EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

WALDYR M. OLIVA

INTRODUÇÃO

Os primeiros seis parágrafos do presente curso constituem tópicos essenciais de um primeiro estudo da teoria clássica das equações diferenciais ordinárias. Procuramos nos parágrafos 2 e 4 simplificar as hipóteses dos teoremas fundamentais mas observamos que o teorema de existência e unicidade de soluções, por exemplo, poderia ser provado em condições mais amplas. Tudo foi apresentado da maneira mais direta possível evitando formulações gerais que poderiam tirar a visão de conjunto dos leitores.

Os últimos quatro parágrafos visaram de modo incisivo chamar a atenção dos estudantes para aspectos qualitativos da teoria, servindo como uma primeira motivação para aquelas que mais tarde viessem se interessar pela teoria dos sistemas dinâmicos. Os parágrafos 7 e 8 englobam um estudo detalhado sôbre a estabilidade local no caso linear, isto é, com perturbações também lineares e o Teorema 12 prova que um sistema linear homogêneo é localmente estruturalmente estável se, e sòmente se, a origem é um pon to crítico hiperbólico.

No parágrafo 9 apresentamos, sem prova, um resumo de alguns resultados para o caso não linear que constituem uma generalização natural dos correspondentes lineares.

Sem muito formalismo fomos dando alguns exemplos que mostraram claramente a existência de campos de vetores autônomos em variedades e ficou observado, por exemplo, que quando as mesmas são compactas tôdas as trajetórias ficam definidas de $-\infty$ a $+\infty$.

Finalmente o último parágrafo conclue o curso com a prova dos teoremas de Poincaré-Bendixon para a esfera S^2.

O assunto constante dêste curso constitue parte de um programa que desenvolvemos no primeiro semestre dêste ano de 1971 no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Queremos deixar aqui expresso nosso agradecimento à Comissão Organizadora do 8º Colóquio Brasileiro de Matemática pela confiança depositada, atribuindo-nos a ministração de tal curso. Aos colegas J. Palis e J. Sottomayor somos também muito gratos pelas discussões e sugestões sôbre o texto.

São Paulo, 30 de junho de 1971

Waldyr Muniz Oliva

ÍNDICE

§1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM

Seja A um subconjunto aberto, não vazio, do espaço euclideano R^{n+1} e $f:A \to R^n$, $n \geq 1$, uma função definida e contínua em A assumindo valores em R^n. Dada uma função $x = \varphi(t)$ com valores em R^n, definida num intervalo aberto I da reta R e de classe C^1 nesse intervalo, indica-se por $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$ a derivada de $\varphi(t)$, $t \in I$. Se estiver verificada a condição

$$\dot{\varphi}(t) = f(t,\varphi(t)) \quad \text{para todo} \quad t \in I, \tag{1}$$

$\varphi(t)$ denominar-se-á uma solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{2}$$

Se $n > 1$, (1) e (2) constituem, na realidade, um sistema de equações diferenciais ordinárias. De fato, a função f define naturalmente a seqüência $f = (f^1,f^2,\ldots,f^n)$ de funções reais e contínuas definidas em A:

$$f^i:A \to R, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

enquanto que $\varphi(t)$ define $(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))$, $t \in I$. Como conseqüência, as condições (1) e (2) transformam-se respectivamente em (1)' e (2)':

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(t,\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t)),\ i=1,2,\ldots,n,\ \ t\in I, \qquad (1)'$$

e

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (2)'$$

Freqüentemente consideram-se soluções $x = \varphi(t)$, de (2), definidas em intervalos fechados em um ou ambos os extremos. Nestes casos, subentende-se a condição (1) verificada nos extremos fechados, tomando-se derivadas à esquerda ou à direita, conforme o caso.

O leitor poderá fàcilmente formalizar o conceito de solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem superior simbòlicamente representado por

$$x^{(p)} = F(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(p-1)}) \qquad (3)$$

em que $x^{(j)}$ representa a derivada de ordem j da função x, $j=1,2,\ldots,p$, e F é uma função de p variáveis reais.

No presente curso, salvo menção em contrário, estaremos trabalhando com equações ou sistemas de equações diferenciais ordinárias de <u>1ª ordem</u>, ou seja, equações do tipo (2). Encontram-se também na literatura equações ou sistemas de equações diferenciais ordinárias sob a forma implícita:

$$G(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(p)}) = 0. \qquad (4)$$

Para mais detalhes consultar, por exemplo [1] cap. 1.

Os sistemas do tipo (2), ao contrário dos do tipo (4), são muitas vêzes denominados sistemas na forma normal.

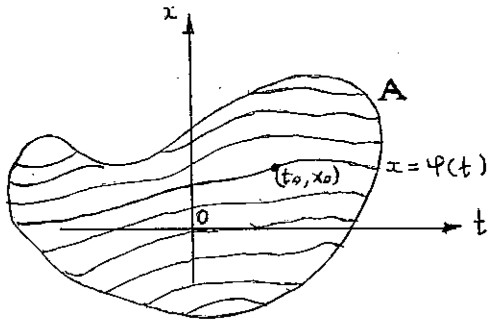
No presente curso, não estudaremos sistemas sob a forma implícita (4) e, portanto, por simplicidade não usaremos o qualificativo <u>normal</u> para os sistemas da forma (2).

<u>Observações relativas à condição (1)</u>:

É óbvio que, se $\varphi(t)$ é solução de (2), isto é, se $\varphi(t)$ satisfaz (1), tem-se necessàriamente, que o par $(t,\varphi(t))$ pertence ao conjunto aberto A, para todo $t \in I$.

O caso $n=1$, por exemplo, permite representar no plano (t,x) os gráficos das soluções $x = \varphi(t)$.

No caso em que a função f, que comparece na equação $\dot{x} = f(t,x)$, satisfaz uma conveniente condição suplementar, prova-se que (ver Corolário 1, §3) a cada ponto $(t_o,x_o) \in A$ corresponde uma única solução $x = \varphi(t)$ de (2) tal que $\varphi(t_o) = x_o$ e, conseqüentemente, o conjunto aberto A será a reunião disjunta dos gráficos das soluções da equação considerada (ver figura 1).



Enunciado de um teorema de existência e unicidade e alguns exemplos.

TEOREMA 1 - Seja $\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, (2)'

um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Se as funções $f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, da seqüência $f = (f^1,\ldots,f^n)$, além de contínuas em A, possuirem tôdas as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, também contínuas em A, tem-se:

i) Para cada ponto $(t_o,x_o) \in A$ existe em correspondência uma solução $x = \varphi(t)$ do sistema (2)' tal que $\varphi(t_o) = x_o$.

ii) Se duas soluções $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ do sistema (2)' coincidirem para um valor $t = t_o$, isto é, $\varphi(t_o) = \psi(t_o)$, então elas coincidirão idênticamente para todos os valores de t em que ambas estiverem definidas.

A prova dêsse teorema será elaborada no próximo parágrafo.

O enunciado é aqui apresentado afim de que se possa elaborar alguns exemplos ilustrativos.

O par (t_o, x_o) é comumente designado por <u>condições iniciais</u> para determinação unívoca da solução $\varphi(t)$ que satisfaz $\varphi(t_o) = x_o$.

EXEMPLO 1 - Considere-se a equação diferencial

$$\dot{x} = \alpha x \tag{5}$$

onde α é um número real. Neste caso a função $f(t,x) = \alpha . x$ está definida em R^2 e assume valores reais. Em realidade ela não depende da variável t; a equação (5) é por isso mesmo denominada <u>autônoma</u> ou <u>independente do tempo</u>. O Teorema 1 é aplicável para a equação (5) pois $f(t,x) = \alpha . x$ e $\frac{df}{dx} = \alpha$ são contínuas em R^2.

Por outro lado, a função $\varphi(t) = C\, e^{\alpha t}$ definida em R, é solução de (5) pois

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha\, C\, e^{\alpha t} = \alpha\varphi(t) \quad \text{para todo} \quad t \in R .$$

Dado $(t_o, x_o) \in R^2$, se impuzemos a condição $\varphi(t_o) = x_o$, teremos: $\varphi(t_o) = C\, e^{\alpha . t_o} = x_o$ que determina $C = e^{-\alpha t_o} . x_o$.

Pelo Teorema 1, a função $\varphi(t) = e^{-\alpha t_o} . x_o . e^{\alpha t} =$

$= e^{\alpha(t-t_o)} \cdot x_o$ é a única solução da equação (5) definida em tôda a reta e que satisfaz a condição $\varphi(t_o) = x_o$.

Nos cursos de cálculo, são freqüentemente apresentados processos formais para a obtenção da solução $\varphi(t) = C\, e^{\alpha t}$.

Não entraremos nestes detalhes de técnica de integração no presente curso.

EXEMPLO 2 - A equação diferencial

$$\dot{x} = h(t), \quad a < t < b \,, \tag{6}$$

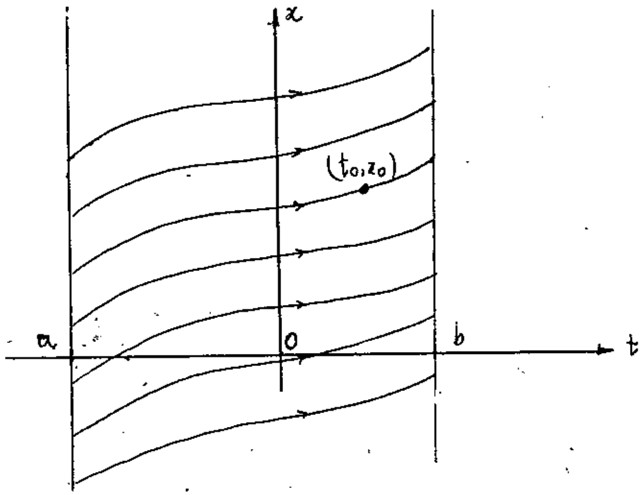
difere da equação (5) no sentido de que a função real $f(t,x) = h(t)$, suposta contínua no intervalo $a < t < b$, não depende da variável x. Neste caso estão também trivialmente verificadas as hipóteses do Teorema 1, A sendo o conjunto aberto do plano definido por

$$A = \{(t,x) \in R^2 \,|\, a < t < b\}.$$

Trata-se de uma faixa de plano (t,x) compreendida entre as retas de equações $t = a$ e $t = b$, paralelas ao eixo dos x.

Na figura 2 está feito um esbôço dos gráficos das soluções da equação (6); tais soluções podem ser obtidas através da integral

$$x = \varphi(t) = c + \int_m^t h(\tau)\,d\tau, \quad a < t,m < b.$$



De fato, considerado o ponto $(t_0, x_0) \in A$, se impuzermos a condição $\varphi(t_0) = x_0$ podemos escrever

$$\varphi(t_0) = C + \int_m^{t_0} h(\tau)d\tau = x_0$$

ou seja $C = x_0 + \int_{t_0}^{m} h(\tau)d\tau$ e, finalmente, chega-se a função

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau ,$$

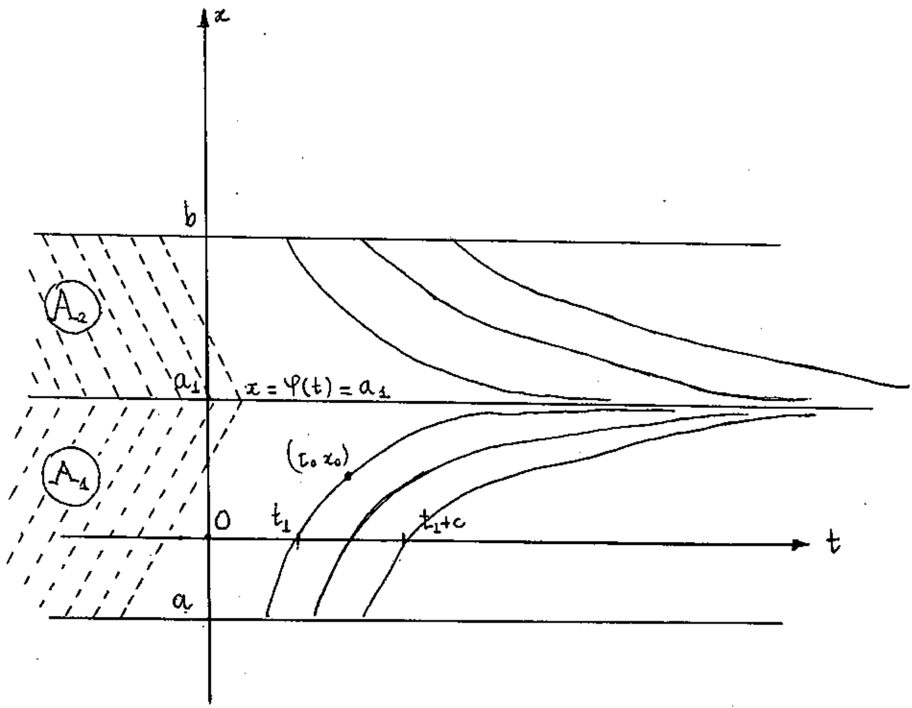
que é, evidentemente, solução de (6) (é só substituir na equação e constatar) e satisfaz à condição $\varphi(t_0) = x_0$. É fácil notar que neste Exemplo 2 os gráficos das soluções são obtidos uns de outros por translações paralelas ao eixo dos x.

EXEMPLO 3 - Uma generalização do Exemplo 1 é a equação diferencial ordinária autônoma:

$$\dot{x} = g(x) \tag{7}$$

em que $f(t,x) = g(x)$ é de classe C^1 num intervalo aberto $a < x < b$.

Claro está que A é uma faixa limitada por retas paralelas ao eixo dos t:



Se um ponto a_1 do intervalo $a < x < b$ anula a função $g(x)$, isto é, se $g(a_1) = 0$, a_1 é comumente denominado <u>ponto de equilíbrio</u>, ou <u>ponto crítico</u> ou ainda <u>ponto singular</u> da equação diferencial (7). A generalização desta idéia para sistemas de equações diferenciais ordinárias constitue-se num dos tópicos de relevante importância dentro dêste curso; voltaremos adiante à consideração de tal conceito.

Sendo $g(a_1) = 0$, é óbvio que a função constante

$$x = \varphi(t) = a_1, \quad t \in R,$$

é solução da equação diferencial (7). O gráfico dessa solução é uma reta paralela ao eixo dos t. (Fig. 3).

Se $g(x)$ não se anula em nenhum outro ponto, está claro que $g(x)$ manter-se-á com sinal constante nas faixas abertas

$$A_1 = \{(t,x) | a < x < a_1\} \quad e \quad A_2 = \{(t,x) | a_1 < x < b\}.$$

Sem perda de generalidade, faremos a hipótese: $g(x) > 0$ em A_1 e $g(x) < 0$ em A_2.

Sendo $x = \varphi(t)$ uma solução de (7), definida num intervalo I, $t_1 < t < t_2$, tem-se

$$\dot{\varphi}(t) = g(\varphi(t)), \quad t \in I.$$

Se $\varphi(t_o) = x_o$ e $(t_o, x_o) \in A_1$ tem-se $g(\varphi(t_o)) =$

$= g(x_o) > 0$ donde $\dot{\varphi}(t) > 0$ em I, isto é, $\varphi(t)$ é monotônica crescente em I. (Se, ao contrário, $(t_o,x_o) \in A_2$, $\varphi(t)$ será monotônica decrescente no intervalo aberto I).

Sendo o sistema (7) autônomo, a função $x = \varphi(t-c)$, c real, definida em $t_1 + c < t < t_2 + c$, é também solução (7), cujo gráfico no plano (t,x) se obtém do gráfico de $\varphi(t)$ por translação (de valor c) paralelamente ao eixo dos t; de fato:

$$\dot{\varphi}(t-c) = g(\varphi(t-c)), \quad t_1 + c < t < t_2 + c \ .$$

Uma última observação neste exemplo é a seguinte: a solução $\varphi(t)$, $\varphi(t_o) = x_o$, $(t_o,x_o) \in A_1$, pode ser continuada de modo a obter-se $t_2 = +\infty$.

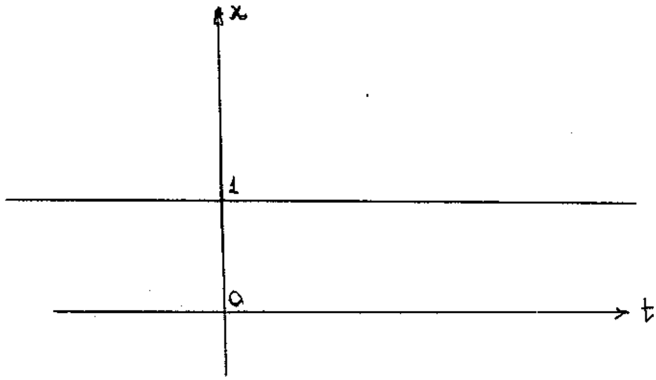
EXEMPLO 4 - A equação diferencial

$$\dot{x} = t.(x-1) \tag{8}$$

é um caso particular das chamadas equações diferenciais de variáveis separadas da forma $\dot{x} = h(t).g(x)$, (ver [1]).

A equação (8) está também nas condições do Teorema 1.

A função $x = \varphi(t) = 1$, $t \in R$, é solução de (8) o que se constata diretamente. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo dos t (figura 4).



Integrando formalmente obteremos

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int t\ d\ t$$

que fornece $x-1 = c \cdot e^{(t^2/2)}$ ou $x = \varphi(t) = 1 + c \cdot e^{(t^2/2)}$ que se verifica diretamente ser solução de (8).

Se impuzermos a condição $\varphi(t_o) = x_o$ teremos

$$x_o = \varphi(t_o) + 1 + c \cdot e^{(t_o^2/2)} \qquad c = (x_o - 1)e^{(-t_o^2/2)}$$

e finalmente $\varphi(t) = 1 + (x_o - 1)e^{(t^2 - t_o^2)/2}$; o teorema garante que se trata da solução de (8) satisfazendo $\varphi(t_o) = x_o$ e definida em tôda a reta.

EXEMPLO 5 - A equação diferencial ordinária autônoma de 1ª ordem

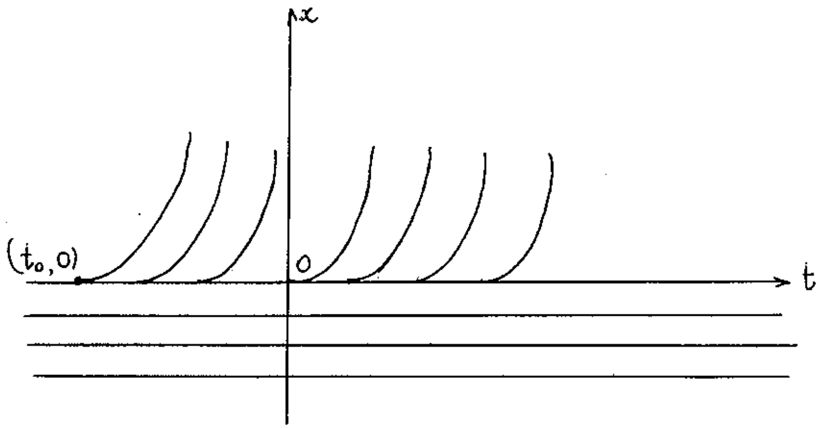
$$\dot{x} = f(t,x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{para} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

não está nas condições do Teorema 1 pois $f(t,x)$ não é derivável relativamente à x no ponto $x = 0$.

A função $x = \varphi(t) = 0$, $t \in R$ é solução de (9). Também é solução a função

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-c)^2}{4} & \text{para } t \geq c \\ 0 & \text{para } t < c \end{cases} .$$

A figura 5 mostra os gráficos das soluções de (9);



abaixo do eixo dos t as soluções têm gráficos paralelos ao eixo dos t; acima do eixo dos t os gráficos são semi-parábolas.

