Aplicações Matemáticas em Engenharia de Produção

Publicações Matemáticas

Aplicações Matemáticas em Engenharia de Produção

Leonardo J. Lustosa
PUC-Rio - Aposentado

Fernanda M. P. Raupp
LNCC

impa

30º Colóquio Brasileiro de Matemática

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

30º Colóquio Brasileiro de Matemática

- **Aplicações Matemáticas em Engenharia de Produção - Leonardo J. Lustosa e Fernanda M. P. Raupp**
- Boltzmann-type Equations and their Applications - Ricardo Alonso
- Dissipative Forces in Celestial Mechanics - Sylvio Ferraz-Mello, Clodoaldo Grotta-Ragazzo e Lucas Ruiz dos Santos
- Economic Models and Mean-Field Games Theory - Diogo A. Gomes, Levon Nurbekyan and Edgard A. Pimentel
- Generic Linear Recurrent Sequences and Related Topics - Letterio Gatto
- Geração de Malhas por Refinamento de Delaunay - Afonso P. Neto, Marcelo F. Siqueira e Paulo A. Pagliosa
- Global and Local Aspects of Levi-flat Hypersurfaces - Arturo Fernández Pérez e Jiri Lebl
- Introdução às Curvas Elípticas e Aplicações - Parham Salehyan
- Métodos de Descida em Otimização Multiobjetivo - B. F. Svaiter e L. M. Graña Drummond
- Modern Theory of Nonlinear Elliptic PDE - Boyan Slavchev Sirakov
- Novel Regularization Methods for Ill-posed Problems in Hilbert and Banach Spaces - Ismael R. Bleyer e Antonio Leitão
- Probabilistic and Statistical Tools for Modeling Time Series - Paul Doukhan
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação - O. Lee, F. K. Miyazawa, R. C. S. Schouery e E. C. Xavier
- Topics in Spectral Theory - Carlos Tomei

ISBN: 978-85-244-0400-9

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Estas notas de aula servem de material básico para o curso introdutório "Aplicações Matemáticas em Engenharia de Produção". O objetivo do curso é apresentar e discutir exemplos de aplicações matemáticas existentes no âmbito da Engenharia de Produção, em particular, no tocante às decisões relativas à capacidade de produção e estoques de itens. O duplo propósito é, através de exemplos, expor os alunos a um campo de aplicação da matemática ainda pouco divulgado no Brasil e, além disso, proporcionar uma experiência na modelagem matemática de realidades que envolvem aspectos físicos e econômicos.

Veremos durante este curso problemas específicos da gerência da produção. É importante salientar que, além da habilidade matemática, o profundo entendimento da situação, a criatividade e o discernimento do modelador são fundamentais para a elaboração de modelos matemáticos úteis para as empresas. Portanto, ao privilegiar aspectos matemáticos o curso deixa de lado importantes elementos da boa prática que só a experiência profissional pode fornecer.

A elaboração de um bom modelo, isto é, uma boa representação de algo que nos será útil para algum propósito, depende de nosso bom conhecimento da realidade (contexto teórico e prático), para que sejamos capazes de discernir quais aspectos dessa realidade são relevantes para nosso propósito e, também, de nossa habilidade de representar de forma útil tais aspectos. Uma decorrência disso é que um bom modelo não é necessariamente o que mais fielmente retrata a situação real, mas sim o que melhor serve ao propósito estabelecido. A inclusão de aspectos da realidade que não são relevantes para a tomada de decisão pode obscurecer os aspectos essenciais e tornar o modelo menos útil para seu propósito. Já a exclusão de aspectos fundamentais pode também tornar o modelo inútil. Podemos dizer que um bom modelo deve incluir *apenas tudo* que é relevante *para seu propósito*.

Vamos abordar, em particular, os clássicos problemas do tamanho do lote econômico e do jornaleiro, e também problemas típicos de planejamento da produção. Veremos que, em grande parte dos problemas quantitativos da Engenharia de Produção, soluções são obtidas por otimização de seus modelos de custo. Cada problema será introduzido através de um problema-paradigma simples e familiar a leigos e seu modelo construído passo a passo. A utilização do modelo como auxílio para decisões gerenciais será discutida, assim como uma solução analítica será apresentada, quando possível. Problemas práticos de natureza diversa, mas matematicamente isomorfos ou similares, serão discutidos juntamente com extensões e, posteriormente, resolvidos ou deixados como exercício.

O público alvo são alunos de graduação em matemática ou em engenharias, com habilidade em cálculo diferencial e integral, sistemas de equações lineares e noções básicas de probabilidade.

No que se segue, estas notas estão estruturadas em três capítulos. O Capítulo 2 aborda primeiramente modelos de produção de itens com demanda determinística e constante, enquanto que, no Capítulo 3, são abordados os modelos com demanda probabilística. Ambos os capítulos tratam de planejamento da produção de um item isoladamente. No Capítulo 4, o planejamento da produção simultânea de uma família de itens é abordado para um horizonte de um número finito de períodos.

Capítulo 2

Problema do tamanho do lote de reposição

2.1 Modelo básico

Suponha uma situação do comércio varejista, tal como um supermercado. Vamos estudar isoladamente um item que é rotineiramente encomendado e vendido, digamos, sal de cozinha. O gerente do centro de distribuição do supermercado deseja saber em que quantidade e quando um item deve ser encomendado, de forma que o custo relevante total seja mínimo e a demanda pelo item seja integralmente satisfeita. Neste exemplo, a demanda pelo item pode ser considerada um fluxo contínuo e praticamente constante. De fato, as pessoas consomem sal aproximadamente na mesma quantidade ao longo de todo o ano e são muitos consumidores que compram em quantidades relativamente pequenas. Essas características da demanda, assim como a estabilidade do custo do sal ao longo do tempo, serão importantes suposições no que veremos adiante.

O problema de interesse consiste em determinar o tamanho do lote de um item a ser encomendado para que o custo anual de operar esse item seja o menor possível -o chamado lote econômico de compra (mais conhecido pela expressão em Inglês, *economic order quantity* - EOQ), levando em conta apenas os custos de manter o estoque e o de encomendar a mercadoria. Um dos mais conhecidos e clássicos da gerência de produção, esse problema tem a virtude de ser muito simples, o que facilita a exposição de alguns aspectos importantes do comportamento econômico de estoques de ciclo. Estoques de ciclo são os estoques formados quando o consumo ocorre como um fluxo constante e os recebimentos de material ocorrem em lotes.

Como é intuitivo no exemplo, fazer uma encomenda dá um certo trabalho, que pode ser medido pelo valor em dinheiro que o gerente estaria disposto a pagar para economizar esse trabalho. Podemos então considerar que, ao fazer uma encomenda, a empresa (representada pelo gerente) incorre num custo que independe da quantidade encomendada e que chamaremos de custo de encomendar.

Se esse fosse o único custo, é claro que o custo total anual (sim, adiante veremos que faz sentido querer minimizar o custo anual) seria mínimo quando a política fosse encomendar uma única vez na vida, o que na situação real não faz sentido; não é? Sim, fora outras razões (como espaço para armazenar e juntar dinheiro), há o fato de que ao usar o dinheiro para comprar mercadoria, esse mesmo dinheiro deixa de estar disponível para fazer outros negócios e, com isso, deixa-se de ganhar mais dinheiro. Dessa forma, o que se deixa de ganhar pode ser visto como sendo um custo que se costuma chamar de custo de oportunidade, ou custo do capital imobilizado. Esse custo é tão importante para as decisões econômicas que qualquer organização, que busque solidez nas suas decisões, o estabelece através de análises financeiras (vale observar que frequentemente se estabelecem diferentes custos de capital dependendo do contexto do problema).

Nesta análise vamos supor que os únicos custos relevantes incidentes são o custo de encomendar (i.e., o custo de se fazer uma encomenda, independente do seu tamanho) e o custo de manter estoque, (i.e., o custo de oportunidade do dinheiro empatado no estoque acrescido de outros custos proporcionais à quantidade do item mantida em estoque, como o do seguro contra roubo e incêndio, e o custo de armazenagem e movimentação no armazém). O cálculo desses custos raramente pode ser feito com precisão, mas quase sempre pode ser estimado de forma aceitável.

Para desenvolver o modelo básico do problema do varejista nesse contexto são necessárias algumas considerações iniciais ou hipóteses simplificadoras, que são listadas a seguir.

Considerações iniciais para o modelo EOQ

1. A taxa de demanda anual pelo item é constante e determinística.
2. A quantidade encomendada do item (i.e., o tamanho do lote) pode ser um número qualquer e não há restrições quanto à quantidade.
3. Não pode haver falta do item.
4. O valor ou preço unitário de aquisição do item é constante e independe da quantidade encomendada.
5. Os custos de encomendar e de manter estoque são os únicos relevantes, são constantes, conhecidos e invariantes no tempo.
6. Não se considera a existência de outros itens.
7. O tempo de reposição é constante e conhecido.
8. O lote encomendado chega integralmente num mesmo instante.
9. O horizonte de planejamento é longo (virtualmente infinito) e os parâmetros não variam.

Notação

Para construir o modelo básico iremos considerar a seguinte notação:

Q	quantidade fixa a ser encomendada do item por período (unidades do item)
T	tempo do ciclo ou período (ano)
N	número de encomendas ou de recebimentos (i.e. de ciclos) num ano
r	taxa de manter o estoque (\$/\$/ano)
v	valor ou preço unitário do item (\$)
A	custo de encomendar ou fazer uma encomenda (\$)
D	taxa de demanda (unidades do item/ano)
H	custo unitário de manter o item em estoque ($H = rv$) ($\$/ano$)
I	nível de estoque (unidades do item)
CTA	custo total anual do item (\$/ano).

Os parâmetros do modelo são r, v, A, D e H. Conforme indicado acima, o custo de manter uma unidade do item em estoque por um ano, o parâmetro H, pode ser decomposto no produto de uma taxa de manutenção de valor em estoque (que é semelhante a uma taxa de juros) pelo valor unitário do item. Isso é conveniente, porque frequentemente essa taxa de manter em estoque é a mesma para itens que compartilham o mesmo armazém, enquanto o valor do item é uma característica dele próprio. Observe que tomamos *ano* como a unidade de tempo padrão. Ainda, sabendo que a taxa de demanda anual é constante e conhecida e a quantidade a ser encomendada é fixa, observe que $N = D/Q$ é o número de encomendas realizadas por ano, e o período entre encomendas, ou entre recebimentos, é a duração do ciclo dada por $T = Q/D = 1/N$. Vemos portanto que, como há relações fixas, nosso problema tem apenas uma variável de decisão que podemos escolher entre o tamanho do lote, Q, o número de encomendas no ano, N, ou a duração do ciclo, T.

Supondo o sistema de estoque desse item operando por muito tempo, podemos imaginar um estado estacionário onde um ciclo ótimo de estoque se repete indefinidamente, já que nenhum dado muda com o tempo. Assim, faz sentido buscarmos as decisões que minimizam o custo anual. É certo que o estoque deverá se esgotar imediatamente antes do recebimento de uma nova encomenda. Isso porque, no nosso caso, estamos supondo que existem apenas os custos de encomendar e o de manter estoque e, portanto, não existe outra razão para manter estoque que não seja a de reduzir o custo anual de encomendar. Temos, então, que, no ótimo, a variação do estoque ao longo do tempo deve ser algo como a representada na Figura 2.1.

