TEXTOS DE MATEMÁTICA
COLEÇÃO PUBLICADA SOB A DIREÇÃO DE
A. PEREIRA GOMES

Nº. 8

APLICAÇÕES DA TOPOLOGIA À ANÁLISE

POR

CHAIM S. HÖNIG

CURSO MINISTRADO NO 3º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA
FORTALEZA - CEARÁ - 1961

INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE DO RECIFE

1961

Trabalho mimeográfico
de
FERNANDO FIGUEIREDO
Rua Pe. Gabriel Mousinho n.º 47
Transv. à Estrada dos Remédios
Madalena

- I N T R O D U Ç Ã O -

*

O estudo da Topologia Geral, ou pelo menos da topologia dos espaços métricos, ha muitos anos já se impôs no Brasil; nos lembramos de pelo menos uma duzia de Faculdades de Filosofia ou Institutos em que esta disciplina é tratada, quer em cursos, quer em seminários. Muitos dos que aprendem a linguagem da topologia geral vão posteriormente aplicá-la no estudo da Análise Funcional, da Topologia Algébrica, da Geometria Diferencial etc. Para aquêles porém, que passam a se dedicar a campos da matemática que não utilizam a topologia ou que simplesmente não continuam os seus estudos de matemática avançada, que é o caso da maioria dos alunos das Faculdades de Filosofia, a topologia se reduz simplesmente a uma linguagem da qual muitas vêzes êles não conhecem nenhuma aplicação em ramos da Matemática que lhes sejam familiares.

Esta situação, que haviamos constatado ha muitos anos, nos deu a idéia de escrever um pequeno texto de topologia visando principalmente as suas aplicações à Análise. Era nossa idéia dar um curso com êste espírito no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática e propôr a um algebrista que desse um curso elementar de Álgebra, tendo o mesmo cunho. Êstes dois cursos formariam a parte "elementar" do 1º colóquio. Porém, a fim de não sobrecarregar demais os traba lhos (havia mais de 10 cursos esboçados), a comissão de organização do 1º colóquio resolveu levar avante sòmente os cursos de nivel médio, deixando de lado tanto os de nivel elementar quanto os de nivel avançado.

Assim é sòmente agora, no 3º colóquio, que podemos realizar a nossa idéia de dar um curso de aplicações da Topologia Geral à Análise Matemática.

O presente volume foi escrito especialmente para o 3º Colóquio Brasileiro de Matemática e a maioria dos seus capítulos foram prèviamente expostos no Seminário de Análise Funcional (ou em seus "subseminários") que orientamos na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo; as exposições foram feitas por nós ou por outros participantes do referido seminário.

As aplicações da Topologia à Análise que expomos neste volume, estão ligadas a cinco teoremas da Topologia: o Teorema do ponto fixo, de Banach; o Teorema de Baire; o teorema de Brouwer, o teorema de Stone-Weierstrass; o Teorema de Ascoli. Êles dão lugar aos cinco capítulos dêste curso (além do capítulo de topologia geral). As aplicações são feitas primordialmente à Análise Matemática se bem que também tenhamos incluido algumas aplicações à Análise Funcional. Evitamos porém usar os formalismos da Análise Funcional; os poucos resultados sôbre espaços de Banach e de Hilbert que utilisamos, principalmente nos exemplos e nas aplicações, estão agrupados em dois apêndices. Neste espírito enunciamos muitos resultados no R^n e no C^n apesar dos mesmos poderem ser extendidos fàcilmente a espaços de Banach, por exemplo. Evitamos também o uso da Integral de Lebesgue, que permitiria extender e completar muitos dos resultados, particularmente no Cap. VI.

Vamos comentar ràpidamente os diferentes capítulos dêste texto:

No 1º capítulo expomos os resultados de topologia geral que usamos nos capítulos subsequentes. Tratamos de dar demonstrações de tôdas as proposições, com exceção de três teoremas apenas, para cuja demonstração damos referências. Naturalmente, as nossas demonstrações são muito sucintas dando antes a êste capítulo um cunho de "aide-mémoire" do que de texto de estudos. O leitor que já teve um primeiro curso de topologia acompanhará fàcilmente estas demonstrações e poderá fazer as outras que não se encontram no texto, por serem sempre facil consequência das definições e de proposições imediatamente anteriores (com excessão, naturalmente, dos três teoremas a que aludimos acima).

No capítulo II demonstramos o Teorema de Banach dando a seguir inúmeras aplicações dêle. Os resultados dos §§ 2 e 4 podem ser extendidos a espaços de Banach, definindo-se a noção de aplicação diferenciável de um conjunto aberto de um espaço de Banach em outro. (vêr o livro de Dieudonné mencionado no capítulo II, ou, o livro de Ljusternik e Sobolew: "Elemente der Funktionalanalysis", Akademie-Verlag, Berlin, 1955). O Teorema de Banach admite diversas extenções que por sua vez dão lugar a novas aplicações na Aná lise; mencionemos apenas o recente artigo de Edelstein no Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 12 (1961), 7 .

No capítulo III usamos o Teorema de Baire para demonstrar a existência de funções numéricas contínuas definidas na reta e que não têm derivada em nenhum ponto. O teorema de Baire mostra mesmo que estas funções formam a "maioria" das funções contínuas de um intervalo $[a,b]$, no sentido de que as funções contínuas que têm derivada em pelo menos um ponto do intervalo $[a,b]$ formam um conjunto magro (reunião enumerável de conjuntos contidos em conjuntos fechados sem interior) o que não acontece com o seu complementar. Como segunda aplicação do teorema de Baire, demonstramos o teorema de Banach-Steinhaus para espaços de Banach. Lembremos ainda que o teorema de Baire é habitualmente usado para demonstrar que a bola unitária de um espaço de Hilbert é fracamente sequencialmente compacta.

O teorema de Brouwer, que demonstramos no capítulo IV, se extende ao R^n e pertence na realidade à Topologia Algébrica, isto é, é geralmente demonstrado com os recursos desta. A demonstração elementar que damos no caso particular $n=2$ é equivalente à demonstração elementar habitual, que utiliza a integração complexa e a fórmula de Cauchy (vêr o livro de Dieudonné).

O Teorema de Stone-Weierstrass é um teorema básico de muitos capítulos da Análise Funcional; como referência indiquemos, além do livro de Dieudonné, o livro de Loomis, "Abstract Harmonic Analysis", van Nostrand, 1953. Expomos muitas aplicações dêste teorema à Análise Matemática, à Teoria da Integração, à Teoria das Distribuições, aos Espaços de Hilbert etc. Deixamos de dar outras que usam outros recursos que os expostos neste curso; assim por exemplo, o teorema de Stone-Weiertrass permite demonstrar fàcilmente que tôda distribuição (no sentido de Schwartz) de suporte compacto é o limite de uma sequência de polinômios. O teorema de Stone-Weiertrass também aparece no estudo dos espectros de Álgebras de Banach, na Análise Harmônica sôbre grupos abelianos lòcalmente compactos etc.

No capítulo VI demonstramos o Teorema de Ascoli para aplicá-lo no estudo das equações integrais de núcleo contínuo e hermiteano. Os resultados que expomos têm uma aplicação muito elegante no estudo da equação de Sturm-Liouville (vêr o livro de Dieudonné). Como outras aplicações do teorema de Ascoli lembremos apenas uma das demonstrações usuais da existência de solução da equação diferencial $y' = f(x,y)$ (vêr O. Catunda, Curso de Análise Matemática, vol. VI, p. 60) e o estudo de funções quasi-periódicas e suas generalizações (vêr p. 47 do livro de Ljusternik e Sobolew citado acima).

Lamentamos que a exiguidade de tempo não nos tenha permitido a elaboração de um conjunto equilibrado de exercícios e problemas para incluí-los no texto.

Terminando, queremos deixar aqui os nossos agradecimentos ao Prof. Leopoldo Nachbin do IMPA que chamou a nossa atenção para o artigo de Lefschetz que expusemos no

capítulo IV e que também nos sugeriu a inclusão do Teorema de Ascoli, e suas aplicações às equações integrais, neste curso; ao Prof. Kurt Legrady da Universidade de Santiago (Chile) que chamou a nossa atenção para o artigo de Weissinger cujas demonstrações seguimos em algumas das aplicações do teorema do ponto fixo (capítulo II); ao Prof. Roberto Romano da Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas da Universidade de São Paulo que fez uma redação preliminar do capítulo VI.

Agradecemos especialmente à Srta. Myriam Monteiro Gondim, aluna do 4º ano da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, a quem se deve a redação quase total dos capítulos II, III e V, pela valiosa colaboração que dêste modo nos prestou.

Os nossos agradecimentos ao Prof. Alfrêdo Pereira Gomes pela inclusão do presente curso nos "Textos de Matemática" do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife e ao Sr. Fernando Figueiredo que não mediu esforços para que a impressão dêste texto ficasse pronta em tempo útil.

Chaim Samuel Hönig

Recife, junho de 1961

- ÍNDICE -

- * -

- N O T A Ç Õ E S -

*

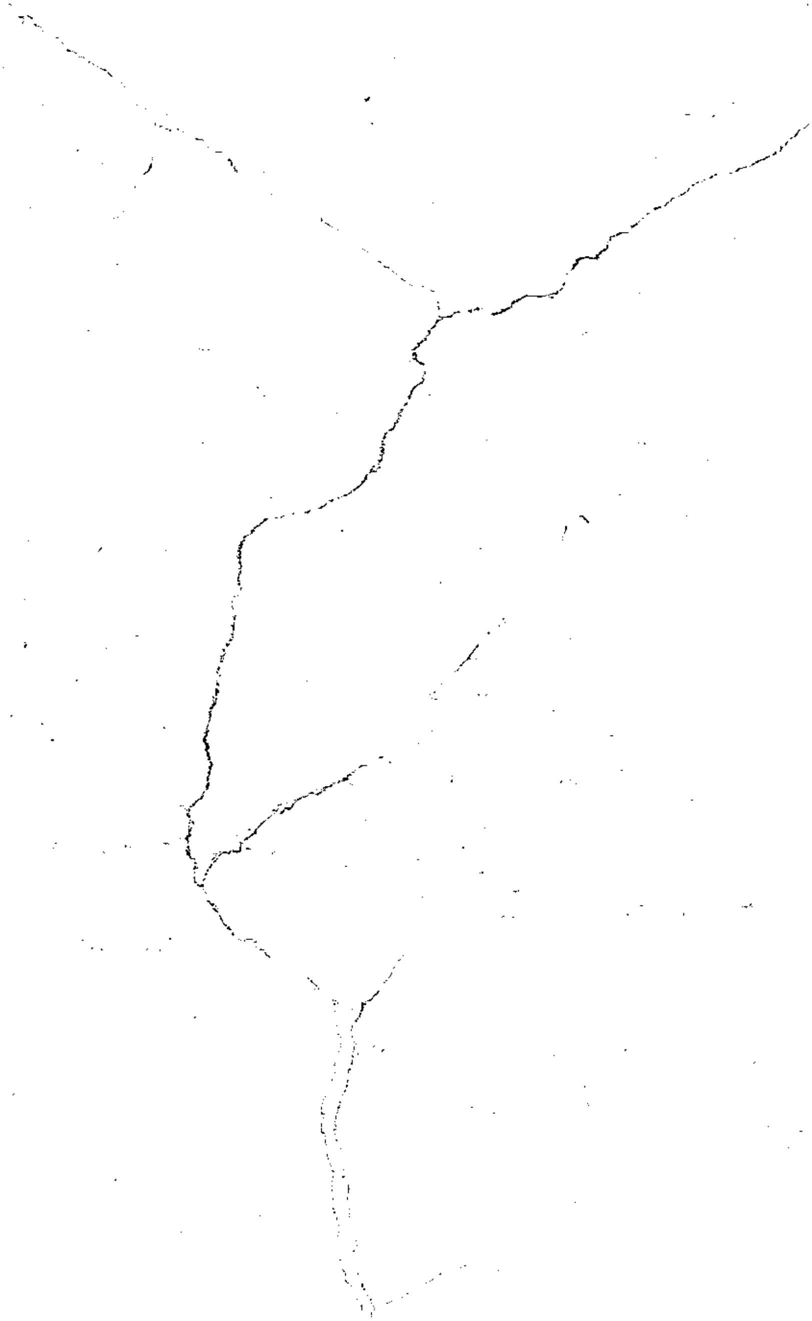
Usamos as notações habituais da teoria dos conjuntos (Nicolau) para as relações de pertinência e de inclusão, para a reunião e a intersecção de conjuntos, etc.

Lembremos que dados dois conjuntos A e B, indicamos por $\mathcal{F}(A,B)$ ou por B^A o conjunto das aplicações (funções) de A em B.

Indicamos por N o conjunto dos inteiros naturais, Z o conjunto dos inteiros relativos, R o conjunto dos números reais e C o conjunto dos números complexos. Para tôdo número complexo λ indicamos por $\bar{\lambda}$ o seu complexo conjugado.

Por <u>sequência</u> entendemos tanto uma sequência finita $(a_n)_{n=1,2,\ldots,m}$ como uma sequência infinita $(a_n)_{n\in N}$. Quando não houver perigo de confusão escrevemos simplesmente "a sequência a_n". Do mesmo modo falamos muitas vêzes na função $f(x)$ referindo-nos à função $x \in A \longrightarrow f(x) \in B$.

---*---



CAPÍTULO I

TOPOLOGIA GERAL

Neste capítulo apresentamos ràpidamente os principais resultados de topologia geral que precisamos nos capítulos seguintes.

A maioria dos resultados não triviais é acompanhada de uma demonstração.

§ 1 - Espaços Topológicos

Dar uma topologia sôbre um conjunto E é dar um conjunto ϑ de partes de E gozando das seguintes propriedades:

O_I - A reunião $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ de uma família qualquer de conjuntos elementos de ϑ ainda é um elemento de ϑ.

O_{IIa} - A intersecção $O = O_1 \cap O_2$ de dois conjuntos de ϑ ainda é um conjunto de ϑ.

O_{IIb} - $E \in \vartheta$.

Um conjunto E munido de uma topologia se chama espaço topológico. Os elementos de um espaço topológico em geral são chamados de pontos. Os conjuntos de ϑ são chamados de conjuntos abertos. Lembremos que $\bigcup_{i \in \emptyset} O_i = \emptyset$ e o conjunto vasio é portanto aberto.

Uma vizinhança de um conjunto A de um espaço topológico é um conjunto que contém um conjunto aberto que contém A. A intersecção de um número finito de vizinhanças de A é uma vizinhança de A.

1.1 - Um conjunto é aberto se e sòmente se êle é vizinhança de todos os seus pontos.

Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n \varepsilon N}$ de pontos de um espaço topológico converge para um ponto x (e escrevemos $x_n \longrightarrow x$) se qualquer vizinhança de x contém todos os x_n exceto um número finito dêles. Diz-se então que x é ponto limite da sequência x_n.

Dado um subconjunto A de um espaço topológico E indicamos com $\overset{\circ}{A}$ a reunião de todos os conjuntos abertos contidos em A; $\overset{\circ}{A}$ é portanto um conjunto aberto que chamamos de interior de A e os seus elementos chamamos de pontos interiores a A ; é imediato que

1.2 - $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$

1.3 - $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

Diz-se que um subconjunto F de um espaço topológico E é fechado se o seu complementar é aberto. Das propriedades O_I, O_{IIa} e O_{IIb} segue que

F_I - A intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

F_{IIa} - A reunião de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

F_{IIb} - O conjunto vasio é fechado.

A partir de uma distância sôbre E define-se uma topologia: um conjunto é aberto se com todo elemento êle contém uma bola aberta com centro neste elemento. É imediato que os conjuntos abertos assim definidos satisfazem os axiomas O_I e O_{IIb}; para demonstrar O_{IIa} basta demonstrar que

2.1 - Tôda bola aberta é um conjunto aberto.

<u>Demonstração</u>: dado $x \in B(x_o,a)$, tomando $b = a - d(x,x_o)$ segue da propriedade triangular da distância que $B(x,b) \subset B(x_o,a)$.

Um conjunto E com uma distância e a topologia deduzida desta distância é chamado de <u>espaço métrico</u>. Um espaço métrico é separado.

2.2 - Num espaço métrico tôda bola fechada é um conjunto fechado.

2.3 - A restrição da distância de um espaço métrico E a um subconjunto E' de E é uma distância que define sôbre E' a topologia induzida por E. pois uma $B' \subset E'$ é uma interseção de uma $B \subset E$, com E'; $O' = E' \cap O$

Uma sequência $(x_n)_{n \in N}$ de pontos de um espaço métrico converge para um ponto x se e sòmente se $d(x_n,x)$ tende para 0 quando $n \longrightarrow \infty$.

Uma sequência x_n de pontos de um espaço métrico é uma <u>sequência de Cauchy</u> se dado $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que para $n,m \geq n_o$ temos $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Tôda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

2.4 - Um subconjunto F de um espaço métrico E é fechado se e sòmente se com tôda sequência convergente F também contém o seu ponto limite.

Dizemos que um espaço métrico é <u>completo</u> se tôda sua sequência de Cauchy fôr convergente.

2.5 - Num espaço métrico completo E um subconjunto F é fechado se e sòmente se êle fôr um subespaço completo.

Dizemos que duas distâncias sôbre um conjunto E são <u>equivalentes</u> se elas definem a mesma topologia sôbre E (mas E pode ser completo em relação a uma das distâncias sem sê-lo em relação à outra!).

Dizemos que um subconjunto L de um espaço métrico E é <u>limitado</u> se êle está contido em alguma bola; pela propriedade triangular da distância isto equivale a dizer que $\sup_{x,y \in L} d(x,y) = \delta < \infty$ ou que $\sup_{x \in L} d(x,x_0) < \infty$ onde x_0 é um ponto qualquer de E. O número δ chamamos então de <u>diâmetro</u> de L.

Dizemos que uma aplicação <u>f</u> de um conjunto X num espaço métrico E é <u>limitada</u> se f(X) fôr um subconjunto limitado de E.

§ 3 - Compacidade

Um <u>recobrimento</u> (<u>aberto</u>) de um subconjunto A de um espaço topológico E, é uma família $(O_i)_{i \in I}$ de conjuntos (abertos) cuja reunião contêm A .

Diz-se que um espaço topológico separado E é <u>compacto</u> se êle satisfaz uma das condições equivalentes:

Diz-se que um ponto x é <u>aderente</u> a um conjunto A se tôda vizinhança de x contém pontos de A. Isto equivale a dizer que x não é interior a $\complement A$ e indicando com $\bar{A}$ o conjunto dos pontos aderentes a A temos portanto

1.4 - $\complement \bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$

e portanto

1.5 - O conjunto $\bar{A}$, que se chama de <u>aderência</u> de A, é fechado; êle é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém A.

De (1.4), (1.2) e (1.3) segue que

1.6 - $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

1.7 - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico E é <u>denso em E</u> (ou totalmente denso) se $\bar{A} = E$.

Dado um subconjunto E' de um espaço topológico E, o conjunto $\vartheta' = \{ O \cap E' \mid O \in \vartheta \}$ de partes de E' goza das propriedades O_I, O_{IIa} e O_{IIb} definindo uma topologia sôbre E' que se chama de <u>topologia induzida</u> por E. E' com esta topologia é chamado de <u>subespaço</u> de E.

1.8 - Os conjuntos fechados de E' são intersecções com E' de conjuntos fechados de E.

1.9 - As vizinhanças em E' de um ponto $x \in E'$ são as intersecções com E' das vizinhanças de x em E.

Um espaço topológico E é <u>separado</u> ou <u>de Haus-</u>

dorff se pontos distintos $x \neq y$ têm vizinhanças V_x e V_y sem pontos comuns.

1.10 - Um espaço topológico é separado se e sòmente se a intersecção de tôdas as vizinhanças fechadas de um ponto qualquer x se reduz a x.

Todo subespaço de um espaço separado é separado.

1.11 - Num espaço separado uma seqüência convergente têm um único ponto limite.

§ 2 - Espaços Métricos.

Uma distância sôbre um conjunto E é uma função $d:(x,y) \in E \times E \longrightarrow d(x,y) \in R$ que goza das seguintes propriedades:

d1 - $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ se e sòmente se $x = y$

d 2 - Para $x,y \in E$ temos $d(x,y) = d(y,x)$

d 3 - (Propriedade triangular) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

O número real $d(x,y)$ se chama de distância de x a y. Dado $x_0 \in E$ e um número real $a > 0$ o conjunto

$$B(x_0,a) = \{ x \in E \mid d(x,x_0) < a \}$$

é chamado de bola aberta de centro x_0 e raio a. O conjunto

$$B[x_0,a] = \{ x \in E \mid d(x,x_0) \leq a \}$$

é chamado de bola fechada de centro x_0 e raio a.

(C) : Todo recobrimento aberto de E admite um subrecobrimento finito, isto é, dada uma família de conjuntos abertos $(C_i)_{i \in I}$ tal que $\bigcup_{i \in I} O_i = E$ existe um subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ tal que

$$O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} = E.$$

(C') : Dada uma família de conjuntos fechados $(F_i)_{i \in I}$ tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ existe uma subfamília finita $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ tal que $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset$.

Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico separado E é <u>compacto</u> se êle fôr um subespaço compacto.

3.1 - Um subconjunto A de um espaço separado E é compacto se e sòmente se todo recobrimento aberto de A (em E) admite um subrecobrimento finito.

3.2 - Num espaço separado a reunião de dois conjuntos compactos é um conjunto compacto.

3.3 - Num espaço separado todo subconjunto compacto é fechado.

<u>Demonstração</u>: se o subconjunto compacto K não fôsse fechado êle teria um ponto aderente $x \notin K$ (1.5); por (1.10) a intersecção $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \cap K$, $\mathcal{F}$ indicando o conjunto de tôdas as vizinhanças fechadas de x, é vazia sem que a intersecção de um número finito dês-

tes conjuntos possa ser vazia (pois $x \varepsilon \bar{K}$) o que é contrá rio a (C').

3.4 - Num espaço compacto um subconjunto é compacto se e sòmente se êle fôr fechado.

<u>Demonstração</u>: resta demonstrar que um subconjunto fechado F de um espaço compacto é compacto. Dado um recobrimento aberto $(O_i)_{i \varepsilon I}$ de F, os abertos O_i junto com o aberto $\complement F$ formam um recobrimento aberto de E, recobrimento êste que admite um subrecobrimento finito; os O_i que estão neste subrecobrimento finito formam evidentemente um recobrimento aberto de F e o resultado segue de (3.1).

Diz-se que um subconjunto A de um espaço separado E é <u>relativamente compacto</u> se a sua aderência $\bar{A}$ fôr compacta. A reunião de um número finito de conjuntos relativamente compactos é um conjunto relativamente compacto.

Diz-se que um espaço separado é <u>localmente compacto</u> se todo seu ponto têm uma vizinhança compacta.

3.5 - Num espaço métrico todo conjunto relativamente compacto A é limitado.

<u>Demonstração</u>: sinão as bolas abertas $B(x_o,n)$, $n \varepsilon N$, formariam um recobrimento aberto de $\bar{A}$ que não contém nenhum subrecobrimento finito de $\bar{A}$.

§ 4 - <u>Funções contínuas</u>

Dizemos que uma aplicação <u>f</u> de um espaço topo lógico E num espaço topológico E' é <u>contínua no ponto</u> $x_o \in E$ se dada qualquer vizinhança V' de $f(x_o)$ existe uma vizinhança V de x_o tal que $f(V) \subset V'$ ou ainda, se a imagem inversa $f^{-1}(V')$ de tôda vizinhança de $f(x_o)$ é uma vizinhança de x_o.

É imediato que

4.1 - Se f é contínua no ponto x_o então $x_o \in \bar{A}$ implica $f(x_o) \in \overline{f(A)}$.

Se a aplicação f fôr contínua em todos os pontos de E dizemos que ela é <u>contínua</u>.

4.2 - Se a aplicação f contínua então $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo subconjunto A de E.

4.3 - Dada uma aplicação f de um espaço topológico E num espaço topológico E', são equivalentes as seguintes propriedades:

a) A aplicação f é contínua.

b) A imagem inversa $O = f^{-1}(O')$ de qualquer conjunto aberto O' de E' é um conjunto aberto de E.

c) A imagem inversa $F = f^{-1}(F')$ de qualquer conjunto fechado F' de E' é um conjunto fechado de E.

<u>Demonstração</u>: de (1.1) segue que a) implica b) implicação inversa segue da definição de vizinhança. A equivalência de b) e c) se demonstra por passagem ao complementar.

