

Funções de Operador e o Estudo do Espectro

Publicações Matemáticas

Funções de Operador e o Estudo do Espectro

Augusto Armando de Castro Júnior
UFBA



29^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2013 by Augusto Armando de Castro Júnior

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

29º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Análise em Fractais – Milton Jara
- Asymptotic Models for Surface and Internal Waves – Jean-Claude Saut
- Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos – Alberto Saa e Renato de Sá Teles
- Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções – Alex L. de Castro
- Eigenvalues on Riemannian Manifolds – Changyu Xia
- Equações Algébricas e a Teoria de Galois – Rodrigo Gondim, Maria Eulalia de Moraes Melo e Francesco Russo
- Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra – Alexandre Baraviera, Renaud Leplaideur e Artur Lopes
- Expansive Measures – Carlos A. Morales e Víctor F. Sirvent
- **Funções de Operador e o Estudo do Espectro – Augusto Armando de Castro Júnior**
- Introdução à Geometria Finsler – Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão
- Introdução aos Métodos de Crivos em Teoria dos Números – Júlio Andrade
- Otimização de Médias sobre Grafos Orientados – Eduardo Garibaldi e João Tiago Assunção Gomes

ISBN: 978-85-244-0357-6

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Conteúdo

1	A Forma de Jordan	5
1.1	Avaliando polinômios em matrizes	22
1.2	Exercícios	24
2	Pré-requisitos de Análise	26
2.1	Espaços Métricos e Teorema do Ponto Fixo	27
2.2	O Espaço Normado das Aplicações Lineares Contínuas	33
2.3	Integração de Caminhos em Espaços Vetoriais	40
2.4	A Teoria de Cauchy-Goursat	48
2.5	Exercícios	56
3	Funções de Operador	59
3.1	Funções analíticas de operadores	59
3.2	Noções Básicas de Teoria Espectral	64
3.3	Semicontinuidade das Componentes Espectrais	71
3.3.1	Distância de Hausdorff entre compactos	71
3.4	Continuidade de Espaços Invariantes	75
3.5	Isomorfismos Hiperbólicos	77
3.6	Programa de Cálculo de projeções espectrais	84
3.7	Exercícios	100
4	O Operador Adjunto e seu Espectro	102
4.1	Aplicação: generalizando o Teorema de von Neumann	115
4.2	Exercícios	121

5	Pontos Periódicos de Função de Operador	122
5.1	O caso geral em Espaços de Banach	123
5.2	Um caso particular em dimensão finita	128
A	Operadores Compactos	130
A.1	O Teorema Espectral para Operadores Compactos . . .	132
	Bibliografia	135
	Índice	137

Prefácio

O estudo de operadores lineares é de importância transcendente para a Análise e a Matemática como um todo. Não apenas porque a derivada de uma função avaliada em um ponto é uma aplicação linear, mas também porque é linear o operador que a cada função derivável associa a sua função derivada. Desse modo, já em uma boa graduação em Matemática, teoremas de decomposição de operadores em dimensão finita são abordados, procurando entender algebricamente e geometricamente como se dá a ação de tais operadores no Espaço.

Ao mesmo tempo, embora temas de Funções Analíticas e Álgebra úteis ao estudo de operadores sejam também lecionados na graduação, são apresentados de forma desconexa deste estudo (por vezes, até do resto da Análise real). Estes temas já provêm ferramentas profícuas para o entendimento do espectro e a descrição do comportamento geométrico de operadores lineares atuando em espaços de dimensão qualquer.

Infelizmente, a introdução a Teoria Espectral ocorre para a maioria de nós muito mais tarde, em um doutorado em Matemática; tipicamente, um tanto dissociada da visão por demais elementar dada na graduação em cursos de Álgebra Linear. Ademais, este estudo avançado costuma fixar-se especialmente nos operadores auto-adjuntos, sem se prolongar acerca do espectro de operadores gerais. Resultados sobre a semicontinuidade do espectro, muitas vezes não são sequer mencionados.

O presente escrito objetiva preencher esta lacuna, relacionando conhecimentos vistos de forma estanque em vários cursos de graduação, de modo a oferecer um panorama dos teoremas de decomposição de operadores tanto em espaços de dimensão finita quanto infinita.

Dedicamos o primeiro capítulo a uma revisão da Álgebra Linear e o estudo de operadores em dimensão finita, motivando com exemplos o uso da avaliação de polinômios em matrizes para cálculo de autoespaços e autovalores. Tais homomorfismos de avaliação e sua utilidade motivam a questão de estendê-los a uma classe maior de funções, digamos, analíticas. Para tal, os argumentos algébricos são insuficientes.

Iniciamos o segundo capítulo com a Análise real e Complexa necessária ao estudo do Espectro e funções de Operadores. De fato, adaptamos facilmente tais teorias para funções holomorfas tomando valores em espaços de operadores, em vez de em \mathbb{C} , como se vê em disciplinas finais de graduação.

Munidos dessa Teoria de Cauchy-Goursat adaptada a espaços de operadores, desenvolvemos no terceiro e principal capítulo do livro a teoria de funções de Operadores e provamos o que costumamos chamar de proto-versões dos teoremas de Decomposição do Espectro, os teoremas de Cálculo Funcional e Mapeamento Espectral. As consequências são profundas. Por um lado, o raio espectral nos permite obter cotas para a norma de iterados grandes do operador. São definidas as componentes espectrais, e demonstrada a existência de espaços invariantes associados as mesmas. Isso nos permite, por exemplo, definir isomorfismos hiperbólicos (e conseqüentemente, pontos fixos hiperbólicos de aplicações diferenciáveis) de uma maneira intrínseca, independente da norma (completa) que se coloca no espaço em que está definido o operador.

Feito isso, enunciamos e provamos os resultados de semicontinuidade de componentes espectrais e do espectro. Explicamos também o que vem a ser a continuidade dos espaços associados às componentes espectrais, demonstrando resultados nessa linha, alguns dos quais alegre consequência do teorema de Variedade Estável para isomorfismos hiperbólicos.

Na penúltima seção do capítulo, apresentamos um programa em linguagem \mathbb{C} que é uma aplicação surpreendente da teoria vista: permite calcular um autoespaço generalizado de um autovalor, sem que conheçamos com precisão este autovalor. Um legado longínquo do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton...

No capítulo seguinte, estudamos o adjunto de um operador e as informações que traz para o estudo do operador primal. O celebrado

Teorema Ergódico de Von Neumann é provado aqui em uma versão bem mais geral que a original.

No último capítulo, brindamos o leitor com uma aplicação simples da teoria vista, o estudo de zeros (ou pontos periódicos) isolados de funções de operadores. Interessantemente, tal estudo tem ligações com o problema de Centralizador de Hilbert, ou melhor, com critérios de quando um operador comuta com outro.

Finalizamos com um apêndice onde apresentamos uma prova simples do Teorema Espectral para operadores compactos auto-adjuntos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Comitê Organizador do 29o. Colóquio Brasileiro de Matemática, na pessoa de seu coordenador Yoshiharu Kohayakawa pela imensa atenção no processo de submissão e feitura deste livro, e as sugestões primordiais ao projeto, que resultaram em um texto de estilo bem adequado a iniciantes, inclusive com exemplos e aplicações computacionais. Quanto a isso, somos também reconhecidos à UFBA e a oportunidade que nos tem dado de ministrar o curso de Teoria Espectral no doutorado, assunto sobre o qual ora concluimos um livro avançado. Com os colegas e amigos da UFBA, tivemos conversações frutíferas sobre os assuntos aqui apresentados, especialmente com Thiago Bomfim, Paulo Varandas e Samuel Barbosa, além de Vilton Pinheiro, Vítor Araújo e Simone Ribeiro. Sou mais que grato pela acolhida carinhosa em seu lar e apoio de minha querida Elis de Oliveira e seu filho Matheus durante minhas férias de abril, quando a maior parte deste livro foi escrito.

Ressalto ainda a influência de meus professores Marcelo Viana e o saudoso Carlos Isnard, que certamente se agradaria muito deste texto. Finalmente, registro minha gratidão para com o professor Elon Lages Lima, em cujos bem escritos livros de Análise, sempre nos inspiramos na criação de mais literatura matemática de alto nível em língua portuguesa.

Augusto Armando de Castro Júnior

Universidade Federal da Bahia
Salvador, 06 de maio de 2013.

Introdução

O Espectro: Uma das mais simples e profundas idéias Matemáticas

Começemos com E a ser um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $A : E \rightarrow E$ um operador linear contínuo. Nesse contexto inicial, o espectro de A (denotado por $sp(A)$) é simplesmente o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda I - A)$ não possui inversa, onde $I : E \rightarrow E$ designa a identidade. Ou seja, nesse caso de dimensão finita o espectro é apenas o conjunto dos autovalores de A . Dos cursos de Álgebra linear, sabemos que tais autovalores possuem associados a si, espaços invariantes por A , os quais permitem descrever de modo simplificado a geometria da ação do operador no espaço. A exigência do espaço ser complexo, é primordialmente para garantir que o operador possua autovalores.

Consideremos assim o seguinte exemplo em que a matriz e todos os autovalores são reais. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

É claro que $sp(A) = \{3, 1/2\}$. Note que associados aos elementos de $sp(A)$, sabemos do curso de Álgebra linear que temos dois espaços invariantes por A . Nestes espaços, A age respectivamente como o produto pelos escalares 3 e 1/2. Como isolar, por exemplo o espaço associado a 1/2? Ora, considerando o polinômio $\frac{(x-3)}{1/2-3} \cdot x$ avaliado em

A , obtemos (usando do isomorfismo que há entre aplicações lineares e matrizes na base canônica):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Note que o polinômio $\frac{(x-3)}{1/2-3}$ zera em $x = 3$ e é 1 em $1/2$. Sua avaliação em A nos dá a matriz

$$\Pi_{1/2} := \begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

chamada projeção espectral. Ela de fato é uma projeção sobre o espaço associado ao autovalor $1/2$ (pode-se ver facilmente que $(-2/5, 1)$ é autovetor associado a $1/2$ - escrevemos o vetor como linha por comodidade de edição). Para vermos que ela é uma projeção basta observar que

$$\Pi_{1/2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Pi_{1/2}.$$

Como $\Pi_{1/2}$ é obtida via avaliação de um polinômio em A (a identidade é o mesmo que A^0), ela comuta com A . Desta comutatividade, segue-se que

$$\Pi_{1/2}(\mathbb{R}^2) \supset \Pi_{1/2}(A(\mathbb{R}^2)) = A(\Pi_{1/2}(\mathbb{R}^2)),$$

ou seja, que $A(\Pi_{1/2}(\mathbb{R}^2)) \subset \Pi_{1/2}(\mathbb{R}^2)$, que é o mesmo que dizer que a imagem $\Pi_{1/2}(\mathbb{R}^2) := E(1/2)$ é um espaço invariante por A . Em capítulos mais adiante (e de modo muito geral), veremos como consequência que $sp(A|_{E(1/2)})$ é realmente igual a $\{1/2\}$.

Em resumo: se o espectro puder ser particionado em componentes abertas e fechadas nele mesmo (as chamadas componentes espectrais), cada uma dessas componentes possui associada a si um subespaço invariante pelo operador. Veremos ainda que a restrição do operador a um desses subespaços tem seu comportamento assintótico grandemente governado pelo supremo dos valores absolutos dos números constantes na componente associada.

Quando se considera um operador linear A atuando em espaços de dimensão infinita, o espectro (cuja definição difere da anterior

só por exigir a continuidade das inversas envolvidas, condição automática quando a dimensão é finita) não consiste geralmente em um número finito de pontos. Assim precisamos considerar a avaliação de A em funções mais complicadas que polinômios, que zerem em todas as componentes espectrais menos naquela que estejamos interessados. Para tal, precisamos avaliar A em funções holomorfas cujo domínio seja desconexo. O que é possível adaptando a teoria de Análise Complexa de Cauchy para o contexto de aplicações com domínio em um aberto em \mathbb{C} e tomando valores em espaços de Banach. Essa adaptação tem aplicações muito interessantes, mesmo se retornarmos nosso foco para a dimensão finita. Tomando de uma função holomorfa, mas com domínio desconexo, que seja 1 em uma vizinhança de um certo autovalor λ_1 , e 0 em uma vizinhança dos demais, a avaliação dessa função na matriz A , da mesma forma como no exemplo acima, nos dá a projeção associada ao autoespaço (a bem da verdade, o autoespaço *generalizado!*) de λ_1 . Ora, não é necessário conhecer precisamente um autovalor, basta conhecer uma vizinhança que o isole dos demais, para definir tal função. Então conseguimos calcular com precisão seu autoespaço conhecendo com uma tosca aproximação o autovalor! Isso também permite uma outra aplicação interessante, um método de achar raízes de polinômios em \mathbb{C} , pois uma vez calculado o autoespaço, é imediato calcular o autovalor, e sabemos que autovalores são raízes do chamado polinômio característico associado a matriz. Dessa forma, dado um polinômio, este possui associado a si uma *matriz companheira*, da qual ele é o polinômio característico, suas raízes são os autovalores desta matriz, os quais calculamos de maneira fácil após calcularmos seus correspondentes autoespaços.

São aplicações que unem de uma forma bastante original duas áreas distintas da Matemática, a Álgebra Linear e a Análise Complexa, e trazem em si o sabor que convidamos o leitor a conhecer nas próximas páginas.

Capítulo 1

A Forma de Jordan

Neste capítulo relembramos muitos dos resultados sobre as representações matriciais mais simples que podemos obter para operadores lineares em dimensão finita. Como sabemos, tais resultados são o objetivo principal dos bons cursos de Álgebra Linear. Mais precisamente, dado um operador linear $A : E \rightarrow E$ definido em um espaço vetorial de dimensão finita, gostaríamos que fosse sempre possível encontrar uma base no Espaço E na qual A tivesse uma representação matricial como matriz diagonal. Ora, escrever um operador A como uma matriz diagonal aplicada aos vetores de E , quer dizer simplesmente que existe uma decomposição $E := E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$ de E , em que a restrição de A a cada $E_j, j = 1, \dots, s$ é um múltiplo da identidade. Isso, em geral, não é verdade, como mostram os próximos exemplos em $E = \mathbb{R}^2$:

Exemplo 1.1. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples nos dá que se $A(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$, então necessariamente $\lambda = 2$ e (x, y) é um múltiplo de $(1, 0)$. Ou seja, o único espaço restrito ao qual A se comporta como múltiplo é a reta gerada por $(1, 0)$, o que é insuficiente para termos uma decomposição de \mathbb{R}^2 do tipo que falamos no parágrafo anterior.

Exemplo 1.2. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Essa aplicação corresponde a composição de uma rotação (de ângulo maior que zero e menor que $\pi/2$) com um múltiplo da identidade. Logo, com cálculos análogos ao do exemplo anterior, é fácil provar A não é um múltiplo da identidade, se restrita a qualquer subespaço não trivial de \mathbb{R}^2 .

Lembramos aqui o elementar Teorema da dimensão do Núcleo e da Imagem:

Teorema 1.3. (Dimensão do Núcleo e da Imagem.) *Seja E um espaço vetorial qualquer e $A : E \rightarrow V$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais quaisquer E, V . Então a dimensão do Núcleo $\ker(A)$ de A , somada à dimensão da Imagem $A(E)$ de A , é igual a dimensão de E .*

Prova: Seja $\hat{E} \subset E$ um espaço complementar a $\ker(A)$ em E , isto é, um espaço tal que $\ker(A) \cap \hat{E} = \{0\}$ e $\ker(A) + \hat{E} = E$. Daí, $\ker(A|_{\hat{E}}) = \{0\}$ e portanto $A|_{\hat{E}}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. Dado $w \in A(E)$, existe $v = v_0 + \hat{v}$ tal que $A(v) = w$, com $v_0 \in \ker(A)$ e $\hat{v} \in \hat{E}$. Logo, $A(v) = A(v_0) + A(\hat{v}) = A(\hat{v})$, o que implica que a imagem de A é igual a de $A|_{\hat{E}}$, e portanto, ambas possuem a mesma dimensão de \hat{E} , o qual é complementar a $\ker(A)$. Donde se segue o teorema. □

Agora, suponha que λ_1 seja um autovalor de $A : E \rightarrow E$, E um espaço vetorial de dimensão finita e que $\ker(A - \lambda_1 I) \cap (A - \lambda_1 I)(E) = \{0\}$. Então pelo teorema acima, temos que $E = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus (A - \lambda_1 I)(E)$. Como $E(\lambda_1) := \ker(A - \lambda_1 I)$ é deixado invariante tanto por $(A - \lambda_1 I)$ como por $\lambda_1 I$, ele é deixado invariante por $A = (A - \lambda_1 I) + \lambda_1 I$. O mesmo raciocínio se aplica a $E_1 := (A - \lambda_1 I)(E)$, que também é invariante por A . Se $\ker(A - \lambda_j I) \cap (A - \lambda_j I)(E) = \{0\}$, $j = 1, \dots, s$, podemos aplicar recursivamente o mesmo argumento a $A|_{E_1}$, obtendo uma decomposição invariante $E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_s)$, onde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ são os autovalores de A , e $A|_{E(\lambda_j)} = \lambda_j I|_{E(\lambda_j)}$, ou seja A é diagonalizável.

Mas como vimos nos exemplos mais acima, nem sempre $\ker(A - \lambda_j I) \cap (A - \lambda_j I)(E) = \{0\}$. Desse modo, o resultado que temos em geral é o seguinte

Teorema 1.4. (Teorema da decomposição em autoespaços generalizados). *Sejam $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear complexo e $Sp(A)$ o conjunto dos autovalores de A . Então existe decomposição $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E(\lambda)$ onde:*

- $A \cdot E(\lambda) \subset E(\lambda)$.
- $(A - \lambda I)|_{E(\lambda)}$ é nilpotente, isto é, $(A - \lambda I)^k|_{E(\lambda)} \equiv 0$, para algum $k \leq \dim(E(\lambda))$.

Para a prova desse teorema, precisamos do seguinte lema:

Lema 1.5. *Seja E um espaço vetorial, $\dim(E) = n < +\infty$. Seja $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Então, existe uma decomposição em soma direta $E = E_0 \oplus E_1$ tal que*

- $T \cdot E_0 \subset E_0$ e $T|_{E_0}$ é nilpotente, com nulidade menor ou igual à dimensão de E_0 .
- $T \cdot E_1 = E_1$.

Prova: Note que se T fosse tal que $T \cdot E \cap \ker(T) = \{0\}$, nada mais teríamos a mostrar (bastaria tomar $E_0 = \ker(T)$ e $E_1 = T \cdot E$). Isso não ocorre em geral. Entretanto, podemos mostrar que ocorre para algum T^m , $1 \leq m \leq n$. De fato, as seqüências abaixo se estabilizam (em certo $m \leq n$):

$$\ker(T) \subset \ker(T^2) \subset \dots \subset \ker(T^n) \subset E,$$

$$E \supset T \cdot E \supset T^2 \cdot E \supset \dots \supset T^n \cdot E.$$

A estabilização de tais seqüências ocorre porque a dimensão de E é finita.

Note que se $\ker(T^i) = \ker(T^{i+1})$, então $\ker(T^{i+2}) = \ker(T^{i+1})$, pois se

$$\begin{aligned} v \in \ker(T^{i+2}) &\Rightarrow T^{i+2} \cdot v = 0 \Rightarrow \\ &\underbrace{T^{i+1}(T \cdot v) = T^i(T \cdot v) = 0}_{T \cdot v \in \ker(T^{i+1}) = \ker(T^i)} \end{aligned}$$

$$v \in \text{Ker}(T^{i+1}).$$

Logo, por indução, temos nesse caso $\text{Ker}(T^j) = \text{Ker}(T^i), \forall j \geq i$.

De um modo análogo, se $T^i(E) = T^{i+1}(E)$ então

$$T \cdot T^i(E) = T \cdot T^{i+1}(E) \Rightarrow T^{i+1}(E) = T^{i+2}(E)$$

Logo, $T^i(E) = T^j(E), \forall j \geq i$.

Tal implica que as sequências acima realmente se estabilizam até, no máximo seu n -ésimo termo. Além disso, são estritamente monótonas (respectivamente, crescente e decrescente) até um índice a partir dos quais elas se tornam constante.

Mostremos que esse índice é o mesmo para ambas as sequências. Suponha que a sequência de imagens de E estabiliza para $m \leq n$. Isso implica que

$$T^j \cdot T^m(E) = E_1 := T^m(E), \forall j \geq 0 \Rightarrow T(E_1) = E_1.$$

Daí, pondo $E_0 := \text{Ker}(T^m)$, temos que dado $v \in \text{Ker}(T^{m+1})$, como $T^{m+1} \cdot v = 0$ se por absurdo $v \notin \text{Ker}(T^m)$, então

$$T^m \cdot v \neq 0 \in E_1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{T|_{E_1} \text{ é isomorfismo}} \quad T \cdot (T^m \cdot v) \neq 0$$

(absurdo, pois $v \in \text{Ker}(T^{m+1})$). Observamos ademais que se \hat{m} é o primeiro índice em que a sequência de núcleos se estabiliza, então se supomos $T^{\hat{m}} \cdot E \supsetneq T^{\hat{m}+1} \cdot E = T(T^{\hat{m}} \cdot E)$, segue-se que existe $0 \neq v \in T^{\hat{m}}(E)$ tal que $T \cdot v = 0$. Seja portanto w tal que $T^{\hat{m}} \cdot w = v$. Então $w \in \text{Ker}(T^{\hat{m}+1}) \setminus \text{Ker}(T^{\hat{m}})$, absurdo. Concluimos dos parágrafos acima que $m = \hat{m}$, isto é, ambas as sequências se estabilizam exatamente para um mesmo índice. Até o índice m , as inclusões dos espaços dessas sequências são estritas. Em particular, concluimos que a dimensão de $E_0 = \text{Ker}(T^m)$ é maior ou igual a m , ou por outra, que a nulidade (menor número de iterações que anula um operador nilpotente) de $T|_{E_0}$ é menor ou igual a $\dim(E_0)$.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $\dim(E_0) + \dim(E_1) = n$. Para mostrar que $E = E_0 \oplus E_1$ basta ver então que $E_0 + E_1$ gera o espaço E . De fato, seja $x \in E$. Tomando $T^m(x) \in E_1 = T^m(E) = T^{2m}(E) \Rightarrow \exists y \in E; T^m(x) = T^{2m}(y) \Rightarrow$

$T^m(x - T^m(y)) = 0$. Logo

$$x = \underbrace{(x - T^m(y))}_{\in \text{Ker}(T^m)} + T^m(y),$$

o que implica que $E_0 + E_1$ geram E e dadas as dimensões desses espaços, E_0 e E_1 estão em soma direta. \square

Podemos agora proceder à prova do teorema de decomposição em autoespaços generalizados:

Prova: Seja $\lambda_1 \in Sp(A)$. A existência de um tal λ_1 é devida ao teorema fundamental da álgebra aplicado ao *polinômio característico* de A dado por $p(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I)$ (os autovalores de A são as raízes desse polinômio). Aplicando o lema a $T := A - \lambda_1 \cdot I$, obtemos que \mathbb{C}^n se escreve como $\mathbb{C}^n = E(\lambda_1) \oplus E_1$, com $T|_{E(\lambda_1)}$ nilpotente e $T|_{E_1}$ isomorfismo. Como sabemos que dado um autovalor (por exemplo, λ_1), existe pelo menos um autovetor v_1 que lhe corresponde, temos que $v_1 \in \text{Ker}(A - \lambda_1 \cdot I) \subset \text{Ker}((A - \lambda_1 \cdot I)^m) = E(\lambda_1)$, o que implica que $E(\lambda_1)$ é não trivial. Como já dissemos, $(A - \lambda_1)|_{E(\lambda_1)}$ é nilpotente, com nulidade $k = m \leq \dim(E(\lambda_1))$. Como $(A - \lambda_1 \cdot I)(E(\lambda_1)) \subset E(\lambda_1)$, vale ainda que

$$A(E(\lambda_1)) = (A - \lambda_1 \cdot I)(E(\lambda_1)) + \lambda_1 \cdot I(E(\lambda_1)) \subset E(\lambda_1).$$

Note ainda que $T(E_1) = E_1$, portanto, $(A - \lambda_1 \cdot I)(E_1) = E_1$, e se tomamos $v \in E_1$, então $A \cdot v - \lambda_1 \cdot v \in E_1 \Rightarrow A \cdot v \in E_1$. Donde obtemos que $A(E_1) \subset E_1$. Observamos ainda que:

- $A|_{E_0} : E_0 \rightarrow E_0$ não contém autovetor de A que não seja do autovalor λ_1 . De fato, se $\lambda \neq \lambda_1$ é um autovalor de A , se por absurdo existisse um autovetor v de λ contido em E_0 , obteríamos:

$$(A - \lambda_1) \cdot v = A \cdot v - \lambda_1 \cdot v = (\lambda - \lambda_1) \cdot v \Rightarrow$$

$$T^j \cdot v = (\lambda - \lambda_1)^j \cdot v \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

o que é uma contradição com o fato de que $T|_{E_0}$ é nilpotente.

- *Todos os outros possíveis autovetores de A , referentes aos autovalores distintos de λ_1 estão contidos em E_1 .* Realmente, suponha por absurdo que existe um autovetor $v \in E$ de um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ mas $v \notin E_1$ e $v \notin E_0 = E(\lambda_1)$. Então podemos escrever $v = v_0 + v_1$, com $v_0 \in E_0$ e $v_1 \in E_1$ não nulos. Supondo que k_1 seja a nulidade de $(A - \lambda_1)|_{E_0}$, obteríamos:

$$E_1 \not\cong (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot v = (A - \lambda_1)^{k_1} \cdot v = (A - \lambda_1)^{k_1} \cdot v_0 + (A - \lambda_1)^{k_1} \cdot v_1 =$$

$((A - \lambda_1)|_{E_0} \text{ é nilpotente})$

$$(A - \lambda_1)^{k_1} \cdot v_1 \in E_1,$$

absurdo.

Logo, $A|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$, e podemos reaplicar o lema, dessa vez tomando um autovalor λ_2 de $A|_{E_1}$. Aí obtemos $\mathbb{C}^n = E(\lambda_1) \oplus \underbrace{E(\lambda_2) \oplus E_2}_{E_1}$; continuando nesse procedimento até que $E_j = \{0\}$ (e

por conseguinte, sejam exauridos todos os autovalores de A , que são em número finito pois o espaço tem dimensão finita) segue-se o teorema. \square

Corolário 1.6. *Todo operador linear $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ se escreve como $A = D + N$, com $D \cdot N = N \cdot D$, onde D é um operador diagonalizável e N é nilpotente. Além disso, tal decomposição é única.*

Prova: Definamos o operador linear D em \mathbb{C}^n definindo-o em cada $E(\lambda_i)$ da decomposição em soma direta $\mathbb{C}^n = \oplus_{\lambda \in Sp(A)} E(\lambda) = \oplus_{j=1}^r E(\lambda_j)$. De fato, definimos $D|_{E(\lambda_j)} := \lambda_j \cdot I|_{E(\lambda_j)}$, o que implica definirmos $N|_{E(\lambda_j)} := (A - \lambda_j \cdot I)|_{E(\lambda_j)}$.

Seja

$$\beta = \{v_{11}, \dots, v_{1d_1}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rd_r}\},$$

onde

$$d_j = \dim(E(\lambda_j)) \text{ e } \{v_{j1}, \dots, v_{jd_j}\}$$

constitui uma base de $E(\lambda_j)$. Como os $E(\lambda_j)$ estão em soma direta,

temos que β é base de \mathbb{C}^n . Daí,

$$\begin{array}{l}
 D \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1, \quad \forall v_1 \in E(\lambda_1) \\
 \vdots \\
 D \cdot v_r = \lambda_r \cdot v_r, \quad \forall v_r \in E(\lambda_r)
 \end{array}
 \Rightarrow D_\beta = \begin{pmatrix}
 \lambda_1 & 0 & \dots & & 0 \\
 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\
 0 & \ddots & \lambda_1 & 0 & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & \ddots \\
 0 & \dots & & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & \dots & & & 0 & \lambda_r
 \end{pmatrix}$$

Portanto, D é diagonalizável. Que N é nilpotente, já mostramos (imediato do teorema de decomposição em autoespaços generalizados). Note que

$$A|_{E(\lambda_j)} = D|_{E(\lambda_j)} + N|_{E(\lambda_j)} \Rightarrow A = D + N.$$

Vejamos que vale $D \cdot N = N \cdot D$. Para tal, basta mostrarmos que, dado $v \in E(\lambda)$, para $E(\lambda)$ qualquer, vale $D \cdot N \cdot v = N \cdot D \cdot v$. E de fato, neste caso temos:

$$D \cdot N \cdot v = D \cdot N|_{E(\lambda)} \cdot v = D \cdot \underbrace{(A - \lambda I)|_{E(\lambda)}}_{\subset E(\lambda)} \cdot v =$$

$$D|_{E(\lambda)} \cdot (A - \lambda I)|_{E(\lambda)} \cdot v = (\lambda I)|_{E(\lambda)} \cdot (A - \lambda I)|_{E(\lambda)} \cdot v =$$

$$(A - \lambda I)|_{E(\lambda)} \cdot (\lambda I)|_{E(\lambda)} \cdot v = N|_{E(\lambda)} \cdot D|_{E(\lambda)} \cdot v = N \cdot D \cdot v.$$

Só nos resta agora mostrar que a decomposição acima ($A = D + N$, com D diagonalizável, N nilpotente e $D \cdot N = N \cdot D$) é única.

De fato, se $D + N = A = N' + D'$, como sempre, basta que nos restrinjamos a mostrar que $N = N'$ e $D = D'$ se restritos a um $E(\lambda)$ fixado arbitrário.

Restritos a tal $E(\lambda)$, temos:

$$\lambda I + (A - \lambda I) = N' + D' \Rightarrow \lambda I - D' = N' - (A - \lambda I).$$

Note que todos os operadores comutam com A , e, do acima, vemos que comutam entre si. Lembramos que se dois operadores diagonalizáveis comutam, existe uma base de autovetores comum a ambos,

isto é, eles são simultaneamente diagonalizáveis (a recíproca também é obviamente válida). Um esboço de prova desse fato é o seguinte: fixado um autoespaço $E(\lambda_j)$ de D , com $v_j \in E(\lambda_j)$, temos:

$$D \cdot D' \cdot v_j = D' \cdot D \cdot v_j = D' \cdot \lambda_j \cdot v_j = \lambda_j \cdot D' \cdot v_j \Rightarrow D' \cdot v_j \in E(\lambda_j),$$

ou seja, os autoespaços de D são invariantes por D' (e vice-versa). Tal também implica (permutando os papéis de D e D') que cada autoespaço de D é soma de autoespaços de D' ou vice-versa (está contido em um autoespaço de D'). Desse modo, é possível decompor o espaço E em uma soma direta de autoespaços de D ou D' com a propriedade de que cada subespaço dessa soma não contém propriamente nenhum outro autoespaço de D ou D' . Em qualquer base obtida reunindo bases dos autoespaços dessa soma direta, ambos os operadores D , D' são diagonais. Em particular, temos que $D - D'$ é diagonalizável, e diagonal naquela base.

Seja k a nulidade de N e k' a nulidade de N' . Considerando que $D - D' = N' - N$, elevando ambos os membros desta equação a $(k + k')$, temos, usando o binômio de Newton (veja que N' comuta com $N|_{E(\lambda)}$) que o segundo membro é zero. Isto implica que $(D - D')^{k+k'} = 0$, o que para um operador diagonalizável implica que $(D - D') = 0$, isto é, $D = D'$, e daí, $N = N'$. \square

Corolário 1.7. (*Teorema de Cayley-Hamilton*). *Existe um polinômio p de grau menor ou igual a n tal que $p(A) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.*

Prova: Tome como polinômio $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_r)^{k_r}$. Considere então a matriz $Z = p(A) = (A - \lambda_1 I)^{k_1} \cdots (A - \lambda_r I)^{k_r}$ (lembramos que k_j é a nulidade do operador $(A - \lambda_j)|_{E(\lambda_j)}$). Para mostrar que $Z = 0$, basta mostrar que $Z|_{E(\lambda)} = 0$, com $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$. Seja $v \in E(\lambda)$. Daí, como A comuta consigo mesma e com $\lambda_j I$, temos que

$$\begin{aligned} Z \cdot v &= (A - \lambda_1)^{k_1} \cdots (A - \lambda)^{k(\lambda)} \cdots (A - \lambda_r)^{k_r} \cdot v = \\ &= (A - \lambda_1)^{k_1} \cdots (A - \lambda_r)^{k_r} \cdot (A - \lambda)^{k(\lambda)} \cdot v = 0, \end{aligned}$$

pois $(A - \lambda)^{k(\lambda)} \cdot v = 0$, para todo $v \in E(\lambda)$. \square

Lema 1.8. (*A ser usado no Teorema da forma de Jordan*). *Seja E um espaço vetorial, $\dim(E) < +\infty$ e seja $T : E \rightarrow E$ um operador linear nilpotente, isto é, existe um primeiro $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$T^k \equiv 0$. Então existe uma base de E formada por um número finito de sequências (também finitas) linearmente independentes $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,j_1}\}, \dots, \{v_{q,1}, \dots, v_{q,j_q}\}$ tais que $T \cdot v_{s,j_s} = v_{s,j_s-1} \dots T \cdot v_{s,1} = 0$, com $s = 1 \dots q$.

Prova: Vimos do lema anterior que

$$\{0\} = \text{Ker}(T^0) \subsetneq \text{Ker}(T) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(T^k) = E.$$

Comecemos nosso algoritmo por E^{k-1} , um espaço complementar de $\text{Ker}(T^{k-1})$ dentro de $\text{Ker}(T^k) = E$. Note que

$$T^s(E^{k-1}) \cap \text{Ker}(T^j) = \{0\}, \forall 1 \leq s \leq k-1 \text{ e } \forall 0 \leq j \leq k-s-1.$$

Em particular, $T^i(E^{k-1})$ é imagem isomorfa de E^{k-1} . Fixe $v_{1,k-1} \dots v_{q',k-1}$ uma base de E^{k-1} e considere seus iterados $T^{k-s}(v_{r,k-1}) := v_{r,s}$, com $k \geq s \geq 1$ e $1 \leq r \leq q'$, o que já nos dá se não todas, algumas das sequências do enunciado. De fato, para ver que os espaços

$$E^{k-1}, T \cdot E^{k-1}, \dots, T^{k-1} \cdot E^{k-1},$$

estão em soma direta, observamos inicialmente que todo vetor não nulo em E^{k-1} precisa ser iterado exatamente (no mínimo) k vezes por T para ser levado ao zero. Isso implica que cada vetor não nulo de $T \cdot E^{k-1}$ precisa ser iterado $k-1$ vezes por T para ser levado ao zero, e assim por diante. Vemos deste raciocínio que os espaços considerados têm interseção dois a dois igual a $\{0\}$. Para vermos que estão em soma direta (embora esta soma não perfaça necessariamente o espaço E), seja $v_s \neq 0$ pertencente a um dos espaços acima, digamos $v_s \in T^{k-s} \cdot E^{k-1}$. Daí, $T^s \cdot v_s = 0$, e $T^j(v_s) \neq 0, \forall 0 \leq j < s$. Mostremos que v_s não pode ser expresso como combinação linear de vetores nos demais espaços, do tipo:

$$v_s = \sum_{j \neq s} \alpha_j v_j, v_j \in T^{k-j} E^{k-1}, \alpha_j \text{ não todos nulos.}$$

Realmente, se pudesse, teríamos, podemos mostrar que todos os α_j são nulos. Procedamos pelo princípio da Boa Ordenação. Seja $B =$

$\{j > s; \alpha_j \neq 0\}$. Mostremos que B é vazio. De fato, suponha que não. Seja r o máximo de B . Daí,

$$0 = T^{r-1}v_s = \sum_{j \neq s} \alpha_j T^{r-1}v_j = \alpha_r T^{r-1}v_r \Rightarrow \alpha_r = 0; \text{ (absurdo).}$$

Assim, todos os α_j com $j > s$ são nulos. Por outro lado, daí obtemos que

$$0 \neq T^{s-1} \cdot v_s = \sum_{j < s} \alpha_j T^{s-1}v_j = 0,$$

o que implica que v_s não pode ser expresso segundo uma tal combinação de vetores.

