

Alexandre A. Martins Rodrigues

TEORIA DAS SUPERFÍCIES DE RIEMANN

Com a colaboração de

Carlos B. Lyra
Chaim S. Hönl
Nelo Allan
Omar Catunda

Redigido por Elza Gomide

2º Colóquio Brasileiro de Matemática - Poços de Caldas 1959.

Publicação Financiada pelo
Conselho Nacional de Pesquisas
1957-1958

P R E F Á C I O .

Estas notas sôbre Superfícies de Riemann têm por único objetivo, tornar esta teoria mais acessível ao público matemático brasileiro. Apesar da importância da teoria, quer por ter sido o ponto de partida de um amplo setor da matemática contemporânea, quer pelo próprio valor e profundidade dos resultados que alcança, não existia até há pouco, mesmo em língua estrangeira, um texto moderno que expusesse o conteúdo do clássico livro de H. Weyl "Die Idee der Riemannschen Fläche", cuja primeira edição data de 1913. Durante a preparação destas notas a publicação do livro de G. Springer, "Introduction to Riemannian Surfaces" (Addison-Wesley), veio suprir essa lacuna. Nem por isso, ficou prejudicado o interesse ou a utilidade das notas que agora publicamos, pois julgamos que um modo seguro de impulsionar o desenvolvimento da matemática no Brasil é a publicação em língua portuguesa e com caracter didático, de textos matemáticos avançados.

A ênfase destas notas está na teoria das superfícies de Riemann compactas ou o que é a mesma coisa na teoria das funções algébricas e diferenciais abelianas em uma variável sôbre o corpo complexo. Deixamos de lado a teoria que se desenvolveu recentemente sôbre as superfícies abertas. No capítulo que trata dos teoremas de existência de funções e diferenciais holomorfas contentamo-nos em enunciar, sem demonstração, o princípio de Dirichlet expresso na linguagem dos Espaços de Hilbert. A demonstração pode ser encontrada nos livros já citados de H. Weyl e G. Springer que faz uso de técnicas que não intervêm no resto da teoria, podendo assim ser omitida num primeiro estudo das funções automorfas.

O material para a publicação destas notas foi colhido durante um seminário sôbre Superfícies de Riemann, realizado sob minha direção no Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo em 1957 e 1958. Esse seminário contou com a colaboração dos professores Carlos B. de Lyra, Chaim Hönig e Nelo Allan que se encarregaram de expôr o material dos seguintes capítu-

los: Prof. Carlos Lyra - Espaços de recobrimento, Prof. Chaim Hö-nig - Topologia das superfícies compactas, Matrizes de Riemann, Teorema de Riemann-Roch e Corpo das funções meromorfas sôbre uma superfície de Riemann compacta, Prof. Nelo Allan - Teoria da uniformização.

A redação, com exceção do último capítulo sôbre Uniformização, esteve a carga da Profa. Elza Gomide e é sômente devido à dedicação e competência com que a Profa. Gomide se desincumbiu desta espinhosa tarefa é que estas notas podem ser publicadas. O capítulo sôbre Teoria da Uniformização foi redigido em colaboração pelos Professores Omar Catunda e Nelo Allan.

Alexandre A. Martins Rodrigues

Pesquisador Associado do Conselho Nacional de Pesquisas.

Faculdade de Filosofia da Universidade de S. Paulo.

Capítulo I.

Superfícies de Riemann.

Nota histórica.

A teoria das superfícies de Riemann teve a sua origem nos trabalhos de Riemann publicados entre 1851 e 1865. A concepção original de Riemann consistiu em tomar uma superfície que recobre uma parte do plano complexo com diversas folhas distintas como um possível campo de definição de uma função analítica. Essa concepção foi grandemente motivada pelo estudo das funções algébricas, isto é, das funções definidas implicitamente por uma equação $P(x,y) = 0$ onde P é um polinômio nas duas variáveis x e y , e pelo estudo das integrais abelianas que são integrais da forma

$$\int_{\gamma} R(x,y) dx$$

onde γ é um caminho no plano complexo, $R(x,y)$ é uma função racional das variáveis x e y e y é uma função algébrica de x . Entre essas integrais incluem-se como caso particular, entre outras que também aparecem na física e na mecânica, as integrais das funções racionais, as integrais elíticas e hiper-elíticas. Devido não somente à sua importância matemática, mas também às inúmeras aplicações à física e à mecânica, as integrais abelianas constituíram um dos temas centrais nas investigações matemáticas do século passado.

Após os trabalhos de Abel, Jacobi e Weierstrass, coube a Riemann apresentar pela primeira vez, na sua clássica memória "Theorie der Abelschen Funktionen" uma exposição global e sistemática da teoria das integrais abelianas. Riemann, abandonando a idéia de exprimir as integrais abelianas, consideradas como funções do ponto final do caminho de integração, por meio de transcendentais mais elementares, passou a estudar essas funções como novas transcendentais, tão importantes quanto as próprias transcendentais elementares. Na construção das diferenciais abelianas fez uso constante do chamado princípio de Dirichlet e de métodos de natureza topológica em contraste com os métodos mais algébricos de Weierstrass. Embora a demonstra-

ção do princípio de Dirichlet proposta por Riemann não fosse correta, os resultados que obteve foram logo a seguir redemonstrados por G. Neumann com o uso de novos métodos. A demonstração do princípio de Dirichlet resistiu, aos esforços de grande número de matemáticos do século passado até que foi finalmente conseguida por Hilbert em princípios dêste século. Postos sôbre base segura, constituem os métodos de Riemann, na opinião de H. Weyl, o melhor modo de demonstração dos teoremas de existência.

Mais tarde a teoria das superfícies de Riemann desenvolveu-se em outra direção graças aos trabalhos de Klein, Poincaré e Kùbé que a completaram com a teoria da uniformização cujo problema fundamental é o seguinte: Dada a equação algébrica $P(x,y) = 0$ determinar funções $x(z)$, $y(z)$ definidas e analíticas numa região R do plano complexo, tais que $P(x(z),y(z)) = 0$ para todo $z \in R$ e reciprocamente se $P(x_0,y_0) = 0$ então existe $z \in R$ tal que $x(z) = x_0$ e $y(z) = y_0$.

Em 1913, no seu livro clássico "Die Idee der Riemannschen Fläche", H.Weyl introduziu a noção de superfície de Riemann compacta abstrata (ou seja a noção de variedade analítica complexa de dimensão 1) em contraposição com as superfícies consideradas por Riemann e ditas concretas, que são apresentadas como recobrimento ramificado da esfera complexa. Dando um fundamento rigoroso aos resultados de natureza topológica H.Weyl, em essência, apresentou a teoria das superfícies compactas e a teoria da uniformização como elas são conhecidas hoje.

Recentemente muitos dos resultados de Riemann foram estendidos para variedades analíticas de dimensão maior do que um.

1. No que segue, indicaremos respectivamente por R e C a reta e o plano complexo e por D o disco unitário

$$D = \{ z \in C \mid |z| < 1 \}$$

Definição 1. Chama-se variedade topológica a duas dimensões um espaço de Hausdorff V em que cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa a D .

Observação: salvo menção expressa em contrário, por vizinhança entenderemos sempre vizinhança aberta.

Exemplos: 1) Plano real.

2) Qualquer conjunto aberto do plano.

3) Esfera a duas dimensões $S = \{ (x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$

4) Toro.

5) Cilindro.

6) Faixa de Möbius.

7) Plano projetivo real.

Definição 2. Seja V uma variedade topológica a duas dimensões. V será dita uma superfície de Riemann se para cada ponto $p \in V$ for dada uma classe $A(p)$ de funções com valores complexos, que serão chamadas funções analíticas (ou holomorfas) nesse ponto, com as seguintes propriedades:

1) Se $f \in A(p)$, f é definida numa vizinhança de p .

2) Existe $\zeta \in A(p)$ e uma vizinhança W de p tal que

a) ζ transforma W homeomorficamente em um aberto do plano.

b) $\zeta(p) = 0$

c) Se $q_0 \in W$, então $f \in A(q_0)$ se e somente se existe uma vizinhança $W_0 \subset W$ na qual vale o desenvolvimento

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \zeta(q) - \zeta(q_0) \right\}^n \quad q \in W_0$$

ζ chama-se um parâmetro uniformizador em p .

É claro que se ζ é parâmetro uniformizador em p , então

$\zeta - \zeta(q_0)$ é parâmetro uniformizador em q_0 .

Se V é uma superfície de Riemann diremos também que V possui uma estrutura de superfície de Riemann ou uma estrutura conforme.

Dada uma superfície de Riemann S e um aberto $U \subset S$, uma função f se dirá analítica em U se for analítica em cada ponto de U , isto é, $f \in A(p)$, $\forall p \in U$.

Proposição 1. Seja p um ponto de uma superfície de Riemann S , ζ um parâmetro uniformizador em p e ζ' uma função analítica em p . ζ' será parâmetro uniformizador em p se e somente se existir uma vizinhança W de p onde vale o desenvolvimento

$$(1.1) \quad \zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta(q)^n \quad \text{com } b_1 \neq 0, \quad q \in W$$

De fato, se ζ' é parâmetro uniformizador, com $\zeta \in A(p)$ devemos ter, numa vizinhança W de p

$$(1.2) \quad \zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta'(q)^n$$

($b'_0 = 0$ por ser $\zeta(p) = \zeta'(p) = 0$).

Ora, (1.1) e (1.2) implicam $b_1 \neq 0$, $b'_1 \neq 0$.

Reciprocamente, vamos provar que se vale (1.1) com $b_1 \neq 0$, satisfaz a), b) e c) na definição 1.

Quanto a a) é claro pois se pusermos $\zeta(q) = z$, $\zeta'(q) = w$, a correspondência $z \longleftrightarrow w$ dada por (1.1) e (1.2) é um homeomorfismo numa vizinhança da origem.

b) é imediata.

Quanto a c), de (1.2) vem que dado $q_0 \in W$, numa vizinhança W_0 de q_0 contida em W , temos que $\zeta(q) - \zeta(q_0)$ se exprime como série de potências em $\zeta'(q) - \zeta'(q_0)$. Como toda $f \in A(q_0)$ se exprime como série de potências em $\zeta - \zeta(q_0)$, o mesmo vale para ζ' , que satisfaz portanto c).

Proposição 2. Se ζ é um parâmetro uniformizador em p e f é uma função analítica na origem tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, então f é também um parâmetro uniformizador em p . Reciprocamente, se ζ e ζ' são parâmetros uniformizadores em p então $f = \zeta' \circ \zeta^{-1}$ é uma função analítica na origem e tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$.

De fato, a função $w = f(z)$ terá um desenvolvimento em série nas vizinhanças da origem da forma

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{com } a_1 \neq 0$$

Pondo $f \circ \zeta = \zeta' \circ \zeta$ e $\zeta(q) = z$ teremos então, para q numa vizinhança conveniente de p

$$\zeta'(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta(q)^n$$

e pela proposição 1, ζ' é também parâmetro uniformizador em p .

Reciprocamente, se ζ e ζ' são parâmetros uniformizadores, existe uma vizinhança W de p tal que para $q \in W$

$$\zeta'(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta(q)^n \quad \text{com } a_1 \neq 0$$

A função $w = f(z)$ dada por

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

será uma função nas condições exigidas e teremos

$$f = \zeta' \circ \zeta^{-1}$$

Observação: Dado $p \in S$, uma função analítica em p é necessariamente analítica numa vizinhança de p . Isto resulta da propriedade c) do parâmetro uniformizador e do fato que se ζ é um parâmetro uniformizador em p , então $\zeta - \zeta(q)$ será parâmetro uniformizador em q para q vizinho de p .

Seja agora S uma superfície de Riemann e $U \subset S$ um aberto; U é uma variedade topológica e tem uma estrutura de superfície de Riemann induzida pela de S , definida da seguinte maneira:

Dado $p \in U$, uma função f é analítica em p se considerada como função em S ela for analítica em p .

Temos aqui um caso particular da seguinte situação: suponhamos dada uma superfície de Riemann S' , uma variedade topológica S e uma aplicação contínua h de S em S' que seja um homeomorfismo local (isto é, tal que dado $p \in S$ e considerado o ponto $p' = h(p) \in S'$, existe uma vizinhança V de p e uma vizinhança V' de p' tais que h transforma V em V' homeomorficamente).

É possível então definir de modo natural uma estrutura de superfície de Riemann em S . Dado $p \in S$, seja f uma função definida numa vizinhança W de p . Existe então uma vizinhança $V \subset W$ com a propriedade que h induz um homeomorfismo h^* de V sobre uma vizinhança V' de p' . f diz-se analítica em p se $f \circ h^{*-1}$ for analítica em p' .

Definição 3. Dadas duas superfícies de Riemann S e S' , uma aplicação h de S em S' dir-se-á analítica num ponto $p \in S$ se para qualquer função f analítica em $h(p)$, $f \circ h$ for analítica em p .

Definição 4. Duas superfícies de Riemann S e S' dizem-se analiticamente equivalentes se existir uma aplicação biunívoca h de S em S' tal que h e h^{-1} sejam analíticas. h diz-se também uma aplicação conforme de S em S' .

É evidente que h é um homeomorfismo.

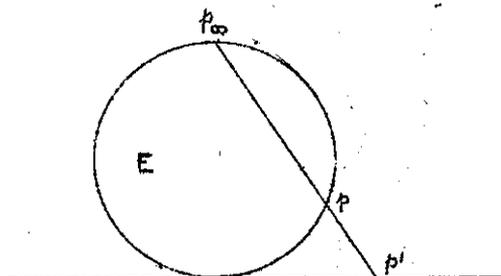
Exemplos de superfícies de Riemann.

1) Plano complexo. As funções analíticas num ponto p são as que podem ser desenvolvidas em série de potências de $z-p$.

2) Um conjunto aberto do plano.

3) Esfera. Definimos estrutura de superfície de Riemann sobre a esfera usando a projecção estereográfica, que aplica homeomorficamente uma vizinhança de um ponto $p \neq p_{\infty}$ da esfera numa vizinhança da imagem $\pi(p) = p'$ no plano. As funções analíticas em p são as compostas das funções analíticas em p' com a projecção π . Para o polo norte $= p_{\infty}$, $1/z \circ \pi$, que leva uma vizinhança do polo numa vizinhança da origem, é parâmetro uniformizador. As funções analíticas no polo norte são as compostas das funções que podem ser desenvolvidas em série de potências de $1/z$ com π .

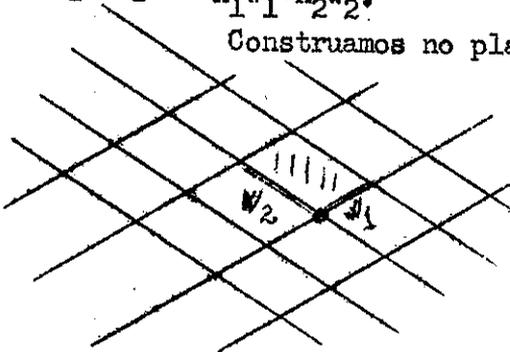
É claro que a esfera não é equivalente aos dois exemplos precedentes, pois não é sequer topologicamente equivalente. De fato, a esfera é compacta, o plano e qualquer aberto do plano não.



Podemos indagar sobre a equivalência de um aberto do plano com o plano. Tomemos por exemplo o disco D que é topologicamente equivalente ao plano. É imediato que analiticamente não são equivalentes: de fato, suponhamos que existisse equivalência $h:P \rightarrow D$. h seria uma função analítica em P com valores em D , logo limitada; então seria constante, e não uma aplicação biunívoca de P sobre D . Tomos pois aqui um exemplo de variedade topológica que admite mais de uma estrutura de superfície de Riemann.

Mais tarde demonstraremos que além das estruturas já definidas a esfera e o plano não admitem outras estruturas conformes.

4) Toro. Dados dois números complexos w_1, w_2 com $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$, consideremos para cada par de inteiros (n_1, n_2) a transformação do plano $T(n_1, n_2)$ que leva o ponto z no ponto $z + n_1 w_1 + n_2 w_2$. O conjunto de todas as transformações $T(n_1, n_2)$, quando n_1, n_2 assumem todos os valores inteiros forma um grupo H de transformações do plano. É claro que cada elemento de H é um homeomorfismo holomorfo do plano. Diremos que dois números complexos z e z' são equivalentes por H se existe $T \in H$ tal que $T(z) = z'$. Evidentemente, z e z' são equivalentes se e somente se existem inteiros n_1, n_2 tais que $z - z' = n_1 w_1 + n_2 w_2$.



Construamos no plano uma rede de paralelogramos com lados w_1, w_2 .

É fácil ver que um sistema de representantes das classes de equivalência segundo a relação de equivalência \mathcal{R} definida acima é formado pelo interior de um paralelogramo, mais o interior de dois lados que têm um vértice comum e o vértice comum. Segue que o espaço quociente \mathbb{C}/\mathcal{R} é homeomorfo ao espaço obtido identificando os lados opostos desse paralelogramo, isto é, a um toro T .

Podemos ainda verificar facilmente que dado um ponto p do plano existe uma vizinhança de p que não contém pontos equivalentes distintos. De fato, pode-se sempre construir uma rede de paralelogramos com lados w_1 e w_2 de modo que p seja interior a um paralelogramo. Então qualquer aberto W que contenha p e esteja contido no interior do paralelogramo satisfaz a essa condição.

A restrição a W da projeção $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T$ é então um homeomorfismo de W sobre um aberto $W' \subset T$.

Os transformados de W pelas transformações de H são também aplicados homeomorficamente sobre W' por π . Logo dado $p' \in W'$, existe uma vizinhança W'' de p' tal que cada componente conexa de $\pi^{-1}(W'')$ é aplicada homeomorficamente sobre W' pela projeção π . Além disso, dadas duas componentes conexas de $\pi^{-1}(W'')$ existe uma transformação de H que é um ho-

homeomorfismo holomorfo de uma sobre a outra.

Seja f uma função definida numa vizinhança V' de $p' \in T$. Podemos supor $W' \subset V'$. Seja $q \in \pi^{-1}(p')$, W_q^* a componente conexa de $\pi^{-1}(W')$ que contém q e π_q^* a restrição de π a W_q^* . f diz-se holomorfa em p' se $f \circ \pi_q^*$ for holomorfa em W_q^* . A definição não depende de q porque dado $q_1 \in \pi^{-1}(p')$ existe um homeomorfismo holomorfo entre W_q^* e $W_{q_1}^*$.

Essa discussão se generaliza para a seguinte situação: Seja S uma superfície de Riemann e G o grupo de todos os homeomorfismos holomorfos de S . Seja $H \subset G$ um subgrupo de G . Dizemos que p_1, p_2 são equivalentes por H se existe $T \in H$ tal que $T(p_1) = p_2$. H diz-se totalmente descontínuo se dado $p \in S$ existir sempre uma vizinhança de p que não contém pontos equivalentes por H e distintos. Neste caso o espaço quociente de S pela relação de equivalência definida por H é uma variedade topológica S/H a duas dimensões e sobre ela pode-se definir de modo natural, repetindo o argumento usado no caso do toro, uma estrutura de superfície de Riemann, tal que a projeção $\pi : S \rightarrow S/H$ seja uma aplicação holomorfa. π estabelece uma correspondência biunívoca entre as funções meromorfas em S e invariantes por H (isto é, tais que $f(p) = f(Tp)$ para $p \in S$, $T \in H$) e as funções meromorfas em S/H .

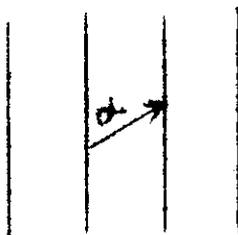
Uma função meromorfa numa superfície de Riemann é uma função holomorfa em toda a superfície com exceção de um conjunto de pontos onde a função admite polos.

5) Cilindro. O cilindro é outro exemplo particular da situação descrita acima. Dado um número complexo $\alpha \neq 0$, o grupo das transformações $T(m) : T(m)(z) = z + m\alpha$, onde $m \in \mathbb{Z}^{(1)}$, é um grupo totalmente descontínuo de transformações holomorfas no plano.

Dividindo o plano em faixas por retas paralelas que sejam transformadas umas nas outras pelas transformações $T(m)$, vemos que um sistema

(1) Por \mathbb{Z} indicaremos sempre o anel dos números inteiros relativos.

de representantes das classes de equivalência segundo o grupo dessas transformações é dado pelo interior de uma faixa com uma linha de contorno. O



quociente do plano pela relação de equivalência definida pelo grupo é o cilindro S obtido identificando dois bordos de uma faixa. Como o grupo das transformações $T(\alpha)$ é totalmente descontínuo, pelo que foi exposto acima, o cilindro S admite uma estrutura de superfície

de Riemann tal que a projeção $\pi: \mathbb{C} \rightarrow S$ é uma aplicação analítica.

Dada uma superfície de Riemann nem sempre existe uma função analítica em toda a superfície. Entretanto, no cilindro é fácil ver que existem funções nessas condições. Basta considerar uma função analítica em todo o plano, com período α , por exemplo $e^{\frac{2\pi i}{\alpha} z}$. Por projeção ela define uma função em S , que de acordo com nossa definição é analítica em cada ponto de S .

É fácil demonstrar, usando a função $e^{\frac{2\pi i}{\alpha} z}$ que o cilindro S é conformalmente equivalente ao plano menos um ponto. Resulta daqui que dois cilindros correspondentes a períodos α e α' , distintos, são conformalmente equivalentes.

Construímos assim estruturas de superfície de Riemann em todos os exemplos dados de variedade topológica de duas dimensões, exceto o plano projetivo e a faixa de Möbius. Aparece a questão: é sempre possível definir uma estrutura de superfície de Riemann sobre uma variedade topológica a duas dimensões? A resposta é negativa, e o plano projetivo e a faixa de Möbius são dois exemplos em contrário, conforme veremos a seguir.

2. Vamos agora introduzir numa superfície de Riemann S conceitos que podem ser definidos intrinsecamente, isto é, independentemente da escolha do parâmetro uniformizador.

Zero de ordem k de uma função

Seja f uma função holomorfa num ponto $p \in S$ e τ um parâmetro

uniformizador em p . Então numa vizinhança de

$$(2.1) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Se o primeiro coeficiente não nulo for a_k , diremos que f tem um zero de ordem k em p .

Esta definição não depende da escolha de z : se t é também um parâmetro uniformizador em p , teremos

$$(2.2) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

e devemos mostrar que o primeiro coeficiente não nulo é b_k . De fato,

$$(2.3) \quad \bar{z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad c_1 \neq 0$$

e substituindo \bar{z} em (2.1) por meio de (2.3) obteremos o desenvolvimento de f em série de potências de t , em que o primeiro termo é evidentemente $a_k c_1^k t^k$, com $a_k c_1^k \neq 0$.

Singularidades de uma função

Seja agora f uma função holomorfa numa vizinhança V de p com exceção do ponto p , e seja z um parâmetro uniformizador em p . Então vale ao redor de p um desenvolvimento de Laurent

$$(2.4) \quad f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

Temos três casos possíveis:

a) Existem infinitos termos não nulos com expoente negativo.

Dizemos então que f tem uma singularidade essencial em p .

b) Existe somente um número finito de termos com expoente negativo. Seja a_{-k} o primeiro deles: dizemos então que f tem um polo de ordem k em p .

c) Não existem termos com expoente negativo. Então f pode ser ex-

tendida a uma função definida em toda a vizinhança V e analítica inclusive em p . p é então singularidade removível e este caso não apresenta interesse.

Demonstra-se facilmente que essas definições são invariantes em relação a uma mudança de parâmetro uniformizador. Verifiquemos por exemplo a invariância da ordem de um polo.

Seja então t outro parâmetro uniformizador. Teremos

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n = b_1 t + b_2 t^2 + \dots \quad \text{com } b_1 \neq 0$$

donde

$$\zeta = t \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n-1} = t \cdot \varphi(t) \quad \text{sendo } \varphi(0) \neq 0$$

Então

$$(2.5) \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\varphi(t)} = \frac{1}{t} \psi(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{com } c_0 \neq 0$$

Substituindo ζ e $\frac{1}{\zeta}$ em (2.4) virá que o primeiro termo não nulo é $a_{-k} c_0^k t^{-k}$, o que prova a afirmação

Curva diferenciável de ordem k .

Definição 5. Chama-se curva contínua numa superfície de Riemann S uma aplicação γ contínua do intervalo $[0, 1]$ em S . $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ se dirão extremos da curva.

Dado $p \in S$, suponhamos que a curva γ passe por p , isto é, que para $s_0 \in [0, 1]$, $\gamma(s_0) = p$ e seja ζ um parâmetro uniformizador em p . ζ transforma uma vizinhança de p na superfície em uma vizinhança de $\zeta(p) = p'$ no plano, e transforma a curva γ numa curva γ' no plano. Suponhamos que γ' nessa vizinhança de p' se escreva

$$x = x(s)$$

$$y = y(s)$$

onde s varia num entôrno de s_0 e x e y são as coordenadas no plano. Se $x(s)$ e $y(s)$ forem diferenciáveis de classe C^k (isto é, se existir e for contínua a derivada de ordem k dessas funções) a curva γ diz-se diferenciável de ordem k ou de classe C^k .

Esta noção não depende do parâmetro uniformizador ζ , pois a passagem de ζ a um outro parâmetro uniformizador t se faz por composição de ζ com uma função analítica.

Ângulo de duas curvas.

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas de classe C^1 que passam pelo ponto p , ζ um parâmetro uniformizador em p . ζ leva p em p' , γ_1 em γ'_1 e γ_2 em γ'_2 . O ângulo de γ'_1 e γ'_2 em p' é definido pelo ângulo das tangentes. Seja θ = medida do ângulo (γ'_1, γ'_2) . Definimos θ como medida do ângulo de γ_1 e γ_2 em p .

A definição de ângulo não depende de ζ , pois se t é outro parâmetro, $t \circ \zeta^{-1}$ é uma transformação analítica, e portanto preserva os ângulos.

É essa medida de ângulo derivada de uma métrica Riemanniana na superfície? A teoria da uniformização responde pela afirmativa.

3. Prolongamento analítico

Seja S uma superfície de Riemann e f_1, f_2 duas funções definidas e analíticas em abertos conexos R_1 e R_2 da superfície; dizemos que f_2 é prolongamento analítico imediato de f_1 se

$$\begin{aligned} R_1 \cap R_2 &\neq \emptyset \\ f_1 &= f_2 \text{ em } R_1 \cap R_2 \end{aligned}$$

Seja agora $\gamma : I \rightarrow S$ uma curva de S (sendo $I = [0, 1]$) e seja f uma função definida numa vizinhança do ponto inicial $\gamma(0)$. Suponhamos que a cada $t \in I$ se possa associar uma função f_t definida e analítica numa vizinhança do ponto $\gamma(t)$ e satisfazendo à condição que, dado $t_0 \in I$, exista ϵ tal que para todo t com $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$, f_t é prolongamen-

to analítico imediato de f_{t_0} . Dizemos então que f_1 é o prolongamento analítico de f_0 ao longo de γ .

Proposição 3. Se f_1 e f_1' são dois prolongamentos analíticos da função f_0 ao longo do caminho γ , então f_1 e f_2 coincidem numa vizinhança do ponto final $\gamma(1)$.

Isto é, o prolongamento analítico de uma função ao longo de um caminho, se existe, é único.

Demonstração. Consideremos então dois prolongamentos analíticos de f_0 ao longo de γ , f_t e f_t' que levam respectivamente a f_1 e f_1' e seja A o conjunto dos $t \in I$ tais que f_t e f_t' não coincidam numa vizinhança de $\gamma(t)$. Se A não for vazio, seja t_0 o extremo inferior de A . Temos $t_0 \neq \gamma(0)$. Mas para todo $t < t_0$ as funções f_t e f_t' coincidem. Tomando $t < t_0$ de forma que f_t e f_t' sejam prolongamento analítico imediato de f_t e f_t' , de $f_t = f_t'$ segue $f_{t_0} = f_{t_0}'$. Mas então existe uma vizinhança de t_0 tal que para todo t nessa vizinhança f_t e f_t' sejam prolongamento analítico imediato de $f_{t_0} = f_{t_0}'$, donde f_t e f_t' coincidem numa vizinhança de t_0 , o que é absurdo pois t_0 é extremo inferior de A . Então A é vazio e os prolongamentos f_t e f_t' coincidem para todo t .

Proposição 4. Se f_1 é o prolongamento analítico de f_0 ao longo de γ podemos obter f_1 por um número finito de prolongamentos analíticos imediatos.

Dado γ , ao redor de cada ponto temos uma vizinhança e uma função analítica definida nessa vizinhança. O caminho sendo compacto, podemos cobri-lo com um número finito dessas vizinhanças. Sejam $\gamma(t_i), i=1, \dots, n$, pontos de γ tais que as vizinhanças onde as funções f_{t_i} estão definidas cubram γ . Podemos no intervalo I ampliar o conjunto t_i de modo a obter um conjunto finito em que para cada i , t_{i+1} está no entôrno ξ de t_i em que o prolongamento é imediato.

Proposição 5. Se S é uma superfície de Riemann compacta e f é holomorfa em S então f é constante.

De fato, $|f|$ é uma função real, contínua, definida em toda a superfície. Pelo teorema de Weierstrass, a superfície sendo compacta existe um ponto p da superfície onde $|f|$ tem um máximo. Se $|f|$ é máxima num ponto p e f é definida numa vizinhança de p , f é constante nessa vizinhança (princípio do máximo módulo). A função constante em toda a superfície e que coincide com f nessa vizinhança dá um prolongamento analítico de f a toda a superfície. Como o prolongamento é único, essa função coincide com f em toda a superfície, isto é, f é constante em S .

Como consequência dessa proposição pode-se demonstrar que não existem funções holomorfas em todo o plano e duplamente periódicas, com períodos w_1, w_2 tais que $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Com efeito, construindo o toro T correspondente a esses períodos, a uma tal função corresponderia uma função holomorfa no toro T e portanto constante. Logo a própria função definida no plano deve ser constante.

4. Construção do domínio de holomorfismo de uma função.

Indicaremos por E a esfera de Riemann.

Seja

$$X = \left\{ (a, f) \mid \begin{array}{l} a \in E, f \text{ definida e analítica numa vizinhança} \\ \text{de } a \end{array} \right\}$$

Identificaremos dois pares (a, f) e (a', f') se $a = a'$ e f e f' coincidem num aberto que contenha a .

Vamos introduzir em X uma topologia da seguinte maneira: dado um aberto $U \subset E$, para cada função f analítica em U consideremos o conjunto

$$U_f = \left\{ (a, f) \mid a \in U \right\}$$

Esses conjuntos U_f constituem por definição um sistema fundamental de abertos da topologia de X .

Com essa topologia, X é um espaço de Hausdorff. De fato, dados $(a, f), (a', f') \in X$, distintos, se $a \neq a'$, as vizinhanças de a e a' sem pontos comuns correspondem vizinhanças de (a, f) e (a', f') sem pontos comuns.

Se $a = a'$, então f e f' não coincidem em nenhuma vizinhança de a . Resulta que dada uma vizinhança conexa V de a , e um ponto $b \in V$, f e f' não podem coincidir numa vizinhança $W \subset V$ de b , pois se coincidissem num aberto $W \subset V$, coincidiriam em V pela proposição 5. Então V_f e $V_{f'}$ são abertos contendo (a, f) e (a', f') respectivamente, e sem pontos comuns.

Temos ainda uma aplicação $\lambda : X \rightarrow E$ que leva o ponto (a, f) em a . Pela definição de conjuntos abertos λ é um homeomorfismo local, logo X é uma variedade topológica.

O homeomorfismo local

$$\lambda : X \rightarrow E$$

de X sobre uma superfície de Riemann induz uma estrutura de superfície de Riemann em X (§ 1) tal que a projeção λ é holomorfa.

Proposição 6. Dois pontos (a, f) e (a', f') de X pertencem a uma mesma componente conexa de X se e somente se f' é prolongamento analítico de f ao longo de uma curva ligando a e a' .

É indiferente aqui tomarmos a definição de componente conexa por meio de recobrimento por abertos ou por meio de caminhos.⁽¹⁾

Suponhamos que (a, f) e (a', f') pertençam à mesma componente conexa: existe uma curva $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = (a, f)$ e $\gamma(1) = (a', f')$. Definimos uma curva γ^* na esfera complexa projetando a curva γ por λ

$$\gamma^* = \lambda \circ \gamma \quad \gamma^*(0) = a \quad \gamma^*(1) = a'$$

Um ponto $\gamma(t)$ é um par (a_t, f_t) . No caminho γ^* , consideremos no ponto a_t a função f_t . Dada a maneira como foi definida a topologia em X , as funções f_t satisfazem às condições do prolongamento analítico e $f_0 = f$ e $f_1 = f'$.

Reciprocamente, se f definida numa vizinhança de a , e f' definida numa vizinhança de a' , são prolongamento analítico uma da outra, existe

(1) Definição de componente conexa por caminhos: dado um espaço topológico T , e um ponto $p \in T$, chamamos componente conexa de p o conjunto dos p' que podem ser unidos a p por um caminho em T .

um caminho γ^* ligando a e a' e ao longo desse caminho uma família φ_t de funções analíticas satisfazendo as condições do prolongamento analítico e tal que $\varphi_0 = f$ e $\varphi_1 = f'$.

A cada $t \in I$, associemos o par $(\gamma^*(t), \varphi_t)$; teremos um caminho em X ligando (a, f) e (a', f') .

Seja agora R um aberto conexo da esfera e f uma função analítica em R . Dado $a \in R$, seja S a componente conexa do ponto (a, f) em X . Chamamos S o domínio de holomorfismo de f . É evidente que não depende da escolha de $a \in R$.

Em S temos duas funções analíticas; uma é λ , a outra, a função f_0 definida da seguinte maneira:

$$f_0((a, h)) = h(a)$$

f_0 é evidentemente uma função analítica em S .

A região R pode ser identificada a uma parte de S definindo um homeomorfismo analítico i de R em S

$$i: R \rightarrow S$$

que a $a \in R$ faz corresponder $i(a) = (a, f)$

i é biunívoca e analítica. Identificando R com $i(R)$, resulta que as funções f_0 e f coincidem em R . Isto é, f_0 restrita a R dá f .

Exemplos de domínios de holomorfia

1) $w = \frac{1}{z}$. Consideramos um ponto $z_0 \in E$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq p_\infty$, e a função f definida numa vizinhança de z_0 e igual a $\frac{1}{z}$ nessa vizinhança. Seja S o domínio de holomorfia dessa função; então, pela definição de domínio de holomorfia

$$S = \left\{ (a, g) \mid a \in E, g \text{ analítica ao redor de } a, g \text{ prolongamento analítico de } f \right\}$$

Ora, dado $a \in E$, $a \neq 0$, existe ao redor de a uma e uma só função analítica que é prolongamento analítico de $\frac{1}{z}$: é a função $\frac{1}{z}$ definida ao re-

dor de a , pois esta função pode ser prolongada analiticamente ao longo de qualquer caminho que não passe pelo ponto 0 , e os prolongamentos ao longo de dois caminhos diferentes com mesmo ponto final conduzem à mesma função. Isto vale inclusive para p_∞ . Portanto sobre cada ponto da esfera $\neq 0$ existe um só ponto de S . A projeção

$$\lambda: S \longrightarrow E$$

é biunívoca, bicontínua e analítica; logo S é analiticamente equivalente à esfera menos o ponto 0 .

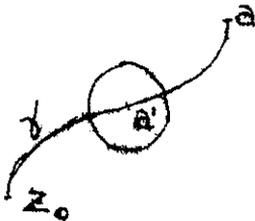
2) $w^2 = z$. Seja $z_0 \in E$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq p_\infty$. Ao redor de z_0 existem duas, e somente duas, funções $w_1(z)$ e $w_2(z)$ que satisfazem à equação, e temos $w_1(z) = -w_2(z)$. Tomemos uma delas, seja $w_1(z)$ e construamos o domínio de holomorfia S de $w_1(z)$.

Indiquemos com E a esfera menos o ponto 0 e o ponto p_∞ . Mostremos que se $a \in E$ e γ é um caminho que liga z_0 a a , podemos prolongar $w_1(z)$ ao longo de γ .

Ora, isto é imediato. Para cada ponto do caminho temos dois elementos de função que satisfazem à equação; suponhamos que se tenha feito o prolongamento de $w_1(z)$ ao longo de γ desde z_0 até o ponto a' , exclusive. Numa vizinhança de a' caem pontos para os quais o pro-

longamento foi feito, e basta considerar, dos dois elementos de função em a' , aquêles que é prolongamento analítico dos já conhecidos.

Por outro lado, os dois elementos de função em a podem ser obtidos de $w_1(z)$ por prolongamento analítico ao redor de um caminho conveniente. De fato, sejam f_{1a} e f_{2a} as duas funções definidas ao redor de a que satisfazem à equação. É fácil ver que f_{2a} pode ser obtida de f_{1a} por prolongamento analítico: basta que se tome um caminho fechado passando por a e envolvendo a origem uma vez. Considerando a variação do argumento de z , vemos que se partirmos de a com o valor f_{1a} voltaremos com o valor $-f_{1a} = f_{2a}$; inversamente, partindo de f_{2a} obteremos f_{1a} como valor final. Ora,



prolongando $w_1(z)$ ao longo de um caminho γ qualquer ligando z_0 a z chegaremos a uma função que satisfaz à equação, isto é, f_{1a} ou f_{2a} . Qualquer que seja a função obtida, para obter a outra basta acrescentar a γ uma curva fechada como acima, isto é, envolvendo a origem uma vez. Então para cada $a \in E$ temos dois pontos de S , (a, f_1) e (a, f_2) .

Sobre o ponto O por outro lado, não temos nenhum elemento de função que seja prolongamento de $w_1(z)$. De fato, um tal elemento φ , se existisse, deveria satisfazer à equação

$$\varphi^2(z) = z$$

para todo z numa vizinhança da origem. Para $z = 0$, vem

$$\varphi(0) = 0$$

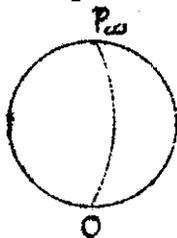
Mas derivando a equação acima obtemos

$$2\varphi(z) \varphi'(z) = 1$$

que deveria valer inclusive para $z = 0$, o que é absurdo. O mesmo vale para p_{∞} .

Assim S tem dois pontos que se projetam sobre cada ponto $a \in E$, nenhum ponto sobre o ponto O ou sobre p_{∞} . Daremos agora a construção geométrica de uma superfície de Riemann analiticamente equivalente a S .

Consideremos em E um caminho unindo os pontos O e p_{∞} , por exemplo, a parte positiva do eixo real, e chamemos de R a região obtida retirando de E os pontos desse caminho.

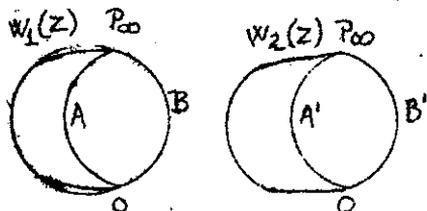


Tomemos $z_0 \in R$ e ao redor de z_0 a função $w_1(z)$. Veremos adiante (Teorema de monodromia) que sendo R simplesmente conexa, e $w_1(z)$ podendo ser prolongada ao longo de

qualquer caminho contido em R , dois prolongamentos ao longo de caminhos distintos com o mesmo ponto final conduzem à mesma função. Em outras palavras, o prolongamento analítico de $w_1(z)$ em R define uma função holomorfa em R .

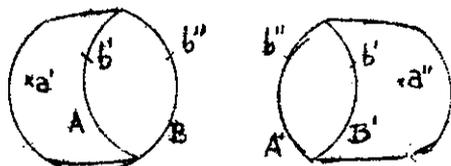
Numa outra esfera, façamos o mesmo para a função $w_2(z)$. Obteremos também uma função holomorfa em R .

Suponhamos agora separados os dois bordos do corte feito ao longo do eixo real. Podemos prolongar as funções $w_1(z)$ e $w_2(z)$ por continuidade aos dois bordos do corte.



Nos bordos A e A' as funções $w_1(z)$ e $w_2(z)$ terão sinais contrários, análogamente nos bordos B e B'. Mas como cada função troca de sinal quando se passa de um bordo a outro do corte, no bordo A $w_1(z)$ tem os mesmos valores que $w_2(z)$ no bordo B'; análogamente para B e A'.

Identificaremos então os bordos A e B', B e A', obtendo assim



uma superfície T homeomorfa à esfera menos os dois pontos O e p_∞ : essa superfície é analiticamente equivalente ao domínio de holomorfia S de $w_1(z)$. De fato, vamos definir uma aplicação

$$S \rightarrow T$$

que a cada par $(a, f) \in S$ faz corresponder um ponto de T, biunivocamente.

Suponhamos que o ponto a pertença a R; sôbre a temos duas funções f_1 e f_2 . Suponhamos que f_1 seja prolongamento de w_1 em R, f_2 o prolongamento de w_2 . Por outro lado, em T temos dois pontos a' e a'' correspondentes a a, um em cada parte. O par (a, f) será levado em a' ou a'' , conforme f coincida com f_1 ou f_2 em a.

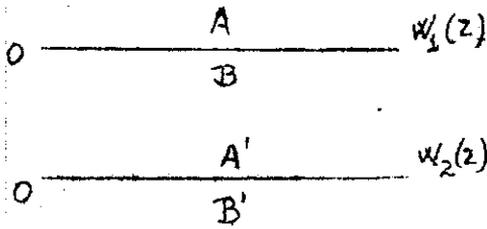
Consideremos agora b sôbre o corte D: b vai em dois pontos, b' e b'' , porquê os bordos do corte foram separados; em b' temos uma função g' , em b'' uma função g'' , obtidas por prolongamento por continuidade. Um par (b, g) sôbre b vai em b' ou b'' conforme g coincida com g' ou g'' .

Pode-se demonstrar que a aplicação assim definida é um homeomorfismo analítico. Portanto S é homeomorfa à esfera menos dois pontos.

Podemos dar ainda outra construção de superfície analiticamente equivalente a S, na qual a projeção de um ponto de S apareça mais claramente. Nesta construção consideramos S como recobrimento do plano em lugar da

esfera.

No plano, unimos o ponto 0 com ∞ pelo eixo real positivo, e re-



tiramos essa semi-reta. Nesse plano, consideramos o prolongamento de $w_1(z)$. Noutro plano fazemos o mesmo e consideramos o prolongamento de $w_2(z)$.

Em seguida abrimos o talho nos dois planos e prolongamos as funções aos bordos por continuidade. Consideramos agora os dois planos sobrepostos, identificando os bordos A e B', e os bordos B e A'. Obtemos um recobrimento do plano com duas folhas que é analiticamente equivalente a S.

Observação: Usamos repetidamente o termo identificação. Podemos dar-lhe um sentido preciso, observando que sempre que ele é usado está em jogo uma relação de equivalência, que pode não ser enunciada explicitamente. Identificação é sempre passagem a classes de equivalência.

3) $\log z$. Dado $z \neq 0$, podemos achar w tal que $e^w = z$. Chamamos $\log z$ a qualquer valor de w satisfazendo a esta equação; dois desses valores de w diferem sempre por um múltiplo inteiro de $2\pi i$.

Consideremos um ponto $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq p_\infty$, e uma determinação qualquer de $\log z$, definida ao redor de z_0 . Fixada essa determinação determinemos seu domínio de holomorfia.

O prolongamento analítico ao longo de um caminho fechado que envolva a origem uma vez conduz à determinação de partida $\pm 2\pi i$, conforme o sentido do percurso. Repetindo, podemos obter tôdas as outras determinações. Pode-se mostrar facilmente que não se pode fazer o prolongamento analítico ao longo de caminhos que passem ou por 0 ou por p_∞ . Então, S é um recobrimento ~~do plano~~ ~~menos~~ $\{0\}$ com número infinito de folhas. Sobre cada ponto a do plano (excetuado o ponto 0) temos infinitos pontos de S, cada um deles sendo o par formado com o ponto a e uma das determinações de $\log z$ nas vizinhanças de a.

É fácil ver que S como superfície de Riemann é equivalente ao plano menos um ponto - basta considerar a aplicação definida por $\log z$.

Generalização do conceito de domínio de holomorfia

Na definição do espaço X poderíamos ter considerado a situação mais geral em que f é uma aplicação holomorfa de uma vizinhança de a numa superfície de Riemann M qualquer. Seja X_M o conjunto formado pelos pares (a, f) onde f é uma aplicação holomorfa de uma vizinhança de a em M , identificando dois pares (a, f) e (a', f') quando $a=a'$ e $f=f'$ numa vizinhança de a . Pode-se introduzir em X_M uma topologia análoga àquela definida em X e definir em qualquer componente conexa S_M de X_M as aplicações λ_{S_M} e f_{S_M} correspondentes a λ e f_0 . A proposição 6 vale para o espaço X_M . (Note-se que é possível definir prolongamento analítico, seja imediato, seja ao longo de um caminho, de uma aplicação de uma vizinhança de um ponto a de uma superfície de Riemann S em uma outra superfície de Riemann S' de maneira inteiramente semelhante à dada para o caso de funções holomorfas). Consideremos em particular o caso em que M é a esfera de Riemann E ; indicaremos por S_C o domínio de holomorfia de uma função f em relação ao plano, e por S_E o domínio em relação à esfera.

Uma aplicação f de uma vizinhança de um ponto a em E ou leva a em um ponto finito ou em p_∞ . Se $f(a)$ é finito, o par (a, f) pertence tanto a S_C como a S_E . Se $f(a) = p_\infty$, f pode ser considerada como definida numa vizinhança do ponto a , excetuado o ponto a , com valores no plano, e terá um polo no ponto a . Então o par (a, f) pertence a S_E mas não a S_C . Isto é, S_E se obtém de S_C acrescentando um conjunto discreto D de pontos, que são os polos de f ; existe uma imersão $I: S_C \rightarrow S_E$ em que o complementar de S_C é o conjunto dos polos de f .

Assim $\frac{1}{z}$ tem como domínio de holomorfia em relação ao plano a esfera menos o ponto 0 . S_E será a esfera toda.

Da mesma forma, X pode ser considerado como imerso em X_E , homeomórfica e holomórficamente, pois um par $(a, f) \in X$ pode também ser considerado como pertencente a X_E .

Capítulo II

ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

Exporemos os resultados principais sobre espaços de recobrimento, que são necessários para o estudo das superfícies de Riemann. O assunto tratado neste capítulo encontra-se, por exemplo, no livro de Pontriagin, Topological Groups.

1. Grupo fundamental.

Definição 6. Sejam f e g duas aplicações contínuas de um espaço topológico X num espaço topológico Y ; diremos que f é homotópica a g ,

$$f \simeq g$$

se existir uma aplicação contínua $F: X \times I \rightarrow Y$ (onde I representa o intervalo $[0,1]$), tal que

$$1) F(x,0) = f(x)$$

$$2) F(x,1) = g(x)$$

Exemplo. Seja $X = \mathbb{R}^n$, f seja a aplicação idêntica

$$f: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

g a aplicação constante

$$g: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$$

Então

$$F((x_1, \dots, x_n), t) = ((1-t)x_1, \dots, (1-t)x_n)$$

satisfaz às condições 1) e 2).

Propriedades da homotopia

$$(i) f \simeq f$$

$$(ii) f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$$

$$(iii) f \simeq g, g \simeq h \rightarrow f \simeq h$$

A primeira é óbvia; para a segunda, se F é a aplicação tal que $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$, então a aplicação $G(x,t) = F(x,1-t)$ é tal que $G(x,0) = g(x)$, $G(x,1) = f(x)$. Quanto a (iii), se $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$ são as aplicações tais que

$$\begin{cases} F_1(x,0) = f(x) \\ F_1(x,1) = g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} F_2(x,0) = g(x) \\ F_2(x,1) = h(x) \end{cases}$$

a função

$$G(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x,2t-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é tal que $G(x,0) = f(x)$, $G(x,1) = h(x)$ e é contínua.

A homotopia é pois uma relação de equivalência no conjunto $C(X,Y)$ das aplicações contínuas de X em Y .

Seja X um espaço topológico, $I = [0,1]$ e consideremos o conjunto $C(I,X)$ dos caminhos, isto é, das aplicações contínuas

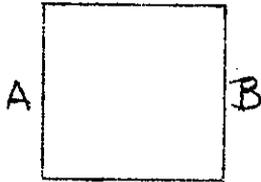
$$\alpha : I \rightarrow X$$

Seja $x_0 \in X$, fixado, e formemos o conjunto $F^1(X,x_0) \subset C(I,X)$ definido por

$$F^1(X,x_0) = \{ \alpha \in C(I,X) \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \}$$

Os elementos de $F^1(X,x_0)$ chamar-se-ão laços; são caminhos fechados, com ponto inicial e final em x_0 .

Dados $\alpha, \beta \in F^1(X,x_0)$ suponhamos que exista uma homotopia $F: I \times I \rightarrow X$ tal que $F(t_1,0) = \alpha(t_1)$, $F(t_1,1) = \beta(t_1)$, e que nessa homotopia os



lados A, B do quadrado $I \times I$, formados dos pontos $(0,t_2)$, $(1,t_2)$ sejam levados no ponto x_0 , isto é, para todo t_2 fixado, o caminho $F(t_1, t_2) = \alpha_{t_2}(t_1)$ pertença a $F^1(X,x_0)$. Então o caminho α pode ser deformado no caminho β , man-

tendo o ponto x_0 fixo. Dizemos neste caso que α e β são homotópicos relativamente a $(0,1)$:

$$\alpha \simeq \beta \quad (\text{rel.}(0,1))$$

Temos uma relação de equivalência entre os laços. Decompomos $F^1(X,x_0)$ em classes de equivalência por essa relação e chamamos o conjunto quociente de $\Pi_1(X,x_0)$. Se $\alpha \in F^1(X,x_0)$, indicaremos por $\{\alpha\}$ a classe de α .

Definiremos em $\Pi_1(X,x_0)$ uma composição. Sejam $\alpha, \beta \in F^1(X,x_0)$ e formemos o caminho, que indicaremos por $\alpha \cdot \beta$, dado por

$$\alpha \cdot \beta (t) = \begin{cases} \alpha (2t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então definimos

$$\{\alpha\} \cdot \{\beta\} = \{\alpha \cdot \beta\}$$

É imediato verificar que o segundo membro não depende da escolha dos representantes α e β das classes $\{\alpha\}, \{\beta\}$, isto é, se

$$\alpha \simeq \alpha' \quad (\text{rel.}(0,1))$$

$$\beta \simeq \beta' \quad (\text{rel.}(0,1))$$

então

$$\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta' \quad (\text{rel.}(0,1))$$

Propriedades da composição.

1) A composição é associativa.

$$(\{\alpha\} \cdot \{\beta\}) \cdot \{\gamma\} = \{\alpha\} \cdot (\{\beta\} \cdot \{\gamma\})$$

Escolhendo um representante em cada classe, devemos mostrar que

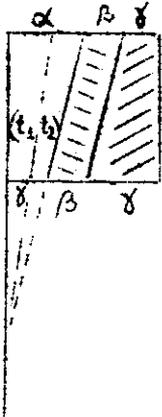
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \simeq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

Ora

$$[(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] (t) = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$[\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] (t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Uma transformação que leva um no outro é a indicada na figura, dada por



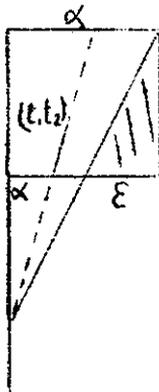
$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{4t_1}{1+t_2} \right) & 0 \leq t_1 \leq \frac{t_2+1}{4} \\ \beta(4t_1 - t_2 - 1) & \frac{t_2+1}{4} \leq t_1 \leq \frac{t_2+2}{4} \\ \gamma \left(\frac{4t_1 - t_2 - 2}{2-t_2} \right) & \frac{t_2+2}{4} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

2) Existe elemento unidade $\Sigma = \{\mathcal{E}\}$, onde \mathcal{E} é a aplicação constante $\mathcal{E}(t) = x_0$ para $0 \leq t \leq 1$: para todo $\{\alpha\}$,

$$\{\alpha\}\{\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}\}\{\alpha\} = \{\alpha\}$$

De fato, para verificar por exemplo que

$$\alpha \cdot \mathcal{E} \simeq \alpha$$



basta considerar a deformação indicada na figura

$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{2t_1}{1+t_2} \right) & \text{para } (t_1, t_2) \text{ na área em branco} \\ x_0 & \text{para } (t_1, t_2) \text{ na área hachurada} \end{cases}$$

3) Todo $\alpha \in \Pi_1(X, x_0)$ tem inverso.

Dado $\alpha \in \Pi_1(X, x_0)$ seja $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$. Então

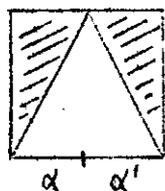
$$\{\alpha\}\{\alpha^{-1}\} = \{\alpha^{-1}\}\{\alpha\} = \{\mathcal{E}\}$$

isto é, $\{\alpha^{-1}\} = \{\alpha\}^{-1}$

Para provar que

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} \simeq \mathcal{E}$$

basta construir a deformação



$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} x_0 & \text{na área hachuriada} \\ \alpha(2t_1 - t_2) & \frac{t_2}{2} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2t_1 + t_2 - 1) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{2-t_2}{2} \end{cases}$$

Então $\pi_1(X, x_0)$ tem estrutura de grupo.

Chamamos $\pi_1(X, x_0)$ o grupo fundamental de X com ponto base x_0 (ou grupo de Poincaré).

É evidente que se X é um espaço não conexo, $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C_{x_0}, x_0)$, onde C_{x_0} é a componente conexa por caminhos de x_0 .

Seja agora X um espaço conexo por caminhos. X se dirá simplesmente conexo se $\pi_1(X, x_0)$ for o grupo reduzido ao elemento unidade (que neste caso é indicado por 0):

$$\pi_1(X, x_0) = (0)$$

Isto é, se X é simplesmente conexo, qualquer que seja o laço α , $\alpha \simeq \varepsilon$.

Exemplos

1) O espaço \mathbb{R}^n é simplesmente conexo. De fato, dado um laço

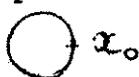
$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \alpha(t_1) = (\alpha_1(t_1), \dots, \alpha_n(t_1))$$

a aplicação $F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(t_1, t_2) = ((1-t_2)\alpha_1(t_1), \dots, (1-t_2)\alpha_n(t_1))$$

é uma homotopia entre α e o caminho idêntico $t \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$, $t \in I$.

2) Pode-se demonstrar que a esfera a duas dimensões é simplesmente conexa: $\pi_1(S^2, x_0) = 0$.

3) Pode-se demonstrar que o grupo fundamental da circunferência é infinito cíclico, isto é, $\pi_1(S^1, x_0)$ é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros \mathbb{Z} . Intuitivamente, dois laços com ponto inicial em x_0 são homotópicos se e só se eles dão o mesmo número de voltas, contadas algebricamente. 

Se X for conexo por caminhos é fácil ver que dados dois pontos x_0 e x_1 os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. De fato, se γ é um caminho indo de x_0 a x_1 , a todo laço $\alpha \in F^1(X, x_1)$ podemos fazer corresponder um laço $\gamma^{-1} \alpha \gamma \in F^1(X, x_0)$ e é fácil verificar que por meio dessa correspondência biunívoca se obtém um isomorfismo entre os dois grupos.

Sejam X e Y dois espaços, f uma aplicação contínua de X em Y . Mostremos que f induz uma aplicação

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

onde $y_0 = f(x_0)$, que é um homomorfismo.

De fato, dado $\{\alpha\} \in \pi_1(X, x_0)$, a aplicação f leva o caminho α num caminho $f \circ \alpha$ em Y que é um laço em y_0 . Então definimos a aplicação

$$\{\alpha\} \in \pi_1(X, x_0) \longrightarrow f_* (\{\alpha\}) = \{f \circ \alpha\} \in \pi_1(Y, y_0)$$

É imediato que é um homomorfismo:

$$f_* (\{\alpha\} \cdot \{\beta\}) = f_* (\{\alpha\}) \cdot f_* (\{\beta\})$$

pois

$$f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$$

Valem as seguintes propriedades evidentes:

1) Se f é uma aplicação contínua de X em Y , g uma aplicação contínua de Y em Z , se $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$, podemos definir as aplicações $f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $g_*: \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$, $(g \circ f)_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0)$ e vale

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

2) Se f e g são aplicações contínuas de X em Y e se

$$f \simeq g \quad (\text{rel. } x_0)$$

então

$$f_* = g_*$$

3) Se 1 é a aplicação idêntica de X sobre X , então 1_* é o automorfismo idêntico de $\pi_1(X, x_0)$

Então $\pi_1(X, x_0)$ é um invariante topológico.

2. Recobrimento

Todos os espaços que consideraremos a seguir serão espaços de Hausdorff.

Definição 7. Um espaço X diz-se localmente conexo por caminhos se para cada $x \in X$ e cada vizinhança U de x , existe uma vizinhança $V \subset U$ de x conexa por caminhos.

Proposição 7. Condição necessária e suficiente para que X seja localmente conexo por caminhos é que toda componente por caminhos de um aberto seja aberto.

A condição é suficiente. De fato, seja $x \in X$, U uma vizinhança de x . U contém um aberto A que contém x ; a componente por caminhos de x em A será uma vizinhança aberta V de x conexa por caminhos, portanto X é localmente conexo por caminhos.

