

Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos

Publicações Matemáticas

Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos

Alberto Saa
IMECC/UNICAMP

Renato de Sá Teles
UNIVASF/UNIFESP



29^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2013 by Alberto Saa e Renato de Sá Teles

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

29^o Colóquio Brasileiro de Matemática

- Análise em Fractais – Milton Jara
- Asymptotic Models for Surface and Internal Waves – Jean-Claude Saut
- **Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos – Alberto Saa e Renato de Sá Teles**
- Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções – Alex L. de Castro
- Eigenvalues on Riemannian Manifolds – Changyu Xia
- Equações Algébricas e a Teoria de Galois – Rodrigo Gondim, Maria Eulalia de Moraes Melo e Francesco Russo
- Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra – Alexandre Baraviera, Renaud Leplaideur e Artur Lopes
- Expansive Measures – Carlos A. Morales e Víctor F. Sirvent
- Funções de Operador e o Estudo do Espectro – Augusto Armando de Castro Júnior
- Introdução à Geometria Finsler – Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão
- Introdução aos Métodos de Crivos em Teoria dos Números – Júlio Andrade
- Otimização de Médias sobre Grafos Orientados – Eduardo Garibaldi e João Tiago Assunção Gomes

ISBN: 978-85-244-0352-1

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Prefácio

Este texto nasceu, como idéia, por volta do ano de 2008 quando o segundo autor iniciou o seu doutorado em Matemática Aplicada na Unicamp sob a orientação do primeiro. O tema de pesquisa proposto abordava um estudo sistemático de sistemas conhecidos como *Bilhares*, sistemas estes de grande interesse e que têm atraído à atenção de muitos pesquisadores em Física e em Matemática.

Há um vasto material sobre bilhares em língua estrangeira, porém ainda pouco material em língua portuguesa. Desta forma, este texto preparado para o 29^o Colóquio Brasileiro de Matemática procura preencher, pelos menos inicialmente, essa lacuna. O texto, em nível introdutório, tem como principal objetivo convidar o leitor ao estudo de bilhares, priorizando a exploração de suas propriedades físicas e matemática de forma intuitiva e elementar. Um segundo objetivo é apresentar ao leitor uma linha de investigação atual que tem propiciado inúmeras possibilidades de abordagens científicas. Sendo assim, sugere-se fortemente ao leitor consultar o material fornecido nas referências, caso seja de seu interesse fazer um estudo mais aprofundado e detalhado sobre os assuntos que serão tratados. As referências, nas quais este trabalho está fortemente baseado, compõe uma das partes principais deste texto.

Iniciamos com uma pequena introdução sobre Bilhares e com os requisitos matemáticos. As partes principais do texto são os capítulos

3, 4 e 5, que tratam, respectivamente, dos sistemas Bilhares, dos Recursos Computacionais usados para simulações de sua dinâmica e de suas Aplicações. Nos Apêndices, são apresentados alguns resultados necessários para o entendimento de vários pontos discutidos ao longo do texto. Sugestões, críticas e possíveis erros que eventualmente sejam encontrados podem ser encaminhados para desateles@gmail.com. Seremos gratos por isso.

Finalizamos agradecendo a comissão organizadora do 29^o Colóquio Brasileiro de Matemática pela aceitação do curso proposto.

São Paulo, maio de 2013.

ALBERTO SAA
IMECC - UNICAMP

RENATO DE SÁ TELES
UNIFESP

Sumário

Prefácio	v
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Definições, Resultados e Notações	5
2.2 Sistemas Dinâmicos	10
2.2.1 Algumas Ferramentas de Análise Dinâmica	11
2.2.2 Principais Exemplos	15
2.3 Sistemas Hamiltonianos	16
2.3.1 O Teorema KAM	20
2.4 Caos	27
3 Bilhares	31
3.1 Definições e Exemplos	32
3.2 Bilhares Regulares	47
3.3 Bilhares Caóticos	50
3.4 Bilhar Cogumelo	50
4 Recursos Computacionais	59
4.1 Simulação	59
4.2 Software	60
4.2.1 Funcionamento do Programa	61
5 Aplicação	65
5.1 Bilhar Quântico	66
5.1.1 Teoria de Matrizes Aleatórias	68

5.1.2	Formulação Matemática	73
5.1.3	Estatísticas Espectrais	76
5.1.4	Estruturas das Autofunções	80
A	Teoria da Medida	83
B	Teoria Ergódica	87
C	Mecânica Quântica	91
C.1	Espaço de Hilbert	92
C.1.1	Produto Interno	93
C.1.2	Operadores Limitados	97
C.1.3	Operadores Auto-Adjuntos	98
C.2	Postulados da Mecânica Quântica	99
C.2.1	Comentários Iniciais	99
C.2.2	Postulados da Mecânica Quântica	102
D	Mecânica Clássica e Semiclássica	105
D.1	O Limite Semiclássico	106
D.2	Função de Husimi	107
	Referências Bibliográficas	111
	Índice Remissivo	119

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas dinâmicos conhecidos como *sistemas bilhares* têm atraído, desde o século passado, grande atenção de vários pesquisadores, principalmente físicos e matemáticos. Como disse A. B. Katok “bilhares podem ser vistos como sendo sistemas *playground* para físicos e matemáticos” [1]. Os primeiros estudos relevantes sobre bilhares foram de G.D. Birkhoff em 1927 [2]. Vários de seus importantes resultados serão discutidos neste livro.

Um fato curioso é que, apesar de toda simplicidade que esses sistemas podem em algumas situações apresentar, eles têm fornecido uma grande quantidade de resultados e, muitas vezes, com grande profundidade. O grande desenvolvimento e interesse experimentado pela *Teoria de Bilhares* se deve, principalmente, aos seguintes fatores: são considerados, por muitos pesquisadores, como os melhores exemplos para a análise do caos determinístico; muitos sistemas dinâmicos de origem física que envolvem choques podem, de certa maneira, serem reduzidos ao estudo de bilhares; estudos recentes na área de caos quântico envolvem estudos detalhados de bilhares clássicos e, além disso, eles têm fornecido (desde o começo de seus estudos) um grande número de problemas em teorias matemáticas (como geometria, probabilidade e teoria ergódica) [3]. Neste sentido, bilhares são paradigmas na área de caos clássico. Mas afinal, o que são bilhares?

Grosso modo, bilhares são modelos matemáticos para muitas situações físicas onde uma ou mais partículas se movem livremente em uma

região delimitada, sofrendo colisões em sua fronteira e/ou com as outras partículas. De uma maneira mais formal, considere o caso de apenas uma partícula puntual em movimento uniforme (com velocidade constante) no interior de uma região plana Q (um conjunto compacto e conexo de \mathbb{R}^2 ou no toro \mathbf{T}^2) e delimitada por sua fronteira ∂Q (uma curva regular ou união de curvas regulares) onde a partícula puntual sofre reflexões (ou colisões) elásticas, isto é, os ângulos de entrada e saída de sua trajetória são iguais na fronteira. Quando se descreve o comportamento dinâmico desta partícula, dá-se o nome de *Problema do bilhar* para a mesa Q . Ao sistema dinâmico, gerado por esta situação, dá-se o nome de *Bilhar* [3].

Como motivação inicial, os *Bilhares* têm propriedades dinâmicas bastante interessantes, a forma (geometria) do bilhar é essencial para caracterizar a sua dinâmica (isto é, o modo como um sistema dinâmico evolui no tempo) que pode variar de completamente regular (também chamada de integrável), para completamente caótica (também chamada de não integrável ou de irregular) e ainda temos a dinâmica mista (onde dinâmicas regular e caótica coexistem em um mesmo sistema). Exemplificando, o movimento de apenas uma bola em uma mesa de bilhar circular pode ser classificado como regular [4], intuitivamente, podemos dizer que pequenas alterações na posição inicial da bola não provocarão grandes distanciamentos de suas trajetórias. Por outro lado, o movimento de uma bola no bilhar de Sinai [5] (que é um bilhar retangular com um refletor circular em seu centro) ou no bilhar estádio de Bunimovich [6, 7] (que é um bilhar retangular que tem dois lados opostos substituídos por contornos circulares) podem ser classificados como completamente caóticos. Intuitivamente, nesses casos pequenas alterações nas condições iniciais da bola podem provocar, com o passar do tempo, grandes distanciamentos de suas trajetórias.

Observamos que, no caso dos bilhares caóticos, a teoria matemática conhecida nasceu no artigo de Sinai em 1970 [5] e daí em diante houve muita pesquisa e grandes avanços, em particular na moderna teoria de sistemas dinâmicos e da mecânica estatística (uma bela referência sobre os bilhares caóticos é o livro de N. Chernov e R. Markarian [8]). Finalmente, para os sistemas com dinâmica mista, podem ocorrer as duas situações descritas acima (dependendo das condições iniciais que são fornecidas para a bola). O bilhar cogumelo “*mushroom billiard*” (cuja sua forma genérica é uma semi-elipse justaposta

a uma base retangular), proposto recentemente por Bunimovich em 2001 [9], tem sido um ótimo exemplo para o estudo dessa dinâmica, por vários motivos, o que tem proporcionado muitas pesquisas recentes. Os detalhes desses assuntos serão vistos no capítulo 3.

Capítulo 2

Preliminares

Grosso modo, um sistema dinâmico é a descrição matemática determinística para a evolução temporal de um sistema, sendo que a variável tempo pode ter variação contínua ou discreta [10]. O que se deseja usualmente como um primeiro objetivo é o estudo e a caracterização da dinâmica destes sistemas, ou seja, procura-se descrever a evolução do sistema durante longos períodos de tempo e analisar o seu comportamento assintótico para $t \rightarrow \infty$ (t é a variável tempo).

Sistemas dinâmicos é uma área da Matemática de grande interesse, não só para os matemáticos, como também para outros vários cientistas e pesquisadores, cujos estudos possibilitam a compreensão de diversos fenômenos de outras áreas como a Biologia, as Ciências Sociais, a Economia, as Engenharias, a Física, a Química, entre outras. Em particular, faremos estudos de sistemas denominados sistemas bilhares que têm grande interesse, tanto na Física, como na Matemática, mas antes disso forneceremos uma sucinta revisão de conceitos e resultados que serão de grande importância para os nossos fins.

2.1 Definições, Resultados e Notações

Primeiramente, vamos discutir sobre as equações diferenciais e as equações discretas que, como veremos, fornecem os principais modelos

de sistemas dinâmicos. Em seguida, nas próximas seções, vamos tratar dos sistemas dinâmicos e de suas peculiaridades que serão primordiais no estudo dos sistemas bilhares.

Equações Diferenciais

Definição 2.1.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma função contínua com U aberto. A equação diferencial ordinária (e.d.o.) de 1ª ordem definida por f escreve-se como:*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.1)$$

sendo $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Definição 2.1.2. *Uma solução de (2.1) também chamada de curva integral da e.d.o. é um função diferenciável $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo J um intervalo aberto, tal que:*

- (i) $\forall t \in J$, tem-se $(t, \varphi(t)) \in U$;
- (ii) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in J$.

Definição 2.1.3. *Seja a e.d.o (2.1) e considere $(t_0, x_0) \in U$ fixado. O problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

chama-se *Problema de Cauchy*.

Exercício 2.1.1. *Mostre que o Problema de Cauchy (2.2) é equivalente a equação*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(y, x(y)) dy \quad (2.3)$$

chamada *equação integral*.

Observação 2.1.1. *A existência de soluções de e.d.o. em \mathbb{R}^n é garantida supondo a continuidade de f em (2.1). Para garantir a unicidade de um Problema de Cauchy, a continuidade de f apenas não é suficiente (veja o exercício (2.1.3)) é necessário exigir, por exemplo, a continuidade da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ em U (veja o teorema 2.1.1).*

Exercício 2.1.2. Considere $\dot{x} = f(t)g(x)$ e $x(t_0) = x_0$ com f e g de classe C^1 . Mostre a unicidade local se $g(x_0) \neq 0$. Forneça uma fórmula implícita para a solução. (Obs.: Este tipo de equação recebe o nome de **Equação Separável**)

Exercício 2.1.3. Mostre que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

em \mathbb{R} , possui mais de uma solução.

Um resultado fundamental é o seguinte:

Teorema 2.1.1 (Teorema de Existência e Unicidade). *Sejam $f(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ funções contínuas em $(t, x) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, sendo U aberto. Então para qualquer $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do Problema de Cauchy (2.2), definida num intervalo aberto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ para algum $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$.*

Demonstração: Ver o capítulo 1 da referência [11]. □

Definição 2.1.4. *Uma e.d.o. $\dot{x} = f(t, x)$ é dita autônoma se $f(t, x) = f(x)$, ou seja, f não depende explicitamente do tempo t .*

Prova-se que a existência e unicidade de soluções de e.d.o. dependentes do tempo é equivalente à existência e unicidade de soluções de e.d.o. autônomas. Para isso, considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, escreve-se $X := (t, x) \in U$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $F(X) = F(t, x) := (1, f(t, x))$ e verifica-se que a e.d.o. $\dot{x} = f(t, x)$ em \mathbb{R}^n é equivalente à e.d.o. $\dot{X} = F(X)$ em \mathbb{R}^{n+1} , em relação as suas soluções.

Definição 2.1.5. *Uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com U aberto, define um campo de vetores. Tal campo define uma e.d.o. autônoma naturalmente da forma $\dot{x} = X(x)$.*

Definição 2.1.6. *Uma e.d.o. de ordem n é uma equação da forma*

$$x^n = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.5)$$

sendo $f : U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com U aberto e $x^{(j)} = \frac{d^j x}{dt^j}$.

De forma análoga como fizemos antes pode-se definir solução de uma e.d.o. de ordem n . Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.1. *A e.d.o. de ordem n definida em (2.5) está em correspondência natural com a e.d.o. de 1ª ordem*

$$\dot{X} = F(t, X(t)), \quad X(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (2.6)$$

em relação as suas soluções, sendo $F(t, X) := (x_2, \dots, x_n, f(t, x_1, \dots, x_n))$ e introduzindo as variáveis $x_1 = x, x_2 = x^{(1)}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$.

Desta forma, pode-se estender naturalmente para as e.d.o.'s de ordem n os principais resultados (de existência, unicidade e outros) que são válidos para as e.d.o.'s de 1ª ordem.

Observação 2.1.2. (i) *Um outra maneira alternativa de abordar o problema de Cauchy (2.2) é a seguinte: a função f define em U um campo de direções (vetores), todavia tem-se o problema de se achar (se existirem) as curvas soluções passando por (t_0, x_0) , cujas retas tangentes (com inclinação $f(t_0, x_0)$), em cada ponto fixado, coincidem com as dadas por esse campo de direções.*

(ii) *No estudo de sistemas dinâmicos também consideramos equações diferenciais do tipo $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ onde f depende de t e x e de um parâmetro λ . Tais equações a um parâmetro, também, podem ser reduzidas as equações diferenciais sem parâmetros (exercício 2.1.4).*

(iii) *Um outro tipo importante de equações diferenciais são as chamadas equações diferenciais parciais (e.d.p). Grosso modo, uma e.d.p. é uma equação que envolve uma função incógnita (que depende de mais de uma variável independente) e suas derivadas parciais de primeira ordem e/ou de ordem superior. Veremos alguns exemplos de e.d.p.'s neste livro, porém sem maiores detalhes.*

Outro assunto que tem grande importância no estudo das equações diferenciais ordinárias é a análise da dependência das soluções em relação as condições iniciais em termos de continuidade e diferenciabilidade das soluções. Tal assunto pode ser visto em detalhes na referência [11].

Exercício 2.1.4. *Mostre que $x(t)$ satisfaz*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

se, e somente se, $X(t) = (t, x(t), \lambda_0)$ satisfaz

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

sendo $X = (t, x, \lambda)$, $X_0 = (t_0, x_0, \lambda_0)$ e $F(X) = (1, f(t, x, \lambda), 0)$.

Exercício 2.1.5. Seja $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

considere $y(t) := x(t + t_0)$ e mostre que y também é uma solução de $\dot{x} = f(x)$, porém com condição inicial $y(0) = x_0$.

Equações Discretas

Outro tipo relevante de equações que podem gerar importantes sistemas dinâmicos, são as equações discretas. Grosso modo, são equações que do ponto de vista físico têm a variação discreta do tempo, [10, 11].

Definição 2.1.7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua, a equação dada por

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

chama-se equação discreta.

Dado um $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ a solução da equação (2.10) com condição inicial x_0 é a seqüência $(f^n(x_0))$ sendo f^n a n -ésima iterada da função f .

Definição 2.1.8. $(f^n(x_0))$ chama-se órbita de x_0 .

Observação 2.1.3. (i) As equações discretas são importantes em várias situações uma delas é a possibilidade e a conveniência de reduzir o estudo de sistemas dinâmicos contínuos (dado por equações diferenciais) de dimensão N ao estudo discreto dado por equações discretas (também chamadas de mapas ou transformação) de ordem $N-1$ por meio da técnica da Seção de Superfície de Poincaré.

(ii) Pode-se provar que se a solução da e.d.o. for lisa, isto é, k -vezes continuamente diferenciável, então o mapa gerado é um difeomorfismo.

2.2 Sistemas Dinâmicos

A partir dos teoremas clássicos de continuidade e de diferenciabilidade das soluções de uma e.d.o. com relação às condições iniciais, podemos obter os conceitos de *fluxo* e de *sistemas dinâmicos*. O resultado abaixo, que decorre desses teoremas mencionados (veja por exemplo [11]) define estes conceitos. A discussão que se segue tem como referências principais [11, 12, 13].

Teorema 2.2.1. *Sejam $X : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^r , $r \geq 1$, num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$. Então existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança V de x_0 e uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow A$ de classe C^r tais que $\forall y \in V, \varphi(t, y) \equiv \varphi_t(y)$ é a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = y, \end{cases} \quad (2.11)$$

em $(-\epsilon, \epsilon)$.

Demonstração: Ver [11]. □

Definição 2.2.1. *A aplicação φ dada acima recebe o nome de **fluxo local** de X em $x_0 \in A$.*

Observação 2.2.1. *(i) Quando o campo de vetores X (dado acima) é completo, isto é, suas soluções (de (2.11)) são globais, fica assim definido o **fluxo global** de classe C^r , $\varphi : \mathbb{R} \times A \rightarrow A$ onde $\varphi(t, y)$ é a solução de (2.11) $\forall t \in \mathbb{R}, x \in A$ e verifica-se as seguintes propriedades:*

- (a) $\varphi(0, x) = x, \forall x \in A$, isto é, $\varphi_0 = Id_A$;
- (b) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, isto é, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, em A ;
- (c) φ_t é um difeomorfismo de classe C^r de A sobre A com inversa $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

A recíproca, deste resultado, também é verdadeira, ou seja, dada uma família a um parâmetro $t \in \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R} \times A \rightarrow A$ de classe C^r , $r \geq 1$ com $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que as condições (a-c) são válidas, fica assim definido um campo de vetores C^{r-1} , $X(x)$, tal que $\phi(t, x)$ é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (2.12)$$

$\forall t \in \mathbb{R}, x \in A$.

(ii) Um difeomorfismo $C^r, r \geq 1, f : A \rightarrow A$ gera um fluxo $\phi : \mathbb{Z} \times A \rightarrow A$ com $\phi(n, x) \equiv f^n(x)$ e $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ se $n > 0, f^0 = I$ e $f^n = (f^{-1})^{-n}$ se $n < 0$, que verifica:

(a) $\phi(0, x) = x$;

(b) $\phi(m + n, x) = \phi(m, \phi(n, x))$;

(c) ϕ_n é um difeomorfismo com inversa ϕ_{-n} .

Do teorema 2.2 e das as observações acima temos a seguinte definição.

Definição 2.2.2. Um **sistema dinâmico**, em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, é a ação de um grupo G em A , isto é, existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi : G \times A &\rightarrow A \\ (g, x) &\mapsto \phi_g(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

tal que

(i) $\phi_0 = I_d$

(ii) $\phi_{g \circ h} = \phi_g \circ \phi_h, \forall g, h \in G$

(iii) ϕ_g é um difeomorfismo com inversa ϕ_{-g} .

Exemplo 2.2.1. (Sistemas Dinâmicos Discretos) O exemplo protótipo de um sistema dinâmico discreto é um mapa iterado (observação 2.2.1(ii)). Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação, com $I \subset \mathbb{R}$ e considere $\phi_n = f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$, com $G = \mathbb{Z}$. Claramente,

a definição acima é satisfeita. Uma excelente referência para o estudo detalhado desse tipo de sistema é [14].

Exemplo 2.2.2. (Sistemas Dinâmicos Contínuos) Neste caso o exemplo protótipo é o fluxo de uma e.d.o. autônoma. Considere $G = \mathbb{R}$ e $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ dada pelos teoremas clássicos de continuidade e diferenciabilidade de soluções de uma e.d.o., com relação às condições iniciais. Desta forma, podemos conceituar fluxos e conseqüentemente sistemas dinâmicos. Boas referências para isso são [11, 15].

2.2.1 Algumas Ferramentas de Análise Dinâmica

Vamos discutir duas das mais importantes ferramentas que são utilizadas em estudos e na análise dos mais diversos sistemas dinâmicos, sejam eles contínuos ou discretos.

Para um estudo mais completo, de tais ferramentas e também de outras ferramentas, sugerimos consultar as referências fornecidas.

Transformação (ou Mapa) de Poincaré

As vezes é útil reduzir o estudo de sistemas dinâmicos contínuos (ou fluxos) ao estudo de sistemas dinâmicos discretos (ou mapas) pelo uso da técnica, desenvolvida por Poincaré (1881), chamada *Método da Seção de Poincaré*.

A partir desse método determina-se um mapa, chamado *mapa de Poincaré* (ou também chamado *mapa de retorno*), que fornece importantes informações sobre o sistema estudado. O mapa de Poincaré, associado a uma órbita fechada Γ de um campo vetorial X é um difeomorfismo P (a prova deste resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [11]). Este mapa descreve o comportamento do campo X em uma vizinhança de Γ .

Para definir o mapa de Poincaré, seja ϕ_t o fluxo associado a equação diferencial $\dot{x} = X(x)$, e suponha que $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade¹ $(n - 1)$ -dimensional. Se $p \in S$ e $(p, X(p)) \notin T_p S$ (isto significa que esse par não pertence ao espaço tangente a S passando por p), então dizemos que o vetor $(p, X(p))$ é *transverso* a S em p . Se $(p, X(p))$ é transverso a S em cada ponto $p \in S$, dizemos que S é uma *seção* para o fluxo ϕ_t . Se $p \in S$, então a curva $t \mapsto \phi_t(p)$ (órbita $\phi(t, p)$) passa por S , pelo menos, quando t passa por $t = 0$. Talvez possa existir algum $T = T(p) > 0$ tal que $\phi_{T(p)} \in S$. Neste caso, dizemos que o ponto p retorna a S no tempo T . Assim, se existir um subconjunto aberto $\Sigma \subseteq S$ tal que cada ponto de Σ retorna a S , então Σ é chamada *seção de Poincaré*. Desta forma, podemos definir $P : \Sigma \rightarrow S$ por $P(p) := \phi_{T(p)}(p)$ com $T(p) > 0$ sendo o tempo do primeiro retorno a S . O mapa P é chamado *mapa de Poincaré* em Σ e $T : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado o *mapa de tempo de retorno*, veja a figura 2.1 para uma ilustração.