Seja (t_o, x_o) um ponto do eixo dos t, isto é, $x_o = 0$.

As funções $x = \varphi(t) = 0$ e $x = \varphi(t) = \dfrac{(t-t_o)^2}{4}$, $t \geq t_o$, são soluções de (9) e ambas satisfazem à condição $\varphi(t_o) = x_o$.

Trata-se, como se vê, de um exemplo para o qual não valem nem as hipóteses e nem as conclusões do Teorema 1 quanto à unicidade de solução.

EXEMPLO 6 - Seja

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + y = 0 \\ \ddot{y} + \dot{y} + \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

um sistema de duas equações diferenciais ordinárias em que comparecem derivadas primeiras e segundas.

Para podermos transformar tal sistema em um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem sob a forma normal, introduzem-se novas variáveis u e v pelas relações

$$\begin{cases} u = \dot{x} \\ v = \dot{y} \end{cases} \tag{11}$$

e define-se (12) que é um sistema de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{u} = -u - y \\ \dot{v} = -v - u \end{cases} \tag{12}$$

Pelo Teorema 1, dados $(t_o,x_o,y_o,u_o,v_o) \in R^5$, existe em correspondência uma única solução de (12) definida nas vizinhanças de t_o, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, $v=v(t)$, tal que $x(t_o) = x_o$, $y(t_o) = y_o$, $u(t_o) = u_o$;

$v(t_o) = v_o$.

Tôda solução do sistema (10) determina, usadas as relações (11), uma solução de (12); reciprocamente, tôda solução de (12) é uma quádrupla de funções em que as duas primeiras constituem uma solução de (10). Portanto o Teorema 1 mostra que dada a seqüência $(t_o, x_o, y_o, u_o, v_o)$ de R^5, existe em correspondência uma única solução do sistema (10), $(x = x(t),\ y = y(t))$, definida nas vizinhanças de t_o, e tal que

$$x(t_o) = x_o \quad , \quad y(t_o) = y_o$$
$$\dot{x}(t_o) = u_o \quad , \quad \dot{y}(t_o) = v_o$$

Grande número de problemas de determinação de movimentos na Mecânica Newtoniana recai em sistemas de equações diferenciais ordinárias em que comparecem derivadas até a 2ª ordem, como no caso do tipo (10); a aplicação do Teorema 1, nestes casos, corresponde a dizer que um movimento fica determinado quando se fixam: o instante inicial t_o, a posição inicial (x_o, y_o) e a velocidade inicial (u_o, v_o).

§2 - TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES LOCAIS

Seja $|\alpha|$ o valor absoluto do número real α e $\|y\|$, $y = (y^1,\ldots,y^n)$, a <u>norma</u> de y, ou seja, o máximo dos números $|y^i|$, $i=1,2,\ldots,n$. É imediato que, se $y = (y^1,\ldots,y^n)$ e $z = (z^1,\ldots,z^n)$ são dois elementos de R^n, tem-se

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Propriedade análoga vale para uma soma finita de elementos de R^n.

Voltemos ao sistema (2) do §1, $\dot{x} = f(t,x)$, de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, em que $f:A \to R^n$ é uma função definida e contínua num aberto não vazio A de R^{n+1}.

Por <u>vizinhança cúbica</u> (a,b) de (t_o,x_o) entendemos o produto cartesiano de duas bolas fechadas, uma de centro t_o e raio a e outra de centro x_o e raio b, isto é, é o conjunto (fechado) dos pontos (t,x) de R^{n+1} tais que

$$|t-t_o| \leq a \quad \text{e} \quad \|x-x_o\| \leq b.$$

Seja $\varphi(t) = (\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))$ uma função contínua (isto é, cada $\varphi^i(t)$ é contínua, $i=1,2,\ldots,n$) definida num intervalo $r_1 < t < r_2$ com valores em R^n. Dados t_o e t neste intervalo, define-se $h(t) = \int_{t_o}^{t} \varphi(\tau)d\tau$ do seguinte modo:

$$h(t) = (h^1(t),\dots,h^n(t)),\ h^i(t) = \int_{t_o}^{t} \varphi^i(\tau)d\tau,\ i=1,2,\dots,n$$

PROPOSIÇÃO 1 - Se $\varphi(t) = (\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t))$ é contínua em $r_1 < t < r_2$ então

$$\left\| \int_{t_o}^{t} \varphi(\tau)d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_o}^{t} \|\varphi(\tau)\| d\tau \right|,\ r_1 < t_o, t < r_2 .$$

Prova:

$$\left\| \int_{t_o}^{t} \varphi(\tau)d\tau \right\| = \left\| \left(\int_{t_o}^{t} \varphi^1(\tau)d\tau \right),\dots,\left(\int_{t_o}^{t} \varphi^n(\tau)d\tau \right) \right\| = \max$$

$$\left\{ \left| \int_{t_o}^{t} \varphi^i(\tau)d\tau \right| ; i=1,2,\dots,n \right\} \leq \max\left\{ \left| \int_{t_o}^{t} |\varphi^i(\tau)| d\tau \right| ; i=1,2,\dots,n \right\} \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_o}^{t} \|\varphi(\tau)\| d\tau \right| .$$

Um segundo resultado que usaremos no presente trabalho é o seguinte:

PROPOSIÇÃO 2 - Se $f = (f^1,\dots,f^n): A \to R^n$, A aberto não vazio de R^{n+1}, fôr contínua em A e admitir contínuas em A as n^2 derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, então dado $(t_o,x_o) \in A$, existem uma constante $K > 0$ e uma vizinhança cúbica (a,b) de (t_o,x_o) tais que

$$\|f(t,x) - f(t,x^*)\| \leq K\|x-x^*\|, \tag{13}$$

para todo (t,x) e (t,x^*) na vizinhança cúbica.

<u>Prova</u>: De fato, fixada uma vizinhança cúbica (a,b) de $(t_o,x_o) \in A$, contida em A, seja $\tilde{K} > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x)\right| \leq \tilde{K} \text{ nessa vizinhança.}$$

Fixado t em $|t-t_o| \leq a$, temos:

$$\|f(t,x)-f(t,x^*)\| = \max\{|f^i(t,x)-f^i(t,x^*)|; i=1,2,\ldots,n\}.$$

Se i_o é um índice entre 1 e n e se $y = x + s(x^*-x)$, $0 \leq s \leq 1$, os pontos (t,y) estarão na vizinhança cúbica (a,b); definimos $g(s) = f^{i_o}(t,y) = f^{i_o}(t,x+s(x^*-x))$; por outro lado $g(1)-g(0) = g'(\theta)$, $0 < \theta < 1$, ou

$$f^{i_o}(t,x^*) - f^{i_o}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^{i_o}}{\partial x^j}(t,x+\theta(x^*-x)).(x^{*j}-x^j)$$

donde

$$|f^{i_o}(t,x^*)-f^{i_o}(t,x)| \leq \tilde{K}.\sum_{j=1}^{n}|x^{*j}-x^j| \leq n\tilde{K}\|x^*-x\| = K\|x^*-x\|.$$

DEFINIÇÃO 1 - Uma função $f:A \to R^n$, A aberto não vazio de R^{n+1}, diz-se localmente lipchitziana em A relativamente à x, se dado $(t_o,x_o) \in A$ existem uma constante $K > 0$ e uma vizinhança cúbica (a,b) de

(t_o,x_o) tais que vale (13):

$$\|f(t,x)-f(t,x^*)\| \leq K\|x-x^*\|$$

para todo (t,x) e (t,x^*) na vizinhança cúbica, isto é, quaisquer que sejam t,x,x^*, satisfazendo

$$|t-t_o| \leq a, \quad \|x-x_o\| \leq b \text{ e } \|x^*-x_o\| \leq b .$$

Com essa definição pode-se re-enunciar a Proposição 1 do seguinte modo: "Se $f = (f^1,\ldots,f^n):A \to R^n$, A aberto não vazio de R^{n+1}, fôr contínua em A e admitir contínuas em A as n^2 derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, então $f(t,x)$ é localmente lipchitziana em A relativamente à x ".

TEOREMA 1 - Seja $\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, (2)'

um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Se as funções $f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, além de contínuas no aberto não vazio A de R^{n+1}, possuirem tôdas as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, também contínuas em A, tem-se:

i) Para cada $(t_o,x_o) \in A$ existe em correspondência uma solução $x = \varphi(t)$ do sistema (2)' tal que $\varphi(t_o) = x_o$.

ii) Se duas soluções $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ do sistema (2)' coincidirem para um valor $t = t_o$, isto é,

$\varphi(t_o) = \psi(t_o)$, então elas coincidirão idênticamente para todos os valores de t em que ambas estiverem definidas.

Prova: Pela Proposição 2, dado $(t_o,x_o) \in A$ existem $K > 0$ e uma vizinhança cúbica (a,b) de (t_o,x_o) contida em A tais que para $|t-t_o| \leq a$, $\|x-x_o\| \leq b$ e $\|x^*-x_o\| \leq b$ vale a desigualdade (13):

$$\|f(t,x)-f(t,x^*)\| \leq K\|x-x^*\| .$$

Como $f(t,x)$ é contínua em A, podemos garantir que, nessa vizinhança cúbica (a,b) de (t_o,x_o), contida em A, tem-se

$$\|f(t,x)\| \leq M, \quad M > 0 .$$

Seja a^* um número real tal que

$$0 < a^* < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}) .$$

Construamos a seguinte seqüência de funções:

$$\varphi_o(t) = x_o$$

$$\varphi_1(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_o(\tau))d\tau, \quad |t-t_o| \leq a^* ,$$

$$\varphi_2(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_1(\tau))d\tau, \quad |t-t_o| \leq a^* ,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_{n-1}(\tau))d\tau, \quad |t-t_o| \leq a^*, \text{ etc.}$$

Observemos por indução que tôdas as funções $\varphi_i(t)$ da se qüência $(\varphi_o(t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),\ldots)$ são contínuas em $|t-t_o| \leq a^*$ e que seus gráficos estão contidos na vizinhança cúbica (a^*,b) de (t_o,x_o):

$$\|\varphi_i(t)-x_o\| = \left\|\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau))d\tau\right\| \leq \left|\int_{t_o}^{t} \|f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau))\|d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_o}^{t} Md\tau\right| \leq M|t-t_o| \leq Ma^* < b, \text{ isto é, } \|\varphi_i(t)-x_o\|<b.$$

Por outro lado para todo $i \geq 1$ temos:

$$\|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\| = \left\|\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_i(\tau))d\tau - \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau))d\tau\right\| =$$

$$= \left\|\int_{t_o}^{t}[f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau)]d\tau\right\| \leq \left|\int_{t_o}^{t}\|f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi_{i-1}(\tau))\|d\tau\right|.$$

Como tôdas as funções da seqüência têm seus gráficos contidos na vizinhança cúbica (a^*,b) podemos utilizar a desigualdade (13) e portanto:

$$\|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\| \leq \left|\int_{t_o}^{t} K\|\varphi_i(\tau)-\varphi_{i-1}(\tau)\|d\tau\right|, \quad i=(1,2,3,\ldots);$$

para $i=1$:

$$\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\| \leq \left|\int_{t_o}^{t} K\|\varphi_1(\tau)-x_o\|d\tau\right| \leq \left|\int_{t_o}^{t} Kb\, d\tau\right| \leq b(Ka^*);$$

para $i=2$:

$$\|\varphi_3(t)-\varphi_2(t)\| \leq \left|\int_{t_o}^{t} K\|\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)\|d\tau\right| \leq b(Ka^*)\cdot(Ka^*) =$$

$$= b(Ka^*)^2;$$

e para todo i, $\|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\| \leq b(Ka^*)^i$, $i=(1,2,\ldots.)$.

Como a série numérica de têrmo geral $(Ka^*)^i$ é convergente, já que $Ka^* < 1$, temos pelo critério de Weirstrass que a seqüência $\varphi_o(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_i(t), \ldots$ converge uniformemente para a função contínua $\varphi(t)$ definida em $|t-t_o| \leq a^*$ satisfazendo $\|\varphi(t)-x_o\| \leq b$.

Por outro lado observa-se que a seqüência de funções

$$\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_n(\tau))d\tau$$

converge para $\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$; de fato

$$\left\|\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_n(\tau))d\tau - \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right\| = \left\|\int_{t_o}^{t} [f(\tau,\varphi_n(\tau)) - f(\tau,\varphi(\tau))]d\tau\right\| \leq$$

$\leq \left|\int_{t_o}^{t} K\|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)\|d\tau\right| \leq Ka^*e$, já que dado $e > 0$ e arbitrário, a partir de um certo valor N_o de n tem-se $\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\| < e$, $|t-t_o| \leq a^*$. Pela unicidade do limite tem-se $\varphi(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$ e portanto

$$\varphi(t_o) = x_o \quad \text{e} \quad \dot{\varphi}(t) = f(t,\varphi(t)), \ |t-t_o| \leq a^* .$$

Isto prova a parte i) do enunciado do Teorema 1.

Passemos agora à prova da unicidade, isto é, a parte ii) do Teorema 1.

Se $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ são duas soluções do sistema $(2)'$ satisfazendo $\varphi(t_o) = \psi(t_o) = x_o$, denotemos por J o intervalo aberto $r_1 < t < r_2$, conjunto de todos os valores de t para os quais $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ estão definidas. Chamemos de N o subconjunto dos t para os quais se tem $\varphi(t) = \psi(t)$; é claro que $t_o \in N$, isto é, N não é vazio. Mostremos que N é aberto e fechado em J. Se uma seqüência (t_ν) de elementos de N converge para $m \in J$, tem-se $\varphi(t_\nu) = \psi(t_\nu)$ e como φ e ψ são contínuas podemos passar ao limite esta última igualdade que fornece $\varphi(m) = \psi(m)$ donde $m \in N$, isto é, N é fechado. Seja agora $t_1 \in N$, isto é, $\varphi(t_1) = \psi(t_1) = x_1$. Procedendo com o par (t_1,x_1) como se fêz com o par (t_o,x_o) na primeira parte do Teorema 1, determina-se uma vizinhança cúbica (a^*,b) para o qual seja válida a relação (13) e $Ka^* < 1$.

Diminuir-se-á a^* se fôr necessário, para que se tenha pela continuidade de $\varphi(t)$ e $\psi(t)$, $\|\varphi(t)\| \leq b$, $\|\psi(t)\| \leq b$ e $\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq b$. Como $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são soluções temos:

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau \quad e \quad \psi(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(\tau,\psi(\tau))d\tau$$

e para $|t-t_1| \leq a^*$ chega-se à

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\| = \left\| \int_{t_1}^{t} [f(\tau,\varphi(\tau))-f(\tau,\psi(\tau))]d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \left| K\int_{t_1}^{t} \|\varphi(\tau)-\psi(\tau)\| d\tau \right|$$

e portanto:

$\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq b(Ka^*)$ que levada novamente na relação anterior fornece $\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq b(Ka^*)^2$ e assim sucessivamente chega-se à $\|\varphi(t)-\psi(t)\| \leq b(Ka^*)^n$, para todo $n\geq 1$; como $(Ka^*) < 1$ conclue-se que $\varphi(t) = \psi(t)$ para $|t-t_1| \leq a^*$, logo existe uma vizinhança de t_1 onde $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ coincidem, isto é, N é aberto. Sendo N não vazio, aberto e fechado em J, é um simples argumento provar que $N = J$ o que conclue a prova do Teorema 1.

OBSERVAÇÕES:

1) O Teorema 1 ainda é válido se supuzermos as funções $f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$ contínuas em A e localmente Lipchi lipchitzianas em A relativamente à x.

É suficiente olhar com cuidado a prova do teorema.

2) A equação diferencial considerada no Exemplo 5, §1, $\dot{x} = f(x)$, em que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{para } x\geq 0 \\ 0 & \text{para } x<0 \end{cases}$, não está nas hipóteses do Teorema 1 e além disso $f(x)$ não é localmente lipchitziana pois nas vizinhanças de zero temos sempre $|\sqrt{x}| > x$, $x \geq 0$.

3) A equação diferencial autônoma $\dot{x} = f(x)$, $f(x) = |x|$, é tal que $f(x)$ é contínua para todo x real enquanto que não existe derivada para $x = 0$; entretanto ela é localmente lipchitziana já que

$$|f(x)-f(y)| = \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|.$$

Como conseqüência da Observação 1), para tal equação é aplicável o Teorema 1. Dadas as condições iniciais (t_o,x_o), temos dois casos a considerar: ou $x_o \geq 0$ e neste caso a solução $x(t) = x_o \exp(t-t_o)$ definida em tôda a reta satisfaz a condição $x(t_o) = x_o$; ou $x_o \leq 0$ e a solução $x(t) = x_o \exp-(t-t_o)$ satisfaz $x(t_o) = x_o$ e é definida em tôda a reta.

EXERCÍCIOS

1) Construamos a seqüência $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),\ldots,$ que comparece na prova do Teorema 1, para a equação diferencial ordinária $\dot{x} = x$, a partir das condições iniciais $(t_o,x_o) = (0,1)$:

$$\varphi_o(t) = 1,$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1+\tau)d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

O limite dessa seqüência, que converge uniformemente em todo intervalo da reta, é a função $\varphi(t) = e^t$.

2) Mesma questão para a equação diferencial ordinária $\dot{x} = 2tx$ e condições iniciais $(t_o, x_o) = (0,1)$.

Assim:

$$\varphi_o(t) = 1$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t 2\tau \, d\tau = 1 + t^2$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t 2\tau(1+\tau^2) d\tau = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$\varphi_3(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$$

Tal seqüência converge uniformemente para e^{t^2}.

§3 - PROLONGAMENTOS DE SOLUÇÕES. INTERVALOS MAXIMAIS

Se φ é uma solução do sistema de quações diferenciais ordinárias (2), definida num intervalo aberto I, dizemos que $\hat{\varphi}$ é um <u>prolongamento</u> de φ se $\hat{\varphi}$ é solução de (2) e está definida em um intervalo aberto $\hat{I}$ que contém pròpriamente I. Se uma solução φ não admite prolongamento dizemos que ela é uma <u>solução maximal</u> e seu intervalo de definição é denominado <u>intervalo maximal de existência de φ</u>.

Se $\dot{x} = f(t,x)$ é tal que $f(t,x)$ é contínua em um aberto não vazio $A \subset R^{n+1}$ e para êste sistema valem as conclusões i) e ii) do Teorema 1, para cada $(t_o,x_o) \in A$ consideremos a totalidade dos pares $(\varphi_\alpha, I_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{a}$, em que φ_α, definida no intervalo aberto I_α, é a solução de $\dot{x} = f(t,x)$, $t_o \in I_\alpha$ e $\varphi_\alpha(t_o) = x_o$. Seja

$$\hat{I} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{a}} I_\alpha$$

a reunião de todos os intervalos abertos assim considerados; trata-se evidentemente de um intervalo aberto que contém t_o, denotado por $m(t_o,x_o) < t < M(t_o,x_o)$.

Se os intervalos abertos I_α são denotados por $a_\alpha < t < b_\alpha$, é fácil ver que

$$m(t_o,x_o) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} a_\alpha \quad e \quad M(t_o,x_o) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} b_\alpha .$$

Por outro lado, dado $t \in \hat{I}$, existe $\alpha_o \in \mathcal{A}$ e uma solução definida em I_{α_o} de modo que $t \in I_{\alpha_o}$; a êste valor de $t \in \hat{I}$ associamos $\varphi_{\alpha_o}(t)$ que independe, pela unicidade, da particular solução φ_{α_o} considerada.