4.4 - A restrição de uma aplicação contínua a um subespaço é contínua.

4.5 - Dada uma aplicação contínua $\underline{f}$ de um espaço separado E num espaço separado E', a imagem por $\underline{f}$ de todo conjunto compacto de E é um conjunto compacto de E'.

<u>Demonstração</u>: seja K compacto em E e $K' = f(K)$. Dado qualquer recobrimento aberto $(O'_i)_{i \in I}$ de K' os $O_i = f^{-1}(O'_i)$ formam um recobrimento aberto de K que admite um subrecobrimento finito $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ pois K é compacto; os $O'_{i_1}, \ldots, O'_{i_n}$ formam então um recobrimento aberto de K'.

4.6 - Dada uma aplicação contínua $\underline{f}$ de um espaço separado E num espaço separado E', a imagem por f de todo conjunto relativamente compacto de E é um conjunto relativamente compacto de E'.

<u>Demonstração</u>: segue de (4.2) e (4.5).

4.7 - Dada uma aplicação contínua $\underline{f}$ de um espaço topológico E num espaço topológico E', e uma aplicação contínua $\underline{g}$ de E' num espaço topológico E'' então a aplicação composta $g \circ f$ de E em E'' é contínua.

Uma aplicação biunívoca contínua $\underline{f}$ de um espaço topológico E sôbre um espaço topológico E' cuja inversa f^{-1} é contínua é chamada de <u>homeomorfismo</u>.

4.8 - Uma aplicação biunívoca $\underline{f}$ de um espaço topológico E sôbre um espaço topológico E' é um homeomorfismo se e sòmente se $f(\vartheta) = \vartheta'$ onde ϑ e ϑ' indicam respectivamente a classe de todos os conjuntos abertos de E e de E'.

4.9 - Num espaço métrico E, dado um subconjunto $A \subset E$ a função numérica $f(x) = d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$ é contínua.

§ 5 - Exemplos de Espaços Métricos

A - Sôbre R e C, $d(x,y) = |x-y|$ é uma distância; consideremos sempre R e C munidos desta distância e da topologia deduzida dela, topologia esta que chamamos de <u>topologia habitual</u> de R e C. R e C são espaços métricos completos e lòcalmente compactos.

B - Sôbre um conjunto E qualquer a função
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$
é uma distância que define a topologia discreta, isto é, a topologia na qual todos os subconjuntos de E são abertos.

C - Sôbre R^n e C^n as funções
$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \quad \text{e}$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

são distâncias equivalentes, isto é, definem a mesma topologia que chamamos de topologia habitual de R^n e C^n.

A equivalência das distâncias acima segue das desigualdades

$$\sup_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n. \sup_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \;, \quad p \geq 1.$$

Estas desigualdades mostram que para tôdas estas distâncias os conjuntos limitados e as sequências de Cauchy são os mesmos.

Lembremos o Teorema de Borel-Lebesgue: um subconjunto de R^n (C^n) é compacto se e sòmente se êle fôr fechado e limitado.

R^n (C^n) é lòcalmente compacto e é completo relativamente a qualquer das distâncias equivalentes acima.

D - Dado um conjunto X e um espaço métrico E com uma distância $\underline{d}$, indicamos com $\mathcal{B}(X,E)$ o conjunto de tôdas as aplicações limitadas de X em E; dados $f,g \in \mathcal{B}(X,E)$ temos

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),f(x_o))+d(f(x_o),g(x_o))+d(g(x_o),g(x))$$

e portanto $d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x),g(x))$ é um número finito pois $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são limitadas.

É imediato que esta função $\underline{d}$ é uma distância sôbre $\mathcal{B}(X,E)$ que define a topologia da convergência uniforme pois $d(f,f_o) \leq \varepsilon$ se e sòmente se $d(f(x),f_o(x)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Consideramos sempre $\mathcal{B}(X,E)$ munido com esta distância e a topologia dela deduzida.

5.1 - Se E é um espaço métrico completo $\mathcal{B}(X,E)$ também o é.

<u>Demonstração</u>: seja $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$ uma sequên-

cia de Cauchy; de $d(f_n(x),f_m(x)) \leq d(f_n,f_m)$ segue que para todo $x \varepsilon X$ a sequência $f_n(x)$ também é uma sequência de Cauchy e que converge portanto para um elemento de E, que indicamos por $f(x)$, pois E é completo. De $d(f_n,f_m) \leq \varepsilon$ para $n,m \geq n_o$ segue então que $d(f,f_n) \leq \varepsilon$ para $n \geq n_o$ donde segue imediatamente que a aplicação $\underline{f}$ é limitada e que a sequência f_n converge uniformemente para $\underline{f}$.

<u>Observação</u>: se E é um espaço métrico limitado então tôdas as aplicações de X em E são limitadas, isto é, $\mathcal{B}(X,E) = \mathcal{F}(X,E)$.

E - Dado um espaço topológico E e um espaço métrico F indicamos com $\mathcal{C}^*(E,F)$ o conjunto de tôdas as aplicações contínuas e limitadas de E em F. Em geral consideramos $\mathcal{C}^*(E,F)$ munido com a distância e a topologia induzidas por $\mathcal{B}(E,F)$, o que indicamos escrevendo $\mathcal{C}^*_u(E,F)$.

5.3 - Se F fôr completo então $\mathcal{C}^*_u(E,F)$ também o é.

<u>Demonstração</u>: por (5.1) resta demonstrar que a função $\underline{f}$ que é o limite em $\mathcal{B}(E,F)$ de uma sequência de Cauchy f_n de elementos de $\mathcal{C}^*_u(E,F)$ ainda é uma função contínua. Dado um ponto $x_o \varepsilon E$ consideremos uma vizinhança $B(f(x_o),\varepsilon)$ de $f(x_o)$ em F. Existe $n_o \varepsilon N$ tal que para $n \geq n_o$ temos $d(f,f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$; f_n sendo contínua no ponto x_o, existe uma vizinhança V_{x_o} de x_o tal que para $x \varepsilon V_{x_o}$ temos $d(f_n(x),f_n(x_o)) < \frac{\varepsilon}{3}$;

portanto para todo ponto $x \in V_{x_o}$ temos

$$d(f(x),f(x_o)) \leq d(f(x),f_n(x))+d(f_n(x),f_n(x_o))+$$
$$+ d(f_n(x_o),f(x_o)) \leq d(f,f_n)+d(f_n(x),f_n(x_o))+ d(f_n,f) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ donde segue a continuidade de $\underline{f}$ do ponto x_o.

Se F é um espaço métrico limitado então $\mathcal{C}^*(E,F) = \mathcal{C}(E,F)$.

5.4 - Se E é um espaço compacto então $\mathcal{C}^*(E,F)= \mathcal{C}(E,F)$

<u>Demonstração</u>: segue de (4.5) e de (3.5)

5.5 - Se F é um espaço métrico limitado e completo, então $\mathcal{C}_u(E,F)$ é completo.

5.6 - Se E é um espaço compacto e F um espaço métrico completo então $\mathcal{C}_u(E,F)$ é completo.

F - Num espaço normado (ver Apêndice I) E a função $d(x,y) = ||x-y||$ é uma distância e consideramos sempre um espaço normado munido com esta distância e a topologia deduzida dela. Um espaço normado completo se chama de <u>espaço de Banach</u>.

1 - Em R^n e C^n as normas $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, e $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$ definem as distâncias d_p e d_∞ do exemplo C.

2 - Indicamos com $\ell^p(N,R)$ $(\ell^p(N,C))$, $p \geq 1$,

o conjunto das sequências $(x_n)_{n \in N}$ de números reais (complexos) tais que $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ é **finito;** em geral escrevemos simplesmente $\ell^p(N)$ quando os resultados valem tanto para $\ell^p(N,R)$ quanto para $\ell^p(N,C)$.

É facil verificar que a função $x \longrightarrow ||x||_p$ definida em $\ell^p(N)$ é uma norma. $\ell^p(N)$ é um espaço de Banach.

3 - Indicamos com $\ell^{\infty}(N,R)$ ou $\mathcal{B}(N,R)$ ($\ell^{\infty}(N,C)$ ou $\mathcal{B}(N,C)$) o conjunto de tôdas as sequências limitadas $x = (x_n)_{n \in N}$ de números reais (complexos); em geral escrevemos simplesmente $\ell^{\infty}(N)$ ou $\mathcal{B}(N)$ quando os resultados valem indiferentemente para $\mathcal{B}(N,R)$ e $\mathcal{B}(N,C)$.

A função $x \in \mathcal{B}(N) \longrightarrow ||x||_{\infty} = \sup_{n \in N} |x_n| \in R$ é uma norma e $\mathcal{B}(N)$ é um espaço de Banach.

4 - Se E é um espaço normado o conjunto $\mathcal{B}(X,E)$ das aplicações limitadas de um conjunto X em E é evidentemente um espaço vetorial (definindo do modo habitual a soma de funções e o seu produto por um número real ou complexo) e dado $f \in \mathcal{B}(X,E)$, $||f|| = \sup_{x \in X} ||f(x)||$ é uma norma cuja distância coincide com a distância definida sôbre $\mathcal{B}(X,E)$ em D.

Se E é um espaço de Banach então $\mathcal{B}(X,E)$ também o é (5.1).

5 - Se X fôr um espaço topológico então o subespaço $\mathcal{C}^*(X,E)$ de $\mathcal{B}(X,E)$ é um espaço de Banach se E o fôr (5.3). Em particular se X fôr compacto temos $\mathcal{C}(X,E) = \mathcal{C}^*(X,E)$.

Assim por exemplo, $\mathcal{C}_u([a,b],R)$ e $\mathcal{C}_u([a,b],C)$ são espaços de Banach.

G - Num espaço E com produto interno (Ap.II) a função $x \in E \longrightarrow (x|x)^{1/2} \in R$ é uma norma e consideramos E munido com esta norma e com a topologia deduzida da distância definida por esta norma. $(d(x,y) = ||x-y|| = (x-y|x-y)^{1/2})$. Um espaço com produto interno (ou prehilbertiano) que é completo é chamado de <u>espaço de Hilbert</u>.

1 - Em R^n (C^n) $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ é um produto interno que define a norma $|| \ ||_2$ do exemplo F.1 acima.

2 - Em $\mathcal{C}([a.b])$, $(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ é um produto interno e escrevemos $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ para indicar o espaço $\mathcal{C}([a,b])$ com êste produto interno; êste espaço não é completo.

3 - Em $\ell^2(N)$ (exemplo F.2) $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ é um produto interno que define a norma $\| \ \|_2$.

4 - Dado um subconjunto mensurável (no sentido de Lebesgue) $M \subset R^n$ de medida (n-dimen -

sional) não nula (eventualmente infinita) indicamos com $L^2(M)$ o conjunto das classes de funções f definidas sôbre M, mensuráveis e tais que

$$\int_M \cdots \int |f(x_1,\ldots,x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n < \infty$$

(duas funções pertencem a uma mesma classe se e sòmente se elas são iguais exceto nos pontos de um conjunto de medida nula). Dados $f,g \in L^2(M)$, $(f|g) = \int_M f(x)\overline{g(x)}dx$ é um produto interno e $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert (teorema de Fischer-Riesz). Consideraremos sòmente o caso $n = 1$ e $M = [a,b]$.

§ 6 - Espaço produto

6.1 - Dada uma família $(E_i)_{i \in I}$ de espaços topológicos, um subconjunto $\prod_{i \in I} O_i$ de $\prod_{i \in I} E_i$ em que cada O_i é um aberto de E_i e onde $O_i = E_i$ exceto para um número finito de índices $i \in I$, se chama de conjunto <u>aberto elementar</u>. Definimos como conjunto aberto de $E = \prod_{i \in I} E_i$ qualquer conjunto que é reunião de conjuntos abertos elementares. É facil verificar que os conjuntos abertos assim definidos satisfazem os axiomas O_I, O_{IIa} e O_{IIb} e definem portanto uma topologia sôbre E que chamamos de topologia produto (das topologias dos E_i). E munido com esta topologia é chamado de <u>espaço produto</u> dos espaços E_i.

6.2 - Quando tôdos os espaços E_i são iguais a um mesmo espaço F temos $\prod_{i\in I} E_i = F^I = \mathcal{F}(I,F)$ e a topologia produto coincide com a topologia da convergência simples: uma sequência f_n de funções de I em F converge em F^I para uma função f se e sòmente se para tôdo $i \in I$ temos $f_n(i) \longrightarrow f(i)$ em F.

6.3 - Teorema de Tychonoff - O produto topológico $E = \prod_{i\in I} E_i$ de uma família $(E_i)_{i\in I}$ de espaços topológicos não vasios é compacto se e sòmente se cada E_i o fôr.

Vêr Bourbaki, Topologie Génerale, Cáp. I, §10.

6.4 - Se $E_1,\ldots,E_n$ são espaços métricos com distâncias $d^{(1)},\ldots,d^{(n)}$ respectivamente, então em $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$

$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d^{(i)}(x_i,y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, são distâncias que definem a topologia produto.

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1\leq i\leq n} d^{(i)}(x_i,y_i)$$

também têm esta propriedade.

§ 7 - Exemplos de Funções Contínuas

A. - Dado um subespaço E' de um espaço topológico E, a aplicação idêntica $x \in E' \to x \in E$ de E' em E é contínua.

B - Uma aplicação f de um espaço métrico E num espaço métrico E' é contínua se e sòmente se $x_n \longrightarrow x$ implica $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

C - Dado um espaço métrico E, munindo $E \times E$ com a topologia produto então a função $(x,y) \in E \times E \longrightarrow d(x,y) \in R$ é contínua; cf.(6.4).

D - A aplicação $x \in R \longrightarrow |x| \in R$ é contínua.

E - Dadas duas aplicações contínuas f e g de um espaço topológico E num espaço normado F, a aplicação $x \in E \longrightarrow f(x)+g(x) \in F$ também é uma aplicação contínua de E em F (que se indica por $f + g$). O mesmo vale para a aplicação $x \longrightarrow cf(x)$ onde c é um número real ou complexo (conforme consideramos um espaço normado sôbre R ou C).

F - Dado um espaço normado F sôbre $R(C)$, consideremos em $F \times F$ e em $R \times F(C \times F)$ a topologia produto: as aplicações
$(x,y) \in F \times F \longrightarrow x-y \in F$ e $(\lambda,x) \in R \times F(C \times F) \longrightarrow \lambda x \in F$ são contínuas.

A aplicação $x \in F \longrightarrow ||x|| \in R$ é contínua.

G - Dado um espaço E com produto interno e munido $E \times E$ com a topologia produto, a aplicação $(x,y) \in E \times E \longrightarrow (x|y) \in C$ é contínua.

H - Dado um espaço produto $E = \prod_{i \in I} E_i$ cada projeção

$$pr_i : x = (x_i)_{i \in I} \in E \longrightarrow x_i = pr_i\, x \in E_i \text{ é contínua.}$$

I - A aplicação $f \in \mathcal{C}_u([a,b]) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \in C$ é contínua pois

$$\left| \int_a^b (f(x)-f_o(x))dx \right| \leq (b-a) \| f-f_o \| .$$

A mesma aplicação ainda é contínua de $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ em $C(5.G.\ 2)$.

J - A aplicação idêntica de $\mathcal{C}_u([a,b])$ em $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ é contínua pois

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq (b-a)^{1/2} \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = (b-a)^{1/2} \|f\|$$

e portanto $\| f-f_o \| < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^{1/2}}$ implica $\| f-f_o \|_2 < \varepsilon$.

K - Dada uma função contínua $K(x,y)$ definida em $[a,b] \times [a,b]$ e a valores complexos a aplicação $f \in \mathcal{C}_u([a,b]) \longrightarrow k(f) = g \in \mathcal{C}_u([a,b])$ onde $g(x) = \int_a^b K(x,s)f(s)ds$ é uma aplicação contínua pois $\| g-g_o \| \leq M \| f-f_o \|$ onde $M = \sup_{a \leq x,y \leq b} |K(x,y)|$.

A mesma aplicação ainda é contínua de $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ em si mesmo pois

$$|g(y)|^2 \leq \left(\int_a^b |K(x,y)f(x)| dx \right)^2 \leq \int_a^b |K(x,y)|^2 dx . \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

e portanto

$$\int_a^b |g(y)-g_o(y)|^2 dy \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx\, dy \, . \int_a^b |f(x)-f_o(x)|^2 dx.$$

§ 8 - Outras categorias de Espaços Topológicos.

Dizemos que um espaço separado é regular se nele está satisfeito o axioma

O_{III} : tôda vizinhança de um ponto contém uma vizinhança fechada dêste ponto.

É imediato que

8.1 - Um espaço separado E é regular se e sòmente se para todo conjunto fechado $F \subset E$ e para todo ponto $x_o \notin F$, existe uma vizinhança de F e uma vizinhança de x_o sem pontos comuns.

8.2 - Todo espaço compacto é regular.

<u>Demonstração</u>: seja F um subconjunto fechado do espaço compacto E e $x \notin F$; E sendo separado, para cada ponto $y \in F$ existe uma vizinhança aberta O_y de y e uma vizinhança $O_x^{(y)}$ de x sem ponto comum; os $(O_y)_{y \in F}$ formam um recobrimento aberto de F que admite portanto (3.4) um sobrecobrimento finito (3.1) $O_{y_1}, \dots, O_{y_n}$; $O_{y_n} \cup \dots \cup O_{y_n}$ é uma vizinhança de F que não encontra a vizinhança $O_x^{(y_1)} \cap \dots \cap O_x^{(y_n)}$ de x C.Q.D.

8.3 - Todo espaço localmente compacto é regular.

Dizemos que um espaço separado E é <u>completamente regular</u> se nele está satisfeito o axioma

O_{IV} : dada uma vizinhança qualquer V de um ponto qualquer x, existe uma função contínua $f: E \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ se $y \notin V$.

Considerando o conjunto $f^{-1}([\frac{1}{2}, 2])$ vê-se que

8.4 - Todo espaço completamente regular é regular.

Dizemos que um espaço separado E é <u>normal</u> se se nele é satisfeito o axioma.

O_V : dados dois conjuntos fechados disjuntos F_o e F_1 de E, existe uma função contínua $f: E \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ se $x \in F_o$ e $f(x)=1$ se $x \in F_1$.

<u>Teorema de Urysohn</u>: um espaço separado é normal se e sòmente se dois conjuntos fechados disjuntos quaisquer têm vizinhanças disjuntas.

Vêr a demonstração em Bourbaki, Top. Générale, Cap. IX, §4, ou, L. Nachbin, Integral de Haar, Textos nº7.

8.5 - Todo espaço normal é completamente regular.

8.6 - Todo espaço métrico é normal (e por conseguinte, completamente regular e regular).

<u>Demonstração</u>: se F_o e F_1 são conjuntos fechados sem ponto comum, os conjuntos $O_o = \{ x \in E \mid d(x,F_o) < d(x,F_1) \}$ e

$O_1 = \{ x \in E \mid d(x,F_o) > d(x,F_1) \}$ são vizinhanças

de F_o e F_1, respectivamente e elas não têm ponto comum.

8.7 - Todo espaço compacto é normal.

<u>Demonstração</u>: sejam F_o e F_1 subconjuntos fe

chados e disjuntos do espaço compacto E; de (8.1) segue que para cada ponto $x \in F_o$ existe uma vizinhança aberta O_x de x e uma vizinhança $O^{(x)}$ de F_1 que não se encontram; estas vizinhanças $(O_x)_{x \in F_o}$ formam um recobrimento aberto de F_o que têm então um subrecobrimento finito $O_{x_1},\ldots,O_{x_n}$; então $O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n}$ é uma vizinhança de F_o que não têm pontos comuns com a vizinhança

$$O^{(x_1)} \cap \ldots \cap O^{(x_n)} \quad \text{de } F_1 .$$

8.9 - Dado um espaço localmente compacto não compacto E, seja ∞ um elemento que não pertence a E e consideremos o conjunto $E' = E \cup \{\infty\}$. Em E' tomamos a seguinte topologia: os conjuntos abertos de E' são os conjuntos abertos de E e os conjuntos reuniões de ∞ com um subconjunto de E cujo complementar (em E) é compacto. É imediato que E' é um espaço compacto que contém E como sub espaço denso. Chamamos E' de <u>compactificado de Alexandroff</u> de E.

§ 9 - <u>Espaços Métricos Compactos</u>.

Dizemos que um espaço topológico E é <u>separável</u> (ou de <u>tipo enumerável</u>) se êle contém um subconjunto enumerável A denso em E (isto é, $\bar{A} = E$).

Uma <u>base enumerável</u> de conjuntos abertos de um espaço topológico E, é uma família enumerável de conjuntos abertos tal que todo conjunto aberto de E é reunião de conjuntos abertos daquela família.

9.1 - Um espaço topológico E que tem uma base enumerável $(O_n)_{n \varepsilon N}$ de conjuntos abertos é separável.

Demonstração: tomando um elemento a_n de cada O_n, é imediato que o conjunto enumerável $A = \left\{ a_n | n \varepsilon N \right\}$ é denso em E.

9.2 - Um espaço métrico é separável se e sòmente se êle tem uma base enumerável de conjuntos abertos.

Demonstração: se $A = \left\{ a_n \mid n \varepsilon N \right\}$ é um subconjunto enumerável denso em E a família enumerável $O_{n,m} = B(a_n, \frac{1}{m})$, $n,m \varepsilon N$, de bolas abertas é uma base enumerável de conjuntos abertos de E como não é difícil de verificar.

9.3 - Num espaço métrico E são equivalentes as seguintes propriedades:

A - E é compacto.

B - Tôda sequência infinita de pontos de E contém uma subsequência convergente.

C - E é completo e para todo $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento finito de E formado por conjuntos de diâmetro $\leq \varepsilon$.

D - E é completo e para todo $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento de E formado por um número finito de bolas abertas de raio $\leq \varepsilon$.

Vêr a demonstração em Bourbaki, Top. Générale, Cap. IX, § 2.

9.4 - Dado um subconjunto F de um espaço métrico completo E, são equivalentes as seguintes propriedades:

A - F é relativamente compacto em E.

B - Qualquer sequência infinita de pontos de F contém uma subsequência convergente em E.

C - Para todo $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento finito de F formado por conjuntos de diâmetro $\leq \varepsilon$.

D - Para todo $\varepsilon > 0$ existe um recobrimento finito de F formado por bolas abertas de raio $\leq \varepsilon$.

9.5 - Todo espaço métrico compacto é separável.

<u>Demonstração</u>: Para todo $n \in N$ seja A_n o conjunto (finito) dos centros do conjunto finito de bolas abertas de raio $\frac{1}{n}$ (9.5 D) que cobrem E; $A = \bigcup_{n \in N} A_n$ é um subconjunto enumerável denso em E.

Dizemos que uma aplicação f de um espaço métrico E num espaço métrico E' é <u>uniformemente contínua</u> se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\sigma > 0$ tal que $d(x,y) < \sigma$ implica $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

9.6 - Tôda aplicação contínua f de um espaço métrico compacto E em um espaço métrico E', é uniformemente contínua.

Demonstração: Se f não fôsse uniformemente contínua, existiria um $\varepsilon > 0$ tal tal que para todo $\frac{1}{n} > 0$ existiria um par de pontos x_n, y_n de E com $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ e $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. De (9.3 B) segue que a sequência x_n tem uma subsequência x_{r_n} convergente para um ponto x_o e então a subsequência y_{r_n} também converge para o mesmo ponto e portanto $f(x_{r_n}) \longrightarrow f(x_o)$ e $f(y_{r_n}) \longrightarrow f(x_o)$ em contradição com $d'(f(x_{r_n}), f(y_{r_n})) > \varepsilon$.

---*---

CAPÍTULO II

O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

O chamado método das aproximações sucessivas é commmmente usado na Análise Matemática para demonstrar a existência e a unicidade de soluções de equações diferenciais e de equações integrais. O ponto chave dêste método está contido no teorema do ponto fixo de Banach.

Vamos reobter através dêste teorema os teoremas de existência clássicos. No §6 faremos algumas aplicações do teorema de Banach a espaços da Análise Funcional.

Referências:

Dieudonné: Foundations of Modern Analysis. Academic Press, 1960.

Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Akademie Verlag, 1954.

Petrowsky: Vorlesungen über die Theorie gewöhnlischer Differentialgleichungen. Teubner.

Weissinger: Math. Nachrichten, Vol. 8 (1954), 193-212.