Muitas das características do campo X , em uma vizinhança de Γ , se refletem no mapa P , por exemplo, as órbitas periódicas de X vizinhas de Γ correspondem aos pontos periódicos de P , que são os pontos $q \in \Sigma$ para os quais $P^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$. O comportamento assintótico das órbitas de X próximo de Γ também

¹Que pode ser vista como uma hipersuperfície.

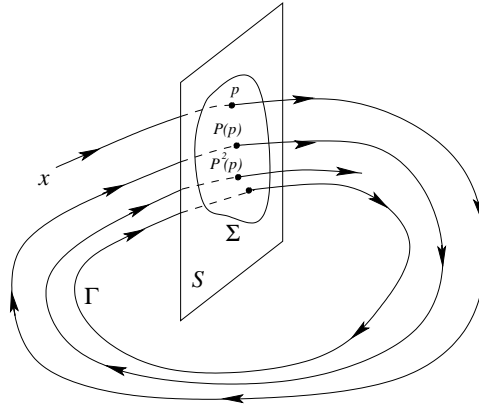


Figura 2.1: Uma seção de Poincaré Σ e o correspondente mapa de Poincaré.

pode ser obtido por meio de P . De fato, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(q) = p$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, q), \Gamma) = 0$, [11, 16].

Expoentes de Lyapunov

Os *expoentes de Lyapunov* são de suma importância na caracterização do comportamento dos sistemas dinâmicos, em particular dos sistemas com comportamento caótico. Eles servem para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto, o quanto da dependência sensível às condições iniciais há no sistema dinâmico.

Intuitivamente, pode-se escolher uma trajetória com início num ponto arbitrário x_0 , envolvemos este ponto por uma esfera n -dimensional (hiperesfera) com volume infinitesimal de condições iniciais dado por um raio Γ_0 . A evolução temporal do fluxo fornecerá um comportamento assintótico da taxa de expansão/contração local dos eixos desta hiperesfera infinitesimal deformando-a num elipsóide cujos eixos principais são dados por Γ_i , $i = 1, \dots, n$. Desta forma, os expoentes de Lyapunov são definidos em relação ao crescimento/decrescimento exponencial dos eixos principais $\Gamma_i(t)$ do elipsóide. Os expoentes de Lyapunov, num certo sentido, estão relacionados com a idéia de contração ou expansão de diferentes direções no espaço de fases, veja-se

[17].

Resumidamente, considere o campo de vetores, C^r ($r \geq 1$),

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Seja $\mathbf{x}_t(x_0)$ a trajetória de (2.14) satisfazendo $\mathbf{x}_0(x_0) = x_0$. Queremos descrever o comportamento das órbitas de (2.14) próximas de $\mathbf{x}_t(x_0)$. Em particular, temos interesse em conhecer a geometria associada as órbitas de (2.14) no que se refere à atração e/ou repulsão, em relação à órbita de referência $\mathbf{x}_t(x_0)$. Para isto é natural, primeiramente, considerar o comportamento das órbitas da linearização de (2.14) próxima de $\mathbf{x}_t(x_0)$ dada por

$$\dot{\xi} = Df(x(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.15)$$

Sejam $X_t(\mathbf{x}_t(x_0))$ a matriz solução fundamental [11] de (2.15) e $\mathbf{e} \neq 0$ um vetor em \mathbb{R}^n . Então o coeficiente de expansão/contração na direção do vetor \mathbf{e} ao longo da trajetória $\mathbf{x}_t(x_0)$ através de x_0 é definido por

$$\lambda_t(x_0, \mathbf{e}) \equiv \frac{\|X_t(x_t(x_0))\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{e}\|}. \quad (2.16)$$

A próxima definição estabelece, precisamente, os expoentes de Lyapunov.

Definição 2.2.3. *Suponhamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e que a solução $t \mapsto x_t(x_0)$ de (2.14) está definida $\forall t \geq 0$. Seja $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo. O expoente característico de Lyapunov ou apenas expoente de Lyapunov na direção de \mathbf{e} ao longo da trajetória através de x_0 , para o fluxo x_t é definido por*

$$\chi(X_t(x_t(x_0)), x_0, \mathbf{e}) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \lambda_t(x_0, \mathbf{e}). \quad (2.17)$$

Observação 2.2.2. (1) A equação (2.17) é uma quantidade assintótica;

(2) Para o vetor nulo definimos

$$\chi(X_t(x_t(x_0)), x_0, \mathbf{0}) = -\infty;$$

(3) A matriz solução fundamental $X_t(x_t(x_0))$ de (2.15) depende da solução particular $x_t(x_0)$ de (2.14);

(4) O expoente de Lyapunov não depende da variação da condição inicial.

(5) Sobre uma trajetória fechada, o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares a um atrator periódico, há contração do volume no espaço de fases. Portanto, os expoentes de Lyapunov associados a essas direções são negativos.

(6) A definição de expoentes de Lyapunov para mapas é bastante similar, [10, 17].

Comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas. Neste caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica dependência sensível em relação as condições iniciais [10, 11, 17, 18].

Observação 2.2.3. *Recorre-se, em geral, ao cálculo numérico computacional para a obtenção dos expoentes de Lyapunov, o procedimento para a computação dos expoentes de Lyapunov foi desenvolvido por Benettin et al (1980), [19, 20]. Outros procedimentos computacionais que resultam no cálculo dos expoentes de Lyapunov podem ser encontrados em [18].*

2.2.2 Principais Exemplos

Dois dos sistemas dinâmicos mais conhecidos e mais estudados são os famosos: *Mapa Logístico* e o *Sistema de Lorenz*, dados abaixo.

Outros vários sistemas dinâmicos importantes podem ser encontrados nas referências fornecidas e também na literatura científica disponível. Salientamos que tais sistemas são importantes fontes de estudo e ainda de pesquisa atual.

Exemplo 2.2.3 (Mapa Logístico (Sistema Discreto)). *Considere o mapa unidimensional*

$$x_{k+1} = 4\alpha x_k(1 - x_k) \quad (2.18)$$

sendo $0 \leq x_k \leq 1$ e $0 < \alpha \leq 1$. Para $\alpha = 0.50$, a órbita do mapa gerada com ponto inicial $x_0 = 0.25$ é

$$\{0.25, 0.375, 0.46875, \dots\}. \quad (2.19)$$

Esse mapa é o famoso mapa logístico que está presente em diversos estudos como, por exemplo, nos trabalhos de May (1976) [21], veja mais detalhes em [14].

Exemplo 2.2.4 (Sistema de Lorenz (Sistema Contínuo)). *Modelo dinâmico meteorológico proposto por Lorenz (1963) [22], que diz respeito a instabilidade de Rayleigh-Bérnard de um fluido localizado entre duas placas horizontais*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases} \quad (2.20)$$

sendo x proporcional à intensidade de movimento de convecção do fluido, y proporcional à diferença de temperatura entre as correntes de fluido ascendente e descendente e z representa o gradiente vertical de temperatura entre placas. Os parâmetros σ , b e r são constantes no modelo e para o caso que $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$ o sistema apresenta comportamento caótico, veja mais detalhes em [23].

Exercício 2.2.1. *Convidamos o leitor a fazer um estudo mais detalhado dos exemplos dados anteriormente.*

2.3 Sistemas Hamiltonianos

Vamos discutir agora uma classe especial de sistemas dinâmicos que aparece em uma grande variedade de circunstâncias seja na Física ou na Matemática. São os chamados *Sistemas Hamiltonianos*, que são regidos pelas famosas *Equações de Hamilton* (2.23), as referências que seguiremos são [23, 24, 25, 26].

As propriedades especiais das equações de Hamilton fornecem a estes sistemas vários elementos que os diferenciam, tanto qualitativamente, como estruturalmente de outros sistemas dinâmicos. Além da sua grande importância em dinâmica clássica (mecânica clássica) como se sabe, sua estrutura também tem grande importância na mecânica quântica.

Sabe-se que uma forma alternativa de formular a *Mecânica Clássica* é utilizar a função hamiltoniana no lugar da função lagrangiana,

onde o ponto de partida ainda continua sendo o *Princípio de Hamilton*. A evolução temporal do sistema dinâmico será descrita pelas equações de Hamilton em vez das equações de Lagrange. As *equações de Lagrange* para um sistema com n graus de liberdade são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.21)$$

que formam um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem dependentes do tempo ($1 \leq i \leq n$). O *Formalismo Hamiltoniano* transforma essas equações em um novo conjunto de $2n$ equações diferenciais dependentes do tempo, só que todas de primeira ordem. Essas equações diferenciais de primeira ordem, quando combinadas, levam às mesmas equações diferenciais obtidas pelo *Formalismo Lagrangiano* que, por sua vez, eram as mesmas obtidas pelo *Formalismo Newtoniano*. Observamos que estas formulações, em certos contextos, são todas equivalentes, veja por exemplo [25].

Operacionalmente, a formulação Hamiltoniana apresenta várias vantagens técnicas em relação a de Lagrange como, por exemplo: a unicidade das soluções no espaço de fases; a obtenção das transformações canônicas; o estudo da teoria de perturbação e uma certa semelhança entre a descrição Hamiltoniana da mecânica clássica e da mecânica quântica. A forma mais imediata de se obter as equações de Hamilton, a partir das equações de Lagrange, é por meio de uma transformação conhecida como *Transformação de Legendre*.

Definição 2.3.1. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um aberto e*

$$\begin{aligned} H : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &\mapsto H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

de classe C^2 .

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (2.23)$$

com $1 \leq i \leq n$ é chamado Sistema Hamiltoniano (ou Sistema de Hamilton ou ainda de Equações de Hamilton), e a função H é dita Hamiltoniana do sistema.

Observação 2.3.1. (i) Vale a pena ressaltar ainda, que o espaço de fases dos sistemas hamiltonianos apresenta uma estrutura geométrica mais simples do que a dos outros sistemas dinâmicos, chamada estrutura simplética, veja detalhes em [10, 24];

(ii) Da estrutura destas equações resulta que para o caso em que a função hamiltoniana H não depende do tempo, o valor de H permanece constante durante a evolução temporal de \mathbf{q} e \mathbf{p} (isto é, $dH/dt = 0$). Identificando o hamiltoniano H como a energia E do sistema, temos que ela se conserva para sistemas que não dependam do tempo, ou seja, $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{constante}$.

Lembramos que, no estudo da *Dinâmica Hamiltoniana*, um sistema Hamiltoniano é chamado *Sistema Conservativo* se, durante a evolução temporal, existe a preservação do volume no espaço de fases, ou seja, se tivermos inicialmente uma superfície fechada S_i e dada a evolução temporal de cada ponto desta superfície (por meio das equações de Hamilton). Temos que, a nova superfície S_f formada (num instante futuro qualquer) será fechada e cobrirá um volume no espaço de fases igual ao volume coberto pela superfície S_i , de acordo com o *Teorema de Liouville* ver 2.3.1 (o teorema vale para o caso autônomo ou não, sendo que para o caso autônomo a prova é imediata veja a observação 2.3.1(ii)). Temos assim, que os sistemas hamiltonianos autônomos são conservativos. Sistemas que não são conservativos são chamados *Sistemas Dissipativos*.

Destacamos ainda que em vários sistemas dinâmicos podemos encontrar quantidades que são conservadas ou que são invariantes por certas transformações, quando isso ocorre, essas quantidades são chamadas de *constantes de movimento*. Sabemos que um dos fatores que influenciam diretamente esta invariância, é a simetria do sistema, por exemplo, temos a conservação do momento linear em sistemas invariantes por translação e a conservação do momento angular em sistemas invariantes por rotações. No nosso caso, quando um sistema dinâmico é classificado como conservativo, temos que a energia do sistema é conservada, ou seja, ela se mantém constante durante toda evolução temporal do sistema.

Um resultado importante que segue do teorema de Liouville é o *Teorema de Recorrência de Poincaré* (ver o teorema 2.3.2). Grosso modo, ele afirma que as trajetórias de sistemas Hamiltonianos retornam arbitrariamente próximas de sua condição inicial, sendo que essa afirmação vale para quase toda condição inicial.

Teorema 2.3.1 (Liouville). *O volume no espaço de fases é preservado sob fluxos Hamiltonianos (associados às equações de Hamilton (2.23)).*

Demonstração: Ver [25]. □

Teorema 2.3.2 (Poincaré). *Suponhamos que Φ é uma bijeção que preserva o volume de uma região limitada $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Então para qualquer vizinhança $U \subseteq D$ existe um ponto que retorna (por meio de Φ) a U depois de um número finito de iterações de Φ , ou seja, $\Phi^n(x) \in U$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Ver [25]. □

Observação 2.3.2. *Para os sistemas hamiltonianos, então vale o teorema de Liouville, isto significa que dado um conjunto de condições iniciais (uma hipersfera por exemplo) o hipervolume deste conjunto no espaço de fases é conservado no decorrer da evolução temporal do fluxo. Salientamos que isso não vale em geral, por exemplo, para sistemas dissipativos temos a contração do volume. Ambas propriedades (conservação e dissipação) podem ser caracterizadas usando os expoentes de Lyapunov, veja-se [17].*

Exemplo 2.3.1 (Campos Hamiltonianos Planares). *Neste caso temos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases} \quad (2.24)$$

sendo $H(x, y)$ a função Hamiltoniana real de classe C^2 definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. O campo vetorial

$$X(x, y) := \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right) \quad (2.25)$$

define as equações (2.24).

Como ilustração a e.d.o. de 2ª ordem

$$x'' + f(x) = 0 \quad (2.26)$$

pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x), \end{cases}$$

sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja função Hamiltoniana é dada por

$$H(x, y) = \int_0^x f(\zeta) d\zeta + \frac{y^2}{2}. \quad (2.27)$$

Exercício 2.3.1. Considere a equação do oscilador harmônico simples $x'' + x = 0$. Obtenha o sistema de 1ª ordem equivalente juntamente com a sua solução. Além disso, obtenha a função Hamiltoniana para esse sistema.

2.3.1 O Teorema KAM

Nesta subseção, pretende-se brevemente discutir o *teorema KAM* (*Kolmogorov-Arnold-Moser*), que garante sob certas condições, a existência de uma dinâmica “quase-regular” para sistemas Hamiltonianos quando esses sofrem “pequenas perturbações”. Antes dessa discussão fornecemos alguns conceitos e resultados importantes, para o seu melhor entendimento, as referências utilizadas foram [24, 25, 26].

Lembramos que uma transformação de variáveis (isto é, uma mudança de variáveis) no espaço de fases de um sistema dinâmico (regido pelas equações de Hamilton) será de interesse, se ela preservar a forma canônica (ou padrão) das equações de movimento. De forma mais precisa, dadas as variáveis canônicas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , a hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e as equações de Hamilton (2.23), estamos interessados na transformação invertível

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

desde que seja possível encontrar uma função $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ tal que as equações de movimento nas novas variáveis tenham a forma padrão

das equações de Hamilton, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Uma condição suficiente para a validade de (2.28) e (2.29) é que a equação (obtida usando o princípio variacional):

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\Phi,\tag{2.30}$$

seja verdadeira, para alguma função $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Esta equação serve para caracterizar uma transformação canônica, temos a seguinte definição [26].

Definição 2.3.2. *A transformação invertível (2.28) é chamada canônica se existem funções $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ e $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tais que a equação (2.30) seja satisfeita.*

Observação 2.3.3. *Ressaltamos que na formulação hamiltoniana as coordenadas generalizadas ($\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$) e os momentos generalizados ($\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$) são variáveis independentes entre si, tornando possível considerar mudanças de variáveis no espaço de fases que preservam a forma das equações de Hamilton, isso possibilita escolher variáveis canônicas que simplifiquem a hamiltoniana e, de certa forma, facilitem a resolução das equações de movimento.*

Recordamos que, para qualquer função das variáveis canônicas $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ no espaço de fases, é válido:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}\tag{2.31}$$

sendo $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a hamiltoniana do sistema e para quaisquer funções F e G o colchete ou parêntese de Poisson $\{F, G\}$ é definido como:

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)\tag{2.32}$$

Observação 2.3.4. *Uma das principais vantagens de se escrever as equações de movimento de uma função, no espaço de fases, na forma (2.31) reside no fato que o colchete de Poisson é invariante sob transformações canônicas. Além disso, também é possível estabelecer uma caracterização básica de canonicidade, para transformações no espaço de fases, em termos de colchetes de Poisson [26].*

Um outro conceito fundamental, é o que se refere a *integrabilidade* de sistemas Hamiltonianos conservativos (veja a definição 2.3.3). Normalmente, é muito difícil encontrar sistemas dinâmicos cujas equações (2.23) sejam resolvidas analiticamente. Sendo assim, o problema de integrabilidade de sistemas Hamiltonianos é muito complexo. Contudo, existe uma maneira geral onde as soluções explícitas podem ser obtidas através da resolução de um número finito de equações algébricas e calculando um número finito de integrais, ou seja, a solução é obtida por meio de quadraturas (isto significa exprimir a solução do problema em termos de integrais de funções conhecidas). Tais sistemas Hamiltonianos são chamados *sistemas integráveis segundo Liouville ou apenas sistemas integráveis*, como exemplo, sistemas com apenas um grau de liberdade são sempre integráveis, pois sua função Hamiltoniana $H(q, p) = E$ é uma integral de movimento o que já basta para termos a integrabilidade do sistema.

Definição 2.3.3. *Um sistema hamiltoniano conservativo com N graus de liberdade e hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ com $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \subset \mathbb{R}^{2N}$ (U aberto) é dito um sistema integrável se existe N funções (também chamadas integrais) $F_1 \equiv H, \dots, F_N$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *As funções F_i , $i = 1, \dots, N$ são independentes em U exceto, possivelmente, em conjuntos de medida nula;*
- (ii) *$\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, \dots, N$, isto é, as N funções estão em involução.*

Desta forma, sistemas Hamiltonianos integráveis podem ser “resolvidos” em algum sentido. Essa discussão pode ser resumida pelo seguinte resultado obtido por Liouville.

Teorema 2.3.3 (Liouville). *A solução das equações de movimento (2.23) de um sistema integrável é obtida por “quadratura”.*

Demonstração: Ver [27]. □

A exigência de que um sistema integrável tenha N constantes de movimento independentes implica que as trajetórias do sistema no espaço de fases estão restritas a uma variedade N -dimensional (isto é, uma superfície N -dimensional)

$$F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.33)$$

onde os k_i são as N constantes. Além disso, pode-se provar que a exigência das N constantes F_i estarem em involução restringe a topologia da variedade (2.33) a de um *toro* N -dimensional, [25].

Observamos que nem sempre as variáveis “mais naturais” são as mais adequadas para efetuar determinados cálculos. Desta forma, alguma mudança de variáveis pode ser conveniente. No nosso caso, para resolver as equações de Hamilton associadas, a escolha ideal de variáveis é aquela que torna trivial a integração das equações de movimento. Assim, a introdução de um conjunto de novas variáveis para certos campos hamiltonianos, denominadas *variáveis ação-ângulo*, tem grande importância. Salientamos também que podemos dizer que um sistema Hamiltoniano é integrável, se existe uma transformação canônica para as variáveis ação-ângulo [10, 26].

Podemos resumir, mais precisamente, a discussão acima por um resultado que foi provado por Arnold [25]. Defina o conjunto:

$$M_k = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2N} \mid F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i, \quad i = 1, \dots, N\}. \quad (2.34)$$

Teorema 2.3.4 (Liouville-Arnold). (1) M_k é uma variedade diferenciável, invariante sob a dinâmica gerada por (2.23);

(2) Se M_k for compacta e conexa, então ela é difeomorfa ao toro N -dimensional

$$\mathbf{T}^N = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) \text{ mod } 2\pi\}$$

(3) O fluxo gerado por (2.23) define em \mathbf{T}^N um movimento quase-periódico, isto é, nas coordenadas angulares $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ temos

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\omega}, \quad \vec{\omega}(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_N(k)).$$

(4) As equações de Hamilton (2.23) podem ser resolvidas por quadraturas, mais precisamente, numa vizinhança em M_k podemos construir uma transformação de coordenadas

$$(\mathbf{I}, \vec{\theta}) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{I}, \vec{\theta}), \mathbf{p}(\mathbf{I}, \vec{\theta})),$$

sendo $\mathbf{I} \in B \subset \mathbb{R}^N$ (B aberto) e $\vec{\theta} \in \mathbb{T}^N$. Nestas coordenadas a Hamiltoniana se escreve como

$$H(\mathbf{q}(\mathbf{I}, \vec{\theta}), \mathbf{p}(\mathbf{I}, \vec{\theta})) \equiv K(\mathbf{I}),$$

com equações de movimento dadas por:

$$\frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \theta_i}(\mathbf{I}) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial I_i}(\mathbf{I}) \equiv \omega_i(\mathbf{I}). \quad (2.36)$$

Essas equações podem ser resolvidas trivialmente por integração, obtendo-se:

$$\mathbf{I} \equiv \text{constante}, \quad (2.37)$$

$$\vec{\theta} \equiv \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}(\mathbf{I})t. \quad (2.38)$$

onde $\vec{\omega}(\mathbf{I})$ é um vetor N -dimensional das componentes da velocidade angular.

Demonstração: Todos os detalhes podem ser encontrados em [25].
□

Observação 2.3.5. (i) De acordo com as equações (2.37) e (2.38) é possível verificar que pequenos desvios nas condições iniciais de um sistema integrável crescem linearmente com o tempo e assim dizemos que o movimento em sistemas integráveis é chamado **movimento regular**. Para os sistemas não-integráveis podem, em certas regiões do espaço de fases, apresentar uma alta dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, pequenos desvios nas condições iniciais podem crescer exponencialmente com o tempo tornando o comportamento do sistema imprevisível; este tipo de movimento é chamado **movimento irregular** ou **caótico** [26]. Um exemplo importante de

não-integrabilidade é o caso geral do famoso problema dos três corpos estudado em cursos de mecânica celeste ou de mecânica clássica. Portanto, caos é uma característica peculiar dos sistemas não integráveis. (ii) Salientamos ainda, que uma forma de representar as soluções de (2.37) e (2.38) é por meio de um toro N -dimensional, onde a variável ação fornece os raios constantes do toro e a variável ângulo fornece uma variável cíclica que evolui no tempo [10].

Uma questão famosa e de grande importância é saber se a integrabilidade de um sistema resiste a pequenas perturbações em sua dinâmica. Sabe-se que a existência de sistemas (Hamiltonianos) integráveis é rara [28]. No entanto, com o auxílio desses sistemas integráveis pode-se obter uma informação ampla sobre o movimento de muitos sistemas não integráveis importantes, neste caso, considera-se a solução do problema integrável como uma primeira aproximação para esses sistemas. George Birkhoff e Enrico Fermi, assim como outros matemáticos e físicos, acreditavam que pequenas perturbações de um sistema integrável destruiriam a integrabilidade por completo, mas o que ocorre é que em sua maioria os toros do sistema integrável sobrevivem a uma perturbação, porém, de forma distorcida, enquanto outros são destruídos. O teorema proposto por A. N. Kolmogorov em 1954 [29] e provado por Jürgen Moser [30] e V. I. Arnold [31, 32] em 1962-63, conhecido como teorema KAM, responde espetacularmente quais são os toros destruídos e quais são os toros preservados e como isso influencia a dinâmica de um sistema integrável quando ele sofre pequenas perturbações [26].