Agora, tome $E^{k-2} \supset T(E^{k-1})$ um espaço complementar de $\text{Ker}(T^{k-2})$ dentro de $\text{Ker}(T^{k-1})$. Repetimos o mesmo raciocínio de antes, a E^{k-2} , descartando as sequências de vetores já contidas nas sequências de E^{k-1} . Como o espaço tem dimensão finita, em um número finito de passos o lema está provado. \square

Teorema 1.9. (Forma de Jordan- caso complexo). *Seja $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear com autovalores complexos distintos $\lambda_1 \dots \lambda_r, 1 \leq r \leq n$. Então, existe uma base β de \mathbb{C}^n na qual o operador é representado pela matriz*

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & 0 \text{ ou } 1 & & \\ 0 & \dots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & \lambda_r & 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Prova: Aplicamos o último lema a $(A - \lambda_k \cdot I)|_{E(\lambda_k)}$. Pelo lema, existe uma base β_k de $E(\lambda_k)$ em que $(A - \lambda_k \cdot I)|_{E(\lambda_k)}$ é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Note que nessa base, como em qualquer outra base, $(\lambda_k \cdot I)|_{E(\lambda_k)}$ se escreve como:

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Como $A|_{E(\lambda_k)} = (\lambda_k \cdot I)|_{E(\lambda_k)} + (A - \lambda_k \cdot I)|_{E(\lambda_k)}$ segue-se que $A|_{E(\lambda_k)}$ se escreve na base β_k como:

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \text{ ou } 1 & \\ 0 & \dots & & \lambda_k & \end{pmatrix}$$

Tomando a base ordenada β formada pelos vetores em β_1, \dots, β_r , da invariância de cada $E(\lambda_k)$ obtemos que o operador A na base β se escreve como:

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \text{ ou } 1 & & & \\ 0 & \dots & & \lambda_1 & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & & \lambda_r & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_r & \ddots & 0 & \dots \\ & & & & & 0 & \dots & \ddots & 0 \text{ ou } 1 & \\ 0 & \dots & & & & 0 & \dots & & \lambda_r & \end{pmatrix}$$

□

Definição 1.10. (Complexificado de um operador real). Considere um operador linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)_1 \oplus (\mathbb{R}^n)_2$, onde $(\mathbb{R}^n)_1 := (\mathbb{R}^n, 0)$ e $(\mathbb{R}^n)_2 := (0, \mathbb{R}^n)$. Se $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, então definimos o *complexificado* $\tilde{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ o operador estendendo A dado por

$$\tilde{A} \cdot v := (A \cdot v_1, A \cdot v_2) = A \cdot v_1 + iA \cdot v_2.$$

Definição 1.11. (**A aplicação conjugação** $\text{---} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$). Dado $v \in \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2)$, a aplicação *conjugação* $\text{---} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é o isomorfismo linear dado por

$$\bar{v} = \overline{(v_1, v_2)} := (v_1, -v_2).$$

Proposição 1.12. *Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear real. Então o complexificado \tilde{A} de A comuta com a aplicação de conjugação, isto é, $\tilde{A} \cdot v = \tilde{A} \cdot \bar{v}$, $\forall v \in \mathbb{C}^n$.*

Prova: A prova é direta:

$$\overline{\tilde{A} \cdot v} = (A \cdot v_1, -A \cdot v_2) = (A \cdot v_1, A \cdot -v_2) = \tilde{A} \cdot \bar{v}.$$

□

Teorema 1.13. (**Forma de Jordan- caso real**). *Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear com autovalores reais $\lambda_1 \dots \lambda_r$ e autovalores complexos não reais $a_1 + ib_1, \dots, a_s + ib_s$. Então, existe uma base β de \mathbb{R}^n na qual o operador é representado pela matriz em blocos na diagonal*

$$A_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & 0 & J_r & \\ \vdots & 0 & & \tilde{J}_1 & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tilde{J}_s \end{pmatrix},$$

onde cada $J_k, 1 \leq k \leq r$ é da forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \text{ ou } 1 & \\ 0 & \dots & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

e cada $\tilde{J}_l, 1 \leq l \leq s$ é da forma:

$$\begin{pmatrix} a_l & b_l & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b_l & a_l & 0 & c_1 & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \ddots & c_d & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & & c_d \\ 0 & & & & a_l & & b_l \\ 0 & \dots & & 0 & -b_l & & a_l \end{pmatrix},$$

onde cada $c_e = 1$ ou $c_e = 0$, $e = 1 \dots d$.

Prova: Note que identificamos A com $\tilde{A}|_{(\mathbb{R}^n)_1}$. Dividiremos a prova em vários passos, por razões didáticas:

1. Como \tilde{A} provem de um operador real, se λ é autovalor de \tilde{A} , o mesmo vale para $\bar{\lambda}$, e se v é autovetor correspondente a λ , \bar{v} é autovetor associado a $\bar{\lambda}$. De fato, como \tilde{A} é o complexificado de um operador real, a decomposição $\mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^n)_1 \oplus (\mathbb{R}^n)_2$ é invariante por \tilde{A} , isto é, $\tilde{A}|_{(\mathbb{R}^n)_1} \cdot (\mathbb{R}^n)_1 \subset (\mathbb{R}^n)_1$ e $\tilde{A}|_{(\mathbb{R}^n)_2} \cdot (\mathbb{R}^n)_2 \subset (\mathbb{R}^n)_2$. Daí,

$$\overline{\tilde{A} \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v} \Rightarrow \tilde{A} \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}.$$

2. Como A é operador real, se λ é um autovalor qualquer de \tilde{A} , então $\overline{E(\lambda)} \supset \overline{\tilde{A} \cdot E(\lambda)} = \tilde{A} \cdot \overline{E(\lambda)}$, o que implica que $\overline{E(\lambda)}$ é deixado invariante por \tilde{A} . Ademais,

$$\begin{aligned} (\tilde{A} - \lambda)^{k_j}(E(\lambda)) = 0 &\Leftrightarrow \overline{(\tilde{A} - \lambda)^{k_\lambda}(E(\lambda))} \\ &= 0 \Leftrightarrow (\tilde{A} - \bar{\lambda})^{k_\lambda}(\overline{E(\lambda)}) = 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $(\tilde{A} - \lambda)|_{E(\lambda)}$ e $(\tilde{A} - \bar{\lambda})|_{\overline{E(\lambda)}}$ são operadores nilpotentes de mesma nulidade. Daí, $\bar{\lambda}$ é o único autovalor de \tilde{A} em $\overline{E(\lambda)}$. Além do mais, lembramos que $E(\bar{\lambda}) = \text{Ker}((\tilde{A} - \bar{\lambda})^{d_\lambda}) \supset \text{Ker}((\tilde{A} - \bar{\lambda})^{k_\lambda})$, conforme o lema 1.5. Em particular, $\overline{E(\lambda)} \subset E(\bar{\lambda})$. Trocando λ com $\bar{\lambda}$, obtemos que $E(\bar{\lambda}) \subset E(\lambda)$, donde tiramos, já que a conjugação é um isomorfismo (sesquilinear), que $\dim(E(\lambda)) = \dim(E(\bar{\lambda}))$ e que $\overline{E(\lambda)} = E(\bar{\lambda})$.

3. Como já observamos, $\tilde{A}|_{(\mathbb{R}^n)_1}$ é (identificado com) nosso A original. Note que se λ_j é um autovalor real, do item anterior temos $E(\lambda_j) = \overline{E(\lambda_j)} = E(\overline{\lambda_j})$. Tal implica que tomando w_1, \dots, w_{d_j} uma base de $E(\lambda_j)$ e a base formada pelos conjugados $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_{d_j}}$ então as partes reais $(w_1 + \overline{w_1})/2, \dots, (w_{d_j} + \overline{w_{d_j}})/2$ e imaginárias $(w_1 - \overline{w_1})/2i, \dots, (w_{d_j} - \overline{w_{d_j}})/2i$ pertencem a $E(\lambda_j)$. Ademais, tais vetores (que são reais) geram $E(\lambda_j)$ enquanto espaço complexo, já que por exemplo, geram w_1, \dots, w_{d_j} . Em particular, do conjunto dessas partes reais e imaginárias, podemos extrair uma base de vetores reais de $E(\lambda_j)$. Os vetores desta base são linearmente independentes sobre \mathbb{C} , o que quer dizer que são linearmente independentes enquanto vetores reais, sobre \mathbb{R} . Isso significa que esses vetores são uma base do espaço real $E(\lambda_j) \cap (\mathbb{R}^n)_1$, já que tal espaço tem como dimensão real máxima igual à dimensão complexa de $E(\lambda_j)$. Pelo teorema da decomposição em autoespaços generalizados, $\tilde{A}|_{E(\lambda_j)} = \lambda_j \cdot I|_{E(\lambda_j)} + (\tilde{A} - \lambda_j \cdot I)|_{E(\lambda_j)}$. Note que tais parcelas deixam invariante $(\mathbb{R}^n)_1$, pois $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Como $(\tilde{A} - \lambda_j \cdot I)|_{E(\lambda_j)}$ é nilpotente, e deixa $E(\lambda_j) \cap (\mathbb{R}^n)_1$ invariante, podemos aplicar à mesma o lema 1.8, obtendo uma base de vetores (reais) na qual $(\tilde{A} - \lambda_j \cdot I)|_{E(\lambda_j) \cap (\mathbb{R}^n)_1}$ se escreve como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & 0 \text{ ou } 1 & \\ 0 & \dots & & 0 & \end{pmatrix}$$

Definindo $E := \bigoplus_{j=1}^r E(\lambda_j)$, e justapondo as bases de vetores reais encontradas acima para diferentes valores de j , em uma base γ de do espaço $E \cap (\mathbb{R}^n)_1$, seguindo a prova do teorema da

forma de Jordan, versão complexa, temos que:

$$(A|_{E \cap (\mathbb{R}^n)_1})_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \text{ ou } 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \text{ ou } 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda_1 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & 0 \text{ ou } 1 & 0 \\ 0 & & & \dots & 0 & \ddots & 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \dots & & \dots & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

4. No caso dos autoespaços generalizados de autovalores complexos com parte imaginária não nula, a situação é uma pouco diversa. Começemos por fixar um autovalor λ complexo (e com parte imaginária não nula) de \tilde{A} . Observamos que nesse caso, $\dim(E(\lambda) \cap (\mathbb{R}^n)_1) = 0$. De fato, nesse caso $\lambda \neq \bar{\lambda}$, e como vimos $\overline{E(\lambda)} = E(\bar{\lambda})$. Logo

$$E(\lambda) \cap E(\bar{\lambda}) = \{0\} \Rightarrow E(\lambda) \cap \overline{E(\lambda)} = \{0\},$$

o que significa que $E(\lambda)$ (assim como $E(\bar{\lambda})$) não possui vetores reais.

5. Por outro lado, o espaço $\hat{E} = E(\lambda) \oplus E(\bar{\lambda})$ possui uma intersecção não trivial com $(\mathbb{R}^n)^1$. De fato, dado um vetor $v = (v_1, v_2) = v_1 + i \cdot v_2 \in E(\lambda)$ sua parte real v_1 pertence a \hat{E} , bem como sua parte imaginária v_2 :

$$v_1 = (v + \bar{v})/2; \quad v_2 = (v - \bar{v})/(2 \cdot i),$$

o que em outras palavras quer dizer que $(v_1, 0) \in \hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1$ e que também $(v_2, 0) \in \hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1$.

6. Observe que se $w_1, \dots, w_{d_\lambda}$ constituem uma base que deixa $\tilde{A}|_{E(\lambda)}$ na forma de Jordan (complexa), o mesmo pode ser dito de $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{d_\lambda}$ com respeito a $\tilde{A}|_{\overline{E(\lambda)}}$. Dado $v \in \hat{E}$, designemos sua parte real por v' e sua parte imaginária por v'' que, como vimos acima, pertencem também a $\hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1$.

Portanto, dada a base η de \hat{E} dada por $w_1, \dots, w_{d_\lambda}, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{d_\lambda}}$ os vetores $w'_1, w''_1, \dots, w'_{d_\lambda}, w''_{d_\lambda}$ constituem uma base γ_λ de \hat{E} como espaço complexo, bem como de $\hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1$, como espaço sobre \mathbb{R} . De fato, para ver isso, basta observar que o conjunto $\{w'_1, w''_1, \dots, w'_{d_\lambda}, w''_{d_\lambda}\}$ gera a base η acima, e tem a cardinalidade da dimensão (complexa) de \hat{E} , logo tais vetores são linearmente independentes (olhando-os como vetores complexos). Ou seja, tais vetores constituem uma base do espaço complexo \hat{E} . Mas se são linearmente independentes sobre o corpo dos complexos, (sendo também vetores reais), também o são sobre o corpo dos reais. Como a dimensão real de $\hat{E} \cap \mathbb{R}^n$ é (no máximo) $2 \cdot d_\lambda$, isso implica a afirmação de que $\{w'_1, w''_1, \dots, w'_{d_\lambda}, w''_{d_\lambda}\}$ são uma base de $\hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1$, como espaço real.

7. Agora só falta mostrar que na base $\gamma_\lambda \tilde{A}|_{\hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1}$ tem a forma de J_λ do enunciado. Isto é obtido por cálculo direto, pois sabemos qual a representação de \tilde{A} na base η de \hat{E} e como ela se relaciona com a base (como espaço sobre \mathbb{R}) γ_λ . Realmente, temos que

$$(\tilde{A}|_{\hat{E}})_\eta = \begin{pmatrix} \lambda & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & \lambda & & 0 \\ & & & \bar{\lambda} & c_1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & & & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix},$$

onde $c_1, \dots, c_{d_\lambda-1}$ são constantes que podem ser igual a zero ou 1. A j -ésima coluna ($1 \leq j \leq d_\lambda$) acima é a representação de $\tilde{A}|_{\hat{E}} \cdot w_j$ na base η . Do mesmo modo, a $(d_\lambda + j)$ -ésima coluna ($1 \leq j \leq d_\lambda$) acima é a representação de $\tilde{A}|_{\hat{E}} \cdot \overline{w_j}$ na base η .

Temos, por exemplo, que:

$$\tilde{A} \cdot w'_1 \frac{\tilde{A} \cdot w_1 + \tilde{A} \overline{w_1}}{2} = \frac{\lambda \cdot w_1 + \bar{\lambda} \cdot \overline{w_1}}{2} =$$

(escrevendo $\lambda = a + bi$)

$$\frac{(a + bi) \cdot (w'_1 + i \cdot w''_1) + (a - bi) \cdot (w'_1 - i \cdot w''_1)}{2} = a \cdot w'_1 - b \cdot w''_1.$$

Similarmente, calculamos que $\tilde{A} \cdot w''_1 = b \cdot w'_1 + a \cdot w''_1$. Só com essas contas, já obtivemos que

$$(\tilde{A}|_{\hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1})_{\gamma\lambda} = \begin{pmatrix} a & b & ? & \dots \\ -b & a & ? & \\ 0 & 0 & ? & \\ \vdots & \vdots & ? & \end{pmatrix}.$$

Temos, atuando \tilde{A} em w'_2 e w''_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot w'_2 &= \frac{\tilde{A} \cdot w_2 + \tilde{A} \cdot \bar{w}_2}{2} = \frac{c_1 \cdot w_1 + \lambda \cdot w_2 + c_1 \cdot \bar{w}_1 + \bar{\lambda} \bar{w}_2}{2} = \\ & c_1 \cdot w'_1 + a \cdot w'_2 - b \cdot w''_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot w''_2 &= \frac{\tilde{A} \cdot w_2 - \tilde{A} \cdot \bar{w}_2}{2i} = \frac{c_1 \cdot w_1 + \lambda \cdot w_2 - c_1 \cdot \bar{w}_1 - \bar{\lambda} \bar{w}_2}{2i} = \\ & c_1 \cdot w''_1 + b \cdot w'_2 + a \cdot w''_2. \end{aligned}$$

Tais computações já nos dão a forma:

$$(\tilde{A}|_{\hat{E} \cap (\mathbb{R}^n)_1})_{\gamma\lambda} = \begin{pmatrix} a & b & c_1 & 0 & ? & \dots \\ -b & a & 0 & c_1 & ? & \\ 0 & 0 & a & b & ? & \\ \vdots & \vdots & -b & a & ? & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & \end{pmatrix}.$$

Prosseguindo nessas mesmas contas, obtemos a forma desejada, juxtapondo as (sub)bases γ e as diversas γ_λ de modo a obter uma base de $(\mathbb{R}^n)_1$.

Observação 1.14. Quando tratarmos de operadores reais, designaremos por $E(\lambda)$ o autoespaço generalizado real associado a λ , se λ for real. Caso contrário, abusando um pouco da notação, designaremos por $E(\lambda)$ a soma dos espaços complexos associados a λ e $\bar{\lambda}$, intersectada com $(\mathbb{R}^n)_1 \simeq \mathbb{R}^n$. \square

1.1 Avaliando polinômios em matrizes

Considere uma matriz quadrada J_λ de dimensão $d_\lambda \cdot d_\lambda$ da forma

$$J_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Considere um polinômio qualquer da forma $f(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$. Que matriz obtemos se avaliarmos esse polinômio na matriz J_λ ?

Afirmamos que obtemos a matriz

$$f(J_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & Df(\lambda) & \frac{D^2 f(\lambda)}{2} & \frac{D^3 f(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{D^{d-1} f(\lambda)}{(d-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & Df(\lambda) & \frac{D^2 f(\lambda)}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & Df(\lambda) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

De fato, denotando por N a parte nilpotente da matriz J_λ , do binômio de Newton temos que

$$(\lambda I + N)^n = \left\{ \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\lambda^{n-p} I N^p) \right\}.$$

Como a matriz

$$N^p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{pmatrix},$$

com a p -ésima diagonal acima da diagonal principal formada de 1's, e o restante das entradas da matriz zerada, temos que

$$\left\{ \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\lambda^{n-p} I N^p) \right\} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{D^2 f(\lambda)}{2} & \frac{D^3 f(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{D^{d-1} f(\lambda)}{(d-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & n\lambda^{n-1} & \frac{D^2 f(\lambda)}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Como $f(J_\lambda) = \sum_{n=0}^k \sum_{p=0}^n a_n \binom{n}{p} (\lambda^{n-p} I N^p)$, segue-se a interessante afirmação.

Agora, suponha que temos uma matriz na forma de Jordan, digamos

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_s} \end{pmatrix},$$

onde cada J_{λ_j} é uma submatriz quadrada da forma $\lambda_j I + N_j$, com N_j uma matriz nilpotente, com 1's ou 0's na diagonal imediatamente acima da principal.

Claro está que a projeção sobre o autoespaço generalizado associado ao autovalor λ_1 é simplesmente

$$\Pi_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_{d_1} é uma submatriz tipo identidade de mesma dimensão $d_1 \times d_1$ que J_{λ_1} .

Supondo que sejamos masoquistas, como podemos obter Π_{λ_1} a partir de um polinômio f avaliado em J ? Ora, basta encontrarmos um polinômio que se anule em $\lambda_2, \dots, \lambda_s$, que seja 1 em λ_1 e cujas derivadas de ordem, digamos, até $\max\{d_j, j = 1, \dots, s\}$, se anulem em $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Do que vimos mais acima, tal implicará que

$$f(J) = \begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E se A fosse uma matriz qualquer? Ah, agora vem a parte em que deixamos de ser masoquistas, pois a projeção sobre um determinado autoespaço generalizado não é trivialmente dada. Ora, sabemos que a matriz A é equivalente a uma matriz de Jordan, ou seja, existe uma matriz invertível P tal que $A = PJP^{-1}$. Mas aí, $f(A) = Pf(J)P^{-1}$ é tal que

$$f^2(A) = P(f(J))^2P^{-1} = Pf(J)P^{-1},$$

o que implica que $f(A)$ é uma projeção. Ademais, da conjugação vemos ainda que $f(A)$ zera exatamente nos autoespaços generalizados não associados a λ_1 , e é a identidade em $E(\lambda_1)$. Para ver isso, observe primeiro que da comutatividade entre A e $f(A)$ segue-se que $f(A)(E) := E_1$ é um espaço A -invariante:

$$A(E_1) = A(f(A)(E)) = f(A)(A(E)) \subset f(A)(E) = E_1.$$

Ademais, vê-se que $E_1 = f(A)E$ está contido no $\ker((A - \lambda_1 I)^{d_1})$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)^{d_1} f(A)(E) &= (Af(A) - \lambda_1 f(A))^{d_1}(E) = \\ &= (PJP^{-1}Pf(J)P^{-1} - \lambda_1 Pf(J)P^{-1})^{d_1}(E) = \\ &= (P(Jf(J) - \lambda_1 f(J))P^{-1})^{d_1}(E) = \\ &= P(Jf(J) - \lambda_1 f(J))^{d_1}P^{-1}(E) = \\ &= P(Jf(J) - \lambda_1 f(J))^{d_1}(E) = 0 \end{aligned}$$

Usando de estimativa análoga para a soma dos demais subespaços de A , concluímos por argumento de dimensão que $E_1 = \ker((A - \lambda_1 I)^{d_1}) = E(\lambda_1)$.

1.2 Exercícios

1. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ um polinômio mônico de grau n . Seja A a matriz companheira de p , isto é, a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

cujos polinômios característicos (façam as contas!) é p .

Se $n \geq 2$ e p possui uma única raiz λ_1 com multiplicidade n , qual é a forma de Jordan de A ?

2. Sejam λ_1 e λ_2 dois números complexos. Encontre um polinômio que seja 1 em λ_1 , seja 0 em λ_2 , e sua primeira derivada se anule em λ_1 e λ_2 . E se pedirmos que todas as suas derivadas até uma certa ordem $k \geq 1$ se anulassem em λ_1 e λ_2 ?
3. Seja A a matriz dada por

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre um polinômio que, avaliado em A , retorne a projeção com respeito ao autoespaço associado ao autovalor 3.

Capítulo 2

Pré-requisitos de Análise

A Análise conta com várias ferramentas para resolver equações matemáticas e prover argumentos para seus Teoremas. Duas das mais gerais e poderosas são o Teorema do Ponto Fixo para Contrações e a Teoria de Cauchy-Goursat.

O primeiro responde pela maior parte das provas de Existência e Unicidade da Análise. Basicamente, ele diz que uma equação da forma $F(x) = x$, com $F : X \rightarrow X$ uma contração de um espaço métrico completo nele mesmo, possui uma única solução. Ademais, o teorema dá o método para achá-la de maneira super eficiente (exponencialmente rápida).

A Teoria de Cauchy-Goursat de funções holomorfas traz técnicas completamente diversas. Tipicamente, seu contexto não é mais de espaços completos quaisquer, mas o corpo dos Complexos. Em sua base, encontra-se a seguinte questão: quando uma aplicação (holomorfa em um aberto, de fato analítica) é a derivada de alguém? Essa é uma pergunta clássica, que segue o sabor do Teorema Fundamental do Cálculo e de fato o traz no âmago de sua solução. Claro, uma vez que uma aplicação seja a derivada de uma outra, é fácil recuperar esta última (a partir de sua derivada) aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo a sua restrição a caminhos. Veremos que ainda

mais interessante, é o que ocorre quando a aplicação falha em ser derivada de outra.

Na próxima seção, enunciaremos e provaremos o Teorema do Ponto Fixo para Contrações. Concomitantemente, definiremos espaços métricos completos e seu exemplo mais relevante para nosso texto, os espaços vetoriais normados completos (espaços de Banach).

Depois, apresentaremos o espaço de Banach das Aplicações lineares Contínuas e suas propriedades, alvo principal do nosso curso. Nas duas últimas seções do capítulo Introduziremos a noção de Integração de caminhos tomando valores em espaços de Banach, além de generalizarmos a teoria de Cauchy-Goursat para o contexto destes espaços.

2.1 Espaços Métricos e Teorema do Ponto Fixo

Definição 2.1. (Métrica e espaço métrico.) Uma *métrica* em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ tal que, dados quaisquer $x, y, z \in X$, valem:

$$\text{d1) } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{d2) } d(x, y) = d(y, x).$$

$$\text{d3) } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (desigualdade triangular).}$$

O par ordenado (X, d) é chamado de *espaço métrico*. Em geral, por um abuso de linguagem, diz-se que X é um espaço métrico, subentendendo-se uma métrica d a ele associada.

Definição 2.2. (Bola aberta e conjunto aberto de um espaço métrico.) Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}^+$ quaisquer definimos a *bola aberta* centrada em x e de raio r como o conjunto

$$B(x, r) := \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

Dizemos que $A \subset X$ é um *conjunto aberto* de X se A pode ser escrito como união qualquer de bolas abertas de X . Dizemos que um conjunto $F \subset X$ é *fechado* em X se $F^c := X \setminus F$ é aberto.

Observação 2.3. Lembramos que a coleção \mathcal{T} acima definida dos abertos de um espaço métrico (X, d) possui as seguintes propriedades:

1. X e \emptyset pertencem a \mathcal{T} .
2. \mathcal{T} é fechada para uniões arbitrárias (possivelmente não enumeráveis) de seus elementos.
3. \mathcal{T} é fechada para intersecções finitas de seus elementos.

As três propriedades acima fazem de \mathcal{T} uma *topologia*, e do par (X, \mathcal{T}) um exemplo de *espaço topológico*. Embora não nos alonguemos sobre isso no presente texto, em algumas proposições lançaremos mão destas propriedades da coleção dos abertos de X .

Definição 2.4. (Norma.) Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ um espaço vetorial real. Uma *norma* em E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$ tal que:

$$\text{n1) } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$$

$$\text{n2) } \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E.$$

$$\text{n3) } \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|; \forall v, w \in E \text{ (desigualdade triangular).}$$

O exemplo mais comum de espaço métrico é dado pelos espaços vetoriais normados. Se E é um tal espaço, dotado de uma norma $\|\cdot\|$, então a aplicação $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$d(v, w) := \|v - w\|, \forall v \in E, w \in E;$$

define uma métrica em E .

Outra classe importante de exemplos de espaços métricos é dada quando tomamos um subconjunto $Y \subset X$ de um espaço métrico (X, d) . Nesse caso, a restrição $d|_{Y \times Y}$ define uma métrica em Y .

Definição 2.5. (Sequência e subsequência.) Seja X um conjunto qualquer. Uma *sequência* em X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Denota-se $x_j := x(j)$ e $(x_j) := x$. Dada uma sequência $(x_j) : \mathbb{N} \rightarrow X$, uma *subsequência* (x_{j_k}) de (x_j) é qualquer restrição de (x_j) a um subconjunto infinito $\hat{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $\hat{\mathbb{N}} = \{j_1, j_2, \dots, \text{ com } j_1 < j_2 < \dots\}$.

Definição 2.6. (Sequência convergente.) Uma sequência (x_j) em um espaço métrico (Y, d) é dita *convergente* para $y \in Y$ se para toda bola aberta B tal que $y \in B$, tem-se um número finito de índices j tais que $x_j \notin B$. Escrevemos $x_j \rightarrow y$ para denotar que a sequência (x_j) converge a $y \in Y$. Dizemos que uma *subsequência* (x_{j_k}) é *convergente* se a sequência $(y_k) : \mathbb{N} \rightarrow Y$ definida por $y_k := x_{j_k}, \forall k \in \mathbb{N}$ for convergente.

Note que provarmos via definição que uma sequência (x_j) é convergente a $y \in Y$ envolve várias dificuldades: a primeira, é que precisamos exibir o candidato a limite, isto é o ponto $y \in Y$ para o qual a sequência converge. Mesmo que uma deidade nos apresente esse candidato a limite, comparar os termos x_j com y pode não ser fácil, vez que frequentemente os x_j são dados por meio de alguma fórmula indutiva. Essa dificuldade nos leva a fazer uma definição, digamos, a meio caminho.

Definição 2.7. (Sequência de Cauchy.) Seja (Y, d) um espaço métrico. Uma sequência (y_n) , com $y_n \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$ é dita *sequência de Cauchy* se dado um real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, j \in \mathbb{N}$, com $m \geq n_0$ e $j \geq n_0$ temos $d(y_m, y_j) \leq \epsilon$.

Toda sequência convergente a um ponto é de Cauchy. Por outro lado, toda sequência de Cauchy com subsequência convergente a um ponto converge a esse mesmo ponto. Tais fatos são deixados ao leitor como exercícios (ex. 1 e 2). Note que provar que uma sequência é de Cauchy é muito mais fácil que prová-la convergente, pois não precisamos conhecer a priori o limite, e precisamos para tal comparar os termos da sequência entre si, e estes são dados, muitas vezes, por fórmulas indutivas que favorecem sua comparação.

Definição 2.8. (Aplicação contínua.) Sejam (X, d) e (\tilde{X}, \tilde{d}) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : X \rightarrow \tilde{X}$ é dita *contínua no ponto* $x \in X$ se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

A aplicação $f : X \rightarrow \tilde{X}$ é dita *contínua* se é contínua $\forall x \in X$.

Observação 2.9. É imediato da definição acima que uma aplicação $f : X \rightarrow \tilde{X}$ é contínua, se e só se, a pré-imagem de qualquer aberto de \tilde{X} é sempre um subconjunto aberto de X .

Observação 2.10. Ainda em contextos métricos, é possível provar que uma aplicação $f : X \rightarrow \hat{X}$ é contínua em $x \in X$ se e só se f é *seqüencialmente contínua* em $x \in X$. Por definição, f é dita seqüencialmente contínua em $x \in X$ se dada uma seqüência (x_n) , $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$ então a seqüência $(f(x_n))$ converge a $f(x)$.

Definição 2.11. (Espaço métrico completo.) Um espaço métrico (X, d) é dito *completo* se toda seqüência de Cauchy (x_n) , com $x_n \in X$, converge para um ponto $x \in X$.

Definição 2.12. (Espaço de Banach.) Um espaço vetorial normado cuja métrica oriunda da norma é completa é chamado de *espaço de Banach*.

Exemplo 2.13. Seja $X = \mathbb{R}^k$, e $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$ uma norma qualquer. Prova-se que X com a métrica dada por $d(v, w) := \|v - w\|$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^k$ é um espaço métrico completo, e portanto, um espaço de Banach. Tal fato segue-se de que toda seqüência limitada em \mathbb{R}^k possui uma subsequência convergente (teorema de Bolzano-Weierstrass).

Exemplo 2.14. Seja $p \geq 1$ e seja $\ell^p := \{(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$. Pode-se provar que $\|(x_n)\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p}$ define uma norma em ℓ^p (exercícios 4 e 5). Pode-se ainda demonstrar que ℓ^p é Banach (exercício 7).

Definição 2.15. (Aplicação lipschitziana.) Sejam (X, d) e (\hat{X}, \hat{d}) espaços métricos. Uma aplicação $F : X \rightarrow \hat{X}$ é dita ser *lipschitziana* ou simplesmente *Lipschitz* se existe $0 \leq \lambda$ tal que

$$\hat{d}(F(x), F(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Dizemos que λ é uma *constante de Lipschitz* de F . Denotamos o ínfimo das constantes de Lipschitz de F por $\text{Lip}(F)$, o qual é, ele mesmo, uma constante de Lipschitz.

Observação 2.16. Notamos que as aplicações lipschitzianas são contínuas: Se F é uma tal aplicação, supondo sem perda $\lambda > 0$, dados $x \in X$, $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon/\lambda$, temos

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \hat{d}(F(x), F(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) < \lambda \cdot \epsilon/\lambda = \epsilon.$$

Observação 2.17. Se X, Y e Z são espaços métricos, com $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ ambas lipschitzianas, então a composta $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ também é Lipschitz com

$$\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \cdot \text{Lip}(f).$$

Uma subclasse relevante de aplicações Lipschitz é constituída pelas *contrações* de um espaço métrico nele mesmo:

Definição 2.18. (Contração.) Seja (X, d) espaço métrico. Uma aplicação $F : X \rightarrow X$ é dita uma *contração* se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

O próximo resultado corresponde à principal ferramenta para construir objetos em dimensão infinita, onde, ao contrário do que ocorre no \mathbb{R}^n , argumentos de compacidade são quase sempre inviáveis.

Teorema 2.19. (Ponto fixo para contrações.) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração. Então existe um único ponto $p \in X$ tal que $F(p) = p$. Ademais, tal ponto fixo p é um atrator de F , isto é, fixado qualquer $x \in X$, $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow +\infty$. ($F^n(x)$ é definido indutivamente por $F^n(x) := F(F^{n-1}(x))$.)*

Prova: Sejam $x \in X$ e $x_n = F^n(x), n \in \mathbb{N}$. Provaremos que x_n é uma sequência de Cauchy. Para tal, primeiro mostremos por indução que existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \cdot d(x_1, x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, como F é contração, temos que existe $\lambda < 1$ tal que:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \lambda \cdot d(x_n, x_{n-1}),$$

o que já implica a fórmula de indução para $n = 1$ (o caso $n = 0$ é trivial). Supondo a fórmula válida para um certo $n \in \mathbb{N}$, para $n + 1$, da última desigualdade, temos:

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \lambda \cdot d(x_{n+1}, x_n) \underbrace{\leq}_{\text{hip. indução}} \lambda \cdot \lambda^n d(x_1, x_0) = \lambda^{n+1} \cdot d(x_1, x_0),$$

o que prova a indução desejada.

Dados $m \geq n$, temos portanto:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (\lambda^n + \cdots + \lambda^m) \cdot d(x_1, x_0) \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \lambda_j \right) \cdot d(x_1, x_0) = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(F(x), x), \end{aligned}$$

o que prova que x_n é uma seqüência de Cauchy, e como X é completo, tal seqüência converge, digamos, para $p \in X$. Afirmamos que p é ponto fixo de F . Realmente,

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = p.$$

Notamos que a segunda igualdade acima se dá porque toda contração é contínua, e a última desigualdade se dá porque em uma seqüência convergente toda subsequência converge para o mesmo limite.