--- * ---

0.1. - Teorema do ponto fixo (Banach): Seja E um espaço métrico completo não vazio e d a distância sôbre E. Se f é uma aplicação de E em E tal que para quaisquer x e y em E

$$d(f(x),\ f(y)) \leq c\ d(x,y)$$

onde $\underline{c}$ é uma constante real tal que $0 \leq c < 1$, então existe um e um único $x_o \in E$ tal que $f(x_o) = x_o$.

<u>Demonstração</u>. Existência: consideremos a sequência (x_n) onde x_1 é um elemento qualquer de $\underline{E}$ e $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1,2,\ldots$ Vamos demonstrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Para $n > 1$ temos $d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq c\ d(x_{n-1}, x_n)$ e por indução sôbre $\underline{n}$ obtemos que $d(x_n,x_{n+1}) \leq c^{n-1} d(x_1,x_2)$ para todo inteiro positivo $\underline{n}$. Então se $1 \leq n < m$,

$$(1) \qquad d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n+1})+\ldots+d(x_{m-1},x_m) \leq c^{n-1}d(x_1,x_2)+$$

$$+\ldots+c^{m-2}d(x_1,x_2)= c^{n-1}d(x_1,x_2)(1+c+\ldots+c^{m-n-1}) \leq$$

$$\leq c^{n-1}\frac{d(x_1,x_2)}{1-c}$$

e como $c^n \longrightarrow 0$, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como $\underline{E}$ é completo existe $x_o \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x_o$. Vamos provar que $f(x_o) = x_o$. Para todo inteiro positivo n, $d(f(x_o), x_{n+1}) = d(f(x_o),f(x_n)) \leq c\ d(x_o,x_n)$ e como $d(x_o, x_n) \longrightarrow 0$ segue que $x_n \longrightarrow f(x_o)$. Pelo teorema da unicidade do limite (I.1.11) $f(x_o) = x_o$.

<u>Unicidade</u>: Suponhamos que $x_o,y_o \in E$, $x_o \neq y_o$, $f(x_o) = x_o$ e $f(y_o) = y_o$. Então

$0 < d(x_o,y_o) = d(f(x_o),f(y_o)) \leq c\, d(x_o,y_o)$ e portanto $c \geq 1$, contrário à hipótese.

0.2. - Corolário (avaliação da aproximação): Com as notações do teorema 0.1 temos, para todo inteiro positivo n,

$$(2) \qquad d(x_n, x_o) \leq c^{n-1} \frac{d(x_1,x_2)}{1-c}$$

Demonstração: De (1) vem que para $1 \leq n < m$

$$d(x_n,x_o) \leq d(x_n,x_m)+d(x_m,x_o) \leq c^{n-1} \frac{d(x_1,x_2)}{1-c} + d(x_m,x_o)$$

e como $d(x_m,x_o) \longrightarrow 0$ obtem-se (2).

§ 1 - PRIMEIRAS APLICAÇÕES

1.1. - Seja f uma função definida na reta e a valores reais satisfazendo à condição de Lipschitz.

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

para quaisquer x e y em R, com K real, $0 \leq K < 1$. Então existe um e um único ponto $x_o \in R$ tal que $f(x_o)=x_o$.

Caso particular do teorema 0.1 para o espaço métrico completo R dos números reais. (I.5.8)

1.2. - Seja f uma função definida num sub-conjunto fechado $F \subset R^n$ e com valores em F, satisfazendo à condição de Lipschitz

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x-y||$$

para quaisquer $\underline{x}$ e $\underline{y}$ em $\underline{F}$, com $\underline{K}$ real, $0 \leq K < 1$. Então existe um e um único ponto $x_o \in F$ tal que $f(x_o) = x_o$.

Aplicação do teorema 0.1. ao espaço métrico completo $\underline{F}$ (I.5.$\mathscr{b}$) e (I.2.5)

§ 2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. TEOREMA DE EXISTÊNCIA.

2.1. - Definição: Seja $f(x,y)$ uma função definida e contínua para

$$|x - x^o| \leq a \quad , \quad |y - y^o| \leq b$$

(onde $x,y,x^o,y^o \in R$, $a > 0$ e $b > 0$) e a valores reais. A função u definida e derivável para $|x-x^o| \leq a^* \leq a$ é uma solução da equação diferencial

$$(3) \qquad y' = f(x,y)$$

se para todo $\underline{x}$ tal que $|x-x^o| \leq a^*$, $u'(x) = f(x,u(x))$.

2.2. - Proposição: Para que a função $\underline{u}$ definida e contínua para $|x-x^o| \leq a^* \leq a$ seja uma solução da equação diferencial (3) tal que $u(x^o) = y^o$ é necessário e suficiente que $\underline{u}$ seja uma solução contínua da equação integral

$$(4) \qquad y(x) = y^o + \int_{x^o}^{x} f(t,y(t))\, dt$$

A demonstração segue de que se $\underline{f}$ e $\underline{u}$ são contínuas, $x \longrightarrow f(x,u(x))$ é contínua (I.4.7) para

$|x-x^o| \leq a^*$ e das propriedades da primitiva de uma função contínua.

2.3. - Teorema de existência de Cauchy (para equações diferenciais):

Seja $f(x,y)$ uma função definida e contínua para

$$|x-x^o| \leq a \quad , \quad |y-y^o| \leq b$$

(onde $x, y, x^o, y^o \in R$, $a > 0$ e $b > 0$), a valores reais, e suponhamos que exista uma constante real K tal que

(5) $$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq K|y-y^*|$$

para $x \in B[x^o,a]$, $y, y^* \in B[y^o,b]$. Existe então uma constante $0 < a^* \leq a$ tal que a equação diferencial

$$y' = f(x,y)$$

tem uma e uma única solução u definida em $B[x^o,a^*]$ e tal que $u(x^o) = y^o$.

Demonstração: Como f é contínua existe uma constante real $M \geq 0$ tal que $|f(x,y)| \leq M$, $x \in B[x^o,a]$, $y \in B[y^o,b]$.

Tomemos

(6) $$a^* \leq \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right) \text{ com } c = a^*K < 1$$

se $M \neq 0$ e $K \neq 0$ (se $M = 0$ ou $K = 0$ é imediato que o teorema é verdadeiro com $a^* = a$). Lembremos que (I.5.6) o conjunto E das funções contínuas em $B[x^o,a^*]$ com valores em $B[y^o,b]$ com a distância

$$d(v,v^*) = ||v-v^*|| = \sup_{|x-x^o|\leq a^*} |v(x)- v^*(x)|$$

é um espaço métrico completo. Consideremos a aplicação $\underline{T}$ definida em $\underline{E}$ tal que se $v \in E$, $Tv = w$ onde, para todo $x \in B[x^o,a^*]$,

$$w(x) = y^o + \int_{x^o}^{x} f(t,v(t))dt$$

É imediato que w é contínua.

De (6) vem que

$$|w(x)- y^o|=|\int_{x^o}^{x} f(t,v(t))dt| \leq |\int_{x^o}^{x} |f(t,v(t))| \leq$$

$$\leq M|x-x^o| \leq M\cdot a^* \leq b$$

para todo $x \in B[x^o,a^*]$ e portanto $w \in E$. Se $v,v^* \in E$ e $x \in B[x^o,a^*]$, de (5) vem que

$$|(Tv)(x)-(Tv^*)(x)|=|\int_{x^o}^{x} [f(t,v(t))- f(t,v^*(t))]dt| \leq$$

$$\leq K|\int_{x^o}^{x} |v(t)-v^*(t)|dt| \leq K||v-v^*|| \, |x-x^o| \leq Ka^*||v-v^*||$$

e portanto $||Tv - Tv^*|| \leq Ka^*||v - v^*||$ com $Ka^* < 1$ por (6). Pelo teorema do ponto fixo existe portanto uma e uma única função de definida e contínua em $B[x^o,x^*]$ tal que

$$u(x) = y^o + \int_{x^o}^{x} f(t,u(t))dt.$$

Da proposição 2.2 segue então o teorema.

2.4. - O teorema 2.3 pode ser estendido, sem dificuldade, para um sistema de equações diferenciais. É conveniente neste caso usar a notação vetorial. Seja

$$y = (y_1,\dots,y_n) \in R^n$$

Como vimos em (I.5.F1) $||y|| = \sup\limits_{1\le i\le n} |y_i|$ é uma norma em R^n e para a distância correspondente

(7) $$d(y,y^*) = ||y-y^*|| = \sup_{1\le i\le n} |y_i - y_i^*|$$

(onde $y^* = (y_1^*,\dots,y_n^*) \in R^n$) . R^n é um espaço métrico completo.

Se $f_1,\dots,f_n$ são funções definidas num subconjunto $S \subset R^m$ a valores reais indicamos com $f=(f_1,\dots,f_n)$ a função vetorial tal que $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$ para todo $x \in S$. É facil vêr que f é limitada (resp. contínua) em S se e sòmente se cada componente f_i, $i=1,\dots,n$ é limitada (resp. contínua) em S. Podemos então enunciar como generalização imediata de 2.3 o seguinte:

Teorema de existência de Cauchy (para sistemas diferenciais): Consideremos o sistema diferencial

$$y_i' = f_i(x,y_1,\dots,y_n) \qquad i = 1,\dots,n$$

que com a notação vetorial $y = (y_1,\dots,y_n)$, $f = (f_1,\dots,f_n)$ pode ser escrito

(8) $$y' = f(x,y)$$

Suponhamos que $f(x,y)$ é definida e contínua para

$$|x-x^o| \leq a \quad , \quad ||y-y^o|| \leq b$$

(onde $x, x^o \in R$, $y, y^o \in R^n$, $a > 0$ e $b > 0$) e que exista uma constante real K tal que

$$||f(x,y) - f(x,y^*)|| \leq K\, ||y - y^*||$$

para $x \in B[x^o, a]$, $y, y^* \in B[y^o, b]$. Existe então uma constante real $0 < a^* \leq a$ tal que o sistema (8) tem uma e uma única solução $u = (u_1, \dots, u_n)$ definida em $B[x^o, a^*]$ e tal que $u(x^o) = y^o$.

§ 3 - EQUAÇÕES LINEARES INTEGRAIS

3.1. - Teorema: Consideremos a equação linear integral da segunda espécie

(9) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

Seja $K(x,y)$ definida e contínua, $|K(x,y)| \leq M$, para $(x,y) \in I \times I$ onde $I = [a,b] \subset R$ e a valores reais; seja f uma função definida e contínua em I a valores reais, e λ uma constante real tal que

(10) $$|\lambda|\, M\, (b-a) < 1$$

Então a equação (9) tem uma e uma única solução definida e contínua em I.

Demonstração: Lembremos que o conjunto E das funções contínuas em I a valores reais com a distância

$$d(v, v^*) = ||v - v^*|| = \sup_{a \leq x \leq b} |v(x) - v^*(x)|$$

é um espaço métrico completo (I.5.6). Consideremos a aplicação T definida em E tal que se $v \in E$, $Tv = w$ onde, para todo $x \in I$,

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)v(y)\, dy$$

É imediato que $w \in E$. Se $v, v^* \in E$ e $x \in I$ temos

$$|(Tv)(x) - (Tv^*)(x)| = |\lambda \int_a^b K(x,y)[v(y) - v^*(y)]dy| \leq$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |K(x,y)| |v(y) - v^*(y)| |dy \leq |\lambda| M(b-a) \; ||v-v^*||$$

e portanto $||Tv - Tv^*|| \leq |\lambda| M(b-a) ||v-v^*||$ onde $|\lambda| M(b-a) < 1$ por (10). Pelo teorema do ponto fixo existe portanto uma e uma única função $u \in E$ tal que

$$(Tu)(x) = u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy \quad \text{para todo } x \in I.$$

§ 4 - TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

4.1. - Proposição: Seja $f(x,y)$ uma função definida e contínua em $I \times R$ onde $I = |a,b| \subset R$, a valores reais, derivável em relação à variável y e tal que existam as constantes reais positivas m e M tais que para $(x,y) \in I \times R$,

$$(11) \qquad 0 < m \leq f'_y(x,y) \leq M$$

Então existe uma e uma única função u definida e contínua em I e tal que para todo $x \varepsilon I$, $f(x,u(x)) = 0$.

<u>Demonstração</u>: Consideremos o espaço métrico completo E das funções contínuas em I a valores reais com a distância.

$$d(v,v^*) = ||v-v^*|| = \sup_{a\leq x\leq b} |v(x)-v^*(x)|$$

Seja T a aplicação definida em E tal que se $v \varepsilon E$, $Tv = w$ onde, para todo $x \varepsilon I$,

$$w(x) = v(x) - \frac{1}{M} f(x,v(x))$$

É imediato que $w \varepsilon E$. Se $v,v^* \varepsilon E$ e $x \varepsilon I$ de (11) vem que (sendo ϑ um número real tal que $0\leq\vartheta\leq 1$)

$$|(Tv)(x) - (Tv^*)(x)| \leq |v(x)-v^*(x) - \frac{1}{M}[f(x,v(x))-f(x,v^*(x))]| =$$

$$= |v(x) - v^*(x) - \frac{1}{M} [v(x)-v^*(x)]f'_y(x,v(x)+ \vartheta[v(x)-v^*(x)])| \leq$$

$$\leq |v(x) - v^*(x)| (1 - \frac{m}{M}) \leq (1 - \frac{m}{M}) ||v-v^*||$$

e portanto

$$||Tv - Tv^*|| \leq (1 - \frac{m}{M}) ||v-v^*|| \quad \text{onde} \quad 0 \leq 1 - \frac{m}{M} < 1.$$

Pelo teorema do ponto fixo existe portanto uma e uma única função $u \varepsilon E$ tal que $Tu = u$ e a proposição 4.1 está demonstrada.

Demos acima uma demonstração muito simples de um caso particular do teorema das funções implícitas. Vamos agora demonstrá-lo sob a forma geral habitual da Análise Matemática.

4.2. - Lema: Seja $f(x,y)$ uma função definida e contínua para

$$|x-x^o| \leq a \quad , \qquad |y-y^o| \leq b$$

(onde $x,y,x^o,y^o \in R$, $a > 0$ e $b > 0$) e suponhamos que exista uma constante real $K < 1$ tal que

(12) $$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq K|y-y^*|$$

para $x \in B[x^o,a]$, $y,y^* \in B[y^o,b]$ e que

(13) $$y^o = f(x^o,y^o)$$

Então existe uma constante $0 < a^* \leq a$ tal que a equação

(14) $$y = f(x,y)$$

tenha uma e uma única solução u definida e contínua em $B[x^o,a^*]$ e tal que $|u(x)-y^o| \leq b$ para todo $x \in B[x^o,a^*]$.

Demonstração: A função $g(x) = f(x,y^o) - y^o$ é contínua para $x \in B[x^o,a^*]$ e $g(x^o) = 0$ por (13), logo dado $b-Kb > 0$ ($b-Kb > 0$ pois $0 \leq K < 1$) existe $0 < a^* \leq a$ tal que

(15) $$|g(x)| = |f(x,y^o) - y^o| \leq b - Kb$$

para $x \in B[x^o,a^*]$. Lembremos que (I.5.6) o conjunto E das funções contínuas em $B[x^o,a^*]$ com valores em $B[y^o,b]$ com a distância

$$d(v,v^*) = ||v-v^*|| = \sup_{|x-x^o| \leq a^*} |v(x) - v^*(x)|$$

é um espaço métrico completo. Consideremos a aplicação $\underline{T}$ definida em E tal que se $v \in E$, $Tv = w$ onde, para todo $x \in B[x^o, a^*]$,

$$w(x) = f(x, v(x))$$

De (12) e (15) vem que

$$|w(x)-y^o| \leq |f(x,v(x)) - f(x,y^o)| + |f(x,y^o)-y^o| \leq K|v(x)-y^o| +$$

$$+ |f(x,y^o)-y^o| \leq Kb + |f(x,y^o)-y^o| \leq b$$

e portanto T é uma aplicação de E em E. Se $v, v^* \in E$ e $x \in B[x^o, a^*]$ de (12) vem que

$$||Tv-Tv^*|| = \sup_{|x-x^o| \leq a^*} |(Tv)(x) - (Tv^*)(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{|x-x^o| \leq a^*} K|v(x)-v^*(x)| = K||v-v^*||$$

com $K < 1$, logo do teorema do ponto fixo segue que existe uma e uma única função $u \in E$ tal que $(Tu)(x) = u(x) = f(x, u(x))$ para todo $x \in B[x^o, a^*]$.

4.3. - Lema: Se $f(x,y)$ é uma função definida e contínua numa vizinhança do ponto $(x^o, y^o) \in R^2$, a valores reais, e tem nesta vizinhança uma derivada parcial em relação a y contínua e tal que $f_y(x^o, y^o) = 0$ então existem as constantes reais $a > 0$, $b > 0$ e $0 \leq K < 1$ tais que f satisfaça à condição de Lipschitz (12).

Demonstração: Dado $0 < K < 1$ da continuidade de f_y em (x^o,y^o) segue que existem $a > 0$ e $b > 0$ tais que $|f_y(x,y)| \leq K$ para $x \in B[x^o,a]$ e $y \in B[y^o,b]$. Do teorema da média obtemos que para $x \in B[x^o,a]$, $y,y^* \in B[y^o,b]$,

$$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq \sup_{\substack{|x-x^o|\leq a \\ |y-y^o|\leq b}} |f_y(x,y)|\,|y-y^*| \leq K|y-y^*|$$

4.4. - Teorema das funções implícitas: Seja $F(x,y)$ uma função definida e contínua para

$$|x-x^o| \leq a \quad , \quad |y-y^o| \leq b$$

(onde $x,y,x^o,y^o \in R$, $a > 0$ e $b > 0$) tal que $F(x^o,y^o)=0$, com derivada parcial em relação a y contínua e tal que $F_y(x^o,y^o) \neq 0$. Então existem constantes reais $a^* > 0$ e $b^* > 0$ tais que a equação

(16) $$F(x,y) = 0$$

tem uma e uma única solução definida e contínua em $B[x^o,a^*]$ e com valores em $B[y^o,b^*]$. Se $F(x,y)$ tem também derivada parcial em relação a x contínua então u é derivável e

$$\frac{du}{dx} = -(F_y)^{-1}F_x$$

Demonstração: Como $F_y(x^o,y^o) \neq 0$ a função

$$(17) \qquad f(x,y) = y - \frac{F(x,y)}{F_y(x^o,y^o)}$$

é definida e contínua numa vizinhança de (x^o,y^o) e sua derivada $f_y(x,y) = 1 - \dfrac{F_y(x,y)}{F_y(x^o,y^o)}$ se anula em (x^o,y^o).

Do lema 4.3 e como $f(x^o,y^o) = y^o$ por (16) segue que f satisfaz às hipóteses do lema 4.2 e portanto está demonstrada a primeira parte do teorema. Sejam $x, x+\Delta x, \varepsilon B[z^o,a^*]$ e $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$. Temos

$$F(x+\Delta x,\ u(x)+\Delta u) - F(x,u(x)) = 0$$

e pelo teorema da média

$$\left[F_x(x,u(x)) + \alpha\right]\Delta x + \left[F_y(x,u(x)) + \beta\right]\Delta u = 0$$

onde $\alpha \longrightarrow 0$ e $\beta \longrightarrow 0$ quando $\Delta x \longrightarrow 0$, logo

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x,u(x)) + \alpha}{F_y(x,u(x)) + \beta} = - \frac{F_x}{F_y}.$$

4.5. - Vamos estender o teorema 4.4 para um sistema de equações. Usando como em 2.4 a notação vetorial a considerando em R^m e em R^n a métrica definida em (7) é imediata a generalização do lema 4.2 para uma função vetorial $f = (f_1,\ldots,f_n)$ definida e contínua para $||x-x^o|| \leq a$ e $||y-y^o|| \leq b$, onde $x, x^o \varepsilon R^m$, $y, y^o \varepsilon R^n$, $a > 0$ e $b > 0$. Também o lema 4.3 se estende para uma função vetorial $f = (f_1,\ldots,f_n)$ supondo que tôdas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ são contínuas numa vizinhança de $(x^o,y^o) \in R^m \times R^n$ e que

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(x^o,y^o) = 0 .$$

Lembramos que dadas $f_1,\ldots,f_n$ funções definidas num sub-conjunto $S \subset R^m$, a valores reais, tais que existam em $y^o \in S$ as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, a matriz (a_{ij}) onde $a_{ij} = (\frac{\partial f_i}{\partial y_j})(y^o)$ é denominada <u>matriz jacobiana</u> de $f=(f_1,\ldots,f_n)$ (ou de $f_1,\ldots,f_n$) no ponto $y^o \in R^m$ e a indicamos por $(f_y)(y^o)$; quando $m = n$ o determinante da matriz jacobiana (a_{ij}) é denominado <u>jacobiano</u> de f (ou de $f_1,\ldots,f_n$) no ponto $y^o \in R^n$ e é indicado por $f_y(y^o) = \det(a_{ij}) = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(y^o)$.

Da teoria de matrizes e determinantes segue-se então como genealização de 4.4 :

<u>Teorema das funções implícitas</u> (para sistemas de equações):

Consideremos o sistema de equações

$$F_i(x_1,\ldots,x_m , y_1,\ldots,y_n) = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

ou, em notação vetorial, a equação

(18) $$F(x,y) = 0$$

Suponhamos que $F(x,y)$ seja uma função definida e contínua para

$$||x-x^o|| \leq a \quad , \quad ||y-y^o|| \leq b$$

(onde $x, x^o \in R^m$, $y, y^o \in R^n$, $a > 0$ e $b > 0$) tal que $F(x^o, y^o) = 0$, com derivadas parciais contínuas em relação a $y_1, \ldots, y_n$ e seja o jacobiano $F_y(x^o, y^o) \neq 0$. Então existem constantes reais $a^* > 0$ e $b^* > 0$ tais que (18) tem uma e uma única solução $u = (u_1, \ldots, u_n)$ definida e contínua em $B[x^o, a^*]$ e com valores em $B[y^o, b^*]$. Se $F(x,y)$ tem também derivadas parciais contínuas em relação a $x_1, \ldots, x_n$ então u é derivável em relação a $x_1, \ldots, x_m$ e

(19) $$(u_x) = -(F_y)^{-1}(F_x)$$

(notar que $(F_y)^{-1}$ indica a matriz inversa da matriz jacobiana (F_y) e que no segundo membro de (19) temos um produto de matrizes).

§ 5 - SISTEMAS DIFERENCIAIS SOB FORMA IMPLÍCITA

5.1. - Lema: Seja $f(x,y,z)$ uma função definida e contínua para

$$|x-x^o| \leq a \quad , \quad |y-y^o| \leq b \quad , \quad |z-z^o| \leq c$$

(onde $x, y, z, x^o, y^o, z^o \in R$, $a > 0$ e $b > 0$, $c > 0$ e suponhamos que existam as constantes reais K e K_1 , $K_1 < 1$, tais que

(20) $$|f(x,y,z) - f(x,y^*,z^*)| \leq K|y-y^*| + K_1|z-z^*|$$

para $x \in B[x^o, a^o]$, $y, y^* \in B[y^o, b]$, $z, z^* \in B[z^o, c]$ e que

$$z^o = f(x^o, y^o, z^o)$$

Então existe uma constante $0 < a^* \leq a$ tal que a equação diferencial

$$(21) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

com as condições iniciais $y(x^o) = y^o$ e $\left|\left(\frac{dy}{dx}\right)(x^o) - z^o\right| \leq c$ tem uma e uma única solução $\underline{u}$ definida para $|x - x^o| \leq a^*$, com
$|u(x) - y^o| \leq b$ e $|u'(x) - z^o| \leq c$

<u>Demonstração</u>: Como $K_1 < 1$, $c - K_1 c > 0$ e portanto existe $a_1 > 0$ tal que $K(c + |z^o|) a_1 < c - K_1 c$ e $a_1(c + |z^o|) \leq b$.