Em muitas situações é conveniente, quando isso for possível, representar um sistema hamiltoniano qualquer, como a soma de sua parte integrável (não-perturbada) mais a sua parte não-integrável (perturbada) com o objetivo de encontrar soluções aproximadas que são somas de sua solução exata (parte integrável) com as correções devidas (parte não-integrável). Desta forma, para este estudo consideramos os sistemas gerados pela hamiltoniana

$$H_\varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \varepsilon H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (2.39)$$

sendo H_0 integrável e ε suficientemente pequeno. Como H_0 é integrável podemos escolher variáveis ação-ângulo $(\mathbf{I}, \vec{\theta})$ e assim con-

siderar o sistema gerado por

$$H_\varepsilon(\mathbf{I}, \vec{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \vec{\theta}), \quad (2.40)$$

sendo $\mathbf{I} \in B \subset \mathbb{R}^N$, (B aberto) e $\vec{\theta} \in \mathbb{T}^N$.

A solução do movimento não perturbado ($\varepsilon = 0$) é dado, de acordo com o teorema 2.3.4, por

$$\mathbf{I}(t) \equiv \mathbf{I}_0, \quad (2.41)$$

$$\vec{\theta}(t) \equiv \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}(\mathbf{I}_0)t. \quad (2.42)$$

onde $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}}$ é a frequência não perturbada.

Portanto, a curva solução é uma curva ao redor do toro invariante $\Gamma_{\mathbf{I}_0} = \{\mathbf{I}_0\} \times \mathbb{T}^N$. As trajetórias sobre o toro podem, de certa maneira, serem analisadas em relação a sua periodicidade ou quase-periodicidade por meio do vetor velocidade $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$. Dois casos podem ocorrer:

Se as frequências $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$ são *frequências não-ressonantes* ou *racionalmente independentes*, isto é,

$$\mathbf{k}\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) \neq 0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, \quad (2.43)$$

então cada órbita é densa.

Por outro lado, se as frequências $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$ são *frequências ressonantes*, isto é,

$$\mathbf{k}\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) = 0, \quad \text{para algum } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, \quad (2.44)$$

então o toro pode ser decomposto em outros “menores” com as mesmas propriedades anteriores a decomposição.

As soluções correspondentes são chamadas *quase-periódicas*. E elas serão periódicas se, e somente se, todas as frequências em $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$ são *frequências racionalmente dependentes*, isto é,

$$\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) = \mathbf{k}\xi, \quad \text{para algum } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

Como exemplo, no estudo da dinâmica do sistema solar as soluções quase-periódicas correspondem ao movimento estável dos planetas (isso significa que os planetas não se colidem e nem escapam para o infinito); a questão que surge é se elas persistem para perturbações

suficientemente pequenas ou não? Esta questão também é conhecida como o “*problema da estabilidade*” para o sistema solar.

Kolmogorov observou que, a maioria dos toros onde as frequências são não-ressonantes sobrevive sob pequenas perturbações. Então, o próximo teorema enunciado por Kolmogorov e provado por Arnold (para fluxos) e Moser (para mapas), que ficou conhecido como o teorema KAM, (mas as vezes também é chamado teorema de Kolmogorov) se verifica, ou seja,

Teorema 2.3.5 (KAM). *Se as frequências de um sistema Hamiltoniano integrável H_0 são racionalmente independentes² e suficientemente irracionais³, então para ε suficientemente pequeno a grande maioria das soluções do sistema perturbado (2.40) é quase-periódica e só diferem ligeiramente das soluções do sistema não-perturbado. Nesta situação, temos que todos os toros ressonantes e parte dos toros não ressonantes desaparecem, mas esse conjunto é pequeno (isto é, tem medida nula) quando comparado com o conjunto de toros não ressonantes, que são preservados sob tais perturbações.*

Demonstração: A demonstração é não trivial e não costuma ser dada em livros textos sobre o assunto. Na maioria desses livros encontra-se esboços ou apenas comentários sobre essa prova. Recomendamos consultar os artigos originais de Kolmogorov [29], Moser [30] e Arnold [31, 32]. \square

2.4 Caos

A área de *Caos Clássico* nasceu no final do século XIX, decorrente dos trabalhos pioneiros de Poincaré (1854-1912) sobre Mecânica Celeste [33]. Uma das características marcantes dos sistemas caóticos, “*a sensibilidade aos dados iniciais fornecidos*”, já era verificada nos sistemas dinâmicos⁴ por ele analisados; nascia assim o fenômeno da *imprevisibilidade* em estudos de sistemas dinâmicos determinísticos.

²Isto equivale a dizer que o sistema H_0 é não degenerado, isto é, $\det(\partial^2 H_0 / \partial I^2) \neq 0$ veja-se [25].

³Isto significa que esses números irracionais são mais irracionais do que outros, isso ocorre quando eles satisfazem uma certa condição Diofantina [25].

⁴Intuitivamente, podemos pensar um sistema dinâmico como todo fenômeno que evolui no tempo.

Para o estudo do caos clássico, o advento do computador forneceu uma ferramenta muito poderosa na verificação de aspectos genéricos da análise de sistemas caóticos. O exemplo pioneiro nesta linha foi o trabalho de Lorenz [22] relacionado à sua pesquisa sobre a questão meteorológica da Terra.

Três principais propriedades que gozam os sistemas dinâmicos caóticos são discutidas a seguir.

A moderna abordagem da dinâmica hiperbólica, não apenas para bilhares, é baseada no uso do *teorema ergódico multiplicativo de Oseledec* e no cálculo dos *expoentes de Lyapunov* [8]. Um outro critério mais geométrico que também tem sido muito usado para abordar a hiperbolicidade, principalmente em bilhares são os chamados *Campo de Cones Invariantes* [8, 34, 35]. Neste caso, a existência de um campo de cone invariante no espaço de fases do bilhar é equivalente a existência de hiperbolicidade para o bilhar, com o uso dessa ferramenta, Wojtkowski construiu vários campos de cones invariantes para várias classes de mesas de bilhares [36].

Temos assim as seguintes propriedades, que podem ser observadas e/ou verificadas, para um sistema bilhar caótico:

- (1) A Hiperbolicidade que está diretamente relacionada a sensibilidade às condições iniciais e que pode ser medida calculando os expoentes de Lyapunov, veja-se [8];
- (2) A Entropia positiva, intuitivamente, a entropia é uma medida que pode ser associada a informação de eventos aleatórios do sistema, ou seja, entropia pode ser associada a uma quantidade que mede a imprevisibilidade de um dado sistema dinâmico, veja-se [37];
- (3) A Ergodicidade que, intuitivamente, significa que qualquer região do espaço de fases será visitada pela trajetória para quase todo ponto (veja o apêndice B).

Cada uma destas propriedades pode indicar a existência de caos em um determinado sistema. Como se sabe ainda não existe uma definição de caos amplamente aceita por toda comunidade científica. Assim em algum sentido, cada uma destas propriedades anteriores pode ser vista como uma possível definição de caos [37].

Estas propriedades não são equivalentes em geral e não têm implicações lógicas de uma em relação as outras. Elas caracterizam diferentes aspectos do comportamento caótico de um sistema dinâmico. Sendo que a entropia positiva e a hiperbolicidade são características

mais locais, enquanto a ergodicidade é uma característica mais global.

Observação 2.4.1. *Como registro, uma das definições de caos proposta é dada por Devaney [14], segundo a qual um sistema dinâmico é dito ser caótico se goza das três propriedades seguintes:*

(i) Apresenta um conjunto denso de órbitas periódicas, ou seja, ele possui um elemento de regularidade;

(ii) É topologicamente transitivo, isto significa que ele possui uma órbita densa ou de outra maneira o seu espaço de fases não pode ser decomposto em dois subconjuntos abertos invariantes;

(iii) Tem dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, ele apresenta imprevisibilidade aos dados iniciais fornecidos.

Já outros autores, definem os sistemas caóticos como sendo os sistemas que apresentam algum expoente de Lyapunov positivo veja, por exemplo, Ott [10].

Capítulo 3

Bilhares

Bilhares são os sistemas dinâmicos mais simples e mais utilizados para o estudo do Caos Clássico, tanto na Física, como na Matemática e, recentemente, também do Caos Quântico.

A dinâmica clássica destes sistemas é bastante simples de ser obtida e também de ser visualizada, especificamente no caso do bilhar plano, como veremos adiante¹. Em seu interior o movimento é ao longo de retas, com reflexões especulares na fronteira, de tal forma que o tipo de dinâmica dependerá (exclusivamente) da geometria de sua fronteira.

Neste sentido, bilhares têm sido empregados como sistemas modelos para o estudo da dinâmica clássica e mais recentemente da dinâmica quântica (quando conhecida, a priori, a dinâmica clássica), pois são sistemas que possuem uma grande variedade de comportamento dinâmico: podendo ter a dinâmica integrável (regular) ou a dinâmica caótica ou ainda a dinâmica mista.

Apesar de todo o estudo já feito, disponível na literatura científica, a dinâmica clássica de certos bilhares continua a fornecer uma grande

¹Além disso, como também pode ser observado, a obtenção de resultados analíticos rigorosos vem sendo conquistado em casos especiais de bilhares, que tem enriquecido o nosso conhecimento sobre *A Teoria de Bilhares*. Sendo assim, a descoberta e o estudo de casos particulares de bilhares tem fornecido importantes ferramentas e muito conhecimento para estudos e aplicações à outros sistemas dinâmicos mais gerais.

riqueza de desafios teóricos. Neste capítulo, estudamos detalhadamente esses sistemas, revisando conceitos e ilustrando os principais exemplos, procurando destacar e caracterizar suas peculiaridades dinâmicas.

3.1 Definições e Exemplos

Em nosso estudo vamos tratar especificamente do bilhar plano, porém pode-se estender, com certas adaptações, esse estudo para o caso de bilhares em dimensões maiores do que dois. Salientamos que a maioria dos artigos científicos sobre bilhares se restringe ao bilhar plano e a partir de seu estudo são feitas eventuais generalizações para dimensões mais altas veja, por exemplo, [9] entre outros.

As principais vantagens de trabalhar com o bilhar plano são: as simplificações de cálculos; a não necessidade de muitos preliminares; a existência de importantes modelos físicos que correspondem ao bilhar plano; visualizações geométricas de sua variada dinâmica e além do mais para o bilhar plano já ocorrem interessantes questões de pesquisas que ainda se encontram em aberto, veja por exemplo as referências citadas. Estes motivos tornam os bilhares um dos sistemas dinâmicos mais interessantes e conseqüentemente um dos mais estudados por vários pesquisadores.

Para a discussão que se segue utilizamos como referências [3, 4, 8, 9]. Um *bilhar plano* é o sistema dinâmico que descreve o movimento² (dinâmica) de uma partícula pontual de massa m (às vezes também chamada de bola de bilhar) isto ocorre no interior de um conjunto compacto e conexo $Q \subset \mathbb{R}^2$ (mas também poderia ser visto contido no toro \mathbf{T}^2), cuja fronteira denotada por ∂Q , é uma curva regular ou uma reunião finita de curvas regulares (pelo menos de classe C^3 para que a curvatura, dessas curvas, seja de classe C^1). No interior de Q o movimento é uniforme (velocidade constante) e a reflexão na

²Fisicamente, temos uma partícula pontual de massa m e momento $\mathbf{p}_n = m\mathbf{v}_n$ movendo-se livremente no interior do bilhar ao longo de linhas retas até ela encontrar a fronteira do bilhar. Reflete-se especularmente sem mudança na sua componente tangencial do momento e com trocas instantâneas de sua componente normal do momento na fronteira. Observamos que um bilhar plano é um sistema hamiltoniano com espaço de fases de quatro dimensões $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e potencial $V(\mathbf{q}) = 0$ se $\mathbf{q} \in Q$ ou $V(\mathbf{q}) = \infty$ se $\mathbf{q} \notin Q$.

fronteira ∂Q é elástica, ou seja, é obedecida a seguinte regra da óptica geométrica: o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido veja a figura 3.1.

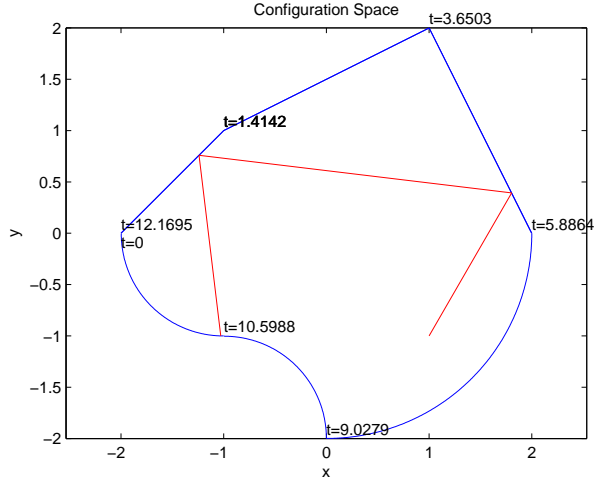


Figura 3.1: Ilustração do movimento de uma partícula pontual em uma mesa de bilhar arbitrária para algumas iterações com ponto inicial em $(1,-1)$.

Mais precisamente temos as seguinte considerações:

Definição 3.1.1. *Seja $Q \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes, um bilhar plano corresponde ao movimento livre de uma partícula no interior de Q , com reflexões elásticas na fronteira ∂Q .*

(i) A fronteira $\partial Q = \cup_i \Gamma_i$, $i = 1, \dots, r$, sendo Γ_i o fecho de curvas suaves. Chamam-se Q uma mesa de bilhar e Γ_i parede ou componente de ∂Q . Cada Γ_i é de classe C^k , $k \geq 3$ definida por uma função $f_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k sendo I um intervalo que está parametrizado pelo comprimento de arco;

(ii) As componentes da fronteira Γ_i têm partes comuns apenas em seus extremos, isto é, $\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j$ com $i \neq j$.

Além disso, considere $\Gamma_* := \cup_i \partial\Gamma_i$ e $\tilde{\Gamma} := \Gamma \setminus \Gamma_*$.

Assim, $x \in \Gamma_*$ chama-se um *ponto de canto* de Q e $x \in \tilde{\Gamma}$ um *ponto regular* de fronteira.

Exercício 3.1.1. *Mostre que todo ponto regular de fronteira x tem uma vizinhança aberta $U(x)$ que intersecta apenas uma parede Γ_i e é dividida por Γ_i em duas partes conexas, uma pertencente ao interior de Q e a outra pertencente ao complementar de Q [8].*

(iii) Em cada Γ_i a segunda derivada da curva, f_i'' , ou nunca se anula ou é identicamente nula.

Definição 3.1.2. *Uma mesa de bilhar Q é o fecho de um domínio aberto e conexo $Q \subset \mathbb{R}^2$ tal que ∂Q satisfaz as hipóteses (i-iii) dadas acima.*

Abaixo lembramos a definição de curvatura e de raio de curvatura de uma curva.

Definição 3.1.3. *Seja $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular de classe $C^k, k \geq 2$ parametrizada pela função comprimento de arco s , então $\kappa(s) = \|\beta''(s)\|$ define a **curvatura** da curva em s . Se $\|\beta''(s)\| \neq 0$ o inverso da curvatura define o **raio de curvatura**.*

Podemos agora distinguir três tipos de paredes na mesa de bilhar Q , a saber, (1) parede plana se $f_i'' \equiv 0$; (2) parede focalizadora ou convexa (vista do interior) e (3) parede dispersiva ou côncava (vista do exterior), para (2) e (3) tem-se $f_i'' \neq 0$. Esses nomes têm motivações físicas e são padrões na literatura. Em termos de curvatura temos: $\kappa = 0$ se Γ_i for plana; $\kappa = -\|f_i''\|$ se Γ_i for focalizadora e $\kappa = \|f_i''\|$ se Γ_i for dispersiva.

Definição 3.1.4. *Seja $\partial Q = \cup \Gamma_i$, definimos $|\Gamma_i|$ como sendo o comprimento de Γ_i que claramente é finito e $|\partial Q| = \sum_i |\Gamma_i|$ como sendo o perímetro de Q .*

Vamos supor que $q = q(t) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ denota a posição da partícula e $v = v(t) \in \mathbb{R}^2$ o seu vetor velocidade, com $t \in \mathbb{R}$. O movimento da partícula é dado pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Suponha agora que a partícula esteja em movimento no interior da mesa de bilhar, se ela colide com a parte regular da fronteira num ponto $q \in \tilde{\Gamma}$ o seu vetor velocidade será refletido em relação a reta tangente a Γ em q , onde é obedecida a regra “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão” e ele pode ser obtido por

$$v_{pos} = v_{pre} - 2\langle n(q), v_{pre} \rangle n(q) \quad (3.2)$$

sendo v_{pos} e v_{pre} os vetores pós-colisão e pré-colisão, respectivamente e $n(q)$ o vetor normal a $\tilde{\Gamma}$ em q .

Exercício 3.1.2. *Verifique (3.2) nas condições acima.*

Observação 3.1.1. (i) *Se a partícula atinge um ponto $q \in \Gamma_*$ (ou seja, ponto em um canto) seu movimento cessará e não estará mais definido além desse ponto;*

(ii) *As equações de movimento dadas acima preservam a norma $\|v\|$ e assim pode-se tomar $\|v\| = 1$.*

Definição 3.1.5. *Dizemos que uma colisão é regular se $q \in \tilde{\Gamma}$ e o vetor v_{pre} não é tangente a Γ , neste caso tem-se $v_{pre} \neq v_{pos}$. Quando v_{pre} for tangente a Γ num ponto de colisão tem-se $v_{pre} = v_{pos}$ e esta colisão será chamada tangencial.*

Exercício 3.1.3. *Mostre que colisões tangenciais são possíveis somente em paredes dispersivas [8].*

Exercício 3.1.4. *Considere o movimento de uma partícula colidindo com a parte regular da fronteira num tempo t . Mostre que ela se moverá dentro da mesa de bilhar Q sem colisões durante algum intervalo de tempo $(t, t + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ [8].*

Podemos dizer que o estado de uma partícula em movimento para qualquer tempo t fica determinado por sua posição $q \in Q$ e por seu vetor velocidade unitário $v \in S^1$. Desta forma, o espaço de fase do fluxo do Bilhar será

$$\Omega = \{(q, v)\} = Q \times S^1 \quad (3.3)$$

que é uma superfície tridimensional com fronteira $\partial\Omega = \Gamma \times S^1$.

Consideremos as aplicações projeções naturais $\pi_q : \Omega \rightarrow Q$ tal que $\pi_q(q, v) = q$ e $\pi_v : \Omega \rightarrow S^1$ tal que $\pi_v(q, v) = v$. Considere também o conjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ como sendo o conjunto de todos os estados (q, v) nos quais a dinâmica do movimento da partícula está definida $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, o fluxo do bilhar

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega} \quad (3.4)$$

fica determinado com $t \in \mathbb{R}$ (variação contínua para t).

Temos que toda trajetória do fluxo $\{\Phi^t x\}$, $x = (q, v) \in \tilde{\Omega}$ é uma curva contínua em Ω e a sua projeção $\pi_q(\Phi^t x)$ na mesa de bilhar Q chama-se, usualmente, de trajetória do bilhar.

Observação 3.1.2. *Pode-se provar que o fluxo Φ^t é suave de classe C^{k-1} em todos os pontos de colisões regulares (veja [8] pag. 29). Também é possível mostrar que o conjunto $\tilde{\Omega}$ é um conjunto G_δ denso de medida de Lebesgue total em Ω . Usando essa densidade de $\tilde{\Omega}$ em Ω estende-se, por continuidade, o fluxo Φ^t à todo espaço Ω , sob certas considerações [8].*

Com dissemos antes, é comum no estudo de sistemas dinâmicos reduzir um fluxo a um mapa por meio de uma seção de Poincaré (ou seção transversal). Para os sistemas bilhares, em particular, uma seção transversal que costuma-se usar é a sua própria fronteira, isto é, $\partial Q = \Gamma \times S^1$. Desta forma, pode-se descrever a seção transversal como sendo o conjunto de todos os vetores de velocidade pós-colisão:

$$\mathcal{M} = \cup_i \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = \{(q, v) \in \Omega \mid q \in \Gamma_i, \langle v, n \rangle \geq 0\}, \quad (3.5)$$

sendo n o vetor normal unitário a Γ_i apontando para o interior de Q . O conjunto \mathcal{M} é uma superfície bidimensional em Ω chamada de *espaço de colisão*.

Exercício 3.1.5. *Considere $x = (q, v) \in \mathcal{M}_i$. Sob quais condições estará a trajetória $\Phi^t x$ definida durante algum intervalo de tempo $0 < t < \varepsilon$ ([8])?*

Nos casos em que a trajetória $\Phi^t x$, $x \in \mathcal{M}$ está definida durante algum intervalo de tempo $(0, \varepsilon)$, temos que a intersecção com a superfície $\Gamma \times S^1$ deve ocorrer num tempo futuro $\tau(x) > 0$ chamado

tempo de retorno. Definindo $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \tilde{\Omega}$. Fica estabelecido o mapa de retorno

$$T : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \quad (3.6)$$

dado por

$$T(x) = \Phi^{\tau(x)+0}x. \quad (3.7)$$

sendo que $\tau(x) + 0$ significa que estamos considerando tempos que se aproximam de $\tau(x)$ pela direita. O mapa T é chamado *mapa do bilhar* ou *mapa de colisão* e em relação a isso \mathcal{M} também é chamado *espaço de fase do mapa do bilhar* T .

Introduz-se agora uma parametrização em \mathcal{M} . Fixa-se um parâmetro de comprimento de arco r ao longo de Γ_i , $r \in [a_i, b_i]$ tal que os (a_i, b_i) são disjuntos em \mathbb{R} e para cada $x \in \mathcal{M}$ seja $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ o ângulo entre o vetor velocidade v e a normal n , n apontando para o interior de Q e na fronteira toma-se o sentido anti-horário veja figura 3.2

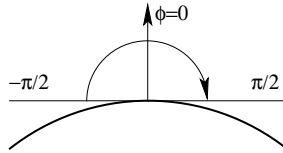


Figura 3.2: Orientação de r e ϕ .

Denotamos

$$\mathcal{S}_0 := \partial\mathcal{M} = \{-\pi/2, \pi/2\} \cup [\cup_i (\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\})], \quad (3.8)$$

sendo que os conjuntos $\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}$ estarão incluídos somente para as curvas Γ_i que não são curvas fechadas suaves. Considera-se também o conjunto

$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}_0 \cup \{x \in \mathcal{M} \mid T(x) \notin \text{int}\mathcal{M}\} \quad (3.9)$$

formado pelos pontos que fazem uma colisão tangencial com uma parede dispersiva neste caso $T(x) \in \mathcal{S}_0$ ou os pontos onde T não está definida (os pontos de canto).

Observação 3.1.3. *Estudo análogo ao que foi feito para mapa T também pode ser feito para o mapa inverso T^{-1} e assim definir o conjunto \mathcal{S}_{-1} . Conclui-se a partir daí que o mapa $T : \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$ é um homeomorfismo, mais detalhes em [8].*

Em outras palavras, como o movimento é uniforme no interior de Q o sistema bilhar fica determinado por suas sucessivas colisões com a fronteira ∂Q . Desta forma, é conveniente utilizar a fronteira do bilhar para construir uma seção de Poincaré e no lugar do fluxo³, podemos considerar a transformação (ou mapa) que a cada ponto da fronteira e a cada vetor velocidade (tomado após a colisão) faz corresponder as colisões seguintes (se elas estiverem bem definidas), ou seja, guardando a direção e a posição de incidência (da colisão) de cada trajetória constrói-se o mapa do bilhar a tempo discreto. Temos desta maneira o seguinte processo: a cada ponto $(q_i, v_i) \in \partial Q \times S^1$ corresponde um ponto $(q_{i+1}, v_{i+1}) \in \partial Q \times S^1$, por exemplo, para o ponto (q_0, v_0) fazemos corresponder o ponto (q_1, v_1) e para (q_1, v_1) fazemos corresponder o ponto (q_2, v_2) e assim por diante.