Isto permite definir a função $\hat{\varphi}$, no intervalo $\hat{I}$, pela relação $\hat{\varphi}(t) = \varphi_{\alpha_o}(t)$. Tal função $\hat{\varphi}$ é evidentemente uma solução de $\dot{x} = f(t,x)$, definida no intervalo aberto $\hat{I}$ e tal que $\hat{\varphi}(t_o) = x_o$. É óbvio que $(\hat{\varphi},\hat{I})$ pertence à totalidade de pares acima considerada e conseqüentemente $\hat{\varphi}$ é uma solução maximal definida no intervalo maximal $\hat{I}$.

As considerações acima são a prova do seguinte teorema:

TEOREMA 2 - Seja $\dot{x} = f(t,x)$ um sistema de equações diferenciais ordinárias em que $f: A \subseteq R^{n+1} \to R^n$ é contínua em A e valem as conclusões i) e ii) do Teorema 1. Então, a cada $(t_o,x_o) \in A$ corresponde uma única solução maximal $\hat{\varphi}$ definida num intervalo aberto $\hat{I}$, $t \in \hat{I}$ e $\hat{\varphi}(t_o) = x_o$.

OBSERVAÇÃO: Claro está que, se (t_1,x_1) pertence ao gráfico da solução $\hat{\varphi}$ construida a partir de (t_o,x_o), isto é, $\hat{\varphi}(t_1) = x_1$, então a solução maximal construida a partir de (t_1,x_1) é precisamente $\hat{\varphi}$.

O gráfico de uma solução maximal $\hat{\varphi}$ de intervalo maximal $\hat{I}$, isto é, o conjunto dos pares $(t,\hat{\varphi}(t))$ quando t varia em $\hat{I}$, chama-se a órbita associada à solução maximal $\hat{\varphi}$.

COROLÁRIO 1 - Se f é contínua em $A \subset R^{n+1}$ e para $\dot{x} = f(t,x)$ valem as conclusões i) e ii) do Teorema 1, o conjunto aberto A é a reunião (disjunta) das órbitas associadas às soluções maximais de $\dot{x} = f(t,x)$.

TEOREMA 3 - Seja $\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, um sistema de equações diferenciais ordinárias em que as $f^i: A \subset R^{n+1} \to R$ são contínuas em A e admitem as n^2 derivadas parciais $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x^1,\ldots,x^n)$ também contínuas em A. Seja ainda C um subconjunto compacto de R^{n+1}, contido em A, e $x = \varphi(t)$ uma solução maximal de $\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, com intervalo maximal $m_1 < t < m_2$. Então, se $m_2 < +\infty$, existe um número $e_2 > 0$ tal que para todo $t > m_2 - e_2$, o ponto $(t,\varphi(t))$ não pertence à C. De modo semelhante, se $m_1 > -\infty$, existe $e_1 > 0$ tal que para todo $t < m_1 + e_1$ o ponto

$(t,\varphi(t))$ não pertence à C.

<u>Prova</u>: Consideraremos sòmente o caso $m_2 < +\infty$ já que o caso $m_1 > -\infty$ é análogo. A distância ρ entre o compacto C e o fechado F complementar de A em R^{n+1} é positiva pois C não encontra F. De fato, se $\rho = 0$, como $\rho = \inf\limits_{y\in C} \{d(y,F)\}$, dado n inteiro, existe $y_n \in C$ tal que $d(y_n,F) < \frac{1}{n}$; como a seqüência (y_n) admite uma subseqüência convergente para $y_o \in C$, podemos garantir que $d(y_o,F) = 0$, isto é, y_o pertence à F e à C o que é absurdo. Seja C^* o conjunto dos pontos de R^{n+1} cuja distância à C é menor ou igual à $\frac{\rho}{2}$. É óbvio que C^* está contido em A e como C^* é compacto existem números positivos M e K tais que

$$\|f(t,x)\| \leq M \quad e \quad \left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x)\right| \leq K$$

para todo $(t,x) \in C^*$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $f(t,x) = (f^1,\ldots,f^n)$. Tôda a vizinhança cúbica $(\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2})$ e que tem centro em um ponto (t_o,x_o) de C está contida em C^*; escolhendo a^* como no Teorema 1, $0 < a^* < \min\{\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2M}, \frac{1}{K}\}$, teremos a existência de uma solução $\varphi(t)$ definida no intervalo $|t-t_o| \leq a^*$ e satisfazendo $\|\varphi(t)-x_o\| \leq \frac{\rho}{2}$, a^* não dependendo do particular ponto (t_o,x_o) tomado em C. O número e_2 procurado pode ser escolhido como $e_2 = a^*$. Se, por hipótese de absurdo, existir $t_o > (m_2-e_2) = (m_2-a^*)$

tal que $(t_o,\varphi(t_o)) \in C$, tomando êste par como condições iniciais, a solução $\varphi(t)$ estaria definida a direita de m_2 e $m_1 < t < m_2$ não seria o intervalo maximal de $\varphi(t)$. Isto conclue a prova.

COROLÁRIO 2 - Suponhamos que nas hipóteses do Teorema 3, o aberto A seja da forma $A = R\times\Delta$, Δ aberto de R^n. Sendo K um compacto de R^n contido em Δ e $x = \varphi(t)$ solução de intervalo maximal $m_1 < t < m_2$, se $m_2 < +\infty$ existe $e_2 > 0$ tal que, para todo $t > (m_2 - e_2)$, $\varphi(t)$ não pertence à K; anàlogamente, se $m_1 > -\infty$, existe $e_1 > 0$ tal que, para todo $t < (m_1 + e_1)$, o ponto $\varphi(t)$ não pertence à K.

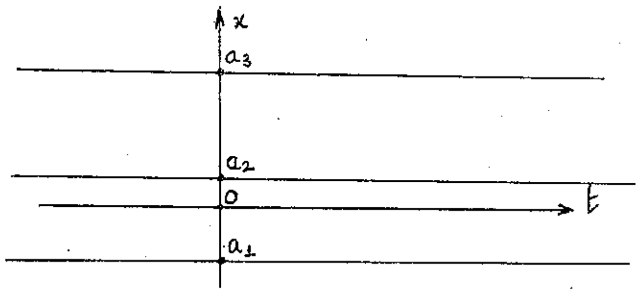
Prova: Provaremos para o caso $m_2 < +\infty$, o outro sendo análogo. Seja $m < m_2 < +\infty$ e $I = [m,m_2]$, isto é, o conjunto dos números reais t tais que $m \leq t \leq m_2$. O conjunto $C = I\times K$ é compacto e está contido em $A = R\times\Delta$ pois $K \subset \Delta$. Pelo Teorema 3 existe e_2 (e podemos supor $e_2 < (m_2 - m)$) tal que para todo $t > m_2 - e_2 > m$ tem-se $(t,\varphi(t))$ fora de $I\times K$; mas $t \in I$ logo $\varphi(t)$ está fora de K o que completa a prova.

OBSERVAÇÃO: Se o sistema (2)' fôr autônomo e as $f^i(x^1,\ldots,x^n)$ forem contínuas e com derivadas parciais contínuas em A então $A = R\times\Delta$, Δ aberto de R^n

onde as $f^i(x^1,\ldots,x^n)$ são de classe C^1 (contínuas com derivadas parciais contínuas em Δ). Neste caso valem evidentemente as conclusões do Corolário 2.

EXEMPLO 7 - Seja $$\dot{x} = \frac{1}{g(x)}, \qquad (14)$$

uma equação diferencial ordinária, autônoma, em que $g(x)$ é um polinômio de n raizes reais distintas duas a duas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. No plano (t,x) o domínio A da função $f(t,x)$ é o produto $R \times \Delta$, Δ sendo o complementar (aberto) em R dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.



Levando-se em conta que $g(x)$ tem sinal constante nos intervalos definidos por $a_1, a_2, \ldots, a_n$, estudar os intervalos maximais de tôdas as soluções da equação (14).

Consideremos agora um sistema de equações diferenciais lineares:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t) x^j + b^i(t) = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (15)$$

em que os coeficientes $a^i_j(t)$ e os têrmos independentes $b^i(t)$ são definidos e contínuos no intervalo $q_1 < t < q_2$.

TEOREMA 4 - Tôda solução do sistema (15) correspondente às condições iniciais $(t_o, x^1_o, x^2_o, \ldots, x^n_o)$, $q_1 < t_o < q_2$, tem como intervalo maximal o próprio intervalo $q_1 < t < q_2$.

<u>Prova</u>: Inicialmente convém notar que as funções $f^i(t, x^1, \ldots, x^n)$ do sistema (15) estão definidas no conjunto aberto $A = (q_1, q_2) \times R^n$, isto é, $(t, x) \in A$ se, e sòmente se, $x \in R^n$ e $q_1 < t < q_2$. Além disso as $f^i(t, x^1, \ldots, x^n)$ são òbviamente contínuas em A e admitem derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = a^i_j(t)$ contínuas em A. Ao sistema (15) é, portanto, aplicável o Teorema 1.

Mostremos agora que, fixado um intervalo fechado $r_1 \leq t \leq r_2$, contido em $q_1 < t < q_2$, isto é, $q_1 < r_1 \leq \leq t \leq r_2 < q_2$, a solução correspondente às condições iniciais $(t_o, x^1_o, \ldots, x^n_o)$ com $r_1 \leq t_o \leq r_2$ está definida em $r_1 \leq t \leq r_2$. De fato, seja $\widetilde{K}$ uma constante positiva tal que $\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right| = |a^i_j(t)| \leq \widetilde{K}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $r_1 \leq t \leq r_2$; isto é possível pois as funções $a^i_j(t)$ são contínuas no compacto $r_1 \leq t \leq r_2$. Usando o método de aproximações sucessivas visto no Teorema 1, pode-se construir a seqüência seguinte:

$$\varphi_o(t) = x_o = (x_o^1, x_o^2, \ldots, x_o^n) \;;$$

$$\varphi_1(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} (\tau, x_o)d\tau, \quad r_1 \le t_o, t \le r_2,$$

$$\varphi_2(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau, \varphi_1(\tau))d\tau, \quad r_1 \le t_o, t \le r_2,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{i+1}(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau, \varphi_i(\tau))d\tau, \quad r_1 \le t_o, t \le r_2,$$

etc.

Mas como tôdas as $\varphi_i(t)$ assim construidas são contínuas no intervalo fechado $r_1 \le t \le r_2$, em particular existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_o(t)\| \le C$$

e, portanto,

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| = \|\int_{t_o}^{t} [f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_o(\tau))]d\tau\| \le$$

$$\le \left| \int_{t_o}^{t} \|f(\tau, \varphi_1(\tau) - f(\tau, \varphi_o(\tau))\| d\tau \right| \le n\tilde{K}C|t - t_o| \;;$$

chamando $n\tilde{K} = K$ teremos a seguir

$$\|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)\| \le \left| \int_{t_o}^{t} \|f(\tau, \varphi_2(\tau)) - f(\tau, \varphi_1(\tau)\| d\tau \right| \le$$

$$\le CK^2 \left| \int_{t_o}^{t} |\tau - t_o| d\tau \right| = \frac{CK^2}{2!} |t - t_o|^2$$ e assim sucessivamente,

$$\|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| \le \frac{CK^i |t - t_o|^i}{i!}$$, e portanto:

$$\|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| \le \frac{CK^i}{i!} (r_2 - r_1)^i \; .$$

Os números $\frac{C[K.(r_2-r_1)]^i}{i!}$ formam uma série convergente donde a seqüência de funções $(\varphi_i(t))_i$ converge uniformemente para uma função contínua $\varphi(t)$ definida em $r_1 \leq t \leq r_2$. Mas a seqüência $\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi_i(\tau))d\tau$ converge uniformemente para a função $\int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$ no intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$; de fato, dado $\epsilon > 0$, existe $N_o(\epsilon)$ tal que para todo $i \geq N_o(\epsilon)$ tem-se

$$\|\varphi_i(\tau)-\varphi(\tau)\| \leq \epsilon, \quad r_1 \leq \tau \leq r_2 .$$

Portanto para $i \geq N_o(\epsilon)$ e $r_1 \leq t_o, t \leq r_2$ temos:

$$\left\|\int_{t_o}^{t}[f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))]d\tau\right\| \leq \left|\int_{t_o}^{t}\|f(\tau,\varphi_i(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))\|\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_o}^{t} K\|\varphi_i(\tau)-\varphi(\tau)\|d\tau\right| \leq Ke(r_2-r_1)$$

isto significa que

$$\varphi(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau, \quad r_1 \leq t_o, t \leq r_2 ,$$

logo $\varphi(t_o) = x_o$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t,\varphi(t))$ o que mostra que a função $\varphi(t)$ definida em $r_1 \leq t \leq r_2$ corresponde às condições iniciais (t_o,x_o) donde pelo Teorema 1 é a solução procurada do sistema (15) e a prova do Teorema 4 está completa.

EXEMPLO 8 - Um importante caso particular do sistema (15) é o sistema linear homogêneo de coeficientes constantes

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \, x^j \; .$$

O Teorema 4 garante que tôda solução dêste sistema está definida em tôda a reta.

Para obter uma representação matricial dêste último sistema indica-se por A a matriz quadrada de ordem n em que o elemento da linha i e da coluna j é precisamente a^i_j ; pode-se também indicar por x e $\dot{x}$ as matrizes colunas:

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \\ x^n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \\ \dot{x}^n \end{bmatrix}$$

O sistema linear homogêneo de coeficientes constantes pode, portanto, ser representado pela equação matricial

$$\dot{x} = A.x \quad .$$

Voltaremos a estudar êste sistema, oportunamente.

§4 - TEOREMAS DE DEPENDÊNCIA CONTÍNUA E DIFERENCIÁVEL DAS SOLUÇÕES RELATIVAMENTE A PARÂMETROS

Seja

$$\dot{x} = f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell),\ i=1,2,\ldots,n \tag{16}$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem em que os segundos membros

$$f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell),\ i=1,2,\ldots,n, \tag{17}$$

assim como suas derivadas parciais

$$\begin{aligned} &f^i_j(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell) = \\ &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell),\ i,j=1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{18}$$

são definidas e contínuas num aberto $\tilde{A}$ de $R^{n+1+\ell}$. Vetorialmente escreveremos

$$\dot{x} = f(t,x,\mu) \tag{16'}$$

onde $x = (x^1,\ldots,x^n)$, $\mu = (\mu^1,\ldots,\mu^\ell)$ e $f = (f^1,\ldots,f^n)$.

TEOREMA 5 - Se (t_o,x_o,μ_o) é um ponto do aberto $\tilde{A}$, existem números positivos a^* e ρ tais que para

$$\|\mu-\mu_o\| \leq \rho$$

a solução $x = \varphi(t,\mu)$ do sistema (16)', que satisfaz à condição inicial

$$\varphi(t_o,\mu) = x_o ,$$

é definida no intervalo $|t-t_o| \leq a^*$ e é função contínua de μ e t, para $|t-t_o| \leq a^*$ e $\|\mu-\mu_o\| \leq \rho$.

<u>Prova</u>: Para cada μ no conjunto aberto de R^ℓ, onde variam $\mu^1,\ldots,\mu^\ell$, existe pelo Teorema 1, uma única solução $x = \varphi(t,\mu)$ tal que $\varphi(t_o,\mu) = x_o$. Além disso, observando-se cuidadosamente a prova do Teorema 1, dado $(t_o,x_o,\mu_o) \in \tilde{A}$ existem números a,b,ρ que definem uma vizinhança cúbica contida em $\tilde{A}$ caracterizada pelas desigualdades

$$|t-t_o| \leq a, \quad \|x-x_o\| \leq b \quad \text{e} \quad \|\mu-\mu_o\| \leq \rho .$$

Existem $M > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\|f(t,x,\mu)-f(t,x^*,\mu)\| \leq K\|x-x^*\|$$

e

$\|f(t,x,\mu)\| \leq M$, desde que $|t-t_o| \leq a$, $\|\mu-\mu_o\| \leq b$, $\|x-x_o\| \leq b$ e $\|x^*-x_o\| \leq b$.

Escolhendo-se a^* tal que $0 < a^* < \min(a,\frac{b}{M},\frac{1}{K})$ chega-se finalmente à

$$\|\varphi_{i+1}(t,\mu)-\varphi_i(t,\mu)\| \le b(Ka^*)^i \quad i=1,2,3,\ldots$$

e, por ser $Ka^* < 1$, conclue-se que a seqüência $\varphi_1(t,\mu),\ldots,\varphi_n(t,\mu),\ldots$ converge uniformemente nas variáveis (t,μ), $|t-t_o| \le a^*$ e $\|\mu-\mu_o\| \le \rho$, para a função solução $x = \varphi(t,\mu)$, $\varphi(t_o,\mu) = x_o$, que será necessàriamente contínua nas variáveis (t,μ), o que conclue a prova.

PROPOSIÇÃO 3 (lema de Gronvvall) - Seja $u(t)$ uma função real contínua para t no intervalo $t_o \le t \le t_1$; suponhamos que $u(t)$ satisfaça a desigualdade de integral

$$u(t) \le \int_{t_o}^{t} (\alpha.u(\tau)+\beta)d\tau\ , \quad \alpha > 0,\ \beta > 0, \qquad (19)$$

para todo t no intervalo $t_o \le t \le t_1$. Então, vale a estimativa seguinte no mesmo intervalo:

$$u(t) \le \frac{\beta}{\alpha}[\ell^{\alpha(t-t_o)}-1] \qquad (20)$$

<u>Prova</u>:

Seja $v(t) = \int_{t_o}^{t} (\alpha.u(\tau) + \beta)d\tau$ o que acarreta $\dot{v}(t) = \alpha.u(t) + \beta$ ou $u(t) = \frac{1}{\alpha}[\dot{v}(t)-\beta]$.

Da desigualdade (19) segue que

$$\frac{1}{\alpha}[\dot{v}(t)-\beta] \le v(t)$$

ou equivalentemente

$$\dot{v}(t) - \alpha.v(t) \leq \beta$$

que multiplicada por $e^{-\alpha t}$ fornece:

$$\dot{v}(t).e^{-\alpha t} - v(t).\alpha e^{-\alpha t} = \frac{d}{dt}[v(t).e^{-\alpha t}] \leq \beta.e^{-\alpha t}.$$

Integrando de t_o à t e por ser $v(t_o) = 0$ tem-se

$$v(t).e^{-\alpha t} \leq \frac{\beta}{\alpha}[e^{-\alpha t_o} - e^{\alpha t}] \text{ donde a tese (20).}$$

Voltemos ao sistema (16) de equações diferenciais ordinárias em que os segundos membros (17) são contínuos no aberto $\tilde{A} \subset R^{n+1+\ell}$ assim como suas derivadas parciais (18). Fixemos (t_o,x_o) em R^{n+1} tal que existe $\mu_o \in R^\ell$ para o qual $(t_o,x_o,\mu_o) \in \tilde{A}$; seja $\tilde{A}_{(t_o,x_o)}$ o conjunto dos elementos μ de R^ℓ tais que $(t_o,x_o,\mu) \in \tilde{A}$. Já que $\tilde{A}_{(t_o,x_o)}$ é não vazio (pois $\mu_o \in \tilde{A}_{(t_o,x_o)}$) considere-se o conjunto $E_{(t_o,x_o)}$ constituido dos pares $(t,\mu) \in R^{\ell+1}$ tais que $\mu \in \tilde{A}_{(t_o,x_o)}$ e t pertence ao intervalo maximal da solução $\varphi(t,\mu)$ de (16) que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_o,\mu) = x_o$. A solução $\varphi(t,\mu)$ pode portanto ser considerada como uma função definida no conjunto $E_{(t_o,x_o)}$. Indicando por π_2 a projeção definida em $R^{n+1+\ell}$ que à terna (t,x,μ) associa o par (t,x), podemos concluir que (t_o,x_o) pertence evidentemente ao conjunto $\pi_2(\tilde{A}) \subset R^{n+1}$.

