2} \\ \bar{C}_1(2 \max |t_i| - 1) & \max |t_i| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$C_{2\#} (C_{1\#} f)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} C_{1\#} f(2t_1, \dots, 2t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{2} \\ \bar{C}_2(2 \max |t_i| - 1) & \max |t_i| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore C_{2\#} (C_{1\#} f)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(4t_1, \dots, 4t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{4} \\ \bar{C}_1(4 \max |t_i| - 1) & \frac{1}{4} \leq \max |t_i| \leq \frac{1}{2} \\ \bar{C}_2(2 \max |t_i| - 1) & \frac{1}{2} \leq \max |t_i| \leq 1 \end{cases}$$

$$(C_2 C_1)_{\#} f(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, 2t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{C_2 C_1} (2 \max |t_i| - 1), & \max |t_i| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (C_2 C_1)_{\#} f(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, 2t_n) & \max |t_i| \leq \frac{1}{2} \\ \bar{C}_1(4 \max |t_i| - 2) & \frac{1}{2} \leq \max |t_i| \leq \frac{3}{4} \\ \bar{C}_2(4 \max |t_i| - 3) & \frac{3}{4} \leq \max |t_i| \leq 1 \end{cases}$$

Definindo

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t_1}{1+s}, \dots, \frac{4t_n}{1+s}\right) & \max |t_i| \leq \frac{1+s}{4} \\ \bar{C}_1(4 \max |t_i| - (1+s)) & \frac{1+s}{4} \leq \max |t_i| \leq \frac{2+s}{4} \\ \bar{C}_2(2(s+1) \max |t_i| - (2s+1)) & \frac{2+s}{4} \leq \max |t_i| \leq 1 \end{cases}$$

vem  $F(t_1, \dots, t_n, 0) = C_{2\#} (C_{1\#} f)(t_1, \dots, t_n)$

$F(t_1, \dots, t_n, 1) = (C_2 C_1)_{\#} f(t_1, \dots, t_n)$

$\therefore C_{2\#} (C_{1\#} f) \sim (C_2 C_1)_{\#} f$

e daí,  $(C_2 C_1)_*(\alpha) = C_{2*} (C_{1*}(\alpha)) \quad \therefore (C_2 C_1)_* = C_{2*} C_{1*}$

(5.9) Operação de  $\pi_1(X, x_0)$  sobre  $\pi_n(X, x_0)$ . Tínhamos visto que, dados dois pontos distintos  $x_0$  e  $x_1$  de  $X$ , e um caminho  $C: I, 0, 1 \rightarrow X, x_1, x_0$ , obtínhamos um isomorfismo

$$C_*: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1).$$

Tínhamos também verificado que  $(CD)_* = C_*D_*$  e que  $C_*$  depende apenas da classe de homotopia de  $C$ .

Consideremos agora  $C$  um caminho fechado em  $X$  com origem em  $x_0$  isto é,  $C(0) = C(1) = x_0$ .

Então, o isomorfismo  $C_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  é um automorfismo. Portanto, a cada classe  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$  corresponde um automorfismo  $\alpha_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  e  $(\alpha\beta)_* = \alpha_*\beta_*$ .

Vemos assim que  $\pi_1(X, x_0)$  é um grupo de operadores para  $\pi_n(X, x_0)$ .

(5.10) Definição - Um espaço  $X$  (c.p.c.) é chamado  $n$ -simples se para qualquer  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ ,  $\alpha_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  é o isomorfismo idêntico de  $\pi_n(X, x_0)$ .

Nesta definição fizemos referência a um ponto base  $x_0$ .

Vamos ver que, para qualquer caminho  $C: I, 0, 1 \rightarrow X, x_1, x_0$ , o isomorfismo  $C_*$  não depende de  $C$  se o espaço  $X$  é  $n$ -simples.

Sejam  $C$  e  $D$  dois caminhos ligando  $x_0$  a  $x_1$  e vamos supor  $C_* \neq D_*$ . Então teríamos  $C_*D_*^{-1} \neq 1$  em  $\pi_n(X, x_0)$ . Mas sendo  $CD^{-1}$  um caminho fechado e  $X$   $n$ -simples, temos  $(CD^{-1})_* = 1$  em  $\pi_n(X, x_0)$ . Análogamente segue que o fato de  $X$  ser  $n$ -simples não depende do ponto base. Quando o espaço  $X$  é  $n$ -simples em qualquer ponto, o grupo fundamental de  $X$  opera idênticamente em  $\pi_n(X, x_0)$ .

Um espaço  $X$ , onde  $\pi_1(X, x_0) = 0$ , é  $n$ -simples para cada  $n$ .

Demonstra-se que todos os grupos topológicos são  $n$ -simples (Steenrod).

Mostra-se que o grupo fundamental opera sobre si mesmo do seguinte modo: se  $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$  então  $\beta_*(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$  (Eilton).

Dai concluímos que um espaço  $X$  é 1-simples se e somente se o seu grupo fundamental for abeliano.

§ 6 - Definições alternativas dos grupos de homotopia

Dado um espaço topológico  $X$  e um ponto  $x_0 \in X$ , em vez de utilizarmos as classes de homotopia de aplicações  $f: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  para a definição do grupo de homotopia  $\pi_n(X, x_0)$ , podemos nos valer de outros espaços  $Y$  e suas fronteiras  $\dot{Y}$  e considerar aplicações  $f: Y, \dot{Y} \rightarrow X, x_0$ .

Seja  $B^n$  a bola  $n$ -dimensional unitária, isto é,

$$B^n = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq 1 \right\}$$

e  $S^{n-1}$  a sua fronteira, isto é, a  $(n-1)$ -esfera unitária:

$$S^{n-1} = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n t_i^2 = 1 \right\}.$$

Vamos usar para  $J^n$  e  $B^n$  as orientações induzidas de seus espaços suporte (ver para tanto o cap. B, § sobre "células orientadas". Em suas fronteiras consideremos as orientações induzidas. No caso de  $S^{n-1}$  devemos considerar em cada ponto a orientação induzida no plano tangente. Pode-se estabelecer também um significado coerente para a orientação com auxílio da homologia.

Consideremos um homeomorfismo  $h: B^n, S^{n-1} \rightarrow J^n, \dot{J}^n$ , que conserve as orientações.

Por meio deste homeomorfismo, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $J$  das aplicações  $f: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  e o conjunto  $B$  das aplicações  $B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  do seguinte modo:

$$(6.1) \quad f \in J \longrightarrow f h \in B.$$

Vemos assim que, se  $fh = f'h$  então  $(fh)h^{-1} = (f'h)h^{-1}$ .  $f = f'$ . Também se  $g \in B$  então  $gh^{-1} \in J$  e  $g = (gh^{-1})h$ .

Ainda utilizando o homeomorfismo  $h$  estabelecemos uma correspondência biunívoca entre as classes de homotopia de  $\pi_n(X, x_0)$  e as classes de homotopia das aplicações  $B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  do seguinte modo:

Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e  $f \in \alpha$ . Como  $fh: B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  façamos corresponder à classe  $\alpha$  a classe de homotopia  $[fh]$  de  $fh$ . Tal correspondência é bem definida e biunívoca (pois  $f \sim f'$  rel  $\dot{J}^n \iff fh \sim f'h$  rel  $S^{n-1}$  e é sôbre pois se  $\beta$  é uma classe



de homotopia de aplicações  $B_n^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  e  $g \in \beta$  então à classe  $\alpha$  de  $gh^{-1}$  corresponderá a classe de  $(gh^{-1})h$ , isto é, a classe  $\beta$ .

Não é difícil compreender que se  $h \sim h'$  rel  $S^{n-1}$  então  $h'$  estabelece a mesma correspondência biunívoca com  $h$ .

Por isto, frequentemente vamos chamar  $\Pi_n(X, x_0)$  ao conjunto das classes de homotopia das aplicações  $B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$ .

Dadas duas aplicações  $g, m: B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  podemos definir a classe  $[g] + [m]$  de modo análogo ao que fizemos para duas classes  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando  $g$  e  $m$  concentradas em duas porções disjuntas de  $B^n$  e definindo uma função que coincide com uma ou outra nestas duas porções levando todo resto de  $B^n$  no ponto  $x_0$ . Com esta operação, obtemos um grupo (abeliano se  $n > 1$ ) isomorfo a  $\Pi_n(X, x_0)$ , anteriormente definido.

Consideremos a  $n$ -esfera unitária

$$S^n = \left\{ (t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} t_i^2 = 1 \right\}.$$

Sua seção com o hiperplano  $t_{n+1} = 0$  é homeomorfa a  $S^{n-1}$ .

Vamos definir

$$E_+^n = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in S^n \mid t_{n+1} \geq 0 \right\} \text{ (calota superior ou hemisfério norte).}$$

$$E_-^n = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in S^n \mid t_{n+1} \leq 0 \right\} \text{ (calota inferior ou hemisfério sul).}$$

Temos que  $B^n$  é homeomorfo a  $E_+^n$  e a  $E_-^n$ .

(Por exemplo, se  $n=2$ ,  $S^2$  é a superfície esférica habitual,  $B^2$  é o disco,  $E_+^2$  e  $E_-^2$  são semi-esferas.)

Vemos ainda que

$$E_+^n \cup E_-^n = S^n$$

$$E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}.$$

Vamos chamar  $p_+: E_+^n, S^{n-1} \rightarrow B^n, S^{n-1}$  o homeomorfismo dado por:

$$(6.2) \quad p_+(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) = (t_1, \dots, t_n)$$

$$(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in E_+^n \implies \sum_{i=1}^n t_i^2 + t_{n+1}^2 = 1 \implies$$

$$\implies \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq 1 \implies (t_1, \dots, t_n) \in B^n$$

$$(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in S^{n-1} \implies \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1, t_{n+1} = 0 \implies \\ \implies \sum_{i=1}^n t_i^2 = 1 \implies (t_1, \dots, t_n) \in S^{n-1}.$$

Analogamente consideramos  $p_-: E_-^n \rightarrow B^n$  pondo  $p_-(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Orientemos  $E_+^n$  tal que  $p_+$  conserve a orientação e em  $E_-^n$  tal que  $p_-$  inverta a orientação.  $E_+^n$  induz em  $S^{n-1}$  a mesma orientação como  $B^n$  e  $E_-^n$  a orientação oposta.  $E_+^n \cup E_-^n$  nos dará  $S^n$  com a orientação induzida pela  $B^{n+1}$ .

Por meio de  $p_+$  podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto das aplicações  $f: B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  e o conjunto das aplicações  $g: E_+^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  e também entre o conjunto das classes de homotopia das aplicações  $B^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$  e o conjunto das classes de homotopia das aplicações  $E_+^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$ . Portanto, existe uma correspondência biunívoca entre as classes de homotopia  $\prod_n(X, x_0)$  e as classes de homotopia das aplicações  $E_+^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$ .

Analogamente para o conjunto das aplicações  $E_-^n, S^{n-1} \rightarrow X, x_0$ .

Identificando  $\dot{J}^n$  a um ponto  $p_0$  o espaço quociente assim obtido  $J^n/\dot{J}^n$  é homeomorfo a  $S^n$ .

Consideremos o homeomorfismo  $\psi: J^n, \dot{J}^n \rightarrow B^n, S^{n-1}$  definido por

$$(6.3) \quad \psi(t_1, \dots, t_n) = \frac{\max |t_i|}{\|t\|} (t_1, \dots, t_n).$$

Seja  $p_0 = (0, 0, \dots, 0, -1) \in R^{n+1}$ ,  $p_0 \in S^n$ .

(6.4) Definindo  $\xi(t_1, t_2, \dots, t_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  onde  $x_i = \rho t_i$   $i=1, 2, \dots, n$   $x_{n+1} = 1 - 2\|t\|^3$ ,  $\rho = 2(\|t\| - \|t\|^4)^{1/2}(\|t\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^2})$ , temos que  $\xi: B^n, S^{n-1} \rightarrow S^n, p_0$  é uma aplicação

tal que  $\xi|(B^n - S^{n-1})$  é um homeomorfismo de  $B^n - S^{n-1}$  sobre  $S^n - \{p_0\}$ .

(6.5) Então  $\varphi = \xi \psi : J^n, \dot{J}^n \rightarrow S^n, p_0$  é uma aplicação que leva  $J^n \times \dot{J}^n$  homeomórficamente sobre  $S^n - \{p_0\}$ . Consideremos  $S^n$  orientada de tal modo que  $\varphi$  conserve a orientação.

Para toda aplicação  $g: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$  temos uma aplicação  $f = g \varphi : J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$ .

Reciprocamente pode-se demonstrar o seguinte

(6.6) Lema - Toda aplicação  $f: J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  se fatoriza em  $f = \bar{f} \varphi$  onde  $\bar{f}: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$ . (Ver [Hi] pg. 9).

Dadas  $g, g': S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$ , se  $g \sim g'$  rel  $p_0$  então  $g \varphi \sim g' \varphi$  rel  $\dot{J}^n$ .

Reciprocamente vale o seguinte

(6.7) Lema - Dadas  $f, f': J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$ , se  $f \sim f'$  rel  $\dot{J}^n$ , então  $\bar{f} \sim \bar{f}'$  rel  $p_0$  (onde  $\bar{f}$  e  $\bar{f}'$  são obtidas como no lema 1). Daí se  $f, f': J^n, \dot{J}^n \rightarrow X, x_0$  então  $f \sim f'$  rel  $\dot{J}^n$  se e somente se  $\bar{f} \sim \bar{f}'$  rel  $p_0$  onde  $f = \bar{f} \varphi$  e  $f' = \bar{f}' \varphi$ . (Ver [Hi] pg. ).

Utilizando os lemas (6.6) e (6.7) concluímos que existe uma correspondência biunívoca entre  $\Pi_n(X, x_0)$  e as classes de homotopia rel  $p_0$  das aplicações  $S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$ .

Resumindo os fatos acima e levando em conta (9.4) enunciamos o

(6.8) Lema de extensão -  $f: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$  se estende a uma aplicação  $f': B^{n+1} \rightarrow X$  se e somente se  $f$  representa o elemento zero de  $\Pi_n(X, x_0)$ .

(6.9) Lema de classificação - As classes de homotopia das funções  $f: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$  estão em correspondência biunívoca com os elementos  $\Pi_n(X, x_0)$ .

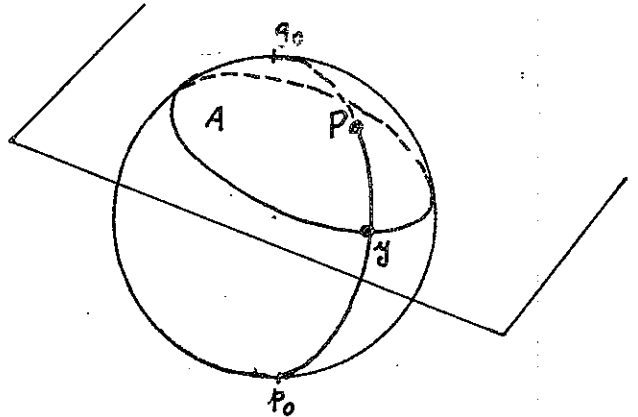
Em vista disto, utilizaremos frequentemente a mesma notação  $\Pi_n(X, x_0)$  para indicar o conjunto das classes de homotopia rel  $p_0$ , das aplicações  $S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$ .

(6.10) Podemos ainda definir diretamente soma de duas destas classes utilizando concentrações em "calotas" de  $S^n$ . Por calota entendemos as porções em que  $S^n$  fica dividida por um hiperplano que a corta.

Vamos dar sem maiores detalhes os passos que devem ser seguidos.

1ª) Como concentrar  $f: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$  sobre uma calota  $A$ .

Seja  $A \subset S^n$  uma calota não contendo  $p_0$ . Seja  $P$  interior a  $A$ . Seja  $S_A^{n-1}$  a fronteira da calota. Cada  $y \in S_A^{n-1}$  determina com  $P$  e  $p_0$  um arco de círculo máximo  $L_y = \widehat{Pyp_0}$ . Para  $y \neq z \in S_A^{n-1}$  os arcos  $L_y$  e  $L_z$  somente têm os extremos  $P$  e  $p_0$  em comum. Os arcos  $L_y$ ,  $y \in S_A^{n-1}$  recobrem  $S^n$ .



Transformemos o arco  $Py$  em  $L_y$  por arcos proporcionais; deixando  $y$  percorrer  $S_A^{n-1}$  obtemos uma aplicação  $\mathcal{E}_A$  que leva  $A$  sobre  $S^n$  a qual estendemos a  $S^n - A$  pondo  $\mathcal{E}_A(q) = p_0$  se  $q \notin A$ .

$$\mathcal{E}_A \sim 1_{S^n} \text{ rel } p_0.$$

Se  $f: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$  então  $f \circ \mathcal{E}_A$  concentra  $f$  sobre  $A$ .

2ª) Sejam agora  $g: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$ ,  $B$  outra calota disjunta de  $A$ ,  $\mathcal{E}_B$  construído análogamente a  $\mathcal{E}_A$ . Seja  $h: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$  obtido por:

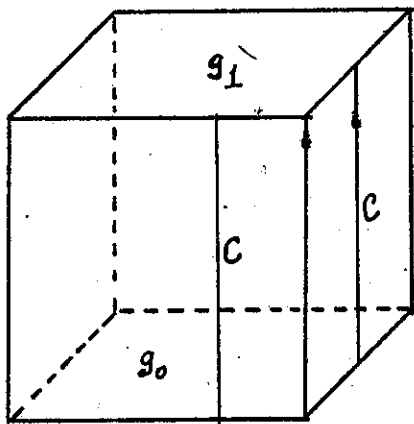
$$h(q) = \begin{cases} f \circ \mathcal{E}_A(q) & \text{se } q \in A \\ g \circ \mathcal{E}_B(q) & \text{se } q \in B \\ x_0 & \text{se } q \notin A \cup B \end{cases}$$

Seja  $\varphi$  como em (6.5) e temos então  $[f\varphi] = \alpha \in \pi_n(X, x_0)$ ,  $[g\varphi] \in \beta$  e  $[h\varphi] \in \gamma$  vale

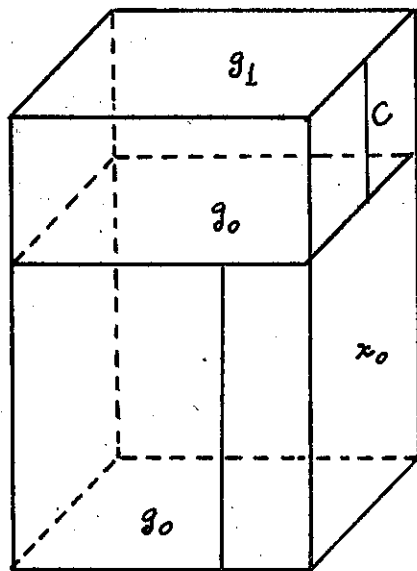
(6.11)  $\gamma = \alpha + \beta$  pois certamente podemos construir  $\mathcal{D} \sim \varphi \text{ rel } J^n$  tal que  $\mathcal{D}^{-1}(A) = A'$  e  $\mathcal{D}^{-1}(B) = B'$  são dois subparalelepípedos de  $J^n$  e ainda  $f \circ \mathcal{E}_A \circ \mathcal{D}$  e  $g \circ \mathcal{E}_B \circ \mathcal{D}$  são concentrações de  $f\varphi$  e  $g\varphi$  a  $A'$  e  $B'$  respectivamente.

Do que foi dito acima vê-se facilmente que se  $f|_{E_+^n} = x_0$ ,  $g|_{E_-^n} = x_0$ , então  $h$  dado por  $h|_{E_+^n} = f|_{E_+^n}$  e  $h|_{E_-^n} = g|_{E_-^n}$  representa a soma dos elementos dados por  $f$  e  $g$ .

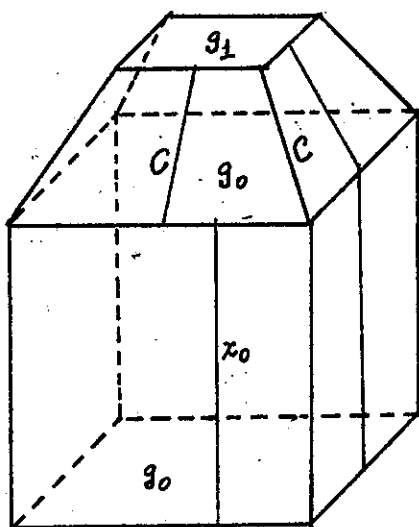
Aconselhamos também a leitura de [Hu-2] que descreve uma situação análoga.



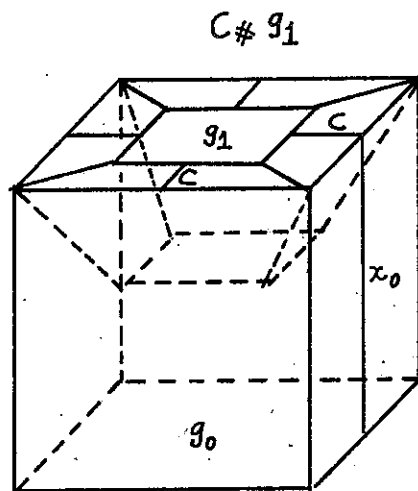
a)



b)



c)



d)

(6.12) Lema - Seja  $f_0: S^n, p_0 \rightarrow X, x_0$ ,  $F(y, t): S^n \times I \rightarrow X$  uma homotopia (não relativamente a  $p_0$ ), sendo  $F(y, 0) = f_0(y)$  e  $F(y, 1) = f_1(y)$ . Durante esta deformação o ponto  $p_0$  descreve uma curva  $C(t) = F(p_0, t)$  onde  $C(0) = x_0$ ; seja  $C(1) = x_1$ . Nestas condições  $[f_0] = C_*[f_1]$  onde  $[f_0] \in \pi_n(X, x_0)$ .

Consideremos  $\varphi$  de (6.5).

Seja  $g_0 = f_0 \circ \varphi: J^n, j^n \rightarrow X, x_0$ .

Podemos construir  $G: J^n \times I \rightarrow X$  fazendo  $G(z, t) = F(\varphi(z), t)$ .

As imagens pela  $G$  dos pontos da fronteira  $J^n$  vão percorrer o caminho  $C$ : se  $j \in J^n$  então  $G(j, t) = F(\varphi(j), t) = F(p_0, t) = C(t)$ .

As figuras da página anterior ilustram a demonstração. Na primeira temos a homotopia  $G$ : nas faces laterais os segmentos verticais vão em  $C$ , a face superior vai em  $g_1$  e a inferior em  $g_0$ . Na segunda figura "emendamos" um cubo no qual consideramos definida a homotopia constante:  $H(z, t) = g_0(z)$ . Nas duas figuras que seguem, nós deformamos o cubo de cima, comprimindo-o para dentro do cubo inferior.

Observação - Consideremos duas esferas  $S^n$  e  $\Sigma^n$  e pontos-base  $p \in S^n$  e  $q \in \Sigma^n$ . Ambos os pares  $S^n, p$  e  $\Sigma^n, q$  podem ser usados como ante-imagem dos grupos de homotopia. É perfeitamente coerente identificar classes de homotopia de funções  $f: S^n, p \rightarrow X, x_0$  e  $g: \Sigma^n, q \rightarrow X, x_0$ , se existir um homeomorfismo  $h: S^n, p \rightarrow \Sigma^n, q$  (sobre) que conserva a orientação e tal que  $f = gh$ .

Com estas considerações, temos o seguinte

(6.13) Teorema - Se  $X$  é  $n$ -simples, cada aplicação  $f: S^n \rightarrow X$  determina um único elemento de  $\pi_n(X, x_0)$ .

Demonstração - Sejam  $p_1, p_2 \in S^n$ ,  $f(p_1) = x_1$ ,  $f(p_2) = x_2$ . Chamemos  $f_1: S^n, p_1 \rightarrow X, x_1$  e  $f_2: S^n, p_2 \rightarrow X, x_2$  a  $f$  considerada como função de pares.

$f_1$  determina um elemento  $[f_1] \in \pi_n(X, x_1)$

$f_2$  determina um elemento  $[f_2] \in \pi_n(X, x_2)$ .

Existe rotação  $\rho: S^n, p_2 \rightarrow S^n, p_1$  e uma homotopia  $R: S^n \times I \rightarrow S^n$  tal que  $R(p, 0) = p_2$  e  $R(p, 1) = p_1$  sendo que, durante esta homotopia,  $R(p_2, t)$  é um caminho unindo  $p_2$  a  $p_1$ .

Temos  $f_1 \rho : S^n, p_2 \rightarrow X, x_1$  e  $fR$  é homotopia  $fR: f_2 \sim f_1 \rho$  ; durante esta homotopia,  $fR(p_2, t)$  é um caminho  $C$  unindo  $x_2$  a  $x_1$  . Portanto,  $C_*[f_1 \rho] = [f_2]$  e como  $[f_1] = [f_1 \rho]$  temos  $[f_2] = C_*[f_1]$  (segundo a observação acima).

Devemos mostrar que, tomando  $x_0 \in X$  , chamando  $D$  um caminho unindo  $x_0$  a  $x_2$  ,  $E$  um caminho unindo  $x_0$  a  $x_1$  , teremos  $D_*[f_2] = E_*[f_1] \in \pi_n(X, x_0)$  .

Chamando  $\alpha = D_*[f_2]$  vem:  $\alpha = D_*[f_2] = D_*C_*[f_1] = (DC)_*[f_1]$  .

Mas  $DC$  é um caminho unindo  $x_0$  a  $x_1$  ,  $X$  é  $n$ -simples e  $E$  é um caminho unindo  $x_0$  a  $x_1$  .  $(DC)_*[f_1] = E_*[f_1]$  e  $D_*[f_2] = E_*[f_1]$  .

### § 7 - Homomorfismo induzido por uma aplicação contínua. Invariança topológica dos grupos de homotopia

Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e  $f \in \alpha$  . Qualquer que seja a aplicação contínua  $\varphi = X, x_0 \rightarrow Y, y_0$  (isto é,  $\varphi : X \rightarrow Y$  contínua tal que  $\varphi(x_0) = y_0$ ) temos  $\varphi f : J^n, j^n \rightarrow Y, y_0$  . Chamando  $\beta$  a classe de  $\varphi f$  em  $\pi_n(X, y_0)$  vemos que  $\beta$  depende somente de  $\alpha$  e não do particular representante  $f \in \alpha$  , pois se  $f, f' \in \alpha$  , então  $f \sim f'$  e  $\varphi f \sim \varphi f'$  .

Fazendo  $\varphi_*(\alpha) = \beta$  , então  $\varphi_*$  é uma aplicação bem definida de  $\pi_n(X, x_0)$  em  $\pi_n(Y, y_0)$  .

Vamos mostrar que  $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  é um homomorfismo.

Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n(X, x_0)$  ,  $f \in \alpha_1$  ,  $g \in \alpha_2$  . A classe  $\alpha_1 + \alpha_2$  é representada por um  $h$  como em (4.1) e

$$\varphi_*(\alpha_1 + \alpha_2) = [\varphi h] .$$

Por outro lado,  $\varphi_*(\alpha_1) + \varphi_*(\alpha_2)$  é a classe de  $k$  definida por

$$k(P) = \begin{cases} (\overline{\varphi f})_A(P) & \text{se } P \in A \\ (\overline{\varphi g})_B(P) & \text{se } P \in B \\ y_0 & \text{se } P \notin A \cup B . \end{cases}$$

Mas, utilizando (3.1):  $(\overline{\varphi f})_A = (\varphi f) \varepsilon_A = \varphi(f \varepsilon_A) = \varphi \bar{f}_A$  e  $(\overline{\varphi g})_B = (\varphi g) \varepsilon_B = \varphi(g \varepsilon_B) = \varphi \bar{g}_B$  , ou seja,  $k = \varphi h$  .

(7.1) Portanto,  $\varphi_*(\alpha_1 + \alpha_2) = \varphi_*(\alpha_1) + \varphi_*(\alpha_2)$ .  $\varphi_*$  é chamado homomorfismo induzido pela aplicação contínua  $\varphi$ .

Seja  $\psi: Y, y_0 \rightarrow Z, z_0$ . Então  $\psi \varphi: X, x_0 \rightarrow Z, z_0$ . Dado  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e  $f \in \alpha$ , temos  $(\psi \varphi)f: J^n, j^n \rightarrow Z, z_0$  e podemos definir o homomorfismo  $(\psi \varphi)_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Z, z_0)$ .

Como  $(\psi \varphi)f = \psi(\varphi f)$  vem:

$$(7.2) \quad \psi_* \varphi_* = (\psi \varphi)_* .$$

Temos portanto demonstrado o

(7.3) Teorema - Toda aplicação contínua  $\varphi: X, x_0 \rightarrow Y, y_0$  induz um homomorfismo  $\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ . Além disso, se  $\psi: Y, y_0 \rightarrow Z, z_0$ , então  $(\psi \varphi)_* = \psi_* \varphi_*$ .

(7.4) Teorema - Os grupos de homotopia são invariantes do tipo de homotopia.

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços do mesmo tipo de homotopia, com  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  tais que  $gf \sim l_X$  e  $fg \sim l_Y$ .

Sejam  $y_0 = f(x_0)$ ,  $x_1 = g(y_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ .

$$J^n, j^n \xrightarrow{u} X, x_0 \xrightarrow{f} Y, y_0 \xrightarrow{g} X, x_1 \xrightarrow{f} Y, y_1$$

$$f \text{ induz } f_*: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

$$f_{**}: \pi_n(X, x_1) \longrightarrow \pi_n(Y, y_1)$$

$$g \text{ induz } g_*: \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$$

$$\text{Temos } g_* f_*: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1) .$$

Como  $gf \sim l_X$  vem  $gf u \sim u$  e durante a homotopia a fronteira percorre um caminho  $C$ .

$$(gf)_*[u] = C_*[u] \text{ e } C_* \text{ é isomorfismo.}$$

Dai,  $g_* f_*$  é isomorfismo sobre  $\cdot$ .  $g_*$  é sôbre.

Analogamente  $f_{**} g_*$  é isomorfismo sôbre  $\cdot$ .  $g_*$  é biunívoco.

Portanto,  $g_*$  é isomorfismo.

(7.5) Corolário - Os grupos de homotopia são invariantes topológicos.



§ 8 - Grau de Brouwer

Neste § daremos, de maneira descritiva, alguma idéia sobre  $\pi_n(S^n)$ . Necessitamos, para tanto, algumas noções do capítulo B. Este § deve ser saltado em primeira leitura.

Consideremos duas esferas  $S_1^2$  e  $S_2^2$  trianguladas e orientadas. Sabemos que todo 2-ciclo de  $S_1^2$  é múltiplo do ciclo fundamental  $Z_1 = \sum s_i^2$  (soma de todos os 2-simplexos de  $S_1^2$ , cada um deles com a multiplicidade 1, escolhida uma orientação para  $S_1^2$ ) e também todo 2-ciclo de  $S_2^2$  é múltiplo do ciclo fundamental  $Z_2$  de  $S_2^2$ ; isto vale para qualquer triangulação. Observamos ainda que, na dimensão máxima, cada ciclo constitui uma classe de homologia.

Dada uma aplicação contínua  $f: S_1^2 \rightarrow S_2^2$ , consideremos o homomorfismo induzido  $f_*: H_2(S_1^2) \rightarrow H_2(S_2^2)$ . Pelas observações feitas acima, ao ciclo fundamental  $Z_1$  de  $S_1^2$  corresponderá, por  $f_*$ , um ciclo em  $S_2^2$  que será, portanto, múltiplo do ciclo fundamental  $Z_2$  de  $S_2^2$ , isto é,  $f_*(Z_1) = r_f Z_2$  onde  $r_f$  é um inteiro. A este inteiro  $r_f$  dá-se o nome de grau de Brouwer da aplicação  $f$ .

Se tivermos  $f \sim g: S_1^2 \rightarrow S_2^2$ , como  $f_* = g_*$ , segue  $r_f = r_g$ .

Lembrando que cada aplicação contínua  $f: S_1^2 \rightarrow S_2^2$  define um elemento de  $\pi_2(S_2^2)$  (pois  $S^2$  é 2-simples), como o grau de uma aplicação depende apenas de sua classe de homotopia, podemos fazer corresponder a cada elemento  $\alpha \in \pi_2(S_2^2)$  o número inteiro  $r_\alpha$ , onde  $r_\alpha = r_f$  com  $f \in \alpha$ .

Generalizando o que foi visto, podemos definir uma aplicação

$$\xi: \pi_m(S^m) \rightarrow \mathbb{Z}$$

dada por  $\xi(\alpha) = r_\alpha$ .