Vamos agora, fixar um ponto origem na fronteira ∂Q que podemos utilizá-lo para medir o comprimento desta fronteira. Sejam ∂Q_i as componentes da fronteira $\partial Q = \cup \partial Q_i$ (reunião finita) e $n(q)$ o vetor normal unitário tomado no interior a ∂Q_i em $q \in \partial Q_i$ (supondo que q seja um ponto regular). Desta forma, define-se o *espaço de fases* \mathcal{M} como em (3.5), onde estará determinado o sistema dinâmico que pode ser parametrizado pelo comprimento de arco r e pelo ângulo φ entre os vetores $n(q)$ e o vetor v após a colisão (vetor de saída), ou seja, introduz-se um sistema de coordenadas em \mathcal{M} definido pelo parâmetro de comprimento de arco r ao longo de ∂Q e pelo ângulo φ entre os vetores v e $n(q)$. Então podemos considerar $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ e $\langle n(q), v \rangle = \cos \varphi$.

Agora, estabelece-se a transformação do bilhar que denotaremos por T tal que $T(r_0, \varphi_0) = (r_1, \varphi_1)$ onde r_0 e r_1 são as coordenadas dos pontos $q_0, q_1 \in \partial Q$ de saída e chegada, respectivamente e φ_0, φ_1 são os ângulos de saída das trajetórias em q_0 e q_1 , respectivamente. De outra forma, seja $q_1 \in \partial Q$ o lugar onde a reta orientada por (q_0, v_0) atinge

³Geometricamente pode ser descrito pela reunião de segmentos retos, no espaço de configuração Q , cujas ligações são feitas após cada colisão com a fronteira ∂Q

primeiro a fronteira ∂Q e v_1 dado por (3.2) é o vetor velocidade da trajetória após ser refletida em $q_1 \in \partial Q$; o mapa do bilhar, também fica determinado desta maneira: $T(x) = T(q_0, v_0) = (q_1, v_1) = x_1$.

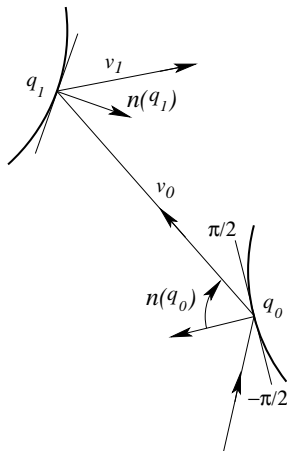


Figura 3.3: Esquema das colisões no espaço das configurações.

Salientamos que a transformação (ou o mapa) T (ou a sua inversa T^{-1}) não está definida se q_1 ou q_0 está num vértice da fronteira e será descontínua nos pontos em que a trajetória tangencia a fronteira.

Com efeito, isso pode ser verificado analisando a derivada de T . Suponha que $\bar{x}_1 = (\bar{q}_1, \bar{v}_1) = T(\bar{x}_0)$ está definido para $\bar{x}_0 = (\bar{q}_0, \bar{v}_0)$, então para todo $x_0 = (q_0, v_0)$ numa vizinhança $V \ni \bar{x}_0$ a matriz 2×2 nas coordenadas (r, φ) (dada por, ver [8],

$$DT(x_0) = -\frac{1}{\cos \varphi_1} \begin{bmatrix} \tau_0 \kappa_0 + \cos \varphi_0 & \tau_0 \\ \tau_0 \kappa_0 \kappa_1 + \kappa_1 \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cos \varphi_0 & \tau_0 \kappa_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

sendo $\kappa_i = \kappa(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$ a curvatura de ∂Q em q_i e τ_0 a distância entre q_0 e q_1), tem os seus coeficientes tendendo à infinito quando a imagem de (q_0, v_0) por T tende a tangenciar ∂Q , isto é, quando $\varphi_1 \rightarrow \pm\pi/2$. Portanto, a derivada de T não é limitada nestes pontos de tangência.

Doravante, os vértices da fronteira, os pontos de tangência e as

imagens e pré-imagens por T de todos esses pontos denominam-se as *singularidades de T* e denotaremos esse conjunto, por \mathcal{S}_1 como em (3.9). Analogamente, \mathcal{S}_{-1} é o conjunto das singularidades para o mapa T^{-1} .

Analisando a matriz derivada de T resulta o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1. *O mapa $T : \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^{k-1} .*

Demonstração: [8] pag. 35. □

Indutivamente, definimos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S}_n \cup T^{-1}(\mathcal{S}_n), \text{ e } \mathcal{S}_{-(n+1)} = \mathcal{S}_{-n} \cup T(\mathcal{S}_{-n}), \quad (3.11)$$

que são os conjuntos de singularidades para T^{n+1} e $T^{-(n+1)}$, respectivamente. Portanto, no conjunto

$$\hat{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_n \quad (3.12)$$

todas as iterações do mapa T estão definidas e são diferenciáveis de classe C^{k-1} .

Observação 3.1.4. *Segue como resultado, análogo ao que foi feito para o fluxo do bilhar, que o mapa T está bem definido num subconjunto G_δ denso $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ de medida de Lebesgue total. Além disso, o mapa T pode ser estendido, por continuidade, ao espaço inteiro \mathcal{M} .*

Um outro fato, relacionado a transformação T , que destacamos é que ela preserva a medida $\cos \varphi dr d\varphi$ em \mathcal{M} , essa medida recebe o nome de *medida de Liouville*, $dr d\varphi$ é a medida de Lebesgue em \mathcal{M} (dr em ∂Q e $d\varphi$ em S^1). É com relação a esta medida que fazemos os cálculos de todas as médias e de outras quantidades relacionadas aos sistemas bilhares [3]. Mais formalmente temos:

Proposição 3.1.1. *O mapa T preserva a medida $\cos \varphi dr d\varphi$ em \mathcal{M} .*

Demonstração: Pelo uso da fórmula da derivada de T (3.10) obtém-se que o $\det DT(x) = \cos \varphi / \cos \varphi_1$ e agora por uma mudança de variáveis resulta

$$\int \int_{T(A)} \cos \varphi_1 dr_1 d\varphi_1 = \int \int_A \cos \varphi dr d\varphi \quad (3.13)$$

que vale para todo conjunto de Borel $A \subset \mathcal{M}$. \square

Observa-se facilmente que $\int \int_{\mathcal{M}} \cos \varphi dr d\varphi = 2|\Gamma|$. Temos assim a seguinte definição:

Definição 3.1.6. *A medida normalizada em \mathcal{M} ,*

$$d\mu = (2|\Gamma|)^{-1} \cos \varphi dr d\varphi$$

é a medida de probabilidade padrão que é preservada pelo mapa T .

Observação 3.1.5. (1) *As coordenadas q e v dadas acima são às vezes chamadas de coordenadas de Birkhoff [2] e caracterizam a dinâmica do bilhar;*

(2) *As considerações acima, com os devidos ajustes e adaptações, podem ser generalizadas para dimensões mais altas em \mathbb{R}^d com $d \geq 2$.*

Exemplos de Bilhares

Destacamos os principais exemplos de bilhares planos que, usualmente, são utilizados para ilustrar e estudar o comportamento dinâmico desses sistemas (outros exemplos de bilhares podem ser encontrados na literatura científica com enfoque mais teórico ou mais aplicado dos mais diversos). Para os nossos propósitos os bilhares, que serão apresentados, nos fornecem um rico material de várias situações, de grande relevância, que nos interessam.

Podemos dizer que, em particular, o comportamento caótico em sistemas dinâmicos clássicos já é um fenômeno bem estudado, especialmente em bilhares, mas ainda desperta muito interesse em novas pesquisas, principalmente por ainda não termos uma *Teoria do Caos* completa. Neste sentido, o estudo de modelos particulares tem tido grande importância para a compreensão e desenvolvimento dessa teoria. No caso dos bilhares, por exemplo, a geometria de sua fronteira é o que determina suas propriedades dinâmicas.

(1) O bilhar num círculo e o bilhar numa cardióide

Vamos ilustrar a última observação usando dois bilhares que já são bem conhecidos: *o bilhar circular e o bilhar cardióide*, que podem ser

obtidos de uma mesma equação parametrizada dada em coordenadas polares, a saber,

$$\rho(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3.14)$$

sendo que para $\varepsilon = 0$ obtém-se o bilhar circular e para $\varepsilon = 1$ obtém-se o bilhar cardióide. Dada uma condição inicial arbitrária, podemos, a partir dela, obter as iterações (colisões com a fronteira) e visualizar geometricamente a dinâmica destes bilhares, vejam as figuras 3.4 e 3.5.

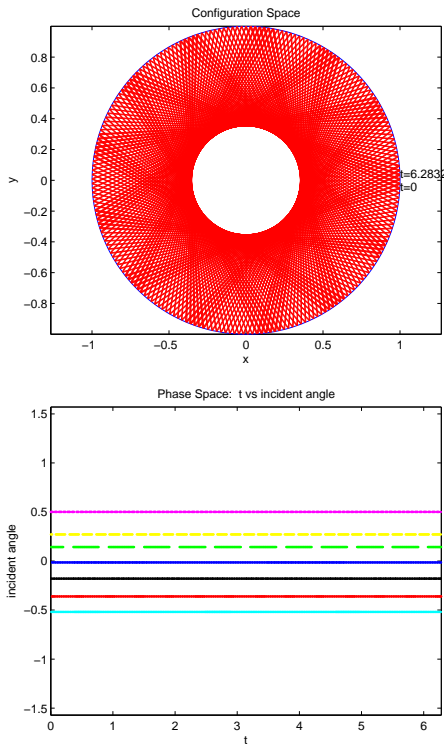


Figura 3.4: (Acima) Uma trajetória típica em um bilhar circular (dinâmica regular). (Abaixo) Exemplo de espaço de fase para este bilhar.

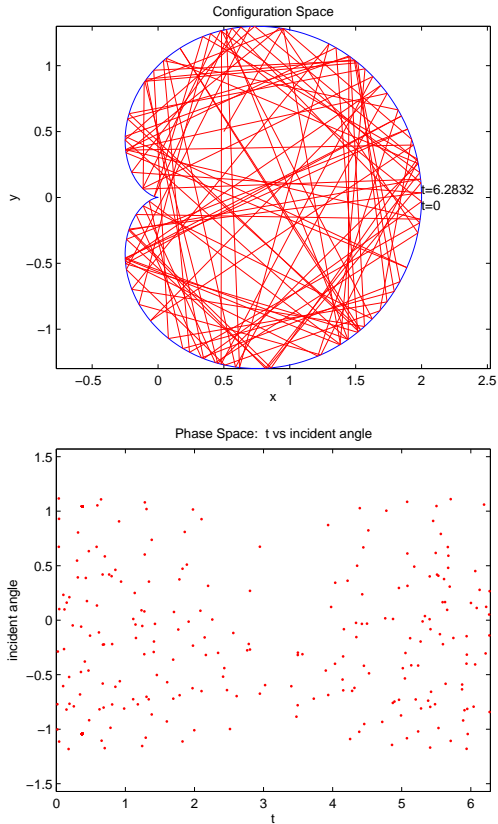


Figura 3.5: (Acima) Uma trajetória típica em um bilhar cardióide (dinâmica caótica). (Abaixo) Exemplo de espaço de fase para este bilhar.

Sabe-se que o bilhar circular apresenta dinâmica regular (sistema integrável), veja [4] e sabe-se que o bilhar cardióide apresenta dinâmica completamente caótica [38] o que significa que as trajetórias vizinhas são separadas exponencialmente como uma função do tempo (propriedade chamada *hiperbolicidade*) e uma trajetória típica preencherá o espaço de configuração disponível uniformemente (propriedade

chamada *ergodicidade*) [38, 39, 40].

Mais especificamente para o caso do bilhar circular temos que os segmentos de retas que aparecem no seu espaço de fases são ocasionados pelo fato que se uma partícula, após o impacto com a fronteira, sair com um ângulo φ_0 , todos os demais choques posteriores desta partícula ocorrerão sempre com o mesmo ângulo φ_0 , sendo assim a representação dos choques desta trajetória no espaço de fases estará restrita a um segmento de reta horizontal. Em relação ao espaço de configuração as ligações da trajetória entre dois choques terão sempre o mesmo comprimento, e além disso, serão tangentes a uma mesma circunferência (que recebe o nome de curva cáustica veja a definição 3.2.3, [3]).

O bilhar de Sinai e o bilhar estádio de Bunimovich

Os melhores exemplos conhecidos de bilhares caóticos são: o bilhar dispersivo de Sinai (a mesa de bilhar tem a forma quadrada com um refletor circular em seu centro) e o bilhar estádio de Bunimovich (a mesa de bilhar tem uma forma retangular com dois contornos opostos circulares e focalizadoras), vejam as figuras 3.6 e 3.7 para uma ilustração destes dois casos juntamente com suas respectivas dinâmicas.

A principal característica comum, a estes dois bilhares, é o fato de possuírem *dinâmica hiperbólica*. Grosso modo, eles têm direções em que o mapa do bilhar se expande e se contrai (direções estáveis e instáveis). Na verdade, eles possuem as propriedades que são usualmente associadas a existência de comportamento caótico: dependência sensível as condições iniciais, densidade de órbitas periódicas, etc.

Observação 3.1.6. (1) *Os bilhares dispersivos de Sinai foram os primeiros casos apresentados de bilhares com dinâmica hiperbólica. Sinai deu uma prova rigorosa que esses bilhares são ergódicos (isto significa que apenas subconjuntos do espaço de fases que são invariantes em relação ao mapa do bilhar possuem medida nula ou total)* [5];

(2) *Bunimovich, Chernov e Sinai foram os pioneiros a estudar e a fornecer importantes resultados estocásticos para os bilhares dispersivos. Podemos dizer, com certeza, que a escola Russa teve e ainda tem um grande destaque no desenvolvimento da Teoria de Bilhares;*

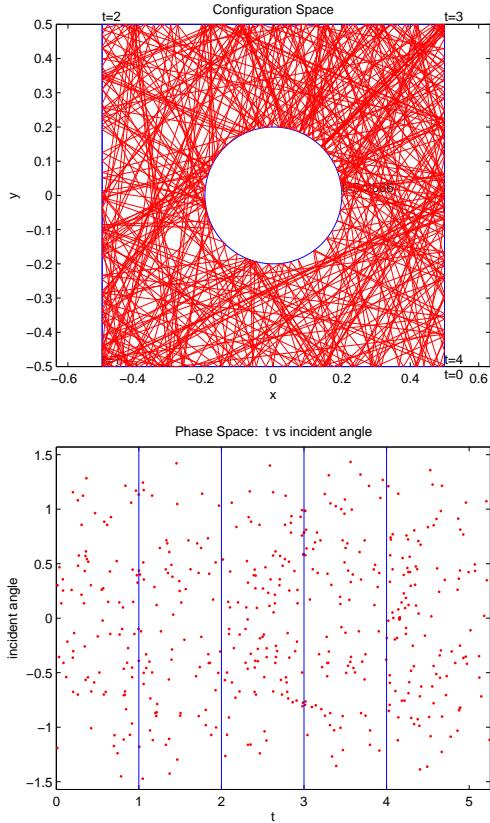


Figura 3.6: Uma trajetória típica em um bilhar de Sinai (dinâmica caótica) com seu respectivo espaços de fase.

(3) Bunimovich, assim como Sinai, também forneceu uma prova rigorosa que o bilhar estádio é ergódico [6, 7];

(4) Na verdade, tanto o bilhar de Sinai como o bilhar estádio possuem propriedades mais fortes do que apenas a ergodicidade⁴, ou seja, eles também são Sistemas mixing, K-Sistemas e Sistemas de Bernoulli

⁴Têm sistemas que apresentam graus de ergodicidade mais fortes do que outros.

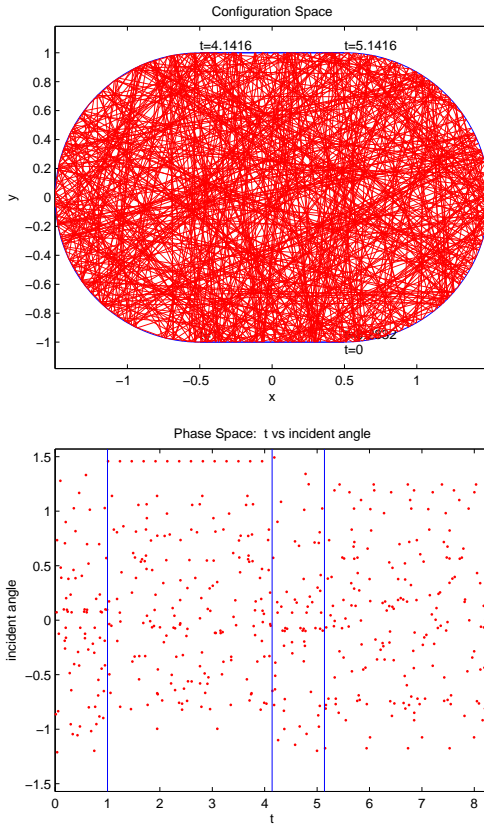


Figura 3.7: Uma trajetória típica em um bilhar em um bilhar estádio de Bunimovich (dinâmica caótica) com seu respectivos espaços de fase.

(temos que *Sistemas de Bernoulli* \Rightarrow *K-sistemas* \Rightarrow *Sistemas mixing* \Rightarrow *Sistemas ergódicos*), comentários sobre esses conceitos podem ser encontrados no apêndice B.

3.2 Bilhares Regulares

Um fato, já bem conhecido, na literatura de bilhares é o seguinte: *o espaço de configurações Q de um bilhar num círculo é continuamente folheado por círculos concêntricos em relação a sua fronteira ∂Q , o que implica que esse bilhar é completamente integrável.*

De outra forma, se o espaço de fases M (que pode ser visto como uma superfície ou uma variedade diferenciável) está folheado por curvas invariantes $\varphi = \text{constante}$, então o mapa T não pode ser ergódico. Um outro fato é que qualquer conjunto mensurável que é a união de curvas T -invariantes também será T -invariante.

Uma outra maneira para verificar a não ergodicidade de T é encontrar uma função não constante que seja invariante, ou seja, encontrar função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(r, \varphi) = \varphi$ suave tal que $F(Tx) = F(x)$, $\forall x \in M$ [37].

Definição 3.2.1. [37] *Se um sistema dinâmico suave $T : M \rightarrow M$ em uma variedade M ($\dim M = 2$) admite uma função F não constante suave e invariante sob T (ou T -invariante), então F é chamada uma integral primeira e T é dito ser integrável.*

Supondo $T : M \rightarrow M$ integrável, então toda superfície de nível $S_c = \{F(x) = c\}$ é T -invariante, isto é, M pode ser folheada por hipersuperfícies invariantes. No caso, que tivermos $\dim M = d$ e se $T : M \rightarrow M$ admitir $d - 1$ integrais primeiras independentes F_1, \dots, F_{d-1} , então M pode ser folheada por subvariedades T -invariantes de dimensão um (curvas) $\{F_1(x) = c_1, \dots, F_{d-1}(x) = c_{d-1}\}$, sendo $c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$ (veja a definição dada no capítulo 2 ou em [37]). A definição seguinte é a que mais nos interessa.

Definição 3.2.2. [37] *Se M pode ser folheado por subvariedades T -invariantes de dimensão um (curvas), então o mapa T é dito ser completamente integrável.*

Outra definição pertinente é a seguinte:

Definição 3.2.3. *Seja $\Gamma \subset Q$ uma curva em um bilhar $Q \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que Γ é uma cáustica⁵ do bilhar em Q se ela satisfaz o*

⁵Este termo é emprestado da Óptica Geométrica.

seguinte: se qualquer ligação de alguma órbita do bilhar for tangente a Γ , então todas as outras ligações desta mesma órbita também serão tangentes a Γ .

De acordo com os fatos acima, prova-se que o bilhar em um círculo é *completamente integrável*. Uma outra maneira de verificar, no caso do bilhar circular, que o mapa T é não ergódico é pelo cálculo direto dos expoentes de Lyapunov usando, para isso, a matriz derivada de T (observarmos que neste caso tanto o mapa T como a matriz derivada T são facilmente obtidas) detalhes podem ser visto em [37].

Existe uma afirmação mais geral, dada para bilhares em elipse, que fornecemos abaixo, cuja demonstração foi dada primeiramente por Birkhoff, veja a figura 3.8 para uma ilustração da dinâmica (integrável) deste sistema por meio do seu espaço de fases e do seu espaço de configuração.

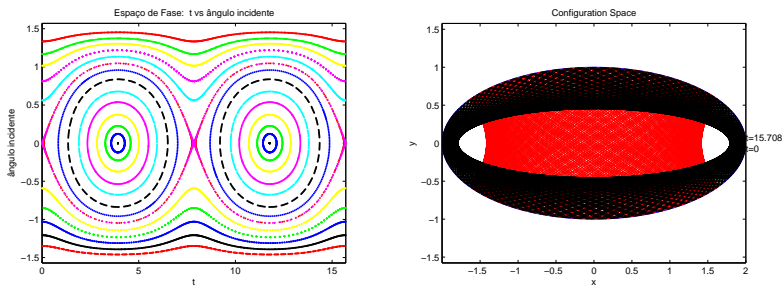


Figura 3.8: Ilustração da dinâmica regular da elipse.

Teorema 3.2.1. *O bilhar em uma elipse é completamente integrável.*

Demonstração: Ver [41, 42].

□

O próprio Birkhoff também conjecturou (e ainda continua uma questão em aberto) que: “*somente os bilhares em elipses são completamente integráveis entre todos os bilhares delimitados por curvas planas convexas e suaves*”.

Mais especificamente, o teorema anterior nos diz que o mapa do bilhar T em uma elipse é integrável, isto significa que existe uma função suave no seu espaço de fases, chamada integral que é invariante sob T . Esta afirmação pode ser verificada por meio de dois caminhos: um geométrico e outro analítico. Primeiramente considere uma elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.15)$$

no plano, com pontos focais em F_1 e F_2 . Vamos comentar apenas o caminho geométrico o analítico assim como outros detalhes, sobre este assunto, podem ser vistos na referência [41].

Teorema 3.2.2. *Uma trajetória do bilhar dentro da elipse sempre permanece tangente a uma cônica fixada (elipse ou hipérbole) confocal. Na verdade, tem-se no bilhar elíptico uma família de cáusticas, que consiste de elipses e hipérbolas confocais, veja a figura 3.8. Mais precisamente, se uma ligação da trajetória do bilhar não intercepta o segmento que liga os pontos F_1 e F_2 , então todas as outras ligações desta trajetória também não interceptarão o segmento F_1F_2 e assim todas essas ligações serão tangentes a uma mesma elipse com focos em F_1 e F_2 ; e se uma ligação de uma trajetória intercepta F_1F_2 , então todas as outras ligações desta trajetória interceptarão F_1F_2 e todas essas ligações serão tangentes a uma mesma hipérbole com focos em F_1 e F_2 .*

Demonstração: A prova, usa basicamente geometria elementar veja, por exemplo, [8, 41]. \square

Podemos descrever o espaço de fases do bilhar elíptico da seguinte maneira: ele é folheado por curvas invariantes do mapa do bilhar T . Temos que, cada curva representa uma família de ligações tangentes a uma cônica confocal fixada, estas curvas T -invariantes correspondem as cáusticas do bilhar elíptico. Temos ainda uma curva em forma de ∞ que corresponde a família de ligações passando pelos focos (ela também é chamada de “separatriz” das duas famílias de curvas invariantes principais) e cujos seus pontos de intersecção representam o eixo maior com duas orientações opostas que na verdade é uma trajetória de período 2. Outras trajetórias de período 2 é o eixo menor

representado pelos dois pontos centrais da região dentro da curva em forma de ∞ .