TEOREMA 6 - Suponhamos que o sistema (16) de equações diferenciais ordinárias satisfaça às condições (17) e (18) e seja (t_o,x_o) um elemento de $\pi_2(\tilde{A})$. Então $E_{(t_o,x_o)}$ é aberto em $R^{\ell+1}$ e $\varphi(t,\mu)$ é contínua em $E_{(t_o,x_o)}$.

<u>Prova</u>: Note-se inicialmente que o par (t_o,x_o) pertence ao conjunto $E_{(t_o,x_o)}$ e o Teorema 5 garante, essencialmente, que $\varphi(t,\mu)$ é contínua nas vizinhanças de (t_o,x_o) e, portanto, (t_o,x_o) é ponto interior de $E_{(t_o,x_o)}$. Para mostrar que $E_{(t_o,x_o)}$ é aberto vamos considerar um ponto genérico $(\tilde{t},\tilde{\mu})$ de $E_{(t_o,x_o)}$, isto é, $\tilde{t}$ pertence ao intervalo maximal da solução $\varphi(t,\tilde{\mu})$ caracterizada pela condição inicial $\varphi(t_o,\tilde{\mu}) = x_o$; suponhamos $\tilde{t} > t_o$ e escolhamos r_2 pertencente ao intervalo maximal de $\varphi(t,\tilde{\mu})$ tal que $t_o<\tilde{t}<r_2$ (caso $\tilde{t}<t_o$ é análogo, isto é, escolhe-se r_1 no intervalo maximal de $\varphi(t,\tilde{\mu})$ satisfazendo $r_1<\tilde{t}<t_o$). Para provar que $E_{(t_o,x_o)}$ é aberto será pois suficiente mostrar que existe uma vizinhança de $\tilde{\mu}$, $\|\mu-\tilde{\mu}\| \leq \rho$ tal que $\varphi(t,\mu)$ está definida no intervalo $t_o \leq t \leq r_2$ para todo μ nessa vizinhança. Quando t percorre o intervalo fechado $t_o \leq t \leq r_2$ o ponto $(t,\varphi(t,\tilde{\mu}),\tilde{\mu})$ descreve uma curva no conjunto aberto de $\tilde{A}$ de $R^{n+1+\ell}$. Existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que o conjunto $\tilde{B}$ dos pontos (t,x,μ) que satisfazem às desigualdades

$$t_o \leq t \leq r_2$$
$$\|x-\varphi(t,\tilde{\mu})\| \leq a$$
$$\|\mu-\tilde{\mu}\| \leq b$$

é um conjunto compacto de $R^{n+1+\ell}$, contido em $\tilde{A}$. Pode-se determinar uma constante positiva K para a qual vale a relação

$$\|f(t,x_2,\mu)-f(t,x_1,\mu)\| \leq K\|x_2-x_1\| \tag{21}$$

quaisquer que sejam (t,x_2,μ) e (t,x_1,μ) no compacto $\tilde{B}$ (ver Proposição 2). Por outro lado, face à continuidade uniforme da função $f(t,x,\mu)$ no compacto $\tilde{B}$, dado $\beta > 0$ e arbitrário, pode-se determinar $b^*(\beta) \leq b$ tal que

$$\|f(t,x,\mu)-f(t,x,\tilde{\mu})\| \leq \beta \tag{22}$$

para todo μ satisfazendo $\|\mu-\tilde{\mu}\| \leq b^*(\beta)$. Agora, tomado μ na vizinhança $\|\mu-\tilde{\mu}\| \leq b^*(\beta)$, considere-se a solução $\varphi(t,\mu)$ de (16) tal que $\varphi(t_o,\mu) = x_o$ e suponhamo-la definida para $t_o \leq t \leq t_2$, $t_2 \leq r_2$. A correspondente curva $(t,\varphi(t,\mu),\mu)$, $t_o \leq t \leq t_2$, estará contida em $\tilde{B}$, desde que se escolha β convenientemente; de fato,

$$\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\tilde{\mu}) = \int_{t_o}^{t}[f(\tau,\varphi(\tau,\mu),\mu)-f(\tau,\varphi(\tau,\tilde{\mu})\tilde{\mu}]\,d\tau, \quad t_o \leq t \leq t_2,$$

e, portanto, usando (21) e (22) chega-se à

$$\|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\tilde{\mu})\| \le \int_{t_o}^{t} \|f(\tau,\varphi(\tau,\mu),\mu)-f(\tau,\varphi(\tau,\tilde{\mu}),\mu)\|d\tau$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|f(\tau,\varphi(\tau,\tilde{\mu}),\mu)-f(\tau,\tilde{\mu}),\tilde{\mu})\|d\tau \le$$

$$\le \int_{t_o}^{t} [K\|\varphi(\tau,\mu)-\varphi(\tau,\tilde{\mu})\| + \beta]d\tau .$$

Pelo Lema de Gronvvall (Proposição 3) obtém-se

$$\|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\tilde{\mu})\| \le \frac{\beta}{K}\,(e^{K(t-t_o)} -1) \le \frac{\beta}{K}(e^{K(r_2-t_o)} -1) \;;$$

escolhendo β tal que $\frac{\beta}{K}(e^{K(r_2-t_o)} - 1) \le a$ e chamando de ρ o valor correspondente de $b^*(\beta)$ podemos garantir que

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\tilde{\mu})\| \le a \qquad (23)$$

sempre que se tenha $\|\mu-\tilde{\mu}\| \le \rho$; isto é, para t satisfazendo $t_o \le t \le t_2$, a curva $(t,\varphi(t,\mu),\mu)$ está contida em $\tilde{B}$ qualquer que seja μ na vizinhança $\|\mu-\tilde{\mu}\| \le \rho$. Finalmente tomemos um valor $\mu = \mu_1$ nessa vizinhança $\|\mu-\tilde{\mu}\| \le \rho$ e vamos mostrar que a solução $\varphi(t,\mu_1)$, $\varphi(t_o,\mu_1) = x_o$, está definida para todo t no intervalo $t_o \le t \le r_2$. Seja $m_1 < t < m_2$ o intervalo maximal dessa solução $\varphi(t,\mu_1)$; se $m_2 > r_2$ nada há a provar; se, ao contrário, $m_2 \le r_2$, pelo Teorema 3 existe um número $e_2 > 0$ tal que para todo $t > (m_2-e_2)$ o ponto $(t,\varphi(t,\mu_1))$ não pertence ao compacto $\tilde{B}(\mu_1)$ conjunto dos pares (t,x) tais que $(t_o \le t \le r_2)$ e $\|x-\varphi(t,\tilde{\mu})\| \le a$, isto é, existe $t_2 > (m_2-e_2)$ tal que $\|\varphi(t_2,\mu_1)-\varphi(t_2,\tilde{\mu})\| > a$ com $t_2 > t_o$ satisfazendo $t_2 < m_2 \leq r_2$ o que é absurdo pela estimativa (23). Logo $m_2 > r_2$ o que prova ser $E_{(t_o,x_o)}$ aberto em $R^{\ell+1}$. Para completar a prova do Teorema 6 mostraremos que $\varphi(t,\mu)$ é contínua no aberto $E_{(t_o,x_o)}$; para isso é suficiente provar a continuidade num ponto genérico $(\tilde{t},\tilde{\mu})$ de $E_{(t_o,x_o)}$. Como acima, estudemos ùnicamente o caso $(\tilde{t} > t_o)$ já que o caso $(\tilde{t} < t_o)$ é análogo. Observando que o conjunto dos (t,μ) que satisfazem $\|\mu-\tilde{\mu}\| \leq \rho$ e $(t_o \leq t \leq r_2)$ é uma vizinhança de $(\tilde{t},\tilde{\mu})$ podemos estimar $\|\varphi(t,\tilde{\mu})-\varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})\|$ do seguinte modo:

$$\|\varphi(t,\mu)-\varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})\| \leq \|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\tilde{\mu})\| + \|\varphi(t,\tilde{\mu}) - \varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})\|;$$

como $\|\varphi(t,\tilde{\mu})-\varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})\|$ tende a zero quando t tende à t (continuidade em t de $\varphi(t,\tilde{\mu})$) e

$$\|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\tilde{\mu})\| \leq \frac{\beta}{K}[e^{K(r_2-t_o)} - 1]$$

para $\|\mu-\tilde{\mu}\| \leq b^*(\beta)$ conclue-se que $\|\varphi(t,\mu)-\varphi(\tilde{t},\tilde{\mu})\|$ tende a zero quando (t,μ) tende à $(\tilde{t},\tilde{\mu})$ e a prova do Teorema 6 está completa.

COROLÁRIO 3 - Seja (t_o,x_o,μ_o) um ponto do aberto $\tilde{A}$ e $x = \varphi(t,\mu)$ uma solução do sistema (16) que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_o,\mu) = x_o$.

Se a solução

$$x = \varphi(t,\mu_o)$$

está definida para $r_1 \leq t \leq r_2$ então existe um número $\rho > 0$ tal que para $\|\mu-\mu_o\| < \rho$ a solução $x = \varphi(t,\mu)$ está definida no mesmo intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$ e $\varphi(t,\mu)$ é contínua no conjunto dos pares (t,μ) definido por $\|\mu-\mu_o\| < \rho$ e $r_1 \leq t \leq r_2$.

PROPOSIÇÃO 4 (Lema de Hadamard) - Seja $g(t^1,\ldots,t^p,u^1,u^2,\ldots,u^q)$ uma função de $(p+q)$ variáveis reais definida num aberto conexo Δ de R^{p+q} que é convexo relativamente às variáveis $(u^1,\ldots,u^q)$, isto é, sendo $\tau = (t^1,\ldots,t^p)$ e $u = (u^1,\ldots,u^q)$ tais que (τ,u_1) e (τ,u_2) estão em Δ então o segmento $\{(\tau,u_1) + s\ (\tau,(u_2-u_1)),\ 0 \leq s \leq 1\}$, está contido em Δ. Suponhamos que $g(\tau,u)$ e as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial u^j}(\tau,u)$, $j = 1,2,\ldots,q$, sejam contínuas em Δ. Então dados (τ,u_1) e (τ,u_2) em Δ tem-se

$$g(\tau,u_2) - g(\tau,u_1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(\tau,u_1,u_2).(u_2^j-u_1^j), \qquad (24)$$

onde $h_j(\tau,u_1,u_2)$, $j = 1,2,\ldots,q$, são definidas e contínuas nos argumentos (τ,u_1,u_2) e, em particular, quando $u_1 = u_2$.

<u>Prova</u>: Seja $w(s) = u_1 + s(u_2-u_1)$, $0 \leq s \leq 1$.

$$g(\tau,u_2)-g(\tau,u_1) = g(\tau,w(1))-g(\tau,w(0)) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\ g(\tau,w(s))ds.$$

Mas

$\frac{\partial}{\partial s}g(\zeta,w(s)) = \frac{\partial}{\partial s}g(\zeta,w^1(s),\ldots,vv^q(s)) = \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial g}{\partial s}(\zeta,w(s)).\frac{\partial w^j}{\partial s}(s)$.

Como $\frac{\partial w^j}{\partial s}(s) = u_2^j - u_1^j$, $j = 1,2,\ldots,q$ e definindo $h_j(\zeta,u_1,u_2) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^j}(\zeta,w(s))ds$ obtém-se a fórmula (24) e a proposição está provada.

Voltemos agora ao sistema (16) do início do §4 satisfazendo às condições (17) e (18). Suponhamos além disso que as derivadas parciais

$$e_k^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell) = \frac{\partial}{\partial\mu^k} f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell), \qquad (25)$$
$$i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,\ell$$

sejam definidas e contínuas no aberto $\widetilde{A}$ de $R^{n+1+\ell}$. Vamos demonstrar, no próximo Teorema 7, que as soluções de tal sistema (16), que dependem dos parâmetros $\mu^1,\ldots,\mu^\ell$, também são diferenciáveis em relação a êsses parâmetros. Precisamente provaremos o seguinte:

TEOREMA 7 - Consideremos o sistema (16) de equações diferenciais ordinárias ordinárias satisfazendo às condições (17), (18) e (25) e seja (t_o,x_o) um elemento de $\pi_2(\widetilde{A})$. Então a solução $\varphi(t,\mu)$ caracterizada pela condição inicial $\varphi(t_o,\mu) = x_o$ além de contínua no aberto $E_{(t_o,x_o)}$ possue derivadas parciais contínuas $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t,\mu)$ em $E_{(t_o,x_o)}$ e as derivadas parciais mistas $\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial t\,\partial\mu^k}(t,\mu)$

existem contínuas em $E_{(t_o,x_o)}$ e não dependem da ordem da derivação. Além disso, como funções de t, as derivadas $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t,\mu)$ satisfazem o sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t,\mu)\right) = \sum_{j=1}^{n} f^i_j(t,\varphi(t,\mu),\mu)\,\frac{\partial\varphi^j}{\partial\mu^k}(t,\mu) + e^i_k(t,\varphi(t,\mu),\mu) \qquad (26)$$

e as condições iniciais $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t_o,\mu) = 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,\ell$.

<u>Prova</u>: Por simplicidade estudaremos o caso $k=\ell$ e o vetor $\mu = (\mu^1,\ldots,\mu^\ell)$ será representado por $\mu = (\lambda,\nu)$ em que $\lambda = (\mu^1,\ldots,\mu^{\ell-1})$ e $\nu = \mu^\ell$.

Consideremos o aberto $E_{(t_o,x_o)}$ de $R^{\ell+1}$, onde é contínua a solução $\varphi(t,\mu)$ de (16) caracterizada por $\varphi(t_o,\mu) = x_o$ (ver Teorema 6). Sejam as funções

$$\psi^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\,(\varphi^i(t,\lambda,\nu_2) - \varphi^i(t,\lambda,\nu_1))$$

definidas para (t,λ,ν_1) e (t,λ,ν_2) em $E_{(t_o,x_o)}$ tais que $\nu_2 \neq \nu_1$.

Derivando em relação à t e levando em conta que $\varphi(t,\mu)$ é solução do sistema (16) vem:

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial t}(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{(\nu_2-\nu_1)}\left[\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}(t,\lambda,\nu_2) - \frac{\partial\varphi^i}{\partial t}(t,\lambda,\nu_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\nu_2-\nu_1}[f^i(t,\varphi(t,\lambda,\nu_2),\lambda,\nu_2) - f^i(t,\varphi(t,\lambda,\nu_1),\lambda,\nu_1)].$$

Aplicando o lema de Hadamard (Proposição 4) à última expressão, pondo $\tau = (t,\lambda)$, $u_1 = (\varphi(t,\lambda,\nu_1),\nu_1)$, $u_2 = (\varphi(t,\lambda,\nu_2),\nu_2)$ e $g(\tau,u) = f^i(t,\varphi(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu)$, tem-se $f^i(t,\varphi(t,\lambda,\nu_2),\lambda,\nu_2) - f^i(t,\varphi(t,\lambda,\nu_1),\lambda,\nu_1) =$
$= \sum_{j=1}^{n} h_j^i(\tau,u_1,u_2)(\varphi^j(t,\lambda,\nu_2) - \varphi^j(t,\lambda,\nu_1)) +$
$+ h_{n+1}^i(\tau,u_1,u_2)(\nu_2-\nu_1)$ onde $h_j^i(\tau,u_1,u_2) = \tilde{h}_j^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)$, $j=1,2,\ldots,n+1$, são contínuas em todos os argumentos, e portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)\psi^j(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) + \tilde{h}_{n+1}^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) \tag{27}$$

As equações (27) definem um sistema de equações diferenciais lineares na incógnita $\psi^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)$ os coeficientes conhecidos sendo as funções contínuas

$$\tilde{h}_j^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2),\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n+1 .$$

Mas para $t = t_o$ as funções $\psi^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)$ valem zero pois

$$\psi^i(t_o,\lambda,\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{\nu_2-\nu_1}(\varphi^i(t_o,\lambda,\nu_2)-\varphi^i(t_o,\lambda,\nu_1)) = \frac{1}{\nu_2-\nu_1}(x_o^i-x_o^i).$$

Chamemos de $\psi_*^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2)$ as soluções do sistema (27) caracterizadas por $\psi_*^i(t_o,\lambda,\nu_1,\nu_2) = 0$, $i=1,2,\ldots,n$.

Pelo Teorema 6 aplicado a essa solução do sistema (27), sabemos que ela é contínua nas variáveis (t,λ,ν_1,ν_2). Por uma questão de unicidade de solução temos

$$\psi^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2) = \psi_*^i(t,\lambda,\nu_1,\nu_2);$$

porém os 2os membros são definidos inclusive para $\nu_1 = \nu_2$ enquanto que os 1os membros só têm sentido para $\nu_1 \neq \nu_2$. Como existe o limite dos 2os membros quando $\nu_1 \to \nu_2$ teremos

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi^i(t,\lambda,\nu) = \psi_*^i(t,\lambda,\nu,\nu) \ ,$$

isto é, as derivadas $\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi^i(t,\lambda,\nu)$ existem e são contínuas em todos os seus argumentos e satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi^i(t,\lambda,\nu)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \tilde{h}_j^i(t,\lambda,\nu,\nu)\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\varphi^j(t,\lambda,\nu) + \tilde{h}_{n+1}^i(t,\lambda,\nu,\nu)$$

que mostra que existem e são contínuas as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi^i(t,\lambda,\nu)\right).$$

Provaremos agora que também existem contínuas as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t,\lambda,\nu)\right).$$

Como $\varphi(t,\lambda,\nu)$ é solução de (16) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^i(t,\lambda,\nu)) = f^i(t,\varphi^1(t,\lambda,\nu),\ldots,\varphi^n(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu).$$

Como os segundos membros são drivá́veis em relação à ν, já que as $\varphi^i(t,\lambda,\nu)$ o são, temos a derivabilidade dos $1^{\underline{os}}$ membros,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(t,\lambda,\nu)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f^i_j(t,\varphi(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu) . \frac{\partial}{\partial \nu}\varphi^j(t,\lambda,\nu) + e^i_\ell(t,\varphi(t,\lambda,\nu),\lambda,\nu)$$

o que conclue a prova do teorema já que valem as equações (26) pois as derivadas mixtas são iguais. Derivando a condição $\varphi(t_o,\mu) = x_o$ em relação a μ^k temos imediatamente $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t_o,\mu) = 0$, $i=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,\ell$.

COROLÁRIO 4 - Se as funções $f^i(t,x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell)$ do sistema (16) admitirem contínuas tôdas as derivadas parciais até a ordem m, relativamente aos argumentos $x^1,\ldots,x^n,\mu^1,\ldots,\mu^\ell$, então a função solução $\varphi(t,\mu)$ caracterizada por $\varphi(t_o,\mu) = x_o$ admite contínuas tôdas as derivadas parciais relativamente aos parâmetros $\mu^1,\ldots,\mu^\ell$ até à ordem m, em todos os pontos do conjunto aberto $E_{(t_o,x_o)}$.

Prova: Demonstraremos por indução sôbre m utilizando as equações (26) chamadas "equações variacionais" do sistema (16). Para $m = 1$ o Teorema 7 garante a prova.

Supondo-se êste Corolário 4 válido para o número $m-1$, procuraremos provar sua validade para a ordem m das derivadas; a solução $\varphi(t,\mu)$ admite contínuas tôdas as derivadas parciais até a ordem $(m-1)$ no aberto $E_{(t_o,x_o)}$. Então as funções $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t,\mu)$ que são soluções do sistema (26) também têm derivadas parciais contínuas até a ordem $m-1$ pela hipótese de indução, já que os segundos membros de (26) tem derivadas parciais até a ordem $(m-1)$ inclusive, seja em relação às funções $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}(t,\mu)$ nas quais são lineares seja relativamente aos parâmetros $\mu^1,\ldots,\mu^\ell$.