A aplicação  $\xi$  é aditiva, isto é, é um homomorfismo.

Antes disto, vejamos uma interpretação geométrica do grau de Brouwer. Pela definição do grau, escolhida uma orientação para cada uma das esferas, o grau da aplicação vem a ser o número de vezes que um qualquer simplexo comparece no ciclo imagem e, como todos eles comparecem o mesmo número de vezes, o grau vem a ser o número de vezes que a primeira esfera recobre a segunda esfera, pois o ciclo fundamental de cada esfera recobre a mesma uma vez.

Vamos supor que existam  $p$  simplexos  $m$  dimensionais cujas imagens recobrem um dado simplexo  $m$ -dimensional positivamente, isto é com a mesma orientação escolhida para a segunda esfera, e existam  $n$   $m$ -simplexos recobrendo o mesmo dado simplexo negativamente, isto é, com a orientação oposta à escolhida.

Então, o tal simplexo será recoberto  $p-n$  vezes. Como este simplexo comparece com o coeficiente  $r_f$  no ciclo imagem, teremos  $r_f = p-n$ , isto é, o grau de Brouwer será o número algébrico de vezes que a segunda esfera é coberta pela primeira esfera.

Para mostrar que  $\xi$  é homomorfismo, sejam  $\alpha, \beta \in \pi_n(S^n), f \in \alpha$  e  $g \in \beta$ . Consideremos  $f$  concentrada a uma calota  $C_1$  interior ao hemisfério norte  $E_+^n$  de  $S^n$  e  $g$  concentrada a uma calota  $C_2$  interior ao hemisfério sul  $E_-^n$  de  $S^n$ . Seja  $K$  uma triangulação suficientemente fina de  $S_1^n$ , tal que existam aproximações simpliciais  $\varphi$  de  $f$  e  $\psi$  de  $g$ , tais que  $\varphi$  é concentrada a  $E_+^n$  e  $\psi$  a  $E_-^n$ . Pondo

$$h = \begin{cases} \varphi | E_+^n & \text{em } E_+^n \\ \psi | E_-^n & \text{em } E_-^n \end{cases}$$

então  $h$  representa  $\alpha + \beta$  e é simplicial.

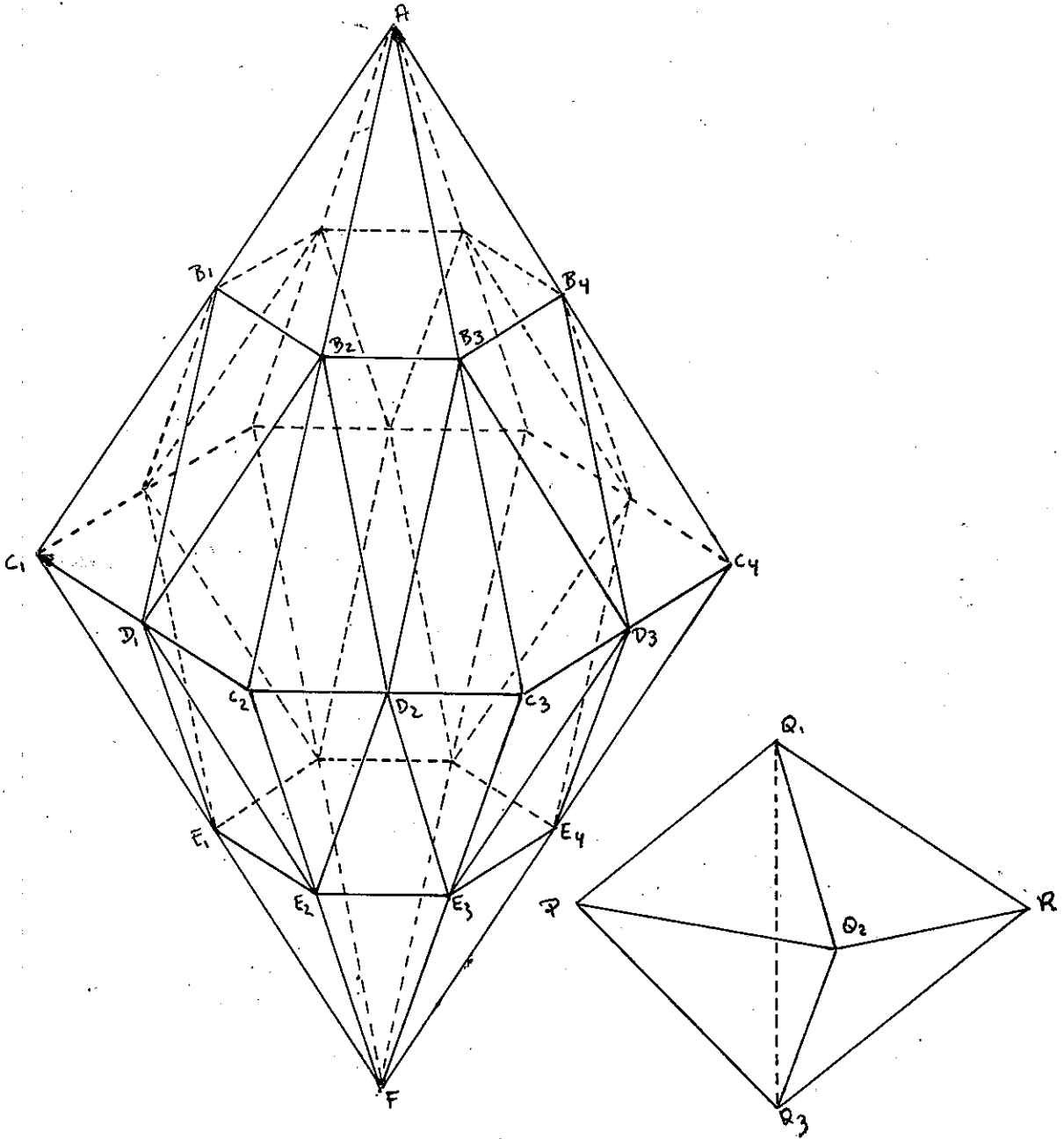
Dado um  $n$ -simplexo  $\sigma^n$  de  $S_2^n$ , este comparece no ciclo  $h_*(Z_1^n)$  onde  $Z_1^n$  é o ciclo fundamental de  $S_1^n$ , com coeficiente  $r_h$ . Mas  $\sigma^n$  deve comparecer com coeficiente  $r_f$  devido aos  $n$ -simplexos de  $E_+^n$  e ainda deve comparecer com coeficiente  $r_g$  devido aos  $n$ -simplexos de  $E_-^n$ . Então, em  $h_*(Z_1^n)$ ,  $\sigma^n$  comparece  $r_f$  vezes devido a  $\varphi | E_+^n$  e  $r_g$  vezes devido a  $\psi | E_-^n$ , portanto  $\sigma^n$  comparecerá  $r_f + r_g$  vezes em  $h_*(Z_1^n)$  e  $r_h = r_f + r_g$ , isto é,  $r_{\alpha + \beta} = r_\alpha + r_\beta$  e  $\xi$  é homomorfismo.

(8.1) Exemplo - Sejam  $S_1^2$  e  $S_2^2$  duas triangulações da esfera  $S^2$  conforme as figuras abaixo.

Na primeira triangulação a poligonal  $C_1 D_1 C_2 \dots D_6$  representa o equador,  $A$  o polo norte,  $F$  o polo sul e usamos  $C_1$  como ponto base. Em  $S_2^2$ ,  $R$  será o ponto base.

Vamos construir três aplicações simpliciais:

$$f, g, h: S_1^2 \rightarrow S_2^2$$



$f$  será dada por:  $A \rightarrow P$ ,  $B_1 B_4 \rightarrow Q_1$ ,  $B_2, B_5 \rightarrow Q_2$ ,  
 $B_3 B_6 \rightarrow Q_3$ ,  $C_1, D_1, E_1, F \rightarrow R$ .

O grau  $r_f = 2$ . Basta ver que  $PQ_1Q_2$  é imagem de  $AB_1B_2$  e  $AB_4B_5$  conservando a orientação e somente destes.

Temos ainda que  $f$  é concentrada ao hemisfério norte, pois todos os vértices do hemisfério sul ( $C_1, D_1, E_1$  e  $F$ ) vão em  $R$ .

Daremos  $g$  por:  $F \rightarrow P$ ,  $E_1, E_3 \rightarrow Q_1$ ,  $E_2, E_4 \rightarrow Q_2$ ,  
 $E_5, E_6 \rightarrow Q_3$ ,  $A, B_1, C_1, D_1 \rightarrow R$ .

O grau de  $g$  é  $r_g = -1$  pois escolhendo, por exemplo,  $PQ_1Q_2$  vemos que é imagem de  $FE_1E_2$  e  $FE_3E_4$  com inversão de orientação é imagem de  $FE_2E_3$  conservando a orientação. Escolhendo outra face digamos  $Q_2Q_3R$  esta é imagem de  $E_4E_5D_4$  com inversão de orientação.

Além disso  $g$  é concentrada ao hemisfério sul.

Construímos enfim  $h$  coincidindo com  $f$  no hemisfério norte e com  $g$  no hemisfério sul. Temos  $[h] = [f] + [g]$ . Verifica-se facilmente que  $r_h = +1 = r_f + r_g$ .

Como foi descrito acima, duas aplicações homotópicas têm o mesmo grau de Brouwer. O resultado inverso constitui o importante

(8.2) Teorema de Hopf - Duas aplicações de  $S_1^n \rightarrow S_2^n$  são homotópicas se e somente se elas têm o mesmo grau de Brouwer. (Ver por exemplo [Hu-1] pg. 53).

Segue disto

(8.3) Corolário -  $\pi_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ .

Este resultado nos dá, portanto, o primeiro exemplo do cálculo de um grupo de homotopia não trivial.

No capítulo D serão tratados métodos elementares que permitem o cálculo de alguns grupos de homotopia.

## § 9 - Alguns lemas

No presente § daremos alguns resultados que servirão como base para a demonstração dos teoremas principais do capítulo C. Este parágrafo deve ser saltado em primeira leitura, pois utiliza noções do capítulo B.

(9.1) Definição - Dado um espaço  $X$  chama-se "cone sôbre  $X$ " ao espaço  $\hat{X}$  que se obtém identificando em  $X \times I$  todos os pontos de  $X \times \{1\}$ . Seja  $\mathcal{X}: X \times I \rightarrow \hat{X}$  a aplicação canônica; o ponto  $v = \mathcal{X}(X \times \{1\})$  chama-se vértice do cone. Pela aplicação  $x \rightarrow (x, 0)$  podemos mergulhar  $X$  como sub-espaço fechado de  $\hat{X}$ .  $X = X \times \{0\}$  é a base do cone.

(9.2) Uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é homotópica a uma constante se e somente se  $f$  se estende a  $\bar{f}: \hat{X} \rightarrow Y$ .

Demonstração - Se existir  $\bar{f}$  a função  $\bar{f}: X \times I \rightarrow Y$  estabelece homotopia entre  $f$  e a constante  $g(x) = \bar{f}(v)$ . Vice-versa, se existir tal homotopia  $F: X \times I \rightarrow Y$  com  $F(x, 1) = a \quad \forall x \in X$ ,  $F$  pode ser fatorada em  $F = \bar{f} \circ \mathcal{X}$  e é fácil verificar que  $\bar{f}$  é contínua.

(9.3) Lema - Seja  $S^{n-1}$  uma esfera,  $\hat{S}^{n-1}$  é homeomorfo a  $B^n$ .

Demonstração - O homeomorfismo  $\eta: \hat{S}^{n-1} \rightarrow B^n$  pode ser dado por:

$$\eta [(x_1, x_2, \dots, x_n), t] = (1-t)(x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

(9.4) Corolário -  $f: S^{n-1} \rightarrow Y$  é homotópica a uma constante se e somente se  $f$  estende a  $\bar{f}: B^n \rightarrow Y$ .

No que segue neste parágrafo, o espaço  $X$  é sempre  $(n-1)$ simples.

(9.5) Lema (da fronteira da célula) - Seja  $\sigma^n$  uma célula convexa  $\tau^{n-1}$  uma sua face, então existe um homeomorfismo  $\varphi:$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^n &\rightarrow E^{n-1} \cup B^{n-1} \text{ que leva } \tau^{n-1} \rightarrow B^{n-1}, \quad \dot{\tau}^{n-1} \rightarrow S^{n-2} \text{ e} \\ U = \dot{\sigma}^n - \dot{\tau}^{n-1} &\rightarrow E_-^{n-1}. \end{aligned}$$

Com efeito, podemos construir  $S^{n-1}$  com centro  $O$  num ponto interno de  $\tau^{n-1}$  com o plano equatorial coincidindo com o suporte de  $\tau^{n-1}$ , e  $E_-^{n-1}$  no semi-espaço que contém  $\sigma^n$ . Construímos  $\varphi$  da seguinte maneira:

A partir de  $O$  projetamos  $U$  sobre  $E_-^{n-1}$ . Por esta projeção,  $\dot{\tau}^{n-1}$  vai em  $S^{n-2}$ ; esta aplicação pode ser estendida a um homeomorfismo de  $\tau^{n-1}$  sobre  $B^{n-1}$  (usar, por exemplo, o teorema dos corpos convexos ([Ly] pg. 6)).

Analogamente poderíamos levar  $\tau^{n-1}$  sobre  $E_+^{n-1}$  e  $U$  sobre  $B^{n-1}$  ou  $E_-^{n-1}$ .

De agora em diante tratamos de  $\dot{\sigma}^n$  com a geometria de uma ou outra destas figuras.

(9.6) Lema (da construção) - Seja  $f: E_-^n \rightarrow X$ , e  $M = E_-^{n-1} \cup B^{n-1}$ .

Podemos construir  $g: M \rightarrow X$  tal que  $g|_{E_-^{n-1}} = f$  representando um elemento  $\beta$  arbitrário de  $\pi_{n-1}(X, x_0)$ .

Demonstração - Vamos por:

$$\begin{aligned} B_{1/2}^{n-1} &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1/2 \right\} \\ \text{e } S_{1/2}^{n-2} &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1/2 \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que  $M = \overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}$  é homeomorfo ao espaço obtido de  $S^{n-2} \times J$  identificando os pontos de  $S^{n-2} \times \{-1\}$ .

Podemos então parametrizar  $M = \overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}$  de tal modo que  $S^{n-2}$  corresponda a  $S^{n-2} \times \{0\}$ ,  $\overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}$  corresponda a  $S^{n-2} \times \{1\}$  e os pontos  $(x, -1)$  correspondam todos ao polo sul  $p_0$  de  $S^{n-1}$ .

Seja agora  $f(p_0) = x_1$ .

Consideremos uma aplicação

$h: \overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}, S_{1/2}^{n-2} \rightarrow X, x_1$  que represente  $\beta$ .

Vamos definir  $g$  do seguinte modo:

$$g|_{E_-^{n-1}} = f|_{E_-^{n-1}}$$

$$g|_{\overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}} = h$$

$g(x, t) = f(x, -t)$  para todos os pontos de  $B_-^{n-1} - \overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}$ .

Verifica-se que  $g$  é contínua; além disto, devido à simetria,  $g$  é homotópica a  $g'$  rel  $\overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}$ , onde

$$\begin{cases} g'|_{\overset{0}{B}_{1/2}^{n-1}} = h \\ g'(y) = f(p_0) \text{ se } y \in M - \overset{0}{B}_{1/2}^{n-1} \end{cases}$$

logo  $g$  representa  $\beta$ .

Sejam agora  $\sigma_1^n$  e  $\sigma_2^n$  duas células  $n$ -dimensionais convexas que possuem uma face  $\tau^{n-1}$  em comum. Podemos construir

$\varphi: \dot{\sigma}_1^n \cup \dot{\sigma}_2^n \rightarrow S^{n-1} \cup B^{n-1} = V^{n-1}$  que leva

$$\dot{\sigma}_1^n \text{ sobre } E_+^{n-1} \cup B^{n-1} = S_I$$

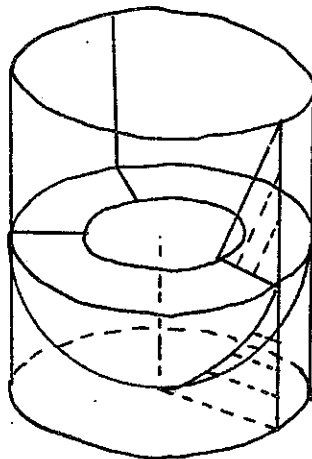
$$\text{e } \dot{\sigma}_2^n \text{ sobre } B^{n-1} \cup E_-^{n-1} = S_{II}$$

ainda  $\tau^{n-1}$  sobre  $B^{n-1}$  e  $\dot{\tau}^{n-1}$  sobre  $S^{n-2}$ .

Suponhamos as células orientadas coerentemente e transportemos por  $\varphi$  estas orientações.

Consideremos de agora em diante  $\dot{\sigma}_1^n \cup \dot{\sigma}_2^n$  com a geometria de  $V^{n-1}$ .

Seja então  $f: V^{n-1} \rightarrow X$ ,  $f$  define três elementos em  $\pi_{n-1}(X)$  dados por:  $\alpha = [f|S_I]$ ,  $\beta = [f|S_{II}]$  e  $\gamma = [f|S^{n-1}]$ .



Vale então o

(9.7) Lema (da soma) -  $\alpha + \beta = \gamma$ .

Demonstração - Vamos considerar para tanto uma aplicação  $\mathcal{E}: \mathbb{V}^{n-1} \rightarrow \mathbb{V}^{n-1}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{E}(B^{n-1}) = 0 = (0, 0, \dots, 0).$$

Sejam agora  $q_0$  o polo norte,  $p_0$  o polo sul de  $S^{n-1}$ , um ponto  $y \in S^{n-2}$  determina unívocamente uma semi-circunferência  $L_y$  máxima pelos polos. Subdividamos esta semi-circunferência pelos pontos  $a_y$  e  $b_y$  para os quais temos respectivamente  $t_n = +1/2$  e  $t_n = -1/2$ .

$\mathcal{E}$  vai levar o arco  $\widehat{a_y y}$  regularmente sobre o raio  $y$  e  $0$  de tal modo que  $\mathcal{E}(y) = 0$  e  $\mathcal{E}(a_y) = y$ .

O arco  $\widehat{q_0 a_y}$  será "esticado" mantendo o ponto  $q_0$  fixo e fazendo  $\mathcal{E}(a_y) = y$ .

No hemisfério sul fazemos coisa análoga:

$$\widehat{b_y y} \rightarrow \widehat{y 0}; \widehat{p_0 b_y} \rightarrow \widehat{b_y y}.$$

Assim faremos com todos  $y \in S^{n-2}$ .

Desta forma  $\mathcal{E}$  leva  $S^{n-2}$  em  $0$ , a porção  $-\frac{1}{2} \leq t_n \leq \frac{1}{2}$  sobre  $B^{n-1}$  e isto simetricamente em relação ao equador  $S^{n-2}$ ; ainda  $\mathcal{E}$  leva a calota  $t_n \geq 1/2$  sobre o hemisfério sul.

É fácil verificar que  $\mathcal{E} \sim l_y$ .

Seja agora  $g = f \mathcal{E}$ , temos

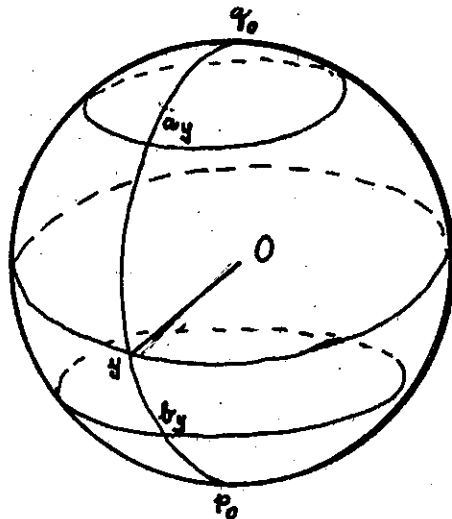
$$1^\circ) g = f \mathcal{E} \sim f \cdot l_y = f.$$

$$\text{Portanto, } g|_{S_I} \sim f|_{S_I} \quad g|_{S_{II}} \sim f|_{S_{II}} \quad \text{e } g|_{S^{n-1}} \sim f|_{S^{n-1}}$$

$$\text{logo, } [g|_{S_I}] = \alpha; [g|_{S_{II}}] = \beta, [g|_{S^{n-1}}] = \gamma.$$

2º)  $g|_{B^{n-1}}$  é constante, portanto segue que  $g|_{S^{n-1}}$  pode ser considerado como representando a soma  $\alpha + \beta$  pois  $g|_{S_I}$  é concentrada ao seu hemisfério norte e  $g|_{S_{II}}$  é concentrada ao seu hemisfério sul. Portanto  $\alpha + \beta = \gamma$ .

Segue imediatamente o



(9.8) Corolário - Sejam  $\sigma_1^n$  e  $\sigma_2^n$  duas células com a face  $\tau^{n-1}$  em comum, orientadas coerentemente.  $f: \dot{\sigma}_1^n \cup \dot{\sigma}_2^n \rightarrow X$ . Suponhamos que  $f|_{\dot{\sigma}_1^n}$  represente  $\alpha$  e  $f|_{\dot{\sigma}_2^n}$  represente  $\beta$ .

Suponhamos que  $g: \dot{\sigma}_1^n \cup \dot{\sigma}_2^n$  coincida com  $f$  excepto eventualmente em pontos pertencentes a  $\tau^{n-1}$ . Se  $\alpha' = [g|_{\dot{\sigma}_1^n}]$ ,  $\beta' = [g|_{\dot{\sigma}_2^n}]$  então vale:

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta.$$

(9.9) Lema - Seja  $\rho^{n+1}$  uma célula  $(n+1)$ -dimensional,  $\sigma^n$  e  $\sigma^{n'}$  duas suas faces. Então é possível achar uma seqüência

$$\eta_0^n = \sigma^n, \tau_1^{n-1}, \eta_1^n, \dots, \tau_r^{n-1}, \eta_r^n = \sigma^{n'}$$

de faces de  $\rho^{n+1}$  tal que  $\tau_i^{n-1}$  seja incidente com  $\eta_{i-1}^n$  e  $\eta_i^n$ . A demonstração fica para o leitor.

(9.10) Teorema - Seja  $\rho^{n+1}$  (orientada). Orientemos as faces  $n$ -dimensionais coerentemente:  $\sigma_1^n, \sigma_2^n \dots \sigma_s^n$ . Seja  $U^{n-1}$  o  $(n-1)$ -esqueleto de  $\rho^{n+1}$  e  $f: U^{n-1} \rightarrow X$ .

Sejam  $\alpha_i = [f|_{\dot{\sigma}_i^{n-1}}]$  então vale  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0$ .

Demonstração - Vamos fazer diversas modificações sobre as faces  $(n-1)$ -dimensionais o que não altera a soma e mostrar depois que os elementos alterados serão todos nulos.

Fixemos uma face  $\sigma_1^n$ . Pelo lema (9.9) qualquer outra  $n$ -célula  $\sigma_i^n$  pode ser ligada a  $\sigma_1^n$  por uma seqüência  $\eta_0^n = \sigma_1^n, \tau_1^{n-1}, \dots, \eta_r^n = \sigma_i^n$ .

Procedemos da seguinte forma: modifiquemos, utilizando o lema (9.6)  $f$  ao longo de  $\tau_r^{n-1}$  obtendo  $f'$  de tal modo que  $[f'|_{\dot{\sigma}_i^n}] = 0$ , suponhamos que  $\eta_{r-1}^n = \sigma_j^n$  então  $[f'|_{\dot{\sigma}_j^n}] = \alpha_i + \alpha_j$  (pelo corolário (9.8)). Modifiquemos agora  $f'$  ao longo de  $\tau_{r-1}^{n-1}$  de tal modo que  $[f''|_{\dot{\sigma}_j^n}] = \alpha_j$ , isto é, volte ao valor antigo;  $\alpha_i$  ficou desta forma "transmitido" para  $\eta_{r-2}^n$ . A modificação seguinte será em  $\tau_{r-2}^{n-1}$  passando  $\alpha_i$  para  $\eta_{r-3}^n$  e assim por diante. No fim do nosso processo teremos  $\bar{f}$  tal que

a)  $[\bar{f}|_{\dot{\sigma}_i^n}] = 0$

b)  $[\bar{f}|_{\dot{\sigma}_1^n}] = \alpha_1 + \alpha_i$

c)  $[\bar{f}|_{\dot{\sigma}_k^n}] = \alpha_k \quad k \neq 1, k \neq i.$



Partindo de  $\bar{f}$  e procedendo análogamente com um outro  $\dot{\sigma}_j^n$  constrói-se  $\bar{f}: U^{n-1} \rightarrow X$  tal que:

- a)  $[\bar{f} | \dot{\sigma}_i^n] = [\bar{f} | \dot{\sigma}_j^n] = 0$
- b)  $[\bar{f} | \dot{\sigma}_k^n] = \alpha_k \quad k \neq 1, i, j$
- c)  $[\bar{f} | \dot{\sigma}_1^n] = \alpha_1 + \alpha_i + \alpha_j$ .

Seguindo neste processo chegamos finalmente a uma  $g$  tal que

- a)  $[g | \dot{\sigma}_k^n] = 0$  se  $k \neq 1$
- b)  $[g | \dot{\sigma}_1^n] = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ .

Ora, pela a) temos, usando (9.4), que  $g$  se estende a tôdas as  $\sigma_k^n$  ( $k \neq 1$ ); mas isto significa que  $g | \dot{\sigma}_1^n$  se estende ao interior de uma célula  $(\bigcup_{i=2}^n \sigma_i^n)$ ; portanto,  $g$  se estende também ao interior de  $\sigma_1^n$ ; portanto, ver 9.4:  $[g | \dot{\sigma}_1^n] = 0$ , logo pela b) segue  $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0$  c.q.d.

### N O T A

Vamos construir a homotopia entre  $k|H$  e  $k'|H$  (onde  $H$  é o hexágono ABCDEF) necessitadas no teorema (5.5) 2º (ver pág. 27).

Os vértices de  $H$  são:  $A = (0,1)$ ,  $B = (-\frac{1}{4}, 1/2)$ ,  $C = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $D = (0,-1)$ ,  $E = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ ,  $F = (\frac{1}{4}, 1/2)$ .

Sejam  $t_1$  e  $t_2$  as coordenadas em  $H$  e  $t$  o parâmetro de deformação. Se não indicarmos certas limitações subentendemos que o ponto pertence a  $H$ .

Temos  $k(t_1, t_2) = \bar{c}(1-4|t_1|)$  e

$$k'(t_1, t_2) = \begin{cases} \bar{c}(0) = x_0 & \text{para } |t_2| \leq 1/2 \\ \bar{c}(2|t_2|-1) & \text{para } 1/2 \leq |t_2| \end{cases}$$

A homotopia  $F: H \times I \rightarrow X$  pode ser dada por:

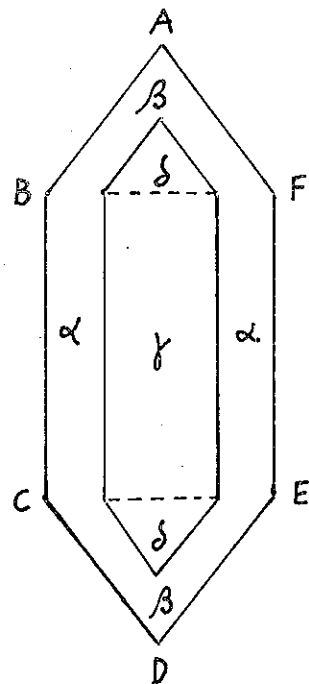
$$F(t_1, t_2, t) =$$

$$\bar{C}(1-4|t_1|) \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} t/4 \leq |t_1| \leq 1/4 \\ |y| \leq 1/2 \end{array} \right\} \alpha$$

$$\text{ou } \left\{ \frac{1+t}{2} - 2|t_1| \leq |t_2| \right\} \beta$$

$$\bar{C}(1-t) \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} |t_1| \leq t/4 \\ |t_2| \leq 1/2 \end{array} \right\} \gamma$$

$$\bar{C}(2|t_2|-t) \text{ para } \left\{ 1/2 \leq |t_2| \leq \frac{1+t}{2} - 2|x| \right\} \delta$$



B I B L I O G R A F I A

- [Be] L.Bers - Topology (Notas mimeografadas do New York University Institute of Mathematical Sciences 1956-57.
- [Bo] V.G. Boltyanskii - American Math. Soc. Translations, vol. 7, 2ª série, 1957.
- [Hi] P.J. Hilton - An introduction to homotopy theory. Cambridge Tracts, 43, 1953.
- [Hu-1] S.T. Hu - Homotopy theory (Academic Press, 1959).
- [Hu-2] S.T. Hu - The homotopy addition theorem. Ann. of Math. 58 (1953) 108-122.
- [Ly] C.B. de Lyra - Introdução à Topologia Algébrica. (Soc. de Matemática de São Paulo, 1957).
- [St] N. Steenrod - The topology of fibre bundles. (Princeton University Press, 1951).
- [Wa] A.H. Wallace - An introduction to algebraic topology. (Pergamon Press, 1957).

## C A P Í T U L O   B

### HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DOS COMPLEXOS CELULARES

#### § 1 - Espaços afins

As figuras estudadas neste capítulo são certos sub-espços do espaço  $R^n$  das n-uplas de números reais. A topologia do  $R^n$  é aquela da Análise Clássica, isto é, a dada pela distância euclídeana.  $R^n$  será considerado às vèzes como espaço de pontos (espaço afim) e às vèzes como espaço de translações dêste espaço afim, isto é, como espaço vetorial. Notaremos tanto pontos quanto vetores com n-uplas :  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)$  ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  , etc.

Vamos citar aqui alguns fatos elementares sôbre êstes espaços afins, seus sub-espços e suas translações.

Muitas vèzes o  $R^n$  é considerado como sub-espço de  $R^m$  ( $n < m$ ) e nestas condições identificamos  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  com  $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0) \in R^m$  sem fazer menção explícito disto.

Aplicar um vetor  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  a um ponto  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  significa construir o ponto  $Q = P + v$  cujas coordenadas são  $y_i = x_i + v_i$  . Por sua vez, o vetor  $v$  é considerado como "diferença dos pontos Q e P:  $v = Q - P$  :  $v_i = y_i - x_i$  ". As propriedades bastante elementares destas operações serão utiliza - das sem maiores justificações no decorrer do texto.

Dados dois pontos  $P = (x_i)$  ,  $Q = (y_i)$  obtemos todos os pontos da reta PQ aplicando a P os múltiplos do vetor  $(Q-P)$  .  $S = (z_i)$  é ponto da reta PQ se  $S = P + \lambda(Q-P)$  com  $\lambda \in R$  , isto é,

$z_i = x_i + \lambda(y_i - x_i) = (1 - \lambda)x_i + \lambda y_i$  . Podemos também por:  
 $z_i = \mu x_i + \lambda y_i$  com  $\mu + \lambda = 1$  , isto é, S é "baricentro" de P e Q dotados de "pesos"  $\mu$  e  $\lambda$  de soma 1 . Vemos ainda que o "segmento" PQ é constituído daquêles baricentros para os quais  $\mu \geq 0$  ,  $\lambda \geq 0$  .

Mais geralmente, chamamos de baricentro dos pontos  $P^0, P^1, \dots, P^r \in R^n$  segundo os pesos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$  com  $\sum_{j=0}^r \lambda_j = 1$  ao ponto  $S = \sum_{j=0}^r \lambda_j P^j$  de coordenadas  $z_i = \sum_{j=0}^r \lambda_j x_i^j$ .  
Vê-se facilmente que S pode ser obtido aplicando a  $P_0$  o vetor  $\sum_{j=1}^r \lambda_j (P^j - P^0)$ .

O conjunto dos baricentros de um sistema de pontos  $P^0, P^1, \dots, P^r$  será a "variedade linear" V gerada por estes pontos. Esta variedade V também pode ser obtida aplicando em um qualquer de seus pontos os vetores do espaço vetorial  $V'$  gerado por  $(P^1 - P^0), (P^2 - P^0), \dots, (P^r - P^0)$ .  $V'$  é dito o espaço das translações do espaço "afim" V. A dimensão de V por definição é a de  $V'$ .

Um sistema de pontos  $P^0, P^1, \dots, P^r$  é linearmente independente se os vetores  $(P^1 - P^0), \dots, (P^r - P^0)$  o forem.

Uma equação linear  $\sum a^i x_i + b = 0$  entre as coordenadas dos pontos  $R^n$  define um "hiperplano", o qual é uma variedade linear de (n-1) dimensões. Verifica-se que toda variedade linear de dimensão p pode ser obtida como intersecção de (n-p) hiperplanos. O espaço vazio é considerado como variedade linear de dimensão -1.