Reciprocamente, se X é localmente conexo por caminhos, seja A um aberto e B uma componente conexa por caminhos de A . Dado $x \in B$, por hipótese existe uma vizinhança V de x contida em A e conexa por caminhos. Sendo conexa por caminhos, V está contida na componente por caminhos B de x em A , logo B é um aberto.

Se X é localmente conexo por caminhos, valem as propriedades:

a) X é localmente conexo no sentido usual pois toda vizinhança de um ponto contém uma vizinhança conexa.

b) Existem vizinhanças conexas por caminhos arbitrariamente pequenas. De fato, pela própria definição uma vizinhança qualquer contém uma vizinhança localmente conexa por caminhos.

c) Toda componente conexa é conexa por caminhos.

De fato, seja A componente conexa de X , B uma componente conexa por caminhos de A ; então B é aberta em A . Suponhamos que houvesse outras componentes, seja C a união delas. C seria aberto em A , e $B \cup C = A$, o que é absurdo. Então $B = A$.

De c) segue que se X é localmente conexo por caminhos, e é conexo em sentido global, então é conexo por caminhos em sentido global.

Definição 8 - Sejam X e \tilde{X} espaço conexos, localmente conexos por caminhos. Uma aplicação contínua p de \tilde{X} sobre X é dita um recobrimento se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x tal que a restrição de p a cada componente de $p^{-1}(U)$ seja um homeomorfismo sobre U .

\tilde{X} chama-se espaço de recobrimento, X espaço de base e p projeção.

Toda vizinhança U de x com a propriedade acima (isto é, tal que se $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e U é a componente de $p^{-1}(U)$ que contém \tilde{x} então p aplica U homeomorficamente em U) chama-se vizinhança admissível de x .

p é um homeomorfismo local: dado $\tilde{x} \in \tilde{X}$, seja $x = p(\tilde{x})$ e U uma vizinhança admissível aberta de x ; a componente de \tilde{x} em $p^{-1}(U)$ é uma vizinhança aberta \tilde{U} de \tilde{x} e a restrição $p|_{\tilde{U}}$ é um homeomorfismo de \tilde{U} sobre U .

Lema. A aplicação $p: \tilde{X} \rightarrow X$ é aberta.

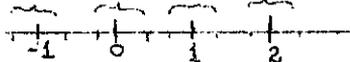
Isto é, se \tilde{A} é aberto em \tilde{X} , $p(\tilde{A})$ é aberto em X . De fato, ponhamos $p(\tilde{A}) = A$, tomemos $x \in A$ e $\tilde{x} \in \tilde{A}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$; seja \tilde{U} uma vizinhança (aberta) de \tilde{x} tal que $p|_{\tilde{U}}$ seja homeomorfismo. Então $\tilde{U} \cap \tilde{A}$ é aberto em \tilde{U} e sua imagem $p(\tilde{U} \cap \tilde{A})$ será também um aberto em $p(\tilde{U})$. Mas $x \in p(\tilde{U} \cap \tilde{A}) \subset A$, donde A é aberto.

Observação: A condição sobre X e \tilde{X} de serem localmente conexos por caminhos está sempre satisfeita em uma superfície de Riemann pois todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa a D .

Exemplos

1) A aplicação $R \rightarrow S^1$ da reta real sobre o círculo S^1 dos números complexos de módulo 1, definida por $x \rightarrow e^{2\pi ix}$ é um recobrimento.

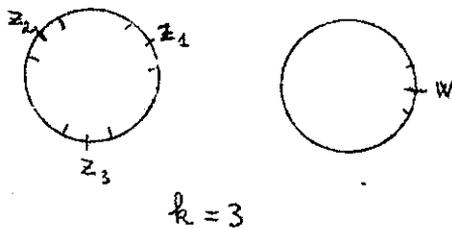
De fato, fixemos um ponto em S^1 , por exemplo o ponto 1: ele é imagem dos pontos $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ É evidentemente possível determinar uma vizinhança do ponto



1 $\in S^1$ suficientemente pequena para que sua imagem inversa seja composta de vizinhanças

disjuntas dos pontos inteiros da reta. Para cada uma, a restrição da aplicação $x \rightarrow e^{2\pi ix}$ será um homeomorfismo.

2) a aplicação $p: S^1 \rightarrow S^1$ dada por $p(z) = z^k$ onde k é um número natural. Dado $w = e^{i\theta} \in S^1$, teremos k números z tais que $z^k = w$, isto é, k números $z_i \in S^1$ que são levados em w por p , dados pelos argumentos $\theta_\nu = \frac{\theta}{k} + \frac{2\pi\nu}{k}$, $0 \leq \nu \leq k-1$.



Uma vizinhança de w tem por imagem inversa a união das vizinhanças desses pontos z_i , e é sempre possível determinar uma vizinhança suficientemente pequena de w para que as componentes dos z_i nessa imagem inversa sejam disjuntas.

Uma tal vizinhança de w é então admissível.

3) Seja G um grupo topológico satisfazendo às condições exigidas para espaços de recobrimento, isto é, conexo e localmente conexo por caminhos. Seja H um subgrupo discreto de G , e consideremos a relação de equivalência em G

$$x \sim y \quad \text{se} \quad xy^{-1} \in H$$

G então se decompõe em classes de equivalência, que são classes à esquerda Hx relativamente a H . Seja G/H o quociente, com a topologia natural.

G é espaço de recobrimento de G/H . De fato, a aplicação

$$p: G \rightarrow G/H$$

é uma aplicação contínua pela definição da topologia de G/H e aberta, visto que a relação " \sim " é aberta em G . Para provar que existem vizinhanças admissíveis para um ponto qualquer basta mostrar para o elemento unidade.

Seja e o elemento unidade de G ; como H é discreto, existe uma vizinhança V de e que não contém outros elementos de H . Tomemos agora uma vizinhança aberta e conexa U de e tal que $U \cdot U^{-1} \subset V$. Então $U' = p(U)$ é vizinhança admissível da projeção do elemento unidade em G/H . De fato,

$$p^{-1}(U') = \bigcup_{h \in H} hU$$

o basta verificar que $hU \cap h'U = \emptyset$ para $h \neq h'$. Mas se não fôsse, existiriam $x, x' \in U$ tais que

$$hx = h'x'$$

então

$$xx'^{-1} = h'h^{-1} \in H$$

com $h'h^{-1} \neq e$; nas $xx'^{-1} \in U \cdot U^{-1} \subset V$, o que vai contra a hipótese de V não conter elementos de H além de e .

Assim se tomarmos, por exemplo, em \mathbb{R}^2 o subgrupo H dos elementos de coordenadas inteiras, sabemos que o espaço quociente é o toro a duas dimensões T^2 . Então

$$p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$$

é um recobrimento, pois H é discreto.

Proposição 8. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, Y um espaço conexo por caminhos. Sejam f, g duas aplicações contínuas de Y em \tilde{X} tais que

$$1) p \circ f = p \circ g$$

$$2) \exists y_0 \in Y \text{ tal que } f(y_0) = g(y_0)$$

Então as aplicações f e g coincidem em todo o espaço Y .

Demonstração. Seja

$$A = \{ y \in Y \mid f(y) = g(y) \}$$

e provemos que $A = Y$. A é certamente fechado pois f e g são contínuas, e $A \neq \emptyset$ por 2). Se provarmos que A é também aberto, como Y é conexo estará provado que $A = Y$.

Tomemos $y \in A$ e seja U uma vizinhança admissível aberta de $p \circ f(y)$ em X . Seja \tilde{U} a componente de $p^{-1}(U)$ que contém $f(y) = g(y)$; \tilde{U} é aberta logo existem vizinhanças W_1 e W_2 tais que

$$f(W_1) \subset U$$

$$g(W_2) \subset U$$

A vizinhança $W = W_1 \cap W_2$ de y satisfaz a essas duas inclusões, isto é,

$$f(W) \subset U, \quad g(W) \subset U$$

Então, dado $z \in W$, tomamos $f(z) = g(z)$. Do fato, $p \circ f = p \circ g$, logo $f(z)$ e $g(z)$ têm a mesma projeção: $p \circ f(z) = p \circ g(z)$ em U . Mas $f(z), g(z) \in \tilde{U}$ e em \tilde{U} a restrição de p é um homeomorfismo do \tilde{U} sobre U , logo pontos de \tilde{U} que têm a mesma projeção coincidem.

Segue-se pois que $W \subset A$, e A é aberto.

3. Levantamento de homotopias

Teorema 1. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, e Y um espaço topológico. Seja f uma aplicação contínua de Y em X , G uma aplicação contínua de $Y \times I$ em X tal que

$$G(y, 0) = p \circ f(y)$$

Então existe uma aplicação contínua F de $Y \times I$ em X tal que

$$F(y, 0) = f(y) \quad \text{e} \quad p \circ F = G$$

Isto é, existe uma homotopia F de f que se projeta na homotopia G .

Demonstração. Seja $y \in Y$ fixado, e consideremos o produto $\{y\} \times I$. Para cada ponto $(y, t) \in \{y\} \times I$, podemos determinar uma vizinhança produto de uma vizinhança V_t de y por uma vizinhança R_t de t , suficientemente pequena para que sua imagem pela aplicação contínua G esteja contida numa vizinhança admissível U do espaço X . Como $\{y\} \times I$ é compacto, pode ser coberto por um número finito de tais vizinhanças: $V_1 \times R_1, \dots, V_n \times R_n$, sendo que a imagem de cada uma está contida numa vizinhança admissível de X

$$G(V_i \times R_i) \subset U_i$$

e podemos tomar os R_i como intervalos consecutivos $[t_{i-1}, t_i]$ cobrindo I . Chamemos de G_i a restrição de G a $V_i \times R_i$.

Dado U_i , se \tilde{U}_i é uma componente de $p^{-1}(U_i)$ podemos definir um homeomorfismo φ_i de U_i sobre \tilde{U}_i , inverso da restrição $p|_{\tilde{U}_i}$. Tomando $W_i = f^{-1}(\tilde{U}_i) \cap V_i$, $\varphi_i \circ G_i$ será uma aplicação contínua F_i de $W_i \times R_i$ em \tilde{X} cuja projeção é G_i .

Escolhamos agora os \tilde{U}_1 do modo conveniente. Como $(y, 0) \in V_1 \times R_1$, e $G(y, 0) = p \circ f(y)$, $f(y)$ vai em U_1 por p . Tomemos então para U_1 a componente de $p^{-1}(U_1)$ que contém $f(y)$. Escolhida U_1 , fica determinada a função $F_1 = \varphi_1 \circ G_1$, e $F_1(z, 0) = f(z)$ para $z \in W_1$ pois a projeção de $F_1(z, 0)$ é $G_1(z, 0) = p \circ f(z)$.

Tomemos agora para \tilde{U}_2 a componente de $p^{-1}(U_2)$ que contém $F_1(y, t_1)$. A função $F_2 = \varphi_2 \circ G_2$ correspondente coincidirá com F_1 nos pontos de $W_2 \times \{t_1\}$ em que ambas são definidas, pois nesse conjunto os valores de F_1 e F_2 estão em $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ e se projetam em $G_1(W_2 \times \{t_1\}) = G_2(W_2 \times \{t_1\})$.

Definimos assim sucessivamente as funções F_i definidas em vizinhanças $W_i \times R_i$. Tomando agora $W_y = \bigcap W_i$ cada F_i será definida em $W_y \times R_i$ e além disso F_{i-1} e F_i coincidem em $W_y \times \{t_{i-1}\}$.

Tomemos agora a aplicação F_y de $W_y \times I$ que em cada trecho $W_y \times R_i$ coincide com a F_i correspondente: obtém-se uma aplicação contínua de $W_y \times I$ em X tal que $p \circ F_y = G|_{W_y \times I}$ e que $F(z, 0) = f(z)$ para $z \in W_y$.

Fazendo isto para dada $y \in Y$, é fácil verificar que se para dois pontos y_1 e y_2 as vizinhanças W_{y_1} e W_{y_2} têm pontos comuns, então F_{y_1} e F_{y_2} coincidem em $(W_{y_1} \cap W_{y_2}) \times I$.

Do fato, ambas coincidem com f em $(W_{y_1} \cap W_{y_2}) \times \{0\}$, e basta usar a proposição 8.

Finalmente, definimos $F: Y \times I \rightarrow X$ por

$$F(w, t) = F_y(w, t) \quad \text{se} \quad w \in W_y$$

A aplicação F é contínua e tem as propriedades exigidas.

Observação. Um caminho $\lambda: I \rightarrow X$ pode ser interpretado como uma homotopia λ^* de uma aplicação de um conjunto com um único elemento $\{a\}$ em X , pondo

$$\lambda^*(a, t) = \lambda(t) \quad \text{para } t \in I.$$

Seja então $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, λ um caminho de X

$$\lambda: I \rightarrow X$$

e λ'_0 a aplicação

$$\lambda'_0: \{0\} \rightarrow X$$

tal que $p \circ \lambda'_0 = \lambda(0)$; pelo teorema anterior existe um caminho

$$\lambda': I \rightarrow X$$

tal que $p \circ \lambda'(t) = \lambda(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Pela proposição 8, êsse caminho que se projeta em λ é único.

Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento; fixemos $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ como base do grupo fundamental em X e \tilde{X} respectivamente. A aplicação p induz, como vimos no parágrafo anterior, uma aplicação

$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

definida por

$$p_*({\tilde{\alpha}}) = \{p{\tilde{\alpha}}\} \quad \text{para } {\tilde{\alpha}} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

Proposição 9. p_* é um isomorfismo de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ em $\pi_1(X, x_0)$

Demonstração. p_* é um homomorfismo, e devemos provar que o núcleo de p_* é $\{\varepsilon_{\tilde{x}_0}\}$. Seja então ${\tilde{\alpha}} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e suponhamos que

$p_*({\tilde{\alpha}}) = 1$, isto é, que

$$\{p{\tilde{\alpha}}\} = \{\varepsilon_{x_0}\}$$

Então existe uma homotopia entre $p{\tilde{\alpha}}$ e ε_{x_0} , isto é, uma aplicação

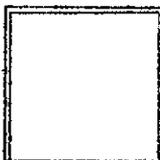
$$G: I \times I \rightarrow X$$

tal que $G(t,0) = p{\tilde{\alpha}}(t)$ e $G(t,1) = x_0$, mantendo x_0 fixo.

Pelo teorema 1, existe então uma homotopia $F: I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ F = G$ e $F(t,0) = \tilde{\alpha}(y)$.

Seja E a parte do contorno de $I \times I$ dada por

$$E = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{1\} \times I)$$



Temos

$$(p \circ F)(E) = G(E) = x_0$$

portanto

$$F(E) \subset p^{-1}(x_0)$$

e como $p^{-1}(x_0)$ é discreto e $F(E)$ é conexo, $F(E)$ se reduz a um ponto. De $F(0,0) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$, vem $F(E) = \tilde{x}_0$ e a homotopia F leva $\tilde{\alpha}$ em $\mathcal{E}_{\tilde{x}_0}$:

$$\tilde{\alpha} \simeq \mathcal{E}_{\tilde{x}_0} \quad (\text{rel. } (0,1)), \text{ donde } \{\tilde{\alpha}\} = 1.$$

Exemplos

1) Seja $p: S^1 \rightarrow S^1$, onde S^1 é a circunferência $|z| = 1$, dado por $p(z) = z^k$, k inteiro $\neq 0$. Temos $\pi_1(S^1) = Z$. A um elemento n de $\pi_1(S^1)$ (caminho com n voltas) corresponde por p_* o elemento kn . Isto é, $p_*: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ é o isomorfismo $Z \rightarrow k \cdot Z \subset Z$.

Teorema 2. Seja $H = p_* \pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ e $A = p^{-1}(x_0)$. Então o recobrimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ induz uma correspondência biunívoca \bar{p} entre os elementos de A e as classes à direita de $\pi_1(X, x_0)$ módulo H .

Demonstração. Tomemos $\tilde{x} \in A$ e um caminho $\tilde{\alpha}$ unindo o ponto base \tilde{x}_0 a \tilde{x} . Definimos

$$\bar{p}(\tilde{x}) = H \cdot \{p\tilde{\alpha}\}$$

Esta definição não depende da escolha de $\tilde{\alpha}$, pois se $\tilde{\beta}$ é outro caminho unindo \tilde{x}_0 a \tilde{x} , então $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\{p(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})\} = \{p\tilde{\alpha}\}\{p\tilde{\beta}\}^{-1} \in H$, $\{p\tilde{\alpha}\} \in H \cdot \{p\tilde{\beta}\}$. Portanto

$$\bar{p}: A \rightarrow \pi_1(X, x_0)/H$$

é bem definida.

Seja $H \cdot \{\alpha\}$ uma classe à direita em $\pi_1(X, x_0)/H$. Dado o caminho α em X com $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, sabemos que existe um caminho $\tilde{\alpha}$ em \tilde{X} que se projeta em α e tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Seja $\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1)$, temos $p(\tilde{x}) = (p\tilde{\alpha})(1) = \alpha(1) = x_0$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Mas

$$\bar{p}(\tilde{x}) = H \cdot \{p \circ \tilde{\alpha}\} = H \cdot \{\alpha\}$$

isto é, existe $\tilde{x} \in A$ levado em $H \cdot \{\alpha\}$ por \bar{p} : a aplicação \bar{p} é sobre

\bar{p} é biunívoca. De fato, sejam $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in A$ tais que $\bar{p}(\tilde{x}_1) = \bar{p}(\tilde{x}_2)$.

Sejam $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ caminhos ligando \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 respectivamente, então vem, pela definição de \tilde{p} :

$$H = \{p\tilde{\alpha}_1\} = H \cdot \{p\tilde{\alpha}_2\}$$

isto é, existe $h \in H$ tal que

$$\{p\tilde{\alpha}_1\} = h \cdot \{p\tilde{\alpha}_2\}$$

Ora $H = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, logo dado $h \in H$ existe um laço $\tilde{\gamma}$ em \tilde{x}_0 tal que

$h = p_* (\{\tilde{\gamma}\}) = \{p\tilde{\gamma}\}$. Temos pois

$$\{p\tilde{\alpha}_1\} = \{p\tilde{\gamma}\} \cdot \{p\tilde{\alpha}_2\} = \{p \cdot (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2)\}$$

Seja então $G: I \times I \rightarrow X$ a homotopia entre $p\tilde{\alpha}_1$ e $p(\tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2)$, tal que

$G(y, 0) = p\tilde{\alpha}_1(y)$. Pelo teorema 1, existe uma homotopia $F: I \times I \rightarrow X$ tal

que $p \circ F = G$ e $F(y, 0) = \tilde{\alpha}_1(y)$. Seja $\tilde{\beta} = F(y, 1)$. Como $p \circ F = G$, temos

$p\tilde{\beta} = p(\tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2)$, logo $p\tilde{\beta}$ é um laço em x_0 , e $\tilde{\beta}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Por outro lado, $\tilde{\beta} \simeq \tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{x}_1$. Como $p^{-1}(x_0)$ é discreto, $\tilde{\beta}(1) = \tilde{x}_1$. Temos

$$\begin{aligned} p \cdot \tilde{\beta} &= p(\tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2) \\ \tilde{\beta}(0) &= \tilde{x}_0 = \tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2(0) \end{aligned}$$

logo pela proposição 8 $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2$ coincidem e

$$\tilde{\beta}(1) = \tilde{x}_1 = \tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_2(1) = \tilde{\alpha}_2(1) = \tilde{x}_2$$

Então $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$, o que prova que \tilde{p} é biunívoca.

Definição 9. O número de folhas sobre X (ou a multiplicidade de $\tilde{X} \rightarrow X$) é definido como o número cardinal de $p^{-1}(x_0)$

Como é também o índice de H em $\pi_1(X, x_0)$, esse número é independente de x_0 .

Exemplos

1) $p: S^1 \rightarrow S^1$, (onde S^1 é o círculo $|z| = 1$) dado por $z \rightarrow z^k$, k número natural, é um recobrimento com k folhas.

Dado $x_0 \in X$, e escolhido $\tilde{x}_0 \in A = p^{-1}(x_0)$, definimos pois a aplicação p_* e o grupo H . Escolhamos agora em A um outro ponto \tilde{x}_1 , e sejam

p_*^1 a aplicação de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ em $\pi_1(X, x_0)$ induzida por p e H^1 a imagem do $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ por p_*^1 .

Proposição 10. H e H^1 são subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$:

$$H = \{\gamma\} \cdot H^1 \{\gamma\}^{-1}$$

onde γ é a projeção de um caminho unindo \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 .

Demonstração. Seja $\tilde{\gamma}$ um caminho em \tilde{X} unindo \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 e consideremos o isomorfismo

$$\varphi : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

definido por

$$\{\tilde{\beta}\} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow \{\tilde{\gamma} \tilde{\beta} \tilde{\gamma}^{-1}\} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

Dado agora $h \in H$, seja $\tilde{\alpha}$ um laço em \tilde{x}_0 tal que $p_*\{\tilde{\alpha}\} = h$ e escolhamos um laço $\tilde{\beta}$ em \tilde{x}_1 tal que $\varphi(\tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$. Então temos

$$\begin{aligned} h &= p_*\{\tilde{\alpha}\} = p_*\{\tilde{\gamma} \tilde{\beta} \tilde{\gamma}^{-1}\} = \{p(\tilde{\gamma} \tilde{\beta} \tilde{\gamma}^{-1})\} = \\ &= \{p \tilde{\gamma}\} \cdot \{p \tilde{\beta}\} \cdot \{p \tilde{\gamma}\}^{-1} \end{aligned}$$

Mas $\tilde{\beta} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, portanto $\{p \tilde{\beta}\} = h^1 \in H^1$, e temos

$$h = \{p \tilde{\gamma}\} \cdot h^1 \cdot \{p \tilde{\gamma}\}^{-1}$$

sendo $p \tilde{\gamma}$ um laço em x_0 (pois as duas extremidades de $\tilde{\gamma}$ se projetam em x_0), independente de h . Pondo $p \tilde{\gamma} = \gamma$, temos

$$H = \{\gamma\} \cdot H^1 \cdot \{\gamma\}^{-1}$$

Um recobrimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ diz-se regular se H for normal em $\pi_1(X, x_0)$. Neste caso a proposição diz que H é independente da escolha de $\tilde{x}_0 \in A$.

Ora, dado um caminho γ em x_0 , $\{\gamma\} \in H$ se o levantamento de γ para \tilde{x}_0 for fechado. Se H for normal, então o levantamento de γ para qualquer outro ponto $\tilde{x}_1 \in A$ será também fechado.

Se, ao contrário, H não for normal, H será distinto de um dos seus conjugados H^1 , o qual corresponde a um certo $\tilde{x}_1 \in A$. Existirá então um laço γ em x_0 cuja classe pertence a H e não a H^1 , isto é, cujo levanta-

tamento em \tilde{x}_0 é fechado e em \tilde{x}_1 não.

Então, um recobrimento é regular se e somente se os caminhos de \tilde{X} que recobrem um caminho fechado em X forem sempre ou todos fechados ou nenhum fechado.

4. Transitividade de recobrimentos.

Sejam $p: \tilde{X} \rightarrow X$ e $p': \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ dois recobrimentos. É fácil ver que a aplicação composta não é necessariamente um recobrimento. De fato, seja U admissível para p e seja \tilde{U} uma componente de $p^{-1}(U)$; \tilde{U} não é necessariamente admissível para p' . Por outro lado, seja \tilde{V} admissível por p' , então $p(\tilde{V} \cap \tilde{U})$ é admissível por p , e a componente $\tilde{V} \cap \tilde{U}$ de sua imagem inversa é admissível por p' . Mas se considerarmos simultaneamente todas as componentes de $p^{-1}(U)$, é possível que a intersecção de todas as projeções $p(\tilde{V} \cap \tilde{U})$ não dê uma vizinhança em X . Procuremos pois condições para que $p \circ p'$ seja um recobrimento.

Lema. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Se U é um aberto em X conexo por caminhos, tal que para todo $x \in U$ um laço α de U com ponto base x é homotópico em X à aplicação constante ε_x , então U é admissível para p .

Demonstração. Seja \tilde{U} uma componente de $p^{-1}(U)$; basta provar que $p|_{\tilde{U}}$ é uma aplicação biunívoca sobre U .

Suponhamos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{U}$ tais que $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x \in U$ e seja $\tilde{\alpha}$ um caminho ligando \tilde{x}_1 a \tilde{x}_2 ; $p\tilde{\alpha}$ é um laço α em x e existe uma homotopia $G: I \times I \rightarrow X$ que leva α em ε_x deixando o ponto x fixo. Pelo teorema do levantamento, existe uma homotopia

$$F: I \times I \rightarrow \tilde{X}$$

tal que $pF = G$ e que $F(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$.

Seja (ver figura p. 34)

$$E = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{1\} \times I)$$

G leva E em x, logo F deve levar E em $p^{-1}(x)$, que é discreto. Então $F(E)$ se reduz a um ponto, pois F é contínua. Ora $F(E)$ contém os pontos $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_1$ e $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$ logo $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$.

Consideremos a inclusão:

$$i: U \rightarrow X$$

ela induz uma aplicação

$$i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

Dizer que a vizinhança U satisfaz às condições do lema significa dizer que i_* é a aplicação trivial, que leva $\pi_1(U, x)$ no elemento unidade e_x de $\pi_1(X, x)$.

Um espaço topológico X diz-se localmente simplesmente conexo no todo se cada ponto U tal que i_* é trivial.

Teorema 3. Sejam $p: \tilde{X} \rightarrow X$ e $p': \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ dois recobrimentos. Se X é localmente simplesmente conexo no todo, então a aplicação composta $p \circ p': \tilde{X}' \rightarrow X$ é um recobrimento.

Demonstração. Seja $U \subset X$ uma vizinhança nas condições do lema, isto é, aberta, conexa por caminhos, tal que $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ seja trivial. Pelo lema, U é admissível. Seja \tilde{U} uma componente de $p^{-1}(U)$, mostremos que \tilde{U} satisfaz às mesmas condições.

De fato, como $p|_{\tilde{U}}$ é um homeomorfismo, \tilde{U} é aberta e conexa por caminhos. Por outro lado, formemos o seguinte diagrama de aplicações induzidas entre os grupos

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{U}, \tilde{x}) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, \tilde{x}) \\ (p|_{\tilde{U}})_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(U, x) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Como $p|_{\tilde{U}}$ é um homeomorfismo, $(p|_{\tilde{U}})_*$ é um isomorfismo sobre; quanto a p_* , tem núcleo $\{0\}$. O diagrama é comutativo, e a imagem de $\pi_1(\tilde{U}, \tilde{x})$ por $i_* \circ (p|_{\tilde{U}})_*$ é $\{0\}$, logo também $p_* \circ i_*(\pi_1(\tilde{U}, \tilde{x})) = \{0\}$, e pela observa-

ção sobre o núcleo de $\tilde{f}_*(\pi_1(U, x)) = \{0\}$,

Pelo lema, \tilde{U} é admissível, o que demonstra o teorema.

5. Levantamento de aplicações.

Teorema 4. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento, e $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ com $p(\tilde{x}_0) = x_0$ pontos de base. Seja Y espaço conexo, localmente conexo por caminhos, e seja

$$f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

uma aplicação contínua. A condição necessária e suficiente para que exista uma aplicação contínua

$$\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

tal que $p \circ \tilde{f} = f$ é que

$$(2.1) \quad f_* \pi_1(Y, y_0) \subset p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

Demonstração. A condição é necessária, pois se $p \circ \tilde{f} = f$ então $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$ e temos

$$f_* \pi_1(Y, y_0) = p_* \circ \tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

Reciprocamente, suponhamos (2.1) satisfeita. Se Y é localmente conexo por caminhos e é conexo, Y é conexo por caminhos. Então dado $y \in Y$, tomemos um caminho α ligando y_0 a y . $f(\alpha)$ será um caminho com ponto inicial x_0 , podemos levantá-lo a um caminho $\tilde{\alpha}$ com ponto inicial \tilde{x}_0 . Seja \tilde{x} o ponto final de $\tilde{\alpha}$, então temos

$$\tilde{f}(y) = \tilde{x}$$

1) \tilde{f} é independente da escolha de α . De fato, seja β outro caminho ligando y_0 a y , $\tilde{\beta}$ o caminho de ponto inicial \tilde{x}_0 que cobre $f(\beta)$, devemos mostrar que o ponto final de $\tilde{\beta}$ é o mesmo. Mas $\alpha\beta^{-1}$ é um laço em y_0 , logo $f(\alpha\beta^{-1}) = f(\alpha)f(\beta)^{-1}$ é um laço em x_0 . De (2.1) vem que o caminho em \tilde{x}_0 que recobre $f(\alpha)f(\beta)^{-1}$ é um laço. Ora, como o caminho em \tilde{x}_0 que recobre $f(\alpha)$ é $\tilde{\alpha}$, êsse laço pode ser escrito $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$, onde $\tilde{\gamma}$ recobre $f(\beta)^{-1}$ e tem ponto inicial \tilde{x} e ponto final \tilde{x}_0 . Então $\tilde{\gamma}^{-1}$ recobre $f(\beta)$ e tem ponto inicial \tilde{x}_0 , logo coincide com $\tilde{\beta}$ que portanto

(ou equivalentes) se existir um homeomorfismo $h: \tilde{X}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{X}_2$ tal que $p_2 h = p_1$.

Proposição 11. Se $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$ e $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ são recobrimentos tais que $p_{1*} \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*} \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ então existe um homeomorfismo $g_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \xrightarrow{\sim} (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ tal que $p_2 g_1 = p_1$.

Demonstração. Pelo corolário anterior, existe uma aplicação g_1 tal que $p_2 g_1 = p_1$ e uma aplicação $g_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ tal que $p_1 g_2 = p_2$. Então

$p_1 \circ (g_2 \circ g_1) = (p_1 \circ g_2) \circ g_1 = p_2 \circ g_1 = p_1$
isto é, $g_2 \circ g_1$ é a aplicação idêntica de \tilde{X}_1 ; analogamente, $g_1 \circ g_2$ é a aplicação idêntica de \tilde{X}_2 . Então g_1 e g_2 são homeomorfismos inversos um do outro.

Proposição 12. Condição necessária e suficiente para que

$$\begin{aligned} p_1: \tilde{X}_1 &\rightarrow X \\ p_2: \tilde{X}_2 &\rightarrow X \end{aligned}$$

sejam equivalentes é que definam subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Demonstração. Suponhamos que os recobrimentos sejam equivalentes e seja $h: \tilde{X}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{X}_2$ um homeomorfismo tal que $p_1 = p_2 h$. Sejam \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 pontos base em \tilde{X}_1 e \tilde{X}_2 tais que $p_1 \tilde{x}_1 = p_2 \tilde{x}_2$, seja $H_1 = p_{1*} \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ e $H_2 = p_{2*} \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. Temos $p_{1*} = p_{2*} h_*$ e $p_2 h \tilde{x}_1 = p_2 \tilde{x}_2$. Então,

$$H_2 = p_{2*} \pi_1(\tilde{X}_2, h \tilde{x}_1)$$

é conjugado de H_2 (proposição 10), por outro lado, H_1 coincide com H_2 , donde H_1 e H_2 são conjugados.

Reciprocamente, seja

$$H_1 = \{\alpha\} \cdot H_2 \cdot \{\alpha\}^{-1}$$

$$H_1 \cdot \{\alpha\} = \{\alpha\} \cdot H_2$$

com $\{\alpha\} \in \pi_1(X, x_0)$. Escolhamos $\tilde{\alpha}_1$ em \tilde{X}_1 e $\tilde{\alpha}_2$ em \tilde{X}_2 recobrimdo. Seja

$\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{x}_1$ e $\tilde{\alpha}_2(0) = \tilde{x}_2$. Então

$$p_{1*} \pi_1(X_1, \tilde{x}_1) = p_{2*} \pi_2(X_2, \tilde{x}_2)$$

e a equivalência segue da proposição anterior.

6. Transformações de recobrimento.

Definição 11. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Chamamos transformação de recobrimento a um homeomorfismo ψ de \tilde{X} sobre X tal que $p \psi = p$.

Evidentemente as transformações de recobrimento formam um grupo, que indicaremos com a notação $G(\tilde{X}|X)$.

Sejam $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ com $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ pontos de base. Seja $H = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, N o normalizador de H em $\pi_1(X, x_0)$, isto é,

$$N = \left\{ g \in \pi_1(X, x_0) \mid gHg^{-1} \subset H \right\}$$

Proposição 13. $G(\tilde{X}|X) \approx N/H$

Demonstração. Um elemento $\varphi \in G(\tilde{X}|X)$ fica completamente determinado por seu valor para \tilde{x}_0 . Como $p\varphi(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_0)$, temos $\varphi(\tilde{x}_0) \in A = p^{-1}(x_0)$. A correspondência $\varphi \rightarrow \varphi(\tilde{x}_0)$ é uma aplicação biunívoca λ de $G(\tilde{X}|X)$ em A . Composto λ com a aplicação biunívoca $\bar{p}: A \leftrightarrow \pi_1(X, x_0)/H$ do teorema 2, obtemos uma aplicação biunívoca

$$\bar{p} \lambda : G(\tilde{X}|X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)/H.$$

definida da seguinte maneira: se $\tilde{\alpha}$ é um caminho unindo \tilde{x}_0 a $\varphi(\tilde{x}_0)$ então $\bar{p} \lambda(\varphi) = H \cdot \{p\tilde{\alpha}\}$.

Ora, temos

$$p_* \pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{x}_0)) = \{p\tilde{\alpha}\} \cdot H \cdot \{p\tilde{\alpha}\}^{-1}$$

pela proposição 10, e, por ser $p\varphi = p$,

$$H = p_* \pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{x}_0))$$

Então

$$H = \{p\tilde{\alpha}\} \cdot H \cdot \{p\tilde{\alpha}\}^{-1}$$

e $\{p \tilde{\alpha}\} \in N$, logo a imagem de $G(\tilde{X}|X)$ por $\bar{p} \lambda$ está contida em N/H . É fácil verificar além disso que

$$\bar{p} \lambda : G(\tilde{X}|X) \rightarrow N/H$$

é um homomorfismo. De fato, se $\tilde{\alpha}$ liga \tilde{x}_0 a $\psi(\tilde{x}_0)$, $\tilde{\alpha}'$ liga \tilde{x}_0 a $\psi'(\tilde{x}_0)$, então $\psi'(\tilde{\alpha})$ liga $\psi'(\tilde{x}_0)$ a $\psi'\psi(\tilde{x}_0)$ e $\tilde{\alpha}' \cdot \psi'(\tilde{\alpha})$ liga \tilde{x}_0 a $\psi'\psi(\tilde{x}_0)$ e temos

$$\begin{aligned} \bar{p} \lambda (\psi' \psi) &= \bar{p} (\tilde{\alpha}' \cdot \psi'(\tilde{\alpha})) = H. \{p(\tilde{\alpha}' \cdot \psi'(\tilde{\alpha}))\} = H. \{p\tilde{\alpha}'\} \{p\psi'(\tilde{\alpha})\} = \\ &= H. \{p\tilde{\alpha}'\} \cdot \{p\tilde{\alpha}\} = H. \{p\tilde{\alpha}\} \cdot H. \{p\tilde{\alpha}\} = \bar{p} \lambda (\psi') \cdot \bar{p} \lambda (\psi) \end{aligned}$$

Além disso, $\bar{p} \lambda$ é aplicação sobre N/H , pois dado $\{p\tilde{\alpha}\}$, se \tilde{x} é o ponto final do levantamento de $p\tilde{\alpha}$ em \tilde{x}_0 , a transformação ψ correspondente a \tilde{x} existe se $\{p\tilde{\alpha}\} \in N$ pela proposição 11 e temos

$$\bar{p} \circ \lambda (\psi) = H. \{p\tilde{\alpha}\}$$

Então, $\bar{p} \lambda$ é um isomorfismo sobre N/H .

Corolário. Se $p: \tilde{X} \rightarrow X$ é regular, $G(\tilde{X}|X) \approx \prod_1(X, x_0)/H$. Em particular, se \tilde{X} é simplesmente conexo, $G(\tilde{X}|X) \approx \prod_1(X, x_0)$.

7. Existência de recobrimento.

Definição 12. Se \tilde{X} é simplesmente conexo, o recobrimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ se diz recobrimento universal.

Do corolário do teorema 4 segue então que se $\tilde{X}' \rightarrow X$ é qualquer outro recobrimento, existe um recobrimento $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$.

Da proposição 11 segue que dois recobrimentos universais são equivalentes.

Proposição 14. Condição necessária para que X tenha um recobrimento universal é que seja localmente simplesmente conexo no todo.

Demonstração. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento universal. Seja U admissível para p , \tilde{U} uma componente de $p^{-1}(U)$ e consideremos o diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\tilde{U}) & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & \pi_1(\tilde{X}) \\
 (p|\tilde{U})_* \downarrow & & \downarrow p_* \\
 \pi_1(U) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X)
 \end{array}$$

onde \tilde{i}_* e i_* são induzidas pelas inclusões $\tilde{i}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{X}$ e $i: U \rightarrow X$. Como X é simplesmente conexo, $i_* = 0$. Mas $(p|\tilde{U})_*$ é um isomorfismo, o diagrama é comutativo, logo $i_* = 0$, o que prova o teorema.

Se X é conexo e localmente conexo por caminhos, a condição é também suficiente, precisamente, vale o teorema de existência:

Teorema 5. Seja X conexo, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo no todo. Seja H um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ então existe um recobrimento $p: \tilde{X} \rightarrow X$ tal que $p_* \pi_1(X, \tilde{x}_0) = H$ com um \tilde{x}_0 conveniente.

Em particular, tomando $H = \{0\}$, segue do teorema que existe um recobrimento universal.

Demonstração. Seja P o conjunto dos caminhos em X começando em x_0 . Para $\alpha, \beta \in P$, definamos $\alpha \sim \beta$ se $\alpha(1) = \beta(1)$ e $\{\alpha\beta^{-1}\} \in H$; é uma relação de equivalência em P . Indiquemos por \tilde{X} o quociente P/R , por \tilde{x}_0 a classe do caminho constante ε_{x_0} . Para um caminho qualquer α a classe será indicada por $[\alpha]$. Como todos os caminhos de uma mesma classe têm o mesmo ponto final podemos definir uma aplicação

$$p: \tilde{X} \rightarrow X$$

dada por $p([\alpha]) = \alpha(1)$. Em particular, $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

1) Vamos introduzir em X uma topologia. Sejam $p[\alpha] = x$ e U uma vizinhança de x . Indiquemos por (α, U) o conjunto dos caminhos $\alpha \cdot \beta$ onde α é um caminho em U , e por $[\alpha, U]$ o conjunto das classes de equivalência determinadas pelos elementos de (α, U) . Provemos que $\alpha \sim \alpha'$ implica $[\alpha, U] = [\alpha', U]$. De fato $(\alpha\beta)(\beta^{-1}\alpha'^{-1}) = \alpha\alpha'^{-1}$ de modo

que $\alpha \sim \alpha'$ implica $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta$ e os elementos de (α, U) são equivalentes aos de (α', U) .

Chamaremos os conjuntos $[\alpha, U]$ de vizinhanças de $[\alpha]$. Temos:

a) $[\alpha] \in [\alpha, U]$: é evidente

b) se $[\alpha'] \in [\alpha, U]$, existe uma vizinhança de $[\alpha']$ contida em $[\alpha, U]$. De fato, $\alpha' \sim \alpha \cdot \beta$ onde β é um caminho em U . Se β' é um caminho em U começando no ponto final de β , $\alpha' \beta' \sim \alpha \beta \beta' \in (\alpha, U)$ logo

$[\alpha', U] \subset [\alpha, U]$, o que prova b). Reciprocamente temos evidentemente $[\alpha, U] \subset [\alpha', U]$ logo $[\alpha', U] = [\alpha, U]$

c) Se $[\alpha, U]$ e $[\alpha, U']$ são duas vizinhanças de $[\alpha]$, como $U \cap U'$ é uma vizinhança de x , $[\alpha, U \cap U']$ é vizinhança de $[\alpha]$. Mas

$$[\alpha, U \cap U'] \subset [\alpha, U] \cap [\alpha, U']$$

Portanto os $[\alpha, U]$ formam um sistema fundamental de vizinhanças.

2) Mostraremos agora que a topologia definida em \tilde{X} é de Hausdorff. Sejam $[\alpha_1], [\alpha_2] \in X$, distintos. Temos dois casos a considerar:

a) $p[\alpha_1] \neq p[\alpha_2]$; isto é, $\alpha_1(1) \neq \alpha_2(1)$. Escolhendo vizinhanças U_1 e U_2 de $\alpha_1(1)$ e $\alpha_2(1)$ respectivamente, com $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, teremos evidentemente $[\alpha_1, U_1] \cap [\alpha_2, U_2] = \emptyset$.

b) $p[\alpha_1] = p[\alpha_2]$. Escolhemos uma vizinhança U do ponto final desses caminhos tal que

$$i_*: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$$

é trivial. Afirmamos que $[\alpha_1, U] \cap [\alpha_2, U] = \emptyset$. De fato, suponhamos por absurdo $[\alpha] = [\alpha_1 \beta_1] = [\alpha_2 \beta_2]$ com β_1, β_2 caminhos em U unindo $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ a $\alpha(1)$. $\beta_1 \beta_2^{-1}$ é um caminho fechado em U , logo

$$\beta_1 \beta_2^{-1} \sim \epsilon_{\alpha(1)}. \text{ Mas } [\alpha_1 \beta_1] = [\alpha_2 \beta_2] \text{ implica } \{\alpha_1 \beta_1 \beta_2^{-1} \alpha_2^{-1}\} \in H$$

donde $\{\alpha_1 \alpha_2^{-1}\} \in H$ o $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ contra a hipótese.

3) $p: \tilde{X} \rightarrow X$ é contínua, pois se U é uma vizinhança de $p[\alpha] = \alpha(1)$, então $p([\alpha, U]) \subset U$.

4) X é conexo. Para provar isto, demonstraremos o seguinte

Lema. Se α é um caminho qualquer de X , existe um caminho $\tilde{\alpha}: I \rightarrow X$ tal que $p\tilde{\alpha} = \alpha$ e começando num ponto dado de $p^{-1}(\alpha(0))$.

Para $0 \leq \tau \leq 1$, definamos um caminho α_τ em X por $\alpha_\tau(t) = \alpha(\tau t)$. Seja β um caminho em X unindo x_0 a $\alpha(0)$ e definamos $\tilde{\alpha}(\tau) = [\beta \alpha_\tau]$. Temos $\tilde{\alpha}(0) = [\beta \alpha_0] = [\beta]$, e $p\tilde{\alpha}(\tau) = p[\beta \alpha_\tau] = (\beta \alpha_\tau)(1) = \alpha_\tau(1) = \alpha(\tau)$. Então se $\tilde{\alpha}(\tau)$ for contínua, é o caminho procurado. Seja U uma vizinhança de $\alpha(\tau_0)$, então $[\beta \alpha_{\tau_0}, U]$ é uma vizinhança de $\tilde{\alpha}(\tau_0)$. Seja V um intervalo aberto contendo τ_0 tal que $\alpha(V) \subset U$. Temos, pondo $\alpha_{\tau_0, \tau}(t) = \alpha(\tau_0 + t(\tau - \tau_0))$:

$$\tilde{\alpha}(\tau) = [\beta \alpha_\tau] = [\beta \alpha_{\tau_0} \cdot \alpha_{\tau_0, \tau}]$$

portanto, se $\tau \in V$, $\alpha_{\tau_0, \tau}$ é um caminho em U começando em $\alpha_{\tau_0}(1)$ e

$$\tilde{\alpha}(\tau) \in [\beta \alpha_{\tau_0}, U] \quad \text{logo } \tilde{\alpha} \text{ é contínua.}$$

Agora provemos que \tilde{X} é conexo por caminhos. Seja $[\alpha] \in \tilde{X}$, então α é um caminho em X começando em x_0 . No lema, escolhamos para β o caminho constante ε_{x_0} e seja $\tilde{\alpha}$ o caminho que cobre α e começa em $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$. Então $\tilde{\alpha}$ une \tilde{x}_0 a $\tilde{\alpha}(1) = [\varepsilon_{x_0} \alpha_1] = [\alpha_1] = [\alpha]$ o que prova que \tilde{X} é conexo por caminhos.

5) Existem vizinhanças admissíveis.

Em primeiro lugar, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ é aberta, porque se U é uma vizinhança de $p[\alpha]$, então $p[\alpha, U]$ contém a componente por caminhos de $p[\alpha]$ em U e esta é aberta.

Seja então $U \subset X$, aberta, conexa por caminhos, tal que $i_*: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ é trivial. Seja $A = p^{-1}(U)$ e consideremos os conjuntos $[\alpha, U]$ onde $[\alpha] \in A$. Estes conjuntos cobrem A e dois distintos são disjuntos pois se

$$[\alpha_1] \in [\alpha_2, U] \cap [\alpha_3, U]$$

então

$$[\alpha_1, U] = [\alpha_2, U] \quad \circ \quad [\alpha_1, U] = [\alpha_3, U]$$

logo

$$[\alpha_2, U] = [\alpha_3, U]$$

Além disso, cada $[\alpha, U]$ é conexa por caminhos. De fato, seja $[\alpha'] = [\alpha, \beta] \in [\alpha, U]$ onde β é um caminho em U começando em $p[\alpha]$, então pelo lema podemos cobrir β por um caminho $\tilde{\beta}$ em \tilde{X} começando em $[\alpha]$ e terminando em $[\alpha, \beta]$. Como $\tilde{\beta}(\tau) = [\alpha, \beta_\tau] \in [\alpha, U]$, $\tilde{\beta}$ é um caminho em $[\alpha, U]$ ligando $[\alpha]$ e $[\alpha']$, e $[\alpha, U]$ é conexa por caminhos.

Então os $[\alpha, U]$ com $[\alpha] \in A$ dão uma partição de A em que cada $[\alpha, U]$ é uma componente.

$p|_{[\alpha, U]}$ é biunívoca. De fato, sejam $[\alpha_1], [\alpha_2] \in [\alpha, U]$ com $p[\alpha_1] = p[\alpha_2]$. Então $\alpha_1 \sim \alpha\beta_1$ e $\alpha_2 \sim \alpha\beta_2$ com β_1, β_2 caminhos em U unindo $\alpha(1)$ a $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$, e $\{\alpha\beta_1\beta_2^{-1}\alpha^{-1}\} = \{\alpha\alpha^{-1}\} = \{1\} \in H$ pois $\beta_1\beta_2^{-1}$ é fechado, logo $\sim \varepsilon_{\alpha(1)}$. Então $\alpha_1 \sim \alpha_2$ e $[\alpha_1] = [\alpha_2]$.

Como p é aberta e contínua, segue que $p|_{[\alpha, U]}$ é um homeomorfismo.

6) \tilde{X} é localmente conexo por caminhos. Segue da propriedade correspondente para X e da existência de vizinhanças para as quais a restrição de p é um homeomorfismo.

Então $p: \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento.

Reta provar que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$. Seja α um caminho fechado em x_0 com $\{\alpha\} \in H$. Seja $\tilde{\alpha}$ um recobrimento de α começando em \tilde{x}_0 . Então $\tilde{\alpha}$ termina em $[\alpha] = \tilde{x}_0$ isto é, é um laço em \tilde{x}_0 , donde $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \supset H$. Seja agora $\tilde{\alpha}$ um laço em \tilde{x}_0 e $p\tilde{\alpha} = \alpha$. Então pela construção do caminho de recobrimento em 4), $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0 = [\alpha]$ donde $\alpha \sim \varepsilon_{x_0}$. Logo $\{\alpha\} \in H$ e $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset H$.

C.Q.D.

Exemplos

1) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um recobrimento universal. O grupo fundamental do toro \mathbb{T}^2 será então isomorfo ao grupo das transformações de recobrimento. Se o toro é determinado pelos números complexos α e β , as transformações que preservam a projeção são da forma

$$z \rightarrow z + m\alpha + n\beta \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Então o grupo $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é o grupo abeliano livre gerado por dois elementos: $\pi_1(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

8. Grupos que operam de maneira totalmente descontínua.

Consideremos um espaço Y e um grupo G de homeomorfismos de Y . Dizemos que G opera sobre Y de maneira totalmente descontínua se para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança U de y tal que se $g, g' \in G$, $g \neq g'$, então $g(U) \cap g'(U) = \emptyset$.

Então, se $g \neq e$, segue imediatamente que g não tem ponto fixo: $g(y) \neq y$ para todo $y \in Y$.

Proposição 15. Se G opera em Y de maneira totalmente descontínua então a projeção canônica $p: Y \rightarrow Y/G$ é um recobrimento.

Demonstração. 1) p é contínua e aberta, pela definição da topologia em Y/G .

2) Se U é aberta e conexa por caminhos em Y , satisfazendo à condição

$$g(U) \cap g'(U) = \emptyset \quad \text{se } g \neq g'$$

então $V = p(U)$ é admissível em Y/G . De fato, V é uma vizinhança e as componentes de $p^{-1}(V)$ são as vizinhanças gU , $g \in G$ que são disjuntas.

Seja $G(Y | (Y/G))$ o grupo das transformações do recobrimento de $p: Y \rightarrow Y/G$. Então, evidentemente

$$G \subset G(Y | (Y/G))$$

e por outro lado, dado $x \in Y/G$, se $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ existe $g \in G$ tal que $y_2 = g(y_1)$ donde resulta $G = G(Y | (Y/G))$.

Exemplo. Seja $Y = S^n$, G o grupo $\{e, a\}$ onde e é a transformação idêntica e a a transformação antípoda $a(\vec{x}) = -\vec{x}$. É um grupo que evidentemente opera de maneira totalmente descontínua e

$$S^n/G = P^n$$

onde P^n é o espaço projetivo real a n dimensões. Como a esfera S^n é simplesmente conexa segue que $\pi_1(P^n)$ é o grupo com dois elementos.

Nesta exposição seguimos de perto as notas de Spanier, "Algebraic Topology".

Capítulo III

1. O teorema fundamental sobre existência de recobrimento mostra que se T é um espaço topológico que admite recobrimento universal, o problema de classificar os espaços de recobrimento de T se reduz ao problema puramente algébrico de estudar os subgrupos de $\pi_1(T)$.

Como exemplo vamos classificar os recobrimentos do espaço \dot{D} obtido retirando do disco unitário D a origem:

$$\dot{D} = D - \{0\}$$

Para cada inteiro $n \geq 1$ consideremos o recobrimento

$$p_n: \dot{D}_n \longrightarrow \dot{D}$$

onde \dot{D}_n é o próprio espaço \dot{D} e p_n é definido por

$$p_n(z) = z^n$$

É fácil ver que se trata de um recobrimento com n folhas cujas transformações de recobrimento são

$$h_k(z) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot z \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

isto é

$$G(\dot{D}_n | \dot{D}) \approx \mathbb{Z}/(n)$$

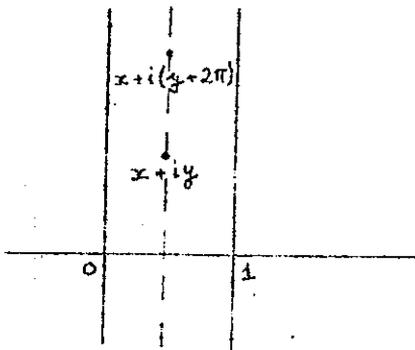
Podemos agora obter um recobrimento simplesmente conexo da seguinte maneira: consideremos a região \dot{D}_∞ do plano definida por:

$$\dot{D}_\infty = \{ z = x+iy \mid 0 < x < 1 \}$$

e a aplicação

$$p_\infty(x+iy) = x \cdot e^{iy}$$

de \dot{D}_∞ sobre \dot{D} . Como os pontos que têm a mesma projeção que $x + iy$ são os da fr-



ma $x+iy+2k\pi$, é fácil ver que p_∞ é um recobrimento, e como \dot{D}_∞ é simplesmente conexo, é um recobrimento universal. As transformações de recobrimento de p_∞ são evidentemente

$$Z \leftarrow \dot{D}_\infty \longrightarrow h_k(z) = h_k(x+iy) = x + i(y + 2k\pi)$$

com $k \in Z$. Logo

$$G(\dot{D}_\infty \mid \dot{D}) \approx Z$$

e como $\pi_1(\dot{D}) \approx G(\dot{D}_\infty \mid \dot{D})$, $\pi_1(\dot{D})$ é também isomorfo a Z .

Seja agora $p: \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ um recobrimento qualquer de \dot{D} , e vamos mostrar que é isomorfo ou a $p_\infty: \dot{D}_\infty \rightarrow \dot{D}$ ou a $p_n: \dot{D}_n \rightarrow \dot{D}$ para um certo inteiro n .

De fato, se $p_*\pi_1(\dot{D}) = 0$, então, pela proposição 11, $p: \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é equivalente a p_∞ . Caso contrário, $p_*\pi_1(\dot{D})$ terá índice finito em $\pi_1(\dot{D})$. Seja n esse índice, então, como $p_{n*}\pi_1(\dot{D}_n)$ tem também índice n em $\pi_1(\dot{D}) \approx Z$, segue que

$$p_*\pi_1(\dot{D}) = p_{n*}\pi_1(\dot{D}_n)$$

Logo $p: \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é isomorfo a $p_n: \dot{D}_n \rightarrow \dot{D}$. Portanto, a menos de isomorfismos, $p_\infty: \dot{D}_\infty \rightarrow \dot{D}$ e $p_n: \dot{D}_n \rightarrow \dot{D}$ ($n \in Z$) são todos os recobrimentos de \dot{D} .

Seja então $p: \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ um qualquer recobrimento com n folhas de \dot{D} , e seja $\zeta: \dot{D} \rightarrow \dot{D}_n$ um homeomorfismo tal que $p_n \circ \zeta = p$. Podemos acrescentar a \dot{D} um ponto α e estender ζ e p de modo a obter aplicações ζ^* e p^* do espaço \dot{D} assim obtido sobre \dot{D}_n e \dot{D} respectivamente (onde \dot{D}_n e \dot{D} são o disco unitário com a origem), de modo a satisfazer às seguintes condições:

- 1) $\zeta^*: \dot{D} \rightarrow \dot{D}_n$ é um homeomorfismo e $\zeta^*(\alpha) = 0$
- 2) $p^*: \dot{D} \rightarrow \dot{D}$ é contínua e $p^*(\alpha) = 0$

Isto porque o recobrimento $p_n: \dot{D}_n \rightarrow \dot{D}$ pode ser estendido ao ponto 0 por continuidade. Pondo então $\zeta^*(\alpha) = 0$, e compondo ζ^* com

a extensão p_n^* , obtemos p^* e as condições 1) e 2) estarão satisfeitas.

Observemos agora que se \dot{D}_r indica o disco de centro na origem e raio r , e \ddot{D}_r o mesmo disco sem a origem, as aplicações

$$p_\infty: \ddot{D}_{r,\infty} \longrightarrow \dot{D}_r \quad \text{onde} \quad \ddot{D}_{r,\infty} = \{x+iy \mid 0 < x < r\}$$

e

$$p_n: \ddot{D}_{r,n} \longrightarrow \dot{D}_r \quad (n \in \mathbb{Z}, n \geq 1)$$

onde

$$p_\infty(x+iy) = x \cdot e^{iy}$$

$$p_n(z) = z^n$$

são recobrimentos de \dot{D}_r , e todo recobrimento de \dot{D}_r é isomorfa a um destes.

A aplicação p_n pode ser estendida à origem por continuidade, e a extensão será indicada, como acima, por p_n^* .

2. Seja agora S uma superfície de Riemann e $\lambda: S \rightarrow E$ uma aplicação holomorfa de S na esfera de Riemann, que é um homeomorfismo local.

Seja $z_0 \in E$ e U uma vizinhança de z_0 homeomorfa a D e tal que $\lambda^{-1}(U) \neq \emptyset$; seja ainda $h: U \rightarrow D$ um homeomorfismo com $h(z_0) = 0$.

Consideremos uma componente conexa \hat{A} de $\lambda^{-1}(U)$ e suponhamos que não exista em \hat{A} nenhum ponto que se projete em z_0 , mas que sobre cada ponto $z \in \hat{U} = U - \{z_0\}$ existam n pontos de \hat{A} que se projetem em z pela aplicação λ . A restrição de λ a \hat{A} , que denotaremos também com λ , dá então um recobrimento, com n folhas, de \hat{U} .

De fato, seja $z \in \hat{U}$ e sejam P_1, \dots, P_n os pontos de \hat{A} que se projetam em z . Para cada P_i tomemos uma vizinhança $U_i \subset \hat{A}$ de tal forma que as vizinhanças U_i sejam duas a duas disjuntas e que a restrição de λ a U_i seja um homeomorfismo, e consideremos a vizinhança

$W \subset U$ de z dada por

$$W = \bigcap_i \lambda(U_i)$$

Dado um ponto $t \in W$ qualquer existe em cada U_i um ponto Q_i que se projeta em t ; os pontos Q_1, \dots, Q_n sendo em número de n dão todos os pontos de \tilde{A} que se projetam em t . A imagem de W por λ^{-1} se decompõe pois em n partes disjuntas, cada uma contida em uma vizinhança U_i , o que mostra que W é uma vizinhança admissível, e portanto que $\lambda: \tilde{A} \rightarrow \tilde{U}$ é um recobrimento de \tilde{U} com n folhas.