Como a função $g(x) = f(x, y^o, z^o) - z^o$ é contínua e se anula em $(x^o, \cancel{y^o, z^o})$ existe $0 < a^* \leq \min(a, a_1)$ tal que

$$(22) \qquad |f(x, y^o, z^o) - z^o| + K_1 c + K a^* (c + |z^o|) < c$$

$$(23) \qquad a^*(c + |z^o|) \leq b$$

para todo $x \in B[x^o, a^*]$. De (22) seque que

$$(24) \qquad q = K_1 + K a^* < 1$$

Lembremos que (I.5.6) o conjunto E das funções contínuas em $B[x^o, a^*]$ com valores em $B[z^o, c]$ com a distância

$$d(v, v^*) = \|v - v^*\| = \sup_{|x - x^o| \leq a^*} |v(x) - v^*(x)|$$

é um espaço métrico completo. Dado $v \varepsilon E$ e $x \varepsilon B[x^o, a^*]$ de (23) vem que

$$(25) \quad \left| \int_{x^o}^{x} v(t)dt \right| \leq a^* \max_{|x-x^o| \leq a^*} |v(x)| \leq a^*(c+|z^o|) \leq b$$

e portanto podemos definir em E a aplicação T tal que $Tv = w$ onde, para todo $x \varepsilon B[x^o, a^*]$,

$$w(x) = f(x, y^o + \int_{x^o}^{x} v(t)dt, v(x))$$

A aplicação $\underline{w}$ é contínua em $B[x^o, a^*]$ e de (20), (25) e (22) vem que

$$|w(x)-z^o| \leq |f(x,y^o+\int_{x^o}^{x} v(t)dt, v(x)) - f(x,y^o,z^o)| +$$

$$+ |f(x,y^o,z^o)-z^o| \leq K \left|\int_{x^o}^{x} v(t)dt\right| + K_1|v(x)-z^o| +$$

$$+ |f(x,y^o,z^o)-z^o| \leq Ka^*(c+|z^o|) + K_1c + (f(x,y^o,z^o)-z^o| \leq c$$

portanto $w \varepsilon E$ e T é uma aplicação de E em E. Se $v, v^* \varepsilon E$, de (20) e (24) segue que $\|Tv - Tv^*\| =$

$$= \sup_{|x-x^o| \leq a^*} |f(x,y^o+\int_{x^o}^{x} v(t)dt, v(x)) - f(x,y^o+\int_{x^o}^{x} v^*(t)dt, v^*(x)|$$

$$\leq \max_{|x-x^o| \leq a^*} \left[K \int_{x^o}^{x} |v(t)-v^*(t)|dt + K_1|v(x)-v^*(x)| \right] \leq$$

$\leq Ka^{*}\|v-v^{*}\| + K_1\|v-v^{*}\| = q\|v-v^{*}\|$

com $0 \leq q < 1$, logo a sequência (v_ν) onde $v_1 \varepsilon E$ e $v_{\nu+1} = Tv_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, converge em E e portanto converge uniformemente para uma função $u^{*} \varepsilon E$ tal que $Tu^{*}=u^{*}$, pelo teorema do ponto fixo. Seja

$$y_\nu(x) = y^0 + \int_{x^0}^{x} v_\nu(t)dt \qquad \nu = 1,2,\ldots$$

A função $y_\nu \varepsilon E$, é derivável e

$$\frac{dy_\nu}{dx} = v_\nu \quad , \quad y_\nu(x^0) = y^0 \qquad \nu = 1,2,\ldots$$

Dos teoremas sôbre integração e derivação de uma sequência (O. Catunda, Curso de Análise Matemática : cap.IX, §5, Teoremas I e II) segue que (y_ν) converge uniformemente para uma função $u \varepsilon E$ tal que $u(x^0) = y^0$ e

$$\frac{du}{dx} = \lim_{n \to \infty} \frac{dy_\nu}{dx} = \lim_{n \to \infty} v_\nu = u^{*} \quad \text{e portanto}$$

$\left|\left(\frac{du}{dx}\right)(x^0) - z^0\right| < c$ e como $Tu^{*} = u^{*}$, $\frac{du}{dx} =$

$$= f\left(x, y^0 + \int_{x^0}^{x} \frac{du}{dt}\,dt, \frac{du}{dx}\right) = f\left(x, u(x), \frac{du}{dx}\right) \quad \text{para todo}$$

$x \varepsilon B[x^0, a^{*}]$. Da unicidade de u^{*} segue a unicidade da solução de (21) satisfazendo às condições iniciais dadas, e está demonstrado o lema 5.1.

5.2. - Lema: Se $f(x,y,z)$ é uma função definida e contínua numa vizinhança do ponto $(x^o,y^o,z^o) \varepsilon R^3$ e tem nesta vizinhança derivadas parciais em relação a y e a z contínuas e se $f'_z(x^o,y^o,z^o) = 0$ então existem $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ tais que $f(x,y,z)$ satisfaça à condição de Lipschitz (20) com $K_1 < 1$.

Demonstração: Segue do teorema da média como no caso do lema 4.3.

5.3. - Teorema: Seja $F(x,y,z)$ uma função definida e contínua numa vizinhança do ponto $(x^o,y^o,z^o) \varepsilon R^3$ tal que $F(x^o,y^o,z^o) = 0$, com derivadas parciais em relação a y e a z contínuas nessa vizinhança e seja $F'_z(x^o,y^o,z^o) \neq 0$. Então existe $a^* > 0$ tal que a equação diferencial

$$(26) \qquad F(x,y,\frac{dy}{dx}) = 0$$

com a condição inicial $y(x^o) = y^o$ tem uma e uma única solução definida para $|x-x^o| \leq a^*$.

Demonstração: Como $F_z(x^o,y^o,z^o) \neq 0$ a função

$$(27) \qquad f(x,y,z) = z - \frac{F(x,y,z)}{F_z(x^o,y^o,z^o)}$$

satisfaz às hipóteses do lema 5.2 e como $f(x^o,y^o,z^o) = z^o$ o teorema 5.3 segue do lema 5.1 (pois (26) é equivalente a (21) tendo em vista (27)).

5.4. - Consideremos em R^n a norma $||y|| = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i|$.

Usando as definições e notações dadas em 4.5 prova-se a seguinte generalização do teorema 5.3 :

<u>Teorema</u>: Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}) = 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

ou, vetorialmente,

$$(27') \qquad F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Seja $F(x,y,z)$ definida e contínua numa vizinhança do ponto $(x^o, y^o, z^o) \varepsilon R \times R^n \times R^n$ e tal que $F(x^o, y^o, z^o) = 0$, com derivadas parciais em relação a y_i, z_i $(i=1,\ldots,n)$ contínuas nessa vizinhança e suponhamos que o jacobiano $F_z(x^o, y^o, z^o) \neq 0$. Então existe $a^* > 0$ tal que o sistema diferencial (27') com a condição inicial $y(x^o) = y^o$ tem uma e uma única solução definida para $|x-x^o| \leq a^*$.

§ 6 - <u>SISTEMAS LINEARES</u>

6.1. - <u>Definição</u>: Dizemos que a sequência (z_n) de números complexos é uma <u>solução</u> do sistema linear

$$(28) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = b_i \qquad i=1,2,\ldots$$

onde a_{ik}, b_i, $i,k = 1,2,\ldots$ são números complexos se para todo inteiro positivo i a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k$ converge e $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k = b_i$.

O sistema linear (28) é equivalente ao sistema

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i \qquad i=1,2,\ldots \tag{29}$$

onde

$$c_{ik} = \begin{cases} -a_{ik} & \text{se} \quad i \neq k \\ 1-a_{ii} & \text{se} \quad i = k \end{cases}$$

Pretendemos determinar que condições devem ser impostas aos coeficientes do sistema linear para que êste admita solução e quando esta solução é única. Isto equivale a determinar quando a aplicação linear T que à sequência (x_n) de números complexos faz corresponder a sequência (y_n) tal que

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i \qquad i=1,2,\ldots$$

está definida e tem um único ponto fixo. Veremos em seguida que o problema se resolve fàcilmente quando impomos que a solução deva pertencer a um dos espaços $\ell^{\infty}(N)$ ou $\ell^{p}(N)$, $p = 1,2,\ldots$.

Lembremos que o espaço $\ell^{\infty}(N)$ consiste de tôdas as sequências $x = (x_n)$ de números complexo limitadas, isto é, tais que $\sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty$, com a norma

$||x|| = \sup_{n\geq 1} |x_n|$ e que para a distância correspondente $\ell^\infty(N)$ é um espaço métrico completo (I.5.1). Para $p \geq 1$, $\ell^p(N)$ é o espaço das sequências $x = (x_n)$ de números complexos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ com a norma

$$||x|| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

Para a distância correspondente $\ell^p(N)$ é também um espaço métrico completo. (I.5.F2)

6.2. - <u>Teorema</u>: Se o sistema linear (29) satisfaz às condições

(30) $$\sup_{i\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| \leq q < 1$$

(31) $$\sup_{i\geq 1} |b_i| < \infty$$

então o sistema (29) possui, em $\ell^\infty(N)$, uma e uma única solução.

<u>Demonstração</u>: Se $(x_n) \in \ell^\infty(N)$ a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_k$$

converge devido a (30), logo podemos definir em $\ell^\infty(N)$ a aplicação T tal que se $x=(x_n) \in \ell^\infty(N)$, $Tx = y = (y_n)$ onde

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_k + b_i \qquad i=1,2,\ldots$$

A aplicação T leva $\ell^{\infty}(N)$ em $\ell^{\infty}(N)$ pois para todo inteiro positivo i

$$|y_i| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}x_k| + |b_i| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| + |b_i| \leq q\|x\| + \|b\|$$

Se $x, x^* \in \ell^{\infty}(N)$ temos

$$||Tx - Tx^*|| = \sup_{i \geq 1} |y_i - y_i^*| = \sup_{i \geq 1} \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}(x_k - x_k^*)\right| \leq$$

$$\leq ||x - x^*|| \sup_{i \geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| \leq q \, ||x - x^*||$$

com $q < 1$, logo o teorema 6.2 segue do teorema do ponto fixo.

Um sistema linear (29) que satisfaça às condições. (30) e (31) denomina-se <u>completamente regular</u>.

Podemos então enunciar o teorema 6.2 como:

Todo sistema linear completamente regular tem uma e uma única solução limitada.

6.3. - <u>Corolário</u>: A solução limitada de um sistema linear (29) pode ser obtida a partir de uma sequência limitada qualquer pelo método das aproximações sucessivas. Se partirmos da sequência $z_1 = 0$ e construirmos a sequência $z_{\nu+1} = T z_{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ e z é a solução limitada do sistema, temos a aproximação

$$||z_n - z|| \leq \frac{q^{n-1}||b||}{1-q}$$

onde $\sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}| \leq q < 1$.

Consequência imediata de (6.2) e (0.2).

<u>Observação</u>: Um sistema linear completamente regular pode ter também soluções não limitadas. Por exemplo, o sistema $x_i = \frac{1}{2} x_{i+1}$ $i=1,2,\ldots$ tem as soluções $(c,2c,4c,8c,\ldots)$ onde c é uma constante complexa qualquer; a única solução limitada é a solução nula.

6.4. - <u>Teorema</u>: Se o sistema linear (29) satisfaz às condições

$$\sup_{k \geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ik}| \leq q < 1 \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < \infty \tag{33}$$

então o sistema (29) possui, em $\ell^1(N)$, uma e uma única solução.

<u>Demonstração</u>: Devido a (32) a aplicação T tal que se $(x_n) = x \in \ell^1(N)$, $Tx = y = (y_n)$ onde $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k + b_i$ está definida em $\ell^1(N)$ e como

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k\right| + |b_i|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ik}| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot \sup_k \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ik}| + ||b|| \leq q||x|| + ||b||$$

T leva $\ell^1(N)$ em $\ell^1(N)$. Se $x, x^* \in \ell^1(N)$ temos

$$||Tx-Tx^*|| = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i - y_i^*| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}(x_k - x_k^*) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^*| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ik}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^*| \cdot \sup_k \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ik}| \leq q||x-x^*||$$

com $q < 1$, logo o teorema 6.4 segue do teorema do ponto fixo.

6.5. - Teorema: Se o sistema linear (29) satisfaz às condições

(34) $$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} \leq q^p < 1$$

(35) $$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p < \infty$$

onde $p > 1$, então o sistema (29) possui, em $\ell^p(N)$, uma e uma única solução.

Demonstração: Como por (34) $(c_{ik})_{k \in N} \in \ell^{\frac{p}{p-1}}(N)$, dado $(x_n) \in \ell^p(N)$ a série $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} x_k$ converge e portanto está definida em $\ell^p(N)$ a aplicação T tal que x

$$x = (x_n) \in \ell^p(N) \ , \quad T x = y = (y_n) \quad \text{onde}$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_k + b_i \qquad i=1,2,\ldots$$

Das desigualdades do Minkowski

$$\left(\sum_n |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e de Hölder

$$\left|\sum_n a_n\, b_n\right| \leq \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_n |b_n|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

vem que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_i \left(\left|\sum_k c_{ik}\, x_k + b_i\right|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_i \left|\sum_k c_{ik} x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_i |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_i \left[\left(\sum_k |x_k|^p\right)\left(\sum_k |c_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right]\right\}^{\frac{1}{p}} + \|b\| \leq$$

$$\leq q\|x\| + \|b\|$$

logo $(y_n) \in \ell^p(N)$. Se $x, x^* \in \ell^p(N)$ aplicando novamente a desigualdade de Hölder temos

$$\|Tx-Tx^*\|^p = \sum_i |y_i - y_i^*|^p = \sum_i \left|\sum_k c_{ik}(x_k - x_k^*)\right|^p \leq$$

$$\leq \sum_i \left[\left(\sum_k |x_k - x_k^*|^p\right)\left(\sum_k |c_{ik}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right] \leq q^p \|x-x^*\|^p$$

logo $\|Tx-Tx^*\| \leq |q|\ \|x-x^*\|$ com $|q| < 1$ e portanto o teorema segue do teorema do ponto fixo.

<u>Observação</u>: Dada uma aplicação linear contínua

A de um espaço de Banach E em si mesmo, procurar uma solução $x \in E$ da equação $Ax = b$ onde $b \in E$ equivale a procurar um elemento $x \in E$ t.q. $x = (I - A)x + b$ onde I é a aplicação idêntica de E; pondo $C = I - A$ então o elemento x acima é um ponto fixo da aplicação $f(x) = Cx + b$. Do teorema do ponto fixo segue imediatamente que se $\|C\| < 1$ então f tem um e um único ponto fixo e portanto para todo $b \in E$ a equação $Ax = b$ tem uma e uma só solução $x \in E$.

Os teoremas precedentes dêste § estudam êste problema quando $E = \ell^p(N)$ e os enunciados podem ser interpretados como condições suficientes para que tenhamos $\|C\| < 1$ para aplicações lineares contínuas C de $\ell^p(N)$ em si mesmo (Ap.I. nº 2). É facil verificar que em $\ell^1(N)$ temos $C = \sup\limits_k \sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_{ik}|$ e em $\ell^{\infty}(N)$ temos $\|C\| =$ $= \sup\limits_i \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|$. Para $1 < p < \infty$ temos

$$\|C\|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{ik}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1}$$

não valendo em geral a igualdade. Não se conhece uma expressão que exprima $\|C\|$ em função dos c_{ik} quando $1 < p < \infty$.

*

CAPÍTULO III

O TEOREMA DE BAIRE

O teorema de Baire é um teorema muito importante da Topologia Geral e apesar de sua forma inocente êle dá resultados muito fortes. Damos neste capítulo duas aplicações do teorema de Baire.

No periódico polonês "Fundamenta Mathematica" se encontram muitos artigos com aplicações do teorema de Baire principalmente à topologia, ou melhor, à teratopologia.

§ 1 - Espaços de Baire

1.1 - Definição: Um espaço topológico E é um espaço de Baire se está satisfeita em E uma das seguintes condições equivalentes:

B.1 - Tôda intersecção enumerável de conjuntos abertos totalmente densos em E é totalmente densa.

B.2 - Tôda reunião enumerável de conjuntos fechados sem ponto interior em E é sem ponto interior em E.

1.2 - Teorema de Baire: Todo espaço métrico completo e todo espaço topológico localmente compácto é um espaço de Bairo.

<u>Demonstração:</u> Seja E um espaço topológico de um dos dois tipos citados; vamos demonstrar que a condição B.1 está satisfeita em E. Seja (O_n) uma sequência de conjuntos abertos densos em E e $O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Dado um conjunto aberto não vazio G_1 devemos demonstrar que $G_1 \cap O \neq \emptyset$. Como existe $x_1 \in G_1 \cap O_1$ e como E é regular (I.8.6 e 7) existe uma vizinhança fechada F_1 de x_1 tal que $F_1 \subset G_1 \cap O_1$; o conjunto $G_2 = \overset{\circ}{F_1}$ é um conjunto aberto não vazio tal que $\overline{G}_2 \subset F_1 \subset G_1 \cap O_1$.

Por indução demonstra-se que para todo inteiro $n \geq 2$ existe um conjunto aberto não vazio G_n tal que $\overline{G}_n \subset G_{n-1} \cap O_{n-1}$. Como

$$G_1 \cap O = G_1 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) \supset G_1 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap O_n) \supset G_1 \cap (\bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{G}_n) =$$

$= \bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{G}_n$ é suficiente demonstrar que $\bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{G}_n \neq \phi$.

a) Seja E localmente compacto. Podemos tomar $\overline{G}_2$ compacto e como $(\overline{G}_n)_{n \geq 2}$ é uma sequência decrescente de conjuntos fechados não vazios contidos no espaço compacto $\overline{G}_2$ temos $\bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{G}_n \neq \phi$. (I.3.condição C')

b) Seja E um espaço métrico completo e $\underline{d}$ a distância sôbre E. Tomemos como $\overline{G}_n (n \geq 2)$

uma bola de raio $r_n \leq \frac{1}{n}$ e seja x_n o centro de $\bar{G}_n$. Como para $2 \leq p \leq q$ temos $x_q \in \bar{G}_q \subset \bar{G}_p$ vem que $d(x_p, x_q) \leq r_p$ e portanto a sequência $(x_n)_{n \geq 2}$ é uma sequência de Cauchy. Como E é completo existe $x_o \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x_o$. Dado $p \geq 2$ se $p < q$ temos $d(x_p, x_o) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, x_o) \leq r_p + d(x_q, x_o)$. e como $d(x_q, x_o) \longrightarrow 0$ segue que $d(x_p, x_o) \leq r_p$, isto é, $x_o \in \bar{G}_p$. Sendo $p \geq 2$ arbitrário, $x_o \in \bigcap_{n=2}^{\infty} \bar{G}_n$.

§ 2 - Existência de funções contínuas sem derivada.

2.1 - **Teorema:** O conjunto das funções definidas e contínuas na reta, periódicas e de período 2π, e que não possuem derivada em qualquer ponto da reta é denso no conjunto E de tôda as funções periódicas e de período 2π definidas e contínuas na reta.

Demonstração: Se $f, g \in E$ seja

$$d(f,g) = \| f-g \| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)-g(x)|$$

O espaço E com a distância d é um espaço métrico completo (I.5.6). Para todo inteiro positivo n seja F_n o conjunto das funções f de E tais que exista um ponto $t \in R$ tal que $\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \leq n$ para todo h real positivo.

a) O conjunto F_n $(n \geq 1)$ é fechado: dada a sequência (f_i) de funções de F_n que converge uniformemente para a função $\underline{f}$ devemos provar que $f \in F_n$. Para $h > 0$ real qualquer seja

$$g_j(\not{t}) = \frac{f_i(t+h)-f_i(t)}{h} \quad e \quad g(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

Como $f_j \in F_n$ existe $t_j \in R$, $0 \leq t_j \leq 2\pi$, tal que

(1) $$|g_j(t_j)| \leq n \qquad j=1,2,\dots$$

Sendo $[0,2\pi]$ compacto (I.5.C) existe uma sub-sequência $(t_{j_k})_{k\geq 1}$ convergente para um ponto $t_o \in [0,2\pi]$. (I.9.3) Como g é função contínua de t de $t_{j_k} \rightarrow t_o$ segue que $g(t_{j_k}) \longrightarrow g(t_o)$ e como as funções f_j convergem uniformemente para f as funções g_j(h fixo) convergem uniformemente para g. De

$$|g_{j_k}(t_{j_k})-g(t_o)| \leq |g_{j_k}(t_{j_k})-g(t_{j_k})| + |g(t_{j_k})-g(t_o)|$$

segue então que $\lim\limits_{k\to\infty} g_{j_k}(t_{j_k}) = g(t_o)$. e de (1) obtemos que $|g(t_o)| \leq n$, isto é, existe $t_o \in R$ tal que

$$\left|\frac{f(t_o+h)-f(t_o)}{h}\right| \leq n \quad \text{para } h > 0 \text{ real qualquer, logo}$$

$f \in F_n$.

b) O interior de $F_n (n \geq 1)$ é vazio: dada a função $f \in F_n$ e $\varepsilon > 0$ devemos provar que existe uma função $g \in E$ tal que $d(f,g) < \varepsilon$ e $g \notin F_n$. Como f é uniformemente contínua em $[0,2\pi]$ (I.9.6) existe $\delta > 0$ tal que para $x,x' \in [0,2\pi]$ e $|x-x'| < \delta$ temos

$|f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{4}$. Tomemos um inteiro positivo n_o tal que

$$(2) \qquad \frac{2\pi}{n_o} < \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{n}\right)$$

e seja $x_k = \frac{2k\pi}{n_o}$, $k = 0,1,\ldots, n_o$. Consideremos a função g definida na reta, periódica e de período 2π que em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,\ldots,n_o-1$ é tal que $g(x_k) = f(x_k)$, $g(x_k + \frac{\pi}{n_o}) = f(x_k) + \frac{3\varepsilon}{4}$, $g(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, para $x_k \leq x \leq x_k + \frac{\pi}{n_o}$ a função g é linear assim como para $x_k + \frac{\pi}{n_o} \leq x \leq x_{k+1}$. A função g é contínua em R e nos pontos $x \in R$ em que g é derivável é facil vêr que $|g'(x)| > n$. Se $x \in [0,2\pi]$ tomando x_k tal que $0 \leq x - x_k < \frac{2\pi}{n_o}$ de (2) vem que

$$|g(x)-f(x)| \leq |g(x)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(x)| < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

logo $d(f,g) = \max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)-g(x)| < \varepsilon$.

Como pelo teorema 1.2 E é um espaço de Baire, da condição B.1 da definição 1.1 e de (a) e (b) vem que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ é sem ponto interior em E, logo $\complement_E(\cup F_n)$ é denso em E. É facil verificar que se uma função $f_o \in E$ possui derivada em um ponto $t_o \in R$ então existe n_o tal que $f_o \in F_{n_o}$, logo o conjunto $\complement_E(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$ está contido no conjunto das funções contínuas na reta, periódicas e de período 2π que não são deriváveis em nenhum ponto de R e o teorema 2.1 está demonstrado.

§ 3 - O princípio de limitação uniforme

3.1 - Teorema: Seja E um espaço de Baire e F um espaço normado. Se (f_n) é uma sequência de funções contínuas de E em F tal que em todo ponto $x \in E$ $\sup_{n \geq 1} \| f_n(x) \| < \infty$ então existe um conjunto aberto $O \subset E$ e uma constante M tal que $\sup_{n \geq 1,\ x \in O} \| f_n(x) \| \leq M$.

Demonstração: Para todo inteiro positivo i seja

$$G_i = \left\{ x \in E \mid \| f_n(x) \| \leq i, \quad n = 1, 2, \ldots \right\}$$

Como a função $g_n : x \longrightarrow \| f_n(x) \|$ é contínua em E (I.7.F) segue que $g_n^{-1}([0, i])$ é um conjunto fechado em E (I.4.3) e portanto $G_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}([0, i])$ é fechado em E. Da hipótese segue que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ logo da condição B.2 da definição 1.1 vem que existe um inteiro M tal que o conjunto G_M possui um ponto interio r e portanto existe um conjunto aberto não vazio $O \subset G_M$ tal que $\sup_{n \geq 1, x \in O} \| f_n(x) \| \leq M$.

<u>Observação:</u> Vamos dar um contra-exemplo mostrando que quando E não é um espaço de Baire o Teorema 3.1 não é necessàriamente verdadeiro mesmo se E fôr um espaço com produto interno e as funções f_n funcionais lineares, isto é, $F = R$.

Tomemos $E = R^{(N)}$, espaço das sequências $x = (x_n)_{n \in N}$ de números reais t.q. $x_n = 0$ exceto para um número finito de inteiros $n \in N$. Consideramos sôbre E o produto interno induzido pelo espaço de Hilbert $\ell^2(N)$ (I.5.G 3); a topologia de E é então definida pela distância

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} .$$

Seja $R^n = \left\{ x \in R^{(N)} \mid x_m = 0 \quad \text{se} \quad m > n \right\}$. $R^{(N)}$ induz sôbre R^n a distância euclideana habitual e R^n sendo completo com esta distância é portanto um subespaço fechado de $R^{(N)}$. Como tôda vizinhança <u>em $R^{(N)}$</u> de um ponto de R^n contém pontos de $R^{(N)}$ que não estão em R^n segue que R^n é um conjunto sem interior em $R^{(N)}$. A relação $R^{(N)} = \bigcup_{n \in N} R^n$ mostra então que $R^{(N)}$ é uma reunião enumerável de conjuntos fechados sem interior não sendo portanto um espaço de Baire.