§5 - TEOREMAS DE DEPENDÊNCIA CONTÍNUA E DIFERENCIÁVEL DAS SOLUÇÕES RELATIVAMENTE A CONDIÇÕES INICIAIS

Voltemos a considerar o sistema

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\dots,x^n,\mu^1,\dots,\mu^\ell), \quad i=1,2,\dots,n \tag{16}$$

em que as

$$f^i(t,x^1,\dots,x^n,\mu^1,\dots,\mu^\ell), \quad i=1,2,\dots,n \tag{17}$$

assim como suas derivadas parciais

$$f^i_j(t,x,\mu) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t,x,\mu), \quad i,j = 1,2,\dots,n \tag{18}$$

são definidas e contínuas num aberto A de $R^{n+1+\ell}$.

Vamos estudar a dependência das soluções da equação (16) relativamente às condições iniciais (t_o,x_o). Para facilitar á notação chamaremos t_o de τ e x_o de ξ. A solução $x = \varphi(t,\mu,\tau,\xi)$ do sistema (16) que verifica as condições iniciais $\xi = \varphi(\tau,\mu,\tau,\xi)$ depende das variáveis t,μ,τ e ξ.

Procederemos a um artifício de mudança de variáveis que nos levará à consideração de uma solução com condições iniciais fixadas e recairemos num caso especial ao qual é aplicável o Teorema 7.

Seja (τ,ξ,μ) um ponto do aberto $\tilde{A}$ de $R^{n+1+\ell}$.

As equações lineares $\begin{cases} t = \tau + s \\ x = \xi + y \end{cases}$ (28)

definem a aplicação ρ seguinte:

$$\rho:(s,y,\mu,\tau,\xi)\in R^{n+1}\times\tilde{A} \to (t=\tau+s, x=\xi+y,\mu) \in R^{n+1+\ell} .$$

Tal aplicação é diferenciável de classe C^{∞}, e mesmo analítica, e como $\tilde{A} \subset R^{n+1+\ell}$ é aberto, a imagem inversa $A^* = \rho^{-1}(\tilde{A})$ é um conjunto aberto do espaço $R^{n+1}\times\tilde{A}$. Como a função $f = (f^1,\ldots,f^n)$ do sistema $\dot{x} = f(t,x,\mu)$ é definida no aberto $\tilde{A}$ de $R^{n+1+\ell}$ e tem valores em R^n, a composta $f.\rho = g$ é definida no conjunto aberto A^*, isto é,

$$g(s,y,\mu;\tau,\xi) = f(\tau+s;\xi+y,\mu) \qquad (29)$$

para todo $(s,y,\mu;\tau,\xi) \in A^*$ e tem valores em R^n.

Consideremos em A^* o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dy}{ds} = g(s,y,\mu;\tau,\xi) = f(\tau+s;\xi+y,\mu) \qquad (30)$$

A função g é contínua em A^* e possue em A^* derivadas parciais contínuas em relação às variáveis $y^1,\ldots,y^n$; $\xi^1,\ldots,\xi^n$; $\mu^1,\ldots,\mu^\ell$ podendo ao sistema (30) serem aplica dos os resultados dos Teoremas 6 e 7.

Seja

$$y = \psi(s,\mu;\tau,\xi) \tag{31}$$

a solução do sistema (30) que satisfaz à condição inicial

$$\psi(0,\mu;\tau,\xi) = 0,$$

o que faz sentido pois $\rho(0,0,\mu;\tau,\xi) = (\tau,\xi,\mu) \in \tilde{A}$, isto é, o ponto $(0,0,\mu;\tau,\xi)$ pertence à A^*. Tal solução (31) dá origem à função

$$x = \xi + y = \xi + \psi(s,\mu;\tau,\xi)$$

ou $$x = \xi + \psi(t-\tau,\mu;\tau,\xi) = \varphi(t,\mu;\tau,\xi).$$

Note-se que

$$\varphi(\tau,\mu;\tau,\xi) = \xi+\psi(0,\mu;\tau,\xi) = \xi \tag{32}$$

e além disso é fácil ver que $\frac{d\varphi}{dt} = f(t,\varphi(t,\mu;\tau,\xi),\mu)$, isto é,

$$x = \xi+\psi(t-\tau,\mu;\tau,\xi) = \varphi(t,\mu;\tau,\xi)$$

é a solução do sistema (16) que satisfaz a condição inicial (32).

Reciprocamente, tôda solução $x = \varphi(t,\mu;\tau,\xi)$ de (16) com condição inicial $\varphi(\tau,\mu;\tau,\xi) = \xi$ provém de uma solução do sistema (30) com condição inicial $(s,y) = (0,0)$, precisamente a solução

$$y = \varphi(t,\mu;\tau,\xi)-\xi = \varphi(\tau+s,\mu;\tau,\xi)-\xi .$$

De fato,

$$\varphi(\tau+0,\mu;\tau,\xi) = \varphi(\tau,\mu;\tau,\xi) = \xi ,$$

e

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}(\tau+s,\mu;\tau,\xi) = f(\tau+s,\varphi(t+s,\mu;\tau,\xi),\mu) =$$

$$= f(\tau+s,y+\xi,\mu) = g(s,y,\mu;\tau,\xi).$$

Aplicando o Teorema 6 ao sistema (30) para as condições iniciais $(0,0)$ deduz-se o seguinte teorema:

TEOREMA 8 - Consideremos o sistema (16) verificando as condições (17) e (18) e seja $x = \varphi(t,\tau,\xi,\mu)$ a solução maximal do sistema (16) de condições iniciais (τ,ξ), isto é, que satisfaz $\varphi(t,\tau,\xi,\mu) = \xi$. Então a função $\varphi(t,\tau,\xi,\mu)$ é definida e contínua num conjunto aberto S do espaço das variáveis (t,τ,ξ,μ).

Finalmente o Teorema 7 aplicado ao sistema (30) fornece:

TEOREMA 9 - Seja o sistema

$$\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n),\ i=1,2,\ldots,n \qquad (2)'$$

em que as funções f^i e suas derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ são contínuas num aberto A de R^{n+1}. Então a solução $x = \varphi(t,\tau_o,\xi) = \tilde{\varphi}(t,\xi)$, que satisfaz $\varphi(\tau_o,\tau_o,\xi) = \tilde{\varphi}(\tau_o,\xi) = \xi$, é contínua num conjunto aberto $\tilde{S}$ de R^{n+1} e as de rivadas parciais $\dfrac{\partial\tilde{\varphi}^i(t,\xi)}{\partial\xi^j}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, existem contínuas em $\tilde{S}$ assim como as derivadas mixtas $\dfrac{\partial^2\tilde{\varphi}^i(t,\xi)}{\partial t\partial\xi^j}$, que, além disso, não dependem da ordem da derivação.

A aplicação do Corolário 4 ao sistema (2)' fornece:

COROLÁRIO 5 - Seja $\dot{x}^i = f^i(t,x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, um sistema de equações diferenciais ordinárias em que as funções f^i e suas derivadas parciais até a ordem $m \geq 1$ relativas às variáveis $x^1,\ldots,x^n$ existem e são contínuas num aberto A de R^{n+1}. Então a solução $x = \varphi(t,\tau_0,\xi) = \tilde{\varphi}(t,\xi)$, que satisfaz a condição inicial $\varphi(\tau_0,\tau_0,\xi) = \varphi(\tau_0,\xi) = \xi$, é contínua num aberto $\tilde{S}$ de R^{n+1} e suas derivadas parciais relativamente às variáveis $\xi^1,\ldots,\xi^n$ existem e são contínuas em $\tilde{S}$.

§6 - SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESPAÇOS DE FASE. PONTOS CRÍTICOS E TRAJETÓRIAS FECHADAS. GRUPO LOCAL A UM PARÂMETRO.

Consideremos um sistema <u>autônomo</u> de equações diferenciais ordinárias

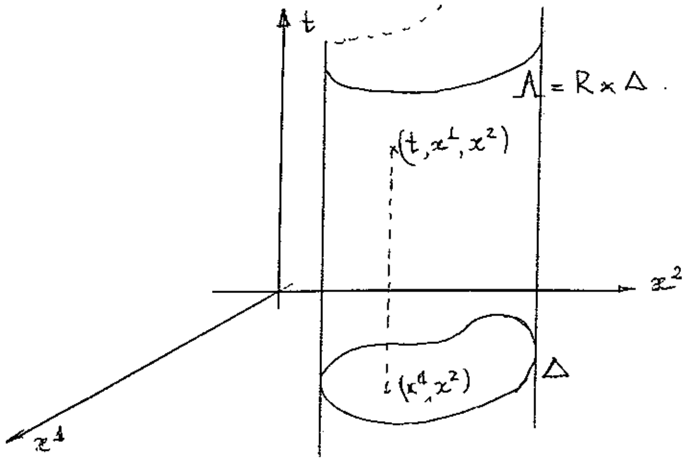
$$\dot{x}^i = f^i(x^1,\ldots,x^n),\ i=1,2,\ldots,n \tag{33}$$

que é do tipo (2)' quando a variável t não aparece explicitamente nos segundos membros das equações.

Suponhamos que as funções $f^i(x^1,\ldots,x^n)$ sejam de classe C^1 num aberto Δ de R^n, isto é, as f^i e suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ existem e são contínuas em Δ.

Claro está que ao sistema (33) são aplicáveis os teoremas de existência e unicidade de solução assim como os de dependência contínua e diferenciável das soluções com relação às condições iniciais.

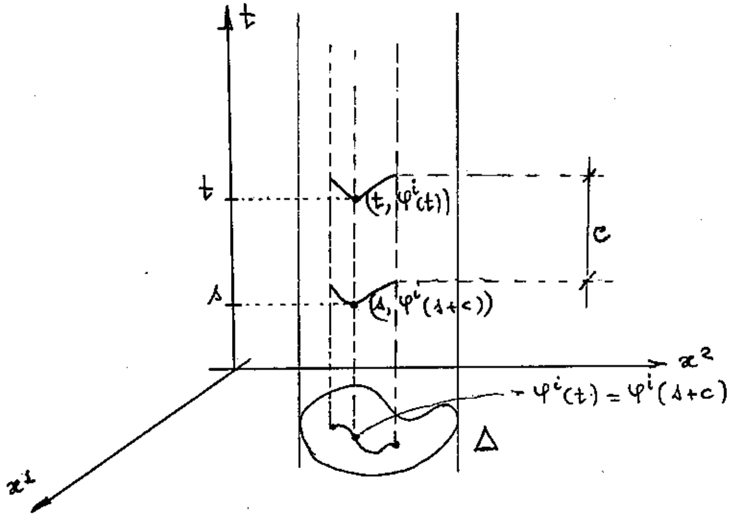
O conjunto aberto Δ é comumente denominado o <u>espaço de fase</u> do sistema para diferir do conjunto aberto $A = R\times\Delta$ contido em R^{n+1} onde variam as condições iniciais (t_o,x_o), habitualmente conhecido como o <u>espaço de movimentos</u>.



Se $x^i = \varphi^i(t)$ é uma solução do sistema (33) a curva $(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t))$ situa-se no espaço de fase Δ quando t percorre o intervalo maximal da solução, $m_1 < t < m_2$.

A curva $(t,\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t))$ situa-se no aberto $R\times\Delta$ quando t varia e projeta-se sôbre a curva $(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t))$ do espaço de fase.

Seja agora c um número real qualquer e a função de s, $y^i = \varphi^i(s+c)$, $i=1,2,\dots,n$, definida no intervalo $(m_1-c) < s < (m_2-c)$. É fácil ver que $\frac{dy^i}{ds} = \frac{d\varphi^i}{dt}(s+c) = f(\varphi^1(s+c),\dots,\varphi^n(s+c))$ o que prova que $\varphi^i(s+c)$ é solução do sistema (33) e seu intervalo maximal é $m_1-c < s < m_2-c$.



Ambas as soluções têm a mesma imagem no aberto Δ enquanto que no aberto $R \times \Delta$ as imagens das duas soluções diferem por uma translação.

Reciprocamente, suponhamos dadas as soluções $x^i = \varphi^i(t)$ de intervalo maximal $m_1 < t < m_2$ e $y^i = \psi^i(s)$ de intervalo maximal $\bar{m}_1 < s < \bar{m}_2$ tais que $\varphi^i(t_o) = \psi^i(s_o)$, $i=1,2,\ldots,n$. Consideremos o número real $c = t_o - s_o$ e a solução $y^i = \varphi^i(s+c)$ definida para $m_1 - c < s < m_2 - c$, como acima. Mas $\varphi^i(s_o+c) = \varphi^i(t_o) = \psi^i(s_o)$, isto é, $\varphi^i(s+c)$ e $\psi^i(s)$ coincidem para $s = x_o$; pelo Teorema 1 elas coincidem onde ambas estão definidas, isto é,

$$\bar{m}_1 = m_1 - c \quad \text{e} \quad \bar{m}_2 = m_2 - c.$$

Em outras palavras, se as imagens no espaço de fase Δ, de duas soluções maximais $x^i = \varphi^i(t)$ e $y^i = \psi^i(s)$, interceptam-se para $t = t_o$ e $s = s_o$, respectivamente, as soluções diferem uma da outra por uma translação, isto é, $\psi^i(s) = \varphi^i(s+c)$ para todo s em $\bar{m}_1 < s < \bar{m}_2$. Pelo Teorema 1 podemos também garantir que, dadas as condições iniciais $(t_o, x_o) \in R\times\Delta$, existe uma única solução maximal $x = \varphi(t)$ do sistema (33) tal que $x_o = \varphi(t_o)$. Se em lugar de $(t_o, x_o) \in R\times\Delta$, escolhêssemos o par $(0, x_o) \in R\times\Delta$, obteríamos uma outra solução que, pelo que foi dito acima, terá que ser

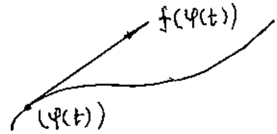
$$y^i = \varphi^i(t-t_o).$$

As imagens de tôdas essas soluções do sistema (33) que passam pelo ponto $x_o \in \Delta$ definem um mesmo subconjunto de Δ, denominado órbita do sistema autônomo (33) que passa pelo ponto $x_o \in \Delta$. A trajetória por x_o é a solução do sistema que para $t = 0$ passa por x_o; é uma curva parametrizada.

Consideremos no conjunto aberto Δ de R^n o <u>campo de vetores</u> definido do seguinte modo: ao ponto $x_o \in \Delta$ associamos o vetor $f(x_o)$ de componentes $f(x_o) = (f^1(x_o^1, \ldots, x_o^n), \ldots, f^n(x_o^1, \ldots, x_o^n))$ onde $x_o = (x_o^1, \ldots, x_o^n)$.

As curvas integrais dêsse campo de vetores são as curvas

$x = (\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))$ soluções do sistema de equações (33) pois o vetor tangente à curva $(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))$ é



$$\dot{x} = (\dot{\varphi}^1(t),\ldots,\dot{\varphi}^n(t))$$

e como $\dot{\varphi}^i(t) = f^i(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))$ tem-se $\dot{x} = (\dot{\varphi}^1(t),\ldots,\dot{\varphi}^n(t)) = f(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t))$.

OBSERVAÇÃO: Pelo Corolário 2 do §3, se existir um compacto K contido em Δ com a propriedade de que uma determinada solução do sistema (33) tem necessàriamente imagem contida em K, o intervalo maximal de tal solução é $-\infty < t < +\infty$.

EXEMPLO 8 - Consideremos o sistema autônomo definido em R^4 pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = u \\ \dot{z} = -x \\ \dot{u} = -y \end{cases} \tag{34}$$

em que (x,y,z,u) indica um ponto genérico de R^4. Como

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} + u\dot{u} = xz+yu-xz-yu = 0$$

teremos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2+u^2) = 0,$$

isto é, dada uma solução $(x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ u=u(t))$ do sistema (34) ela será tal que

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2 + (u(t))^2 = \text{constante} = a^2;$$

tal solução situa-se portanto numa esfera de raio $a \geq 0$ contida em R^4. Pela observação anterior pode-se concluir que tôda solução de tal sistema tem como intervalo maximal $-\infty < t < +\infty$.

Como as soluções do sistema (34) estão contidas em esferas, fixado $a > 0$, a esfera de raio a contida em R^4 goza da propriedade que o campo de vetores definido pelo sistema autônomo (34) é, nos pontos da esfera, tangente à ela. Assim, se (x,y,z,u) é tal que $x^2+y^2+z^2+u^2 = a^2$, o vetor definido por

$$f(x,y,z,u) = (z,u,-x,-y)$$

é tangente no ponto (x,y,z,u) à esfera de equação

$$x^2+y^2+z^2+u^2 = a^2.$$

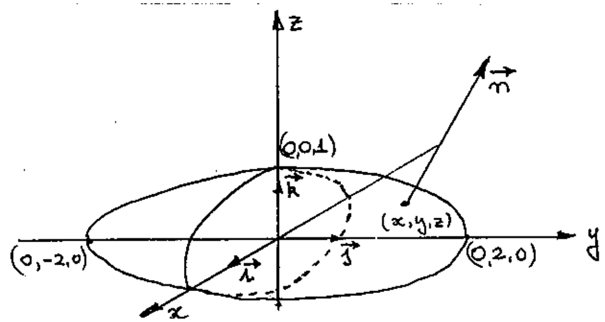
já que $(z,u,-x,-y).(x,y,z,u) = xz+yu-xz-yu = 0$

EXEMPLO 9 - Consideremos no R^3 o elipsóide de equação

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1. \tag{35}$$

Em cada ponto (x,y,z) dêsse elipsóide, o vetor normal se escreve

$$\vec{n} = 2x.\vec{i} + \frac{y}{2}.\vec{j} + 2z.\vec{k}.$$



Consideremos o campo de vetores tangentes sôbre o elipsóide que ao ponto (x,y,z) do elipsóide faz corresponder o vetor $\vec{v} = -z^2\,\vec{i} + xz\vec{k}$.

Tal campo de vetores é de fato tangente ao elipsóide pois o produto escalar $\vec{v}.\vec{n}$ é nulo.

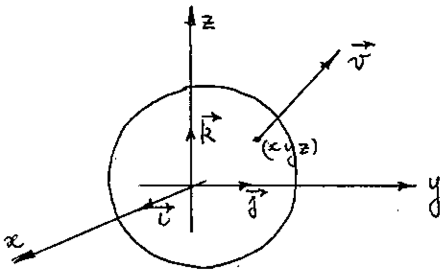
Poderíamos tentar determinar as curvas integrais de tal campo de vetores $\vec{v}$, isto é, as curvas $(x(t),y(t),z(t))$ tais que $\dot{x}(t) = -z^2$, $\dot{y}(t) = 0$ e $\dot{z}(t) = xz$. Se considerarmos um parâmetro ϵ com $|\epsilon|<1$, é fácil ver que a família de elipsóides definida por $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1+\epsilon$, com ϵ variando no intervalo $-1 < \epsilon < +1$, define uma vizinhança $\Delta(\epsilon)$, aberta, do elipsóide de (35), contida no espaço R^3. Em $\Delta(\epsilon)$ tem sentido considerar o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = -z^2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = xz \end{cases} \tag{36}$$

Como o elipsóide (35) é um compacto contido em $\Delta(\epsilon)$, o campo de vetores $\vec{v}$ definido nele é tal que tôda curva integral pode ser necessàriamente definida no intervalo maximal $-\infty < t < +\infty$. Aliás, como tôda a solução de (36) está contida em algum elipsóide da família considerada, tôdas as soluções de (36) admitem a reta como intervalo maximal de definição.

EXEMPLO 10 - Seja S^2 a esfera de equação $x^2+y^2+z^2 = R^2$ e $\vec{v}$ um campo de vetores tangentes.