Então $h \circ \lambda$ será um recobrimento de \tilde{D} com n folhas, isomorfo portanto ao recobrimento $p_n: \tilde{D}_n \rightarrow \tilde{D}$. Isto é, existe um homeomorfismo ζ de \tilde{A} sobre \tilde{D}_n tal que $p_n \circ \zeta = h \circ \lambda$.

Podemos agora acrescentar a \tilde{A} um ponto α e estender ζ a um homeomorfismo ζ^* de $A = \tilde{A} \cup \{\alpha\}$ sobre $D_n = \tilde{D}_n \cup \{0\}$ tal que $\zeta^*(\alpha) = 0$, e da mesma forma estender λ a uma aplicação λ^* de A sobre U pondo $\lambda^*(\alpha) = z_0$.

Definimos agora uma estrutura de superfície de Riemann em $S' = S \cup \{\alpha\}$, dando para isto o conjunto das funções analíticas em cada ponto.

Num ponto pertencente a S , o conjunto de funções analíticas será mantido sem alteração. As funções analíticas em α serão aquelas que podem ser desenvolvidas em série de potências do ζ^* . É fácil ver que desse modo as condições da definição de Superfície de Riemann ficam satisfeitas em S' .

Resta mostrar que o conjunto de funções analíticas assim definido em α não depende do particular homeomorfismo ζ . De fato, dado um outro homeomorfismo $\zeta': \tilde{A} \rightarrow \tilde{D}_n$ tal que $p_n \circ \zeta' = h \circ \lambda$,

$\zeta' \circ \zeta^{-1}$ é evidentemente uma transformação do recobrimento $p_n: \tilde{D}_n \rightarrow \tilde{D}$, logo é da forma

$$\tau_k: z \rightarrow z \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

Isto é, todos os homeomorfismos ζ' são da forma $T_k \circ \zeta$. Mas T_k pode ser estendido à origem e a extensão T_k^* será ainda um homeomorfismo analítico. Então $T_k^* \circ \zeta^*$ será um homeomorfismo analítico da superfície de Riemann correspondente a α , o que mostra que a estrutura não depende de ζ .

α chama-se ponto de ramificação de ordem $n-1$ de S' .

Podemos dar uma representação explícita de λ e das funções analíticas em α . Basta tomar para U um disco de raio r e centro em z_0 , e para h o homeomorfismo de $U \rightarrow D_{r,n}$ dado por $z \rightarrow z - z_0$. Sendo agora ζ um homeomorfismo de \dot{A} sobre $D_{\sqrt{r},n}$ tal que $p_n \circ \zeta = h \circ \lambda$, como p_n é dado por $p_n(t) = t^n$ teremos

$$\lambda(\rho) = z_0 + \zeta^n(\rho)$$

para todo $\rho \in \dot{A}$ e as funções analíticas em α serão dadas por desenvolvimentos

$$w(\rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \zeta^{\nu}(\rho)$$

Soja agora f_0 uma função holomorfa numa região R da esfera de Riemann, e seja S seu domínio de holomorfia relativo a E (cf. Cap. I, § 4); soja

$$\lambda: S \rightarrow E$$

a projeção de S em E e f a extensão de f_0 a S .

Dado $z_0 \in E$, suponhamos que exista uma vizinhança U de z_0 nas condições acima, isto é, tal que $\lambda^{-1}(U) \neq \emptyset$ e que para uma componente conexa \dot{A} de $\lambda^{-1}(U)$, onde $\dot{U} = U - \{z_0\}$, a restrição de λ a \dot{A} dê um recobrimento de \dot{U} com n folhas e $z_0 \notin \lambda(\dot{A})$. Consideremos então para \dot{A} o ponto α .

A função f será então definida e holomorfa numa vizinhança de α , logo terá em α ou uma singularidade removível, ou um polo, ou um ponto singular essencial. Se for uma singularidade removível ou um polo, acrescentamos α a S .

Seja S' a superfície de Riemann obtida acrescentando a S todos os pontos α definidos para cada z_0 nessas condições e nos quais f tem ou uma singularidade removível ou um polo. S' chama-se a superfície de Riemann de f_0 .

3. Recobrimento ramificado.

Daremos agora uma generalização da noção de recobrimento, considerando apenas o caso de recobrimento de variedades de dimensão 2, que nos interessa particularmente.

Definição 13. Sejam S e \tilde{S} duas variedades topológicas de dimensão 2 e $p: \tilde{S} \rightarrow S$ uma aplicação contínua de \tilde{S} sobre S tal que, excetuado um conjunto discreto Γ de pontos, todo ponto de S tem uma vizinhança U com a propriedade que cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ é aplicada homeomorficamente sobre U por p ; e se $x \in \Gamma$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, existem vizinhanças \tilde{U} e U de \tilde{x} e x respectivamente, homeomorfas a D e tais que \tilde{x} é o único ponto de \tilde{U} que se projeta em x , ao passo que para todo outro ponto $y \in U$ existem k pontos de \tilde{U} cuja imagem é y , sendo k o mesmo para todo $y \in U$, $y \neq x$. Diremos então que S é um recobrimento ramificado de S , e \tilde{x} se dirá ponto de ramificação de ordem $k-1$.

Seja $\tilde{\Gamma}$ o conjunto dos pontos que se projetam em Γ , $\tilde{S} = \tilde{S} - \tilde{\Gamma}$, $\dot{S} = S - \Gamma$, então a restrição de p a \tilde{S}

$$p: \tilde{S} \rightarrow \dot{S}$$

é evidentemente um recobrimento no sentido usual. O número de folhas deste recobrimento será por definição o número de folhas do recobrimento ramificado.

Se Γ for vazio, recaímos na definição do recobrimento usual, portanto temos efetivamente uma generalização dessa noção.

Proposição 16. Seja \tilde{S} um recobrimento ramificado de S e supormos S compacta. Então \tilde{S} é compacta se e somente se o número de folhas do recobrimento é finito.

De fato, suponhamos o número de folhas finito. Como \tilde{S} é variedade topológica, basta demonstrar que todo conjunto infinito C de pontos de \tilde{S} tem um ponto de acumulação. Ora, o conjunto $p(C)$ em S será infinito, logo tem um ponto de acumulação x_0 em S , e como $p^{-1}(x_0)$ é um conjunto finito de pontos de \tilde{S} , um ao menos dos pontos de $p^{-1}(x_0)$ será ponto de acumulação de C .

Reciprocamente, se S é compacta, o número de folhas é finito. De fato, se não fosse, tomado o conjunto infinito dos pontos \tilde{x} que se projetam num mesmo ponto x não excepcional, esse conjunto teria um ponto de acumulação \tilde{x}_0 ; ora \tilde{x}_0 se projetaria também em x , e por outro lado qualquer vizinhança de \tilde{x}_0 conteria pontos distintos de \tilde{x}_0 que se projetariam em x , o que é absurdo.

Um recobrimento $p: \tilde{S} \rightarrow S$ é um homeomorfismo local. Se S for compacta, vale a recíproca:

Proposição 17. Sejam \tilde{S} e S duas variedades topológicas conexas de dimensão 2, e seja p uma aplicação contínua de \tilde{S} em S que é um homeomorfismo local; se \tilde{S} for compacta, $p: \tilde{S} \rightarrow S$ é um recobrimento.

De fato, sejam $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ os pontos, em número finito, que se projetam num ponto P de S , sejam $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ vizinhanças disjuntas de $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ tais que em \tilde{U}_i ($i = 1, \dots, n$) a restrição de p seja um homeomorfismo. Vamos mostrar que existe uma vizinhança U de P tal que todo o ponto de \tilde{S} que se projeta em U pertence a $\tilde{V} = \bigcup_{i=1}^n \tilde{U}_i$. Caso contrário existiria uma sequência de pontos Q_j , convergente para P , tal que sobre cada Q_j existe pelo menos um ponto \tilde{Q}_j que pertence a $\tilde{S} - \tilde{V}$. Como $\tilde{S} - \tilde{V}$ é compacto, os pontos \tilde{Q}_j teriam um ponto de acumulação \tilde{P} pertencente a esse conjunto. Pela continuidade de $p: \tilde{S} \rightarrow S$, \tilde{P} se projeta em P , o que é absurdo pois $P \neq P_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Segue-se que a vizinhança

$$U \cap p_1(\tilde{U}_1) \cap p_2(\tilde{U}_2) \cap \dots \cap p_n(\tilde{U}_n)$$

é admissível.

Podemos demonstrar ainda uma proposição mais geral:

Proposição 18. Sejam \tilde{S} e S duas variedades topológicas e $p: \tilde{S} \rightarrow S$ uma aplicação contínua que é um homeomorfismo local salvo num número finito de pontos de \tilde{S} ; se \tilde{S} for compacta, $p: \tilde{S} \rightarrow S$ é um recobrimento ramificado.

Esta proposição segue facilmente da anterior.

4. Seja agora S a superfície de Riemann de uma função f_0 , definida numa região $R \subset E$. Existe então uma função f definida em S que é o prolongamento analítico de f_0 , e de agora em diante, quando dissermos que S é a superfície de Riemann de uma função f , entenderemos que f é já o prolongamento a toda a superfície S do elemento de função que deu origem a S , donde, pela definição de superfície de Riemann, f é moromorfa em S . Queremos examinar particularmente o caso em que S é compacta.

Teorema 6. Seja S a superfície de Riemann de uma função f , seja $\lambda: S \rightarrow E$ a projeção de S na esfera, e ψ uma função moromorfa em S . Suponhamos ainda que S seja compacta. Então existe um polinômio $Q(x,y)$ irredutível tal que $Q(\psi(p), \lambda(p)) = 0$ para todo $p \in S$, e a menos de um fator constante o polinômio $Q(x,y)$ é único.

Demonstração. Provaremos em primeiro lugar que a projeção $\lambda: S \rightarrow E$ é um recobrimento ramificado de E . Ora, seja Γ_0 o conjunto formado pelos pontos de ramificação de f . Γ_0 é finito se S é compacta e em $S - \Gamma_0$ a projeção λ é um homeomorfismo local, logo, pela proposição 18 temos um recobrimento ramificado de $\lambda(S)$, e basta provar que $\lambda(S) = E$.

Mas $\lambda(S)$ é um aberto em E , pois λ é um homeomorfismo local em $S - \Gamma_0$, e se p é um ponto de ramificação de f existe sempre uma vizinhança de p que é levada numa vizinhança de $\lambda(p)$. Por outro lado $\lambda(S)$ é compacta, logo fechada, em E . Então $\lambda(S) = E$.

Pela proposição 16 o recobrimento $\lambda: S \rightarrow E$ tem um número finito de folhas, seja n esse número.

Seja agora Γ o conjunto formado pelos pontos de Γ_0 , mais os polos de ψ e pelos pontos que se projetam pela λ em p_∞ , e seja $z_0 \in E$, $z_0 \notin \lambda(\Gamma)$. Tomemos uma vizinhança admissível U de z_0 e consideremos as funções $\varphi_{1U}, \dots, \varphi_{nU}$ definidas em U da seguinte maneira: Dado um ponto $z \in U$, tomemos para cada um dos n pontos p_1, \dots, p_n de S que se projetam em z uma vizinhança em que ψ seja holomorfa. Composto $\lambda^{-1}|_U$ com a restrição de ψ a cada uma dessas vizinhanças, definimos em U n funções $\varphi_{1U}, \dots, \varphi_{nU}$.

Sejam $\sigma_{1U}, \dots, \sigma_{nU}$ as n funções simétricas elementares dessas funções e ponhamos

$$E' = E - \lambda(\Gamma)$$

Dadas duas vizinhanças admissíveis $U, V \subset E'$, em U e V estão definidas respectivamente $\varphi_{1U}, \dots, \varphi_{nU}$ e $\varphi_{1V}, \dots, \varphi_{nV}$; em $U \cap V$ evidentemente cada φ_{iU} vai coincidir com uma φ_{jV} , donde as funções simétricas σ_{iU} e σ_{jV} coincidem, para $i=1, \dots, n$. Então temos n funções $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ definidas e holomorfas em $E' = E - \lambda(\Gamma)$. Como os pontos de $\lambda(\Gamma)$ são em número finito, são singularidades isoladas das funções σ_i e portanto ou singularidades removíveis ou polos. As funções σ_i são pois meromorfas em toda a esfera, logo são funções racionais;

$$\sigma_i = \frac{R_i(z)}{T_i(z)}$$

sendo $R_i(z)$ e $T_i(z)$ polinômios.

Consideremos agora a seguinte função:

$$(w - \varphi_1)(w - \varphi_2) \dots (w - \varphi_n)$$

É um polinômio em w cujos coeficientes são os $\sigma_i(z)$, que são funções racionais de z . Seja $a_0(z)$ o mínimo múltiplo comum dos denominadores

$T_1(z)$; então

$$P(w, z) = a_0(z)(w - \varphi_1(z))(w - \varphi_2(z)) \dots (w - \varphi_n(z))$$

é um polinômio em w e z e temos evidentemente

$$P(\varphi(p), \lambda(p)) = 0$$

para todo $p \in S - \Gamma$. Ora, a função $P(\varphi(p), \lambda(p))$ sendo nula em S exceto num conjunto discreto de pontos, é idênticamente nula em S .

Provamos pois que existe um polinômio $P(w, z)$ tal que

$$P(\varphi(p), \lambda(p)) = 0$$

Ainda mais, o grau de P em w é igual ao número de folhas do recobrimento. O polinômio $P(w, z)$ não é necessariamente irredutível. Mas se temos um polinômio $P(w, z)$ e uma função analítica $\varphi(z)$ definida numa vizinhança V de um ponto z_0 da esfera e tal que

$$P(\varphi(z), z) = 0 \quad \forall z \in V$$

então existe um fator irredutível do P que goza da mesma propriedade. Do fato, se $P = P_1 \dots P_r$ é a decomposição do P em fatores primos, para cada $z \in V$ teremos $P_i(\varphi(z), z) = 0$ para algum i ; um dos P_i se anulará então para infinitos pontos de V , logo se anulará idênticamente em V .

Existe pois um polinômio irredutível, de grau $\leq n$, com a propriedade enunciada no teorema, sendo n o número de folhas do recobrimento $\lambda: S \rightarrow E$. Resta provar que êsse polinômio é único a menos de um fator constante. Demonstraremos então:

Proposição 19. Dados dois polinômios $Q_1(w, z)$ e $Q_2(w, z)$ irredutíveis, se existe uma função $\varphi(z)$ analítica numa vizinhança V de $z_0 \in E$ tal que

$$Q_1(\varphi(z), z) = Q_2(\varphi(z), z) = 0 \quad \text{para todo } z \in V$$

então Q_1 e Q_2 diferem por um fator constante:

$$Q_1 = eQ_2 \quad e \neq 0$$

Em outras palavras, um elemento de função não pode satisfazer a duas equações algébricas essencialmente distintas.

A demonstração se baseia no seguinte

Lema 1. Dados dois polinômios $P(x,y)$ e $P'(x,y)$ primos entre si existe somente um número finito de valores x_0 para os quais

$$P(x_0, y) = 0 \quad \text{e} \quad P'(x_0, y) = 0$$

têm uma raiz comum.

Demonstração. Ordenemos P e P' segundo as potências de y e seja

$$P(x,y) = a_0(x) y^n + a_1(x) y^{n-1} + \dots + a_n(x)$$
$$P'(x,y) = b_0(x) y^m + b_1(x) y^{m-1} + \dots + b_m(x)$$

Multiplicando se necessário P por uma potência de $b_0(x)$ podemos escrever

$$b_0^r(x) P = q_0 P' + R_1$$

onde q_0 e R_1 são polinômios em x e y , e o grau de R_1 em y é m .

Analogamente podemos escrever

$$c_0^s P' = q_1 R_1 + R_2$$
$$d_0^t R_1 = q_2 R_2 + R_3$$

e assim por diante. Como os graus dos R_i em relação a y vão decrescendo, chegaremos finalmente a

$$h_0(x) R_{k-2} = q_{k-1} R_{k-1} + R_k$$

onde R_k é um polinômio só em x ; como P e P' são primos entre si, R_k não pode ser idênticamente nulo.

Pela construção, esse polinômio $R_k(x)$, dito resultante de P e P' , pode ser representado na forma

$$(3.1) \quad R_k(x) = p(x,y) P(x,y) + p'(x,y) P'(x,y)$$

onde p e p' são polinômios em x e y . Ora, se tivermos para x_0, y_0 dados

$$P(x_0, y_0) = P'(x_0, y_0) = 0$$

de (3.1) segue

$$R_k(x_0) = 0$$

e como isto só acontece para um número finito de valores x_0 , o lema está demonstrado.

Voltemos à proposição 19; sendo $Q_1(w, z)$ e $Q_2(w, z)$ irredutíveis, ou êles diferem por um fator constante, ou são primos entre si. Nesta segunda hipótese, o resultante $R(z)$ não é idênticamente nulo. Ora, se tivéssemos

$$Q_1(\varphi(z), z) = Q_2(\varphi(z), z) = 0 \quad \text{para todo } z \in V$$

viria

$$R(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in V$$

o que é absurdo. Então a proposição está demonstrada, o que completa a demonstração do teorema 6.

A função φ do teorema 6 pode ser em particular a própria função f , pois esta é meromorfa em sua superfície de Riemann. Vemos assim que se a superfície de Riemann de uma função f é compacta, existe um polinômio irredutível $Q(x, y)$ tal que $Q(f(p), \lambda(p)) = 0$ para todo $p \in S$ em que f e λ não sejam infinitas, e Q é único a menos de um fator constante.

5. Demonstraremos agora a recíproca do teorema 6, isto é, que se f satisfaz a uma equação algébrica, sua superfície de Riemann é compacta. Precisamente, temos:

Teorema 7. Seja $P(w, z)$ um polinômio em w e z , irredutível, e suponhamos que numa vizinhança V de um ponto z_0 esteja definido um elemento de função $w(z)$ tal que

$$P(w(z), z) = 0 \quad \text{para todo } z \in V$$

Então: 1) a superfície de Riemann S de $W(z)$ é compacta; 2) se $w_1(z)$ é um elemento de função definido numa vizinhança V_1 de um outro ponto z_1 , e tal que

$$P(w_1(z), z) = 0 \quad \text{para todo } z \in V_1$$

$w_1(z)$ pode ser obtido de $w(z)$ por prolongamento analítico.

Demonstração. Para provar 1) bastará demonstrar que a aplicação $\lambda: S \rightarrow E$ é um recobrimento ramificado da esfera com número finito de folhas. Usaremos na demonstração o teorema das funções implícitas que enunciamos:

Lema 2. Seja $F(w, z)$ uma função analítica em w e z ao redor do ponto (w_0, z_0) e suponhamos

$$F(w_0, z_0) = 0$$

$$F'(w_0, z_0) \neq 0$$

Então existe uma e uma só função analítica numa vizinhança V de z_0 tal que

$$F(w(z), z) = 0 \quad \text{para todo } z \in V$$

e

$$w_0 = w(z_0)$$

Uma demonstração deste teorema encontra-se, por exemplo, no livro de Ahlfors "Complex Analysis", feita para o caso em que F é um polinômio, mas válida em geral.

Dado agora o polinômio irreduzível $P(w, z)$ mostremos que só existe um número finito de valores de z para os quais

$$P(w, z) = 0$$

$$P'_w(w, z) = 0$$

têm uma raiz w comum. De fato, P'_w tem grau menor que P , logo, como P é irreduzível P e P'_w são primos entre si e o lema 1 se aplica. Em outras palavras, existe só um número finito de valores de z para os quais $P(w, z) = 0$ tem raiz múltipla em w , que são os pontos onde a resultante $R(z)$ de

P e P'_w se anula.

Ponhamos

$$P(w, z) = a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z)$$

e consideremos o conjunto

$$\mathcal{T}' = \{p_\infty\} \cup \{z \mid R(z) = 0\} \cup \{z \mid a_0(z) = 0\} \quad \text{em } E$$

Mostremos em primeiro lugar que $w(z)$ pode ser prolongada ao longo de qualquer caminho em $E - \mathcal{T}'$. Para isto, observemos que para todo $\bar{z} \in E - \mathcal{T}'$ existem n elementos de função distintos $w_1(z), \dots, w_n(z)$ definidos numa vizinhança de \bar{z} e satisfazendo

$$P(w_i(z), z) = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

De fato, como $\bar{z} \notin \mathcal{T}'$, $P(w, \bar{z})$ será de grau n em w e terá raízes distintas $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$. Aplicando o teorema das funções implícitas (lema 2) a cada par (\bar{w}_i, \bar{z}) , resulta que existem n elementos de função $w_i(z)$ satisfazendo à equação e definidos numa vizinhança de z .

Para mostrar que $w(z)$ pode ser prolongado a qualquer ponto $\bar{z} \in E - \mathcal{T}'$, tomemos um caminho ligando z_0 a \bar{z} e contido em $E - \mathcal{T}'$. Seja esse caminho dado pela aplicação $\chi = \chi(t)$ de I em E tal que $\chi(0) = z_0$, $\chi(1) = \bar{z}$, e seja t' o extremo superior dos pontos $t \in I$ tais que o prolongamento de $w(z)$ de z_0 a $\chi(t)$ seja possível ao longo do caminho χ . É imediato que o prolongamento está definido em $\chi(t')$, e deve coincidir com um dos elementos de função definidos numa vizinhança de $\chi(t')$ e que satisfazem à equação. Se $t' < 1$, nessa vizinhança cairiam pontos $\chi(t)$ com $t > t'$, para os quais poderíamos então prolongar w , o que está em contradição com a definição de t' . Então $t' = 1$ e podemos prolongar $w(z)$ ao longo de todo o caminho χ . Fica também demonstrado que cada ponto de $E - \mathcal{T}'$ possui uma vizinhança admissível em relação à aplicação $\lambda: S \rightarrow E$.

Vejam agora o que acontece nos pontos de Γ . Consideremos em primeiro lugar um ponto z_0 tal que $P(w, z_0) = 0$ tenha raiz múltipla em w , isto é, tal que $R(z_0) = 0$, mas suponhamos $a_0(z_0) \neq 0$ e $z_0 \neq p_0$.

Como Γ só contém um número finito de pontos, existe uma vizinhança V , homeomorfa a D , de z_0 que não contém nenhum outro ponto de Γ . Seja então $z_1 \in V$, $z_1 \neq z_0$, e consideremos um caminho fechado α em V partindo de z_1 que não passa por z_0 e que dá uma volta ao redor de z_0 *. Em z_1 temos n elementos de função w_1, \dots, w_n que satisfazem à equação $P(w(z), z) = 0$. Consideremos um deles, seja w_1 , e façamos o prolongamento ao longo de α . Ao voltar a z_1 obteremos um dos elementos w_1, \dots, w_n e se continuarmos o prolongamento dando voltas ao longo de α , como não temos senão n elementos distintos, ao fim de no máximo $n+1$ voltas um dos w_i ao menos terá aparecido duas vezes. Ora é fácil ver que o primeiro elemento que se repete é o w_1 de que partimos. De fato, suponhamos por absurdo que fosse um $w_i \neq w_1$ o primeiro a se repetir, e consideremos os elementos obtidos sucessivamente até w_1 se repetir:

$$w_1, \dots, w_i, \dots, w_i$$

e por hipótese w_1 não comparece entre as duas aparições de w_i . A sequência acima mostra que o prolongamento de w_1 de α ⁻¹ repetido um número suficiente de vezes não é único o que é absurdo.

Suponhamos então que w_1 se repita pela primeira vez ao fim de k voltas. Mostraremos que se V é conexa, na superfí-

* Seja \dot{D} o disco D menos a origem. Seja γ_0 a circunferência $X = r \cos 2\pi t$, $Y = r \sin 2\pi t$, $0 \leq t \leq 1$. Diremos que uma curva γ em \dot{D} dá n ($n \geq 0$) voltas ao redor da origem se γ for homotópica a γ_0^n ($0 < r < 1$).

cie de Riemann de w a componente conexa \dot{A} de $\lambda^{-1}(\dot{V})$, (onde $\dot{V} = V - \{z_0\}$) que contém (z_1, w_1) dá um recobrimento de \dot{V} com k folhas, a projeção sendo λ . Para isto, de acôrdo com o que provamos no início do parágrafo 2 dêste capítulo, basta demonstrar que existem exatamente k pontos dessa componente que se projetam em cada ponto de \dot{V} . Ora, seja T o conjunto dos pontos de \dot{V} sôbre os quais se projetam k pontos: é fácil ver que T é aberto pois se sôbre um ponto temos k elementos de função distintos que são prolongamentos de w_1 existe uma vizinhança dêsse ponto onde cada ponto tem a mesma propriedade. Se T não fosse tôda a \dot{V} , considerando a reunião dos conjuntos de pontos de \dot{V} sôbte os quais se projetam k' pontos, com $k' \neq k$ variando de 1 a n , teríamos um outro aberto T' não vazio tal que $T \cup T' = \dot{V}$ o que é absurdo pois \dot{V} é conexa.

Seja t um parâmetro uniformizador correspondente à componente conexa \dot{A} ; vimos então ainda no parágrafo 2 que se indicarmos com z a projeção segundo λ de um ponto de \dot{A} onde o parâmetro uniformizador tem o valor t então,

$$z = z_0 + t^k$$

e teremos para w a expansão

$$w(t) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v t^v \quad t \in D_r$$

onde D_r é uma vizinhança circular da origem de raio r convenientemente escolhido.

Mostremos que $w(t)$ é limitada na origem. Ora, se não fosse, existiria uma sucessão $t_1, \dots, t_n, \dots \rightarrow 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{w^s(t_n)} = 0$$

para todo $s > 0$. Mas para todo $t \in D_r$ temos

$$a_0(z(t))w^n(t) + a_1(z(t))w^{n-1}(t) + \dots + a_n(z(t)) = 0$$

d'onde, excluídos os pontos em que $w(t) = 0$,

$$a_0(z) + \frac{a_1(z)}{w} + \dots + \frac{a_n(z)}{w^n} = 0$$

e fazendo t tender a zero segundo a sucessão t_1, \dots, t_n, \dots viria

$$a_0(z_0) = 0$$

contra a hipótese.

Então $w(t)$ é regular na origem e pela definição de superfície de Riemann de uma função w , S contém um ponto α aderente a \dot{A} que se projeta em z_0 por λ e no qual w é holomorfa.

Seja agora z_0 um ponto tal que $a_0(z_0) = 0$ mas em que $P(w, z) = 0$ não tenha raízes múltiplas. Seja U uma vizinhança de z_0 que não contenha outro ponto de Γ e consideremos a restrição de w a uma componente conexa \dot{A} de $\lambda^{-1}(U)$; indicaremos ainda por w este elemento de função, e vamos provar que se z_0 é raiz de multiplicidade m de $a_0(z)$ então w tem no máximo um polo de ordem m em z_0 . De fato, seja

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a_0(z)}{(z-z_0)^m} = \ell \neq 0$$

Suponhamos por absurdo que $(z-z_0)^m w(z)$ fosse ilimitada nessa componente conexa, então existiria uma sucessão z_1, \dots, z_n, \dots z_0 tal que $\frac{1}{(z-z_0)^m w^s(z)}$ tivesse limite 0 para

$z \rightarrow z_0$ segundo essa sucessão, para todo $s > 1$. Dividindo a equação $P(w(z), z) = 0$ por $(z-z_0)^m w^n(z)$ vem

$$\frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^m w} + \dots + \frac{a_n}{(z-z_0)^m w^n} = 0$$

e fazendo z tender a z_0 segundo a sucessão $\{z_n\}$ vem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a_0}{(z-z_0)^m} = 0$$

o que é absurdo. Logo, z_0 é no máximo um polo de ordem m para $w(z)$ e então $z_0 \in \lambda(S)$.

Suponhamos agora que se tenha ao mesmo tempo $R(z_0) = 0$ e $a_0(z_0) = 0$. Então um raciocínio análogo ao feito em cada caso separadamente mostra que: a) existe uma vizinhança V de z_0 tal que uma componente conexa qualquer A de (V) dá um recobrimento ramificado de V com número finito de folhas, que pode ser uniformizado pelas equações

$$z = z_0 + t^k$$

$$w = w(t) \quad t \in \dot{D}$$

sendo $w(t)$ regular em \dot{D} ; b) a origem é no máximo um polo de ordem m de $w(t)$, sendo m a multiplicidade da raiz z_0 de $a_0(z)$.

O último caso a considerar é o de p_∞ . Como nos casos anteriores pode-se mostrar que p_∞ possui uma vizinhança V tal que qualquer componente conexa A de $\lambda^{-1}(V)$ dá um recobrimento ramificado de V com um número finito de folhas, que pode ser uniformizada por um parâmetro t tal que

$$z = \frac{1}{t^k}$$

$$w = w(t)$$

sendo $w(t)$ regular numa vizinhança da origem excluída a origem. Provaremos que $w(t)$ tem quando muito um polo na origem.

Seja k_r o grau do polinómio $a_r(z)$ e seja $m \geq \frac{1}{r} (k_r - k_0)$ para $r \geq 1$; vamos mostrar que $t^{mk} w(t)$ é limitada na origem, Suponhamos que não fosse; existiria então uma sucessão $t_1, \dots, t_n, \dots \rightarrow 0$ e tal que $\frac{1}{t^{mk} w(t)}$ tivesse limite 0 para t tendendo a 0 segundo $\{t_n\}$.

Então para $1 \leq r \leq n$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{w(t)^r t^{k(k_r - k_0)}} = 0$$

para $t \rightarrow 0$ segundo a sucessão $\{t_n\}$. Mas se em

$$a_0(z)w^n + \dots + a_n(z) = 0$$

substituírmos z por t^{-k} , dividindo por w^n podemos por na forma

$$\frac{b_0}{t^{kk_0}} + \frac{b_1}{t^{kk_1} w} + \dots + \frac{b_n}{t^{kk_n} w^n} = 0$$

onde $b_i(t) = t^{kk_r} \cdot a_r\left(\frac{1}{t^k}\right)$ são polónomios em t . Multiplicando por t^{kk_0} e fazendo t tender a 0 segundo $\{t_n\}$ vem

$$\lim b_0(t) = 0$$

isto é,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a_0(z)}{z^{k_0}} = 0$$

o que é absurdo, pois k_0 é o grau de $a_0(z)$.

Então p_∞ é no máximo um polo de $w(z)$ d'onde também $p_\infty \in \lambda(S)$. Mostramos assim que $\lambda: S \rightarrow E$ é um recobrimento da esfera toda e que é um recobrimento ramificado com número finito de folhas. S é, pois, compacta, o que nos dá a primeira parte do teorema.

Para demonstrar a segunda usamos a hipótese de ser $P(w, z)$ irredutível. O número de folhas do recobrimento é no máximo n , pois todo prolongamento analítico de $w(z)$ deve satisfazer à equação $P(z, w(z)) = 0$. Por outro lado, se o número de folhas de $\lambda: S \rightarrow E$ é m , o teorema 6 dá que uma função meromorfa sobre S , em particular a própria $w(z)$, deve satisfazer a uma equação irredutível de grau $\leq m$. Como a equação irredutível é única, $n \leq m$, d'onde $n = m$.

Seja então $z' \in E$ e $\varphi_1(z)$ um elemento de função definido numa vizinhança V de z' e tal que $P(z, \varphi_1(z)) = 0$ para todo $z \in V$. Sobre um ponto $z \in V$, $z \neq z'$ existem n pontos de S que se projetam em z , logo n elementos distintos w_1, \dots, w_n satisfazendo à equação e que são prolongamentos de $w(z)$. $\varphi_1(z)$ necessariamente coincide com um deles, o que termina a demonstração do teorema.

Observação 1. Dada a equação $P(z, w) = 0$ podemos considerar w como variável independente. Em correspondência obtemos uma superfície de Riemann S_w de z como função de w que é analiticamente equivalente à superfície de Riemann de w como função de z .

Observação 2. Vimos que se para um ponto $z_0 \in E$ a equação $P(z_0, w) = 0$ tem raízes múltiplas, existe uma vizinhança U de z_0 tal que para cada componente conexa A de $\lambda^{-1}(U)$, $\lambda: A \rightarrow U$ é um recobrimento ramificado de U com número finito de folhas. Surge naturalmente a questão de saber que relação existe entre o número de folhas do recobrimento e a multiplicidade das raízes de $P(z_0, w)$.

Seja então w_1 uma raiz de $P(z_0, w) = 0$ de multiplicidade h , U uma vizinhança conveniente de z_0 em E e consideremos a componente conexa A de $\lambda^{-1}(U)$ que contém (z_0, w_1) .

Mostremos que se $P'_z(z_0, w_1) \neq 0$, então o recobrimento ramificado $\lambda: A \rightarrow U$ tem exatamente h folhas. De fato, seja k o número de folhas, então existe uma representação paramétrica do recobrimento dada por

$$\begin{aligned} z &= z_0 + t^k \\ w &= \sum_{v=0}^{r-1} b_v t^v \end{aligned} \quad t \in D_r$$

Por outro lado, de $P'_z(z_0, w_1) \neq 0$ segue que podemos determinar uma função (e uma só) $z = z(w)$ analítica numa vizinhança de w_1 , satisfazendo à equação $P(z(w), w) = 0$ e tal que $z(w_1) = z_0$. Da hipótese que as derivadas de P com relação a w até a ordem $h-1$ são nulas no ponto (z_0, w_1) e que P'_z não é nula no mesmo ponto, segue que a primeira derivada não nula de $z(w)$ no ponto w_1 é também a h -ésima. Logo podemos por

$$(1) \quad z = z_0 + a_h (w-w_1)^h + \dots \quad a_h \neq 0$$

Fazendo agora

$$(2) \quad z - z_0 = t^h$$

podemos determinar os coeficientes b da série

$$(3) \quad w - w_1 = \sum_{v=1}^{\infty} b_v t^v$$

de modo a satisfazer (1), (2) e (3) podem ser consideradas como equações de um recobrimento $\lambda: A \rightarrow U$ com h folhas, d'onde $k = h$. Note-se que em (3) $b_1 \neq 0$, portanto o desenvolvimento (3) é univocamente determinado, pois dado (3) podemos tirar t como função de w , $t = t(w)$ e substituindo em (2) obtemos uma função $z = z(w)$ tal que $z_0 = z(w_1)$ e que deve satisfazer a $P(z(w), w) = 0$. Como só existe uma função nessas condições, o desenvolvimento (3) é único.

O caso $P'_z(z_0, w_1) = 0$ exige uma análise mais delicada; veja-se por exemplo E. Picard, *Traité d'Analyse* cap. XIII.

CAPÍTULO IV

Topologia das Superfícies Compactas

*

Introdução. Neste capítulo estudaremos um modo de exprimir algebricamente, por meio dos chamados grupos de homotopia e homologia, certas propriedades topológicas das superfícies compactas. Exemplos de tais propriedades são a orientabilidade, o número mínimo de cortes que se deve efetuar sobre uma superfície compacta necessários para a transformação num conjunto simplesmente conexo, etc.. Os métodos que usaremos servirão como introdução à topologia algébrica.

1. Definição 14. Simplexo euclidiano de n dimensões é o menor corpo convexo que contém $n+1$ pontos a_0, a_1, \dots, a_n tais que os vetores $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ sejam linearmente independentes. Indicamos o simplexo com a notação (a_0, \dots, a_n) ou $\sigma(a_0, \dots, a_n)$, ou ainda $G^n(a_0, \dots, a_n)$.

Exemplos: ponto, segmento, triângulo e tetraedro são simplexos de dimensão 0, 1, 2, 3 respectivamente.

Um simplexo de dimensão n determina automaticamente $\binom{n+1}{k+1}$ simplexos de dimensão k que chamamos suas faces de dimensão k ; a face que não contém os vértices a_1, a_j, \dots será indicada por $(a_0, \dots, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n)$. Os simplexos de dimensão 0 chamam-se vértices, os de dimensão 1 arestas.

Convencionaremos considerar o conjunto vazio como face de simplexo para formular de modo mais simples certas propriedades.

Definição 15. Num espaço topológico dizemos que é dado um simplexo topológico quando é dado um conjunto homeomorfo a um simplexo euclidiano, juntamente com as imagens das faces deste pelo homeomorfismo. As imagens das faces chamam-se faces do simplexo topológico.

Exemplos: um arco de curva, um disco com 3 pontos dados sobre a circunferência.

Definição 16. Decomposição simplicial de um espaço topológico, ou triangulação, é um conjunto de simplexos topológicos do espaço com suas

faces, tal que: 1) todo ponto do espaço pertence a um ao menos dos simplexos; 2) a intersecção de dois simplexos é uma face de cada um deles; 3) todo ponto tem uma vizinhança que encontra apenas um número finito de simplexos.

Dizemos que dois simplexos de uma decomposição simplicial são incidentes se sua face comum não é o conjunto vazio.

- Exemplos: a) o perímetro de um triângulo
b) a coroa circular com a triangulação dada na figura 1.
c) qualquer conjunto finito de pontos
d) um conjunto qualquer de faces de um simplexo, por exemplo, o conjunto das arestas de um tetraedro ou o conjunto de suas faces.

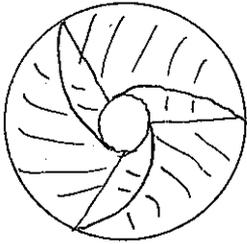
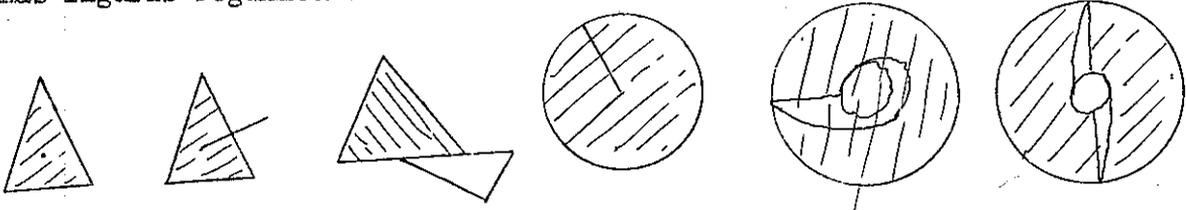
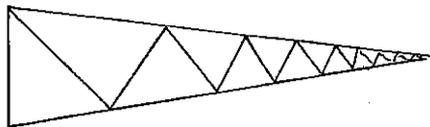


Figura 1 A condição 2) exclue situações como as representadas nas figuras seguintes:



A condição 3) exclue por exemplo o caso seguinte:



Definição 17. Um espaço topológico é triangulável se admite uma decomposição simplicial.

Exemplo de espaço que não é triangulável é o definido por

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y = \text{sen } \frac{1}{x}, \text{ para } 0 < x < 1 \\ -1 \leq y \leq 1, \text{ se } x = 0 \end{array} \right\}$$

pois um espaço triangulável é necessariamente localmente conexo por caminhos.

Um complexo simplicial é um espaço topológico com uma decomposição simplicial. Se E é um complexo simplicial, indicaremos seu espaço topológico por $|E|$.

Dimensão de um complexo simplicial é o extremo superior das dimensões de seus simplexes.

A dimensão de um complexo simplicial pode ser infinita.

Chamamos complexo simplicial euclidiano um complexo simplicial contido num espaço euclidiano e cujos simplexes são euclidianos. Exemplo: a superfície de um tetraedro.

Dois complexos simpliciais E e E' são isomorfos se existe um homeomorfismo de E sobre E' que leva todos os simplexes de E sobre simplexes de E' e tal que a imagem inversa de todo simplexo de E' é um simplexo de E .

Exemplo: perímetro de um triângulo e circunferência com três pontos dados sobre ela.

Pode-se demonstrar que todo complexo simplicial de dimensão n é isomorfo a um complexo simplicial euclidiano contido no R^{2n+1} , que se chama realização euclidiana do complexo simplicial dado.

Observação (cf. figura 2). Se "cortarmos" a coroa ao longo da linha marcada, obtemos o retângulo; reciprocamente, se neste último "colarmos", isto é, identificarmos (num sentido evidente) as linhas assinaladas por flechas, resulta um espaço topológico isomorfo à coroa circular. De agora em diante, sempre que numa figura dada aparecerem arestas assinaladas por flechas, entendemos, como neste exemplo, que as duas linhas representam uma mesma aresta.

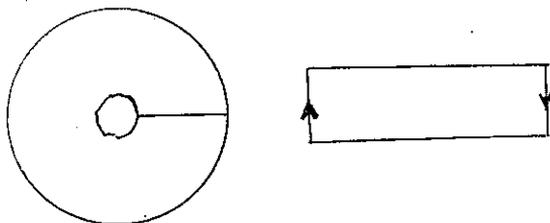
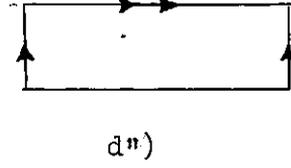
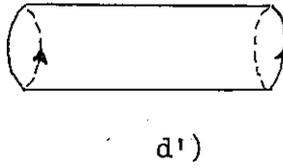
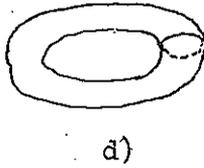
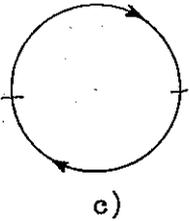
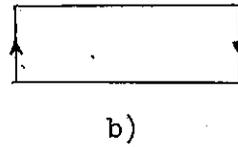
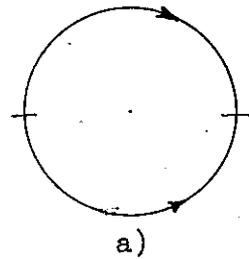


Figura 2

Outros exemplos:

a) cortando a esfera ao longo de um semi-meridiano, obtemos a

- configuração a).
- b) cortando a faixa de Möbius ao longo de uma transversal vem b)
- c) é bem conhecido que o plano projetivo é representado por c)
- d) se cortarmos a superfície do toro d) ao longo de um círculo meridiano obtemos uma secção de cilindro, d'); cortando em seguida segundo uma geratriz obtemos d").



Observação 1. Devido à identificação as curvas abaixo são curvas de Jordan fechadas respectivamente na coroa, na faixa de Möbius e no toro (figura 3).

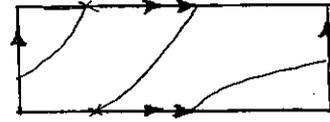
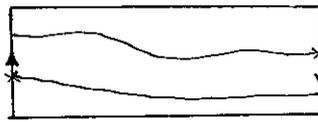
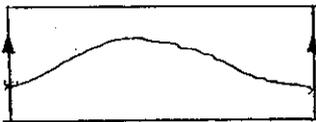


Figura 3

Observação 2. O plano projetivo do qual retiramos um disco aberto é homeomorfo a uma faixa de Möbius. Podemos demonstrar isso cortando convenientemente o plano projetivo menos o disco e identificando também de modo conveniente as arestas iguais (figura 4).

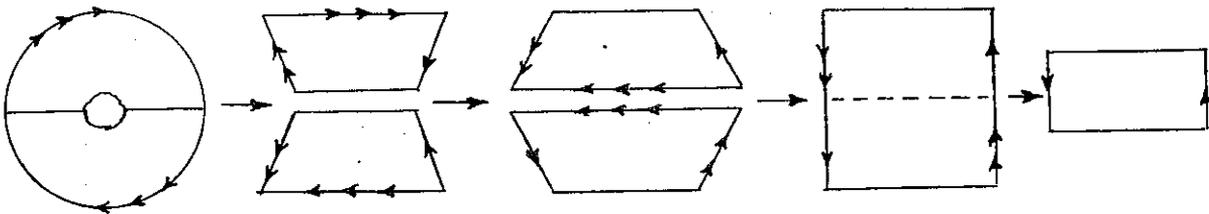


Figura 4

Exercícios. 1) Demonstrar que a figura 5) é uma decomposição simplicial da esfera. Idem para faixa de Möbius, figura 5').

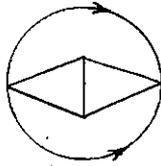


Figura 5

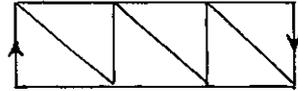


Figura 5'

Porque as figuras seguintes não representam decomposições simpliciais? (figura 6).

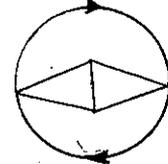
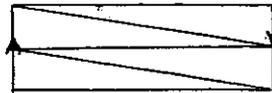
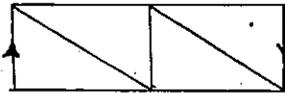


Figura 6

2) Demonstrar que as seguintes triangulações do plano projetivo não são isomorfas (apesar de terem mesmo número de vértices, arestas e faces) (figura 7).

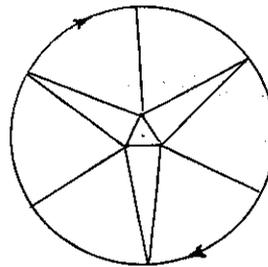
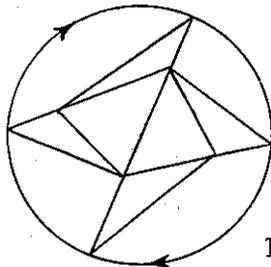
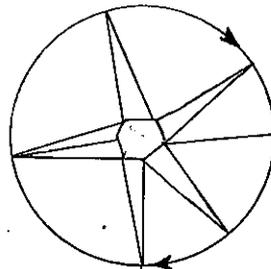
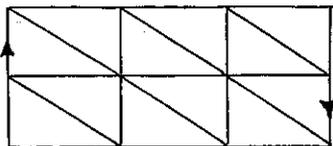


Figura 7

3) Demonstrar que os dois complexos simpliciais seguintes são isomorfos (figura 8).



(o plano projetivo do qual foi retirado o hexágono interno).

Figura 8

4) Seja E um complexo simplicial. Demonstrar que as seguintes propriedades são equivalentes:

- a) $|E|$ é conexo
- b) dados dois pontos x e y quaisquer de $|E|$, existe uma seqüência finita de simplexes $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ tais que $x \in \Delta_1, y \in \Delta_n$

e Δ_i e Δ_{i+1} são incidentes.

c) dados dois vértices a, b quaisquer de E , existe uma seqüência finita de arestas A_1, \dots, A_n tais que a é vértice de A_1 , b vértice de A_n e A_i, A_{i+1} são incidentes (dizemos então que existe um caminho de arestas ligando a e b).

d) não é possível decompor o complexo simplicial em dois conjuntos de simplexos sem faces comuns.

5) Seja E um complexo simplicial. Demonstrar que são equivalentes as seguintes condições:

- a) o espaço $|E|$ é compacto
- b) E só tem um número finito de simplexos.

6) Qualquer conjunto aberto do plano, ou mais geralmente do \mathbb{R}^n , pode ser triangulado.

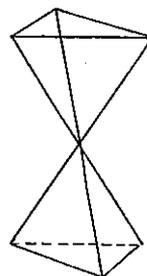
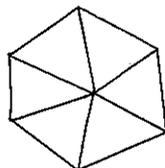
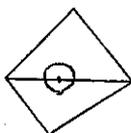
7) Um espaço de recobrimento de um espaço triangulável é triangulável (lembrar que a reunião dos simplexos incidentes com um vértice dado forma uma vizinhança simplesmente conexa do vértice).

2. Chamamos superfície a uma variedade topológica a duas dimensões (cf. definição 1, cap. I). Superfície triangulada será uma superfície munida de uma decomposição simplicial.

Definição 18. Dada uma superfície triangulada K chama-se ciclo a uma seqüência $A_1 \Delta_1 A_2 \Delta_2 \dots \Delta_n A_{n+1}$, onde os Δ_i são triângulos e os A_i arestas, todos os Δ_i e os A_i incidentes com mesmo vértice, e tal que A_{i+1} seja aresta de Δ_i e Δ_{i+1} . Diz-se que o ciclo é fechado se $A_{n+1} = A_1$.

Teorema 8 - Seja K uma superfície triangulada. Temos: 1) cada aresta é face comum de dois e apenas dois triângulos; 2) o conjunto das arestas e triângulos incidentes com um vértice dado forma um ciclo fechado. Reciprocamente, um complexo simplicial de dimensão 2 em que estão satisfeitas as condições 1) e 2) é uma superfície triangulada.

De fato, seja K uma superfície triangulada. Para verificar 1), basta observar que dada uma aresta, tomando sobre ela um ponto interno, ele terá uma vizinhança homeomorfa ao disco, donde concluímos que a aresta é incidente exatamente a dois triângulos. Por outro lado, dado um vértice, só existe um número finito de simplexos incidentes com ele; partimos de uma aresta A_1 , tomamos um triângulo Δ_1 incidente a A_1 , e assim sucessivamente, formamos um ciclo $A_1 \Delta_1 A_2 \dots \Delta_n A_{n+1}$ que será fechado, pois se $A_{n+1} \neq A_1$, o vértice não teria vizinhança homeomorfa ao disco. Ainda mais, não pode haver mais de um ciclo fechado incidente ao mesmo vértice, como no caso representado na terceira das figuras abaixo, pois senão também não existiria uma vizinhança homeomorfa ao disco. Portanto, a condição 2) está verificada.



Reciprocamente, se as condições 1) e 2) são satisfeitas, cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ao disco, e o complexo simplicial de dimensão 2 é então uma superfície triangulada.

É um problema aberto há muito tempo o de dar uma caracterização análoga para triangulação de uma variedade de dimensão 3.

Exercícios: 1) um segmento, o bordo de um triângulo, três triângulos incidentes a uma aresta não são superfícies.

2) Chamamos superfície com bordo a um complexo simplicial de dimensão 2 em que estão satisfeitas as condições: 1') cada aresta é face de um ou dois triângulos; 2') o conjunto dos simplexos incidentes com um vértice dado forma um ciclo (fechado ou não). Exemplos: coroa circular triangulada, faixa de Möbius triangulada.

I - Seja K um complexo simplicial de dimensão 2. São equivalentes as seguintes condições:

a) K é uma superfície com bordo

b) todo ponto de $|K|$ tem uma vizinhança homeomorfa a um disco ou a um semi-disco.

II - Numa superfície com bordo K são equivalentes as seguintes condições:

- a) $|K|$ é conexo
- b) dados dois pontos quaisquer x, y , existe uma cadeia de triângulos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ tais que $x \in \Delta_1$, $y \in \Delta_n$ e Δ_i, Δ_{i+1} são incidentes.

3. Simplexo euclidiano orientado

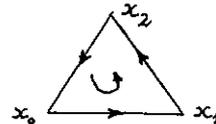
Um segmento (x_0, x_1) pode ser orientado de dois modos, de x_0 a x_1 ou de x_1 a x_0 . Do mesmo modo um simplexo euclidiano de dimensão 2, de vértices x_0, x_1, x_2 pode ser orientado de dois modos: (x_0, x_1, x_2) ou (x_1, x_2, x_0) ou (x_2, x_0, x_1) e a orientação contrária. De modo geral:

Definição 19. Dado um simplexo euclidiano de vértices x_0, \dots, x_n chamamos de orientação do simplexo a cada uma das classes de permutação de seus vértices. Convencionamos indicar com $-(x_0, \dots, x_n)$ ou $\dots (x_0, \dots, x_n)^{-1}$ o simplexo (x_0, \dots, x_n) com a orientação contrária. Portanto

$$-(x_0, x_1) = (x_1, x_0)$$

A um simplexo de dimensão 0 associamos dois símbolos orientados, $-x_0$ e $+x_0 = x_0$.

Orientação induzida (por um simplexo de dimensão n orientado sobre suas faces de dimensão $n-1$): Dado um simplexo orientado (x_0, x_1, x_2) ele induz em suas 3 faces as orientações (x_0, x_1) , (x_1, x_2) e (x_2, x_0) respectivamente.



De modo geral, definimos:

Dado um simplexo orientado (x_0, x_1, \dots, x_n) a sua i -ésima face de dimensão $n-1$ orientado é

$$(-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n).$$

É fácil ver que a definição independe das permutações numa mesma classe. As faces orientadas de (x_0, x_1) por exemplo são $-x_0$ e x_1 .

Definição 20. Superfície orientável. Dizemos que uma superfície é orientável se é possível orientar os triângulos de uma decomposição simplicial de tal maneira que os dois triângulos adjacentes a cada aresta induzam nesta aresta orientações contrárias. Dizemos então que a orientação dos triângulos é coerente. A definição é independente da triangulação particular considerada.

Complementos. Uma superfície com bordo se diz orientável se vale a condição acima para as arestas que são face comum de dois triângulos. Chamamos sequência desorientadora de uma superfície (com ou sem bordo) a uma sequência $A_1 \Delta_1 A_2 \Delta_2 \dots \Delta_n A_1$, onde A_i é face comum de Δ_{i-1} e Δ_i , e tal que, exceto para A_1 , as orientações induzidas por dois triângulos com aresta comum nesta aresta sejam contrárias, e sobre A_1 , as orientações induzidas coincidam.

Exercício: Demonstrar que uma superfície (com ou sem bordo) é não orientável se e somente se existe uma sequência desorientadora. Exemplos de superfície não orientável são a faixa de Möbius e o plano projetivo.

4. Grupos de homologia

De agora em diante consideraremos sempre complexos simpliciais compactos (isto é, tais que só têm um número finito de simplexes, cf. exercício 5, § 1).

Chamamos p -cadeia de um complexo simplicial a uma combinação linear formal a coeficientes inteiros de simplexes de dimensão p :

$$c^p = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{L}_p} n_\alpha \sigma_\alpha^p$$

onde \mathcal{L}_p indica o número dos simplexes de dimensão p , e $n_\alpha \in \mathbb{Z}$. Concionamos que $n(-\sigma) = -n\sigma$ e que $\sigma + (-\sigma) = 0$. Indicamos com $C^p(K, \mathbb{Z})$ ou simplesmente $C^p(K)$ o conjunto das p -cadeias. $C^p(K)$ tem estrutura de grupo.

Definição 21. Operador bordo: Chamamos bordo de um simplexo orientado à soma de suas faces orientadas. Indicando com Δ o operador que a um simplexo faz corresponder o respectivo bordo, temos

$$\Delta \sigma^p(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma^{p-1}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$$

$$\Delta \sigma^0 = 0$$

Para p -cadeias definimos o bordo por linearidade, pondo

$$\Delta \sum_{\alpha=1}^{\infty} n_{\alpha} \sigma_{\alpha}^p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} n_{\alpha} \Delta \sigma_{\alpha}^p$$

Teorema 9. $\Delta \Delta \sigma^p = 0$

Basta demonstrar para um simplexo σ^p . Ora:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \sigma^p &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \Delta \sigma^{p-1}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sigma^{p-2}(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^p (-1)^{j-1} \sigma^{p-2}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \right\} = 0 \end{aligned}$$

pois cada face $\sigma^{p-2}(x_0, \dots, \hat{x}_n, \dots, \hat{x}_m, \dots, x_p)$ aparece duas vezes com sinais contrários.

Definição 22. Ciclo é uma p -cadeia cujo bordo é nulo.

Indicamos com $Z^p(K)$ o conjunto dos ciclos, isto é

$$Z^p(K) = \Delta^{-1}(0) = \left\{ c^p \mid \Delta c^p = 0 \right\}$$

É um sub-grupo do grupo $C^p(K)$.

Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos Z^p em vez de $Z^p(K)$.

Seja ainda

$$B^p(K) = \left\{ \Delta C^{p+1} \right\}$$

isto é, o conjunto dos bordos de dimensão p . Dizemos que uma p -cadeia c^p é homóloga a 0 ($c^p \sim 0$) se $c^p \in B^p(K)$; mais geralmente dizemos que $c^p \sim c'^p$ se $c^p - c'^p \in B^p(K)$.

Do teorema 1 segue que $B^p(K)$ é um subgrupo de $Z^p(K)$ e portanto podemos definir o grupo

$$H^p(K) = Z^p(K) / B^p(K)$$

chamado p -ésimo grupo de homologia.

Pode-se demonstrar que $H^p(K)$ é um invariante topológico do espaço K , isto é, de qualquer modo que o triangulemos, obtemos sempre o mesmo grupo H^p .

Exemplos

1) Consideremos a coroa circular com a triangulação da figura 9, e chamemos de u^2 a soma dos simplexes de dimensão 2.

Temos:

$$\sigma(A,B) + \sigma(B,C) + \sigma(C,A) \sim \sigma(A',B') + \sigma(B',C') + \sigma(C',A')$$

$$\text{pois } \Delta(u^2) = \sigma(A,B) + \sigma(B,C) + \sigma(C,A) - \sigma(A',B') - \sigma(B',C') - \sigma(C',A')$$

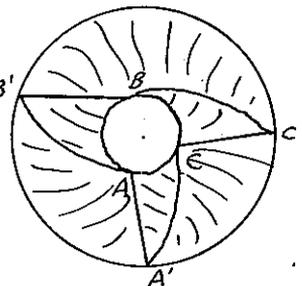


Figura 9

$\sigma(A,B) + \sigma(B,C) + \sigma(C,A)$ é um ciclo mas não um bordo.

De fato, se tivéssemos uma cadeia de dimensão 2, C^2 , tal que

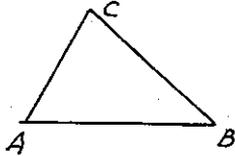
$$\Delta C^2 = \sigma(A,B) + \sigma(B,C) + \sigma(C,A)$$

então em C^2 deve aparecer o triângulo $\sigma^2(A,B,B')$, assim como

$$\sigma^2(B,C,C') \quad \text{e} \quad \sigma^2(C,A,A').$$

Então para desaparecer a aresta (A, B') também $\sigma^2(A, B', A')$ - deve aparecer em C^2 , bem como $\sigma^2(B, C', B')$ e $\sigma^2(C, A', A)$ e o bordo de C^2 conterà também $\sigma(B', A') + \sigma(A', C') + \sigma(C', B')$.