Tôda variedade linear é a intersecção de todos os hiperplanos que a contém; tôda intersecção de hiperplanos é uma variedade linear.

Um sub-conjunto  $A \subset R^n$  é dito convexo se sempre que os pontos  $P, Q \in A$  o segmento (P,Q) que os une é totalmente contido em A.

Um conjunto A contido em uma variedade linear V é um "corpo convexo" de V se: a) A é convexo, b) A é compacto, c) A tem interior não vazio na topologia de V.

Exemplos no  $R^n$ :

a) a bola fechada  $B^n = \{ (x_i) \in R^n \mid \sum x_i^2 \leq 1 \}$

b) os hiperparalelepípedos  $I^n[a_i, b_i]$  de a) (Cap. A - § 3).

Para os corpos convexos vale o seguinte

(1.1) Teorema - Dois corpos convexos pertencentes a espaços afins de mesma dimensão são homeomorfos sendo que as suas fronteiras se correspondem.

Os hiperplanos são conjuntos convexos. Cada hiperplano  $\sum a^i x_i + b = 0$  divide o espaço  $R^n$  em dois semi-espacos dos quais é origem:  $\sum a^i x_i + b \geq 0$  e  $\sum a^i x_i + b \leq 0$ .

## § 2 - Células poliédricas convexas

Consideremos, em  $R^n$ ,  $r$  semi-espacos definidos pelas desigualdades

$$(2.1) \quad \sum a_j^i x_i + b_j \geq 0, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots r.$$

Como cada semi-espaco é um conjunto convexo, e a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo, segue imediatamente que o conjunto das soluções do sistema (2.1)  $\sum a_j^i x_i + b_j \geq 0$  é um sub-conjunto convexo de  $R^n$ .

(2.2) Definição - Uma célula poliédrica convexa  $\mathcal{C}$  é um sub-espaco compacto de  $R^n$  intersecção de um número finito de semi-espacos.

Se todos os pontos da célula  $\mathcal{C}$  satisfazem a equação  $\sum a_j^i x_i + b_j = 0$ , então  $\mathcal{C}$  está contida nesse hiperplano e reciprocamente. O fato de  $\mathcal{C}$  estar contido num hiperplano ocorrerá, por exemplo, se duas das inequações do sistema (2.1) têm coeficientes proporcionais, com coeficientes de proporcionalidade negativo. Nesse caso, as duas inequações podem ser substituídas pela equação que se obtém de qualquer delas suprimindo o sinal de desigualdade.

(2.3) Definição - A variedade linear  $V$  intersecção de todos os hiperplanos que contêm  $\mathcal{C}$  é dita suporte de  $\mathcal{C}$ .

Segue imediatamente desta definição que um hiperplano do espaco contém  $\mathcal{C}$  se e somente se contém o suporte de  $\mathcal{C}$ .

Se existem  $p$  hiperplanos independentes em  $R^n$  que contêm  $\mathcal{C}$ , então a dimensão do suporte de  $\mathcal{C}$  é  $m = n - p$ . Dizemos então que a dimensão de  $\mathcal{C}$  é  $m$ .

Sejam  $P^0, P^1, \dots, P^m$ ,  $(m+1)$  pontos linearmente independentes de  $R^n$ . Eles determinam uma variedade linear  $m$ -dimensional  $V$ .  $m$  destes pontos  $P^0 \dots P^{i-1}, P^{i+1} \dots P^m$  definem um "hiperplano" de  $V$ , isto é, uma variedade  $M_i$  de dimensão  $(m-1)$ . Esta sub-variedade divide  $V$  em dois semi-espacos. Escolhamos aquêle que contém o ponto  $P_i$ .

A intersecção destes semi-espacos nos dá uma célula m-dimensional  $\Delta$  de  $V$ . Esta célula é o "simplexo" m-dimensional de vértices  $P^0, P^1, \dots, P^m$ . (Exemplos: o ponto, o segmento, o triângulo, o tetraedro) É fácil ver que todo simplexo é um corpo convexo de seu suporte, basta ver que seu centro  $\frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m P^i$  é interior. O simplexo  $\Delta$  é o menor conjunto convexo que contém os pontos  $P^0, \dots, P^m$ .

Verifica-se que toda célula poliédrica convexa  $\sigma$  é um corpo convexo do seu suporte  $V$ . Com efeito,  $\sigma$  é compacto, por definição, e é convexo como intersecção de conjuntos convexos. Além disso, existem em  $\sigma$  m+1 pontos linearmente independentes. Estes m+1 pontos geram um m-simplexo  $A$  contido em  $\sigma$ , pois  $\sigma$  é convexo. Sendo  $A$  um corpo convexo, possui um ponto  $P$  interior que será interior a  $\sigma$  na topologia de  $V$ .

(2.4) Definição - Os pontos interiores a  $\sigma$  na topologia de  $V$  são chamados pontos internos a  $\sigma$ .

O conjunto  $\langle \sigma \rangle$  dos pontos internos de  $\sigma$  diz-se célula aberta. O conjunto  $\dot{\sigma} = \sigma - \langle \sigma \rangle$  diz-se fronteira ou bordo de  $\sigma$ .

Se  $\Delta^m$  é um simplexo e  $\dot{\Delta}^m$  é sua fronteira, então existe um homeomorfismo  $h: (\sigma, \dot{\sigma}) \rightarrow (\Delta^m, \dot{\Delta}^m)$  (pelo teorema (1.1)).

Verifica-se que é possível descrever uma célula por meio de igualdades e desigualdades, tais que as igualdades definem a variedade linear suporte e o sistema total é minimal. (Se a dimensão da célula fôr máxima, o sistema das igualdades é vazio, definindo o espaço todo como suporte da célula).

Obtido o sistema minimal

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sum a_j^i x_i + b_j &= 0 & j &= 1, 2, \dots, p \\ \sum c_k^i x_i + d_k &\geq 0 & k &= 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

que descreve uma célula poliédrica  $\sigma$  de dimensão  $m = n - p$ , os pontos de  $\langle \sigma \rangle$  são as soluções do sistema

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sum a_j^i x_i + b_j &= 0 & j &= 1, 2, \dots, p \\ \sum c_k^i x_i + d_k &> 0 & k &= 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

Assim, os pontos da fronteira  $\bar{\sigma}$  são aqueles onde, pelo menos uma das desigualdades é substituída por uma igualdade.

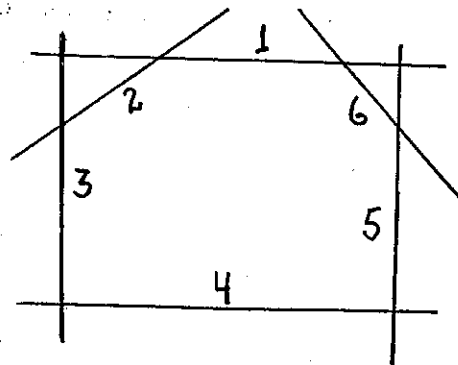
Consideremos o sub-conjunto de  $\sigma$  constituído pelas soluções do sistema

(2.7)

$$\begin{aligned} \sum a_j^i x_i + b_j &= 0 & j = 1, 2, \dots, P \\ \sum c_{k_0}^i x_i + d_{k_0} &= 0 \\ \sum c_k^i x_i + d_k &\geq 0 & k \neq k_0 \end{aligned}$$

É fácil ver que este sub-conjunto não é vazio. Se o fôsse, teríamos para todos os pontos de  $\sigma$   $c_{k_0}^i x_i + d_{k_0} > 0$  donde esta desigualdade devia ter sido eliminada na redução do sistema (2.1) a um sistema minimal. Englobando a última igualdade de (2.7) com as primeiras, obtém-se a descrição de uma

nova célula poliédrica convexa de dimensão  $m-1$ , que chamaremos face de dimensão  $m-1$  da célula  $\sigma$ . Em geral, o sistema (2.7) não é um sistema reduzido (minimal) desta face. Exemplo: a face 1 necessita somente da equação 1 e das desigualdades 2 e 6, sendo 3, 4 e 5 superabundantes.



As faces de dimensão  $m-2$  das faces de dimensão  $m-1$  são chamadas faces  $(m-2)$ -dimensionais de  $\sigma$ , etc.

É imediato que duas faces de uma célula  $\sigma$  ou têm intersecção vazia ou se encontram segundo uma face e que toda face de dimensão  $m-2$  é comum a duas faces  $(m-1)$ -dimensionais.

### § 3 - Célula poliédrica orientada

Seja  $V$  uma variedade linear de dimensão  $m$  e  $V'$  o espaço vetorial das translações de  $V$ . Sejam  $B$  e  $B'$  duas bases ordenadas de  $V$ . O determinante da matriz  $A$  dos coeficientes das relações que exprimem  $B'$  em função de  $B$  é um número diferente de zero. No conjunto de

tôdas as bases de  $V'$  pode-se definir uma relação de equivalência da seguinte maneira:  $B \equiv B'$  se e somente se  $\det. A > 0$ . Assim, o conjunto das bases de  $V'$  fica dividido em duas classes de equivalência. É fácil ver que se  $B$  e  $B'$  pertencem à mesma classe, podemos deformar  $B$  continuamente em  $B'$  nunca passando por um sistema de vetores linearmente dependentes e vice-versa. Cada uma dessas classes é chamada uma orientação de  $V$ . Representaremos uma orientação de  $V$  por uma de suas bases ordenadas. É exatamente isto que se faz orientando retas, planos ou o espaço na Geometria Elementar.

(3.1) Definição - Uma variedade orientada é um par  $(V, B)$  constituído por uma variedade  $V$  e pela orientação de  $V$  dada pela base ordenada  $B$ .

(3.2) Definição - Uma  $p$ -célula (poliédrica convexa) orientada  $p > 1$ , é um par  $(\sigma, B)$  onde  $\sigma$  é uma célula (poliédrica convexa) e  $B$  é uma orientação do suporte de  $\sigma$ .

Dizemos que  $(\sigma, B)$  tem a orientação induzida por  $V$ . Reciprocamente, a uma célula orientada corresponde, automaticamente, uma orientação da variedade suporte.

Orientamos as 0-células afetando-as de sinais + ou -.

Seja  $\sigma$  uma  $m$ -célula  $m > 1$ ,  $\zeta$  uma face de  $\sigma$  de dimensão  $m-1$  e  $A$  uma base que determina uma orientação de  $\zeta$ .

É fácil ver que se  $v$  é um vetor com origem em  $\langle \sigma \rangle$  e extremidade em  $\zeta$  então  $v$  seguido dos vetores de  $A$  forma uma base  $B'$  do suporte de  $\sigma$ . A orientação dada a  $\sigma$  por  $B'$  independe do particular  $v$ .

(3.3) Definição - Dizemos que  $A$  determina em  $\zeta$  a orientação induzida por aquela da  $m$ -célula  $(m > 1)(\sigma, B)$  se  $(\sigma, B)$  e  $(\sigma, B')$  coincidem.

Seja  $\sigma^1$  uma 1-célula de vértices  $a$  e  $b$ . Suponhamos  $\sigma^1$  orientada de  $a$  para  $b$ . Convencionaremos que a orientação induzida por  $\sigma^1$  em  $a$  é  $-a$  e em  $b$  é  $+b$ .



§ 4 - Complexos celulares poliédricos

(4.1) Definição - Sejam  $\sigma$  e  $\tau$  duas células poliédricas de dimensões quaisquer contidas em  $R^n$ . Dizemos que  $\sigma$  e  $\tau$  são bem situadas se  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  ou  $\sigma \cap \tau$  é face de ambas.

(4.2) Definição - Um complexo celular poliédrico (C.C.P.) é um par  $(X, \phi)$  onde  $X$  é um sub-espaco do  $R^n$  e  $\phi$  é um conjunto finito de células poliédricas convexas satisfazendo às condições:

a)  $X = \bigcup_{\sigma \in \phi} \sigma$

b) Se  $\sigma, \tau \in \phi$ , então,  $\sigma$  e  $\tau$  são bem situadas.

c) Se  $\sigma \in \phi$  e  $\tau$  é face de  $\sigma$ , então  $\tau \in \phi$ .

Estende-se a um espaco homeomorfo ao espaco  $X$  do C.C.P.  $(X, \phi)$  a nomenclatura acima estabelecida.

$X$  é chamado o poliedro subjacente ao complexo  $(X, \phi)$ .

As zero células são chamadas vértices do complexo.

Suponhamos que o complexo tenha  $\alpha_p$  células  $p$ -dimensionais.

Frequentemente enumeramos estas células:  $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \dots, \sigma_{\alpha_p}^p$ .

(4.3) Exemplos:

- a) Os pontos, os segmentos, os polígonos convexas e os poliedros sólidos convexas são as células poliédricas convexas de dimensões 0, 1, 2, 3 respectivamente.
- b) Um cubo com tôdas as suas faces é um C.C.P. com uma 3-célula, seis 2-células (que são quadrados), doze 1-células e 8 vértices.
- c) Um complexo que tem somente simplexes como células é chamado complexo simplicial.

(4.4) Definição - Seja  $(X, \phi)$  um C.C.P.. Seja  $\psi \subset \phi$  tal que se  $\sigma \in \psi$  e  $\tau$  é face de  $\sigma$ ,  $\tau \in \psi$  e seja  $A = \bigcup_{\sigma \in \psi} \sigma$ . É imediato que o par  $(A, \psi)$  é um C.C.P.. Chamaremos  $(A, \psi)$  sub-complexo de  $(X, \phi)$ .

Em particular,  $\phi^r = \{ \sigma \mid \dim \sigma \leq r \}$ , o par  $(X^r, \phi^r)$ , onde  $X^r = \bigcup_{\sigma \in \phi^r} \sigma$  é um sub-complexo de  $(X, \phi)$  que será chamado r-esqueleto de  $(X, \phi)$ .

(4.5) Sub-divisão normal - Através da "sub-divisão normal" que passaremos a descrever, todo C.C.P. se transforma num complexo simplicial.

Definiremos sub-divisão normal de um C.C.P. por recorrência sobre a dimensão. A sub-divisão normal do 0-esqueleto do C.C.P. é o próprio 0-esqueleto; a sub-divisão normal do 1-esqueleto do C.C.P., é o complexo simplicial que se obtém introduzindo o ponto médio de cada aresta como novo vértice; a sub-divisão normal do 2-esqueleto do C.C.P. é o complexo simplicial que se obtém sub-dividindo primeiramente tôdas as células do seu 1-esqueleto e projetando a partir de um ponto interno a cada 2-célula, as células da sub-divisão, de sua fronteira. Suponhamos agora que já tenha sido efetuada a sub-divisão normal do  $(q-1)$ -esqueleto, então, a sub-divisão do  $q$ -esqueleto do C.C.P. é obtida projetando a partir de um ponto interno de cada  $q$ -célula a sua fronteira subdividida.

A sub-divisão normal de um C.C.P. é um complexo simplicial.

Com efeito, projetando-se um  $r$ -simplexo de um ponto que não está no seu suporte, obtém-se um  $(r+1)$ -simplexo. Assim, através do processo descrito para a obtenção da sub-divisão normal, obtemos em cada passo uma coleção de simplexos. É imediato que esta coleção contém tôdas as faces de cada um dos seus simplexos e que êstes são bem situados.

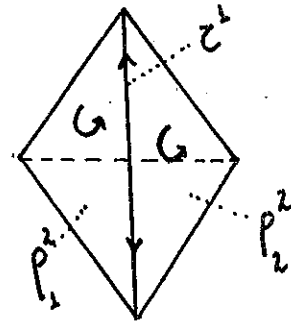
### § 5 - Números de incidência

Orientemos arbitrariamente tôdas as células de um C.C.P.  $(X, \phi)$ . Representemos por  $\sigma^p$  uma célula orientada e por  $(X, \phi, \mathcal{O})$  um C.C.P. cujas células estão tôdas orientadas. Sejam  $\sigma^p$  e  $\tau^{p-1}$  duas células orientadas de  $\phi$ .

(5.1) Definição - Chamamos "número de incidência"

$$[\sigma^p, \tau^{p-1}] = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau^{p-1} \text{ não é face de } \sigma^p \\ 1 & \text{se } \tau^{p-1} \text{ é face de } \sigma^p \text{ e tem a orientação induzida por } \sigma^p \\ -1 & \text{se } \tau^{p-1} \text{ é face de } \sigma^p \text{ e tem a orientação oposta da induzida} \end{cases}$$

(5.2) Seja  $\sigma^q$  uma célula orientada,  $\tau^{q-2}$  uma sua  $(q-2)$ -face. Esta se acha exatamente sobre duas  $(q-1)$ -faces  $\rho_1^{q-1}$  e  $\rho_2^{q-1}$  de  $\sigma^q$ . Além disso, se induzirmos em  $\tau^{q-2}$  a orientação de  $\rho_1^{q-1}$  obtida de  $\sigma^q$  obtemos a ordem oposta daquela passando por  $\rho_2^{q-1}$ .



Seja por exemplo um tetraedro  $\sigma^3$ .

(5.3) Disto segue que  $[\sigma^q, \rho_1^{q-1}][\rho_1^{q-1}, \tau^{q-2}] + [\sigma^q, \rho_2^{q-1}][\rho_2^{q-1}, \tau^{q-2}] = 0$ .

Vale a seguinte relação

(5.4) Lema -  $\sum_{i=1}^{q-1} [\sigma^q, \rho_i^{q-1}][\rho_i^{q-1}, \tau^{q-2}] = 0$  quaisquer que sejam  $\sigma^q$  e  $\tau^{q-2}$  sendo a soma estendida a tôdas as células  $(q-1)$ -dimensionais do complexo  $(X, \phi, \mathcal{O})$ .

De fato, basta notar o seguinte:

- Se  $\tau^{q-2}$  não é face de  $\sigma^q$  então todos os produtos  $[\sigma^q, \rho_i^{q-1}][\rho_i^{q-1}, \tau^{q-2}]$  são nulos, seja pelo fato de  $\rho_i^{q-1}$  não ser face de  $\sigma^q$ , seja por  $\tau^{q-2}$  não ser face de  $\rho_i^{q-1}$ . (É claro que se  $\tau^{q-2}$  é face de  $\rho_i^{q-1}$  e esta face de  $\sigma^q$  então  $\tau^{q-2}$  é face de  $\sigma^q$  contra a hipótese.)
- Se  $\tau^{q-2}$  é face de  $\sigma^q$  então existem duas células  $\rho_1^{q-1}$  e  $\rho_2^{q-1}$  que são faces de  $\sigma^q$  e tais que:  $\rho_1^{q-1} \cap \rho_2^{q-1} = \tau^{q-2}$  donde se tem que apenas as parcelas  $[\sigma^q, \rho_1^{q-1}][\rho_1^{q-1}, \tau^{q-2}]$  e  $[\sigma^q, \rho_2^{q-1}][\rho_2^{q-1}, \tau^{q-2}]$  são diferentes de zero mas que somadas se anulam (Ver 5.3)

§ 6 - Idéias geométricas da homologia

Apesar de no texto que segue nós nos interessarmos mais pela cohomologia de um espaço, vamos aqui dar algumas idéias geométricas sobre a homologia. Este parágrafo é puramente descritivo.

Observemos um disco e um anel.



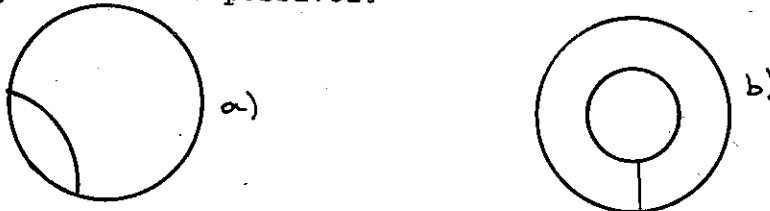
Vemos intuitivamente que as duas figuras em questão se distinguem essencialmente. Por outro lado, podemos substituí-las por um quadrado e um anel quadrado sem que esta substituição afete o problema da distinção topológica das duas.



Como podemos desenvolver um método para distinguir as figuras a) e b) ou, o que é a mesma coisa, a') de b') ?

Já temos visto na parte A os grupos de homotopia. É fácil ver que  $\pi_1(a) = 0$   $\pi_1(b) = \mathbb{Z}$  o que distingue as figuras.

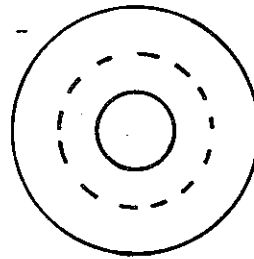
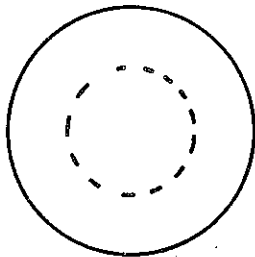
Outro método que se usa na Análise é fazer "talhos". Vemos que em b) podemos fazer um talho sem que a figura se torne desconexa, já em a) isto não é possível.



Este processo não serve quando a dimensão é maior que dois, pois torna-se complicado demais.

Vamos porém desenvolver outro processo.

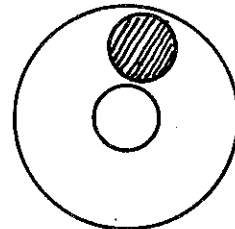
Consideremos em  $A$ ) uma figura fechada (usamos aqui a palavra fechada não no sentido de conjunto fechado, mas de curva fechada), isto é, no nosso caso essencialmente uma curva fechada. No caso de se tratar de uma curva simples, vemos que ela é fronteira de uma porção do disco. Já no caso do anel, uma curva que "envolve" o centro não é a fronteira completa de nenhuma figura totalmente contida em  $A$  .



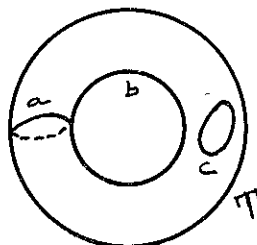
A idéia de envolver o centro é um tanto vaga, pois podemos dar um homeomorfismo do anel sobre si mesmo, levando a circunferência interna na externa e vice-versa; o que nos interessa, porém, é que a curva em jogo não é fronteira de nenhuma figura bidimensional do disco.

Por outro lado, existem figuras fechadas que são fronteiras em  $B$  .

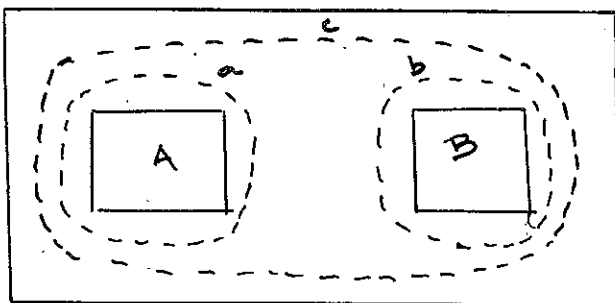
Consideremos alguns outros exemplos.



Seja  $T$  um toro (superfície). A curva  $a$  não é fronteira de nenhum pedaço de superfície de  $T$ ; a curva  $b$  também não é, porém, a curva  $c$  é fronteira de uma região bidimensional do toro. Por outro lado, a própria superfície do toro é uma figura bidimensional fechada que não é fronteira de nenhuma parte tridimensional.

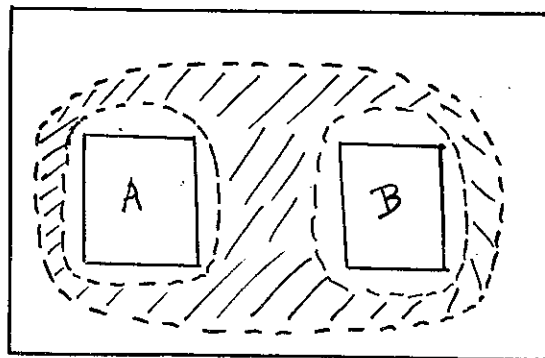


Seja agora dado um quadrado do qual tiramos dois quadrados menores.



Como nos exemplos anteriores, queremos detectar a existência de "obstáculos". Nesta figura, vemos que tanto a curva  $c$  quanto a curva composta de  $a$  e  $b$  servem para indicar a presença dos "buracos" A e B simultaneamente.

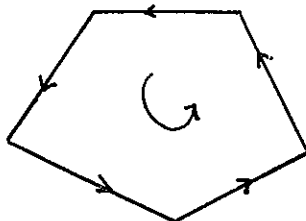
Observemos que as curvas  $c$  e  $a+b$  formam juntas a fronteira completa da figura achucada, como tanto serão equivalentes para indicar a presença



do obstáculo  $A+B$ . Para poder melhor descrever as idéias em jogo, vamos supor um modelo retilíneo do nosso espaço (e somente admitiremos espaços que podem ser representados retilíneamente) o qual nós supomos subdividido em células retilíneas, isto é, supomos que nosso espaço seja o poliedro subjacente a um C.C.P. Tôdas as figuras que vamos considerar serão compostas das células da nossa decomposição (salvo afirmação contrária).

Vamos, em primeiro lugar, ver o que entendemos por "fronteira de uma figura" e "figura fechada".

Seja primeiramente  $\sigma^p$  uma  $p$ -célula. A sua fronteira  $\partial \sigma^p$  é composta de  $(p-1)$ -células. Convém considerar a célula orientada e as suas  $(p-1)$ -faces com a orientação induzida. Podemos interpretar a fronteira da célula orientada  $\sigma^p$  como sendo

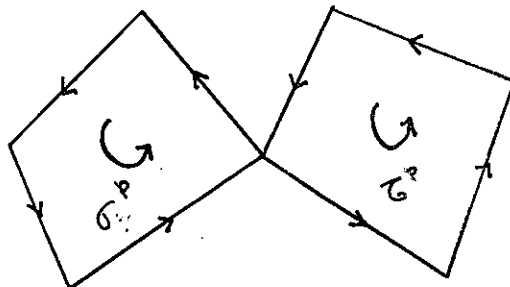


a "soma" das  $(p-1)$ -faces convenientemente orientadas. Seja agora  $F$  a figura constituída de duas  $p$ -células  $\sigma^p$  e  $\tau^p$ . A fronteira de  $F$  será a soma das faces de  $\sigma^p$  e  $\tau^p$ . Vamos ter três casos:

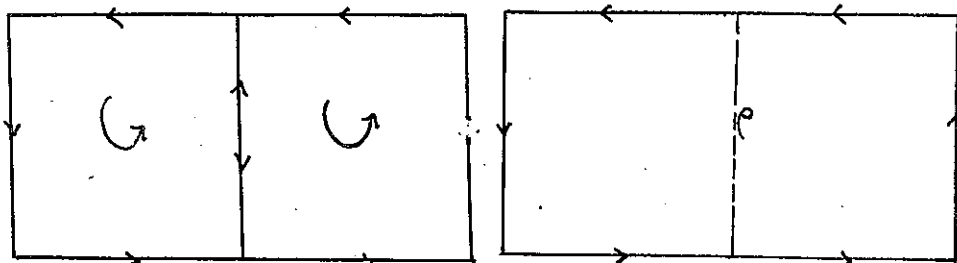
1º)  $\sigma^p$  e  $\tau^p$  não possuem face

$(p-1)$ -dimensional em comum, então sendo bem situadas

(ver 4.1) elas no máximo se interceptam segundo uma face  $(p-2)$ -dimensional. Então a fronteira de  $F$  é a "soma" simplesmente das fronteiras de  $\sigma^p$  e  $\tau^p$ .



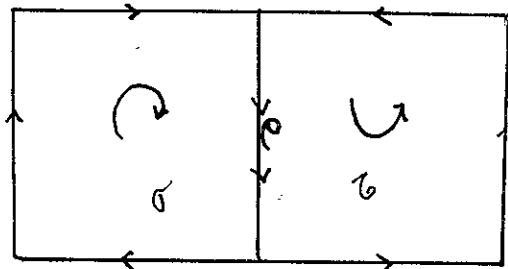
2º)  $\sigma^p$  e  $\tau^p$  possuem uma  $(p-1)$ -face  $\rho^{p-1}$  em comum à qual induzem orientações opostas. Neste caso, na soma das fronteiras de  $\sigma$  e  $\tau$  as parcelas  $\rho$  e  $-\rho$  se cancelam mutuamente e a fronteira de  $F$  resulta como sendo a soma das faces de  $\sigma$  e de  $\tau$  exceto a face  $\rho$ .



3º) Finalmente,  $\sigma$  e  $\tau$  possuem uma face  $\rho$  em comum, à qual imprimem a mesma orientação. Neste

caso, a fronteira de  $F$  deve ser considerada como a soma das faces de  $\sigma$  e  $\tau$  comparando  $\rho$  duas vezes como parcela ou seja com coeficiente

2.

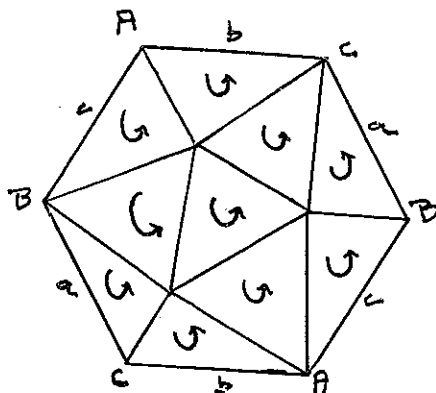


Isto nos sugere formar figuras em que uma mesma célula aparece diversas vezes como parcela, ou seja, combinações lineares formais de células orientadas. As duas orientações opostas de uma mesma célula vão ser consideradas como elementos opostos neste grupo de combinações e podem ser cancelados:  $\rho$  e  $\bar{\rho}$ :  $\rho = -\bar{\rho}$ . Estas combinações lineares serão chamadas de "cadeias".

Figuras fechadas - Nesta ordem de idéias, o que vem a ser uma figura fechada ou ciclo. Deve ser uma figura na qual as faces das diversas células se cancelam mutuamente, isto é, a figura não expõe faces  $(n-1)$ -dimensionais livres. É fácil ver que a soma de figuras fechadas é uma figura fechada, assim como a figura obtida dan do orientação oposta a cada uma das células de uma figura fechada.

Disto segue que a fronteira de uma figura é sempre uma figura fechada, pois é a soma das fronteiras de suas células que são certamente fechadas.

Caso do plano projetivo - Estudemos o plano projetivo. Este pode ser imaginado como sendo obtido identificando os pontos diametrais da periferia de um disco, pois o disco aberto é homeomorfo ao plano euclidiano. Construindo este homeomorfismo convenientemente, vemos que ele pode ser estendido a uma aplicação contínua que leva pontos diametralmente opostos da periferia no mesmo ponto impróprio.



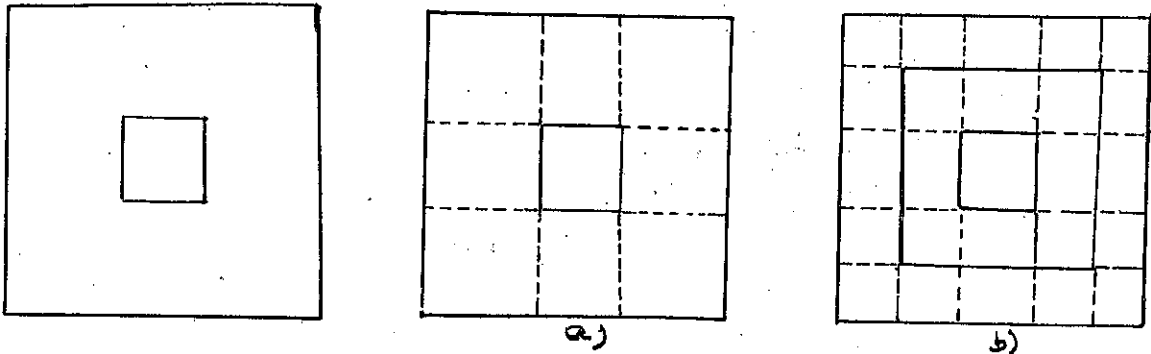
Para triangular o plano projetivo, damos ao disco forma hexagonal e prosseguimos conforme a figura. Se orientarmos, partindo do triângulo central, os triângulos coerentemente vemos que todas as arestas internas cancelam, mas as arestas  $a, b, c$  recebem a mesma orientação dos triângulos nêles adjacentes, isto é, a fronteira do plano (com aquelas orientações) é a curva  $a+b+c$  (reta imprópria) percorrida duas vezes. Isto é, o plano projetivo não é uma figura fechada neste sentido (de simplexes orientados). Mas, no sentido geo



métrico elementar êle é fechado; podemos atingir isto abolindo a orientação e deixando cancelar-se uma face que pertence a dois simplexos (a um número par de simplexos). Mas isto equivale a introduzir em lugar de números inteiros, os inteiros mod 2 como coeficientes das nossas combinações lineares formais.