Suponhamos que $\vec{v} = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$



seja tal que f_1,f_2,f_3 são três funções de classe C^1. Por um argumento análogo ao usado no exemplo anterior conclue-se que tôda curva integral do campo de vetores $\vec{v}$ pode ser extendida a tôda a reta.

EXEMPLO 11 - Seja M uma variedade compacta de classe C^r, $r \geq 2$, e X um campo de vetores de classe C^1 (ver [2]). Pode-se demonstrar que tôda curva integral de X tem a reta como intervalo maximal de definição.

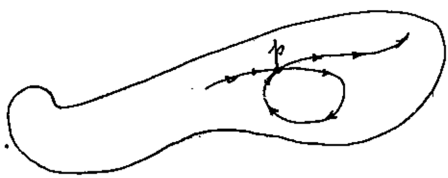
EXEMPLO 12 - Seja $\dot{x}^i = f^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$, (33) o sistema já considerado no início dêste §6, de classe C^1 no aberto Δ de R^n. Suponhamos que (33) admita uma <u>variedade invariante</u> M (ver [2],[3]) isto é, em todo ponto $x \in M$ o vetor

$$f(x) = (f^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,f^n(x^1,\ldots,x^n))$$

é tangente à M. Neste caso as trajetórias de (33) que têm algum ponto em M, estão necessàriamente contidas em M. Em particular se M é compacta, cada curva integral em M admite a reta como intervalo maximal de definição.

<u>Pontos críticos e trajetórias fechadas</u>

Seja $x = \varphi(t)$ uma solução do sistema (33) definida no intervalo maximal $m_1 < t < m_2$. Se $\varphi(t)$ fôr uma aplicação injetora sua imagem no espaço de fase Δ determina uma órbita homeomorfa à reta pois a própria função $\varphi(t)$ determina um homeomorfismo entre a órbita e o intervalo aberto $m_1 < t < m_2$. Se $x = \varphi(t)$ <u>não é injetora</u> existem t_o e $t_o+\tau$, ambos no intervalo $m_1 < t < m_2$ tais que $\tau \neq 0$ e $\varphi(t_o) = \varphi(t_o+\tau) = p$, $p \in \Delta$.



$p = \varphi(t_o) =$
$= \varphi(t_o+\tau)$

Chama-se <u>período</u> de uma soluçãomaximal, não injetora, $\varphi(t)$, todo número real τ para o qual existe t_o, $m_1 < t_o < m_2$ e $\varphi(t_o) = \varphi(t_o+\tau)$.

PROPOSIÇÃO 5 - Se $\tau \neq 0$ é período de $\varphi(t)$ então $m_1 = -\infty$, $m_2 = +\infty$ e $\varphi(t) = \varphi(t+\tau)$ para todo t real.

<u>Prova</u>: Observe-se inicialmente que $\dot{\varphi}(t_o) = f(\varphi(t_o)) = \dot{\varphi}(t_o+\tau)$. Agora é imediato extender a solução à tôda a reta.

PROPOSIÇÃO 6 - O conjunto P dos períodos de uma solução maximal não injetora é um subgrupo fechado do conjunto dos números reais R. Portanto ou $P = R$ ou existe $T > 0$ e $P = \{nT | n \in Z\}$, Z sendo o conjunto dos números inteiros relativos.

<u>Prova</u>: Se T_1 e T_2 são períodos de $\varphi(t)$ tem-se

$\varphi(t+(T_1+T_2)) = \varphi((t+T_1)+T_2) = \varphi(t+T_1) = \varphi(t)$, isto é, (T_1+T_2) é também período de $\varphi(t)$. P é portanto um subgrupo aditivo do conjunto R dos números reais e $P \neq \{0\}$. Se (T_ν), $\nu \in N$, é uma seqüência de períodos que converge para um número real T_o tem-se $\varphi(t+T_\nu) = \varphi(t)$ para todo t real e $\nu \in N$. Como $\varphi(t)$ é contínua vem $\varphi(t) = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \varphi(t+t_\nu) = \varphi(t+\lim T_\nu) = \varphi(t+T_o)$, isto é, o conjunto P dos períodos é fechado em R.

Suponhamos que o zero real seja ponto de acumulação de períodos; então pela Proposição 6 todo número real c será ponto de acumulação de períodos; como P é fechado teremos neste caso $P = R$. Se, ao contrário, zero não é ponto de acumulação de períodos existe um mínimo período positivo T; agora é imediato que $P = \{n.T \mid n \in Z\}$.

COROLÁRIO 6 - Se $\varphi(t)$ é uma solução maximal não injetora então ou $\varphi(t) = a$ para todo t real ou $\varphi(t)$ é uma solução peródica de período mínimo $T > 0$.

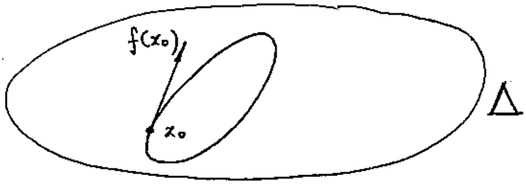
<u>Prova</u>: Se $P = R$ tem-se

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \frac{\varphi(t)-\varphi(t)}{h} = 0 ,$$

isto é, $\dot{\varphi}(t) = 0$ para todo t real donde $\varphi(t) \equiv a$.
Se, ao contrário, $P = \{n.T \mid n \in Z\}$, $\varphi(t) = \varphi(t+T)$ para todo t real e a imagem da trajetória de $\varphi(t)$ é homeomorfa ao círculo.

OBSERVAÇÕES:

1) Se $P = R$ a trajetória de $\varphi(t)$ reduz-se a um ponto $a \equiv \varphi(t)$ e como $\dot{\varphi}(t) = 0$ vem que $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) = f(a) = 0$. O ponto a chama-se <u>ponto de equilíbrio</u> do sistema ou <u>ponto crítico</u> do campo de vetores definido no espaço de fase Δ, isto é, um ponto onde o campo se anula.



2) Se $P = \{nT | n \in Z\}$, a trajetória é um conjunto compacto homeomorfo ao círculo e $f(x)$ não se anula em nenhum ponto da trajetória porque se $f(x_o) = 0$ a função constante $\varphi(t) = x_o$ seria solução e a imagem de sua trajetória não seria homeomorfa ao círculo.

Grupo local a um parâmetro. Fluxos.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias de classe C^m, definido no espaço de fase
$\Delta \subset R^n$: $\dot{x} = f(x^1,\ldots,x^n) = f(x)$, $m \geq 1$. Pelo Corolário 5, fixada a condição inicial $\tau_o = 0$, a solução $x = \tilde{\varphi}(t,\xi)$ que satisfaz a condição $\tilde{\varphi}(0,\xi) = \xi$ é contínua num aberto $\tilde{S}$ de R^{n+1} e suas derivadas parciais relativas às variáveis $\xi^1,\ldots,\xi^n$ existem e são contínuas em $\tilde{S}$.
Fica dêste modo definida a função

$$\tilde{\varphi}:\tilde{S} \subset R^{n+1} \to \Delta$$

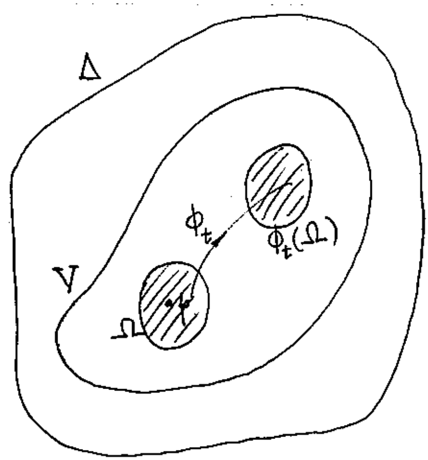
já que para todo $(t,\xi) \in \tilde{S}$, $\tilde{\varphi}(t,\xi) \in \Delta$.
Convém notar que a projeção $\pi:(t,\xi) \in \tilde{S} \to \xi \in R^n$ assume valores em Δ, isto é, $\pi(t,\xi) = \xi \in \Delta$. Ainda mais $\pi(\tilde{S}) = \Delta$,

isto é, π é sôbre Δ. Conclue-se daí que

$$\tilde{S} \subset R\times\Delta \quad e \quad \tilde{S} \supset \{0\}\times\Delta .$$

Para cada $p \in A$, como $(0,p) \in \tilde{S}$, existe uma vizinhança produto $(-\bar{\epsilon},\bar{\epsilon}) \times V$ contida em $\tilde{S}$ em que $\bar{\epsilon} > 0$ e V é vizinhança de p em Δ. A vizinhança V goza da propriedade de que tôda solução da equação $\dot{x} = f(x)$ que passa pelo ponto $q \in V$ no instante $t = 0$ está definida para $|t| < \bar{\epsilon}$. Consideremos a restrição de $\tilde{\varphi}$ à vizinhança aberta $(-\bar{\epsilon},+\bar{\epsilon}) \times V$; como $\tilde{\varphi}(0,p) = p$, pela continuidade de $\tilde{\varphi}$, dada V, existem $\epsilon > 0$ e Ω vizinhança de p tais que

$$\tilde{\varphi}(t,q) \in V \text{ para todo } (t,q) \in (-\epsilon,+\epsilon) \times \Omega.$$

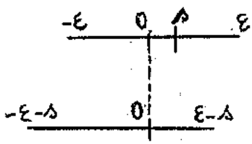


Seja $\phi_t : V \to \Delta$, $|t| < \bar{\epsilon}$ definida por $\phi_t(\xi) = \tilde{\varphi}(t,\xi)$;

trata-se de uma função de classe C^m; sua restrição à Ω será ainda denotada por ϕ_t, isto é, $\phi_t:\Omega \to V$, também definida por $\phi_t(q) = \widetilde{\varphi}(t,q)$ para todo $(t,q) \in (-e,+e)\times \Omega$. Sempre que $|t| < e$ teremos $\phi_t(\Omega) \subset V$.

PROPOSIÇÃO 7 - Para todo $q\in\Omega$, $|s| < e$, $|t| < e$ e $|s+t|<e$ tem-se $\phi_s(\phi_t(q)) = \phi_{s+t}(q)$. Além disso cada ϕ_t, $|t| < e$, é um difeomorfismo de classe C^m, $m\geq 1$, de Ω sôbre sua imagem.

<u>Prova</u>: Seja $q \in \Omega$ e $|s| < e$; considere-se a curva $\lambda(t) = \widetilde{\varphi}(s+t,q)$, $|s,t,s+t|<e$.



Fixado s, $|s| < e$, como $-e < s+t < e$ temos $-e-s < t < e-s$. Então como $|t| < e$ teremos:

se $s > 0$: $-e < t < e-s$;

se $s < 0$: $-e-s < t < e$;

se $s = 0$ | $-e < t < e$.

Note-se que $\lambda(0) = \widetilde{\varphi}(s,q) = \phi_s(q)$ e

$$\lambda'(t) = \dot{\widetilde{\varphi}}(s+t,q) = f(\widetilde{\varphi}(s+t,q)) = f(\lambda(t))$$

logo $\lambda(t)$ é a solução do sistema que para $t = 0$ passa por $\phi_s(q)$; como $\phi_s(q) \in V$ tal solução está definida no intervalo $(-e,+e)$. Porém pela definição de ϕ_t, $\lambda(t)$ coincide com $\phi_t(\phi_s(q))$ donde $\phi_{s+t}(q) = \phi_t\cdot\phi_s(q)$ para todo $q \in \Omega$.

Finalmente, como $\phi_t(\Omega) \subset V$ tem sentido falar na inversa de ϕ_t/Ω que será $\phi_{-t}/\phi_t(\Omega)$. Então cada ϕ_t, $|t| < \epsilon$, é um difeomorfismo local. Note-se que $\phi_o = id_V$.

A família $\phi_t : \Omega \to V$ parametrizada por $|t| < \epsilon$ chama-se <u>grupo local a um parâmetro gerado por $\dot{x} = f(x)$</u> ou <u>também fluxo local de $\dot{x} = f(x)$</u> nas vizinhanças de $p \in \Delta$.

OBSERVAÇÃO: Há casos em que o aberto $\tilde{S}$ é precisamente $R \times \Delta$. É o caso em que tôdas as soluções são definidas de $-\infty$ à $+\infty$; segue que os elementos ϕ_t da família constituem um grupo de difeomorfismos globais de Δ, t percorrendo a reta real. Aqui tem-se efetivamente um grupo a um parâmetro de difeomorfismos globais de Δ, de classe C^m.

No <u>exemplo 12</u> dêste §6, considerou-se o caso de uma variedade M invariante; claro está que os grupos locais ϕ_t são tais que os difeomorfismos ϕ_t induzem, por restrição, difeomorfismos locais em M com propriedades análogas às exibidas na proposição anterior. Finalmente se M é uma variedade compacta fica definido em M um grupo a um parâmetro de difeomorfismos globais de M.

§7 - SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, de números complexos, $A = (a_{ij})$. Chama-se norma de A ao número real $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$. As seguintes propriedades são de demonstração imediata:

a) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

b) $\|A.B\| \leq \|A\| . \|B\|$

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ em que I é a matriz identidade de ordem n e $\det(A-\lambda I)$ indica o determinante da matriz $(A-\lambda I)$. Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existe uma matriz não singular M tal que $B = M^{-1} A M$. Se A e B são semelhantes elas têm o mesmo polinômio característico já que

$$\det(A-\lambda I) = \det[M^{-1}(A-\lambda I)M] =$$
$$= \det[(M^{-1}A-M^{-1}\lambda I)M] = \det[M^{-1}AM - \lambda I] = \det(B-\lambda I).$$

Seja (A_ν) uma seqüência de matrizes; diz-se que (A_ν) é convergente se dado $e > 0$, existe $N(e)$ tal que para todo $p,q > N(e)$ tem-se $\|A_p-A_q\| < e$. Diz-se que (A_ν) tende para um limite A se dado $e > 0$ existe

$N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$N(\epsilon)$ tal que $\nu > N(\epsilon)$ acarreta $\|A_\nu - A\| < \epsilon$. É fácil ver que (A_ν) é <u>convergente</u> se, e sòmente se, cada componente define uma seqüência convergente e, portanto, se, e sòmente se, existe um limite para o qual ela tende.

Uma série $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ é <u>convergente</u> se a sequência das somas parciais fôr convergente. O limite da seqüência das somas parciais chama-se <u>soma</u> da série infinita considerada.

<u>Exponencial de uma matriz A</u> - Consideremos a série infinita

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\cdot$$

em que A^m indica $A\cdot\ldots\cdot A$ (m fatores iguais à A). Dados p e q inteiros positivos temos:

$$\left\| \sum_{m=p+1}^{p+q} \frac{A^m}{m!} \right\| \le \sum_{m=p+1}^{p+q} \left\| \frac{A^m}{m!} \right\| .$$

O segundo membro torna-se tão pequeno quanto se queira pois a série $e^{\|A\|}$ é convergente. A série infinita e^A é pois convergente e denomina-se <u>exponencial da matriz A</u>.

Consideremos agora o sistema de equações diferenciais ordinárias definido em R^n pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \quad \text{ou simbòlicamente} \quad \dot{x} = Ax.$$

Já vimos no Exemplo 8 que as soluções de tal sistema admitem a reta como intervalo maximal. Consideremos as condições iniciais (t_o, x_o) e seja a função

$x = x(t) = e^{(t-t_o)A} . x_o$, em que x_o é a matriz coluna

$$x_o = \begin{bmatrix} x_o^1 \\ \vdots \\ x_o^n \end{bmatrix} .$$

Fica claro que $x(t_o) = e^{O} . x_o = I . x_o = x_o$. Se derivarmos $e^{(t-t_o)A}$ com relação à t obteremos $A . e^{(t-t_o)A}$.

De fato pela definição de derivada de matriz de funções teremos

$$\frac{e^{(t+\Delta t-t_o)A} - e^{(t-t_o)A}}{\Delta t} = \frac{e^{(t-t_o)A} . e^{\Delta t . A} - e^{(t-t_o)A}}{\Delta t}$$

$$= e^{(t-t_o)A} \left[\frac{e^{\Delta t . A} - I}{\Delta t} \right] = e^{(t-t_o)A} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\Delta t . A + \frac{(\Delta t A)^2}{2!} + \ldots \right) \right]$$

e no limite quando $\Delta t \to 0$ tem-se

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_o)A} = A . e^{(t-t_o)A} .$$

Portanto, derivando-se $x(t)$ tem-se

$$\dot{x}(t) = A \, e^{(t-t_o)A} . x_o = A \, x(t) .$$

Portanto $x = e^{(t-t_o)A} . x_o$ é a solução do sistema linear homogêneo $\dot{x} = Ax$ que para $t = t_o$ passa por $x = x_o$.

É comum proceder-se a uma mudança de variáveis $x = My$, M não singular, donde:

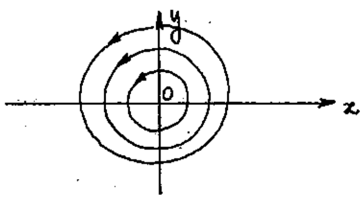
$$\dot{x} = Ax = AMy = M\dot{y} \quad \text{ou} \quad \dot{y} = (M^{-1}AM)y$$

e se indicarmos por B a matriz $M^{-1}AM$ semelhante à A chega-se à $\dot{y} = B.y$. Se M fôr tal que $B = M^{-1}AM$ seja relativamente "simples", obtém-se um sistema $\dot{y} = By$ em geral mais fácil de ser integrado do que o inicial $\dot{x} = A.x$. Claro está que as soluções de $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = By = (M^{-1}AM)y$ estão relacionadas através da mudança $x(t) = M.y(t)$. Um processo usual de obter-se, a partir de A, uma expressão "simples" para uma matriz semelhante B, é reduzir-se a matriz A à sua forma canônica de Jordan (ver Proposição 9).

EXEMPLO 13 - Consideremos o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \tag{37}$$

Tôda solução dêsse sistema verifica a condição $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ donde $x^2+y^2 = a^2$, $a \geq 0$. As trajetórias distintas da origem são círculos de centro na origem.



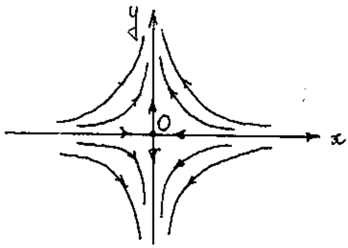
O polinômio característico fornece as raizes $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$; de fato

$\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$. A origem é um ponto crítico do sistema, chamado <u>centro</u>.

EXEMPLO 14 - Seja o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \ y \end{cases} \tag{38}$$

A condição $x\dot{y} + y\dot{x} = 0$ ou $xy = k$ está verificada para tôda solução de (38). Um cálculo simples mostra que a solução que passa pelo ponto (x_o, y_o) quando $t = 0$ é dada por



$$\begin{cases} x = x_o \ e^{-t} \\ y = y_o \ e^{t} \end{cases}$$

O polinômio característico $\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ fornece as raizes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

EXEMPLO 15 - Estudemos o sistema autônomo:

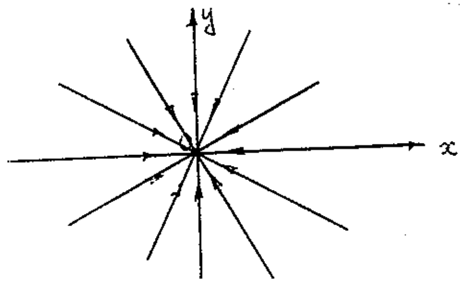
$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \tag{39}$$

que integrado fornece:

$$\begin{cases} x = x_o \ e^{-t} \\ y = y_o \ e^{-t} \end{cases}$$

Essas expressões fornecem a solução que passa por (x_o, y_o)

quando $t = 0$.