2) Consideremos o triângulo ABC com o interior. Temos:



$$\sigma(A, B) + \sigma(B, C) \sim \sigma(A, C)$$

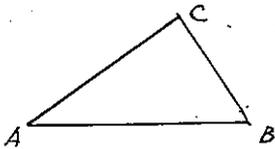
$$\sigma(A, B) + \sigma(B, C) - \sigma(A, C) \sim 0$$

$$\sigma(A, B) + \sigma(B, C) + \sigma(C, A) \sim 0$$

isto é, $\sigma(A, B) + \sigma(B, C) + \sigma(C, A)$ é um bordo, pois

$$\Delta^{\sigma}(A, B, C) = \sigma(A, B) + \sigma(B, C) + \sigma(C, A)$$

3) Consideremos agora só o perímetro do triângulo. Então:



$\sigma(A, B) + \sigma(B, C) + \sigma(C, A)$ é um ciclo, mas não é um bordo.

Observação. Se S é uma superfície compacta orientada, e se indicarmos com u^2 a 2-cadeia formada pela soma dos simplexos de dimensão 2 coerentemente orientados, então $\Delta u^2 = 0$, pois pela hipótese de orientação coerente cada lado aparece duas vezes com orientações induzidas opostas; notemos que u^2 não é um bordo pois não existem cadeias não triviais de dimensão maior que 2.

Ainda mais, se C^2 é um 2-ciclo, então $C^2 = nu^2$, pois se um dado simplexo de dimensão 2 aparece em C^2 n vezes, deduzimos sucessivamente que todos os outros aparecem também n vezes, para que o bordo seja nulo. Portanto $Z^2(S) \approx \mathbb{Z}$ e $B^2(S) = (0)$, logo, $H^2(S) \approx \mathbb{Z}$.

É imediato que se S for uma superfície (compacta) não orientável, então $Z^2(S) = (0)$ e portanto $H^2(S) = (0)$. Isto nos mostra que o grupo H^2 determina se uma superfície compacta é orientável ou não.

Exercício. Demonstrar que se S é uma superfície com bordo então $H^2(S) = (0)$.

Proposição 20. Se K é um complexo simplicial (finito) conexo,

então

$$H^0(K) \approx Z.$$

Demonstração. Tomemos um vértice x_0 qualquer; pelo exercício 4 do § 1, dado um outro vértice y qualquer existe uma 1-cadeia C^1 tal que $\Delta C^1 = y - x_0$, isto é, $y \sim y_0$. Portanto, qualquer 0-cadeia - (que é obviamente 0-ciclo) é equivalente a nx_0 , isto é, $Z^0(K) \approx Z$.

Por outro lado, $B^0(K) = (0)$. De fato, sejam x_1, \dots, x_r os vértices de K , e se

$$C^0 = n_1 x_1 + \dots + n_r x_r$$

definimos $h(C^0) = \sum_{i=1}^r n_i$. É imediato que se C^0 é um bordo, isto é, $C^0 = \Delta C^1$, então $h(C^0) = 0$; basta verificá-lo para 1-cadeias da forma $C^1 = \sigma(x, y)$.

Portanto se $nx_0 = \Delta(C^1)$, $n = 0$, logo $B^0(K) = (0)$.

Observação. Se K tem p_0 componentes conexas então

$H^0(K) \approx Z^{p_0}$. Isto é consequência particular do fato que se K é soma topológica dos complexos K_1 e K_2 , então $H^p(K)$ é soma direta de $H^p(K_1)$ e $H^p(K_2)$.

Resta pois calcular o primeiro grupo de homologia das superfícies compactas. Começemos com o cálculo para a esfera e o toro a duas dimensões.

a) Cálculo de $H^1(S^2)$. Consideremos a triangulação da figura 10 e seja

$$u_1 = \sigma(x_0, x_1) + \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, x_0).$$

É imediato que qualquer 1-ciclo é homólogo a nu_1 ; por outro lado

$$u_1 = \Delta \sigma(x_0, x_1, x_2),$$

logo $Z^1(S^2) = B^1(S^2)$ e portanto $H^1(S^2) = (0)$.

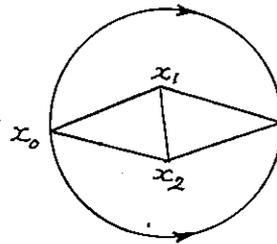
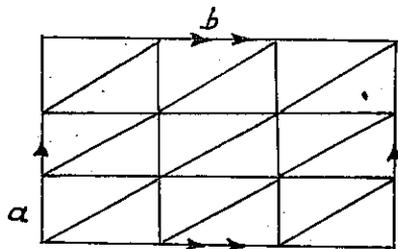


Figura 10

b) Cálculo de $H^1(T^2)$. Consideremos a triangulação da figura

É fácil ver que qualquer 1-ciclo é homólogo a $na + mb$, nn , $n \in \mathbb{Z}$: basta lembrar que C^1 sendo 1-ciclo, o número das arestas de C^1 que "chegam" a um vértice é igual ao das que "saem", e que podemos substituir



sucessivamente as arestas internas por arestas homólogas até termos apenas arestas de a e b . Então

$$\mathbb{Z}^1(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2.$$

Por outro lado seja C^2 tal que :

Figura 11 $\Delta(C^2) = na + mb$; então se um 2-simplexo σ^2 aparece p vezes em C^2 , raciocínio análogo ao feito num exemplo anterior, concluímos que todos os outros 2-simplexos também aparecem p vezes, logo, se indicarmos com u^2 a soma de todos os 2-simplexos coerentemente orientados, $C^2 = pu^2$. Como $\Delta u^2 = 0$, segue que $m = n = 0$ logo $B^1(\mathbb{T}^2) = (0)$, e então $H^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$.

Exercício. P_1 indicando o plano projetivo, demonstrar que

$$H^1(P_1) = \mathbb{Z}/(2).$$

De modo geral, pode-se demonstrar que o i -ésimo grupo de homologia de um complexo simplicial finito K é da forma $\mathbb{Z}^{p_i} \oplus F$ em que F é um grupo finito e p_i é chamado i -ésimo número de Betti de K .

Por exemplo, para o toro temos $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Esses números são invariantes topológicos pois os grupos de homologia o são.

5. Dada uma triangulação de uma superfície K , ou de modo mais geral uma divisão da superfície em polígonos, seja V o número dos vértices, A o número das arestas, F o número das faces. O número

$$\chi(K) = V - A + F$$

chama-se característica de Euler-Poincaré da superfície.

Exercícios: 1) Verificar, para as superfícies de que foram dadas triangulações diferentes, que a característica de Euler-Poincaré é a mesma (este fato será demonstrado mais tarde).

2) Verificar, para os complexos simpliciais cujos grupos de homologia foram calculados, que $\chi(K) = p_0 - p_1 + p_2$ (será demonstrado mais tarde).

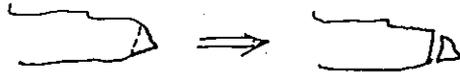
6. Consideremos uma superfície orientável, triangulada e os triângulos coerentemente orientados (podemos também supô-la decomposta em polígonos e estes orientados, isto é, dado um sentido de percurso de seus vértices; a definição de superfície orientável ou não orientável não muda quando se consideram polígonos em lugar de triângulos).

Tomemos no plano um conjunto de triângulos homeomorfos aos da superfície, e cuja forma mudamos eventualmente para permitir a seguinte "colagem": Tomamos um vértice da triangulação na superfície e consideramos o ciclo formado pelos triângulos incidentes com êle; colamos num ciclo semelhante os triângulos correspondentes do plano (mudando eventualmente a sua forma). Ao ciclo assim obtido colamos sucessivamente os outros triângulos que ainda temos no plano seguindo as incidências da triangulação da superfície (é fácil de ver que êste processo é possível ajustando convenientemente a forma dos triângulos). Terminando o processo de colagem teremos um grande polígono com um número par, $2i$, de lados, correspondendo a i arestas da triangulação da superfície. No grande polígono assim obtido contamos uma só vez cada aresta ou vértice, ainda que apareça mais de uma vez. Com esta contagem é imediato que a característica de Euler-Poincaré não muda nas operações que fazemos sucessivamente. Basta ver que essas operações se reduzem a quatro operações elementares:

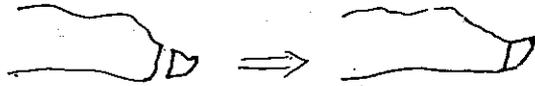
- 1) Criação de um vértice: evidentemente $\chi(K)$ não muda pois também A aumenta de uma unidade
- 2) Supressão de um vértice: Não se altera $V - A$, pois o vértice suprimido não é igual a nenhum outro, senão uma vizinhança dêle não seria homeomorfa ao disco.



3) "Corte" ou subdivisão bidimensional:



4) "Colagem" ou consolidação bidimensional:



Essas operações também não mudam o caráter de orientabilidade ou não orientabilidade, que aliás já sabemos ser um invariante topológico.

Vamos demonstrar que os polígonos planos obtidos a partir de superfícies orientáveis podem ser reduzidos aos tipos: aa^{-1} (esfera) e

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

(figura 12), onde a_i, b_i indicam arestas.



Figura 12

Para as não orientáveis se pode demonstrar do mesmo modo que se pode reduzir o polígono à forma

$$a_1 a_1 \dots a_p a_p \quad (\text{figura 12'})$$

Para reduzir uma sequência qualquer de arestas a estas formas canônicas usamos as seguintes operações:

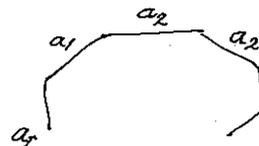
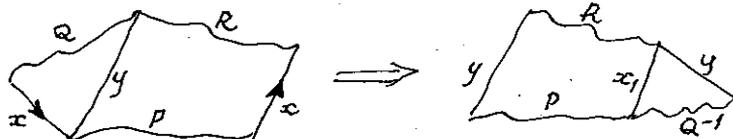


Figura 12'

- I) permutação cíclica das arestas
- II) supressão de um par xx^{-1} (ou introdução) - não muda $\chi(K)$, como se observou para a operação 2) acima.
- III) $PxQRx^{-1} \rightarrow PyRQy^{-1}$ (as maiúsculas indicam blocos quaisquer de arestas); aqui usamos as operações 3) e 4).
- IV) $PxQRx \rightarrow PyRyQ^{-1}$: novamente usamos as operações de subdivisão e consolidação



Consideremos o caso orientável: todos os lados aparecem duas vezes com orientação contrária.

Dizemos que dois pares x, x^{-1} e y, y^{-1} se separam e aparecem na ordem $xRySx^{-1}Ty^{-1}$. Podemos, sempre que aparecem pares que se separam, colocá-los no início da sequência, usando as operações acima:

$$\begin{aligned} & PxQyRx^{-1}Sy^{-1} \xrightarrow{\text{III}} Px_1yRQx_1^{-1}Sy^{-1} \xrightarrow{\text{III}} Px_1y_1x_1^{-1}SRQy_1^{-1} \\ \xrightarrow{\text{I}} y_1x_1^{-1}SRQy_1^{-1}Px_1 & \xrightarrow{\text{III}} y_1x_2^{-1}y_1^{-1}PSRQx_2 \xrightarrow{\text{I}} x_2y_1x_2^{-1}y_1^{-1}PSRQ \end{aligned}$$

Assim agrupamos os pares separados no início. Chamando \mathcal{K} o polígono podemos escrever

$$\mathcal{K} = K L$$

onde

$$K = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

e L não contém pares separados:

$$L = x M x^{-1} N$$

onde M, N não contém pares separados; então $M = y T y^{-1}$ onde T também não tem pares separados, e assim sucessivamente; como o número de lados nos blocos L, M, T, etc. vai diminuindo, temos certamente afinal um par zz^{-1} junto; se tivermos por exemplo $yz z^{-1} y^{-1}$ podemos suprimir $z z^{-1}$; depois $y y^{-1}$, e assim sucessivamente, donde afinal

$$\mathcal{K} = K = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

No caso orientável temos então, ou a forma aa^{-1} , caso da esfera, ou esta segunda forma.

No caso não orientável, aparece pelo menos um par xx ; como antes, mostremos que pode ser colocado no início:

$$PxQxR \xrightarrow{\text{IV}} PyyQ^{-1}R = PyyT \xrightarrow{\text{IV}} zP^{-1}zT \xrightarrow{\text{IV}} uuPT$$

Chegamos assim à forma

$$\mathcal{K} = K L$$

onde $K = a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_p a_p$

e L não contém pares xx. Se L não contiver pares que se separam, repetindo argumento anterior vemos que L desaparece; suponhamos, então, que L contém pares que se separam. Tomemos o último par em K,

seja $K = K'xx$ e seja então :

$$\begin{aligned} KL &= K'xx(PyQzR)y^{-1}Sz^{-1}T \implies K'x_1R^{-1}z^{-1}(Q^{-1}y^{-1}p^{-1}x_1y^{-1}S)z^{-1}T \implies \\ &\implies K'x_1R^{-1}S^{-1}y(x_1^{-1}P)yQz_1z_1T \implies K'x_1(R^{-1}S^{-1}P^{-1})x_1y_1y_1Qz_1z_1T \implies \\ &\implies K'x_2x_2PSRy_1y_1Qz_1z_1T \implies K'x_2x_2y_2y_2PSRQz_1z_1T \implies \\ &\implies K'x_2x_2y_2y_2z_2z_2PSRQT \end{aligned}$$

e assim obtemos afinal a terceira forma

$$\mathcal{K} = a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_q a_q$$

Tôdas as superfícies compactas deram pois origem a polígonos de uma das formas: aa^{-1} (esfera), $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$, ou $a_1 a_1 \dots a_p a_p$. Observemos que, exceto no caso da esfera, todos os vértices do polígono plano são iguais, como é fácil verificar. Indicando com S^2 , T_p e M_p as superfícies trianguladas cujo esquema plano seja respectivamente aa^{-1} , $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ e $a_1 a_1 \dots a_p a_p$ segue imediatamente as características de Euler-Poincaré são respectivamente:

$$\chi(S^2) = 2 - 1 + 1 = 2$$

$$\chi(T_p) = 1 - 2p + 1 = 2 - 2p$$

$$\chi(M_p) = 1 - p + 1 = 2 - p$$

O número p chama-se gênero ou genus da superfície. A superfície esférica tem genus 0.

Exercícios. 1) Uma esfera com p asas, isto é, um toro com p buracos, tem genus p; para demonstrar este resultado basta calcular a mudan-

ça da característica de Euler-Poincaré quando colamos uma asa (um toro) à superfície esférica.

2. Que superfície obtemos colando p faixas de Möbius à superfície esférica? (a colagem é feita retirando um círculo da superfície esférica e colando em seguida no bordo resultante o bordo da faixa de Möbius; observemos que ambos são circunferências).

Observação. Quando tivermos estabelecido a relação entre o genus de uma superfície e o seu primeiro número de Betti seguir-se-á que o genus é um invariante topológico. Então segue, como recíproca aos exercícios precedentes que uma superfície de genus p é uma esfera com p asas ou p faixas de Möbius. Só então ficará demonstrado que uma superfície de genus p e uma de genus $q \neq p$ não podem ser homeomorfas.

Cálculo dos grupos de homologia da esfera com p asas

Já calculamos o grupo H^0 de homologia das superfícies conexas, e mostramos que se reduz a (0) . Também mostramos que o H^2 de uma superfície orientável é \mathbb{Z} , e o de uma não orientável é (0) . Calculemos agora o 1º grupo de homologia.

Consideremos em T_p a triangulação da figura 13 (fizemos a da figura para o caso $p = 2$, mas a demonstração é para p qualquer).

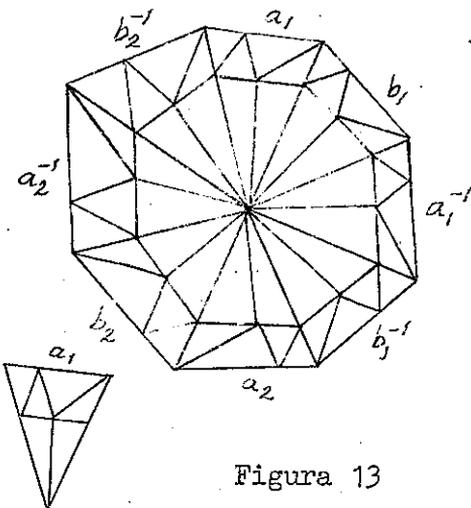


Figura 13

Consideremos um ciclo C^1 , e mostremos que é homólogo a um ciclo da forma

$$m_1 a_1 + n_1 b_1 + \dots + m_p a_p + n_p b_p$$

De fato, se C^1 contém uma aresta interna, tomando um vértice interno de C^1 , como $\Delta C^1 = 0$, para cada aresta que chega ao vértice há uma que sai, e podemos substituir cada par de arestas pelo terceiro lado do triângulo, se elas pertencem a um mesmo triângulo, ou mais

geralmente por uma cadeia de arestas homólogas que não contém o vértice

considerado. (Fig. 14). Com êsse processo, podemos substituir tôdas as arestas por lados externos, isto é, teremos

$$C^1 \sim m_1 a_1 + n_1 b_1 + \dots + m_p a_p + n_p b_p$$

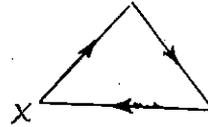


Figura 14

Suponhamos agora $C^1 \sim 0$. Existe então uma cadeia C^2 tal que

$$\Delta C^2 = m_1 a_1 + n_1 b_1 + \dots + m_p a_p + n_p b_p$$

Ora, se um triângulo com lado a_1 aparece m' vezes em C^2 , um adjacente deve aparecer também m' vezes para que o bordo interno desapareça, e assim a_1^{-1} aparecerá também m' vezes no bordo de C^2 , logo $m_1 = 0$; analogamente $n_1 = m_2 = n_2 = \dots = 0$, isto é, $C^1 = 0$.

Então, se os coeficientes m_i, n_i de dois ciclos de dimensão 1 forem diferentes, êsses ciclos pertencem a classes de homologia distintas. Logo $H^1(T_p) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{2p}$.

Concluimos pois que o 1º número de Betti de T_p é $p_1 = 2p$.

Quanto à esfera S^2 , já mostramos que $H^1(S^2) = (0)$, portanto o 1º número de Betti de S^2 é 0.

Exercício. Demonstrar que $H^1(M_p) = \mathbb{Z}^{p-1} \oplus \mathbb{Z}/(2)$, portanto $p_1 = p - 1$.

Dos resultados acima segue que o genus de uma superfície é um invariante topológico. Considerando as expressões já obtidas para p_0, p_1 e p_2 e para a característica de Euler-Poincaré para superfícies (cf. pg. 15), vem que tanto para S^2 como para T_p e M_p temos

$$p_0 - p_1 + p_2 = V - A + F = \chi(S).$$

e portanto a característica de Euler-Poincaré é também um invariante, e, portanto, a característica de Euler-Poincaré é também um invariante topológico.

Exercícios. 1) Demonstrar que colando p asas ao plano projetivo obtemos M_{1+2p} .

2) Demonstrar que colando p faixas de Möbius ao plano projetivo obtemos M_{1+p} .

7. Talhos

No plano e na esfera uma curva de Jordan fechada decompõe sempre a superfície em duas partes. O mesmo porém não acontece no toro, por exemplo, onde um meridiano não decompõe.

Dada uma superfície, chamamos de talho (retrosection em inglês e francês, rückkehrschnitt em alemão) uma curva de Jordan fechada (isto é, uma curva homeomorfa a um círculo) sobre a superfície e que não a decompõe.

Observando a figura 15 vemos que em T_p podemos tirar p poligonais fechadas sem pontos comuns tais que a figura restante ainda seja conexa, ou podemos tirar p pares de poligonais fechadas tais que cada par só tenha um ponto comum, 2 pares distintos não tenham ponto comum, e que a figura restante ainda seja conexa; ou ainda, podemos tirar $2p$ poligonais que têm apenas um ponto em comum e tais que o conjunto restante ainda seja conexo.

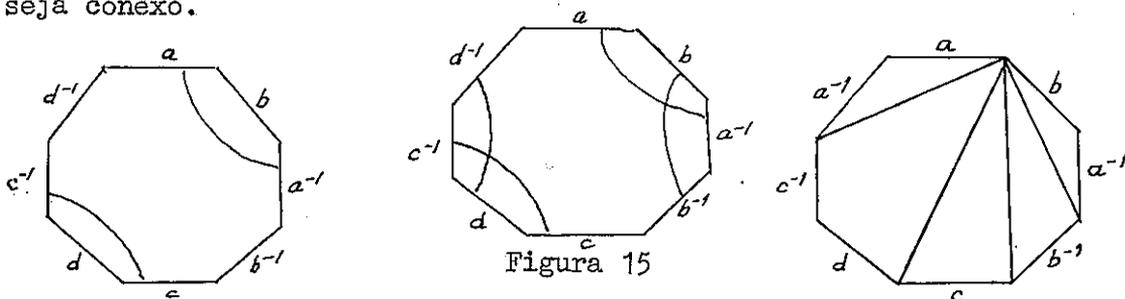


Figura 15

Vamos demonstrar que esse número de talhos é máximo, isto é,

Teorema 10. T_p admite $p_1 = 2p$, e não mais, talhos sem arestas comuns e tais que o complementar da reunião desses talhos ainda seja conexo.

Demonstração. Já vimos que T_p admite p_1 talhos nas condições mencionadas. Para demonstrar que não pode admitir talhos k_1, \dots, k_r , satisfazendo a essas condições e com $r > p$ basta demonstrar que os talhos k_1, \dots, k_r são necessariamente homologicamente independentes, isto é, que

$$m_1 k_1 + \dots + m_r k_r \sim 0$$

implica

$$m_1 = \dots = m_r = 0$$

De fato, se temos $m_1 k_1 + \dots + m_r k_r \sim 0$ então existe uma 2-cadeia C^2 tal que

$$\Delta C^2 = m_1 k_1 + \dots + m_r k_r$$

Em ΔC^2 cada aresta σ_i componente de k_i aparece m_i vezes; como ela é incidente a dois triângulos Δ' e Δ'' cada um contribui em certo número de vezes, seja, respectivamente, m_i' e m_i'' com $m_i = m_i' + m_i''$. Portanto Δ' comparece m_i' vezes em C^2 e como o complementar de $k_1 \cup \dots \cup k_r$ é conexo, todos os outros triângulos também parecerão m_i' vezes em C^2 , como se verifica considerando os triângulos incidentes com Δ' e assim sucessivamente; em particular também Δ'' e como a superfície é orientável, Δ'' induz em σ_i orientação contrária à induzida por Δ' e portanto $m_i'' = -m_i'$, isto é, $m_i = 0$ como queríamos demonstrar.

Exercício

Demonstrar que M_p admite $p = p_1 + 1$, e não mais, talhos nas condições acima.

- ooo0ooo -

C A P I T U L O V .

Diferenciais e integrais sôbre uma superfície de Riemann.

1. Formas diferenciais lineares.

A definição de formas diferenciais lineares, como depois a de formas de 2º grau, será dada sôbre variedades a duas dimensões com estrutura mais geral que a de superfície de Riemann, a estrutura de variedade diferenciável que definimos em seguida.

Definição 23. Seja R uma variedade topológica de dimensão 2; suponhamos que exista um recobrimento de R com conjuntos abertos e para cada aberto U exista uma função f que aplica U homeomorficamente num aberto do plano. Ainda mais, se U e V são dois abertos quaisquer do recobrimento, com $U \cap V \neq \emptyset$, f e g as funções correspondentes, f^* e g^* as restrições de f e g a $U \cap V$, suponhamos que $f^* \circ g^{*-1}$ seja de classe C^∞ : dizemos então que R é uma variedade diferenciável de classe C^∞ .

Dado o aberto U e a correspondente aplicação f , por meio de f podemos introduzir coordenadas em U . Seja P um ponto no plano complexo e consideremos as funções

$$x_1(P) = \text{abscissa de } P \quad \text{e} \quad x_2(P) = \text{ordenada de } P.$$

Em U estão definidas então as funções $x_1 \circ f$ e $x_2 \circ f$, que chamaremos coordenadas relativas à aplicação f . Observemos que dados U e V , com $U \cap V \neq \emptyset$, num ponto de $U \cap V$ passamos das coordenadas relativas a f às coordenadas relativas a g por meio da transformação $g^* \circ f^{*-1}$, isto é, a mudança de coordenadas é dada por uma função de classe C^∞ .

Seja α uma função com valores complexos definida numa vizinhança W de um ponto $P \in R$, $W \subset U$ onde U é um aberto do recobrimento aplicado no plano por f , e identifiquemos W com sua imagem por f . α pode ser expressa por meio das coordenadas x_1, x_2 e será indicada então com $\alpha(x_1, x_2)$. Diremos que α é diferenciável de classe C^∞ se $\alpha(x_1, x_2)$ o for. Como a mudança de coordenadas é feita por uma função de classe C^∞

esta definição não depende das coordenadas usadas para exprimir α como função definida num aberto do plano.

Consideremos agora o conjunto

$$\Omega = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, P, U) \left| \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2 \text{ números complexos quaisquer} \\ P \in \mathbb{R} \\ U \text{ vizinhança coordenada de } P \end{array} \right. \right\}$$

Dizemos que

$$(\alpha_1, \alpha_2, P, U) \sim (\beta_1, \beta_2, P^*, U^*)$$

se, indicando com x_1, x_2 as coordenadas de U , x_1^*, x_2^* coordenadas em U^* , tiveremos

- 1) $P = P^*$
- 2) $\alpha_1 = \alpha_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial x_1} + \alpha_2^* \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1}$
- 3) $\alpha_2 = \alpha_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial x_2} + \alpha_2^* \frac{\partial x_2^*}{\partial x_2}$

sendo as derivadas parciais calculadas em P .

Esta relação é evidentemente reflexiva, simétrica (basta observar que o determinante do sistema linear que leva (α_1^*, α_2^*) em (α_1, α_2) é o jacobiano da transformação de coordenadas) e transitiva, logo é uma relação de equivalência em Ω .

Chamaremos covetor a tóda classe de equivalência de Ω segundo esta relação. Se P é o ponto pertencente aos elementos da classe, diremos que essa classe é um covetor em P .

Consideremos o conjunto, que indicaremos com D_P , dos covetores em P ; introduziremos em D_P uma estrutura de espaço vetorial. Para isto, observemos preliminarmente que fixada uma vizinhança coordenada U de P , em cada covetor em P podemos escolher um representante na classe de equivalência que define êsse covetor, em que compareça a vizinhança U .

Sejam então $(\alpha_1, \alpha_2, P, U)$, (β_1, β_2, P, U) representantes de

dois covetores em P , λ um número complexo. Definimos:

$$(\alpha_1, \alpha_2, P, U) + (\beta_1, \beta_2, P, U) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, P, U)$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, P, U) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, P, U).$$

É imediato verificar que a classe do segundo membro nas duas igualdades não depende dos representantes escolhidos, e temos então estrutura de espaço vetorial em D_P .

Sejam x_1 e x_2 coordenadas válidas na vizinhança U de P , e indiquemos com $dx_{1,P}$ o covetor cujo representante é $(1, 0, P, U)$, com $dx_{2,P}$ o covetor representado por $(0, 1, P, U)$. Da definição da estrutura de espaço vetorial resulta que são linearmente independentes, e geram D_P , logo formam uma base. D_P é pois um espaço vetorial de dimensão 2 e dado um covetor ω em P , representado por (A, B, P, U) teremos

$$\omega = A \cdot dx_{1,P} + B \cdot dx_{2,P}.$$

Definição 24. Se em cada $P \in R$ for dado um covetor dizemos que em R está definida uma forma diferencial linear.

Suponhamos dada uma forma diferencial ω na variedade R e seja $P \in R$; consideremos uma vizinhança coordenada U de P , sejam x_1, x_2 coordenadas válidas em U . Então em P vale

$$\omega = A dx_{1,P} + B dx_{2,P}.$$

Ora, uma expressão análoga vale para todo ponto de U ; indicando pois com dx_1, dx_2 os covetores de base num ponto genérico de U , teremos para ω a expressão

$$\omega = A dx_1 + B dx_2$$

válida em U , com A e B funções definidas em U com valores complexos. Observemos que se tomarmos para P uma outra vizinhança coordenada V , com coordenadas x_1^*, x_2^* , ω terá em V uma representação

$$\omega = A^* dx_1^* + B^* dx_2^*$$

com outros coeficientes; mas como para todo $P \in U \cap V$, (A, B, P, U) e (A^*, B^*, P, V) representam o mesmo covetor, em $U \cap V$ vale

$$(5.1) \quad \begin{aligned} A &= A^* \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + B^* \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \\ B &= A^* \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + B^* \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Então se A e B forem diferenciáveis de classe C^∞ , A^* e B^* também serão e neste caso diremos que ω é diferenciável de classe C^∞ . Ainda, se A e B forem reais, A^* e B^* também serão, e podemos dar a seguinte definição:

Definição 25. Uma forma diferencial ω em R diz-se real se para todo $P \in R$, numa vizinhança coordenada U de P , com coordenadas x_1, x_2 tivermos

$$\omega = A dx_1 + B dx_2$$

com A e B reais.

Definição 26. Se ω é uma forma diferencial linear sobre R , representada localmente por

$$\omega = A dx_1 + B dx_2$$

chamamos forma conjugada de ω a forma $\bar{\omega}$ dada por

$$\bar{\omega} = \bar{A} dx_1 + \bar{B} dx_2.$$

Também por (5.1), $\bar{\omega}$ não depende das coordenadas locais x_1 e x_2 , depende só de ω .

Seja agora f uma função com valores complexos definida em R e diferenciável de classe C^∞ . Seja U uma vizinhança coordenada, x_1, x_2 coordenadas em U . Em cada ponto de U podemos definir o covetor

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2.$$

Se tomarmos outra vizinhança U^* , com coordenadas x_1, x_2 tere-

mos também em cada ponto de U^* o covetor

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

que coincide com o primeiro em $U \cap U^*$, pela definição da relação de equivalência no conjunto Ω .

A forma diferencial linear df assim definida em R chama-se diferencial da função f .

Se f e g são funções definidas em R diferenciáveis, e λ, μ números complexos e \bar{f} indica a função conjugada de f , temos

$$(5.2) \quad \begin{cases} d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg \\ d(fg) = g df + f dg \\ d\bar{f} = \overline{df} \end{cases}$$

2. Formas diferenciais lineares numa superfície de Riemann.

Seja agora S uma superfície de Riemann; S é então uma variedade diferenciável de classe C^∞ e podemos considerar formas diferenciais lineares ω sobre S .

Dado $P \in S$, seja z um parâmetro uniformizador definido numa vizinhança U de P . Se $z = x + iy$ então x, y serão coordenadas em U e podemos escrever localmente

$$\omega = a dx + b dy.$$

Também se f é uma função definida em S , de classe C^∞ , a diferencial de f se exprime localmente por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Consideremos em particular a função $z = x + iy$, e sua conjugada $\bar{z} = x - iy$. Então $dz = dx + i dy$ e $d\bar{z} = dx - i dy$ donde

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

e portanto $dz, d\bar{z}$ também formam uma base do espaço vetorial gerado por dx e dy , isto é, se ω é uma forma diferencial linear em S , podemos escrever localmente

$$\omega = A dz + B d\bar{z}.$$

Seja agora f uma função holomorfa definida em S e consideremos a diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Usando a identidade de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

podemos escrever

$$(5.3) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + i \frac{\partial f}{\partial x} dy = \frac{\partial f}{\partial x} (dx + i dy) = \frac{df}{dz} dz$$

Proposição 21. Sejam z e z^* parâmetros uniformizadores em P , ω uma forma diferencial linear em S , e sejam

$$\begin{aligned} \omega &= A dz + B d\bar{z} \\ \omega &= A^* dz^* + B^* d\bar{z}^* \end{aligned}$$

as representações de ω relativas aos parâmetros z e z^* . Então de $A = 0$ (resp. $B = 0$) segue $A^* = 0$ (resp. $B^* = 0$).

A demonstração é trivial; de fato, de (5.3) e (5.2) vem

$$dz = \frac{dz}{dz^*} dz^* \qquad d\bar{z} = \frac{\overline{dz}}{dz^*} d\bar{z}^*$$

donde

$$\omega = A \frac{dz}{dz^*} dz^* + B \frac{\overline{dz}}{dz^*} d\bar{z}^*$$

isto é,

$$A^* = A \frac{dz}{dz^*}, \qquad B^* = B \frac{\overline{dz}}{dz^*}$$

Definição 27. A forma ω se diz de tipo $(1,0)$ se o coeficiente de $d\bar{z}$ em qualquer representação local for nulo, e se diz de tipo $(0,1)$ se for nulo o coeficiente de dz .

Proposição 22. Se f é de classe C^1 , f é holomorfa se e somente se df é de tipo $(1,0)$.

De fato

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$
$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

O anulamento do coeficiente de $d\bar{z}$ dá a condição de monogeneidade de Cauchy-Riemann.

Se df é de tipo $(0,1)$ então f é holomorfa.

Proposição 23. Seja ω uma forma de tipo $(1,0)$, isto é, se z é parâmetro uniformizador num ponto $P \in S$, $\omega = A \cdot dz$ numa vizinhança de P . Se A for uma função holomorfa de z , então sendo z^* um outro parâmetro uniformizador em P , e $\omega = A^* dz^*$ a nova representação de ω , A^* será uma função holomorfa de z^* .

Demonstração trivial, pois $A^* = A \frac{dz}{dz^*}$.

Definição 28. Uma forma diferencial em uma superfície de Riemann S , de tipo $(1,0)$, diz-se holomorfa num ponto $P \in S$ se em uma representação local em P o coeficiente for uma função holomorfa.

3. Zeros e pólos de uma forma holomorfa.

Seja ω uma forma definida na superfície S , holomorfa numa vizinhança do ponto $P \in S$, e $z = x + iy$ um parâmetro uniformizador em P e $\omega = A dz$ a representação local de ω ; A é portanto uma função holomorfa.

Se A tem um zero de ordem n em P dizemos que ω tem zero de ordem n em P . É claro que isto não depende do parâmetro uniformizador z , pois se z^* é outro parâmetro

$$\omega = A \frac{dz}{dz^*} dz^* = A^* dz^*$$

e como $\frac{dz}{dz^*} \neq 0$, A^* tem também um zero de ordem n em P .

Seja agora ω uma forma holomorfa em toda uma vizinhança V de um ponto P , excetuado o próprio P , z um p.u. em P . Então teremos uma representação de ω : $\omega = A(z) dz$ válida ao redor de P , mas não em P . Três casos são possíveis:

1) A pode ser estendida a P por continuidade. Dizemos então que a singularidade em P é removível; ω será regular em P , e este caso não apresenta interesse.

2) A tem um polo de ordem n em P ; dizemos então que ω tem um polo de ordem n em P .

3) A tem singularidade essencial, e dizemos que a forma ω tem em P uma singularidade essencial.

É claro que uma mudança de p.u. não traz alteração, pois

$$A^* = A \frac{dz}{dz^*}$$

tem as mesmas propriedades que A .

Definição 29. Chama-se forma diferencial meromorfa ou abeliana em S uma forma diferencial que é holomorfa em toda S excetuado um conjunto discreto de pontos em que tem polos.

4. Forma diferencial exterior de grau 2.

Seja R uma variedade diferenciável de dimensão 2 e consideremos o conjunto

$$\Omega = \left\{ (\alpha, P, U) \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ número complexo} \\ P \in R \\ U \text{ vizinhança coordenada de } P \end{array} \right. \right\}$$

Em Ω definimos uma relação de equivalência: pomos

$$(\alpha_1, P_1, U_1) \sim (\alpha_2, P_2, U_2)$$

se

$$1) P_1 = P_2$$

2) sendo x_1, y_1 , resp. x_2, y_2 , coordenadas válidas em U_1 , resp.

U_2 ,

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{d(x_2, y_2)}{d(x_1, y_1)}.$$

Consideremos o quociente de Ω por esta relação de equivalência. A uma classe de equivalência em que apareça o ponto P chamaremos covetor de grau 2 em P .

No conjunto dos covetores de 2º grau num ponto P iremos introduzir uma estrutura de espaço vetorial.

Fixada uma vizinhança coordenada U de P , é sempre possível tomar em cada covetor em P um representante em que apareça essa vizinhança U . Definimos então soma dos covetores representados por (α_1, P, U) , (α_2, P, U) como sendo a classe $(\alpha_1 + \alpha_2, P, U)$:

$$(\alpha_1, P, U) + (\alpha_2, P, U) = (\alpha_1 + \alpha_2, P, U).$$

Ainda, sendo λ um número complexo definimos .

$$\lambda (\alpha, P, U) = (\lambda \alpha, P, U).$$

Com estas definições, damos ao conjunto dos covetores de 2º grau em P uma estrutura de espaço vetorial. Esse espaço tem dimensão 1; de fato seja U uma vizinhança de P com coordenadas x, y , o covetor que indicamos por $dx \wedge dy$ (produto exterior de dx e dy) definido por

$$dx \wedge dy = (1, P, U)$$

gera todo o espaço dos covetores de 2º grau em P , pois temos

$$(\alpha, P, U) = \alpha dx \wedge dy.$$

Observação. Se fizermos em U a mudança de coordenadas

$$(x,y) \longrightarrow (y,x),$$

temos o jacobiano

$$\frac{d(x,y)}{d(y,x)} = -1,$$

donde

$$dx \wedge dy = - dy \wedge dx.$$

De modo geral se x,y e X,Y são dois sistemas de coordenadas locais, vale

$$dx \wedge dy = \frac{d(x,y)}{d(X,Y)} \cdot dX \wedge dY.$$

Definição 30. Dizemos que em R está definida uma forma diferencial de grau 2 se em cada ponto $P \in R$ é dado um covetor de grau 2.

Seja φ uma forma diferencial de 2º grau em R , e $P \in R$. Em P temos

$$\varphi = \lambda dx \wedge dy$$

e esta representação será válida não só em P como em uma vizinhança coordenada U de P , λ sendo então uma função das coordenadas x,y em U , com valores complexos. φ será dita diferenciável de classe C^∞ se λ o for: este conceito não depende das coordenadas x,y pois se passarmos para coordenadas X,Y , λ virá multiplicado pelo jacobiano

$$\frac{d(x,y)}{d(X,Y)}$$

que é diferenciável de classe C^∞ .

Definição 31. Sejam ω_1, ω_2 formas lineares em R , localmente representadas por

$$\omega_1 = A_1 \cdot dx + B_1 \cdot dy$$

$$\omega_2 = A_2 \cdot dx + B_2 \cdot dy.$$

Chamamos produto exterior $\omega_1 \wedge \omega_2$ a forma de 2º grau dada por

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (A_1 B_2 - A_2 B_1) dx \wedge dy.$$

É imediato verificar que a definição não depende das coordenadas x, y e que vale $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.

Em particular, a forma que anteriormente denotamos com $dx \wedge dy$ é o produto exterior das formas lineares dx, dy e a nossa notação é coerente.

Definição 32. Seja ω uma forma linear, representada numa vizinhança coordenada U de um ponto $P \in R$ por $\omega = a dx + b dy$. Chamaremos diferencial exterior $d\omega$ da forma ω à forma de 2º grau definida localmente por

$$d\omega = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) dx \wedge dy$$

Verifica-se facilmente que a definição não depende do sistema de coordenadas locais.

Definição 33. Uma forma linear ω diz-se fechada se $d\omega = 0$.

Definição 34. Uma forma linear ω diz-se exata se existe uma função diferenciável definida em toda R e tal que $df = \omega$.

Temos sempre $d(df) = 0$ (como se verifica facilmente), isto é, toda forma linear exata é fechada.

5. Formas induzidas.

Sejam R e R' duas variedades diferenciáveis de dimensão 2 e seja $\varphi: R \rightarrow R'$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ . Seja $P \in R$, $P' = \varphi(P) \in R'$, sejam x, y coordenadas ao redor de P , x', y' coordenadas ao redor de P' . A aplicação φ define x', y' como funções de x, y de classe C^∞ : $x' = x'(x, y)$ e $y' = y'(x, y)$.

Suponhamos agora dada em R' uma forma diferencial linear ω que ao redor de P' se exprime por $\omega = a dx' + b dy'$ e consideremos a forma diferencial em R , indicada por $\varphi^* \omega$, que ao redor de P se ex

prime por

$$\begin{aligned}\varphi^* \omega &= a(x'(x,y), y'(x,y)) \left(\frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \right) + \\ &+ b(x'(x,y), y'(x,y)) \left(\frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \right) = \\ &= \left(a \frac{\partial x'}{\partial x} + b \frac{\partial y'}{\partial x} \right) dx + \left(a \frac{\partial x'}{\partial y} + b \frac{\partial y'}{\partial y} \right) dy.\end{aligned}$$

Esta forma, cuja definição não depende das coordenadas locais mas apenas de ω , como se verifica facilmente, chama-se forma induzida por ω pela aplicação φ .

Analogamente, seja Ω uma forma diferencial de 2º grau em R' , representada localmente por

$$\Omega = \alpha(x, y') dx' \wedge dy'$$

e seja $\varphi^* \Omega$ a forma de 2º grau em R definida localmente por

$$\varphi^* \Omega = \alpha(x'(x,y), y'(x,y)) \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

$\varphi^* \Omega$ será chamada forma induzida por Ω pela aplicação φ .

Define-se também a noção de variedade diferenciável de dimensão 1 e de forma diferencial (de grau 1) sobre uma variedade de dimensão 1 de maneira semelhante a que foi feita para variedades de dimensão 2.

Se agora R é uma variedade de dimensão 1, e φ uma aplicação diferenciável de R na variedade R' de dimensão 2, é possível ainda definir a forma induzida em R por uma forma diferencial linear em R' . Consideraremos o caso particular da reta, em que toda forma diferencial tem a representação $a(t) dt$. Seja φ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ do intervalo aberto (t_0, t_1) numa variedade R' de dimensão 2, que a um ponto $t \in (t_0, t_1)$ faz corresponder um ponto $P' \in R'$; sejam x, y coordenadas em P' , a aplicação φ define pois as funções de classe C^∞ ; $x = x(t)$, $y = y(t)$. Dada uma forma diferencial linear ω em R' representada localmente em P' por

$$\omega = a dx + b dy$$

consideremos a forma definida na reta por

$$\varphi^* \omega = \left(a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

Esta forma, que não depende da escolha das coordenadas locais x, y , chama-se forma induzida da ω pela φ .

6. Homologia singular.

Consideremos no plano o triângulo $p_0 p_1 p_2$ onde $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (1,0)$, $p_2 = (0,1)$. Ponhamos

$$\Delta_2 = (p_0, p_1, p_2)$$

$$\Delta_1 = (p_0, p_1)$$

$$\Delta_0 = p_0$$

e consideremos as seguintes aplicações

$$e_1^0: p_0 \longrightarrow p_1$$

$$e_1^1: p_0 \longrightarrow p_0$$

$$e_2^0: (p_0, p_1) \longrightarrow (p_1, p_0), \text{ aplicação linear, levando } p_0 \text{ em } p_1 \text{ e } p_1 \text{ em } p_0$$

$$e_2^1: (p_0, p_1) \longrightarrow (p_0, p_2), \text{ aplicação linear, levando } p_0 \text{ em } p_0, p_1 \text{ em } p_2$$

$$e_2^2: (p_0, p_1) \longrightarrow (p_0, p_1), \text{ aplicação idêntica.}$$

Definição 35. Seja R uma variedade diferenciável de dimensão 2, W uma vizinhança aberta no plano, contendo Δ_2 . Chamamos q -simplexo singular diferenciável ($q = 0, 1, 2$) uma aplicação $T: \Delta_q \longrightarrow R$ que pode ser estendida a uma aplicação diferenciável de W em R . A i -ésima face do simplexo T será a aplicação $T_i: \Delta_{i-1} \longrightarrow R$ definida por $T_i = T \circ e_q^i$ ($q = 1, 2$) e é portanto um simplexo singular diferenciável

vel de dimensão 1.

Indicaremos com $S_q(\mathbb{R})$ o grupo abeliano livre gerado pelos simplexos de dimensão q , isto é, formado pelas combinações lineares formais finitas de q -simplexos com coeficientes inteiros (que chamaremos q -ca-deias).

Definimos ainda um homomorfismo

$$\partial_q : S_q(\mathbb{R}) \longrightarrow S_{q-1}(\mathbb{R}) \quad (q = 1, 2)$$

da seguinte maneira: se T é um q -simplexo, pomos

$$\partial_q(T) = \sum (-1)^i T_i$$

sendo a soma estendida a tôdas as faces dos simplexos T . Dada agora

$$C_q = \sum_{\alpha} n_{\alpha} T_{\alpha} \in S_q(\mathbb{R}) \quad (n_{\alpha} \in \mathbb{Z})$$

pomos

$$\partial_q(C_q) = \sum n_{\alpha} \partial_q(T_{\alpha}).$$

Esse homomorfismo goza da propriedade

$$\partial_{q-1} \partial_q = 0$$

(conf. demonstração da propriedade do operador bordo, cap. IV).

Em $S_1(\mathbb{R})$ consideramos agora dois sub-grupos:

a) grupo dos ciclos

$$C_1(\mathbb{R}) = \{ c \in S_1(\mathbb{R}) \mid \partial_1 c = 0 \}.$$

b) grupo dos bordos

$$B_1(\mathbb{R}) = \{ c \in S_1(\mathbb{R}) \mid \exists d \in S_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \partial_2 d = c \}.$$

Temos

$$B_1(R) \subset C_1(R)$$

pois se $c \in B_1(R)$, $c = \partial_2 d$ e então $\partial_1 c = \partial_1 \partial_2 d = 0$.

O grupo quociente

$$H_1(R) = C_1(R)/B_1(R)$$

chama-se 1º grupo de homologia singular diferenciável. As cadeias $C \in B_1(R)$ são ditas homólogas a 0 ($C \sim 0$).

Essas definições foram dadas para uma variedade diferenciável qualquer, não necessariamente compacta. Se a variedade R é triangulável, demonstra-se que $H_1(R)$ coincide com o 1º grupo de homologia simplicial de R .

Demonstra-se ainda facilmente que um homeomorfismo diferenciável $\varphi : R \longrightarrow R'$ induz um isomorfismo de $H_1(R)$ sobre $H_1(R')$.

De fato, sejam R e R' duas variedades diferenciáveis, e $\varphi : R \longrightarrow R'$ uma aplicação diferenciável. φ induz entre os grupos de homologia um isomorfismo

$$\varphi^* : H^1(R) \longrightarrow H^1(R')$$

definido da seguinte maneira: dado um simplexo singular em R :

$$T : \Delta_q \longrightarrow R$$

façamos corresponder a T o simplexo singular em R' dado por

$$\varphi \circ T : \Delta_q \longrightarrow R'$$

Essa correspondência entre simplexos podemos estender por linearidade a uma correspondência entre $S_q(R)$ e $S_q(R')$. Temos trivialmente

$$\varphi \circ (\partial T) = \partial \varphi \circ T$$

logo φ leva $C_1(R)$ em $C_1(R')$, $B_1(R)$ em $B_1(R')$ e por passagem ao quociente obtemos uma aplicação

$$\varphi^* : H_1(R) \longrightarrow H_1(R')$$

que é um homomorfismo.

Se agora $\psi : R' \longrightarrow R''$ é por sua vez uma aplicação diferenciável de R' numa outra variedade R'' de dimensão 2, e

$$\psi \circ \varphi : R \longrightarrow R''$$

é a aplicação composta, é fácil ver que vale

$$(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*.$$

Se φ é a aplicação idêntica em R , φ^* é a aplicação idêntica em $H_1(R)$; se ψ é um homeomorfismo diferenciável de R em R' tal que ψ^{-1} seja também um homeomorfismo diferenciável, então

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^* = \text{identidade}$$

$$(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^* = \text{identidade}$$

e os grupos $H_1(R)$ e $H_1(R')$ são portanto isomorfos: duas variedades diferenciáveis equivalentes têm grupos H_1 isomorfos.

7. Integração de formas diferenciais de 1ª e 2ª graus.

Seja R uma variedade diferenciável de dimensão 2, ω uma forma de grau 1 definida em R , e seja dado um complexo singular de dimensão 1:

$$\sigma_1 : \Delta_1 \longrightarrow R$$

onde Δ_1 é o intervalo fechado $[0, 1]$ e σ_1 é a restrição de uma aplicação diferenciável de uma vizinhança desse intervalo na reta em R .

A forma induzida $\sigma_1^* \omega$ será uma forma linear definida em Δ_1 , logo representada por

$$\sigma_1^* \omega = a(t) dt$$

Então temos, por definição

$$\int_{\sigma_1} \omega = \int_0^1 a(t) dt.$$

Seja agora ω uma forma diferencial de grau 2, e σ_2 um simplexo singular de dimensão 2 em R :

$$\sigma_2: \Delta_2 \longrightarrow R$$

onde Δ_2 é, o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, σ_2 sendo uma aplicação suscetível de ser estendida a uma aplicação diferenciável de uma vizinhança de Δ_2 em R .

A forma induzida $\sigma_2^* \omega$ definida em Δ_2 tem a representação

$$\sigma_2^* \omega = a(x,y) dx \wedge dy$$

e temos, por definição

$$\int_{\sigma_2} \omega = \int_{\Delta_2} a(x,y) dx \wedge dy$$

Em ambos os casos, a integral está associada à aplicação, não a um conjunto de pontos de R , e, em, geral, a aplicações diferentes sobre um mesmo conjunto de pontos em R correspondem integrais diferentes. Porém num caso importante, aquele em que impomos a condição de σ_1 , respect. σ_2 , ser um homeomorfismo, fixado o conjunto imagem em R de Δ_1 , resp. Δ_2 , a integral fica completamente determinada, a menos do sinal.

De fato, consideremos por exemplo o caso de suas dimensões. Sejam σ_2 e σ_2' restrições de dois homeomorfismos distintos de uma vizinhança de Δ_2 em R tais que

$$(5.4) \quad \sigma_2(\Delta_2) = \sigma_2'(\Delta_2)$$

e mostremos que

$$(5.5) \quad \int_{\sigma_2} \omega = \pm \int_{\sigma_2'} \omega$$

Ora, por (5.4) podemos definir uma aplicação

$$\sigma_2^{-1} \circ \sigma_2': \Delta_2 \longrightarrow \Delta_2$$

que é um homeomorfismo diferenciável, isto é, uma mudança de coordenadas.

Chamando de x, y as coordenadas antigas, de x', y' as novas e de J o jacobiano $\frac{d(x, y)}{d(x', y')}$, teremos que, se

$$\sigma_2^* \omega = a(x, y) dx \wedge dy$$

então

$$\sigma_2^{1*} \omega = a(x(x', y'), y(x', y')) \cdot J \cdot dx' \wedge dy'$$

e como

$$\int_{\Delta_2} a(x, y) dx \wedge dy = \int_{\Delta_2} a(x(x', y'), y(x', y')) |J| dx' \wedge dy'$$

e a afirmação segue imediatamente: no segundo membro de (5.5) vale o sinal + se $J > 0$, o sinal - se $J < 0$.

Teorema 11 (teorema de Stokes). Seja ω uma forma diferencial de grau 1 definida em R e diferenciável, σ um simplexo singular de dimensão 2:

$$\sigma : \Delta_2 \longrightarrow R$$

Então vale a igualdade

$$\int_{\partial \sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega .$$

Este teorema, em vista da definição de integral num simplexo, é a tradução do teorema de Stokes clássico aplicado ao triângulo Δ_2 e seu bordo.

Se definirmos a integral de uma forma sôbre uma cadeia

$$C = \sum n_\alpha \sigma_\alpha$$

como sendo

$$\int_C \omega = \sum n_\alpha \int_{\sigma_\alpha} \omega$$

segue evidentemente que o teorema de Stokes vale para cadeias, isto é,

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega .$$

8. Teorema de Cauchy.

Consideremos agora o caso de formas diferenciais sôbre uma superfície de Riemann; do teorema de Stokes segue então o

Teorema 12 (teorema de Cauchy). Seja S uma superfície de Riemann, ω uma forma diferencial holomorfa definida em S , e seja σ um bordo de dimensão 1, isto é, $\sigma \sim 0$. Então

$$\int_{\sigma} \omega = 0 .$$

De fato, se λ é a cadeia tal que

$$\sigma = \partial \lambda$$

temos pelo teorema de Stokes

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\lambda} d\omega .$$

Mas se ω é holomorfa, $d\omega = 0$, pois se localmente tivermos

$$\omega = A(z) dz = A dx + iA dy$$

segue

$$d\omega = \left(-\frac{\partial A}{\partial y} + i \frac{\partial A}{\partial x}\right) dx \wedge dy = 0 .$$

O teorema de Cauchy está então demonstrado.

É' menos forte o enunciado seguinte: a integral de uma forma holomorfa ao longo de um caminho homotópico a 0 é nula. De fato, um caminho homotópico a 0 é sempre homólogo a 0, mas não reciprocamente.

9. Teorema da monodromia.

Faremos uma demonstração do teorema da monodromia usando processos da teoria dos espaços de recobrimento. Outra demonstração, baseada na noção de homotopia, pode ser vista em Ahlfors, Complex Analysis, pg. 218.

Lema. Sejam R e \tilde{R} variedades de dimensão 2, $p: \tilde{R} \longrightarrow R$ uma aplicação contínua que é em todo ponto de R um homeomorfismo local, γ_0 e γ_1 dois caminhos em R homotópicos, com origem no ponto A e extremidade no ponto B , $G(x,t)$ uma homotopia entre γ_0 e γ_1 . Suponhamos que fixado $\tilde{A} \in \tilde{R}$ tal que $p(\tilde{A}) = A$, para qualquer $t_0 \in [0,1]$ o caminho $\gamma_{t_0}: x \longrightarrow G(x,t_0)$ possa ser levantado a um caminho $\tilde{\gamma}_{t_0}$ em \tilde{R} partindo de \tilde{A} ; então os caminhos $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_1$ têm o mesmo ponto final e são homotópicos.

Observamos que não se supõe que $p: \tilde{R} \longrightarrow R$ seja um recobrimento, apenas que seja um homeomorfismo local; para recobrimentos a afirmação foi provada no Cap. III.

Para provar o lema, consideremos a aplicação

$$\tilde{G}: I \times I \longrightarrow \tilde{R}$$

definida da seguinte maneira: fixada t_0 , levantemos o caminho

$$\gamma_{t_0}: x \longrightarrow G(x,t_0)$$

a partir de \tilde{A} . Para todo $x \in I$, seja $\tilde{G}(x,t_0)$ o ponto do caminho levantado que se projeta em $G(x,t_0)$. Teremos, então, para $(x,t) \in I \times I$

$$\tilde{G}(x,t) = \tilde{\gamma}_t(x)$$

e

$$p \circ \tilde{G}(x,t) = G(x,t).$$

Do fato de ser p um homeomorfismo local segue sem dificuldade que se $\tilde{G}(1,0) = \tilde{B}$ então para todo $t \in I$

$$\tilde{G}(1,t) = \tilde{B}.$$

De fato seja t_1 o extremo superior dos $t \in I$ para os quais

$$\forall \zeta \in [0, t], \quad G(1, \zeta) = \tilde{B}.$$

Se $t_1 \neq 1$, como sempre $p(\tilde{G}(1, t)) = B$ concluiríamos que numa vizinhança arbitrária de \tilde{B} existe sempre um ponto distinto de \tilde{B} com mesma imagem por p , o que é absurdo.

Então em particular $\tilde{G}(1, 1) = \tilde{B}$, isto é, $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_1$ têm mesmo ponto final, e a aplicação $\tilde{G}: I \times I \longrightarrow \tilde{R}$ é evidentemente uma homotopia entre $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_1$.

Teorema 13 (teorema da monodromia). Seja S uma superfície de Riemann e f uma função holomorfa ao redor de um ponto $P \in S$ que pode ser prolongada ao longo de qualquer caminho partindo de P . O prolongamento ao longo de caminhos homotópicos com mesmo ponto final conduz ao mesmo elemento final.

Demonstração. Construíamos o domínio de holomorfia S_f de f sobre a superfície S :

$$S_f = \{(P, f_P)\}$$

onde $P \in S$ e f_P é uma função analítica numa vizinhança de P que pode ser obtida de f por prolongamento analítico. S_f é uma superfície de Riemann e temos a aplicação

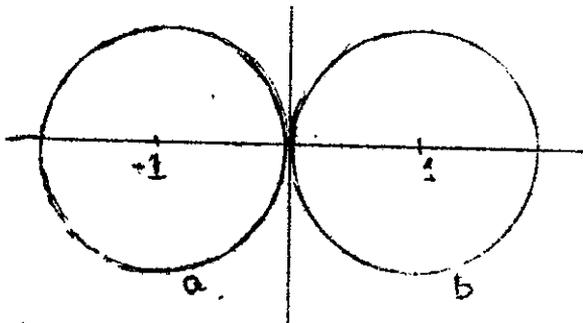
$$\begin{aligned} \lambda: S_f &\longrightarrow S \\ (P, f_P) &\longrightarrow P \end{aligned}$$

que é evidentemente um homeomorfismo local. Mas por hipótese f pode ser prolongada ao longo de qualquer caminho de S partindo de P_0 , o que é o mesmo que dizer que qualquer caminho partindo de P_0 pode ser levantado a S_f . Pelo lema, caminhos homotópicos em S são levantados a caminhos em S_f com mesmo ponto final, em outras palavras terminando no mesmo prolongamento de f . O teorema fica então demonstrado.