Veremos, no futuro, que dependendo do problema é conveniente introduzir ainda outros grupos como coeficientes das nossas combinações.

Voltemos ao nosso problema de obter informações a partir das nossas figuras fechadas. Consideremos em primeiro lugar uma figura com duas subdivisões a) e b)



Na figura b) encontramos curvas fechadas que não podem ser dadas na figura a). Mas é claro que elas não vão dar informações novas. Precisamos então, para cada subdivisão, estabelecer uma relação de equivalência entre figuras fechadas e depois tentar comparar as classes de equivalência relativamente a uma e outra subdivisão (teorema da invariância topológica).

Como um dos exemplos acima mostrou, a relação de equivalência adequada é  $Z_1^p$  e  $Z_2^p$  (duas figuras fechadas de dimensão p) são equivalentes se existir uma figura  $c^{p+1}$  (p+1)-dimensional tal que  $Z_1^p - Z_2^p$  é a fronteira completa de  $c^{p+1}$ . Dizemos que  $Z_1^p$  e  $Z_2^p$  são homólogas. (Elas indicam a presença do mesmo obstáculo).

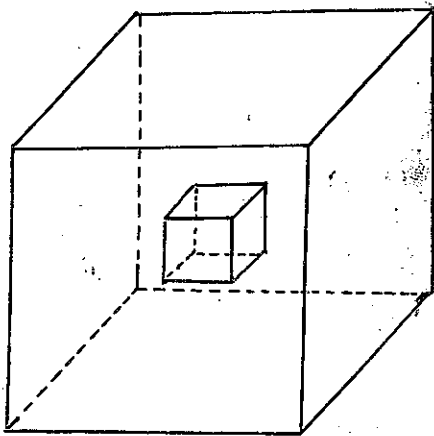
Nestas condições, uma figura  $Z^p$ , que é fronteira completa de um  $c^{p+1}$ , é equivalente à figura vazia. Dizemos que  $Z^p$  é homóloga a zero:  $Z^p$  não indica a presença de um obstáculo.

Adicionando a um  $Z_1^p$  uma figura homóloga a zero, não alteramos a sua "classe de homologia".

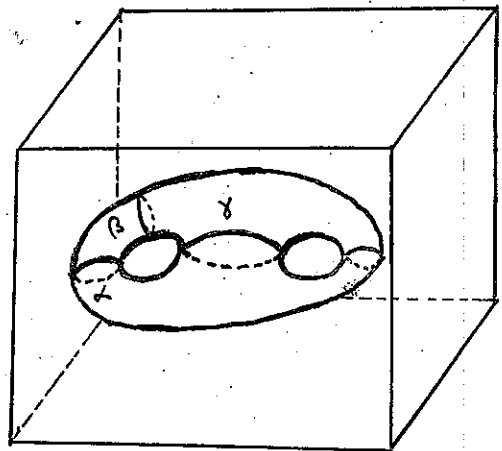
As classes de homologia de dimensão  $p$  com a adição óbvia formam o grupo de homologia de dimensão  $p$  do nosso espaço (ou melhor, da subdivisão em jogo do nosso espaço).

O fato interessante é que por simples que seja a subdivisão celular, ela admite o número suficiente de figuras fechadas, isto é, se tivermos outra subdivisão - que pode ser até curvilínea em relação à primeira - a toda classe de figuras fechadas da segunda corresponde uma classe de homologia da primeira e vice-versa, que são equivalentes em um sentido um pouco mais amplo entre si. Isto mostra que a nossa subdivisão nos dará amplas informações.

Vamos considerar mais um exemplo para ilustrar a nossa questão. Consideremos a) um cubo sólido de cujo interior retiramos os pontos internos a um cubo menor; b) um cubo sólido do qual retiramos o interior de um bi-toro sólido  $T^2$  que devemos imaginar retilíneamente imerso.



a)



b)

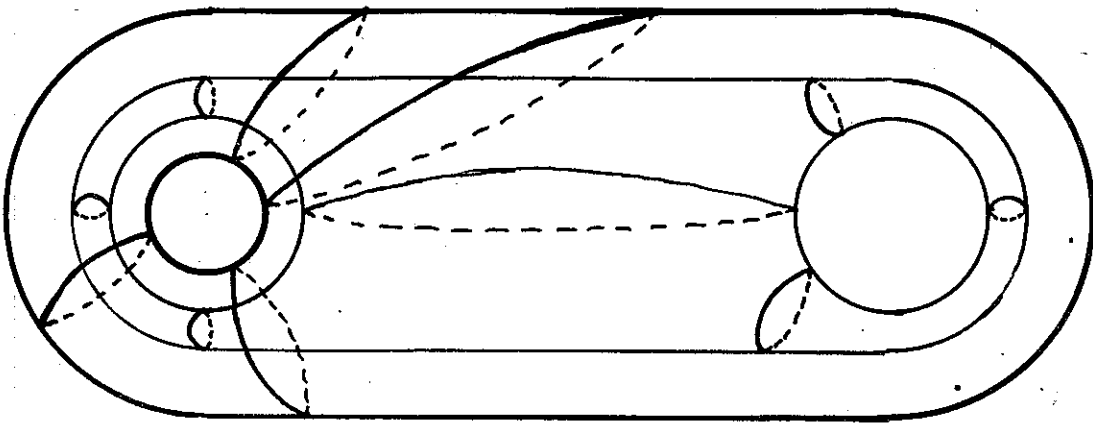
Subdividimos as nossas figuras o suficiente fino para podermos ver todas as configurações que seguem abaixo.

Dimensão 1 - Em dimensão 1 vemos imediatamente que qualquer figura fechada de a) é homóloga a zero (pois, pode ser contraída em um ponto). Já na figura b) existem figuras fechadas ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) que não são homólogas a zero.

Vamos ver se a dimensão 2 também nos dá informações para distinguir os espaços. Para a figura a) vê-se que qualquer ciclo é homólogo a um múltiplo do cubo grande (ou do pequeno).

Já na b) isto não se apresenta tão óbvio, pois, podemos construir ciclos com aspectos bastante variados e ocupando posições variadas em relação ao nosso obstáculo.

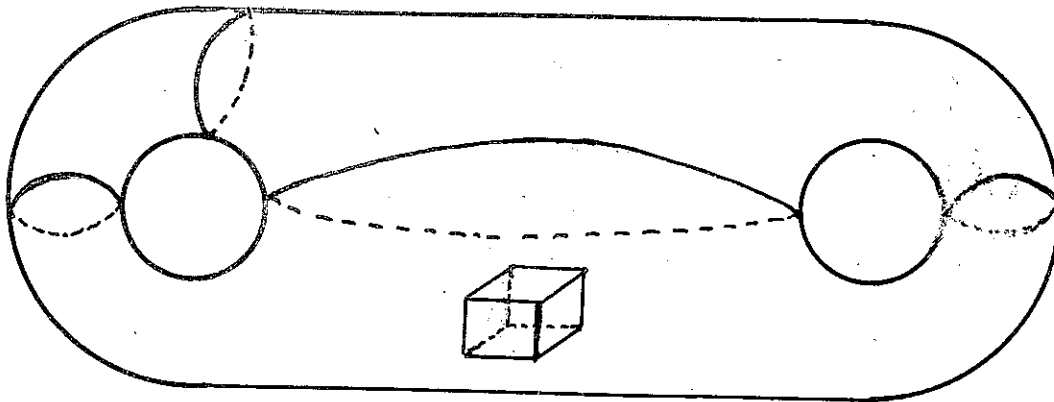
- 1º) A superfície do cubo grande (esfera).
- 2º) A superfície do bi-toro.
- 3º) A superfície de um toro conforme figura abaixo.



Mas, não é muito difícil mostrar que são homólogas e que qualquer figura fechada bidimensional é homóloga a um múltiplo da superfície do cubo. Por exemplo, a superfície do cubo e o toro formam juntos a fronteira da porção de espaço que se acha entre eles. Isto mostra que os grupos  $H_2$  nos casos a) e b) são capazes de indicar a presença de um obstáculo mas não informar sobre o aspecto do mesmo.

A informação mais fina neste caso provém da dimensão 1 (ver a cima).

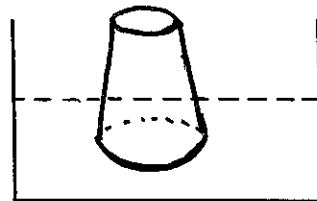
Como no caso do anel, podemos trocar o papel dos limites "interno" e "externo" das nossas figuras. O caso a) é imediato e o caso b) nos fornece um bi-toro sólido do qual foi retirada uma bola aberta.



Observando agora um cubo do qual retiramos o interior de  $n$  cubos menores disjuntos, vemos que a dimensão um não indica nada, em quanto que na dimensão 2 o grupo  $H_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  ( $n$  parcelas), isto é, o segundo grupo de homologia, nos indica o número de obstáculos existentes.

Homologia relativa - Quando nós descrevemos acima as figuras fechadas ( $p$ -dimensionais) dissemos que elas não devem "expor faces ( $p-1$ )-dimensionais livres". A idéia da figura "relativamente fechada" é a seguinte. Seja  $X$  um espaço e  $A$  um sub-espaço; uma figura  $Z$  de  $X$  será fechada relativamente a  $A$  (é um ciclo relativo) se a sua fronteira é  $A$ , isto é, se ela não expõe faces ( $p-1$ )-dimensionais livres, a não ser em  $A$ . Imaginemos um copo cuja boca, voltada para baixo, está mergulhada na água.

Fechamos, por assim dizer, a figura  $Z$  com auxílio do espaço  $A$ . Podemos também dizer que nós desprezamos tudo que se passa em  $A$ .



Dois ciclos relativos  $Z_1$  e  $Z_2$  serão equivalentes (homólogos relativamente a  $A$ ) se a sua diferença  $Z_1 - Z_2$  pode ser completada por meio de uma figura contida em  $A$  à fronteira completa de uma figura ( $p+1$ )-dimensional.

§ 7 - Grupos de Homologia de um C.C.P.

Seja  $K = (X, \phi, \odot)$  um C.C.P. orientado.

(7.1) Definição - Uma  $p$ -cadeia de  $K$ ,  $c_p$ , é qualquer combinação linear formal com coeficientes inteiros de células  $p$ -dimensionais de  $K$ :  $c_p = \sum n_i \sigma_i^p$ .

Representemos por  $C_p(K)$  o conjunto das  $p$ -cadeias acima definidas e vamos introduzir em  $C_p(K)$  uma adição definida por

$$\sum n_i \sigma_i^p + \sum m_i \sigma_i^p = \sum (n_i + m_i) \sigma_i^p$$

Com esta operação  $C_p(K)$  forma um grupo que recebe o nome de "grupo das  $p$ -cadeias de  $K$ ". Se  $p > n = \dim K$  temos  $C_p(K) = 0$ .

(7.2) Definição - Chama-se bordo da  $p$ -célula  $\sigma_i^p$  de  $K^{\wedge(p-1)}$ -cadeia de  $K$

$$d(\sigma_i^p) = \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} (\sigma_i^p, \tau_j^{p-1}) \tau_j^{p-1}$$

Vemos que esta cadeia representa a soma das faces de  $\sigma^p$  com a orientação induzida.

Por linearidade pode-se definir o bordo de uma  $p$ -cadeia como:

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^p n_i \sigma_i^p\right) &= \sum_{i=1}^p n_i d(\sigma_i^p) = \sum_{i=1}^p n_i \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} (\sigma_i^p, \tau_j^{p-1}) \tau_j^{p-1} = \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha_{p-1}} \left\{ \sum_{i=1}^p n_i (\sigma_i^p, \tau_j^{p-1}) \right\} \tau_j^{p-1} \end{aligned}$$

logo o bordo de uma  $p$ -cadeia é uma  $p-1$ -cadeia e  $d$  é um homomorfismo:  $d: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ .

Observação - Devíamos aqui distinguir os operadores bordo para as diversas dimensões e escrever  $d_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  mas, em geral, não existe perigo de confusão e nós deixamos de escrever o índice.

(7.3) Definição - Uma  $p$ -cadeia  $c_p$  é dita  $p$ -ciclo (fechada) se  $d c_p = 0$ . O conjunto de todos os  $p$ -ciclos forma um sub-grupo  $Z_p(K)$  de  $C_p(K)$ .

(7.4) Definição - Chama-se " $p$ -bordo" a uma  $p$ -cadeia  $b_p$  que é bordo de uma  $p+1$ -cadeia de  $K$ .  $\iff b_p = d(c_{p+1})$ .

O conjunto de todos os p-bordos de K, que se notará por  $B_p(K)$ , é um sub-grupo de  $C_p(K)$ .

(7.5) Lema -  $B_p(K)$  é sub-grupo de  $Z_p(K)$ .

Demonstração - Seja  $c_p = d c_{p+1}$ ; mostremos que  $d c_p = dd c_{p+1} = 0$ . Façamos, primeiramente, a demonstração para células e depois estenderemos por linearidade. Seja  $\sigma_i^{p+1}$  uma célula de  $c_{p+1}$  e vamos calcular  $dd(\sigma_i^{p+1})$

$$d(\sigma_i^{p+1}) = \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} (\sigma_i^{p+1}, \tau_j^p) \tau_j^p$$

$$\begin{aligned} \therefore dd(\sigma_i^{p+1}) &= d \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} (\sigma_i^{p+1}, \tau_j^p) \tau_j^p \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} (\sigma_i^{p+1}, \tau_j^p) d \tau_j^p = \\ &= \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} (\sigma_i^{p+1}, \tau_j^p) \sum_{k=1}^{\alpha_p} (\tau_j^p, \rho_k^{p-1}) \rho_k^{p-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha_p} \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha_{p+1}} (\sigma_i^{p+1}, \tau_j^p) (\tau_j^p, \rho_k^{p-1}) \right\} \rho_k^{p-1} = 0 \end{aligned}$$

pois que o coeficiente de  $\rho_k^{p-1}$  é nulo ( $k=1, \dots, \alpha_p$ ) (ver (5.4)).

Por linearidade podemos escrever

$$dd(c_{p+1}) = dd \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha_{p+1}} n_i \sigma_i^{p+1} \right\} = \sum_{i=1}^{\alpha_{p+1}} n_i dd \sigma_i^{p+1} = 0$$

donde  $B_p(K)$  é sub-grupo de  $Z_p(K)$ , pois se  $b_p = d c_{p+1}$  temos

$$d b_p = dd c_{p+1} = 0.$$

Pelo que foi exposto atrás, podemos afirmar que obtivemos uma seqüência de grupos

$$\longrightarrow C_p(K) \xrightarrow{d} C_{p-1}(K) \xrightarrow{d} C_{p-2}(K) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C_1(K) \xrightarrow{d} C_0(K)$$

onde  $dd \equiv 0$ .

Uma tal seqüência de grupos ligados por homomorfismos

$$\longrightarrow G_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} G_p \xrightarrow{d_p} G_{p-1} \longrightarrow \dots, \text{ onde } d_p d_{p+1} = 0 \text{ para}$$

todo p, é chamada de "complexo de cadeias". Se fizermos a soma direta  $G = \sum G_p$  e  $d = \sum d_p$  falamos em grupo graduado G com operador diferencial d.

(7.6) Definição - O quociente  $\frac{Z_p(K)}{B_p(K)} = H_p(K)$  é chamado de p-ésimo grupo de homologia de K .

Observação - A mudança na orientação de algumas ou tôdas das células não altera os grupos de homologia. No fim dêste capítulo em contra-se um resumo sôbre algumas propriedades dos grupos abelianos aqui utilizadas.

(7.7) Grupos de homologia relativos - Seja  $K = (X, \phi, \mathcal{O})$  um C. C.P. e seja  $(A, \psi)$  um sub-complexo de  $(X, \phi)$ . Tomemos as células de  $\psi$  com a mesma orientação com que elas comparecem em  $(X, \phi, \mathcal{O})$ ; temos assim um sub-complexo orientado de  $(X, \phi, \mathcal{O})$  que notaremos por  $(A, \psi, \mathcal{O}') = L$  .

Anàlogamente ao que fizemos para K obtemos o grupo  $C_p(L)$  das p-cadeias de L o qual pode ser considerado sub-grupo de  $C_p(K) : C_p(L) \subset C_p(K)$  .  $d|C_p(L)$  dá o operador borda de  $C_p(L)$  e ainda vemos que:  $Z_p(L) = Z_p(K) \cap C_p(L)$  e  $B_p(L) \subseteq B_p(K) \cap C_p(L)$  (em geral não temos igualdade).

(7.8) Definição - Uma p-cadeia  $c_p \in C_p(K)$  é dita um p-ciclo relativo se  $d c_p \in C_{p-1}(L)$  .

Representemos por  $Z_p(K, L)$  o conjunto dos p-ciclos relativos de K módulo L . É imediato que  $Z_p(K, L)$  é sub-grupo de  $C_p(K)$  . Por outro lado, temos também que  $Z_p(K) \underset{s.g.}{\subset} Z_p(K, L)$  .

(7.9) Definição - Uma p-cadeia  $c_p \in C_p(K)$  é dita um bordo relativo se  $c_p = d c_{p+1} + l_p$  onde  $c_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  e  $l_p \in C_p(L)$  .

Representemos por  $B_p(K, L)$  o conjunto de bordos relativos de K módulo L . Temos:  $B_p(K, L) = B_p(K) + C_p(L)$  .

Mostremos agora que  $B_p(K, L)$  é sub-grupo de  $Z_p(K, L)$ . De fato , dado  $b_p \in B_p(K, L)$  temos  $b_p = d c_{p+1} + l_p$  .°.  $d b_p =$   
 $= d d c_{p+1} + d l_p \in C_{p-1}(L)$  c.q.d.

= 0

Com isto podemos definir  $\frac{Z_p(K, L)}{B_p(K, L)} = H_p(K, L)$  o qual chamaremos

p-ésimo Grupo de Homologia relativa de K módulo L .

(7.10) Observação - Notemos agora o seguinte:

$$Z_p(L) \xrightarrow{i} Z_p(K) \xrightarrow{j} Z_p(K,L)$$

$$B_p(L) \xrightarrow{i} B_p(K) \xrightarrow{j} B_p(K,L)$$

onde  $i$  e  $j$  são injeções canônicas dos sub-grupos nos grupos, em questão.

A partir de  $i$  e  $j$  podemos definir  $i_*$  e  $j_*$ , homomorfismos induzidos

$$\frac{Z_p(L)}{B_p(L)} \xrightarrow{i_*} \frac{Z_p(K)}{B_p(K)} \xrightarrow{j_*} \frac{Z_p(K,L)}{B_p(K,L)}$$

do seguinte modo:

$i_*$ ) dado  $h_p \in H_p(L)$  temos  $h_p = z_p + B_p(L)$  e pomos

$$i_*(h_p) = z_p + B_p(K) \in H_p(K).$$

$j_*$ ) dado  $h_p \in H_p(K)$  temos  $h_p = z_p + B_p(K)$  e pomos

$$j_*(h_p) = z_p + B_p(K,L).$$

Verifica-se imediatamente que  $i_*$  e  $j_*$  são homomorfismos.

Cabe aqui observação análoga à dada depois de (7.2).

Construamos agora um terceiro homomorfismo

$$H_p(K,L) \xrightarrow{d_*} H_{p-1}(L)$$

do seguinte modo: dado  $h_p \in H_p(K,L)$ ,  $h_p = z_p + B_p(K,L)$  com

$d z_p \in Z_{p-1}(L)$ , pomos  $d_*(h_p) = d_*(z_p + B_p(K,L)) = d z_p + B_{p-1}(L)$

∴  $d_*(h_p) \in H_{p-1}(L)$ .

$d_*$  é bem definida, pois que, tomando-se  $z'_p = z_p + d c_{p+1} + l_p$  temos que  $d z'_p = d z_p + d l_p$ , isto é,  $d z'_p$  e  $d z_p$  diferem de um elemento de  $B_{p-1}(L)$ .

Com isto, temos uma seqüência de homomorfismos

(7.11)

$$\dots \longrightarrow H_p(L) \xrightarrow{i_*} H_p(K) \xrightarrow{j_*} H_p(K,L) \xrightarrow{d_*} H_{p-1}(L) \longrightarrow \dots$$

chamada Sequência Exata de Homologia do par  $(K,L)$ .



Observação - Uma seqüência de grupos e homomorfismos

$$\longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \longrightarrow$$

é dita exata em B se  $\text{im } \alpha = \alpha(A)$  e  $\text{ker } \beta = \beta^{-1}(0)$  coincidem, isto é, se um elemento  $b \in B$  é levado por  $\beta$  no zero de C se e somente se  $b$  é imagem por  $\alpha$  de algum elemento de A. A seqüência de homologia acima citada tem esta propriedade em toda sua extensão e este fato é de grande utilidade no cálculo dos grupos de homologia, assim como em considerações teóricas.

### § 8 - Teorema da invariança

É um teorema básico que os grupos de homologia de um complexo simplicial são invariantes topológicos, isto é, se tivermos dois complexos simpliciais cujos poliedros subjacentes são homeomorfos, então existe isomorfismo entre seus grupos de homologia em todas as dimensões. A demonstração deste teorema é encontrada, sob uma outra forma, em todos os textos que tratam da homologia simplicial (ver, por exemplo, [Ly|§7]).

Neste parágrafo, vamos demonstrar que os grupos de homologia de um C.C.P. são isomorfos aos de sua subdivisão normal. Sendo esta um complexo simplicial segue imediatamente a invariança topológica dos grupos de homologia dos C.C.P.. Esta redução tem, também, importância prática, pois, em geral, os espaços admitem subdivisões celulares muito mais simples do que as subdivisões simpliciais reduzindo, desta maneira, o cálculo efetivo dos grupos de homologia.

No § 7 obtivemos um complexo de cadeias

$$\longrightarrow C_p(K) \xrightarrow{d} C_{p-1}(K) \longrightarrow \dots$$

que designamos com  $C(K)$ .

(8.1) Definição - Chama-se subcomplexo de um complexo de cadeias  $\dots \longrightarrow G_p \xrightarrow{d} G_{p-1} \dots$  (ou sub-grupo permitido no caso de falarmos em grupos graduados) a um complexo de cadeias  $\dots \longrightarrow M_p \xrightarrow{d'} M_{p-1} \longrightarrow \dots$  para o qual  $M_p \subset G_p$  e  $d'_p = d_p|_{M_p}$ .

Escreveremos então  $d$  em lugar de  $d'$ . Por exemplo, as cadeias de um subcomplexo  $L$  de  $K$  formam um subcomplexo de cadeias  $C(L)$  de  $C(K)$ .

Utilizamos os símbolos  $Z_p(G) = d_p^{-1}(0)$  (ciclos de  $G$ ),  $B_p(G) = d_{p+1}(G_{p+1})$  (bordos de  $G$ ) e  $H_p(G) = Z_p(G)/B_p(G)$  (homologia de  $G$ ). Analogamente para o subcomplexo  $M$ .

(8.2) Um subcomplexo  $M$  de  $G$  é dito adequado se:

- todo ciclo de  $Z_q(G)$  é homólogo a um ciclo de  $Z_q(M)$ ;
- se  $z \in Z_q(M)$  e  $z = dy$  com  $y \in C_{q+1}(G)$  então existe  $y' \in C_{q+1}(M)$  tal que  $z = dy'$ .

Vale então o

(8.3) Lema -  $H_q(M) \approx H_q(G)$ .

De fato, seja  $\psi_p: M_p \rightarrow G_p$  a injeção canônica. Pelo que foi dito em (8.1) vale  $d\psi = \psi d$ . Disto segue  $\psi(Z_q(M)) \subset Z_q(G)$ ,

$\psi(B_p(M)) \subset B_q(G)$ ; existe, portanto, a aplicação induzida

$\psi_*: H_q(M) \rightarrow H_q(G)$  dada por  $\psi_*(z+B_q(M)) = z + B_q(G)$ .

Pela condição a) de (8.2)  $\psi_*$  é sobre e pela b)  $\psi_*$  é biunívoca, pois se para  $z, z' \in Z_q(M)$  vale  $z \equiv z' \pmod{B_q(G)}$  então temos também  $z \equiv z' \pmod{B_q(M)}$ . Isto termina a demonstração.

(8.4) Teorema - Os grupos de homologia de um complexo celular  $K = (X, \phi)$  e de sua subdivisão normal  $N = (\phi, \psi)$  são isomorfos.

Demonstração - Para tanto, vamos construir uma aplicação

$\mathcal{F}: C(K) \rightarrow C(N)$  que seja a) permitida, isto é,  $d\mathcal{F} = \mathcal{F}d$  e  $\mathcal{F}(C_q(K)) \subset C_q(N)$ , b) biunívoca sobre um subcomplexo de cadeias adequado  $M$  de  $C(N)$ .

Construção de  $\mathcal{F}$  - Consideremos o C.C.P.,  $K$  orientado. Na subdivisão normal adotamos as seguintes orientações para os simplexes se  $\Delta^p$  provém da subdivisão de uma  $p$ -célula,  $\Delta^p$  terá a orientação induzida, se  $\Delta^p$  provém de uma célula de dimensão superior, usamos uma orientação qualquer. Seja  $\sigma^p$  uma célula orientada. Esta célula fica subdividida em  $p$ -simplexos. Definimos  $\mathcal{F}_p(\sigma^p)$  = soma dos  $p$ -simplexos obtidos pela subdivisão normal de  $\sigma^p$  com a orientação induzida.

$\mathbb{F}_p$  se estende, por linearidade, a todo  $C_p(K)$ :

$$\sum_p |\sum n_i \sigma_i^p| = \sum n_i \mathbb{F}_p(\sigma_i^p).$$

É fácil ver que  $d \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p d$  pois cada  $(p-1)$ -face dos  $p$ -simplexos introduzidos pela subdivisão normal interna às  $p$ -células aparece no bordo duas vezes e com orientações opostas. Além disso, nota-se que  $\mathbb{F}_p$  é biunívoca pois cada  $p$ -simplexo da subdivisão normal está contido em uma única  $p$ -célula.

Vimos então que  $\mathbb{F}(C(K)) = M$  é um sub-complexo de  $C(N)$ . Vamos verificar se êle é adequado. Para tal, deverá verificar as condições a e b de (8.2).

De fato,

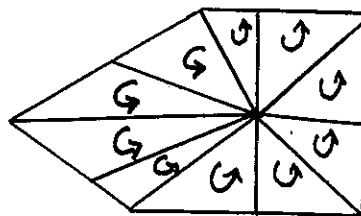
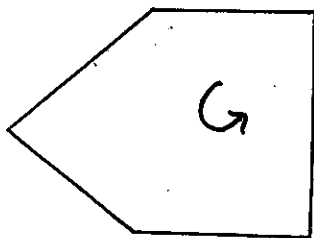
a) Seja  $z_p = \sum n_i \Delta_i^p \in Z_p(N)$  um ciclo simplicial. Temos que verificar que êle é homólogo a um ciclo de  $M$ .

Seja  $n$  a dimensão do complexo. Se  $n > p$  vamos demonstrar, em primeiro lugar, que  $z_p$  é homólogo a um ciclo  $z_p^{(n-1)}$  contido no  $(n-1)$ -esqueleto. Seja  $\sigma^n$  uma  $n$ -célula. Construímos  $z_p \sigma$  o "traço" de  $z_p$  sobre  $\sigma$ , isto é,  $z_p \sigma = \sum m_i \Delta_i^p$  onde

$$m_i = \begin{cases} n_i & \text{se } \Delta_i^p \subset \sigma^n \\ 0 & \text{se } \Delta_i^p \not\subset \sigma^n \end{cases}$$

Temos então  $z_p = z_p \sigma + c_p$  onde os simplexos de  $c_p$  têm, no máximo, faces  $(p-1)$ -dimensionais em comum com a subdivisão de  $\sigma^n$  e êstes estão em  $\dot{\sigma}^n$ .

Temos  $0 = dz_p = dz_p \sigma + dc_p$  ou seja  $dz_p \sigma = -dc_p$ . Isto significa que  $dz_p \sigma \in C_{p-1} \dot{\sigma}^n$  ou seja  $z_p \sigma$  é um ciclo relativo de  $\sigma^n$  módulo  $\dot{\sigma}^n$ .



Utilizando o lema (8.5), que segue abaixo, temos que os grupos de homologia relativos de  $\sigma^n$ ,  $\dot{\sigma}^n$  são:

$$H_n(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \approx \mathbb{Z}, H_i(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) = 0 \quad i \neq n.$$

Disto segue que, sendo  $p < n$ ,  $z_p \sigma$  não é somente um p-ciclo relativo mas também um p-bordo relativo, isto é,  $z_p \sigma = da_{p+1} + f_p$  onde  $f_p$  pertence à fronteira  $\dot{\sigma}^n$ . Substituindo em  $z_p$  temos:  $z_p = da_{p+1} + f_p + c_p$  ou pondo  $z'_p = f_p + c_p$  vem:  $z'_p = z_p - da_{p+1}$  e temos:

- $d z'_p = d z_p - dd a_{p+1} = 0$ .  $z'_p$  é ciclo.
- $z'_p$  não contém nenhum simplexo interno a  $\sigma^n$ .
- $z'_p$  é homólogo a  $z_p$ .

Procedendo desta forma, com tôdas as n-células, obtemos  $z_p^{(n-1)}$  contido no (n-1)-esqueleto.

Se  $z_p^{(n-1)}$  podemos proceder da mesma forma - fazendo uso somente do (n-1)-esqueleto - para "limpar" as (n-1)-células, obtendo  $z_p^{(n-2)} \sim z_p$  contido no (n-2)-esqueleto de K.

Em um número finito de passos reduzimos  $z_p$  a  $z_p^p$  contido no p-esqueleto.

Vamos mostrar que  $z_p^p \in M_p$ . Com efeito, sendo  $d z_p^p = 0$  as faces dos p-simplexos devem cancelar-se mutuamente. Seja  $\Delta^p$  contido em  $\sigma^p$ .  $\Delta^p$  possui uma face na fronteira  $\dot{\sigma}^p$  e as restantes internas a  $\sigma^p$ . Estas internas podem ser canceladas somente pelos simplexos adjacentes de  $\Delta^p$  em  $\sigma^p$ , portanto, os simplexos adjacentes a  $\Delta^p$  em  $\sigma^p$  devem possuir o mesmo coeficiente em  $z_p^p$ . Mas é fácil verificar que dois simplexos  $\Delta^p$  e  $\tau^p$  de  $\sigma^p$  podem ser ligados por uma cadeia de p-simplexos de  $\sigma^p$  cada um adjacente ao sucessivo.

Desta forma, todos os p-simplexos de uma mesma p-célula comparecem com o mesmo coeficiente em  $z_p^p$ , o que mostra que  $z_p^p \in M_p$ .

b) Suponhamos que  $z_p = dy$  com  $y \in M_p$  e y qualquer. Vamos construir  $y' \in M_{p+1}$  tal que  $dy' = z_p$ . O procedimento é análogo à parte a).

Suponhamos que  $\dim K = n > p+1$ . Seja  $\sigma^n$  uma n-célula de K.

Construamos a cadeia  $y_\sigma$ , traço de  $y$  sobre  $\sigma$ . Temos  $y = y_\sigma + c_{p+1}$  onde nenhum dos simplexos de  $c_{p+1}$  está contido em  $\sigma^n$ .

$z_p = dy = dy_\sigma + d c_{p+1}$  ou  $dy_\sigma = z_p - d c_{p+1}$  como  $z_p \in M_p$  não possui nenhum simplexo interno a  $\sigma^n$ , o mesmo acontecendo com  $d c_{p+1}$ , segue que  $dy_\sigma \subset \dot{\sigma}^n$ . Logo,  $y_\sigma$  é um ciclo relativo de  $\sigma^n$ ,  $\dot{\sigma}^n$ . Levando em conta  $n > p+1$  e (8,5) temos  $y_\sigma = d c_{p+2} + f_{p+1}$  onde  $f_{p+1} \subset \dot{\sigma}^n$ . Substituindo em  $y$  temos  $y = d c_{p+2} + f_{p+1} + c_{p+1}$ . Vamos por  $\bar{y} = f_{p+1} + c_{p+1}$ . Temos:

a)  $d\bar{y} = d(y - d c_{p+2}) = dy = z_p$

b)  $\bar{y}$  não tem nenhum simplexo interno a  $\sigma^n$ .