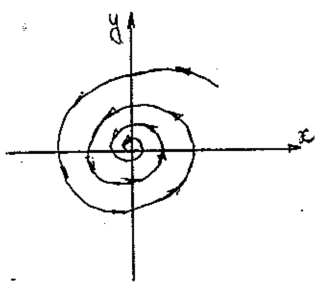


Como $xy_o - yx_o = 0$ conclue-se que as trajetórias estão contidas em retas pela origem. As raizes características são dadas por $\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$ que fornece $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1$.

EXEMPLO 16 - O sistema autônomo

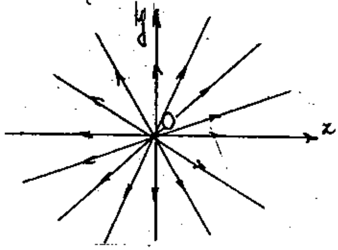
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x-y \end{cases} \tag{40}$$

fornece as raizes características $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ pois $\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$ implica $\lambda^2+\lambda+1 = 0$. A origem é um ponto crítico; excluido êsse ponto e tomadas coordenadas polares (ρ,θ) teremos $\dot{\rho} = -\rho \operatorname{sen}^2\theta$, o que mostra que $\dot{\rho}$ é sempre negativo, ou seja, a função ρ decresce com o tempo. As trajetórias tendem à origem quando t tende a infinito.



EXEMPLO 17 - Consideremos o sistema autônomo dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \tag{41}$$



A solução que para $t = 0$ passa pelo ponto (x_o, y_o) é dada por

$$\begin{cases} x = x_o\ e^t \\ y = y_o\ e^t \end{cases}$$

e as trajetórias estão contidas em retas. As raizes características são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Nos Exemplos 15 e 16 tôda trajetória tende para a origem quando t tende para $+\infty$. As raizes características têm, nos dois casos, parte real negativa. A origem em ambos os casos denomina-se um <u>poço</u>. No Exemplo 17 as trajetórias tendem para a origem quando t tende à $-\infty$. As raizes características têm parte real positiva. A origem neste caso denomina-se uma <u>fonte</u>.
No Exemplo 14 existem duas direções (as dos dois eixos) privilegiadas, numa das quais (eixo dos x) todos os pontos "tendem" para a origem quando t tende a $+\infty$ enquanto que na outra (eixo dos y) os pontos "tendem" para a

origem quando t tende a $-\infty$. Se um ponto não pertence a nehum dos eixos a trajetória por êle definida está contida num ramo de hipérbole. Uma raiz tem parte real positiva enquanto que a outra tem parte real negativa. A origem nesse caso chama-se um <u>ponto de sela</u>.

PROPOSIÇÃO 8 - Se λ é raiz característica de A, e^{λ} é raiz característica de e^{A}.

<u>Prova</u>: Sendo λ raiz característica de A tem-se $\det(A-\lambda I) = 0$ e portanto isto equivale à existência de um vetor $c_o \neq 0$, de n componentes complexas, tal que $(A-\lambda I)c_o = 0$ ou $Ac_o = \lambda c_o$.

Mostremos agora que $e^{A}c_o = e^{\lambda}.c_o$; de fato,

$$e^{A}c_o = (I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots)c_o = (c_o + Ac_o + \frac{A^2}{2!} c_o + \ldots) =$$
$$= (c_o + \lambda c_o + \frac{1}{2!}\lambda^2 c_o + \ldots) = (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots)c_o = e^{\lambda}.c_o$$

o que completa a prova.

Segue dessa proposição que, se λ é raiz característica de A, $t\lambda$ é raiz característica de tA e $e^{t\lambda}$ é raiz característica de e^{tA}.

COROLÁRIO 7 - A exponencial de qualquer matriz é não singular.

TEOREMA 10 (Forma canônica real de Jordan) - Dado uma matriz real A existe uma matriz $B = M^{-1}AM$, semelhante à A tal que B é uma matriz diagonal de blocos $B = \text{dia}(B_1,\ldots,B_k)$ onde

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ \epsilon & \lambda_j & \ldots & 0 \\ 0 & \epsilon\,\lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0\ 0 & \ldots & \epsilon\,\lambda_j \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad B_j = \begin{bmatrix} S_j & 0 & \ldots & 0 \\ \epsilon I & S_j & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \epsilon I\ S_j \end{bmatrix}$$

onde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $S_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$ ϵ real arbitrário não nulo

e λ_j ou $(\alpha_j+i\beta_j)$ são os valores característicos de A reais ou complexos, respectivamente. Se λ_j (real) ou $(\alpha_1 + i\beta_j)$ for raiz simples teremos $B_j = (\lambda_j)$ ou $B_j = S_j$, respectivamente.

Não daremos, neste curso, a prova dessa Proposição 9.

Suponhamos agora que se separe o conjunto $\sigma(A)$ dos valores característicos de A (espectro de A) em duas partes $\sigma_1(A)$ e $\sigma_2(A)$ não vazias de modo que $\sigma_1(A) \cup \sigma_2(A) = \sigma(A)$ e $\sigma_1(A) \cap \sigma_2(A) = \phi$.

Suponhamos também que se um elemento pertence à $\sigma_i(A)$, seu complexo conjugado também pertence à $\sigma_i(A)$, $i=1,2$.

Feita essa partição, a ela corresponde uma partição na forma canônica de Jordan B do seguinte modo:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

em que $\sigma_1(A) = \sigma(B_1)$ e $\sigma_2(A) = \sigma(B_2)$.

Sejam $U_1(t) = \begin{bmatrix} e^{tB_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $U_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tB_2} \end{bmatrix}$.

Como conseqüência das definições de $U_1(t)$ e $U_2(t)$ tem-se

$$e^{tB} = U_1(t) + U_2(t)$$

e $\dot{U}_1(t) = B.U_1(t)$ assim como $\dot{U}_2(t) = B.U_2(t)$. A solução do sistema $\dot{y} = By$ que para $t = 0$ passa pelo ponto y_o é dada por $\varphi(t) = e^{tB}.y_o$. Mas $\varphi(t) = e^{tB}.y_o = U_1(t)y_o + U_2(t)y_o$. É fácil constatar-se que as funções $\varphi_i(t) \doteq U_i(t).y_o$, i=1,2, são também soluções de $\dot{y} = By$; de fato: $\dot{\varphi}_i(t) = \dot{U}_i(t).y_o = B.U_i(t).y_o = B.\varphi_i(t)$.

Consideremos os subespaços de R^n dados por

$$E^1 = \{U_1.x \mid x \in R^n\}$$

e

$$E^2 = \{U_2.x \mid x \in R^n\}$$

em que $U_1 = U_1(1)$ e $U_2 = U_2(1)$. É imediato que $E^1+E^2 = R^n$ porque todo vetor z de R^n é da forma $z = e^B.y$ e portanto $z = e^B.y = U_1(1).y + U_2(1).y$. Se no conjunto $\sigma_1(A) = \sigma(B_1)$ existirem k raizes características (contadas com suas multiplicidades) a dimensão de E^1 será igual à k. De fato consideremos os k vetores de E^1:

$$f_1 = U_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = U_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, f_k = U_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{(k linhas)},$$

que são linearmente independentes pois se

$$\lambda_1 U_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 U_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_k U_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{teremos}$$

$$U_1 \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que acarreta $e^{B_1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, donde $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

A seqüência $(f_1, \ldots, f_k)$ é uma base de E^1 pois se

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in E^1 \quad \text{tem-se} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y_1 f_1 + \ldots + y_k f_k.$$

De forma análoga prova-se que a dimensão de E^2 é $(n-k)$. Finalmente se $y_o \in E^1$ a solução $\varphi(t) = e^{tB} y_o$ permanece em E^1 para todo t real já que

$$\varphi(t) = e^{tB}\, y_o = e^{tB}\, U_1 z_o = [U_1(t)+U_2(t)]U_1 z_o = U_1(t)U_1 z_o =$$
$$= U_1(t+1)z_o = U_1(U_1(t)z_o) \in E^1 .$$

As últimas considerações são a prova do seguinte teorema:

TEOREMA 11 - A tôda partição do espectro $\sigma(A)$, compatível com a conjugação, corresponde uma decomposição de R^n em soma direta $E^1 \oplus E^2$, a dimensão de E^i sendo o número de elementos de $\sigma_i(A)$ (contados com sua multiplicidade) $i=1,2$. Além disso o fluxo ϕ_t de $\dot{x} = Ax$ deixa E^1 e E^2 invariantes e a restrição de $\phi_{t=1}$ à E^i é um operador linear que tem como espectro as exponenciais dos elementos de $\sigma_i(A)$, $i=1,2$.

EXERCÍCIOS

1) Provar que se as raizes características de A tem suas partes reais não nulas, o sistema $\dot{x} = Ax$ não admite solução periódica.

2) Se a matriz real A tem uma raiz característica imaginária pura $i\beta$ $(\beta\neq 0)$, existe um plano pela origem, invariante pelo fluxo, e tôdas as soluções por pontos dêsse plano são perodicas.

§8 - PONTOS CRÍTICOS HIPERBÓLICOS. ESTABILIDADE LOCAL DE SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Seja $\dot{x}^i = f^i(x^1,\ldots,x^n)$, $i=1,2,\ldots,n$ (42)

um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias em que as f^i e suas derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ existem e são contínuas num aberto Δ de R^n.

Seja $a \in \Delta$ um <u>ponto crítico</u> do sistema (42), isto é, um ponto que anula os segundos membros ou seja $f^i(a) = 0$, $i=1,2,\ldots,n$. Matricialmente, podemos escrever $\dot{x} = f(x)$ para representar o sistema (42) e aplicando a fórmula de Taylor para $f(x)$ teremos:

$$f(x) = f(a) + A(x-a)' + r(x)$$

em que $f(a) = 0$, $r(a) = 0$ e $dr(a) = 0$, donde

$$f(x) = A(x-a) + r(x)$$

para todo x numa vizinhança U de $a \in \Delta$. A matriz A é a matriz jacobiana $(\frac{\partial f^i}{\partial x^j})$ calculada para $x = a$. No que segue, nada perderemos, em generalidade, se supuzermos $a = 0$, o que pode ser obtido por uma translação de eixos. A expressão local de $f(x)$ resultará então

$$f(x) = Ax + r(x), \quad r(0) = 0 \quad e \quad dr(0) = 0.$$

A origem $a = 0$ diz-se um <u>ponto crítico hiperbólico</u> se tôdas as raizes características de A tiverem parte real não nula. Nos Exemplos 14, 15, 16 e 17 a origem é um ponto crítico hiperbólico o que não acontece no Exemplo 14. Um ponto crítico hiperbólico chama-se um <u>poço</u> se tôdas as raizes características têm parte real negativa; uma fonte se tôdas as raizes características têm parte real positiva e um <u>ponto de sela</u> nos demais casos. Segue do que foi dito que, se o ponto crítico é hiperbólico, a matriz A tem determinante não nulo, isto é, A é não singular. Se $x^i = \varphi^i(y^1,\ldots,y^n)$ é uma mudança de coordenadas de classe C^2 válida nas vizinhanças da origem, $\varphi^i(0,\ldots,0) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, teremos $(\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j})$ não singular em todos os pontos onde vale a mudança de coordenadas. Nas novas coordenadas teremos

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}\,\dot{y}_j = f^i(\varphi^1(y^1,\ldots,y^n),\ldots,\varphi^n(y^1,\ldots,y^n))$$

e matricialmente

$$\dot{y} = M^{-1}(y).f(\varphi(y)),$$

$M^{-1}(y)$ sendo a inversa da matriz $M(y) = (\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j})$. Aplicando a fórmula de Taylor teremos localmente $\dot{y} = By + \tilde{r}(y)$ em que $B = M^{-1}(0)AM(0)$, isto é, a matriz B é semelhante à A e conseqüentemente suas raizes características são as mesmas da matriz A. Tal conclusão mostra que o conceito de ponto crítico hiperbólico é independente do sistema de coordenadas utilizado para sua definição. Olhando para o sistema (42) como um campo de vetores em Δ, podemos concluir que o conceito de ponto crítico hiperbólico depende ùnicamente do campo pelo qual êle se representa num dado sistema de coordenadas.

Sejam F e G dois campos de vetores de classe C^k, $k \geq 1$, definidos num mesmo aberto Δ de R^n, isto é, os segundos membros das equações diferenciais que êles definem são de classe C^k em Δ. Sejam a e b pontos críticos de F e G respectivamente, isto é, $F(a) = G(b) = 0$. Diz-se que o par (F,a) é localmente equivalente ao par (G,b) se existe um homeomorfismo

$$h: V \to W$$

de uma vizinhança aberta V de a sôbre uma vizinhança W de b tal que $h(a) = b$ e que transforma trajetórias de F em V sôbre trajetórias de G em W. Note-se, por exemplo, que no caso dos Exemplos 13, 14, 15 e 16 não pode haver equivalência local entre o primeiro caso e qualquer um dos outros três pois no Exemplo 13 as órbitas são compactas nas vizinhanças de zero o que não acontece nos demais.

Suponhamos que os pontos críticos a e b de F

e G sejam ambos fontes ou ambos poços. Vamos aqui repetir a prova da seguinte proposição ([3]):

PROPOSIÇÃO 9 - Se a e b são fontes (poços) então (F,a) e (G,b) são localmente equivalentes.

<u>Prova</u>: Mostremos inicialmente que existe uma esfera S^{n-1}, de raio suficientemente pequeno, centrada em a e as trajetórias de F são transversais à S^{n-1}. Vamos estudar o caso em que a é uma fonte, isto é, por uma translação conveniente tem-se para F nas vizinhanças de a

$$\dot{x} = Ax + f(x)$$

$f(0) = 0$, $df_0 = 0$ e tôdas as raizes características de A têm parte real positiva. Consideremos a distância ρ de um ponto $x = (x^1,\ldots,x^n)$ à origem: $\rho^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Para ρ suficientemente pequeno iremos ter $\frac{d\rho}{dt} > 0$ ao longo das trajetórias. O Teorema 10 que dá a forma canônica de Jordan é suposto já utilizado, isto é, A já está na forma canônica; segundo as notações dêsse teorema temos todos os α_j e ou λ_j positivos e seja $\mu = \text{mínimo}\ \{\alpha_j, \lambda_j\}$. Se $x = x(t)$ é uma trajetória qualquer teremos $\rho(x(t))\frac{d\rho(x(t))}{dt} = x^1\dot{x}^1 + \ldots + x^n\dot{x}^n$ e portanto

? $H(0)\cdot X$

$$\rho(x(t))\frac{d\rho(x(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\xi_j (x^j)^2 + Q(x^1,\ldots,x^n) + 0(\rho)$$

onde ξ_j ou é λ_j ou é α_j e Q é uma forma quadrática com coeficientes e; $O(\rho)$ é uma expressão tal que $\frac{O(\rho)}{\rho^2}$ vai a zero quando ρ tende a zero. Conseqüentemente

$$\rho(x(t))\,\frac{d\rho(x(t))}{dt} \geq \mu[\rho(x(t))]^2+Q(x^1,\ldots,x^n)+O(\rho).$$

Como todos os coeficientes de Q são iguais à e temos que $Q = e\bar{Q}$ onde $\bar{Q}$ é também forma quadrática. Como $\frac{\bar{Q}(x)}{\rho^2} = \bar{Q}(\frac{x}{\rho})$ conclue-se que $\frac{\bar{Q}(x)}{\rho^2}$ assume um máximo e um mínimo, logo $|\frac{\bar{Q}(x)}{\rho^2}| < k$, $k > 0$. Segue então que

$$\frac{1}{\rho(x(t))} \cdot \frac{d\rho(x(t))}{dt} \geq \mu + e\,\frac{\bar{Q}}{\rho^2} + \frac{O(\rho)}{\rho^2}$$

e para e suficientemente pequeno $|e\,\frac{\bar{Q}}{\rho^2}| < (\frac{\mu}{2})$ donde

$$\frac{\mu}{2} < \mu + \frac{e\bar{Q}}{\rho^2} < \frac{3\mu}{2},$$

isto é,

$$\frac{1}{\rho(x(t))}\,\frac{d\rho(x(t))}{dt} > \frac{\mu}{2} + \frac{O(\rho)}{\rho^2}$$

e como para ρ suficientemente pequeno o segundo membro é positivo tem-se que para $\rho \leq \rho_o$, $\frac{d\rho(x(t))}{dt} > 0$, isto é, $\rho(x(t))$ é estritamente crescente, $\rho \leq \rho_o$. As trajetórias são transversais às esferas de raio $\leq \rho_o$ pois

$$\langle x(t),\dot{x}(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\langle x(t),x(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}[\rho(x(t))]^2 =$$

$$= \rho(x(t)).\frac{d\rho(x(t))}{dt} > 0.$$

Passando agora à prova pròpriamente dita da Proposição 9 consideraremos S_1 e S_2, duas esferas de raios ρ_1 e ρ_2 transversais às trajetórias de F e G e sejam B_1 e B_2 as bolas respectivas. Se $f:S_1 \to S_2$ fôr um homeomorfismo arbitrário, poderemos a partir dêle definir um homeomorfismo

$$h:B_1 \to B_2$$

do seguinte modo: dado $x_1 \in B_1$ êle determina o ponto $\bar{x}_1$ onde a trajetória de F por x_1 atinge S_1; define-se o par $(f(\bar{x}_1),t_1)$ em que t_1 é o tempo gasto pela trajetória entre x_1 e $\bar{x}_1$. A partir dêsse par determina-se um único ponto $h(x_1)$ em B_2 de modo que a trajetória de G por $f(x_1)$ leve o tempo $(-t_1)$ para atingir $h(x_1)$. A prova está completa porque h transforma trajetórias de F nas vizinhanças de a em trajetórias de G nas vizinhanças de b, e além disso preserva os tempos. A prova para "poços" faz-se de modo análogo.

Indiquemos agora por $\mathfrak{X}(L)$ o conjunto de tôdas as matrizes quadradas reais de ordem n. Se A e B pertencem à $\mathfrak{X}(L)$ chama-se distância entre A e B o número $d(A,B) = \|A-B\|$, norma de $(A-B)$. Trata-se de uma distância que define em $\mathfrak{X}(L)$ uma estrutura de espaço métrico completo. A cada matriz A corresponde um sistema linear autônomo de expressão matricial $\dot{x} = Ax$, e reciprocamente.

O campo de vetores determinado por $\dot{x} = Ax$ será denotado por $\tilde{A}$.

Seja G_o o subconjunto de $\mathfrak{X}(L)$ constituido das matrizes não singulares; G_o é um aberto de $\mathfrak{X}(L)$. Por G_1 indicaremos a totalidade das matrizes de G_o que têm as raizes características com parte real não nula. Tem-se òbviamente $G_1 \subset G_o \subset \mathfrak{X}(L)$.

PROPOSIÇÃO 10 - G_1 é aberto e denso em $\mathfrak{X}(L)$; em particular G_o é aberto e denso em $\mathfrak{X}(L)$.

<u>Prova</u>: Consideremos a aplicação $\psi_2 : (G_o \times \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definida por $\psi_2(X,\alpha) = \det(X-\alpha I)$, $\mathbb{C}$ indicando o conjunto dos números complexos; se $X \in G_o$ é da forma e^A com $A \in G_1$ e se $\mu \in S^1$ (círculo unitário de $\mathbb{C}$) tem-se $\psi_2(e^A,\mu) \neq 0$ logo como ψ_2 é contínua existem uma vizinhança $\mathbb{U}$ de e^A e uma vizinhança U de μ tais que
? $(Y,\sigma) \in \mathbb{U} \times U$ acarreta $\psi_2(Y,\sigma) = \det(Y-\sigma I) \neq 0$. Como S^1 é compacto existem uma vizinhança ϑ de e^A e uma vizinhança V de S^1 de modo que $(Y,\sigma) \in \vartheta \times V$ acarreta $\det(Y-\sigma I) \neq 0$. Consideremos agora a função

$$\psi_1 : \mathfrak{X}(L) \times \mathbb{C} \to (G_o \times \mathbb{C})$$

definida por $\psi_1(Z,\lambda) = (e^Z, e^\lambda)$. Da continuidade de ψ_1, dada a vizinhança $\vartheta \times V$ de $\{e^A\} \times S^1$, existe uma vizinhança de A tal que todo B nessa vizinhança está em G^1.