Com as suposições acima, vemos que o ciclo se repete indefinidamente e, portanto, o que queremos é minimizar o custo anual total do item. Esse custo será composto pelo custo anual de encomendar (C_E) mais o custo anual de manter as unidades do item em estoque (C_M) mais o custo anual de aquisição do item (C_A) (i.e., o que pagamos ao fornecedor). Escolhendo o tamanho do lote, $Q > 0$ (não nos interessam valores nulo ou negativos de Q), como nossa variável de decisão, e usando a relação acima, podemos escrever que o custo anual de encomendar (i.e., o número de encomendas num ano vezes

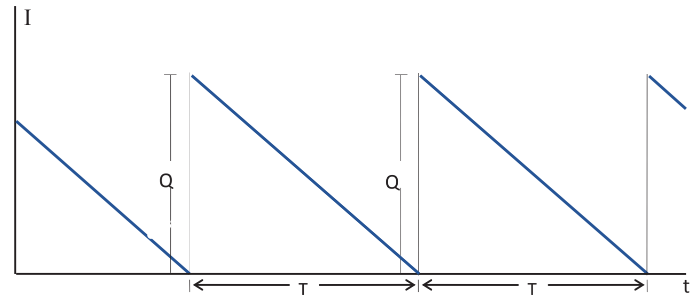


Figura 2.1: Nível dos estoques ao longo do tempo no modelo EOQ

o custo de uma encomenda) é

$$C_E = AN = AD/Q, \quad Q > 0.$$

A expressão do custo anual de manter o estoque é um pouco mais complicada. O custo de manter em estoque uma unidade do item durante um ano é H. Entretanto, a quantidade em estoque varia com o tempo, conforme ilustrado na Figura 2.1. Portanto, o custo de manter estoque durante um ano seria a integral durante um ano da quantidade em estoque, I, vezes o custo de manter estoque durante um tempo infinitesimal. Mas, pela geometria, podemos ver (você é capaz de mostrar?) que isso nada mais é do que o custo H vezes metade do tamanho do lote Q, i.e.,

$$C_M = \frac{Q}{2}H = \frac{Q}{2}vr.$$

A terceira parcela de custo é o custo anual de aquisição, C_A, que, como queremos atender toda a demanda, é a demanda anual vezes o custo unitário do item

$$C_A = Dv.$$

Temos, então, o custo total anual do item modelado por

$$CTA(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}vr + Dv. \tag{2.1}$$

Proposição 1. *CTA como definido em (2.1) é uma função estritamente convexa em $Q > 0$ que tem seu mínimo em*

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{vr}}.$$

De fato, podemos ver que, no domínio de interesse, a função é a soma de um ramo positivo de hipérbole (função estritamente convexa), uma reta (função convexa e côncava) e uma constante. Portanto, de acordo com o teorema que nos diz que a soma de um número finito de funções convexas é uma função convexa, concluímos que CTA é uma função convexa. Por se tratar de função convexa, para mostrar que o ponto Q^* é de mínimo, basta mostrar que ele é ponto crítico ou estacionário (i.e., de derivada nula). Faremos a prova de modo construtivo. A primeira derivada da função é

$$\frac{dCTA}{dQ}(Q) = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{vr}{2}.$$

Igualando a zero e resolvendo para $Q > 0$, temos

$$\frac{dCTA}{dQ}(Q^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{vr}}.$$

Logo,

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}}. \tag{2.2}$$

Note que o custo de aquisição Dv poderia ter sido ignorado sem que o resultado se alterasse. Não por acaso! Como Dv é uma constante independente da decisão, Q, ao derivarmos em relação a Q o termo desaparece. Neste caso, dizemos que o custo de aquisição é um custo irrelevante, i.e., ele não tem relevância para a decisão. Sim; porque, qualquer que seja o valor unitário do item, v, o que se pagará para adquiri-lo durante um ano será uma constante Dv e sabemos que um ponto que minimiza uma função permanece o mesmo se a ela somarmos uma constante ou se a multiplicarmos por uma constante positiva. (Você é capaz de demonstrar isso?) Por simples que seja, na prática de modelagem, eliminar de consideração, logo de saída, custos irrelevantes pode simplificar muito a construção do modelo.

Aqui lembramos que o bom modelo é aquele que considera apenas tudo que é relevante para nosso propósito.

De acordo com essas observações, vamos denominar custo relevante total (anual) a função de custo total anual sem o termo de custo de aquisição, ou seja,

$$CRT(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}vr. \tag{2.3}$$

Vamos agora avaliar o custo relevante total ótimo. Para isso vamos tomar $Q = EOQ$ em (2.3).

$$CRT(EOQ) = \frac{AD}{\sqrt{\frac{2AD}{vr}}} + \frac{\sqrt{\frac{2AD}{vr}}}{2}vr = \sqrt{\frac{ADvr}{2}} + \sqrt{\frac{ADvr}{2}} = \sqrt{2ADvr}. \tag{2.4}$$

O tempo do ciclo ótimo (em fração do ano) é dado por

$$T_{EOQ} = EOQ/D.$$

Uma outra forma de mostrarmos a convexidade da CTA (ou de CRT) é através de sua segunda derivada

$$\frac{d^2CRT}{dQ^2}(Q) = \frac{2AD}{Q^3}, \quad Q > 0,$$

que, sendo positiva, mostra que a função é convexa em todo o seu domínio.

Exemplo numérico 1

Deseja-se determinar o tamanho do lote econômico de um item, usando os dados na Tabela 2.1. Considere as unidades padrão para os dados na tabela.

Tabela 2.1:

D	A	v	r
100	10,00	200,00	0,2

Solução
Substituindo os valores dos parâmetros diretamente na fórmula de EOQ, obtemos

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AD}{vr}} = \sqrt{\frac{2(10)(100)}{200(0,2)}} = 7,1$$

$$CRT(EOQ) = \sqrt{2ADvr} = \sqrt{2(10)(100)(200)(0,2)} = 282,8.$$

De acordo com a fórmula de custo relevante total ótimo (2.4), verifica-se que o custo ótimo de manter estoque é igual ao custo ótimo de encomendar. Isso não ocorre por acaso, basta substituir a fórmula EOQ nas expressões de C_E e C_M para ver que, na solução ótima, eles são iguais. Essa característica se mantém muito próxima da verdade, mesmo em outros modelos de estoque de ciclo mais complexos, e pode ser tida como uma espécie de "lei natural". Usando os dados do exemplo, a situação é ilustrada na Figura 2.2.

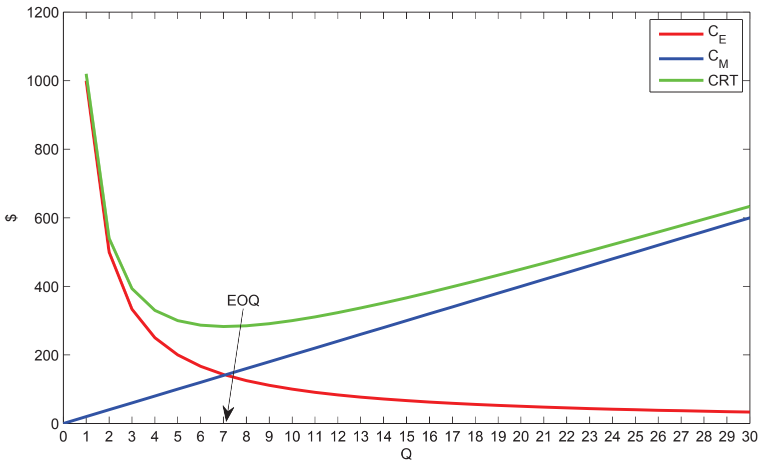


Figura 2.2: CRT, C_E e C_M em função das quantidades do item

Sensibilidade aos parâmetros

Olhando para as fórmulas de EOQ, $CRT(EOQ)$ e T_{EOQ}, vê-se que os valores ótimos do lote a ser encomendado, do custo relevante total e da duração do ciclo são função da raiz quadrada dos parâmetros. Isso significa que:

a) os valores ótimos são pouco sensíveis a variações dos parâmetros. Portanto, o impacto em termos de custo total não é grande quando utilizamos lotes de tamanhos diferentes de EOQ. Normalmente, diz-se que a solução ótima com essa característica é "robusta". Pode-se verificar isso com auxílio da Figura 2.2 e analiticamente através de um exemplo, como segue. Suponha que em vez de EOQ seja usada uma quantidade de acordo com a seguinte relação:

$$\tilde{Q} = (1+p)EOQ,$$

onde 100p é o percentual do desvio de $\tilde{Q}$ em relação a EOQ. O incremento percentual do custo (IPC) ao se usar $\tilde{Q}$ em vez de EOQ é dado por

$$IPC = 100\frac{CRT(\tilde{Q}) - CRT(EOQ)}{CRT(EOQ)} = 50\frac{p^2}{1+p}.$$

Por exemplo, para $\tilde{Q} = 480$ e $EOQ = 400$, temos $p = 0,2$ (variação de 20% na quantidade encomendada), e $IPC = 1,66\%$ (variação no custo relevante total).

b) O custo ótimo aumenta sublinearmente com a demanda e com outros parâmetros. Por exemplo, se a demanda de um item aumenta de um fator de 4 ($p = 3$), o custo aproximadamente dobra. Isso explica as vantagens de padronização de componentes em sistemas de peças de reposição e economias de escala no comércio varejista. Apesar de o modelo não ser muito adequado para representar o que ocorre em uma manufatura, ele captura a essência do que ocorre quando se deseja reduzir o estoque em processo para se aproximar de uma situação de *just-in-time* (política de produção que privilegia a redução de estoques trabalhando com lotes muito pequenos).

Exercício proposto 1

(Exercício 5.4 do livro da referência [8]) Uma fábrica produz um dado

item em corridas que correspondem a um suprimento que dura três meses em linha de produção. Sabemos que $D = 4000$ unidades por ano, $A = 5\$$, $v = 4\$$ por 100 unidades e $r = 0,25\$/\$/ano$. Ainda, sabe-se que a taxa de produção é muito maior que D, a ponto de se considerar que a produção de qualquer quantidade se dá em tempo desprezível.
a) Qual a quantidade econômica a ser encomendada (EOQ)?
b) Qual o período entre encomendas consecutivas do item quando EOQ é usada?
c) O gerente de produção insiste em dizer que $A = 5\$$ é um "chute". Consequentemente, ele decide usar a regra de suprimento de 3 meses, ou seja, a cada 3 meses uma encomenda é feita para satisfazer a demanda. Indique como você acharia o intervalo de valores possíveis de A para o qual EOQ é preferível (em termos de menores custos para repor e manter em estoque) a um suprimento de 3 meses?

2.2 Modelo com desconto por quantidade

Uma das hipóteses mais fortes feitas para o modelo EOQ é a que considera o preço unitário v como sendo constante e independente da quantidade encomendada. Em situações reais, é comum obter descontos no valor unitário do item, v, quando se encomenda lotes grandes. Isso geralmente se deve ao fato de lotes maiores proporcionarem economias (por exemplo, no transporte) para o fornecedor. A fim de adequar o modelo EOQ com relação à variação do preço unitário em função da quantidade encomendada de um item, iremos relaxar a hipótese simplificadora número 4.

Naturalmente, é o fornecedor do item quem decide sobre tamanho de lote de referência, a partir do qual o desconto será concedido. Dois tipos de desconto são mais comuns: o desconto em todas as unidades e o desconto incremental. Em ambos os casos são estabelecidas n quantidades limites, digamos $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$ correspondentes a preços unitários $v_1 > v_2 > ... > v_n$. No desconto incremental as primeiras q_1 unidades de uma encomenda de tamanho Q vão custar v_1, as seguintes $q_2 - q_1$ unidades vão custar v_2, as seguintes $q_3 - q_2$ vão custar v_3 e assim por diante até completar a quantidade encomendada Q. No caso do desconto em todas as unidades, se q_k for a maior quantidade limite menor do que Q, então será cobrado o valor v_k para todas as unidades da encomenda Q. Por questão de espaço, a seguir veremos apenas o caso de desconto em todas as unidades, que, apesar de não ser o caso mais corrente na prática, é o mais simples. Considere a seguinte estrutura do preço unitário dada pelo fornecedor:

$$v = \begin{cases} v_0, & 0 < Q < \bar{Q} \\ v_1 = v_0(1-d), & \bar{Q} \leq Q \end{cases} \tag{2.5}$$

onde v_0 é o preço unitário básico, v_1 é o preço unitário com desconto quando a quantidade encomendada Q é maior ou igual ao tamanho do lote de referência $\bar{Q}$ e d é a fração decimal do desconto $(0 < d < 1)$.

Para o estudo do modelo do tamanho do lote com desconto por quantidade encomendada e de mínimo custo, é importante incluir a parcela Dv na expressão do custo relevante total, pois a decisão de quanto encomendar vai depender do preço unitário, que, por sua vez, depende do montante a ser encomendado. Procedendo como anteriormente, mas retendo Dv, o modelo de custo com desconto fica

$$CRT(Q) = \begin{cases} CRT_0(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}v_0 r + Dv_0, & 0 < Q \leq \bar{Q}, \\ \\ CRT_1(Q) = \frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}v_1 r + Dv_1, & \bar{Q} \leq Q. \end{cases}$$

A partir da definição de EOQ (2.2) e do modelo de custo com desconto, e sabendo que $v_1 < v_0$, temos de imediato os seguintes resultados:

1. CRT é uma função descontínua em $\bar{Q}$,
2. $CRT_1 < CRT_0$ para todo Q,
3. $EOQ_0 < EOQ_1$.

Determinação de Q^*

Para determinar o tamanho do lote ótimo do item a ser encomendado, teremos que analisar três situações possíveis.

1. Se $EOQ_1 \geq \bar{Q}$, então $Q^* = EOQ_1$, porque $CRT(Q) = CRT_1(Q)$ para $Q \geq \bar{Q}$, e por definição de EOQ_1 tem-se que $CRT_1(EOQ_1) \leq CRT_1(Q)$ para todo Q.