Observações. 1. Se S é simplesmente conexa, o teorema diz que o prolongamento ao longo de caminhos quaisquer com mesmo ponto inicial e final conduz ao mesmo elemento final.

3. O teorema deixa de ser verdadeiro se em vez de caminhos homotópicos considerarmos caminhos apenas homólogos. Exemplo. Consideremos

a superfície de Riemann constituída pelo plano do qual se retira o ponto $(1,0)$ e nela os círculos, que indicamos por a e b , de raio 1 e centro nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$, ambos percorridos em sentido positivo.



Tomemos numa vizinhança da origem a função $\sqrt{\log \frac{1-z}{2}}$, com qualquer determinação, fixa. Consideremos o seu prolongamento ao longo do caminho $aba^{-1}b^{-1}$, que é homólogo a 0. É fácil verificar que voltamos a origem com valor diferente do inicial: $aba^{-1}b^{-1}$ não é pois homotópico a 0.

3. Este teorema tem como corolário imediato o teorema de Cauchy enunciado sob forma homotópica. De fato, se ω é holomorfa em S , σ um ciclo de dimensão 1, seja P_0 a origem do ciclo e $\omega = a(z) dz$ uma representação local de ω ao redor de P_0 ; $a(z) dz$ tem uma primitiva $B(z)$ que pode ser prolongada ao longo de σ qualquer que seja σ : basta recobrir σ por um número finito de vizinhanças onde vale um parâmetro uniformizador; em cada uma tomamos uma primitiva, de modo que primitivas correspondentes a vizinhanças com pontos comuns coincidam na intersecção, o que é possível pois primitivas quaisquer diferem por constantes. Chamando ainda de $B(z)$ a primitiva prolongada, a integral será dada pela diferença entre o valor final e o inicial de $B(z)$ ao longo de σ . Mas segue do teorema que se σ é homotópico a 0 voltamos a P_0 com o mesmo valor para $B(z)$, logo $\int_{\sigma} \omega = 0$.

Podemos ainda provar que a aplicação $\lambda : S_f \rightarrow S$ nas condições do teorema de monodromia é um recobrimento. Isto resulta da seguinte proposição

Proposição 24. Se $p: \tilde{R} \rightarrow R$ é um homeomorfismo local tal que qualquer caminho γ em R pode ser levantado a um caminho $\tilde{\gamma}$ em \tilde{R} com início em um qualquer ponto de \tilde{R} que se projete no ponto inicial de γ , então p é um recobrimento.

De fato, seja $q \in R$, U uma vizinhança de q homeomorfa ao disco D . Seja \tilde{U} uma componente conexa de $p^{-1}(U)$, $\tilde{q} \in \tilde{U}$ com $p(\tilde{q})=q$.

(observemos que não podem existir dois pontos distintos \tilde{Q} e \tilde{Q}' projetando-se sobre o mesmo ponto Q , pois em tal caso um caminho aberto unindo \tilde{Q} a \tilde{Q}' se projetaria num caminho fechado de U , que seria homotópico a zero por ser U homeomorfa ao disco. Ora isto pelo lema é absurdo).

Seja $\tau : U \rightarrow \tilde{U}$ definida da seguinte maneira: dado $P \in U$, unamos Q a P por um caminho γ e levantemos esse caminho a um caminho $\tilde{\gamma}$ com origem em \tilde{Q} ; se \tilde{P} é o ponto final do caminho, $\tau(P) = \tilde{P}$. Pelo lema anterior, \tilde{P} não depende de γ ; τ é uma aplicação contínua e $\tau \circ p$ é a identidade em U . A restrição de p a \tilde{U} é pois um homeomorfismo de \tilde{U} sobre U e U é uma vizinhança admissível.

Concluimos então que sob a hipótese do teorema da monodromia, o domínio de holomorfia S_f da função f é um recobrimento do espaço base S .

C A P Í T U L O V I .

Orientação. Integração sôbre
simplexos orientados. Resíduos.

1. Orientação.

Definição 36. Um espaço topológico T se diz separável se admite uma base de abertos enumerável.

Teorema 14. Toda superfície de Riemann é separável.

Demonstração. cf. Nevanlinna, Uniformisierung, pg. 145.

Definição 37. Um recobrimento aberto $\{U_\alpha\}$ de um espaço topológico T diz-se localmente finito se todo ponto de T possui uma vizinhança V tal que $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ somente para um número finito de abertos U_α .

Definição 38. Dados dois recobrimentos abertos $\{U_\alpha\}$ e $\{V_\beta\}$ de T , $\{V_\beta\}$ diz-se um refinamento de $\{U_\alpha\}$ se dado um V_β existe um conjunto U_α que contém V_β .

Teorema 15. Todo recobrimento aberto de uma variedade topológica separável de dimensão 2 admite um refinamento localmente finito.

Demonstração. cf. Variedades diferenciáveis, Notas do Colloquium de Poços de Caldas, Apêndice.

Proposição 25. Uma superfície de Riemann S admite um recobrimento aberto localmente finito $\{U_\alpha\}$ constituído por abertos onde vale um parâmetro uniformizador.

De fato, cada ponto de S tem uma vizinhança aberta onde vale um parâmetro uniformizador. Essas vizinhanças formam um recobrimento aberto que pelo teorema 15 admite um refinamento localmente finito, pois que pelo teorema 14 S é separável.

Definição 39. Se g é uma função com valores reais definida num espaço topológico T , chama-se suporte de g à aderência do conjunto dos pontos de T em que g é diferente de zero.

Teorema 16. Seja R uma variedade diferenciável de dimensão 2, separável, $\{U_\alpha\}$ um recobrimento aberto localmente finito. Existem então funções g_α tais que: 1) g_α é de classe C^∞ ; $0 \leq g_\alpha \leq 1$ sobre R ; o suporte de g_α está contido em U_α . 2) $\sum g_\alpha = 1$.

Dizemos que as funções g_α formam uma partição da unidade subordinada ao recobrimento $\{U_\alpha\}$. Observe-se que para qualquer $P \in R$ existe somente um número finito de funções g_α que não se anulam em P .

Demonstração. cf. Variedades Diferenciáveis, Notas do Colloquium de Poços de Caldas, Apêndice.

Definição 40. Uma variedade diferenciável R de dimensão 2 diz-se orientável se existe em R uma forma exterior real contínua de grau 2 que não se anula em nenhum ponto.

Se R uma variedade orientável, indiquemos por \mathcal{D} o conjunto de todas as formas reais contínuas de grau 2 que não se anulam em R . Se $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}$ teremos certamente $\omega_1 = f\omega_2$ com $f \neq 0$ em todos os pontos de R .

Definimos em \mathcal{D} uma relação de equivalência pondo

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{se} \quad f > 0.$$

Existem evidentemente só duas classes de equivalência em \mathcal{D} segundo esta relação.

Definição 41. Uma superfície orientável R diz-se orientada se a ela for associada uma das duas classes de equivalência definidas em \mathcal{D} .

Definição 42. Seja R uma superfície diferenciável orientada. Uma forma φ de grau 2 em R diz-se positiva num ponto $P \in R$, se para ω pertencendo à classe que dá a orientação R tivermos $\varphi = f\omega$ com f positiva em P .

Teorema 17. Toda superfície de Riemann é orientável.

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ um recobrimento aberto de S , localmente finito e formado por abertos onde vale um parâmetro uniformizador

(proposição 24), e consideremos uma partição da unidade ε_α subordinada ao recobrimento $\{U_\alpha\}$.

Seja ε_α p.u. em U_α e definamos em U_α a forma

$$\omega_\alpha = dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha.$$

Como ε_α tem suporte contido em U_α , podemos definir em S a forma $\varepsilon_\alpha \omega_\alpha$, nula forma de U_α . Consideremos então a forma

$$\omega = \sum \varepsilon_\alpha \omega_\alpha$$

ω é uma forma diferencial definida em S e vamos provar que $\omega \neq 0$ em todo ponto de S .

De fato, dado $P \in S$, P pertence a um certo número, finito, de abertos de recobrimento; suponhamos que

$$P \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}.$$

Ora, temos em P

$$\begin{aligned} dz_{\alpha_2} \wedge d\bar{z}_{\alpha_2} &= \left| \frac{dz_{\alpha_2}}{dz_{\alpha_1}} \right|^2 dz_{\alpha_1} \wedge d\bar{z}_{\alpha_1} \\ &\dots\dots\dots \\ dz_{\alpha_k} \wedge d\bar{z}_{\alpha_k} &= \left| \frac{dz_{\alpha_k}}{dz_{\alpha_1}} \right|^2 dz_{\alpha_1} \wedge d\bar{z}_{\alpha_1} \end{aligned}$$

isto é,

$$\omega_i = a_i \omega_1 \quad \text{com} \quad a_i > 0 \quad (i=1, \dots, k).$$

Então em P o valor de ω é dado por

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_{\alpha_i} \omega_i = \omega_1 \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_{\alpha_i}(P) \cdot a_i \right)$$

e como $\varepsilon_{\alpha_i}(P) \geq 0$ e uma ao menos é estritamente positiva pois

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = 1,$$

o coeficiente de ω_1 é certamente não nulo (estritamente positivo). Como ω é diferente de zero em P , o teorema fica demonstrado.

A forma ω que por construção é tal que, dado $P \in S$, z p.u. em P , numa vizinhança de P tem-se

$$\omega = f dz \wedge d\bar{z}$$

com $f > 0$, define uma orientação de S . Esta orientação não depende do recobrimento $\{U_{\alpha}\}$. Assim toda superfície de Riemann tem uma orientação canônica.

Pode-se demonstrar inversamente que a separabilidade e orientabilidade são condições suficientes, isto é: Toda variedade diferenciável de dimensão 2 que seja separável e orientável admite pelo menos uma estrutura de superfície de Riemann.

Completaremos estes teoremas com resultados sobre a possibilidade de triangular uma superfície de Riemann, e dar a uma triangulação uma orientação coerente (cf. Cap. III).

Usaremos o seguinte teorema de Análise:

Teorema 18. Consideremos no plano complexo o triângulo Δ_2 de vértices A, B, C e um aberto U contendo Δ_2 , e seja $f: U \rightarrow V$ um homeomorfismo diferenciável, com jacobiano diferente de zero. Suponhamos ainda que f aplica Δ_2 sobre si mesmo, e leva vértices em vértices. Então a orientação $(f(A), f(B), f(C))$ de Δ_2 coincide com a orientação (A, B, C) se e somente se o jacobiano de f for positivo.

Indicaremos de agora em diante com Δ_2 sempre o simplexo euclidiano de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, com a orientação (A, B, C) .

Definiremos agora orientação positiva de um simplexo topológico de dimensão 2 sobre uma superfície orientada R , definido como imagem de Δ_2 por um homeomorfismo de U em R .

Antes convencionemos que um sistema de coordenadas locais (x, y)

em P se dirá positivo se $dx \wedge dy$ for uma forma positiva em P . O homeomorfismo de uma vizinhança de P sobre um aberto do plano associado a um sistema de coordenadas positivo será dito positivo.

Definição 43. Seja R uma superfície diferenciável orientada; um simplexo topológico (cf. cap. III) orientado $\sigma = (A', B', C')$ diz-se orientado positivamente se para um homeomorfismo diferenciável φ positivo, da vizinhança U de Δ_2 sobre uma vizinhança de σ que leva Δ_2 sobre σ e vértices em vértices, a orientação (A', B', C') coincidir com a orientação $(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C))$.

Note-se que de acôrdo com o teorema 17 esta definição não depende do particular homeomorfismo positivo φ .

Teorema 19. Seja R uma variedade diferenciável triangulável. Se R for orientável, dada uma orientação de R toda triangulação de R admite uma orientação coerente em que todos os triângulos são orientados positivamente.

Este teorema diz essencialmente que se R é orientável como variedade diferenciável, então R é também orientável topologicamente (isto é, no sentido da definição 20 do cap. III).

Demonstração. Observemos em primeiro lugar que no plano real orientado pela forma $dx \wedge dy$ podemos aplicar a definição 43; um homeomorfismo positivo será simplesmente um homeomorfismo com jacobiano positivo. Dado então no plano um simplexo orientado (A_1, A_2, A_3) , a êle podemos associar unívocamente um número $n(A_1, A_2, A_3)$ pondo

$$n(A_1, A_2, A_3) = \begin{cases} +1 & \text{se } (A_1, A_2, A_3) \text{ está orientado positivamente} \\ -1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vale pois $n(A_1, A_2, A_3) = -n(-(A_1, A_2, A_3))$; se f é um homeomorfismo de uma vizinhança de (A_1, A_2, A_3) num outro aberto do plano, diferenciável e com jacobiano positivo,

$$n(A_1, A_2, A_3) = n(f(A_1), f(A_2), f(A_3)).$$

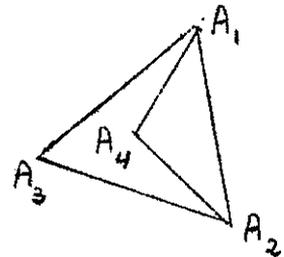
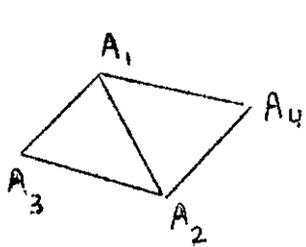
Usamos ainda os seguintes teoremas (da topologia do plano):

I. Sejam (A_1, A_2, A_3) e (A_1, A_2, A_4) dois simplexos topológicos orientados do plano que só tenham em comum o lado (A_1, A_2) . Então

$$n(A_1, A_2, A_3) = -n(A_1, A_2, A_4).$$

II. Sejam (A_1, A_2, A_3) e (A_1, A_2, A_4) dois simplexos topológicos e suponhamos que um deles esteja contido no outro. Então

$$n(A_1, A_2, A_3) = n(A_1, A_2, A_4),$$



Podemos agora demonstrar o teorema. Seja R uma variedade diferenciável orientada, triangulada; suponhamos inicialmente que cada simplexo esteja contido numa vizinhança coordenada, e que para cada vizinhança o sistema de coordenadas seja positivo para a orientação fixada em R . Seja $\sigma_2 = (P_1, P_2, P_3)$ um simplexo da triangulação, contido numa vizinhança coordenada U , f o homeomorfismo de U no plano, (A_1, A_2, A_3) a imagem de σ_2 por f (onde A_1 é a imagem de P_1 , etc.). As duas orientações possíveis de σ_2 podem ser representadas por $\xi(P_1, P_2, P_3)$ com $\xi = \pm 1$. Escolheremos para σ_2 a orientação dada por

(9.1)
$$\xi = n(A_1, A_2, A_3).$$

Assim cada simplexo da triangulação fica orientado; devemos provar agora que essa orientação é coerente. Consideremos um qualquer 1-simplexo da triangulação, seja $\sigma_1 = (P_1, P_2)$ e seja $\sigma_2' = (P_1, P_2, P_4)$ o outro 2-simplexo incidente a σ_1 . σ_2' tem uma orientação determinada

$$\xi'(P_1, P_2, P_4),$$

onde, se (A_1', A_2', A_4') é a imagem de σ_2' pelo homeomorfismo f' da visi

nhança U' que contém σ_2^1 ,

$$\varepsilon^1 = n(A_1^1, A_2^1, A_4^1).$$

As orientações induzidas por cada um dos 2-simplexos em (P_1, P_2) são respectivamente $\xi(P_1, P_2)$ e $\varepsilon^1(P_1, P_2)$ e resta demonstrar que $\varepsilon = -\varepsilon^1$.

Seja U'' uma vizinhança coordenada contendo σ_1 . Suponhamos primeiro que σ_2 e σ_2^1 estejam ambos contidos em U'' . Então o homeomorfismo f'' de U'' no plano leva σ_2 e σ_2^1 em dois simplexos (A_1'', A_2'', A_3'') e (A_1'', A_2'', A_4'') com apenas o lado (A_1'', A_2'') em comum. Como a transformação das coordenadas em U para as coordenadas em U'' tem jacobiano positivo, pois ambos os sistemas são positivos, vale

$$n(A_1, A_2, A_3) = n(A_1'', A_2'', A_3'').$$

Analogamente

$$n(A_1^1, A_2^1, A_4^1) = n(A_1'', A_2'', A_4'').$$

De I resulta então $n(A_1, A_2, A_3) = -n(A_1^1, A_2^1, A_4^1)$, isto é, $\varepsilon = -\varepsilon^1$.

Se σ_2 e σ_2^1 não estão contidos em U'' , podemos fazer uma subdivisão desses simplexos, de modo que (P_1, P_2) seja lado comum a

$$\sigma_2^* = (P_1, P_2, P_3^*) \quad \text{e} \quad \sigma_2'^* = (P_1, P_2, P_4^*),$$

com σ_2 e σ_2^{j*} contidos em U'' . Por II, se (A_1, A_2, A_3^*) é a imagem de σ_2^* pelo homeomorfismo f , e (A_1^1, A_2^1, A_4^1) a imagem de $\sigma_2'^*$ por f' , temos

$$n(A_1, A_2, A_3^*) = n(A_1, A_2, A_3) = \varepsilon$$

$$n(A_1^1, A_2^1, A_4^1) = n(A_1^1, A_2^1, A_4^1) = \varepsilon^1$$

e a demonstração acima mostra que $n(A_1, A_2, A_3^*) = -n(A_1^1, A_2^1, A_4^1)$ logo

$$\varepsilon = -\varepsilon^1.$$

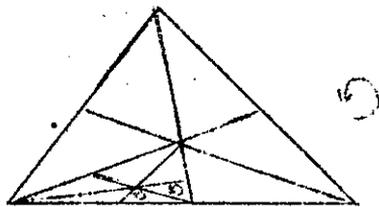
Temos pois uma orientação coerente dos simplexos da triangulação. Ainda mais, como a imagem de $\xi(P_1, P_2, P_3)$ é $\varepsilon(A_1, A_2, A_3)$ e

$$n(\varepsilon(A_1, A_2, A_3)) = \xi n(A_1, A_2, A_3) = \varepsilon^2 = +1$$

as imagens dos simplexes $\tilde{\sigma}_2$ são orientadas positivamente no plano, logo os simplexes $\tilde{\sigma}_2$ estão todos orientados positivamente.

Para completar a demonstração do teorema basta observar que dada uma triangulação qualquer é sempre possível dividir cada simplexo da triangulação em um número suficientemente grande de simplexes menores de modo que cada novo simplexo esteja contido numa vizinhança coordenada. A

nova triangulação assim obtida admite uma orientação coerente que, como se pode verificar sem grande dificuldade, induz uma orientação coerente na triangulação original.



Vale também a recíproca dêste teorema: se R é uma variedade diferenciável triangulável, e se R é orientável topologicamente, então R é orientável como variedade diferenciável; as definições 40 e 20 coincidem portanto para as variedades diferenciáveis trianguláveis (demonstração cf.)

Teorema 20. Tôda variedade topológica de dimensão 2 separável é triangulável.

A demonstração dêste teorema foi dada por Radò (1925).

Corolário. Uma superfície de Riemann é triangulável.

Êste último resultado pode ser também obtido como consequência da teoria da uniformização.

Pelos teoremas 14, 19 e 20, uma superfície de Riemann é orientável no sentido topológico. Como consequência, resulta que sôbre o plano projetivo ou a faixa de Möbius não se pode definir uma estrutura de superfície de Riemann.

2. Integrais sôbre simplexes orientados.

Quando definimos integral de uma forma ω sôbre um simplexo singular σ definido por um homeomorfismo

$$f: U \longrightarrow R$$

vimos que se f é um homeomorfismo diferenciável de uma vizinhança U no plano do simplexo euclidiano Δ na variedade R , com jacobiano não nulo, então a integral

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta} f^* \omega$$

a menos do sinal, não depende do particular homeomorfismo f , e sim da imagem $f(\Delta) \subset R$, que é um simplexo topológico em R . Observamos agora que orientando o simplexo topológico $f(\Delta)$ a integral de uma forma estendida a êsse simplexo (conjunto de pontos) orientado fica completamente determinada.

Assim, suponhamos dada na superfície diferenciável R uma forma de grau 2, e um simplexo topológico diferenciável orientado $\sigma = (A', B', C')$; consideremos um homeomorfismo diferenciável f de uma vizinhança U de Δ_2 em R que leve Δ_2 em σ e tal que

$$(f(A), f(B), f(C)) \text{ e } (A', B', C')$$

definam a mesma orientação. Ponhamos

$$f^* \omega = \varphi(x, y) \cdot dx \wedge dy.$$

Então, por definição,

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta} \varphi(x, y) \cdot dx \wedge dy$$

A indeterminação do sinal desaparece pois se f_1 é outra aplicação nas mesmas condições, temos

$$f_1^* \omega = \varphi(x(x_1, y_1), y(x_1, y_1)) \cdot J \cdot dx_1 \wedge dy_1$$

com jacobiano J positivo.

Com a orientação induzida no bordo, a integral de uma forma linear sôbre o bordo de um simplexo topológico orientado fica também completamente determinada.

3. Resíduo de uma forma diferencial analítica.

Seja S uma superfície de Riemann, P um ponto de S , ω uma forma analítica de tipo $(1,0)$ com polo em U ; U seja uma vizinhança de P onde vale o p.u. z e onde não caem outros polos de ω ; σ um simplexo topológico de dimensão 2, contido em U e orientado positivamente (de acordo com a orientação canônica de S), e de que P é ponto interior. Por definição, o resíduo de ω em P é

$$\text{resid}_P \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} \omega$$

Do teorema de Cauchy segue que o resíduo não depende do particular simplexo topológico σ escolhido.

Seja σ' a imagem por z do simplexo σ . Então se $\omega = A(z)dz$

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial\sigma'} A(z) dz$$

a integral no segundo membro sendo tomada sobre o bordo $\partial\sigma'$ orientado positivamente no plano. Mas então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma'} A(z) dz = \text{resid}_P A(z)$$

logo $\text{resid}_P \omega = \text{resid}_P A(z)$.

Teorema 21. Se S é uma superfície de Riemann compacta e ω uma forma meromorfa sobre S , então a soma dos resíduos de ω é igual a zero.

Demonstração. Tomemos uma triangulação de S em que cada triângulo esteja contido numa vizinhança coordenada, e em que nenhum polo caia sobre um lado; tomemos uma orientação coerente da triangulação em que cada triângulo seja orientado positivamente.

Para cada triângulo σ_j tomemos a soma dos resíduos de ω nos polos que caem em σ_j , e indiquemos por $\text{resid}_{\sigma_j} \omega$ essa soma. En-

tão

$$\sum_j \left(\int_{\sigma_j} \omega \right) = 2\pi i \sum_j \text{resid}_{\sigma_j} \omega .$$

Mas o primeiro membro é nulo pois cada lado aparece duas vezes com orientações opostas e o teorema fica demonstrado.

Teorema 22. Seja S uma superfície de Riemann compacta, φ uma função meromorfa em S . A soma das ordens dos zeros de φ é igual à soma das ordens dos polos.

Demonstração. Consideremos a forma $\omega = d\varphi/\varphi$ que é uma forma meromorfa em S , e uma triangulação como no teorema anterior. Em cada σ_j vale, chamando de N_{σ_j} a soma das ordens dos zeros de ω em σ_j , de P_{σ_j} a das ordens dos polos,

$$\text{resid}_{\sigma_j} \omega = N_{\sigma_j} - P_{\sigma_j}$$

pois numa vizinhança coordenada podemos aplicar o teorema da indicatriz de Cauchy. Somando para todos os σ_j resulta o teorema.

Se contarmos cada zero tantas vezes quantas representa sua multiplicidade, e fizermos o mesmo para os polos, diremos: o número de zeros é igual ao número de polos.

Esta é a primeira restrição que aparece para que um conjunto de pontos associados a multiplicidades seja o conjunto de zeros e polos de uma função meromorfa. Encontraremos mais tarde restrições muito mais fortes.

Corolário. φ assume qualquer valor complexo o mesmo número de vezes (contando as multiplicidades).

De fato, para contar quantas raízes tem $\varphi = c$ basta contar os zeros de $\varphi - c$, logo os polos de $\varphi - c$ cujo número não depende de c .

Podemos dar ao teorema 22 outra demonstração, encarando-o sob outro aspecto. Consideremos a aplicação $P \longrightarrow \phi(P)$ de S na esfera complexa E . Essa aplicação $\phi: S \longrightarrow E$ define S como recobrimento ramificado de E . Como num recobrimento ramificado o número de folhas, fora dos pontos de ramificação é o mesmo, cada ponto de E é o correspondente de um mesmo número n de pontos de S , excluídos os pontos sôbre os quais estão os pontos de ramificação. Nestes porém, sabemos que a soma das ordens dos pontos de ramificação, isto é, a soma das multiplicidades dos pontos, é ainda igual a n . Resulta assim o teorema com o corolário.

4. Integração sôbre uma variedade orientada.

Seja R uma variedade diferenciável de dimensão 2, orientada, separável; ω uma forma diferencial de grau 2 definida em R , com suporte compacto K . Queremos definir

$$\int_R \omega$$

Para isto, consideremos um recobrimento $\{U_\alpha\}$ de R por vizinhanças coordenadas, localmente finito.

1) Suponhamos $K \subset U_\alpha$. Tomamos então um sistema de coordenadas (x,y) válido em U_α e positivo, e definimos, se

$$\omega = A(x,y) dx \wedge dy$$

e K' é a imagem de K no plano

$$(6.1) \quad \int_R \omega = \int_{K'} A(x,y) dx \wedge dy$$

2) Se o suporte de ω não está contido numa vizinhança coordenada, consideremos uma partição g_α da unidade subordinada ao recobrimento $\{U_\alpha\}$. Então para cada α , $g_\alpha \omega$ tem suporte contido em U_α , e pomos

$$(6.2) \quad \int_{\mathbb{R}} \omega = \sum \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha} \omega .$$

É fácil ver que a definição não depende do recobrimento considerado. De fato, no caso 1) basta observar que uma mudança de coordenadas com jacobiano positivo não altera a integral no segundo membro de (6.1); no caso 2), seja $\{U_{\beta}\}$ um outro recobrimento, e g_{β} uma partição da unidade subordinada a $\{U_{\beta}\}$. Podemos considerar

$$U_{\alpha, \beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta}$$

$U_{\alpha, \beta}$ será também um recobrimento localmente finito, e as funções

$$g_{\alpha, \beta} = g_{\alpha} \cdot g_{\beta}$$

formam uma partição da unidade subordinada a \tilde{e} , e vale

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha, \beta} \omega = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha, \beta} \omega = \sum_{\beta} \int_{\mathbb{R}} g_{\beta} \omega$$

pois $\sum_{\beta} g_{\alpha, \beta} = g_{\alpha}$. Da mesma forma

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha, \beta} \omega = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha, \beta} \omega = \sum_{\beta} \int_{\mathbb{R}} g_{\beta} \omega$$

donde a afirmação.

Observe-se que a soma $\sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha} \omega$ é finita pois se o suporte K de ω é compacto, K é encontrado só por número finito de abertos U_{α} .

Se agora considerarmos uma forma ω , com suporte não compacto, e pusermos

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = \sum \int_{\mathbb{R}} g_{\alpha} \omega$$

no segundo membro aparecerá uma soma infinita. Suponhamos que a forma ω

seja positiva: então, tôdas as integrais no segundo membro são positivas, e a soma infinita ou converge ou é infinita. Se convergir, dizemos que $\int_R \omega$ converge, e seu valor é essa soma. Caso contrário, poremos

$$\int_R \omega = +\infty .$$

Para ω qualquer, definimos

$$\omega^+ = \begin{cases} \omega & \text{se } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{se } \omega < 0 \end{cases}$$

$$\omega^- = \begin{cases} -\omega & \text{se } \omega \leq 0 \\ 0 & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

ω^+ e ω^- são formas positivas e vale

$$\omega = \omega^+ - \omega^- .$$

Definimos então

$$\int_R \omega = \int_R \omega^+ - \int_R \omega^-$$

se o segundo membro for determinado (isto é, no máximo uma parcela infinita).

C A P I T U L O VII.

Diferenciais abelianas numa superfície hiperelítica.

1. Diferenciais abelianas.

Definição 44. Seja S uma superfície de Riemann; uma forma diferencial ω meromorfa em S se dirá diferencial abeliana; se ω for holomorfa em todo ponto de S , ω se dirá abeliana de primeira espécie; se for meromorfa com polos todos de resíduo nulo, abeliana de segunda espécie; finalmente, se tiver polos com resíduo qualquer, de terceira espécie.

Definição 45. Se ω_1 e ω_2 são duas formas meromorfas em S , podemos definir o quociente $\omega_1/\omega_2 = \varphi$ pondo, numa vizinhança de um ponto $P \in S$, se $\omega_1 = A_1(z)dz$ e $\omega_2 = A_2(z)dz$ são as representações locais das formas em P ,

$$\varphi(z) = \frac{A_1(z)}{A_2(z)}$$

φ será uma função meromorfa em S .

Se S é a superfície de Riemann de uma função algébrica f e se $\lambda : S \rightarrow E$ é a projeção de S na esfera, pelo teorema 6 do capítulo IV existe uma equação irreduzível

$$(7.1) \quad P(z, w) = 0$$

univocamente determinada, satisfeita por λ e f idênticamente em S , isto é, tal que $P(\lambda(p), f(p)) = 0$ para todo $p \in S$. Designaremos neste capítulo a projeção λ por z e a função f por w .

Seja então ω uma forma representada por

$$(7.2) \quad \omega = R(z, w)dz$$

onde R é uma função racional em z e w . ω é evidentemente uma diferencial abeliana em S . Inversamente, toda diferencial abeliana se escreve nessa forma. De fato, será provado mais tarde que toda função meromorfa em S se exprime como função racional de z e w ; ora, se ω é uma diferencial abeliana, ω/dz é uma função meromorfa em S e então

$\omega/dz = R(z,w)$ com R racional em z e w .

2. Caso hiperelítico.

Mencionaremos neste parágrafo, como no anterior, resultados gerais que serão provados posteriormente; nosso objetivo aqui é simplesmente construir algebricamente exemplos de diferenciais abelianas das três espécies.

Estudaremos as diferenciais abelianas no caso particular em que a equação (7.1) é da forma

$$(7.3) \quad w^2 = Q(z)$$

onde $Q(z)$ é um polinômio sem zeros múltiplos. Se $Q(z)$ tem grau 3 ou 4, dizemos que S é elítica; se o grau de $Q(z)$ for > 4 , diremos que S é hiperelítica. Prova-se que se o grau de $Q(z)$ é k , o genus g de S é

$$g = \frac{k-2}{2} \quad \text{se } k \text{ for par}$$

$$g = \frac{k-1}{2} \quad \text{se } k \text{ for ímpar}$$

(cf. por exemplo, Springer, Introduction to Riemann Surfaces, 10-6). Ainda mais, é possível escolher w e z de modo que o grau de $Q(z)$ seja $2g + 1$. De fato, se $Q(z)$ tiver grau $k = 2g+2$, podemos fazer uma mudança de variável em que uma raiz de $Q(z)$, seja a_k , é levada em p_∞ ; basta pôr

$$\zeta = (z - a_k)^{-1}$$

e substituir w por

$$w_1 = \frac{\zeta^{g+1} w}{\sqrt{\prod_{j=1}^{k-1} (a_j - a_k)}}$$

(a_1, \dots, a_k) sendo as raízes de $Q(z)$.

A equação satisfeita por w_1 e ζ será da forma

$$w_1^2 = Q_1(\zeta)$$

$Q_1(\zeta)$ sendo um polinômio de grau $k-1 = 2g+1$ sem zeros múltiplos. Consideremos pois o caso em que z e w satisfazem a uma equação da forma

$$w^2 = (z-c_1)\dots(z-c_{2g+1}) = Q(z)$$

com os c_i todos distintos.

a) Diferenciais de 1ª espécie: provaremos que as diferenciais

$$\alpha_r = \frac{z^r \cdot dz}{w} \quad r = 0, \dots, g-1$$

são holomorfas em todo ponto de S . Para isto, observemos que em cada ponto $P_0 \in S$, que não seja polo de z ou raiz de $Q(\zeta)$ podemos tomar como p.u. $\tau = z - z_0$, com $z_0 = z(P_0)$, e então

$$\frac{z^r \cdot dz}{w}$$

será certamente regular numa vizinhança de $\tau = 0$. Se $z(P_0) = c_j$, podemos escolher o p.u. τ de modo que $z - c_j = \tau^2$. Então $2\tau \cdot d\tau = dz$, logo

$$\frac{z^r \cdot dz}{w} = \frac{2(\tau^2 - c_j)^r \cdot \tau \cdot d\tau}{\sqrt{\prod_{v=1}^{2g+1} (\tau^2 - (c_v - c_j))}} = \frac{2(\tau^2 - c_j)^r \cdot d\tau}{\sqrt{\prod_{v \neq j} (\tau^2 - (c_v - c_j))}}$$

que é regular numa vizinhança de $\tau = 0$. Finalmente se $z(P_0) = P_\infty$, $\tau = 1/\sqrt{z}$ é um p.u. e $z = 1/\tau^2$, $dz = -2 \cdot d\tau/\tau^3$. Então

$$w^2 = \tau^{-2(2g+1)} (1 - c_1 \tau^2) \dots (1 - c_{2g+1} \tau^2)$$

e

$$\frac{z^r \cdot dz}{w} = \frac{-2\tau^{2g+1} \cdot d\tau}{\tau^{2r+3} \sqrt{\prod_v (1 - c_v \tau^2)}}$$

Como $r \leq g-1$, $2r+3 \leq 2g+1$ e a diferencial considerada é regular numa

vizinhança de P_0 . Assim fica provado que $\alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}$ são holomorfas, isto é, de primeira espécie.

Provaremos mais tarde que numa superfície de genus g existe exatamente g diferenciais abelianas de 1ª espécie linearmente independentes sobre o corpo complexo (cf. cap. VIII e cap. IX). Como as diferenciais $\alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}$ são linearmente independentes elas formam uma base para o espaço vetorial das diferenciais holomorfas, isto é, toda diferencial abeliana de 1ª espécie pode ser expressa na forma

$$\omega = \sum_{i=0}^{g-1} A_i \alpha_i$$

com coeficientes A_i constantes, isto é,

$$\omega = \frac{F(z)}{w} dz$$

onde $F(z)$ é um polinômio de grau no máximo $g-1$. No caso elítico em particular, $g = 1$ e as formas de 1ª espécie são apenas as do tipo $a \frac{dz}{dw}$, $a \in \mathbb{C}$ (diferencial elítica de 1ª espécie).

b) Diferenciais de 2ª espécie. Provaremos que dado $P_0 \in S$, é possível construir uma diferencial que tenha um polo de ordem 2 em P_0 com residuo 0, e seja regular em todos os outros pontos de S .

De fato, suponhamos primeiro $z(P_0)$ finito e diferente de c_1, \dots, c_{2g+1} . Se $z(P_0) = z_0$, $z-z_0$ é um p.u. e

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} (z-z_0)^{\nu}$$

será não nula numa vizinhança de $z=z_0$. Então

$$\alpha = \frac{w + b_0 + b_1(z-z_0)}{(z-z_0)^2 \cdot w}$$

é uma diferencial de 2ª espécie com um polo de ordem 2 e residuo 0 em P_0 e regular nos outros pontos de S . De fato, numa vizinhança de P_0 em que $z-z_0$ é p.u. temos para o coeficiente de dz um desenvolvimento da forma

$$\frac{1}{(z-z_0)^2} \left[2 + \sum_{v=2}^{\infty} d_v (z-z_0)^v \right]$$

e num ponto em que $w=0$ ou z tenha um polo, um raciocínio análogo ao feito no caso de 1ª espécie mostra que α é regular.

Se porém $z(P_0) = c_i$, então tomamos

$$\alpha = \frac{dz}{(z-c_i)w}$$

Verifica-se também sem dificuldade que α tem um polo de ordem 2 em P_0 com resíduo 0 e nenhum outro.

Se finalmente $z(P_0) = p_{\infty}$ então

$$\alpha = \frac{z^g dz}{w}$$

satisfaz às condições.

c) Diferenciais de 3ª espécie. Em vista do teorema 21 do cap. VI uma diferencial meromorfa não pode ter em S um único polo com resíduo não nulo. Podemos, porém, construir uma diferencial com dois polos simples, P_0 e P_1 . Escolhemos $P_0 = p_{\infty}$; P_1 seja um outro ponto qualquer. Se $z(P_1) = a \neq c_i$ ($i=1, \dots, 2g+1$) $z-a$ é p.u. numa vizinhança de P_1 ; seja então $w(z) = b_0 + b_1(z-a) + \dots$; a diferencial

$$\alpha = \frac{w + b_0}{2(z-a)w}$$

tem polos simples em P_0 e P_1 , resíduo -1 em P_0 e +1 em P_1 . Se $z(P_1) = c_i$, tomamos

$$\alpha = \frac{dz}{z - c_i}$$

e vale o mesmo.

CAPITULO VIII.

Teoremas de existência.

Vimos no cap. VII como se podem construir diferenciais abelianas numa superfície de Riemann hiperelítica. De um modo geral pode-se construir e estudar as diferenciais abelianas sobre a superfície de Riemann de uma função algébrica qualquer com métodos puramente algébricos, a partir da equação que define a superfície ¹⁾. Aqui partiremos de uma superfície de Riemann qualquer e com métodos analíticos, baseados no princípio de Dirichlet, construiremos as diferenciais abelianas e as funções meromorfas na superfície. A matéria deste capítulo encontra-se toda no livro de H. Weyl - Idee der Riemannschen Fläche, que seguimos de perto.

Iniciamos o capítulo com um parágrafo sobre as diferenciais ditas harmônicas que servem de base para este estudo, resumindo também brevemente as propriedades das funções harmônicas de que necessitamos.

1. Diferenciais harmônicas.

Definição 46. Seja S uma superfície de Riemann, U uma função com valores reais de classe C^2 em S , P um ponto de S , $z = x+iy$ um p.u. em P . A função U se diz harmônica em P se vale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

A definição não depende da escolha do p.u. z pois uma função harmônica nas coordenadas x, y permanece harmônica por uma transformação conforme.

Como uma função harmônica não constante não pode ter ponto de máximo ou mínimo interior ao seu campo de definição, vale a seguinte proposição:

¹⁾ Cf. por exemplo, Hensel-Landsberg, Theorie der Algebraischen Funktionen einer Variablen, Leipzig, 1902; Bliss, Algebraic Functions, Amer. Math. Soc. Colloq. Public., vol. XVI, New York; e o livro recente de Chevalley, Introduction to Algebraic Functions of one variable, Math. Surveys n.6, Amer. Math. Soc., New York, 1951.

Proposição 26. Se S é compacta, toda função harmônica em S é constante.

A parte real e a parte imaginária de uma função analítica em S são funções harmônicas em S . Não vale a recíproca se S não for simplesmente conexa.

Definição 47. Seja ω uma forma diferencial em S , com a representação local

$$(8.1) \quad \omega = A dx + B dy$$

num ponto $P \in S$ com p.u. $z = x+iy$. A forma ω^* definida localmente por

$$(8.2) \quad \omega^* = -B dx + A dy$$

diz-se conjugada de ω .

Verifica-se que a definição de ω^* independe do p.u. escolhido em cada ponto. De fato, se

$$\zeta = u + iv$$

é outro p.u. em P , seguem de (8.1) e (8.2) as novas representações

$$\omega = \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(A \frac{\partial x}{\partial v} + B \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

$$\omega^* = \left(-B \frac{\partial x}{\partial u} + A \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(-B \frac{\partial x}{\partial v} + A \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

e usando na segunda as relações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

segue imediatamente que também nas novas coordenadas ω^* é a conjugada de ω .

Vale

$$(8.3) \quad \omega^{**} = -\omega.$$

Se ω for de tipo $(1,0)$, isto é,

$$\omega = A dz = A dx + i.A dy$$

então

$$\omega^* = -i\omega.$$

Definição 48. A forma ω diz-se harmônica se ω e ω^* forem fechadas, isto é,

$$d\omega = d\omega^* = 0.$$

É imediato por (8.3) que se ω é harmônica ω^* também é. A condição para que uma forma ω com representação local

$$\omega = A dx + B dy$$

seja harmônica segue imediatamente da definição. De fato,

$$(8.4) \quad d\omega = 0 \iff \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$d\omega^* = 0 \iff \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial y}$$

Se em particular A e B são funções reais, as equações (8.4) significam que A e $-B$ são harmônicas conjugadas, isto é,

Proposição 27. A condição necessária e suficiente para que uma forma real ω com representação local

$$\omega = A dx + B dy$$

seja harmônica é que A e $-B$ sejam harmônicas conjugadas. A diferencial de uma função harmônica é uma forma harmônica.

Proposição 28. Se ω é real, então ω é harmônica se e somente se $\omega + i\omega^*$ é holomorfa.

De fato,

$$\omega + i\omega^* = (A-iB)dx + (iA+B)dy = (A-iB)dz$$

é sempre de tipo (1,0) e as condições (8.4) equivalem à afirmação de que o coeficiente de dz é uma função holomorfa.

Proposição 29. Se ω é uma forma holomorfa, $\Re(\omega)$ e $\Im(\omega)$ são formas reais conjugadas e harmônicas.

Imediato pois

$$\omega = A dz = (X+iY)(dx+idy) = Xdx - Ydy + i(Ydx+Xdy).$$

2. Existência de funções harmônicas numa superfície de Riemann.

Queremos construir sobre a superfície de Riemann S funções e formas meromorfas. Construiremos inicialmente a parte real de uma função meromorfa, isto é, uma função U com singularidades em dados pontos de S , harmônica no resto. Todas as funções consideradas aqui serão reais.

Como fundamento para demonstrações de existência de funções harmônicas usa-se frequentemente o princípio de Dirichlet, que diz, em linhas gerais, que o mínimo de uma certa integral, a integral de Dirichlet que definimos a seguir, numa certa classe de funções que também predizemos adiante, existe; esse mínimo é dado por uma função harmônica.

Definição 49. Seja S uma superfície de Riemann, v uma função de classe C^1 definida em S ; se a integral

$$(8.5) \quad D(v) = \int_S dv \wedge dv^*$$

for convergente, ela será chamada integral de Dirichlet da função v .

Observemos que se $z = x + iy$ é um p.u. num ponto P temos localmente

$$dv \wedge dv^* = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx \wedge dy$$

A integral (8.5) é pois um número não negativo ou $+\infty$.

Definimos agora a classe das funções admissíveis. Primeiro algumas notações: seja $b > a_0 > 0$, $z_0 = x_0 + iy_0$ um p.u. num ponto

$0 \in S$ fixado; seja

K_0 o "disco" em S de centro O definido por $|z_0| \leq a_0$

γ_0 o contorno de K_0 .

K_0^* o "disco" em S de centro O definido por $|z_0| \leq b$

b é pois tomado suficientemente pequeno para que $|z_0| < b$ esteja contido na vizinhança de O coordenada por z_0 . Em K_0^* temos então coordenadas locais (x_0, y_0) , podemos considerar as funções definidas em K_0^* , harmônicas nessas coordenadas, com ou sem singularidades. Seja

ϕ função definida e harmônica numa vizinhança do anel $K_0^* - K_0$ com derivada normal nula sobre γ_0 .

(esta última condição por razões técnicas da demonstração).

Definição 50. Dizemos que uma função v é admissível se

1) v é de classe C^1 em $S - \gamma_0$

2) $\exists v^*$ de classe C^1 em K_0 tal que

$$v = v^* \text{ em } K_0$$

$$v = v^* + \phi \text{ para } a_0 < |z_0| < b$$

3) $D(v) < +\infty$.

Essas funções admissíveis apresentam pois uma descontinuidade em cada ponto de γ_0 , sendo o salto, isto é, a diferença entre o limite por pontos externos a γ_0 e o limite por pontos internos, igual ao valor da função ϕ nesse ponto. $D(v)$ é neste caso definida como a soma das integrais de Dirichlet de v estendidas a $S - K_0$ e ao interior de K_0 .

Vejamos como se apresenta o princípio de Dirichlet com a linguagem de espaços de Hilbert.

Seja \mathcal{H}^1 o conjunto das funções f que são

a) de classe C^1 em $S - \gamma_0$, as restrições de f ao interior de K_0 e a $S - K_0$ podendo ser prolongadas diferenciavelmente em uma vizinhança de γ_0

b) tais que $D(f) < +\infty$.

Provemos que

$$(8.6) \quad v_1, v_2 \in \mathcal{H}' \implies v_1 + v_2 \in \mathcal{H}'$$

É evidente que $v_1 + v_2$ satisfaz a). Quanto a b), temos localmente

$$\begin{aligned} d(v_1 + v_2) \wedge d(v_1 + v_2)^* &= \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \right] dx \wedge dy \leq \\ &\leq \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \wedge dy \end{aligned}$$

logo, se $D(v_1) < +\infty$, $D(v_2) < +\infty$, também $D(v_1 + v_2) < +\infty$.

Também vale

$$(8.7) \quad v \in \mathcal{H}' \implies \lambda \cdot v \in \mathcal{H}' \quad \forall \lambda \text{ real}$$

Imediato.

\mathcal{H}' é pois por (8.6) e (8.7) um espaço vetorial sôbre \mathbb{R} . Introduzimos em \mathcal{H}' um produto escalar

$$(8.8) \quad \langle v_1, v_2 \rangle = \int_S dv_1 \wedge dv_2^*$$

Proposição 30. Se $v_1, v_2 \in \mathcal{H}'$, a integral em (8.8) converge.

De fato, temos

$$(8.9) \quad 2 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle - \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_2, v_2 \rangle$$

o que prova a proposição.

Escrevendo $dv_1 \wedge dv_2^*$ em coordenadas locais, segue imediatamente que (8.8) define uma forma bilinear simétrica. Ainda mais,

$$(8.10) \quad \langle v_1, v_1 \rangle = D(v_1)$$

e portanto

$$\langle v_1, v_1 \rangle \gg 0, \quad \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff v_1 = \text{constante.}$$

Definimos em \mathcal{H}' uma relação de equivalência

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 = \text{constante.}$$

Chamemos de \mathcal{H} o espaço obtido de \mathcal{H}' identificando funções equivalentes. O produto escalar induzido em \mathcal{H} tem então a propriedade

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff v_1 = 0$$

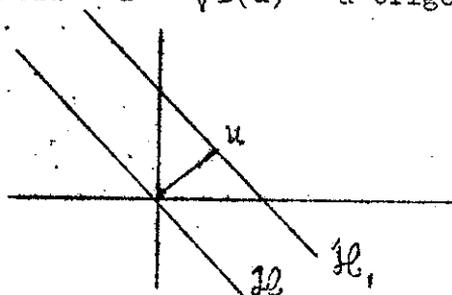
Com relação à métrica assim definida, \mathcal{H} nem sempre é completo; é a única condição que falta para ser espaço de Hilbert.

Chamemos agora de \mathcal{H}_1 o espaço das funções admissíveis com a mesma identificação, \mathcal{H}_0 o das funções sempre diferenciáveis. Temos

$$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$$

Ainda mais, se $v_1, v_2 \in \mathcal{H}_1$, então $v_1 - v_2 \in \mathcal{H}_0$; inversamente, se $v_1 \in \mathcal{H}_1$, então $\forall v_0 \in \mathcal{H}_0, v_1 + v_0 \in \mathcal{H}_1$. Portanto \mathcal{H}_1 é o transladado de \mathcal{H}_0 por uma função admissível qualquer.

Princípio de Dirichlet. Existe em \mathcal{H}_1 um ponto u cuja distância $d = \sqrt{D(u)}$ à origem é mínima. u é harmônica em $S - \gamma_0$.



Isto é, existe uma função admissível u para a qual a integral de Dirichlet é mínima. Não é surpreendente que u seja harmônica em $S - \gamma_0$; de fato, lembremos a apresentação clássica: é dada uma região R

no plano (x, y) limitada por uma curva de Jordan C , e uma função φ contínua sobre C , as funções admissíveis são as funções definidas em R , de classe C^1 , que em C coincidem com φ ; procuramos o mínimo da integral

$$\iint \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Suponhamos que exista uma função f duas vezes diferenciável que dá o mínimo. Então da fórmula de Euler-Lagrange do cálculo das variações resulta imediatamente

$$\Delta f = 0$$

isto é, f é harmônica.

Para a demonstração do princípio de Dirichlet, cf. Herman Weyl, Die Idee der Riemannschen Flächen; Springer, Introduction to Riemann Surfaces.

3. Construção de diferenciais harmônicas.

Agora podemos resolver sem mais a questão da existência de funções e formas diferenciais harmônicas em toda S exceto em certos pontos onde apresentam singularidades. A proposição 28 nos permitirá então passar das diferenciais harmônicas para as diferenciais abelianas e finalmente, por integração, para funções meromorfas em S .

a) Assim, provemos que fixado $O \in S$, existe uma função, harmônica em $S-O$, que em O se comporta como $\mathcal{R}(1/z_0)$: basta aplicar o princípio de Dirichlet tomando

$$\phi = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{a_0^2}$$

Esta função ϕ , definida numa vizinhança de K_0 , tem as propriedades exigidas, e em O se comporta como $\mathcal{R}(1/z_0)$. Pelo princípio de Dirichlet, existe uma função u harmônica em $S - \gamma_0$, com salto ϕ sobre γ_0 . A função U definida por

$$U = \begin{cases} u & \text{em } S - K_0 \\ u + \phi & \text{em } K_0 \end{cases}$$

será então harmônica em $S-O$, com a singularidade do tipo desejado em O .

A diferencial dU em consequência, é uma diferencial harmônica em $S-O$, que em O se comporta como $\mathcal{R}(-dz/z^2)$.

Ainda mais, se α é um caminho fechado em S (ciclo singular diferenciável) que não passa por P , vale

$$\int_{\alpha} dU = 0$$

pois dU é uma diferencial exata.

Podemos provar agora que se S é compacta, as propriedades de dU : i) harmônica em $S-O$, com singularidade dada por $\mathcal{R}(-dz/z^2)$; ii) ter integral nula em qualquer caminho fechado sobre S que não passe por O , determinam dU univocamente.

De fato, se ω é outra diferencial com as mesmas propriedades, $\omega - dU$ é uma diferencial harmônica em toda S , com integral nula sobre qualquer caminho fechado, portanto admitindo uma primitiva bem definida em S por

$$f(Q) = \int_{Q_0}^Q \omega - dU$$

$f(Q)$ devendo ser harmônica em toda S , é constante, o que prova a afirmação: $\omega = dU$.

b) Podemos repetir o raciocínio numa situação um pouco mais geral: fixado $P \in S$, se z é um p.u. em P queremos construir uma função harmônica em $S-P$ que em P se comporte como $\mathcal{R}(z^{-n})$. Para isto tomamos, se $z = x + iy = re^{i\psi}$,

$$\phi = \frac{\cos n\psi}{r^n} + \frac{r^n \cos n\psi}{a_0^{2n}}$$

sendo a segunda parcela acrescentada para anular a derivada normal de ϕ sobre $|z| = a_0$.

Aplicando o princípio de Dirichlet com esta função ϕ , resulta uma função u com salto ϕ sobre γ_0 , e

$$U_{n,P} = \begin{cases} u & \text{em } S-K_0 \\ u + \phi & \text{em } K_0 \end{cases}$$

satisfaz às condições.

A diferencial $dU_{n,P}$ é uma diferencial harmônica em $S-P$, que em P se comporta como $\mathcal{R}\left(\frac{-n dz}{z^{n+1}}\right)$.

Analogamente, tomando

$$\phi = \frac{\text{sen } n\varphi}{r^n} + \frac{r^n \text{sen } n\varphi}{a_0^{2n}}$$

construímos uma função $U'_{n,P}$ que em P se comporta como $\mathcal{J}(z^{-n}) = \mathcal{R}(-iz^{-n})$ e cuja diferencial $dU'_{n,P}$ é harmônica em $S-P$ e em P se comporta como $\mathcal{R}\left(\frac{\text{ind}z}{z^{n+1}}\right)$.

As diferenciais $dU_{n,P}$ e $dU'_{n,P}$ têm ainda a propriedade que, se α é um caminho fechado que não passa por P ,

$$\int_{\alpha} dU_{n,P} = \int_{\alpha} dU'_{n,P} = 0.$$

Inversamente, as singularidades de $dU_{n,P}$ e $dU'_{n,P}$ e esta última propriedade determinam univocamente estas diferenciais se S for compacta; demonstração como no caso anterior.

c) Fixado $P \in S$, seja z um p.u. em P , tal que se possa considerar um disco K de centro P correspondente a $|z| < 1$. Tomemos em K dois pontos P_1 e P_2 , distintos de P , suponhamos que P_1 corresponde ao valor z_1 , P_2 ao valor z_2 do p.u. Queremos construir uma função U_{12} harmônica exceto em P_1 e P_2 , que em K se comporte como

$$\frac{1}{2\pi} \{ \log r_2 - \log r_1 \}$$

onde $r_1 = |z - z_1|$, $r_2 = |z - z_2|$.

Consideremos os pontos P'_1, P'_2 correspondentes respectivamente

te aos valores $1/\bar{z}_1$ e $1/\bar{z}_2$ do p.u., seja $r_1 = |z-1/\bar{z}_1|$, $r_2 = |z-1/\bar{z}_2|$ e tomemos a função

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \left\{ (\log r_1 - \log r_2) + (\log r_1' - \log r_2') \right\}$$

a segunda parcela sendo acrescentada para que ϕ tenha derivada normal nula sobre o contorno γ de K . Se tomarmos um disco K um pouco maior que K , mas de modo a não incluir P_1 e P_2 , então ϕ será regular e harmônica em K^* exceto nos pontos P_1 e P_2 . Pelo princípio de Dirichlet existe então a função $U_{1,2}$ satisfazendo às condições desejadas: basta tomar a função u harmônica em $S-\gamma$, e com salto ϕ ao longo de γ que dá o mínimo da integral de Dirichlet, e tomar

$$U_{1,2} = \begin{cases} u & \text{em } S-K \\ u + \phi & \text{em } K \end{cases}$$

Mais geralmente, sejam agora P, Q dois pontos distintos quaisquer da superfície de Riemann, seja α uma curva sobre S ligando êsses dois pontos. Podemos cobrir α por vizinhanças coordenadas e em seguida tomar pontos em número finito P_2, \dots, P_{n-1} sobre α de modo que cada par P_{i-1}, P_i (ponto $P = P_1, Q = P_n$) pertença a uma vizinhança coordenada.

Construimos em seguida as funções $U_{i-1,i}$ ($i=2, \dots, n$) correspondentes aos pares de pontos como acima e tomamos

$$(8.12) \quad U_{P,Q} = U_{1,2} + \dots + U_{n-1,n}$$

As singularidades nos pontos intermediários P_2, \dots, P_{n-1} se cancelam na soma (8.12). De fato, no ponto P_2 , U_{12} se comporta como

$\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z-z_2}{z-z_1} \right|$ e U_{23} como $\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z'-z'_3}{z'-z'_2} \right|$ onde z e z' designam os p.u. nas vizinhanças correspondentes aos pares P_1, P_2 e P_2, P_3 respectivamente. Ora

$$\log \left| \frac{z-z_2}{z-z_1} \right| + \log \left| \frac{z'-z'_3}{z'-z'_2} \right| = \log \left| \frac{z'-z'_3}{z-z_1} \right| + \log \left| \frac{z-z_2}{z'-z'_2} \right|$$

A primeira parcela é evidentemente regular em P_2 , a segunda também pois $z-z_2$ e $z'-z'_2$ sendo ambos p.u. em P_2 , seu quociente é regular e não nulo.

Assim construímos uma função com singularidades nos pontos P, Q dados arbitrariamente em S e somente nesses pontos.

A diferencial $dU_{P,Q}$ é uma diferencial harmônica em toda S excetuados os pontos P, Q e que em P se comporta como $\mathcal{R}\left(\frac{-dz_1}{2\pi z_1}\right)$, em Q como $\mathcal{R}\left(\frac{dz_n}{2\pi z_n}\right)$. Não depende do caminho ligando êsses dois pontos, nem dos p.u. escolhidos em P e Q , depende somente de P e Q .

d) Com as mesmas notações do caso c), consideremos a função

$$\psi = \int \left(\log \frac{z-z_2}{z-z_1} \right) = \varphi_2 - \varphi_1$$

onde $\varphi_2 = \arg(z-z_2)$, $\varphi_1 = \arg(z-z_1)$.

ψ não é unívoca em K , mas se tirarmos de K uma curva σ ligando P_1 e P_2 e contida em K , podemos tomar no resto de K uma determinação única. Em particular, ψ será unívoca em K^*-K e harmônica. Se tomarmos agora

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \left\{ (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi'_2 - \varphi'_1) \right\}$$

onde $\varphi'_1 = \arg(z - 1/\bar{z}_1)$, $\varphi'_2 = \arg(z - 1/\bar{z}_2)$, teremos que ϕ tem derivada normal nula no contorno de K e podemos determinar uma vizinhança do anel K^*-K na qual ϕ é harmônica.