É fácil ver que p é o único ponto fixo de F . De fato, se $p, q \in X$ são pontos fixos de F , temos:

$$\begin{aligned} d(p, q) &= d(F(p), F(q)) \leq \lambda \cdot d(p, q) \Rightarrow \\ (1 - \lambda) \cdot d(p, q) &\leq 0 \Rightarrow d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q, \end{aligned}$$

findando a prova do teorema. □

Observação 2.20. Assinalamos que se p é o único ponto fixo de um iterado F^m , $m \geq 1$ de uma aplicação $F : X \rightarrow X$ qualquer, então p é o único ponto fixo de F . De fato:

$$F^m(p) = p \Rightarrow F^m(F(p)) = F(F^m(p)) = F(p),$$

ou seja, se p e $F(p)$ são pontos fixos de $F^m(p)$, logo $F(p) = p$. Isso é muito útil, pois nem sempre F é uma contração, mas muitas vezes um seu iterado é. Assim, a existência e unicidade preconizadas no teorema do ponto fixo para contrações continuam válidas para F se apenas um iterado positivo de F for contração.

Observação 2.21. (Continuidade do ponto fixo.) Seja X um espaço métrico. Suponha que X seja limitado, e seja $d_\infty(F, G)$ a distância

uniforme entre duas aplicações $F, G : X \rightarrow X$. Se F e G são contrações em X , com p e q seus respectivos pontos fixos, vale que

$$\begin{aligned} d(p, q) &= d(F(p), G(q)) \leq d(F(p), F(q)) + d(F(q), G(q)) \\ &\leq \lambda d(p, q) + d_\infty(F, G) \Rightarrow \\ d(p, q) &\leq \frac{1}{1 - \lambda} d_\infty(F, G), \end{aligned}$$

ou seja, os pontos fixos variam Lipschitz com a contração, em particular, continuamente.

2.2 O Espaço Normado das Aplicações Lineares Contínuas

Uma aplicação $A : E \rightarrow \hat{E}$ entre espaços vetoriais E e \hat{E} sobre um corpo K é dita contínua se $A(c \cdot v + w) = c \cdot v + w$, para todo escalar $c \in K$ e quaisquer vetores $v, w \in E$.

Um exemplo importante de aplicações Lipschitz é dado pelas aplicações lineares contínuas entre espaços vetoriais, como veremos na próxima proposição.

Proposição 2.22. *Sejam E, \tilde{E} espaços vetoriais normados. As seguintes assertivas são equivalentes no que tange uma aplicação linear $L : E \rightarrow \tilde{E}$:*

1. L é contínua;
2. L é contínua em algum ponto $x_0 \in E$;
3. L é contínua em $0 \in E$;
4. Existe um número real $c > 0$ tal que $\|L(x)\| \leq c, \forall x \in E$ com $\|x\| = 1$.
5. L é aplicação Lipschitz, ou seja, existe um número real $c > 0$ tal que $\|L(x) - L(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|, \forall x, y \in E$.

Prova:

As implicações $5 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ são claras. Resta-nos mostrar portanto $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$.

($2 \Rightarrow 3$) Seja $\epsilon > 0$ dado. Como L é contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|L(x) - L(x_0)\| < \epsilon.$$

Dado qualquer $y \in E$ tal que $\|y - 0\| = \|y\| < \delta$, podemos escrever:

$$\|y\| < \delta \Leftrightarrow \|(y + x_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|L(y + x_0) - L(x_0)\| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\|L(y) - L(x_0 - x_0)\| = \|L(y) - L(0)\| < \epsilon,$$

ou seja, L é contínua em $0 \in E$.

($3 \Rightarrow 4$) Provemos essa sentença por absurdo. Suponha que para cada $j \in \mathbb{N}$, exista $x_j \in E$ com $\|x_j\| = 1$ tal que

$$\|L(x_j)\| \geq j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Considere a sequência $y_j = (1/j) \cdot x_j$. Como

$$\|y_j\| = \frac{1}{j} \cdot \|x_j\| = \frac{1}{j} \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow 0,$$

da continuidade de L em $0 \in E$ temos que $L(y_j) \rightarrow L(0) = 0 \in \tilde{E}$. Contudo, da linearidade de L e das propriedades de norma segue-se

$$\|L(y_j)\| = \frac{1}{j} \cdot \|L(x_j)\| \geq \frac{1}{j} \cdot j = 1,$$

o que implica que $L(y_j) \not\rightarrow 0$, absurdo.

($4 \Rightarrow 5$) Sejam $x, y \in E$. Se $x = y$, $L(x) - L(y) = 0$ e a desigualdade é óbvia, para qualquer $c > 0$. Assim, vamos supor $x \neq y$. Daí,

$$\|L(x) - L(y)\| = \frac{\|L(x) - L(y)\|}{\|x - y\|} \cdot \|x - y\| = \|L\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right)\| \cdot \|x - y\|.$$

Como

$$\left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x - y\|} = 1,$$

a assertiva 4 implica que

$$\|L(x) - L(y)\| = \|L\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\| \cdot \|x-y\| \leq c \cdot \|x-y\|,$$

ou seja, L é Lipschitz. \square

Proposição 2.23. (Espaço $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ /Norma do operador). *Sejam E e \tilde{E} dois espaços vetoriais normados. Então*

$$\mathcal{L}(E, \tilde{E}) := \{T : E \rightarrow \tilde{E}; T \text{ é operador linear limitado} \}$$

é um espaço vetorial. Ademais a aplicação $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, \tilde{E}) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$\|T\| := \sup\{\|T \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

define uma norma (chamada de norma do operador) em $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$.

Prova: Seja $b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) um escalar e $T_1 : E \rightarrow \tilde{E}$, $T_2 : E \rightarrow \tilde{E}$ dois operadores lineares. Então claramente $T := T_1 + b \cdot T_2$ é um operador linear de E em \tilde{E} . Além disso T é limitado, pois se c_1 e c_2 são as constantes de Lipschitz (vide proposição 2.22 acima) respectivamente de T_1 e T_2 , temos

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\|_{\tilde{E}} &\leq \|T_1(x) - T_1(y)\|_{\tilde{E}} + |b|\|T_2(x) - T_2(y)\|_{\tilde{E}} \leq \\ &c_1\|x - y\|_E + |b|c_2\|x - y\|_E, \forall x, y \in E, \end{aligned}$$

o que implica que T é Lipschitz com constante $c := c_1 + |b|c_2$, e portanto limitado. Tal implica que $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$ é um espaço vetorial.

Só resta vermos que a aplicação $\|\cdot\|$ do enunciado é mesmo uma norma em $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$. A proposição 2.22 nos garante que tal aplicação está bem definida em $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$, com imagem em $[0, +\infty)$. Se $T \equiv 0$, claramente $\|T\| = 0$. Por outro lado, $\|T\| = 0$ implica que $T \cdot x = 0, \forall x \in E$ com $\|x\|_E = 1$. Se $v \in E$, então

$$\|T \cdot v\|_{\tilde{E}} = \|T \cdot \frac{v}{\|v\|_E}\|_{\tilde{E}} \cdot \|v\|_E \leq \|T\| \cdot \|v\|_E = 0,$$

donde concluímos que $T \equiv 0$.

Dado um escalar $b \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), temos que

$$\|bT\| = \sup\{\|bT \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} =$$

$$\sup\{|b|\|T \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} = |b|\|T\|.$$

Finalmente, dados $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$, a desigualdade triangular vem de

$$\|T_1 + T_2\| = \sup\{\|(T_1 + T_2) \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} \leq$$

(pela desigualdade triangular em \tilde{E})

$$\sup\{\|T_1 \cdot x\|_{\tilde{E}} + \|T_2 \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} \leq$$

$$\sup\{\|T_1 \cdot x\|_{\tilde{E}} : x \in E, \|x\|_E = 1\} + \sup\{\|T_2 \cdot y\|_{\tilde{E}} : y \in E, \|y\|_E = 1\} = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

□

Proposição 2.24. *Sejam E e \tilde{E} dois espaços vetoriais normados, sendo \tilde{E} de Banach. Então o espaço vetorial $\mathcal{L}(E, \tilde{E})$, dotado da norma do operador, é um espaço de Banach.*

Prova: Seja $T_n \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$ uma seqüência de Cauchy. Em particular, como $\|(T_n - T_m)(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_n - T_m\| \|v\|_E$, concluímos que para cada $v \in E$, $(T_n(v))$ é uma seqüência de Cauchy em \tilde{E} .

Portanto, definamos $T : E \rightarrow \tilde{E}$ por

$$T(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(v), \forall v \in E.$$

Claramente T é linear:

$$T(v + w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(c \cdot v + w) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c \cdot T_n(v) + T_n(w) =$$

$$c \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(v) + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(w) = c \cdot T(v) + T(w), \forall c \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \forall v, w \in E.$$

Daí, é fácil ver que $T \in \mathcal{L}(E, \tilde{E})$. De fato, seja $\epsilon > 0$, e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$, $\forall n, m \geq n_0$. Daí, dado $v \in E$ com $\|v\| = 1$, temos:

$$\|T_n(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_n\| \leq \|T_{n_0}\| + \|T_n - T_{n_0}\| < \|T_{n_0}\| + \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

A continuidade da norma e a desigualdade acima implicam que $\|T(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_{n_0}\| + \epsilon, \forall v \in E, \|v\|_E = 1$, donde

$$\sup_{\|v\|=1} \{\|T(v)\|_{\tilde{E}}\} \leq \|T_{n_0}\| + \epsilon \Rightarrow T \text{ é limitado.}$$

Só falta vermos que $T_n \rightarrow T$ na norma do operador. Dado $v \in E$ tal que $\|v\| = 1$, vimos acima que $\forall n, m \geq n_0$, vale:

$$\|T_n(v) - T_m(v)\|_{\tilde{E}} \leq \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Novamente, fazendo $m \rightarrow +\infty$, fixando $n \geq n_0$, a continuidade da norma e a última inequação implicam que $\forall v \in E$, com $\|v\|_E = 1$ vale que $\|T_n(v) - T(v)\|_{\tilde{E}} \leq \epsilon$.

Donde concluímos que $\forall n \geq n_0$,

$$\sup_{\|v\|_E} \{\|T_n(v) - T(v)\|_{\tilde{E}}\} = \|T_n - T\| \leq \epsilon.$$

□

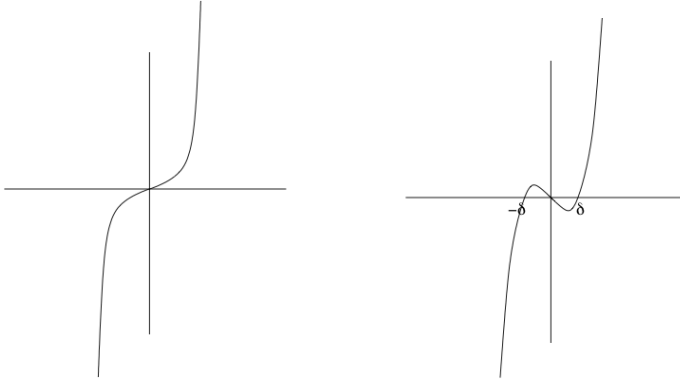
Estamos agora aptos a enunciar e provar importantes corolários do Teorema do Ponto Fixo conhecidos como versões não diferenciáveis do teorema da Função Inversa:

Teorema 2.25. (Perturbação da Identidade.) *Sejam E um espaço de Banach, $I : E \rightarrow E$ a identidade em E e seja $\Phi : E \rightarrow E$ uma contração em E . Então $I + \Phi$ é um homeomorfismo sobre E .*

Prova: Sejam $x, y \in E$ e $h = I + \Phi$. Seja $0 < \lambda < 1$ a constante de Lipschitz de Φ . Então

$$\begin{aligned} & \|I(x) + \Phi(x) - I(y) - \Phi(y)\| \\ & \geq \|x - y\| + \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \geq \|x - y\| - \lambda \cdot \|x - y\| = \\ & (1 - \lambda) \cdot \|x - y\| \Rightarrow \|h(x) - h(y)\| \geq (1 - \lambda) \cdot \|x - y\| \neq 0 \text{ se } x \neq y; \end{aligned}$$

donde obtemos a injetividade de h , e também a continuidade de h^{-1} . Mostremos agora a sobrejetividade de h . Seja $z \in E$. Queremos ver que existe $p \in E$ tal que $h(p) = z \Leftrightarrow p + \Phi(p) = z \Leftrightarrow p = z - \Phi(p)$. Por conseguinte definamos $f_z : E \rightarrow E$ por $f_z(x) = z - \Phi(x)$. Basta



Os gráficos de $y = x^3$ e $y = x^3 - \delta^2 x$ nos mostram que somando uma contração a um homeomorfismo com inversa não lipschitziana, o resultado pode não ser um homeomorfismo. Mostram ademais que a soma de homeomorfismos pode não ser um homeomorfismo.

então acharemos um ponto fixo p para f_z , que teremos $h(p) = z$. De fato, $f_z : E \rightarrow E$ é contração:

$$\|f_z(x) - f_z(y)\| = \|z - \Phi(x) - z + \Phi(y)\| = \|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq \lambda \cdot \|x - y\|.$$

Como E é espaço normado completo, segue-se do teorema do ponto fixo para contrações que existe um único $p \in E$ tal que $h(p) = z$, como queríamos. Isso nos dá ao mesmo tempo a sobrejetividade e uma nova prova da injetividade. \square

Lema 2.26. *Seja E um espaço de Banach, $L \in \mathcal{L}(E, E)$ satisfazendo $\|L\| \leq a < 1$ e $G \in \mathcal{L}(E, E)$ isomorfismo com $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Então:*

- a) $(I + L)$ é isomorfismo e $\|(I + L)^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$;
- b) $(I + G)$ é isomorfismo e $\|(I + G)^{-1}\| \leq a/(1 - a)$.

Prova:

a) Seja $y \in E$ qualquer fixado. Defina $u : E \rightarrow E$ por

$$u(x) := y - L(x).$$

Logo

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |L(x_2 - x_1)| \leq a \cdot |x_2 - x_1|,$$

o que implica que $u : E \rightarrow E$ é uma contração. Pelo teorema do ponto fixo para contrações,

$$\exists! z \in E / u(z) = z \Leftrightarrow \exists! z \in E / z = y - L(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists! z \in E / y = z + L(z),$$

o que implica que $(I + L)$ é isomorfismo.

Seja $y \in E$ com $|y| = 1$ e seja $x \in E$ tal que $(L + I)^{-1}(y) = x$. Como $x + L(x) = y$, temos que $|x| - a \cdot |x| \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1/(1-a)$, donde se conclui que $\|(I + L)^{-1}\| \leq 1/(1-a)$.

b) $(I + G) = G \cdot (I + G^{-1})$. Como

$$\|G^{-1}\| \leq a < 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{item a)}} (I + G^{-1}) \text{ é inversível.}$$

Daí, $(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1} \cdot G^{-1}$, o que implica que

$$\|(I + G)^{-1}\| \leq \|(I + G^{-1})^{-1}\| \cdot \|G^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a} \cdot a = \frac{a}{1-a}.$$

□

Corolário 2.27. (Perturbação de uma aplicação bilipschitz.)

Sejam E, \tilde{E} espaços de Banach e $\Psi : E \rightarrow \tilde{E}$ uma aplicação bilipschitz (sobrejetiva), isto é, f é invertível e lipschitziana com inversa também lipschitziana. Seja $\Phi : E \rightarrow \tilde{E}$ Lipschitz tal que sua constante de Lipschitz $\text{Lip}(\Phi) < \text{Lip}(\Psi^{-1})^{-1}$. Então $\Psi + \Phi : E \rightarrow \tilde{E}$ é um homeomorfismo (sobrejetivo).

Prova: Considere $h : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ dado por

$$h := (\Psi + \Phi)\Psi^{-1} = I + \Phi \circ \Psi^{-1}.$$

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$,

$$\|\Phi(\Psi^{-1}(\tilde{x})) - \Phi(\Psi^{-1}(\tilde{y}))\| \leq \text{Lip}(\Phi) \cdot \|\Psi^{-1}(\tilde{x}) - \Psi^{-1}(\tilde{y})\| \leq$$

$$\text{Lip}(\Phi) \cdot \text{Lip}(\Psi^{-1}) \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \Rightarrow \|\Phi \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) - \Phi \circ \Psi^{-1}(\tilde{y})\| \leq \lambda \|\tilde{x} - \tilde{y}\|,$$

ou seja, $\Phi \circ \Psi^{-1}$ é uma λ -contração. Logo, pelo teorema da perturbação da identidade, $h = (\Psi + \Phi) \circ \Psi^{-1} = I + \Phi \Psi^{-1}$ é um homeomorfismo (injetivo e sobre \tilde{E}). Portanto a composição

$$(\Psi + \Phi)\Psi^{-1} \circ \Psi = \Psi + \Phi$$

é um homeomorfismo, como queríamos mostrar. \square

Corolário 2.28. (*Perturbação do Isomorfismo.*) *Sejam E, \tilde{E} espaços de Banach e $T : E \rightarrow \tilde{E}$ um isomorfismo linear (sobrejetivo). Seja $\Phi : E \rightarrow \tilde{E}$ Lipschitz tal que sua constante de Lipschitz $\text{Lip}(\Phi) < \|T^{-1}\|^{-1}$. Então $T + \Phi : E \rightarrow \tilde{E}$ é um homeomorfismo (sobrejetivo).*

Prova: Imediata do corolário anterior. \square

2.3 Integração de Caminhos em Espaços Vetoriais

Definição 2.29. (Partição de um intervalo.) Uma *partição* \mathcal{P} de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é uma coleção finita $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_j\}$ de intervalos dois a dois disjuntos tais que $I_1 = [x_0, x_1], \dots, I_j = [x_{j-1}, x_j]$, com $x_0 = a, x_j = b$ e $x_0 \leq \dots \leq x_j$. Note que uma partição \mathcal{P} de um intervalo $[a, b]$ fica inteiramente determinada pelo conjunto dos pontos $A_{\mathcal{P}} := \{a = x_0, \dots, x_j = b\}$, o qual designaremos por conjunto dos pontos associados a \mathcal{P} .

Definição 2.30. (Diâmetro de uma partição de um intervalo.)

O *diâmetro* de uma partição \mathcal{P} de um intervalo I é o máximo dos diâmetros (comprimentos) dos elementos de \mathcal{P} .

Definição 2.31. (Integral de Riemann.) Seja $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow E$ um caminho limitado, tomando valores em um espaço de Banach E . A *integral de Riemann* $\int_I f(x)dx \in E$, se existir, é o limite

$$\int_I f(x)dx := \lim_{\text{diam}(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\#\mathcal{P}} f(x_j) \cdot \text{vol}(I_j),$$

onde $x_j \in I_j$ e $\mathcal{P} = \{I_j, j = 1, \dots, \#\mathcal{P}\}$, e vol é o volume (comprimento) do intervalo.

Se existir a integral de Riemann de uma aplicação f , então diremos que f é *integrável à Riemann*, ou simplesmente, *integrável*. Uma soma do tipo $\sum_{j=1}^{\#\mathcal{P}} f(x_j) \cdot \text{vol}(I_j)$, com $x_j \in P_j$ e $\mathcal{P} = \{C_1, \dots, I_{\#\mathcal{P}}\}$ é chamada de *soma de Riemann de f em relação a \mathcal{P}* , e denotada por $s(f, \mathcal{P})$, ou apenas, por $s(\mathcal{P})$ nos contextos em que f puder ser subentendida sem ambiguidades.

Definição 2.32. (Refinamento de uma partição.) Seja \mathcal{P} uma partição de um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$. Uma partição $\hat{\mathcal{P}}$ de I é dita um *refinamento de \mathcal{P}* se todo elemento de $\hat{\mathcal{P}}$ estiver contido em algum elemento de \mathcal{P} . Também escrevemos que $\hat{\mathcal{P}}$ *refina \mathcal{P}* .

Proposição 2.33. *Sejam I um intervalo compacto, E um espaço de Banach e $f : I \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Então $\exists \int_I f(x) dx \in E$.*

Prova: Como f é contínua em I compacto, é uniformemente contínua. Seja $\epsilon > 0$ e tome $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon / (2 \text{vol}(I)), \forall x, y \in I, d(x, y) < \delta.$$

Sejam \mathcal{P} e $\hat{\mathcal{P}}$ partições quaisquer, com $\text{diam}(\mathcal{P}) < \delta$ e $\text{diam}(\hat{\mathcal{P}}) < \delta$. Seja $\tilde{\mathcal{P}}$ uma partição que refina tanto \mathcal{P} como $\hat{\mathcal{P}}$. Daí, comparando somas de Riemann em \mathcal{P} e $\tilde{\mathcal{P}}$, obtemos:

$$\|s(\mathcal{P}) - s(\tilde{\mathcal{P}})\| = \left\| \sum_j^{\#\mathcal{P}} f(x_j) \cdot \text{vol}(I_j) - \sum_j^{\#\tilde{\mathcal{P}}} f(\tilde{x}_j) \cdot \text{vol}(\tilde{I}_j) \right\|.$$

Para cada $I_j \in \mathcal{P}$, tomemos $\tilde{I}_{j,1}, \dots, \tilde{I}_{j,r(j)} \in \tilde{\mathcal{P}}$ tais que $I_j = \dot{\cup}_{i=1}^{r(j)} \tilde{I}_{j,i}$. Por conseguinte, reenumerando a soma de Riemann em $\tilde{\mathcal{P}}$, chegamos a

$$\|s(\mathcal{P}) - s(\tilde{\mathcal{P}})\| = \left\| \sum_j^{\#\mathcal{P}} f(x_j) \cdot \text{vol}(I_j) - \sum_j^{\#\mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{r(j)} f(\tilde{x}_{j,i}) \cdot \text{vol}(\tilde{I}_{j,i}) \right) \right\| \leq$$

$$\sum_j^{\#\mathcal{P}} \left\| f(x_j) \cdot \text{vol}(I_j) - \sum_{i=1}^{r(j)} f(\tilde{x}_{j,i}) \cdot \text{vol}(\tilde{I}_{j,i}) \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j^{\#\mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{r(j)} (f(x_j) - f(\tilde{x}_{j,i})) \cdot \text{vol}(\tilde{I}_{j,i}) \right\| \\
&\leq \sum_j^{\#\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{r(j)} \|f(x_j) - f(\tilde{x}_{j,i})\| \cdot \text{vol}(\tilde{I}_{j,i}) \leq \frac{\epsilon}{2 \text{vol}(I)} \cdot \sum_j^{\#\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{r(j)} \text{vol}(\tilde{I}_{j,i}) = \epsilon/2.
\end{aligned}$$

Trocando \mathcal{P} por $\hat{\mathcal{P}}$ acima, temos que $\|s(\hat{\mathcal{P}}) - s(\tilde{\mathcal{P}})\| < \epsilon/2$, logo

$$\|s(\mathcal{P}) - s(\hat{\mathcal{P}})\| \leq \|s(\mathcal{P}) - s(\tilde{\mathcal{P}})\| + \|s(\tilde{\mathcal{P}}) - s(\hat{\mathcal{P}})\| < \epsilon,$$

implicando que f é integrável. \square

Definição 2.34. (Integral de Linha.) Sejam \hat{E} , E espaços de Banach, $U \subset \hat{E}$ um aberto, $g : U \rightarrow \mathcal{L}(\hat{E}, E)$ uma aplicação C^0 e $\gamma \subset U$ uma curva C^1 por partes, parametrizada por $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$. A *integral de linha* de g em γ é definida por:

$$\int_{\gamma} g := \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Temos a seguinte proposição:

Proposição 2.35. *A integral de linha $\int_{\gamma} g$ está bem definida, a menos de sinal.*

Prova: De fato, tomando $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$, $\psi : [c, d] \rightarrow \gamma$ parametrizações de γ , obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} g &:= \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b g(\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi(t)) \cdot (\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)'(t) dt = \\
&\int_a^b g(\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(t))) \cdot \psi'(\psi^{-1}(\varphi(t))) \cdot (\psi^{-1} \circ \varphi)'(t) dt = \\
&\int_a^b (g(\psi(\psi^{-1} \circ \varphi(t))) \cdot \psi'(\psi^{-1}(\varphi(t)))) \cdot (\psi^{-1} \circ \varphi)'(t) dt =
\end{aligned}$$

(pela fórmula de mudança de variáveis na reta)

$$\int_c^d g(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt. \quad \square$$

Quando $\hat{E} = \mathbb{C}$ e E é um espaço complexo, então $\mathcal{L}(\hat{E}, E) \simeq E$. Usando desta última identificação, a integral de linha apresenta a forma particular de:

Definição 2.36. (Integral por caminhos complexa.) Seja $\gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva C^1 por partes parametrizada por $\varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \rightarrow E$ uma função contínua. Designando por $*$ o sinal de produto por escalar, a *integral por caminhos complexa* de f em γ é definida por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt.$$

Note que a integral por caminhos complexa é simplesmente um caso particular da integral de linha, e o destaque como definição a parte se deve apenas pelo seu uso frequente em nosso texto.

Lema 2.37. *Sejam \hat{E} , E espaços de Banach, $U \subset \hat{E}$ um aberto, $g : U \rightarrow \mathcal{L}(\hat{E}, E)$ uma função contínua e $\varphi : [a, b] \rightarrow U$, um caminho C^1 tendo por imagem uma curva γ . Dado $\epsilon > 0$, existe uma poligonal $\psi : [a, b] \rightarrow U$, cuja integral de linha ϵ -aproxima a integral de linha*

$$\int_{\gamma} g = \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Prova: Como φ é contínua e $[a, b]$ é compacto temos, em primeiro lugar, que $\gamma = \varphi([a, b])$ é compacto e que $\sup_{t \in [a, b]} \{|\varphi'(t)|\} < +\infty$. Seja $M := (\sup_{t \in [a, b]} \{|\varphi'(t)|\} \cdot (b - a) + 1)$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Para cada $x \in \gamma$, seja $B(x, r_x) \subset V$ tal que $g(B(x, r_x)) \subset B(g(x), \epsilon/3M)$. Extraímos então uma subcobertura finita da cobertura $\{B(x, r_x/3)\}$ obtendo $\mathcal{B} := \{B_1 = B(x_1, r_{x_1/3}), \dots, x_l, r_{x_l/3}\}$.

Seja $\delta_0 = \min\{r_{x_j}/3, j = 1, \dots, l\}$. Note que se $y, z \in \cup_j B_j$ são tais que $\|y - z\| < \delta_0$, então se $y \in B_q, z \in B_p$, temos

$$\|x_q - z\| \leq \|x_q - y\| + \|y - z\| \leq r_{x_q}/3 + \delta_0 \leq r_{x_q},$$

ou seja $z \in B(x_q, r_{x_q})$. Isto implica que

$$\|g(z) - g(y)\| \leq \|g(z) - g(x_q)\| + \|(g(x_q) - g(y))\| < \epsilon/M.$$

Note ainda que se $z, y \in B(x_q, r_{x_q})$ para algum $q = 1 \dots l$, da convexidade das bolas em um espaço vetorial normado, temos que o segmento $[z, y] := \{tz + (1-t)y, t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\}$ está contido em $B(x_q, r_{x_q})$ e portanto em V . Em particular, se dois pontos x, \hat{x} em γ distam menos que δ_0 , então o segmento que os une está contido em V , e $\text{diam}(g([x, \hat{x}])) < \epsilon/M$.

Seja agora $\alpha > 0$ tal que

$$|t - s| < \alpha \Rightarrow \begin{cases} |\varphi(t) - \varphi(s)| < \delta_0 \\ |\varphi'(t) - \varphi'(s)| < \epsilon/(2(b-a) \sup_{t \in [a,b]} \{g(\varphi(t))\}) \end{cases}$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)/k < \alpha$, e sejam $t_0 = a, \dots, t_k = b$ tais que $t_j = a + \frac{j}{k}(b-a), j = 0, \dots, k$. Definimos então a poligonal $\psi : [a, b] \rightarrow \Gamma \subset V$ por

$$\psi(t) := \varphi(t_j) + (\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)) \cdot (t - t_j) \cdot \frac{k}{b-a},$$

$$\text{para } t \in [t_j, t_{j+1}], 0 \leq j < k.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma} g - \int_{\Gamma} g \right\| &= \left\| \sum_{j=0}^{k-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt \right) \right\| \leq \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) - g(\psi(t)) \cdot \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| dt \leq \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) - g(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| + \\ &\left\| g(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - g(\psi(t)) \cdot \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| dt \end{aligned}$$

Analisando cada parcela acima, temos:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| g(\varphi(t)) \cdot \left(\varphi'(t) - \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right) \right\| +$$

$$\begin{aligned}
& \|(g(\varphi(t)) - g(\psi(t))) \cdot \left(\frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j}\right)\| dt \quad \text{Norma do operador} \underbrace{\leq}_{\leq} \\
& \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|g(\varphi(t))\| \left\| \varphi'(t) - \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| dt + \\
& \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|g(\varphi(t)) - g(\psi(t))\| \left\| \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| dt \leq \\
& \sup_{t \in [a, b]} \{ \|g(\varphi(t))\| \} \cdot \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \varphi'(t) - \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\| dt + \\
& \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|g(\varphi(t)) - g(\psi(t))\| \sup_{t \in [a, b]} \|\varphi'(t)\| dt \quad \underbrace{DVM}_{\leq} \\
& \sup_{t \in [a, b]} \{ \|g(\varphi(t))\| \} \cdot \frac{\epsilon}{2(b-a) \sup_{t \in [a, b]} \{ \|g(\varphi(t))\| \}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt + \\
& \frac{\epsilon}{M} \cdot \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt < \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt.
\end{aligned}$$

Somando em j , concluímos que

$$\left\| \int_{\gamma} g - \int_{\Gamma} g \right\| < \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt = \epsilon.$$

□

Lema 2.38. *Sejam \hat{E} , E espaços de Banach, $g_n, g : U \rightarrow \mathcal{L}(\hat{E}, E)$ aplicações contínuas em um aberto $U \subset \hat{E}$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow U$, um caminho C^1 por partes tendo por imagem uma curva γ . Se g_n converge a g uniformemente em partes compactas, então*

$$\int_{\gamma} g_n = \int_a^b g_n(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \rightarrow \int_{\gamma} g = \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Prova: Sem perda, podemos supor $\ell(\gamma) > 0$. Seja $\epsilon > 0$, e tome n_0 tal que $\|g_n(x) - g(x)\| < \epsilon/\ell(\gamma), \forall x \in \gamma, \forall n \geq n_0$. Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma} g_n - \int_{\gamma} g \right\| &= \left\| \int_a^b g_n(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt - \int_a^b g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \right\| = \\ &= \left\| \int_a^b (g_n(\varphi(t)) - g(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_a^b \|g_n(\varphi(t)) - g(\varphi(t))\| \cdot \|\varphi'(t)\| dt < \\ &< \frac{\epsilon}{\ell(\gamma)} \cdot \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \epsilon. \end{aligned}$$

□

O lema acima tem como consequência um resultado análogo para integrais por caminhos complexas. Todavia, tais resultados também podem ser facilmente provados com o auxílio do utilíssimo:

Lema 2.39. *Dada $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow E$ e uma parametrização $C^1 \varphi : [a, b] \rightarrow \gamma$ de uma curva $\gamma \subset U$. Então, temos:*

$$\left\| \int_{\gamma} f(z) dz \right\| \leq \sup_{z \in \gamma} \{\|f(z)\|\} \cdot \ell(\gamma).$$

Prova:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma} f(z) dz \right\| &= \left\| \int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt \right\| = \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\varphi(t_j)) * \varphi'(t_j) \cdot \frac{(b-a)}{n} \right\|, \end{aligned}$$

onde $t_j = a + (b-a) \cdot j/n$. Daí,

$$\begin{aligned} &\left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\varphi(t_j)) * \varphi'(t_j) \cdot \frac{(b-a)}{n} \right\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{j=1}^n f(\varphi(t_j)) * \varphi'(t_j) \cdot \frac{(b-a)}{n} \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \|f(\varphi(t_j))\| |\varphi'(t_j)| \cdot \frac{(b-a)}{n} = \int_a^b \|f(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt \leq \\ &\leq \sup_{z \in \gamma} \{\|f(z)\|\} \cdot \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \sup_{z \in \gamma} \{\|f(z)\|\} \cdot \ell(\gamma). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.40. *Sejam $f_n, f : U \rightarrow E$ aplicações contínuas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow U$, um caminho C^1 por partes tendo por imagem uma curva γ . Se f_n converge a f uniformemente em partes compactas, então*

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_a^b f_n(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Prova: Pelo lema 2.39,

$$\left\| \int_{\gamma} f_n(z) - f(z) dz \right\| \leq \sup_{z \in \gamma} \{\|f_n(z) - f(z)\|\} \cdot \ell(\gamma).$$

Se $\ell(\gamma) = 0$, nada há a provar. Assim, suponhamos que $\ell(\gamma) > 0$. Tome n_0 tal que $\sup_{z \in \gamma} \{\|f_n(z) - f(z)\|\} < \epsilon/\ell(\gamma)$, $\forall n \geq n_0$. Por conseguinte,

$$\left\| \int_{\gamma} f_n(z) - f(z) dz \right\| \leq \sup_{z \in \gamma} \{\|f_n(z) - f(z)\|\} \cdot \ell(\gamma) < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

□

Corolário 2.41. *Sejam $f_n, f : U \rightarrow E$ aplicações contínuas em um aberto $U \subset \mathbb{C}$ e $\varphi : [a, b] \rightarrow U$, um caminho C^1 por partes tendo por imagem uma curva γ . Se $\sum f_n$ converge a f uniformemente em partes compactas, então*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= \int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

□

2.4 A Teoria de Cauchy-Goursat

Nesta seção adaptamos a teoria de Análise Complexa para aplicações holomorfas tomando valores em espaços de Banach. Muitos dos teoremas daqui são adaptações de teoremas vistos em cursos básicos de Funções Analíticas de \mathbb{C} . Em tal nível elementar, uma boa referência é o livro do prof. Márcio Soares [18].

Definição 2.42. (Aplicação Holomorfa.) Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow E$, onde E é um espaço de Banach. Dizemos que f é *holomorfa em* $z_0 \in U$ se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Neste caso, $f'(z_0)$ é chamada de *derivada holomorfa de f em z_0* . Se f é holomorfa em cada ponto de U , dizemos que f é *holomorfa em U* ou, simplesmente, que f é *holomorfa*.

Lembramos aqui a prova do Teorema de Cauchy-Goursat para regiões triangulares, adaptando-o ao contexto de espaços de Banach.