2. Caso $EOQ_1 < \bar{Q}$, então precisamos comparar $CRT_0(EOQ_0)$ e $CRT_1(\bar{Q})$, uma vez que o custo total é definido agora sobre o intervalo $0 < Q < \bar{Q}$. Por definição de EOQ_0 e pelo resultado 2 acima, temos que

$$\begin{array}{rcll} CRT_0(EOQ_0) & \leq & CRT_0(Q) & \text{para todo } Q \\ CRT_1(Q) & < & CRT_0(Q) & \text{para todo } Q. \end{array}$$

   Em particular, para $Q = \bar{Q}$, temos $CRT_0(EOQ_0) < CRT_0(\bar{Q})$ e $CRT_1(\bar{Q}) < CRT_0(\bar{Q})$. Porém, ainda não sabemos a relação entre $CRT_0(EOQ_0)$ e $CRT_1(\bar{Q})$. Vejamos:

   (a) se $CRT_0(EOQ_0) < CRT_1(\bar{Q})$, então o tamanho do lote ótimo a ser encomendado será EOQ_0. Assim, para quem encomenda, não há vantagem em aumentar o tamanho do lote para obter desconto.

   (b) Senão, se temos $CRT_1(\bar{Q}) < CRT_0(EOQ_0)$, então o tamanho do lote ótimo será $\bar{Q}$. Nesse caso, é vantajoso encomendar a mais, em relação ao usual EOQ_0, para obter o desconto.

A análise resumida sobre a determinação do tamanho do lote ótimo é posta sob a forma do algoritmo a seguir.

Algoritmo EOQ com desconto por quantidade
Início
    Calcule EOQ_1
    Se $EOQ_1 \geq \bar{Q}$, então $Q^* = EOQ_1$;
    Senão
        Calcule $CRT_0(EOQ_0)$ e $CRT_1(\bar{Q})$;
        Faça $Q^* = \text{argmin}\{CRT_0(EOQ_0), CRT_1(\bar{Q})\}$
    Fim
Fim

Observe que para esse modelo a solução encontrada foi uma solução algorítmica, e não uma solução analítica simplesmente.

Exemplo numérico 2
Considere o caso em que um fornecedor oferece 5% de desconto para

lotes com 100 ou mais unidades de um item de varejo. Os dados da empresa varejista apresentam-se na Tabela 2.2 com as unidades usuais.

Tabela 2.2:

Item	D	v_0	A	r
1	104	3,10	1,50	0,24
2	416	14,20	1,50	0,24
3	4160	2,40	1,50	0,24

Solução

Como $d = 0,05$, temos que $v_1 = v_0(1 - 0,05) = 0,95v_0$. Vamos agora estudar isoladamente cada item.

Item 1. Verificamos primeiramente que $v_1 = 2,95$, e assim

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(1,50)(104)}{2,95(0,24)}} = 20,99 < \bar{Q} = 100.$$

Calculando

$$CRT(EOQ_0) = \sqrt{2(1,50)(104)(3,10)(0,24)} + 104(3,10) = 337,64,$$

$$CRT(\bar{Q}) = \frac{1,50(104)}{100} + \frac{100}{2}(2,95)(0,24) + 104(2,95) = 343,76,$$

verificamos que $CRT(EOQ_0) < CRT(\bar{Q})$. Logo, é melhor abrir mão do desconto e encomendar o lote com tamanho

$$EOQ_0 = \sqrt{\frac{2(1,50)(104)}{3,10(0,24)}} = 20,48.$$

Esse caso é ilustrado na Figura 2.3(a).

Item 2. Verifica-se inicialmente que $v_1 = 13,49$ e

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(1,50)(416)}{13,49(0,24)}} = 19,14 < \bar{Q} = 100.$$

Em seguida, verificamos que

$$CRT(EOQ_0) = \sqrt{2(1,50)(416)(14,20)(0,24)} + 416(14,20) = 5.972,42,$$

$$CRT(\bar{Q}) = \frac{1,50(416)}{100} + \frac{100}{2}(13,49)(0,24) + 416(13,49) = 5.779,96,$$

Como $CRT(\bar{Q}) < CRT(EOQ_0)$, é melhor encomendar o tamanho do lote de referência $\bar{Q} = 100$, garantindo o desconto. Veja a Figura 2.3(b) que ilustra esse caso.

Item 3. Verificamos primeiramente que $v_1 = 2,28$ e

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(1,50)(4160)}{2,28(0,24)}} = 151,02 > \bar{Q} = 100.$$

Logo, ao encomendar a quantidade igual a EOQ_1, o desconto fica imediatamente garantindo. Veja a Figura 2.3(c).

Exercício proposto 2

(Exercício 5.9 do livro da referência [8]) Uma companhia mineradora rotineiramente substitui uma peça específica de um certo equipamento. A taxa de uso é de 40 unidades por semana. O fornecedor da peça oferece a estrutura de preços conforme a Tabela 2.3. O

Tabela 2.3:

Quantidade	Preço unitário
$0 < Q < 300$	10,00
$300 \leq Q$	9,00

custo de reposição é estimado em 25$ e a taxa de manter estoque 0,26$/$/ano é usada pela mineradora.

a) Qual a quantidade ótima a ser encomendada?

b) Se o fornecedor está interessado em que a mineradora compre no mínimo 500 unidades, qual é o maior preço unitário que o fornecedor pode cobrar para uma encomenda de 500 unidades? (Considere o fato de que o fornecedor seja conhecedor dos dados da mineradora.)

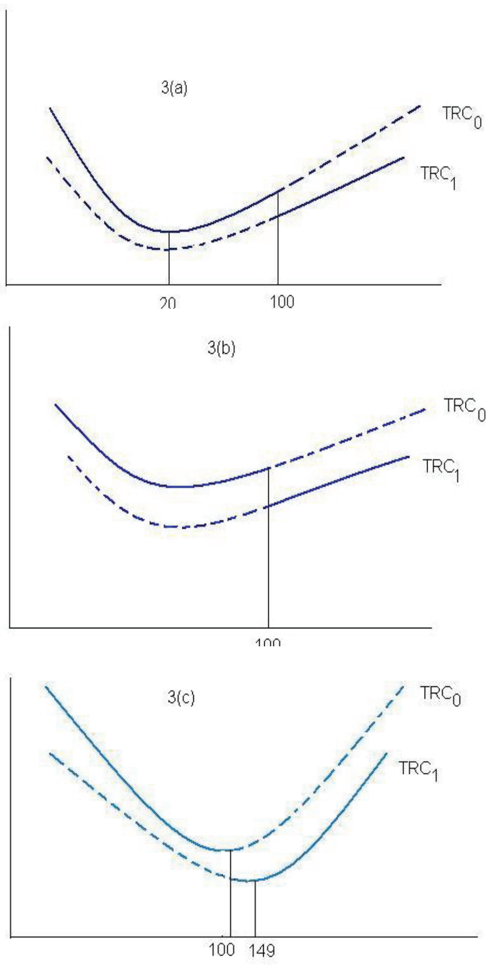


Figura 2.3: Casos possíveis para desconto por quantidade

Desafio 1

Ache a solução para o problema do lote econômico com desconto incremental no preço unitário de um item a ser encomendado. Aqui vão duas dicas: (a) analise o caso em que existe uma única quantidade limite para o desconto, pois a extensão para mais de uma quantidade limite de desconto é simples; (b) inspire-se na solução do problema sem desconto e use a expressão do custo unitário médio para um tamanho do lote Q genérico. A solução desse problema pode ser encontrada em [8].

2.3 Modelo com aumento de preço iminente

Quando se sabe com antecedência que o preço de um produto vai aumentar, pode ser interessante fazer uma encomenda maior que a usual, de forma a obter uma vantagem no preço. Mesmo supondo que as premissas que adotamos para o modelo EOQ sejam válidas para situações antes e depois do aumento (exceto a consideração 4 que diz respeito ao preço fixo do item), é claro que a decisão sobre a quantidade a ser encomendada dependerá de outros aspectos. Além dos parâmetros que vimos para o modelo EOQ, a nova encomenda do produto dependerá de quanto existirá em estoque quando ocorrer o aumento do preço e do tempo que esperaremos para receber o produto (*lead time*).

Assim sendo, queremos determinar a quantidade ótima do item Q^* que devemos encomendar antes do aumento do preço. Apresentaremos a seguir uma solução aproximada para esse problema que foi proposta por Naddor (1966). A ideia central dessa abordagem é considerar que a mudança de preço fará com que o lote econômico fique em outro patamar. Portanto, o que queremos saber é como fazer a transição de EOQ antigo para o novo, ou seja, como calcular o tamanho do lote de transição. Ainda, para simplificar, vamos considerar inicialmente que a decisão de encomendar e o recebimento dessa nova encomenda ocorrem no exato instante em que o estoque se esgota e que o novo preço unitário seja conhecido.

Seja v_1 o preço unitário do item vigente, que vem sendo encomendado com tamanho do lote EOQ_1. Sabe-se que v_1 será aumentado para v_2. Após a fixação do novo preço sabemos que o tamanho do lote ótimo será dado por EOQ_2. Como $v_1 < v_2$, verifica-se facilmente que $EOQ_2 < EOQ_1$, ou seja, com o aumento de preço o tamanho do lote ótimo é menor em relação ao tamanho do lote sem aumento. O custo relevante total com v_2 é dado por

$$CRT(EOQ_2) = \sqrt{2ADv_2r} + Dv_2.$$

Observe mais uma vez que nesse modelo de variação de preços é importante incluir a parcela Dv na expressão do custo relevante total.

A fim de alcançar alguma vantagem com o conhecimento de que o preço aumentará, suponha que seja encomendada uma quantidade Q do item com o preço unitário v_1, a qual irá suprir a demanda pelo item por um período futuro T. Queremos saber o custo relevante associado a Q referente ao período T, especificamente. Para isso, calculamos o custo relevante total (anual) $CRT(Q)$ e o multiplicamos por $T = Q/D$:

$$\begin{aligned} CR(Q) &= T(CRT(Q)) = \frac{Q}{D}\left(\frac{AD}{Q} + \frac{Q}{2}v_1r + Dv_1\right) \\ &= A + Qv_1 + \frac{Q^2v_1r}{2D}. \end{aligned}$$

Portanto, o ganho em encomendar Q no período T pode ser modelado por

$$\begin{aligned} G(Q) &= T(CRT(EOQ_2) - CR(Q)) \\ &= \frac{Q}{D}(\sqrt{2ADv_2r} + Dv_2) - T(CRT(Q)) \\ &= \frac{Q}{D}(\sqrt{2ADv_2r} + Dv_2) - \left(A + Qv_1 + \frac{Q^2v_1r}{2D}\right). \end{aligned}$$

Proposição 2. *G é uma função estritamente côncava em $Q > 0$.*
De fato, do cálculo da primeira derivada

$$\frac{dG}{dQ}(Q) = \frac{1}{D}(\sqrt{2ADv_2r} + Dv_2) - v_1 - \frac{Qv_1r}{D}$$

verifica-se que existe um único ponto crítico

$$\frac{dG}{dQ}(Q^*) = 0 \Leftrightarrow Q^* = \frac{CRT(EOQ_2) - Dv_1}{v_1r}.$$

E do cálculo da segunda derivada verifica-se que seu valor é negativo

$$\frac{d^2G}{dQ^2}(Q) = -\frac{v_1 r}{D} < 0.$$

Assim, o tamanho do lote de máximo ganho com aumento de preço iminente é

$$Q^* = \frac{CRT(EOQ_2) - Dv_1}{v_1 r}$$

ou, equivalentemente,

$$Q^* = \frac{v_2}{v_1} EOQ_2 + \frac{v_2 - v_1}{v_1 r} D.$$

Observe que maximizar o ganho no período T pode ser entendido como reduzir a perda em um período futuro quando v_2 estiver em vigor. Na Figura 2.4, observamos a transição dos ciclos de estoques a partir do preço corrente até a aplicação do aumento. Lembre-se que, com $v_1 < v_2$, tem-se $EOQ_1 > EOQ_2$ e consequentemente $T_1 > T_2$. Vamos deixar para o leitor verificar que $Q^* > EOQ_1$.

Na apresentação acima supusemos que a encomenda é feita e entregue imediatamente antes do aumento e, que nesse exato instante o estoque se esgota. Claro que essas suposições não são realistas. A suposição de que a encomenda chega instantaneamente não representa uma dificuldade, desde que o tempo de reposição (*lead time*) seja conhecido e a data do aumento seja com antecedência maior do que esse tempo de reposição. Se assim for, basta antecipar o pedido de forma que a encomenda chegue imediatamente antes do aumento. Caso contrário, o problema se torna muito mais complicado e depende de muitas considerações e, por isso, não será discutido aqui. A suposição de que o aumento de preço coincide com o esgotamento do estoque foi examinada por vários autores, entre eles Tersine e Schwarzkopf (1991), mas, de novo, é uma discussão longa demais para este curso. Uma forma aproximada examinada por Lev e Soyster (1979) é deduzir de Q^* o valor do estoque existente.