Então G_1 é aberto em $\mathfrak{X}(L)$.

Se $M \in \mathfrak{X}(L)$ e λ é raiz característica de M segue imediatamente que $(\lambda+\epsilon)$ é raiz característica de $(M+\epsilon I)$. Conseqüentemente, escolhendo-se $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tôdas as matrizes $(M+\epsilon I)$ estarão em G_1 o que prova que G_1 é denso em $\mathfrak{X}(L)$. Diremos que $A \in \mathfrak{X}(L)$ é <u>localmente estruturalmente estável</u> se existe uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de A em $\mathfrak{X}(L)$ tal que $(\tilde{B},0)$ é localmente equivalente à $(\tilde{A},0)$ para todo $B \in \mathfrak{U}$.

TEOREMA 12 - A matriz A de $\mathfrak{X}(L)$ é localmente estruturalmente estável se, e sòmente se, A pertence à G_1.

<u>Prova</u>: Suponhamos inicialmente que A seja localmente estruturalmente estável; então existe uma vizinhança $\mathfrak{U}$ de A e $B \in G_1$ nessa vizinhança (G_1 é denso em $\mathfrak{X}(L)$) tal que $(\tilde{B},0)$ é localmente equivalente à $(\tilde{A},0)$. Então existe um homeomorfismo $h: V \to W$ de uma vizinhança aberta V de 0 sôbre uma vizinhança W de 0, $h(0)=0$, e que transforma trajetórias de $\tilde{A}$ em V sôbre trajetórias de $\tilde{B}$ em W. Se A não pertence à G_1 existe uma raiz característica de A no eixo imaginário; seja $i\beta$ essa raiz. Se $\beta = 0$ existe uma reta pela origem tôda formada de pontos críticos de A; como h transforma tra

jetórias em trajetórias, todos os pontos de V sôbre essa reta serão transformados em 0 o que mostraria ser h não injetora o que seria absurdo. Se $\beta \neq 0$ então de acôrdo com o Exercício 2 do §7, existe um plano pela origem e tôdas as soluções de $\tilde{A}$ nesse plano são periódicas; por outro lado pelo Exercício 1 do §7, o campo $\tilde{B}$ não admite solução periódica. Como h transforma trajetórias em trajetórias isto levar-nos-ia a um absurdo. Então $A \in G_1$.

Recìprocamente, seja A um elemento de G_1 e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de A em G_1 de modo que se A tem k raizes com parte real negativa (contadas com sua multiplicidade), todo $B \in \mathcal{U}$ terá também o mesmo número k de raizes com parte real negativa. Pelo Teorema 11, cada $B \in \mathcal{U}$ determina uma decomposição de R^n em soma direta $E^1(B) \oplus E^2(B)$, a dimensão de $E^1(B)$ sendo k, de modo que o fluxo deixa $E^1(B)$ e $E^2(B)$ invariantes e como conseqüência a origem em $E^1(B)$ é um "poço" para a restrição do campo de vetores $\tilde{B}$ à $E^1(B)$ enquanto que é uma "fonte" para a restrição do campo $\tilde{B}$ à $E^2(B)$. Em particular, como $A \in \mathcal{U}$ temos também a decomposição $E^1(A) \oplus E^2(A)$ com as propriedades descritas. Seja h_1 um homeomorfismo local relativo ao par de fontes de $E^1(A)$ e $E^1(B)$ e h_2 um homeomorfismo local relativo ao par de poços de $E^2(A)$ e $E^2(B)$; h_1 e h_2 têm sua existência garantida pela Proposição 9:

$$h_1 : V_1 \to W_1$$
$$h_2 : V_2 \to W_2$$

Seja $h: V_1 \times V_2 \to W_1 \times W_2$ a aplicação definida do seguinte modo: para cada $x = (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ define-se $h(x) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$. h é um homeomorfismo local e transforma trajetórias de $\widetilde{A}$ em trajetórias de $\widetilde{B}$ o que completa a prova do teorema.

§9 - VARIEDADES ESTÁVEIS E INSTÁVEIS DE UM PONTO CRÍTICO HIPERBÓLICO. TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA LOCAL ENTRE PONTOS CRÍTICOS HIPERBÓLICOS

A finalidade dêste parágrafo é mostrar aos estudantes que quizerem prosseguir seus estudos em assuntos ligados à teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, que os resultados principais obtidos no parágrafo anterior generalizam-se para sistemas autônomos não lineares. Não daremos nenhuma prova do que se disser neste parágrafo. Maiores detalhes podem ser encontrados em [3].

Seja a um ponto crítico hiperbólico de um campo de vetores F (ver §8). Suponhamos que a matriz jacobiana de F em a possua s valores característicos com parte real negativa e u valores característicos com parte real positiva, contados com sua multiplicidade; então $s+u = n$ e diremos que a é do tipo (s,u).

Demonstra-se (ver [4]) que existe uma vizinhança V de a tal que o conjunto $W^s(V)$, constituido dos pontos $q \in V$ tais que a trajetória de F por q para $t = 0$ permanece em V para todo $t \geq 0$ e tende à a quando t tende a $+\infty$, é uma subvariedade regularmente imersa em V, de dimensão s. Mudando t por $-t$ obteremos uma subvariedade $W^u(V)$ de V de dimensão u. A matriz jacobiana em a determina uma soma direta $R = E^u \oplus E^s$ como foi visto no parágrafo anterior. O espaço tangente à $W^u(V)$ no ponto a é E^u enquanto que o de $W^s(V)$ no ponto a é E^s. As duas variedades $W^u(V)$ e $W^s(V)$ cortam-se, portanto, transversalmente em a, que é o único ponto comum à ambas. O teorema que enunciaremos agora é devido originalmente à Hartman e Grobman que deram provas analíticas. Para um prova geométrica devida à Palis ver [3].

TEOREMA 13 - Sejam (F,a) e (G,b) dois pares tais que a é ponto crítico hiperbólico do campo de vetores F e b é ponto crítico hiperbólico do campo de vetores G, ambos do tipo (s,u). Então (F,a) e (G,b) são localmente equivalentes. Em particular (F,a) é localmente equivalente à $(\tilde{A},a)$, $\tilde{A}$ sendo o campo de vetores correspondente à matriz jacobiana A de F no ponto crítico a.

A idéia da prova está em desfrutar do fato que o fluxo de F restrito à $W^u(V)$ é tal que a é uma fonte enquanto que a é um poço para o fluxo de F restrito à $W^s(V)$. Procedendo-se de modo semelhante nas vizinhanças de b poderemos aplicar a Proposição 9 como foi feito no Teorema 12. A partir dos homeomorfismos locais entre as fontes a e b e entre os poços a e b constroe-se um homeomorfismo local que fóra das variedades estáveis e instáveis, também transformará trajetórias em trajetórias.

§10 - TEOREMAS DE POINCARÉ-BENDIXON NA ESFERA

Seja S^2 a esfera de raio 1 de R^3, isto é, o conjunto dos pontos $(x,y,z) \in R^3$ tais que $x^2+y^2+z^2 = 1$. Poderemos supor, sem perda de generalidade, que todo campo de vetores X em S^2 provem de um campo de vetores $\vec{v}$ definido num aberto Δ de R^3 que contenha S^2. O campo $\vec{v}$ será pois da forma

$$\vec{v} = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

em que as funções f_1, f_2 e f_3 são de classe C^k em Δ, $k \geq 1$. Diremos então que tal campo X em S^2 é de classe C^k. Tôdas as trajetórias de X são, já que S^2 é compacta, definidas para todo t, $-\infty < t < +\infty$. Seja $\gamma = \gamma(t)$ uma trajetória de X em S^2; o <u>conjunto ω-limite de γ</u>, $\omega(\gamma)$, é definido como o conjunto de todos os pontos $p \in S^2$ tais que existe uma seqüência $\{t_i\}$, $i=1,2,\ldots$, com $t_i \to \infty$ e $\gamma(t_i) \to p$ quando $i \to \infty$. Anàlogamente define-se o <u>conjunto α-limite de γ</u>, $\alpha(\gamma)$, como o conjunto dos pontos $p \in S^2$ tais que existe uma seqüência $\{t_i\}$, $i=1,2,\ldots$, com $t_i \to -\infty$ e $\gamma(t_i) \to p$ quando $i \to \infty$.

TEOREMA 14 - Seja $\gamma = \gamma(t)$ uma trajetória de um campo de vetores X de classe C^1, definido em S^2. Então $\omega(\gamma)$ e $\alpha(\gamma)$ são não vazios, compactos, conexos e invariantes (reuniões de trajetórias).

Prova: Tomada arbitràriamente uma seqüência $\{t_i\}$ com $t_i \to +\infty$ quando $i \to \infty$, a seqüência correspondente $\{\gamma(t_i)\}$ está num compacto (S^2), logo admite uma subseqüência convergente e daí conclue-se que $\omega(\gamma) \neq \phi$; de modo análogo prova-se que $\alpha(\gamma) \neq \phi$. Para provar que $\omega(\gamma)$ é compacto é suficiente provar que é fechado; seja então q_n uma seqüência de pontos de $\omega(\gamma)$ que converge para um ponto q; dado $e > 0$ existe $n_o(e)$ tal que para $n \geq n_o(e)$ tem-se $d(q_n,q) < \frac{e}{2}$, $d(x,y)$ indicando a distância euclideana de R^3 aplicada a pontos x,y de S^2. Como $q_n \in \omega(\gamma)$, existe $t_n > n$ tal que $d(\gamma(t_n),q_n) < \frac{1}{n}$ e portanto à $e > 0$ corresponde N_e tal que $n > N_e$ acarreta $d(\gamma(t_n),q) \leq d(\gamma(t_n),q_n) + d(q_n,q) < e$; isto prova que $q \in \omega(\gamma)$ donde $\omega(\gamma)$ é fechado. Raciocínio análogo prova que $\alpha(\gamma)$ é compacto. Suponhamos que $\omega(\gamma)$ não seja conexo, isto é, $\omega(\gamma) = M \cup N$ em que M e N são dois fechados (logo compactos) não vazios e disjuntos. Seja $\delta > 0$ a distância entre M e N. A curva $\gamma(t)$ para um t suficientemente grande é tal que $d(\gamma(t),M) < \frac{\delta}{2}$ e também para um $\tilde{t}$ suficientemente grande $d(\gamma(\tilde{t}),N) < \frac{\delta}{2}$, isto é, $d(\gamma(\tilde{t}),M) > \frac{\delta}{2}$; como $d(\gamma(t),M)$ é função contínua de t existirá uma seqüência t_n tal que $d(\gamma(t_n),M) = \frac{\delta}{2}$ e portanto para uma subseqüência convergente, $\gamma(t_n) \to q$, teremos $d(q,M) = \frac{\delta}{2}$; o ponto $q \in \omega(\gamma)$ não estaria nem em M nem em N donde o absurdo. $\omega(\gamma)$ e $\alpha(\gamma)$ são portanto conexos. Finalmente, seja $q \in \omega(\gamma)$ e $\varphi(t,q)$ a trajetória que passa pelo ponto q para $t = 0$; como $q = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\tau_n,p)$ temos para t fixo que $\varphi(t,q) \in$ $\in \omega(\gamma)$ pois $\varphi(t,q) = \varphi(t, \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\tau_n,p)) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t,\varphi(\tau_n,p))$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t+\tau_n,p)$. $= \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\tau_n, p) = q \in \omega(\gamma)$

Indicaremos por X_p o vetor do campo X que é tangente à esfera S^2 no ponto p. Se $X_p \neq 0$, isto é, se p não é crítico, diremos que p é <u>regular</u>.

Uma curva diferenciável contida em S^2 é uma <u>transversal ao campo X</u> se, para todo ponto p da curva, o vetor X_p e o vetor tangente à curva em p são linearmente independentes e se as trajetórias (em S^2) cortam a curva sempre no "<u>mesmo sentido</u>". O significado de cortar no "mesmo sentido" corresponde a constatar se isso acontece com as projeções em um dos planos coordenados (xy), (xz) ou (yz). Assim, se $p \in S^2$ é um ponto regular ($X_p \neq 0$), é fácil provar que pelo ponto p passa uma transversal ao campo X que admite p como ponto interno.

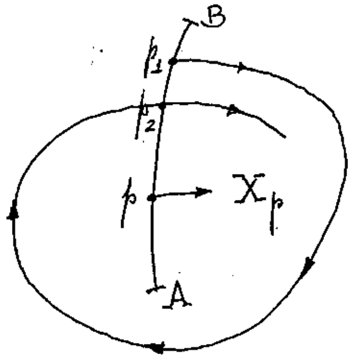
TEOREMA 15 (Poincaré-Bendixon) - Seja $\gamma(t)$ uma trajetória de um campo X de classe C^1 em S^2. Se $\gamma(t)$ é periódica então $\omega(\gamma) = \gamma$. Se $\omega(\gamma)$ só possue pontos regulares então $\omega(\gamma)$ é uma trajetória periódica.

<u>Prova</u>: Se $\gamma = \gamma(t)$ é periódica, é claro que $\gamma \subset \omega(\gamma)$.

Por outro lado, dado $p \in \omega(\gamma)$, $p = \lim_{i\to\infty} \gamma(t_i)$, $t_i \to \infty$, e como γ é fechada, $p \in \gamma$.

Suponhamos agora que $\gamma(t)$ não seja periódica e que $\omega(\gamma)$ só contém pontos regulares. É claro que, neste caso, $\gamma(t)$ não é um ponto crítico, pois tal ponto teria que pertencer à $\omega(\gamma)$. Seja $p \in \omega(\gamma)$ que não é crítico e AB uma transversal contendo p em seu interior.

É fácil provar que existe uma seqüência de pontos



$p_1 = \gamma(t_1)$, $p_2 = \gamma(t_2), \ldots, p_n = \gamma(t_n), \ldots$, $t_n \to \infty$, todos sôbre a transversal AB e tendendo para o ponto p.

Claro está que p_1 e p_2 estão de um mesmo lado de AB

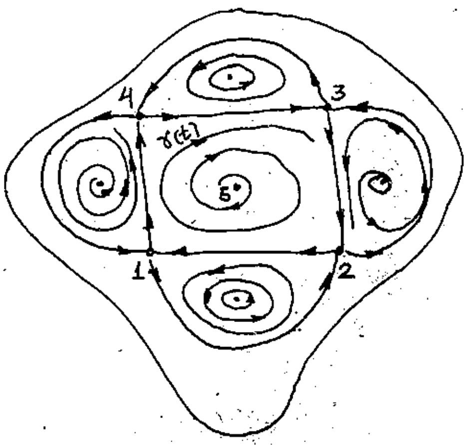
relativamente à p, por exemplo, entre p e B, porque se estivessem em lados opostos, a trajetória $\gamma(t)$ cortaria AB em p_3 no sentido contrário (e AB não seria transversal) ou p deixará de pertencer a $\omega(\gamma)$. Também fica claro que p_3 não pode estar entre p_1 e p_2 e estará certamente entre p_2 e p. Resulta que a seqüência (p_n) converge para p "monotônicamente". Seja agora δ a trajetória do campo X que começa em p para $t = 0$. Como $\omega(\gamma)$ é invariante teremos certamente $\delta \subset \omega(\gamma)$. A trajetória δ não é um ponto crítico pois $X_p \neq 0$; por outro lado δ intercepta AB apenas em p porquanto se cortasse AB entre p e p_2, o ponto p não estaria em $\omega(\gamma)$ e se δ cortasse AB entre A e p ou $\gamma = \delta$ (e teríamos $p \notin \omega(\gamma)$) ou $\gamma \neq \delta$ e δ admitiria entre A e p um ponto $\bar{p} \in \omega(\delta)$ que deveria pertencer necessàriamente à $\omega(\gamma)$ o que seria também òbviamente impossível. A trajetória δ é portanto periódica. Provemos agora que $\delta = \omega(\gamma)$. Seja então $q \in \omega(\gamma)$; o ponto q não poderá ser interior à região determinada por δ à qual pertence A pois $\gamma = \gamma(t)$ teria que interceptar δ e seria portanto periódica. O ponto q está na região determinada por δ à qual pertence o ponto B. Como por hipótese $X_q \neq 0$, constroe-se, como na situação acima, uma transversal CD ao campo X, pelo ponto q. Sendo p'_n o primeiro ponto após $p_n = \gamma(t_n)$ em que $\gamma(t)$ corta CD teremos a seqüência (p_n') convergindo para o ponto q, "monotônicamente". A trajetória $\tilde{\delta}$ pelo ponto q é também periódica e passará necessàriamente pelo ponto p já que, do contrário, ela impediria que p fôsse limite da seqüência (p_n). Então $\tilde{\delta} = \delta$, isto é, $q \in \delta$ o que completa a prova do Teorema 15.

TEOREMA 16 (Poincaré-Bendixon) - Seja X um campo de vetores de classe C^1 em S^2 com um número finito de pontos críticos. Se $\gamma = \gamma(t)$ é uma trajetória de X tal que $\omega(\gamma)$ contém pontos críticos de X então ou $\omega(\gamma)$ é um ponto crítico ou consiste de um número finito de pontos críticos de X e de um conjunto de órbitas cada uma delas tendendo para um dêsses pontos críticos quando $t \to \pm\infty$.

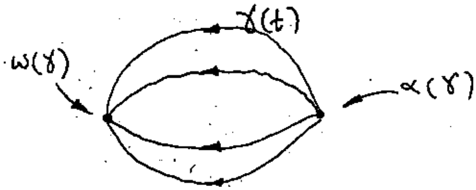
<u>Prova</u>: Se $\omega(\gamma)$ não contém pontos regulares então $\omega(\gamma)$ é um único ponto pois tem que ser conexo. Se, ao contrário, $\omega(\gamma)$ contém pontos críticos e pontos regulares, $\omega(\gamma)$ consistirá de um número finito de pontos críticos de X e de órbitas limites pois $\omega(\gamma)$ é invariante. Seja C_o uma dessas órbitas limites que passa por um ponto regular de $\omega(\gamma)$. O conjunto $\omega(C_o)$ não pode conter ponto regular porque tal ponto regular pertenceria à

$\omega(\gamma)$ e por um argumento análogo ao usado no Teorema 15 mostraríamos que C_o seria periódica; isto ocorrendo obtém-se $\omega(\gamma) = C_o$, ([4] pg. 394) o que é absurdo pois $\omega(\gamma)$ não teria pontos críticos. Já que $\omega(C_o)$ não contém pontos regulares, como êle é conexo será um único ponto. De modo análogo $\alpha(C_o)$ será também um único ponto. O teorema está completamente provado.

As figuras abaixo traduzem alguns tipos de situação possível para o caso do Teorema 16:



$$\begin{cases} \omega(\gamma) = \{1,2,3,4;\widehat{12},\widehat{23},\widehat{34},\widehat{41}\} \\ \alpha(\gamma) = \{5\} \end{cases}$$



BIBLIOGRAFIA

[1] - L. PONTRIAGUINE - Équations Différentielles Ordinaires, Éditions Mir. Moscou, 1969.

[2] - J. W. MILNOR - Topology from the Differentiable View point. Un.Press of Virginia, 1965.

[3] - M. M. PEIXOTO - Teoria Geométrica das Equações Diferenciais, IMPA, julho de 1969.

[4] - E. A. CODDINGTON
N. LEVINSON - Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, 1955.