Em $R^{(N)}$ as funções $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i = pr_1 x + \ldots + pr_n x$ são lineares e contínuas pois cada somando o é. Para todo Para todo $x \in R^{(N)}$ temos $\sup_n |f_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$.

Dado um ponto qualquer $x^o \in E = R^{(N)}$ e dado $\varepsilon > 0$ vamos demonstrar que dado $M > 0$ existe $x \in R^{(N)}$ com $d(x,x^o) \leq \varepsilon$ t.q. $\sup_n |f_n(x)| \geq M$: dado $m \in N$ seja $y^{(m)} = (y_i^{(m)})_{i \in N}$ onde $y_i^{(m)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$ para $1 \leq i \leq m$ e nulo para $i > m$. Então temos $d(x^o, x^o + y^{(m)}) = \varepsilon$ e $f_n(x^o + y^{(m)}) = f_n(x^o) + \sqrt{m\,\varepsilon}$ se $m \leq n$; tomando m suficientemente grande o segundo membro se torna arbitràriamente grande pois $|f_n(x^o)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^o| < \infty$. C.Q.D.

3.2 - Teorema: Seja E um espaço de Banach, F um espaço normado e (f_n) uma sequência de aplicações lineares contínuas de E em F. Se para todo $x \in E$, $\sup_n ||f_n(x)|| < \infty$ a sequência (f_n) é uniformemente limitada, isto é, existe uma constante M tal que $\sup_{n \geq 1} \|f_n\| \leq M$.

Demonstração: Como E é um espaço de Baire pelo teorema 3.1 existe uma bola aberta $B = B(y_o, r) \subset E$ e uma constante M tal que $\sup_{n \geq 1,\, x \in B} \| f_n(x) \| \leq M$. Se $x \neq 0$ seja $x_o = y_o + \frac{r\,x}{2\|x\|}$, logo $\|x_o - y_o\| = \frac{r}{2} < r$ e $x_o \in B$. Como f_n $(n \geq 1)$ é linear, $f_n(x_o) = f_n(y_o) + \frac{r}{2\|x\|} f_n(x)$ e portanto $\|f_n(x)\| = \frac{2}{r}\|x\| \; \|f_n(x_o) - f_n(y_o)\| \leq$

$\leq \frac{2}{r}\|x\| \left(\|f_n(x_o) - f_n(y_o)\|\right) \leq \frac{4\,M}{r} \; \|x\|$. Tomando $M_1 = \frac{2\,M}{r}$ temos $\|f_n(x)\| \leq M_1 \; \|x\|$ para todo $x \in E$ (para $x = 0$ a desigualdade é certamente verdadeira) e para todo inteiro positivo n, logo $\sup\limits_{n \geq 1} \|f_n\| \leq M_1$.

(Ap I.1)

3.3 - <u>Teorema de Banach Steinhaus</u>: Seja E um espaço de Banach e F um espaço normado. Se (f_n) é uma sequência de aplicações lineares contínuas de E em F e se existe $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ para todo $x \in E$ então $\underline{f}$ é uma aplicação linear e contínua de E em F.

<u>Demonstração</u>: É imediato que a aplicação $\underline{f}$ é linear, pois se $x, y \in E$ temos

$$f(x+y) = \lim_{n \to \infty} f_n(x+y) = \lim_{n \to \infty} \left[f_n(x) + f_n(y)\right] = f(x) + f(y)$$

e analogamente se $x \in E$ e λ é um escalar, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

A sequência $(f_n(x))$ sendo convergente em F é uma sequência de Cauchy e como em todo espaço normado o conjunto de pontos de uma sequência de Cauchy é limitado, temos $\sup\limits_{n \geq 1} \|f_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Existe então por 3.2 uma constante M tal que $\sup\limits_{n \geq 1} \| f_n(x) \| \leq M \|x\|$ para todo $x \in E$ e portanto $\| f(x) \| \leq M \| x \|$, $x \in E$, logo $\underline{f}$ é contínua em E. (ApI.1)

<u>Observações</u>: 1) Notemos que, nas condições do teorema 3.5, se existe $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in E$ isto não implica que $\| f_n - f \| \longrightarrow 0$. De fato, consideremos em $\ell^1(N)$ (I.5.F2) o funcional linear e contínuo f_n tal que, se $x = (x_n) \in \ell^1(N)$, $f_n(x) = x_n$ temos que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in \ell^1(N)$ e no entanto $\| f_n \| = 1$ para todo inteiro positivo $\underline{n}$.

2) O contra-exemplo da observação que segue o Teorema 3.1. mostra que o teorema de Banach-Steinhaus não é necessàriamente verdadeiro se o espaço E não fôr completo: com as notações daquela observação, temos $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in E = R^{(N)}$, onde $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ e êste funcional linear $\underline{f}$ não é contínuo em $R^{(N)}$ pois $\| y^{(m)} \| = \varepsilon$ mas $|f(y^{(m)})| = \sqrt{m\varepsilon}$ cresce arbitràriamente com $\underline{m}$, isto é, $\| f \|$ não é finito.

---*---

CAPÍTULO IV

O TEOREMA DE BROUWER

Neste capítulo damos uma demonstração elementar do teorema de Brouwer para duas dimensões, dando em seguida uma aplicação (de Lefschetz) dêste teorema na demonstração da existência de soluções periódicas de certas equações diferenciais no plano.

Referência:

S. Lefschetz: Proc.Nat.Acad.Sciences, Vol. (1942), p.

§ 1 - O teorema de Brouwer

Seja $S = \left\{ c \in C \,\middle|\, |c| = 1 \right\}$ o conjunto dos números complexos de módulo 1, conjunto êste que consideramos munido com a distância induzida por C. Lembremos que S é um grupo em relação à multiplicação. Lembremos ainda que dado um espaço topológico E, consideramos sempre sôbre o conjunto $\mathcal{C}(E,S)$ das aplicações contínuas de E em S a distância $d(f,g)= \sup\limits_{x \in E} |f(x)-g(x)|$.

1.1 - Diz-se que uma aplicação contínua α de um espaço topológico E em S é inessencial se existe uma aplicação contínua ϑ de E em R tal que $\alpha(x) = e^{i\vartheta(x)}$ para todo $x \in E$; uma outra aplicação contínua ϑ' de E

em R tem a mesma propriedade se e sòmente se $\vartheta(x) - \vartheta'(x) = 2\pi k$ onde k é um inteiro relativo qualquer.

1.2 - Se $\alpha(E) \neq S$ a aplicação α é inessencial.

<u>Demonstração</u>: Tomemos $s_o \in S$, $s_o \notin \alpha(E)$ e seja $t_o \in R$ tal que $s_o = e^{it_o}$.

A aplicação $t \in]t_o, t_o + 2\pi[\longrightarrow e^{it}$ é um homeomorfismo do intervalo $]t_o, t_o + 2\pi[$ sôbre $S - \{s_o\}$ e indicando com ψ o homeomorfismo inverso, temos $\alpha(x) = e^{i\,\vartheta(x)}$, onde $\vartheta(x) = \psi(\alpha(x))$, é uma aplicação contínua de E em R.

1.3 - Dada uma aplicação contínua α de S em S, consideramo-la também como uma aplicação contínua, que ainda indicamos pela letra α, de $[0, 2\pi]$ em S e tal que $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$. Uma aplicação contínua α de $[0,2\pi]$ em S sendo uniformemente contínua (pois o intervalo $[0,2\pi]$ é compacto) podemos achar uma divisão

$$s_o = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = 2\pi$$

do intervalo $[0,2\pi]$ tal que para $t, s \in [s_i, s_{i+1}]$ tenhamos $|\alpha(s) - \alpha(t)| < 2$ e portanto a restrição de α a cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ é inessencial (1.2).

Seja então ϑ_1 uma aplicação contínua de $[s_o, s_1]$ em R tal que $\alpha(s) = e^{i\,\vartheta_1(s)}$ para todo $s \in [s_o, s_1]$; tomemos ϑ_2 uma aplicação contínua de $[s_1, s_2]$ em R tal que $\vartheta_1(s_1) = \vartheta_2(s_1)$ e tal que

$\alpha(s) = e^{i\vartheta_2(s)}$ para todo $s \varepsilon [s_1, s_2]$; de modo análogo vamos construindo sucessivamente as aplicações ϑ_3 até ϑ_n; definindo $\vartheta(s) = \vartheta_i(s)$ se $s \varepsilon [s_i, s_{i+1}]$ temos uma aplicação contínua de $[0, 2\pi]$ em R tal que $\alpha(s) = e^{i\vartheta(s)}$, de $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ segue que $\vartheta(2\pi) - \vartheta(0) = 2\pi m$, onde <u>m</u> é um inteiro que chamamos de <u>grau</u> da aplicação. É imediato que o grau assim definido é independente de "determinação inicial" $\vartheta_1(0)$. Por outro lado, intercalando novos pontos na divisão $s_o < s_1 < \ldots < s_n$ não alteramos a função ϑ e nem o grau portanto.

Dadas duas divisões quaisquer de $[0, 2\pi]$ podemos sempre considerar a divisão formada pelos pontos de ambas donde segue que o grau é independente da particular divisão do intervalo que usamos. Indicamos o grau de α por $g[\alpha]$. A aplicação contínua $\vartheta : [0, 2\pi] \longrightarrow R$ que construimos acima é chamada de <u>logarítmo</u> da aplicação α. Se ϑ' é outro logarítmo de α temos $\vartheta - \vartheta' = 2\pi k$ onde <u>k</u> é um inteiro relativo. ϑ pode ser considerada como uma aplicação contínua de S em R se e sòmente se $\vartheta(0) = \vartheta(2\pi)$ isto é:

1.4 - Uma aplicação contínua α de S em S é inessencial se e sòmente se o seu grau fôr nulo.

Se α_a e α_b são aplicações contínuas de S em S e se ϑ_a e ϑ_b são logarítmos, respectivamente de α_a e de α_b, é imediato que $\alpha(s) = (\alpha_a \alpha_b)(s) = \alpha_a(s)\alpha_b(s)$ também define uma aplicação contínua de S em S (lembramos que estamos considerando em S a estrutura multiplicativa induzida por C) e que a função $\vartheta = \vartheta_a + \vartheta_b$ é um logarítmo de α ; portanto $\vartheta(2\pi) - \vartheta(0) = (\vartheta_a(2\pi) - \vartheta_a(0)) + (\vartheta_b(2\pi) - \vartheta_b(0))$ donde segue que

1.5 - $g[\alpha_a \alpha_b] = g[\alpha_a] + g[\alpha_b]$

Se α é uma aplicação contínua de S em S o mesmo se dá com a aplicação $s \in S \longrightarrow \alpha^{-1}(s) = \alpha(s)^{-1} \in S$ e se ϑ é um logarítmo de α, $-\vartheta$ é um logarítmo de α^{-1} donde segue que

1.6 - $g[\alpha^{-1}] = - g[\alpha]$

1.7 - Dadas duas aplicações contínuas α_a e α_b de S em S tais que $d(\alpha_a, \alpha_b) < 2$ então $g[\alpha_a] = g[\alpha_b]$.

Demonstração:

$$d(\alpha_a, \alpha_b) = \sup_{s \in S} |\alpha_a(s) - \alpha_b(s)| = \sup_{s \in S} |\alpha_a(s)\,\alpha_b(s)^{-1} - 1|$$

e se para todo $s \in S$ temos $|\alpha_a(s)\,\alpha_b(s)^{-1} - 1| < 2$ então a aplicação $\alpha_a \alpha_b^{-1}$ não é sôbre S e de (1.2) e (1.3) segue portanto que $g[\alpha_a \alpha_b^{-1}] = 0$; de (1.5) e (1.6) segue que $g[\alpha_a \alpha_b^{-1}] = g[\alpha_a] - g[\alpha_b]$ donde segue a igualdade.

1.8 - Uma <u>curva fechada</u> de um subconjunto A de C é uma aplicação contínua φ de S em A. Lembremos que dadas duas curvas fechadas φ_1 e φ_2 de A a sua distância é definida por $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{s \in S} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|$.

Dado um campo vetorial contínuo $E(x) \neq 0$ definido num subconjunto $A \subset C$ (i.é uma aplicação que a todo ponto $x \in A$ associa um vetor $E(x) \neq 0$ do plano $C = R^2$, a continuidade tendo um sentido evidente) indicamos por $a(x)$ o ângulo que o vetor $E(x)$ faz com o eixo das abcissas; consideramos $\underline{a}$ como uma aplicação (contínua) de A em S.

Dada uma curva fechada φ de A a aplicação $\alpha : s \in S \longrightarrow \alpha(s) = a(\varphi(s)) \in S$ é uma aplicação contínua de S em S cujo grau é por definição o <u>índice</u> da curva φ em relação ao campo vetorial $E(x)$.

Uma <u>deformação contínua</u> ou <u>homotopia</u> em A de uma curva fechada φ_o em uma curva fechada φ_1 é uma aplicação contínua ψ de $[0,1]$ no conjunto $\mathcal{C}_u(S,A)$ das curvas fechadas de A (munido com a distância definida acima) tal que $\psi(0) = \varphi_o$ e $\psi(1) = \varphi_1$. Dizemos então que as curvas fechadas φ_o e φ_1 são <u>homótopas</u> em A. No caso particular em que $A = S$ temos a noção de deformação contínua ou homotopia de aplicações contínuas de S em S.

É imediato que

1.9 - Dado um campo vetorial contínua $E(x) \neq 0$ definido num subconjunto $A \subset C$, uma deformação contínua de curva fechada φ_o de A numa curva fechada φ_1 de A define uma deformação contínua da aplicação $\alpha_o = a \circ \varphi_o$ na aplicação $\alpha_1 = a \circ \varphi_1$ (aplicações contínuas de S em S).

O intervalo $[0,1]$ sendo compacto, uma deformação contínua $\lambda \in [0,1] \longrightarrow \alpha_\lambda \in \mathcal{C}_u(S,S)$ que leva α_o em α_1 é uniformemente contínua (I.9.7) e portanto podemos achar uma divisão $\lambda_o = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = 1$ do intervalo $[0,1]$ tal que $d(\alpha_{\lambda i}, \alpha_{\lambda i+1}) < 2$; de (1.7) segue que $g[\alpha_{\lambda i}] = g[\alpha_{\lambda i+1}]$ e portanto $g[\alpha_o] = g[\alpha_1]$. Demonstramos portanto que

1.10 - Dado um campo vetorial contínuo $E(x) \neq 0$ definido num subconjunto $A \subset C$, duas curvas fechadas e homotópicas em A têm o mesmo índice em relação ao campo vetorial.

Duas aplicações contínuas de S em S que são homotópicas têm o mesmo grau.

1.11 - Dado um campo vetorial contínuo $E(x) \neq 0$ definido num subconjunto $A \subset C$ então para todo $x \in A$ existe uma vizinhança V_x tal que para tôda curva fechada contida em V_x o seu índice em relação ao campo vetorial é nulo.

<u>Demonstração</u>: Da continuidade do campo segue que podemos achar uma vizinhança V_x tal que para todo $y \in V_x$ tenhamos $|a(y)-a(x)| < 1$; de (1.2) e (1.4) segue então o resultado.

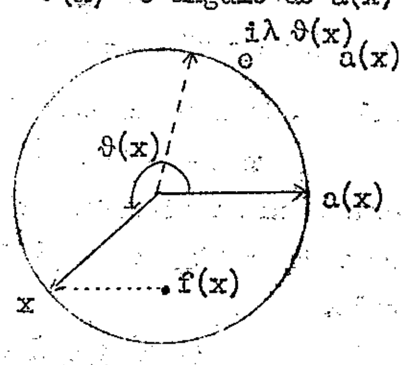
1.12 - Indicamos por D o disco unitário fechado de C ;

$D = \{ c \in C \mid |c| \leq 1 \}$.

<u>Teorema de Brouwer</u>: Tôda aplicação contínua f de D em si mesmo tem pelo menos um ponto fixo, isto é, um ponto $x_o \in D$ tal que $f(x_o) = x_o$.

<u>Demonstração</u>: se tivessemos sempre $f(x) \neq x$ poderiamos associar a todo ponto $x \in D$ o vetor $E(x) = f(x) - x$ e teriamos dêste modo um campo vetorial contínua $E(x)$ definido em D com $E(x) \neq 0$ para todo $x \in D$.

Para todo $x \in D$ com $|x| = 1$ o vetor $E(x)$ (considerado com origem no ponto x) aponta para dentro do disco e indicando com $a(x)$ o ângulo que o vetor $E(x)$ faz com o eixo das abcissas (consideramos, como sempre, a como uma aplicação de S em S) e com $\vartheta(x)$ o ângulo de $a(x)$ com x, podemos portanto tomar $\frac{\pi}{2} < \vartheta(x) < \frac{3\pi}{2}$ para todo $x \in S$.



Consideremos a homotopia

$\lambda \in [0,1] \longrightarrow \alpha_\lambda \in C_u(S,S)$

onde $\alpha_\lambda(x) = e^{i\lambda\vartheta(x)}a(x)$. Temos $\alpha_o(x) = a(x)$ e $\alpha_1(x) = x$ que é a aplicação idêntica de S sôbre si mesmo, aplicação esta que tem evidentemente grau 1 e de

(1,11) segue que o mesmo ainda vale para a aplicação α, isto é, o índice de α_1 em relação ao campo vetorial E é 1.

Por outro lado a aplicação contínua $\lambda \varepsilon [0,1] \longrightarrow \beta_\lambda \varepsilon \mathcal{C}_u(S,D)$ onde $\beta_\lambda(x) = \lambda x$ define uma homotopia entre $\beta_1 = \alpha_1$ e a curva fechada constante $\beta_o(x) = 0$ que tem evidentemente índice nulo em relação ao campo $E(x)$ e o mesmo deveria então ser verdade para a curva α_1 em contradição com o que demonstramos acima.

1.15 - É imediato que o teorema de Brouwer ainda vale para qualquer espaço homeomorfo a D.

<u>Observação</u>: Em Topologia Algébrica introduz-se a noção de grau de uma aplicação contínua <u>f</u> de $S^n = \left\{ x \varepsilon R^n \,|\, \|x\| = 1 \right\}$ demonstrando então de modo análogo ao acima o teorema de Brouwer para $B_n = \left\{ x \varepsilon R^n \,|\, \|x\| \leq 1 \right\}$.

§ 2 - <u>Aplicação</u>

21. - <u>Teorema</u> (Lefschetz) - Sejam e,f,g funções numéricas contínuas e com derivada primeira contínua definidas na reta e tais que:

I - e é uma função periódica de período T.

II - $\frac{f(x)}{x}$ tende para $+\infty$ com $|x|$.

III - Existem constantes positivas b e B tais que para todo $x \varepsilon R$ temos

$$|g(x)-bf(x)| \leq B|x|$$

Então a equação diferencial

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + g'(x)\frac{dx}{dt} + f(x) = e(t)$$

tem uma solução periódica $t \in R \longrightarrow x(t) \in R$ de período T.

Tomando $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ e $G(x) = \frac{g(x)}{x}$

a condição II equivale a

II' - $F(x)$ tende para $+\infty$ com $|x|$.

De III segue então que o mesmo vale para G.

A condição III pode então ser substituida pela condição

III' - Existem constantes positivas b e B tais que para todo $x \in R$ temos
$$|G(x)-bF(x)| \leq B.$$

Demonstração: a equação diferencial (1) é equivalente ao sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + g(x) = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} + f(x) = e(t) \end{cases}$$

e vamos demonstrar que êste sistema tem uma solução $\Gamma : t \in R \longrightarrow (x(t),y(t)) \in R^2$ periódica e de período T.

Para cada ponto $(x_o,y_o) \in R^2$ existe uma e uma só solução de (2), ou "trajetória",

$\Gamma_{x_o,y_o} : t \in R \longrightarrow (x(t),y(t)) \in R^2$ tal que $x(0) = x_o$ e $y(0) = y_o$ e a aplicação

$$\psi : (x_o,y_o) \in R^2 \longrightarrow \Gamma_{x_o,y_o}(T) = (x(T),y(T)) \in R^2$$

é evidentemente contínua. O teorema segue portanto se demonstrando que a aplicação ψ tem um ponto fixo, isto é, que existe um ponto $(x_o,y_o) \in R^2$ tal que se Γ_{x_o,y_o} é a trajetória que passa por (x_o,y_o) no instante $t = 0$ então $\Gamma_{x_o,y_o}(T) = (x_o,y_o)$ pois então segue da unicidade da solução do sistema (2) e da periodicidade de e que $\Gamma_{x_o,y_o}(t+T) = \Gamma_{x_o,y_o}(t)$ para todo $t \in R$.

Para demonstrar a existência de um ponto fixo da aplicação ψ vamos aplicar o teorema de Brouwer demonstrando que

2.2 - Existe uma região plana limitada por uma elipse que é levada em si mesmo pela aplicação ψ.

<u>Demonstração</u>: Consideremos a forma quadrática

(3) $$2u(x,y) = a\, x^2 - 2xy + b\, y^2$$

que é definida positiva se tomamos $ab > 1$ e $a > 0$, o que supomos a seguir. Considerando x e y como funções numéricas deriváveis definidas para $t \in R$ temos

(4) $$u' = \frac{du}{dt} = ax\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}\,y - x\frac{dy}{dt} + by\frac{dy}{dt}$$

Se $t \longrightarrow (x(t),y(t))$ é uma solução do sistema (2) temos

$$u' = \frac{du}{dt} = ax(y-g(x)) - (y-g(x))y - x(e(t)-f(x)) + by(e(t)+f(x))$$

ou

$$u' = \frac{du}{dt} = axy - ax^2G - y^2 + xyG - xe + x^2F + bye - bxyF$$

donde vem

$$(5) \qquad u' = \frac{du}{dt} = (ax-y)(y-xG) + (by-x)(e-xF)$$

Tomemos coordenada polares r e ϑ no plano e vamos demonstrar que

2.3 - Existe $r_o > 0$ tal que para $r \geq r_o$ temos $u' < 0$. donde segue (2.2) pois a distância da elipse $u(x,y) = r$ definida por (3) à origem tende para infinito com r e tomando $r \geq r_o$ teremos $u' < 0$ nos pontos (x,y) da elipse $u(x,y) = r$ o que significa que quando $\underline{t}$ cresce $u(t)$ decresce em todos os pontos (x,y) tais que $u(x,y) = r$ o que prova que tôdas as trajetórias que passam por êstes pontos se dirigem para dentro do domínio $u(x,y) \leq r$ donde segue em particular (2.2).

2.4 - Demonstração de (2.3): substituindo $x = r\cos\vartheta$ e $y = r \operatorname{sen}\vartheta$ em (5) vem

$$(6) \qquad \frac{u'}{r^2} = (-aG+F)\cos^2\vartheta + \left[a+(G-bF)\right]\cos\vartheta . \operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta - \\ - \frac{e}{r}(b \operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta)$$

$|G-bF| \leq B$ implica $G-bF \geq -B$ (7), e como $b > 0$ então $\frac{1}{b}(G-bF) > \frac{-B}{b}$; de $ab > 1$ segue então que

$$ab\,\frac{1}{b}(G-bF) = aG - abF > \frac{1}{b}(G-bF) > -\frac{B}{b}$$

e tomando $|x|$ suficientemente grande de modo que F e G sejam positivos temos $aG - F \geq aG - abF$ isto é, existe s tal que para $|x| \geq s$ temos $aG-F > \frac{1}{b}(G-bF) > -\frac{B}{b}$; para $|x| \leq s$ $aG-F$ como função contínua é evidentemente limitada e existe portanto uma constante $C > 0$ tal que para todo $x \in R$ temos $aG - F > -C$ (8). De (6), (7) e (8) segue que

$$\frac{u'}{r^2} < (C \cos^2 \vartheta + (a+3)|\cos \vartheta||\operatorname{sen} \vartheta| - \operatorname{sen}^2 \vartheta) -$$

$$\frac{e}{r}(b \operatorname{sen} \vartheta - \cos \vartheta).$$

1) Tomemos $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e ϑ tal que

$$|\vartheta - \frac{\pi}{2}| \leq \alpha \quad \text{ou} \quad |\vartheta - \frac{3\pi}{2}| \leq \alpha .$$

$E(\vartheta) = C \cos^2 \vartheta + (a+B)|\cos \vartheta||\operatorname{sen} \vartheta| - \operatorname{sen}^2 \vartheta$ é uma função contínua de ϑ com valor -1 se $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e portanto para $|\cos \vartheta|$ suficientemente pequeno, isto é para α suficientemente pequeno $E(\vartheta)$ estará arbitràriamente próximo de -1.

e sendo contínua e periódica é limitada e podemos então achar r_1 tal que para $r \geq r_1$, $|\frac{e}{2}(b \operatorname{sen} \vartheta - \cos \vartheta|$ seja arbitràriamente pequeno.