Exemplo numérico 3

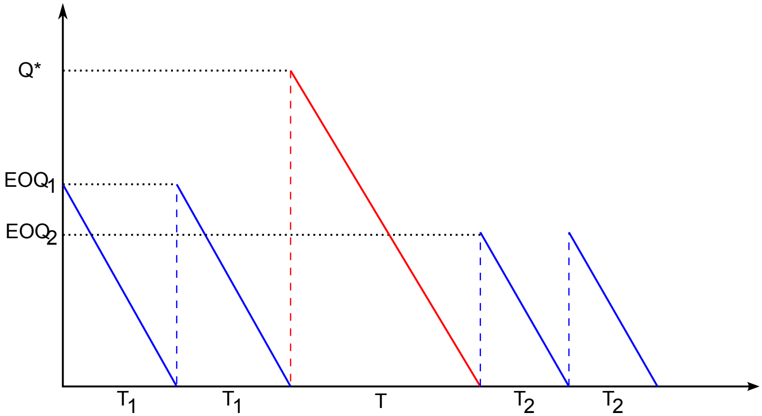


Figura 2.4: Transição entre os ciclos de estoques com proveito do aumento de preço

Calcule o tamanho do lote a ser encomendado, sabendo que já existe previsão de aumento de preço do item desejado. Os valores dos parâmetros em suas unidades usuais são: $r = 0,2$, $v_1 = 15$, $v_2 = 20$, $A = 3$ e $D = 100$.

Solução

Primeiramente calculamos EOQ_2 e depois o tamanho do lote que maximiza o ganho, assim:

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2(3)(100)}{20(0,2)}} = 12,2 \Rightarrow Q^* = \frac{20}{15}12,2 + \frac{20-15}{15(0,2)}100 = 182,9.$$

O tempo de ciclo correspondente ao tamanho do lote ótimo será $T^* = Q^*/D = 182,9/100 = 1,83$ ano. Veja que a decisão de máximo ganho fará com que a quantidade encomendada permaneça em estoque por mais de um ano, quando o tempo de ciclo tem sido menos de 2 meses; a saber

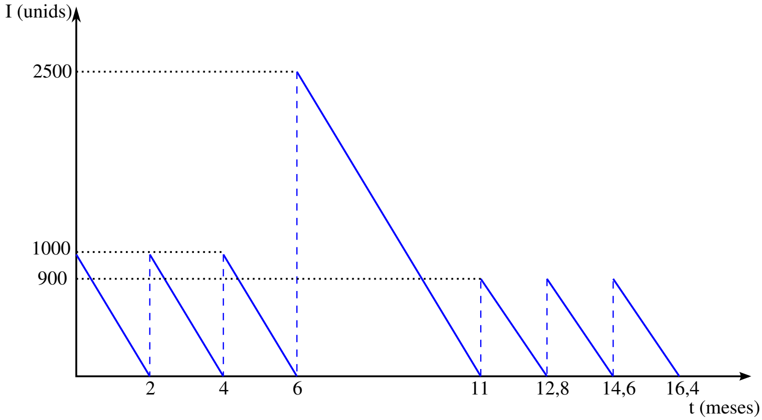
$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2(3)(100)}{15(0,2)}} = 14,1 \Rightarrow T_1 = \frac{EOQ_1}{D} = 0,141 \text{ ano}.$$

Com isso, o tomador de decisão deve se certificar ainda que o item não irá perder a sua funcionalidade, quanto a aspectos constitutivos e temporais, nesse período tão longo em que ficará estocado.

Exercício proposto 3

Um novo gerente de produção se deparou com o nível de estoque dos últimos meses de um item, tal como o da Figura 2.5 com o resultado dos cálculos de seu antecessor.

Figura 2.5: Nível dos estoques nos últimos meses



Sabe-se que $r = 0,01\$/\$/mes$. No momento, o gerente precisa saber o percentual de aumento que foi praticado pelo fornecedor a fim de fazer um planejamento de recursos. Qual é esse percentual?

Capítulo 3

Problema do jornaleiro

Quanta comida comprar para uma festa? Quantos casacos uma loja deve encomendar no outono para vender no inverno? Quantos jornais um jornaleiro deve comprar para vender no dia seguinte? Todos esses problemas são análogos com respeito à estrutura de seus modelos quantitativos, estrutura essa, conhecida como "problema do jornaleiro"(*newsboy or newsvendor problem*), que tratam da determinação da quantidade a ser encomendada de um item para um período particular com demanda incerta. Esse tipo de problema é, também, muito frequente em análise quantitativa de contratos e gestão de rendimentos em companhias de transporte aéreo e hotéis, por exemplo.

O problema do jornaleiro é simples, podendo ser enunciado como segue: "um jornaleiro quer determinar quanto deve comprar de um determinado jornal para vender no período em que há interesse pela compra do jornal, mas não sabe exatamente qual será a demanda pelo jornal. Se comprar menos do que a demanda, sua margem de lucro fica prejudicada. Se comprar a mais, no dia seguinte, terá que devolver a sobra a um preço unitário inferior ao que ele pagou, o que também prejudica sua margem de lucro". Aqui, estamos supondo que ninguém vai querer comprar jornal que não seja do dia, e consequentemente o estoque remanescente perde parte de seu valor.

Talvez esse problema seja satisfatoriamente resolvido de forma intuitiva pelo jornaleiro, que raramente sabe trabalhar com probabilidades. Supondo que o custo de uma falta seja maior do que o custo unitário do jornal, que por sua vez é maior que o custo de uma sobra, uma ideia é inicialmente superestimar a demanda, e ajustá-la até chegar a um patamar satisfatório.

Outra alternativa é resolvermos o problema através de um modelo matemático em que a demanda incerta é expressa por uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida. Essa abordagem usando estatística apresenta vantagens sobre o método empírico utilizado pelos jornaleiros, quando o problema envolve custos elevados e é resolvido repetitivamente com dados diferentes, como nas companhias aéreas e em hotéis. Com esse objetivo, vamos estudar o problema, considerando primeiramente a demanda como uma variável aleatória discreta e depois como contínua.

3.1 Modelo para o caso discreto

Vamos supor que estamos tratando da reposição de um item com demanda incerta para um período em particular. Queremos determinar a quantidade a ser encomendada do item de mínimo custo total, considerando que a demanda é representada por uma variável aleatória discreta.

Notação

Para construir o modelo de custo, vamos considerar a seguinte notação:

c_f	custo incorrido por cada unidade do item que vier a faltar (\$)
c_s	custo incorrido por cada unidade do item que vier a sobrar (\$)
Q	quantidade do item a ser encomendada, suposta não negativa, para um período particular (unidades)
X	variável aleatória não negativa que representa a demanda pelo item no período particular (unidades)
$p(x)$	probabilidade da demanda assumir o valor x, e, como não faz sentido demanda negativa, supomos $p(x) = 0$ para todo $x < 0$
$F(x)$	função de distribuição de probabilidade acumulada da demanda.

Vale lembrar que no caso de X ser uma variável aleatória discreta, segue que:

1. o seu espaço amostral Ω pode ser finito ou infinito.

2. A função de distribuição de probabilidade acumulada de X é definida para $x_i \in \Omega$ por

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

3. O seu valor esperado é dado por $E[X] = \sum x_i p(x_i)$, onde $x_i \in \Omega$.

Podemos também usar as notações $Pr[X = x]$ para $p(x)$ e $Pr[X \leq x]$ para $F(x)$.

Para o modelo de custo total, vamos considerar que os parâmetros c_f e c_s sejam fixos e conhecidos, e que a função de distribuição acumulada de X seja também conhecida.

Antes de apresentar o modelo probabilístico do custo total, vamos primeiramente introduzir o modelo determinístico do custo total, que é dado por

$$C(Q) = \begin{cases} c_s(Q - x), & x \leq Q \\ c_f(x - Q), & x \geq Q \end{cases} . \tag{3.1}$$

Agora, de (3.1), desenvolvemos o modelo do custo total esperado, dado por

$$\begin{aligned} E[C(Q)] &= \sum_{x \leq Q} c_s(Q - x)p(x) + \sum_{x \geq Q} c_f(x - Q)p(x) \\ &= c_s \sum_{x \leq Q} (Q - x)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q} (x - Q)p(x). \quad (3.2) \end{aligned}$$

Em geral, é difícil provar que $E[C(Q)]$ tem um mínimo, uma vez que os limites dos somatórios dependem de Q. Entretanto, é intuitivo que, na prática, o custo total esperado seja convexo e unimodal.

Supondo por hipótese que existe um ponto de mínimo para o custo total esperado, sabemos que a quantidade ótima a ser encomendada, $Q^* > 0$, deve satisfazer a condição de otimalidade, i.e.,

$$E[C(Q^*)] \leq E[C(Q)] \ \ \forall Q > 0.$$

Vamos, portanto, fazer a análise marginal do custo total esperado, cuja primeira diferença ascendente é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta E[C(Q)] &= E[C(Q+1)] - E[C(Q)] \\
&= c_s \sum_{x \leq Q+1} (Q+1-x)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q+1} (x-Q-1)p(x) \\
&\quad -c_s \sum_{x \leq Q} (Q-x)p(x) - c_f \sum_{x \geq Q} (x-Q)p(x) \\
&= c_s \sum_{x \leq Q} (Q+1-x)p(x) - c_s \sum_{x \leq Q} (Q-x)p(x) \\
&\quad -c_f \sum_{x \geq Q+1} (x-Q)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q+1} (x-Q-1)p(x) \\
&= c_s \sum_{x \leq Q} p(x) - c_f \sum_{x \geq Q+1} p(x) \\
&= c_s F(Q) - c_f(1-F(Q)).
\end{aligned}$$

Da condição de otimalidade de $E[C(Q)]$ em Q^*, segue que Q^* é o menor valor de Q tal que $E[\Delta C(Q^*)] > 0$, ou seja,

$$c_s F(Q^*) - c_f(1-F(Q^*)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(Q^*) > \frac{c_f}{c_s + c_f}. \tag{3.3}$$

Portanto, tem-se que encontrar o menor valor de $F(Q^*)$ tal que a condição (3.3) seja satisfeita.

Exemplo numérico 4
(Aplicação em evento temporário)

Um organizador de evento científico tem que decidir sobre quantos CDs com os trabalhos do evento deve encomendar. Ele não sabe exatamente quantas pessoas irão se inscrever no evento, porém sabe que cada CD custa R\$1,00. Se encomendar menos do que o número de inscritos, terá que fazer novos CDs e enviá-los depois por correio aos participantes. Isso custará a mais R\$1,25 em adição ao preço normal por unidade que faltar. Se ele encomendar em excesso, os CDs que sobrarem serão descartados sem receber qualquer valor. De sua experiência de vários anos nesse trabalho, ele consegue boas estimativas para as possíveis demandas e suas probabilidades de ocorrência, organizadas na Tabela 3.1. Quantas unidades do CD o organizador deve encomendar com vista a obter o custo total esperado mínimo? Qual é o custo total esperado ótimo?

Tabela 3.1:

dem	prob	prob acum
100	0,15	0,15
150	0,20	0,35
200	0,30	0,65
250	0,20	0,85
300	0,15	1,00

Solução

Neste exemplo, a dificuldade está em determinar os custos de faltar e de sobrar. Suponhamos que o organizador tenha encomendado Q unidades do CD e que terá que entregar x unidades do CD. Se sobrar CDs, ele perde R$1,00 por cada unidade que pagou além de x. Caso contrário, se faltar, o organizador terá que pagar R$2,25 (R$1,00+R$1,25) por cada unidade de CD faltante. Logo, $c_f = 2,25$ e $c_s = 1,00$, e assim sabe-se que o valor ótimo Q^* é o menor valor de Q que satisfaz $F(Q) > c_f/(c_s + c_f) = 2,25/(1,00 + 2,25) = 0,69$. Da Tabela 3.1 verificamos que, para a desigualdade $F(Q) > 0,69$ ser satisfeita, segue que $F(Q^*) = 0,85$, ou seja, $Q^* = 250$ CDs. Isso significa que, se o organizador encomendar 250 CDs para esse evento, o seu custo total esperado será mínimo. Vamos ao cálculo desse custo:

$$\begin{aligned}
E[C(Q^*)] &= c_s \sum_{x \leq Q^*} (Q^* - x)p(x) + c_f \sum_{x \geq Q^*} (x - Q^*)p(x) \\
&= 1,00 \sum_{x \leq 250} (250 - x)p(x) + 2,25 \sum_{x \geq 250} (x - 250)p(x) \\
&= 1,00(250 - 100)p(100) + 1,00(250 - 150)p(150) \\
& \quad 1,00(250 - 200)p(200) + 2,25 \sum_{x \geq 250} (300 - 250)p(300) \\
& \quad 150(0,15) + 100(0,20) + 50(0,30) + 2,25(50)(0,15) \\
&= 22,5 + 20 + 15 + 16,875 = 74,375.
\end{aligned}$$

Exemplo numérico 5
(Aplicação em gestão de rendimentos (*revenue management*))
Um determinado voo de uma pequena companhia aérea tem 10 assentos disponíveis. A tarifa plena de R\$500,00 é cobrada para cada assento. O custo marginal de ocupar um assento é R\$100,00, ou seja, a cada assento ocupado, a empresa gasta adicionalmente R\$100,00. A empresa sabe que a maioria dos seus clientes são executivos, que são insensíveis a descontos na tarifa. Uma alternativa para vender todos os assentos é bloquear assentos para uma agência de turismo. A agência de turismo garante, com uma semana de antecedência, a compra de qualquer quantidade de assentos no voo com um desconto de R\$150,00 sobre a tarifa plena. Falta uma semana para o voo e a empresa não sabe ao certo quantos bilhetes poderá vender à tarifa plena, mas de dados históricos do mesmo voo em dias similares pode estimar a distribuição da demanda conforme a Tabela 3.2.