Teorema 2.43. (Teorema de Cauchy-Goursat para regiões triangulares.) *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, E um espaço de Banach, $f : U \rightarrow E$ uma aplicação holomorfa e seja Δ um triângulo compacto contido em U . Então*

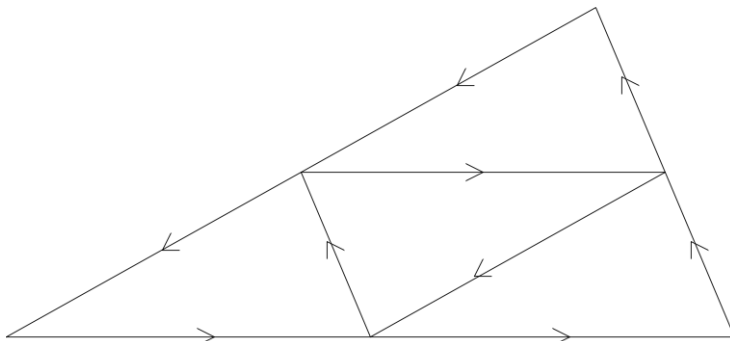
$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

Prova: Realizemos uma construção indutiva para a prova do teorema. Escrevamos $\Delta = \Delta_0$ e subdividamos este triângulo em quatro triângulos $(\Delta_0^1, \Delta_0^2, \Delta_0^3, \Delta_0^4)$ a ele semelhantes, cujos lados têm metade do comprimento de seus correspondentes no triângulo original. Ademais, orientamos os bordos de cada um dos triângulos no sentido horário.

Daí,

$$\int_{\Delta_0} f(z) dz = \int_{\Delta_0^1} f(z) dz + \int_{\Delta_0^2} f(z) dz + \int_{\Delta_0^3} f(z) dz + \int_{\Delta_0^4} f(z) dz.$$

Vejamos como se dá o passo de indução: supondo que temos construído um triângulo Δ_n para um certo $n \in \mathbb{N}$ (por exemplo, já definimos, para $n = 0$, $\Delta_0 := \Delta$). Daí, dividimos Δ_n em 4 triângulos



O triângulo Δ subdividido em quatro triângulos semelhantes, com metade do lado e $1/4$ de sua área.

$\Delta_n^1, \Delta_n^2, \Delta_n^3, \Delta_n^4$ semelhantes como explicado acima. Definimos $\Delta_{n+1} := \Delta_n^j$, onde

$$\left| \int_{\Delta_n^j} f(z) dz \right| = \max \left\{ \left| \int_{\Delta_n^1} f(z) dz \right|, \left| \int_{\Delta_n^2} f(z) dz \right|, \right. \\ \left. \left| \int_{\Delta_n^3} f(z) dz \right|, \left| \int_{\Delta_n^4} f(z) dz \right| \right\}$$

Daí,

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\Delta_{n+1}} f(z) dz \right|$$

Ademais, se δ_n é o comprimento do maior lado do triângulo Δ_n , é claro que

$$\delta_{n+1} = \delta_n/2 = \delta_0/(2^n),$$

$$\ell(\Delta_{n+1}) = \ell(\Delta_n)/2 = \ell(\Delta_0)/(2^n).$$

Como os triângulos $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$ formam uma família encaixante de compactos não vazios, podemos tomar $z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$. Como f é holomorfa, dado $\epsilon > 0$, $\exists \tau > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \tau \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0) * (z - z_0)| \leq \frac{\epsilon}{\delta_0 \cdot \ell(\Delta)} \cdot |z - z_0|.$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0) * (z - z_0) dz = \\ & = \int_{\Delta_n} f(z) dz - \int_{\Delta_n} f(z_0) + f'(z_0) * (z - z_0) dz \end{aligned}$$

(pois o Teorema de Cauchy-Goursat claramente vale para aplicações holomorfas afins)

$$\int_{\Delta_n} f(z) dz.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Delta} f(z) dz \leq 4^n \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| = \\ & = 4^n \left| \int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0) * (z - z_0) dz \right| \end{aligned}$$

(supondo n suficientemente grande de modo a que $\delta_n < \tau$)

$$4^n \cdot \frac{\epsilon}{\delta_0 \cdot \ell(\Delta)} \cdot \sup\{|z - z_0|\} \cdot \ell(\Delta_n) \leq 4^n \cdot \frac{\epsilon}{\delta_0 \cdot \ell(\Delta)} \cdot \frac{\delta_0}{2^n} \cdot \frac{\ell(\Delta)}{2^n} \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue-se que

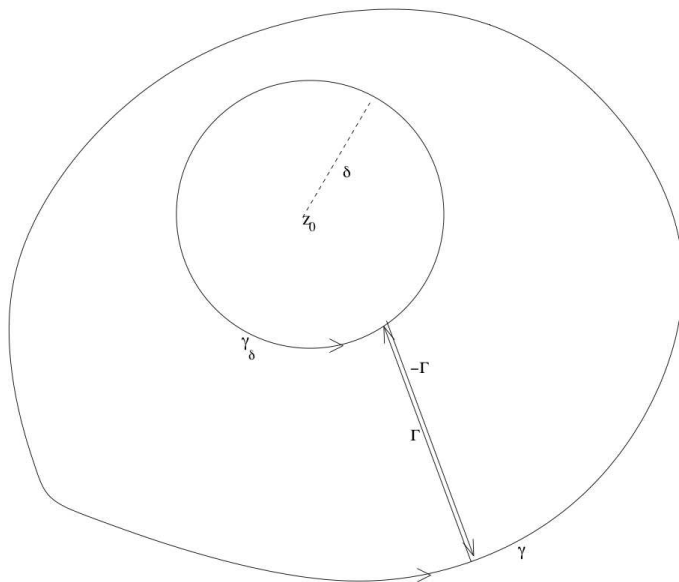
$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

□

A partir da versão acima, é bastante fácil de provar uma versão similar para círculos (e curvas convexas) no lugar de triângulo.

Usando a definição de integral curvilínea complexa, sabemos que $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$, para qualquer curva fechada simples γ contendo z_0 na região aberta limitada de \mathbb{C} que possui γ como fronteira. O resultado mais importante na teoria de aplicação analíticas é o seguinte:

Teorema 2.44. (Fórmula Integral de Cauchy.) *Seja E um espaço de Banach sobre \mathbb{C} , $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $f : U \rightarrow E$ uma aplicação holomorfa. Seja $\gamma_0 \subset U$ uma região*



Justapondo as curvas Γ , γ_δ , $-\Gamma$, γ , e aplicando o Teorema de Cauchy-Goursat, obtemos que a integral do círculo de raio delta em torno de z_0 é zero.

compacta cuja fronteira é uma curva de Jordan γ . Então, dado $z_0 \in \text{int}(\gamma_0)$, vale:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ da continuidade uniforme de f em γ_0 tal que

$$\|z - z_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(z) - f(z_0)\| < \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

Obviamente, podemos supor $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo a que $\overline{B}(0, \delta) \subset \text{int}(\gamma_0)$. Chamemos de γ_δ a curva que é o círculo de centro z_0 e raio δ .

Ligando γ a γ_δ por meio de uma curva auxiliar Γ difeomorfa a um intervalo compacto, conforme mostra a figura, usando a propriedade

de que uma integral de linha muda de sinal se trocamos a orientação e aplicando o teorema de Cauchy-Goursat, obtemos que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Mas

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0)2\pi i \right\| &= \left\| \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma_\delta} \frac{1}{z - z_0} dz \right\| = \\ &= \left\| \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right\|. \end{aligned}$$

Como para z sobre a curva γ_δ , temos $\|f(z) - f(z_0)\| < \epsilon/2\pi$ e $\|z - z_0\| = \delta$, obtemos

$$\left\| \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right\| < \frac{\epsilon}{2\pi\delta} \cdot \ell(\gamma_\delta) = \epsilon.$$

Concluimos que

$$\left\| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right\| = \left\| \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0,$$

logo

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

□

Corolário 2.45. (Estimativas de Cauchy). *Seja f uma função holomorfa limitada em um disco $D(z, r)$, digamos $|f(z)| < K, \forall z \in D(z_0, r)$. Então $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!K}{r^n}$.*

Prova: Seja $\gamma_s = \partial B(z_0, s), s < r$. Do teorema acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right| \leq \\ &= \frac{n!}{2\pi} \frac{K}{s^{n+1}} \cdot \ell(\gamma_s) = \frac{n!}{2\pi} \frac{K}{s^{n+1}} \cdot 2\pi s = \frac{n!K}{s^n}. \end{aligned}$$

Como $s < r$ é arbitrário, concluímos que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!K}{r^n}.$$

□

Teorema 2.46. (Teorema de Liouville). *Seja E um espaço de Banach complexo. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow E$ é holomorfa e limitada, então f é constante.*

Prova: Pelas estimativas de Cauchy, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ e um disco qualquer $D(z_0, r)$, temos

$$\|f'(z_0)\| \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{C}} \{\|f(z)\|\}}{r}.$$

Tomando $r > 0$ suficientemente grande, concluímos que $f'(z_0) = 0$. Como $z_0 \in \mathbb{C}$ é arbitrário e \mathbb{C} é conexo, temos que f é constante.

□

Teorema 2.47. (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ não constante possui raiz em \mathbb{C} .*

Prova: Primeiro veremos que $\lim_{z \rightarrow \infty} |p(z)| = +\infty$, onde $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio não constante, digamos, $p(z) = a_0 + a_1 * z + \dots + a_n * z^n$, com $a_n \neq 0$. Como estamos analisando o que ocorre quando $|z| \rightarrow +\infty$, podemos supor $z \neq 0$; assim, fazendo uso da desigualdade triangular, obtemos:

$$|p(z)| \geq |z|^n \cdot \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)$$

Seja $M > 0$ qualquer. Tome $K := \max\{2(M+1), 2(M+1) \cdot n \cdot |a_j|, j = 0, \dots, n\}$. Temos então que $|z| > K \Rightarrow |p(z)| > M$, o que por definição significa que

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty.$$

Agora, suponha por absurdo que p não possua raízes, ou seja, $p(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Logo, $f(z) := 1/p(z)$ define uma função inteira, isto é, uma função holomorfa com domínio igual a \mathbb{C} . Ademais, f é limitada:

- Como f é contínua, existe $\tilde{M} > 0$ tal que $|f(z)| < \tilde{M}$ para todo z na bola compacta $\overline{B(0, K)}$, onde K é a mesma constante do parágrafo anterior.
- Para $z, |z| > K$, temos que $|f(z)| = 1/|p(z)| < 1/M$.

Por conseguinte, tomando $\hat{M} := \max\{\tilde{M}, 1/M\}$, temos que $|f(z)| < \hat{M}, \forall z \in \mathbb{C}$. Sendo f função inteira e limitada, segue-se por Liouville que f é constante. Mas nesse caso, $p(z) = 1/f(z)$ seria constante, absurdo. \square

Dizemos que $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}$ é um anel centrado em $a \in \mathbb{C}$, se \mathcal{N} é da forma

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(a, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}, r_1 \leq |z-a| \leq r_2, \text{ com } r_1, r_2 > 0, a \in \mathbb{C}\}.$$

A fórmula integral de Cauchy nos permite ainda demonstrar o seguinte teorema sobre aplicações holomorfas em um anel:

Teorema 2.48. (Séries de Laurent em Espaços de Banach.)

Sejam $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}$ um anel centrado em $a \in \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}$ uma vizinhança de \mathcal{N} , e $f : V \rightarrow E$ uma aplicação holomorfa tomando valores em um espaço de Banach E . Então existem únicos $A_n \in E, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n, \forall z \in \mathcal{N},$$

a convergência do limite acima sendo absoluta e uniforme em \mathcal{N} .

Prova: Sendo \mathcal{N} um anel centrado em $a \in \mathbb{C}$ e $f : V \rightarrow E$, e orientando a fronteira de \mathcal{N} conforme a figura, dado $z \in \mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$, pela fórmula integral de Cauchy, temos:



$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{N}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-a-(z-a)} dw + \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{z-a-(w-a)} dw \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a) * \left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)} dw + \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z-a) * \left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} dw \right) =
\end{aligned}$$

(note que para $w \in \gamma_2$ vale $|w-a| > |z-a|$, $\forall z \in \mathcal{N}$; já para $w \in \gamma_1$ vale $|w-a| < |z-a|$)

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)} * \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^j dw + \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{z-a} * \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^j dw \right).$$

As somas geométricas dentro das integrais convergem absolutamente e uniformemente em partes compactas de $\text{int}(\mathcal{N})$, logo podemos permutar seus limites com as integrais, e usando a linearidade das integrais, obtemos:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw * (z-a)^j + \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_1} f(w)(w-a)^{j-1} dw * (z-a)^{-j} \right],
\end{aligned}$$

também chamada de *Série de Laurent* de f no anel \mathcal{N} .

Para vermos a unicidade dos coeficientes de Laurent, basta notarmos que se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^n$, então dado $k \in \mathbb{Z}$, e para qualquer círculo com centro em a e contido em \mathcal{N} , temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \cdot (z-a)^{k+1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(z-a)^{n+k+1} dz = A_k,$$

uma vez que $\int_{\gamma} (z-a)^{n+k+1} dz = 0$, se $n+k+1 \neq -1$, e é igual a $2\pi i$, se $n+k+1 = -1$.

□

2.5 Exercícios

1. Mostre que toda sequência convergente a um ponto em um espaço métrico X é de Cauchy.
2. Seja X um espaço métrico, e $x \in X$. Mostre que toda sequência de Cauchy $(x_n), x_n \in X$ com subsequência convergente a x converge ela mesma a x .
3. Mostre que ℓ_p é um espaço vetorial, para todo $p \geq 1$.
4. (Desigualdade de Hölder.) Sejam $(x_n) \in \ell^p$, $(y_n) \in \ell^q$, $1/p + 1/q = 1$. Mostre que $|\sum x_n y_n| \leq \|x_n\|_p \|y_n\|_q$.

(Sugestão: Sem perda de generalidade (por que?), suponha $(x_n), (y_n) \neq 0$ e que $x_n \geq 0, y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Para cada m tal que $x_m > 0$ e $y_m > 0$, ponha respectivamente s_m e t_m tais que

$$\frac{x_m}{\|(x_n)\|_p} =: e^{s_m/p}, \quad \frac{y_m}{\|(y_n)\|_q} =: e^{t_m/q}.$$

Use a convexidade da exponencial para concluir a questão.)

5. (Desigualdade de Minkowski.) Sejam $(x_n) \in \ell^p$, $(y_n) \in \ell^p$, $p \geq 1$. Mostre que $\|x_n + y_n\|_p \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p$. Conclua que os espaços ℓ^p , $p \geq 1$ são espaços vetoriais normados.
6. Seja X um espaço métrico. Uma sequência $(x_k), x_k \in X$ é dita ser exponencialmente de Cauchy, se existem $c > 0$ e $\alpha > 0$ tais que para todos $k, l \geq k_0$ vale

$$d(x_k, x_l) < ce^{-\alpha k_0}.$$

Mostre que toda sequência exponencialmente de Cauchy $(v_k), v_k \in \ell^p, \forall k \in \mathbb{N}$ converge pontualmente, isto é, vale que para cada n , existe o limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(n) =: w_n$. Mostre ainda que o limite $(w_n) \in \ell^p$.

7. Mostre que ℓ^p é um espaço de Banach, $\forall p \geq 1$.
8. Seja E um espaço de Banach e seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(E)$ a coleção das aplicações lineares invertíveis de E em E . Mostre que \mathcal{C} é um aberto e que a aplicação $Inv : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $Inv(A) := A^{-1}$ é contínua.

9. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) := 1/z$. Seja γ o círculo de raio $r > 0$ e centro na origem. Calcule $\int_{\gamma} f(z)dz$.
10. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) := \frac{1}{z^n}, n > 1$. Seja γ o círculo de raio $r > 0$ e centro na origem. Calcule $\int_{\gamma} f(z)dz$.
11. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe (pelo menos) C^2 , tal que $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $g(x, y) = \nabla f(x, y)$ não seja afim. Mostre que g **não** é holomorfa.
12. Mostre que se $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a parte real de uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto, então a aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x, y) := (\partial_y u(x, y), \partial_x u(x, y))$$

é holomorfa.

13. Seja $\gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva homeomorfa a um círculo e $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio tal que sem raízes em γ . Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} p'(z)/p(z)dz = Z(p, \gamma),$$

onde $Z(p, \gamma)$ é o número de raízes de p na região interior a γ , contadas as suas multiplicidades.

14. Use o exercício anterior para concluir que a aplicação que atribui a um polinômio complexo de grau n , suas n raízes, é contínua.

Sugestões para a resolução de alguns exercícios do capítulo:

exerc. 3: Mostre e use que $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, $\forall a, b \geq 0$.

exerc. 4: Sem perda de generalidade (por que?), suponha $(x_n), (y_n) \neq 0$ e que $x_n \geq 0, y_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Para cada m tal que $x_m > 0$ e $y_m > 0$, ponha respectivamente s_m e t_m tais que

$$\frac{x_m}{\|(x_n)\|_p} =: e^{s_m/p}, \quad \frac{y_m}{\|(y_n)\|_q} =: e^{t_m/q}.$$

Use a convexidade da exponencial para concluir a questão.

exerc. 5: Use o exercício 4, e a relação $1/p + 1/q = 1$, se $p > 1$. Note que o caso $p = 1$ é especial e possui uma prova simples.

exerc. 6: Considere a sequência em ℓ^p dada por (t_k) , onde $t_k(n) := |v_1|(n) + \sum_{j=1}^k |v_{j+1} - v_j|$, e mostre que para cada n tal série converge e majora $v_k(n)$.

exerc. 7: Mostre que toda sequência de Cauchy em ℓ^p possui uma subsequência exponencialmente de Cauchy, use o exercício anterior, e mostre que o limite pontual encontrado, e também limite em ℓ^p da subsequência.

exerc. 13: Comece resolvendo o exercício supondo na região uma única raiz com multiplicidade m . Caso haja mais raízes, note que a integral sobre a curva iguala a soma de integrais sobre pequenos círculos, cada um em torno de uma raiz distinta.

Capítulo 3

Funções de Operador

3.1 Funções analíticas de operadores

Neste capítulo, nós nos aprofundaremos no estudo de operadores lineares em dimensão qualquer. Aplicaremos este estudo à caracterização espectral dos chamados isomorfismos lineares hiperbólicos, que são operadores que aparecem no enunciado do Teorema de Grobman-Hartman e em outros importantes teoremas da área de Sistemas Dinâmicos.

Definição 3.1. (Espectro de um operador linear contínuo.)

Seja E um espaço vetorial normado complexo e seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear contínuo. O espectro de A é o conjunto

$$sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A) \text{ não possui inversa contínua}\}.$$

Observação 3.2. Devido ao Teorema da Aplicação Aberta de Análise Funcional, se E é um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(E)$, então se A for invertível, sua inversa é automaticamente contínua. Dessa forma, se E é um espaço de Banach e $A : E \rightarrow E$ é linear contínua, seu espectro consiste do conjunto dos pontos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(A - \lambda I)$ não é injetiva ou não é sobrejetiva (a inversa de $(A - \lambda I)$ não existe). Em dimensão finita, todo operador linear é automaticamente contínuo, e nesse caso particular todas as menções à continuidade na definição de espectro são redundantes.

Estudaremos uma caracterização do espectro de $A : E \rightarrow E$ quando $A \in \mathcal{L}(E)$, com E um espaço de Banach complexo e $\mathcal{L}(E)$ sendo o espaço de aplicações lineares contínuas de E em E .

A idéia para isso será estudarmos $res(A) := sp(A)^c$, também conhecido como o conjunto resolvente de A . Ora, para $z \in res(A)$, sabemos que é um isomorfismo linear (contínuo) o operador $(zI - A)$. Lembramos que se E é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(E)$ também é um espaço de Banach com a conhecida norma do Operador. Para $T \in \mathcal{L}(E)$, sua norma é:

$$\|T\|_{op} = \sup_{v \in E; \|v\|=1} \{\|T(v)\|\} = \text{Lip}(T).$$

Antes de tudo, observemos que se A é contínuo, o conjunto resolvente de A é não vazio, e que o espectro é limitado. De fato, se $|\lambda| > \|A\|_{op}$, pelo Teorema da perturbação da Identidade $(\lambda I - A) = \lambda \cdot (I - A/\lambda)$ é isomorfismo. Pelo Teorema da Perturbação do Isomorfismo, também temos que $res(A)$ é aberto - logo $sp(A)$ é compacto, visto que é um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{C} .

Consideraremos então a *aplicação resolvente* $\rho : res(A) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ dada por $\rho(z) := (zI - A)^{-1}$. Já vimos acima que $res(A)$ é aberto.

Mostraremos que esta aplicação é analítica, e adaptaremos o que conhecemos sobre raio de convergência de série de potências.

Para provarmos que ρ é holomorfa (possui derivada holomorfa) usaremos a muito simples

Proposição 3.3. (Equação do resolvente.) *É válida a seguinte identidade:*

$$\rho(\lambda) - \rho(\mu) = (\mu - \lambda)\rho(\lambda)\rho(\mu).$$

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) - \rho(\mu) &= \rho(\lambda)\rho(\mu)(\mu I - A)(\lambda I - A)(\rho(\lambda) - \rho(\mu)) = \\ &= \rho(\lambda)\rho(\mu)(\mu I - A)(I - \lambda\rho(\mu) + A\rho(\mu)) = \\ &= \rho(\lambda)\rho(\mu)(\mu I - A - \lambda I + A) = \\ &= (\mu - \lambda)\rho(\lambda)\rho(\mu). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.4. *Dada uma aplicação linear $A \in \mathcal{L}(E)$, a aplicação resolvente associada $\rho : \text{res}(A) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ é holomorfa em $\text{res}(A)$, com derivada holomorfa em λ igual a $-\rho(\lambda)^2$.*

Prova:

Como a inversão de operadores é uma aplicação contínua em um aberto $\mathcal{L}(E)$, segue-se que ρ é contínua como composta de aplicações contínuas.

Temos portanto que

$$\rho'(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\rho(\mu) - \rho(\lambda)}{\lambda - \mu} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} -\rho(\mu)\rho(\lambda) = -\rho(\lambda)^2.$$

□

Nosso próximo passo é demonstrar que o espectro de um operador contínuo é não vazio.

Teorema 3.5. *Dada uma aplicação linear $A \in \mathcal{L}(E)$, o espectro de A é não vazio, e o raio espectral $r(A) := \sup |sp(A)|$ é igual a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.*

Prova:

Do que vimos acima, está claro que para $z \neq 0$ para que $(zI - A)$ seja invertível é necessário e suficiente que $(I - A/z)$ seja invertível. Inspirados na série geométrica, para $z, |z| > 0$, estudemos a convergência absoluta da série $\sum_{n \geq 0} (A/z)^n$, a qual esperamos que convirja a $(I - A/z)^{-1}$. Ora, tal série converge absolutamente se, e só se, a série $\sum_{n \geq 0} \|A^n\|_{op}/|z|^n$ converge na reta. Chamando de $a_n := \|A^n\|_{op}$ do critério de comparação (com a série geométrica) que esta última série converge para z tal que

$$\limsup \sqrt[n]{a_n}/|z| < 1 \Rightarrow |z| > \limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Notamos que a composição de aplicações lineares com A é contínua em $\mathcal{L}(E)$. Por exemplo, para a composição com A à esquerda, temos:

$$\|A \circ B - A \circ C\|_{op} = \|A \circ (B - C)\|_{op} \leq \|A\|_{op} \cdot \|B - C\|_{op}, \forall B, C \in \mathcal{L}(E),$$

mostrando que tal aplicação de composição é Lipschitz. Temos assim da continuidade da composição que para $|z| > \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}$, vale

$$(I - A/z) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (A/z)^j = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A/z) \sum_{j=0}^n (A/z)^j = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (A/z)^j - \sum_{j=1}^{n+1} (A/z)^j = \lim_{n \rightarrow \infty} I - (A/z)^n = I.$$

Efetuada contas similares, só que com a composição à direita com $(I - A/z)$, concluímos que para $|z| > \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}$, existe $(zI - A)^{-1} = (1/z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (A/z)^n$. Isso nos dá uma cota mais fina para o raio da bola fechada onde se encontra $sp(A)$.

Para mostrarmos que $\sup\{|x|; x \in sp(A)\} = \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}$, basta que adaptemos a teoria de funções holomorfas de \mathbb{C} em \mathbb{C} , para curvas holomorfas em espaços de Banach, o que já foi feito na seção 1.4.

Note que a série de Laurent de ρ em torno de zero é

$$\rho(z) = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{+\infty} (A/z)^j.$$

Concluimos então que a série de Laurent de ρ converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \sup |sp(A)|$ e, é claro, não converge para $|z| < \sup |sp(A)|$, pois se convergisse, como vimos acima, existiriam pontos do espectro λ tais que a inversa $[\lambda I - A]^{-1}$ estaria definida, absurdo. Logo, $\sup |sp(A)| = \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Podemos melhorar o acima, mostrando que existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. De fato, note que $\lambda \in sp(A) \Rightarrow \lambda^n \in sp(A^n)$. Para ver isso, basta observar que

$$(\lambda^n - A^n) = (\lambda - A) \circ (A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1}) = \\ (A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1}) \circ (\lambda - A)$$

implica que se $\lambda^n \in res(A^n)$, então $\lambda - A$ também é invertível.

Temos portanto que se $\lambda \in sp(A)$,

$$|\lambda^n| \leq r(A^n) \leq \|A^n\|,$$

e logo $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|A^n\|}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e daí, $|\lambda| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ donde concluímos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Falta vermos que $sp(A) \neq \emptyset$. Para tal, basta usarmos do Teorema de Liouville (Teorema 2.46, da página 53). Se por absurdo, o espectro de A fosse vazio, ρ seria uma aplicação inteira. Nesse caso, é fácil ver que ρ seria globalmente limitada: Se $\lambda \in \overline{B(0, 2\|A\|)}$, então $\rho(\lambda)$ é uniformemente acotada por ρ ser contínua e $\overline{B(0, 2\|A\|)}$ ser compacta em \mathbb{C} . Por outro lado,

$$\|\rho(\lambda)\| = \|(\lambda I - A)^{-1}\| = \left[\inf_{\|v\|=1} \|\lambda v - A(v)\| \right]^{-1} \leq$$

$$\left[|\lambda| - \|A\| \right]^{-1} \leq \left[|\lambda|/2 \right]^{-1}, \forall \lambda; |\lambda| > 2\|A\|,$$

concluindo que se ρ fosse inteira, seria globalmente limitada e portanto constante pelo Teorema de Liouville, o que é absurdo. \square

Uma consequência imediata, e bastante importante disso, é que se o espectro de A está contido na bola unitária aberta $B(0, 1)$, automaticamente todo iterado suficientemente grande de A será uma contração.

Uma última observação, é que outra prova de que existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ pode ser obtida usando-se da subaditividade da sequência $a_n := \log(\|A^n\|)$. Tal se deve ao seguinte resultado elementar:

Proposição 3.6. *Seja (a_n) uma sequência de reais tais que $a_{m+n} \leq a_n + a_m$. Então, sempre vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} a_n = \inf a_n/n$. Em particular, se $\inf a_n/n > -\infty$, o limite acima existe em \mathbb{R} .*

Prova: É imediato que $a_n \leq n \cdot a_1$, logo, (a_n/n) é limitada superiormente. Por outro lado, vale ainda que se $k = n \cdot m + s$, com $0 \leq s < n$, $a_k \leq m \cdot a_n + s \cdot a_1$

$$\begin{aligned} a_{n+k}/(n+k) &\leq (a_n + a_k)/(n+k) \leq (a_n(m+1))/(n+k) + sa_1/(n+k) \leq \\ &(na_n + a_n k)/(n+k)n + sa_1/(n+k) \leq \end{aligned}$$

$$a_n/n + sa_1/(n+k). \quad (3.1)$$

Fazendo $k \rightarrow +\infty$, temos que

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} a_j/j = \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_{n+k}/(n+k) \leq a_n/n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ fixado. Ora, mas então

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} a_j/j \leq \inf a_n/n \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} a_j/j,$$

e portanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/n = \inf a_n/n$, podendo talvez este limite ser $-\infty$. \square

Corolário 3.7. *Existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.*

Prova: Sem perda de generalidade, suponha $A \neq 0$. Note que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ implica em que $a_n := \log(\|A^n\|)$ é subaditiva. Se $\inf a_n/n = -\infty$, tal implica que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$, e nada temos a provar. Caso $\inf a_n/n \geq c > -\infty$, então $\frac{1}{n} \log(\|A^n\|) \rightarrow c$ implica que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ vale

$$e^{n(c-\epsilon)} < \|A^n\| < e^{n(c+\epsilon)},$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = e^c$. \square

3.2 Noções Básicas de Teoria Espectral

Na seção 2.1.2, adaptamos a Teoria clássica de Análise Complexa com a finalidade de estudar a aplicação resolvente ρ de um operador linear $A : E \rightarrow E$ fixado, onde E é um espaço de Banach. Usamos o fato de que ρ é uma aplicação holomorfa de um aberto de \mathbb{C} em $\mathcal{L}(E)$. A idéia desta nova seção é estudar o espectro sob um foco diferente, cuja motivação é a seguinte. Dado um polinômio $p(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n$, com $c_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \{0, \dots, m\}$, podemos avaliá-lo em $\mathcal{L}(E)$ (no lugar de avaliá-lo em \mathbb{C}) pela fórmula:

$$\mathcal{L}(E) \ni p(A) = \sum_{n=0}^m c_n A^n.$$

Dizemos que $p(A)$ é uma função polinomial do operador A . Como as funções holomorfas são localmente limite uniforme de polinomiais, claro está que dada uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ deve ser possível estender o conceito de função de operador para funções analíticas quaisquer, obtendo-se $f(A)$.

A definição precisa de $f(A)$, das relações entre seu espectro e o espectro de A e suas consequências são o objetivo da presente seção.

Definição 3.8. (Função de operador.) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ um operador linear em um espaço de Banach E e $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida numa vizinhança (fechada) \bar{U} não necessariamente conexa de $sp(A)$. Suponha que $\partial U = C$ é composta de curvas fechadas, C^1 por partes, orientadas com a orientação induzida no bordo. Definimos a *função do operador* A dada por f como

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

Denotamos por $\mathfrak{F}(A)$ à coleção de todas as funções holomorfas em alguma vizinhança com fronteira C^1 por partes de $sp(A)$.

Teorema 3.9. (Cálculo Funcional.) Dadas $f, g \in \mathfrak{F}(A)$, $c \in \mathbb{C}$, valem:

1. $c \cdot f + g \in \mathfrak{F}(A)$ e $(c \cdot f + g)(A) = c \cdot f(A) + g(A)$.
2. $f \cdot g \in \mathfrak{F}(A)$ e $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$.
3. Se f possui expansão em série de Taylor $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$, absolutamente convergente em uma vizinhança de $sp(A)$, então $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$.

Prova: Para o item 1, devemos esclarecer que por $h = c \cdot f + g$ entendemos a função obtida somando-se na interseção dos domínios de f e g . O resultado é consequência óbvia da linearidade da integral.

Para mostrarmos o item 2, usamos a equação do resolvente:

$$\begin{aligned} f(A) \cdot g(A) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \int_{C_2} g(\mu) \rho(\mu) d\mu = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \left(\int_{C_2} f(\lambda) g(\mu) \rho(\lambda) \rho(\mu) d\mu \right) d\lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \left(\int_{C_2} f(\lambda)g(\mu) \frac{\rho(\lambda) - \rho(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right) d\lambda = \\
& -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(\lambda) \left(\int_{C_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right) \rho(\lambda) d\lambda + \\
& +\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_2} g(\mu) \left(\int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda} d\lambda \right) \rho(\mu) d\mu =
\end{aligned}$$

(pois tomamos C_2 exterior a C_1)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\lambda)g(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda = (f \cdot g)(A).$$

Quanto ao item 3, sabemos do curso elementar de Análise Complexa que qualquer série de potências converge absolutamente em bolas abertas em torno de um centro, logo, se a série $\sum a_n \lambda^n$ converge em uma vizinhança de $sp(A)$, então existe ϵ_0 tal que existe o limite (uniforme) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \forall \lambda; |\lambda| \leq \sup sp(A) + \epsilon_0 = r$. Em particular, denotando por S_r^1 a esfera unitária de centro 0 e raio r , obtemos:

$$\begin{aligned}
f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r^1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \right) \rho(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{S_r^1} a_n \lambda^n \rho(\lambda) d\lambda = \\
& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{S_r^1} \lambda^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{\lambda^{j+1}} \right) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.10. Podemos fazer melhor: em verdade o item 3 ainda vale se f possuir expansão em série de Taylor $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$, absolutamente convergente em uma vizinhança de $sp(A)$. Neste caso, temos $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - \lambda_0 I)^n$. De fato,

$$\begin{aligned}
f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r^1(\lambda_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n \right) (\lambda I - \lambda_0 I + \lambda_0 I - A)^{-1} d\lambda = \\
& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{S_r^1(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0)^n \frac{1}{(\lambda I - \lambda_0 I) - (A - \lambda_0 I)} d\lambda =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{S_r^+(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0)^n \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{A - \lambda_0 I}{\lambda - \lambda_0}} \right) d\lambda = \\
& \frac{1}{2\pi i} \sum_n a_n \int_{S_r^+(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0)^n \sum_j \frac{(A - \lambda_0 I)^j}{(\lambda - \lambda_0)^{j+1}} d\lambda = \\
& \frac{1}{2\pi i} \sum_n \sum_j a_n \int_{S_r^+(\lambda_0)} \frac{(\lambda - \lambda_0)^n (A - \lambda_0 I)^j}{(\lambda - \lambda_0)^{j+1}} d\lambda = \\
& \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{S_r^+(\lambda_0)} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (A - \lambda_0 I)^n d\lambda = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - \lambda_0 I)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r^+(\lambda_0)} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - \lambda_0 I)^n.
\end{aligned}$$

O próximo teorema (junto com o anterior) pode ser considerado o proto-teorema Espectral, isto é, uma versão não lapidada (e portanto, mais geral) do teorema Espectral.

Teorema 3.11. (Mapeamento espectral.) *Se $f \in \mathfrak{F}(A)$, então $sp(f(A)) = f(sp(A))$. Em particular, se A é invertível, então $sp(A^{-1}) = (sp(A))^{-1} := \{\mu^{-1}, \mu \in sp(A)\}$.*

Prova:

$$(f(sp(A)) \subset sp(f(A)))$$

Seja $\lambda \in sp(A)$. A idéia é tentar escrever

$$f(\lambda)I - f(A) = (\lambda I - A) \cdot g(A), \quad (*)$$

com $g \in \mathfrak{F}(A)$. Daí, como os operadores de A comutam, fica claro que se $f(\lambda)$ não estivesse em $sp(f(A))$, então $g(A) \cdot (f(\lambda) - f(A))^{-1}$ seria inversa de $(\lambda I - A)$, absurdo. A própria fórmula acima nos indica como definir g em uma vizinhança de $sp(A)$:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z}, & \text{se } z \neq \lambda \\ f'(\lambda), & \text{caso } z = \lambda. \end{cases}$$

Como g é holomorfa em um disco furado com centro em λ e é contínua em λ (pois f é holomorfa em λ), segue-se que g é holomorfa inclusive

em λ , possuindo assim o mesmo domínio que f . Do Teorema do Cálculo Funcional, segue-se que $g(A)$ satisfaz (*).

$$(sp(f(A)) \subset f(sp(A)))$$

Agora seja $\mu \in sp(f(A))$ e suponha por absurdo que $\mu \notin f(sp(A))$. Neste caso, $f(\lambda) - \mu \neq 0, \forall \lambda \in sp(A)$ e portanto $h(z) = (f(z) - \mu)^{-1}$ está definida (e é holomorfa) em uma vizinhança de $sp(A)$. Ora, do Teorema do Cálculo Funcional, segue-se que

$$h(A) \cdot (f(A) - \mu I) = I,$$

o que implica que $\mu \notin sp(f(A))$, absurdo.