Pelo princípio de Dirichlet existe uma função u harmônica exceto no contorno χ de K , com salto igual ao valor de ϕ nesse contorno. Não podemos, como antes, definir uma função unívoca $u + \phi = U$ em K pois ϕ não é bem definida. Mas a diferencial de ϕ é unívoca, e a forma dada por

$$dU_{12} = \begin{cases} du & \text{em } S-K \\ du + d\phi & \text{em } K \end{cases}$$

é uma forma harmônica em toda S excetuados P_1 e P_2 , que em P_1 se comporta como $\Re\left(\frac{idz}{2(z-z_1)}\right)$ e em P_2 como $\Re\left(\frac{-idz}{2(z-z_2)}\right)$.

Ainda mais, se α é um caminho fechado que não encontra o caminho σ , vale

$$\int_{\alpha} dU_{12} = 0$$

pois em $S-\sigma$, dU_{12} tem uma primitiva bem definida. Por outro lado, como ϕ sofre uma variação igual a $+1$ quando se atravessa σ , podemos dizer que se α corta σ uma vez, então

$$\int_{\alpha} dU_{12} = \pm 1.$$

Podemos ainda como no caso anterior, tomar mais geralmente dois pontos P e Q de S ligados por uma curva α e definir uma diferencial com singularidades só em P e Q , harmônica no resto de S : basta dividir α em arcos parciais por meio dos pontos P_2, \dots, P_{n-1} sendo P_{i-1}, P_i contidos numa vizinhança coordenada, e formar as diferenciais $dU_{i-1,i}$. Fazendo a soma, desaparecem as singularidades nos pontos intermediários.

Precisaremos mais tarde da seguinte proposição:

Proposição 31. Sejam P e Q dois pontos de S , α um caminho ligando êsses dois pontos, dU_{α} a diferencial correspondente a α pela última construção, e seja β uma diferencial fechada em S . Então

$$\int_S dU_{\alpha} \wedge \beta = \int_{\alpha} \beta$$

Demonstração. Consideremos em primeiro lugar o caso em que os dois pontos, que indicaremos com 1,2, estejam contidos num disco K dado por $|z| \leq 1$. Tomemos ainda um disco K' , dado por $|z| \leq a < 1$ de modo que $1,2 \in K'$ e um caminho unindo 1 e 2 e contido em K' . Em $K'-\sigma$ podemos definir univocamente uma primitiva ϕ_{12} de dU_{12} .

Podemos ainda estender φ_{12} a $S-K'$, e isto de tal modo que a função estendida φ^* seja nula fora de K . A maneira mais simples de construir φ^* é tomar um terceiro disco K'' , de modo que $K' \subset K'' \subset K$ e construir uma função λ de classe C_1 , igual a 1 em K' , nula fora de K'' (1).

Basta então tomar $\varphi^* = \lambda \varphi_{12}$. Agora provaremos que

$$\int_S dU_{12} \wedge \beta = \int_{\sigma} \beta$$

Ora, como a primitiva φ^* de dU_{12} é nula fora de K , a integral no primeiro membro se reduz à integral estendida a K . Mas em K , $\beta = df$ pois K é simplesmente conexo logo β tem uma primitiva em K bem definida. Tomemos dois pequenos círculos, K_1 e K_2 , de centros 1, 2 resp., raios r_1, r_2 , contornos γ_1, γ_2 (com a orientação induzida pela orientação canônica de S). Levando ainda em conta que φ^* é nula fora de K'' , vem pelo teorema de Stokes,

$$\int_{K-K_1-K_2} dU_{12} \wedge \beta = - \int_{K-K_1-K_2} \beta \wedge dU_{12} = - \int_{\gamma_1} f dU_{12} - \int_{\gamma_2} f dU_{12}$$

e de

$$\int_{\gamma_1} dU_{12} = 1, \quad \int_{\gamma_2} dU_{12} = -1$$

vem

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} f dU_{12} = f(1), \quad \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} f dU_{12} = -f(2)$$

(1) Para construir λ podemos p.ex. tomar um recobrimento localmente finito de S em que os abertos que contêm os pontos de K' estejam contidos em K'' , e a correspondente partição da unidade $\{g_\alpha\}$. A função $\lambda = \sum' g_\alpha$, onde \sum' se estende às funções g_α correspondentes aos abertos que recobrem K' , satisfaz as condições.

logo

$$\int_S dU_{12} \wedge \beta = f(2) - f(1) = \int_{\sigma} \beta$$

A extensão ao caso geral é imediata se tomarmos uma divisão do arco α unido P a Q em arcos parciais de modo que cada arco esteja contido num disco coordenado.

Para esta diferencial dU_{α} tem interêsse particular o caso em que α é uma curva fechada: com o raciocínio usado acima, construímos então uma diferencial sem singularidades, harmônica em tôda S , pois P coincidindo com Q também as singularidades nesses pontos se cancelam. A notação dU_{α} será agora reservada para a diferencial harmônica em tôda S associada a um caminho α fechado; para que não haja ambiguidade no sinal de dU_{α} tomamos os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n = P_1$ usados para a construção em tal ordem que se $P_i = \alpha(t_i), P_j = \alpha(t_j), t_i, t_j \in [0, 1]$, então $i < j \iff t_i < t_j$; provaremos mais tarde que dU_{α} só depende da classe de homologia de α (cf. neste capítulo § 5).

Ainda, se β é um caminho fechado que não encontra α , vale (pelo mesmo motivo que para dU_{12}),

$$\int_{\beta} dU_{\alpha} = 0$$

Se β corta α uma vez, como a primitiva U_{α} sofre uma variação igual a ± 1 , vale

$$\int_{\beta} dU_{\alpha} = \pm 1.$$

Para eliminar a imprecisão do sinal e generalizar para o caso em que β corta α mais de uma vez, precisaremos introduzir o conceito topológico de número de intersecções de duas curvas numa superfície de Riemann, ou mais geralmente, numa variedade topológica de dimensão 2.

4. Número de intersecções de duas curvas.

Seja V uma variedade topológica de dimensão 2 triangulada e orientada. Consideremos sobre V um simplexo topológico σ_2 de dimensão 2 dado pelo homeomorfismo

$$h: \Delta \longrightarrow \sigma_2$$

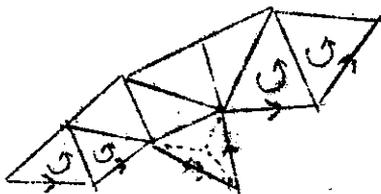
do simplexo euclidiano Δ em V . Chamaremos de segmento em σ_2 à imagem por h de um segmento contido em Δ .

Observemos que dado um segmento em V , de extremidades A, B podemos dar-lhe as orientações (A, B) e (B, A) . Se agora (A, B) é um segmento orientado é possível introduzir uma ordem entre seus pontos. De fato, existe um homeomorfismo φ do segmento $0 \overleftarrow{\quad} 1$ da reta sobre o segmento (A, B) tal que $\varphi(0) = A, \varphi(1) = B$. Se então $t_1, t_2 \in 0 \overleftarrow{\quad} 1$, e $t_1 < t_2$, diremos que $\varphi(t_1)$ precede $\varphi(t_2)$. Essa ordem não depende do particular homeomorfismo φ .

Definição 51. Chamaremos linha poligonal um conjunto de segmentos S_1, \dots, S_n orientados, tais que a extremidade de S_i é origem de S_{i+1} e que não se intercepta.

Se a extremidade de S_n coincidir com a origem de S_1 , a poligonal se dirá fechada.

Uma linha poligonal tem um sentido de percurso, isto é, uma orientação natural, que, pela observação acima, determina uma ordem entre seus pontos. Ainda mais, como V é suposta orientada, podemos estabelecer uma distinção, numa vizinhança da poligonal, entre margem esquerda e margem direita da poligonal. Para isto, supomos a triangulação tal que os segmentos da poligonal sejam lados de simplexos.



Então, se um triângulo σ_2 tem um lado S que é segmento da poligonal, diremos que σ_2 pertence à margem esquerda se a orientação do triângulo σ_2 em V induz em S a mesma orientação induzida pela orientação natural da poligonal. Se σ_2 pertence à margem esquerda, di-

remos também que os triângulos que têm um lado comum com σ_2 e um lado ou um vértice em comum com a poligonal pertencem a essa margem. Continuando do mesmo modo, definimos um conjunto de triângulos que constituem a margem esquerda da poligonal. A definição de margem direita é análoga.

Note-se que um triângulo pode ter um vértice e um lado em comum com a poligonal e assim pertencer as duas margens simultaneamente, pode-se entretanto sempre evitar esta situação modificando-se convenientemente a poligonal.

Definição 52. Dadas duas poligonais α e β com um ponto comum A , diremos que β corta α da direita para a esquerda em A se existe uma vizinhança de A tal que os pontos de β nessa vizinhança que precedem A pertencem à margem direita de α , e os pontos de β que seguem A e pertencem a essa vizinhança estão na margem esquerda de α .

Analogamente se define: β corta α da esquerda para a direita. Se β corta α da direita para a esquerda em A , então α corta β da esquerda para a direita em A .

Sejam α e β duas poligonais fechadas cujos segmentos são faces de uma triangulação de V , sem lado comum, indiquemos por d o número de vezes que β corta α da direita para a esquerda, por e o número de vezes que β corta α da esquerda para a direita.

Definição 53. Chamaremos número de intersecções s de α e β a diferença $d-e$:

$$s(\alpha, \beta) = d - e.$$

Dada uma curva continua $\alpha : I \longrightarrow S$ e dois pontos $P_1 = \alpha(t_1)$, $P_2 = \alpha(t_2)$, dizemos que P_1 precede P_2 se $t_1 < t_2$.

Definição 54. Suponhamos dado sobre a superfície V um recobrimento por abertos conexos, tais que a intersecção de dois deles seja ainda conexa (p.ex., se V está triangulada, o recobrimento pelas estrelas em volta de cada vértice). Duas curvas α e α^* sobre V se dizem vizinhas se existem pontos P_1, \dots, P_n sobre α , P_1^*, \dots, P_n^* sobre α^* tais que

- a) $P_1 = \alpha(0)$, $P_n = \alpha(1)$, P_i precede P_{i+1} para todo $i=1, \dots, n$; $P_1^* = \alpha^*(0)$, $P_n^* = \alpha^*(1)$, P_i^* precede P_{i+1}^* para todo $i=1, \dots, n$.
- b) Para todo i , $1 \leq i \leq n-1$ existe um aberto do recobrimento que contém os arcos de extremidades P_i, P_{i+1} sobre α , e P_i^*, P_{i+1}^* sobre α^* .

De maneira semelhante define-se poligonais vizinhas.

Demonstra-se que duas curvas vizinhas com mesma origem e extremidade são sempre homotópicas.

Admitiremos sem demonstração o seguinte teorema:

Teorema 23. Se α e α' são poligonais fechadas vizinhas vale $s(\alpha', \beta) = s(\alpha, \beta)$ qualquer que seja a poligonal fechada β .

Corolário. Se α é uma curva fechada, orientada, β uma poligonal, α' e α'' poligonais fechadas vizinhas de α $s(\alpha', \beta) = s(\alpha'', \beta)$.

Definição 25. Dadas duas curvas fechadas, orientadas, α e β seja α' uma poligonal vizinha de α , β' uma poligonal vizinha de β , que não tenham lado comum; diremos que o número de intersecções de α e β é

$$s(\alpha, \beta) = s(\alpha', \beta').$$

Pelo corolário anterior, $s(\alpha, \beta)$ não depende das poligonais α' , β' escolhidas.

Propriedades do número de intersecções.

- 1) $s(\alpha, \beta) = -s(\beta, \alpha)$
- 2) se $\alpha \sim 0$, $s(\alpha, \beta) = 0 \quad \forall \beta$
- 3) se $\alpha \sim \alpha'$, $s(\alpha, \beta) = s(\alpha', \beta) \quad \forall \beta$
- 4) se $\alpha \sim \alpha' \pm \alpha''$, $s(\alpha, \beta) = s(\alpha', \beta) \pm s(\alpha'', \beta)$.

A propriedade 3) significa que o número de intersecções de duas curvas só depende da classe de homologia a que pertence cada uma, logo é uma função definida nas classes de homologia, com valores inteiros. Demonstra-se facilmente que dada uma classe de homologia singular existe sempre uma curva que pertence a essa classe, portanto o número de intersecção define uma forma bilinear antisimétrica no grupo de homologia sin-

gular.

Seja pois V uma superfície compacta, triangulada, seja $\gamma_1, \dots, \gamma_h$ uma base do 1º grupo de homologia singular $H_1(V)$. Sejam α, β caminhos abertos quaisquer,

$$\alpha \sim m_1 \gamma_1 + \dots + m_h \gamma_h$$

$$\beta \sim n_1 \gamma_1 + \dots + n_h \gamma_h.$$

Ponhamos

$$s_{ij} = s(\gamma_i, \gamma_j)$$

Então

$$s(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} m_i n_j s_{ij}$$

Seja agora $\gamma'_1, \dots, \gamma'_h$ uma outra base de caminhos, $\|\alpha_{ij}\|$ a matriz da mudança de base

$$\|\alpha_{ij}\| : (\gamma_1, \dots, \gamma_h) \longrightarrow (\gamma'_1, \dots, \gamma'_h)$$

que é uma matriz de inteiros, não singular, com inversa também de inteiros, logo

$$\det \|\alpha_{ij}\| = \pm 1$$

isto é, $\|\alpha_{ij}\|$ é unimodular.

Consideremos a matriz antisimétrica

$$S = \|s_{ij}\|.$$

Em relação à base $(\gamma'_1, \dots, \gamma'_h)$ a matriz da forma $s(\alpha, \beta)$ será

$$S' = \|s'_{ij}\| = \|\alpha_{ij}\| \cdot \|s_{ij}\| \cdot {}^t \|\alpha_{ij}\|$$

e

$$\det \|s'_{ij}\| = \det \|s_{ij}\|$$

é um invariante.

Verifica-se facilmente que, se tomarmos uma base de retrosecções $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ ($p = h/2 = \text{genus}$) no sentido dado no fim do cap. IV (ver figura 15), isto é, em que cada par a_i, b_i tem um ponto comum, elementos de pares distintos não têm ponto comum, a matriz S toma a forma

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e então

$$\det S = 1.$$

Do fato de ser $\det S = 1$ segue que dada uma base $\gamma_1, \dots, \gamma_h$ e números inteiros c_1, \dots, c_h existe um caminho α tal que

$$s(\alpha, \gamma_i) = c_i.$$

De fato, se

$$\alpha \sim \sum x_i \gamma_i$$

vem

$$\sum x_k s_{ki} = c_i$$

sistema de equações lineares em x_1, \dots, x_h com coeficientes inteiros determinante 1, que tem uma solução, única, constituída de inteiros. A classe de homologia de α é pois univocamente determinada pelas condições $s(\alpha, \gamma_i) = c_i, i = 1, \dots, h.$

5. O espaço vetorial das diferenciais harmônicas em toda S.

Podemos agora completar o estudo do caso d) no §3, em que definimos, dado um caminho fechado α sobre S , uma diferencial harmônica

ca dU associada, sem singularidades em S e tal que se uma curva fechada β atravessa α uma vez, então

$$\int_{\beta} dU_{\alpha} = \pm 1.$$

Podemos agora afirmar, mais precisamente, que se β atravessa α da direita para a esquerda, a integral vale $+1$, pois então U_{α} sofre um acréscimo $+1$, caso contrário, a integral vale -1 .

Resulta que se β é um caminho fechado, e β' uma poligonal vizinha de β , então

$$\int_{\beta} dU_{\alpha} = \int_{\beta'} dU_{\alpha} = s(\alpha, \beta') = s(\alpha, \beta)$$

(tomamos esta poligonal auxiliar para contornar o caso em que α e β tenham infinitos pontos de intersecção).

Quanto à dependência entre dU_{α} e α , podemos enunciar: se S é uma superfície compacta,

- 1) se $\alpha \sim \beta$, $dU_{\alpha} = dU_{\beta}$
- 2) se $\alpha \sim 0$, $dU_{\alpha} = 0$
- 3) se $\alpha \sim \beta + \gamma$, $dU_{\alpha} = dU_{\beta} + dU_{\gamma}$

A primeira propriedade diz que não só dU_{α} não depende dos pontos de α usados para sua construção, como depende apenas da classe de homologia de α . De fato, se $\alpha \sim \beta$,

$$\int_{\gamma} dU_{\alpha} = s(\alpha, \gamma) = s(\beta, \gamma) = \int_{\gamma} dU_{\beta}$$

qualquer que seja γ . As integrais sendo iguais para qualquer ciclo, e S sendo compacta, $dU_{\alpha} = dU_{\beta}$.

Analogamente se verifica as demais propriedades.

Supomos agora que S seja compacta e seja χ_1, \dots, χ_{2p} uma base do 1º grupo de homologia. A cada χ_i corresponde uma diferencial harmônica que indicamos com dU_i :

$$dU_i = dU_{\chi_i}$$

Essas diferenciais dU_1, \dots, dU_{2p} têm as seguintes propriedades:

1) são linearmente independentes sobre o corpo real.

De fato, suponhamos

$$\sum \lambda_i dU_i = 0.$$

Integrando sobre γ_k vem

$$\sum \lambda_i \int_{\gamma_k} dU_i = 0$$

e, de

$$\int_{\gamma_k} dU_i = s(\gamma_i, \gamma_k) = s_{ik}$$

segue

$$\sum \lambda_i s_{ik} = 0 \quad (k=1, \dots, 2p)$$

logo

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{2p} = 0$$

pois $\det |s_{ik}| \neq 0$.

2) dados os números reais μ_1, \dots, μ_{2p} arbitrários existe uma combinação linear das dU_i

$$\omega = \sum \lambda_i dU_i$$

que tem período μ_k relativamente a γ_k ($k=1, \dots, 2p$).

De fato,

$$\int_{\gamma_k} \omega = \sum_i \lambda_i \int_{\gamma_k} dU_i = \sum_i \lambda_i s_{ik}$$

e o sistema

$$\lambda_i^s{}_{ik} = \mu_k$$

determina $\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}$.

Existe pois uma forma harmônica com períodos dados. Além disso, essa forma é única. De fato, se ω' é outra forma harmônica com iguais períodos,

$$\omega_0 = \omega - \omega'$$

tem os períodos nulos, sua primitiva é uma função bem definida em S e harmônica em toda S , logo constante e $\omega_0 = 0$.

Resulta então finalmente que toda forma harmônica em S é combinação linear com coeficientes reais de dU_1, \dots, dU_{2p} . De fato, dada a forma ω podemos determinar seus períodos:

$$\int_{\gamma_k} \omega = \mu_k \quad k = 1, \dots, 2p$$

Ora, existe uma combinação dos dU_i , seja $\sum \lambda_i dU_i$, com êsses períodos e pela unicidade provada,

$$\omega = \sum \lambda_i dU_i.$$

As formas dU_1, \dots, dU_{2p} formam pois uma base para o espaço vetorial das diferenciais harmônicas em toda S sobre o corpo real.

6. Formas abelianas sôbre uma superfície de Riemann compacta.

Dada uma forma dU harmônica em S menos num conjunto de pontos isolados, a forma $dU + idU^*$ é uma forma meromorfa em S (cf. proposição 28). Assim as formas harmônicas que construímos nos dão as formas abelianas sôbre S .

a) Formas abelianas de 1ª espécie. A uma diferencial sem singularidades, isto é, harmônica em toda S , corresponde uma forma holomorfa em todo ponto de S , portanto de 1ª espécie. Em particular, se as formas dU_1, \dots, dU_{2p} formam uma base para as diferenciais harmôni-

cas em tôda S , as diferenciais holomorfas

$$\omega_k = dU_k + i dU_k^* \quad k = 1, \dots, 2p$$

são também linearmente independentes sôbre o corpo real, e tôda diferencial abeliana de 1ª espécie é combinação linear de $\omega_1, \dots, \omega_{2p}$ com coeficientes reais. Resulta pois que as diferenciais abelianas de 1ª espécie sôbre uma superfície de Riemann compacta de genus p formam um espaço vetorial de dimensão $2p$ sôbre o corpo real, portanto de dimensão p sôbre o corpo complexo.

Observemos ainda que do fato de uma forma harmônica em S ser univocamente determinada por seus períodos, segue que uma forma de 1ª espécie fica univocamente determinada quando se conhece a parte real de seus períodos, pois isto caracteriza $\Re(\omega)$ e

$$\omega = \Re(\omega) + i\Re(\omega)^*.$$

b) Formas abelianas de 2ª espécie. Dado $P \in S$, existe (casos a), b) do §4) uma diferencial $dU_{n,P}$ harmônica em $S-P$, que em P se comporta como $\Re\left(\frac{-ndz}{n+1}\right)$, $n \geq 1$, e uma diferencial $dU'_{n,P}$ harmônica também em $S-P$ que em P se comporta como $\Re\left(\frac{indz}{z^{n+1}}\right)$. As diferenciais abelianas

$$\omega = dU_{n,P} + i dU_{n,P}^*$$

$$\omega' = dU'_{n,P} + i dU'_{n,P}^*$$

são pois holomorfas em $S-P$, e em P se comportam respectivamente como $-ndz/z^{n+1}$ e $indz/z^{n+1}$; têm pois em P um polo de ordem ≥ 2 , com residuo zero, isto é, são diferenciais de 2ª espécie. Têm ainda a propriedade que se α é um caminho fechado que não passa por P

$$\Re \int_{\alpha} \omega_{n,P} = \Re \int_{\alpha} \omega'_{n,P} = 0$$

e esta propriedade, juntamente com a singularidade em P , caracteriza completamente essas diferenciais.

c) Formas abelianas de 3ª espécie. Dados dois pontos quaisquer, P e Q , de S pelo caso c) do §4 existe uma diferencial $dU_{P,Q}$ que é harmônica exceto em P e Q , e que em P se comporta como $\mathcal{R}(-dz/2\pi z)$, em Q como $\mathcal{R}(dz/2\pi z')$, sendo z um p.u. em P , z' um p.u. em Q . A diferencial

$$\omega_{P,Q} = dU_{P,Q} + i dU_{P,Q}^*$$

é pois holomorfa em toda S , excetuados os pontos P e Q onde tem polos simples, com as singularidades $-dz/2\pi z$, $dz'/2\pi z'$ respectivamente, portanto com resíduo -1 em P , $+1$ em Q . É pois uma diferencial de 3ª espécie.

Está provado portanto a existência de formas abelianas das três espécies. Ainda mais, as diferenciais de 1ª espécie estão todas determinadas: toda diferencial de 1ª espécie é combinação linear com coeficientes reais de diferenciais $\omega_1, \dots, \omega_{2p}$ onde cada ω_i corresponde a uma classe de homologia de caminhos de S .

Podemos dar também resultados sobre o conjunto das diferenciais de 2ª e 3ª espécies:

Sejam dados em S os pontos P_1, \dots, P_r arbitrários, em cada ponto P_i uma parte meromorfa

$$\left(\frac{A_{-1}^{(i)}}{z} + \frac{A_{-2}^{(i)}}{z^2} + \dots + \frac{A_{-s_i}^{(i)}}{z^{s_i}} \right) dz \quad i=1, \dots, r$$

sendo os A números complexos quaisquer com

$$\sum_i A_{-1}^{(i)} = 0$$

Provaremos que existe uma forma abeliana que em cada P_i tem a singularidade dada e é regular nos demais pontos de S . Em outras palavras, pode-se dar arbitrariamente partes meromorfas em um número finito de pontos, desde que a soma dos resíduos seja nula, e construir uma forma meromorfa que tem singularidades nesses pontos fixados, com a parte meromorfa dada, e somente nesses pontos. Ainda mais, essa forma será expressa como combinação linear das formas já construídas.

De fato, dado P_1 podemos construir uma forma que em P_1 tem o comportamento dado por

$$\left(\frac{A_{-2}^1}{z^2} + \dots + \frac{A_{-s_1}^1}{z^{s_1}} \right) dz$$

como combinação linear de $\omega_{1,P_1}, \dots, \omega_{s_1-1,P_1}$. O mesmo podemos fazer com cada P_i , e indicaremos estas formas por $\Omega_1, \dots, \Omega_r$.

Tomemos em seguida um ponto O qualquer, diferente dos P_i , e liguemos O a P_1, \dots, P_r por caminhos. Consideremos as diferenciais de 3ª espécie ω_{O,P_i} e formemos

$$\Omega = \sum_i A_{-1}^{(i)} \omega_{O,P_i}$$

que é regular em O por ser $\sum_i A_{-1}^{(i)} = 0$ e tem em P_1, \dots, P_r os resíduos desejados.

A diferencial

$$\omega = \Omega + \Omega_1 + \dots + \Omega_r$$

satisfaz às condições dadas.

E' imediato por outro lado que duas diferenciais com as mesmas singularidades diferem por uma forma de 1ª espécie. Obtemos pois tôdas as formas que têm as singularidades dadas somando a ω tôdas as diferenciais abelianas de 1ª espécie. Ainda mais, dadas partes meromorfas arbitrariamente em um número finito de pontos de S e $2p$ números reais existe uma e uma só diferencial abeliana que tem precisamente essas partes meromorfas e êsses números reais como parte real dos períodos. Essa diferencial pode ser obtida como combinação linear das diferenciais obtidas em a), b) e c).

CAPÍTULO IX

MATRIZES DE RIEMANN

Estudaremos aqui os períodos das diferenciais abelianas sôbre uma superfície de Riemann compacta V_p de genus p . Vimos já que uma diferencial de 1ª espécie fica completamente determinada quando se conhecem os seus períodos, mais até, quando se conhecem as partes reais de seus períodos. Porém êstes períodos não podem ser dados arbitrariamente. Além disso, dada V_p podem-se construir certas matrizes reais ou complexas associadas às bases de diferenciais holomorfas cujas propriedades serão também pesquisadas.

1. As diferenciais harmônicas dU_1, \dots, dU_{2p} associadas aos $\gamma_1, \dots, \gamma_{2p}$ de uma base de $H_1(V_p)$ já associamos a matriz inteira não singular antisimétrica

$$S = \| s_{ij} \| \quad \text{com} \quad \det. S = 1$$

em que

$$s_{ij} = s(\gamma_i, \gamma_j) = \int_{\gamma_i} dU_j$$

Tomando agora

$$\omega_j = dU_j + i dU_j^*$$

virá

$$\int_{\gamma_i} \omega_j = \mathcal{R} \int_{\gamma_i} \omega_j + i \mathcal{I} \int_{\gamma_i} \omega_j = \int_{\gamma_i} dU_j + i \int_{\gamma_i} dU_j^*$$

e pondo

$$\int_{\gamma_i} dU_j^* = t_{ij}$$

formamos a matriz

$$T = \| t_{ij} \| .$$

Propriedades de T:

1) T é simétrica.

De fato, da proposição 31, pg. 137 resulta

$$t_{ij} = \int_{\gamma_i} dU_j^* = \int_{V_p} dU_i \wedge dU_j^*$$

e como $\mu \wedge \nu^* = \nu \wedge \mu^*$,

$$t_{ij} = \int_{V_p} dU_j \wedge dU_i^* = \int_{\gamma_j} dU_i^* = t_{ji}$$

2) T é definida positiva.

De fato, se

$$\mu = \sum \lambda_j dU_j$$

$$\mu \wedge \mu^* = \sum \lambda_j \lambda_k dU_j \wedge dU_k^*$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}$ reais quaisquer, vem

$$\int_{V_p} \mu \wedge \mu^* = \sum t_{jk} \lambda_j \lambda_k$$

Mas $\mu = P dx + Q dy$ é real, logo

$$\mu \wedge \mu^* = (P^2 + Q^2) dx \wedge dy \geq 0$$

$$\mu \wedge \mu^* = 0 \iff \mu = 0$$

logo

$$\forall \lambda_j \text{ reais} \iff \sum t_{jk} \lambda_j \lambda_k \geq 0$$

$$t_{jk} \lambda_j \lambda_k = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{2p} = 0$$

Isto é, a forma quadrática associada a T é definida positiva.

Finalmente construímos ainda mais uma matriz observando que ω_j sendo uma forma holomorfa,

$$i \omega_j = - \omega_j^*$$

também é holomorfa logo

$$(9.1) \quad - \omega_j^* = i \omega_j = \sum_1^{2p} r_{jk} \omega_k \quad j = 1, \dots, 2p$$

com coeficientes r_{jk} reais. A matriz

$$R = \| r_{jk} \|$$

tem a propriedade

$$R^2 = - E$$

que resulta imediatamente de (9.1) por $i \omega_j = - \omega_j^*$.

Ainda mais

$$- \int_{\gamma_\ell} \omega_j = \sum r_{jk} \int_{\gamma_\ell} \omega_k$$

logo

$$t_{j\ell} = t_{\ell j} = - \sum r_{jk} \cdot s_{\ell k}$$

$$t_{j\ell} = \sum r_{jk} s_{k\ell}$$

$$T = RS$$

ou ainda

$$R = TS^{-1}$$

donde segue mais uma propriedade das matrizes S e T:

$$(TS^{-1})^2 = -E$$

Finalmente, vale

$$\left\| \int_{\gamma_1} \omega_j \right\| = S + iT.$$

2. No espaço vetorial H das diferenciais harmônicas reais sobre a superfície de Riemann compacta V_p podemos distinguir os seguintes entes: a) um endomorfismo $I: dU \rightarrow dU^*$ tal que $I^2 = -1$; b) um subgrupo discreto Γ (de rang $2p$, isto é, de rang máximo) das formas que têm períodos inteiros; c) uma forma bilinear

$$\phi(dU, dV) = \int_{V_p} dU \wedge dV.$$

Esta forma, se tomarmos uma base dU_1, \dots, dU_{2p} de H define uma matriz S por

$$S = \|\phi(dU_i, dU_j)\|$$

ainda uma matriz

$$T = \|\phi(dU_i, dU_j^*)\|$$

Consideremos a situação de um ponto de vista puramente algébrico:

Seja E um espaço vetorial de dimensão $2p$ sobre R, $\Gamma \subset E$ um subgrupo discreto de rang máximo $2p$, I um endomorfismo de E satisfazendo $I^2 = -1$.

Chamamos forma de Riemann de E relativamente a Γ uma forma bilinear real ϕ com as seguintes propriedades:

- 1) Alternada

2) $\phi(Ix, Iy) = \phi(x, y)$

3) $\phi(x, Ix) > 0$ se $x \neq 0$

4) $\phi(\Gamma \times \Gamma) \subset \mathbb{Z}$.

Dada ϕ determinamos a matriz S de ϕ , isto é,

$$S = \|\phi(\lambda_i, \lambda_j)\|$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}$ é uma base de Γ sobre \mathbb{Z} (logo de E sobre \mathbb{R}). ϕ é o endomorfismo I definem ainda a matriz

$$T = \|\phi(\lambda_i, I\lambda_j)\|.$$

As propriedades de ϕ são então equivalentes às seguintes propriedades de S e T :

i) S é antisimétrica

ii) T é simétrica

iii) T é definida positiva

iv) S é inteira

Voltemos ao espaço H , considerando também o espaço $\tilde{H} \supset H$ das diferenciais harmônicas complexas. A forma ϕ está definida também em \tilde{H} , e goza das propriedades 1), 2), 4) e

3') $\phi(z, \overline{Iz}) > 0$ se $z \neq 0$.

Aqui existe uma base de $\tilde{\Gamma}$ tal que

$$S = \left(\begin{array}{cc|cc} & \circ & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \circ \end{array} \right)$$

Esta tomar uma base de retrosecções $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ e as correspondentes diferenciais $dU_{a_1}, \dots, dU_{a_p}, dU_{b_1}, \dots, dU_{b_p}$.

Então, se $x \in \tilde{H}$ e se

$$A_i = \int_{a_i} x, \quad B_i = \int_{b_i} x$$

o os períodos de x , vem

$$x = \sum_{i=1}^p (A_i dU_{b_i} - B_i dU_{a_i}).$$

Analogamente, se $y \in \tilde{H}$ e A'_i, B'_i são os períodos de y ,

$$y = \sum (A'_i dU_{b_i} - B'_i dU_{a_i}).$$

ão

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^p (A_i B'_i - B_i A'_i)$$

s

$$\phi(dU_{a_i}, dU_{b_i}) = \int_{a_i} dU_{b_i} = 1 = -\phi(dU_{b_i}, dU_{a_i})$$

$$\phi(dU_{a_i}, dU_{a_j}) = \phi(dU_{b_i}, dU_{b_j}) = 0$$

$$\phi(dU_{a_i}, dU_{b_j}) = 0 \text{ se } i \neq j.$$

3. Relações bilineares de Riemann

Lembrando que uma forma $\omega \in \tilde{H}$ é holomorfa se e somente se $\omega^* = i\omega$ vem que se ω e ω' são holomorfas

$$\phi(\omega, \omega') = 0$$

eja

$$\sum_{i=1}^p (A_i B_i' - B_i A_i') = 0.$$

que é a primeira relação de Riemann.

De fato,

$$\phi(\omega, \omega') = \phi(\omega^*, \omega'^*) = \phi(-i\omega, -i\omega') = -\phi(\omega, \omega').$$

Os períodos de duas formas holomorfas quaisquer estão pois ligados pela relação (9.2).

Se ω é holomorfa com períodos $A_1, B_1, \omega \neq 0$, de

$$0 < \phi(\omega, \bar{\omega}^*) = \phi(\omega, i\bar{\omega}) = i \phi(\omega, \bar{\omega})$$

segue

$$(9.3) \quad i \sum (A_j \bar{B}_j - B_j \bar{A}_j) > 0$$

que é a segunda relação bilinear de Riemann.

Uma consequência particular de (9.3) é que uma forma holomorfa não idênticamente nula não pode ter nulos todos os A-períodos ou todos os B-períodos. Também não pode ter períodos todos reais.

Estas são condições necessárias sobre os períodos. Não são suficientes: Haupt (Ein Satz über Abelsche Integrale 1. Gattung, Math. Zeit. vol. 6 (1920)). demonstrou que se $p > 1$, isto é, se V não é um toro, não pode haver em V uma diferencial holomorfa só com dois períodos não nulos; provou ainda que as condições (9.2) e (9.3) e mais esta são suficientes para que exista uma superfície de Riemann para a qual os números A_1, B_1 são períodos de uma diferencial holomorfa.

4. Base canônica das diferenciais de 1ª espécie.

O espaço \tilde{H}_0 das formas holomorfas tendo dimensão real $2p$ tem dimensão complexa p . Tomemos então uma base complexa ψ_1, \dots, ψ_p de \tilde{H}_0 . Consideremos as matrizes

$$A = \| A_{ij} \| = \| \int_{a_i} \psi_j \|$$

$$B = \| B_{ij} \| = \| \int_{b_i} \psi_j \|$$

A matriz A tem rang p pois se, indicando com \vec{A}_i os vetores de linha de A , tivermos

$$\sum t_i \vec{A}_i = 0$$

então a forma

$$\omega = \sum t_i \psi_i$$

será todos os A -períodos nulos, logo $\omega = 0$ o que implica $t_1 = \dots = t_p = 0$ pois as ψ_i formam uma base. Existe pois uma transformação linear em \tilde{H}_0 que leva a base ψ_1, \dots, ψ_p numa base $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, dita canônica, para a qual

$$\int_{a_i} \varphi_j = \delta_{ij}$$

isto é, para a qual a matriz A é a matriz unitária. Ainda para a base canônica a matriz B tem as seguintes propriedades:

1) B é simétrica

De fato, da 1ª relação de Riemann (9.2) segue

$$\phi(\varphi_k, \varphi_l) = B_{kl} - B_{lk} = 0.$$

2) B tem parte imaginária definida positiva.

De fato, se

$$\omega = \sum \lambda_i \varphi_i$$

segue de (9.3)

$$\phi(\omega, \bar{\omega}^*) = i \sum_{j,k} (\bar{B}_{jk} - B_{jk}) \lambda_j \lambda_k \geq 0$$

$$i \sum_{j,k} (\bar{B}_{jk} - B_{jk}) \lambda_j \lambda_k = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

que prova a afirmação.

Então para uma base complexa qualquer ψ_1, \dots, ψ_p vale

I) A é não singular

II) $A^{-1} B$ é simétrica, com parte imaginária definida positiva.

Dadas as duas matrizes $p \times p$, A e B satisfazendo I) e II), dizemos que a matriz $p \times 2p$: (A,B) é uma matriz de Riemann. Podemos agora perguntar se: a) toda matriz de Riemann é a matriz dos períodos de uma base complexa do espaço das diferenciais holomorfas de alguma superfície de Riemann V_p ; b) se isto não acontece, quais as matrizes de Riemann que são matrizes de períodos?

Quanto à primeira questão, a solução é conhecida: se $p=1$, a resposta é afirmativa, para $p \geq 2$ é negativa. Mas então, no caso $p \geq 2$ surge a segunda questão, e este é um problema não resolvido (Cf. Gershenhaber, On a theorem of Haupt and Wirtinger, Proc. Am. Math. Soc. vol. 4 (1953), n. 3).

5. Diferenciais normalizadas e normais

Definição 63. Uma diferencial abeliana diz-se normalizada se to

dos os seus A-períodos forem nulos.

A toda diferencial abeliana ω podemos associar uma (e uma só) forma normalizada ω' , que tem as mesmas singularidades. Basta para isto, se A_1, \dots, A_p forem os A-períodos de ω , e $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ uma base canônica das diferenciais holomorfas, tomar

$$\omega' = \omega - \sum A_i \varphi_i.$$

Definição 64. Uma diferencial de 3ª espécie diz-se normal se normalizada, tem apenas duas singularidades, P_1 e P_2 , e em P_1 se comporta como dz/z , em P_2 , como $-dz/z$.

A diferencial normal com singularidades em P_1 e P_2 será indicada com $\omega_{P_1 P_2}$.

Proposição 42. Toda diferencial abeliana se decompõe na soma de uma diferencial de 1ª espécie, mais uma normalizada de 2ª espécie, mais uma soma de diferenciais normais de 3ª espécie.

Demonstração. Seja ω uma diferencial abeliana, P_1, \dots, P_r os seus polos, c_1, \dots, c_r os resíduos correspondentes. Seja $P_0 \neq P_i$ ($i = 1, \dots, r$) e consideremos as diferenciais normais $\omega_{P_0 P_i}$. Então, como $\sum c_i = 0$, a diferencial $\sum c_i \omega_{P_0 P_i}$ é regular em P_0 e

$$\omega - \sum c_i \omega_{P_0 P_i}$$

é uma diferencial de segunda espécie. Se agora A_1, \dots, A_p são os A-períodos desta diferencial,

$$\omega - \sum c_i \omega_{P_0 P_i} - \sum A_i \varphi_i = \omega'$$

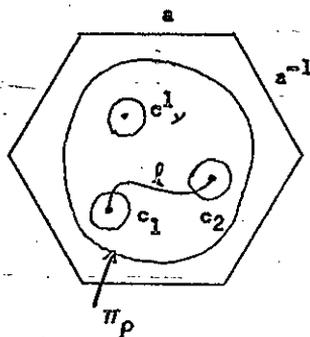
é uma diferencial de 2ª espécie normalizada, o que prova a proposição.

6. Relação bilinear para diferenciais meromorfas.

Proposição 43. Se ω é uma diferencial meromorfa, P_1, \dots, P_r os polos de ω , e ℓ um caminho qualquer tal que $P_\nu \notin \ell$ ($\nu = 1, \dots, r$), então

$$\int_{V_p} dU_\ell \wedge \omega = \int_\ell \omega - 2\pi i \sum_{\nu=1}^n \text{res}_p (U_\ell \omega).$$

Demonstração. Consideremos a superfície representada pelo seu polígono fundamental π (cf. cap. V), indiquemos por $\overset{\circ}{\pi}$ o interior de π . Tomemos em $\overset{\circ}{\pi}$ a) para $\rho > 0$ bastante pequeno, o maior domínio π_ρ tal que a distância do contorno de π_ρ ao contorno de π seja ρ ; b) círculos K_1, K_2 com centro nas extremidades de ℓ , contornos C_1, C_2 , raio ρ ; c) círculos K_ν ($\nu = 1, \dots, r$) com centro em P_ν , contorno C'_ν , raio ρ .



Tomemos em K_1 uma primitiva qualquer f de ω , e prolonguemos ao longo de ℓ . Então (cf. demonstração da proposição 41)

$$\int_{V_p} dU_\ell \wedge \omega = \int_{\overset{\circ}{\pi}} dU_\ell \wedge \omega = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi_\rho - K_1 - K_2 - \dots - K_r} dU_\ell \wedge \omega =$$

172
-22-

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[- \int_{\partial \pi_\rho} f \cdot dU_\ell + \int_{C_1} f \cdot dU_\ell + \int_{C_2} f \cdot dU_\ell - \sum_{\gamma} \int_{C'_\gamma} U_\ell \omega \right].$$

onde V_ℓ é uma primitiva de dV_ℓ definida em $\pi - \ell$. Como na demonstração da proposição 41 vem

$$\int_{V_p} dU_\ell \wedge \omega = f(P_2) - f(P_1) - \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{\gamma} \int_{C'_\gamma} U_\ell \omega = \int_{\ell} \omega - 2\pi i \sum_{\gamma} \text{res}_{P_\gamma} (U_\ell \omega)$$

como queríamos demonstrar.

A proposição 43 vale, por combinação linear, para formas ω_1 homomorfas (em lugar de dU_ℓ). Se

$$\omega_1 = \sum (A_i dU_{b_i} - B_i dU_{a_i})$$

então

$$\int_{V_p} \omega_1 \wedge \omega = \int_{\sum (A_i b_i - B_i a_i)} \omega - 2\pi i \sum_{\gamma} \text{res}_{P_\gamma} (f_1 \omega)$$

que f_1 é uma primitiva de ω_1 no interior do polígono fundamental que é simplesmente conexo. Como $f_1 \omega$ é uma função meromorfa em π ,

em

$$\int_{V_p} \omega_1 \wedge \omega = \sum (A_i B'_i - B_i A'_i) - \int_{\partial \pi} f_1 \omega$$

s (cf. demonstração da 1^a relação de Riemann)

$$\int_{V_p} \omega_1 \wedge \omega = 0$$

go

$$(9.4) \quad \sum (A_i B'_i - B_i A'_{ii}) = 2\pi i \sum_y \text{res}_{P_y} (f_1 \omega) - \int_{\partial\pi} f_1 \omega$$

Observação. A primitiva U_{a_i} de dU_{a_i} está definida em $\bar{\pi} = V_p - U_{a_i} - U_{b_i}$; analogamente para U_{b_i}

$$f_1 = \sum (A_i U_{b_i} - B_i U_{a_i})$$

a) Caso de diferenciais de 3ª espécie.

Seja, na relação (9.1), ω uma diferencial de 3ª espécie, que indicaremos por ω_3 ; suponhamos que essa diferencial só tenha pólos simples, P_1, \dots, P_r , com os resíduos c_1, \dots, c_r , e sejam $A'_1, \dots, A'_p, B'_1, \dots, B'_p$ os seus períodos. Tomemos um ponto P_0 no polígono π , unamos P_0 aos P_y por caminhos L_y . De (9.4) vem, visto que f_1 é regular,

$$\sum (A_i B'_i - B_i A'_i) = 2\pi i \sum \text{res}_{P_y} (f_1 \omega_3) = 2\pi i \sum c_y f_1(P_y)$$

Subtraindo no 2º membro $2\pi i \sum_y f_1(P_0) c_y$, que é nula pois $\sum c_y = 0$, vem

$$\sum (A_i B'_i - B_i A'_i) = 2\pi i \sum c_y (f_1(P_y) - f_1(P_0))$$

ou seja

$$(9.5) \quad \sum (A_i B'_i - B_i A'_i) = 2\pi i \sum c_y \int_{L_y} \omega_1$$

De (9.5) podemos tirar ainda certas relações em casos particulares. Suponhamos por exemplo ω_3 normalizadas, isto é, $A'_i = 0$ ($i = 1, \dots, p$) e seja ω_1 uma diferencial φ_k de uma base canônica das

diferenciais holomorfas, para a qual portanto $A_k = 1, A_j = 0$ para $j \neq k$. De (9.2) vem pois

$$B'_k = \int_{b_k} \omega_3 = 2\pi i \sum c_\nu \int_{L_\nu} \varphi_k$$

Se ainda mais particularmente tomarmos dois pontos P e Q e para a diferencial normal ω_{PQ} virá

$$B'_k = \int_{b_k} \omega_{PQ} = 2\pi i \left[\int_{P_0Q} \varphi_k - \int_{P_0P} \varphi_k \right] = 2\pi i \int_P^Q \varphi_k$$

Tomemos agora uma diferencial de 3ª espécie qualquer ω_3 . Suponhamos a superfície triangulada de modo que nenhum polo de ω_3 caia sobre uma aresta, e nenhum triângulo contenha mais de um polo. Seja um caminho de arestas fechado sobre S: podemos escrever

$$\gamma_1 = \sum (k_i a_i + k_{i+p} b_i) + \gamma_0 = \gamma'_1 + \gamma_0$$

e $\gamma_0 \sim 0$, isto é,

$$\gamma_0 = \partial \sum m_j \sigma_j^2$$

Logo

$$\int_{\gamma_0} \omega_3 = \sum m_j \int_{\partial \sigma_j} \omega_3 = 2\pi i \sum m_j \text{res}_{\sigma_j} \omega_3$$

Se tomarmos com m'_ℓ ($\ell = 1, \dots, r$) os coeficientes m_j relativos aos σ_j^2 que contêm um polo P_ℓ de ω_3 , com c_ℓ o resíduo nesse polo. Temos

$$\int_{\gamma_0} \omega_3 = 2\pi i \sum m'_\ell c_\ell$$

Por outro lado,

$$\int_{\gamma_1'} \omega_3 = \sum (k_i A_i' + k_{i+p} B_i')$$

onde finalmente resulta a integral sobre γ_1 expressa por meio dos períodos cíclicos A_i' , B_i' e polares c_ℓ de ω_3 :

9.6)
$$\int_{\gamma_1} \omega_3 = \sum (k_i A_i' + k_{i+p} B_i') + 2\pi i \sum m_\ell' c_\ell$$

Se tomarmos mais geralmente uma curva C fechada, que não passe pelos polos de ω_3 , podemos cercar cada polo por um círculo que não encontre C e no complementar destes círculos considerar um caminho e arestas γ_1 homotópico a C . Como neste complementar ω_3 é regular,

$$\int_C \omega_3 = \int_{\gamma_1} \omega_3$$

b) Caso de diferenciais de 2ª espécie.

Seja ω_2 uma forma com um só polo P_0 ; seja z um p.u. em P_0 e suponhamos que a parte meromorfa de ω_2 em P_0 seja dz/z^n ($n \geq 2$); sejam A_i' , B_i' os períodos cíclicos de ω_2 ; seja por outro lado ω_1 uma forma holomorfa com períodos A_i , B_i e com a representação

$$\omega_1 = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) dz$$

numa vizinhança de P_0 ; seja como antes f_1 uma primitiva de ω_1 no polígono fundamental π . De (9.1) vem

$$\sum (A_i B_i' - B_i A_i') = 2\pi i \operatorname{res}_{P_0} (f_1 \omega_2).$$

Ora

$$f_1 = c + c_0 z + \dots + \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} z^{n-1} + \dots$$

onde

$$9.7) \quad \sum (A_i B_i' - B_i A_i') = 2\pi i \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}}$$

Em particular, se ω_2 é normalizada e se $\omega_1 = \varphi_k$ virá

$$9.8) \quad B_k' = \int_{b_k} \omega_2 = 2\pi i \frac{c_{n-2} [\varphi_k]}{c_{n-1}}$$

mais particularmente, se $\omega_2 = dz/z^2$

$$9.9) \quad B_k' = 2\pi i \left(\frac{\varphi_k}{dz} \right) P_0$$

pois $\varphi_k(P_0) = c_0 dz$.

CAPÍTULO X

TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

Construímos já, em certos casos, diferenciais e funções com singularidades dadas; determinamos também a dimensão do espaço das diferenciais holomorfas. O teorema de Riemann-Roch nos dará agora uma relação entre a dimensão de um espaço de funções e a de um espaço de diferenciais, funções e diferenciais satisfazendo a condições dadas sobre ordens de polos ou zeros em determinados pontos, relação esta que tem consequências extremamente importantes. Entre estas, figuram resultados sobre a existência de diferenciais e funções com zeros e polos dados, que serão enunciados neste capítulo. Em vista da importância do teorema de Riemann-Roch damos aqui a demonstração completa, embora seja bastante longa e não essencial para a compreensão dos resultados.

1. Divisores.

Definição 65. Sejam P_1, \dots, P_r pontos distintos quaisquer de uma superfície de Riemann S compacta, de genus p , m_1, \dots, m_r números inteiros quaisquer. O símbolo

$$D = P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$$

será chamado divisor sobre S .

O conjunto \mathcal{D} de todos os divisores D com uma operação definida de modo evidente para um par qualquer de divisores (somando os expoentes) é um grupo abeliano. A operação será notada aditivamente:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r} \\ D_2 &= P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} \end{aligned} \right| \implies D_1 + D_2 = P_1^{m_1+n_1} P_2^{m_2+n_2} \dots P_r^{m_r+n_r}.$$

Definimos ainda uma ordem entre os divisores pondo, com a notação acima,

$$D_1 \geq D_2 \iff m_i \geq n_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

em particular, $D > 0$ se todos os expoentes são ≥ 0 .

Dada uma função f meromorfa em S e $P \in S$, indicaremos com $U_P(f)$ a) se f for nula em P , a ordem do zero; b) se P for um polo, a ordem do polo com sinal $-$; c) se f é regular e não nula, $U_P(f) = 0$. Para função idênticamente nula, ponos $U_P(0) = +\infty \forall P$.

Analogamente definimos $U_P(\omega)$ se ω é uma diferencial meromorfa.

Definição 66. Se f é uma função meromorfa em S , chamamos divisor (f) de f em S ao divisor

$$(f) = \sum_{P \in S} P^{U_P(f)}$$

Analogamente, se ω é diferencial meromorfa

$$(\omega) = \sum_{P \in S} P^{U_P(\omega)}$$

Em outras palavras, se P_1, \dots, P_r são os polos de f , m_1, \dots, m_r as ordens respectivas, e Q_1, \dots, Q_s os zeros, com ordens n_1, \dots, n_s , então

$$(f) = P_1^{-m_1} \dots P_r^{-m_r} Q_1^{n_1} \dots Q_s^{n_s}$$

se f é constante, não nula: $(C) = 0$.

Relações triviais:

$$\begin{aligned} (fg) &= (f) + (g) \\ (f\omega) &= (f) + (\omega). \end{aligned}$$

Definição 67. Dado um divisor $D = P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$ o número

$$d(D) = \sum_{i=1}^r m_i$$

chama-se grau total do divisor.

Para o divisor (f) de uma função meromorfa $f \neq 0$ o grau total é sempre 0:

$d((f)) = 0$ (consequência do teorema 25). Segue então que se ω_1, ω_2 são diferenciais meromorfas quaisquer

$$d((\omega_1)) = d((\omega_2))$$

pois ω_1/ω_2 é uma função meromorfa. Demonstraremos adiante que

$$d((\omega)) = 2p - 2.$$

Os divisores de funções (excluída a função nula) serão chamados divisores principais. Formam evidentemente um subgrupo de \mathcal{D} , e podemos formar as classes de \mathcal{D} segundo esse subgrupo, que chamaremos classes de divisores. Se D_1 e D_2 pertencem à mesma classe, isto é, se $D_1 = D_2 + (f)$ escrevemos

$$D_1 \sim D_2.$$

Em particular

$$D \sim 0 \iff D = (f).$$

Dadas duas diferenciais meromorfas ω_1, ω_2 temos sempre

$$(\omega_1) \sim (\omega_2).$$

Vale

$$D_1 \sim D_2 \implies d(D_1) = d(D_2)$$

não reciprocamente, é claro.

2. Definamos agora para um divisor D qualquer

$$L(D) = \left\{ \text{funções } f \text{ meromorfas em } S \mid (f) \geq D \right\}.$$

É imediato verificar que $L(D)$ é um espaço vetorial sobre C . Podemos

$$\dim L(D) = r(D).$$

Definimos ainda

$$\Omega(D) = \left\{ \text{diferenciais meromorfas } \omega \mid (\omega) \geq D \right\}.$$

ambém um espaço vetorial complexo e poremos

$$\dim \Omega(D) = i(D).$$

É trivial que

$$D_1 \geq D_2 \iff L(D_1) \subset L(D_2), \Omega(D_1) \subset \Omega(D_2).$$

Proposição 44. Os espaços $L(D)$ e $\Omega(D)$ só dependem da classe do divisor, isto é,

$$D_1 \sim D_2 \implies \begin{cases} L(D_1) \approx L(D_2) \\ \Omega(D_1) \approx \Omega(D_2). \end{cases}$$

De fato, seja

$$D_1 = D_2 + (h)$$

consideremos a aplicação

$$f \in L(D_2) \longrightarrow f \cdot h \in L(D_1).$$

É evidentemente um isomorfismo sobre pois a) é biunívoca:

$$f.h = 0 \implies f \equiv 0;$$

b) é sobre, pois se $g \in L(D_1)$, $g/h \in L(D_2)$.

Analogamente, a aplicação

$$\omega \in \Omega(D_2) \longrightarrow h.\omega \in \Omega(D_1)$$

é um isomorfismo entre os dois espaços:

Proposição 45. Se $\omega \neq 0$, e D é um divisor qualquer,

$$i(D) = r(D - (\omega)).$$

A aplicação

$$\pi \in \Omega(D) \longrightarrow \frac{\pi}{\omega}$$

é um isomorfismo de $\Omega(D)$ sobre $L(D - (\omega))$. De fato, se $(\pi) \geq D$, vale

$$(\pi) - D \geq 0$$

$$\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = (\pi) - (\omega) = (\pi) - D + D - (\omega) \geq D - (\omega)$$

logo $\frac{\pi}{\omega} \in L(D - (\omega))$. Que a aplicação é biunívoca sobre é imediato:

$$\frac{\pi}{\omega} \equiv 0 \iff \pi = 0$$

$$f \in L(D - (\omega)) \iff f\omega \in \Omega(D).$$

Teorema de Riemann-Roch. Se S é uma superfície de Riemann compacta de genus p e se D é um divisor qualquer sobre S , vale a relação

$$r(-D) = d(D) + i(D) + 1 - p.$$

Demonstração.

a) Seja primeiro D um divisor positivo

$$D = P_1^{n_1} \dots P_m^{n_m} \quad n_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dizer que $f \in L(-D)$ é dizer que a função f tem em P_k um polo de ordem $\leq n_k$, $k = 1, \dots, m$. A diferencial df é pois uma diferencial exata (períodos A_1, B_1 nulos), de 2ª espécie, que em P_k tem um polo de ordem no máximo $n_k + 1$, isto é, df tem em P_k um desenvolvimento

$$df = \left(\sum_{j=-n_k-1}^{+\infty} c_j^{(k)} z^{(j)} \right) dz \quad \text{com } c_{-1}^{(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Indiquemos com $\omega_k^{(j)}$ a diferencial normalizada que só tem um polo em P_k , com a parte singular dz/z^j , e seja

$$\omega_k = \sum_{j=-n_k-1}^{-2} c_j^{(k)} \omega_k^{(-j)}$$

ω_k comporta-se em P_k como df e portanto

$$(10.1) \quad \varphi = df - \sum_{k=1}^m \omega_k$$

é uma diferencial de 1ª espécie.

Reciprocamente, dados os números

$$c_{-j}^{(k)} \quad \begin{cases} k = 1, \dots, m \\ j = 2, \dots, n_k + 1 \end{cases}$$

dada uma forma φ de 1ª espécie tal que a diferencial

$$\omega = \varphi + \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} \omega_k^{(j)}$$

seja exata, isto é, $\omega = df$, então $f \in L(-D)$. De fato, ω tem em P_k um polo de ordem $\leq n_k + 1$, logo f tem em P_k um polo de ordem $\leq n_k$ ($k =$

$= 1, \dots, m)$ e não tem outros polos.