Solução
Vamos pensar em termos de reserva de assentos para venda à tarifa plena pela companhia aérea. Assim, se reservar mais assentos do que a demanda de executivos, vai sobrar assentos vazios, ou seja, a companhia vai deixar de ganhar a tarifa com desconto da agência, deduzido o custo marginal de ocupação

$$c_s = 350 - 100 = 250.$$

Tabela 3.2:

demanda	prob	prob acum
0	0,06	0,06
1	0,09	0,15
2	0,10	0,25
3	0,15	0,40
4	0,20	0,60
5	0,15	0,75
6	0,10	0,85
7	0,06	0,91
8	0,05	0,96
9	0,03	0,99
10	0,01	1,00

Lembre-se que a agência de turismo se dispõe a comprar todos os assentos oferecidos. Se a demanda pela tarifa cheia for maior que a reserva de assentos, vai faltar assentos para os executivos, ou seja, a companhia vai deixar de ganhar a tarifa cheia por assento deduzido o custo marginal

$$c_f = 500 - 100 = 400.$$

Repare que o assento não ocupado não tem custo relevante, ou seja, seu custo é zero. Assim, temos que encontrar o menor valor de Q que satisfaça a condição $F(Q) > 400/650 = 0,61$. Logo, chegamos à conclusão que cinco assentos devem ser reservados para executivos e os cinco assentos restantes devem ser vendidos para a agência de turismo, para que a companhia tenha custo total esperado mínimo.

Exercício proposto 4

O gerente de suprimentos da Fábrica de Matrizes Leibnitz Ltda. faz periodicamente encomendas de um item necessário à fabricação de diversas matrizes para estampar peças automotivas. Uma vez feitas as encomendas, demora um certo tempo (tempo de reposição, ou *lead time*) até que elas estejam disponíveis para consumo na produção. O fornecedor se esforça para entregar dentro de um prazo combinado, mas devido a dificuldades existentes no transporte ou na fábrica,

Tabela 3.3:

x unids.	0-14	15-16	17-18	19-20	21-22	23-24	25-26
$Pr[X = x]$	0,0013	0,0064	0,0248	0,0689	0,1386	0,2039	0,2202
$Pr[X \leq x]$	0,0013	0,0077	0,0324	0,1013	0,2399	0,4439	0,6641

x unids.	27-28	29-30	31-32	33-34	35-36	37-50
$Pr[X = x]$	0,1748	0,1017	0,0430	0,0131	0,0028	0,0005
$Pr[X \leq x]$	0,8389	0,9405	0,9836	0,9967	0,9995	1,0000

nem sempre consegue. Quando há um atraso o gerente compra de outro fornecedor que entrega imediatamente quantas unidades quiser por um preço unitário fixo mais caro. O gerente está pensando em usar um estoque de segurança (estoque para ser usado no caso de atraso na entrega), mas se fizer isso terá que justificar a medida ao diretor financeiro Sr. Newton. O Sr. Newton enfrenta problemas em conseguir dinheiro nos bancos para financiar o capital de giro[1], pois a empresa já está bem endividada devido a reformas recentes e aos juros que estão "na estratosfera".

O gerente de suprimentos fez um levantamento dos quantitativos, tendo obtido os seguintes valores e informações adicionais.

- A demanda pelo item durante o *lead time* tem a distribuição tal como a Tabela 3.3.

- Custo de manter estoque

  Taxa de manutenção de investimento em estoque: 15% a.a.

  Valor unitário do item: R$1000,00/unidade.

- Custo de falta estimado

  Quando o fornecedor atrasa, o item é comprado de outro fornecedor a R$1100,00/unidade.

[1] Dinheiro necessário para produzir, visto que entre o momento em que se fazem despesas para fabricar uma determinada quantidade de produto e o momento de se ter o dinheiro de volta, na forma de receita de venda, decorre um tempo relativamente longo (de dias a meses).

- Número de encomendas feitas por ano

  Como o consumo do item é relativamente constante e o lote econômico de compra é utilizado, são feitas em média 50 encomendas por ano e isso não deve mudar se for feito um estoque de segurança.

Ajude o gerente a calcular o estoque de segurança "ótimo" para ele apresentar como justificativa ao diretor financeiro. Podemos supor que, em média, o estoque de segurança ficará sempre no valor que determinarmos. Isso porque, não sendo a demanda perfeitamente constante, ao fim de cada ciclo de estoque (veja Figura 2.1) ao invés de o estoque chegar sempre a zero o ciclo termina com um pouco mais do que zero, ou há um pequeno excesso de demanda que é absorvido pelo estoque de segurança. Como o custo de faltar é muito maior do que o de sobrar, raramente haverá falta e então as sobras e as quantidades utilizadas do estoque de segurança se compensarão.

3.2 Modelo para o caso contínuo

Uma formulação contínua para o problema acima pode ser desejável quando o item considerado tem medida contínua ou quando uma aproximação contínua é conveniente, particularmente, devido à possibilidade de usar distribuições de probabilidade contínuas, mais fáceis de se manipular do que suas correspondentes discretas.

Dessa forma, queremos determinar a quantidade a ser encomendada de um item com demanda incerta para um período em particular, que minimiza o custo total, considerando que a demanda pelo item é representada por uma variável aleatória contínua.

Vale lembrar que quando X é uma variável aleatória contínua, temos que

1. o seu espaço amostral Ω é infinito.

2. A função de distribuição de probabilidade acumulada de X é definida para $x \in \Omega$ por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

onde $f(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade de X, com valores nulos para valores negativos de x.

3. O seu valor esperado é dado por $E[X] = \int_{x\in\Omega} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Vamos considerar aqui a notação e as hipóteses já apresentadas no modelo do caso discreto. Repare que os modelos determinísticos de custo total são idênticos no caso discreto e no caso contínuo. Portanto, analogamente ao caso discreto (3.2), a expressão do custo total esperado é dada por

$$\begin{aligned}
E[C(Q)] &= \int_{-\infty}^{Q} c_s(Q-x)f(x)dx + \int_{Q}^{+\infty} c_f(x-Q)f(x)dx \\
&= c_s \int_{-\infty}^{Q} (Q-x)f(x)dx + c_f \int_{Q}^{+\infty} (x-Q)f(x)dx \\
&= c_s Q \int_{-\infty}^{Q} f(x)dx - c_s \int_{-\infty}^{Q} xf(x)dx + \\
&\quad c_f \int_{Q}^{+\infty} xf(x)dx - c_f Q \int_{Q}^{+\infty} f(x)dx \\
&= c_s Q F(Q) - c_s \int_{-\infty}^{Q} xf(x)dx \\
&\quad + c_f \int_{Q}^{+\infty} xf(x)dx - c_f Q(1-F(Q)).
\end{aligned}$$

Vamos agora destacar os seguintes resultados sobre derivação:

- Para $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, segue que $F'(x) = f(x)$,

- Aplicando a regra da cadeia para derivar $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$, tem-se que $F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$.

Logo, podemos calcular a derivada de $E[C(Q)]$ com relação a Q:

$$\begin{aligned}\frac{dE[C(Q)]}{dQ} &= c_sF(Q) + c_sQf(Q) - c_sQf(Q)\\ &\quad -c_fQf(Q) - c_f(1-F(Q)) + c_fQf(Q)\\ &= c_sF(Q) - c_f(1-F(Q))\\ &= (c_s+c_f)F(Q) - c_f.\end{aligned}$$

Portanto, o valor ótimo Q^* que minimiza o custo total esperado deve satisfazer necessariamente a seguinte condição:

$$\frac{dE[C(Q^*)]}{dQ} = 0 \Leftrightarrow F(Q^*) = \frac{c_f}{c_s+c_f}.$$

É fácil verificar que Q^* é um ponto de mínimo. Para isso, basta verificar que a segunda derivada de $E[C(Q)]$ é positiva para todo $Q > 0$.

Exemplo numérico 6
(Aplicação em análise quantitativa de contratos)
Uma empresa quer fazer um contrato de serviço de manutenção do tipo *take-or-pay*, ou seja, ela paga antecipadamente por Q horas de serviço a um preço unitário v. Caso ela utilize menos que Q horas contratadas, ela não terá nenhum reembolso, mas se ela utilizar mais que Q horas, passará a pagar um preço unitário $\bar{v} > v$. Sabendo-se que a demanda pelo serviço tem distribuição normal com média μ e desvio-padrão σ, qual o número de horas contratadas que minimiza o custo de manutenção?

Solução
Suponha que a empresa contratou Q horas ao custo unitário v. Para cada hora que contratou além da demanda (ou seja, hora contratada que irá sobrar), a empresa terá perdido $c_s = v$ por hora contratada. Para cada hora que tiver contratado a menos da demanda (ou seja, hora contratada que irá faltar) vai ter um custo por hora contratada de $c_f = \bar{v}$. Temos então a seguinte condição para a função distribuição normal padronizada:

$$F(z^*) = \Phi\left(\frac{Q^*-\mu}{\sigma}\right) = c_f/(c_s+c_f) = \bar{v}/(v+\bar{v}),$$

em que Φ é a função distribuição normal na variável Q. Portanto, basta procurar na tabela da distribuição normal padronizada o valor de $z^* = (Q^* - \mu)/\sigma$ que corresponde a $F(z^*) = \bar{v}/(v + \bar{v})$ e depois obter o valor de Q^* a partir de z^*.

Exercício proposto 5
(Aplicação em gestão de rendimentos)
Um hoteleiro está vendendo um pacote de fim de ano. Como quase sempre ocorrem desistências de última hora, ele deseja fazer uma "sobrevenda" ou *overbooking* (prática de ofertar acima da capacidade), ou seja, vender mais hospedagens do que pode acomodar. O número de desistências pode ser bem representado por uma variável normal com média 5 e desvio padrão igual a 2. O preço de um pacote é R$1.200,00, mas cada pacote lhe custa em banquete, bebidas e outros custos, R$400,00. Se por acaso vier a faltar quartos (devido a um eventual baixo número de desistências), ele terá que acomodar o hóspede num outro hotel de melhor qualidade, o que é sempre possível, mas lhe custará R$3.200,00. Quantos pacotes ele deverá vender além do número máximo que pode acomodar no seu próprio hotel?

Capítulo 4

Problema de planejamento da produção

Pense na produção de algum bem ou serviço. Algumas coisas tornam a produção em escala industrial mais complicada do que quando tratamos da construção de nossa casa ou preparamos uma festa de aniversário da família, ainda que isso não seja trivial. Vários aspectos irão determinar as necessidades de planejamento. Alguns desses aspectos mais importantes são o produto (ou os produtos), o tipo de processo de produção e o mercado alvo. Por exemplo, o planejamento da produção de um prédio comercial num terreno no centro da cidade tem muito pouco em comum com o planejamento da produção de telefones celulares inteligentes, mas pode ter aspectos parecidos com a construção de uma plataforma para exploração de petróleo, ou mesmo com o planejamento de um grande show de música popular ao ar livre. Tanto a construção do edifício quanto a preparação do show só começam quando já existe uma demanda. Em contraste, a produção de telefones começa antes que a demanda ocorra. Isso muda quase tudo em termos de planejamento; no primeiro caso, dizemos que a produção é "sob pedido" e no segundo, "para estoque". Aqui veremos apenas o caso de produção para estoque que, é claro, pressupõe algum conhecimento sobre o que pode ser vendido, ou seja, alguma previsão de demanda que aqui será considerada conhecida e sem incerteza.

Vamos abordar o problema de planejamento da produção para estoque, ou seja, vamos tratar de decisões de encomendar (para ser produzido ou comprado) e de estocar itens que, numa fábrica, devem ser tomadas em conjunto. Aqui estamos considerando conhecidas a capacidade fixa de produção (i.e., supõem-se que competências e recursos para produção já foram providenciados anteriormente, estando prontos para uso) e a demanda prevista para o horizonte de planejamento (i.e., supõe-se que a previsão da demanda já tenha sido realizada). Na realidade, quase sempre há significativa incerteza nessas previsões, mas raramente elas são tratadas de forma explícita no modelo (o planejamento da produção de energia elétrica em sistemas cuja capacidade de geração depende da natureza são exceções). Na indústria (inclusive na de petróleo) as incertezas são tratadas de forma *ad hoc* por meio de análises do tipo “que tal se”.