Podemos portanto achar α_0 e r_1 tal que para $r \geq r_1$ e $|\vartheta - \frac{\pi}{2}| \leq \alpha_0$ ou $|\vartheta - \frac{3\pi}{2}| \leq \alpha_0$ tenhamos $u' \leq 0$

2) Para todo ponto (x,y) tal que $|\vartheta - \frac{\pi}{2}| \geq \alpha_0$

e $\left|\vartheta - \frac{3\pi}{2}\right| \geq \alpha_o$ a função

$$\varepsilon = \varepsilon(r, \vartheta) = \frac{e(b \operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta)}{r\cos^2\vartheta}$$

é limitada (se $r \geq r_o > 0$) e temos

$\frac{u'}{r^2} = -(aG - F + \varepsilon)\cos^2\vartheta + (a + G - bF)\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta$

que considerado como forma quadrática em $\operatorname{sen}\vartheta$ e $\cos\vartheta$ tem descriminante $\Delta = (a+G-bF)^2 - 4(aG-F+\varepsilon)$; de (7) segue que $G > bF - B$ e portanto $aG > abF - aB$; como ε é limitada segue que $aG - F + \varepsilon > abF - F + C$ onde C é uma constante conveniente; portanto $aG - F + \varepsilon > (ab-1)F + C$ donde vem que $\Delta < -4(ab-1)F + C$ e como $ab > 1$ e F tende para $+\infty$ com $|x|$ então o segundo membro da última desigualdade tende para $-\infty$ quando r cresce e portanto existe r_1 tal que para $r \geq r_1$ temos $\Delta < 0$ e portanto a forma quadrática $\frac{u'}{r^2}$ acima é definida negativa, isto é, $u' < 0$ para $r \geq r_1$ e ϑ tal que $\left|\vartheta - \frac{\pi}{2}\right| \geq \alpha_o$ e $\left|\vartheta - \frac{3\pi}{2}\right| \geq \alpha_o$.

3) Tomando então $r \geq \max(r_o, r_1)$ e ϑ qualquer temos $u' < 0$ C.Q.D.

*

CAPÍTULO V

O TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS

Seja K um espaço compacto. Lembremos que $C_u(K,C)$ (resp. $C_u(K,R)$) indica o conjunto das funções contínuas e a valores complexos (resp. reais) definidas em K, com a topologia da convergência uniforme, isto é, com a topologia definida pela norma (I.5.F5)

$$\| f \| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

A notação $C_u(K)$ indicará tanto $C_u(K,C)$ como $C_u(K,R)$ quando as definições e resultados forem válidos em ambos os casos.

Uma álgebra A sôbre um corpo F é um anel A que é também um espaço vetorial sôbre F e no qual a multiplicação escalar está relacionada à multiplicação no anel pela lei associativa:

$$(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy) \qquad (x \in A,\ y \in A,\ \lambda \in F)$$

É facil verificar que o conjunto $C_u(K)$ com as definições usuais de soma, produto por um escalar e produto de funções é uma álgebra (comutativa e com elemento unidade) sôbre o corpo dos números complexos (resp. reais).

0.1 - Se A é uma sub-álgebra de $C_u(K)$ sua aderência $\bar{A}$

em $C_u(K)$ é uma sub-álgebra.

<u>Demonstração</u>: As aplicações $(f,g) \longrightarrow f+g$ e $(f,g) \longrightarrow f.g$ são funções contínuas em $C_u(K) \times C_u(K)$ e a aplicação $(\lambda,f) \longrightarrow \lambda f$ é uma função contínua em $C \times C_u(K)$ (resp. $R \times C_u(K)$), como segue das relações

$$\|(f+g) - (f_o+g_o)\| \leq \|f-f_o\| + \|g-g_o\|$$

$$\|fg-f_og_o\| \leq \|f_o(g-g_o) + (f-f_o)(g-g_o) + g_o(f-f_o)\| \leq$$

$$\leq \|f_o\| \|g-g_o\| + \|f-f_o\| \|g-g_o\| + \|g_o\| \|f-f_o\|$$

$$\|\lambda f - \lambda_of_o\| \leq |\lambda_o| \|f-f_o\| + |\lambda - \lambda_o| \|f-f_o\| + \|f_o\| |\lambda - \lambda_o|$$

($f,g,f_o,g_o \in C_u(K)$ e $\lambda \in C$(resp. $\lambda \in R$)). Como A é uma sub-álgebra essas funções contínuas levam $A \times A$ em A e portanto a imagem de $\overline{A \times A}$ por cada uma delas está contida em $\overline{A}$ (I.4.2); sendo $\overline{A \times A} = \overline{A} \times \overline{A}$ segue que $\overline{A}$ é fechada em relação às restrições das operações de $C_u(K)$ a $\overline{A}$.

0.2 - <u>Definição</u>: Dizemos que um conjunto A de funções definidas em um conjunto E é <u>separante</u> ou que separa pontos de E se dados x e y em E, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

0.3 - <u>Definição</u>: Dizemos que um conjunto A de funções definidas em um conjunto E é <u>completamente separante</u> se é separante e se para todo x em E existe f em A tal que $f(x) \neq 0$.

0.4 - Lema: Seja A uma sub-álgebra de $C_u(K,R)$. Se f e g pertencem à aderência $\bar{A}$ de A em $C_u(K,R)$ então $\max(f,g)$ e $\min(f,g)$ pertencem a $\bar{A}$.

Demonstração: Como $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ e $\bar{A}$ é uma sub-álgebra de $C_u(K,R)$ (0.1) é suficiente demonstrar que para tôda função $h \in \bar{A}$, $|h| \in \bar{A}$.

Se $\|h\| = 0$, $h = 0$ e portanto $|h| \in \bar{A}$. Seja $\|h\| = a \neq 0$ e $f = \frac{h}{a}$; então para todo $x \in K$, $|f(x)| \leq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ a série de Taylor de $(t+\varepsilon^2)^{1/2}$ relativa ao ponto $t = \frac{1}{2}$ é uniformemente convergente para $0 \leq t \leq 1$, pois se u_n $(n=0,1,\dots)$ é o $(n+1)$ésimo têrmo da série, para $n \geq 1$ e para todo $t \in [0,1]$ temos:

$$|u_n(t)| = \left|\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}-n}\left(t-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\right| < \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}-n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}(1+2\varepsilon^2)^{-n}$$ e a série geométrica de razão $(1+2\varepsilon^2)^{-1} < 1$ é convergente.

Fazendo $t = x^2$ existe pois um polinômio $P(x^2)$ em x^2 tal que para todo x em $[-1,1]$,

$|P(x^2) - (x^2+\varepsilon^2)^{1/2}| < \varepsilon$; em particular, para $x=0$ obtemos que $|P(0)| < 2\varepsilon$. Seja $Q = P - P(0)$. Para $|x| \leq 1$

temos

(1) $\quad |Q(x^2)-|x||=|P(x^2)-P(0)-(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-|x||\leq|R(0)|+$

$$+|P(x^2)-(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}|+|(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-|x||<2\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=$$

$$=4\varepsilon$$

Como Q não possui têrmo constante $Q(f^2)\ \varepsilon\ \bar{A}$ e como $\|f\|\leq 1$ de (1) segue que $\|Q(f^2)-|f|\ \|\leq 4\varepsilon$, logo $|f|$ pertence à aderência de $\bar{A}$, que coincide com $\bar{A}$. Como $|h| = a|f|$, $|h|\ \varepsilon\ \bar{A}$.

0.5 - Lema: Seja A uma sub-álgebra de $C_u(K,R)$. Então tôda função de $C_u(K,R)$ que pode ser aproximada em cada par de pontos por uma função de $\bar{A}$ pertence a $\bar{A}$.

Demonstração: Seja $f\ \varepsilon\ C_u(K,R)$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ e para qualquer par de pontos p e q em K exista uma função $f_{p,q}\ \varepsilon\ \bar{A}$ tal que $|f_{p,q}(p) - f(p)|<\varepsilon$ e $|f_{p,q}(q) - f(q)|<\varepsilon$. Os conjuntos

$$U_{p,q} = \{ x\ \varepsilon\ K \mid f_{p,q}(x) < f(x) + \varepsilon \}$$

$$V_{p,q} = \{ x\ \varepsilon\ K \mid f_{p,q}(x) > f(x) - \varepsilon \}$$

são abertos em K pois as funções $f_{p,q}$ e f são contínuas em K. Fixando q, a família $(U_{p,q})_{p\varepsilon K}$ é um recobrimento aberto de K, logo contém um sub-recobrimento finito $(U_{p_i,q})_{1\leq i\leq n}$ de K.

Pelo lema 0.4 a função $f_q=\min(f_{p_1,q},\dots f_{p_1,q})$

pertence a $\bar{A}$, $f_q(x) < f(x)+\varepsilon$ para todo $x \varepsilon K$ e $f_q(x) > f(x) - \varepsilon$ para todo $x \varepsilon V_q$, $V_q = V_{p_1,q} \cap \ldots \cap V_{p_n,q}$. Análogamente, a família $(V_q)_{q \varepsilon K}$ é um recobrimento aberto de K, logo contém um sub-recobrimento finito $(V_{q_i})_{1 \leq i \leq n}$.

Seja $f_\varepsilon = \max (f_{q_1}, \ldots, f_{q_n})$. Pelo lema 0.4 $f_\varepsilon \varepsilon \bar{A}$ e $f(x) - \varepsilon < f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$ para todo $x \varepsilon K$, logo $\| f_\varepsilon - f \| \leq \varepsilon$, isto é, f pertence à aderência de $\bar{A}$, ou seja, a $\bar{A}$.

0.6 Teorema de Stone-Weierstrass: Seja K um espaço compacto e A uma sub-álgebra separante de $C_u(K,R)$. Então a aderência de A é ou $C_u(K,R)$ ou a sub-álgebra de $C_u(K,R)$ de tôdas as funções contínuas em K a valores reais que se anulam em um mesmo ponto x_o em K.

Demonstração: Suponhamos que A seja completamente separante (0,3). Então se $x \varepsilon K$, $y \varepsilon K$ e $x \neq y$ existe uma função $f \varepsilon A$ tal que $0 \neq f(x) \neq f(y) \neq 0$. De fato, por 0.2 existe uma função $g_1 \varepsilon A$ tal que $g_1(x) \neq g_1(y)$. Se $g_1(x) \neq 0$ e $g_1(y) \neq 0$, tomamos $f = g_1$. Suponhamos $g_1(x) \neq 0$ e $g_1(y) = 0$.

Por 0,3 existe $g_2 \varepsilon A$ tal que $g_2(y) \neq 0$. Tomamos então $f = g_1 + ag_2$ onde a é qualquer número real não nulo, distinto de $-g_1(x)/g_2(x)$ se $g_2(x) \neq 0$, e distinto de $g_1(x)/g_2(y) - g_2(x)$ se $g_2(y) - g_2(x) \neq 0$. Para qualquer par de números α e β existe então $g \varepsilon A$ tal que $g(x) = \alpha$ e $g(y) = \beta$. Basta tomar $g = a_1 f + a_2 f^2$

onde $a_1 = \dfrac{\alpha b^2 - \beta a^2}{ab(b-a)}$ e $a_2 = \dfrac{\beta a - \alpha b}{ab(b-a)}$, sendo $a = f(x)$ e $b = f(y)$. Pelo lema 0.5 segue que $\overline{A} = C_u(K,R)$.

Suponhamos que A é separante mas não completamente separante, isto é, que exista um ponto $x_o \in K$ tal que $f(x_o) = 0$ para tôda função $f \in A$. Seja g uma função de $C_u(K,R)$ tal que $g(x_o) = 0$. Mostremos que $g \in \overline{A}$. Seja A_1 a álgebra gerada pela reunião de A com o conjunto das funções constantes em K; sendo A_1 completamente separante, dado $\varepsilon > 0$ existe uma função $f + c \in A_1$ onde $f \in A$ e $\underline{c}$ é constante, tal que $\| f + c - g \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $|f(x_o) + c - g(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}$ vem que $|c| < \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto $\| f - g \| < \varepsilon$, logo $g \in \overline{A}$.

0.7 - <u>Corolário</u>: Se K é um espaço compacto e A uma sub-álgebra completamente separante de $C_u(K,R)$, então A é densa em $C_u(K,R)$.

0.8 - <u>Corolário</u>: Se K é um espaço compacto e A uma sub-álgebra de $C_u(K,R)$ que é separante e contém as funções constantes, então A é densa em $C_u(K,R)$.

0.9 - <u>Teorema de Stone-Weierstrass para funções a valores complexos</u>: Seja K um espaço compacto, A uma subálgebra separante de $C_u(K,C)$ e suponhamos que para tôda função $f \in A$ a função conjugada $\overline{f}$ também pertença a A. Então a aderência de A é ou $C_u(K,C)$ ou a sub-álgebra de tôdas as funções contínuas em K a valores complexos que se anulam em um mesmo ponto $x_o \varepsilon K$.

<u>Demonstração</u>: Como para tôda função $f \varepsilon A$,
$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f+\bar{f}) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f-\bar{f})$$
pertencem a A, o sub-conjunto A_o de A das funções contínuas em K a valores reais é uma sub-álgebra separante de $C_u(K,R)$. Pelo teorema 0.6 ou $\bar{A}_o = C_u(K,R)$ ou então tôdas as funções de $C_u(K,R)$ que se anulam em um ponto $x_o \varepsilon K$ pertencem a $\bar{A}_o$. Se $\bar{A}_o = C(K,R)$, dada $g \varepsilon C_u(K,C)$ e $\varepsilon > 0$ existem f_1 e f_2 em A_o tais que $\| \operatorname{Re} g - f_1 \| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\| \operatorname{Im} g - f_2 \| < \frac{\varepsilon}{2}$, logo $\| g - (f_1 + if_2) \| < \varepsilon$ e $g \varepsilon \bar{A}$. Se $f(x_o) = 0$ para tôda função $f \varepsilon A$, análogamente se verifica que se $g \varepsilon C_u(K,C)$ e $g(x_o) = 0$ então $g \varepsilon \bar{A}$.

0.10 - <u>Corolário</u>: Se K é um espaço compacto e A uma sub-álgebra completamente separante de $C_u(K,C)$ tal que para tôda função $f \varepsilon A$, $\bar{f} \varepsilon A$, então $\bar{A} = C_u(K,C)$.

0.11 - <u>Corolário</u>: Se K é um espaço compacto, A uma sub-álgebra de $C_u(K,C)$ que é separante, contém as funções constantes e tal que para tôda função $f \varepsilon A$, $\bar{f} \varepsilon A$, então $\bar{A} = C_u(K,C)$.

<u>Observação</u>: No teorema 0.9 a hipótese de que para tôda função $f \varepsilon A$, a função conjugada $\bar{f} \varepsilon A$, é essencial. Seja $K = \{ z \varepsilon C \mid 1 \leq |z| \leq 2 \}$. Como a função $f(z) = z$, $z \varepsilon K$, separa pontos de K a

sub-álgebra A de $C_u(K,C)$ gerada por f é separante. No entanto as funções de A não se anulam num mesmo ponto e $\bar{A} \neq C_u(K,C)$. Se $\bar{A} = C_u(K,C)$, como a função $\frac{1}{z} \in C_u(K,C)$, dado $0 < \varepsilon < 1$ existiria um polinômio $P(z) \in A$ tal que $|P(z) - \frac{1}{z}| < \varepsilon$ para todo $z \in K$, logo

$$\int_{|z|=1} |P(z) - \frac{1}{z}|\, dz < 2\pi\varepsilon$$

Mas pelo teorema de Cauchy (Catunda, Curso de Análise Matemática, Cap. XV)

$$\int_{|z|=1} (P(z) - \frac{1}{z})dz = \int_{|z|=1} P(z)dz - \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} i\,d\vartheta = -2\pi i$$

logo

$$2\pi = \left| \int_{|z|=1} (P(z) - \frac{1}{z})dz \right| < \int_{|z|=1} |P(z) - \frac{1}{z}|\, dz < 2\pi\varepsilon$$

e portanto $\varepsilon > 1$, o que contradiz a hipótese.

§ 1 - O teorema de Weierstrass clássico

1.1 - Teorema de Weierstrass clássico: Tôda função contínua a valores reais (resp. complexos) definida num sub-conjunto compacto K de R^n é o limite de uma sequência de polinômios (em n variáveis reais) uniformemente convergente em K.

Demonstração: Consideremos a sub-álgebra A do $C_u(K)$ das restrições a K dos polinômios em n variáveis reais; A contém as funções constantes e separa pontos de K, pois se dois pontos são distintos, pelo menos uma das coordenadas assume valores distintos. No caso complexo é imediato que se $P(x_1,\ldots,x_n) \in A$, $\bar{P}(x_1,\ldots,x_n) \in A$. Do corolário 0.8(resp. 0.11) segue que $\bar{A} = C_u(K)$.

1.2 - Tôda função contínua a valores reais (resp. complexos) definida na reta, periódica e de período 2π, é o limite de uma sequência de polinômios trigonométricos (resp. trigonométricos ou exponenciais) uniformemente convergente em R.

<u>Demonstração</u>: Tôda função contínua em R, periódica e de período 2π, pode ser identificada a uma função definida sôbre a circunferência de comprimento 2π, $K = \left\{ (x_1,x_2) \in R^2 \mid x_1^2+x_2^2 = 1 \right\}$, e contínua como função do comprimento de arco x. No caso real, consideremos a sub-álgebra A de $C_u(K,R)$ gerada pelas funções 1, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$; os elementos de A são os polinômios trigonométricos $\sum_{n=0}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ $(a_n, b_n \in R$, $n = 0,1,\ldots,N)$. A é separante pois se $x \neq y$ então $\operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} y$ ou $\cos x \neq \cos y$, logo do corolário 0.8 segue que $\bar{A} = C_u(K,R)$.

No caso complexo, consideremos a sub-álgebra A_1 de $C_u(K,C)$ gerada pelas funções 1, e^{ix} e e^{-ix}; os elementos de A_1 são os polinômios

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = c_o + \sum_{n=1}^{N}\left[(c_n+c_{-n})\cos nx + i(c_n-c_{-n})\text{ sen } nx\right]$$

$(c_n \in C,\ n \in [-N,N])$. Como a função e^{ix} é separante e para todo polinômio

ra todo polinômio $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \in A_1$, $\overline{\sum_{n=N}^{N} c_n e^{inx}} =$

$= \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_{-n} e^{inx} \in A_1$; do corolário 0.11 segue que

$\bar{A}_1 = C_u(K_1 C)$.

1.3 - Qualquer função real e contínua em $[0,\pi]$ pode ser aproximada por uma sequência de polinômios em cosenos uniformemente convergente em $[0,\pi]$.

<u>Demonstração</u>: Como a função $\cos x$ é separante em $[0,\pi]$ a sub-álgebra de $C_u([0,\pi], R)$ gerada pelas funções 1 e $\cos x$ é densa em $C_u([0,\pi], R)$ pelo corolário 0,8 .

O resultado 1.3 se estende para funções reais e contínuas em tôda a reta, periódicas e de período 2π e pares.

1.4 - Qualquer função real e contínua em $[0,\pi]$ com $f(0) = f(\pi)$ pode ser aproximada por uma sequência de polinômios em senos uniformemente convergente em $[0,\pi]$.

<u>Demonstração</u>: Tôda função real e contínua em $[0,\pi]$ com $f(0) = f(\pi)$ pode ser considerada como uma função real definida sôbre a cir-

cunferência de comprimento π,

$$K = \left\{ (x_1,x_2) \varepsilon R^2 \middle| \, x_1^2+x_2^2 = \frac{1}{2} \right\},$$

e contínua como função do comprimento de arco x. A sub-álgebra A de $C_u(K,R)$ gerada pelas funções 1 e $\operatorname{sen} x$ é separante, pois se $x \neq y$ então $\operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} y$ ou $\operatorname{sen} 2x \neq \operatorname{sen} 2y$. Pelo corolário 0.8, $\bar{A} = C_u(K,R)$.

A proposição 1.4 se estende para funções reais e contínuas em tôda a reta, periódicas e de período 2π tais que $f(x) + f(-x) = 2f(0)$.

§ 2 - Extensão aos espaços lòcalmente compactos.

Seja L um espaço lòcalmente compacto e $\mathcal{C}_c(L,R)$ (resp. $\mathcal{C}_c(L,C)$) o conjunto das funções contínuas a valores reais (resp. complexos) definidas em L, com a topologia da convergência uniforme sôbre os compactos, isto é, dizemos que a sequência φ_n de funções de $\mathcal{C}_c(L)$ converge para a função $\varphi \varepsilon \mathcal{C}_c(L)$ se φ_n tende uniformemente para φ em qualquer sub-conjunto compacto de L.

2.1 - Se a sub-álgebra A de $\mathcal{C}_c(L)$ é completamente separante (no caso complexo se ainda para tôda função $f \varepsilon A$, $\bar{f} \varepsilon A$) então tôda função de $\mathcal{C}_c(L)$ em cada sub-conjunto compacto de L pode ser uniformemente aproximada por uma função da sub-álgebra A, isto é, $\bar{A} = \mathcal{C}_c(L)$.

Demonstração: Seja K um sub-conjunto compacto de L; as restrições a K das funções de A constituem uma sub-álgebra A_K de $C_u(K)$

que satisfaz às condições do corolário 0.7 (resp. 0.10) logo a aderência uniforme de A_K é $C_u(K)$. Portanto, dada a função $g \in \mathcal{C}_c(L)$ e $\varepsilon > 0$ existe $f \in A$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Sendo R^n lòcalmente compacto temos como consequência imediata de 2.1 :

2.2 - O conjunto dos polinômios em n variáveis reais a coeficientes complexos (resp. reais) é denso em $\mathcal{C}_c(R^n, C)$ (resp. $\mathcal{C}_c(R^n, R)$).

§ 3 - Funções contínuas nulas no infinito.

Seja L um espaço lòcalmente compacto não compacto e seja $\mathcal{C}_u^o(L)$ a sub-álgebra de $\mathcal{C}(L)$ das funções contínuas em L tais que $\left\{ x \in L \,\middle|\, |f(x)| \geq \varepsilon \right\}$ é compacto para todo $\varepsilon > 0$, munida da topologia da convergência uniforme.

3.1 - Se A é uma sub-álgebra completamente separante de $C_u^o(L)$ (no caso complexo supomos também que para toda função $f \in A$, $\bar{f} \in A$) então a aderência uniforme de A é $C_u^o(L)$.

Demonstração: Seja L' o compactificado de Alexandroff (I.8.9) de L pela adjunção do elemento ∞. C_u^o é o conjunto das restrições a L das funções de $C_u(L')$ que se anulam no ponto ∞. De fato, se $f \in C_u^o(L)$ dado $\varepsilon > 0$

$B = \left\{ x \in L \mid |f(x)| \geq \varepsilon \right\}$ é compacto, portanto existe a vizinhança $\complement_L B \cup \{\infty\}$ de ∞ tal que para todo $x \in \complement_L B \cup \{\infty\}$, $x \neq \infty$, temos $|f(x)| < \varepsilon$, logo $\lim\limits_{x \in L, x \to \infty} f(x) = 0$ e f se prolonga a uma função contínua em L' nula no ponto ∞. Reciprocamente, se $f \in C_u(L')$ e $f(\infty) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ o conjunto $D = \left\{ x \in L' \mid |f(x)| < \varepsilon \right\}$ é aberto em L' e contém o ponto ∞, portanto $\complement_{L'} D = \left\{ x \in L \mid |f(x)| \geq \varepsilon \right\}$ é compacto em L. Seja A' o conjunto dos prolongamentos por continuidade das funções de A a L'; A' como sub-álgebra de $C(L')$ é separante e $f(\infty) = 0$ para tôda função $f \in A'$ (no caso complexo está satisfeita a condição suplementar) portanto pelo teorema 0.7 (resp. 0.9) $\overline{A'}$ é a sub-álgebra de $C_u(L')$ de tôdas as funções de $C(L')$ que se anulam no ∞. Daí segue que $\overline{A} = C_u^o(L)$.