Se A é invertível, então $0 \notin sp(A)$, logo $f(z) = 1/z$ é uma função holomorfa definida na vizinhança $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de $sp(A)$. Ora, do teorema do Cálculo Funcional, de $f(z) \cdot z = z \cdot f(z) = 1$, concluímos que $f(A) \cdot A = A \cdot f(A) = I$, ou seja, que $f(A) = A^{-1}$. Da parte provada acima do Mapeamento Espectral, concluímos que $sp(A^{-1}) = sp(f(A)) = f(sp(A)) = (sp(A))^{-1}$. \square

Definição 3.12. (Componente espectral.) Seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear definido em um espaço de Banach E . Um conjunto $X \subset sp(A)$ é dito uma *componente espectral* se ele é aberto e fechado em $sp(A)$.

Note que como $sp(A)$ é compacto, toda componente espectral também o é. Note ainda que se X é uma componente espectral, o mesmo vale para X^c (o complementar de X em $sp(A)$).

Definição 3.13. (Projeção espectral.) Seja X uma componente espectral do espectro de um operador linear A . Seja $P_X : V \rightarrow \mathbb{C}$ definida em uma vizinhança não conexa $V = V_X \cup V_{X^c}$ de $sp(A)$, onde $V_X \supset X$ (respectivamente, $V_{X^c} \supset X^c$), tal que

$$P_X(z) = 1, \forall z \in V_X; P_X(z) = 0, \forall z \in V_{X^c}.$$

A aplicação $\Pi_X := P_X(A) \in \mathcal{L}(E)$ é dita *projeção espectral* associada a X .

Teorema 3.14. *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ um operador linear em um espaço de Banach, e seja $X \subset sp(A)$ um conjunto espectral. Então existe uma decomposição A -invariante $\hat{E} \oplus \bar{E} = E$ tal que $sp(A|_{\hat{E}}) = X$ e $sp(A|_{\bar{E}}) = X^c$.*

Prova: Pelo teorema do Cálculo Funcional, vale que Π_X e Π_{X^c} comutam com A e entre si (todos os operadores de A comutam entre si), que $I = \Pi_X + \Pi_{X^c}$, e $0 = \Pi_X \cdot \Pi_{X^c}$ (pois $P_X(z) \cdot P_{X^c}(z) = 0$). Ademais, notamos que $P_X(z) = P_X(z) \cdot P_X(z)$ (resp. $P_{X^c}(z) = P_{X^c}(z) \cdot P_{X^c}(z)$) vale que $\Pi_X = \Pi_X \cdot \Pi_X$ (resp. $\Pi_{X^c} = \Pi_{X^c} \cdot \Pi_{X^c}$).

Em particular, vale ainda que $A = \Pi_X \cdot A + \Pi_{X^c} \cdot A$. Definindo $\hat{E} := \Pi_X(E)$ e $\tilde{E} := \Pi_{X^c}(E)$, temos que $\hat{E} + \tilde{E} = I(E) = E$ e se $v \in \hat{E} \cap \tilde{E}$, então

$$\Pi_X(v) = v = \Pi_{X^c}(v) \Rightarrow \Pi_X \cdot \Pi_{X^c}(v) = v \Rightarrow v = 0,$$

o que implica que \hat{E} e \tilde{E} estão em soma direta.

Finalmente, da comutatividade existente entre A e as projeções espectrais, concluímos abaixo a A -invariância dos espaços \hat{E} e \tilde{E} :

$$A(\hat{E}) = A(\Pi_X(E)) = \Pi_X(A(E)) \subset \Pi_X(E) = \hat{E};$$

$$A(\tilde{E}) = A(\Pi_{X^c}(E)) = \Pi_{X^c}(A(E)) \subset \Pi_{X^c}(E) = \tilde{E}.$$

Agora, mostremos que $sp(A|_{\hat{E}}) = X$ e que $sp(A|_{\tilde{E}}) = X^c$.

Primeiramente, observe que como \hat{E} e \tilde{E} são invariantes por A , também o são por $A - \lambda I$. Desse modo,

$$A - \lambda I \text{ é invertível} \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I)|_{\hat{E}} \text{ é invertível e } (A - \lambda I)|_{\tilde{E}} \text{ é invertível.}$$

Em outras palavras, $res(A) = res(A|_{\hat{E}}) \cup res(A|_{\tilde{E}})$, o que equivale a dizer que

$$sp(A) = sp(A|_{\hat{E}}) \cup sp(A|_{\tilde{E}}).$$

Seja $r \notin sp(A)$, e defina $g : V_X \cup V_{X^c} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = P_X(z) * z + r * P_{X^c}$. Isso implica que $g(A) = \Pi_X \cdot A + r\Pi_{X^c}$. Ou seja, $g(A) = (A|_{\hat{E}}, I|_{\tilde{E}})$

Ora, o mapeamento espectral, junto com o mesmo raciocínio acima (baseado na invariância dos espaços \hat{E} , \tilde{E}) aplicado a g no lugar de A nos dão:

$$X \cup \{r\} = sp(g(A)) = sp(A|_{\hat{E}}) \cup \{r\};$$

e analogamente, poderíamos concluir que

$$X^c \cup \{r\} = sp(A|_{\tilde{E}}) \cup \{r\}.$$

Como r não pertence a $sp(A)$, não pertence a nenhum dos subconjuntos $sp(A|_{\hat{E}})$, $sp(A|_{\bar{E}})$, X e X^c , donde concluímos que $sp(A|_{\hat{E}}) = X$ e $sp(A|_{\bar{E}}) = X^c$. □

Definição 3.15. (Automorfismo linear hiperbólico.) Seja E um espaço de Banach. Um operador (ou automorfismo) linear $A \in \mathcal{L}(E)$ é dito *hiperbólico* se o espectro de A não intersecta a esfera S^1 . Se E tem dimensão finita, isso é o mesmo que dizer que nenhum autovalor de A tem norma 1.

Corolário 3.16. *Seja E um espaço de Banach (complexo), e $A \in \mathcal{L}(E)$ um automorfismo linear hiperbólico. Então existem $C > 1$, $0 < \lambda < 1$ e uma decomposição $E = E^s \oplus E^u$ tal que*

- *A decomposição é A -invariante, isto é, $A(E^s) \subset E^s$ e $A(E^u) \subset E^u$.*
- $\|A^n|_{E^s}\| \leq C\lambda^n$ e $\|[A^n|_{E^u}]^{-1}\| \leq C\lambda^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

O espaço E^s é chamado de Espaço Estável de A e o espaço E^u é o Espaço Instável de A .

Prova:

Sejam $X = sp(A) \cap B(0, 1)$, $X^c := sp(A) \setminus X$, e $P_X, P_{X^c} : \mathbb{C} \setminus S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ definidas respectivamente por $P_X := \chi_{B(0,1)}$ e $P_{X^c} := \chi_{\overline{B(0,1)}^c}$.

Defina $E^s := \Pi_X(E)$ e $E^u := \Pi_{X^c}(E)$. Pelo teorema 3.14, e usando do mapeamento espectral aplicado a função $f : \overline{B(0,1)}^c \rightarrow \text{complexo}$ dada por $f(z) = 1/z$ avaliada no operador $A|_{E^u} \rightarrow E^u$, obtemos:

- a) $sp(A|_{E^s}) = X$;
- b) $sp(A|_{E^u}) = X^c$ e $sp([A|_{E^u}]^{-1}) = sp(f(A|_{E^u})) = \{\mu^{-1}, \mu \in sp(A|_{E^u})\} \subset B(0, 1)$.

Da fórmula do raio espectral, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|A^n|_{E^s}\|} =: \lambda_s < 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|[A|_{E^u}]^{-n}\|} =: \lambda_u < 1.$$

Tomando $\lambda := (1 + \max\{\lambda_s, \lambda_u\})/2$ e $\epsilon := (1 - \lambda)$ dos limites acima, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ valem

$$\|A^n|_{E^s}\| \leq (\lambda_s + \epsilon)^n \leq \lambda^n; \quad \|[A|_{E^u}]^{-1}\| \leq (\lambda_u + \epsilon)^n \leq \lambda^n.$$

Agora, basta tomar

$$C := \max\{\|A^j|_{E^s}/\lambda^j\|, \|[A|_{E^u}]^{-j}/\lambda^j\|, j = 1, \dots, n_0 - 1\}.$$

□

3.3 Semicontinuidade das Componentes Espectrais

Durante essa seção, M denotará um espaço métrico completo (em nosso contexto, tipicamente \mathbb{C} ou um subconjunto compacto de \mathbb{C}), e $\kappa(M)$ denotará a coleção dos subconjuntos compactos não vazios de M . Dado um compacto não vazio $K \in \kappa(M)$ e $\epsilon > 0$, denotaremos por $K_\epsilon \subset M$ a ϵ -vizinhança de K em M , isto é,

$$K_\epsilon = \{x \in M, d(x, K) < \epsilon\},$$

onde $d(x, K) = \inf\{d(x, y), y \in K\}$.

Interessantemente, a coleção dos compactos não vazios $\kappa(M)$ possui, ela mesma, uma métrica própria (a distância de Hausdorff), cuja definição faz uso de ϵ -vizinhanças. Grosso modo, dois conjuntos compactos não vazios K e \hat{K} estarão ϵ -próximos se K_ϵ contiver \hat{K} e \hat{K}_ϵ contiver K . Mais precisamente:

3.3.1 Distância de Hausdorff entre compactos

Definição 3.17. (Distância de Hausdorff em $\kappa(M)$.) A distância de Hausdorff em $\kappa(M)$ é a função $d_H : \kappa(M) \times \kappa(M) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$d_H(K, \hat{K}) := \inf\{\epsilon > 0; K_\epsilon \supset \hat{K} \text{ e } \hat{K}_\epsilon \supset K\}.$$

Proposição 3.18. $(\kappa(M), d_H)$ um espaço métrico.

Prova: Claramente, $d_H \geq 0$, é simétrica, e $d_H(K, K) = 0, \forall K$ compacto não vazio. Sejam K, \hat{K}, \tilde{K} três compactos não vazios contidos em M . Se $K \neq \hat{K}$, então existe, digamos sem perda, $x_0 \in K \setminus \hat{K}$. Se $\epsilon_0 := d(x_0, \hat{K}) > 0$, concluímos que $K \notin \hat{K}_\epsilon, \forall \epsilon > 0$ e portanto $d_H(K, \hat{K}) \geq \epsilon_0 > 0$.

Falta-nos verificar somente a desigualdade triangular. Sem perda de generalidade, podemos supô-los dois a dois disjuntos e não vazios, caso contrário a desigualdade é de verificação imediata.

Seja $\delta_n > 0$ tal que $\delta_n \searrow d(K, \hat{K})$. Temos então duas possibilidades:

1. Como as δ_n -vizinhanças são encaixantes, uma possibilidade é que exista n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $K_{\delta_n} \not\supset \hat{K}$. Nesse caso, $d(K, \hat{K}) \geq \delta_{n_0} \geq d(K, \hat{K})$, e a desigualdade triangular é imediata. Raciocínio análogo vale se existir \hat{n}_0 tal que $\forall n \geq \hat{n}_0$, $\hat{K}_{\delta_n} \not\supset \hat{K}$.
2. A outra possibilidade que resta, portanto, é que $\hat{K} \subset K_{\delta_n} \cap \hat{K}_{\delta_n}$, $\forall n$. Dado $\delta > 0$, temos $\hat{K}_{d_H(K, \hat{K}) + \delta/2} \supset K$, $\hat{K}_{d_H(\hat{K}, \hat{K}) + \delta/2} \supset \hat{K}$, donde concluímos que

$$\hat{K}_{d_H(\hat{K}, \hat{K}) + d_H(K, \hat{K}) + \delta} \supset \hat{K}_{d_H(K, \hat{K}) + \delta/2} \supset K$$

e analogamente

$$K_{d_H(\hat{K}, \hat{K}) + d_H(K, \hat{K}) + \delta} \supset \hat{K},$$

como $\delta > 0$ é qualquer, obtemos por conseguinte que

$$d_H(K, \hat{K}) \leq d_H(\hat{K}, \hat{K}) + d_H(K, \hat{K}).$$

□

Teorema 3.19. *Se (M, d) é completo, então $(\kappa(M), d_H)$ também é um espaço métrico completo.*

Prova: Sejam $K_n \subset M$ compactos, tal que (K_n) seja uma seqüência de Cauchy com respeito a métrica de Hausdorff. Como antes, a menos de passar a uma subsequência podemos supor que (K_n) é tal que

$$d_H(K_n, K_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+2}}$$

Seja $K := \{x; \exists x_n \in K_n \text{ tal que } x_n \rightarrow x\}$. Dado $\epsilon > 0$, começamos por mostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, temos $K_\epsilon \supset K_n$ e $K \subset (K_n)_\epsilon$. Como K_n é Cauchy, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$,

$K_m \subset (K_n)_{\epsilon/2}$ e $K_n \supset (K_m)_{\epsilon/2}$. Em particular, da definição de K , temos que $K \subset (K_n)_{\epsilon}$, $\forall n \geq n_0$.

Por outro lado, dado um ponto y_n de K_n , existe outro ponto y_{n+1} de K_{n+1} que dista de y_n a menos de $1/2^{n+2}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{n_0} < \epsilon/2$ e $m \geq n_0$.

Dado $\epsilon > 0$ Seja $\{x_{1,1}, \dots, x_{1,t}\}$ um conjunto $\epsilon/4$ -denso em K_m . Definamos seqüências $(y_{n,j})$, $j = 1, \dots, t$ da seguinte forma:

- Para $n < m$, $y_{n,j}$ é algum elemento de K_n ;
- Para $n = m$, $y_{n,j} = x_{1,j}$
- Para $n > m$, tomamos $y_{n,j} \in K_n$ tal que $d(y_{n,j}, y_{n-1,j}) < 1/(2^{n+1})$

É fácil ver que cada seqüência $(y_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, e como o espaço é completo, converge, seu limite, por definição pertencendo a K . Chamando de $z_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n,j}$, temos que

$$d(x_{1,j}, y_{j,n}) \leq \sum_{s=m}^n d(y_{s,j}, y_{s+1,j}) < 1/(2^{m+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} d(x_{1,j}, z_j) < \epsilon/2$$

Em particular, K_m está contido na ϵ -vizinhança do conjunto $\{z_j, j = 1, \dots, t\} \subset K$, a qual está contida em K_{ϵ} .

Para completar a prova, só nos resta verificar que K é compacto. Mas isso é simples, basta vermos que K é totalmente limitado e completo.

Para a completude, como M é completo, basta vermos que K é fechado em M . Seja (w_n) , $w_n \in K$, $w_n \rightarrow w$ quando $n \rightarrow +\infty$. Ora, vimos que cada w_n possui um ponto x_n de K_n que dista de si a menos de $\frac{1}{2^n}$. Logo $w = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, o que implica que $w \in K$.

Chequemos agora a limitação total de K . Tome K_m tal que K_m está na $\epsilon/3$ -vizinhança de K e vice-versa. Daí, $K_{\epsilon/3} = \cup_{x \in K} B(x, \epsilon/3) \supset K_m$. Como K_m é compacto, temos que podemos extrair uma subcobertura $\cup_{j=1}^s B(x_j, \epsilon/3) \supset K_m$, com $x_j \in K$, $\forall j = 1, \dots, s$. Seja $A = \cup_{j=1}^s B(x_j, \epsilon)$ e $x \in (K_m)_{\epsilon/3}$. Daí, existe $y_m \in K_m$ tal que $d(y_m, x) < \epsilon/3$. Seja x_j tal que $y_m \in B(x_j, \epsilon/3)$. Temos portanto que

$$d(x, x_j) \leq d(x, y_m) + d(y_m, x_j) < \epsilon,$$

logo $x \in A$. Em particular, K é totalmente limitado, pois $K \subset (K_m)_{\epsilon/3} \subset A = \cup_{j=1}^s B(x_j, \epsilon)$. \square

Uma proposição simples que deixamos como exercício 1 é que se M é métrico compacto, então $(\kappa(M), d_H)$ é ele mesmo um espaço métrico compacto.

Definição 3.20. Dado um espaço topológico X e um espaço métrico compacto M , uma aplicação $\Phi : X \rightarrow \kappa(M)$ é

- *semicontínua inferior* em $x \in X$ se para todo aberto $V \subset M$ com $V \cap \Phi(x) \neq \emptyset$, existir uma vizinhança U de x em X tal que $V \cap \Phi(x') \neq \emptyset$ para todo $x' \in U$;
- *semicontínua superior* em $x \in X$ se para todo aberto $V \subset M$ contendo $\Phi(x)$, existir uma vizinhança U de x em X tal que V contém $\Phi(x')$ para todo $x' \in U$;
- *semicontínua inferior* (resp., *superior*) se for semicontínua inferior (resp., superior) em cada $x \in X$.

Teorema 3.21. (Semicontinuidade superior das componentes espectrais.) *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ dada, onde E é um espaço de Banach. Seja $C \subset sp(A)$ uma componente espectral e considere $C \subset V \subset \mathbb{C}$ um aberto limitado tal que $\bar{V} \cap sp(A) = C$. Dada uma vizinhança C_ϵ , $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|A - \hat{A}\| < \delta$ implica que $\bar{V} \cap sp(\hat{A}) = C_\epsilon \cap sp(\hat{A})$. Em outras palavras, a aplicação $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \kappa(V)$, dada por $\Phi(\hat{A}) = \hat{V} \cap sp(\hat{A})$ é semicontínua superior em A .*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Tudo que precisamos mostrar é que existe $\delta > 0$ tal que se $\hat{A} \in B(A, \delta) \subset \mathcal{L}(E)$, então $sp(\hat{A}) \cap (\bar{V} \setminus C_\epsilon) = \emptyset$. Note que $W = \bar{V} \setminus C_\epsilon$ é um compacto contido no conjunto resolvente de A . Pelo teorema da perturbação do isomorfismo, para cada $\lambda \in W$, existe $r_\lambda > 0$ tal que $\tilde{A} \in B(0, r_\lambda) \Rightarrow \exists [(A - \lambda I) + \tilde{A}]^{-1}$. Em particular, para cada $\lambda \in W$, existe uma bola $B_\lambda = B(\lambda, r_\lambda/2)$ tal que se $\tilde{A} \in B(0, r_\lambda/2)$, $\tilde{\lambda} \in B_\lambda$, então existe $[(A - \tilde{\lambda} I) + \tilde{A}]^{-1}$.

Tomando uma subcobertura finita $B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_s}$ de W por bolas B_λ , considere $\delta = \min\{r_{\lambda_1}/2, \dots, r_{\lambda_s}/2\}$ $\hat{A} \in B(A, \delta)$. Então, dado $\lambda \in W$, existe $B(\lambda_j, r_{\lambda_j}/2) \ni \lambda$ e portanto para $\hat{A} \in B(A, \delta)$ escrevendo $\hat{A} = A + \tilde{A}$, temos que existe

$$[\hat{A} - \lambda I]^{-1} = [A - \lambda I + \tilde{A}]^{-1}.$$

Isso mostra que $W \subset \text{res}(\hat{A})$, para todo $\hat{A} \in B(A, \delta)$. Logo, $\text{sp}(\hat{A}) \cap \bar{V} = \text{sp}(\hat{A}) \cap C_\epsilon$. □

Corolário 3.22. *O Espectro varia semicontinua superiormente.*

Corolário 3.23. *Se $\{p\}$ é um subconjunto isolado do espectro de A , este varia continuamente na Distância de Hausdorff.*

Exemplo 3.24. (Semi-descontinuidade inferior do espectro.) Seja $E = \ell_p(\mathbb{Z})$ e seja e_j o elemento em E que só não zera na posição j , na qual ela é 1. defina $T \in \mathcal{L}(E)$ por $T(e_j) = e_{j-1}$, se $j \neq 0$ e $T(e_0) := 0$. Então o espectro de T é o disco fechado unitário. De fato, claramente a norma de T é menor ou igual a 1, e dado $z \in \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{C}$, temos que o vetor

$$v_z := (\dots, 0, z, z^2, z^3, \dots)$$

é autovetor do autovalor $z \in \mathbb{C}$.

Agora tome $A \in \mathcal{L}(E)$ o operador que leva e_0 em e_{-1} e zera em $e_j, \forall j \neq 0$. Daí, $T_n := T + \frac{1}{n}A$ é claramente invertível, possui norma menor ou igual a 1 e o raio espectral de sua inversa é 1 (vide exercício 2). Ora, pelo teorema do mapeamento espectral isso significa que o espectro de T_n está contido em S^1 , mostrando que o espectro degenerou.

3.4 Continuidade de Espaços Invariantes

Vimos na seção anterior que componentes espectrais são semicontínuas superiores. Além disso, pela teoria de Cauchy-Goursat, elas podem degenerar, mas não desaparecer, se perturbamos um operador (isto é, se o substituimos por outro suficientemente próximo). Claro, isso ocorre porque se o resolvente de um operador A está definido sobre uma curva compacta C , existe uma vizinhança $V \in \mathcal{L}(E)$ de A , em que o mesmo ocorre (exercício 3) para todo operador em V . Ademais tal resolvente varia continuamente (analiticamente) com respeito ao operador e portanto sua integral curvilínea, o que implica que a projeção calculada por esta, a qual é não nula, permanece não nula em uma vizinhança de A . Isso nos diz que a componente X_A espectral existente na região interior a curva C se prolonga a uma

componente espectral $X_{\hat{A}}$ contida nessa mesma região, para qualquer $\hat{A} \in V$.

Analisamos aqui a interessante questão da continuidade dos espaços invariantes relativos a componentes espectrais e seus prolongamentos.

O primeiro problema que se coloca, é como definir a continuidade de um subespaço vetorial (que é um conjunto!) de um espaço de Banach. Para esta finalidade, dado um subespaço $E_0 \subset E$, tome um subespaço complementar fechado E_1 , isto é, tal que $E_0 \oplus E_1 := E$. Escrevendo para cada vetor v de E de maneira única como $v = v_0 + v_1 := (v_0, v_1)$, com $v_0 \in E_0$ e $v_1 \in E_1$, note que E_0 é o gráfico da aplicação $\sigma : E_0 \rightarrow E_1$ identicamente nula. De fato, é imediato que se um subespaço fechado se escreve como um gráfico de uma aplicação de E_0 em E_1 esta é única, linear e contínua. (exercício 5.) Considere então a coleção de subespaços

$$\mathcal{E} := \{\hat{E}; \hat{E} \subset E \text{ é gráfico de alguma } \hat{\sigma} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)\}$$

Tal conjunto é um espaço métrico completo com a métrica

$$d(\hat{E}, \hat{E}') := Lip(\hat{g}, \hat{g}').$$

(exercício 6)

Teorema 3.25. *Seja λ um autovalor isolado de A . Então seu auto-espaço generalizado $E(A, \lambda)$ varia continuamente.*

Prova: Como λ é isolado, $\delta := d(\lambda, sp(A) \setminus \{\lambda\}) > 0$.

Devido ao teorema 3.21, existe uma vizinhança $B = B(A, r)$, $r < \delta/9$, tal que todo operador linear $\hat{A} \in B$ possui uma lacuna espectral em que $sp(\hat{A}) = \hat{\Lambda} + \hat{C}$, onde $\hat{\Lambda} \subset B(\lambda, \delta/9)$ e $\hat{C} \subset B(\lambda, 8\delta/9)^c$.

Note que trocando cada $\hat{A} \in B(A, r)$ por $(\hat{A} - \lambda I + \delta/9I)/(\delta/3)$, podemos supor sem perda de generalidade que \hat{A} é invertível com inversa contínua e que $sp(\hat{A}) = \hat{\Lambda} + \hat{C}$, $|\hat{\Lambda}| < 1/3$, $|\hat{C}| > 8/3$. Nesse caso, da lacuna espectral de A , temos que existe um iterado n_0 tal que $\|A^{n_0}|_{E(A, \lambda)}\| < (2/5)^{n_0}$ e $\|[A^{n_0}|_{E(A, sp(A) \setminus \{\lambda\})}]^{-1}\|^{-1} > (5/2)^{n_0}$. Em particular, existe uma vizinhança $B(A, r')$, $0 < r' < r$ de A e uma métrica adaptada $\|v\|' = \max\{\|v_\lambda\|', \|v_C\|'\}$, com $v_\lambda \in E(A, \lambda)$, $v_C \in E(A, sp(A) \setminus \{\lambda\})$ tal que na norma adaptada de A , $\|\hat{A}|_{E(A, \lambda)}\| < 1/2$ e $\|\hat{A}|_{E(A, sp(A) \setminus \{\lambda\})}]^{-1}\|^{-1} > 2$.

Fixemos então um tal \hat{A} . Tudo que precisamos ver é que existe uma decomposição do espaço $E = \hat{E} \oplus \tilde{E}$ em subespaços \hat{A} -invariantes com $\dim(\hat{E}) = \dim(E(A, \lambda) < +\infty$ e tal que

$$\|\hat{A}|_{\hat{E}}\| < 1/2 \text{ e } \|[\hat{A}|_{\tilde{E}}]^{-1}\|^{-1} < 1/2.$$

Mas tal é imediato do teorema da variedade estável linear, que provaremos na próxima seção. □

3.5 Isomorfismos Hiperbólicos

Conforme dito na seção anterior, nessa seção não apenas mostraremos que se λ é um autovalor isolado de um operador A então seu autoespaço generalizado varia continuamente. Mostraremos que se temos um isomorfismo hiperbólico, de fato seus espaços invariantes E^s e E^u , associados respectivamente com as componentes espectrais contrativa e expansora do espectro, variam continuamente com o operador.

Tal é consequência do:

Teorema 3.26. (Variedade Estável- versão Linear.) *Seja E um espaço de Banach e T um isomorfismo hiperbólico, e seja $0 < \alpha < 1$ tal que os raios espectrais de $T|_{E^s}$ e $[T|_{E^u}]^{-1}$ sejam ambos menores que α . Então para toda aplicação $f : E \rightarrow E$ linear tal que $\text{Lip}(f - T) < \min\{(1-\alpha)/2, (1-\alpha)/2 \max\{\text{Lip}(T^{-1})^2, \text{Lip}(T^{-1})\}\} =: r$ valem:*

1. f é isomorfismo linear hiperbólico.
2. Existe uma única aplicação linear $g : E^s \rightarrow E^u$, com $\text{Lip}(g) \leq 1$, cujo gráfico é invariante por f , tal que o espaço estável de f , $E^s(f) = \text{graf}(g)$.
3. Em particular, a restrição de f ao gráfico de g é uma contração.
4. g varia continuamente com f .

Dotemos o espaço $E = E^s \oplus E^u$ da norma $\|v\| = \max\{\|v_s\|, \|v_u\|\}$, com $v = v_s + v_u$, $v_s \in E^s$ e $v_u \in E^u$. Denotemos por $L_1(E^s, E^u)$ a

bola aberta de raio um no espaço das aplicações lineares contínuas de de E^s em E^u . Ou seja, $L_1(E^s, E^u)$ é a coleção das aplicações lineares de E^s em E^u com constante de Lipschitz menor do que 1.

Boa parte do trabalho inicial para a prova desse teorema consiste em mostrar que a *transformação de gráfico* $\Gamma_{f^{-1}} : \overline{L_1(E^s, E^u)} \rightarrow \overline{L_1(E^s, E^u)}$ dada por

$$\Gamma_{f^{-1}}(\sigma)(x_s) := [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)] \circ [\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)]^{-1}(x_s).$$

está bem definida. Será extremamente conveniente termos dotado E com a norma do máximo dada por:

$$\|v\| := \max\{\|v_s\|, \|v_u\|\}, \text{ onde } v = v_s \oplus v_u, \text{ com } v_s \in E^s \text{ e } v_u \in E^u.$$

A conveniência desta norma é que dada qualquer $\sigma \in \text{Lip}_1(E^s, E^u)$, a projeção natural $\pi_s : E \rightarrow E^s$, restrita ao gráfico de σ , é uma **isometria** entre o gráfico de σ e E^s . De fato, tomando dois pontos $q = (x_s, \sigma(x_s))$ e $\hat{q} = (\hat{x}_s, \sigma(\hat{x}_s))$ quaisquer no gráfico de σ temos:

$$d(q, \hat{q}) = \|(x_s, \sigma(x_s)) - (\hat{x}_s, \sigma(\hat{x}_s))\| = \max\{\|x_s - \hat{x}_s\|, \|\sigma(x_s) - \sigma(\hat{x}_s)\|\} \leq$$

(como σ tem 1 como constante de Lipschitz)

$$\max\{\|x_s - \hat{x}_s\|, \|x_s - \hat{x}_s\|\} = \|x_s - \hat{x}_s\| = d(\pi_s(q), \pi_s(\hat{q})).$$

Note que $\pi_s|_{\text{graf}(\sigma)}$ é a inversa da aplicação gráfico de σ dada por $x_s \mapsto (x_s, \sigma(x_s))$, a qual parametriza o gráfico de σ . Devido ao parágrafo anterior, isto quer dizer que na norma que fixamos em B , para toda $\sigma \in \text{Lip}_1(E^s, E^u)$, a aplicação de gráfico de σ é uma isometria entre E^s e $\text{graf}(\sigma)$.

Uma vez demonstrado que a aplicação de gráfico está bem definida, usaremos da hiperbolicidade para mostrar que ela é uma contração em $\overline{L_1(E^s, E^u)}$, e seu único ponto fixo nos dará a aplicação cujo gráfico é a variedade estável local.

Lembramos que se $\text{Lip}(f - T) < \|T^{-1}\|^{-1} = \inf_{\|v\|=1} \|T(v)\|$, ainda pelo Teorema da perturbação do Isomorfismo, vale que $f = T + (f - T)$ é um isomorfismo linear sobre E .

Os próximos dois lemas nos dão conta de que a transformação de gráfico está bem definida, se $\text{Lip}(f - T)$ for suficientemente pequena:

Lema 3.27. *Seja $T : E \rightarrow E$ um isomorfismo hiperbólico em um espaço de Banach $E = E^s \oplus E^u$, com $\|T|_{E^s}\|, \|[T|_{E^u}]^{-1}\| \leq \alpha < 1$. Então dado $0 < \epsilon < \alpha^{-1}$, existe $\delta = \delta(T, \epsilon) > 0$ tal que se $\text{Lip}(f - T) < \delta$ então existe $f^{-1} : E \rightarrow E$, e temos que $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$ e que $\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma) : E^s \rightarrow E^s$ é um homeomorfismo bilipschitz, cuja inversa possui constante de Lipschitz*

$$\text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)]^{-1}) \leq \frac{1}{\alpha^{-1} - \epsilon}.$$

Em particular, tomando $\epsilon < \alpha^{-1} - 1$, $[\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)]^{-1}$ é uma contração de E^s em si próprio.

Prova: Ainda sem fixar $\delta = \delta(T)$, vamos supô-lo menor ou igual a $\|T^{-1}\|^{-1}$. Isso já implica a existência de f^{-1} , como vimos no parágrafo que antecede este lema.

Como T deixa E^s invariante, podemos considerar a aplicação $T^s := T|_{E^s} : E^s \rightarrow E^s$. Como T é invertível, o mesmo ocorre com T^s . Pelo teorema da perturbação da aplicação bilipschitz (corolário 2.27 da página 39), para que $\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)$ seja invertível, basta que tenhamos

$$\text{Lip}(\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma) - [T^s]^{-1}) < \text{Lip}(T^s)^{-1}.$$

Ora, como $\alpha^{-1} \leq \text{Lip}(T^s)^{-1}$, é suficiente mostrarmos que

$$\text{Lip}(\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma) - [T^s]^{-1}) < \alpha^{-1}$$

Observe que como T deixa E^s invariante, de fato vale

$$\pi_s \circ f^{-1}(x_s, \sigma(x_s)) - [T^s]^{-1}(x_s) =$$

$$(\pi_s \circ f^{-1}(x_s, \sigma(x_s))) - T^{-1}|_{E^s}(x_s) = \pi_s \circ (f^{-1} - T^{-1}) \circ (x_s, \sigma(x_s));$$

logo

$$\begin{aligned} & \text{Lip}(\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma) - T^{-1}|_{E^s}) \leq \\ & \leq \text{Lip}(\pi_s) \cdot \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) \cdot \text{Lip}(id, \sigma) = \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto, dado $0 < \epsilon < \alpha^{-1}$, tudo que temos de fazer é obter uma cota para $\text{Lip}(f - T)$ de modo a que $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$

Ora,

$$\begin{aligned} f^{-1} - T^{-1} &= (T + (f - T))^{-1} - T^{-1} = (T \cdot (I + T^{-1}(f - T)))^{-1} - T^{-1} = \\ &= [I + T^{-1}(f - T)]^{-1} \circ T^{-1} - T^{-1} = ([I + T^{-1}(f - T)]^{-1} - I) \circ T^{-1} = \\ &= (I - [I + T^{-1}(f - T)]) \circ [I + T^{-1}(f - T)]^{-1} \circ T^{-1} = \\ &= (-T^{-1}(f - T)) \circ [I + T^{-1}(f - T)]^{-1} \circ T^{-1}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) &\leq \text{Lip}(T^{-1})^2 \cdot \text{Lip}(f - T) \cdot \text{Lip}([I + T^{-1}(f - T)]^{-1}) \leq \\ &= \text{Lip}(T^{-1})^2 \cdot \text{Lip}(f - T) \cdot \frac{1}{1 - \text{Lip}(T^{-1}) \text{Lip}(f - T)} \end{aligned}$$

Fazendo $\delta := \epsilon / (2 \text{Lip}(T^{-1})^2)$, e $\text{Lip}(f - T) < \delta$, segue-se a primeira parte do enunciado.