3.3 Bilhares Caóticos

Como já mencionamos os exemplos clássicos de bilhares caóticos são os Bilhares de Sinai (introduzido por Sinai) e o Estádio de Bunimovich (introduzido por Bunimovich), para esses casos foram dadas provas rigorosas desse tipo de dinâmica, como podem ser verificadas nas referências [5] para o bilhar de Sinai e [6, 7] para o bilhar estádio.

Esses bilhares ainda são fontes de constantes investigações o que tem proporcionado inúmeros artigos de pesquisa. O estudo e a prova da dinâmica caótica em bilhares é mais sutil e delicado.

A idéia da prova da ergodicidade (caoticidade) em bilhares se dá pela prova de algum tipo de *hiperbolicidade* (que intuitivamente significa a existência de uma sensibilidade em relação aos dados iniciais fornecidos para as trajetórias), cujo procedimento padrão para isso é o estudo dos expoentes de Lyapunov da transformação e o uso da chamada *Teoria de Pesin* [3].

O cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov de um sistema bilhar, quando for possível de ser realizado, nos dá uma maneira menos complicada de se obter a prova da caoticidade para o sistema em estudos, para essa situação citamos, por exemplo, o trabalho realizado no artigo [40].

Boas referências que podem ser usadas, como guias, nesse tipo de estudo são [3] (para um estudo mais simplificado) e o excelente livro de N. Chernov e R. Markarian [8] (para um estudo mais completo e detalhado).

3.4 Bilhar Cogumelo

Um outro resultado, já conhecido e de grande importância, afirma que *um sistema Hamiltoniano (não apenas bilhares) genérico⁶ não é*

⁶Genérico, neste caso, significa que o conjunto em questão é formado por uma intersecção contável de conjuntos abertos e densos e de acordo com o *teorema de Baire* [43], o conjunto em questão também é um conjunto denso.

nem caótico e nem integrável mas ambos [28], ou seja, sistemas completamente caóticos e sistemas completamente integráveis são raros.

A grande maioria dos sistemas Hamiltonianos tem dinâmica mista, isto é, ilhas de estabilidade (também conhecidas como ilhas KAM) encontram-se situadas em um “mar caótico” formado por uma ou várias componentes ergódicas (caóticas) cada uma ocupando um subconjunto de medida positiva (volume) no espaço de fases, como por exemplo, no famoso *mapa padrão* (ou *mapa de Chirikov-Taylor*) [44].

Este fato tem sido observado em vários experimentos computacionais (simulações computacionais), mas ainda não tínhamos provas rigorosas em sistemas dinâmicos “naturais” (por exemplo, os originados por equações diferenciais). No trabalho de Bunimovich [9] isto é observado e provado para uma das classes mais representativas de sistemas Hamiltonianos, a saber, os bilhares. Bunimovich introduz uma nova classe de bilhares chamada *Bilhar Cogumelo (Mushroom Billiard)* que tem a forma, no seu caso geral, de uma elipse justaposta a uma base retangular, veja a figura 3.9 para uma ilustração deste bilhar juntamente com a sua dinâmica. Ele também fornece neste trabalho, resultados e provas rigorosas que caracterizam a sua dinâmica. Apesar desta nova classe ser não-genérica ela é de grande relevância para a análise e para o estudo de tais dinâmicas coexistentes [9, 45, 46] e levanta a possibilidade de se provar rigorosamente para outros sistemas mais sofisticados, mas de mesma natureza, a coexistência dessas dinâmicas.

Na literatura disponível, sabe-se que, sistemas Hamiltonianos com dinâmica mista são famosos por apresentar grandes dificuldades de ser analisados rigorosamente, pois as ferramentas desenvolvidas para os sistemas integráveis e para os sistemas caóticos falham para os sistemas com dinâmica mista (essas falhas são observadas nas fronteiras entre essas duas regiões). Dificuldades também surgem nas investigações numéricas [47]. Desta forma, a nova classe de bilhares introduzida por Bunimovich é digna de grande mérito por elucidar e proporcionar um melhor entendimento dessa dinâmica mista, além de fornecer oportunidades para novas pesquisas, por exemplo, o estudo do bilhar cogumelo quântico.

Mais especificamente, em 2001, Leonid Bunimovich [9] apresentou uma nova classe de bilhares cuja sua forma é a idealização de um cogumelo (mushroom) como o conhecemos tridimensionalmente, mas

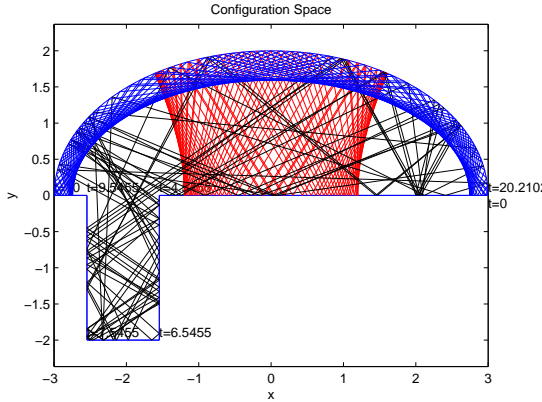


Figura 3.9: Uma representação genérica de um bilhar cogumelo de Bunimovich, juntamente com as suas trajetórias típicas: regulares (azul e vermelha) e caótica (preta) que ilustram sua dinâmica mista.

visto de perfil (em um plano).

Esses bilhares ficaram conhecidos como “Bilhares Cogumelos” (Mushroom Billiards) ou também chamados de “Bilhares de Bunimovich”. Do ponto de vista clássico, são objetos muito simples como todo bilhar, suas trajetórias correspondem a linhas retas que sofrem reflexão perfeita em sua fronteira. Uma de suas principais características (verificada para uma classe especial desses bilhares) é que seu espaço de fases é dividido em apenas duas regiões, uma completamente regular e a outra completamente caótica, sem nenhuma das hierarquias KAM, que estão presentes na grande maioria dos sistemas Hamiltonianos. Desta forma, essa nova classe de bilhares nos fornece exemplos de sistemas com dinâmica mista (dinâmicas regular e caótica coexistindo num mesmo espaço de fases), cuja geometria relativamente simples, tem proporcionado um estudo analítico mais rigoroso de sua dinâmica. Essa descoberta, tem tornado possível resolver questões delicadas sobre os sistemas dinâmicos que apresentam as ilhas de integrabilidade e o “mar de caos” coexistentes num mesmo espaço de fases [9, 46].

Sistemas Hamiltonianos como se sabe, podem exibir comporta-

mento regular ou caótico (veja o capítulo 2). Embora existam muitos exemplos de sistemas desses tipos, geralmente o espaço de fases de um sistema Hamiltoniano genérico é dividido em regiões com comportamento regular (as chamadas regiões de estabilidade ou ilhas KAM) e as regiões com comportamento caótico (os chamados “mar de caos”).

Esses sistemas ficaram conhecidos no meio científico, como *Sistemas Hamiltonianos com Espaço de Fases Dividido*. Tais comportamentos têm sido observados já algum tempo, tanto experimentalmente, como numericamente em uma grande variedade de sistemas, mas não existiam ainda exemplos claros e representativos, com provas rigorosas, de tais situações. O trabalho desenvolvido por Bunimovich fornece tais exemplos e as provas rigorosas [9]. Nesses exemplos (que na verdade formam uma nova classe), a coexistência de comportamentos diferentes é analisada completamente, isto é de grande importância, pois o estudo da Teoria do Caos necessita, devido em parte por sua complexidade, de exemplos ilustrativos e intuitivos para uma melhor compreensão dos diferentes comportamentos que um sistema dinâmico pode apresentar, e a partir daí tenta-se aplicar o conhecimento adquirido nestes casos particulares, em situações mais gerais e complexas e também na construção de uma Teoria do Caos mais sólida.

A dinâmica clássica dos bilhares de Bunimovich já é bem conhecida, mas continua sendo uma área muito ativa de estudos e investigações. Vamos fazer adiante uma revisão do estudo de sua dinâmica, para isso usamos como referências principais, os artigos: de L. A. Bunimovich [9] e o de M.A. Porter e S. Lansel [47].

Os bilhares de Bunimovich são construídos usando a “desfocalização”, que acreditamos (de acordo com Bunimovich) ser um mecanismo de geração de comportamento caótico (ou de hiperbolicidade), o exemplo padrão deste mecanismo, a saber, o estádio de Bunimovich é um caso particular destes bilhares. De fato, verifica-se para a família de bilhar cogumelo mais simples (neste caso a semi-elipse é substituída por um semi-círculo e admite-se uma simetria axial nos cogumelos), uma transição contínua entre o caso integrável (tendo o círculo como um caso extremo desta família de cogumelos) e o caso caótico (tendo o estádio como o outro caso extremo desta mesma família de cogumelos), uma ilustração desta transição pode ser visualizada na figura 3.10 (efetivamente estes casos extremos são dados

pele semi-círculo e pelo semi-estádio, mas como veremos na próxima subseção pode-se, de certa maneira, considerar o círculo e o estádio nesta análise).

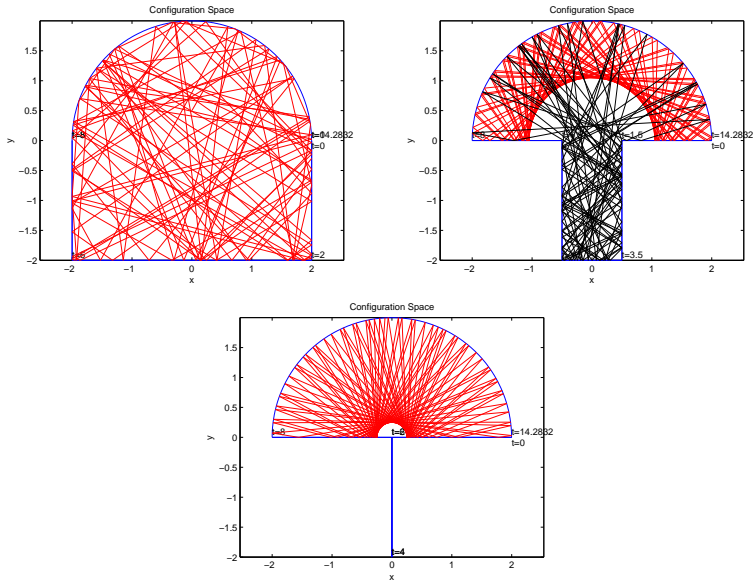


Figura 3.10: Ilustração da transição de um semi-estádio (dinâmica caótica) em um semi-círculo (dinâmica regular) por meio de uma seqüência (quando fazemos $r \rightarrow 0$, $0 \leq r \leq R$) de cogumelos (dinâmica mista) com o suporte retangular medindo $2r$ (sua base) variando de $2R$ (semi-estádio) para 0 (semi-círculo).

Observa-se ainda que o mecanismo da desfocalização tem sido considerado como o mecanismo básico para a geração de caos nos sistemas com dinâmica mista, em vez de mecanismos dispersivos (encontrado, por exemplo, no bilhar de Sinai), isso talvez seja natural, pois o mecanismo de desfocalização ocupa uma posição intermediária entre os sistemas com mecanismos dispersivos (caóticos) e os sistemas com mecanismos neutros (integráveis) [9]. Para os sistemas dispersivos as órbitas vizinhas divergem, para os sistemas integráveis a divergência e a convergência de suas órbitas são equilibradas e para os sistemas

com desfocalização a divergência das órbitas prevalecem (em média) sobre a convergência das mesmas [9].

Para o que segue usamos as definições, notações e resultados dados anteriormente.

Como dito antes os bilhares cogumelos podem ser construídos facilmente; pela justaposição de uma semi-elipse (que denotaremos por) S cuja região delimitada por ela será chamada *chapéu do cogumelo* denotado por H , com um retângulo (que denotaremos por) P cuja região delimitada por ele será chamada *pé ou suporte do cogumelo* e suprimimos a fronteira comum. O diâmetro de S será chamado *base do chapéu* H (observamos que a nomenclatura é a mesma adotada por Bunimovich).

Podemos inicialmente, por simplificação, considerar um semi-círculo em vez de uma semi-elipse e supor que esse cogumelo é axialmente simétrico, quando isso ocorrer, tais cogumelos serão chamados *cogumelos perfeitos*, veja a figura 3.11. Salientamos que tais simplificações ainda conservam toda a riqueza da dinâmica mista verificada no caso de um bilhar cogumelo genérico como pode ser visualizado na figura 3.10.

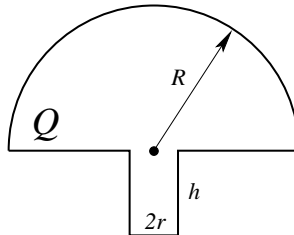


Figura 3.11: Ilustração de um cogumelo perfeito, o domínio Q é formado combinando o semi-círculo de raio R com um retângulo de altura h e largura $2r$.

Feito isso, vamos agora ao estudo da dinâmica do bilhar cogumelo. Seja $A_r \subset \mathcal{M}$ o conjunto de todos os pontos do espaço de fases tais que as órbitas do bilhar nunca deixam o chapéu do cogumelo. Verifica-se facilmente, que A_r é um subconjunto invariante em \mathcal{M} (em relação ao fluxo do bilhar $\{S^t\}$) de fato em A_r temos curvas invariantes do mesmo tipo das curvas invariantes de um bilhar num círculo.

O resultado principal provado por Bunimovich descreve a dinâmica do bilhar cogumelo e nos diz que o conjunto A_r possui medida positiva (volume) se r satisfaz a desigualdade $0 \leq r < R$ e a sua dinâmica é integrável, enquanto o seu conjunto complementar $\mathcal{M} \setminus A_r$ (isto é, o conjunto de todos os pontos do espaço de fases onde pelo menos uma órbita penetra no pé do cogumelo) também possui medida positiva para r em $0 < r \leq R$, mas neste caso a sua dinâmica é caótica, veja a figura 3.12 para uma visualização dessa dinâmica, formalmente temos:

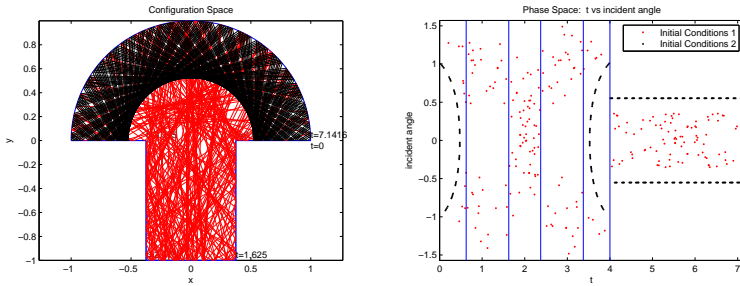


Figura 3.12: Ilustração da dinâmica de um bilhar cogumelo perfeito (espaço de configuração e espaço de fases, respectivamente).

Teorema 3.4.1. *Seja o fluxo no bilhar cogumelo perfeito e seja r tal que $0 < r < R$. Então:*

- (1) $\mu(A_r) > 0$ e $\mu(\mathcal{M} \setminus A_r) > 0$;
- (2) A projeção natural de A_r em Q é continuamente folheada por cáusticas que são semi-círculos concêntricos a S no chapéu do cogumelo com raios r' , $r \leq r' \leq R$;
- (3) A restrição do fluxo a $\mathcal{M} \setminus A_r$ é ergódica, hiperbólica, mixing e forma um sistema de Bernoulli.

Demonstração: Ver [9]. □

Ressaltamos uma ferramenta muito útil, da óptica geométrica, que é usada fortemente na demonstração do teorema acima (nos itens (1) e (2)) como também em outras demonstrações da teoria de bilhares [8]. Além disso, com o seu uso é possível verificar que a dinâmica do

bilhar em um semi-círculo é equivalente a dinâmica do bilhar em um círculo e, de forma análoga, para o bilhar em um semi-estádio em relação ao bilhar em um estádio.

Essa ferramenta chama-se *Truque de Construção de Imagem (Image Construction Trick (ICT))* cuja idéia é utilizar uma componente ∂Q_i da fronteira ∂Q dada por um segmento de reta, afim de construir uma imagem refletida como em um espelho, em relação à ∂Q_i . Por exemplo, em um semi-círculo usamos o seu diâmetro para a reflexão, assim as órbitas em um bilhar no semi-círculo podem ser vistas como sendo as órbitas de um bilhar em um círculo, ou seja, tornar-se possível estender as órbitas do semi-círculo, o que nos possibilita uma maneira de estudar e analisar a dinâmica do bilhar num semi-círculo como se fosse o bilhar num círculo, veja a figura 3.13.

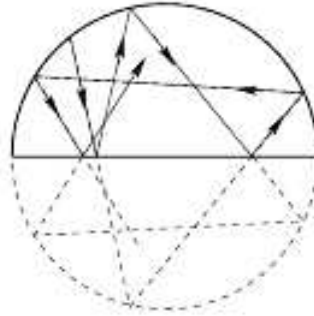


Figura 3.13: Técnica de construção de imagem.

Para o item (3) do teorema, em artigos anteriores [6, 7, 48] Bunimovich já tinha provado que, sob condições bem gerais, os bilhares limitados por arcos de círculos e segmentos de retas são hiperbólicos, ergódicos, sistemas mixing e K-sistemas, como as componentes de um bilhar cogumelo perfeito são segmentos retos e arcos de círculos, então o resultado segue. E devido a outros resultados gerais, que também já foram provados, resulta que esses sistemas, em particular o bilhar cogumelo perfeito, são de Bernoulli [49, 50]. Como os detalhes dessas provas, não são tão simples, isso nos levaria a ter que acrescentar muitos mais preliminares, resolvemos deste modo omiti-los para não

estender demasiadamente o nosso texto e por entender que tais detalhes fugiriam do espírito proposto para este texto, aos interessados sugerimos consultar as referências citadas.

Em seu trabalho Bunimovich também teve o mérito de fornecer e sugerir várias generalizações para o estudo do bilhar cogumelo, além de possíveis linhas de pesquisas entre as quais o estudo do bilhar cogumelo quântico, o que de fato aconteceu com o trabalho de Barnett e Betcke [51] em 2007. Faremos no capítulo (5) uma discussão sobre o estudo do *Bilhar Quântico* em geral, os detalhes específicos sobre o bilhar cogumelo quântico podem ser consultados na referência fornecida.

Capítulo 4

Recursos Computacionais

4.1 Simulação

Com o advento do computador e posteriormente com os constantes avanços de hardwares e softwares as simulações computacionais têm sido de grande auxílio no estudo e na investigação da dinâmica clássica dos sistemas bilhares.

Desta forma, as simulações computacionais de bilhares têm desempenhado um papel de destaque, tanto no processo ensino-aprendizagem, como no processo investigativo, o que tornou ambos processos interessantes e atrativos. Portanto, nossa meta neste capítulo é explorar esses recursos computacionais.

Essas simulações podem ser feitas de diversas maneiras, por exemplo, pelo uso de softwares matemáticos como o MATLAB ou MAPLE entre outros, mas também podem ser feitas por meio de programas desenvolvidos usando linguagens de programação como FORTRAN ou C entre outras.

Por simplicidade, e por atender os nossos objetivos, faremos uma sucinta discussão (na próxima seção) de um software desenvolvido

em MATLAB que se encontra disponibilizado (para fins educacionais e de pesquisa), juntamente com uma documentação de seu uso [52]. Salientamos que outros recursos computacionais também se encontram disponibilizados para esses fins, aos interessados sugerimos consultar, por exemplo, a referência [53].

4.2 Software

Nesta seção, temos como objetivo principal destacar o funcionamento do *Software Billiards* desenvolvido por Steven Lansel e por Mason A. Porter [52], enfatizando os seus recursos e as algumas de suas características que foram empregados neste texto.

Todavia não temos a pretensão de fazer um estudo completo sobre ele, pois nem todos os seus recursos foram usados neste texto e também, devido a existência de uma documentação já pronta para esse fim, que está disponível (juntamente com o software) em [52]. O Software Billiards é um *Graphical User Interface (GUI)* criado em MATLAB que simula eficientemente a dinâmica de um bilhar clássico, nos fornecendo uma importante e poderosa ferramenta computacional que pode ser utilizada para fins educacionais ou de pesquisa científica em diversas áreas do conhecimento (como Computação, Física e Matemática, etc).

O software tem sido utilizado e testado por vários pesquisadores, em diversas situações, que envolvem o estudo e a análise da dinâmica clássica de bilhares que possuam formas (geometria) das mais diversas, sendo que, o seu funcionamento é muito confiável para as “mesas de bilhares” com contornos formados por segmentos de reta e arcos elípticos. Em outras situações mais complexas esse funcionamento ainda não é tão confiável, mas pode ser aplicado desde que sejam tomados certos cuidados [52]. O uso desse software em nosso texto deve-se, essencialmente: a sua confiabilidade como ferramenta de ensino e de pesquisa; a sua facilidade de uso; por atender eficientemente nossos objetivos e ainda por sua generalidade em considerar vários tipos de mesas de bilhares, o que proporcionou uma boa economia de tempo, principalmente, em relação ao trabalho de programação.

4.2.1 Funcionamento do Programa

Resumidamente, o programa é uma ferramenta de simulação do bilhar clássico (um módulo) desenvolvido em MATLAB com uma GUI, ele inicia-se executando a palavra “billiard” na janela de comando do MATLAB¹ que faz abrir uma janela inicial.

Feito isso, pode-se fazer simulações com as diversas mesas de bilhares pré-programadas, como por exemplo: o bilhar em um círculo ou o bilhar em um estádio ou ainda o bilhar de Sinai ou entre as outras opções disponíveis. Pode-se também criar, para simulação, mesas de bilhares com outras configurações diferentes das pré-programadas. Ambas maneiras de se usar o programa são ilustradas em detalhes na referência [52], porém o funcionamento do programa é muito simples e não necessita, necessariamente, a consulta a essa referência.

Em ambos os casos acima, a simulação de fato será iniciada depois que o usuário fornecer os dados iniciais da partícula, ou seja, a posição inicial e a velocidade (ângulo) necessários para iniciar a trajetória da partícula ou de outra maneira especifica-se um ponto no espaço de fases da mesa de bilhar que foi escolhida. O programa permite essas duas formas de entradas de dados iniciais na janela que se abre. Inicialmente, também é fornecido a quantidade de iterações que se deseja executar na mesa de bilhar. Depois que finalizar todas iterações, uma nova janela irá aparecer em substituição a inicialmente aberta. Nessa nova janela, tem-se várias opções de consulta aos dados e as informações sobre a mesa de bilhar previamente escolhida, como por exemplo: o espaço de configuração da mesa com ou sem as trajetórias iteradas; algumas opções de espaços de fases; a possibilidade de salvar e exportar os dados gerados nessa simulação; a opção de gerar e gravar um filme (animação) do espaço de configuração e do espaço de fases, para uma dada condição inicial; a opção de fornecer mais iterações para serem executadas; a opção de fornecer uma nova condição inicial para a mesma mesa de bilhar, o que faz o programa retornar a janela inicialmente aberta; entre outras opções disponíveis [52].