A seguinte consequência de 3.1 é útil na Teoria das Distribuições:

3.2 - Seja $D(R^n)$ o conjunto das funções definidas em R^n a valores complexos, infinitamente diferenciáveis e nulas fora de um compacto. Então $\overline{D(R^n)} = C_u^o(R^n)$.

Demonstração: Como para tôda função $f \in D(R^n)$, $\overline{f} \in D(R^n)$ basta verificar que $D(R^n)$ é uma álgebra completamente separante e aplicar 3.1. Dados x_o e y_o em R^n, $x_o \neq y_o$, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x - x_o\| \geq 1 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x-x_o\|^2}\right) & \text{se } \|x - x_o\| < 1 \end{cases}$$

É facil vêr que $f \varepsilon D(R^n)$ e $0 \neq f(x_o) \neq f(y_o)$.

O teorema seguinte aparece no estudo das relações entre medidas e distribuições:

3.3 - Seja $K(R^n)$ o conjunto das funções contínuas em R^n a valores complexos e nulas fora de um compacto. Então $\overline{K(R^n)} = \mathcal{C}_u^o(R^n)$.

Imediato pois $K(R^n) \supset D(R^n)$.

§ 4 - O teorema de Stone-Weiertrass em espaços produtos.

No estudo de equações lineares integrais aparece o seguinte teorema:

4.1 - Sejam K_1 e K_2 espaços compactos e f uma aplicação contínua de $K_1 \times K_2$ em R. Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma família finita $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ de aplicações contínuas de K_1 em R e uma família finita $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de aplicações contínuas de K_2 em R tais que para todo $(x,y) \varepsilon K_1 \times K_2$

$$\left|f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y)\right| < \varepsilon$$

Demonstração: Consideremos a sub-álgebra A de

$\mathcal{C}_u(K_1 \times K_2, R)$ ($K_1 \times K_2$ é compacto por (I.6 -3) gerada pelas funções contínuas $(x,y) \longrightarrow u(x)$ e $(x,y) \longrightarrow v(y)$ onde $\underline{u}$ percorre $\mathcal{C}_u(K_1,R)$ e $\underline{v}$ percorre $\mathcal{C}_u(K_2,R)$. Dados (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $K_1 \times K_2$, $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$, então $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$; suponhamos $x_1 \neq x_2$. K_1 como compacto é completamente regular (I.8.7 e 5) e existe portanto uma função $u \in \mathcal{C}_u(K,R)$ tal que $0 \neq u(x_1) \neq u(x_2)$.

A aplicação $u\,pr_1 \in A$ e $u\,pr_1(x_1,y_1) \neq u\,pr_1(x_2,y_2)$. O teorema 4.1 segue então do corolário 0.7 .

O mesmo resultado é válido para funções a valores complexos (se $u \in \mathcal{C}_u(K_1,C)$, $\bar{u} \in \mathcal{C}_u(K_1,C)$ e $\overline{u\,pr_1} = \bar{u}\,pr_1 \in A$).

§ 5 - Funções contínuas sôbre espaços métricos compactos.

5.1 - Se K é um espaço métrico compacto os espaços $\mathcal{C}_u(K,R)$ e $\mathcal{C}_u(K,C)$ são separáveis.

Demonstração: Seja $(A_n)_{n \in N}$ uma base de abertos enumerável de K (I.9.5 e 2) e para todo $\underline{x}$ em K seja $f_n(x) = d(x, K-A_n)$; f_n está definida e é contínua (I.4.9) em K para todo $\underline{n}$ tal que $K - A_n \neq \emptyset$.

O conjunto de monômios $f_{i_1}^{\alpha_1} \cdots f_{i_n}^{\alpha_n}$ onde $(i_1, \ldots, i_n)$ e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pertencem a N^n, $\underline{n}$ percorrendo N, é um conjunto enumerável $\{g_n \mid n \in N\}$ (pois N^n é enumerável e uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável). A sub-álgebra A do $\mathcal{C}_u(K,R)$ gerada pelas funções f_n é o sub-espaço vetorial de $C_u(K,R)$ gerado pelas funções g_n, $n \in N$. Se demonstrarmos que A é denso em $\mathcal{C}_u(K,R)$, como o conjunto das combinações lineares finitas dos elementos da sequência $(g_n)_{n \in N}$ com coeficientes racionais é um conjunto enumerável denso em A, segue que $\mathcal{C}_u(K,R)$ é separável. Dados $\underline{x}$ e $\underline{y}$ em K, $x \neq y$, como K é separado e $(A_n)_{n \in N}$ uma base de abertos de K, existe um aberto A_n tal que $x \in A_n$ e $y \notin A_n$, logo $f_n(x) \neq 0$ e $f_n(y) = 0$. Como A é completamente separante do corolário 0.7 segue que $\overline{A} = \mathcal{C}_u(K,R)$.

Como $\mathcal{C}_u(K,C) = \mathcal{C}_u(K,R) + i\,\mathcal{C}_u(K,R)$ o resultado 5.1 para o caso complexo é consequência do caso real: se $\{ h_n \mid n \in N \}$ é um conjunto enumerável denso em $\mathcal{C}_u(K,R)$, $\{ h_n + i\, h_m \mid (n,m) \in N \times N \}$ é um conjunto enumerável denso em $\mathcal{C}_u(K, C)$.

§ 6 - Bases em espaços de Hilbert.

Seja $L^2([0,2\pi])$ o espaço de Hilbert definido em (I.5.G 4). O resultado seguinte é importante na teoria das séries de Fourier e permite demonstrar que a série de Fourier de uma função $f \in L^2([0,2\pi])$ converge para f em $L^2([0,2\pi])$, de onde segue que tôda função $f \in L^2([0,2\pi])$ tem um e um único desenvolvimento em série de Fourier.

6.1 - No espaço complexo $L^2([0,2\pi])$ o conjunto

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

é um sistema ortonormal completo. (Ap. II)

No espaço real $L^2([0, 2\pi])$ o conjunto

(5) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ sen nx $n=1,2,\ldots$

é um sistema ortonormal completo.

Demonstração: Os sistemas dados são ortonormais pois

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \delta_{m,n}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx \, dx = \delta_{m,n}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx = 0$$

Na teoria da integral de Lebesgue demonstra-se o seguinte:

Teorema. O conjunto das funções definidas e contínuas no espaço localmente compacto E a valores reais (resp. complexos) e nulas fora de um compacto é denso no espaço de Banach real (resp. complexo) $L^p(E)$ $(p \geq 1)$.

Seja $f \in L^2([0, 2\pi])$ e $\varepsilon > 0$ fazendo no teorema anterior $p = 2$ e $E = \{ (x_1, x_2) \in R^2 | \; x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$ segue que existe uma função g contínua em $[0, 2\pi]$ com $g(0) = g(\pi)$ tal que

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Pelo resultado 1.2 existe um polinômio trigonométrico (resp. exponencial) $P(x)$ pertencente ao conjunto A das combinações lineares finitas dos elementos do sistema (3) (resp. (2)) tal que $|P(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$ para todo $x \in [0,2\pi]$ e portanto

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} |P(x)-g(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Indicando com $\underline{d}$ a distância em $L^2([0,2\pi])$ de (4) e (5) vem que $d(f,P) \leq d(f,g) = d(g,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, portanto $\bar{A} = L^2([0,2\pi])$ e de (Ap. II, Teorema da base) segue o resultado 6.1 .

6.2 - No espaço de Hilbert real $L^2([0,\pi])$ o conjunto

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \; , \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n x \qquad n = 1,2,\dots$$

e o conjunto

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \; , \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} n x \qquad n = 1,2,\dots$$

são sistemas ortonormais completos.

A demonstração é inteiramente análoga à feita em 6.1 , usando-se o correspondente resultado 1.3 no caso do sistema em cosenos e o resultado 1.4 no caso do sistema em senos.

6.3 - No espaço de Hilbert real $L^2([-1,1])$ o conjunto

$$\sqrt{n+\frac{1}{2}} \quad P_n(t) \qquad n=0,1,2,\ldots$$

onde $P_n(t)$ é o polinômio de Legendre de grau <u>n</u> definido por

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

é um sistema ortonormal completo.

<u>Demonstração</u>: Como

$$(n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} P_m(t)\, P_n(t)\, dt = \delta_{m,n}$$

o sistema dado é ortonormal. Demonstra-se também que $\sqrt{n+\frac{1}{2}}\, P_n(t)$ é o $(n+1)$<u>ésimo</u> têrmo da sequência deduzida da sequência $(t^n)_{n\geq 0}$ pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em $L^2([-1,1])$, logo o sub-espaço A gerado pela sequência $(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\, P_n(t))_{n\geq 0}$ é igual ao sub-espaço gerado pela sequência $(t_n)_{n\geq 0}$. Como pelo resultado 1.1 o sub-espaço gerado por $(t_n)_{n\geq 0}$ é denso em $C_u([-1,1],R)$ e pelo teorema citado em 6.1 $C_u([-1,1],R)$ é denso em $L^2([-1,1])$, vem que $\bar{A} = L^2([-1,1])$ e o resultado 6.3 segue de (Ap. II, Teorema da base).

---*---

CAPÍTULO VI

O Teorema de Ascoli

Começamos êste capítulo apresentando o teorema de Ascoli que utilisamos para demonstrar a compacidade de operadores integrais definidos por núcleos contínuos. Demonstramos a seguir alguns resultados da teoria espectral de operadores hermitianos compactos em espaços prehilbertianos para aplicá-los no estudo das equações integrais de Fredholm de segunda espécie

$$\lambda f(t) = g(t) + \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds$$

com núcleo $K(s,t)$ contínuo e hermitiano $(K(s,t) = \overline{K(t,s)})$.

Referências:

Dieudonné: Foundations of Modern Analysis

Angus Taylor: Introduction to Functional Analysis.

§ 1º - O teorema de Ascoli.

1.1 - Em todo êste parágrafo E indica um espaço compacto e F um espaço métrico completo com distância d. Dizemos que um conjunto H de aplicações de E em F é equicontínuo no ponto $x_0 \varepsilon E$ se dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0 tal que para todo $x \varepsilon V_{x_0}$ temos

$d(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ para qualquer $f \in H$. É então imediato que tôdas as aplicações $f \in H$ são contínuas no ponto x_0. Se H fôr equicontínuo em todos os pontos de E dizemos que H é <u>equicontínuo</u>; H é então formado por funções contínuas.

<u>Exemplo</u>: seja H um conjunto de funções numéricas contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ equilimitadas num ponto $x_0 \in [a,b]$ (isto é, $\sup_{f \in H} |f(x_0)| < \infty$), deriváveis no ponto x_0 e com derivadas equilimitadas neste ponto; é imediato que H é equicontínuo no ponto x_0.

1.2 - Lembremos que o conjunto $\mathcal{C}_u(E,F)$ das aplicações contínuas de E em F munido com a distância

$$d(f,g) = \sup_{x \in E} d(f(x),g(x))$$

é completo (I.5.6).

<u>Teorema de Ascoli</u>: um subconjunto $H \subset \mathcal{C}_u(E,F)$ é relativamente compacto se e sòmente se H é equicontínuo e se para todo $x \in E$ o conjunto $H(x) = \left\{ f(x) \in F \mid f \in H \right\}$ é relativamente compacto em F.

<u>Demonstração</u>: para todo $x \in E$ a aplicação $f \in \mathcal{C}_u(E,F) \longrightarrow f(x) \in F$ é contínua e se H é relativamente compacto então a sua imagem $H(x)$ também o é (I.4.6). Se H é relativamente compacto H também é equicontínuo: por (I.9.4) existe um recobrimento finito $B(f_1,\frac{\varepsilon}{3}),\ldots,B(f_n,\frac{\varepsilon}{3})$ de H por bolas de

raio $\frac{\varepsilon}{3}$ $(f_1,\ldots f_n \varepsilon H)$. Dado qualquer ponto $x_o \varepsilon E$, da continuidade das funções $f_1,\ldots,f_n$ segue que existe uma visinhança V_{x_o} de x_o tal que para todo $x \varepsilon V_{x_o}$ temos $d(f_i(x),f_i(x_o)) < \frac{\varepsilon}{3}$, $i=1,\ldots,n$. Para um elemento qualquer $f \varepsilon H$ tomemos f_i tal que $f \varepsilon B(f_i,\frac{\varepsilon}{3})$; para $x \varepsilon V_{x_o}$ temos então

$$d(f(x),f(x_o)) \leq d(f(x),f_i(x))+d(f_i(x),f_i(x_o))+d(f_i(x_o),f(x_o)) < \varepsilon$$

o que prova a equicontinuidade de H no ponto x_o.

<u>Reciprocamente</u>: seja $H \subset \mathcal{C}_u(E,F)$ equicontínuo e tal que para todo $x \varepsilon E$, $H(x)$ é relativamente compacto. Vamos demonstrar que H é relativamente compacto; por (I.9.4) é suficiente demonstrar que dado $4\varepsilon > 0$, H pode ser recoberto por um número finito de conjuntos de diâmetro $\leq 4\varepsilon$.

H sendo equicontínuo, para todo $x \varepsilon E$ existe uma visinhança aberta V_x de x tal que $y \varepsilon V_x$ implica $d(f(y),f(x)) < \varepsilon$ para todo $f \varepsilon H$; E sendo compacto, pode ser recoberta por um número finito de visinhanças abertas $V_{x_1},\ldots,V_{x_n}$ com estas propriedades. Cada $H(x_i)$, $i=1,\ldots,n$, sendo relativamente compacto então dado $\varepsilon > 0$ existe (I.9.4) um recobrimento finito $B(s_1^{(i)},\varepsilon),\ldots,B(s_{m_i}^{(i)},\varepsilon)$ de $H(x_i)$ por bolas abertas de raio ε. Para cada sequência $p_1,\ldots,p_n$ de inteiros com $1 \leq p_i \leq m_i$ seja

$$H_{p_1,\ldots,p_n} = \left\{ f \varepsilon H \mid d(f(x_i),s_{p_i}^{(i)}) < \varepsilon,\ i=1,\ldots,n \right\}.$$

Êste conjunto (eventualmente vasio) tem diâmetro $\leq 4\varepsilon$ pois dado qualquer $x \in E$ tomamos V_{x_i} contendo x e então para $f, g \in H_{p_1, \ldots, p_n}$ temos

$$d(f(x), g(x)) \leq$$

$$\leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), s_{p_i}^{(i)}) + d(s_{p_i}^{(i)}, g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) <$$

$$< 4\varepsilon.$$

Os $H_{p_1, \ldots p_n}$ $(1 \leq p_1 \leq m_1, \ldots, 1 \leq p_n \leq m_n)$ formam evidentemente um recobrimento de H com as propriedades desejadas.

É facil de verificar que os conjuntos $H_{p_1, \ldots, p_n}$ são conjuntos abertos.

1.3 - É facil demonstrar que se uma sequência equicontínua $(f_n)_{n \in N}$ de aplicações de E em F converge simplesmente para uma aplicação f (isto é, para todo $x \in E$ temos $f_n(x) \longrightarrow f_n(x)$ então a sequência f_n converge uniformemente para a função f que é portanto uma função contínua.

Não utilizamos êste resultado no que segue.

§2º - Aplicações completamente contínuas ou compactas.

2.1 - Dados dois espaços normados X e Y dizemos que uma aplicação linear f de X em Y é completamente contínua ou compacta se ela leva um conjunto limitado qualquer de X em um conjunto relativamente compacto de Y; por (I.9.4) isto é equivalente a dizer que tôda sequência limitada $(x_n)_{n\in N}$ de X contém uma subsequência $(x_{r_n})_{n\in N}$ tal que a sequência $(f(x_{r_n}))_{n\in N}$ é convergente em Y. De (I.3.5) e (Ap.I.2) segue que tôda aplicação completamente contínua é contínua.

2.2 - Exemplo 1 - Tomemos $X = Y = E$ onde $E = \mathcal{C}_u([a,b])$ e consideremos o operador integral

(1) $$k(f) = g$$

onde $g(t) = \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds$, $a\leq t\leq b$, o núcleo $K(s,t)$ sendo uma função contínua em $[a,b]\times[a,b]$. É imediato que o operador k é linear de E em E; vamos demonstrar que êle é compacto. Como qualquer conjunto limitado de E está contido numa bola $B = \left\{ f\in E \mid \|f\| \leq c \right\}$ é suficiente demonstrar que k leva esta bola num conjunto relativamente compacto. Vamos usar o teorema de Ascoli para demonstrar que o conjunto $k(B)$ é relativamente compacto em E :

a) de $|g(s)-g(s_0)| \leq \int_a^b |K(t,s)-K(t,s_0)|\; |f(t)|\, dt$ e da continuidade uniforme de K segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que para $|s-s_0| < \sigma$ temos $|K(t,s)-K(t,s_0)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a,b]$. Tomando então $|s-s_0| < \sigma$ e $f \in B$, isto é, $\|f\| \leq c$ temos $|g(s)-g(s_0)| \leq (b-a)\, \varepsilon\, c$ o que prova a equicontinuidade do conjunto $k(B)$ em todo ponto $s_0 \in [a,b]$.

b) Para todo $g \in k(B)$ e todo $s_0 \in [a,b]$ temos $|g(s_0)| \leq c \int_a^b |K(t,s_0)|\, dt$ o que prova que para todo

$s_o \varepsilon [a,b]$ o conjunto $k(B)(s_o) = \{ g(s_o) \varepsilon C | g \varepsilon k(B) \}$ é limitado e portanto relativamente compacto (teorema de Borel-Lesbesgue no plano complexo).

Do teorema de Ascoli segue então que o conjunto $k(B)$ é relativamente compacto.

2.3 - Exemplo 2 - Tomemos $X = Y = G$ onde $G = \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$, o espaço das funções contínuas a valores complexos definidas no intervalo $[a,b]$ munido com o produto interno

$$(f|g) = \int_a^b f(s).\overline{g(s)}\, ds$$

e com a norma (que aquí indicamos por $\| \ \|_2$) e a distância deduzidas dêste produto interno. G é um espaço prehilbertiano.

Consideremos ainda o mesmo operador $\underline{k}$ definido por (1) mas como operador de G em G. Vamos demonstrar primeiro que o operador $\underline{k}$ é compacto de G em E demonstrando que $\underline{k}$ leva tôda bola $B = \{ f \varepsilon G | \ \|f\|_2 \leq c \}$ num conjunto relativamente compacto $k(B)$ de $E = \mathcal{C}_u([a,b])$

a) Tomando $|s-s_o| < \sigma$, como no exemplo 1 acima, e $f \varepsilon B$, isto é, $\|f\|_2 \leq c$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ap.II) temos

$$|g(s)-g(s_o)| \leq \int_a^b |K(t,s)-K(t,s_o)|.|f(t)|dt \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |K(t,s)-K(t,s_o)|^2 dt\right)^{1/2}.\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \varepsilon(b-a)^{1/2}.c$$

para todo $g \varepsilon k(B)$ o que prova a equicontinuidade do conjunto de funções $k(B)$ em todo ponto $s_o \varepsilon [a,b]$.

b) Do mesmo modo temos $|g(s)| \leq \varepsilon \cdot (b-a)^{1/2}.c$ para todo $g \varepsilon k(B)$ e todo $s \varepsilon [a,b]$ o que prova que o conjunto $\{g(s) \varepsilon C | g \varepsilon k(B)\}$ é relativamente compacto.

Do teorema de Ascoli segue portanto que o conjunto $k(B)$ é relativamente compacto em E.

Mas a aplicação idêntica de $E = \mathcal{C}_u([a,b])$ em $G = \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ é contínua (I.7.J) e leva portanto o conjunto relativamente compacto $k(B)$ de E num conjunto relativamente compacto de G donde segue a compacidade do operador $\underline{k}$ de G em G.

§ 3 - Operadores hermitianos compactos.

3.1 - Em todo êste parágrafo E indica um espaço prehilbertiano. Lembremos que um operador linear contínuo A de E em E é hermitiano se temos $(Ax|y) = (x|Ay)$ para quaisquer $x,y \varepsilon E$ e que então

(1) $(Ax|x)$ é real para todo $x \varepsilon E$.

(2) $$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax|y)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|$$

(Ap.II)

3.2 - Dizemos que um número complexo λ é um <u>autovalor</u> ou <u>valor próprio</u> do operador A se existe um elemento $e \neq 0$ de E tal que $Ae = \lambda e$; dizemos então que é um <u>autovetor</u> ou <u>vetor próprio</u> do operador A correspondente ao autovalor λ. Evidentemente uma combinação linear não nula de autovetores correspondentes ao mesmo autovalor λ ainda é um autovetor correspondente a λ.

3.3 - Os autovalores λ de um operador hermitiano A são reais. Temos $|\lambda| \leq \|A\|$. Dois autovetores e_λ e e_n correspondentes a autovalores distintos $\lambda \neq n$ são ortogonais, isto é, $(e_\lambda | e_n) = 0$.

Demonstração: Seja $e_\lambda \in E$ com $\| e_\lambda \| = 1$ tal que $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$; então $(Ae_\lambda | e_\lambda) = (\lambda e_\lambda | e_\lambda) = \lambda (e_\lambda | e_\lambda) = \lambda$ que é real por (1).

$$|\lambda| = \|\lambda e_\lambda\| = \| Ae_\lambda \| \leq \| A \| \, \| e_\lambda \| = \|A\| .$$

Dado outro autovalor $n \neq \lambda$ e um autovetor e_n temos

$$\lambda(e_\lambda | e_n) = (\lambda e_\lambda | e_n) = (Ae_\lambda | e_n) = (e_\lambda | Ae_n) = (e_\lambda | ne_n) =$$

$$= n(e_\lambda | e_n) \quad \text{donde segue que} \quad (e_\lambda | e_n) = 0 .$$

3.4 - Teorema: Dado um operador hermitiano compacto $A \neq 0$, então $\| A \|$ ou $- \|A\|$ é um autovalor de A e existe um autovetor correspondente e tal que $\| e \| = 1$ e $|(Ae|e)| = \| A \|$.

Demonstração: por (2) existe uma sequência $e_n \in E$ com $\|e_n\| = 1$ e tal que $|(Ae_n | e_n)| \longrightarrow \|A\|$. De (1) segue que a sequência $(Ae_n | e_n)$ é formada de números reais e podemos portanto achar uma subsequência da sequência e_n, que ainda indicamos por e_n, tal que $(Ae_n|e_n) \longrightarrow \lambda$ onde $\lambda = \|A\|$ ou $\lambda = -\|A\|$, isto é $|\lambda| = \|A\|$. Temos

$$0 \leq \|Ae_n - \lambda e_n\|^2 = (Ae_n - \lambda e_n | Ae_n - \lambda e_n) = \|Ae_n\|^2 - 2\lambda(Ae_n|e_n) + \lambda^2\|e_n\|^2 \leq$$

$$\leq \|A\|^2 - 2\lambda(Ae_n|e_n) + \|A\|^2$$

que tende para zero pois $(Ae_n|e_n) \longrightarrow \lambda$ e portanto $2\lambda(Ae_n|e_n) \longrightarrow 2\|A\|^2$. Daí segue que $\|Ae_n - \lambda e_n\| \longrightarrow 0$; A sendo um operador compacto, existe uma subsequência $(e_{r_n})_{n\in N}$ da sequência limitada $(e_n)_{n\in N}$ tal que a sequência Ae_{r_n} converge para um elemento y de E. De $Ae_{r_n} - \lambda e_{r_n} \longrightarrow 0$ segue então $\lambda e_{r_n} \longrightarrow y$ e portanto $A(\lambda e_{r_n}) \longrightarrow A(y)$; mas $A(\lambda e_{r_n}) = \lambda A(e_{r_n}) \longrightarrow \lambda y$ e portanto $Ay = \lambda y$. De $\lambda e_{r_n} \longrightarrow y$ segue que $\|y\| = |\lambda| \neq 0$ e tomando $e = \dfrac{y}{\|y\|}$ temos ainda $Ae = \lambda e$ e

$$|(Ae|e)| = |(\lambda e|e)| = |\lambda(e|e)| = |\lambda|\,\|e\|^2 = |\lambda| = \|A\|$$

C.Q.D.

3.5 - <u>Teorema</u>: Dado um operador hermitiano compacto $A \neq 0$ existe uma sequência λ_n de autovalores não nulos de A e uma sequência correspondente e_n de autovetores que formam um conjunto ortogonal tal que para todo elemento $\underline{x}$ de E temos

(3) $\qquad Ax = \sum_n \lambda_n x_n e_n \qquad$ onde $\quad x_n = (x|e_n)$.