No caso em que $\epsilon < \alpha^{-1} - 1$, então

$$\text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)]^{-1}) \leq \frac{1}{\alpha^{-1} - \epsilon} < 1,$$

o que implica que $\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)$ expande uniformemente em todas as direções (mais precisamente, sua inversa é uma contração; sendo linear, tal inversa leva a bola unitária fechada de E^s estritamente nela mesma). \square

Lema 3.28. *Seja $T : E \rightarrow E$ um isomorfismo hiperbólico em um espaço de Banach $E = E^s \oplus E^u$, com $\|T|_{E^s}\| \leq \alpha < 1$, $\|[T|_{E^u}]^{-1}\| \leq \alpha < 1$. Suponha $\epsilon < 1 - \alpha$ e considere o correspondente $\delta = \delta(T, \epsilon)$ dado no lema anterior. Se $\text{Lip}(f - T) < \min\{\delta, 1 - \alpha\}$, a transformação de gráfico $\Gamma_{f^{-1}} : \underline{L}_1(E^s, E^u) \rightarrow \underline{L}_1(E^s, E^u)$ está bem definida.*

Prova: Note que se $0 < \alpha < 1$, então $(1 - \alpha) < \alpha^{-1} - 1$, logo estamos sob as hipóteses dos últimos lemas. Pelo lema anterior, já obtivemos que a fórmula abaixo (que define a transformação de gráfico avaliada em x_s)

$$\Gamma_{f^{-1}}(\sigma)(x_s) = [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)] \circ [\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)]^{-1}(x_s),$$

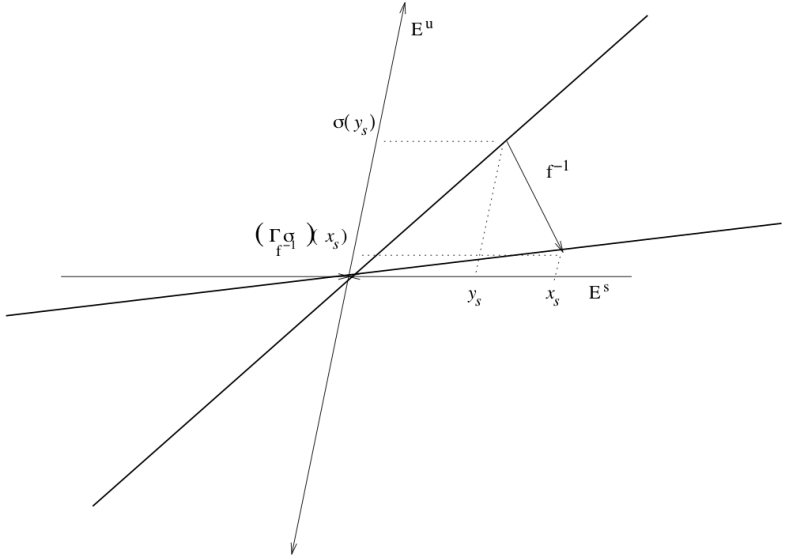


Figura 3.5: Transformação de gráfico.

faz sentido para $x_s \in E^s$ se $\sigma \in \overline{L_1(E^s, E^u)}$, nos dando um valor em E^u . Para provarmos que $\Gamma_{f^{-1}}(\sigma)$ está bem definida, resta-nos verificar que $\Gamma_{f^{-1}}(\sigma) \in \text{Lip}_1(E^s, E^u)$, se $\sigma \in \overline{L_1(E^s, E^u)}$. De fato,

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\Gamma_{f^{-1}}(\sigma)) &\leq \text{Lip}((\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)) \cdot \text{Lip}((\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma))^{-1}) \leq \\ &\text{Lip}((\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)) \cdot \frac{1}{\alpha^{-1} - \epsilon} \leq \text{Lip}((\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)) \leq \\ &\text{Lip}((\pi_u \circ (f^{-1}) \cdot \text{Lip}((id, \sigma)) \leq \text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \leq \\ &\text{Lip}(\pi_u T^{-1} + (\pi_u f^{-1} - \pi_u T^{-1})) \leq \\ &\text{Lip}([T^u]^{-1}) + \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) \leq \alpha + \epsilon \leq 1. \end{aligned}$$

□

De ora em diante, consideraremos-nos sob as hipóteses nas quais $\Gamma_{f^{-1}}$ está bem definida, fixando $0 < \epsilon < 1 - \alpha$ e $\delta > 0$, de modo a que se $\text{Lip}(f - T) < \delta$, então as teses dos lemas anteriores sejam todas satisfeitas.

Nosso próximo passo é mostrar que $\Gamma_{f^{-1}} : \overline{L_1(E^s, E^u)} \rightarrow \overline{L_1(E^s, E^u)}$ é uma contração.

Lema 3.29. *Para toda $\sigma \in \overline{L_1(E^s, E^u)}$ vale a seguinte desigualdade:*

$$\|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - (\Gamma_{f^{-1}} \sigma)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \leq (\alpha + 2\epsilon) \|x_u - \sigma(x_s)\|.$$

Prova: A demonstração é bastante direta. O primeiro membro da inequação do enunciado é o mesmo que:

$$\|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)] \circ (\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma))^{-1}(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \leq$$

(somando e subtraindo $(\Gamma_{f^{-1}} \sigma)(\pi_s(f^{-1}(x_s, \sigma(x_s))))$) e aplicando a desigualdade triangular)

$$\begin{aligned} & \|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, \sigma)](x_s)\| + \\ & \|(\Gamma_{f^{-1}} \sigma)(\pi_s(f^{-1}(x_s, \sigma(x_s))) - (\Gamma_{f^{-1}} \sigma)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \leq \\ & \text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \|(x_s, x_u) - (x_s, \sigma(x_s))\| + \\ & \text{Lip}(\Gamma_{f^{-1}} \sigma) \|\pi_s(f^{-1}(x_s, \sigma(x_s))) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u))\| \leq \end{aligned}$$

(pois vimos no lema anterior que $\text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \leq \alpha + \epsilon$ e que $\text{Lip}(\Gamma_{f^{-1}} \sigma) \leq 1$)

$$(\alpha + \epsilon) \|(x_s, x_u) - (x_s, \sigma(x_s))\| + \|\pi_s(f^{-1}(x_s, \sigma(x_s))) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u))\| =$$

(observando que $\pi_s T^{-1}(x_s, x_u) = \pi_s T^{-1}(x_s, \sigma(x_s))$ e com mais um argumento de soma e subtração)

$$(\alpha + \epsilon) \|(x_s, x_u) - (x_s, \sigma(x_s))\| +$$

$$\begin{aligned} & \|\pi_s(f^{-1}(x_s, \sigma(x_s))) - \pi_s T^{-1}(x_s, \sigma(x_s)) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)) + \pi_s T^{-1}(x_s, x_u)\| \leq \\ & (\alpha + \epsilon) \|x_u - \sigma(x_s)\| + \text{Lip}(\pi_s f^{-1} - \pi_s T^{-1}) \|x_u - \sigma(x_s)\| \leq (\alpha + 2\epsilon) \|x_u - \sigma(x_s)\|. \end{aligned}$$

□

Lema 3.30. *Tome $\epsilon < (1 - \alpha)/2$ arbitrário e $\delta = \delta(\epsilon, T) > 0$ correspondente (nos lemas anteriores) de modo a que $\text{Lip}(f - T) < \delta$ implique em que $\Gamma_{f^{-1}} : \overline{L_1(E^s, E^u)} \rightarrow \overline{L_1(E^s, E^u)}$ esteja bem definida e que $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$. Considere ainda $\overline{L_1(E^s, E^u)}$ dotada da norma do operador. Então $\Gamma_{f^{-1}}$ é uma $\alpha + 2\epsilon$ -contração em $\overline{L_1(E^s, E^u)}$. Em particular, $\Gamma_{f^{-1}}$ possui um único ponto fixo.*

Prova: Sejam $\sigma, \hat{\sigma} \in \overline{L_1(E^s, E^u)}$. Dado $x_s \in E^s$ com $|x_s| = 1$, pela segunda parte do enunciado do lema 3.27, existe $y_s \in E^s$ com norma menor ou igual a 1 tal que $x_s = \pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma)(y_s)$

$$\begin{aligned} & \|(\Gamma_{f^{-1}\sigma})(x_s) - (\Gamma_{f^{-1}\hat{\sigma}})(x_s)\| = \\ & \|(\pi_u \circ f^{-1})(id, \sigma) \circ (\pi_s \circ f^{-1}(id, \sigma))^{-1}(\pi_s(f^{-1}(y_s, \sigma(y_s)))) - \\ & \quad (\Gamma_{f^{-1}\hat{\sigma}})(\pi_s(f^{-1}(y_s, \sigma(y_s))))\| = \\ & \|(\pi_u \circ f^{-1})(y_s, \sigma(y_s)) - (\Gamma_{f^{-1}\hat{\sigma}})(\pi_s(f^{-1}(y_s, \sigma(y_s))))\| \leq \\ & \text{(pelo lema anterior)} \end{aligned}$$

$$(\alpha + 2\epsilon) \cdot \|\sigma(y_s) - \hat{\sigma}(y_s)\| \leq (\alpha + 2\epsilon) \cdot \sup_{x \in \overline{B^s(0,1)}} \|\sigma(x) - \hat{\sigma}(x)\|.$$

Tomando o supremo em x_s na expressão acima, concluímos que

$$\|\Gamma_{f^{-1}\sigma} - \Gamma_{f^{-1}\hat{\sigma}}\| \leq (\alpha + 2\epsilon) \cdot \|\sigma - \hat{\sigma}\|,$$

ou seja, $\Gamma_{f^{-1}}$ é uma contração para a norma em $\overline{L_1(E^s, E^u)}$.

Como $\overline{L_1(E^s, E^u)}$ é um subconjunto fechado do espaço de Banach $\mathcal{L}(E^s, E^u)$, segue-se que é um espaço métrico completo. Desse modo, o Teorema do Ponto Fixo para Contrações (teorema 2.19) implica que $\Gamma_{f^{-1}}$ possui um único ponto fixo $g \in \overline{L_1(E^s, E^u)}$. \square

Podemos agora arrematar a prova do Teorema da Variedade Estável (linear).

Mostremos que o gráfico de g é f^{-1} -invariante (e também f invariante, pois f é isomorfismo). Dado $x = (x_s, g(x_s))$, considere $f^{-1}(x) = (y_s, y_u)$. Ora, $y_s = [\pi_s \circ f^{-1}](id, g)(x_s)$, o que implica que

$$\begin{aligned} g(y_s) &= [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, g)] \circ [\pi_s \circ f^{-1}(id, g)]^{-1}[\pi_s \circ f^{-1}](id, g)(x_s) = \\ & [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (id, g)](x_s) = y_u. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $f|_{\text{graf}(g)}$ é uma contração. Lembramos que pelo item 2, $f(\text{graf}(g)) \subset \text{graf}(g)$. Ora, vimos em nossa digressão anterior aos lemas que a norma adotada faz da projeção $\pi_s|_{\text{graf}(g)} : \text{graf}(g) \rightarrow E^s$ uma isometria, cuja inversa é simplesmente a aplicação gráfico $x_s \mapsto (x_s, g(x_s))$. Esta última aplicação é a nossa

parametrização canônica de $\text{graf}(g)$, daí temos (pelo fato de $\pi_s|_{\text{graf}(g)}$ e sua inversa serem isometrias) que tanto $f|_{\text{graf}(g)}$ como sua expressão em carta bilipschitz $\pi_s|_{\text{graf}(g)} \circ f|_{\text{graf}(g)} \circ (id, g) : E^s \rightarrow E^s$ possuem a mesma constante de Lipschitz.

Ora, mas como o gráfico de g é f -invariante,

$$\pi_s|_{\text{graf}(g)} \circ f \circ (id, g) = (id, g)^{-1} \circ [f^{-1}]^{-1} \circ [\pi_s|_{\text{graf}(g)}]^{-1} = [\pi_s \circ f^{-1}(id, g)]^{-1}.$$

Portanto, segue-se que

$$\text{Lip}(f|_{\text{graf}(g)}) = \text{Lip}(\pi_s \circ f \circ (id, g)) =$$

(pelo lema 3.27)

$$\text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(id, g)]^{-1}) \leq \frac{1}{\lambda^{-1} - \epsilon} < 1.$$

Concluimos que nesse caso Lipschitz global, $f|_{\text{graf}(g)}$ é uma contração, concluindo o item 3. Isto nos dá que $\text{graf}(g)$ está contido no espaço estável de f . Para concluir que coincidem, seja $x = (x_s, x_u) \in E^s(f)$, então $x = f^{-n}(y_n)$, com (y_n) limitada ($y_n = f^n(x) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$), digamos, por um certo r_x . Aplicando indutivamente o lema 3.29 para $y_n \in E^s(f)$ e $\sigma = g$. Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \|x_u - g(x_s)\| &= \|\pi_u f^{-n}(y_n) - g(\pi_s f^{-n}(y_n))\| \leq \\ &(\alpha + 2\epsilon)^n \|y_{n_u} - g(y_{n_s})\| \leq (\alpha + 2\epsilon)^n 2r_x, \end{aligned}$$

o que implica que $(x_s, x_u) = (x_s, g(x_s))$ e portanto $E^s(f) = \text{graf}(f)$.

O item 4 se deve ao fato de a transformação de gráfico depender continuamente de f e do ponto fixo depender continuamente da contração (vide obs. 2.21, na página 32). Deixamos os detalhes como exercício para o leitor (Exercícios 7 e 8). □

3.6 Programa de Cálculo de projeções espectrais

Nessa seção, apresentamos um programa em linguagem **C** por nós escrito que permite entrar uma matriz e uma região quadrada contendo um possível autovalor λ de um operador A , com a finalidade de

calcular, usando da teoria vista de Análise complexa a projeção espectral associada λ . Note que a mesma região funciona para calcular a projeção espectral associada ao prolongamento de λ com respeito a operadores suficientemente próximos de A .

Para compilar o programa, deve-se digitar e salvar em uma mesma pasta os quatro arquivos listados abaixo, e digitar em um terminal (preferencialmente, linux):

```
gcc -o proj proj.c -lm
```

Após a listagem, temos uma figura com a tela de execução do exemplo que demos na introdução. Para quem preferir copiar e colar, a listagem abaixo também se encontra no link:

```
https://groups.google.com/
forum/?fromgroups#!forum/funcoesdeoperador29cbm
```

```

/* Programa de Calculo de Projecoes Espectrais          */
/* Arquivo principal: proj.c                            */
*/
/* Autor: Augusto Armando de Castro Junior             */
/* Data: 15 de abril de 2013.                         */
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#ifndef real
#define real double
#endif

#ifndef PI
#define PI 3.1415926535897932384626433832795
#endif

struct complex{
    real re;
    real im;
};

char err=0;
```

```

static struct complex zerc= {0.0, 0.0};
static struct complex umc= {1.0, 0.0};

struct complex somc(struct complex, struct complex);
struct complex subc(struct complex, struct complex);
struct complex mulc(struct complex, struct complex);
struct complex mulr(struct complex, real);
struct complex divc(struct complex, struct complex);
int igualc(struct complex z1, struct complex z2)
{return((z1.re== z2.re)&& (z1.im== z2.im));}
#define atric1( z) (z)
struct complex atric2(real, real);

long curvaresolvente(struct complex *, int,int,struct complex *,long);

long geracurvafec(struct complex,struct complex,struct complex *,long);

#define TIPOCOMPLEX
#define TIPO struct complex
#include "tipo.h"
#include "eqlin.c"
#include "integra.c"

/* Numero de divisoes na integracao: */
#define ITERA 640
/* dimensao (ao quadrado) maxima das matrizes: */
#define DIMAX2 36

int main (int argc, char *argv [])
{
    char *str;
    real p1, q1, p2, q2;
    struct complex r1, z1, z2;
    static struct complex mat[ (2* ITERA+ 1)* DIMAX2],
                                matsai[ ITERA* DIMAX2],
z[ ITERA* 2], s, *sum;
    int n, col, i, j, dimat;
    long p;

    if (argc < 6)
    {
        printf(
            "Programa_%s\n",
            argv[ 0]);
    }

```

```

    printf(
"Uso: %s z1.re z1.im z2.re z2.im dim mat [0].re mat [0].im ... \n",
        argv[0]);
    puts("Onde:");
    puts("z1.re, z1.im: coordenadas do centro da regio.");
    puts("z2.re, z2.im: coordenadas de um ponto fora da regio.");
    puts("dim: dimensao do espaco em que a matriz atua");
    exit(0);
}

z1.re = atof(argv[ 1]);
z1.im = atof(argv[ 2]);
z2.re = atof(argv[ 3]);
z2.im = atof(argv[ 4]);
dimat = atoi(argv[ 5]);

s= atric2(0.0, 1.0/(2* PI));

if ((dimat* dimat)* 2 >= (argc- 5))
{
    printf(
"Numero de entradas eh menor que a dimensao %dx%d da matriz",
        dimat, dimat);
    exit(-1);
}
for (i= 0, j= 6; i< (dimat* dimat); i++, j+= 2)
{
    mat[ i].re= atof( argv[ j]);
    mat[ i].im= atof( argv[ j+1]);
}

p= geracurvafec( z1, z2, z, ITERA);

curvaresolvente(mat, dimat, dimat, z, p);
integrc(&mat[ (ITERA+ 1)* dimat* dimat], matsai,
        &mat[dimat* dimat], z, dimat* dimat, p);

sum= &matsai[ dimat* dimat* (p- 1)];
for (i= 0; i< dimat*dimat; i++)
{
    sum[ i]= mulc(sum[ i], s);
}

printf("A matriz de projecao eh: \n");
mostramatriz(sum, dimat, 0, 0,
             dimat, dimat, "%17.4 f+_%17.4 f_");

```

```
puts("\nQue as forcas cegas se domem, da luz que a alma tem!\n");
}

struct complex atric2(real re, real im)
{
    struct complex z;
    z.re= re;
    z.im= im;

    return(z);
}

struct complex mulc(struct complex z1, struct complex z2)
{
    struct complex z;
    z.re= z1.re* z2.re - z1.im* z2.im;

    z.im= z1.re* z2.im + z1.im* z2.re;

    return(z);
}

struct complex mulr(struct complex z1, real r)
{
    z1.re*= r;

    z1.im*= r;

    return(z1);
}

struct complex some(struct complex z1, struct complex z2)
{
    struct complex z;
    z.re= z1.re + z2.re;
    z.im= z1.im + z2.im;
    return(z);
}

struct complex divc(struct complex z1, struct complex z2)
{
    struct complex z;
    real m= z2.re* z2.re+ z2.im* z2.im;
    if (m != 0.0)
    {
        z2.re/= m;
        z2.im/= -m;
    }
}
```

```

        z.re= z1.re* z2.re - z1.im* z2.im;
        z.im= z1.re* z2.im + z1.im* z2.re;
        return(z);
    }
    err= 1;
    return(z2);
}

struct complex subc(struct complex z1, struct complex z2)
{
    z1.re== z2.re;
    z1.im== z2.im;
    return(z1);
}

long geracurvafec(struct complex z1, struct complex z2,
                  struct complex *z, long p)
{
    real r1, r2, x, y;
    int j, k, l, m;

    p-= p%4;

    if (p<= 0)
        return( 0);

    r1= fabs(z1.re- z2.re);
    r2= fabs(z1.im- z2.im);

    r1= (r1>= r2)?r1/4.0:r2/4.0;
    r2= (8.0* r1)/(real)(p);

    p+= 4;
    for (j= 0, l= p/4, k= (3*p)/4- 1, m= p- 1,
         x= z1.re- r1, y= z1.im- r1;
         x<= (z1.re+ r1);
         x+= r2, y+= r2, j++, l++, k--, m--)
    {
        z[ j].re= z[ k].re= x;
        z[ j].im= z1.im- r1;
        z[ k].im= z1.im+ r1;

        z[ l].im= z[ m].im= y;
        z[ l].re= z1.re+ r1;
        z[ m].re= z1.re- r1;
    }
}

```

```

    }

    for (;j<= (p/4); j++)
    {
        z[ j].re= z1.re+ r1;
        z[ j].im= z1.im- r1;
    }
    for (;k>= p/2; k--)
    {
        z[ k].re= z1.re+ r1;
        z[ k].im= z1.im+ r1;
    }

    for (;m>= (3*p)/4; m--)
    {
        z[ m].im= z1.im+ r1;
        z[ m].re= z1.re- r1;
    }
    z[ p+ 1]= z[ p]= z[ 0];

    return( p);

}

long curvaresolvente(struct complex *mat, int col, int n,
                    struct complex *z, long p)
{
    long i, j;
    struct complex mataux[ 256];

    for (i= 1; i<= p; i++)
    {
        for (j= 0; j< n; j++)
        {
            memcpy(&mataux[ j* 2* col],
                  &mat[ j* col], col* sizeof(struct complex));
            mataux[ j* 2* col+ j]= subc( mataux[ j* 2* col+ j], z[ i- 1]);
        }
        invmatudo(mataux, col, &mat[i* n* col] );
    }
}

```

```
/*— Arquivo tipo.h —————*/
```

```
#ifndef TIPOREAL
#define SM(x, y) ((x)+ (y))
#define SB(x, y) ((x)- (y))
#define ML(x, y) ((x)* (y))
#define DV(x, y) ((x)/ (y))
#define AT(x, y) ((x)= (y))
#define ATR(x, y) ((x)= (y))
#define IGUAL(x, y) ((x)==(y))
#define MEN(x, y) ((x)< (y))
#define MENI(x, y) ((x)<= (y))
#define TAM sizeof(real)
#define ZERO ((real)(0.))
#define UM ((real)(1.))
#define STR "%8.3lf_"
#define TIP(x) (x)

#endif

#ifndef TIPORACIONAL
#define SM(x, y) soma((x), (y))
#define SB(x, y) suba((x), (y))
#define ML(x, y) mula((x), (y))
#define MLR(x, y) mula((x), aproxreal(y))
#define DV(x, y) divi((x), (y))
#define AT(x, y) ((x)= (y))
#define ATR(x, y) (x)= atrib1(y)
#define IGUAL(x, y) igual((x), (y))
#define MEN(x, y) menor((x), (y))
#define MENI(x, y) menorigual((x), (y))
#define TAM sizeof(struct racional)
#define STR "%6ld/%6ld_"
#define TIP(x) aproxreal(x)
#define ZERO zera
#define UM uma
#endif

#ifndef TIPOCOMPLEX
```

```

#define SM(x, y)    somc((x), (y))
#define SB(x, y)    subc((x), (y))
#define ML(x, y)    mulc((x), (y))
#define MLR(x, y)   mulr((x), (y))
#define DV(x, y)    divc((x), (y))
#define AT(x, y)    ((x)= (y))
#define ATR(x, y)   (x)= atric1(y)
#define IGUAL(x, y) igualc((x), (y))
#define TAM        sizeof(struct complex)
#define STR        "%lf+_%lf"
#define TIP(x)     atric2((x), 0.0)
#define ZERO zero
#define UM         umc
#endif

/*—— Arquivo eqlin.c ——*/

#define   SIST(i, j)    s[(i) * ((col)+1) + j]

int escalatudo(TIPO *s, TIPO *x, int imax, int col)
{
    int   iaux, iaux, indx;
    int    ct= 0, i, j, k, kant, n, tm;
    TIPO   sii, m;

    n= (imax< col)?imax:col;

    for(i= k= kant= 0; i< n; i++)
    {
        indx= i;
        ATR(sii, ZERO);
        do{
            for(iaux= i; iaux< imax; iaux++)
                if ( !(IGUAL(s[ iaux* col+ i+ k], ZERO) ) )
                {
                    ATR(sii, s[ iaux* col+ i+ k]);
                    indx= iaux;
                    break;
                }
            if (IGUAL(sii, ZERO))
                k++;
        }while ((IGUAL(sii, ZERO)) && ((i+ k)< col));
    if (k != kant)
        {

```



```

    ct++;
    kant= k;
}

if ( !IGUAL(sii , ZERO) )
{
    if( indx != i )
    {
        tm=(col - (i+k))* TAM;
        memcpy ((char *)x,
                (char *)&s[indx* col+ i+ k], tm);
        memcpy ((char *)&s[indx* col+ i+ k],
                (char *)&s[ i* col+ i+ k],tm);
        memcpy ((char *)&s[i* (col+ 1)+ k],
                (char *)x, tm);
    }
    for (iaux= i+ 1;iaux< imax; iaux++)
    {
        m= DV(s[ iaux* col+ i+ k],sii);
        for (iaux= i; iaux< col; iaux++)
            ATR(s[iaux* col+ iaux],
                SB(s[iaux* col+ iaux],
                    ML(s[i* col+ iaux],m)));
    }
}

return( ct);
}

```

```

TIPO detudo(TIPO *s, int col)
{

    int   iaux, iaux, indx;
    int    ct= 0, i, j, tm;
    TIPO  sii , m, muda, x[ 2048];

    ATR(muda, UM);

    for(i= 0; i< col; i++)
    {

```

```

ATR(sii , ZERO);
for(iaux= i; iaux< col; iaux++)
  if ( !IGUAL(s[ iaux* col+ i], ZERO ) )
    {
      ATR(sii , s[ iaux* col+ i]);
      indx= iaux;
      break;
    }

if ( IGUAL(sii , ZERO) )
  ct++;
else
  {
    if( indx != i )
      {
        ATR(muda, SB(ZERO, muda));
        tm=(col - i)* TAM;
        memcpy ((char *)x,
                 (char *)&s[indx* col+ i], tm);
        memcpy ((char *)&s[indx* col+ i],
                 (char *)&s[ i* col+ i], tm);
        memcpy ((char *)&s[ i* (col+ 1)],
                 (char *)x, tm);
      }
    for (iaux= i+ 1;iaux< col; iaux++)
      {
        m= DV(s[ iaux* col+ i], sii);
        for (iaux= i; jaux< col; jaux++)
          ATR(s[iaux* col+ jaux],
              SB(s[iaux* col+ jaux],
                ML(s[ i* col+ jaux], m)));
      }
  }

for (i= 0; i< col; i++)
  {
    ATR(muda, ML(muda, s[ i* (col+ 1)]));
  }

return( muda);

}

```

```

int eqlinado(TIPO *s, int col, TIPO *x)
{
    int    imax= col- 1, ct= 0, i, j;
    TIPO  aux;

    ct= escalatudo(s, x, imax, col+ 1);

    if ( IGUAL(SIST(imax, imax), ZERO))
        return(++ct);

    for (i= imax; i >= 0; i--)
    {
        ATR(aux, ZERO);
        for (j= i+ 1; j <= imax; j++)
            ATR(aux, SB(aux, ML(SIST(i, j) , x[ j ])));
        ATR(x[ i ], DV(SM( aux, SIST(i, col) ),SIST(i, i)));
    }
    return(0);
}

```

```

/*-----*/
/*          funcao  int  invmatudo()          */
/*-----*/
/* Objetivo: Inverter uma matriz.          */
/*-----*/

```

```

int invmatudo(TIPO *s, int col, TIPO *sinv)
{
    int i, j, k, imax= col;
    TIPO aux, d1, d2;

    if (col== 2)
    {
        aux= sinv[ 0]= s[ 0];
        sinv[ 1]= s[ 1];
        sinv[ 2]= s[ 4];
        sinv[ 3]= s[ 5];
        d1= ML(aux, sinv[ 3]);
        d2= ML(sinv[ 1], sinv[ 2]);
        d1= SB(d1, d2);
        if (IGUAL(d1, ZERO))
        {
            puts("matriz_ nao_inversivel");
        }
    }
}

```

```

        return( 1);
    }
    sinv[ 0]= DV(sinv[ 3], d1);
    sinv[ 3]= DV(aux, d1);
    d1= SB(ZERO, d1);
    sinv[ 1]= DV(sinv[ 1], d1);
    sinv[ 2]= DV(sinv[ 2], d1);
    return( 0);
}

for (i= 0; i< col; i++)
{
    for (j= 0; j< i; j++)
        s[ (i* 2+ 1)* col+ j]= s[ (j* 2+ 1)* col+ i]= ZERO;
}
for (i= 0; i< col; i++)
    s[ (i* 2+ 1) * col + i]= UM;
if (escalatudo(s, sinv, imax, 2* col) )
    return( 0);

for (i= imax- 1; i >= 0; i--)
{
    aux= s[i* 2* col+ i];
    for (j= i; j< 2* col; j++)
        sinv[i* (col-1)+ j]= s[ i* 2* col+ j]= DV(s[ i* 2* col+ j], aux);
    for (k= i- 1; k>= 0; k--)
    {
        aux= s[k* 2* col+ i];
        for (j= col; j< 2* col; j++)
        {
            s[k* 2* col+ j]= SB(s[k* 2* col+ j], ML(aux, s[i* 2* col+ j]));
        }
    }
    /*----- nao escalona duas vezes s, ja sai com sinv -----*/
}

}

for (i= 0; i< col; i++)
    for (j= 0; j< col; j++)
    {
        sinv[i* col+ j]= s[ i* 2* col+ col + j];
        s[i* 2* col+ j]= (i== j)?UM:ZERO;
    }
}

```

```

    return( l );
}

int mostramatriz(TIPO *s, int col, int lini, int colini,
                int nl, int ncol, char *str)
{
    int i, j;
    int lfim= lini+ nl, colfim= colini+ ncol;

    for (i= lini; i< lfim; i++)
    {
        putchar(' ');
        for (j= colini; j< colfim; j++)
            printf(str, s[i* col+ j]);
        puts(" |");
    }
    return(nl* ncol);
}

```

/ — Arquivo integra.c ————— */*

```

#define GAUX(i, j) gaux[(i)* (n) + (j)]
#ifdef GRAFICO
#define G(i, j) g[(i)* (n+ 1) + (j+ 1)]
#define GX( i) g[(i)* (n+ 1)]
#else
#define G(i, j) g[(i)* (n) + (j)]
#endif

#ifdef TIPO
#define TIPO real
#endif

/* Integracao por Trapezio */

TIPO integr(real xa, real x, TIPO *ya, TIPO *g,
            TIPO *gaux, int n, long p)
{
    long k, l;
    TIPO sum;
    real r= (x- xa)/(real)(p), rr= fabs( r)/2.0;

```

```

for (k= 0; k< n; k++)
  {
    GAUX(p+1, k)= ZERO;
    for (G(0, k)= sum= ya[ k], l= 0; l< p; l++)
      {
        sum= SM(sum, MLR(SM(GAUX(l, k) , GAUX(l+ 1, k)), rr));

        G(l+ 1, k)= sum;
      }
  }

return( sum);
}

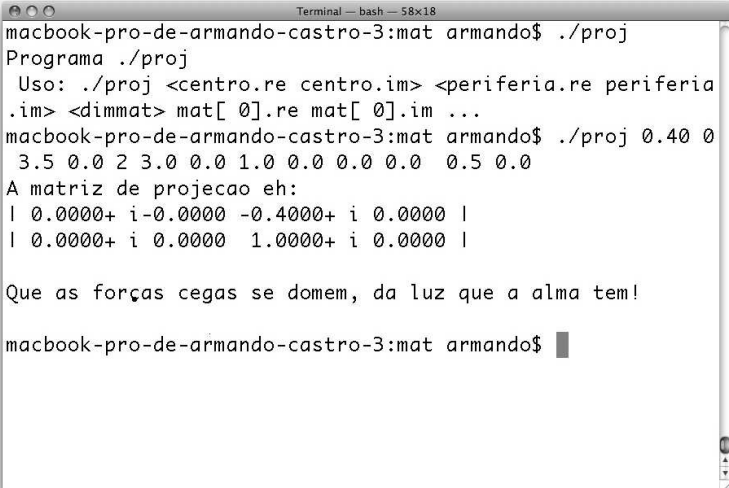
/* Integracao Curvilinea (real ou complexa) tipo Trapezio */
TIPO integrac( TIPO *ya, TIPO *g,
               TIPO *gaux, TIPO *curv, int n, long p)
{
  long k, l;
  TIPO sum;

  for (k= 0; k< n; k++)
    {
      GAUX(p+ 1, k)= GAUX(p, k)= GAUX(p- 1, k);

      for (G(0, k)= sum= ya[ k], l= 0; l< p; l++)
        {
          sum= SM(sum, ML(MLR(SM(GAUX(l, k) , GAUX(l+ 1, k)), 0.5),
                          SB(curv[ l+1], curv[ l]))));

          G(l+ 1, k)= sum;
        }
    }
  return( sum);
}

```



```
macbook-pro-de-armando-castro-3:mat armando$ ./proj
Programa ./proj
Uso: ./proj <centro.re centro.im> <periferia.re periferia
.im> <dimmat> mat[ 0].re mat[ 0].im ...
macbook-pro-de-armando-castro-3:mat armando$ ./proj 0.40 0
3.5 0.0 2 3.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.5 0.0
A matriz de projecao eh:
| 0.0000+ i-0.0000 -0.4000+ i 0.0000 |
| 0.0000+ i 0.0000 1.0000+ i 0.0000 |

Que as forças cegas se domem, da luz que a alma tem!

macbook-pro-de-armando-castro-3:mat armando$ █
```

Exemplos de uso do programa proj, entre o quais se vê o da Introdução deste livro.

Vide: <https://groups.google.com/forum/?fromgroups#!forum/funcoesdeoperador29cbm>

3.7 Exercícios

1. Prove que se M é espaço métrico compacto, então $(\kappa(M), d_H)$ é ele mesmo um espaço métrico compacto.
2. Mostre que o operador $T_n := T + \frac{1}{n}A$ definido em 3.24, na página 75, é invertível, possui norma menor ou igual a 1 e o raio espectral de sua inversa é 1
3. Mostre que se o resolvente de um operador A está definido sobre uma curva compacta C , então existe uma vizinhança $V \in \mathcal{L}(E)$ de A , em que o mesmo ocorre para todo operador em V .
4. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ um polinômio mônico de grau n e seja U um aberto com fronteira regular tal exista uma única raiz λ_1 de p contida em U , e esta possua multiplicidade 1. (Vide o exercício 13 da página 57, para ver um método factível de como saber se uma região U contém uma tal raiz em seu interior). Seja A a matriz companheira de p , isto é, a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é justamente $p(x)$. Considere a matriz

$$\Pi_{\lambda_1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} (zI - A)^{-1} dz.$$

Mostre que qualquer coluna v não nula de Π_{λ_1} é um autovetor de A . Seja então $w := A \cdot v$. Se v_j é alguma entrada não nula de v conclua que $\lambda_1 = w_j/v_j$.

Isso nos dá uma maneira efetiva, embora onerosa do ponto de vista computacional, de calcular raízes de polinômios.

5. Mostre que um subespaço fechado se escreve como um gráfico de uma aplicação de E_0 em E_1 esta é única, linear e contínua.

6. Mostre que a coleção de subespaços

$$\mathcal{E} := \{\hat{E}; \hat{E} \subset E \text{ é gráfico de alguma } \hat{\sigma} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)\}$$

é um espaço métrico completo com a métrica

$$d(\hat{E}, \hat{\hat{E}}) := Lip(\hat{g}, \hat{\hat{g}}).$$

7. Mostre que a aplicação $\Gamma : B(T, r) \subset \mathcal{L}(E) \rightarrow C^0(L_1(E^s, E^u); L_1(E^s, E^u))$ dada por

$$\Gamma(f)(\cdot) = \Gamma_{f^{-1}}(\cdot)$$

é contínua.

8. Mostre que a aplicação que a $f \in B(T, r)$ atribui o ponto fixo de $\Gamma_{f^{-1}}$ é contínua.

Capítulo 4

O Operador Adjunto e seu Espectro

Seja E um espaço vetorial normado. O *espaço dual* de E , denotado por E^* , é o espaço vetorial dado por

$$E^* := \{\iota : E \rightarrow \mathbb{C}; \iota \text{ é funcional linear contínuo.}\}$$

É claro que devido às completudes de \mathbb{R} e \mathbb{C} , E^* é sempre um espaço de Banach com a norma do operador:

$$\|\iota\|_{op} := \sup_{x \in E, \|x\|=1} \{|\iota(x)|\}$$

Se \hat{E} é um outro espaço normado, e $A \in \mathcal{L}(E, \hat{E})$, então dado $j \in \hat{E}^*$, podemos definir um funcional linear $A^*(j) \in E^*$ por:

$$A^*(j)(x) = j \circ A(x), \forall x \in E.$$

Note que a aplicação $A^* : \hat{E}^* \rightarrow E^*$ dada por $j \mapsto A^*(j)$ é, ela mesma, linear, denominada a *adjunta de A* .