As técnicas ou métodos utilizados para encontrar um plano de produção podem ser intuitivos ou científicos. Além da experiência dos planejadores, as técnicas intuitivas usam, em geral, planilhas eletrônicas e gráficos para construir um plano de produção viável através de tentativas; não necessariamente o plano encontrado é o melhor ou perfeitamente coerente com as suposições adotadas na formulação do problema. As técnicas intuitivas são largamente utilizadas. Já as técnicas científicas utilizam resultados de programação matemática ou otimização para encontrar, quando possível, um plano de produção ótimo sob algum ponto de vista. Curiosamente, na prática, a grande vantagem de se utilizar a abordagem científica é a facilidade que se tem para explorar o problema por meio de análises “que tal se” e não propriamente o fato de as soluções que ela produz serem ótimas.

Aqui, vamos estudar planejamento de sistemas produtivos usando modelos para encontrar os correspondentes planos ótimos. Em geral, a construção de um modelo matemático deve anteceder à aplicação de um algoritmo de resolução. (Vale lembrar que algoritmos heurísticos podem obter soluções sem uso de modelos.) É claro que um modelo matemático de um problema real deve ser suficientemente simples e refinado para que uma solução seja obtida por um algoritmo de forma eficaz e tenha aplicação prática.

Com o objetivo de mostrar o uso de programação matemática no tratamento de problemas reais de decisão de produção, vamos abordar alguns modelos de programação linear para essa classe de problemas. Em ordem crescente de complexidade, iniciaremos com o problema de determinação das quantidades a serem produzidas de itens para um único período de planejamento, e progressivamente incluiremos detalhes como determinação das quantidades estocadas, multiplicidade de períodos de planejamento, tempos e custos de preparação, e finalmente limitações de capacidade.

4.1 Modelo multi-item em único período

Vamos começar pela modelagem de um exemplo simples e específico, e depois explorar o modelo geral para o problema de planejamento da produção multi-item para um único período. Estamos interessados em determinar as quantidades a serem encomendadas de itens. Problemas de determinar as quantidades a produzir de cada item são normalmente chamados de problemas de "determinação do mix de produção".

Exemplo numérico 7

Uma marcenaria produz mesas e cadeiras. Cada mesa é vendida a 1000 reais e cada cadeira a 400 reais. Os recursos principais são mão-de-obra e madeira. Para produzir uma mesa são necessárias 4h de mão-de-obra e 6 unidades de madeira. Já para produzir uma cadeira necessitam-se de 7h de mão-de-obra e 3 unidades de madeira. Ao todo estão disponíveis 42h de mão-de-obra e 50 unidades de madeira. Tudo que é produzido pela marcenaria é vendido. A marcenaria deseja encontrar um plano de produção que maximize a sua receita.

Solução

Em primeiro lugar, vamos treinar o processo de modelagem de problemas. Para isso, temos que categorizar conjuntos e índices de entidades, dados ou parâmetros, variáveis de decisão, restrições e objetivo, nesta ordem. Para o problema da marcenaria, temos:

Conjuntos e índices

$I,\ i \in I$	conjunto de itens (mesa e cadeira) a serem produzidos pela marcenaria, $\lvert I \rvert = n = 2$;
$J,\ j \in J$	conjunto de recursos de produção (mão-de-obra e madeira) da marcenaria, $\lvert J \rvert = m = 2$.

Parâmetros

$c_1 = 1000$	preço unitário da mesa;
$c_2 = 400$	preço unitário da cadeira;
$a_{11} = 4$	horas de mão-de-obra necessárias para produzir 1 mesa;
$a_{12} = 7$	horas de mão-de-obra necessárias para produzir 1 cadeira;
$a_{21} = 6$	unidades de madeira necessárias para produzir 1 mesa;
$a_{22} = 3$	unidades de madeira necessárias para produzir 1 cadeira;
$b_1 = 42$	disponibilidade de mão-de-obra em horas;
$b_2 = 50$	disponibilidade de madeira em unidades.

Variáveis de decisão
x_1 quantidade a ser produzida de mesas,
x_2 quantidade a ser produzida de cadeiras.

Restrições
As disponibilidades dos recursos devem ser consideradas como limitantes no uso desses recursos.
As quantidades de mesas e cadeiras a serem produzidas não podem ser negativas: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Objetivo
Tem-se que maximizar a receita da marcenaria: $z = 1000x_1 + 400x_2$.

Modelo matemático resultante:

$$
\begin{array}{rc}
\text{maximizar} & z = 1000x_1 + 400x_2 \\
\text{sujeito a} & 4x_1 + 7x_2 \leq 42 \\
 & 6x_1 + 3x_2 \leq 50 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Como esse problema tem apenas 2 variáveis, podemos usar o método gráfico para mostrar que o plano ótimo de produção determina a produção de 8,3 mesas e nenhuma cadeira!

O método simplex é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas de programação linear, como o problema que acabamos de ver. Apesar de ser fácil para quem está familiarizado com sistemas de equações lineares, nestas notas não há espaço para apresentar o método simplex, (para saber sobre ele, veja, por exemplo, Arenales et al. 2006).

Por ser um método muito limitado (só é prático para problemas com duas variáveis), mas simples e intuitivo, a seguir, vamos apresentar o passo a passo da aplicação do método gráfico para encontrar uma solução ótima do problema da marcenaria. Primeiramente, vamos determinar a região viável do problema. Denotando por R a região viável e sabendo que a mesma é definida pelas restrições do problema, temos que

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 + 7x_2 \leq 42, 6x_1 + 3x_2 \leq 50, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Cada restrição de desigualdade define um semi-espaço no $\mathbb{R}^2$. O conjunto viável é o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente todas as desigualdades, ou seja, que pertencem à interseção de todos os semi-espaços. A Figura 4.1 ilustra o conjunto viável do exemplo. Um ponto ótimo é um ponto da região viável R que dá o maior valor à função objetivo, que, por sua vez, é um plano no espaço $\mathbb{R}^3$.

Agora, para encontrar uma solução ótima devemos determinar a direção de máxima subida da função objetivo $z(x_1, x_2) = 1000x_1 + 400x_2$, isto é, queremos determinar o seu gradiente. Por definição, temos que o gradiente é dado por

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right).$$

Portanto, a direção de máxima subida de z é dada por $\nabla z(x_1, x_2) = (1000, 400)$. Note que o gradiente é constante para qualquer ponto do domínio de uma função afim linear, em particular z. Como fica difícil posicionar o vetor gradiente na escala da Figura 4.1, introduzimos um vetor proporcional a esta direção, que é dado por $(5, 2)$, conforme a Figura 4.2.

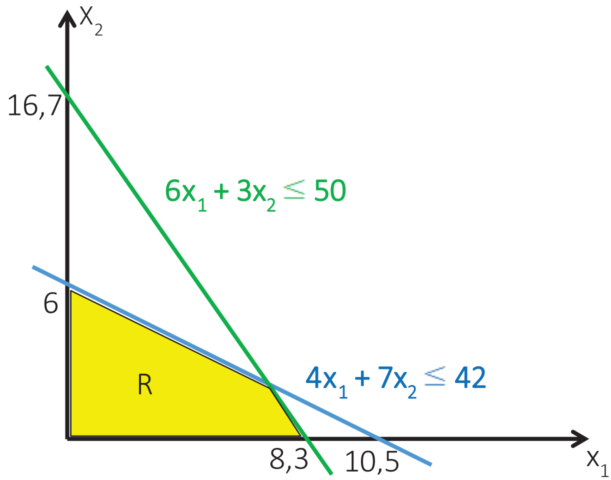


Figura 4.1: Determinação da região viável R

Do conhecimento do gradiente, podemos traçar as curvas de nível da função objetivo z. Uma curva de nível de uma função no $\mathbb{R}^n$ é uma curva que conecta os pontos do domínio que apresentam valores idênticos da função. No caso de funções lineares no $\mathbb{R}^2$, as curvas de nível são retas paralelas, sempre ortogonais ao gradiente. (Esse resultado sai diretamente da definição de derivada direcional.) Na Figura 4.2, introduzimos as curvas de nível de z, que são dadas pelas retas tracejadas. Desse modo, ao seguir a direção de máxima subida de z ou avançar sobre as curvas de nível com valores maiores para z, alcançamos o valor máximo de z num ponto da fronteira de região viável R, o ponto de máximo. Entre todas as soluções viáveis do problema da marcenaria, encontramos o ponto de máximo ou a solução ótima do problema em $(8,3,\ 0)$. (Você pode verificar que a curva de nível sobre o ponto $(8,3,\ 0)$ é aquela que tem o maior valor de z quando comparada a outras curvas de nível que passam sobre pontos na região viável R.) Assim, fechamos essa digressão sobre método de solução gráfico para voltar ao exemplo.

Posteriormente, o analista de produção descobriu que o gerente da marcenaria falhou ao descrever o problema, uma vez que o modelo

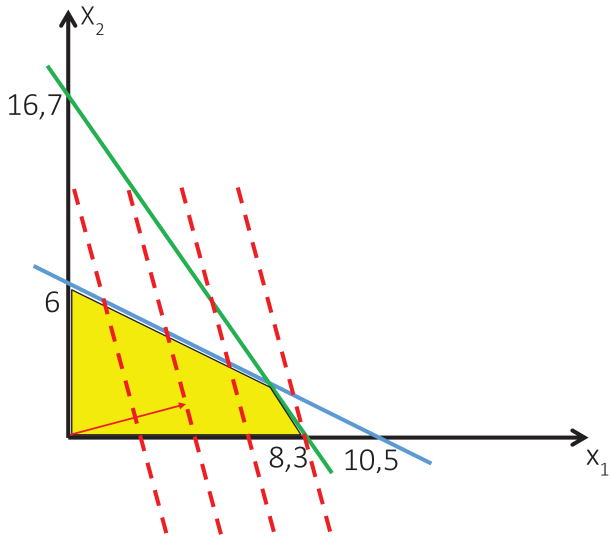


Figura 4.2: Determinação da solução ótima

matemático não foi suficientemente refinado para relacionar a quantidade de cadeiras a serem produzidas à quantidade de mesas a serem produzidas. Após a exposição do resultado ao gerente, o analista de produção soube que a marcenaria costumeiramente vende uma mesa com quatro cadeiras.

Com a introdução dessa nova condição ao problema da marcenaria, apresentamos a nova formulação matemática do problema:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 1000x_1 + 400x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 4x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ & 4x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, a nova região viável do problema é ilustrada na Figura 4.3, representada agora pelo segmento de reta R.

Considerando a nova região viável, a solução ótima é buscada

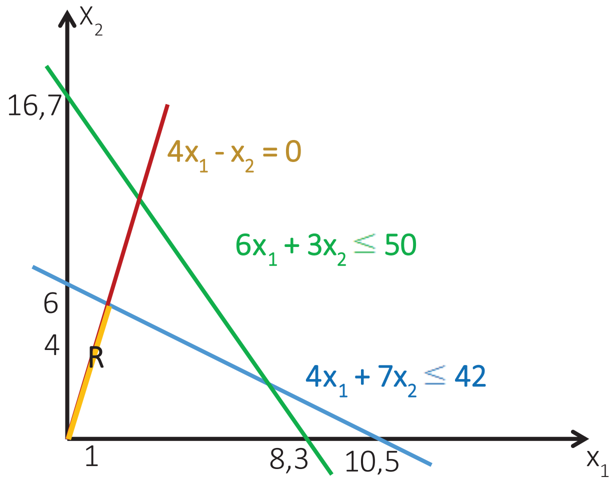


Figura 4.3: Determinação da nova região viável

de modo análogo ao procedimento anterior. Lembre-se que o gradiente e as curvas de nível de z não foram alterados. Seguindo, então, a direção de máxima subida do gradiente, encontramos o ponto de máximo (também na fronteira da região viável) dado por (1,3, 5,2). Note que não há nada de errado com essa solução, pois as variáveis do problema foram definidas como sendo reais. Veja a Figura 4.4.

Observe que, no caso de aplicar o método gráfico para resolver um problema de minimização, uma solução ótima é alcançada, caso exista, quando avançamos em direção oposta ao gradiente, ou seja, na direção de máximo declive da função objetivo. É possível que um problema de otimização não tenha solução; pense na situação em que avançamos na direção desejada (aquela em que o valor da função objetivo é melhorado) e não encontramos a fronteira da região viável. Neste caso, temos um problema ilimitado.