Procedendo desta maneira com tôdas as  $n$ -células, sucessivamente com tôdas células de dimensão maior do que  $p+1$ , podemos construir  $y'$  contido no  $(p+1)$ -esqueleto e tal que  $dy' = z_p$ . Falta mostrar que  $y' \in M_{p+1}$ . Sendo que  $dy' = z_p \in M_p$ , os  $p$ -simplexos internos a  $(p+1)$ -células que comparecem na fronteira dos diversos  $(p+1)$ -simplexos de  $y'$  devem cancelar-se mutuamente. Mas isto somente é possível se todos os  $(p+1)$ -simplexos que provêm da subdivisão de uma  $(p+1)$ -célula comparecem em  $y'$  com o mesmo coeficiente, isto é,  $y' \in M_{p+1}$ .

(8.5) Lema - Os grupos de homologia (simpliciais) relativos de uma célula  $\sigma^n$  módulo sua fronteira são:

$$H_n(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) = Z, H_i(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) = 0 \quad i \neq 0.$$

Levando em conta o teorema da invariância topológica, citado no início dêste parágrafo, e ainda o fato que o par  $\sigma^n, \dot{\sigma}^n$  é homeomorfo a  $\Delta^n, \dot{\Delta}^n$  onde  $\Delta^n$  é um simplexo  $n$ -dimensional, podemos calcular  $H_i(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$ .

a) As cadeias  $n$ -dimensionais de  $\Delta^n$  são exatamente os múltiplos  $m \Delta^n$ . É claro que o bordo  $d \Delta^n \subset \dot{\Delta}^n$ , logo todos os  $m \Delta^n$  são ciclos relativos,  $Z_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \approx Z$ , não existindo simplexos em dimensão  $(n+1)$ ,  $B_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) = 0$  logo  $H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) = Z$ .

b) Se  $i \neq n$ ,  $H_i(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) = 0$  seja por não existirem simplexos de dimensão  $i$  ( $i > n$ ) ou por que tôdas as cadeias de dimensão  $i$  pertencem a  $\dot{\Delta}^n$  ( $i < n$ ), portanto tôdas são bordos relativos.

Resumindo os resultados dêste parágrafo podemos enunciar

(8.6) Teorema - Os grupos de homologia dos C.C.P. são invariantes topológicos.

§ 9 - Idéias geométricas de aproximação simplicial e de aplicação induzida

Este parágrafo é novamente descritivo. Para um tratamento rigoroso das noções aqui descritas sugerimos, por exemplo, a leitura de |Ly|, |Po|, |Hi-2|.

Sejam K e S dois complexos simpliciais (se partimos de complexos celulares, tomaremos suas subdivisões normais).

(9.1) Definição - Uma aplicação simplicial  $\varphi: K \rightarrow S$  é uma função que:

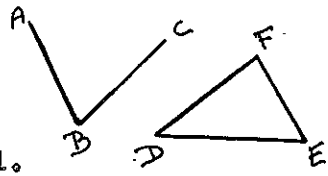
- a) leva vértices de K em vértices de S .
- b) Se  $a_0, \dots, a_p$  são vértices de um simplexo de K , então  $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_p)$  são vértices de um mesmo simplexo de S (eventualmente podem coincidir vários  $\varphi(a_i)$  sobre um mesmo vértice).
- c)  $\varphi|_{\sigma}$  ( $\sigma$  simplexo de K) é uma aplicação linear afim  $\sigma$  de sobre um simplexo de S .

Tira-se deste fato que uma aplicação simplicial é conhecida , desde que se conheça  $\varphi_0 = \varphi|_{K^{[0]}}$  e é fácil obter critérios para saber se  $\varphi_0: K^{[0]} \rightarrow S^{[0]}$  pode ser estendida a  $\varphi: K \rightarrow S$  .

(9.2) Exemplos -

a) A injeção de um sub-complexo L no complexo K é uma aplicação simplicial.

b) Seja K um complexo constituído de dois segmentos AB e BC com o vértice B em comum e S o trilátero DEF . Levando A e C em D e B em E os segmentos AB e CB devem ser levados linearmente sobre DE para completar uma aplicação simplicial.



c) No capítulo A, § 8, já foram dados alguns exemplos.

Vamos, a título de ilustração, descrever o compartamento das aplicações lineares sobre os simplexos.

Se  $a_0, a_1, \dots, a_p$  são os vértices de um simplexo  $A^p$  então os pontos de  $A^p$  podem ser dados biunivocamente em termos de suas coordenadas baricêntricas  $x = \sum \lambda_i a_i$  ( $\sum \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ).

Uma aplicação linear (afim)  $f: A^p \longrightarrow B^q$  de um simplexo  $A^p$  sôbre um simplexo  $B^q$  é dada por

$$f(x) = \sum \lambda_i f(a_i) .$$

Se as imagens  $f(a_i)$  dos vértices de  $A^p$  são tôdas distintas ( $q = p$ ) então  $f$  é um homeomorfismo.

Se diversas destas imagens coincidem, digamos

$$b_0 = f(a_{01}) = f(a_{02}) = \dots f(a_{0m_0})$$

·  
·  
·

$$b_q = f(a_{q1}) \dots \dots \dots f(a_{qm_q})$$

dizemos que a aplicação linear é degenerada. Neste caso, sendo  $\mu_j$  as coordenadas baricêntricas em  $B_q$  relativamente aos  $b_j$  temos as equações:

$$\mu_j = \lambda_{j1} + \lambda_{j2} + \dots + \lambda_{jm_j} \quad j = 0, 1, \dots, q .$$

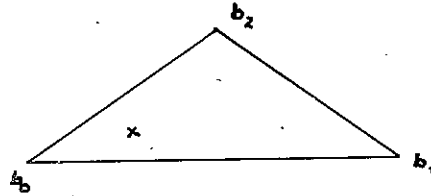
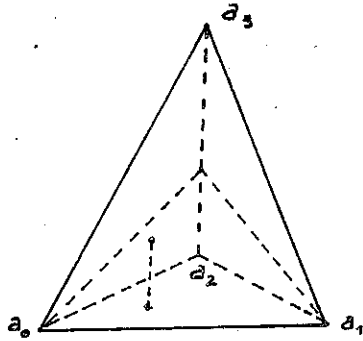
Ora, isto mostra que, fixado um ponto  $y = \sum \mu_j b_j$  em  $B^q$  as coordenadas  $(\lambda_i)$  dos pontos de  $A^p$  que são levados em  $y$  devem satisfazer  $q$  equações lineares independentes. Ora, cada equação linear em coordenadas baricêntricas representa um hiperplano do suporte de  $A^p$ . Portanto, a imagem inversa  $f^{-1}(y)$  é a intersecção de  $A^p$  com uma variedade linear de  $(p-q)$  dimensões, isto é,  $f^{-1}(y)$  é uma célula poliédrica convexa de dimensão  $(p-q)$  se  $y$  fôr interno a  $B^q$  e de dimensão  $\leq (p-q)$  para os pontos de  $B^q$ .

Citamos, a título de exemplo, os casos degenerados para  $p = 3$ .

$$\text{Seja } A^3 = |a_0, a_1, a_2, a_3|$$

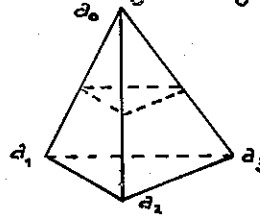
a)  $f: A^3 \longrightarrow B^2 = |b_0, b_1, b_2|$  com  $f(a_0) = b_0$ ,  $f(a_1) = b_1$ ,  
 $f(a_2) = f(a_3) = b_2$ .

As imagens inversas dos pontos de  $B^2$  são as secções de  $A^3$  pelas retas paralelas a  $a_2 a_3$ . As secções planas  $a_0 a_1 c$  de  $A^3$  são levadas biunívocamente sôbre  $b_0 b_1 b_2$ .

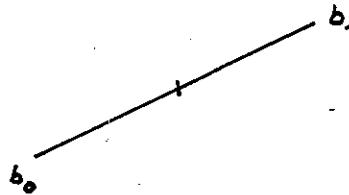
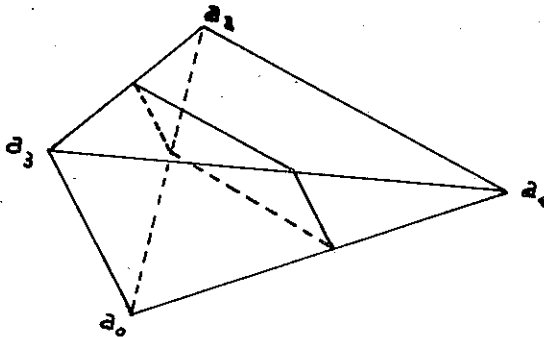


b)  $g: A^3 \rightarrow B^1 = |b_0 b_1|$  sendo  $g(a_0) = b_0$ ,  $g(a_1) = g(a_2) = g(a_3) = b_1$ .

As imagens inversas de um ponto de  $|b_0, b_1|$  são as secções planas paralelas a  $a_1 a_2 a_3$ .



c)  $h: A^3 \rightarrow B^1$  sendo  $h(a_0) = h(a_3) = b_0$   
 $h(a_1) = h(a_2) = b_1$



As imagens inversas dos pontos de  $|b_0, b_1|$  são as secções de  $A^3$  pelos planos paralelos às retas  $a_0 a_3$  e  $a_1 a_2$ ; para os pontos internos temos paralelogramos.

d)  $k: A^3 \rightarrow B^0$  todo simplexo é levado no ponto  $b_0$ .

Segue disto que a imagem inversa de um ponto  $y \in S$  por uma aplicação simplicial  $f: K \rightarrow S$  é uma reunião de células convexas, a qual, em uma conveniente subdivisão de  $K$ , constitui um sub-complexo.

Seja  $\varphi: K \rightarrow S$  uma aplicação simplicial.

Vamos construir uma aplicação  $\varphi_{\#}: C_p(K) \rightarrow C_p(S)$ . Vamos considerar, em primeiro lugar,  $\sigma^p$  um simplexo  $p$ -dimensional orientado de  $K$ .



Temos

$$(9.3) \quad \varphi_{\#}(\sigma^p) = \varepsilon \varphi(\sigma^p) \text{ onde}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{se } \dim \varphi(\sigma^p) = p \text{ e } \varphi \text{ conserva a orientação} \\ -1 & \text{se } \dim \varphi(\sigma^p) = p \text{ e } \varphi \text{ inverte a orientação} \\ 0 & \text{se } \dim \varphi(\sigma^p) < p \end{cases}$$

$\varphi_{\#}$  se estende por linearidade, isto é,  $\varphi_{\#}(\sum n_i \sigma_i^p) = \sum n_i \varphi_{\#}(\sigma_i^p)$ . Verifica-se que  $\varphi_{\#}$  comuta com o operador bordo.  $\varphi_{\#} d = d \varphi_{\#}$  e, portanto, transforma ciclos em ciclos e bordos em bordos

$$\varphi_{\#}(Z_p(K)) \subset Z_p(S)$$

$$\varphi_{\#}(B_p(K)) \subset B_p(S)$$

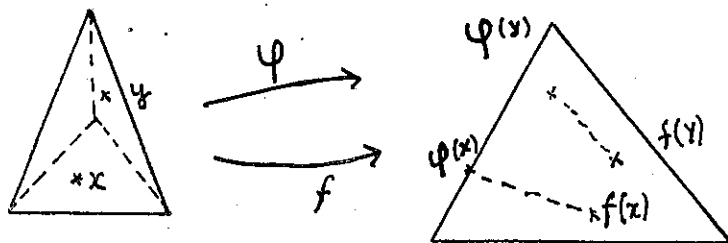
donde, no quociente, tem-se  $\varphi_* : H_p(K) \rightarrow H_p(S)$  onde

$$\varphi_*(z_p + B_p(K)) = \varphi_{\#}(z_p) + B_p(S).$$

Geomèticamente temos: se  $z_p$  representa uma figura fechada  $\varphi_{\#}(z_p)$  será também fechada e se  $z_p$  é bordo de  $c_{p+1}$  temos que  $\varphi_{\#}(z_p)$  é bordo de  $\varphi_{\#}(c_{p+1})$ . Isto é, classes de equivalência de figuras fechadas vão em classes de equivalência do segundo complexo.

Tratemos agora das Aproximações Simpliciais

(9.4) Seja  $f: |K| \rightarrow |S|$  uma aplicação contínua. Uma aplicação simplicial  $\varphi: K \rightarrow S$  é aproximação simplicial de  $f$  se para todo  $x \in |K|$ ,  $f(x) \in \langle \sigma' \rangle$  implicar  $\varphi(x) \in |\sigma'|$



(9.5) Verifica-se

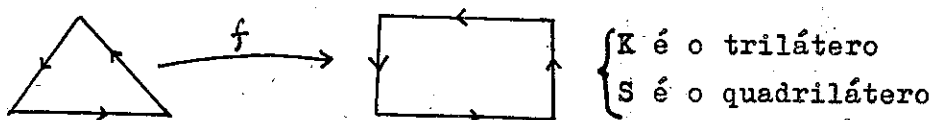
a) se a malha de  $S$  (= máx dos diâmetros dos simplexes de  $S$ ) é pequena então a distância  $\rho(f, \varphi) = \max |f(x), \varphi(x)|$  é pequena.

Tendo em vista que  $f(x)$  e  $\varphi(x)$  podem ser ligados por um segmento contido em  $|S|$  segue

b)  $f \sim \varphi$  pois  $F(x, t) = (1-t)f(x) + t\varphi(x)$   $0 \leq t \leq 1$  tem suas imagens tôdas em  $|S|$  e estabelece, portanto, a homotopia.

c) Se não existir  $\varphi$  definida em  $K$  existirá em uma conveniente subdivisão baricêntrica  $K^{(1)}$  ou  $K^{(2)}$  ou ...  $K^{(n)}$  de  $K$ . (A subdivisão baricêntrica  $K^{(1)}$  de um complexo simplicial  $K$  é a sua subdivisão normal na qual se usa o baricentro  $\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p a_i$  como ponto interno do simplexo  $|a_0, a_1, \dots, a_p|$  no processo de subdivisão.  $K^{(2)}$  é a subdivisão baricêntrica de  $K^{(1)}$ , etc.)

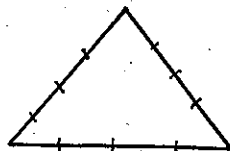
Geomêtricamente vemos a necessidade da subdivisão de  $K$  pelo seguinte exemplo. Sejam  $K$  e  $S$  como indicam a figura abaixo



Ambos possuem um "ciclo fundamental" em dimensão 1, isto é, uma figura fechada da qual tôdas as outras são múltiplas, que no caso são as somas de tôdas as arestas com conveniente orientação.

Seja  $f$  tal que enquanto  $P$  percorre  $K$ ,  $f(P)$  percorre duas vezes  $S$  (representando  $\cdot 2$  vezes o ciclo fundamental). Isto não pode ser atingido por aplicação simplicial pois  $K$  só tem 3 arestas e  $f$  exige que sejam percorridas 6 arestas. Porém, se tomarmos  $K^{(2)}$  teremos 12 arestas e portanto surge a possibilidade de achar  $\varphi$  e, como nos interessa trabalhar no nível da

homologia, isto não atrapalha, pois  $H_p(K^{(n)}) \approx H_p(K)$  (Ver |Ly| ou também nosso § 8).



Mas devemos frisar que eventualmente seja necessário dividir ainda diversas vezes antes de encontrar uma operação simplicial. Isto ocorre se  $f$  for bastante irregular.

A idéia da aproximação simplicial consiste portanto em aproximar as imagens curvilíneas das figuras (retilíneas) fechadas de  $K$  por figuras retilíneas de  $S$ . Os teoremas que citaremos abaixo cuja demonstração se encontra, por exemplo, em [Ly] § 3, garantem a possibilidade e a univocidade a menos de homologia desta aproximação.

(9.6) Teorema - Sejam  $K$  e  $S$  complexos geométricos,  $f: |K| \rightarrow |S|$  uma aplicação contínua, então existem  $n \geq 0$  suficientemente grande e  $\varphi: K^{(n)} \rightarrow S$  que é uma aproximação simplicial de  $f$ .

determina portanto  $\varphi_*: H(K^{(n)}) \rightarrow H(S)$  que pelo isomorfismo entre  $H(K^{(n)})$  e  $H(K)$  podemos interpretar como

$$\varphi_*: H(K) \rightarrow H(S).$$

(9.7) Teorema - Sejam  $K, S, f$  e  $\varphi$  como em (9.6) e  $\psi: K^{(p)} \rightarrow S$  outra aproximação de  $f$  então  $\varphi_*: H(K) \rightarrow H(S)$  e  $\psi_*: H(K) \rightarrow H(S)$  coincidem.

Pomos então  $\varphi_* = \psi_* = f_*$  que chamaremos de aplicação induzida da aplicação contínua  $f$ .

(9.8) Teorema - Se  $f, g: |K| \rightarrow |S|$  são homotópicas ( $f \sim g$ ) então  $f_* = g_*: H(K) \rightarrow H(S)$ .

A idéia deste último teorema pode ser dada grosseiramente como:

Seja  $A$  uma figura fechada de  $|K|$ ,  $f(A)$  e  $g(A)$  suas imagens. Durante a homotopia esta imagem varre uma figura de dimensão mais alta ao passar de  $f(A)$  para  $g(A)$  e cuja fronteira completa é exatamente  $g(A) - f(A)$ .

$f(A)$  e  $g(A)$  são portanto homólogas e assim serão as suas aproximações retilíneas.

Vale ainda

(9.9) a) Se  $f: |K| \rightarrow |S|$  e  $g: |S| \rightarrow |T|$  onde  $T$  é um terceiro complexo então  $(gf)_* = g_*f_*$ .

b) Se  $f: |K| \rightarrow |S|$  é um homeomorfismo  $f_*$  é isomorfismo.

Estes resultados podem ser generalizados para a homologia relativa.

§ 10 - Grupos de cohomologia

As propriedades dos grupos de homomorfismo encontram-se no § 11 (11.14)-(11.18).

Seja K um C.C.P. Consideremos a sequência

$$\dots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{d} C_p(K) \xrightarrow{d} C_{p-1}(K) \longrightarrow \dots$$

Seja G um grupo abeliano qualquer. Vamos por

$$C^p(K, G) = \text{Hom}[C_p(K), G] \quad (\text{ver (11.14)}).$$

(10.1) Definição - Os elementos de  $C^p(K, G)$ , isto é, os homomorfismos de  $C_p(K)$  em G, são chamados de "cocadeias em dimensão p de K com valores (coeficientes) em G".

(10.2) Definição - O homomorfismo dual  $\delta = d^*$  de  $d: C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$  (ver (11.16)) é chamado "cobordo":

$$\delta_{p+1}: C^p(K, G) \longrightarrow C^{p+1}(K, G).$$

(10.3) Lema -  $\delta\delta = 0$ .

Com efeito, se  $f^p \in C^p$  e  $c_p \in C_p$  obtemos, utilizando (11.18),

$$(\delta\delta f^p)(c_p) = f^p(d\delta c_p) = f^p(0) = 0$$

Expressimos êste fato dizendo que  $\delta$  é um operador diferencial. Seu grau é + 1 pois  $\delta: C^p \longrightarrow C^{p+1}$ .

(10.4) Definição - Se  $\delta f^p = 0$  (com  $f^p \in C^p(K, G)$ ),  $f^p$  é dito um cociclo. Pomos  $Z^p(K, G) = \delta^{-1}_{pp+1}(0)$ .

(10.5) Definição - Os elementos de  $B^p(K, G) = \delta C^{p-1}(K, G)$  são chamados "cobordos".

De (10.3) segue que  $B^p(K, G) \subset Z^p(K, G)$ .

(10.6) Definição - O grupo  $H^p(K, G) = \frac{Z^p(K, G)}{B^p(K, G)}$  chama-se grupo de cohomologia em dimensão p de K com valâres em G.

Seja agora L um sub-complexo de K. Podemos considerar cocadeias, cociclos, cobordos e grupos de cohomologia de L com coeficientes em G.

Cada cocadeia  $f^p: C_p(K) \rightarrow G$  de  $K$  dá origem, por restrição, a uma cocadeia de  $L$ : temos  $if^p = f^p|_{C_p(L)}$ .  $i$  comuta com o operador cobordo:  $i\delta = \delta i$ .

(10.7) Uma cocadeia  $f^p \in C^p(K, G)$  tal que  $f^p|_{C_p(L)} = 0$  é dita uma "cocadeia relativa de  $K$  mód  $L$ ". Estas constituem o sub-grupo  $C^p(K, L; G)$ . O cobordo de uma cocadeia relativa é um "cobordo relativo":  $B^p(K, L; G) = \delta C^{p-1}(K, L; G)$ .

Temos  $B^p(K, L; G) \subset C^p(K, L; G)$  pois se  $c_p \in C_p(L)$ ,  $(\delta f^{p-1})(c_p) = f^{p-1}(dc_p) = 0$  levando em conta que  $dc_p \in C_{p-1}(L)$  portanto  $f^{p-1}$  se anula sôbre  $dc_p$ .

Podemos considerar então  $\delta'$  restrição de  $\delta$  às cocadeias relativas

$$\rightarrow C^{p-1}(K, L; G) \xrightarrow{\delta'} C^p(K, L; G) \xrightarrow{\delta'} C^{p+1}(K, L; G) \rightarrow$$

$$\delta'_{p+1}^{-1}(0) = Z^p(K, L; G) = Z^p(K; G) \cap C^p(K, L; G)$$

é o conjunto dos cociclos relativos e  $H^p(K, L; G) = \frac{Z^p(K, L; G)}{B^p(K, L; G)}$  é o

grupo de cohomologia relativa de  $K$  mód  $L$  em dimensão  $p$  e com valores em  $G$ .

Os resultados que descrevemos nos §§ 8 e 9 sôbre os grupos de homologia podem ser dualizados.

(10.8) Os grupos de cohomologia dos complexos simpliciais são invariantes topológicos.

(10.9) Os grupos de cohomologia de um complexo celular  $K$  (relativos de  $K$  mód  $L$ ) são isomorfos aos de sua subdivisão normal, portanto, são invariantes topológicos.

Dados dois complexos simpliciais  $K$  e  $S$ , e  $\varphi$  uma aplicação simplicial. Vimos que  $\varphi$  induz uma "aplicação permitida"

$\varphi_{\#}: C_p(K) \rightarrow C_p(S)$  (isto é, tal que  $d\varphi_{\#} = \varphi_{\#}d$ ). A dual de  $\varphi_{\#}$  é  $\varphi^{\#}: C^p(S) \rightarrow C^p(K)$  dada por  $\varphi^{\#}f^p = f^p \circ \varphi_{\#}$ . É imediato verificar que  $\delta\varphi^{\#} = \varphi^{\#}\delta$ . Com efeito,  $\delta\varphi^{\#} = d^{\#}\varphi^{\#} = (\varphi_{\#}d)^{\#} = (d\varphi_{\#})^{\#} = \varphi^{\#}d^{\#} = \varphi^{\#}\delta$ . Portanto,  $\varphi^{\#}$  leva cociclos em cociclos e cobordos em cobordos induzindo portanto

$$\varphi^*: H^p(S, G) \rightarrow H^p(K, G).$$

Como vimos no § 9, podemos obter das funções contínuas  $f: |K| \rightarrow |S|$  aproximações simpliciais das subdivisões baricêntri

cas  $K^{(n)}$  de  $K$  em  $S$  as quais induzem homomorfismos da homologia de  $K$  na de  $S$ . Pelo que foi dito acima estas mesmas aproximações fornecem também aplicações da cohomologia de  $S$  na de  $K$ . Temos

(10.10) Com os mesmos dados de (9.7):

$$\varphi^* = \psi^* : H^p(S; G) \longrightarrow H^p(K; G) .$$

Definimos o homomorfismo induzido da função contínua  $f$  como sendo  $f^* = \varphi^* = \psi^*$ .

(10.11) Com os mesmos dados de (9.8) temos  $f^* = g^*$ .

(10.12) Com os dados de (9.9)

a)  $(gf)^* = f^*g^*$

b)  $f^*$  é isomorfismo.

Citamos aqui o essencial sobre os grupos de cohomologia que utilizaremos no decorrer de outros capítulos. Ao leitor interessado em mais informações recomendamos a leitura de um texto mais amplo como, por exemplo, |Hi-2|, |Be| |H-W|.

## § 11 - Algumas noções da teoria dos grupos

(11.1) Definição - Dizemos que uma lei de composição interna  $G \times G \longrightarrow G$ , que notaremos sempre aditivamente:  $(a, b) \longrightarrow a + b$ , define em  $G$  uma estrutura de grupo abeliano, se vale:

a) a associatividade  $(a+b)+c = a+(b+c)$

b) a comutatividade  $a+b = b+a$

c) existe elemento neutro (o qual denotaremos com 0 para todos os grupos) isto é, um elemento 0 satisfazendo  $a+0 = a$  para todos os  $a \in G$

d) todo elemento  $a \in G$  possui um oposto (que denotaremos com  $-a$ ) tal que:  $a+(-a) = 0$ .

Observação - De agora em diante diremos simplesmente grupos, pois, não serão utilizados grupos não abelianos.

(11.2) Definição - Uma aplicação  $f$  de um grupo  $G$  em outro  $G'$  é um homomorfismo se  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

(11.3) Definição - Um sub-conjunto  $H \subset G$  que, com a lei de composição induzida, tem estrutura de grupo é chamado sub-grupo.

Para  $A, B \subset G$  pomos  $A+B = \{ x = a+b \mid a \in A, b \in B \}$   
 $A' = \{ x = -a \mid a \in A \}$ .

Um sub-conjunto  $H$  é um sub-grupo se e somente se  $H = H+H = -H'$ .

(11.4) Definição - Uma relação de equivalência " $\equiv$ " em  $G$  é "compatível" com a lei de grupo, se de  $x \equiv x'$  e  $y \equiv y'$ , seguir  $x+y \equiv x'+y'$ .

(11.5) Proposição - Toda relação de equivalência compatível com a lei de grupo pode ser dada por:  $x \equiv y \iff y-x \in H$  onde  $H$  é um sub-grupo e vice-versa, uma relação assim definida é compatível com a lei de grupo. Escrevemos  $x \equiv y \pmod{H}$ .

As classes de equivalência podem ser dadas por  $x+H$ , e  $x \equiv y \iff y \in x+H$ . Seja  $G/H$  o conjunto quociente, isto é, o conjunto cujos elementos são as classes de equivalência  $x+H$ . Em  $G/H$  definimos uma lei de composição por  $(r+H) + (g+H) = (r+g)+H$ , que é lei de grupo abeliano. A aplicação canônica  $\varphi : G \longrightarrow G/H$ , isto é,  $\varphi(x) = x+H \in G/H$  é um homomorfismo.

(11.6) Teorema - Se  $f$  é um homomorfismo de um grupo  $G$  em outro  $G'$ , temos:

- $f(G)$  é sub-grupo de  $G'$  (frequentemente notado com "inf").
- $N = f^{-1}(0)$  é sub-grupo de  $G$ , chamado núcleo de  $G$  (denota-se frequentemente com  $\ker f$ ).
- $f(G)$  é isomorfo a  $G/N$ . (Isomorfismo = homomorfismo biunívoco e sôbre). Anota-se  $f(G) \approx G/N$ .

Demonstração - Quanto à parte a), basta observar que, se  $f(a), f(b) \in f(G)$ , então  $f(a)+f(b) = f(a+b) \in f(G)$  e  $-f(a) = f(-a) \in f(G)$ .

b) Se  $f(a) = f(b) = 0$ , então  $f(a+b) = f(a) + f(b) = 0$ , e  $f(-a) = -f(a) = 0$ .

c) Para esta parte basta ver que  $f(a) = f(b)$  se e somente se  $a \equiv b \pmod{N}$ , pois  $f(a) - f(b) = 0$  implica em  $f(a-b) = 0$ , ou seja,  $a-b \in N$  e vice-versa. Então,  $a+N \longrightarrow f(a)$  é um homomorfismo bem definido, que é biunívoco e sôbre  $f(G)$ .

Produto cartesiano e soma direta - Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grupos. Definimos em  $G = G_1 \times G_2$  uma lei de grupo por:  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ .

(11.7) Definição -  $G$  munido da lei de composição acima é dito grupo produto (cartesiano) dos grupos  $G_1$  e  $G_2$ .

(11.8) Proposição - Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grupos,  $H_1 \subset G_1$  e  $H_2 \subset G_2$  dois seus sub-grupos. A aplicação canônica

$$\Psi: \frac{G_1 \times G_2}{H_1 \times H_2} \longrightarrow G_1/H_1 \times G_2/H_2 \text{ (isto é, a aplicação dada por}$$

$$\Psi[(g_1, g_2) + H_1 \times H_2] = [(g_1 + H_1), (g_2 + H_2)] \text{ ) é um isomorfismo.}$$

Demonstração - Vamos mostrar que esta aplicação é bem definida e biunívoca, pois uma vez verificado isto é fácil ver que ela é um homomorfismo.

$$\text{Vejam os: } (g_1, g_2) \equiv (g_1', g_2') \pmod{H_1 \times H_2}$$

$\iff (g_1 - g_1', g_2 - g_2') \in H_1 \times H_2$ , isto é,  $\iff g_1 \equiv g_1' \pmod{H_1}$  e  $g_2 \equiv g_2' \pmod{H_2}$ . Isto mostra que  $\Psi$  é bem definida e é biunívoca. Que  $\Psi$  é sôbre é imediato.

(11.9) Definição - Dizemos que o grupo  $G$  é "soma direta" de seus sub-grupos  $H_1$  e  $H_2$ , se todo  $x \in G$  pode ser escrito de uma e uma só maneira como  $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in H_1$  e  $x_2 \in H_2$ .

$$\text{Escrevemos: } G = H_1 \oplus H_2.$$

Por um abuso de linguagem escreve-se frequentemente  $G = G_1 \oplus G_2$  quando  $G$  é soma direta de dois sub-grupos  $H_1$  e  $H_2$  tais que  $H_1 \cong G_1$  e  $H_2 \cong G_2$ . Generaliza-se esta definição e esta observação para um número finito de parcelas:  $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$  se todo elemento de  $G$  exprime-se unívocamente como  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  com  $x_i \in H_i$ .

Segue imediatamente da definição que, sendo  $G = H_1 \oplus H_2$ , então:

a)  $G \cong H_1 \times H_2$

b)  $H_1 + H_2 = G$  e  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ .



(11.10) Teorema - Sejam  $N$  um sub-grupo de  $G$ ,  $G' = G/N$  e  $\varphi: G \rightarrow G'$  a aplicação canônica. Seja  $K'$  sub-grupo de  $G'$ . Então  $K = \varphi^{-1}(K')$  é um sub-grupo de  $G$  contendo  $N$  e vale:

$$G/K \approx G'/K' = \frac{G/N}{K'/N}$$

Demonstração - Que  $K$  é sub-grupo e contém  $N$  é de verificação imediata. Vamos construir  $\psi: G/K \rightarrow G'/K'$  por  $\psi(x+K) = \varphi(x)+K'$  e mostrar que é um isomorfismo.

- a)  $\psi$  é bem definida, pois se  $x \in K$  temos  $\varphi(x) \in K'$
- b)  $\psi$  é um homomorfismo, pois  $\varphi$  o é:  $\psi[(x+K) + (y+K)] = \psi(x+y+K) = \varphi(x+y)+K' = (\varphi(x)+K') + (\varphi(y)+K')$ .
- c)  $\psi$  é sôbre, pois  $\varphi$  o é.
- d) Finalmente, se  $\varphi(x) \in K'$  temos  $x \in \varphi^{-1}(K') = K$ , o que mostra que  $\psi$  é biunívoca.

(11.11) Teorema - Se  $N$  e  $K$  são sub-grupos de  $G$ , então  $K \cap N$  e  $K + N$  também o são, e temos:

$$\frac{N+K}{N} \approx K/K \cap N.$$

Demonstração - Seja  $\varphi: G \rightarrow G/N$  a aplicação canônica. Consideremos  $\varphi_K = \varphi|_{K:K} \rightarrow G/N$ . Então pelo teorema (11.6) parte c) vale:

$$\varphi(K) = \varphi_K(K) \approx \frac{K}{\varphi_K^{-1}(0)}$$

Ora,  $\varphi_K^{-1}(0) = K \cap N$ , portanto,  $\varphi_K(K) \approx \frac{K}{K \cap N}$ .