Proposição 4.1. (Propriedades do Operador Adjunto) *A aplicação $*$: $\mathcal{L}(E, \hat{E}) \rightarrow \mathcal{L}(\hat{E}^*, E^*)$ que a cada $A \in \mathcal{L}(E, \hat{E})$ atribui seu adjunto A^* é um isomorfismo isométrico linear tal que valem*

- a) $(TA)^* = A^*T^*$, $\forall A \in \mathcal{L}(E, \hat{E}), T \in \mathcal{L}(\hat{E}, \tilde{E})$;
- b) se A possui uma inversa limitada, A^* também o possui e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$; em particular, se $E = \hat{E}$, temos $\text{sp}(A) \supset \text{sp}(A^*)$.
- c) $*$ é contínua na topologia uniforme (da norma do operador). Se E for reflexivo, $*$ também é contínua na topologia fraca no espaço de aplicações lineares, mas o é na topologia forte se e só se, E possui dimensão finita.

Prova: $*$ é claramente linear, e isometria:

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{L}(E, \hat{E})} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|l\| \leq 1, l \in E^*} |l(A(x))| = \\ &= \sup_{\|l\| \leq 1} \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |(A^*l)(x)| = \sup_{\|l\| \leq 1} \|A^*(l)\| = \|A^*\|. \end{aligned}$$

A segunda igualdade acima deve-se, claro, ao Teorema de Hahn-Banach.

Agora, seja $l \in \hat{E}^*$; temos portanto que

$$((TA)^*(l))(x) = l(TA(x)) = (A^*(l \circ T))(x) = (A^*T^*(l))(x).$$

Da definição de $*$, é fácil ver que $(I_E)^* = I_{E^*}$.

Da propriedade a), temos

$$I_{\hat{E}^*} = (I_{\hat{E}})^* = (A \circ A^{-1})^* = ((A^{-1})^* \circ A^*),$$

analogamente para I_{E^*} no lugar de $I_{\hat{E}^*}$, concluímos b).

Por ser isometria, é claro que $*$ é contínua na norma do operador. Dados $A_n \rightarrow A$ na topologia fraca de $\mathcal{L}(E, \hat{E})$, temos fixado $l \in \hat{E}^*$ que

$$(A_n^*(l))(x) = l(A_n(x)) \rightarrow l(A(x)) = (A^*(l))(x),$$

implicando que $(A_n)^*(l)$ converge a $A^*(l)$ na topologia fraca- $*$ de E^* , a qual é igual a topologia fraca de E^* , por E ser reflexivo. Temos portanto que $A_n^* \rightarrow A^*$ na topologia fraca de $\mathcal{L}(E, \hat{E})$.

Para vermos que em dimensão infinita, seja T_n atuando em $\ell_1(\mathbb{N})$ dado por

$$T_n((a_1, a_2, \dots)) = (a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$$

Note que T_n tem como adjunto o deslocamento de n a direita em $\ell_\infty(\mathbb{N})$, dado por

$$(T_n)^*((a_1, a_2, \dots)) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \times}, a_1, a_2, \dots)$$

De fato, dadas seqüências (a_j) e (b_j) respectivamente em $\ell_1(\mathbb{N})$ e $\ell_\infty(\mathbb{N})$ temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} [T_n((a_j))]_j b_j = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{j+n} b_j = \sum_{j=n+1}^{+\infty} a_j b_{j-n} = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j [(T_n)^*((b_j))]_j$$

Claramente, $T_n \rightarrow 0$ na topologia forte de $\ell_1(\mathbb{N})$, mas tal não ocorre com $(T_n)^*$. Sabemos que todo espaço de Banach separável é isomorfo a algum espaço quociente de $\ell_1(\mathbb{N})$, e daí é fácil construir exemplo análogo em qualquer espaço de Banach separável. Dado um espaço de Banach E de dimensão infinita qualquer, tomando um conjunto enumerável linearmente independente e o fecho de seu subespaço gerado, obtemos um subespaço $\hat{E} \subset E$ fechado e separável, no qual podemos definir aplicações como acima, que depois estendemos ao espaço inteiro. O que demonstra que quando a dimensão é infinita, * não é contínua na topologia forte.

□

Embora a definição acima seja bastante geral, nos restringiremos nessa seção a estudar operadores definidos em espaços vetoriais normados cuja norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, via a fórmula usual $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, $\forall v \in E$. Veremos que nesse caso, a definição do operador adjunto é ligeiramente diferente, pois faz uso do isomorfismo sesquilinear existente entre o espaço E e seu dual dado pelo Lema de Riesz. Para explicarmos melhor como isso se dá, começamos por lembrar a seguir algumas definições e fatos referentes a tais espaços:

Definição 4.2. (Espaço de Hilbert.) Um espaço vetorial normado E é dito um *espaço de Hilbert* se sua norma provém de um produto interno e se ele é completo.

Definição 4.3. (Espaço Ortogonal.) Seja E um espaço dotado de um produto interno e \hat{E} um subespaço vetorial de E . O *espaço*

ortogonal a \hat{E} , denotado por \hat{E}^\perp é definido como:

$$\hat{E}^\perp := \{v \in E; \langle \hat{x}, v \rangle = 0, \forall \hat{x} \in \hat{E}\}.$$

Claramente \hat{E}^\perp é um subespaço vetorial fechado de E e temos $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$.

Definição 4.4. (Base Ortonormal.) Seja E um espaço vetorial dotado de produto interno. Uma *base ortonormal* é um conjunto $\beta \subset E$ tal que valem $\|v\| = 1, \forall v \in \beta, \langle v, w \rangle = 0, \forall v, w \in \beta$, com $v \neq w$ e finalmente, dado $x \in E$ existem escalares não nulos $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ e $v_1, \dots, v_n, \dots \in E$ satisfazendo

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j v_j.$$

Outra definição útil em espaços dotados de produto interno:

Definição 4.5. (Subespaço ortogonal.) Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno e $\hat{E} \subset E$ um seu subespaço vetorial. O *espaço ortogonal* de \hat{E} é o conjunto:

$$\hat{E}^\perp := \{x \in E, \langle x, \hat{v} \rangle = 0, \forall \hat{v} \in \hat{E}\},$$

o qual claramente é um subespaço vetorial de E .

O próximo exemplo mostra que em um espaço vetorial dotado com um produto interno, mas não completo, podemos ter um subespaço fechado cujo espaço ortogonal é trivial.

Exemplo 4.6. Seja $E = (C^0([0, 1]; \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o espaço das funções contínuas com domínio no intervalo $[0, 1]$, dotado do produto interno $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$. Seja $(g_n), g_n \in E$ uma sequência de Cauchy em E sem limite em E . Por exemplo, tome

$$g_n := \begin{cases} 0, & \text{para } t \in [0, 1/2 - 1/(n+1)]; \\ 1/2 + (t - 1/2) \cdot (n+1)/2, & \text{se } t \in (1/2 - 1/(n+1), \\ & 1/2 + 1/(n+1)); \\ 1, & \text{para } t \in [1/2 + 1/(n+1), 1]. \end{cases}$$

Daí, defina o funcional linear $\hat{g} : E \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\hat{g}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, g_n \rangle, \forall f \in E.$$

É fácil de verificar que \hat{g} é contínuo. De fato, se $f_j \in E, f_j \rightarrow 0$, temos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{g}(f_j)| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_j\| \|g_n\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j\| = 0,$$

sendo a primeira desigualdade devido a Cauchy-Schwarz, e a seguinte porque a seqüência (g_n) é limitada (com norma menor do que 1, em nosso caso específico). Considere $\hat{E} = \ker(\hat{g})$. Como \hat{g} é contínuo, segue-se que \hat{E} é fechado em E . Note que qualquer função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que se anule em $[1/2, 1]$ pertence a \hat{E} , o que mostra que esse espaço não é trivial. Por outro lado, $\hat{E} \neq E$, uma vez que qualquer função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) > 0, \forall t \in (1/2, 1)$ não está contida em \hat{E} . Contudo, $\hat{E}^\perp = \{0\}$. Tal é demonstrado, em grande generalidade, na próxima proposição.

Proposição 4.7. *Seja E um espaço vetorial dotado de um produto interno, $(g_n), g_n \in E$ uma seqüência de Cauchy não convergente em E e $\hat{g} : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear dado por*

$$\hat{g}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, g_n \rangle.$$

Então:

- \hat{g} é contínuo;
- $\hat{E} = \ker(\hat{g})$ é um subespaço fechado (em E) próprio de E ;
- $\hat{E}^\perp = \{0\}$.

Prova: A prova dos dois primeiros itens é análoga aos argumentos já vistos no exemplo acima. Para o último item, procedamos por absurdo.

De fato, se um vetor $w \neq 0$ pertencesse a \hat{E}^\perp , poderíamos escrever qualquer vetor v em E como $v = v - \langle v, w \rangle w / \|w\|^2 + \langle v, w \rangle w / \|w\|^2$. Ora,

$$\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w, w \rangle = \langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \langle w, w \rangle = 0,$$

o que implica que $v - \langle v, w \rangle w / \|w\|^2 \in (\hat{E}^\perp)^\perp = \hat{E}$, pois \hat{E} é fechado em E . Não há perda em normalizar w , isto é, supor que $\|w\| = 1$. Afirmamos que w realiza a norma de \hat{g} . De fato, se $v \in E$ é outro vetor de norma 1, não colinear a w , vimos acima que $v = v - \hat{v} + \langle v, w \rangle w$, com $\hat{v} \in \ker(\hat{g})$. Daí,

$$|\hat{g}(v)| = |\hat{g}(\hat{v}) + \langle v, w \rangle \hat{g}(w)| = |\langle v, w \rangle| \|\hat{g}(w)\| <$$

(aplicando Cauchy-Schwarz em sua forma estrita, e supondo sem perda $\hat{g} \neq 0$)

$$\|v\| \|w\| \|\hat{g}(w)\| = \|\hat{g}(w)\|,$$

o que implica que $\|\hat{g}\| = \|\hat{g}(w)\|$, como afirmamos. Observe ainda que $\|\hat{g}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|$. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle g_n, g_n \rangle}{\sqrt{\langle g_n, g_n \rangle}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \frac{g_n}{\sqrt{\langle g_n, g_n \rangle}}, g_n \rangle >$$

(novamente, por Cauchy-Schwarz)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle w, g_n \rangle = |\hat{g}(w)| = \|\hat{g}\|.$$

Para a outra desigualdade, começamos por observar que para cada $j \in \mathbb{N}$, vale $\hat{g}(g_j / \|g_j\|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_j / \|g_j\|, g_n \rangle \leq \|\hat{g}\|$. Por outro lado, como g_n é de Cauchy, ela é limitada, digamos, com norma acotada por $M > 0$ e ainda como $g_n \neq 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \frac{g_j}{\|g_j\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|} \right\| < \epsilon / M, \forall j, n \geq n_0.$$

Isso implica que

$$\left| \langle \frac{g_j}{\|g_j\|}, g_n \rangle - \langle \frac{g_n}{\|g_n\|}, g_n \rangle \right| \leq \left\| \frac{g_j}{\|g_j\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|} \right\| M < \epsilon, \forall j, n \geq n_0,$$

e por conseguinte, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\langle g_n, g_n \rangle} = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{g}(g_j) \leq \|\hat{g}\|$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle g_n - \frac{\langle g_n, w \rangle}{\|w\|^2} w, g_n - \frac{\langle g_n, w \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n - \langle g_n, w \rangle w, g_n \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n, g_n \rangle - \langle \langle g_n, w \rangle w, g_n \rangle = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n, g_n \rangle - \langle g_n, w \rangle^2 = \|\hat{g}\|^2 - \|\hat{g}(w)\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, e este seria um múltiplo não nulo de w , o que contradiz a hipótese de que a sequência g_n não converge em E . \square

É bastante fácil ver que dado um espaço vetorial E munido com um produto interno e um seu subespaço vetorial de dimensão finita $\hat{E} \subset E$, temos $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$. Para tal, basta ver que dado $v \in E$, existe um ponto $\hat{v} \in \hat{E}$ que minimiza a distância entre v e \hat{E} , e que $v - \hat{v} \in \hat{E}^\perp$ (vide exercício 1)..

Usaremos isto no próximo

Lema 4.8. (Identidade de Parseval Fraca, ou Teorema de Pitágoras.) *Seja E um espaço vetorial com produto interno e seja $\hat{E} \subset E$ um subespaço vetorial de dimensão finita, o qual dotamos do produto interno oriundo de E . Suponha que $\hat{\beta} = \{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ seja uma base ortonormal de \hat{E} . Então, dado $v \in E$, este se escreve de maneira única como $v = \alpha_1 \hat{v}_1 + \dots + \alpha_n \hat{v}_n + \hat{v}^\perp$, onde $\hat{\alpha}_1 = \langle v, \hat{v}_1 \rangle, \dots, \hat{\alpha}_n = \langle v, \hat{v}_n \rangle$ e $\hat{v}^\perp \in \hat{E}^\perp$, valendo*

$$\|v\|^2 = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right) + \|\hat{v}^\perp\|^2.$$

Em particular, vale $\|v\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2$.

Prova: Como \hat{E} tem dimensão finita, em particular é fechado em E , implicando que $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$. Assim, dado $v \in E$, podemos escrever $v = \hat{v} + \hat{v}^\perp$, com $\hat{v} \in \hat{E}$ e $\hat{v}^\perp \in \hat{E}^\perp$. Ademais, $\hat{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{v}_j$, com

$$\alpha_j = \langle \hat{v}, \hat{v}_j \rangle = \langle \hat{v} + \hat{v}^\perp, \hat{v}_j \rangle = \langle v, \hat{v}_j \rangle,$$

devido à ortogonalidade existente entre \hat{v}^\perp e v_j .

Finalmente, temos

$$\langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{v}_j + \hat{v}^\perp, \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{v}_j + \hat{v}^\perp \right\rangle =$$

(devido às relações de ortogonalidade existentes entre os diversos vetores $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ e \hat{v}^\perp)

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \langle \hat{v}_j, \hat{v}_j \rangle + \langle \hat{v}^\perp, \hat{v}^\perp \rangle = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right) + \|\hat{v}^\perp\|^2.$$

□

Observação 4.9. Note que a prova acima pode ser facilmente adaptada para o caso em que \hat{E} seja somente completo, não necessariamente de dimensão finita (exercício 2).

Lema 4.10. *Seja E um espaço de Hilbert e seja $\hat{E} \subset E$ um subespaço fechado próprio. Então, dado $v \notin \hat{E}$, existe $\hat{v} \in \hat{E}$ tal que*

$$\inf_{\hat{x} \in \hat{E}} \{\|v - \hat{x}\|\} = \|v - \hat{v}\|.$$

Ademais, $v - \hat{v} = w \in \hat{E}^\perp$, o que implica que $\hat{E}^\perp \neq \{0\}$.

Prova: Seja $\delta = \inf_{\hat{x} \in \hat{E}} \{\|v - \hat{x}\|\}$. Seja $(\hat{x}_j), \hat{x}_j \in \hat{E}$ uma sequência que minimiza a distância entre v e \hat{E} . Não há perda em supor que $\|x_j - v\| \leq 2\delta + 1$ para uma tal sequência minimizante. Começemos mostrando que $\langle x_j - v, \hat{x} \rangle$ converge uniformemente a zero, para $\hat{x} \in E \in B(0, \|v\| + 2\delta + 1)$.

De fato, para $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C} , se o espaço for complexo), temos:

$$\delta^2 \leq \langle (v - x_j) + \alpha \hat{x}, (v - x_j) + \alpha \hat{x} \rangle \Leftrightarrow$$

$$\delta^2 \leq \langle (v - x_j), (v - x_j) \rangle + \langle (v - x_j), \alpha \hat{x} \rangle + \langle \alpha \hat{x}, (v - x_j) \rangle + |\alpha|^2 \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle \Leftrightarrow$$

(Fazendo $\alpha = r \langle (v - x_j), \hat{x} \rangle$, onde $r \in \mathbb{R}$ é qualquer, obtemos:)

$$\delta^2 \leq \langle (v - x_j), (v - x_j) \rangle + 2r |\langle v - x_j, \hat{x} \rangle|^2 +$$

$$+ r^2 |\langle v - x_j, \hat{x} \rangle|^2 \|\hat{x}\|^2, \forall r \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow$$

$$\delta^2 \leq \langle (v - x_j), (v - x_j) \rangle + r(2 + r \|\hat{x}\|^2) |\langle v - x_j, \hat{x} \rangle|^2, \forall r \in \mathbb{R}.$$

Tomando $r < 0$, $|r|(\|v\| + 2\delta + 1) < 1$ temos que

$$\delta^2 \leq \langle (v - x_j), (v - x_j) \rangle + r |\langle v - x_j, \hat{x} \rangle|^2. \quad (4.1)$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Tome $|r| < \epsilon^2$ e seja j_0 tal que

$$| \langle (v - x_j), (v - x_j) \rangle - \delta^2 | < r^2, \forall j \geq j_0.$$

Tal implica que

$$| \langle v - x_j, \hat{x} \rangle | < \epsilon,$$

ou a desigualdade 4.1 não seria satisfeita.

Mostremos que (x_j) é de Cauchy. De fato,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_j - x_m\|^2 &= \langle x_j - x_m, x_j - x_m \rangle = \langle x_j - v + v - x_m, x_j - x_m \rangle = \\ &= \underbrace{\langle x_j - v, x_j - x_m \rangle}_{:= \hat{x} \in \hat{E}} - \langle x_m - v, x_j - x_m \rangle. \end{aligned}$$

converge a zero quando $j, m \rightarrow +\infty$, pela parte inicialmente provada neste lema.

Concluimos que (x_j) é de Cauchy, e como a sequência minimizante tomada é arbitrária, concluimos (por argumento canônico de Análise) que toda sequência minimizante possui o mesmo limite, digamos $\hat{v} \in \hat{E}$. Como $v \notin \hat{E}$, segue-se que $w = v - \hat{v} \neq 0$. Como $\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle v - x_j, \hat{x} \rangle \rightarrow 0, \forall \hat{x} \in \hat{E}$, concluimos da continuidade do produto interno que $w \in \hat{E}^\perp$. \square

Observação 4.11. Note que é imediato do lema acima que se E é um espaço de Hilbert e \hat{E} é um seu subespaço fechado, então $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$. A mesma prova serve para mostrar que se E é um espaço vetorial dotado de produto interno (não necessariamente completo) e \hat{E} é um subespaço vetorial *completo* de E , então também vale $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$.

Teorema 4.12. (Representação de Riesz.) *Seja E um espaço de Hilbert. Então, dado um funcional linear contínuo $f \in E^*$, existe um único $w \in E$ tal que $f(x) = \langle x, w \rangle, \forall x \in E$.*

Prova: Suponha que $f \neq 0$, pois este caso é imediato. Seja $\hat{E} = \ker(f)$. Como f é contínuo, \hat{E} é fechado em E . Pelo lema anterior, $\ker(f)^\perp \neq \{0\}$. Seja $\tilde{w} \neq 0$ um vetor em $\ker(f)^\perp$ tal que $f(\tilde{w}) = 1$, e seja $w := \tilde{w} / \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle$. Daí, dado $v \in E$, escrevendo

$v = (v - \langle v, \tilde{w} \rangle \tilde{w} / \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle) + \langle v, \tilde{w} \rangle \tilde{w}$, é claro que $\hat{v} := (v - \langle v, \tilde{w} \rangle \tilde{w} / \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle) \in \ker(f)$, temos:

$$f(v) = f(\hat{v}) + f(\langle v, \tilde{w} \rangle \tilde{w} / \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle) = \frac{\langle v, \tilde{w} \rangle}{\langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle} f(\tilde{w}) = \langle v, w \rangle.$$

Finalmente, para vermos a unicidade, basta aplicarmos mais uma vez o lema: w e z são tais que $f(v) = \langle v, w \rangle = \langle v, z \rangle, \forall v \in E$, então vale:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle v, z \rangle, \forall v \in E \Leftrightarrow \langle v, z - w \rangle = \\ &= 0, \forall v \in E \Leftrightarrow z - w \in E^\perp = \{0\}, \end{aligned}$$

implicando que $z = w$. □

Corolário 4.13. *Seja E um espaço de Hilbert. Então a aplicação $F : E \rightarrow E^*$ dada por*

$$F(w) = \langle \cdot, w \rangle,$$

é um isomorfismo (sesqui)linear isométrico de E em E^ .* □

Observação 4.14. (Representação dos funcionais lineares em E^* , quando E é espaço vetorial com produto interno, não necessariamente completo.) Seja E um espaço vetorial dotado de um produto interno, e $f : E \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$ um funcional linear contínuo. Então, pelo teorema de extensão de operadores lineares (o conhecido B.L.T.), o funcional linear f possui uma única extensão contínua $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$, onde \tilde{E} é o completamento de E . Analogamente, dado $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$ um funcional linear contínuo, sua restrição a E determina um único funcional contínuo $f : E \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$. Em ambos os casos, como E é denso em \tilde{E} , obtemos que $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. Isso implica que E^* é isometricamente isomorfo a \tilde{E}^* , via aplicação $\tilde{F} : E^* \rightarrow \tilde{E}^*$ dada por $\tilde{F}(f) = \tilde{f}$, em que \tilde{f} é a única extensão contínua de um funcional f com domínio em E ao completamento \tilde{E} . Ora, do Teorema de Representação de

Riesz, temos que qualquer funcional linear contínuo \tilde{f} (definido no espaço de Hilbert \tilde{E} , completamento de E) é da forma:

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \langle \tilde{x}, \tilde{w} \rangle, \forall \tilde{x} \in \tilde{E},$$

onde $\tilde{w} \in \tilde{E}$ é um vetor constante, unicamente determinado por \tilde{f} . Ora, se $f = \tilde{F}^{-1}(\tilde{f})$, então $f = \tilde{f}|_E$. Em particular, tomando-se uma seqüência $w_n \rightarrow \tilde{w}$, onde $w_n \in E$, é claro que para $x \in E$ vale

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \langle x, \tilde{w} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, w_n \rangle,$$

o que nos fornece uma representação (não única) para os funcionais lineares em E , simplesmente em termos de seqüências em E .

A mais importante conclusão a que chegamos a partir da observação acima é que embora nem todo funcional linear em E^* (quando E não é completo) possa ter uma representação do tipo $f(x) = \langle x, w \rangle, \forall x \in E$, com $w \in E$, vetor constante, mesmo assim, os funcionais desse tipo podem ser usados para aproximar qualquer funcional em E^* , pois formam um subconjunto denso de E^* . Desse modo, estamos aptos a fazer a seguinte:

Definição 4.15. (Operador Adjunto em Espaços vetoriais com produto interno.) Seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear contínuo, definido no espaço vetorial E , dotado de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. O adjunto, *se existir*, de A é o único operador linear $A^* : E \rightarrow E$ dado por:

$$\langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, A^* \cdot y \rangle, \forall x, y \in E.$$

Exemplo 4.16. Seja $E = (C^0([-1, 1]; \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o espaço das funções contínuas com domínio no intervalo $[0, 1]$, dotado do produto interno $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$. Seja $(g_n), g_n \in E$ uma seqüência de Cauchy em E , normalizada, sem limite em E . Vamos definir uma aplicação $A : E \rightarrow E$ tal que A^* não esteja definido. Seja p_1, p_2, \dots a base ortonormal de E dada pela normalização dos polinômios de Legendre. Seja $y \in E$ vetor não nulo fixado. Defina $A(p_j) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle p_j, g_n \rangle}{\langle y, y \rangle} y$ Daí,

$$\langle A(p_j), y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle p_j, g_n \rangle}{\langle y, y \rangle}, \forall p_j,$$

e portanto, $A^*(y)(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cdot, g_n \rangle$, ou seja, não existe $w \in E$ tal que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$.

Compare a definição acima com a de operador adjunto em espaços normados. No caso de espaços vetoriais dotados com produto interno, identificamos E com seu mergulho em E^* . Com isso, temos que em espaços dotados de produto interno, tanto o operador como seu adjunto atuam no mesmo domínio, E .

Propriedades importantes acerca do espectro de operadores auto-adjuntos são assinaladas na próxima proposição:

Proposição 4.17. (Propriedades do Operador Adjunto) *Dado um operador $A : E \rightarrow E$ em um espaço de Hilbert complexo E , temos que*

$$sp(A) = \overline{sp(A^*)}$$

Prova: Note que o adjunto Hilbertiano é definido de maneira um pouco diferente do de Banach. De fato, temos que

$$\langle x, y \rangle = \langle (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}(x), y \rangle = \langle (\lambda x - A(x))^{-1}, y \rangle =$$

$$\langle x, (\lambda x - A(x))^{-1*}(\bar{\lambda}y - A^*)(y) \rangle, \forall x, y \in E,$$

implicando (Mutatis Mutandis) que $(\lambda x - A(x))^{-1*} = (\bar{\lambda}y - A^*)$. Permutando os papéis de A e seu adjunto, obtemos que o conjunto resolvente de um é o conjugado do outro, o mesmo valendo para seus espectros. \square

A despeito de toda a teoria abstrata vista até agora, a grande motivação e utilidade de se considerar operadores adjuntos reside na próxima importante

Proposição 4.18. *Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear limitado com domínio em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então $\ker(A) = \overline{\text{ran}(A^*)}^\perp$ e $\overline{\text{ran}(A)} = \ker(A^*)^\perp$.*

Prova: Dado $v \in \ker(A)$ e $w \in \mathcal{H}$ qualquer, temos:

$$\langle v, A^*(w) \rangle = \langle A(v), w \rangle = 0,$$

e portanto a imagem de A^* é perpendicular ao $\ker(A)$, e reciprocamente, dado $v \in \text{ran}(A^*)^\perp$, temos que

$$0 = \langle v, A^*(w) \rangle = \langle A(v), w \rangle, \forall w \in \mathcal{H},$$

e portanto $A(v) = 0$, isto é, $v \in \ker(A)$.

Por outro lado, como $A^{**} = A$, do que recém provamos temos que $\ker(A^*) = \text{ran}(A^*)^\perp$ e portanto $\ker(A^*)^\perp = \text{ran}(A^*)^{\perp\perp} = \overline{\text{ran}(A^*)}$. \square

Pensando no contexto de dimensão finita, lembramos que parte da dificuldade em obtermos uma forma de Jordan diagonal em geral consiste em que $\ker(A - \lambda I)$ e $\text{ran}(A - \lambda I)$ não são em geral espaços complementares podendo ter intersecção não trivial. Tais espaços são invariantes para A , têm dimensão complementar, mas podem não estar em soma direta. A proposição anterior no permite obter um espaço complementar a $\ker(A - \lambda I)$, embora em geral não invariante por A , se $A \neq A^*$. Mesmo assim, o fato de aplicação de passar ao adjunto ser um isomorfismo, nos permite até em dimensão infinita levar e trazer cálculos funcionais de um operador para o seu adjunto e vice-versa. Tal será explorado de maneira muito esperta na próxima seção, na prova de uma versão aprimorada do Teorema Ergódico de Von Neumann. Por outro lado, quando $A = A^*$, e a dimensão for finita, a proposição anterior nos dá que $\ker(A - \lambda I)$ e $\text{ran}(A - \lambda I)$ estão em soma direta, e a mesma prova da Forma de Jordan nos dá que A é diagonalizável. Tal é provado, em maior generalidade inclusive, no Apêndice do livro.

Um operador A tal que $A = A^*$ é dito *auto-adjunto*.

Proposição 4.19. *Seja E um espaço dotado de produto interno e seja $A : E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto. Então qualquer (possível) autovalor de A pertence a \mathbb{R} . Ademais, se v_1 e v_2 são autovetores correspondentes a autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então são ortogonais.*

Prova: Suponha que $\lambda \in \mathbb{C}$ seja um autovalor de A .

Temos, portanto:

$$\bar{\lambda} \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{v}, \lambda \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{v}, A \tilde{v} \rangle =$$

(pois A é auto-adjunta)

$$\langle \tilde{A}\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \langle \lambda\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \lambda \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle .$$

Como $\tilde{v} \neq 0$, segue-se que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Finalmente,

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda_1 \neq \lambda_2}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0,$$

ou seja, v_1 e v_2 são ortogonais se são autovetores associados a autovalores distintos. □

Observação 4.20. É fato que se A é um operador linear auto adjunto, então seu espectro está contido em \mathbb{R} .

4.1 Aplicação: generalizando o Teorema de von Neumann

Vimos no capítulo anterior que se o raio espectral de um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ é estritamente menor que 1, então a norma de A^n converge exponencialmente rápido para zero. Em particular, $A^n(v)$ converge a zero para qualquer vetor $v \in E$. Nessa seção, pretendemos estudar o que podemos dizer sobre a sequência $(A^n(v)), v \neq 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ no caso em que o raio espectral é menor ou igual a 1. Será que tal sequência possui limite em algum sentido? Os próximos exemplos nos indicam que hipóteses adicionais são necessárias para que o limite de tal sequência exista à Césaro, o que tende em geral a ser o máximo que podemos esperar.

Exemplo 4.21. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a aplicação linear cuja matriz na base canônica é dada por

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do capítulo 1 temos que

$$A^n := \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desse modo, vemos que para $v = (0, 1)$, $A^n(v) = (n, 1)$, a qual converge a infinito com velocidade polinomial.

Exemplo 4.22. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a aplicação linear cuja matriz na base canônica é dada por

$$A := \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

que corresponde a rotação de $\pi/3$. Ora, tal implica que todo ponto não nulo é periódico de período mínimo igual a 6. Portanto, a sequência $(A^n(v)), v \neq 0$ é periódica, não convergindo quando $n \rightarrow +\infty$.

Note no segundo exemplo que, embora a sequência não convirja sua média converge à Cesàro, ou seja, as médias,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^n(v)$$

convergem, quando $N \rightarrow +\infty$. (No exemplo em questão, convergem para zero).

Exemplo 4.23. Seja ℓ^2 o espaço de Hilbert das sequências quadrado somáveis de números complexos, e considere $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dada por

$$A((x_1, x_2, \dots)) := (x_2, \dots)$$

Dado $N \in \mathbb{N}$, observe que I, A, A^2, \dots, A^N são isometrias (sobre sua imagem) quando restritos ao subespaço

$$E_N := \{\bar{x} \in \ell^2; \bar{x} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{N \text{ vezes}}, x_1, \dots)\}.$$

Claramente, a norma de A , e portanto a de A^n é menor ou igual a 1, para todo $n \geq 0$ e o acima mostra que de fato sua norma é igual

a 1. Mais ainda, é fácil de verificar que $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^n$ também uma isometria sobre sua imagem quando restrita a E_N . Logo, essa soma a Cesàro não converge em norma a zero. Entretanto, na topologia forte (pontual) é fácil ver que tal soma converge a zero (exercício 3).

Teorema 4.24. (Ergódico de Von Neumann, generalizado.)

Seja V um operador em um espaço de Hilbert \mathcal{H} satisfazendo $\|V^n\| < C$ para todo n . Então

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n(f) \rightarrow P(f), \forall f \in \mathcal{H},$$

onde P é uma projeção (não necessariamente ortogonal) sobre $\{f; V(f) = f\} =: F(V)$.

Prova:

Note que $F(V)$ é claramente um subespaço fechado de H , já que é o núcleo de $V - I$, onde I é a identidade, logo, é o núcleo de uma aplicação contínua. Observamos também que

$$P_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|V^n(f)\| \leq (1/N) \cdot N \|f\| \leq C \|f\|.$$

E que se $f \in F(V) = \ker(I - V)$, então $P_N(f) = f, \forall N$. Portanto, $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n(f) \rightarrow P(f), \forall f \in F(V)$. Vejamos agora o que ocorre no espaço $\text{ran}(I - V) =: E(V)$. Se $f \in E(V)$, então existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $f = g - V(g)$, logo temos:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n(f) \right\| = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n(g - V(g)) \right\| =$$

$$\frac{1}{N} \left\| g - V^N(g) \right\| \leq \frac{1}{N} (\|g\| + C \|g\|) \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow +\infty.$$

Notamos que converge também para zero para toda $f \in \overline{E(V)}$. Neste caso, existem $E(V) \ni f_j \rightarrow f$ e daí,

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n(f_j) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n(f) \right\| = \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} V^n(f_j - f) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} C \|f_j - f\| \leq C \|f_j - f\| \rightarrow 0,$$

implicando a afirmação que fizemos.

Note que devido aos limites acima serem distintos em $F(V)$ e $\overline{E(V)}$ temos que $F(V) \cap \overline{E(V)} = \{0\}$. Se mostrarmos que $F(V) \oplus \overline{E(V)} = \mathcal{H}$, então teremos concluído a prova.

Para ver isso, devemos considerar $F(V^*) := \ker(I - V^*)$ e $E(V^*) = \text{ran}(I - V^*)$. Como $\|V^n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$, vale também que $\|(V^*)^n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$. De fato, para qualquer operador linear contínuo $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ vale que $(A^*)^n = (A^n)^*$ e além do mais

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|v\|=1} \|A(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \sup_{\|w\|=1} \langle A(v), w \rangle = \\ & \sup_{\|w\|=1} \sup_{\|v\|=1} \langle v, A^*(w) \rangle = \sup_{\|w\|=1} \|A^*(w)\| = \|A^*\|. \end{aligned}$$

Logo, obtemos pelas mesmas contas que já fizemos para V que $F(V^*)$ e $\overline{E(V^*)}$ têm intersecção trivial. Mas

$$F(V)^\perp = \ker(I - V)^\perp = \overline{\text{ran}(I - V^*)} = \overline{E(V^*)},$$

e

$$E(V)^\perp = \text{ran}(I - V)^\perp = \ker(I - V^*) = F(V^*).$$

Donde concluímos que

$$(F(V) + E(V))^\perp = F(V^*) \cap \overline{E(V^*)} = \{0\},$$

ou seja, $\mathcal{H} = F(V) + \overline{E(V)}$, como queríamos demonstrar. \square

Observação 4.25. Note que se V fosse autoadjunto, a projeção seria ortogonal. Uma versão ainda mais elaborada do Teorema Ergódico Von Neumann foi apresentada por Thiago Bomfim em sua monografia de curso e trabalho de iniciação científica. Tal trabalho foi medalha de prata no V Simpósio Nacional / Jornadas de Iniciação Científica, em 2011, e encontra-se disponível no link:

<http://www.colmat.ufba.br/monografias?page=1>

Note o que o Teorema acima nos diz em particular: se um operador de norma menor ou igual a 1 possuir autovalor 1, ele nos dá um modo de calcular seu autoespaço (note que nesse caso, o autoespaço generalizado de 1 é um autoespaço). Se por outro lado, tal espaço for trivial, então qualquer média de Birkhoff como do Teorema converge a zero.

Para os próximos exemplos aplicando o teorema anterior, falaremos um pouco de transformações que preservam medidas. Dado um conjunto X , uma *medida finita* $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma função de conjunto tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. μ é σ -aditiva:

$$\mu(\dot{\cup}_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

para toda união de conjuntos dois a dois disjuntos A_n da coleção \mathcal{A} .