Outra observação a ser feita é que a produção de um número fracionário de mesas e de cadeiras pode não fazer sentido prático; fará sentido se estivermos tratando de um problema que se repete continuamente, caso em que 1,3 mesas por semana faria sentido juntamente com 5,2 cadeiras. Problemas com exigência de valores inteiros para

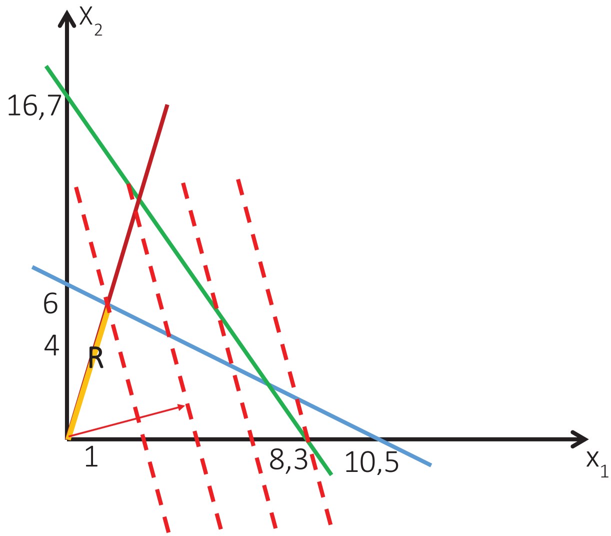


Figura 4.4: Determinação da nova solução ótima

variáveis são frequentes e, normalmente, podem ser resolvidos, conforme veremos adiante.

De modo geral, problemas de planejamento da produção multi-item para um único período, como o que vimos, podem ser formulados como problemas de programação ou otimização linear no formato padrão, tal como

$$
\begin{array}{rc}
\text{minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,
\end{array}
$$

ou na forma matricial como

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

em que são dados A, uma matriz real de dimensão m por n, b, um vetor real m-dimensional, e c, um vetor real n-dimensional. Por convenção, x é um vetor n-dimensional de variáveis reais, caso contrário é necessário definir explicitamente o escopo das variáveis. Denota-se o produto interno de c por x por $c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Chamamos a atenção para o significado dos dados: cada coeficiente da matriz A representa a quantidade de um recurso usada para produzir uma unidade de um item, os coeficientes do vetor b representam as quantidades disponíveis dos recursos, e os coeficientes do vetor c representam os custos unitários dos itens.

Vamos estudar problemas de otimização (no formato de minimização ou de maximização) com um único objetivo, o qual é modelado por uma função objetivo. As restrições de um problema de otimização definem um conjunto de soluções viáveis ou factíveis, chamado de região viável. Desse modo, uma solução ótima, além de ser necessariamente uma solução viável, é um das melhores no conjunto viável em termos de valor da função objetivo. Para o problema de planejamento da produção uma solução ótima é um plano ótimo de produção para o horizonte de planejamento considerado.

Problemas de otimização linear com variáveis reais são fáceis de serem resolvidos. A exigência de integralidade das variáveis pode dificultar bastante a resolução do modelo. Observe que, num modelo de otimização linear, a função objetivo e as funções de restrição são funções afins lineares. Uma propriedade da otimização linear é que ela é capaz de revelar importantes aspectos econômicos do problema. Um deles é o chamado "preço interno", "preço endógeno", "preço dual" ou "preço sombra" de um recurso. Conceitualmente, esse preço é a razão incremental entre o aumento do valor ótimo da função objetivo em relação a um aumento infinitesimal na quantidade de um recurso. Em termos de nosso exemplo da marcenaria, o preço interno da hora de mão-de-obra é, grosso modo, "quanto aumenta a receita máxima por hora de mão-de-obra acrescentada à atualmente disponível". Essa interpretação pode ser muito útil para decisões de investimento, mas deve ser feita com muito cuidado e conhecimento, pois para ser válida o aumento tem um limite máximo que, em alguns casos, pode até ser zero.

4.2 Modelo de um item sem limitação de capacidade e multi-período

Frequentemente há necessidade de se determinar quando e quanto produzir e estocar de um item para atender à demanda durante períodos (p.ex. meses) futuros. Isso pode ser importante para se adquirir os recursos (materiais e mão-de-obra) com a necessária antecedência. Uma consideração fundamental é que pode não ser interessante produzir em cada mês (ou outro período de tempo) o que é nele demandado, pois há um custo de preparar a produção sempre que se decide produzir num período. Entretanto, por outro lado, há um custo de se antecipar a produção porque há, como já vimos, um custo de se manter estoques e, assim, queremos obter um equilíbrio ótimo entre os custos de preparar e o de estocar.

Queremos então determinar as quantidades a serem produzidas e estocadas de um item ao longo de um horizonte de planejamento, com um número finito de períodos, tendo como objetivo a minimização de custos, de modo a satisfazer a demanda prevista dos clientes pelo item, considerando que existe preparação para a produção de novos lotes e que a capacidade de produção instalada é ilimitada, ou seja, a capacidade é suficientemente grande para atender qualquer quantidade que se decida produzir.

Por simplicidade, vamos considerar que os estoques no início e no fim do horizonte de planejamento sejam nulos (essa hipótese pode ser relaxada, o que complicaria apenas a notação). Ainda, lembramos que a demanda pelo item não pode ser negativa ao longo do horizonte de planejamento.

Para modelar esse problema, vamos considerar as seguintes notações e definições:

Conjunto e índice:
$T = \{1, 2, ..., n\},\ t \in T$, o horizonte de planejamento T é composto

por n períodos de tempo. Um período em T é denotado por t.

Dados ou parâmetros do problema:
p_t custo unitário de produção associado ao período t (\$),
q_t custo fixo de preparação para produção associado ao período t (\$),
h_t custo de manter estoque por unidade do item associado ao período t (\$),
d_t demanda prevista pelo item para o período t (unidades),
M_t número inteiro positivo suficientemente grande (que será melhor esclarecido mais adiante).

Variáveis de decisão:
x_t quantidade do item a ser produzida no período t (unidades),
y_t indica se existe produção do item no período t ($y_t = 1$), ou não ($y_t = 0$),
s_t quantidade do item a ser estocada ao final do período t (unids.).

Restrições:
A demanda prevista a cada período deve ser satisfeita.
Estoques no início e no fim do horizonte de planejamento são nulos.
As quantidades produzidas e estocadas devem ser não negativas.

Objetivo: minimizar custos de produzir, preparar para produção e manter estoque.

Modelo matemático

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & \textstyle\sum_{t=1}^{n} p_t x_t + q_t y_t + h_t s_t && (4.1)\\
\text{sujeito a} \quad & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \forall t && (4.2)\\
& s_0 = s_n = 0 && (4.3)\\
& x_t \le M_t y_t \quad \forall t && (4.4)\\
& x_t \ge 0,\ s_t \ge 0 \quad \forall t && (4.5)\\
& y_t \in \{0,1\} \quad \forall t. && (4.6)
\end{aligned}
$$

A função objetivo a ser minimizada é definida em (4.1) como sendo a soma dos custos de produção fixos e variáveis mais os custos de manter estoque. O grupo de restrições (4.2) expressa a satisfação da demanda por período, também conhecido por restrições de balanço de estoques. As restrições em (4.3) afirmam que não existe estoque no início nem no final do horizonte de planejamento. O grupo de restrições (4.4), chamado de imposição de *setup*, associa o valor 1 a variável y_t no período t caso nele haja produção do item, e valor 0 quando não existe produção. Assim, o custo de preparação só será positivo se houver produção em algum período, sendo o total produzido o suficiente para satisfazer a demanda prevista para o horizonte de planejamento. De fato, como a função objetivo será minimizada, haverá tendência para anular o custo de preparação a cada período. As restrições do grupo (4.5) impõem não negatividade para as variáveis reais, enquanto que as restrições do grupo (4.6) definem as variáveis binárias, também conhecidas por variáveis do tipo "zero-um", i.e., que assumem valores zero ou um.

Observe que M_t expressa um limite superior para a quantidade a ser produzida do item x_t no período t. Uma vez que $s_n = 0$, podemos definir $M_t = \sum_t^n d_t$ ou mais precisamente $M_t = \sum_{k=t}^n d_k$. Cabe aqui observar que, na prática, a solução do problema se tornará menos trabalhosa se a constante M_t for a menor possível sem chegar a limitar a produção. Para acelerar a obtenção da solução ótima, muitos dos mais sofisticados métodos de solução de programação inteira são capazes de realizar um pré-processamento do modelo para automaticamente encontrar um valor menor (porém ainda grande) para os M_t's.

Esse modelo matemático se refere a um problema de programação linear inteira mista, ou seja, o problema de otimização apresenta funções objetivo e de restrições afins lineares e, simultaneamente, variáveis reais e inteiras. O problema linear resultante da substituição da exigência de valor inteiro para algumas variáveis (no caso, $y_t \in \{0, 1\}\ \forall t$) pela exigência de pertencer a um intervalo contínuo fechado entre os valores inteiros extremos (no caso, $y_t \in [0, 1]\ \forall t$) é normalmente denominado "problema de relaxação linear". Resultados teóricos de problemas de relaxação linear são importantes para o desenvolvimento de métodos de solução, por exemplo.

Exemplo numérico 8

Considere o problema de dimensionamento de lotes de um item sem limitação da capacidade de produção. Uma instância do problema apresenta um horizonte de planejamento correspondente a 3 períodos mensais. A demanda pelo item em unidades é (90, 110, 100), o custo unitário de produção por período é 5\$, o custo de preparação é (30\$, 20\$, 10\$), o custo unitário de estocar por período é 2\$. Considere ainda que os estoques são nulos no início e no fim do horizonte de planejamento. Monte o modelo matemático dessa instância e avalie o número de variáveis de decisão e de restrições funcionais.

Solução
Dos dados da instância, sabemos que o número total de períodos do horizonte de planejamento é 3. Vamos adotar $M_t = \sum_{k=t}^{3} d_k$. Então o modelo fica:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 30y_1 + 20y_2 + 10y_3 + 2s_1 + 2s_2 + 2s_3 \\
\text{sujeito a} & s_0 + x_1 = 90 + s_1 \\
& s_1 + x_2 = 110 + s_2 \\
& s_2 + x_3 = 100 + s_3 \\
& s_0 = 0 \\
& s_3 = 0 \\
& x_1 \leq 300y_1 \\
& x_2 \leq 210y_2 \\
& x_3 \leq 100y_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& s_1, s_2, s_3 \geq 0 \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}.
\end{array}
$$

Para essa instância, o problema tem 9 variáveis de decisão e 8 restrições funcionais (aqui não são consideradas as restrições que definem as variáveis).

Exercício proposto 6
Considere o problema de dimensionamento de lotes de um item sem limitação da capacidade de produção num horizonte de planejamento multi-período. Monte o modelo matemático, sabendo que o item não pode ser estocado.

Exercício proposto 7
No modelo básico (4.1)-(4.6), visto acima, o que acontece com o resultado do modelo se trocarmos os sinais de igualdade das restrições (4.2) por sinais de desigualdade do tipo $\geq$?

Exercício proposto 8
Prove que o modelo básico (4.1)-(4.6), com estoques e sem limitação de capacidade de produção, é sempre viável, i.e., sempre tem ao menos uma solução.

Desafio 2
Formulação com estoque cumulativo. Mostre que uma formulação matematicamente equivalente pode ser obtida substituindo o grupo de restrições (4.2) por outro grupo, digamos (4.2'), que impõe que a cada período tudo o que havia como estoque inicial (zero, de acordo com a hipótese aqui feita) mais tudo o que foi produzido até o período tem que ser igual a soma cumulativa da demanda até o período mais o estoque existente no final do período.

4.3 Modelo de um item com capacidade limitada e multi-período

Vamos considerar o problema de dimensionamento de lotes semelhante ao problema sem limitação de capacidade de produção da Subseção 4.2, com as mesmas considerações iniciais, exceto que, agora, vamos considerar que:

- a capacidade de produção seja limitada por período,
- quando se faz uma preparação para produção em um período, não apenas se incorre num custo (p. ex. gastos com solvente para limpar uma máquina), mas também na impossibilidade de produzir nesse período.

À lista de parâmetros do modelo (4.1)-(4.6) vamos acrescentar:
α_t tempo necessário para produzir uma unidade do item no período t
β_t tempo de preparação para a produção no período t
C_t capacidade de produção associada ao período t em termos do

tempo em que os recursos de produção estão disponíveis para a produção e para a preparação.

Restrições:
A demanda prevista deve ser satisfeita a cada período.
Estoques são nulos no início e fim do horizonte de planejamento.
Existe capacidade de produção limitada a cada período.
Ainda, quantidades produzidas e estocadas não podem ser negativas.

Então, um modelo matemático para o problema de planejamento da produção de um item com capacidade de produção limitada é dado por

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + q_t y_t + h_t s_t \\ \text{sujeito a} & s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \forall t \\ & s_0 = s_n = 0 \\ & x_t \leq M_t y_t \quad \forall t \\ & \alpha_t x_t + \beta_t y_t \leq C_t \quad \forall t \\ & x_t \geq 0, \; s_t \geq 0 \quad \forall t \\ & y_t \in \{0,1\} \quad \forall t. \end{array} \tag{4.7}$$

Exercício proposto 9
Considere que, além da limitação máxima de tempo de produção, também existe limite máximo de unidades produzidas de itens por período. Adeque o modelo a essa nova condição.