Por outro lado,  $\varphi^{-1}\varphi_K(K) = H$  é um sub-grupo de  $G$ .  
 $H = K+N: H \supset K+N$  pois  $\varphi(k+n) = \varphi(k) = \varphi_K(k)$  ( $k \in K, n \in N$ ) e  $H \subset K+N$ , pois se  $h \in H$ ,  $\varphi(h) \in \varphi_K(K)$ .  $\exists k \in K$  tal que  $\varphi(h) = \varphi(k)$ , ou seja,  $\varphi(h-k) = 0$ .  $h-k = n \in N$ . Pondo  $\varphi_H = \varphi|_H$  temos  $\varphi_H^{-1}(0) = N$ , pois  $N \subset H$  e portanto:

$$\frac{K+N}{N} = \frac{H}{\varphi_H^{-1}(0)} = \frac{K+N}{N} = \varphi_H(H) = \varphi(H) = \varphi(K) = \frac{K}{K \cap N}.$$

(11.12) Teorema - Se  $A, B$  e  $C$  são sub-grupos de  $G$  com  $A \supset B$  temos:

- a)  $(B+C) \cap A = B + C \cap A$

b)  $(A+C)/(B+C) \approx A/(A \cap C) + B$

c)  $(A \cap C)/(B \cap C) \approx [B + (C \cap A)]/B$

Demonstração - a) é trivial.

b) Usando (11.11) e a parte a):

$$(A+C)/(B+C) = (A+B+C)/B+C = A/[(B+C) \cap A] = A/B+(C \cap A)$$

c) Utilizando (11.11) temos:

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} = C \cap A / (C \cap A) \cap B \approx \frac{B+(C \cap A)}{B}$$

(11.13) Definição - Seja  $f:G \rightarrow G'$  e sejam  $A, B \subset G$ ,  $A', B' \subset G'$  sub-grupos tais que  $A \supset B$ ,  $A' \supset B'$  e  $f(A) \subset A'$ ,  $f(B) \subset B'$ . Então podemos definir  $\bar{f}:A/B \rightarrow A'/B'$  pondo  $\bar{f}(a+B) = f(a)+B'$ .  $\bar{f}$  é chamado o "homomorfismo induzido" pela  $f$  em  $A/B$ .

(11.14) Grupos de homomorfismos - Sejam  $G$  e  $F$  dois grupos abelianos e consideremos o conjunto  $\text{Hom}(G, F)$  de todos os possíveis homomorfismos de  $G$  em  $F$ .

Vamos definir uma operação de adição em  $\text{Hom}(G, F)$  do seguinte modo: dados  $f, g \in \text{Hom}(G, F)$ , seja  $h = f+g$  definido por

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ qualquer que seja } x \in G.$$

Verifica-se que  $h = f+g \in \text{Hom}(G, F)$ :

$$\begin{aligned} h(x+y) &= f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = \\ &= f(x) + g(x) + f(y) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y) = h(x) + h(y). \end{aligned}$$

Para esta operação verifica-se que valem as propriedades comutativa e associativa. Além disto,  $f_0 \in \text{Hom}(G, F)$  definido por  $f_0(x) = 0$  qualquer que seja  $x \in G$  é elemento neutro para a adição introduzida e, para cada  $g \in \text{Hom}(G, F)$  o elemento  $g' \in \text{Hom}(G, F)$  definido por  $g'(x) = -g(x)$  qualquer que seja  $x \in G$  é o oposto de  $g$  nesta operação.

Portanto, com a operação de adição introduzida,  $\text{Hom}(G, F)$  é um grupo abeliano.

(11.15) Exemplos

a)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ .

Observemos, inicialmente, que o homomorfismo  $f:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(1) = n$  é único. Basta, para isto, lembrar que, conhecido  $f(1)$  conhecemos  $f(r)$  para todo inteiro  $r$ .

Se  $r > 0$ ,  $r = 1+1+\dots+1$  ( $r$  vezes)  $\therefore f(r) = f(1)+f(1)+\dots+f(1)$   
( $r$  vezes)  $\therefore f(r) = r n$ .

Como  $f(1) = n$   $f(-1) = -n$ , se  $r < 0$ ,  $r = (-1)+(-1)+\dots+(-1)$   
( $|r|$  vezes)  $\therefore f(r) = f(-1) + f(-1) + \dots + f(-1)$  ( $|r|$  vezes)

$\therefore f(r) = |r|(-n) = -|r|n = r n$ . Então, para todo inteiro  $p$ ,  
 $f(p) = p n$ .

Portanto, se  $g(1) = n$ , então  $g(r) = r n \quad \forall r \in \mathbb{Z}$   $\therefore g = f$ .

Seja  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  definido por  $\phi(n) = f_n$  onde  $f_n$  é o homomorfismo (único) tal que  $f_n(1) = n$ .

Como  $f_{n+p}(1) = n+p = f_n(1) + f_p(1)$  temos  $f_{n+p} = f_n + f_p$  e  
 $\phi(n+p) = \phi(n) + \phi(p)$   $\therefore \phi$  é homomorfismo.

Se  $\phi(n) = \phi(p)$  então  $f_n = f_p$   $\therefore n = p$  e  $\phi$  é biunívoco.

Como  $\phi$  é sôbre temos que  $\phi$  é isomorfismo sôbre e  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

Mais geralmente:

b)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ .

Dado  $g \in G$   $\exists$  um único  $f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$  tal que  $f(1) = g$ . Como no exemplo 1, conhecendo-se  $f(1)$ ,  $f$  fica perfeitamente determinado ( $f(n) = ng$ , etc.). Definindo  $\phi: G \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$  por  $\phi(g) = f_g$  onde  $f_g \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$  tal que  $f_g(1) = g$ ,  $\phi$  é uma aplicação sôbre. Se  $\phi(g) = \phi(g')$  então  $f_g = f_{g'}$   $\therefore g = g'$  e  $\phi$  é biunívoca.

$\phi(g+g') = f_{g+g'}$ ; como  $f_{g+g'}(1) = g+g' = f_g(1) + f_{g'}(1)$  então  $f_{g+g'} = f_g + f_{g'}$  e  $\phi(g+g') = \phi(g) + \phi(g')$   $\therefore \phi$  é homomorfismo, portanto

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G.$$

c)  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = (0)$ . Designemos os elementos de  $\mathbb{Z}_2$  por  $[0]$  e  $[1]$ .

Seja  $f_0([0]) = 0$ .  $f_0([1]) = 0$ . Se  $g \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$  então  $g([0]) = 0$ .

Seja  $g([1]) = r$  ( $r \in \mathbb{Z}$ ) então  $g([1] + [-1]) = r+r$ . Mas  $[1]+[1] = [0]$   $\therefore g([1] + [1]) = g([0]) = 0 = 2r$   $\therefore r = 0$ .

Então,  $\forall g \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$  tem-se  $g = f_0$ .

d) Vamos determinar  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$ .

$$\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\} \quad \mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}.$$

$\forall g \in \text{Hom}(Z_2, Z_4)$  tem-se  $g([0]) = [0] \in Z_4$ .

Suponhamos  $g([1]) = [1] \in Z_4$  então  $g([1]+[1]) = [1]+[1] = [2] \neq [0]$  em  $Z_4$ . Mas  $[1]+[1] = [0]$  em  $Z_2$ . não pode ser  $g([1]) = [1]$ .

Também não pode ser  $g([1]) = [3]$  senão

$$g([1]+[1]) = g([0]) = [0] \text{ em } Z_4$$

$$g([1]+[1]) = [3]+[3] = [2] \text{ em } Z_4$$

Mas, podemos ter  $g([1]) = [2]$

$$g([1]+[1]) = [2]+[2] = [0]$$

$$g([1]+[1]) = g([0]) = [0].$$

Então, temos dois homomorfismos distintos em  $\text{Hom}(Z_2, Z_4)$ : o homomorfismo nulo  $g_0$  definido por  $g_0([0]) = g_0([1]) = [0]$  e  $g_2$  definido por

$$g_2([0]) = [0], \quad g_2([1]) = [2].$$

Seja o sub-grupo  ${}_2Z_4 = ([0], [2])$  de  $Z_4$ . A aplicação  $\phi: {}_2Z_4 \rightarrow \text{Hom}(Z_2, Z_4)$  definida por

$$\phi([0]) = g_0$$

$$\phi([2]) = g_2$$

é um isomorfismo de  ${}_2Z_4$  sobre  $\text{Hom}(Z_2, Z_4)$ .  $\text{Hom}(Z_2, Z_4) \cong {}_2Z_4$ .

e) Mais geralmente, qualquer que seja o grupo abeliano  $G$ , temos  $\text{Hom}(Z_2, G) \cong {}_2G$  onde  ${}_2G$  é o sub-grupo dos elementos de  $G$  de ordem 2.

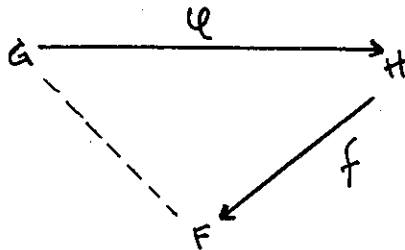
f) Análogamente temos  $\text{Hom}(Z_p, G) \cong {}_pG$ ,  $p$  inteiro.

${}_pG$  = sub-grupo dos elementos de ordem  $p$  em  $G$ .

(11.16) Dados três grupos abelianos  $F, G, H$  consideremos os grupos  $\text{Hom}(G, F)$  e  $\text{Hom}(H, F)$ .

A partir de cada homomorfismo  $\varphi: G \rightarrow H$  podemos definir um homomorfismo  $\varphi^\#: \text{Hom}(H, F) \rightarrow \text{Hom}(G, F)$ , chamado homomorfismo dual de  $\varphi$ .

Se  $f \in \text{Hom}(H, F)$ , consideremos o diagrama



Temos que  $f \circ \varphi \in \text{Hom}(G, F)$ . Vamos então definir  $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$   
 $\forall f \in \text{Hom}(H, F)$ .

(11.17) Lema -  $\varphi^*$  é homomorfismo.

Se  $f, g \in \text{Hom}(H, F)$  e  $x \in G$  então  $[\varphi^*(f+g)](x) \in F$ .

$$\begin{aligned}
 [\varphi^*(f+g)](x) &= [(f+g)\varphi](x) = (f+g)(\varphi(x)) = f\varphi(x) + g\varphi(x) = \\
 &= [\varphi^*(f)](x) + [\varphi^*(g)](x) \quad \therefore \quad \varphi^*(f+g) = \varphi^*(f) + \varphi^*(g).
 \end{aligned}$$

Seja  $W$  um outro grupo abeliano e consideremos um homomorfismo  $\psi: H \rightarrow W$ . Então  $\psi$  determina o homomorfismo dual

$$\psi^\#: \text{Hom}(W, F) \rightarrow \text{Hom}(H, F).$$

O homomorfismo  $\psi \circ \varphi: G \rightarrow W$  terá o dual  $(\psi \circ \varphi)^\#: \text{Hom}(W, F) \rightarrow \text{Hom}(G, F)$ .

(11.18) Lema - Temos  $(\psi \circ \varphi)^\# = \varphi^* \psi^\#$

De fato,  $\forall w \in \text{Hom}(W, F)$  será

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ \varphi)^\#(w) &= w(\psi \circ \varphi) = (w\psi)\varphi = \varphi^\#(w\psi) = \\
 &= \varphi^\#(\psi^\#(w)) = \varphi^* \psi^\#(w).
 \end{aligned}$$

Fixado  $F$  temos um processo de transformar cada grupo  $G$  em  $\text{Hom}(G, F)$  e a cada homomorfismo  $\varphi: W \rightarrow G$  fica associado

$$\varphi^\#: \text{Hom}(G, F) \rightarrow \text{Hom}(W, F).$$

Temos, assim, um "functor"  $\text{Hom}(\_, F)$  contravariante da categoria de grupos abelianos na categoria de grupos abelianos.

B I B L I O G R A F I A

- |Be| L.Bers - Topology. New York University Institute of Mathematics Sciences (1956-57)
- |E-S| S.Eilenberg-N.Steenrod. Foundations of Algebraic Topology Princeton University Press (1952)
- |Hi-2| P.J.Hilton-S.Wiley. Homology Theory. Cambridge University Press (1960)
- |H-W| W.Hurewicz-H.Wallmann - Dimension Theory. Princeton University Press
- |Le-1| S.Lefschetz - Algebraic Topology. Ann. Math. Soc. Colloquium Publications (1942)
- |Le-2| S.Lefschetz - Introduction to Topology. Princeton University Press (1949)
- |Ly| C.B.de Lyra - Introdução à Topologia Algébrica. São Paulo (1957)
- |Po| L.Pontrjagyn - Foundations of Combinatorial Topology. Greylock Press (1952)
- |St| H.Seifert - W. Threlfall - Lehrbuch der Topology (1934). Reimpressão pela Chelsea Publ. Co. (1947). Tradução espanhola: Lecciones de Topologia. Publicaciones del "Instituto Jorge Juan de Matematicas" Madrid (1951)
- |Wa| A.H.Wallace - An Introduction to Algebraic Topology. Pergamon Press.







IV COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Volume II

INTRODUÇÃO À TEORIA DA OBSTRUÇÃO

G.F. Loibel

BIBLIOTÉCA	
INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA	
DATA	Nº
15/7/63	126

Redações de: A.S. Pinheiro

Publicação da Escola de Engenharia de São Carlos  
São Carlos, 1963



## C A P Í T U L O   C

### TEORIA DA OBSTRUÇÃO

Vamos dar, em primeiro lugar, algumas notações que terão o mesmo significado em todo o capítulo.

$K$  será um complexo e  $L$  um sub-complexo.  $X = |K|$  o espaço subjacente a  $K$  e  $A = |L|$  o subjacente a  $L$ .  $K^q$  designará o  $q$ -esqueleto de  $K$ , isto é, o subcomplexo constituído por tôdas as células de dimensão menor ou igual a  $q$ . Pomos  $K_q = K^q \cup L$  e  $X_q = |K_q|$ .

$Y$  será um espaço c.p.c. e seus grupos de homotopia serão designados por  $\pi_p = \pi_p(Y)$ . Admitiremos que  $Y$  é um espaço  $p$ -simples em tôdas as dimensões que utilizaremos no contexto.

$f_A, g_A$ , etc., serão funções contínuas de  $A$  em  $Y$ , análogamente,  $f, g: X \rightarrow Y$ .

Se  $f_A$  é dada,  $f_0, f_1, \dots, f_p, \dots$  e  $f$  serão extensões de  $f_A$  a  $X_0, X_1, \dots, X_p, \dots$  e  $X$  respectivamente. Sempre consideramos  $f_n = f_p|_{X_n}$  se  $n < p$  e  $f_p = f|_{X_p}$ . Sendo  $f: X \rightarrow Y$  dada em primeiro lugar,  $f_A$  e  $f_p$  serão restrições desta.

#### § 1 - O cociclo de obstrução

Como já descrevemos na introdução, pode-se estudar o problema da extensão a  $X$  das funções  $f_A: A \rightarrow Y$  passando para  $f_0: X_0 \rightarrow Y$  depois para  $f_1: X_1 \rightarrow Y$ , etc. Continuando passo a passo, procura-se construir  $f_p: X_p \rightarrow Y$  a partir de  $f_{p-1}$ .

Suponhamos então que já obtivemos  $f_{p-1}: X_{p-1} \rightarrow Y$ . Seja  $\sigma_i^p$  uma  $p$ -célula orientada;  $f_{p-1}|_{\sigma_i^p}$  é definida e determina um elemento  $[f_{p-1}|_{\sigma_i^p}] = \beta_i \in \pi_{p-1}$  ( $\sigma_i^p$  é uma célula orientada,  $\sigma_i^p$  é portanto uma  $(p-1)$ -esfera orientada e sendo  $Y$   $(p-1)$ -simples,  $f|_{\sigma_i^p}$  define um elemento de  $\pi_{p-1}$ ).

(1.1) Definição - A cocadeia  $c(f_{p-1})$  definida por

$$c(f_{p-1})(\sigma_i^p) = \beta_i = \{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\}$$

é chamada cocadeia de obstrução (à extensão de  $f_{p-1}$  a  $X_p$ ).

(1.2) Lema -  $f_{p-1}$  se estende a  $f_p: X_p \rightarrow Y$  se e somente se  $c(f_{p-1}) = 0$ .

Com efeito,  $f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p$  se estende a  $\sigma_i^p$  se e somente se o elemento  $\{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} = 0 \in \prod_{p=1}$  (ver (A-6.8)).

No parágrafo 2 estudaremos o caso  $c(f_{p-1}) \neq 0$ .

(1.3) Corolário - Se  $\prod_p = 0$ ,  $p=1, 2, \dots, r$ , toda  $f_A: A \rightarrow Y$  se estende a  $f_{r+1}: X_{r+1} \rightarrow Y$ . Em particular, se  $\dim K-L \leq r+1$ ,  $f_A$  se estende a  $f: X \rightarrow Y$ .

(1.4) Lema -  $c(f_p)$  é uma cocadeia relativa de  $K$  módulo  $L$ .

Com efeito, sendo  $\sigma_i^p \in L$ ,  $f_{p-1}$  já é definida sobre  $\sigma_i^p$ , portanto, a restrição a  $\dot{\sigma}_i^p$  se estende e, por (A.6.8), temos

$$\{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} = 0.$$

(1.5) Lema - Se  $f_{p-1} \sim g_{p-1}$  então  $c(f_{p-1}) = c(g_{p-1})$ .

Pois,  $f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p \sim g_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p \therefore \{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} = \{g_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\}$ .

(1.6) Teorema -  $c(f_{p-1})$  é um cociclo.

Demonstração - Seja  $\rho^{p+1}$  uma  $(p+1)$ -célula arbitrária. Devemos mostrar que  $\delta [c(f_{p-1})](\rho^{p+1}) = 0$ . Ora,  $\delta [c(f_{p-1})](\rho^{p+1}) =$

$$= c(f_{p-1})[d\rho^{p+1}] = c(f_{p-1})(\sum [\rho^{p+1}; \sigma_i^p] \sigma_i^p) =$$

$$= \sum [\rho^{p+1}; \sigma_i^p] c(f_{p-1})(\sigma_i^p) = \sum [\rho^{p+1}; \sigma_i^p] \{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} \text{ onde a soma}$$

deve ser estendida sobre as faces de  $\rho^{p+1}$ . Suponhamos primeiramente que todas as faces  $\sigma_i^p$  incidem positivamente com  $\rho^{p+1}$ ; então, pondo  $\{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} = \alpha_i$  temos  $\sum \alpha_i = 0$ , pelo teorema (A.9.10).

Se a incidência não for positiva, sempre vale que

$[\rho^{p+1}; \sigma_i^p] \{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} = \alpha_i$  é o elemento de  $\prod_{p-1}$  obtido da função  $f_{p-1}$  restrita à fronteira da face  $\sigma_i^p$  com a orientação induzida pela de  $\rho^{p+1}$  e  $\sum [\rho^{p+1}; \sigma_i^p] \{f_{p-1} | \dot{\sigma}_i^p\} = \sum \alpha_i = 0$  ainda por (A.9.10).

§ 2 - A cocadeia diferença

Sejam  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$  duas extensões de uma mesma  $f_{p-2}: X_{p-2} \rightarrow Y$ . Queremos "medir" a diferença entre elas. Seja, para tanto,  $\sigma^{p-1}$  uma  $(p-1)$ -célula de  $K$ . Temos sobre ela duas funções  $f_{p-1}|_{\sigma^{p-1}}$  e  $g_{p-1}|_{\sigma^{p-1}}$  que coincidem sobre a fronteira. Sendo que  $\sigma^{p-1}$  é homeomorfo tanto a  $E_-^{p-1}$  quanto a  $E_+^{p-1}$ , os hemisférios sul e norte de  $S^{p-1}$ , podemos interpretar  $f_{p-1}|_{\sigma^{p-1}}$  e  $g_{p-1}|_{\sigma^{p-1}}$  como funções de  $E_-^{p-1}$  e  $E_+^{p-1}$  em  $Y$ . Como estas funções coincidem sobre o equador  $S^{p-2}$  (imagem de  $\dot{\sigma}^{p-1}$ ), juntas, definem uma função de  $S^{p-1} \rightarrow Y$ . O anulamento de sua classe de homotopia  $\gamma_i \in \pi_{p-1}$  dá condição necessária e suficiente para podermos deformar  $g_{p-1}|_{\sigma^{p-1}}$  em  $f_{p-1}|_{\sigma^{p-1}}$ .

Para simplificar as demonstrações e para podermos generalizar mais tarde esta construção vamos determinar de um modo ligeiramente diferente estes elementos de  $\pi_{p-1}$ .

Seja  $\sigma^{p-1}$  uma célula e  $I = [0, 1]$ .  $\sigma^{p-1} \times I$  é uma célula  $p$ -dimensional. Seja  $\sigma^{p-1}$  orientada pelos vetores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{p-1}$ . Consideremos em  $I$  a orientação  $\vec{I}$  de 0 para 1. Definimos  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{p-1}, \vec{I}$  como sendo a orientação produto. Temos os seguintes números de incidência (ver B. § 5).

$$(2.1) \text{ Lema - a) } \{ \sigma^{p-1} \times I, \tau^{p-2} \times I \} = \{ \sigma^{p-1}, \tau^{p-2} \}$$

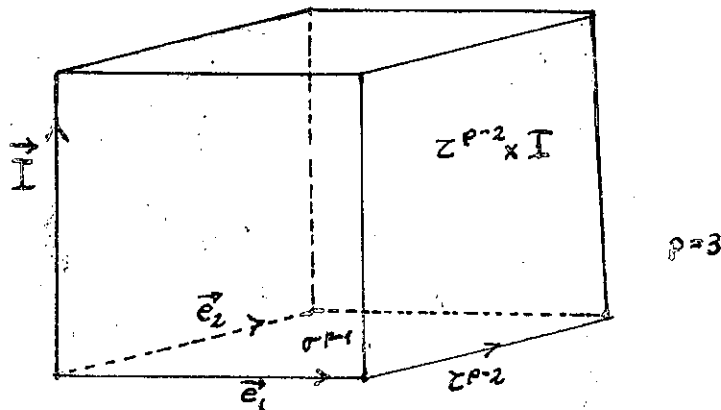
$$b) \{ \sigma^{p-1} \times I, \sigma^{p-1} \times 0 \} = (-1)^p$$

$$c) \{ \sigma^{p-1} \times I, \sigma^{p-1} \times 1 \} = (-1)^{p-1}.$$

Realmente, se  $\tau^{p-2}$  não é face de  $\sigma^{p-1}$  também  $\tau^{p-2} \times I$  não é face de  $\sigma^{p-1} \times I$  e então os dois membros de a) são nulos. Seja então  $\tau^{p-2}$  face de  $\sigma^{p-1}$ . Podemos supor que  $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{p-1}$  constitui uma orientação de  $\tau^{p-2}$ .  $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{p-1}, \vec{I}$  orienta  $\tau^{p-2} \times I$ . Se o vetor  $\vec{e}_1$  aponta de  $\sigma^{p-1}$  para  $\tau^{p-2}$ , êle também aponta de  $\sigma^{p-1} \times I$  para  $\tau^{p-2} \times I$  (vale, portanto, a relação a) ver (B.3.3)) e análogamente se  $\vec{e}_1$  tiver sentido contrário.

b) Como  $\vec{I}$  ponta de  $\sigma^{p-1} \times 0$  para  $\sigma^{p-1} \times I$ , temos que  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{p-1}$  e  $-\vec{I}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1}$  são orientações coerentes destas células e como  $-\vec{I}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{p-1} \equiv (-1)^{p-1} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{p-1} (-1) \equiv (-1)^p \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{p-1}, \vec{I}$  vale a relação b). ( $\equiv$  significa aqui que estas bases dão a mesma orientação a  $\sigma^{p-1} \times I$ ).

c) é obtido análogamente.



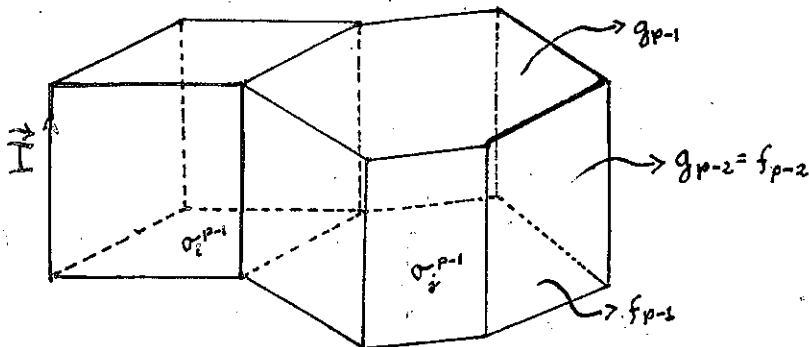
(2.2) Voltemos agora ao nosso problema.

Vamos definir uma função  $H: X_{p-2} \times I \cup X_{p-1} \times 0 \cup X_{p-1} \times 1$  pon-

(2.3)

$$H(x, t) = \begin{cases} f_{p-2}(x) & \text{se } x \in X_{p-2} \quad t \in I \\ f_{p-1}(x) & \text{se } x \in X_{p-1} \quad t = 0 \\ g_{p-1}(x) & \text{se } x \in X_{p-1} \quad t = 1 \end{cases}$$

Dada uma célula  $\sigma_i^{p-1}$ ,  $H$  é definida sobre a fronteira  $U_i$  de  $\sigma_i^{p-1} \times I$ . Tomemos a classe de homotopia desta restrição  $[H|_{U_i}] = \gamma_i \in \pi_{p-1}(Y)$ .



(2.4) Definição - A cocadeia  $d(f_{p-1}, g_{p-1})$  dada por  $d(f_{p-1}, g_{p-1})(\sigma_i^{p-1}) = (-1)^p \gamma_i \in \pi_{p-1}(Y)$  é chamada "cocadeia diferença". (O sinal  $(-1)^p$  se justifica pela fórmula (2.10) abaixo.)

(2.5) Lema -  $d(f_{p-1}, g_{p-1})$  é uma cocadeia relativa de  $K$  mód  $L$ .

Com efeito, se  $\sigma_i^{p-1} \in L$ , portanto  $\sigma_i^{p-1} \subset X_{p-2}$ , a função  $f_{p-1}|_{\sigma_i^{p-1}} = g_{p-1}|_{\sigma_i^{p-1}} = f_{p-2}|_{\sigma_i^{p-1}}$  e  $H$  está definida no interior de  $\sigma_i^{p-1} \times I$  valendo  $H(x, t) = f_{p-2}(x) \therefore \gamma_i = 0$ .

(2.6) Lema -  $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = 0$  se e somente se  $f_{p-1} \sim g_{p-1}$  rel  $X_{p-2}$ . Basta ver que isto equivale a dizer que  $H$  se estende a  $X_{p-1} \times I$ .

(2.7) Lema -  $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = -d(g_{p-1}, f_{p-1})$ : inverte-se a orientação de  $I$ .

(2.8) Lema - Se  $h_{p-1}$  é uma terceira extensão de  $f_{p-2}$  vale  $d(f_{p-1}, h_{p-1}) = d(f_{p-1}, g_{p-1}) + d(g_{p-1}, h_{p-1})$ .

Demonstração - Seja  $H': X_{p-2} \times I \cup X_{p-1} \times 0 \cup X_{p-1} \times 1$  construída análogamente a  $H$  a partir de  $g_{p-1}$  e  $h_{p-1}$ . Obtemos a construção análoga para  $f_{p-1}$  e  $h_{p-1}$  pondo:

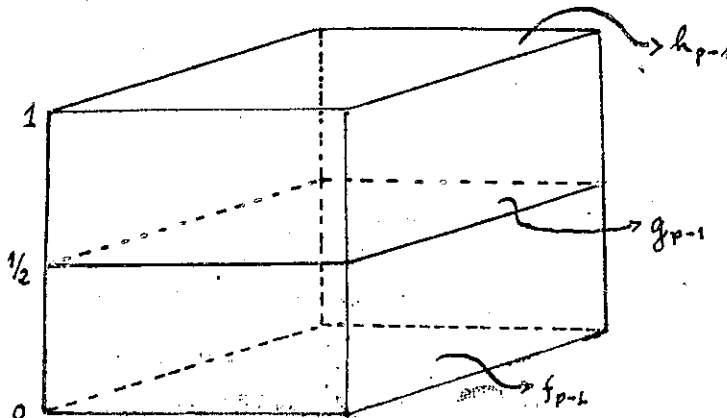
$$H''(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ H'(x, 2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$H''$  se estende ainda a  $X_{p-1} \times 1/2$  pondo:

$$\bar{H}(x, 1/2) = H(x, 1) = H'(x, 0) = g_{p-1}(x) \quad \forall x \in X_{p-1}$$

$$\bar{H}(x, t) = H''(x, t) \text{ no resto.}$$

Vemos imediatamente que sendo  $\sigma^{p-1} \in K$



$\bar{H}| \dot{\sigma}^{p-1} \times [0, 1/2] \cup \sigma^{p-1} \times 0 \cup \sigma^{p-1} \times 1/2$  define  $d(f, g)(\sigma^{p-1})$   
 $\bar{H}| \dot{\sigma}^{p-1} [1/2, 1] \cup \sigma^{p-1} \times 1/2 \cup \sigma^{p-1} \times 1$  define  $d(g, h)(\sigma^{p-1})$   
 $\bar{H}| \dot{\sigma}^{p-1} \times I \cup \sigma^{p-1} \times 0 \cup \sigma^{p-1} \times 1$  define  $d(f, h)(\sigma^{p-1})$ .

Aplicando o lema da soma (A.9.7) obtemos imediatamente o resultado.

(2.9) Lema - Se  $f_{p-1}$  é uma extensão de  $f_{p-2}$  e  $c^{p-1} \in C^{p-1}(K, L; \mathcal{N}_{p-1}(Y))$  é uma cocadeia relativa qualquer, então existe outra extensão  $g_{p-1}$  de  $f_{p-2}$  tal que  $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c^{p-1}$ .

Demonstração - Para tanto, consideremos a função

$G: X_{p-1} \times 0 \cup X_{p-2} \times I \rightarrow Y$  dada por

$$G(x, t) = \begin{cases} f_{p-1}(x) & \text{se } x \in X_{p-1}, t = 0 \\ f_{p-2}(x) & \text{se } x \in X_{p-2}, t \in I. \end{cases}$$

Seja  $\sigma_i^{p-1}$  uma célula de  $K$ ,  $G| \sigma_i^{p-1} \times 0 \cup \sigma_i^{p-1} \times I$  pode ser completada a uma função  $H_i$  da fronteira  $U_i$  de  $\sigma_i^{p-1} \times I$  em  $Y$  cuja classe de homotopia é  $(-1)^p c^{p-1}(\sigma_i^{p-1})$  (ver lema da construção (A.9.6)). Como os  $H_i$  concordam em suas partes comuns obtemos  $H: X_{p-1} \times 0 \cup X_{p-2} \times I \cup X_{p-1} \times 1$ , extensão de  $G$ .

$g_{p-1}(x) = H(x, 1)$  é a extensão desejada.

Vamos demonstrar agora o importantíssimo

(2.10) Teorema -  $\delta d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c(f_{p-1}) - c(g_{p-1})$ .

Seja para tanto  $\sigma^p$  alguma  $p$ -célula.

$\delta d(f_{p-1}, g_{p-1})(\sigma^p) = d(f_{p-1}, g_{p-1})(d\sigma^p) =$   
 $= d(f_{p-1}, g_{p-1}) \sum [\sigma^p: \mathcal{C}_i^{p-1}] \mathcal{C}_i^{p-1}$  somado sôbre as faces de  $\sigma^p$ .  
 Esta expressão é igual a  $(-1)^p \sum [\sigma^p \times I, \mathcal{C}_i^{p-1} \times I] [H|U_i]$  onde a soma é estendida a tôdas as faces laterais  $(\mathcal{C}_i^{p-1} \times I)$  de  $\sigma^p \times I$ .

Utilizando (A.9.10) vemos que podemos completar a expressão acima com os termos  $(-1)^p \{ [\sigma^p \times I, \sigma^p \times 0] [H| \dot{\sigma}^p \times 0] +$   
 $+ [\sigma^p \times I, \sigma^p \times 1] [H| \dot{\sigma}^p \times 1] \}$  a fim de obter zero.