Consideremos a correspondência

$$f \in L(-D) \longrightarrow \left\| \begin{array}{l} c_{-j}^{(k)} \\ \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, m \\ j = 2, \dots, n_k + 1. \end{array}$$

Indiquemos por V_D o espaço vetorial formado por estas matrizes que provêm de uma função $f \in L(-D)$. A aplicação de $L(-D)$ sobre V_D definida acima é um homomorfismo: de fato, se

então

$$g \in L(-D) \longrightarrow \left\| \begin{array}{l} d_{-j}^{(k)} \\ \end{array} \right\|$$

$$f + g \longrightarrow \left\| \begin{array}{l} c_{-j}^{(k)} + d_{-j}^{(k)} \\ \end{array} \right\| .$$

Por outro lado, se

$$f \longrightarrow \left\| \begin{array}{l} 0 \\ \end{array} \right\|$$

então f não tem singularidades, isto é, f é constante. O núcleo do homomorfismo é pois o sub-espaço de $L(-D)$, de dimensão 1, constituído pelas funções constantes, e

$$r(-D) = \dim V_D + 1.$$

Seja agora dada a matriz $\left\| c_{-j}^{(k)} \right\|$ e consideremos a diferencial

$$(10.2) \quad \sigma = \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} \omega_k^{(j)} .$$

Se $\left\| c_{-j}^{(k)} \right\| \in V_D$ existe uma função f que corresponde a $\left\| c_{-j}^{(k)} \right\|$, e σ difere de df por uma forma de 1ª espécie, que tem os mesmos períodos que σ . Reciprocamente, se σ tem períodos iguais aos de uma forma de 1ª espécie φ , então $\sigma - \varphi$ é exata, $\sigma - \varphi = df$ com $f \in L(-D)$

portanto $\|c_{-j}^{(k)}\| \in V_D$. Resumindo

$$\|c_{-j}^{(k)}\| \in V_D \iff \begin{cases} \sigma \text{ tem períodos iguais aos de uma diferen} \\ \text{cial de 1}^a \text{ espécie.} \end{cases}$$

Por outro lado, como as diferenciais $\omega_k^{(j)}$ são normalizadas, isto é, têm os A-períodos todos nulos, σ também os tem; e uma diferencial de 1^a espécie que tenha os mesmos períodos que σ será idênticamente nula: $\varphi \equiv 0$. Mas então também os B-períodos de σ são nulos; ora, se $B_{k,l}^{(j)}$ indica o período sobre b_l ($l = 1, \dots, p$) de $\omega_k^{(j)}$ mos

$$\int_{b_l} \sigma = \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} B_{k,l}^{(j)}$$

das considerações precedentes segue

$$\|c_{-j}^{(k)}\| \in V_D \implies \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} B_{k,l}^{(j)} = 0 \quad (l = 1, \dots, p).$$

Reciprocamente, se

$$0.3) \quad \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} B_{k,l}^{(j)} = 0 \quad l = 1, \dots, p$$

diferencial σ dada por (10.2) tem todos os períodos nulos, logo é exata: $\sigma = df$ e $f \in L(-D)$ logo $\|c_{-j}^{(k)}\| \in V_D$ e temos

$$\|c_{-j}^{(k)}\| \in V_D \iff \sum_{k=1}^m \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^{(k)} B_{k,l}^{(j)} = 0 \quad l = 1, \dots, p.$$

Em (10.3) temos p equações em $\sum_{k=1}^m n_k = d(D)$ incógnitas $c_{-j}^{(k)}$ logo, como limitação imediata temos $\dim V_D \geq d(D) - p$ e

$$(10.4) \quad r(-D) \geq j(D) - p + 1$$

que é chamada desigualdade de Riemann. (Com esta desigualdade podemos p.ex. provar a existência de funções meromorfas não constantes: se tomarmos $p+1$ pontos e $D = P_1 \dots P_{p+1}$, $r(-D)$ será a dimensão do espaço das funções com polo de ordem ≤ 1 em P_j , $j=1, \dots, p+1$ e de (10.4) vem $r(-D) \geq 2$, logo maior do que a dimensão 1 do espaço das constantes).

Consideremos agora a matriz do sistema (10.3):

$$\|B_{k,l}^{(j)}\| = \begin{vmatrix} B_{1,1}^{(2)} & B_{1,1}^{(3)} & \dots & B_{1,1}^{(n_k+1)} & B_{2,1}^{(2)} & B_{2,1}^{(3)} & \dots & B_{2,1}^{(n_k+1)} & \dots \\ B_{1,2}^{(2)} & B_{1,2}^{(3)} & & B_{1,2}^{(n_k+1)} & B_{2,2}^{(2)} & B_{2,2}^{(3)} & \dots & B_{2,2}^{(n_k+1)} & \dots \\ \dots & \dots \\ B_{1,p}^{(2)} & B_{1,p}^{(3)} & \dots & B_{1,p}^{(n_k+1)} & B_{2,p}^{(2)} & B_{2,p}^{(3)} & \dots & B_{2,p}^{(n_k+1)} & \dots \end{vmatrix}$$

Se ρ é a característica desta matriz existem exatamente $d(D) - \rho$ soluções linearmente independentes de (10.3) e

$$(10.5) \quad r(-D) = d(D) - \rho + 1.$$

Tomemos uma base canônica $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ das diferenciais de 1ª espécie. Seja

$$\varphi_l = \left(\alpha_{l,0}^{(k)} + \alpha_{l,1}^{(k)} z + \dots \right) dz$$

o desenvolvimento de φ_l em P_k . De (9.8) vem

$$B_{k,l}^{(j)} = 2\pi i \frac{\alpha_{l,1}^{(k)}}{j-1}$$

e a matriz

$$\left\| \frac{\alpha_{l,1}^{(k)}}{j-1} \right\| = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^p \|B_{k,l}^{(j)}\|$$

é também uma matriz de característica ρ , logo existem $p-\rho$ vetores (e_1, \dots, e_p) linearmente independentes tais que

$$(10.6) \quad \sum_{\ell=1}^p e_{\ell} \alpha_{\ell, j}^{(k)} = 0 \quad \begin{matrix} j = 2, \dots, n_k + 1 \\ k = 1, \dots, m. \end{matrix}$$

mas existe uma correspondência biunívoca entre os vetores (e_1, \dots, e_p) satisfazendo (10.6) e as diferenciais de 1ª espécie

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^p e_{\ell} \varphi_{\ell}$$

tais que

$$i(\varphi) \geq D.$$

o fato, (10.6) acarreta que φ tem em F_k um zero de ordem $\geq n_k$ ($k = 1, \dots, m$), e reciprocamente, esta condição acarreta (10.6).

Em outras palavras, o número de diferenciais linearmente independentes com divisor $\geq D$ é

$$i(D) = p - \rho$$

onde, por (10.5),

$$r(-D) = d(D) + i(D) - p + 1$$

que demonstra o teorema no caso de D ser um divisor positivo.

Tiremos já uma consequência deste primeiro caso do teorema de Serre-Roch.

Vimos que o grau total do divisor associado a uma diferencial é o mesmo qualquer que seja ω . Provaremos agora que

$$(10.7) \quad d((\omega)) = 2p - 2.$$

Se $p = 0$, isto é, no caso da esfera, é imediato. De fato a aplicação

$$\lambda : S \longrightarrow E$$

recobrimento de uma fôlha, tem um zero e um polo, ambos de 1^a ordem, logo $d\lambda$ não tem zeros e tem um polo de 2^a ordem:

$$d((d\lambda)) = -2.$$

Suponhamos então $p > 0$, e seja $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ uma base das diferenciais de 1^a espécie. Como estas diferenciais não têm polos,

$$i(\varphi_1) > 0$$

e pelo caso demonstrado,

$$(10.8) \quad r(-(\varphi_1)) = i((\varphi_1)) + d((\varphi_1)) + 1 - p.$$

Ora, se $\omega \in \Omega((\varphi_1))$, ω/φ_1 é uma função meromorfa sem polos, logo

$$\omega = c\varphi_1$$

com c constante, isto é

$$i((\varphi_1)) = 1$$

Provaremos agora que

$$r(-(\varphi_1)) = p.$$

Para isto, mostraremos que

$$(10.9) \quad \left\{ \frac{\varphi_1}{\varphi_1}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_p}{\varphi_1} \right\}$$

formam uma base de $L(-(\varphi_1))$. De fato, estas funções pertencem a $L(-(\varphi_1))$ e são linearmente independentes pois as φ_i formam uma base das diferenciais holomorfas. Por outro lado, se $f \in L(-(\varphi_1))$, $f\varphi_1$ é

diferencial holomorfa logo

$$f\varphi_1 = \sum c_i \varphi_i$$

$$f = \sum c_i \frac{\varphi_i}{\varphi_1}$$

então está provado que $r(-(\varphi_1)) = p$ e de (10.8) segue

$$d((\varphi_1)) = 2p - 2.$$

b) Caso de divisor qualquer.

Seja agora D um divisor qualquer. Valem as seguintes relações com ω uma diferencial arbitrária:

10.10)
$$i(D) = r(D - (\omega)) \quad (\text{proposição 45})$$

$$d(-D) = -d(D)$$

$$d(D - (\omega)) = d(D) - d((\omega))$$

as duas últimas sendo imediatas. Então

10.11)
$$r(-D) = d(D) + i(D) + 1 - p \iff$$

$$\iff r(-D) + \frac{1}{2} d(-D) = r(D - (\omega)) + \frac{1}{2} d(D - (\omega))$$

pois por (10.10) e (10.7)

$$r(D - (\omega)) + \frac{1}{2} d(D - (\omega)) = i(D) + \frac{1}{2} d(D) + p - 1.$$

Agora, a segunda relação em (10.11) é simétrica em D e $(\omega) - D$

Logo

10.11)
$$\iff r(-((\omega) - D)) = d((\omega) - D) + i((\omega) - D) + 1 - p.$$

Isto é, se o teorema vale para D vale para $(\omega) - D$ e reciprocamente, e o teorema fica demonstrado para D tal que

$$(\omega) - D \sim D_1 > 0$$

pelo caso a).

Resta então o caso em que

$$(10.12) \quad \left. \begin{array}{l} D \sim D_1 \\ (\omega) - D \sim D_1 \end{array} \right\} \forall D_1 > 0, \forall \omega$$

Provaremos que (10.12) acarreta em primeiro lugar

$$(10.13) \quad i(D) = r(-D) = 0.$$

De fato

$$r(-D) \neq 0 \implies D \sim D_1 > 0$$

pois se existe $f \in L(-D)$, então $D_1 = (f) + D$ é positivo e equivalente a D .

Também se $i(D) \neq 0$ de $i(D) = r(D - (\omega))$ segue análogamente

$$(\omega) - D \sim D_2 > 0$$

em contradição com (10.12).

Portanto vale (10.13) e a correspondente

$$(10.14) \quad i((\omega) - D) = r(D - (\omega)) = 0.$$

Para demonstrar o teorema de Riemann-Roch no caso (10.12) devemos mostrar que então

$$d(D) = p - 1.$$

Primeiro mostremos que

$$r(-D) = 0 \implies d(D) < p.$$

De fato, se

$$D = P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r} Q_1^{-n_1} \dots Q_s^{-n_s} \quad (m_j, n_j > 0)$$

ponhamos

$$D^+ = P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r} \geq 0 \quad D^- = Q_1^{n_1} \dots Q_s^{n_s} \geq 0$$

onde $D = D^+ - D^-$. Temos $d(D) = d(D^+) - d(D^-)$ e pela desigualdade de Riemann

$$(10.15) \quad r(-D^+) \geq d(D^+) - p + 1 = d(D) + d(D^-) - p + 1.$$

Suponhamos $d(D) \geq p$. De (10.15) vem

$$r(-D^+) \geq d(D^-) + 1 = n_1 + \dots + n_s + 1.$$

As funções $f \in L(D^+ - D^-)$ devem ser funções holomorfas em Q_i ($i = 1, \dots, s$) cujo desenvolvimento em Q_i deve ter todos os n_i primeiros termos nulos. Por outro lado se $g \in L(-D^+)$, g é regular nos pontos Q_1, \dots, Q_s que não pertencem a D^+ . Em $L(-D^+)$ existem pela desigualdade de acima, pelo menos $d(D^-) + 1$ vetores linearmente independentes, e podemos impôr $d(D^-)$ condições; podemos impôr que em Q_i os n_i primeiros termos do desenvolvimento se anulem: obtemos assim uma função que pertence a $L(D^- - D^+) = L(-D)$ o que é absurdo pois $r(-D) = 0$.

Então $d(D) < p$. Como também $r(D - (\omega)) = 0$, isto implica pelo mesmo motivo

$$-d((\omega) - D) < p$$

e por (10.7),

$$2p - 2 - d(D) < p$$

$$d(D) > p - 2$$

então

$$d(D) = p - 1$$

o que completa a demonstração.

3. Consequências do teorema de Riemann-Roch.

1) $d(D) < 0 \iff i(D) = -d(D) + p - 1.$

De fato, se $d(D) < 0$, $r(-D) = 0$ senão existiria $f \in L(-D)$, função com mais zeros do que polos o que contradiz o teorema 25.

Para um divisor de grau negativo o teorema de Riemann-Roch determina pois efetivamente a dimensão do espaço de diferenciais com divisor $\geq D$.

2) $d(D) > 2p-2 \iff r(-D) = d(D) + 1 - p.$

De fato, $i(D) = r(D-(\omega)) = r(-((\omega) - D))$. Mas $d((\omega) - D) = d((\omega)) - d(D) < 0$ logo por 1), $r(D-(\omega)) = i(D) = 0$.

Também aqui o teorema dá a dimensão de um espaço, o espaço das funções cujo divisor é $\geq -D$.

3) Uma diferencial holomorfa φ tem $2p-2$ zeros.

É imediato pois $d((\varphi)) = 2p - 2$ e φ não tem polos.

4) Não existe P tal que todas as diferenciais de 1ª espécie se anulem em P .

De fato, no caso da esfera não existem diferenciais de 1ª espécie. Se $p > 0$, suponhamos $\varphi_1(P) = 0$ para as diferenciais de uma base $i = 1, \dots, p$. Tomando $D = P$, $\Omega(D)$ será todo o espaço das diferenciais holomorfas, logo $i(D) = p$ e $r(-D) = 2$ e como $r(0) = 1$ existiria função com polo simples apenas em P o que é absurdo. Com efeito, tal função teria também um só zero, e ainda, tomaria cada valor uma vez. S seria então recobrimento da esfera com uma fôlha, o que contradiz $p > 0$.

$$5) \quad D > 0 \implies \begin{cases} r(-D) < d(D) \text{ se } p > 0 \\ r(-D) = d(D) + 1 \text{ se } p = 0. \end{cases}$$

De fato, se $p > 0$, como não existe ponto em que se anulem tôdas diferenciais de 1ª espécie, $D > 0$ implica $i(D) < p$ logo $r(-D) < d(D) + 1$.

Se $p = 0$ então $i(D) = 0$ logo $r(-D) = d(D) + 1$.

4. Cálculo do genus de uma superfície de Riemann compacta.

Teorema 27. Seja S_p uma superfície de Riemann compacta de genus p e seja a aplicação

$$z: S_p \longrightarrow E$$

recobrimento ramificado com n fôlhas. Sejam P_1, \dots, P_s os pontos de ramificação, r_i o número de fôlhas em P_i (isto é, P_i tem ordem de ramificação $r_i - 1$); então

$$0.16) \quad \sum_{i=1}^s (r_i - 1) = 2(n + p - 1).$$

Demonstração. Classifiquemos os P_i em dois tipos:

a) pontos indicados por P_j^I , de ordem $r_j^I - 1$, tais que $z(P_j^I) \neq p_\infty$ de existe um p.u. tal que: $t^{r_j^I} = z - z(P_j^I)$;

b) pontos indicados por P_k^{II} , de ordem $r_k^{II} - 1$, tais que $z(P_k^{II}) = p_\infty$ em p.u. t tal que $t^{r_k^{II}} = 1/z$.

Em P_j^I , dz tem um zero de ordem $r_j^I - 1$, em P_k^{II} tem um polo de ordem $r_k^{II} + 1$. O grau do divisor (dz) é $2p - 2$ logo

$$0.17) \quad \sum_j (r_j^I - 1) - \sum_k (r_k^{II} + 1) = 2p - 2.$$

as o recobrimento tem n fôlhas portanto

$$\sum_k r_k'' = n$$

de (10.17) vem

$$\sum_j (r_j' - 1) + \sum_k (r_k'' - 1) = 2n + 2p - 2$$

$$\sum_i (r_i - 1) = 2(n + p - 1)$$

como queríamos demonstrar.

O teorema 27 pode também ser demonstrado de modo puramente topológico.

5. Pontos de Weierstrass.

Dado $P \in S$, façamos

$$D = p^{2p-1} \cdot P$$

por 2) vem

$$r(-D) = p$$

Isto é, em $L(-D)$ existem p funções linearmente independentes. Como $(0) \subset L(-D)$, podemos tomar uma constante e mais $p-1$ funções com polos em P (e só em P) formando uma base de $L(-D)$.

Podemos tomar essas funções com ordens de polos diferentes. De fato, sejam f_1, \dots, f_p essas funções, suponhamos que f_1 tenha ordem de polo máxima μ_1 ; então se f_2 p.ex. tem polo de ordem igual, existe uma constante c_2 tal que $f_2 - c_2 f_1 = f_2'$ tenha polo de ordem menor. Assim podemos sempre que houver duas funções com polo de mesma ordem, reduzir a ordem de uma delas, e esse processo permite pois determinar as funções f_1, \dots, f_p tais que, se μ_i é a ordem do polo de f_i em P se

tenha

$$2p-1 \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_p = 0$$

f_1, \dots, f_p formando uma base de $L(-D)$. Toda função $f \in L(-D)$, isto é, toda função com polo em P , de ordem $\leq 2p-1$, e regular no resto, é combinação linear destas funções, logo tem polo de uma destas ordens μ_i . Existem então, entre 0 e $2p-1$, outros p números, ρ_1, \dots, ρ_p

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_p < 2p-1$$

que não são ordem de polo em P para nenhuma função com polo só em P . Em geral, ρ_1, \dots, ρ_p são os números $1, 2, \dots, p$. Os pontos em que isto não acontece chamam-se pontos de Weierstrass. Isto é,

Definição 68. Chama-se ponto de Weierstrass de uma superfície de Riemann de genus p a um ponto P tal que exista uma função com polo em P de ordem menor ou igual a p , e sem outros polos.

Numa superfície de genus 1 não existem pontos de Weierstrass. Se $p \geq 2$, existem sempre pontos de Weierstrass e são em número finito. Mais precisamente (cf. Behnke u. Sommer "theorie der Analytischen Funktionen Einer Komplexen Veränderlichen", pg. 549 e seg.) se n indica o número de pontos de Weierstrass, vale

(10.18) $2p+2 \leq n \leq (p-1)p(p+1)$

e mais

(10.19) $n = 2p + 2 \iff S \text{ é hiperelítica.}$

Algumas observações de interesse podem ser feitas aqui:

- a) Numa superfície hiperelítica os pontos de ramificação são os pontos de Weierstrass.

Uma superfície hiperelítica dá um recobrimento de duas fôlhas da esfera; por (10.16) o genus é p se existem $2p+2$ pontos de ramificação. Ela pode ser realizada tomando dois exemplares do plano complexo; sôbre cada um tomamos os pontos z_1, \dots, z_{2p+2} , fazemos talhos unindo z_1 a z_2 , z_3 a z_4 etc. e unimos os planos por êsses talhos de modo que se cruzem.

Os pontos de ramificação sendo duplos, num ponto z_i ($i=1, \dots, 2p+2$) temos um parâmetro uniformizador dado por $t^2 = z - z_i$, logo a função $\frac{1}{z-z_i}$ tem um polo duplo em z_i . Como $2 \leq p$ se a superfície é hiperelítica, o ponto z_i é de Weierstrass ($i = 1, \dots, 2p$).

Com potências de $\frac{1}{z-z_i}$ obtemos funções com polo de ordem par qualquer. As lacunas p_i são os números $1, 3, \dots, 2p-1$.

b) Tôda superfície de Riemann de genus $p > 1$ pode ser dada como recobrimento da esfera com no máximo p fôlhas. Basta tomar uma função com polo de ordem $\leq p$ num ponto de Weierstrass, sem outros polos.

c) Tem-se um exemplo de superfície não hiperelítica de genus $p \geq 3$ tomando um recobrimento da esfera com três fôlhas e $p+2$ pontos de ramificação z_1, \dots, z_{p+2} de ordem 2. Por (10.16) a superfície tem de fato genus p . Nos pontos de ramificação z_i temos um p.u. t dado por $z - z_i = t^2$, logo $\frac{1}{z-z_i}$ tem polo de ordem $3 \leq p$ e z_i é ponto de Weierstrass. As lacunas não são $1, 3, \dots$, logo a superfície não é hiperelítica; existem outros pontos de Weierstrass.

6. Teorema de Abel

O problema que consideramos agora é o de saber quando, dado sô-

bre S um divisor

$$D = N_1^{m_1} \dots N_r^{m_r} P_1^{-n_1} \dots P_s^{-n_s} \quad (m_i, n_j > 0)$$

existe uma função cujo divisor é exatamente D, em outras palavras, dados sobre S pontos $N_1, \dots, N_r, P_1, \dots, P_s$ saber e se existe uma função com zeros nos pontos N_i ($i = 1, \dots, r$), polos nos pontos P_j ($j = 1, \dots, s$), sendo as ordens dos zeros e polos também prefixadas, e sem outros zeros ou polos.

Sabemos que uma condição necessária é que

$$\sum m_i - \sum n_j = 0$$

Sobre a esfera ela é também suficiente, mas não numa superfície de genus $p > 0$. Vale então o teorema de Abel, que nos contentamos em enunciar sem demonstração.

Teorema de Abel. Dados sobre uma superfície de Riemann compacta

S de genus p os pontos $N_1, \dots, N_r, P_1, \dots, P_s$ e os números positivos $m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s$, a condição necessária e suficiente para que exista uma função f com zero em N_i de ordem m_i ($i = 1, \dots, r$), polo em P_j de ordem n_j ($j = 1, \dots, s$) é que

1) $\sum m_i = \sum n_j.$

2) Existam caminhos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ convenientes (onde $n = \sum m_i =$

$\sum n_j$) com origem num ponto N_i , extremidade num P_j , de modo que

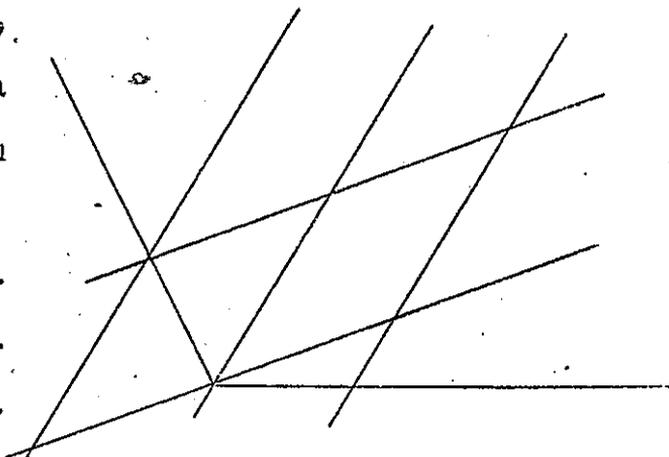
qualquer que seja a diferencial holomorfa φ sobre S se tenha

$$\int_{\gamma_1} \varphi + \dots + \int_{\gamma_n} \varphi = 0$$

7. Classificação dos toros.

Se V_1 é um toro, a menos de um fator constante existe uma só diferencial holomorfa sobre V_1 . Seja então φ essa diferencial A e B os períodos de φ . Os valores de uma primitiva de φ num ponto dado correspondendo à integração de φ sobre caminhos diversos com extremidade nesse ponto diferem entre si por expressões da forma $mA + nB$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Como A/B não pode ser real pela 1ª relação de Riemann, esses valores formam no plano complexo uma rede em que a malha é um paralelogramo.

Dois pontos diferentes, P e Q, do toro V_1 não podem corresponder a um mesmo ponto da rede: de fato, em tal caso, a integral de φ ao longo de um certo caminho entre P e Q seria nula, e pelo teorema de Abel existiria uma função f definida sobre V_1 com um polo simples em P e um zero simples em Q, sem outros zeros ou polos; essa função f considerada como aplicação



$$f: V_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

seria um recobrimento de uma folha, isto é, um homeomorfismo analítico do toro (de genus 1) sobre a esfera (de genus 0) o que é absurdo.

A pontos distintos do toro correspondem portanto pontos distintos do plano por essa aplicação. Identificando no plano pontos z_1, z_2 tais que

$$z_2 = z_1 + mA + nB \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

obtemos uma superfície de Riemann compacta \bar{V}_1 , com uma aplicação

$$g: V_1 \longrightarrow \bar{V}_1$$

em que a imagem de V_1 devendo ser aberta e fechada em \bar{V}_1 coincide com \bar{V}_1 . V_1 e \bar{V}_1 são pois conformemente equivalentes e V_1 pode ser representado por \bar{V}_1 .

Dois toros V_1 e V_2 são conformemente equivalentes se e somente se os seus representantes \bar{V}_1 e \bar{V}_2 o forem. Ora a condição para isto é que \bar{V}_1 e \bar{V}_2 sejam semelhantes, isto é, que se A, B são os períodos de \bar{V}_1 , A', B' os de \bar{V}_2 , se tenha

$$A' = \alpha A + \beta B$$

$$B' = \gamma A + \delta B$$

o que equivale, pondo $A/B = \tau, A'/B' = \tau'$ a

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad \text{com} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1.$$

De fato, se \bar{V}_1 e \bar{V}_2 são semelhantes, são evidentemente conformemente equivalentes. Inversamente, suponhamos que exista um homeomorfismo analítico

$$\psi: \bar{V}_1 \longrightarrow \bar{V}_2$$

Consideremos dois exemplares do plano complexo, π e π' , tomemos em π a rede correspondente a A, B e em π' a rede correspondente a A', B' . Tomemos uma malha qualquer em π e façamos corresponder uma malha qualquer em π' : o homeomorfismo ψ nos dá uma correspondência entre os pontos de uma e os de outra. Tomando agora um ponto z qualquer em π , existe um z_0 na malha fixada e um só se tomarmos a malha só con

dois segmentos consecutivos do contôrno, tal que

$$z = z_0 + mA + nB \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

A z_0 corresponde z'_0 no plano π' pela correspondência acima, e então fazemos corresponder a z o ponto z' e π' dado por

$$z' = z'_0 + mA' + nB'.$$

Obtemos uma aplicação Ψ de π em π' que tem inverso pois Ψ o tem e que é evidentemente uma homeomorfismo analítico que leva uma rêde na outra, logo tem a forma

$$z' = az + b$$

e \bar{V}_1 e \bar{V}_2 são semelhantes.

Podemos então dizer que a cada τ complexo tal que $\Im \tau \neq 0$ corresponde um toro V com $A/B = \tau$; se

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

o toro correspondente a τ' é conformemente equivalente a V e reciprocamente.

CAPÍTULO XI

CORPO DAS FUNÇÕES MEROMORFAS SOBRE UMA
SUPERFÍCIE DE RIEMANN COMPACTA

1. No capítulo V demonstramos que se S é uma superfície de Riemann compacta, z uma função meromorfa não constante em S e

$$z: S \rightarrow E$$

um recobrimento ramificado com n fôlhas, se w é uma outra função meromorfa qualquer, então existe um polinômio irreduzível $Q(w, z)$, único a menos de um fator constante e tal que

$$Q(w(P), z(P)) = 0 \quad \forall P \in S$$

(teorema 9). No corpo da demonstração vimos ainda que o grau de Q em w é no máximo igual a n .

Podemos precisar ainda mais este resultado, observando que se existir $z_0 \in E$ tal que se P_1, \dots, P_n são os pontos que se projetam em z_0 , a função w toma valores diferentes nesses pontos, então o grau do polinômio irreduzível Q é exatamente n . É imediato pois então

$$Q(w, z_0) = 0$$

tem n raízes distintas em w . Provaremos agora

Teorema 28. Dado $z_0 \in S$ tal que existem n pontos distintos P_1, \dots, P_n que se projetam em z_0 por z , então existe uma função w que assume valores distintos em P_1, \dots, P_n .

Demonstração. Para cada P_i ($i = 1, \dots, n$) existe uma diferencial

v_i que tem polo em P_i , não tem outros polos, e em P_i se comporta como $dz/(z-z_0)^2$. Então

$$w = (z-z_0)^2 \sum c_i \frac{v_i}{dz}$$

toma o valor c_i em P_i , e basta tomar os c_i todos distintos.

O par de funções z, w se diz então par separante.

2. Corpo das funções meromorfas.

Se indicarmos por K o corpo de tôdas as funções meromorfas sôbre uma superfície de Riemann compacta S , por z a projeção $z: S \rightarrow E$, recobrimento ramificado com n fôlhas, temos evidentemente

$$C(z) \subset K$$

e o teorema 9 já nos mostrava que esta extensão é finita, isto é, que K é um corpo de funções algébricas numa variável e que o grau da extensão é no máximo igual a n , pois todo elemento de K satisfaz a uma equação com coeficientes em $C(z)$ de grau $\leq n$. Provamos agora que existe em K um elemento w tal que o par z, w seja separante, e êste elemento w satisfaz a uma equação de grau exatamente n . Temos então

Teorema 29. O corpo K das funções meromorfas sôbre S é uma extensão algébrica de grau n de $C(z)$; se z, w é um par separante, w gera K sôbre $C(z)$.

Isto é,

$$K = C(z)(w), \quad [K:C(z)] = n.$$

Tôda $\varphi \in K$, isto é, tôda função meromorfa sôbre S possui uma representação da forma

$$\varphi = R_1(z)w^{n-1} + R_2(z)w^{n-2} + \dots + R_n(z)$$

sendo R_1, \dots, R_n funções racionais de z .

3. Vimos que as superfícies de Riemann definidas por meio de uma equação algébrica são sempre compactas. Provaremos agora que reciprocamente toda superfície compacta é conformemente equivalente a uma superfície definida por uma certa equação. Para isto, demonstremos ainda uma propriedade dos pares separantes.

Sejam P' e P'' pontos distintos de S que pela projeção $z: S \rightarrow E$ vão num mesmo ponto z_1 . Seja $r' - 1$ a ordem de ramificação de P' , $r'' - 1$ a de P'' . Então, se w é uma função meromorfa em S podemos representá-la nas vizinhanças de P' por

$$w = f_1 \left[(z - z_1)^{1/r'} \right] = \varphi_1(z)$$

nas vizinhanças de P'' por

$$w = f_2 \left[(z - z_1)^{1/r''} \right] = \varphi_2(z)$$

Proposição 36. Se z, w é um par separante, as funções de z definidas acima são distintas.

Demonstração.

Lema. Se num ponto z_1 se projetam n pontos distintos Q_1, \dots, Q_n e se z, w é um par separante, então os elementos de função definidos por w em Q_1, \dots, Q_n são distintos.

De fato, existe z_0 tal que nos n pontos distintos P_1, \dots, P_n que projetam em z_0 , w tem n valores distintos (logo determina n germes

de função distintos). Unamos z_1 a z_0 por um caminho onde não se ptem os pontos de ramificação, e levantemos a caminhos indo dos Q_1 P_1 . Se por exemplo em Q_1 e Q_2 tivéssemos o mesmo germe de função, prolongamentos a P_1 e a P_2 não poderiam ser distintos, senão o prolongamento de z_1 a z_0 não seria único.

Esse lema é a demonstração da proposição nos pontos sôbre os qu se projetam n pontos distintos.

Resta pois considerar o caso em que tenhamos nos pontos P' e P'' ramificação projetando-se sôbre z_1 .

Aqui o problema apresenta uma dificuldade técnica que é a de ceder as funções singulares (multivalentes) $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$.

Se $r' = r''$, é mais simples pois podemos tomar o mesmo parâmetro a) e em b). Se então $\varphi_1 = \varphi_2$ poderíamos sempre achar numa vizinhan arbitrariamente pequena de z_1 um ponto z sôbre o qual se projetasse n pontos distintos, dos quais r' estariam numa vizinhança de P' onde vale a), outros tantos numa vizinhança de P'' onde vale b) e haveria forçosamente um ponto vizinho a P' e um outro vizinho a P'' , ambos p jetando-se em z e com mesmo germe de função definido por w , o que c tradiz o lema.

Se $r' \neq r''$ é preciso examinar melhor a definição de elemento função num ponto singular. Verifica-se ainda que de qualquer forma que se defina, a proposição é verdadeira.

(Springer dá uma definição diferente de superfície de Riemann e que define o elemento de função singular, e faz a análise do elemen com as identificações necessárias: ver pag. 69 a 71).

Dada uma superfície compacta S , podemos determinar um par separante z, w ao qual corresponde um polinômio irreduzível $Q(w, z)$ tal que

$$Q(w(P), z(P)) = 0 \quad \forall P \in S.$$

Por outro lado, pelo teorema 10 do cap. V a equação

$$Q(w, z) = 0$$

define uma superfície de Riemann compacta S_1 :

$$S \longrightarrow (z, w) \longrightarrow Q(w, z) \longrightarrow S_1.$$

Teorema 30. S é conformemente equivalente a S_1 .

Demonstração. A $P \in S$ associamos o seguinte par: a projeção $z = z(P)$ e o germe de função analítica definido por w nesse ponto:

$$P \longrightarrow (z, f).$$

Esta é uma aplicação de S em S_1 que é biunívoca. De fato, se $(P_1) \neq z(P_2)$ os primeiros elementos dos pares correspondentes a P_1 e P_2 são diferentes. Se $z(P_1) = z(P_2)$, os germes de função são distintos pela proposição 36.

Ainda mais, um parâmetro uniformizador $[z - z(P)]^{1/r}$ se transforma num parâmetro uniformizador em S_1 . Temos pois uma aplicação biunívoca conforme de S em S_1 que é sobre pois a imagem de S é aberta e compacta logo coincide com S_1 .

As superfícies de Riemann compactas definidas abstratamente podem pois sempre ser definidas por meio de uma equação algébrica.

4. Superfícies bi-racionalmente equivalentes.

Definição 69. Seja S uma superfície de Riemann compacta,

$$(11.1) \quad F(z,w) = 0$$

a equação irredutível de S . Seja S_1 uma outra superfície de Riemann compacta,

$$(11.2) \quad G(z,w) = 0$$

sua equação irredutível. Se existir uma transformação racional

$$(11.3) \quad \tilde{z} = \tilde{z}(z,w), \quad \tilde{w} = \tilde{w}(z,w)$$

cuja inversa

$$(11.4) \quad z = z(\tilde{z},\tilde{w}), \quad w = w(\tilde{z},\tilde{w})$$

seja também racional (transformação bi-racional) e tal que

$$F(z,w) = G(\tilde{z}(z,w), \tilde{w}(z,w))$$

diremos que S e S_1 são bi-racionalmente equivalentes.

Os corpos de funções meromorfas das duas superfícies são evidentemente isomorfos - - -

$$C(z,w) \approx C(\tilde{z},\tilde{w}).$$

Teorema 31. Duas superfícies de Riemann são conformemente e equivalentes quando e somente quando são bi-racionalmente equivalentes.

Demonstração. Suponhamos S e S_1 conformemente equivalentes, seja

$$\phi : S \rightarrow S_1$$

um homeomorfismo analítico entre S e S_1 . Seja z,w um par separante

$$z^* = \phi \circ z_1$$

$$w^* = \phi \circ w_1$$

par z^* , w^* será também um par separante, por ser ϕ um homeomorfismo, logo a transformação

$$z^* = R_1(z, w) \quad w^* = R_2(z, w)$$

bi-racional, pois z^* , w^* geram também o corpo de funções meromorfas S . Mas, se

$$F_1(z_1, w_1) = 0$$

a equação de S_1 , a equação

$$F(z, w) = F_1(R_1(z, w), R_2(z, w)) = 0$$

a equação de S , logo S e S_1 são bi-racionalmente equivalentes.

A recíproca demonstra-se sem dificuldade.

Teoria da uniformização.1. Introdução. Enunciado do teorema e principais consequências.

O primeiro objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema da uniformização:

Teorema 1. Toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente ou à esfera de Riemann S , ou ao plano complexo, ou ao interior do círculo unitário.

Este teorema resolve o problema da uniformização das funções algébricas: "Dada uma equação algébrica $P(x,y) = 0$, determinar uma representação paramétrica, por meio de funções $x = x(z)$ e $y = y(z)$ definidas e meromorfas em uma região G , do plano complexo, tais que $P(x_0, y_0) = 0$, se, e somente se existir $z_0 \in G$ onde se tenha $x_0 = x(z_0)$ e $y_0 = y(z_0)$ ". Mostremos como se resolve este problema, admitindo o teorema citado acima.

Seja F a superfície de Riemann de $P(x,y) = 0$, e \tilde{F} o seu recobrimento universal. Em F estão definidas duas funções meromorfas $x(p)$ e $y(p)$, tais que se $P(x_0, y_0) = 0$, existe $p_0 \in F$, para a qual $x_0 = x(p_0)$, $y_0 = y(p_0)$. Mas então existem em \tilde{F} as funções $\tilde{x}(\tilde{p})$ e $\tilde{y}(\tilde{p})$ tais que se $p = \varphi(\tilde{p})$ designa o recobrimento, temos $\tilde{x}(\tilde{p}) = x(p)$ e $\tilde{y}(\tilde{p}) = y(p)$. Se o teorema é verdadeiro, sendo τ homeomorfismo analítico $G \rightarrow \tilde{F}$, pondo $X = \tilde{x} \circ \tau$ e $Y = \tilde{y} \circ \tau$, obtemos duas funções meromorfas $X(z)$ e $Y(z)$ tais que quando z descreve G , o ponto $(X(z), Y(z))$ percorre todas as soluções da equação $P(X, Y) = 0$.

Do teorema da uniformização também se pode deduzir o teorema de Riemann sobre a representação conforme (Riemann mapping theorem) das regiões simplesmente conexas: "Toda região R do plano, simplesmente conexa, que não é o plano todo, é analiticamente equivalente ao interior do círculo unitário".

De fato, R não pode ser equivalente à esfera, pois R não é compacta. Logo, se provarmos que R não pode ser equivalente ao

plano complexo, o teorema de Riemann fica demonstrado. Como R não é o plano todo, existem pelo menos dois pontos do contorno, a e b , e então, a função

$$w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

escolhida uma determinação inicial, pode ser prolongada a toda a região R , e pelo teorema de monodromia transforma esta, biunivocamente, em outra região R_1 . Se α é ponto interno de R_1 , é claro que $-\alpha$ é ponto externo, e então a função $t = 1/(w+\alpha)$ transforma R_1 em uma região limitada R_2 do plano t . Se R fosse equivalente ao plano complexo, existiria uma função analítica nesse plano, com valores em R_2 , a qual seria uma função inteira não constante e limitada, o que é absurdo. Conclue-se que R é equivalente ao círculo.

2. Representação de uma superfície de Riemann simplesmente conexa na esfera.

Para demonstrar o teorema da uniformização, vamos construir sobre a superfície de Riemann simplesmente conexa F , uma função holomorfa $\zeta = U + iV$, que realiza uma representação conforme biunívoca entre F e uma região da esfera, que pode ser ou a esfera inteira, ou a esfera menos um ponto, ou a esfera menos um arco de círculo. Com uma ulterior transformação, obteremos a representação a que se refere o teorema.

Tomemos um ponto $0 \in F$; seja z o parâmetro uniformizador em 0 . Pelo princípio de Dirichlet, existe em F uma função harmônica U , que se comporta como $\operatorname{Re}(1/z)$ numa vizinhança de 0 , é regular em $F - \{0\}$ e goza das seguintes propriedades:

1) Qualquer que seja o "círculo K , de centro O " (imagem do círculo $|z| < k$), a integral de Dirichlet estendida a $F-K$ é finita.

2) Se W é uma função continuamente diferenciável sobre F , nula em uma vizinhança de 0 e com integral de Dirichlet finita, então $D(U,W) = 0$.

Da existência dessa função, segue-se que, sendo $z = x + iy$ o parâmetro uniformizador num ponto qualquer $p \neq 0$ de F , a diferencial

$$\omega_p = \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} \right) dz$$

é exata e tem residuo 0 no ponto 0; logo, a sua integral τ é uma função uniforme em $F - \{0\}$, e tem em 0 um polo simples com residuo 1. Numa vizinhança de 0, temos, pois, $\tau = 1/z + \varphi$, sendo φ holomorfa. Note-se que pondo $\tau = U + iV$, a função V está determinada a menos de uma constante aditiva.

Vamos estudar as linhas de campo de U , isto é, os subconjuntos de F definidos por $V = V_0$, que denotaremos $F(V_0)$. Tal conjunto não é vazio, qualquer que seja o número real V_0 , pois sendo $1/\tau$ parâmetro uniformizador em 0, existe um homeomorfismo entre uma vizinhança K de 0 e um disco $|1/\tau| < a$ ($0 < a < 1/V_0$); nessa vizinhança, $F(V_0)$ se reduz a uma curva

$$\gamma: \quad x = \frac{U}{U^2 + V_0^2} \quad y = \frac{-V_0}{U^2 + V_0^2}$$

$$\frac{1}{U} \in \left(\frac{-a}{\sqrt{1-a^2V_0^2}}, \frac{a}{\sqrt{1-a^2V_0^2}} \right)$$

Lema 1: $F(V_0)$ separa F em duas regiões, R_1 e R_2 , onde $V > V_0$ e $V < V_0$, respectivamente.

Demonstração: De fato, sendo V contínua, os conjuntos R_1 e R_2 são abertos, e na sua fronteira só podemos ter $V = V_0$. Falta demonstrar que são conexos. Isto é verdade certamente para os conjuntos $R_1 \cap K$ e $R_2 \cap K$, que são as regiões em que a curva γ separa o disco K . Se um dos conjuntos, seja R_1 , tem duas componentes abertas disjuntas A e A' , uma delas, A por exemplo, não intercepta K . Mas neste caso, podemos, como vamos ver, construir uma função W , con

tinuamente diferenciável em F e nula em K , com $D(W) < \infty$ e $D(U, W) > 0$, o que contradiz a propriedade 2) da função U . Para simplificar, podemos supôr $V_0 = 0$. Tomemos duas funções reais definidas no campo real: $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, contínuas e continuamente diferenciáveis, tais que se tenha $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ limitadas em valor absoluto por um número $N > 0$ e tais ainda que para $x \neq 0$ se tenha $\varphi'(x)$ e $\psi(x) > 0$ (por exemplo, podemos tomar $\varphi(x) = \arctg x$ e $\psi(x) = x^2/(1+x^2)$). Seja ainda $\chi(p)$ a função característica de A (igual a 1 em A , a 0 fora de A). Ponhamos

$$W(p) = \varphi(U(p)) \cdot \psi(V(p)) \cdot \chi(p).$$

Esta função é continuamente diferenciável em F e nula em K . Usando as condições de Cauchy-Riemann para U e V , obtém-se para $p \in A$ e sendo $z = x + iy$ um parâmetro uniformizador em p ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = & \left\{ [\varphi'(U) \psi(V)]^2 + \right. \\ & \left. + [\varphi(U) \psi'(V)]^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right] \right\} \quad (I) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi'(U) \psi(V) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (II).$$

De (I), segue-se $D(W) < 2N^4 \cdot D_A(U) < \infty$ e de (II), segue-se que ao menos em uma vizinhança \mathcal{U} de P temos $D_{\mathcal{U}}(U, W) > 0$, e sendo $D(U, W) \geq D_{\mathcal{U}}(U, W)$, segue-se $D(U, W) > 0$, como queríamos demonstrar.

Lema 2. τ é parâmetro uniformizador em cada ponto $p \neq 0$ de F . (Note-se que em 0, um parâmetro uniformizador é $1/\tau$).

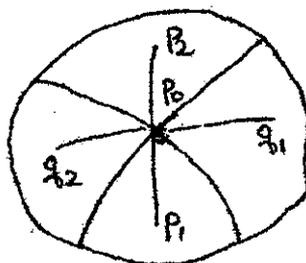
Basta demonstrar que em $F - \{0\}$ temos sempre $d\tau(p) \neq 0$, o que quer dizer que, localmente, τ é um homeomorfismo analítico entre uma vizinhança de p e um disco do plano. Com efeito, se em um ponto p_0 fosse $d\tau = 0$, então, sendo σ o parâmetro uniformizador

em p_0 , pondo $\tau_0 = \tau(p_0)$, teríamos

$$\tau - \tau_0 = a_r \sigma^r + a_{r+1} \sigma^{r+1} + \dots = \sigma^r (a_r + a_{r+1} \sigma + \dots)$$

com $r > 1$ e $a_r \neq 0$. Podemos supôr $r = 2$, o que não prejudicá a generalidade da demonstração. Uma vizinhança de p_0 , homeomorfa a $|\sigma| < a$, seria então separada pela curva $V = V_0$ em quatro regiões, com ponto de fronteira comum p_0 , e onde teríamos, alternadamente,

$V > V_0$ e $V < V_0$. Sejam p_1, q_1, p_2, q_2 pontos dessas quatro regiões consecutivas. Liguemo-los a p_0 e consideremos os arcos $\gamma_1 = p_1 p_0 p_2$ e $\gamma_2 = q_1 p_0 q_2$.



Excluído p_0 , em todo o arco γ_1 , temos $V > V_0$, e em todo o arco γ_2 , temos $V < V_0$. Ora, pelo que vimos acima, podemos ligar p_1 a p_2 sem sair da região onde $V < V_0$, assim como q_1 a q_2 , na região onde $V > V_0$. Completando essas curvas com os arcos γ_1 e γ_2 , teríamos duas curvas fechadas em F , cruzando-se num único ponto p_0 , o que é impossível, pois F é simplesmente conexa.

Dêste lema se deduz que para cada ponto $p \in F(V_0)$, existe uma vizinhança K , imagem de um disco $|\tau - \tau(p)| < a$, na qual $F(V_0)$ é homeomorfa ao intervalo aberto $|U - U(p)| < a$. Isto se exprime dizendo que $F(V_0)$ é uma curva local.

Definição: Chamaremos de curva aberta em F , à imagem homeomorfa do intervalo aberto $(0,1)$ em F .

Se considerarmos $F(V_0)$ como sub-espaco de F , pela observação feita acima, vemos que êste conjunto é localmente conexo; é também um conjunto fechado em F . Nosso objetivo é mostrar que êste conjunto é conexo, donde deduziremos que é ou uma curva fechada, ou uma curva aberta.

Lema 3: Qualquer curva aberta analítica que seja um conjunto fechado em F , separa F .

Demonstração - Seja L uma tal curva. Vamos provar que se

L não separa F , podemos obter um recobrimento de F por uma superfície de duas folhas (análoga à que foi construída para a função $w = \sqrt{z}$), o que está em contradição com a propriedade de F ser simplesmente conexa. Tomemos dois exemplares de F , F_1 e F_2 , cortados ao longo de L , e chamemos \tilde{F} à sua reunião, cujos pontos indicaremos com o índice correspondente ao exemplar a que pertence. Vamos definir uma base de vizinhanças em cada ponto de \tilde{F} . Seja $p \in F$ e $\mathcal{U}(p)$ uma vizinhança de p em F . Para $p \notin L$, podemos supor $\mathcal{U}(p) \cap L$ vazio, e então, para um ponto p_i ($i = 1, 2$), tomamos como vizinhança $\mathcal{U}(p_i) = \{q_i, q \in \mathcal{U}(p)\}$. Para $p \in L$, podemos tomar uma vizinhança $\mathcal{U}(p)$ bastante pequena, que seja decomposta por L (que nessa vizinhança é um arco analítico) em duas regiões K_1 e K_2 . A vizinhança $\mathcal{U}(p_1)$ será constituída dos pontos q_1 , onde $q \in K_1 \cup L \cap \mathcal{U}(p)$, e q_2 , com $q \in K_2$; de modo análogo definiremos $\mathcal{U}(p_2)$. É fácil ver que esses conjuntos satisfazem aos axiomas de um sistema fundamental de vizinhanças de uma topologia separada. Além disto, a aplicação $f: \tilde{F} \rightarrow F$, definida por $f(p_i) = p$, é um homeomorfismo local e cada ponto de F possui uma vizinhança bem coberta por f . Finalmente, verifica-se também que \tilde{F} é conexa, pois por hipótese $F - L$ é conexa, e a conexão de F_1 com F_2 pode-se fazer pelas vizinhanças dos pontos p_1 e p_2 que estão sobre L .

Lema 4: $F(V_0)$ é ou uma curva fechada ou uma curva aberta.

Demonstração: Já vimos que numa vizinhança de 0 , $F(V_0)$ é uma curva aberta γ . Sendo U um homeomorfismo local, podemos partir do ponto 0 com o valor $U = -\infty$, e considerar o extremo superior U' dos valores U_0 tais que todo o intervalo $-\infty < U < U_0$ corresponda a pontos de $F(V_0)$. Dois casos se podem apresentar: a) $U' = +\infty$. Neste caso, como o único polo de \mathcal{T} é 0 , nós vemos que a componente conexa de $F(V_0)$ que contém 0 é uma curva fechada, homeomorfa ao círculo $V = V_0$ da esfera. b) $U' < \infty$. Podemos então considerar análogamente um outro arco, partindo de 0 com o valor $U = +\infty$, obtendo-se assim duas curvas abertas, imagens dos intervalos $-\infty < U < U'$ e $U'' < U < +\infty$, que reunidos pelo arco γ , formarão uma única curva aberta, que é a componente conexa de $F(V_0)$.

Tal componente conexa, seja no caso a), por ser curva fechada, seja no caso b), pelo lema 3, separa F . Se houvesse outra componente, $F(V_0)$ separaria F em mais de duas regiões, contrariamente ao que vimos no lema 1. Isto completa a demonstração do lema.

Lema 5. Existe no máximo um valor V_0 para o qual $F(V_0)$ é uma curva aberta.

Demonstração: Notemos inicialmente que, sendo F simplesmente conexa, toda curva $F(V_0)$ fechada é homotópica ao ponto O . Sendo esta uma propriedade topológica, segue-se que na esfera \mathcal{T} , uma das calotas limitadas pelo círculo $V = V_0$ pertence à imagem de F , e todos os círculos $V = \text{constante}$ contidos nessa calota são imagens de curvas $F(V)$. Logo se para $V_1 < V_2$, $F(V_1)$ e $F(V_2)$ são curvas abertas, se-lo-ão também as curvas $F(V)$, para qualquer $V \in (V_1, V_2)$; tomemos então uma curva $U = U_0$ que corte $F(V_1)$ e



$F(V_2)$ nos pontos a e b , e consideremos uma vizinhança K de O , se parada do arco ab sobre essa curva. Os dois arcos de $F(V_1)$ e $F(V_2)$ que não contêm O e esse arco ab , formam uma curva aberta L , que limita uma região A que é separada de K . Seja $\chi(p)$ a função característica de A e ponhamos, como no lema 2,

$$W = \phi(U(p)) \cdot \psi(V(p)) \cdot \chi(p),$$

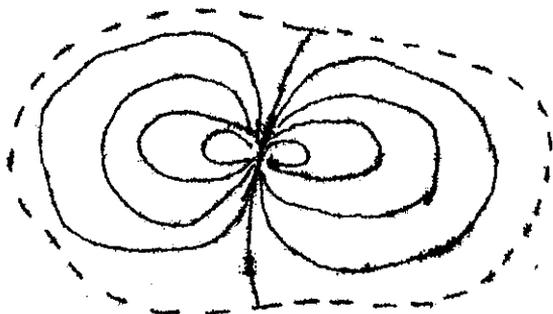
onde ϕ, ψ, ϕ', ψ' são limitadas, ϕ' positiva para $x > U_0$ e positiva para $V_1 < x < V_2$, e além disto, ϕ e ψ infinitésimas de segunda ordem em L . Podemos pôr, por exemplo (cf. lema 1):

$$\phi = \phi(x - U_0) \psi(x - U_0) \quad \text{e} \quad \psi = \psi(x - V_1) \psi(V_2 - x).$$

Repetando o cálculo feito anteriormente, deduzimos que $D(W)$ é finito e $D(W, U) > 0$, o que é absurdo. Isto prova o lema.

Lema 6. A correspondência $\tau = \tau(p)$ é biunívoca.

Demonstração: Esta biunivocidade é evidente se o ponto p está sobre uma curva $F(V_0)$ fechada. Suponhamos que sobre uma curva $F(V_0)$ aberta existam dois pontos p' e p'' tais que $\tau(p') = \tau(p'') = U_0 + iV_0$. Ora, para $V \neq V_0$, $F(V)$ é fechada, logo os pontos que correspondem a $\tau = U_0 + iV$ coincidem. Fazendo $V \rightarrow V_0$, temos então, pela continuidade, e sendo τ parâmetro local, $p' = p''$, como queríamos demonstrar.



Resumindo, vemos que qualquer superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente a uma região G da esfera S , podendo-se distinguir três casos:

- 1) Todas as curvas $F(V)$ são fechadas, isto é, G é toda a esfera S . Diz-se então que a superfície F é de tipo elítico.
- 2) Existe uma curva aberta $F(V_0)$ com um único ponto τ_0 excluído. Fazendo ainda a transformação $t = 1/(\tau - \tau_0)$, o ponto excluído vai para o infinito, e a superfície dada é equivalente ao plano complexo. A superfície diz-se de tipo parabólico.
- 3) Existe uma curva aberta $F(V_0)$, que corresponde a um círculo $V = V_0$ menos um arco (U', U'') . Com uma homotetia, podemos transformar esse arco no intervalo $(-1, 1)$ do eixo real. Então, a equação

$$\tau = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

faz corresponder à esfera menos esse intervalo, duas regiões, uma exterior, outra interior ao círculo unitário. Escolhendo a segunda determinação de t ($|t| < 1$), concluímos que neste caso, a superfície de Riemann é conformemente equivalente ao interior do círculo unitário. Diz-se então que ela é de tipo hiperbólico.

Isto completa a demonstração do teorema de uniformização enunciado no N. 1.

De agora em diante, chamaremos G uma das regiões - esfera, plano ou interior do círculo unitário - e indicaremos com τ a função que estabelece em cada um dos casos o homeomorfismo analítico entre a superfície de Riemann F e a região G . Tal função chama-se função uniformizante.

3. Limites de determinação da função uniformizante.

Vamos ver agora de quantas maneiras é possível aplicar σ a superfície de Riemann simplesmente conexa F sobre a região G ; note-se que pelo raciocínio desenvolvido no N.1, na demonstração do teorema de Riemann, os três tipos de regiões G são essencialmente distintos, isto é, nenhum pode ser conformemente equivalente a outro. Sejam então τ e σ duas funções uniformizantes que aplicam F em uma mesma região G ; então, $\tau\sigma^{-1}$ é um homeomorfismo analítico de G em si mesma. Vamos demonstrar o

Teorema 2. Os homeomorfismos analíticos $z' = f(z)$ de G em si mesma são funções lineares (funções homográficas).

Demonstração: Caso 1) $G = S =$ esfera complexa. Se f deixa o infinito fixo (polo simples) e se $f(0) = b$, então basta notar que a função $(f(z) - b)/z$ é analítica em toda a esfera, logo é constante e $f(z) = az + b$. Se o infinito não é ponto fixo, pondo $c = f^{-1}(\infty)$, fazemos previamente a transformação $z \rightarrow z' = 1/(z-c)$, e temos $z' = az'' + b = \frac{a}{z-c} + b$. Verifica-se facilmente que esta é a transformação homográfica mais geral.

Caso 2) $G = P =$ plano complexo. Vamos provar que o infinito só pode ser um polo simples. Com efeito, sendo f uniforme, o infinito é certamente ponto singular isolado; não pode ser removível, pois f não pode ser analítica e limitada em toda a esfera, e não pode ser ponto singular essencial, pois teria que assumir, fora de qualquer círculo, valores arbitrariamente próximos de qualquer número complexo, o que é incompatível com o homeomorfismo. Além disto, o polo é de primeira ordem, do contrário a correspondência não seria biunívoca.

Assim, caímos no caso particular do caso 1), isto é, a correspondência é dada pela função linear inteira: $z' = az + b$, com $|a| \neq 0$.

Caso 3) $G = C =$ interior do círculo unitário ($|z| < 1$). Neste caso, o raciocínio se baseia no lema de Schwartz: "Se $f(z)$ é analítica em C , nula na origem e satisfaz em C a condição $|f(z)| \leq 1$, então para todo $z \in C$, temos também $|f(z)| \leq |z|$, e se a igualdade vale num ponto, valerá em todos os pontos, e $|f(z)/z|$ é constante".

Demonstração: De fato, na hipótese feita, $f(z)/z$ é analítica em C , e para $|z| \leq \rho < 1$, esta função assume o máximo módulo na circunferência, e portanto, $|f(z)/z| \leq 1/\rho$. Sendo ρ arbitrariamente próximo de 1, deduz-se, para todo $z \in C$, $|f(z)/z| \leq 1$; mas se a igualdade vale num ponto interno, pelo princípio do máximo módulo o primeiro membro é constante, logo igual a um número complexo de módulo 1.

No caso de um homeomorfismo analítico $z \rightarrow z'$ de C em mesmo, com conservação da origem, temos pois $|z'/z| \leq 1$, mas pela mesma razão temos $|z/z'| \leq 1$, logo vale a igualdade, isto é, $z' = f(z) = az$, com $|a| = 1$. Se a origem não se conserva e se $f^{-1}(0) = b$ ($|b| < 1$), então fazemos previamente a transformação $z \rightarrow z'' = (z-b)/(\bar{b}z-1)$, que leva b à origem e conserva a circunferência $|z| = 1$. A correspondência $z'' \rightarrow z'$, será então da forma $z' = az''$, com $|a| = 1$. Podemos ainda pôr $a = -\alpha/\bar{\alpha}$ e $\beta = -\alpha b$, donde se deduz que o homeomorfismo neste caso é

$$z' = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \frac{z - b}{bz - 1} = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$$

com $|\beta| < |\alpha|$, que é a transformação linear mais geral que conserva o interior do círculo unitário. Isto completa a demonstração do teorema.

Conclui-se que em todos os casos, a função uniformizante τ é determinada a menos de uma transformação linear.