Em relação a simulação em si, temos que, a cada colisão com a fronteira a posição e a direção são calculadas, sendo que a posição é

¹Salientamos que o software MATLAB é um software que requer uma licença para o seu uso.

descrita por uma parametrização do comprimento do arco da mesa e a direção é descrita por um ângulo (em radianos) medido com relação ao ângulo horizontal.

Neste texto, escolhida uma mesa de bilhar para análise, fizemos uso (no capítulo 3) de dois espaços em especial o espaço de configurações (que são as mesas de bilhares no plano) com e sem as trajetórias e do espaço de fases para essas mesas, vejam as próximas figuras a título de exemplos.

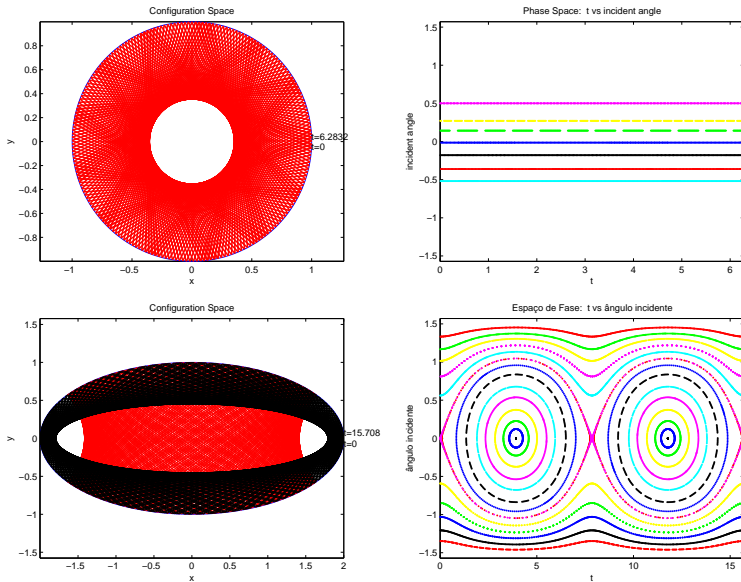


Figura 4.1: Simulações geradas (espaço de configuração com trajetórias e espaço de fases) por meio do software Billiards para o caso de bilhares regulares conhecidos: bilhar circular (parte superior) e bilhar elíptico (parte inferior), respectivamente.

No espaço de configuração (a mesa de bilhar com a sua fronteira), são registrados os segmentos de reta, cuja reunião de todos fornece a trajetória da partícula, ou seja, o fluxo do bilhar. O espaço de fases é obtido usando o comprimento da fronteira do bilhar que foi fornecido. As linhas verticais que ocasionalmente aparecem, são os registros das

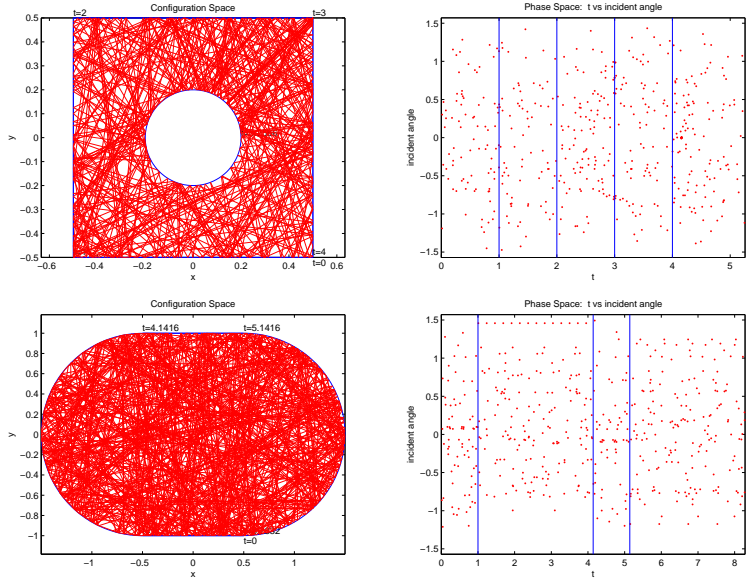


Figura 4.2: Simulação para o caso de bilhares caóticos conhecidos: bilhar de Sinai e bilhar Estádio de Bunimovich, respectivamente.

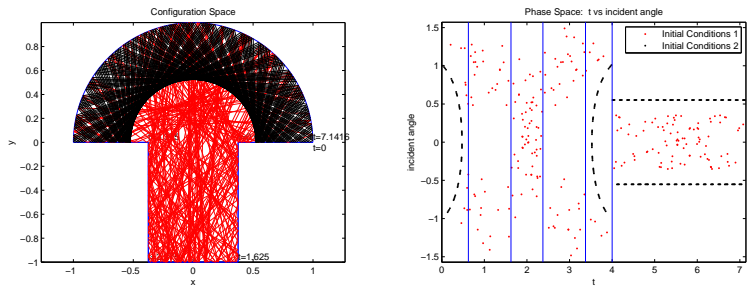


Figura 4.3: Ilustração da dinâmica mista de um bilhar cogumelo (espaço de configuração e espaço de fases, respectivamente) usando o software Billiards.

justaposições dos segmentos retos ou dos arcos elípticos, ou quando

essas partes diferentes estão presentes na mesa de bilhar. Para mais detalhes sobre o software, como também outras informações sobre a sua fundamentação de funcionamento podem ser consultados na documentação em [52].

Capítulo 5

Aplicação

Neste capítulo temos como objetivo exemplificar uma das principais aplicações recentes de bilhares numa área de grande interesse em pesquisa atual. Salientamos que existem inúmeras aplicações dos sistemas bilhares, porém daremos um destaque especial ao chamado *Bilhar Quântico* que é o sistema correspondente do *Bilhar Clássico* na Mecânica Quântica.

Durante a década de 1970, surgiram estudos pioneiros que interligaram as áreas de *Caos Clássico* e *Mecânica Quântica*, veja por exemplo [54] que é uma das referências clássicas sobre o assunto. Posteriormente, o estudo quântico de sistemas cujos análogos clássicos são caóticos, também chamado de *Caos Quântico*¹, proporcionou uma subárea comum muito rica em problemas físicos e matemáticos de grande relevância, tanto teórica, como experimental.

Assim como no estudo do caos clássico, o uso do computador tem tido grande importância no estudo do caos quântico, por exemplo, na resolução numérica de equações diferenciais parciais e também na análise, por meio de estudos estatísticos e de simulações computacionais dos resultados obtidos. Efetivamente, o uso de recursos computacionais tornou-se quase obrigatório para o estudo e o desenvolvimento da pesquisa atual na área de caos quântico.

¹Existe uma certa controvérsia em usar esta terminologia entre alguns pesquisadores; alguns preferem a terminologia “*caologia quântica*” não discutiremos sobre essa questão, veja por exemplo [55, 56].

Como dissemos podemos encontrar inúmeras aplicações, sejam elas teóricas ou experimentais, envolvendo os sistemas bilhares. Por exemplo, o estudo das dinâmicas desordenadas em um bilhar está diretamente relacionado com a *Hipótese Ergódica* (formulada pelo físico alemão Boltzmann), veja-se a referência [3]. Por outro lado os bilhares, inicialmente, tiveram grande importância teórica como modelos em problemas de *Mecânica Clássica*. Essas diversas aplicações, tanto teóricas, como experimentais, podem ser encontradas em várias situações veja, por exemplo, as referências fornecidas.

No caso dos bilhares quânticos, também estão surgindo importantes aplicações. Por exemplo, eles têm sido implementados experimentalmente usando cavidades reflexivas de microondas, átomos frios, pontos quânticos, nos sistemas físicos conhecidos como sistemas mesoscópicos entre outras situações (uma boa referência sobre tais aplicações é [57]).

5.1 Bilhar Quântico

O *Bilhar Quântico*, ou seja, o problema do bilhar clássico do ponto de vista quântico é mais sutil e complexo. Ele tem sido um paradigma para área de caos quântico e seus estudos são ainda recentes, sendo que, para certos bilhares, a dinâmica quântica não é tão conhecida como a dinâmica clássica, isto se deve principalmente à complexidade matemática necessária para tratar o problema quântico associado.

Desta forma, faremos um estudo mais ilustrativo e intuitivo procurando explorar as propriedades físicas e as relações com a dinâmica clássica sem nos preocupar com maiores detalhes formais, pois do contrário seria necessário fornecer mais tópicos preliminares o que estenderia muito o nosso texto, os detalhes mais aprofundados de tais estudos podem se consultados nas referências que serão citadas.

Muito do que tem sido feito nessa área de pesquisa se resume: a estudos numéricos, simulações computacionais e análises estatísticas. Esse campo de pesquisa ainda carece de uma teoria matemática completa, sendo assim, temos ainda muitas questões em aberto, o que proporciona um ambiente fértil para novas pesquisas. Muitos dos crescentes avanços estão sendo possíveis graças aos inúmeros experimentos físicos (pois os bilhares também podem ser abordados experimen-

talmente veja-se, por exemplo, as referências [45, 46]); como também pelas diversas simulações numéricas computacionais que estão sendo feitas por diversos grupos de pesquisa entre os quais destacamos, os da referência [58].

Desta forma, podemos dizer, com certeza, que, tanto para o caso clássico como para o caso quântico de bilhares, os estudos computacionais e numéricos são essenciais.

Para tratar o problema do bilhar quântico, procuram-se as soluções estacionárias (independentes do tempo) da *equação de Schrödinger*², que é equivalente ao estudo do problema de determinação dos autovalores e dos autovetores da *equação Helmholtz* no interior do domínio do bilhar e com certas condições de fronteira, como por exemplo as condições de Dirichlet [57]. Adiantamos que a resolução analítica dessa equação só é possível para domínios muito simples, por exemplo, para o bilhar retangular (veja o exemplo 5.1.1) [59]. Em geral, não se obtém as soluções analíticas, conseqüentemente os métodos numéricos têm sido usados extensivamente para os cálculos dos autovalores e das auto-funções por meios computacionais [51], o que continua sendo uma tarefa difícil de ser feita, pois isso dependerá muito da complexidade da forma do bilhar quando se faz a implementação computacional.

Salientamos que os comportamentos dinâmicos dos bilhares clássicos são diretamente refletidos nas propriedades dos sistemas quânticos correspondentes, por meio de *Estatísticas de Autovalores* ou nas *Estruturas das Autofunções* obtidas a partir dos dados provenientes da resolução da equação de Helmholtz (5.21), que consiste no análogo quântico para o bilhar clássico.

Na verdade, uma questão fundamental da área de caos quântico é verificar a influência das propriedades dinâmicas clássicas subjacentes a partir do comportamento estatístico dos autovalores de (5.21) e também dos valores obtidos pelas autofunções associadas.

Tem sido conjecturado e verificado numericamente que sistemas completamente caóticos podem ter suas características descritas por meio de estatísticas de *Matrizes Aleatórias*, quando são obedecidas simetrias convenientes [60], enquanto as suas autofunções podem ser

²A equação que descreve a dinâmica quântica de uma ou várias partículas, veja o apêndice C.

descritas usando o modelo de sobreposição de ondas aleatórias dado por Berry [61]. Para sistemas integráveis, espera-se que os níveis de energia estatísticos possam ser descritos por meio de processos aleatórios de Poisson [62], enquanto as autofunções são bem descritas pela quantização de toros [61]. E para os sistemas de dinâmica mista a situação é mais complicada, mas Berry e Robnik [63] baseado na conjectura de Percival [64] propuseram uma expressão para uma distribuição (conhecida como distribuição de Berry-Robnik) em termos de frações das regiões regulares clássicas presentes no espaço de fases (supondo que apenas uma região caótica predomina no espaço de fases).

Portanto, a investigação das estatísticas espectrais (ou estatísticas de autovalores) juntamente com a investigação da estrutura das autofunções, na área de caos quântico, têm tido uma grande relevância e têm sido uma de suas principais linhas de pesquisa.

5.1.1 Teoria de Matrizes Aleatórias

Faremos uma curta discussão sobre a *Teoria de Matrizes Aleatórias* (*Random Matrices Theory*), que teve início por volta dos anos 1950 com o físico E. Wigner em seus estudos estatísticos dos níveis de energia de núcleos de átomos pesados. Seguiremos de perto as seguintes referências [57, 65, 66, 67].

Em seus estudos, Wigner descobriu que as estatísticas das flutuações dos níveis de energia desses átomos pesados concordavam com as estatísticas das flutuações da densidade de autovalores de certas matrizes, cujos seus elementos eram gerados aleatoriamente de acordo com uma distribuição gaussiana. Temos assim, os chamados *Ensemble Gaussiano de Matrizes Aleatórias*. Dyson (outro físico que também é considerado um dos criadores dessa teoria) demonstrou a existência de três classes universais de matrizes aleatórias obtidas a partir da equação de Schrödinger padrão, sendo que, para classificar um sistema em uma dessas classes se faz necessário conhecer as suas propriedades fundamentais de simetria.

Uma das quantidades estatísticas mais importantes nesse estudo é a distribuição dos espaçamentos entre os níveis vizinhos, pois acredita-se ter um caráter universal. Temos que os espaçamentos entre os níveis vizinhos de certos espectros (como, por exemplo, os obtidos dos bil-

hares integráveis) seguem a distribuição de Poisson, ou seja,

$$P(s) = e^{-s}, \quad (5.1)$$

que está normalizada e renormalizada para um espaçamento médio unitário. Neste caso, não temos repulsão entre os níveis. Por outro lado, outros espectros (como, por exemplo, os obtidos dos bilhares caóticos) estão sujeitos à distribuição de Wigner, ou seja,

$$P(s) = C s^\beta e^{-\alpha s^2}, \quad (5.2)$$

sendo $\beta > 0$, C uma constante de normalização, α fixado supondo que o espaçamento médio seja unitário e β caracterizando os três ensembles gaussianos existentes (a saber, *Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE)*, *Ensemble Unitário Gaussiano (GUE)* e *Ensemble Simplético Gaussiano (GSE)*). Os valores de β estão relacionados com o tipo de simetria presente no sistema, por exemplo, para o GOE temos $\beta = 1$, para o GUE temos $\beta = 2$ e para o GSE temos $\beta = 4$. Nestes casos, temos repulsão dos níveis energia.

Como se sabe, as distribuições dos espaçamentos nas situações dos ensembles GOE, GUE e GSE têm grande importância no estudo do caos quântico. Detalhes sobre a construção desse ensembles podem ser encontrados em [66, 67] onde são feitas construções para o caso de matrizes 2×2 de uma forma didática. Daremos a seguir uma visão mais geral, porém resumida de uma dessas construções.

Simetrias

Podemos dizer que *Simetrias* é um dos conceitos de grande serventia em Física. Se todas as simetrias de um dado sistema forem conhecidas, então o sistema pode ser qualitativamente compreendido, no seguinte sentido, a sua solução explícita pode não ser conhecida, mas mesmo assim características fundamentais do sistema serão conhecidas. Em mecânica clássica, as simetrias estão associadas com as constantes de movimento. Na mecânica quântica toda simetria dará origem a um novo número quântico. Se o operador Hamiltoniano \mathcal{H} não depende explicitamente do tempo t , então a equação de Schrödinger dependente do tempo escreve-se,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \quad (5.3)$$

que pode ser separada (por meio do método de separação de variáveis [68]) com o uso do “ansatz”

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right), \quad (5.4)$$

tal que $\psi_n(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger estacionária

$$\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n. \quad (5.5)$$

Se simetrias forem conhecidas, o sistema pode ser simplificado. Para isso, expandimos as autofunções $\psi_n(x)$ em um conjunto de funções base $\phi_m(x)$, ou seja,

$$\psi_n = \sum_m a_{nm} \phi_m(x), \quad (5.6)$$

tal que

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle := \int \phi_n^*(x) \phi_m(x) dx = \delta_{nm}. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.6) na equação (5.5) e usando (5.7), obtemos a representação matricial

$$\sum_m H_{nm} a_m = E_n a_n, \quad (5.8)$$

sendo H_{nm} os elementos da matriz de \mathcal{H} na base ϕ_m dados por:

$$H_{nm} = \langle \phi_n, \mathcal{H}\phi_m \rangle = \int \phi_n^*(x) \mathcal{H}\phi_m(x) dx. \quad (5.9)$$

Portanto, o problema de resolver a equação de Schrödinger pode ser reduzido ao problema de diagonalização da matriz $H = (H_{nm})$. Assim, pode-se fazer o estudo das simetrias do sistema.

Resumidamente, em relação as matrizes hamiltonianas desses sistemas, temos que as matrizes do GOE possuem invariâncias por reversão temporal e rotacional, verificadas experimentalmente. Neste caso, as matrizes são simétricas (sob a ação de grupos de transformações ortogonais) e seus elementos são números reais. As matrizes do GSE possuem invariância por reversão temporal, mas não por invariância rotacional, verificadas experimentalmente. Neste caso,

as matrizes (que são invariantes sob ação de grupos de transformações simpléticas) têm como elementos quatérnios reais. As matrizes do GUE não possuem invariância por reversão temporal, verificada experimentalmente e ainda não foi verificado se há ou não invariância rotacional. Neste caso, as matrizes (que são invariantes sob a ação de grupos de transformações unitárias) são hermitianas complexas.

Ensembles Gaussianos

Como a distribuição de Wigner para espaçamentos vizinhos próximos é observada em uma grande variedade de sistemas, temos que na teoria de matrizes aleatórias os detalhes das interações de um sistema não são relevantes para o estudo das propriedades de flutuações de seu espectro, bastando para isso conhecer a suas propriedades de simetria. Por este motivo substituímos o Hamiltoniano por uma matriz cujo seus elementos são escolhidos aleatoriamente, mas não com completa liberdade. Eles devem obedecer a classe de universalidade do Hamiltoniano que queremos representar.

Exemplificando, para a classe ortogonal o Hamiltoniano pode ser representado por uma matriz real simétrica, portanto para uma matriz de dimensão N temos $N(N + 1)/2$ elementos que são independentes. Num sistema completamente caótico qualquer conjunto de funções base deve ser, a priori, tão bom como qualquer outro. Vamos então obter a distribuição de probabilidade dos elementos da matriz, que nos permitirá saber como gerar uma dessas matrizes.

A função de probabilidade dos elementos da matriz, ou seja, $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$ não pode depender das funções base usada. Isto nos fornece a propriedade de invariância

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H'_{11}, \dots, H'_{NN}) \quad (5.10)$$

sendo H' obtida de H por uma transformação ortogonal $H' = OHO^T$ tal que $OO^T = I_d$. Isso reduz consideravelmente o número de possibilidades para a forma de $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$. As funções de H_{nm} invariantes sob transformações ortogonais só podem depender dos traços de potências de H , ou seja,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = f[\text{Tr}(H), \text{Tr}(H^2), \dots]. \quad (5.11)$$

Exigimos também que os elementos da matriz não estão correlacionados, ou seja,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H_{11})p(H_{12}) \cdots p(H_{NN}). \quad (5.12)$$

Desta forma, a única maneira funcional para $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$ que satisfaz as duas condições anteriores é dada por

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = C \exp[-BTr(H) - ATr(H^2)]. \quad (5.13)$$

Considerando $B = 0$, sem perda de generalidade (pois sempre podemos deslocar a energia média, $Tr(H)/N$, para zero). Pode-se encontrar as constantes usando a condição de normalização

$$\int p(H_{11}, \dots, H_{NN}) dH_{11} \cdots dH_{NN} = 1. \quad (5.14)$$

Para o caso ortogonal temos,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp\left[-A \sum_{n,m} H_{nm}^2\right]. \quad (5.15)$$

A constante A pode ser expressa em termos da variação dos elementos diagonais da matriz,

$$\langle H_{nn}^2 \rangle = \frac{1}{2A}, \quad (5.16)$$

e para os elementos não diagonais temos

$$\langle H_{nm}^2 \rangle = \frac{1}{4A}. \quad (5.17)$$

Podemos concluir que o conjunto de todas as matrizes aleatórias, com elementos matriciais satisfazendo a distribuição (5.15) definem o GOE. Analogamente, obtemos as distribuições que definem o GUE e GSE, para isso exigimos que essas sejam invariantes sob transformações unitárias e transformações simpléticas, respectivamente.

As expressões são:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)} \times \exp\left[-A \sum_{n,m} [(H_R)_{nm}^2 + (H_I)_{nm}^2]\right]. \quad (5.18)$$

para o GUE, sendo $(H_R)_{nm}$ e $(H_I)_{nm}$ as partes real e imaginária de H_{nm} , respectivamente.

E para o GSE,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{2N(N-1)} \times \exp\left[-A \sum_{n,m} [(H_0)_{nm}^2 + (H_x)_{nm}^2 + (H_y)_{nm}^2 + (H_z)_{nm}^2]\right]. \quad (5.19)$$

sendo $(H_0)_{nm}$, $(H_x)_{nm}$, $(H_y)_{nm}$ e $(H_z)_{nm}$ as componentes quarteniônicas de H_{nm} , [57].

Distribuição de Autovalores

As funções de distribuição dos elementos da matriz dos Ensembles Gaussianos, dadas acima, não permitem uma comparação direta com os dados experimentais, uma vez que só conhecemos os autovalores e conseqüentemente o espectro de energia. Todavia, tem-se a distribuição dos autovalores que possui um interesse mais prático e o seu cálculo pode ser feito a partir das funções obtidas acima e essas expressões resultantes para cada uma dos três ensembles podem ser agrupadas numa única fórmula, a saber,

$$P(E_1, \dots, E_N) = cte \prod_{n>m}^{1..N} |E_n - E_m|^\beta \exp\left(-A \sum_n E_n^2\right), \quad (5.20)$$

sendo β um índice da classe de universalidade. Temos $\beta = 1$ para GOE, $\beta = 2$ para GUE e $\beta = 4$ para GSE. Para $\beta = 0$ os autovalores não estão correlacionados e tem-se o *Ensemble de Poisson*. Além disso, nesta expressão pode-se observar o comportamento conhecido como repulsão dos níveis de energia [57].

Para mais detalhes, sobre esta teoria e suas aplicações, sugerimos o excelente livro de Stöckmann [57].

5.1.2 Formulação Matemática

O problema do bilhar, correspondente, na Mecânica Quântica é dado matematicamente pelo problema espectral do Laplaciano em um domí-

nio compacto e conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com condições de fronteira homogêneas de Dirichlet, ou seja, para tratar o bilhar quântico é necessário encontrar as soluções estacionárias da equação de Schrödinger, que se reduz à determinação dos autovalores e autovetores da equação de Helmholtz ([10, 38, 39, 51, 54, 57] entre outras referências). Assim, tomando condições de Dirichlet e unidades tais que $\hbar = 2m = 1$ resulta

$$-\Delta\phi_n(\mathbf{q}) = E_n\phi_n(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \Omega \quad (5.21)$$

$$\phi_n(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} \in \partial\Omega \quad (5.22)$$

sendo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ o operador de Laplace em duas dimensões.

Lembramos (veja o apêndice C) que na representação de Schrödinger o estado de uma partícula é descrita no espaço de configurações Ω por uma função de onda $\phi \in L^2(\Omega)$, onde $L^2(\Omega)$ é um *espaço de Hilbert* das funções com quadrado integráveis em Ω ([69]) e a interpretação de ϕ é dada por

$$\int_D |\phi(\mathbf{q})|^2 d^2\mathbf{q} \quad (5.23)$$

que é a probabilidade de se achar a partícula no interior de um domínio $D \subseteq \Omega$ [70, 71].