Desafio 3
Em alguns casos, a preparação para a produção consiste em apenas preaquecer um forno. A existência de produção num período, significa que o forno termina o período ainda aquecido. Então, no período seguinte, com o forno já aquecido, pode haver produção sem que seja necessária uma preparação. Mantendo a linearidade do modelo com relaxação linear, modifique o modelo para incluir esta característica da realidade.

4.4 Modelo multi-item multi-período sem limitação de capacidade

Na indústria é comum a produção não simultânea de mais de um tipo de produto numa mesma instalação, utilizando os mesmos recursos. Vamos desenvolver um modelo para determinar um plano de produção para um sistema de produção de diversos itens ao longo de um horizonte de planejamento. Consideraremos que, no início e no fim do horizonte de planejamento, os estoques dos itens sejam nulos e, ainda, supor que a capacidade de produção seja ilimitada para todos os itens em todos os períodos.

Considere as seguintes notações e definições:

Conjuntos e índices:
$T = \{1, 2, ..., n\},\ t \in T$, conjunto de períodos do horizonte de planejamento,
$I = \{1, 2, ..., m\},\ i \in I$, conjunto de itens (distintos) a serem produzidos.

Dados ou parâmetros do problema:

p_{it} custo unitário de produção do item i associado ao período t (\$),
q_{it} custo de preparação para a produção do item i associado ao período t (\$),
h_{it} custo de manter estoque por unidade do item i associado ao período t (\$),
d_{it} demanda pelo item i prevista para o período t (unidades),
M_{it} número inteiro positivo suficientemente grande para não limitar a produção do item i no período t.

Variáveis de decisão:

x_{it} unidades do item i a serem produzidas no período t,
y_{it} indica se existe produção do item i no período t ($y_{it} = 1$), ou não ($y_{it} = 0$),
s_{it} unidades do item i a serem estocadas ao final do período t.

Restrições:

A cada período de tempo a demanda prevista deve ser satisfeita.
Os estoques dos itens no início e fim do horizonte de planejamento devem ser nulos.
As quantidades produzidas e estocadas devem ser não negativas.

Objetivo: minimizar custos de produzir, preparar para produção e manter estoque.

Formulação matemática do problema de planejamento da produção de mais de um item em mais de um período de tempo é

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{it}x_{it} + q_{it}y_{it} + h_{it}s_{it} \\ \text{sujeito a} & s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i,\ \forall t \\ & s_{i0} = s_{in} = 0 \quad \forall i \\ & x_{it} \leq M_{it}y_{it} \quad \forall i,\ \forall t \\ & x_{it} \geq 0,\ s_{it} \geq 0 \quad \forall i,\ \forall t \\ & y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i,\ \forall t. \end{array}$$

Observe que o problema acima apresenta exatamente um único objetivo, $3mn$ variáveis de decisão e $2m(n+1)$ restrições funcionais.

4.5 Modelo multi-item multi-período com limitação de capacidade

Queremos determinar as quantidades a serem produzidas de itens acabados, de modo a (i) satisfazer a demanda ao longo de um horizonte de tempo, e (ii) minimizar os custos de produzir e de manter estoque, sabendo que existe limitação da capacidade de produção. Esse problema é conhecido como problema mestre de programação da produção (*master production scheduling problem*). Para isso, vamos começar pela notação a ser usada para conjuntos, parâmetros e variáveis.

Conjuntos:
I conjunto dos itens acabados a serem produzidos ($i \in I$),

T conjunto dos períodos de tempo ($t \in T$).

Parâmetros:

d_{it} demanda pelo item acabado i no período t (unidades do item),
h_{it} custo unitário de estocar o item i no período t (\$),
p_{it} custo unitário de produzir o item i no período t (\$),
q_{it} custo fixo de preparação para produzir o item i no período t (\$),
α_{it} tempo necessário para produzir uma unidade do item i no período t (hora),
C_t tempo de produção disponível por período (hora),
M_{it} número inteiro positivo suficientemente grande para não limitar a produção do item i no período t.

Variáveis de decisão do problema:

x_{it} quantidade do item i a ser produzida no período t (unidades),
y_{it} indica se existe produção do item i no período t ($y_{it} = 1$), ou não ($y_{it} = 0$),
s_{it} quantidade do item i a ser estocada ao final do período t (unids.).

Restrições:
Satisfação da demanda.
Limitação de capacidade em termos do tempo disponível para produção.
Não negatividade das quantidades dos itens a serem produzidos e estocados.

É objetivo do problema minimizar os custos de produção e de manter estoque, i.e., minimizar o custo total.

Então, o modelo matemático do problema é:

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} p_{it}x_{it} + q_{it}y_{it} + h_{it}s_{it} \\
\text{sujeito a} & s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i,\ \forall t \\
& s_{i0} = s_{in} = 0 \quad \forall i \\
& x_{it} \leq M_{it}y_{it} \quad \forall i,\ \forall t \\
& \sum_{i=1}^{m} \alpha_{it}x_{it} \leq C_t \quad \forall t \\
& x_{it} \geq 0,\ s_{it} \geq 0 \quad \forall i,\ \forall t \\
& y_{it} \in \{0,1\} \quad \forall i,\ \forall t.
\end{array}
$$

Observe que esse modelo não é completamente geral, ele corresponde a um problema de planejamento da produção particular, uma vez que não são considerados tempos de preparação para a produção.

Exemplo numérico 9

Para o modelo que acabamos de apresentar, considere os valores dos parâmetros que se encontram na Tabela 4.1. Ainda, considere conhecida uma solução viável com os seguintes valores para x_{it} e s_{it} na Tabela 4.2. Calcule o valor do custo total relativo a essa solução viável.

Tabela 4.1:

d_{it}	t=1	t=2	t=3	t=4	h_i	q_i	α_i	p_i
i=1	30	25	25	20	25	900	1	1
i=2	10	20	15	20	10	850	1	1
C_t	100	100	100	100				

Solução

Para os valores conhecidos dos parâmetros e das variáveis (note que os valores de y_{it} podem ser obtidos diretamente dos valores de x_{it}),

Tabela 4.2:

x_{it}	t=1	t=2	t=3	t=4
i=1	55	0	45	0
i=2	45	0	0	20

s_{it}	t=1	t=2	t=3	t=4
i=1	25	0	20	0
i=2	35	15	0	0

o valor do custo total é calculado avaliando a seguinte expressão.

$$\begin{aligned}
C_T &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{4} p_i x_{it} + q_i y_{it} + h_i s_{it} \\
&= p_1 x_{11} + q_1 y_{11} + h_1 s_{11} + p_1 x_{13} + q_1 y_{13} + h_1 s_{13} + \\
&\quad p_2 x_{21} + q_2 y_{21} + h_2 s_{21} + +h_2 s_{22} + p_2 x_{24} + q_2 y_{24} \\
&= 55 + 900 + 625 + 45 + 900 + 500 + 45 + 850 + 350 + 150 \\
&\quad +20 + 850 = 5290.
\end{aligned}$$

Repare que na impossibilidade de achar o plano de produção ótimo que nos fornecerá um custo mínimo, podemos usar o valor do custo total referente a uma solução viável como um limitante superior do custo mínimo, que neste caso é $C_T = 5290$.

Exercício proposto 10

O modelo desenvolvido acima considera o custo, mas não tempo de produção perdido com preparação. Inclua no modelo esse detalhe adicional.

Existem modelos mais complexos do que estes que aqui apresentamos, como, por exemplo, os que tratam da prática de *backlogging*, que consiste em atender parcialmente o cliente mediante ao compromisso de entregar a encomenda após a produção de um novo lote. Há ainda modelos que tratam de planejar as encomendas simultâneas de itens acabados, semi-acabados e insumos, considerando um planejamento em vários níveis ou estágios de produção. Dada a limitação do tempo deste curso, priorizamos a apresentação de modelos introdutórios e, por isso, mais simples.

Desafio 4

A partir do modelo proposto acima, faça as alterações necessárias para que possa haver *backlogging* ou pendência. Inclua um custo de "perda de imagem" constante para cada unidade do item que ficar em atraso. Note que haverá necessidade de se criar uma variável para representar a quantidade em atraso em cada período e que a equação de balanço de estoques terá que incluir duas dessas variáveis, que são como "estoques negativos".

Capítulo 5

Comentários adicionais e conclusão

Neste minicurso, procuramos dar uma ideia de como modelos matemáticos podem ser úteis para decisões ligadas à gestão da produção, seja em manufatura ou em serviços. Tipos bem diferentes de problemas e de modelos foram vistos. Vimos modelos onde a principal dificuldade é a incerteza (modelos probabilísticos) e outros onde a complexidade das relações entre as decisões e custos tornam difícil tomar decisões coerentes e boas sob algum aspecto (modelos determinísticos). Em muitos problemas de ordem prática, como o de planejamento de um sistema elétrico que inclui fontes de energia que dependem de fatores climáticos, a composição de incerteza e a complexidade (incluindo restrições não lineares) fazem com que a modelagem seja difícil, resultando em um porte muito grade (o número de variáveis pode ser da ordem de milhões e o de restrições da ordem de milhares), o que traz dificuldades práticas para a preparação dos dados para validação do modelo e para a obtenção de soluções.

Outras questões importantes na prática são o entendimento profundo do problema e a obtenção de dados. Hoje, com a disseminação de sistemas corporativos (sistemas que reunem de forma integrada dados de grande parte dos diversos setores da empresa) e bancos de dados de agentes públicos e privados, a obtenção de dados se torna muito mais barata e rápida, viabilizando um número crescente de aplicações industriais e comerciais. O entendimento profundo do problema é uma dificuldade menos aparente e frequente motivo de aplicações frustradas. Não basta entender o que os usuários e decisores dizem sobre o problema, é importante identificar que objetivos estratégicos o modelo deve servir e quais as prioridades de desenvolvimento. Não menos importante é saber transmitir ao cliente, na sua própria linguagem, o que se pretende com o modelo, quais suas potencialidades e limitações. Sem esses cuidados, o fracasso de qualquer aplicação é quase certo.

As aplicações de matemática na engenharia de produção é ainda bem tímida, mas importantes aplicações animam pesquisadores e profissionais. Entre essas aplicações bem consolidadas e de extrema utilidade estão o planejamento e gestão de sistemas elétricos, planejamento de grandes sistemas produtivos integrados, particularmente o de produção, refino e logística de petróleo e derivados, planejamento de grandes produtores de papel e celulose, planejamento urbano, roteamento de veículos, programação de voos e de tripulação de linhas aéreas, o cálculo de tarifas e descontos de passagens aéreas e gestão financeira.

Propositalmente, em nossa exposição enfatizamos a interface entre a realidade de sistemas produtivos e a matemática e, também, mantivemos em primeiro plano o ponto de vista do engenheiro de produção. Entretanto, não queremos deixar a impressão que a maior contribuição do matemático nesse *métier* seja a modelagem. A resolução dos modelos pode ser uma tarefa longe de trivial; problemas de instabilidade numérica, necessidade de algoritmos especializados, aceleração de convergência e muitos outros problemas são estimulantes desafios para matemáticos aplicados.

Finalmente, esperamos que as horas despendidas nesse minicurso sirvam para ampliar o horizonte de matemáticos em formação e que os estimulem a explorar esse campo que, com os avanços da informática e telecomunicações, está em franca expansão.

Bibliografia

[1] Arenales, M.; Armentano, V.A.; Morabito, R.; Yanasse, H.H.. *Pesquisa operacional, Modelagem e Algoritmos*, 1a. Edição, Ed. Campus, 2006.

[2] Cachon, G.P.. *Supply chain coordination with contracts.* Em: Handbooks in Operations Research and Management Science, Capítulo 6, Ed. Steve Graves and Ton de Kok, Amsterdam: North-Holland, 2002.

[3] Hopp, W.J.; Spearman, M.L.. *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management*, 2a Edição, New York: McGraw-Hill Higher Education, 2001.

[4] Lev, B.; Soyster, A.L.. *An Inventory Model with Finite Horizon and Price Changes*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 30, No. 1, pp. 43–53, 1979.

[5] Naddor, E.. *Inventory Systems*, Nova York: John Wiley and Sons, 1966.

[6] Nahmias, S.; Olsen, T.L.. *Production and operations analysis*, 7a. Edição. Long Grove, Illinois: Waveland Press, 2015.

[7] Pochet, Y.; Wolsey, L.A.. *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer, 2006.

[8] Silver, E.A.; Pike, D.F.; Peterson, R.. *Inventory Management and Production Planning*, 3a. Edição. NewYork: Wiley, 1998.

[9] Tersine, R.J.; Schwarzkopf, A.B.. *Optimal Transition Ordering Strategies with Announced Price Increases*, The International Journal of Logistics Management, Vol. 2, No. 1 pp. 26–34, 1991.