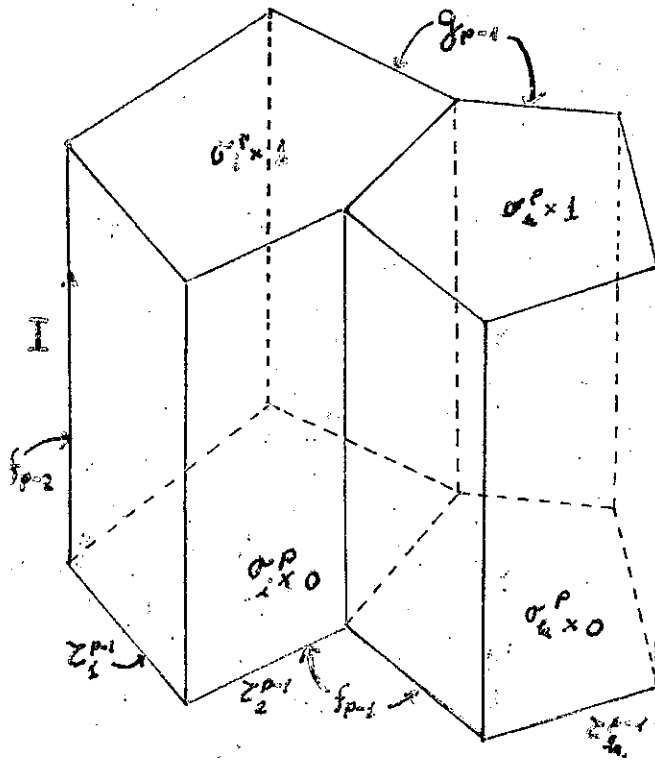


Por outro lado:

$$[H | \dot{\sigma}^P \times 0] = [f_{p-1} | \dot{\sigma}^P] = c(f_{p-1})(\sigma^P),$$

$$[H | \dot{\sigma}^P \times 1] = [g_{p-1} | \dot{\sigma}^P] = c(g_{p-1})(\sigma^P);$$

usando (2.1) b) e c) e (4.2) obtemos  $\delta d(f_{p-1}, g_{p-1}) - c(f_{p-1}) + c(g_{p-1}) = 0$ .



Na figura acima  $p = 2$ .  $H$  é definido sôbre as arestas da figura.

§ 3 - Primeiras conclusões

(3.1) Lema - Se  $f_{p-2}$  admite extensão  $f_{p-1}: X_{p-1} \longrightarrow Y$ , então os cociclos de obstrução de tôdas as possíveis extensões de  $f_{p-2}$  a  $X_{p-1}$  preenchem exatamente uma classe de cohomologia

$$\bar{c}(f_{p-2}) \in H^q(K, L; \pi_{p-1}) .$$

Demonstração - Com efeito, pelo teorema (2.10) todos êstes cociclos são relativamente cohomólogos entre si pois

$$\delta d(f_{p-1}, g_{p-1}) \in B^p(K, L; \pi_{p-1}) .$$

Por outro lado, dado um cobordo  $b^p = \delta(-c^{p-1})$ , pelo (2.9) constrói-se  $g_{p-1}$  extensão de  $f_{p-2}$  tal que  $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c^{p-1}$ .  
 $c(f_{p-1}) - c(g_{p-1}) = \delta(c^{p-1}) = -b^p$  ou seja  $c(g) = c(f) + b^p$ .

(3.2) Teorema - Seja  $f_{p-1}: X_{p-1} \longrightarrow Y$ .  $f_{p-2}$  se estende a  $g_p: X_p \longrightarrow Y$  se e somente se  $c(f_{p-1})$  é relativamente cohomólogo a zero ( $c(f_{p-1}) \sim 0$ ), isto é, se  $\bar{c}(f_{p-2}) = 0$ .

Demonstração - Com efeito, se  $c(f_{p-1}) = \delta c^{p-1}$  com  $c^{p-1} \in c^{p-1}(K, L; \pi_{p-1})$  existe  $g_{p-1}$  extensão de  $f_{p-2}$  tal que  $d(f_{p-1}, g_{p-1}) = c^{p-1}$  e  $c(f_{p-1}) = c(g_{p-1}) = \delta c^{p-1} = c(f_{p-1})$  ou seja,  $c(g_{p-1}) = 0$ , logo  $g_{p-1}$  se estende a  $X_p$ .

(3.3) Teorema - Se  $H^p(K, L; \pi_{p-1}(Y)) = 0$  para  $p=m, m+1, \dots, n$  então toda aplicação  $f_{m-2} \longrightarrow Y$  que se estende a  $X_{m-1}$  também pode ser estendida a  $X_n$ .

Em particular, se  $H^p(K, L; \pi_{p-1}(Y)) = 0$ ,  $p=2, 3, \dots, \dim(K-L)$ , toda  $f_A: A \longrightarrow Y$  se estende a  $f: X \longrightarrow Y$ .

Demonstração - Se  $f_{m-1}: X_{m-1} \longrightarrow Y$  é uma extensão de  $f_{m-2}$  temos  $c(f_{m-1}) \sim 0$  pois  $H^m(K, L; \pi_{m-1}) = 0$ , portanto, existe extensão  $g_{m-1}$  com  $c(g_{m-1}) = 0$ . Seja  $g_m: X_m \longrightarrow Y$  extensão de  $g_{m-1}$ ,  $c(g_m) \sim 0$ .  
 .°. existe  $h_{m+1}$  extensão de  $g_{m-1}$ . Assim, podemos proceder até chegar a  $f_n: X_n \longrightarrow Y$  pois em cada passo podemos modificar as extensões a fim de obter obstrução nula. Na segunda parte do enunciado basta observar que, pelo fato de  $Y$  ser c.p.c., sempre existe a extensão  $f_1: X_1 \longrightarrow Y$  e prosseguir como acima.

§ 4 - A cocadeia de deformação

Seja  $f_A: A \longrightarrow Y$ . Suponhamos que  $f_A$  admita duas extensões  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$  a  $X_{p-1}$ . Suponhamos ainda que exista uma homotopia  $k$  entre suas restrições  $f_{p-2}$  e  $g_{p-2}$ .

Neste caso, podemos definir uma função

$$H: X_{p-1} \times 0 \cup X_{p-2} \times I \cup X_{p-1} \times 1 \text{ pondo}$$

(4.1)

$$H(x,t) = \begin{cases} f_{p-1}(x) & \text{se } x \in X_{p-1}, t = 0 \\ k(x,t) & \text{se } x \in X_{p-2}, t \in I \\ g_{p-1}(x) & \text{se } x \in X_{p-1}, t = 1. \end{cases}$$

Se  $\sigma_i^{p-1}$  é uma  $(p-1)$ -célula de  $X_{p-1}$ , a restrição de  $H$  à fronteira  $U_i$  de  $\sigma_i^{p-1} \times I$  define um elemento  $\gamma_i \in \pi_{p-1}$ . Desta maneira, podemos generalizar a cocadeia diferença estudada no §2.

(4.2) Definição - A cocadeia  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1})$  que toma os valores  $(-1)^p \gamma_i$  sobre as células  $\sigma_i^{p-1}$  é chamada "cocadeia de deformação".

Vemos imediatamente que no caso em que  $f_{p-2} = g_{p-2}$  e  $k$  é a homotopia trivial  $k(x,t) = f_{p-2}(x) = g_{p-2}(x)$  obtemos a cocadeia diferença:  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) = d(f_{p-1}, g_{p-1})$ .

São imediatas as generalizações de suas propriedades cujas demonstrações deixaremos ao leitor.

(4.3) Lema -  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) \in C^{p-1}(K, L; \pi_{p-1})$ .

(4.4) Lema -  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) = 0$  se e somente se  $k$  se estende a uma homotopia entre  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$ .

(4.5) Lema - Se  $\bar{k}$  é a homotopia entre  $g_{p-2}$  e  $f_{p-2}$  dada por  $\bar{k}(x,t) = k(x,1-t)$  vale  $d(g_{p-1}, \bar{k}, f_{p-1}) = -d(f_{p-1}, k, g_{p-1})$ .

(4.6) Lema - Se  $h_{p-1}$  é outra extensão de  $f_A: A \longrightarrow Y$  e  $k'$  uma homotopia entre  $g_{p-2}$  e  $h_{p-2}$ , vale  $d(f_{p-1}, k'', h_{p-1}) = d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) + d(g_{p-1}, k', h_{p-1})$  onde  $k''$  é a homotopia composta de  $k$  e  $k'$ .

(4.7) Lema - Seja  $c^{p-1} \in C^{p-1}(K, L; \prod_{p-1})$ . Sejam  $f_{p-1}: X_{p-1} \rightarrow Y$  e  $g_{p-2}: X_{p-2} \rightarrow Y$  tais que  $g_{p-2} \sim f_{p-2}$  segundo uma homotopia  $k$ . Então existe extensão  $g_{p-1}$  de  $g_{p-2}$  tal que  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) = c^{p-1}$ .

(4.8) Teorema -  $\int d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) = c(f_{p-1}) - c(g_{p-1})$ .

Passemos agora a novas considerações.

Suponhamos que  $f, g: X \rightarrow Y$  sejam extensões de  $f_A: A \rightarrow Y$ . Queremos estudar em que condições elas são homotópicas rel  $A$ . Também aqui procedemos passo a passo.

Temos, em primeiro lugar,  $f_0 \sim g_0$  pois  $Y$  é c.p.c.. Suponha - mos que existe homotopia  $k$  entre  $f_{p-2}$  e  $g_{p-2}$ . Pomos  $d(f, k, g) = d(f_{p-1}, k, g_{p-1})$ . O lema (4.4) mostrou que  $k$  se estende a uma homotopia de  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$  se e somente se  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) = 0$ . Portanto, a cocadeia de deformação deve, neste caso, ser interpretada como uma obstrução à extensão da homotopia  $k$ . Verifiquemos, em primeiro lugar,

(4.9) Lema -  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1})$  é um cociclo relativo.

Com efeito,  $d(f_{p-1}, k, g_{p-1}) = c(f_{p-1}) - c(g_{p-1})$  e como  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$  são restrições de  $f$  e  $g$ , respectivamente, os seus cociclos de obstrução são nulos.

(4.10) Teorema - Seja  $k$  uma homotopia rel  $A$  entre  $f_{p-2}$  e  $g_{p-2}$ . Os cociclos de deformação  $d(f_{p-1}, \mathcal{K}, g_{p-1})$  de todas as homotopias  $\mathcal{K}$  que coincidem em  $X_{p-3} \times I$  com  $k$  preenchem exatamente uma classe de cohomologia:

$$\bar{d}(f_{p-1}, k, g_{p-1}) \in H^{p-1}(K, L; \prod_{p-1}).$$

A demonstração deste teorema é análoga a de (3.1). Vamos esboça-la aqui. Podemos construir uma "cocadeia diferença"

$\Theta(k, \mathcal{K}) \in C^{p-2}(K, L; \prod_{p-1})$  cujo cobordo será a diferença dos dois cociclos de deformação. Para tanto, vamos definir:

$$S: X_{p-3} \times I \times I \cup X_{p-2} \times I \times \{0, 1\} \cup X_{p-2} \times \{0, 1\} \times I \rightarrow Y.$$

Pondo:

$S(x, t, s) =$

$$= \begin{cases} k(x, t) = \mathcal{H}(x, t) & \text{se } x \in X_{p-3} \quad t \in I, s \in I \\ k(x, t) & \text{se } x \in X_{p-2} \quad t \in I, s = 0 \\ \mathcal{H}(x, t) & \text{se } x \in X_{p-2} \quad t \in I, s = 1 \\ f_{p-2}(x) & \text{se } x \in X_{p-2} \quad t = 0, s \in I \\ g_{p-2}(x) & \text{se } x \in X_{p-2} \quad t = 1, s \in I \end{cases}$$

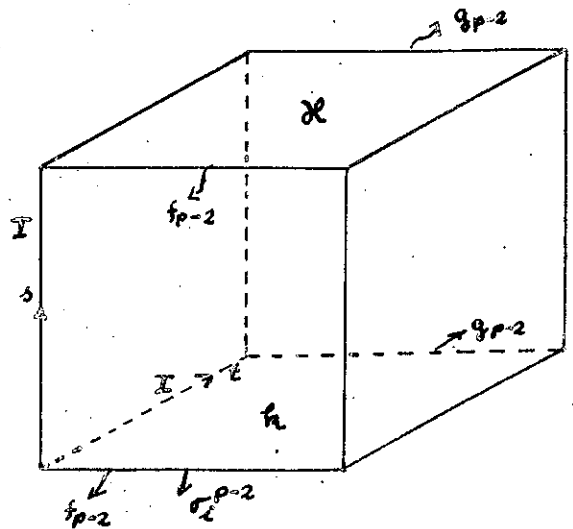
Se tomarmos  $\sigma_i^{p-2}$  de  $K$ ,  $S$  será definida sobre a fronteira da  $p$ -célula  $\sigma_i^{p-2} \times I \times I$ , e determina um elemento  $\gamma_i$  de  $\pi_{p-1}(Y)$ . A menos do sinal este  $\gamma_i$  vai ser o valor que a cocadeia  $\Theta(k, \mathcal{H})$  tomará sobre a célula  $\sigma_i^{p-2}$ . Prossequimos, depois, de acordo com (2.10) e (3.1).

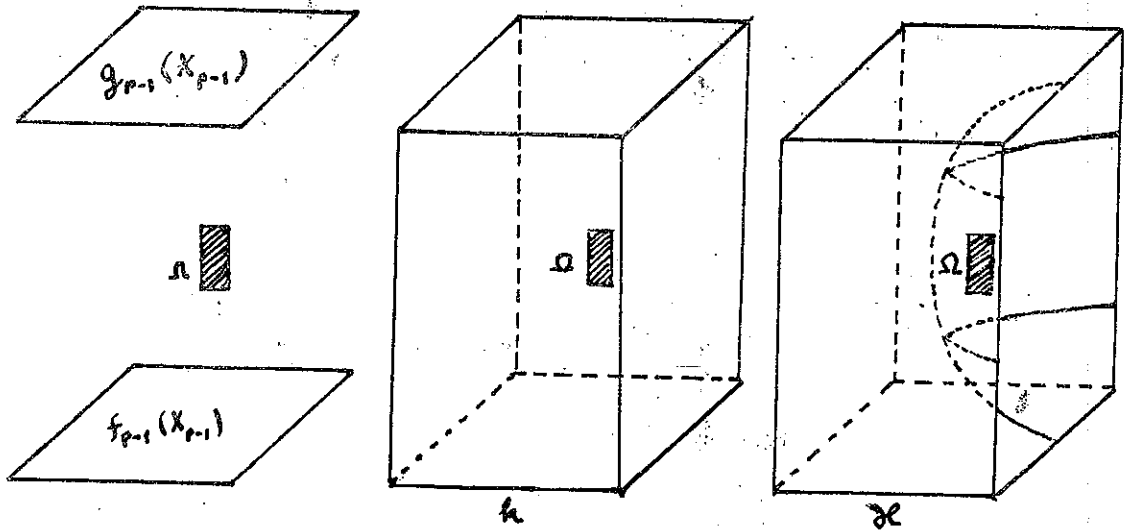
(4.11) Ilustremos com um exemplo como uma homotopia  $k$  em  $X_{p-2}$  pode ser substituída por outra  $\mathcal{H}$ , coincidente com  $k$  sobre  $X_{p-3}$  sendo que  $\mathcal{H}$  se estende até  $X_{p-1}$ .

Seja  $X_{p-1}$  um quadrado.  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$  levam  $X_{p-1}$  em dois quadrados de  $R^3$  em posições paralelas.  $X_{p-2}$  é constituído pelas arestas e vértices de  $X_{p-1}$  e  $X_{p-3}$  somente dos vértices. Seja  $k$  a homotopia que desloca a imagem das arestas pela  $f_{p-2}$  paralelamente a fim de coincidirem com a imagem pela  $g_{p-2}$ .

Se  $Y$  é o espaço obtido retirando de  $R^3$  um pequeno obstáculo que cai no interior do cubo descrito pelas imagens de  $f_{p-1}$ ,  $g_{p-1}$  e  $k$  a homotopia  $k$  não pode ser estendida a uma homotopia entre  $f_{p-1}$  e  $g_{p-1}$ .

Se, porém, comprimirmos uma das faces para dentro (fig. c) até que  $\Omega$  esteja fora da figura, mantendo as três outras faces laterais fixas (e principalmente as arestas laterais:  $k|X_{p-3}$ ), obtemos nova homotopia  $\mathcal{H}$  que se estende.





(4.12) Corolário - Se  $Y$  é c.p.c. e  $H^r(K, L; \prod_r) = 0$  para  $r = 1, 2, \dots, \dim(K-L)$  então duas extensões  $f, g: X \rightarrow Y$  de  $f_A: A \rightarrow Y$  são sempre homotópicas relativamente a  $A$ .

Demonstração -  $f_0 \sim g_0$  pois  $Y$  é c.p.c. e esta homotopia pode ser escolhida de tal modo que se estenda a  $f_1 \sim g_1$  pois  $H^1(K, L; \prod_1) = 0$  (neste caso,  $X_{p-3} = A$ ). Utilizando o anulamento dos diversos grupos de cohomologia podemos prosseguir fazendo em cada passo as modificações necessárias até obter  $f \sim g$ .

### § 5 - Obstrução primária

Neste parágrafo,  $q$  vai indizar o menor número para o qual  $\prod_q \neq 0$ , isto é,  $Y$  é c.p.c. e  $\prod_1 = \prod_2 = \dots = \prod_{q-1} = 0$ , mas,  $\prod_q \neq 0$ . Se  $q > 1$  certamente  $Y$  é simples em tôdas as dimensões; se  $q = 1$  devemos ter  $\prod_1$  abeliano.

Seja  $f_A: A \rightarrow Y$ , pelo corolário (1.3) vemos que podemos estender  $f_A$  a  $f_q: X_q \rightarrow Y$  pois não encontramos obstruções. Por outro lado, utilizando (4.12) vemos que dada outra extensão  $g_q: X_q \rightarrow Y$ , suas restrições  $g_{q-1}$  e  $f_{q-1}$  são homotópicas:  $g_{q-1} \sim f_{q-1}$  rel  $A$ . Disto obtemos que os cociclos de obstrução  $c(f_q)$  e  $c(g_q)$  são cohomólogos pois  $c(f_q) - c(g_q) = \delta d(f_{q-1}, k, g_{q-1})$ .

(5.1) Definição - A classe de cohomologia  $C(f_A) \in H^{q+1}(K, L; \prod_q)$  formada pelos cociclos de obstrução de tôdas extensões de  $f_A$  a  $X_q$  é chamada a "obstrução primária" à extensão de  $f_A$ .

Segue imediatamente de (3.2)

(5.2) Teorema - Uma condição necessária e suficiente para que exista extensão  $f_{q+1}: X_{q+1} \longrightarrow Y$  de  $f_A$  é que a obstrução primária  $C(f_A)$  seja nula.

(5.3) Teorema - Se  $f_A, g_A: A \longrightarrow Y$  são homotópicas, então,  $C(f_A) = C(g_A)$ .

Demonstração - Para tanto, precisamos somente lembrar que são iguais as obstruções  $c(f_q) = c(g_q)$  de duas aplicações homotópicas  $f_q \sim g_q$  (ver (1.5)) e utilizar o lema (5.4) abaixo para o caso  $M = K_q$  e  $N = L$  a fim de garantir a existência de extensões  $f_q$  e  $g_q$  de  $f_A$  e  $g_A$  que estão nestas condições.

(5.4) Lema (Teorema da extensão de homotopias) - Seja  $M$  um poliedro e  $N$  um subpoliedro. Seja  $F: N \times I \longrightarrow Y$  uma homotopia. Seja  $f: M \longrightarrow Y$  extensão da função  $f_N(x) = F(x, 0)$ . Nestas condições, existe extensão  $g$  de  $g_N(x) = F(x, 1)$  que é homotópica a  $f$  por homotopia  $\bar{F}$  que estende  $F$ .

Demonstração - Vamos mostrar, para tanto, que  $M \times 0 \cup N \times I$  é retracto de  $M \times I$ . Isto é, existe:  $r: M \times I \longrightarrow M \times 0 \cup N \times I$  tal que  $r|_{M \times 0 \cup N \times I}$  é identidade. Nestas condições, definindo  $F': M \times 0 \cup N \times I \longrightarrow Y$  por

$$F'(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{se } x \in N, t \in I \\ f(x) & \text{se } x \in M, t = 0 \end{cases}$$

obtemos  $\bar{F} = F' \circ r: M \times I \longrightarrow Y$ , e  $g = \bar{F}(x, 1)$ .

Seja  $\dim(M-N) = n$ . Vamos pôr  $E_p = M \times 0 \cup M_p \times I$  ( $M_p = N \cup M^p$  análogamente a  $K_p$ ).

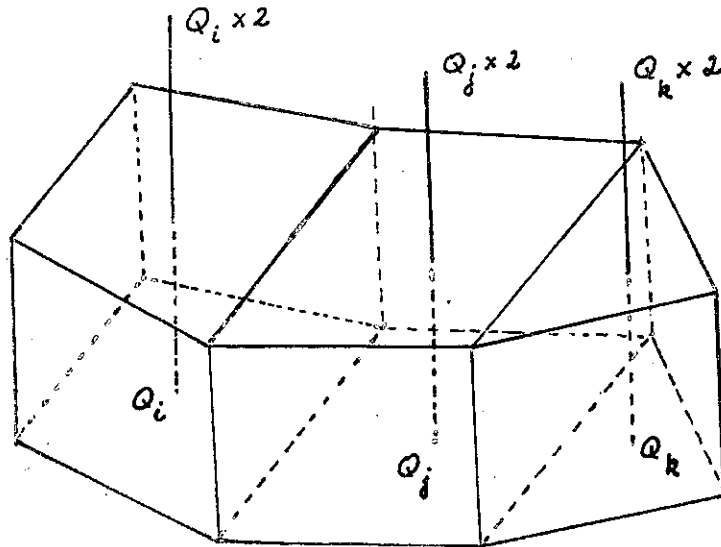
Temos  $E_n = M \times I$  e  $E_{-1} = M \times 0 \cup N \times I$ .

Vamos construir uma sequência de retrações  $r_p: E_p \longrightarrow E_{p-1}$ ,  $p = 0, 1, \dots, n$  cujo produto  $r_0, r_1, \dots, r_n$  é a retração procurada.

Seja  $\sigma_i^p$  uma  $p$ -célula,  $Q_i \in \langle \sigma_i^p \rangle$  um ponto interno. Projete mos de  $Q_i \times 2 \in \sigma_i^p \times R$  os pontos de  $\sigma_i^p \times I$  sobre  $\sigma_i^p \times 0 \cup \sigma_i^p \times I$ .

Esta projecção  $p_i$  é certamente uma retração, pois,  $p_i$  mantém os pontos de  $\sigma_i^p \times 0 \cup \sigma_i^p \times I$  fixos.

Escolhendo para cada p-célula de M-N um ponto  $Q_i$  e procedendo da forma acima obtemos a retração desejada  $r_p$ .



Suponhamos agora que  $X, A$  tenha duas subdivisões celulares  $K, L$  e  $S, T$ . Vamos designar com  $C_K(f_A) \in H^{q+1}(K, L; \mathbb{Z}_q)$  e  $C_S(f_A) \in H^{q+1}(S, T; \mathbb{Z}_q)$  as obstruções primárias de uma função  $f_A: A \rightarrow Y$  relativamente a estas subdivisões. Consideremos  $\Psi_{K,L}(C_K(f_A))$  e  $\Psi_{S,T}(C_S(f_A))$  pertencentes a  $H^{q+1}(X, A; \mathbb{Z}_q)$  (ver (8.4)). Vale o seguinte

(5.5) **Teorema** - A obstrução primária é um invariante topológico. Isto significa:  $\Psi_{K,L}(C_K(f_A)) = \Psi_{S,T}(C_S(f_A))$ .

O teorema (5.5) segue do lema (5.6) abaixo, com  $h$  sendo a identidade e observando (8.4).

Sejam  $K, L$  e  $S, T$  dois complexos celulares (os poliedros subjacentes não coincidem necessariamente).

Sejam  $h: |K|, |L| \rightarrow |S|, |T|$  e  $f_T: |T| \rightarrow Y$  funções contínuas.  $g_L = f_T \circ (h|_{|L|}): |L| \rightarrow Y$  é definida, pois,  $h(|L|) \subset |T|$ . Sejam  $C_S(f_T)$  e  $C_K(g_L)$  suas obstruções primárias. Então vale:

(5.6) **Lema** -  $C_K(g_L) = h^*(C_S(f_T))$ , isto é, a obstrução primária é invariante em relação às aplicações contínuas.



Demonstração - Vamos, em primeiro lugar, mostrar que  $h$  pode ser considerada como sendo aplicação simplicial de uma subdivisão  $K^{(m)}, L^{(m)}$  de  $K, L$  na subdivisão normal  $\bar{S}, \bar{T}$  de  $S, T$ .  $h$  possui uma aproximação simplicial  $h_1$  em tais condições (ver (8.3)).  $h_1$  é homotópica a  $h$  (ver (B.9.5-6)), portanto,  $g_{1L} = f_T \circ (h_1 || L) \sim f_T \circ (h || L)$ , e de (5.3) segue  $C(g_{1L}) = C(g_L)$ . Por outro lado, sendo  $h_1 \sim h$  temos  $h_1^* = h^*$  (B.10.11). Basta, portanto, mostrar que  $h_1^*(C_S(f_T)) = C_K(g_{1L})$ . Podemos admitir, portanto, que  $h$  seja ela mesma simplicial relativamente a tais subdivisões.

Se demonstrarmos agora que

(5.7) A obstrução primária é invariante em relação às aplicações simpliciais;

(5.8) a obstrução primária é invariante em relação à subdivisão normal, está demonstrado o lema (5.6), pois  $h^*$  é composta de subdivisões e de uma aplicação simplicial (ver (8.3)).

Demonstração de (5.7) - Sejam  $K, L$  e  $S, T$  pares de complexos simpliciais.

Seja  $h: K, L \rightarrow S, T$  uma aplicação simplicial e seja  $f_T: |T| \rightarrow Y$  contínua. Suponhamos que  $f_q: |S_q| \rightarrow Y$  seja uma extensão de  $f_T$ . Sendo  $h$  simplicial a imagem de  $|K_q|$  por  $h$  está em  $|S_q|$ , portanto, está definido  $g_q = f_q \circ h$  sobre  $|K_q|$  a qual é uma extensão de  $g_L: f \circ h || L: |L| \rightarrow Y$ . Para obter (5.7) é suficiente mostrar que  $c(g_q) = h^* c(f_q)$  pois  $c(g_q) \in C(g_L)$  e  $c(f_q) \in C(f_T)$ .

Seja  $\Delta^{q+1}$  um simplexo de  $K$ .  $h$  pode ser degenerada sobre  $\Delta^{q+1}$ , isto é,  $h$  leva  $\Delta^{q+1}$  sobre um simplexo de dimensão menor. Disto segue  $h(\Delta^{q+1}) \subset |S_q|$ . Se  $h$  não é degenerada sobre  $\Delta^{q+1}$  este simplexo será levado sobre um simplexo  $h(\Delta^{q+1})$  de mesma dimensão, ou conservando ou invertendo a orientação (supomos orientados os simplexos de cada um dos complexos).

Vamos calcular  $h^* c(f_q)$  e  $c(g_q)$  sobre  $\Delta^{q+1}$ .

Usando (B.9.3) calculamos

$$(5.9) \quad h^* c(f_q)(\Delta^{q+1}) = c(f_q) h_* (\Delta^{q+1}) = c(f_q) [\xi h(\Delta^{q+1})].$$

No caso degenerado,  $\varepsilon = 0$ . Caso contrário, temos:  
 $c(f_q)(\varepsilon h(\Delta^{q+1})) = \varepsilon \{f_q | h(\Delta^{q+1})\} = \{f_q h | \Delta^{q+1}\}$  pois a orientação das esferas  $h(\Delta^{q+1})$  e  $\Delta^{q+1}$  depende de  $h$ , portanto, os sinais se compensam.

(5.10)  $c(g_q)(\Delta^{q+1}) = \{g_q | \Delta^{q+1}\} = \{f_q h | \Delta^{q+1}\}$  que coincide com (5.9) pois se  $h$  for degenerada sobre  $\Delta^{q+1}$  temos  $h(\Delta^{q+1}) \subset |S_q|$  e  $f_q h | \Delta^{q+1}$  se estende a  $\Delta^{q+1}$ , representando, portanto, o elemento zero.

Isto demonstra (5.7)

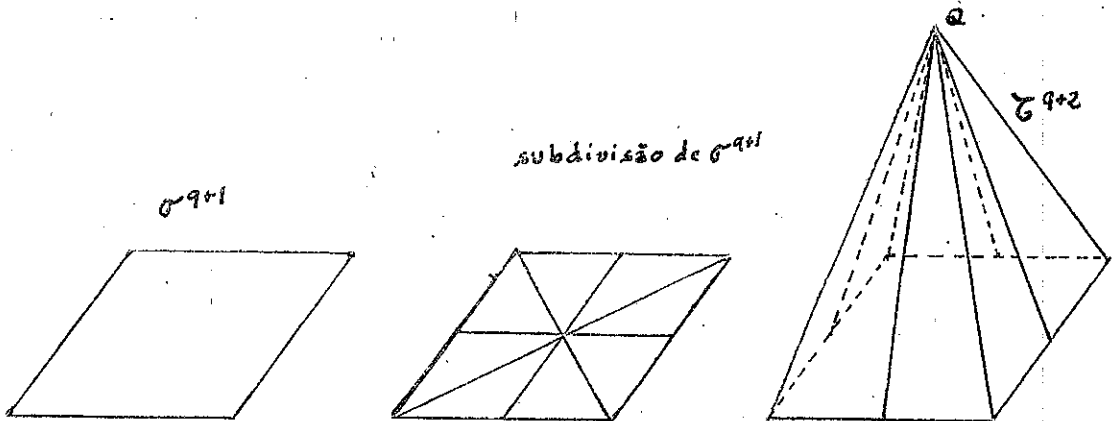
Demonstração de (5.8) - Seja  $N, P$  a subdivisão normal de  $K, L$ :  $h: |K|, |L| \rightarrow |N|, |P|$  a aplicação idêntica. Seja  $f_A: A \rightarrow Y$  a aplicação contínua.  $h f_A = f_A$ . Devemos mostrar que  $C_K(f_A) = \sum^* C_N(f_A)$  (ver (3.2))

Observemos que  $|K_q| \subset |N_q|$ , pois a subdivisão de uma  $q$ -célula dá origem a simplexes de dimensão  $\leq q$ . Se  $f_q: |K_q| \rightarrow Y$  é extensão de  $f_A$ ,  $g_q = f_q | |K_q|$  estende  $f_A$  a  $|K_q|$ . Temos então

$c(f_q) \in C_N(f_A)$  e  $c(g_q) \in C_K(f_A)$ . (5.8) será demonstrada se

$$c(g_q) = \sum^* c(f_q).$$

Seja  $\sigma^{q+1}$  uma célula de  $K$ .  $c(g_q)(\sigma^{q+1}) = \{g_q | \sigma^{q+1}\} = \{f_q | \sigma^{q+1}\} = \sum^* c(f_q)(\sigma^{q+1}) = c(f_q) \left\{ \sum^* \sigma^{q+1} \right\} = c(f_q) \left\{ \sum \Delta_i^{q+1} \right\} = \sum \{f_q | \Delta_i^{q+1}\}$  onde a soma deve ser estendida sobre todos os  $q+1$ -simplexos  $\Delta_i^{q+1}$  da subdivisão de  $\sigma^{q+1}$ , com a orientação induzida. Para mostrar a igualdade das suas expressões vamos fazer uma construção que reduz a questão ao teorema (A.9,10).



Tomemos um ponto  $Q$  não contido no suporte de  $\sigma^{q+1}$  e dêle projetemos  $\sigma^{q+1}$  obtendo  $\tau^{q+2}$ . Subdividimos a fronteira de  $\tau^{q+2}$  projetando de  $Q$  a fronteira de  $\sigma^{q+1}$  subdividida, mas não subdividimos  $\sigma^{q+1}$ . Desta maneira,  $\tau^{q+2}$  é composta de  $\sigma^{q+1}$  e de uma parte isomorfa à subdivisão normal de  $\sigma^{q+1}$ . Orientamos  $\tau^{q+2}$  de tal modo que  $[\tau^{q+2}, \sigma^{q+1}] = -1$ .

O  $q$ -esqueleto  $E_q$  de  $\tau^{q+2}$  é homeomorfo ao  $q$ -esqueleto da subdivisão normal de  $\sigma^{q+1}$ . Por meio deste homeomorfismo e de  $f_q$  definimos uma função  $\varphi : E_q \rightarrow Y$ . Podemos aplicar (A.9.10) a esta função  $\varphi$  e ver que as parcelas da soma são

$$\sum [f_q | \Delta_i^{q+1}] - [f_q | \sigma^{q+1}] = 0$$

o que demonstra a nossa afirmação.

### § 6 - A diferença primária

Como nos parágrafos anteriores, admitimos que  $Y$  é c.p.c. e  $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{q-1} = 0$  mas  $\pi_q \neq 0$ .

Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  duas extensões de  $f_A : A \rightarrow Y$ . Usando (4.12) vemos que  $f_{q-1}$  e  $g_{q-1}$  são sempre homotópicas rel  $A$ . Prosseguindo análogamente ao que foi feito para a obstrução primária no início do § 5, mostra-se que para duas homotopias  $k$  e  $\kappa$ ,  $d(f_q, k, g_q) - d(f_q, \kappa, g_q)$  é um cobordo relativo de  $X$  mod  $L$ . Basta interpretar o cociclo de deformação como uma obstrução em  $X \times I$ .

(6.1) Definição - A classe de cohomologia  $D(f, g) \in H^q(K, L; \pi_q)$  que contém todos os cociclos de deformação  $d(f_q, k, g_q)$  onde  $k$  percorre tôdas as homotopias entre  $f_{q-1}$  e  $g_{q-1}$  é chamada "diferença primária" entre  $f$  e  $g$ .

Se tivermos duas extensões  $f_{q+p}, g_{q+p}$  ( $p=0, 1, \dots$ ) de  $f_A$ , também tem significado falar em sua diferença primária  $D(f_{q+p}, g_{q+p})$ . São de demonstração imediata:

(6.2) Condição necessária e suficiente para que exista homotopia entre  $f_q$  e  $g_q$  rel  $A$  é que  $D(f, g) = 0$ .

(6.3) Se  $f, g, h$  são extensões de um mesmo  $f_A : A \rightarrow Y$

$$D(g, f) = -D(f, g)$$

$$D(f, h) = D(f, g) + D(g, h) .$$

Usar (4.5) e (4.6).

Segue imediatamente que  $D(f, g)$  somente depende das classes de homotopia rel  $A$  das funções  $f$  e  $g$ .

Analogamente a (5.5) e (5.6) pode ser dada a invariância topológica da diferença primária:

(6.4) Sejam  $h: |K|, |L| \rightarrow |S|, |T|$  uma aplicação contínua ;  $f, g: |K| \rightarrow Y$  duas extensões de  $f_T: |T| \rightarrow Y$ . Considerando  $fh, gh: |K| \rightarrow Y$  que são extensões de  $f_T h$  vale:  $D(fh, gh) = h * D(f, g)$ . Em particular, se  $K, L$  e  $S, T$  são duas subdivisões celulares de um mesmo par  $(X, A)$  e  $h$  a identidade, a igualdade acima afirma que  $D(f, g) \in H^q(X, A; \mathbb{T}_q)$  independe destas subdivisões.

Vamos estudar agora a relação existente entre a diferença primária  $D_L(f_A, g_A) \in H^q(L, \pi_q)$  de duas funções  $f_A, g_A: A \rightarrow Y$  e suas obstruções primárias  $C(f_A)$  e  $C(g_A)$  de  $H^{q+1}(K, L; \pi_q)$ . Vale o seguinte

(6.5) Teorema -  $\delta * D(f_A, g_A) = C(f_A) - C(g_A)$  (ver (8.9) para a definição de  $\delta^*$ ).

Para demonstrar este teorema, vamos procurar convenientes representantes destas classes de cohomologia e aplicar o teorema (4.8). Podemos estender (ver (1.3))  $f_A, g_A$  a  $f_q, g_q: X_q \rightarrow Y$ . Consideremos ainda suas restrições  $\bar{f}_p, \bar{g}_p: |K^p| \rightarrow Y$  e  $f'_p, g'_p: |L^p| \rightarrow Y$  aos  $p$ -esqueletos de  $K$  e  $L$  ( $p \leq q$ ). Observamos que a obstrução  $c(\bar{f}_q)$  à extensão de  $\bar{f}_q: |K^q| \rightarrow Y$  a  $|K^{q+1}|$  coincide com  $c(f_q)$ , pois para as  $(q+1)$ -células de  $L$  não existe obstrução. Analogamente  $c(\bar{g}_q) = c(g_q)$ .

Seja agora  $\bar{k}$  uma homotopia entre  $\bar{f}_{q-1}$  e  $\bar{g}_{q-1}$  (que sempre existe), seja  $k'$  sua restrição a  $|L^{q-1}| \times I$ ,  $d(f'_q, k', g'_q)$  representa, portanto,  $D_L(f_A, g_A)$ . Por outro lado,  $d(\bar{f}_q, \bar{k}, \bar{g}_q)$  estende  $d(f'_q, k', g'_q)$ .  $\delta d(\bar{f}_q, \bar{k}, \bar{g}_q) = c(\bar{f}_q) - c(\bar{g}_q) = c(f_q) - c(g_q)$  representa, portanto,  $\delta * D_L(f_A, g_A)$  e como  $c(f_q) \in C(f_A)$  e  $c(g_q) \in C(g_A)$  o teorema está demonstrado.

(6.6) Lema - Sejam  $f, g, h$  extensões de  $f_A: A \rightarrow Y$ . Se  $D(f, g) = D(f, h)$  então  $g_q \sim h_q$  rel  $A$ .

Com efeito, usando (6.3), temos:

$D(g,h) = D(g,f) + D(f,h) = -D(f,g) + D(f,h) = 0$  e (6.6) segue de (6.2) .

(6.7) Observação - Se considerarmos somente pares de poliedros  $K,L$  para os quais os grupos de cohomologia  $H^{i-1}(K,L;\pi_i)$ ,  $H^i(K,L;\pi_i)$  e  $H^{i+1}(K,L;\pi_i)$  são nulos para  $i=0,1,2,\dots,q-1$ , as noções de obstrução primária e diferença primária podem ser generalizadas e valem essencialmente as mesmas propriedades como para aquelas (ver [St] pg. 179 e pg. 183).

### § 7 - Teoremas de extensão e classificação

Neste parágrafo, ainda supomos que  $Y$  é c.p.c. e  $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_{q-1} = 0$  mas  $\pi_q \neq 0$  .

(7.1) Teorema de extensão - Seja  $K,L$  um par tal que  $H^{q+2}(K,L;\pi_{q+1}) = \dots = H^r(K,L;\pi_{r-1}) = 0$  ( $r = \dim(K-L)$ ) .

Seja  $f: X \rightarrow Y$  . Para cada  $h^q \in H^q(K,L;\pi_q)$  existe uma extensão  $g: X \rightarrow Y$  de  $f|_A = f|_A$  tal que  $D(f,g) = h^q$  .

Demonstração - Seja  $z^q \in h^q$ , pelo lema (2.9) existe uma extensão  $g_q: X_q \rightarrow Y$  de  $f_{q-1}$  tal que  $d(f_q, g_q) = z^q$  . Sendo  $z^q$  um cociclo e  $c(f_q) = 0$  temos  $c(g_q) = c(f_q) - \delta z^q = 0$  . Portanto, obtemos extensão  $g_{q+1}$  .

Usando agora (3.3) com  $m=q+2$  e  $n=r$  está demonstrado (7.1).

(7.2) Teorema de classificação - Se além das hipóteses de (7.1) tivermos:  $H^p(K,L;\pi_p) = 0$   $p=q+1,\dots,r$ ,  $g \rightarrow D(f,g)$  estabelece correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das extensões de  $f|_A$  e os elementos de  $H^q(K,L;\pi_q)$  .

Demonstração - Suponhamos que além da  $g$  construída na demonstração de (7.1) exista  $h: X \rightarrow Y$  extensão de  $f|_A$ , tal que  $D(f,h) = h^q$  . Então temos por (6.3)  $D(g,h) = D(g,f) + D(f,h) = -h^q + h^q = 0$  . Segue de (6.2) que  $g_q \sim h_q$  rel  $A$  .

Usando (4.4) e (4.10) ou seja, adaptando (4.12), as nossas hipóteses garantem que a homotopia entre  $g_{q-1}$  e  $h_{q-1}$  se estende a  $g \sim h$  .

(7.3) Corolário - Se  $\pi_{q+1} = \pi_{q+2} = \dots = \pi_{q-1} = 0$ , estão satisfeitas as condições de (7.1) e, se ainda  $\pi_{\kappa} = 0$ , aquelas de (7.2). Podemos, portanto, obter as extensões e classificá-las de acôrdo com aquêles enunciados.

(7.4) Observação - Um espaço  $Y$  c.p.c. para o qual  $\pi_q = \pi$  (grupo dado) mas  $\pi_i = 0$  se  $i \neq q$ , é chamado de  $K(\pi, q)$ . Para tais espaços valem (7.1) e (7.2) para pares de poliedros de quaisquer dimensões.

Se fôr dado um grupo  $\pi$  (abeliano se  $q > 1$ ) é sempre possível construir um  $K(\pi, q)$  (ver, por exemplo, [Hu], pg. 168).

(7.5) Corolário - Se  $L = \emptyset$  e  $H^p(K, \pi_{p-1}) = 0$   $p=q+2, \dots, r$  ( $r = \dim K$ ), e  $H^p(K, \pi_p) = 0$   $p=q+1, \dots, r$ , existe correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das aplicações  $f: X \rightarrow Y$  e os elementos de  $H^q(K, \pi_q)$ . Basta comparar  $f$  com uma aplicação constante  $\bar{y}_0: X \rightarrow y_0 \in Y$  e utilizar (7.2).

(7.6) Definição - O elemento  $\kappa(f) = D(\bar{y}_0, f)$  chama-se elemento característico de  $f$ . Sendo  $Y$  c.p.c.  $\kappa(f)$  não depende da particular aplicação constante  $\bar{y}_0$  utilizada. Tem significado definir, também,  $\kappa(f_p)$ ,  $p \geq q$  e vale  $\kappa(f_q) = \kappa(f_{q+1}) = \dots = \kappa(f)$ . Se  $\dim K = q$  e  $L = \emptyset$  as condições de (7.5) são satisfeitas. Vale, então:

(7.7) Corolário - (Teorema de classificação de Whitney): As classes de homotopia das aplicações de um poliedro  $q$ -dimensional em  $Y$  estão em correspondência biunívoca com  $H^q(K, \pi_q)$ .

Seja  $S^q$  a esfera  $q$ -dimensional  $q \geq 1$ .  $S^q$  é c.p.c..

Utilizando o teorema da aproximação simplicial (B.9.6), demonstra-se que  $\pi_1(S^q) = \pi_2(S^q) = \dots = \pi_{q-1}(S^q) = 0$ . Em (A.8.3) dissemos que  $\pi_q(S^q) \approx Z$ . Dêstes dados obtemos:

(7.8) Corolário - (Teorema de classificação de Hopf): As classes de homotopia das aplicações de um poliedro  $K$  de dimensão  $q$  na esfera  $S^q$  estão em correspondência biunívoca com  $H^q(K, Z)$ .

Suponhamos que  $L = \emptyset$ . Seja  $f_q: X_q \rightarrow Y$  uma aplicação que se estende a  $X_{q+1}$ . Vale então o seguinte:

(7.9) Teorema - A classe de cohomologia  $\bar{c}(f_q) \in H^{q+2}(K; \pi_q)$ , à qual pertencem todos os cociclos de obstrução  $c(f_{q+1})$  das extensões de  $f_q$  (ver (3.1)), depende somente de  $\kappa(f_q)$ .

Demonstração - Seja  $g_q$  outra função com  $c(g_q) = 0$  e  $\kappa(g_q) = \kappa(f_q)$ . Então,  $D(f_q, g_q) = D(f_q, \bar{y}_0) + D(\bar{y}_0, g_q) = -\kappa(f_q) + \kappa(g_q) = 0$  (6.3). Portanto, pela (6.2) segue  $f_q \sim g_q$ ; seja  $k$  uma homotopia. Sejam  $f_{q+1}$  e  $g_{q+1}$  extensões de  $f_q$  e  $g_q$ , então, temos:

$c(f_{q+1}) - c(g_{q+1}) = \delta d(f_{q+1}, k, g_{q+1})$  (4.8) o que demonstra o teorema.

Em [Bo] pg. 299 encontra-se um estudo da relação entre  $\kappa(f_q)$  e  $\bar{c}(f_q)$ , para alguns casos particulares.

(7.10) Teorema (de extensão) - Seja  $\dim(K-L) \leq q+1$  e  $f: X \rightarrow Y$ . Seja  $i: L \rightarrow K$  a injeção como em (8.7). Então,  $g_A: A \rightarrow Y$  estende a  $g: X \rightarrow Y$  se e somente se existe  $h^q \in H(K; \pi_q)$  tal que  $i^*h^q = D(f_A, g_A)$  e, ainda, para cada  $h^q$  existe tal extensão de maneira que  $D(f, g) = h^q$ .

Demonstração - Se  $g_A$  admite extensão  $g$ , sua obstrução primária é nula, portanto,  $\delta^*D(f_A, g_A) = C(f_A) - C(g_A) = 0$ . Utilizando a sequência exata (8.6) segue que existe  $h^q$  tal que  $i^*h^q = D(f_A, g_A)$ . Vice-versa, suponhamos que exista  $h^q$  tal que  $i^*h^q = D(f_A, g_A)$ .  $C(f_A) - C(g_A) = \delta^*D(f_A, g_A) = \delta^*i^*h^q = 0$ , ainda pela (8.6), portanto,  $C(g_A) = 0$  e a extensão existe.

Falta demonstrar a última parte. Seja  $z^q \in h^q$ . Seja  $z_L^q$  sua restrição a  $L$ . Por hipótese,  $i^*h^q = D(f_A, g_A)$ , isto é,  $z_L^q \in D(f_A, g_A)$ . Portanto, existe homotopia  $k'$  entre  $f'_{q-1}$  e  $g'_{q-1}$ , restrições de  $f_A$  e  $g_A$  a  $L^{q-1}$ , tal que  $d(f'_{q-1}, k', g'_{q-1}) = z_L^q$ . Pelo (5.4)  $k'$  estende a uma homotopia  $k$  de  $\bar{f}_{q-1} = f|_{|K^{q-1}|}$ . Definimos  $\bar{g}_{q-1} = k(x, 1)$ .  $\bar{g}_{q-1}$  estende  $g'_{q-1}$  a  $|K^{q-1}|$ . É claro que podemos estender  $\bar{g}_{q-1}$  sobre as células de dimensões  $\geq q$  de  $L$  coincidindo com  $g_A$ , obtendo  $g_{q-1}$ . Em seguida, estendemos  $g_{q-1}$  sobre as  $q$ -células restantes, obtendo uma  $g_q$  tal que  $d(f_q, k, g_q) = z^q$ . (Usar (A.9.6), análogamente a (2.9) e (4.5).) Como  $z^q$  é um ciclo e  $f^q$  é uma restrição de  $f$ , temos:  $c(g_q) = c(f_q) - \delta z^q = 0$  e  $g_q$  possui extensão  $g: X \rightarrow Y$ .

(7.11) Definição - Suponhamos agora que  $Y$  seja um poliedro. Seja  $y_0 \in Y$ . Sejam  $I_Y$  e  $y_0^!$ , respectivamente, a identidade de  $Y$  e a aplicação constante  $y_0^!(x) = y_0$ . Chama-se "obstrução primária à contração de  $Y$ " ao elemento  $D(Y) = \mathcal{K}(I_Y) = D(y_0^!, I_Y) \in H^q(Y, \pi_q)$ .

(7.12) Lema - Seja  $\bar{y}_0: X \rightarrow Y$  constante, e  $f: X \rightarrow Y$  qualquer, então:  $\mathcal{K}(f) = D(\bar{y}_0, f) = f^* D(Y)$ .

Com efeito,  $\bar{y}_0 = y_0^! \circ f$ ,  $f = I_Y \circ f$ , usando (6.4) obtemos  $D(\bar{y}_0, f) = f^* D(y_0^!, I_Y) = f^* D(Y)$ .

(7.13) Teorema de extensão -  $f_A: A \rightarrow Y$  se estende a  $f_{q+1}: X_{q+1} \rightarrow Y$  se e somente se  $\delta^* f_A^* D(Y) = 0$ .

Com efeito,  $D_L(\bar{y}_{0A}, f_A) = f_A^* D(Y)$ , sendo que a constante  $\bar{y}_{0A}$  se estende, vemos que  $C(f_A) = -\delta^* f_A^* D(Y)$ . O resultado segue usando-se (5.2).

(7.14) Teorema de extensão - Se  $H^p(K, L; \pi_{p-1}) = 0$   $p=q+2, \dots, r$  ( $r = \dim(K-L)$ ),  $f_A: A \rightarrow Y$  se estende a  $f: X \rightarrow Y$  se e somente se existe  $h^q \in H^q(K, \pi_q)$  tal que  $i^* h^q = f_A^* D(Y)$ . Para cada  $h^q$  existe uma  $f$  tal que  $h^q = f^* D(Y)$ .

$D_L(\bar{y}_{0A}, f_A) = f_A^* D(Y) = i^* h^q$  (7.12). (7.10) permite construir  $f'_{q+1}: X_{q+1} \rightarrow Y$  tal que  $D(\bar{y}_{0, q+1}, f'_{q+1}) = h^q$ . As condições do teorema permitem aplicar (3.3) para construir extensão  $f: X \rightarrow Y$  de  $f'_q = f'_{q+1}|_{X_q}$ .

Observando que  $\mathcal{K}(f) = D(\bar{y}_0, f) = f^* D(Y)$  (7.12) podemos reescrever (7.5) sob a forma

(7.15) Teorema de classificação - Se  $H^p(K, \pi_{p-1}) = 0$   $p=q+2, \dots, r$  ( $r = \dim K$ ) e  $H^p(K, \pi_p) = 0$   $p=q+1, \dots, r$ , então,  $f \rightarrow f^* D(Y)$  estabelece correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das aplicações de  $K$  em  $Y$  e  $H^q(K, \pi_q)$ .



§ 8 - Aplicações induzidas em cohomologia. Sequência exata de cohomologia.

Neste parágrafo vamos completar e explicitar alguns tópicos do capítulo B.

(8.1) - Sejam  $K, L$  e  $S, T$  dois pares de complexos celulares. Seja  $\varphi_{\#} = (\varphi_p)_{\#}$ ,  $\varphi_p: C_p(K) \rightarrow C_p(S)$  uma aplicação permitida, isto é,  $\varphi_{\#} d = d \varphi_{\#}$ . Suponhamos ainda  $\varphi_{\#}(C_p(L)) \subset C_p(T)$ . Podemos construir as aplicações duais  $\varphi^{\#}: C^p(S, G) \rightarrow C^p(K, G)$  e  $[\varphi_{\#} | C_p(L)]^{\#} = \varphi_L^{\#}: C^p(T, G) \rightarrow C^p(L, G)$  dadas por  $\varphi^{\#}(c^p) = c^p \varphi_{\#}$ , etc. (análogo àquilo que fizemos no cap. B, § 9). Vemos imediatamente que  $\varphi^{\#}[C^p(S, T; G)] \subset C^p(K, L; G)$  pois se  $a_p \in C_p(L)$ ,  $s^p \in C^p(S, T; G)$  então  $\varphi^{\#}(s^p)(a_p) = s^p(\varphi_{\#}(a_p)) = 0$  pois  $\varphi_{\#}(a_p) \in C_p(T)$ . Obtém-se as aplicações induzidas

$$\begin{aligned} \varphi^* &: H^p(S, G) \rightarrow H^p(K, G) \\ \varphi'^* &: H^p(S, T; G) \rightarrow H^p(K, L; G) \\ \varphi_L^* &: H^p(T, G) \rightarrow H^p(L, G) \end{aligned}$$

Se não houver perigo de confusão, escrevemos  $\varphi^*$  para as três.

Vamos observar algumas situações particulares.

(8.2) - Seja  $K, L$  um par de complexos celulares e  $(N, P)$  sua subdivisão normal (no caso de  $K, L$  ser um par simplicial  $N, P$  é sua primeira subdivisão baricêntrica).

Em (B.8.4) construímos a aplicação permitida  $\xi$  de  $C_p(K)$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) sobre um subcomplexo adequado  $(M_p)_p$  de  $(C_p(N))_p$ . Passaremos a interpretar  $\xi$  como aplicação de  $C_p(K)$  em  $C_p(N)$ . Pela sua construção vemos que  $\xi$  leva  $C_p(L)$  em  $C_p(P)$ .  $\xi^*$ ,  $\xi'^*$  e  $\xi_L^*$ , obtidos como em (8.1), são isomorfos, como acontece com seus correspondentes na homologia. Através destes isomorfismos identificamos os grupos de cohomologia de um complexo com os de sua subdivisão normal.

(8.3) - Sejam agora  $K, L$  e  $S, T$  dois pares de complexos celulares. Toda função contínua  $h: |K|, |L| \rightarrow |S|, |T|$  admite aproximação simplicial de uma subdivisão baricêntrica suficientemente fina  $K^{(m)}, L^{(m)}$  da subdivisão normal  $\bar{K}, \bar{L}$  de  $K, L$  (ver B.9.6), na subdivisão normal  $\bar{S}, \bar{T}$  de  $S, T$ . Esta aproximação induz homomorfismos entre

os grupos de cohomologia correspondentes. Pela identificação acima estes homomorfismos induzidos podem ser interpretados como  $h^*: H^p(S, T; G) \longrightarrow H^p(K, L; G)$ .

(8.4) - Em particular, se os pares  $K, L$  e  $S, T$  tiverem os mesmos poliedros subjacentes  $X, A$  e se  $h$  é a identidade dos mesmos, demonstra-se que  $h^*$  é isomorfismo em tôdas as dimensões. Identificando os grupos de cohomologia das diversas subdivisões celulares de um par de poliedros através destes isomorfismos, obtemos os grupos de cohomologia  $H^p(X, A; G)$ . Vamos designar com

$$\Psi_{K, L}: H^p(K, L; G) \simeq H^p(X, A; G)$$

o isomorfismo de identificação.

(8.5) - Seja agora  $K, L$  um par de complexos celulares. Vamos construir uma seqüência de homomorfismos

(8.6) -  $\dots \rightarrow H^p(K, L; G) \xrightarrow{j^*} H^p(K; G) \xrightarrow{i^*} H^p(L; G) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(K, L; G) \rightarrow$   
chamada "seqüência exata de cohomologia" análoga à de homologia da  $\underline{d}$ a em (B.7.11).

(8.7) -  $i^*$  é construída como em (8.1) a partir de  $i_{\#}$ .

Se  $c_p \in C_p(L)$  então  $i_{\#}(c_p) = c_p$  considerada como elemento de  $C_p(K)$ , isto é,  $i_{\#}$  é induzida da injeção  $i: L \rightarrow K$ . Observamos, ainda, que sendo  $c^p \in C^p(K, G)$  então  $i^{\#} c^p$  resulta ser igual à restrição  $c^p|_{C_p(L)}$ . Escreveremos frequentemente  $c_L^p$  em lugar de  $i^{\#} c^p$ . O operador cobordo em  $C^*(L; G)$  vai ser designado com  $\delta_L$ .

(8.8) Se  $c^p \in C^p(K, L; G)$  então  $j^{\#}: C^p(K, L; G) \rightarrow C^p(K; G)$  é dado por  $j^{\#} c^p = c^p$  considerado como cocadeia absoluta. Observando que o cobordo de uma cocadeia relativa é o cobordo comum, vale  $\delta j^{\#} = j^{\#} \delta$ . Desta forma,  $j^{\#}$  induz  $j^*: H^p(K, L; G) \rightarrow H^p(K; G)$ .

(8.9) Finalmente, vamos construir o "operador cobordo"

$$\delta^*: H^p(L; G) \longrightarrow H^{p+1}(K, L; G).$$

Seja  $z^p$  um cociclo de  $Z^p(L; G)$ ; podemos estendê-la a uma cocadeia  $c^p \in C^p(K; G)$  dando valores arbitrários a  $c^p(\sigma^p)$  se  $\sigma^p \in K-L$ . Isto é,  $c^p$  é um homomorfismo de  $C_p(K)$  em  $G$ , que restrito a  $C_p(L)$ , coincide com  $z^p$ .  $\delta c^p$  é um cociclo relativo de  $K \bmod L$ , pois, se  $a_p \in C_p(L)$ , calculamos  $(\delta c^p)(a_p) = c^p(da_p) = z^p(da_p) = \delta_L z^p(a_p) = 0$  pois  $z^p$  é ciclo de  $L$ .

$\delta c^p$  define uma classe de cohomologia relativa  $\delta * [z^p] \in H^{p+1}(K, L; G)$  que, em geral, não é nula, pois  $c^p$  não é uma cocadeia relativa.

(8.10) - Lema - Seja  $h^p \in H^p(L, G)$ ,  $z^p \in h^p$  um seu cociclo;  $\delta*(h^p) = \delta*[z^p]$  não depende das escolhas arbitrárias utilizadas em sua construção.

Demonstração - Seja  $z_1^p \in h^p$  outro representante, então,  $z^p - z_1^p = \delta_L c^{p-1}$  com  $c^{p-1} \in C^{p-1}(L; G)$ . Consideremos extensões  $c^p, c_1^p \in C^p(K; G)$  de  $z^p$  e  $z_1^p$  respectivamente. Vamos mostrar que  $\delta c^p$  e  $\delta c_1^p$  pertencem à mesma classe de cohomologia relativa. Para tanto vamos construir  $u^p \in C^p(K, L; G)$  tal que  $\delta u^p = \delta c^p - \delta c_1^p$ .

Consideremos  $c^{p-1}$  e estendamos a uma cocadeia  $c_K^{p-1} \in C^{p-1}(K, G)$ . Vamos pôr:  $u^p = c^p - c_1^p - \delta c_K^{p-1}$ . Calculando  $u^p$  sobre uma  $p$ -cadeia  $a_p$  de  $L$  temos:  $u^p(a_p) = c^p(a_p) - c_1^p(a_p) - \delta c_K^{p-1}(a_p) = z^p(a_p) - z_1^p(a_p) - c_K^{p-1}(da_p) = z^p(a_p) - z_1^p(a_p) - c^{p-1}(da_p) = z^p(a_p) - z_1^p(a_p) - \delta_L c^{p-1}(a_p) = 0$ . Por outro lado,  $\delta u^p = \delta c^p - \delta c_1^p - \delta \delta c_K^{p-1} = \delta c^p - \delta c_1^p$ .

(8.11) Lema - A sequência (8.6) é exata.

Demonstração - Demonstraremos somente a parte referente a  $i^*$  e  $\delta*$  utilizada no § 7, deixando o resto ao leitor.

Devemos mostrar que  $\text{im } i^* = \ker \delta^*$  (ver (B.7.11-observação)):

a)  $\delta^* i^* = 0$ , isto é,  $\text{im } i^* \subset \ker \delta^*$ .

Com efeito, seja  $z^p \in h^p$  um cociclo de  $K$ ; obtemos  $i^*(h^p)$  pela restrição  $z^p|_{C_p(L)} = z_L^p$ . Para obter  $\delta^*(|z_L^p|)$  devemos estender  $z_L^p$  a  $C_p(K)$  e calcular o cobordo. Ora, podemos usar o próprio  $z^p$  como extensão obtendo, desta forma,  $\delta z^p = 0$ .

$$\delta^* i^*(h^p) = 0.$$

b)  $\text{im } i^* \supset \ker \delta^*$ .

Seja  $h_L^p \in C^p(L, G)$  tal que  $\delta^*(h_L^p) = 0$ , isto é, tomando  $z_L^p$  um cociclo de  $h_L^p$ , estendendo-o arbitrariamente a uma cocadeia  $c^p \in C^p(K, G)$  temos  $\delta c^p \in B^{q+1}(K, L; G)$ , isto é,  $\delta c^p = \delta a^p$  onde  $a^p$  é uma cocadeia relativa.

Vamos mostrar que, nestas condições,  $z_L^p$  é a restrição de um cociclo  $z^p \in Z^p(K;G)$ . Podemos  $z^p = c^p - a^p$  e vemos:

a)  $c^p - a^p$  é cociclo pois  $\delta(c^p - a^p) = \delta c^p - \delta a^p = 0$ .

b)  $(c^p - a^p)|_{C_p(L)} = c^p|_{C_p(L)} - a^p|_{C_p(L)} = z_L^p - a^p|_{C_p(L)} = z_L^p$   
pois  $a^p$  é uma cocadeia relativa.

### B I B L I O G R A F I A

- [Bo] V.G. Boltyanskii - American Math. Soc. Translations, vol. 7, 2ª série, 1957.
- [Ei] S. Eilenberg - Cohomology and Continuous Mappings. Annals of Math., vol. 41 (1940) pgs: 231-251.
- [Hu] S.T. Hu - Homotopy theory (Academic Press, 1959).
- [St] N. Steenrod - The topology of fibre bundles. (Princeton University Press, 1951).

ÍNDICE ANALÍTICO

A - Adequado, subcomplexo	72
Aplicação induzida	81 - 115
Aplicação permitida	78 - 83
Aplicação simplicial	76
Aproximação simplicial	79
B - Bordo	67
Bordo relativo	69
C - Cadeia	69
Célula poliédrica convexa	51
Célula poliédrica orientada	53
Ciclo	67
Ciclo relativo	69
Classes de homotopia	3
Cobordo	82
Cocadeia	82
Cocadeia de deformação	101
Cocadeia diferença	95
Cocadeia de obstrução	94
Cociclo	82
Cociclo de obstrução	93 - 94
Complexos celulares poliédricos	55
Complexo de cadeias	68
Cone	42
Construções geométricas	15
Corpos convexos	50
D - Diferença primária	109
E - Espaços afins	49
Espaços n-simples	29
F - Figuras fechadas	62
Função concentrada	16

G - Grau de Brouwer	39
Grupo de cohomologia	82
Grupo de cohomologia relativa	83
Grupo fundamental	6
Grupo de homologia	67
Grupo de Homologia relativa	69
Grupo de homomorfismos	88
Grupo de homotopia	17 - 30
Grupos, noções	84
H - Homologia (Idéias geométricas)	58
Homologia relativa (Idéia geométrica)	66
Homomorfismo dual	90
Homomorfismo induzido por aplicações contínuas	37
Homotopia	2
I - Invariança topológica da diferença primária	110
Invariança topológica dos grupos de homotopia	37
Invariança topológica da obstrução primária	106
L - Lema da construção	43
Lema da fronteira	43
Lema da soma	45
M - Mudança do ponto base	22
N - Números de incidência	56
O - Obstrução à contração	114
Obstrução primária	104
Operação de $\Pi_1$ sobre $\Pi_n$	22
Operador bordo	67
Operador cobordo	82
Orientação	53
P - Plano projetivo	62
Ponto base	22
Produto cartesiano de grupos	86

R - r-esqueleto	55
Retrato	105
S - Sequências exatas	71
Sequência exata de homologia	70
Sequência exata de cohomologia	116
Simplexo	52
Soma direta de grupos	86
sub-complexos	55
Sub-divisão normal	56
Suporte de uma célula	51
T - Tipo de homotopia	2

Í N D I C E

Prefácio	
Introdução	
Capítulo A - Grupos de Homotopia	1
§ 1 - Homotopia. Tipo de Homotopia	2
§ 2 - Grupo fundamental	6
§ 3 - Construções geométricas	15
§ 4 - Grupos de homotopia	17
§ 5 - Mudança do ponto base. Operação de $\pi_1$ sobre $\pi_n$	22
§ 6 - Definições alternativas dos grupos de homotopia	30
§ 7 - Homomorfismo induzido por uma aplicação contínua. Invariança topológica dos grupos de homotopia	37
§ 8 - Grau de Brouwer	39
§ 9 - Alguns lemas	42
Nota -	47
Bibliografia	48
Capítulo B - Homologia e Cohomologia dos Complexos Celulares	
	49
§ 1 - Espaços afins	49
§ 2 - Células poliédricas convexas	51
§ 3 - Célula poliédrica orientada	53
§ 4 - Complexos celulares poliédricos	55
§ 5 - Números de incidência	56
§ 6 - Idéias geométricas da homologia	58
§ 7 - Grupos de Homologia de um C.C.P.	67
§ 8 - Teorema da invariança	71
§ 9 - Idéias geométricas de aproximação simplicial e de aplicação induzida	76
§10 - Grupos de cohomologia	82
§11 - Algumas noções da teoria dos grupos	84
Bibliografia -	92



Capítulo C - Teoria da obstrução	93
§ 1 - O cociclo de obstrução	93
§ 2 - A cocadeia diferença	95
§ 3 - Primeiras conclusões	100
§ 4 - A cocadeia de deformação	101
§ 5 - Obstrução primária	104
§ 6 - A diferença primária	109
§ 7 - Teorema de extensão e classificação	111
§ 8 - Aplicações induzidas em cohomologia. Sequência exata de cohomologia.	115
Bibliografia -	118
Índice Analítico -	119