Apenas para alguns domínios muito simples é possível resolver analiticamente a equação (5.21) com (5.22); em geral, encontrar as soluções analíticas para esse problema ou é muito complicado ou praticamente impossível.

Exemplo 5.1.1. *Para uma região retangular,*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \quad (5.24)$$

usando o Método de Separação de Variáveis [68] temos que as autofunções (não normalizadas) são dadas por

$$u_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.25)$$

com os autovalores associados dados por

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (5.26)$$

com $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercício 5.1.1. *Preencha os detalhes do exemplo anterior.*

Exemplo 5.1.2. *Para uma região circular de raio a , temos que as autofunções em coordenadas polares, são dadas por*

$$u_{m,n}(r, \theta) = J_m \left(\frac{j_{mn} r}{a} \right) [A \cos m\theta + B \sin m\theta], \quad (5.27)$$

sendo j_{mn} o n -ésimo zero da função de Bessel J_m de ordem m . Com autovalores associados dados por

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{j_{mn}}{a} \right)^2, \quad (5.28)$$

com $m = 0, 1, \dots$ e $n = 1, 2, \dots$.

Desta forma, é necessário recorrer aos métodos de aproximação (por exemplo o *Método de Galerkin*) ou aos métodos numéricos (por exemplo o *Método de Elementos Finitos*), a fim de lidar com tais problemas que não podem ser resolvidos analiticamente, em particular, os métodos numéricos têm sido usados extensivamente neste processo de cálculo dos autovalores e das autofunções e a partir daí simulações numéricas têm sido realizadas e usadas para a análise desses problemas e também para a verificação e testes de conjecturas como as citadas anteriormente.

Na literatura científica disponível, por exemplo [38, 51], existe alguns métodos numéricos que vem se destacando na resolução do problema do bilhar quântico, como o *Método de Solução Particular* que foi empregado recentemente para tratar o problema do bilhar cogumelo quântico [51].

Observação 5.1.1. (1) *Gostaríamos de registrar que vários experimentos têm se mostrado de grande utilidade nesse tipo de estudo, como por exemplo, os experimentos sonoros realizados inicialmente por Chladni no século XVIII [57] ou por meio dos recentes experimentos que faz uso de cavidades de microondas [72];*

(2) *Salientamos de novo que no caso do bilhar quântico, aborda-se e tenta-se responder as seguintes questões: (i) A Conjectura de Percival que propõem o seguinte, no limite semiclássico, correspondente as*

autofunções ϕ_n com $n \gg 1$, o espectro de energias de sistemas, com os seus análogos clássicos misturados, sempre apresentam duas partes qualitativamente distintas: uma regular e a outra irregular [64]; (ii) A Distribuição de Berry-Robnik que faz previsões sobre a distribuição do espaçamento dos níveis de energia (de acordo com a conjectura de Percival) [63] e (iii) A Relação com a Teoria de Matrizes Aleatórias que são usadas para descrever, estatisticamente, propriedades dinâmicas de sistemas físicos como, por exemplo, os bilhares quânticos [54].

Vamos enunciar o teorema de Schnirelman [73, 74] que é considerado um resultado matemático básico na teoria de caos quântico.

Teorema 5.1.1 (Schnirelman). *Suponha que o fluxo do bilhar em um domínio limitado Ω com fronteira $\partial\Omega$ seja ergódico. Seja $\{\phi_n\}$ uma seqüência de autofunções normalizadas do Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet (ou Neumann), tais que*

$$-\Delta\phi_n = \lambda_n^2\phi_n, \quad \phi_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} |\phi_n(x)|^2 dx = 1. \quad (5.29)$$

Então existe uma seqüência $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ de densidade igual a 1, i.e., $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j}{j} = 1$, tal que para todo subconjunto aberto $V \subset \Omega$ tem-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_V |\phi_{n_j}(x)|^2 dx = \frac{\text{area}(V)}{\text{area}(\Omega)}. \quad (5.30)$$

Demonstração: Ver [73] □

Este teorema afirma que quase todas as autofunções não podem, de maneira alguma, admitir qualquer concentração, ou seja, elas têm que ser uniformemente distribuídas sobre a mesa de bilhar Ω .

5.1.3 Estatísticas Espectrais

Na análise do espectro uma quantidade de grande relevância é a *densidade de estados* $d(E)$ definida por

$$\int_{E_a}^{E_b} d(E) dE \quad (5.31)$$

que fornece o número de estados com níveis de energias entre E_a e E_b [10]. Feito isso, obtemos uma média espectral chamada de *densidade espectral média* $\langle d(E) \rangle$ que provém de

$$d(E) \equiv \sum_n \delta(E - E_n) \quad (5.32)$$

sendo δ o delta de Dirac, e é dada semiclassicamente pela regra de Weyl [10],

$$\langle d(E) \rangle = \frac{d\Xi(E)/dE}{(2\pi\hbar)^N} \quad (5.33)$$

sendo Ξ o volume do espaço de fases clássico correspondente as energias do sistema menores ou iguais a um certo valor E dado por

$$\Xi(E) = \int_{(H \leq E)} d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p},$$

ou seja,

$$d\Xi/dE = \int \delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p}, \quad (5.34)$$

sendo H a Hamiltoniana clássica do sistema.

Pode-se dizer que a regra de Weyl equivale a idéia de *um estado quântico por volume* $(2\pi\hbar)^N$ do espaço de fases. Apesar de (5.33) não dizer nada sobre a caoticidade quântica do sistema, pode-se obter duas informações importantes dela. A primeira nos diz sobre o nível de espaçamento médio que é da ordem: $\langle d(E) \rangle^{-1} \sim (2\pi\hbar)^N$; e a segunda é uma regra de quantização aproximada que pode ser obtida integrando $d(E)$ que é chamada *escadaria espectral* (spectral staircase) ou *densidade cumulativa* (às vezes também chamada função de contagem de autovalores) e é dada por

$$N(E) := \sum_n \Theta(E - E_n) = \int_{-\infty}^E d(E) dE \quad (5.35)$$

que fornece o número de estados com energias menores do que um valor E , sendo Θ a função degrau unitária [10, 75]. Temos então (veja [75]) a regra que expressa a idéia que a curva suave da escadaria média deve interceptar as metades dos degraus em média, dada por:

$$\overline{N(E)} = \Xi(E)/(2\pi\hbar)^N. \quad (5.36)$$

Para bilhares bidimensionais, $\overline{N(E)}$ pode ser dado pela equação de Weyl

$$\overline{N(E)} = \frac{A}{4\pi}E - \frac{L}{4\pi}\sqrt{E} + C, \quad (5.37)$$

sendo A a área do bilhar, L o seu perímetro e C uma constante que depende do tipo de bilhar, esta equação pode ser usada para normalizar as energias e então aplicar isso para calcular as distribuições $P(s)$ (veja a discussão abaixo sobre $P(s)$) de modo independente do sistema considerado. Além disso, um outro fato útil que merece registro é que tanto $N(E)$ como $d(E)$ podem ser decompostas em duas partes: uma suave que é $\overline{N(E)}$ e $\overline{d(E)}$ (ou $\langle d(E) \rangle$), respectivamente e uma outra oscilante dada por $N_{osc}(E) := N(E) - \overline{N(E)}$ e $d_{osc}(E) := d(E) - \overline{d(E)}$, respectivamente [38].

Para os sistemas quânticos limitados com N graus de liberdade, o número de níveis de energia em qualquer pequeno intervalo $[E, E + \Delta E]$ diverge como $\Delta E/\hbar^N$ no limite semiclássico quando $\hbar \rightarrow 0$. Uma outra quantidade estatística particularmente útil, que pode ser definida, é a *distribuição de probabilidades $P(s)$ dos espaçamentos de níveis de energia* (obtido do histograma dos espaçamentos) $s_n := E_{n+1} - E_n$, sendo E_{n+1} e E_n dois níveis de energias adjacentes (os E_n são rescalonados de modo que seu espaçamento médio seja unitário). Assim, podemos considerar $P(s)$ como uma quantidade que caracteriza estatisticamente o espectro semiclássico na energia E . Uma questão natural que surge é como $P(s)$ está relacionado com o movimento clássico na superfície de energia E [63]?

Com o cálculo das estatísticas espectrais para as seqüências de níveis de energia, do sistemas Hamiltonianos com limites clássicos, obtém-se experimentalmente fatos interessantes.

Para o caso de sistemas quânticos, no regime semiclássico, onde a Hamiltoniana produz um sistema clássico integrável Berry e Tabor [62] verificou que $P(s)$ é universalmente a mesma e é dada por uma *distribuição de Poisson*, ou seja,

$$P(s) = \exp(-s). \quad (5.38)$$

Visto que $P(s) \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow 0$ este comportamento é chamado de *atração de nível*. Por outro lado, quando a Hamiltoniana produz um sistema clássico caótico, o resultado para a distribuição de

espaçamento de nível provém do uso de Matrizes Aleatórias (Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE)), que fornece uma boa aproximação, isso foi conjecturado³ por Bohigas, Giannoni e Schmidt [60] e deve ser dada por uma *distribuição de Wigner*, por exemplo, temos

$$P(s) \approx \frac{\pi}{2} s \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (5.39)$$

Agora, neste caso, $P(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$ este comportamento é chamado de *repulsão de nível*, veja a figura 3 do artigo [39] onde é feito tais estudos para $P(s)$ no caso do bilhar em um círculo e em uma cardióide, respectivamente. Pode-se observar, neste trabalho realizado, boas concordâncias entre os resultados obtidos e as distribuições esperadas.

Um estudo mais detalhado de toda a discussão apresentada acima, referente as propriedades estatísticas do espectro, pode ser encontrado em [10, 57, 75] ou ainda no livro de Ozorio de Almeida [76].

Para os sistemas com dinâmica mista (caso intermediário), ou seja, quando o espaço de fases é misturado no sentido que algumas órbitas com energia E envolvem-se regularmente em torno de um toro N -dimensional e outras exploram regiões $(2N - 1)$ -dimensional caoticamente, os casos acima não se aplicam.

Contudo, Berry e Robnik [63] propuseram (baseado na conjectura de Percival) uma expressão $P(s)$, correspondente para esses sistemas. Ela nos diz que *na quantização de sistemas com dinâmica mista (por exemplo, o bilhar cogumelo) as contribuições das regiões integráveis e caóticas para $P(s)$ devem sobrepor em uma forma não correlacionada no limite semiclássico*, isto é, uma sobreposição das distribuições de Poisson (integrável) e de Wigner (caótica) com as suas contribuições relativas determinadas pelos números de volumes relativos do espaço de fases das regiões regulares e caóticas existentes. Por exemplo, suponha que o espaço de fases clássico possua apenas uma região regular e uma região caótica com densidades ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Neste caso,

$$P(s) = \left[\rho_1^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_2 s\right) + \left(2\rho_1 \rho_2 + \frac{\pi}{2} \rho_2^3 s\right) \exp\left(-\frac{\pi}{4} \rho_2^2 s^2\right) \right] \exp(-\rho_1 s). \quad (5.40)$$

³Outras situações são analisadas em [60].

sendo $\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ a função erro complementar. Observa-se facilmente que no limite $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0$ recuperamos a distribuição de Poisson e no limite $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1$ recuperamos a distribuição de Wigner para o ensemble GOE, veja mais detalhes e ilustrações em H. J. Stöckmann [57].

5.1.4 Estruturas das Autofunções

Em relação as autofunções da equação (5.21), espera-se que a dinâmica clássica seja refletida na sua estrutura. De acordo com a *Hipótese das Autofunções Semiclássicas* [61] os autoestados devem se concentrar nas regiões que uma órbita arbitrária explora ao longo do seu tempo limite [77]. Esse fenômeno de concentração recebe o nome de “cicatrizes” (que foi verificado primeiramente por Heller, [57]) onde localiza-se altas densidades de probabilidade.

Temos que, para sistemas integráveis o movimento está restrito a um toro n -dimensional invariante enquanto que, para sistemas ergódicos a superfície de energia é inteiramente e uniformemente atingida. Para o caso de sistemas ergódicos, isso é assegurado pelo *Teorema de Ergodicidade Quântica* [78] (veja também o teorema (5.1.1)), que nos garante que quase todas as autofunções tornam-se equidistribuídas no espaço de configurações no limite semiclássico, por exemplo, restringindo ao espaço de posições temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\phi_{n_j}(\mathbf{q})|^2 d^2q = \frac{\operatorname{vol}(D)}{\operatorname{vol}(\Omega)} \quad (5.41)$$

para uma subseqüência $\{\phi_{n_j}\} \subset \{\phi_n\}$ de densidade um.

Portanto, para quase todas autofunções a probabilidade de se achar uma partícula numa certa região D do espaço de posições Ω , no limite semiclássico, é exatamente a mesma dos sistemas clássicos (lembramos que dada uma trajetória $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ de uma partícula iniciando em (q_0, p_0) , a probabilidade de se achá-la numa certa região D no espaço de posições Ω é dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\mathbf{q}(t)) dt = \frac{\operatorname{vol}(D)}{\operatorname{vol}(\Omega)} \quad (5.42)$$

para quase todas as condições iniciais (q_0, p_0) , sendo χ_D a função característica de D . Desta forma, em sistemas ergódicos a probabilidade de encontrar a partícula no interior de D é exatamente o volume relativo desta região. Logo, uma trajetória típica preencherá assintoticamente o espaço acessível de maneira uniforme).

Novamente, no artigo [39] (figura 4). Pode-se observar boas concordâncias entre o caso clássico e o caso quântico, para os bilhares num círculo e numa cardióide.

Agora, em relação aos sistemas com espaço de fases misto a análise de sua dinâmica é mais complicada, pois ambos movimentos regular e caótico coexistem. Porém, de forma análoga aos casos anteriores, essa dinâmica também é refletida na estrutura das autofunções da equação (5.21).

Como dissemos, sistemas com dinâmica completamente integrável ou com dinâmica completamente caótica são casos raros, genericamente temos os sistemas com dinâmica mista. Sabemos que a transição da dinâmica integrável para o caso de dinâmica mista, quando esta sofre pequenas perturbações, é descrita pelo teorema KAM. O que nos leva a uma estrutura complicada do espaço de fases onde as “ilhas de estabilidade” estarão cercadas por um “mar de caos”. Para essa situação veja a figura 6 da referência [77], onde é ilustrado o espaço de fases do bilhar chamado *limaçon*, este bilhar pode ser visto como deformações do bilhar circular, que foi introduzido inicialmente por Robnik [79]. Sua equação é dada por

$$\rho(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad \varepsilon \in [0, 1] \quad (5.43)$$

e como já tínhamos visto antes, quando o parâmetro vale $\varepsilon = 0$ temos o bilhar em um círculo (integrável), quando $\varepsilon = 1$ temos o bilhar em uma cardióide (caótico), estes são os casos extremos, e para $0 < \varepsilon < 1$ temos os bilhares com espaço de fases misturados. Verificou-se que as ilhas KAM persistem até $\varepsilon = 0.5$ [79], mas mesmo quando ε é tomado arbitrariamente próximo de $\varepsilon = 1$ pode-se ainda encontrar “minúsculas” ilhas KAM [80]. Este caso nos ilustra o quanto é complicada a análise e o estudo de sistemas com espaço de fases misturados

Sendo assim, para os sistemas com espaço de fases misturados, novamente a hipótese das autofunções semiclássicas vai implicar que os autoestados poderão ser classificados no limite semiclássico, como

regular ou como caótico, isso vai depender da região do espaço de fases que eles vierem a se concentrar [77]. A figura 7 da referência [77] nos dá uma ilustração desta situação.

Finalizamos esta seção salientando que existem outras quantidades estatísticas que também podem ser muito úteis neste estudo das dinâmicas quânticas, como por exemplo: a *rigidez espectral* (*spectral rigidity*) [57, 75]; a *função de autocorrelação de autoestados* (*autocorrelation function of eigenstates*) [57, 81], entre outras. Convidamos o leitor interessado à investigar as referências citadas.

Apêndice A

Teoria da Medida

Grosso modo, uma medida num conjunto Ω é uma função que associa um número real não-negativo a subconjuntos de Ω . Uma medida pode ser interpretada como medida de comprimento, ou de área, ou de volume, ou de massa e etc. Como exemplo importante de medida, temos a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n que associa a subconjuntos de \mathbb{R}^n o seu comprimento quando $n = 1$, a sua área quando $n = 2$ e o seu volume quando $n = 3$.

Vamos enunciar algumas definições e resultados básicos da teoria da medida que foram utilizados neste texto para mais detalhes sugerimos consultar, por exemplo, [82, 83, 84].

Definição A.0.1. *Seja Ω um conjunto. Uma σ -álgebra \mathcal{A} em Ω é uma coleção não vazia de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $X_j \in \mathcal{A}, \forall j \geq 1$, então $\cup_{j=1}^{\infty} X_j \in \mathcal{A}$;*
- (ii) *Se $X \in \mathcal{A}$, então $\Omega \setminus X \in \mathcal{A}$.*

Exercício A.0.2. *Verifique que a intersecção arbitrária de σ -álgebras é uma σ -álgebra.*

Definição A.0.2. *O par (Ω, \mathcal{A}) é chamado de espaço mensurável e os elementos de \mathcal{A} são chamados de mensuráveis.*

Proposição A.0.1. *Dada uma coleção de \mathcal{C} de subconjuntos de Ω ,*

então existe uma menor (ou minimal) σ -álgebra denotada por $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ que contém \mathcal{C} .

Demonstração: Ver [84]. □

Definição A.0.3. Dizemos que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ é uma σ -álgebra gerada por \mathcal{C} .

Definição A.0.4. A coleção \mathcal{B} de conjuntos de Borel ou borelianos (associada a um espaço topológico Ω) é a menor σ -álgebra que contém todos os abertos de Ω . Em particular, a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^n) é a σ -álgebra minimal que possui todos os abertos de \mathbb{R} (ou de \mathbb{R}^n).

Definição A.0.5. Uma medida μ num espaço mensurável (Ω, \mathcal{A}) é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\mu(X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$;

(iii) Se $\{X_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ com $X_j \cap X_l = \emptyset$ para $j \neq l$, então $\mu(\cup_{j=1}^{\infty} X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_j)$.

Exercício A.0.3. Considere um espaço mensurável (Ω, \mathcal{A}) . Sejam μ_1, \dots, μ_n medidas definidas em \mathcal{A} . Se a_1, \dots, a_n são números reais não-negativos, então mostre que $\mu := \sum_{j=1}^n a_j \mu_j$ é uma medida.

Definição A.0.6. A tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada de espaço de medida.

Exercício A.0.4. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Verifique que $\mathcal{N}_{\mu} := \{X \mid \mu(X) = 0 \vee \mu(\Omega \setminus X) = 0\}$ é uma σ -álgebra.

Exercício A.0.5. Considere um conjunto Ω e para $A \subseteq \Omega$ defina $\#(A)$ como sendo o número de elementos de A , se A for finito ou $\#(A) = +\infty$, se A não for finito. Verifique que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \#)$ é um espaço de medida ($\mathcal{P}(\Omega)$ é formado pelas partes de Ω). Essa medida é chamada medida de contagem.

Para definimos a medida de Lebesgue algumas considerações adicionais são necessárias.

Definição A.0.7. Uma semi-álgebra \mathcal{S} é uma coleção de subconjuntos de Ω que obedece as seguintes condições:

- (i) Se $X, Y \in \mathcal{S}$, então $X \cap Y \in \mathcal{S}$;
- (ii) E se o complementar $\Omega \setminus X$ de qualquer conjunto X que está em \mathcal{S} for igual a união finita de conjuntos em \mathcal{S} dois a dois disjuntos.

Exercício A.0.6. Sejam \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 semi-álgebras de conjuntos Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Mostre que $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ é uma semi-álgebra do conjunto $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Teorema A.0.2. Suponha que \mathcal{S} é um semi-álgebra e seja $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função não negativa tal que:

- (i) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ para $X_j \in \mathcal{S}$ com $\mu(X_j) < \infty$;
- (ii) Se $\{X_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{S}$ com $X_j \cap X_l = \emptyset$ para $j \neq l$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \in \mathcal{S}$, então $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_j)$.

Nestas condições existe uma única medida na σ -álgebra $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ que coincide com a função μ em \mathcal{S} .

Prova-se facilmente que a coleção de todos os intervalos abertos, fechados e semi-abertos em \mathbb{R} formam uma semi-álgebra \mathcal{S} . A função que associa o comprimento do intervalo à cada intervalo é uma função não negativa em \mathcal{S} que satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema anterior. Desta forma, existe uma única medida denotada usualmente por \mathbf{m} na σ -álgebra de Borel \mathcal{B} em \mathbb{R} que coincide com a função comprimento de intervalo.

Definição A.0.8. A medida \mathbf{m} chama-se medida de Lebesgue.

Definição A.0.9. Uma medida μ é dita finita em (Ω, \mathcal{A}) se $\mu(\Omega) < \infty$.

Definição A.0.10. Dizemos que μ é uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{A}) se $\mu(\Omega) = 1$.

Definição A.0.11. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto mensurável $X \subset \Omega$ é chamado conjunto nulo se $\mu(X) = 0$ e é chamado de medida total se $\mu(\Omega \setminus X) = 0$.

Exercício A.0.7. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida qualquer. Verifique:

- (a) Se $X \subseteq Y$ com $\mu(Y) < \infty$, então $\mu(Y \setminus X) = \mu(Y) - \mu(X)$.
- (b) $\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.

Outras definições e resultados importantes sobre a teoria de medida podem ser consultados nas referências que foram citadas no início.

Apêndice B

Teoria Ergódica

Fornecemos algumas definições e observações, de forma sucinta, sobre a *Teoria Ergódica*, outros detalhes (como exemplos, exercícios e outros complementos) podem ser consultados nas referências [8, 85]. Podemos dizer, resumidamente, que teoria ergódica é a teoria onde se estuda as transformações que preservam medida.

Definição B.0.12. *Seja (Ω, \mathcal{A}) um espaço mensurável. Dizemos que uma transformação $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é mensurável se $T^{-1}(X) \in \mathcal{A}$, $\forall X \in \mathcal{A}$. Dizemos que $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é um automorfismo se T é uma bijeção e ambas T e T^{-1} são mensuráveis.*

Definição B.0.13. *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável. Dizemos que uma medida μ é T -invariante se $T\mu = \mu$, neste caso, podemos dizer que T preserva a medida μ .*

Definição B.0.14. *Dizemos que um conjunto $Y \subset \Omega$ é T -invariante se $T^{-1}(Y) = Y$.*

Definição B.0.15. *Uma medida μ T -invariante, é dita ser ergódica se para qualquer conjunto T -invariante $Y \subset \Omega$ tem-se $\mu(Y) = 0$ ou $\mu(Y) = 1$.*

Uma das definições de ergodicidade para sistemas bilhares mais utilizada nos diz que um sistema (Ω, T, μ) é ergódico se para toda $f \in L^2_\mu(\Omega)$ a *média temporal* for igual a *média espacial*, ou seja,

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S f(\Phi^t x) dt = \int_\Omega f(x) d\mu \quad (\text{B.1})$$

para quase todo $x \in \Omega$, sendo $\{\Phi^t x\}$ o fluxo do bilhar.