Em geral, pede-se que a coleção \mathcal{A} seja uma σ -álgebra, isto é, que seja fechada para uniões enumeráveis, intersecções enumeráveis e passagem ao complemento de seus membros.

Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ preserva a medida μ se para todo $A \in \mathcal{A}$, então $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ e vale que

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Dado um intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ um exemplo bem conhecido de medida finita é a que atribui a cada subintervalo de I o seu comprimento. Claramente, a menor σ -álgebra que contém tais intervalos contém todos os abertos (e fechados) em I e de fato coincide com a *menor σ -álgebra que contém os abertos* de I , também chamada de *σ -álgebra de Borel* de I .

Pensemos na seguinte situação-exemplo:

Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ a aplicação dada por $f(z) := \alpha * z$, $\alpha = e^{i\theta} \in S^1$, π/θ é irracional, onde o produto em questão é a multiplicação usual em \mathbb{C} . Ou seja, f é dita uma *rotação irracional* do círculo S^1 .

Dado um segmento de arco em S^1 , via coordenadas polares, podemos identificá-lo com um intervalo da reta de mesmo comprimento, e dessa forma transportar a medida do intervalo $I = [0, 2\pi)$ para S^1 de maneira natural. Também uma função $\varphi : S^1 \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$ é dita integrável se

$$\int_{S^1} |\varphi| dm := \int_0^{2\pi} |\varphi|(e^{it}) dt < +\infty,$$

e nesse caso, sua integral é

$$\int_{S^1} \varphi dm := \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) dt < +\infty.$$

Dado $p \geq 1$, a exemplo dos espaços ℓ^p , podemos considerar $L^p(S^1, m)$ como o espaço das funções contínuas dotado da norma

$$\|\varphi\|_p := \sqrt[p]{\int_{S^1} |\varphi|^p dm}$$

e definir $\mathcal{L}^p(S^1, m)$ como o completamento de $L^p(S^1, m)$. Note que a integral também se estende de maneira natural ao completamento.

Em particular para $p = 2$, é possível provar que tal completamento é um espaço de Hilbert.

Interessantemente, $U(\varphi) := \varphi \circ f$ é uma isometria em cada um dos espaços $L^p(S^1, m)$, se estendendo continuamente de maneira única ao completamento. Note que $\varphi \equiv 1$ é autovetor do autovalor 1 desse operador.

Concluimos do Teorema 4.24 que dado $\varphi \in \mathcal{L}^2(S^1, m)$ que existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}^2(S^1, m)$ tal que

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi \circ f^n - \tilde{\varphi} \right\|_2 \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow +\infty.$$

4.2 Exercícios

1. Mostre que se E é um espaço dotado de produto interno e $\hat{E} \subset E$ é um subespaço de dimensão finita, então $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$.
2. Mostre que se E é um espaço dotado de produto interno e $\hat{E} \subset E$ é um subespaço completo, então $E = \hat{E} \oplus \hat{E}^\perp$. Enuncie e prove com tal hipótese uma versão mais geral do teorema de Pitágoras (lema 4.8 da página 108).
3. Prove que na topologia forte no espaço dos operadores a soma de Birkhoff do exemplo 4.23 da página 116 converge a zero.

Capítulo 5

Pontos Periódicos de Função de Operador

Dada uma função holomorfa f , estudaremos neste capítulo a dinâmica da aplicação \hat{f} por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ dos operadores lineares contínuos num espaço de Banach real E . Provaremos que todos os pontos periódicos isolados da aplicação $A \mapsto \hat{f}(A)$, $A \in \mathcal{L}(E)$ estão necessariamente contidos no subespaço unidimensional $\hat{\mathbb{R}} := \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\}$, em que $I : E \mapsto E$ é a identidade. Ademais, todos os (possíveis) pontos hiperbólicos são atratores ou repulsores.

Lembramos que um ponto periódico $A = \hat{f}^k(A)$ é dito *isolado* se houver um aberto \mathcal{B} em $\mathcal{L}(E)$ contendo a órbita $\{\hat{f}^j(A), j = 0, \dots, k-1\}$ tal que nenhuma órbita periódica com o mesmo período k intersecta \mathcal{B} . Em outras palavras, não há sequência (A_n) de pontos k -periódicos convergindo para A .

Também definimos *ponto periódico fortemente isolado*:

Definição 5.1. (Ponto periódico fortemente isolado.) Um ponto periódico $A = \hat{f}^k(A)$ é dito *fortemente isolado* se $\forall n \in \mathbb{N}$ existir um aberto \mathcal{B} em $\mathcal{L}(E)$ contendo a órbita $\{\hat{f}^j(A), j = 0, \dots, k-1\}$ tal que nenhuma órbita periódica com período menor ou igual a s intersecta \mathcal{B} . Em outras palavras, não há sequência (A_n) de pontos periódicos de períodos uniformemente limitados convergindo para A .

Note que qualquer ponto periódico fortemente isolado é isolado.

Sabemos do Teorema da Aplicação Inversa que se $A = \hat{f}^k(A)$ e o espectro de $D\hat{f}^k(A)$ não contiver 1, então A é isolado. Em particular, pontos periódicos hiperbólicos (cujos espectros não intersectam S^1) são isolados.

Como muitos aspectos relevantes da dinâmica são refletidos no conjunto periódico de um sistema (veja [3], por exemplo), e em particular, nos pontos periódicos hiperbólicos, neste capítulo daremos uma caracterização deste conjunto.

Exemplo 5.2. Seja $E = \mathbb{R}^2$. Neste caso $\mathcal{L}(E)$ é identificado com o espaço das matrizes 2×2 . Em tal espaço podemos considerar o conjunto

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tal conjunto é isomorfo ao corpo \mathbb{C} . Dada uma função de operador $\hat{f} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, a restrição $\hat{f}|_C$ pode ser considerada como uma função analítica ordinária em \mathbb{C} . Isto significa que qualquer ponto periódico (ou zero) de $\hat{f}|_C : C \rightarrow C$ é um ponto isolado em C . Note que tal ponto periódico pode ser qualquer ponto em $C \cong \mathbb{C}$. Entretanto, nossos resultados implicam que a situação é bem diferente para \hat{f} . Mesmo se o ponto periódico pertencer a $C \setminus \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\}$, ele será acumulado por pontos periódicos em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

5.1 O caso geral em Espaços de Banach

Lema 5.3. *Seja E um espaço normado sobre um corpo \mathcal{K} , em que \mathcal{K} é igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Seja $\mathcal{L}(E)$ o espaço dos operadores lineares contínuos em E munido da norma do operador. Se um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ comuta com todo elemento num aberto não-vazio $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(E)$, então A é um múltiplo escalar da identidade.*

Prova: Não há perda em supor que \mathcal{B} é uma bola, digamos, $\mathcal{B} = B(X_0, r)$, para algum $X_0 \in \mathcal{L}(E)$ e $r > 0$. Daí, como $AX = XA, \forall X \in B(X_0, r)$, concluímos que $A(X - X_0) = (X - X_0)A$, o que implica que A comuta com todo operador em $B(0, r)$. Qualquer operador $L \in \mathcal{L}(E)$ é um múltiplo escalar de um operador em $B(0, r)$, isto significa que A comuta com todo operador em $\mathcal{L}(E)$. Em

particular, dado qualquer $v \in E$ não-nulo, A comuta com qualquer projeção Π_v tal que $\Pi_v(v) = v$ e $\Pi_v(w) = 0$ em algum espaço complementar de $\text{span}(v)$ (tal projeção existe como uma consequência direta do teorema de Hahn-Banach). Portanto, temos

$$\Pi_v A(v) = A \Pi_v(v) = A(v).$$

Isto quer dizer que o espaço gerado por $A(v)$ é invariante por Π_v . Temos duas possibilidades. Se $A(v) \neq 0$, então $A(v)$ é autovetor de Π_v associado ao autovalor 1. A segunda alternativa é que $A(v) = 0$. Em ambos casos, concluímos que para qualquer $v \in E$ existe $\lambda_v \in \mathcal{K}$ tal que $A(v) = \lambda_v \cdot v$. Provemos que λ_v independe de v . De fato, dados dois vetores linearmente independentes $v, w \in E$, se $\lambda_v \neq \lambda_w$ então

$$\lambda_{v+w} \cdot (v+w) = A(v+w) = \lambda_v \cdot v + \lambda_w \cdot w \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_{v+w} - \lambda_v) \cdot v + (\lambda_{v+w} - \lambda_w) \cdot w = 0 \Leftrightarrow (\lambda_{v+w} - \lambda_v) = (\lambda_{v+w} - \lambda_w) = 0.$$

Daí, $\lambda_v = \lambda_w$, o que implica que A tem a forma $A = \lambda \cdot I$, para algum escalar $\lambda \in \mathcal{K}$.

□

Teorema 5.4. *Sejam $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ or $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $U \subset \mathcal{K}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathcal{K}$ uma função analítica, e considere a função de operador (denotada por \hat{f}) por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ de operadores lineares contínuos num espaço de Banach E sobre o corpo \mathcal{K} . Então todo ponto periódico isolado de \hat{f} está contido na cópia $\{\lambda \cdot I; \lambda \in \mathcal{K}, I = \text{identidade}\}$ de \mathcal{K} em $\mathcal{L}(E)$.*

Prova: Como o iterado $f^j := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{j \times}$ é também analítico,

não há perda de generalidade em considerar A um ponto fixo de \hat{f} . Suponha que $A \notin \hat{\mathcal{K}}$. Pelo último lema, para qualquer bola $B(I, 1/n), n \in \mathbb{N}$, existe um isomorfismo linear P_n que não comuta com A . É claro que $P_n \rightarrow I$ implica que $P_n A P_n^{-1} \rightarrow A$. Ademais, é fácil ver que como $\hat{f}(A) = A$ então $\hat{f}(P_n A P_n^{-1}) = P_n A P_n^{-1}$. Portanto, obtivemos uma sequência de pontos fixos de \hat{f} convergindo para A . □

Observação 5.5. As mesmas técnicas funcionam para funções de operador não analíticas (a exemplo das médias de Birkhoff: $f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} A^j$). Na verdade vale o seguinte

Lema 5.6. *Se X comuta com $A \in \mathcal{L}(E)$ e F_n é sequência de funções analíticas em A convergindo fortemente para P (i.é., $F_n(x) \rightarrow P(x) \forall x \in A$), então P comuta com X .*

Prova: Seja $f \in E$. Temos $\|F_n(A) - P_f\| \rightarrow 0$. Ademais, $\lim X F_n(A) = \lim F_n(AX)$.

Portanto, $\|(X F_n(A) - X P)(f)\| = \|X(F_n - P)(f)\| \leq \|X\| \|(F_n - P)(f)\|$. \square

Definição 5.7. (Ponto periódico simples.) Seja E um espaço normado, e $U \subset E$ um aberto. Dada uma aplicação C^1 $g : U \rightarrow E$, dizemos que o ponto periódico $p = g^j(p)$ é *simples* se $\text{spec}(Dg^j(p)) \not\cong 1$.

Devido ao Teorema da Aplicação Inversa, pontos periódicos simples são isolados, já que $\text{spec}(Dg^j(p)) \not\cong 1$ significa dizer que $Dg(p) - I$ é invertível, o que por sua vez implica que $f - I$ é localmente invertível em torno do p .

Em particular, o último teorema implica que se \hat{f} exibir pontos periódicos simples, eles estarão contidos em $\hat{\mathcal{K}}$. Outra observação interessante: como qualquer ponto $x \cdot I \in \hat{\mathcal{K}}$ comuta com todo $X \in \mathcal{L}(E)$, a derivada $D\hat{f}(x \cdot I) = Df(x) \cdot I$. Isto significa que se x_0 é um ponto periódico simples (resp. hiperbólico) para a dinâmica dada por f , então $x_0 \cdot I$ é também um ponto periódico simples (resp. hiperbólico) para \hat{f} .

Isto nos permite enunciar o seguinte

Corolário 5.8. *Sejam $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $U \subset \mathcal{K}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathcal{K}$ uma função analítica, e considere a função de operador (denotada por \hat{f}) por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ de operadores lineares contínuos num espaço de Banach E sobre o corpo \mathcal{K} . Então todo ponto periódico hiperbólico de \hat{f} está contido na cópia $\hat{\mathcal{K}} := \{\lambda I, \lambda \in \mathcal{K}\} \subset \mathcal{L}(E)$ de \mathcal{K} . Ademais, todo ponto periódico hiperbólico de uma função de operador é também um atrator ou um repulsor.*

Prova: Imediata, do teorema e discussão acima. \square

O próximo teorema afirma que os pontos periódicos isolados de \hat{f} são exatamente os simples.

Teorema 5.9. *Sejam $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $U \subset \mathcal{K}$ um aberto, $f : U \rightarrow \mathcal{K}$ uma função analítica, e considere a função de operador (denotada por \hat{f}) por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ dos operadores lineares contínuos num espaço normado E sobre o corpo \mathcal{K} . Então todo ponto periódico isolado \hat{f} é simples. Reciprocamente, se A é um ponto periódico simples, ele é isolado.*

Prova: Como já vimos, a recíproca é consequência direta do Teorema da Aplicação Inversa. Provemos, então, a outra implicação enunciada. Suponha por absurdo que A é um ponto periódico isolado de \hat{f} que não é simples. Apenas trocando \hat{f} por um seu iterado, podemos supor que A é um ponto fixo de \hat{f} . Como A é um ponto fixo isolado, ele tem a forma λI , $\lambda \in \mathcal{K}$, e como A não é simples, isto implica que a derivada $\hat{f}'(A) = 1 \cdot I$. Como a dimensão de E é maior 1 (caso contrário não há nada o que fazer), é fácil construir uma sequência de pontos fixos de \hat{f} convergindo para A . Para isto, note que um ponto periódico A de \hat{f} com período p é simples se, e só se, ele for uma raiz simples para $\hat{g}(X) := \hat{f}(X) - X$. Daí, se $A = \lambda I$ é um ponto fixo isolado de f que não é simples, então g tem uma expressão como $g(z) = (z - \lambda)^2 \cdot h(z)$, para alguma função analítica h numa vizinhança de λ . Tome um espaço bidimensional $W \subset E$ com base $\{w_1, w_2\}$ e um espaço complementar \tilde{W} de W em E . O operador linear $A_k \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}$ definido por

$$\begin{aligned} A_k(w_2) &:= \frac{1}{k} w_1 + \lambda w_2 \\ A_k(w_1) &:= \lambda w_1 \\ A_k|_{\tilde{W}} &:= \lambda I|_{\tilde{W}} \end{aligned}$$

é uma raiz de $g(z)$ (pois é raiz de $(z - \lambda)^2$), então $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de zeros de g (e de pontos fixos de f) convergindo na norma do operador para A quando $k \rightarrow +\infty$. Isto contradiz o fato de termos tomado A como um zero isolado de g . □

Corolário 5.10. *Sejam $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $U \subset \mathcal{K}$ um aberto, $g : U \rightarrow \mathcal{K}$ uma função analítica, e considere a função de operador (denotada por \hat{g}) por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ dos operadores lineares contínuos num espaço normado E sobre o corpo \mathcal{K} . Então toda raiz isolada de \hat{g} está contida na cópia $\hat{\mathcal{K}} := \{\lambda I, \lambda \in \mathcal{K}\} \subset \mathcal{L}(E)$ de \mathcal{K} , e é uma raiz simples de g .*

Prova: Imediata da prova do teorema anterior. \square

Quando $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, todo ponto periódico fortemente isolado de uma função de operador \hat{f} é hiperbólico e então, atrator ou repulsor:

Proposição 5.11. *Sejam $U \subset \mathbb{R}$ um aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica, e considere a função de operador (denotada por \hat{f}) por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ dos operadores lineares contínuos num espaço normado E . Então todo ponto periódico fortemente isolado de \hat{f} é hiperbólico. Ademais, todo ponto periódico hiperbólico de uma função de operador é também um atrator ou um repulsor.*

Prova: Lembre que provamos que todo ponto periódico isolado é simples. No caso real, se A é um ponto periódico simples (com período p) de \hat{f} que não é hiperbólico, então como $A \in \hat{\mathbb{R}}$, temos que $(\hat{f}^p)'(A) = D\hat{f}^p(A) = -1 \cdot I$. Isto implica que $A \in \hat{\mathbb{R}}$ é um ponto periódico para \hat{f}^2 que não é simples. Pelo teorema 5.9, A não é um ponto periódico isolado para f^2 , nem para f . Portanto, devemos ter que A é hiperbólico. Pelo corolário 5.8, ele também deve ser um atrator ou um repulsor contido em $\hat{\mathbb{R}} := \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(E)$. \square

O próximo corolário generaliza a proposição acima para o caso complexo:

Corolário 5.12. *Sejam $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $U \subset \mathcal{K}$ um aberto, $f : U \rightarrow \mathcal{K}$ uma função analítica, e considere a função de operador (denotada por \hat{f}) por ela induzida no espaço $\mathcal{L}(E)$ dos operadores lineares contínuos num espaço normado E sobre o corpo \mathcal{K} . Um ponto periódico A de \hat{f} é fortemente isolado se, e só se, $A = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ e $Df(p) = c \cdot I$, em que $c \in \mathbb{C}$ não é uma raiz de $q(z) := z^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Prova: A recíproca é imediata, já que um ponto periódico que é simples é isolado. Agora, suponha que A é um ponto periódico isolado de \hat{f} . Já vimos (teorema 5.4) que $A = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Ademais, também observamos que $D\hat{f}(A) = Df(\lambda) \cdot I = c \cdot I$, para algum $c \in \mathbb{C}$. Se supusermos por absurdo que c é uma raiz da unidade, digamos, $c^n = 1$, então A seria um ponto periódico não-simples de \hat{f}^n . Neste caso, devido ao teorema 5.9, A não seria um ponto periódico

isolado para f^n . Isto implicaria que A não é um ponto periódico isolado para f , contradição. □

5.2 Um caso particular em dimensão finita

Nesta seção, consideramos zeros/pontos periódicos de funções de operador em $\mathcal{L}(E)$, onde $E = K^n$, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, identificamos os operadores em $\mathcal{L}(E)$ com suas respectivas matrizes na base canônica.

Analisemos o caso $E = \mathbb{C}^n$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e suponha que \hat{f} seja sua respectiva função de operador. Como antes, não há perda de generalidade em considerar pontos fixos. Dado um ponto fixo $\hat{f}(A) = A$, seja $P \in \mathcal{L}(E)$ o operador invertível tal que $PAP^{-1} = J$, onde J é uma matriz de Jordan. Note que $P\hat{f}(A)P^{-1} = \hat{f}(PAP^{-1}) = \hat{f}(J)$. Isto significa que P é uma autoconjugação de \hat{f} entre vizinhanças de A e J em $\mathcal{L}(E)$. Em particular, obtemos também do acima que $J = P\hat{f}(A)P^{-1} = \hat{f}(J)$, ou seja, J é também um ponto fixo para \hat{f} . Observe que isto implica certa rigidez para f e A . De fato, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.13. *Suponha que λ é um autovalor de $A = \hat{f}(A)$. Então $f(\lambda) = \lambda$. Ademais, se o expoente k do fator $(z - \lambda)^k$ no polinômio mínimo de A for diferente de 1 então também obtemos que $Df(\lambda) = 1$.*

Prova: Seja J uma matriz na forma de Jordan conjugada a A . Se λ é um autovalor de A , então existe pelo menos um bloco de Jordan unidimensional $J_\lambda = (\lambda)$. Quando aplicamos \hat{f} a J , tal bloco se torna $(f(\lambda))$. Como J é também um ponto fixo para \hat{f} , concluímos que $f(\lambda) = \lambda$. Isto encerra a primeira asserção no enunciado da proposição. Agora, suponha que J_λ é um bloco de Jordan de J com

dimensão maior que 1 dado por

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Como visto na seção 1.1, aplicando \hat{f} a J_λ , obtemos

$$\hat{f}(J_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & Df(\lambda) & \frac{D^2 f(\lambda)}{2} & \frac{D^3 f(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{D^{d-1} f(\lambda)}{(d-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & Df(\lambda) & \frac{D^2 f(\lambda)}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & Df(\lambda) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Como $\hat{f}(J) = J$, obtemos também que $Df(\lambda) = 1$.

□

Corolário 5.14. *Suponha que λ é um autovalor de $A = \hat{f}(A)$. Então $f(\lambda) = \lambda$. Ademais, se d é o grau de nulidade da parte nilpotente da forma de Jordan, então $D^j f(\lambda) = 0, \forall j \in \{2, \dots, d-1\}$.*

□

Apêndice A

Operadores Compactos

Vimos nos capítulos introdutórios (vide proposição 2.22, na página 33) que um operador linear, ou é Lipschitz, ou é descontínuo em todos os pontos de seu domínio. De maneira intuitiva, isso quer dizer que em qualquer vizinhança de qualquer ponto de seu domínio, existem pontos que são levados em pontos distantes na imagem. Ora, se um operador linear A descontínuo e invertível leva pontos próximos em pontos distantes, é de se esperar que sua inversa precise ser supercontínua, para tomar tais pontos distantes e aproximá-los novamente.

Essa é mais ou menos a idéia desta seção: em geral, operadores que envolvem a derivação em dimensão infinita são descontínuos. Contudo, em muitos casos tais operadores possuem como inversa operadores lineares supercontínuos (tecnicamente conhecidos como *operadores compactos*). Desse modo, podemos resolver problemas associados a operadores de Derivação simplesmente estudando suas inversas.

Definição A.1. (Operador Compacto.) Seja E um espaço vetorial normado. Um operador linear $A : E \rightarrow E$ é dito *compacto* se dada $x_n \in E$ limitada, então $A(x_n)$ possui subsequência convergente.

Claramente todo operador compacto é contínuo. De fato, se (x_n) , $\|x_n\| = 1$ é tal que $\|A(x_n)\| \rightarrow \sup_{\|x\|=1} \{\|A(x)\|\}$ quando $n \rightarrow +\infty$, então $\|A(x_n)\| \not\rightarrow +\infty$, já que da compacidade de A , tal sequência possui subsequência convergente. Também é fácil ver que o conjunto

dos operadores compactos forma um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(E)$ que também é um ideal em relação a esse espaço: o produto (composição) de um operador compacto qualquer por um operador contínuo é um operador compacto.

Para operadores compactos auto-adjuntos em espaços dotados com produto interno, valem os seguintes resultados:

Lema A.2. *Seja E um espaço dotado de produto interno e seja $A : E \rightarrow E$ um operador compacto auto-adjunto. Então existe um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| = \|A\|$.*

Prova: Vimos que para um operador auto-adjunto qualquer vale

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \{ | \langle Av, v \rangle | \}.$$

Tomemos então uma sequência $(v_n), v_n \in E$, tal que $\|v_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} | \langle Av_n, v_n \rangle | = \|A\|$. Como A é compacto, e (v_n) é limitada, existe (v_{n_k}) tal que $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} Av_{n_k} = y$, e sem perda, ainda podemos supor que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle Av_{n_k}, v_{n_k} \rangle = \lambda$. Daí,

$$\|Av_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \langle Av_{n_k}, Av_{n_k} \rangle - 2\lambda \langle Av_{n_k}, v_{n_k} \rangle + \lambda^2 \rightarrow 0,$$

donde concluímos que $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda v_{n_k}$. Supondo sem perda $\lambda \neq 0$ (pois se $\lambda = 0$, temos $A \equiv 0$), isso implica que existe $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{n_k} = y/\lambda$. Veja que $y \neq 0$, pois $\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle Av_{n_k}, v_{n_k} \rangle = \langle y, y/\lambda \rangle = \lambda \neq 0$. Temos portanto que $y = A(y/\lambda)$, ou seja, y é autovetor do autovalor λ . \square

Lema A.3. *Seja E um espaço vetorial dotado de produto interno e seja $A : E \rightarrow E$ um operador compacto auto-adjunto. Se $\lambda \neq 0$ é um autovalor de A , então $\dim(\ker(A - \lambda I)) < +\infty$.*

Prova: A prova é decorrente do fato de que nenhum múltiplo da identidade em dimensão infinita é compacto. De fato,

$$A|_{\ker(A - \lambda I)} = \lambda I|_{\ker(A - \lambda I)}.$$

Se $\dim(\ker(A - \lambda I))$ fosse infinita, tomando-se um conjunto ortonormal enumerável (portanto, limitado) $\{e_1, e_2, \dots\}$ de $\ker(A - \lambda I)$ teríamos que $Ae_j = \lambda e_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Contudo, para $j \neq k$ valeria:

$$\|\lambda e_j - \lambda e_k\|^2 = \lambda^2 \langle e_j, e_j \rangle - 2\lambda^2 \langle e_j, e_k \rangle + \lambda^2 \langle e_k, e_k \rangle = 2\lambda^2 > 0,$$

o que em particular implica que a sequência (λe_j) não possui sub-sequência convergente, o que contradiz o fato de A ser um operador compacto. \square

Lema A.4. *Seja E um espaço vetorial dotado de produto interno e seja $A : E \rightarrow E$ um operador compacto auto-adjunto. Então os autovalores de A ou são em número finito ou formam uma sequência que tem zero como único ponto de acumulação.*

Prova: Suponha por absurdo que exista $c > 0$ e uma sequência (λ_j) de autovalores distintos de A tal que $|\lambda_j| > c, \forall j \in \mathbb{N}$. Tomando (e_j) a sequência ortonormal de autovetores associados, temos:

$$\begin{aligned} \|A(e_j) - A(e_k)\|^2 &= \lambda_j^2 \|e_j\|^2 - 2\lambda_j \lambda_k \langle e_j, e_k \rangle + \lambda_k^2 \|e_k\|^2 = \\ &= \lambda_j^2 + \lambda_k^2 \geq 2 \cdot c > 0, \end{aligned}$$

o que, a exemplo do lema anterior, é absurdo, pois contradiz o fato de que A é compacto. Note que isso implica que o conjunto formado pelos autovalores não nulos é portanto enumerável (se fosse não enumerável, possuiria alguma sequência com termos distintos convergindo a um valor diferente de zero). \square

A.1 O Teorema Espectral para Operadores Compactos

Teorema A.5. *Seja E um espaço vetorial dotado de produto interno e seja $A : E \rightarrow E$ um operador compacto auto-adjunto, e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ os autovalores não nulos dois a dois distintos de A . Seja \hat{E} o subespaço fechado de E gerado pelos espaços dois a dois ortogonais $\ker(A - \lambda_1 I), \dots, \ker(A - \lambda_j I), \dots$. Então temos $\hat{E}^\perp = \ker(A)$ e $\hat{E} = A(E)$. Em particular, $A(E)$ admite uma base ortonormal formada por autovetores de A correspondentes a autovalores não nulos.*

Prova: Suponha sem perda $A \neq 0$, caso em que a proposição está trivialmente demonstrada. Assim, pelo lema A.2, \hat{E} é um subespaço

não trivial de E . Observe que \hat{E} é invariante por A ; o mesmo então valendo para \hat{E}^\perp , pois A é auto-adjunto:

$$\langle A(\hat{v}), w^\perp \rangle = 0 \Rightarrow \langle \hat{v}, A(w^\perp) \rangle = 0, \forall \hat{v} \in \hat{E}, \forall w^\perp \in \hat{E}^\perp.$$

Considerando $A|_{\hat{E}^\perp} : \hat{E}^\perp \rightarrow \hat{E}^\perp$, como este é também compacto, segue-se novamente pelo lema A.2 que se este operador fosse não nulo, então possuiria autovalor $\lambda \neq 0$ tal que $|\lambda| = \|A|_{\hat{E}^\perp}\|$. O que é absurdo, pois λ seria também autovalor não nulo de A , e seu autoespaço, por definição de \hat{E} , está contido neste último. Concluímos que $A|_{\hat{E}^\perp} \equiv 0$, o que implica que $\hat{E}^\perp \subset \ker(A)$. Como $\ker(A) \perp \ker(A - \lambda_j I)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, temos que $\ker(A) \in \hat{E}^\perp$.

Mostremos agora que $\hat{E} = \overline{A(E)}$. Claramente, como $\ker(A - \lambda_j I) \subset \overline{A(E)}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, o que implica que $\hat{E} \subset \overline{A(E)}$. Seja $\{e_k\}$ uma base ortonormal de vetores de \hat{E} , obtida a partir da união de bases ortonormais dos subespaços $\ker(A - \lambda_j I)$. Seja $A(x) \in A(E)$ e considere

$$x_m := \sum_{k=0}^m \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Temos então que $\|x_m\|^2 \leq \|x\|^2$, $\forall m \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} A(x_m) &= \sum_{k=0}^m \langle x, e_k \rangle A(e_k) = \sum_{k=0}^m \langle x, \lambda_j e_k \rangle e_k = \\ &= \sum_{k=0}^m \langle x, A(e_k) \rangle e_k = \sum_{k=0}^m \langle A(x), e_k \rangle e_k. \end{aligned}$$

Visto que A é um operador compacto, existe uma subsequência x_{m_l} tal que $A(x_{m_l})$ é convergente a $y \in \hat{E}$. Todavia,

$$\langle A(x) - y, e_k \rangle = \langle A(x), e_k \rangle - \lim_{l \rightarrow +\infty} \langle A(x_{m_l}), e_k \rangle =$$

$$\langle A(x), e_k \rangle - \lim_{l \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{q=0}^{m_l} \langle A(x), e_q \rangle e_q, e_k \right\rangle = 0.$$

Isto implica que $A(x) - y \in \hat{E}^\perp = \ker(A) = \overline{A(E)}^\perp$; mas isso é absurdo, pois $A(x) - y \in \overline{A(E)}$. Portanto, $\overline{A(E)} = \hat{E}$, e concluímos

que $\overline{A(E)}$ possui uma base ortonormal formada por autovetores de A correspondentes aos autovalores não nulos de A . \square

Corolário A.6. *Seja E um espaço vetorial dotado de produto interno, e $A : E \rightarrow E$ um operador compacto auto-adjunto. Se $\dim(E) = +\infty$ e $\overline{A(E)} = E$ então os autovalores de A constituem uma sequência $\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots$ de reais não nulos, existe uma base ortonormal de E formada por autovetores de E .*

Prova: Como $\ker(A) = A(E)^\perp$, e $\overline{A(E)} = E$, segue-se que $\ker(A) = \{0\}$, e logo 0 não é autovalor de A . Como a dimensão de cada autoespaço correspondente a cada autovalor não nulo é finita e $\dim(E) = +\infty$, segue-se que a sequência dos autovalores é infinita. \square

Outro arremate importante do último teorema é:

Corolário A.7. (Teorema espectral para operadores compactos.) *Seja E um espaço de Hilbert, e $A : E \rightarrow E$ um operador compacto auto-adjunto. Então $E = \overline{A(E)} \oplus \ker(A)$, e $\overline{A(E)}$ admite uma base enumerável formada de autovetores de A correspondentes a autovalores não nulos.*

Prova: Imediato, do fato de que, sendo E completo, temos $E = \ker(A) \oplus \overline{A(E)}$, e do último corolário, aplicado a $\overline{A(E)}$. \square

Bibliografia

- [1] Armando Castro, *Curso de Teoria Espectral*, preprint UFBA (2013).
- [2] Armando Castro, *Curso de Topologia e Análise*, preprint UFBA (2013).
- [3] Armando Castro, *New criteria for hyperbolicity based on periodic sets*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 42 (3), 455-483 (2011).
- [4] Armando Castro, *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*; submetido a publicação pelo Projeto Euclides, IMPA. (2008)
- [5] Armando Castro, *Curso de Teoria da Medida*, 2a. edição; Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 2008.
- [6] Armando Castro, N. Medeiros, V. Pinheiro, *Isolated Periodic Points and Zeros of Operator Functions*, preprint UFBA (2008).
- [7] Thiago Bomfim, Uma generalização do teorema de John von Neumann, Monografia de Curso, UFBA, (2009). Disponível em <http://www.colmat.ufba.br/monografias?page=1>.
- [8] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, 1980.
- [9] E. L. Lima, *Curso de Análise I*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1982.

- [10] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1983.
- [11] E. L. Lima, *Curso de Análise II*, Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1985.
- [12] E. L. Lima, *Análise no Espaço \mathbb{R}^n* , Coleção Matemática Universitária, IMPA/CNPq, 2002.
- [13] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Interscience Publishers, New York, 1958.
- [14] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol I: Functional Analysis*, Academic Press, New York and London, 1975.
- [15] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [16] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973.
- [17] W. Rudin, *Real and Complex Analysis, 3d. Edition*, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [18] M. G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA/CNPq, 2001.
- [19] M. Shub, *Global stability of dynamical systems*, Springer Verlag, Berlin, (1987).
- [20] K. Yosida, *Functional Analysis, 6th. Edition*, Springer-Verlag, 1980.

Índice

- Aplicação
 - conjugação, 16
 - contínua, 29
 - Holomorfa, 48
 - Lipschiziana, 30
 - resolvente, 60
- Automorfismo linear hiperbólico, 70
- Bola
 - aberta, 27
- Complexificado de um operador real, 15
- Componente espectral, 68
- Conjunto
 - aberto, 27
 - resolvente, 60
- Contração, 31
- Diâmetro
 - de uma partição, 40
- Distância de Hausdörff, 71
- Equação do Resolvente, 60
- Espaço
 - de Banach, 30
 - Estável, 70
 - Instável, 70
 - métrico, 27
 - completo, 30
- Espaços ℓ^p , 30
- Espectro, 59
- Estimativas de Cauchy, 52
- Função
 - de operador, 65
- Integral
 - de linha, 42
 - de Riemann, 40
 - por caminhos complexa, 43
- Métrica, 27
- Norma, 28
 - do operador, 35
- Operador
 - Auto-adjunto, 114
- Partição
 - de um intervalo, 40
 - Diâmetro de,, 40
- Perturbação
 - da Identidade, 37
 - de aplicação bilipschitz, 39
 - do Isomorfismo, 40

- Polinômio
 - característico, 9
- Polinômios
 - de Legendre, 112
- Propriedades
 - do Adjunto Hilbertiano, 113
- Refinamento de uma partição, 41
- Representação de Riesz, 110
- Resolvente, 60
- Série
 - de Laurent, 55
- Semi-descontinuidade inferior do espectro, 75
- Semicontinuidade, 74
 - das Componentes Espectrais, 74
- Sequência
 - convergente, 29
 - de Cauchy, 29
 - e subsequência, 28
- Soma
 - de Riemann, 41
- Subsequência
 - convergente, 29
- Teorema
 - da decomposição em autoespaços generalizados, 7
 - da Forma de Jordan
 - caso complexo, 14
 - caso real, 16
 - da Semicontinuidade do Espectro, 74
 - de Cauchy-Goursat, 48
 - de Cayley-Hamilton, 12
 - de Liouville, 53
 - do Cálculo Funcional, 65
 - do Mapeamento espectral, 67
 - do Ponto fixo para Contrações, 31
 - Ergódico de Von Neumann Generalizado, 117
 - Fundamental da Álgebra, 53
 - Topologia, 28