Temos $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$; a sequência λ_n contém todos os autovalores não nulos de A e se ela fôr infinita temos

$|\lambda_n| \longrightarrow 0$.

Dado um particular $\lambda = \lambda_i$ a dimensão da subvariedade gerada pelos autovetores correspondentes ao autovalor λ é finita e é igual ao número de vêzes que o autovalor λ comparece na sequência λ_n .

Demonstração: indiquemos por λ_1 e e_1 o autovalor cuja existência foi demonstrada no teorema precedente; escrevamos também $E_1 = E$ e $A_1 = A$. Seja $E_2 = \left\{ x \in E_1 \mid (x|e_1) = 0 \right\}$; E_2 é um subespaço de E invariante por A (se $x \in E_2$ temos $(A_1x|e_1) = (x|A_1e_1) = (x|\ \lambda_1e_1) = \lambda_1(x|e_1) = 0$ e portanto $A_1x \in E_2$) é imediato que a restrição A_2 de A_1 a E_2 ainda é um operador hermitiano compacto em E_2; se $A_2 \neq 0$ existe pelo teorema precedente um autovalor $\lambda_2 \neq 0$ de A_2 (e por conseguinte de A) e um autovetor correspondente e_2 com $\| e_2\| = 1$ tal que $|\lambda_2| = \| A_2 \|$; de $\| A_2\| \leq \|A_1\|$ segue então que $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$; $(e_1|e_2) = 0$ pela definição de E_2.

Repetindo êste processo obtemos sucessivamente autovalores não nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, com $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, autovetores $e_1, \ldots, e_n$ correspondentes formando um sistema ortogonal, subespaços $E_2, E_3, \ldots, E_{n+1}$ onde E_{i+1} indica o subespaço de E_i (ou de E) formado pelos vetores ortogonais a $e_1, \ldots, e_i$.

A. - Se a restrição A_{n+1} de A a E_{n+1} fôr nula temos para todo $x \in E$

$$A\,x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \qquad \text{onde} \quad x_i = (x|e_i)$$

Isto é, $A(E)$ é o subespaço de E gerado pelos vetores $e_1,\dots,e_n$.

De fato: seja $\tilde{x} = x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; então $(\tilde{x}|e_i) = 0$ para $i=1,\dots,n$ e por conseguinte $\tilde{x} \in E_{n+1}$ donde segue que $A\,\tilde{x} = 0$ e por conseguinte

$$A\,x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \qquad \text{C.Q.D.}$$

B - Se para todo inteiro natural n a restrição A_{n+1} de A a E_{n+1} fôr sempre não nula então o processo acima nos dá uma sequência infinita λ_n de autovalores não nulos de A com

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$$

e um sistema ortonormal $(e_n)_{n \in N}$ formado pelos autovetores correspondentes.

a - A sequência decrescente $|\lambda_n|$ tende para 0: senão existiria um $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ para todo $n \in N$ e a sequência $\frac{e_n}{\lambda_n}$ seria então limitada $(\|\frac{e_n}{\lambda_n}\| \leq \frac{1}{\varepsilon})$ sem que a sequência $A(\frac{e_n}{\lambda_n}) = e_n$ contenha uma subsequência convergente pois ela é formada por vetores ortonormais $(d(e_n,e_m) = \sqrt{2}\,)$. Chegamos assim a uma contradição com a hipótese de que o operador A é compacto.

b - Para todo $x \in E$ temos $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$ is to é, para todo $x \in E$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n e_n$ é convergente para Ax : basta demonstrar que dado $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe um inteiro m_o tal que para $m \geq m_o$ temos $\| Ax - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n e_n \| < \varepsilon$. Seja $x^{(m+1)} = x - \sum_{n=1}^{m} x_n e_n$; temos evidentemente $\| x^{(m+1)} \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{n=1}^{m} |x_n|^2 \leq \| x \|^2$ (Ap. II, desigualdade de Bessel) e $x^{(m+1)} \in E_{m+1}$ pois para $n \leq m$ temos $(x^{(m+1)} | e_n) = 0$; de $\| A_{m+1} \| = |\lambda_{m+1}|$ segue então que $\| Ax^{(m+1)} \| \leq \|A\| \| x^{(m+1)} \| \leq |\lambda_{m+1}| \ \|x\|$ e como a sequência $|\lambda_n|$ tende monotònicamente para 0 basta tomar m_o tal que $|\lambda_{m_o}| \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ para que tenhamos

$$\|Ax - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n e_n\| = \|A\, x^{(m+1)}\| \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad m \geq m_o .$$

C - Todo autovalor $\lambda \neq 0$ de A se encontra na sequência λ_n : pois senão o autovetor correspondente e seria ortogonal a todos os e_n (3.3) e de b seguiria que $Ae = 0$ contra a hipótese de que $Ae = \lambda e \neq 0$.

D - Dado um autovalor $\lambda \neq 0$ que aparece p vêzes na sequência λ_n então a subvariedade gerada pelos autovetores correspondentes ao autovalor λ tem dimensão $\geq p$ pois existem pelo menos p autovetores ortonormais correspondentes a λ . A subvariedade não pode ter dimensão $> p$ pois senão existiria ainda um autovetor o correspondente a λ, ortogonal aos anteriores e a todos os e_n ; como em $\underline{c}$ seguiria então que $Ae = 0$.

3.6 - Corolário: Para quaisquer $x,y \varepsilon E$ temos $(Ax|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \bar{y}_n$.

Demonstração: Por (3) temos $(Ax|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n (e_n|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \bar{y}_n$.

3.7 - Teorema - Com as notações do teorema (3.5): dado $\lambda \varepsilon C$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $\underline{n}$ então o operador $\lambda - A$ têm um inverso contínuo definido em E; indicando êste inverso por $(\lambda - A)^{-1}$ então $x = (\lambda - A)^{-1}y$ é dado por

(4) $$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n \quad \text{onde} \quad y_n = (y|e_n).$$

Demonstração: 1) Se a equação $\lambda x - Ax = y$ tem uma solução $\underline{x}$ esta certamente é única e dada pela série acima pois de (5) vem $\lambda x - y = Ax = \sum_n \lambda_n x_n e_n$ e efetuando o produto interno por e_m vem $\lambda x_m - y_m = \lambda_m x_m$ isto é, $x_m = \frac{y_m}{\lambda - \lambda_m}$ e portanto

$$\lambda x - y = \sum_n \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n,$$ que equivale a (4).

2) É imediato também que se a série de (4) fôr convergente, o elemento $\underline{x}$ definido por ela satisfaz a equação $(\lambda - A)x = y$.

3) A série de (4) satisfaz o critério de Cau

chy.

Demonstração: seja $\alpha = \sup\limits_n \left|\frac{\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}\right|$ e

$\beta = \sup\limits_n \left|\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\right|$ que são números finitos pois $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_n$ e $|\lambda_n| \longrightarrow 0$ (se a sequência λ_n fôr finita o teorema (3.7) é evidentemente trivialmente verificado); seja

$$v_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{y_n}{\lambda-\lambda_n} e_n \quad \text{e} \quad u_m = Av_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda-\lambda_n} e_n .$$

Temos

$$\| u_{m+p} - u_m \|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+p} \left|\frac{\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}\right| |y_n|^2 \leq \alpha^2 \sum_{n=m+1}^{m+p} |y_n|^2$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ sendo convergente, satisfaz o critério de Cauchy e a última relação mostra que o mesmo é verdade para a série de (4). O espaço E porém não sendo suposto completo não podemos concluir que a série de (4) é convergente.

4) A série (4) que define $\underline{x}$ é convergente: por

$$\| v_m \|^2 = \sum_{n=1}^{m} \left|\frac{y_n}{\lambda-\lambda_n}\right|^2 \leq \beta^2 \sum_{n=1}^{m} |y_n|^2 \leq \beta^2 \| y \|^2$$

vemos que a sequência v_m é limitada em E e A sendo um operador compacto existe então uma subsequência v_{r_m} tal que a sequência $u_{r_m} = Av_{r_m}$ seja convergente. Porém se a sequência de Cauchy u_m contém uma subsequência convergente então ela mesma já é convergente, o que completa a demonstração da convergência da série (4).

5) De (4) vem

$$\|x\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|y\| + \frac{1}{|\lambda|}\alpha\|y\| = \left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\alpha\right)\|y\|$$

o que prova que o operador $(\lambda - A)^{-1}$ é contínuo e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\alpha\right) = \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \sup_n \left|\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n}\right|\right).$$

3.8 - Teorema - Com as notações dos teoremas (3.5) e (3.7): Dado um operador hermitiano compacto A num espaço prehilbertiano E, e dado um autovalor $\lambda \neq 0$ de A uma condição necessária e suficiente para que a equação $\lambda x - Ax = y$ tenha uma solução é que $\underline{y}$ seja ortogonal a todo autovetor de A associado a λ. As soluções $\underline{x}$ da equação acima são então os elementos da forma

$$(4') \qquad x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{y_n}{\lambda - \lambda_n} e_n + z$$

onde $\underline{z}$ é qualquer autovalor associado a λ, isto é, $Az = \lambda z$.

Demonstração: seja $\lambda x - Ax = y$; então $(x|\lambda z - Az) = (x|\lambda z) - (x|Az) = (\lambda x|z) - (Ax|z) = (y|z)$ e portanto para todo $\underline{z}$ tal que $Az = \lambda z$ temos $(y|z) = 0$. Como em (3.7) se demonstra fàcilmente que $\underline{x}$ é da forma (4') bastando lembrar que $y_n = (y|e_n) = 0$ se $\lambda_n = \lambda$ pois então $Ae_n = \lambda e_n$.

Reciprocamente, se $(y|z) = 0$ para todo $\underline{z}$ tal que $Az = \lambda z$, é imediato que todo elemento $\underline{x}$ da forma

(4') é uma solução de $\lambda x - Ax = y$.

A conjunção dos teoremas (3.7) e (3.8) se chama de <u>alternativa de Fredholm</u>.

<u>Observação</u>: Se $\lambda = 0$ a alternativa de Fredholm não vale: no espaço de Hilbert $\ell^2(N)$, o operador hermitiano compacto A que a todo $x = (x_n) \in \ell^2(N)$ associa o elemento $x' = Ax = (x'_n) \in \ell^2(N)$ onde $x'_n = \frac{1}{n} x_n$, é tal que $Az = 0$ implica $z = 0$ mas a equação $Ax = y$ onde $y_n = \frac{1}{n}$ não tem solução em $\ell^2(N)$.

§ 4 - <u>Aplicação</u>.

Vamos agora aplicar os resultados do parágrafo precedente na resolução da equação integral de Fredholm de segunda espécie.

(5) $$\lambda f(t) = g(t) + \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds$$

com núcleo hermitiano (isto é, $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$) onde K, f, g são funções contínuas para $a \leq s, t \leq b$.

Já vimes em (2.5) que o operador $k: f \in \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow g = h(f) \in \mathcal{C}([a,b])$ onde $g(t) = \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds$ é compacto em $G = \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$.

4.1 - Se o núcleo $K(s,t)$ é hermitiano então o operador k é hermitiano, isto é, para quaisquer funções f_1 e f_2 de $G = \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ temos $(kf_1|f_2) = (f_1|kf_2)$.

<u>Demonstração</u>: $(kf_1|f_2) =$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(s,t) f_1(s)\, ds \right) \overline{f_2(t)}\, dt = \int_a^b \int_a^b K(s,t) f_1(s) \overline{f_2(t)}\, ds\, dt =$$

$$= \int_a^b \int_a^b f_1(s)\, \overline{K(t,s) f_1(t)}\, ds\, dt = \int_a^b f_1(s) \left(\overline{\int_a^b K(t,s) f_2(t)\, dt} \right) ds =$$

$$= (f_1, kf_2)$$

Vamos então aplicar os resultados do parágrafo precedente ao operador hermitiano compacto k; se λ_n indica a sequência dos autovalores não nulos de k, e $e_n(t)$ o sistema ortogonal de autofunções correspondentes, temos então

(6) $\quad ke_n = \lambda_n e_n \quad$ isto é $\quad \displaystyle\int_a^b K(s,t)\, e_n(s)\, ds = \lambda_n\, e_n(t)$,

$$a \leq t \leq b$$

4.2 - $$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt$$

<u>Demonstração</u>: para todo $t \varepsilon [a,b]$ a desigualdade de Bessel (Ap.II) aplicada à função $s \varepsilon [a,b] \longrightarrow K(s,t) \varepsilon C$ e ao sistema ortogonal de funções $\overline{e_n(s)}$ assegura que

$$\sum_n \left| \int_a^b K(s,t) e_n(s)\, ds \right|^2 \leq \int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

isto é

(7) $$\sum_n \lambda_n^2 |e_n(t)|^2 \leq \int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

donde segue que

$$\sum_n \lambda_n^2 \int_a^b |e_n(t)|^2 dt \leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt$$

isto é,

$$\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt \quad .$$

Observação: na realidade pode-se demonstrar que a última relação é mesmo uma igualdade.

Do teorema (3.5) segue que para qualquer função $g \in \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ temos $f = kg = \sum_n \lambda_n c_n e_n$ onde $c_n = (g|e_n) = \int_a^b g(s)\, \overline{e_n(s)}\, ds$ isto é,

$$(8) \qquad f(t) = \int_a^b K(s,t)\, g(s)\, ds = \sum_n \lambda_n c_n e_n(t), \qquad a \leq t \leq b$$

a série sendo convergente em $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$.

4.3 - A série (8) é mesmo absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$.

Demonstração: aplicando primeiro a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ap.II) e depois a desigualdade de Bessel e (7) temos

$$\sum_n |\lambda_n c_n e_n(t)| \leq \left(\sum_n |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |\lambda_n e_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b |g(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} M \left(\int_a^b |g(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

onde $M = \sup_{a \leq s,t \leq b} |K(s,t)|$ o que prova (4.3)

De (4.3) ou de (3.7) vem que

4.4 - Para $g_1, g_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ temos

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t) g_1(s) \overline{g_2(t)} \, ds \, dt = \sum_n \lambda_n c_n \overline{d}_n$$

onde $c_n = \int_a^b g_1(s) \overline{e_n(s)} \, ds$ e $d_n = \int_a^b g_2(s) \overline{e_n(s)} ds.$

O teorema (3.6) nos assegura que dado $\lambda \neq 0$, distinto de todos os autovalores λ_n, e dado $g \in G = \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$, a equação integral (5), isto é, $g = (\lambda - k)f$ tem uma única solução $f = (\lambda - k)^{-1} g \in \mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ dada por $f = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} e_n$ onde $c_n = \int_a^b g(s) \overline{e_n(s)} ds$ isto é,

$$(9) \qquad f(t) = \frac{1}{\lambda} g(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} e_n(t), \quad a \leq t \leq b$$

esta série sendo convergente em $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$.

4.5 - A série (9) é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[a,b]$, isto é, é convergente em $E = \mathcal{C}_u([a,b])$.

Demonstração: f satisfaz a relação

$f = \frac{1}{\lambda} g + \frac{1}{\lambda} k(f)$ que comparada com (9) nos mostra que

$$(kf)(t) = \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds = \sum_n \lambda_n \frac{c_n}{\lambda-\lambda_n}\, e_n(t)$$

e de (4.3) segue que esta série é absolutamente e uniformemente convergente C.Q.D.

De (3.8) e (4.5) segue que

4.6 - Dado um núcleo hermitiano contínuo $K(s,t)$ e um autovalor $\lambda \neq 0$ do operador hermitiano compacto $\underline{k}$ associado a K, então a equação integral

$$\lambda f(t) = g(t) + \int_a^b K(s,t)\, f(s)\, ds$$

tem solução se e sòmente se $\int_a^b g(t)\, \overline{h(t)}\, dt = 0$ para tôda função $h \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que

$$\text{(11)} \qquad \int_a^b K(s,t)\, h(s)\, ds = \lambda h(t).$$

As soluções são as funções da forma

$$\text{(12)} \qquad f(t) = \frac{1}{\lambda} g(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{c_n}{\lambda-\lambda_n}\, e_n(t) + h(t)$$

onde $\underline{h}$ é um elemento de $\mathcal{C}([a,b])$ que satisfaz (11) e

$$c_n = \int_a^b g(s)\, \overline{e_n(s)}\, ds.$$

A série (12) é absolutamente e uniformemente convergente.

A P Ê N D I C E I

Espaços Normados

1 - Dado um espaço vetorial E sôbre o corpo C dos números complexos, uma norma sôbre E é uma aplicação $x \in E \longrightarrow \|x\| \in R$ que têm as seguintes propriedades:

N_I - para todo $x \in E$, $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ se e sòmente se $x = 0$

N_{II} - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$

N_{III} - $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$ para todo $\lambda \in C$ e $x \in E$.

Um espaço vetorial munido com uma norma se chama de espaço normado.

Num espaço normado a função $d(x,y) = \|x-y\|$ é uma distância e consideramos sempre o espaço normado munido desta distância e da topologia deduzida dela. Um espaço normado completo se chama espaço de Banach.

Em (I.5.F) e em (I.5.G) demos exemplos de espaços normados; vêr também o apêndice II.

Um espaço normado sôbre o corpo dos números reais é definido de modo análogo. Valem ainda os mesmos resultados acima bem como os que seguem.

2 - Dada uma aplicação linear f de um espaço normado E num espaço normado F, são e-

quivalentes as seguintes propriedades:

a) $\underline{f}$ é uma aplicação contínua.

b) $\underline{f}$ é limitada, isto é, $\sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| \leq M < \infty$

c) Existe $M \varepsilon R$ tal que para todo $x \varepsilon E$ temos $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.

d) Existe um ponto $x_0 \varepsilon E$ e $a > 0$ tal que $\underline{f}$ é limitada na bola $B(x_0, a)$.

e) $\underline{f}$ é contínua na origem, isto é, no ponto $x = 0$ de E.

<u>Demonstração</u>: basta demonstrar as implicações

$$a \Rightarrow b \Rightarrow d \Rightarrow c \Rightarrow e \Rightarrow a .$$

Em (III.3.2) já foi demonstrado que $d \Rightarrow c$; vamos demonstras $e \Rightarrow a$: de $f(x) = f(x-x_0)+f(x_0)$ segue a continuidade de $\underline{f}$ no ponto x_0 pois $\underline{f}$ é contínua na origem, e portanto a aplicação $x \longrightarrow f(x-x_0)$ é contínua no ponto x_0, e a aplicação $f(x-x_0) \longrightarrow f(x-x_0)+f(x_0)$ também é contínua. As outras implicações são trivialmente verificadas.

<u>Observação</u>: uma aplicação linear limitada no sentido acima não é limitada no sentido de (I.§2).

5 - Indicamos com $L(E,F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas do espaço normado E no espaço norma do F; é imediato que $L(E,F)$ é um espaço vetorial sôbre C e de 2 segue que para todo

$f \varepsilon L(E,F)$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|f(y)\|}{\|y\|} =$$

$$= \inf \left\{ M \in R \mid \|f(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in E \right\}$$

é um número real que indicamos por $\|f\|$. É facil verificar que a aplicação $f \in L(E,F) \longrightarrow \|f\| \in R$ uma uma norma; consideramos sempre $L(E,F)$ munido desta norma e da topologia deduzida dela

4 - Lembrando que o limite de uma sequência de aplicações lineares ainda é uma aplicação linear é facil demonstrar que se F é completo então $L(E,F)$ também o é; Cf.(I.5.F 5).

- * -

A P Ê N D I C E II

Espaços de Hilbert

1 - Dado um espaço vetorial E sôbre o corpo dos números complexos C, um produto interno sôbre E é uma aplicação $(x,y) \in E \times E \longrightarrow (x|y) \in C$ que tem as seguintes propriedades:

H_I - $(x_1+x_2|y)=(x_1|y)+(x_2|y)$; $(\lambda x|y)=\lambda(x|y)$

H_{II} - $(x|y_1+y_2)=(x|y_1)+(x|y_2|$; $(x|\lambda y)=\bar{\lambda}(x|y)$

H_{III} - $(y|x) = \overline{(x|y)}$

H_{IV} - $(x|x) \geq 0$; $(x|x) = 0$ se e sòmente se $x = 0$.

<u>Observação</u>: é imediato que H_I e H_{III} implicam H_{II}.

Um espaço vetorial com produto interno também se chama <u>espaço prehilbertiano</u>. Em (I.5.G) vimos exemplos de espaços prehilbertianos.

Num espaço prehilbertiano a função $x \in E \longrightarrow ||x|| = (x|x)^{1/2} \in R$ é uma norma e consideramos sempre E munido com esta norma e com a distância deduzida dela. Se E fôr completo em relação a esta distância dizemos que E é um <u>espaço de Hilbert</u>.

2 - <u>Desigualdade de Cauchy-Schwarz</u>: para todo $x, y \in E$ temos $|(x,y)| \leq ||x|| \; ||y||$.

A aplicação $(x,y) \in E \times E \longrightarrow (x|y) \in C$ é contínua; daí segue que se $x = \sum_n x_n$ e $y = \sum_m y_m$ então $(x|y) = \sum_{n,m} (x_n \, y_m)$ (isto é, se as duas primeiras séries são convergentes em E, a última série é convergente em C e vale aquela igualdade).

Dizemos que $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são ortogonais se $(x|y)=0$. Se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são ortogonais então $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (Pitágoras).

3 - Dizemos que uma família $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ de elementos de E é <u>ortonormal</u> se $(e_\alpha | e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$

isto é, $||e_\alpha|| = 1$ para todo $\alpha \in A$ e se $\alpha \neq \beta$ temos $(e_\alpha|e_\beta) = 0$.

Dada uma família ortonormal $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E, para todo $x \in E$ seja $x_\alpha = (x|e_\alpha)$; então vale a desigualdade de Bessel: $\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 \leq ||x||^2$.

4 - O teorema da base - Dado um sistema ortonormal $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de um espaço de Hilbert E, são equivalentes as seguintes propriedades:

1) O sistema $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ é um sistema ortonormal máximal, isto é, não está contido pròpriamente em nenhum sistema ortonormal.

2) Dado $e \in E$ tal que $(e|e_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$ então $e = 0$.

3) Para todo $x \in E$ temos $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$ (convergência em E)

4) Para quaisquer $x, y \in E$ temos $(x|y)=\sum_\alpha x_\alpha \overline{y}_\alpha$ (convergência em C).

5) Para todo $x \in E$ temos $||x||^2 = \sum_\alpha |x_\alpha|^2$

6) O conjunto das combinações lineares finitas dos e_α é denso em E, isto é, dado qualquer $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear finita $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} e_{\alpha_i}$ dos e_α tal que $||x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\alpha_i} e_{\alpha_i}|| < \varepsilon$.

Se uma, (e portanto tôdas) das condições acima está satisfeita dizemos que os $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ são uma base do espaço de Hilbert E.

5 - Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt: dada uma sequência f_n (finita ou infinita) de elementos linearmente independentes de um espaço prehilbertiano E podemos achar uma sequência e_n ortonormal tal que todo elemento de E que é combinação linear dos elementos $f_1,\dots,f_m$ se pode escrever como combinação linear dos elementos $e_1,\dots,e_m$ e reciprocamente.

Demonstração: da independência linear dos f_n segue que $f_1 \neq 0$ e tomamos

$e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$; já tendo definidos $e_1,\dots,e_m$ seja $f'_{m+1} =$ $= f_{m+1} - (f_{m+1}|e_1) - \dots - (f_{m+1}|e_m)$; f_{m+1} não sendo combinação linear dos $f_1,\dots,f_m$, e nem dos $e_1,\dots,e_m$ portanto, segue que $f'_{m+1} \neq 0$ e definimos $e_{m+1} = \dfrac{f'_{m+1}}{\|f'_{m+1}\|}$;

é imediato que a sequência e_n assim definida têm tôdas as propriedades enunciadas.

6 - Um operador linear contínua A de um espaço prehilbertiano E em si mesmo é hermitiano se para todos $x,y \in E$ temos $(Ax|y) = (x|Ay)$.

Lembremos que (Ap.I) a norma de A é dada por $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Para um operador hermitiano temos

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |(Ax|y)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax|x)|$$

é evidente que as desigualdades $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ podem ser substituidas por igualdades.

Para a demonstração dos resultados enunciados neste Apêndice vêr:

Halmos-Hilbert Spaces

C.S.Hönig - Métodos Matemáticos da Física, (Cap. IV - Departamento de Física, Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo, 1961.

---*---

Doação
em 19-4-62