4. Classificação das superfícies de Riemann.

Seja F uma superfície de Riemann, \tilde{F} o seu recobrimento universal (simplesmente conexo) e $\tilde{\Gamma}$ o grupo das transformações de recobrimento de \tilde{F} , isto é, o grupo das transformações que levam cada ponto \tilde{p} em outro ponto \tilde{p}' que tem a mesma imagem em F . Já vimos que cada transformação de $\tilde{\Gamma}$ é determinada por um par (\tilde{p}, \tilde{p}') , e que portanto nenhuma transformação de $\tilde{\Gamma}$ tem ponto fixo, salvo a identidade. Sabemos também que F é equivalente a $\tilde{F}/\tilde{\Gamma}$.

Ora, sendo \tilde{F} homeomorfa a uma região G , ao grupo $\tilde{\Gamma}$ corresponde um grupo Γ de transformações de G em si mesma, e F é também conformemente equivalente a G/Γ . Conhecendo as formas possíveis de G , podemos então classificar as superfícies de Riemann estudando todos os possíveis grupos Γ . Já vimos que todas as transformações deste grupo são lineares, isto é, são da forma

$$t: \quad z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{com} \quad ad - bc \neq 0$$

Podemos normalizar essas transformações, impondo a condição $ad - bc = 1$, para o que basta multiplicar os quatro parâmetros a, b, c, d por um número λ tal que $\lambda^2 = (ad - bc)^{-1}$; devemos também identificar a transformação t com a que se obtém mudando o sinal dos quatro parâmetros simultaneamente. Posto isto, introduzimos uma topologia no grupo das transformações lineares, dizendo que uma transformação $t_n = (a_n z + b_n)/(c_n z + d_n)$ tende à transformação t , se tivermos ao mesmo tempo $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d$. Desta definição segue-se imediatamente que se $t_n \rightarrow t$ e $s_n \rightarrow s$, então $t_n s_n \rightarrow ts$ e $t_n^{-1} \rightarrow t^{-1}$; e para qualquer ponto z teremos $t_n z \rightarrow tz$. É fácil verificar que esta condição é equivalente à anterior (basta, aliás, que os transformados de três pontos distintos da esfera convirjam para pontos distintos).

Vamos dar ainda uma definição: Diz-se que um grupo Γ atua de maneira descontínua em uma variedade V , quando para cada ponto x de V , o conjunto \sum_x dos pontos de V equivalentes a x

em relação a $\tilde{\Gamma}$ não tem nenhum ponto de acumulação em V . É claro que o grupo $\tilde{\Gamma}$, e portanto também o grupo Γ atuam, respectivamente em \tilde{F} e em G , de maneira totalmente descontínua.

Chamaremos a variedade G/Γ de forma normal da superfície de Riemann F . Vamos classificar essas superfícies nos dois primeiros casos:

Caso 1) $\tilde{F} = S$ (caso elítico). Como qualquer transformação tem ao menos um ponto fixo, o grupo Γ se reduz à identidade, e F é isomorfa a S .

Caso 2) $\tilde{F} = P$ (caso parabólico). Neste caso, as transformações lineares sem ponto fixo são da forma $z' = cz + b$, isto é, são translações do plano complexo. Aqui temos três tipos de grupos:

a) $\Gamma = \{e\}$; a superfície de Riemann é homeomorfa ao plano complexo.

b) Todas as translações são paralelas entre si. Dado então um ponto qualquer z_0 , existe um ponto equivalente a distância mínima, $z'_0 = z_0 + \omega_1$; prova-se então facilmente que Γ é o grupo das translações $z' = z + n\omega_1$, com n inteiro. A superfície de Riemann é isomorfa a um cilindro (Cap. I, pg. 8, ex. 5), e pela projeção de Mercator se vê que é equivalente à esfera menos os dois polos 0 e infinito.

c) Existem duas translações não paralelas. Então existe certamente um subgrupo da forma anterior, mas existem também pontos equivalentes a z_0 fora da reta que passa por z_0 e é paralela ao vetor ω_1 ; seja $z_0 + \omega_2$ um desses pontos que está a distância mínima do segmento que une z_0 a $z_0 + \omega_1$. Demonstra-se então que Γ é o grupo das translações da forma $z' = z + m\omega_1 + n\omega_2$ (m e n inteiros, ω_2/ω_1 imaginário). Neste caso, a superfície de Riemann é homeomorfa a um toro (Cap. I, pg. 7, ex. 4), e é uma superfície compacta, de genus 1.

5. Classificação das superfícies de Riemann no caso hiperbólico. Geometria não euclidiana.

Vamos estudar o caso 3), interpretando a região $G = C$ como plano não euclidiano, e o grupo Γ como grupo de movimento rígidos

dêsse plano. Para classificar as superfícies de Riemann bastará então estudar os grupos de movimentos sem ponto fixo, que atuam de maneira totalmente descontínua em C .

Chamaremos de "pontes" aos pontos de C , de "retas", ou aos diâmetros de C ou aos arcos de círculos internos a C e ortogonais à sua fronteira ($|z| = 1$). O "ângulo de duas retas que se cortam" será o ângulo das tangentes a êsses arcos, no ponto de encontro. A noção de "ponto situado entre dois pontos de uma reta" se define obviamente. Das propriedades das transformações lineares se deduz que as transformações que conservam C , conservam os ângulos, conservam o sistema das retas de C e a relação de ordem acima definida. Por esta razão, essas transformações se denominam "movimentos rígidos do plano não euclideano".

Dados quatro pontos z, z_1, z_2, z_3 da esfera complexa, chamaremos razão dupla, ou razão anarmônica dêsses pontos (nesta ordem) ao número

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

Fácilmente se verifica que temos $(z, z_1, z_2, z_3) = (z_1, z, z_3, z_2) = (z_2, z_3, z, z_1) = (z_3, z_2, z, z_1)$, donde se deduz que quatro pontos quaisquer dão origem em geral a $4!/4 = 6$ razões duplas. Consideremos a transformação

$$T: \quad z' = (z, z_1, z_2, z_3),$$

que é uma transformação linear, que leva os pontos z_1, z_2, z_3 , respectivamente, nos pontos $1, 0, \infty$; esta condição determina univocamente uma transformação linear; se S é outra transformação linear qualquer, TS^{-1} leva os pontos Sz_1, Sz_2, Sz_3 em $1, 0, \infty$, logo temos idênticamente $TS^{-1}(Sz) = (Sz, Sz_1, Sz_2, Sz_3) = T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$, o que mostra que a razão dupla de quatro pontos é invariante para qualquer transformação linear.

Voltemos a considerar C como plano não euclideano (n.e.),

onde o número complexo $z = x + iy$, assim como suas componentes reais são chamadas "coordenadas cartesianas" do ponto z . Sejam z_1, z_2 dois pontos de C , z_3 e z_4 os pontos em que a "reta" que passa por z_1 e z_2 encontra a fronteira de C . Existe um movimento rígido que leva esta "reta" em um diâmetro qualquer, levando por exemplo z_3, z_1, z_4 nos pontos $-1, \alpha, 1$ ($-1 < \alpha < 1$), respectivamente, e z_2 em um ponto de coordenada real β ($-1 < \beta < 1$). Segue-se que a razão dupla $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\alpha, \beta, -1, 1)$ é um número real positivo, logo o seu logaritmo é real. Chamaremos "distância" $d(z_1, z_2)$ o valor absoluto desse logaritmo; este número é invariante para qualquer movimento rígido e pode-se demonstrar que tem todas as propriedades da distância na geometria plana (cf. Springer - Introduction to Riemann Surfaces, pg. 234). Sobre cada "reta", podem-se distinguir dois sentidos de percurso, e assim definir sobre a "reta" $z_1 z_2$, tomando como origem z_2 , a abscissa de z_1 , como sendo o número real $\log(z_1, z_2, z_3, z_4)$, que é positivo se z_1 está entre z_2 e z_4 , negativo se está entre z_3 e z_2 . Qualquer transformação de C em si mesmo que conserve as "distâncias" é uma representação conforme direta ou inversa, e no primeiro caso, é uma transformação linear, isto é, um movimento rígido do plano n.e. Também se verifica que a topologia definida por essa "distância" coincide com a topologia usual da região C .

Uma transformação linear $T: z' = f(z)$ pode também ser interpretada como definindo uma mudança de coordenadas cartesianas dos pontos p de C . Se Γ é o grupo de transformações de C em si mesmo, que corresponde a um grupo de recobrimento, então o grupo $\Gamma' = T\Gamma T^{-1}$ pode ser interpretado seja como grupo conjugado de Γ , isto é, como grupo de movimentos rígidos congruentes a Γ , seja como grupo Γ expresso em coordenadas z' .

Definição. Chamam-se translações não euclidianas os movimentos rígidos de C sem ponto fixo. Podemos então enunciar o seguinte teorema, que resolve o problema que nos ocupa, no caso 3):

Teorema 3 - Dada uma superfície de Riemann F , cujo recobrimento universal é de tipo hiperbólico, e fixada a função uniformizante, a essa superfície corresponde um bem determinado grupo de translações do plano n.e. Duas superfícies são conformemente equivalentes se os grupos correspondentes são congruentes. Inversamente, a cada grupo Γ de translações que atua em C de maneira totalmente descontínua, corresponde uma superfície de Riemann C/Γ .

6. Propriedades dos grupos de movimentos rígidos n.e.

Seja $\bar{\Gamma}$ um grupo topológico de transformações de uma variedade V em si mesma. Dado um subgrupo Γ de $\bar{\Gamma}$, vamos considerar para cada $x \in V$, a classe \sum_x dos pontos equivalentes a x por Γ . Podemos distinguir três conceitos que têm grande importância para o que se segue (o primeiro já foi introduzido no nº 4):

a) O grupo Γ atua em V de maneira totalmente descontínua, se para cada $x \in V$ o conjunto \sum_x não tem ponto de acumulação em V .

b) O grupo Γ é descontínuo, se para cada $x \in V$ o conjunto \sum_x é discreto, i.e., se cada ponto x de V tem uma vizinhança que não contém nenhum outro ponto equivalente a x .

c) O grupo Γ não contém transformações infinitesimais, se a identidade não é ponto de acumulação de Γ em $\bar{\Gamma}$.

Vamos então demonstrar o seguinte

Teorema 4. Para os grupos de movimentos rígidos do plano n.e. C , as condições a), b), c) acima são equivalentes.

Demonstração: A implicação a) \rightarrow b) é evidente. b) implica c), pois se existem transformações infinitesimais, existe uma sucessão $\{s_n\}$ de transformações de Γ , não idênticas, que tendem para a identidade. O conjunto dos pontos fixos dessas transformações é certamente enumerável, logo existe em C um ponto z_0 que não é ponto fixo de nenhuma s_n , donde se deduz que z_0 é ponto de acumulação dos pontos equivalentes $s_n z_0$, contrariamente à hipótese b). Vamos provar que c) implica a). Com efeito, se um conjunto \sum_z tem um ponto de acumulação z_0 , então existe nes-

se conjunto uma sucessão $\{z_n\}$ de pontos distintos, que converge a z . Seja s_n a transformação de Γ que leva z_n em z_{n+1} . Consideremos os movimentos rígidos

$$t_n: z' = \frac{z - z_n}{\bar{z}_n z - 1}$$

que evidentemente convergem à transformação

$$t: z' = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1};$$

cada t_n leva z_n à origem, logo a transformação $\sigma_n = t_{n+1} s_n t_n^{-1}$ conserva a origem e é portanto da forma $\sigma_n z = a_n z$, com $a = e^{i\theta_n}$. Ora, da sucessão $\{\theta_n\}$ ($0 \leq \theta_n < 2\pi$) podemos tirar uma sub-sucessão que converge a um número θ , e que corresponde a uma sub-sucessão $\{\sigma_m\}$ que converge a

$$\sigma: z \longrightarrow e^{i\theta} z,$$

logo a sub-sucessão correspondente das transformações

$$s = t_{m+1}^{-1} \sigma t_m$$

converge a $s = t^{-1} \sigma t$ e portanto $s_m^{-1} s_{m+1}$ converge à identidade, o que contraria a hipótese c).

7. Domínios fundamentais.

Dado um grupo Γ de movimentos rígidos do plano n.e. chamaremos de domínio fundamental de Γ a um conjunto $B \subset C$ que tem as seguintes propriedades:

- 1) B é fechado e possui pontos interiores.
- 2) $\bigcup_{s \in \Gamma} s(B) = C$.
- 3) Se $z \in s(B) \cap t(B)$, para $s, t \in \Gamma$, $s \neq t$, então z pertence à fronteira de $s(B)$ e de $t(B)$.

E' claro que se um grupo contém transformações infinitesimais, não podem existir domínios fundamentais, pois neste caso as

as condições 1) e 3) são incompatíveis. Vamos, porém, demonstrar o seguinte

Teorema 5. Se Γ é um grupo descontínuo de translações em C , cada ponto $z_0 \in C$ determina um domínio fundamental, que o contém internamente.

Demonstração: Consideremos o conjunto \sum_{z_0} , que como sabemos não tem ponto de acumulação em C , e seja $\Sigma = \sum_{z_0} - \{z_0\}$. Chamemos B o conjunto dos pontos z tais que $d(z, z_0) \leq d(z, \Sigma)$. Sendo a função d contínua, é claro que os pontos que satisfazem a esta condição com o sinal $<$, como o ponto z_0 , são pontos interiores a B , ao passo que os que satisfazem à igualdade são pontos da fronteira. Ponhamos $B_s = s(B)$ e $z_s = s(z_0)$; como as distâncias são invariantes, teremos também

$$B_s = \{z, d(z, z_s) \leq d(z, \sum_{z_0} - \{z_0\})\},$$

donde se deduz que a condição 3) está satisfeita. Qualquer ponto $z \in C$ está no conjunto B_s , desde que z_s seja um ponto de \sum_{z_0} a distância n.e. mínima de z ; isto demonstra a condição 2). Vemos que cada B_s é também um domínio fundamental.

Teorema 6. O domínio fundamental B é um polígono convexo (na geometria n.e.), cujos vértices não têm ponto de acumulação em C , e cujos lados pertencem às mediatrizes de certos segmentos $\overline{z_0 z_s}$.

Demonstração: Com efeito, seja P_s o semi-plano definido por $d(z, z_0) \leq d(z, z_s)$. Sua fronteira é a mediatriz g_s do segmento $\overline{z_0 z_s}$, para cujos pontos vale o sinal de igualdade. Temos, então, evidentemente, $B = \bigcap_{s \in \Gamma} P_s$, e como cada semi-plano é um conjunto convexo, B é convexo. Como \sum não tem ponto de acumulação em C , o conjunto dos seus pontos que satisfazem à condição $d(z, z_0) \leq R$ é finito, e como os pontos da mediatriz g_s estão a uma distância de $z_0 \geq \frac{1}{2}d(z_0, z_s)$, segue-se que só um número finito dessas "retas" cortam o círculo de centro z_0 e raio $R/2$. Lo-

go, os vértices de B contidos nesse círculo são também em número finito, c.q.d.

O domínio fundamental B será denominado daqui por diante, polígono normal. Este polígono goza das seguintes propriedades:

a) Nenhuma transformação de Γ pode deixar fixo um lado do polígono, a não ser a identidade. Pois se um lado ab fosse transformado em si mesmo por uma translação $s \neq e$, teríamos ou $s(a) = a$ e $s(b) = b$, ou $s(a) = b$ e $s(b) = a$, e neste caso, o ponto médio de ab seria fixo para s . Nos dois casos chegamos a um absurdo, pois a translação s não tem ponto fixo.

b) Os lados de B se correspondem dois a dois, e a translação que leva um lado no seu correspondente é única. Com efeito, um lado ab de B pertence a uma mediatriz g_s , logo a transformação s^{-1} , que leva B_s em B , leva o lado ab de B_s em um outro lado cd de B . Esta transformação é única, pois se duas transformações s e t levam ab em cd , $s^{-1}t$ conserva o lado ab , e pela propriedade a) temos $s^{-1}t = e$, ou $t = s$.

c) Dois lados correspondentes têm o mesmo comprimento e são percorridos em sentido contrário, no perímetro de B . Pois tô das as transformações de Γ são isométricas e conformes diretas, logo, se ab , percorrido de a para b deixa B à esquerda, e se $c = s(a)$ e $d = s(b)$, então cd deixa B à direita, pois à sua esquerda está B_s .

d) Cada lado tem um único correspondente. Pois se ab fosse levado em cd pela translação s e em $c'd'$ pela translação t , então cd seria levado em $c'd'$ pela translação $s^{-1}t$. Mas neste caso, cd e $c'd'$ seriam lados correspondentes percorridos no mesmo sentido (contrário ao de ab), o que é absurdo.

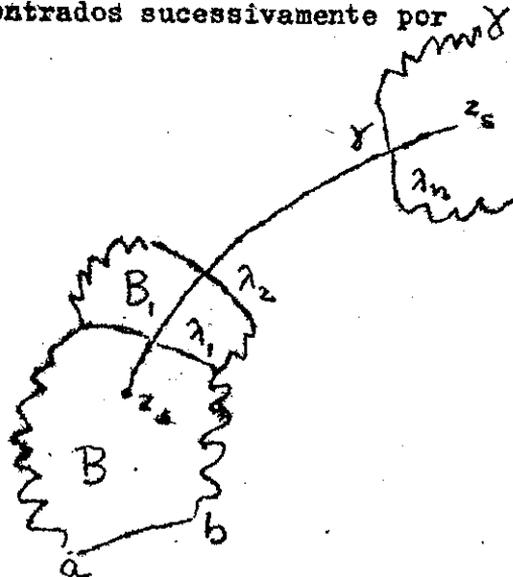
e) Dois lados correspondentes não podem ser consecutivos. Pois devendo ser percorridos em sentido contrário, o vértice comum seria fixo.

f) O grupo Γ é gerado pelas transformações que levam cada lado de B no seu correspondente. Com efeito, seja $s \in \Gamma$ e $z_s = sz_0$. Podemos ligar z_0 a z_s por um caminho γ que

não passa por nenhum vértice, pois estes formam um conjunto sem ponto de acumulação em C . Sejam $B = B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ ($B_i = B_{s_i}$, $s_n = s$) os polígonos normais encontrados sucessivamente por γ . Dois polígonos sucessivos B_{i-1} e B_i têm um lado comum λ_i . A translação $s_{i-1}^{-1}s_i$ leva, em B , o lado $s_i^{-1}\lambda_i$ no lado $s_{i-1}^{-1}\lambda_i$. Seja ainda s_0 a translação que leva o lado ab , correspondente de λ_1 , em λ_1 . Temos então,

$$s = s_n = s_0(s_0^{-1}s_1) \dots (s_{n-1}^{-1}s_n)$$

o que demonstra a proposição.



Observemos que a construção anterior está determinada a menos de um movimento rígido; pois se com um tal movimento T levamos z_0 a z'_0 , o polígono $B' = TB$ pode ser obtido pelo mesmo processo, a partir do grupo $T\Gamma T^{-1}$, que é congruente a Γ .

Outra consequência dessa construção é que cada ponto z_0 possui uma vizinhança cujas imagens pelo grupo são disjuntas, pois cada imagem está dentro do polígono normal construído sobre um ponto equivalente a z_0 .

Das propriedades anteriores, deduz-se a construção da superfície de Riemann no caso hiperbólico, expressa pelo

Teorema 7. Para obter uma superfície de Riemann na forma normal, no caso hiperbólico, basta identificar os lados correspondentes de um polígono normal do grupo de recobrimento dessa superfície.

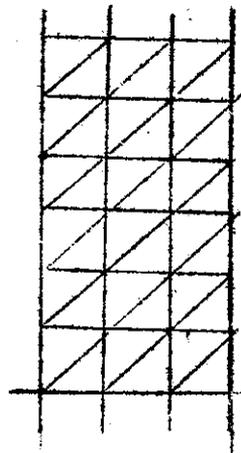
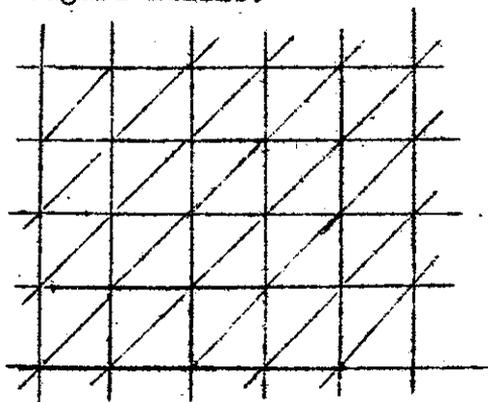
Definição: Chamaremos de ciclo de vértices de B , a um conjunto máximo de vértices desse polígono, equivalentes entre si por Γ . Como esses pontos vão corresponder a um mesmo ponto de F e como a representação de C em C/Γ é conforme, a soma dos ângulos nos vértices de um mesmo ciclo é sempre 2π . Cada ciclo

só possui um número finito de vértices, pois a transformação que leva um vértice a em outro, a' , do mesmo ciclo, leva B em um dos polígonos que incidem em aa' , e esses polígonos são em número finito.

8. Triangulação das superfícies de Riemann.

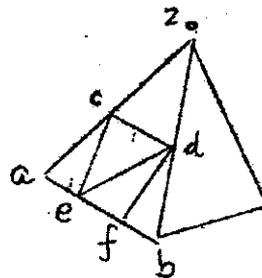
Teorema 8. Toda superfície de Riemann pode ser triangulada.

Demonstração: Esta possibilidade já foi demonstrada para a esfera e o toro (cf. Cap. IV, pag. 83 e 84). O plano e o cilindro, que são superfícies não compactas, admitem as triangulações indicadas na figura abaixo.



Para as superfícies correspondentes ao caso hiperbólico, temos dois casos a distinguir:

a) O polígono B é limitado. Liguemos todos os vértices ao ponto interno z_0 . Esta triangulação de B não fornece uma triangulação da superfície de Riemann F , pois dois triângulos podem ter em comum o vértice z_0 e o lado oposto, proveniente de lados correspondentes. Podemos porém decompor cada triângulo como indica a figura, ligando os meios c e d dos segmentos $\overline{z_0 a}$ e $\overline{z_0 b}$ e ligando ainda esses pontos aos pontos e e f , que dividem o lado ab em três partes iguais. Re



petindo essa processo em todos os outros triângulos, mesmo depois da identificação dos lados correspondentes, obtemos uma triangulação da superfície de Riemann.

b) O polígono B não é limitado. Note-se primeiramente que, em consequência do caso anterior, como o grupo Γ estende a triangulação do polígono limitado B a todo o plano n.e. C , vemos que este é triangulável. Seja então Δ uma triangulação de C . Dado um triângulo Δ_i de Δ , $\Delta_i \cap B$ é um polígono de número finito de lados, pois Δ_i é limitado e convexo. Seja p_i um ponto interior a esse polígono, liguemo-lo aos vértices deste. Com esse processo pode acontecer que sobre dois lados correspondentes de B as intersecções com os triângulos Δ_i não coincidam; neste caso, superpomos as divisões desses lados, ligando sempre cada ponto de divisão aos pontos interiores p_i dos polígonos que incidem nesse ponto. Sendo necessário, repetimos nos triângulos obtidos a decomposição indicada no caso anterior. Assim, obtemos uma triangulação de B que fornece, pela projeção a C/Γ , uma triangulação da superfície de Riemann F .

9. Superfícies de Riemann compactas.

Como a superfície de Riemann F é obtida de um polígono normal B identificando os seus lados dois a dois, é claro que F é compacta se B é compacto, e reciprocamente. Ora, B é parte de um conjunto aberto C , e só será compacto se fôr fechado no plano complexo, e portanto contido em um círculo concêntrico ao círculo unitário e de raio menor que 1. Daí decorre que o número de vértices de B é finito e igual ao número de lados. Como estes são agrupados dois a dois, esse número de lados é par: $2L$. Seja K o número de ciclos; então, a soma dos ângulos internos de B é $2\pi K$. Vamos demonstrar o

Teorema 9. Se F é de gênero p e se o polígono normal B de B tem $2L$ lados e K ciclos, então temos

$$2p - 2 = L - K - 1.$$

Demonstração: Consideremos a triangulação de B feita no N.º. Como a cada lado correspondem 5 triângulos, temos em F , $T = 5.2L$ triângulos. O número de arestas interiores da B é $6.2L$, as do contôrno, $3.2L$, mas com a identificação dos lados correspondentes, elas se reduzem à metade, logo temos ao todo $A = (12 + 3)L = 15L$ arestas em F . O número de vértices interiores a B é $1+2L$; no contôrno temos $2.2L$ vértices que são internos aos lados de B , e que na identificação se reduzem a $2L$, e $2L$ vértices de B , que na identificação se reduzem a K . O número de vértices em F é pois, $V = 1 + 4L + K$. A característica de Euler-Poincaré nos dá portanto,

$$2 - 2p = T - A + V = 10L - 15L + 1 + 4L + K = K - L + 1,$$

como queríamos demonstrar.

Definição. Chama-se conteúdo n.e. de um triângulo de ângulos internos α, β, γ , o número $\pi - \alpha - \beta - \gamma$. Se um polígono B é decomposto em triângulos, chama-se conteúdo de B a soma dos conteúdos dos triângulos componentes. É fácil vêr, como no caso do excesso esférico, que essa definição é independente da decomposição. Vamos deduzir duas consequências do teorema 9:

Corolário 1: O conteúdo do polígono normal B da superfície d F de genus p é $J = 4\pi(p-1)$.

Basta notar que tanto o número de triângulos como os valores dos ângulos se conservam quando se passa do polígono B à superfície F , e que nesta, a cada vértice da triangulação correspondem ângulos cuja soma é 2π . O conteúdo de B é portanto,

$$\begin{aligned} J &= T\pi - 2\pi V = 10\pi L - 2\pi(1 + 4L + K) = \\ &= 2\pi(L - 1 - K) = 2\pi(2p - 2). \end{aligned}$$

Corolário 2: Entre os números L e p subsiste a desigualdade $2L \leq 12p - 6$.

Basta notar que cada ciclo consta no mínimo de três vértices, logo, $3K \leq 2L$. Segue-se do teorema 8, $6p - 6 = 3L - 3K + 3 \geq L - 3$.

donde se deduz a desigualdade.

Notemos ainda que no caso hiperbólico o número de lados não pode ser 4, pois para um quadrilátero só poderia haver um único ciclo, e a soma dos ângulos internos teria que ser 2π , o que é absurdo, pois na geometria n.e. essa soma é certamente menor. Também não pode ser 6, pois para $L = 3$, o teorema 9 daria $K = 4 - 2p$, o que é impossível, pois temos certamente $p \geq 2$, já que a esfera ($p = 0$) e o toro ($p = 1$) estão excluídos.

10. Funções meromorfas sobre uma superfície de Riemann.

Seja F uma superfície de Riemann e G a região da esfera complexa analiticamente homeomorfa ao seu recobrimento universal. Uma função $\varphi(p)$ meromorfa em F , induz em G uma função meromorfa $f(z)$, que tem os mesmos valores em pontos que se projetam no mesmo ponto p de F . Isto quer dizer que a função f é invariante pelo grupo Γ , equivalente ao grupo de recobrimento, isto é, para todo elemento $s \in \Gamma$ e todo $z \in G$, temos $f(sz) = f(z)$.

Inversamente, se G é uma região da esfera complexa sobre a qual atua o grupo descontínuo Γ de transformações sem ponto fixo em G , então toda função meromorfa em G , invariante relativamente a Γ , dá origem a uma função meromorfa em G/Γ . Vamos provar a existência de tais funções $f(z)$, que são chamadas funções automorfas relativas aos grupos de recobrimento.

Nos casos elítico e parabólico, as funções automorfas são conhecidas: se G é a esfera, $\Gamma = \{e\}$ e temos apenas as funções racionais. Se G é o plano, temos funções meromorfas (cf. N.4), que no caso b) são simplesmente periódicas, e no caso c), duplamente periódicas, isto é, funções elíticas.

Consideremos o caso hiperbólico: $G = \mathbb{C}$. No caso de um grupo Γ finito (o que está excluído no caso hiperbólico), seria fácil construir uma função automorfa, pois bastaria tomar uma função meromorfa $H(z)$ e considerar a soma $f(z) = \sum H(sz)$, estendida a todas as transformações $s \in \Gamma$. Mas no caso de grupos infini-

tos surge o problema da convergência; contornaremos a dificuldade introduzindo para cada grupo Γ funções que generalizam as funções teta de Jacobi, por meio das quais, como é sabido, se podem construir as funções elíticas.

Definição: Chama-se função teta relativa ao grupo de recobrimento Γ , uma função $\theta(z)$, meromorfa em \mathbb{C} , que satisfaz à condição

$$\theta(sz) = (cz + d)^{2m} \theta(z)$$

para cada $s \in \Gamma$ tal que $sz = (az + b)/(cz + d)$.

Notemos agora que o grupo Γ é descontínuo, é portanto enumerável, e que \mathbb{C} é invariante, logo as transformações de Γ podem ser escritas sob a forma

$$s_n: z_n = s_n z = \frac{a_n z + b_n}{\bar{b}_n z + \bar{a}_n} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

com

$$a_n \bar{a}_n - b_n \bar{b}_n = 1$$

em que supomos $s_0 = e$, identidade, isto é, $a_0 = 1, b_0 = 0$. Excluído este caso, temos sempre $b_n \neq 0$, do contrário, a origem seria ponto fixo. Podemos então enunciar o

Teorema 10: Se $H(z)$ é uma função meromorfa em \mathbb{C} e limitada numa corôa $\rho < |z| < 1$ então para todo inteiro $m \geq 2$, pode-se definir uma função teta relativa ao grupo $\Gamma = \{s_n\}$ pela série

$$O(z) = \sum_n \frac{H(s_n z)}{(\bar{b}_n z + \bar{a}_n)^{2m}}.$$

Para demonstrar este teorema, vamos estabelecer alguns lemas.

Lema 1. A sucessão $\{b_n\}$ não tem ponto limite 0. Do contrário, haveria uma subsucessão $\{s_p\}$, com $b_p \rightarrow 0$, e portanto

$|a_p| \rightarrow 1$, e a sucessão dos pontos $s_p(0)$ teria a origem como ponto de acumulação, o que não é possível.

Lema 2. Dado um conjunto compacto K interno a C , se para cada n pomos

$$m_n = \inf_{z \in K} \left| \frac{dz_n}{dz} \right|^2 \quad \text{e} \quad M_n = \sup_{z \in K} \left| \frac{dz_n}{dz} \right|^2$$

então a sucessão M_n/m_n é limitada, e. i. e., existe $L > 0$, tal que $M_n \leq Lm_n$.

Demonstração: Do lema anterior, segue-se que existe um número $r > 0$ tal que para $n > 0$ temos $|b_n| \leq r$. De

$$|a_n|^2 - |b_n|^2 = 1,$$

deduzimos

$$1 < \left| \frac{a_n}{b_n} \right|^2 = 1 + \frac{1}{|b_n|^2} \leq 1 + r^{-2}$$

e por outro lado, sendo K compacto, temos $\max_{z \in K} |z| = \delta < 1$, e notando que

$$\frac{dz_n}{dz} = (\bar{b}_n z + \bar{a}_n)^{-2},$$

obtemos

$$\frac{M_n}{m_n} = \frac{\left\{ \sup |\bar{b}_n z + \bar{a}_n| \right\}^4}{\left\{ \inf |\bar{b}_n z + \bar{a}_n| \right\}^4} = \frac{\left\{ \sup \left| z + \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n} \right| \right\}^4}{\left\{ \inf \left| z + \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n} \right| \right\}^4} \leq \left\{ \frac{2 + \delta^{-2}}{1 - \delta} \right\}^4$$

que é independente de n .

Lema 3. A série $(\bar{b}_n z + \bar{a}_n)^{-4}$ converge uniformemente em qualquer compacto contido em C .

Demonstração: Basta demonstrar essa convergência uniforme em uma vizinhança fechada de um ponto z_0 arbitrário de C . Podemos escolher essa vizinhança \mathcal{U} de tal modo que os conjuntos $s_n(\mathcal{U})$ sejam disjuntos dois a dois. Notemos então que $|dz_n/dz|^2$

é o jacobiano da transformação s_n , e que portanto, temos, sendo $z = x + iy$, $z_n = x_n + iy_n$,

$$J_n = \text{Área de } s_n(\mathcal{U}) = \iint_{s_n(\mathcal{U})} dx_n dy_n = \iint_{\mathcal{U}} \left| \frac{dz_n}{dz} \right|^2 dx dy$$

e sendo J_0 a área de \mathcal{U} , combinando com o lema 2, temos

$$m_n J_0 \leq J_n \leq M_n J_0 \leq L m_n J_0 \leq L J_n,$$

donde se deduz

$$|\bar{b}_n z + \bar{a}_n|^{-4} \leq M_n \leq \frac{L}{J_0} J_n;$$

como $\sum J_n$ é certamente convergente, pois é uma soma de áreas de domínios disjuntos contidos no domínio limitado C , fica demonstrado o lema 3.

Segue-se deste resultado que o termo geral dessa série tende a zero uniformemente, e que portanto, para $m \geq 2$, a série

$$\sum (\bar{b}_n z + \bar{a}_n)^{-2m}$$

é também uniformemente convergente.

Mostremos agora que a função $\theta(z)$ definida acima satisfaz às condições que definem uma função teta. Seja K um compacto contido em C , que não contenha nenhum polo de $H(z)$ nem pontos equivalentes a êsses polos. Podemos construir vizinhanças desses polos de tal maneira que K não contenha também nenhum ponto equivalente a um ponto dessas vizinhanças. Então, para $z \in K$, $s_n z$ está sempre no conjunto C' que se obtém de C , retirando as vizinhanças dos polos de H . Ora, como $H(z)$ é limitada num conjunto $\rho \leq |z| < 1$, temos então, para $z \in K$ e para qualquer $s_n \in \Gamma$, $|H(s_n z)| \leq M$, e a série acima é majorada pela série uniformemente convergente

$$M \sum \left| \bar{b}_n z + \bar{a}_n \right|^{-2m}.$$

Se K é arbitrário, a série dada representa portanto uma função meromorfa em C .

Além disto, temos, pondo $z_{nk} = s_n s_k z$,

$$\begin{aligned} \theta(z_k) &= \sum_n H(s_n(s_k z)) \left(\frac{dz_{nk}}{dz_k} \right)^m = \\ &= \sum_n H((s_n s_k)z) \left(\frac{dz_{nk}}{dz} \right)^m \left(\frac{dz_k}{dz} \right)^{-m} = (\bar{b}_k z + \bar{a}_k)^{2m} \theta(z), \end{aligned}$$

pois o produto $s_n s_k$ percorre tôdas as transformações do grupo Γ , para $n = 0, 1, \dots$.

O número m chama-se pêso da função teta. É evidente que o quociente de duas funções teta de mesmo pêso, relativas ao mesmo grupo, é uma função automorfa, que dá origem a uma função meromorfa sobre a superfície de Riemann C/Γ .

11. Recordação de algumas propriedades das transformações lineares.

Sabemos que na esfera de Riemann, toda transformação linear não idêntica $s: z' = (az+b)/(cz+d)$ ($ad - bc = 1$) tem dois pontos fixos distintos ou coincidentes, que são raízes da equação

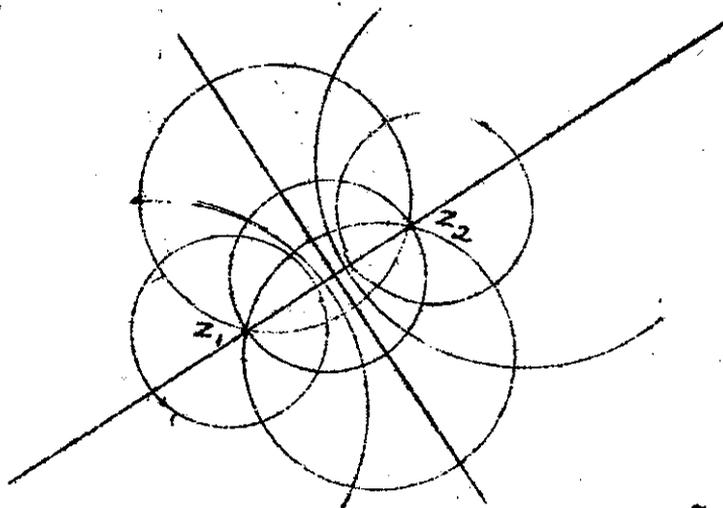
$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Se existem dois pontos fixos distintos, z_1 e z_2 , pondo $t = (z-z_1)/(z-z_2)$, e $t' = (z'-z_1)/(z'-z_2)$, a correspondência $t \rightarrow t'$ conserva o zero e o infinito, logo é da forma $t' = kt$, donde

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (k \neq 0)$$

que é a forma canônica da transformação s . O número k chama-se módulo da transformação, e esta conserva dois sistemas de círculos: 1) os que passam por z_1 e z_2 ; 2) os círculos ortogonais aos primeiros. Na esfera t , êsses sistemas correspondem a meridianos e paralelos, respectivamente. Essas transformações se classificam segundo o módulo k :

a) k real; na esfera t , são conservados os meridianos; na esfera z , os círculos do primeiro sistema são conservados, enquanto os do segundo sistema se deslocam, afastando-se de um dos pontos fixos e aproximando-se do outro. A transformação chama-se então hiperbólica.



b) $|k| = 1$; na esfera t , temos uma rotação em torno do eixo Ooo ; na esfera z , são conservados os círculos do segundo sistema, enquanto os do primeiro giram em torno dos pontos fixos. A transformação chama-se elítica. O ângulo $\theta = \arg(k)$ que faz um círculo com o seu correspondente num ponto fixo, chama-se ângulo de rotação da transformação elítica.

c) $|k| \neq 1$, k imaginário; no plano t , temos uma rotação acompanhada de uma dilatação, e evidentemente nenhum círculo pode ser invariante. A transformação chama-se loxodrômica.

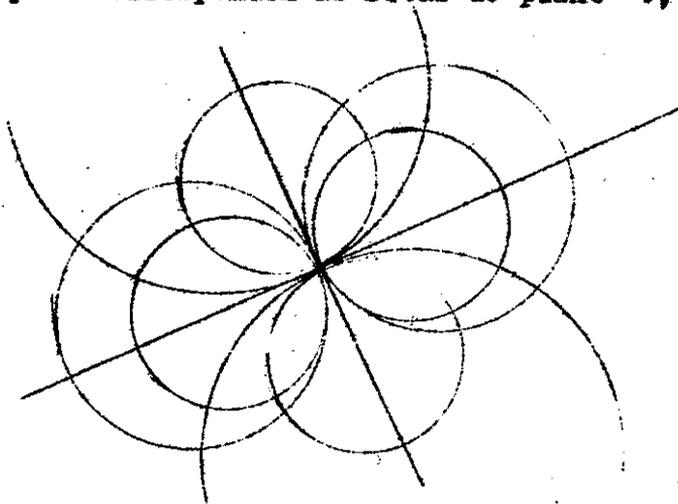
Note-se que se $k = -1$, a transformação é ao mesmo tempo hiperbólica e elítica, e todos os círculos dos dois sistemas são conservados. A cada ponto diferente de z_1 e z_2 corresponde a se-

gunda intersecção dos círculos dos dois sistemas que passam por êle. Segue-se daqui $s^2 = e$, isto é, s é uma involução; reciprocamente, se s é uma involução, diferente da identidade, s é certamente elítica, com ângulo de rotação π .

Quando há um só ponto fixo z_0 , a transformação $t=1/(z-z_0)$ leva êste ponto ao infinito; no plano t , temos uma translação $t' = t + L$, e a transformação pode ser escrita

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + L;$$

também aqui se distingue um primeiro sistema de círculos que são invariantes, pois correspondem às retas do plano t , paralelas ao ve-



tor L , e o segundo sistema, de círculos ortogonais aos anteriores, todos êsses círculos passando por z_0 .

E' fácil vêr que para que uma potência inteira de uma transformação seja a identidade, é preciso que essa transformação seja elítica, com ângulo de rotação comensurável com 2π .

Já vimos que uma transformação linear que conserva o círculo unitário é da forma

$$s: \quad z' = \frac{az + b}{bz + a} \quad (a\bar{a} - b\bar{b} = 1)$$

e se puzermos $a = \alpha + i\alpha'$, temos $\alpha^2 + \alpha'^2 - |b|^2 = 1$. Os pon-

tes fixos de s , raízes da equação $\bar{b}z^2 + (\bar{a}-a)z - b = 0$, são dados por

$$\left. \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \right\} = \frac{a-\bar{a} \pm \sqrt{(a+\bar{a})^2 - 4b\bar{b}}}{2\bar{b}} = \frac{i\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\bar{b}}$$

Tal transformação será portanto, a) hiperbólica, para $|\alpha| > 1$, com dois pontos fixos z_1, z_2 no círculo unitário; b) elíptica, para $|\alpha| < 1$, com um ponto fixo z_1 interior e outro, z_2 , exterior a êsse círculo; c) parabólica, para $\alpha = \pm 1$, com um ponto fixo único, $z_0 = i\alpha/\bar{b}$, no círculo unitário. Nos casos a) e b), o valor do módulo acha-se notando que a $z = \infty$, corresponde $z' = a/\bar{b}$. Temos então,

$$k = \frac{a - \bar{b}z_1}{a - \bar{b}z_2} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

e daqui se deduz $k + \frac{1}{k} = 4\alpha^2 - 2$. No caso c), a transformação $t = 1/(z-z_0)$ leva a reta Oz_0 à reta que passa pela origem e por $-1/z_0$, e portanto leva o círculo unitário a uma reta normal a esta, logo L é da forma $i\lambda/z_0$, com λ real; a forma canônica da transformação é pois,

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{i\lambda}{z_0}$$

Vamos ainda estudar o caso das transformações permutáveis.

Teorema 11. Duas transformações lineares s e t são permutáveis ($st = ts$) somente nos seguintes casos:

- 1) s ou t é a identidade.
- 2) s e t são não parabólicas e têm os mesmos pontos fixos.
- 3) s e t são elípticas e hiperbólicas (de módulo -1) e os seus quatro pontos fixos estão sobre um mesmo círculo.
- 4) s e t são parabólicas com o mesmo ponto fixo.

Demonstração: O caso 1) é evidente. Seja z_1 um ponto fixo de s : $s(z_1) = z_1$. De $st = ts$, segue-se $s = t^{-1}st$, e portanto, temos sucessivamente:

$$z_1 \xrightarrow{t} z_2 \xrightarrow{s} z_2' \xrightarrow{t^{-1}} z_1$$

ou $z_2' = t(z_1) = z_2$, * que quer dizer que t leva um ponto fixo de s em um ponto fixo de s . Se s tem dois pontos fixos, ou t conserva cada um deles e temos o caso 2), ou s permuta, e neste caso z_1 e z_2 são pontos fixos de t^2 , além dos pontos fixos de t , donde $t^2 = e$; os pontos z_1 e z_2 são equivalentes pela transformação t , logo estão no mesmo círculo do primeiro sistema desta transformação. Como a relação entre s e t é recíproca, temos também $s^2 = e$, e portanto vale a condição 3). Se s tem um único ponto fixo, este é ponto fixo também de t , e é único, pela reciprocidade, logo vale o caso 4).

Voltemos agora à linguagem geométrica no plano n.e. C . As transformações hiperbólicas que conservam esse plano são translações n.e. Uma tal translação deixa uma única reta invariante, que no plano complexo é um arco de círculo do primeiro sistema, ortogonal ao círculo unitário, ligando os dois "pontos do infinito" z_1 e z_2 . Uma transformação elítica é uma "rotação" do plano n.e. em torno do ponto fixo interior a C . Uma transformação parabólica chama-se "rotação limite", e corresponde a um deslocamento de todo o plano, conservando um único "ponto do infinito" z_0 ($|z_0| = 1$). Então, do teorema anterior deduz-se o

Corolário: Se s é uma translação do plano n.e. C e t é um movimento rígido qualquer desse plano, s e t diferentes da identidade, só poderemos ter $st = ts$ nos dois casos seguintes:

A) s e t hiperbólicas com os mesmos pontos fixos, isto é, translações n.e. com a mesma reta invariante.

B) s e t parabólicas com mesmo ponto fixo, isto é, rotações limites com mesmo ponto fixo infinito.

Demonstração: Basta notar que no caso 2) do teorema, os pon

tas fixos de s estão no círculo $|z| = 1$, que é invariante, logo s não é loxodrômica; e que o caso 3) está excluído, porque uma transformação elítica e hiperbólica leva o interior do círculo C ao exterior.

12. Homeomorfismos analíticos sobre uma superfície de Riemann.

Uma superfície de Riemann F pode admitir homeomorfismos analíticos sobre si mesma. Estes homeomorfismos formam evidentemente um grupo, que chamaremos H . Vamos porém provar que, excluídos sete casos, o grupo H é sempre descontínuo. Os quatro primeiros casos correspondem às superfícies de recobrimento de tipo elítico ou parabólico, e são: 1) a esfera; 2) o plano, ou esfera menos um ponto; 3) o cilindro, ou esfera menos dois pontos; 4) o toro, que é a superfície de Riemann compacta de genus 1. Todas essas superfícies admitem, evidentemente, grupos contínuos de homeomorfismos analíticos sobre si mesmas.

Além destas, temos 5) o disco, ou interior do círculo unitário, cujos homeomorfismos analíticos formam o grupo dos movimentos rígidos n.e. Demonstraremos mais adiante que ~~os casos os casos~~ devemos acrescentar: 6) o anel circular, ou zona esférica; 7) o disco menos um ponto.

Consideremos a superfície de Riemann F , com recobrimento universal de tipo hiperbólico representável sobre o disco C .

Teorema 12. O grupo H de homeomorfismos analíticos de F é isomorfo a Γ'/Γ , onde Γ' é o grupo dos movimentos rígidos de C permutáveis com Γ .

Demonstração: Seja $\varphi(z) = p$ o recobrimento de C sobre $F = C/\Gamma$; temos então, $\varphi^{-1}(p) = \sum_z$ que é o conjunto de pontos de C equivalentes a p por Γ . A todo elemento $h \in H$, pode-se fazer corresponder uma transformação t de C em si mesmo, que leva um conjunto \sum_z a um conjunto $\sum_{z'}$, e portanto um ponto equivalente a z a um ponto equivalente a z' . Segue-se que se $s \in \Gamma$, $t^{-1}st$ conserva cada sistema \sum_z , e portanto está em

Γ , isto é, $\Gamma t = t \Gamma$. Reciprocamente, se t é permutável com Γ , projetando a transformação t a $C/\Gamma = F$, obtemos um homeomorfismo analítico em F . Tais transformações t formam evidentemente um grupo Γ' , que contém Γ como subgrupo invariante; temos pois, $H = \Gamma'/\Gamma$.

É claro que se Γ' é descontínuo, H também o é, e reciprocamente, pois qualquer vizinhança suficientemente pequena de um ponto $z \in C$ se projeta biunivocamente sobre uma vizinhança de $p = \varphi(z)$.

Suponhamos então que H , e portanto Γ' , contenha transformações infinitesimais, isto é, que Γ' contenha uma sucessão $\{t_n\}$ que converge à identidade e . Seja s uma transformação qualquer de Γ ; sendo $t_n^{-1} s t_n \in \Gamma$, teremos também $s^{-1} t_n^{-1} s t_n \in \Gamma$, e por outro lado, $\lim_n s^{-1} t_n^{-1} s t_n = e$, e como Γ não contém transformações infinitesimais, segue-se que a partir de um certo n , temos $s^{-1} t_n^{-1} s t_n = e$, ou $s t_n = t_n s$. Pelo corolário do teorema 11, vemos que s é ou uma translação ou uma rotação limite com os mesmos pontos fixos que t_n , para $n \geq n_0$. Para outra $s' \in \Gamma$, vale o mesmo resultado para $n \geq n'_0$, e tomando $n \geq \max(n_0, n'_0)$, vemos que s e s' , e portanto todas as transformações de Γ , são do mesmo tipo e têm os mesmos pontos fixos. Temos pois somente dois casos a considerar:

1) Γ é um grupo de translações n.e. de C , com pontos fixos z_1 e z_2 sobre o círculo unitário. Podemos supôr que esses pontos sejam $\pm i$. Então, a transformação

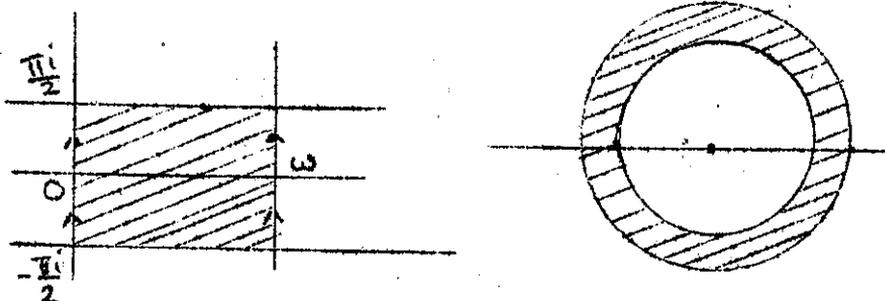
$$w = \log \frac{i - z}{i + z} = 2i \cdot \operatorname{arctg} z$$

leva o disco C na faixa P' : $-\pi/2 < \operatorname{Im}(w) < \pi/2$, sobre a qual atua um grupo descontínuo Γ_1 de translações paralelas ao eixo real. Este grupo só pode constar de transformações do tipo $w' = w + n\omega$, com $\omega > 0$ e n inteiro; o quociente P'/Γ_1 , que é homeomorfo à superfície de Riemann, se obtém identificando os la-

dos que passam por 0 e ω , de um retângulo construído sobre essa faixa. Pondo ainda $W = e^{2\pi iw/\omega}$, obtemos o anel circular de centro na origem compreendido entre os círculos de raios

$$e^{\pi^2/\omega} \quad \text{e} \quad e^{-\pi^2/\omega},$$

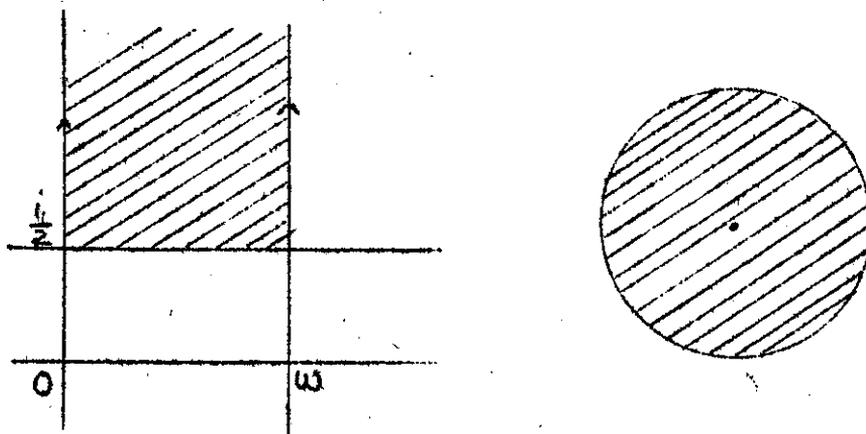
o que corresponde ao caso 6) da relação acima.



II) Se Γ é um grupo de rotações limites, com ponto fixo z_0 , podemos supôr que esse ponto fixo seja 1. A transformação $w = 1/(z-i)$ leva o círculo unitário no semi-plano $P'' : \text{Im}(w) > 1/2$, sobre o qual atua o grupo Γ_1 de translações paralelas ao eixo real. Os elementos de Γ_1 são portanto da forma $w' = w + n\omega$, com ω real, e a superfície de Riemann P''/Γ_1 , homeomorfa a C/Γ , pode-se obter da semi-faixa definida por $\text{Im}(w) > \frac{1}{2}$, $0 \leq \text{Re}(w) \leq \omega$ identificando as semi-retas extremas. Pondo ainda

$$W = e^{\frac{2\pi i}{\omega}(w - \frac{i}{2})},$$

essa faixa se transforma no círculo unitário menos a origem, o que corresponde ao caso 7). Assim fica construído o



Assim, fica demonstrado o

Teorema 13. Uma superfície de Riemann não admite nenhum grupo contínuo de transformações analíticas, com exceção dos sete casos enumerados acima.

Uma consequência importante deste teorema é o

Teorema 14. O grupo de homeomorfismos analíticos de uma superfície de Riemann compacta de genus $p \geq 2$ é finito.

Demonstração: Para qualquer ponto $p \in F$, o conjunto \sum_p dos pontos equivalentes por H é discreto, e portanto finito, pois F é compacta. Se H fosse infinito, ao menos um desses conjuntos seria infinito, e essa contradição demonstra o teorema.

Teoria da Uniformização.

1. Introdução. Enunciado do teorema e principais consequências.
2. Representação de uma superfície de Riemann simplesmente conexa na esfera.
3. Limites de determinação da função uniformizante.
4. Classificação das superfícies de Riemann.
5. Classificação das superfícies de Riemann no caso hiperbólico. Geometria não euclidiana.
6. Propriedades dos grupos de movimentos rígidos n.e..
7. Domínios fundamentais.
8. Triangulação das superfícies de Riemann.
9. Superfícies de Riemann compactas.

	Pg.
<u>Capítulo I.</u> Introdução. Superfícies de Riemann	
0. Introdução.	
1. Definição de superfície de Riemann	2
2. Zeros e singularidades de funções sobre uma superfície de Riemann	9
3. Prolongamento analítico	12
4. Construção do domínio de holomorfia de uma f função	14
<u>Capítulo II.</u> Espaços de recobrimento	
1. Grupo fundamental	22
2. Recobrimento	28
3. Levantamento de homotopias	32
4. Transitividade de recobrimentos	38
5. Levantamento de aplicações	40
6. Transformações de recobrimento	43
7. Existência de recobrimento	44
8. Grupos que operam de maneira totalmente descontínua	49
<u>Capítulo III.</u>	
1. Extensão da noção de recobrimento	51
2. Ponto de ramificação	55
3. Recobrimento ramificado	56
4. Teoremas fundamentais sobre superfícies de Riemann compactas	58
<u>Capítulo IV.</u> Topologia das superfícies compactas	
1. Simplexos euclidianos. Decomposição simpli- cial. Exemplos	71
2. Superfície. Superfície triangulada	76
3. Simplexo euclidiano orientado	78
4. Grupos de homologia	79
5. Característica de Euler-Poincaré	84
6. Polígono fundamental. Genus de uma super- fície	85
7. Talhos	91

	Pg.
Capítulo V. Diferenciais e integrais sôbre uma superfície de Riemann	91
1. Formas diferenciais lineares	93
2. Formas diferenciais lineares numa superfície de Riemann	97
3. Zeros e polos de uma forma holomorfa	99
4. Forma diferencial exterior de grau 2	100
5. Formas induzidas	103
6. Homologia singular	105
7. Integração de formas diferenciais de 1ª e 2ª graus	108
8. Teorema de Cauchy	111
9. Teorema de monodromia	112
Capítulo VI. Orientação. Integração sôbre simplexes orientados. Resíduos	116
1. Orientação	116
2. Integrais sôbre simplexes orientados	123
3. Resíduos de uma forma diferencial analítica....	125
4. Integração sôbre uma variedade orientada	127
Capítulo VII. Diferenciais abelianas em uma superfície hiperelítica	130
1. Diferenciais abelianas	130
2. Caso hiperelítico	131
Capítulo VIII. Teoremas de existência	135
1. Diferenciais harmônicas	135
2. Existência de funções harmônicas numa superfície de Riemann	138
3. Construção de diferenciais harmônicas	142
4. Número de intersecções de duas curvas	150
5. O espaço vetorial das diferenciais harmônicas em toda S	154
6. Formas abelianas numa superfície de Riemann compacta	157

	Pg.
<u>Capítulo IX.</u> Matrizes de Riemann	162
1. Matrizes de Riemann	162
2. Formas de Riemann	165
3. Relações bilineares de Riemann	167
4. Base canônica das diferenciais de 1ª espécie ..	169
5. Diferenciais normalizadas e normais	170
6. Relação bilinear para diferenciais meromorfas..	171
<u>Capítulo X.</u> Teorema de Riemann-Roch	179
1. Divisores	179
2. Teorema de Riemann-Roch	181
3. Consequências do teorema de Riemann-Roch	191
4. Cálculo do genus de uma superfície de Riemann compacta	192
5. Pontos de Weierstrass	194
6. Teorema de Abel	196
7. Classificação dos toros	197
<u>Capítulo XI.</u> Corpo das funções meromorfas sôbre uma super- fície de Riemann compacta	200
1. Par separante	200
2. Corpo das funções meromorfas	201
3. Superfícies compactas definidas abstratamente e definidas por equações-equivalência ...	201
4. Superfícies bi-racionalmente equivalentes.....	204
<u>Capítulo XII.</u> Teoria da uniformização	206
1. Introdução. Enunciado do teorema e principais consequências	206
2. Representação de uma superfície de Riemann simplesmente conexa na esfera	207
3. Limites de determinação de função uniformi- zante	214
4. Classificação das superfícies de Riemann	216
5. Classificação das superfícies de Riemann no caso hiperbólico. Geometria nao euclideana....	217

Pg.

6. Propriedades dos grupos de movimentos rígidos n.e.	220
7. Domínios fundamentais	221
8. Triangulação das superfícies de Riemann	225
9. Superfícies de Riemann compactas	226
10. Funções meromorfas sobre uma superfície de Riemann	228
11. Recordação de algumas propriedades das transformações lineares	232
12. Homeomorfismos analíticos sobre uma superfície de Riemann	237