Definição B.0.16. *Uma transformação $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva uma medida μ é dita ser *mixing* se para todo par de subconjuntos mensuráveis $X, Y \subset \Omega$ tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n} X \cap Y) = \mu(X)\mu(Y) \quad (\text{B.2})$$

ou (como $\mu(X) = \mu(T^{-n} X)$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(T^{-n} X \cap Y) - \mu(T^{-n} X)\mu(Y)| = 0, \quad (\text{B.3})$$

isto significa que os eventos $T^{-n} X$ e Y tornam-se independentes assintoticamente quando $n \rightarrow \infty$.

Definição B.0.17. *Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, é chamada função contínua de Hölder com expoente $\gamma \in (0, 1]$, se existir uma constante real C tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot \|x - y\|^\gamma, \forall x, y \in U.$$

Sejam $f, g \in L^2_\mu(\Omega)$ duas funções contínuas de Hölder. Correlações são definidas por

$$\mathcal{C}_n(f, g, T, \mu) = \int_\Omega (f \circ T^n) g d\mu - \int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \quad (\text{B.4})$$

sendo assim temos uma outra maneira equivalente de caracterizar mixing, ou seja, o mapa $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é *mixing* se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n(f, g, T, \mu) = 0, \forall f, g \in L^2_\mu(\Omega)$. A taxa de mixing de T é caracterizada pela velocidade de convergência de (B.4), esta propriedade é conhecida como *decaimento de correlações*.

Definição B.0.18. Um automorfismo $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva uma medida μ é dito ser de Kolmogorov (ou tem a K -propriedade) se para quaisquer subconjuntos mensuráveis $B, A_1, \dots, A_r \subset \Omega$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{B}(n)} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0, \quad (\text{B.5})$$

sendo $\mathcal{B}(n) = \mathcal{B}_n^\infty(A_1, \dots, A_r)$ a sub-álgebra gerada pelos conjuntos $T^m A_i, \forall m \geq n$ e $i = 1, \dots, r$; ou seja, podemos dizer que isto significa uma independência assintótica entre o evento presente B e todos os distantes eventos futuros em $\mathcal{B}(n)$.

Definição B.0.19. Um automorfismo $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva uma medida μ é dito ser de Bernoulli (ou tem a propriedade de Bernoulli) se ele for equivalente ao shift (deslocamento) de Bernoulli¹.

Intuitivamente, podemos dizer que os sistemas de Bernoulli são tão aleatórios quanto qualquer seqüência obtida por sorteios de cara ou coroa de um moeda.

Observação B.0.2. (1) K -propriedade também é chamada K -mixing. (2) Pode-se provar o que tem sido chamado de hierarquia ergódica para sistemas dinâmico, ou seja, a existência de graus mais fortes de ergodicidade em determinados sistemas que possuem uma determinada propriedade em relação a outros sistemas que a não possuem. Temos que sistemas de Bernoulli \Rightarrow sistemas de Kolmogorov \Rightarrow sistemas mixing \Rightarrow sistemas ergódicos, ou seja, podemos dizer que sistemas de Bernoulli apresentam maior ergodicidade que os sistemas de Kolmogorov que por sua vez apresentam uma maior ergodicidade que os sistemas mixing e que por vez apresentam uma maior ergodicidade que os sistemas ergódicos.

Para um estudo mais detalhado, sugerimos consultar o excelente livro de N. Chernov e R. Markarian [8] para o caso de bilhares ou o livro de R. Mané [85] para os casos mais gerais.

¹Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de probabilidade. Consideremos o espaço produto $\Sigma = \Omega^{\mathbb{N}}$, munido da σ -álgebra produto $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ e da medida produto $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. O deslocamento de Bernoulli é a dupla (σ, μ) onde $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a aplicação dada por $\sigma((x_n)_n) := (x_{n+1})_n$, veja mais detalhes em [85].

Apêndice C

Mecânica Quântica

Pretende-se discutir, brevemente, as principais conexões (interpretações) entre duas áreas fundamentais tanto para os físicos como para os matemáticos, a saber, *Análise Funcional* (em particular os *espaços de Hilbert*) e *Mecânica Quântica*.

Essas duas áreas nasceram de formas independentes, praticamente na mesma época (início do sec. XX), mas com o desenvolvimento de ambas, tivemos importantes interações entre elas o que contribuiu decisivamente para o progresso dessas duas áreas, algumas referências sobre esses assuntos e que fornecem dados históricos são [43, 71, 86, 87, 88, 89].

De acordo com [86], a *Análise Funcional* é uma rica fusão de conceitos de Álgebra Linear, Análise e Topologia, com destaque para espaços vetoriais de dimensão infinita. Os espaços de Hilbert, uma parte fundamental da Análise Funcional, estabeleceram a teoria matemática para o formalismo da Mecânica Quântica.

Grosso modo, *Mecânica Quântica* é a teoria física dos fenômenos microscópicos. Pela *Formulação Matemática da Mecânica Quântica*, todo sistema é associado a um espaço de Hilbert complexo e separável, tal que cada estado do sistema é descrito por um vetor unitário nesse espaço. Este vetor de estados guarda as probabilidades para os resultados de todas as possíveis medições aplicadas ao sistema. Em geral, o estado de um sistema varia no tempo e o vetor de estados é uma função do tempo. A equação de Schrödinger fornece uma descrição

quantitativa da taxa de variação deste vetor.

Usando a notação de Dirac, o vetor de estados é dado, num tempo t por $|\psi(t)\rangle$. A equação de Schrödinger é dada por:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{C.1})$$

sendo, i o número imaginário, \hbar a constante de Planck dividida por 2π e $H(t)$ é o operador Hamiltoniano (auto-adjunto) atuando no vetor de estados. O Hamiltoniano representa a energia total do sistema. Assim como a força na segunda Lei de Newton, ele não é definido pela equação e deve ser determinado pelas propriedades físicas do sistema.

Sabemos ainda que a *Mecânica Clássica* descreve corretamente o movimento de objetos no mundo macroscópico [24], mas no mundo microscópico a descrição necessita da *Mecânica Quântica* [70, 71]. Também sabemos, por meio do *Princípio da Incerteza de Heisenberg*, que não é possível medir simultaneamente a posição e o momento (velocidade) de uma partícula. Desta forma, na Mecânica Quântica não tem mais sentido em considerar-se as trajetórias usuais da Mecânica Clássica. Efetivamente o que temos é que o estado da partícula é especificado por uma função de onda, cujo valor absoluto ao quadrado é interpretado como uma densidade de probabilidade [70, 71].

C.1 Espaço de Hilbert

Os *espaços de Hilbert*, num certo sentido, são boas generalizações dos espaços Euclidianos \mathbb{R}^n , pois além da norma (que nos fornece a noção de “proximidade” e convergência) temos o importante conceito de produto interno uma generalização de produto escalar do \mathbb{R}^3 (que nos fornece as definições de ângulo e ortogonalidade).

Como nos \mathbb{R}^n eles também são completos. Discutiremos, sucintamente, alguns conceitos e resultados importantes relacionados com os espaços de Hilbert, para isso suporemos conhecidos algumas definições e resultados de Álgebra Linear e de Análise, para uma revisão destes fatos sugerimos consultar [43].

C.1.1 Produto Interno

Definição C.1.1. *Sejam \mathbb{F} o corpo \mathbb{R} dos números reais ou \mathbb{C} dos números complexos e X um espaço vetorial sobre \mathbb{F} . Um produto interno em X é uma função*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F} \quad (\text{C.2})$$

que possui as seguintes propriedades:

- (i) $\langle \xi, \lambda\eta + \mu\zeta \rangle = \bar{\lambda}\langle \xi, \eta \rangle + \bar{\mu}\langle \xi, \zeta \rangle$;
 - (ii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$;
 - (iii) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ e $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$,
- $\forall \xi, \eta, \zeta \in X$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

Observação C.1.1. *Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ as condições (i) e (ii) ficam sem as barras da conjugação complexa.*

Fornecemos alguns exemplos de espaços vetoriais com produto interno, cujas verificações serão deixadas como exercícios.

Exemplo C.1.1. Espaços Euclidianos \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$)

Os espaços \mathbb{R}^n com a função dada por:

$$\langle \xi, \eta \rangle \doteq x_1y_1 + \dots + x_ny_n \quad (\text{C.3})$$

sendo $\xi = (x_j) = (x_1, \dots, x_n)$ e $\eta = (y_j) = (y_1, \dots, y_n)$ elementos do \mathbb{R}^n .

Exemplo C.1.2. Espaços Unitários \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}$)

Os espaços \mathbb{C}^n com a função dada por:

$$\langle \xi, \eta \rangle \doteq x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n \quad (\text{C.4})$$

sendo $\xi = (x_j) = (x_1, \dots, x_n)$ e $\eta = (y_j) = (y_1, \dots, y_n)$ elementos do \mathbb{C}^n . Também é um espaço com produto interno.

Exemplo C.1.3. Espaço de Seqüências l^2

Seja I um conjunto contável. Definem-se

$$l^2(I, \mathbb{F}) = \left\{ \xi = (x_j)_{j \in I} \mid \sum_{j \in I} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

e

$$\langle \xi, \eta \rangle \doteq \sum_{j \in I} x_j \bar{y}_j \quad (\text{C.5})$$

sendo $\xi = (x_j)_{j \in I}$ e $\eta = (y_j)_{j \in I}$ elementos do l^2 . Este espaço teve grande importância histórica tanto para o desenvolvimento da teoria de Espaços de Hilbert como para a fundamentação matemática da Mecânica Quântica.

Exemplo C.1.4. Espaço de Funções $C([0, 1], \mathbb{C})$

Seja $C([0, 1], \mathbb{C}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é contínua} \}$. Para $f, g \in C([0, 1], \mathbb{C})$ definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g} dx \quad (\text{C.6})$$

que é um produto interno em $C([0, 1], \mathbb{C})$.

Exercício C.1.1. Verifique que os exemplos dados acima são de fato espaços com produto interno.

Um conceito fundamental que se relaciona, como veremos, com o produto interno num espaço vetorial X é o de *norma* (uma abstração do conceito de “comprimento” estudado no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3) cuja definição é dada por.

Definição C.1.2. Seja X um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{F} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Um norma em X é uma função

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$$

que satisfaz:

- (i) $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|$;
- (ii) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$;
- (iii) $\|\xi\| \geq 0$ e $\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$.

$\forall \xi, \eta \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.

O próximo resultado estabelece duas desigualdades de grande importância, tanto teórica, como prática. Uma é a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski (CSB) e a outra é a desigualdade triangular, respectivamente.

Teorema C.1.1. *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então $\forall \xi, \eta \in X$, valem:*

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|; \quad (\text{C.7})$$

a igualdade ocorre se, somente se, ξ e η são linearmente dependentes.

$$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|; \quad (\text{C.8})$$

a igualdade ocorre se, somente se, $\xi = 0$ ou quando $\eta = k\xi$ para algum $k \geq 0$.

Demonstração. ver [43]. □

Uma consequência imediata da definição de produto interno e da segunda desigualdade acima é dada pelo seguinte corolário:

Corolário C.1.2. *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então a função*

$$\xi \mapsto \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} \quad (\text{C.9})$$

é uma norma em X . Chamada de norma induzida pelo produto interno de X .

Exercício C.1.2. *Demonstre o corolário acima.*

Observação C.1.2. *Também podemos definir uma métrica em X , que abstrai o conceito de distância dado no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , usando para isso o conceito de norma, a saber,*

$$d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\| = \sqrt{\langle \xi - \eta, \xi - \eta \rangle}, \quad \forall \xi, \eta \in X \quad (\text{C.10})$$

para maiores detalhes consultar [43].

Dos fatos acima podemos concluir facilmente que todo espaço com produto interno X também é um espaço normado (com a norma induzida pelo produto interno) e todo espaço normado é um espaço métrico (com a métrica associada a norma). Desta forma, dizemos que um espaço normado X é completo, também chamado *espaço de Banach* se ele for um espaço métrico completo (isto significa que toda seqüência de Cauchy em X é convergente em X) com respeito à métrica associada. Temos assim a seguinte definição.

Definição C.1.3. *Um espaço de Hilbert X é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Exemplo C.1.5. *Os principais exemplos de espaço de Hilbert, do ponto de vista histórico e teórico, são:*

- (i) *Os espaços Euclidianos \mathbb{R}^n com o produto interno dado em (C.3);*
- (ii) *Os espaços Unitários \mathbb{C}^n com o produto interno dado em (C.4);*
- (iii) *O espaço de seqüências l^2 com o produto internos dado em (C.5);*
e
- (iv) *O espaço L^2 que envolve conceitos da Teoria de Medida e Integração.*

Os espaços de Hilbert aparecem mais freqüentemente como espaço L^2 . Temos as seguintes afirmações:

- (a) *$L^2_\mu(X)$ é um espaço vetorial com respeito às operações pontuais definidas por:*

$$\begin{aligned} [\phi + \psi](w) &= \phi(w) + \psi(w), \\ (\lambda\phi)(w) &= \lambda\phi(w). \end{aligned}$$

para $\phi, \psi \in L^2_\mu$ e $\lambda \in \mathbb{F}$.

- (b) *A função*

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_X \phi(w) \overline{\psi(w)} d\mu(w) \quad (\text{C.11})$$

é um produto interno em $L^2_\mu(X)$.

A verificação, que eles são espaços de Hilbert, segue basicamente a mesma idéia e será deixada como exercício. Mostra-se que eles na verdade são espaços de Banach (com a norma induzida pelo produto interno), para isso, tome uma seqüência de Cauchy arbitrária no espaço; usando o fato que \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) é completo na métrica usual construímos um elemento candidato a ser o limite da seqüência de Cauchy considerada. E para finalizar, deve-se mostrar que este elemento pertence ao espaço e que a seqüência de Cauchy, de fato, converge para ele.

Em algumas situações que podem surgir esta demonstração pode ser simplificada, quando é para mostrar, por exemplo, que um sub-espaço é completo num espaço de Banach (conhecido), neste caso,

basta mostrar que o subespaço é fechado (o que implica ser completo), ver [43].

Exercício C.1.3. Verifique que os espaços dado acima são completos.

Exemplo C.1.6. Como exemplo de um espaço que não é espaço de Hilbert, podemos citar o espaço das funções $C([0, 1], \mathbb{C})$ com o produto interno dado em (C.6). Mostra-se, na verdade, que ele não é espaço de Banach, podemos verificar isso trabalhando com a norma induzida pelo produto interno e construindo uma seqüência de Cauchy que não converge neste espaço, ver [43].

C.1.2 Operadores Limitados

Usando o conceito de operador linear, dado em Álgebra Linear, podemos definir *operador linear limitado* a seguir.

Definição C.1.4. Sejam X e Y espaços normados e $T : \text{dom}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que T é limitado se existe um número real c tal que $\forall \xi \in \text{dom}(T)$ vale,

$$\|T\xi\| \leq c\|\xi\|. \quad (\text{C.12})$$

Exemplo C.1.7. Exemplos típicos de operadores lineares limitados são: O operador Identidade; O operador Nulo e O operador Integral estes operadores como outros operadores lineares limitados podem ser encontrados em [43].

Um resultado que fornece uma útil caracterização e ao mesmo tempo relaciona dois conceitos fundamentais é dado por

Teorema C.1.3. Seja $T : \text{dom}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear entre espaços normados X e Y . Então:

- (i) T é contínuo se, e somente se, T é limitado.
- (ii) Se T é contínuo num ponto, então T é contínuo.

Demonstração. Ver [43]. □

Observação C.1.3. *Operadores lineares limitados, isto é, contínuos tem grande importância, tanto teórica, como prática, mas também vale destacar os operadores lineares ilimitados (um exemplo típico é O operador Diferenciação) eles têm grande importância, principalmente em Mecânica Quântica.*

C.1.3 Operadores Auto-Adjuntos

Estabeleceremos, sem muitos detalhes, uma importante classe de operadores lineares, os chamados *operadores lineares auto-adjuntos*.

Antes daremos algumas definições e resultados que estão relacionados com eles. A motivação para o estudo desses operadores são problemas que envolvem matrizes, equações integrais, equações diferenciais lineares e a Mecânica Quântica.

Definição C.1.5. *Sejam $T : X_1 \rightarrow X_2$ um operador linear limitado entre espaços de Hilbert. O operador $T^* : X_2 \rightarrow X_1$ de T tal que $\forall \xi \in X_1$ e $\eta \in X_2$ tem-se*

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T^*\eta \rangle, \quad (\text{C.13})$$

chama-se operador adjunto de Hilbert.

O próximo resultado garante que a definição acima está bem estabelecida.

Teorema C.1.4. *O operador adjunto Hilbert T^* de T , acima, existe, é único e é limitado com norma*

$$\|T^*\| = \|T\|. \quad (\text{C.14})$$

Demonstração. ver [43] □

Definição C.1.6. *Um operador linear limitado $T : X \rightarrow X$ num espaço de Hilbert X é auto-adjunto ou Hermitiano se $T^* = T$. Neste caso, (C.13) fica*

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad (\text{C.15})$$

O conceito acima pode ser generalizado para os operadores lineares ilimitados, para isso é necessário alguns conceitos adicionais para o desenvolvimento dessa teoria em detalhes. Resumiremos isso

fornecendo uma definição que se aplica à ambas situações. Primeiramente, diremos que um operador linear T definido num espaço de Hilbert complexo X é *densamente definido* em X se $\text{dom}(T)$ for denso em X , neste caso, $T : \text{dom}(T) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear auto-adjunto se $T = T^*$.

Exemplo C.1.8. *O exemplo de operador linear auto-adjunto e ilimitado, que tem grande importância em Mecânica Quântica é o operador de multiplicação dado por:*

$$\begin{aligned} T : \text{dom}(T) \subset L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \xi &\mapsto t\xi, \quad (t \in \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

O estudo deste exemplo, em detalhes, pode ser visto em [43].

C.2 Postulados da Mecânica Quântica

Nesta seção discutiremos, sucintamente, as principais idéias e conceitos que relacionam a *Mecânica Quântica* não relativista com os *Espaços de Hilbert*. Adotaremos neste capítulo a notação usual da Física.

C.2.1 Comentários Iniciais

A título de motivação e por simplicidade, discutiremos as idéias básicas e os conceitos da Mecânica Quântica para uma partícula simples restringida num espaço unidimensional, a saber, \mathbb{R} . Fixemos um instante arbitrário para a análise deste sistema.

Lembramos que em *Mecânica Clássica* o estado do sistema, em algum instante, é descrito pela posição e velocidade da partícula. Portanto, neste caso, o estado do sistema é instantaneamente determinado por um par de números.

Já em *Mecânica Quântica* o estado do sistema é descrito por uma função

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

sendo $L^2(\mathbb{R})$ um espaço de Hilbert.

A função ψ está, num certo sentido, relacionada a probabilidade de se achar a partícula num dado conjunto $J \subset \mathbb{R}$, isto é dado por uma *medida de probabilidade* na forma

$$\int_J |\psi(q)|^2 dq. \quad (\text{C.17})$$

Para o espaço todo temos

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 dq = 1, \quad (\text{C.18})$$

o que implica uma condição normalizadora. Esta condição é único requisito que a função ψ tem de satisfazer, podendo ser singular e até mesmo torna-se infinita [89].

Observação C.2.1. *Ressaltamos que o vetor de estado ψ não tem significado físico, embora o produto interno de dois vetores de estado, ϕ e ψ , $\langle \phi, \psi \rangle$, seja interpretado como a amplitude de probabilidade de o sistema passar do estado ψ para o estado ϕ .*

Desta forma, temos uma mudança importante na maneira como descrevemos o estado do sistema. Na Mecânica Clássica a descrição é *determinística* enquanto na Mecânica Quântica a descrição é *probabilística*. Além disto, definimos um *estado* do nosso sistema físico em algum instante como sendo o elemento

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\psi\| = 1; \quad (\text{C.19})$$

ou como podemos verificar, facilmente, por sua *classe de equivalência* tal que

$$\psi_1 \sim \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1 = \lambda \psi_2, \quad |\lambda| = 1. \quad (\text{C.20})$$

Estes elementos formam um subespaço unidimensional

$$Y = \{\varphi | \varphi = \alpha \psi, \alpha \in \mathbb{C}\} \subset L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{C.21})$$

Da *Teoria de Probabilidade* temos que $|\psi(q)|^2$ é uma *densidade de probabilidade*. O correspondente *valor médio* ou *valor esperado* é

$$\mu_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} q |\psi(q)|^2 dq, \quad (\text{C.22})$$

a *variança da distribuição* é

$$\text{var}_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \mu_\psi)^2 |\psi(q)|^2 dq, \quad (\text{C.23})$$

e o *desvio padrão* é

$$dp_\psi = \sqrt{\text{var}_\psi}. \quad (\text{C.24})$$

Grosso modo, μ_ψ mede o valor médio e var_ψ o espalhamento da distribuição. Portanto, μ_ψ caracteriza a *posição média* da partícula para um dado estado ψ .

Um fato importante é que (C.22) pode ser escrito como,

$$\mu_\psi(Q) = \langle Q\psi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Q\psi(q)\overline{\psi(q)}dq \quad (\text{C.25})$$

sendo Q um operador tal que

$$Q : \text{dom}(Q) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad Q\psi(q) = q\psi(q), \quad (\text{C.26})$$

chamado *operador posição*. Definimos o

$$\text{dom}(Q) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid Q\psi \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Sabe-se que Q é um operador linear ilimitado auto-adjunto (é o operador de multiplicação, veja o exemplo (C.1.8)) e seu domínio é denso em $L^2(\mathbb{R})$, ver [43].

Podemos reescrever (C.23) como

$$\text{var}_\psi(Q) = \langle (Q - \mu I)^2 \psi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (Q - \mu I)^2 \psi(q)\overline{\psi(q)}dq, \quad (\text{C.27})$$

sendo $\mu = \mu_\psi(Q)$.

Um estado ψ de um sistema físico contém todo o conhecimento sobre o sistema, mas isso implicitamente. O problema que surge é como obter de ψ informações sobre as quantidades expressas no sistema que podem ser verificadas experimentalmente? Uma tal quantidade é chamada *observável*.

Um observável é uma variável dinâmica de um sistema físico que, em princípio, pode ser medida. Na teoria quântica, um observável

é um *operador*. Assim, haverá um operador para a energia do sistema, outro, para o momento linear, etc. Observáveis importantes são *posição, momento e energia*.

Em Mecânica Clássica, perguntamos qual é o valor que um observável assume em um dado instante. Em Mecânica Quântica, perguntamos qual é a probabilidade que uma medida (experimental) produzirá um valor do observável que pertença a um certo intervalo.

Desta forma, os observáveis devem ser operadores lineares auto-adjuntos (para que tenham significado físico) e densamente definidos (por serem ilimitado) $T : \text{dom}(T) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ que satisfaçam (C.25) e (C.27) com T no lugar de Q .

C.2.2 Postulados da Mecânica Quântica

Enunciaremos os postulados fundamentais da Mecânica Quântica, são eles:

1. Num dado instante, o estado de um sistema (isolado) é definido por um elemento de um espaço de Hilbert complexo e separável (separável significa que o espaço contém um subconjunto enumerável e denso) \mathcal{H} , chamado o espaço dos estados $Y = \{\varphi | \varphi = \alpha\psi, \alpha \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{H}$. Cada elemento de Y corresponde a um possível estado puro do sistema. Na representação de Schrödinger, o vetor de estado está associado a uma função de onda.
2. Qualquer grandeza física, T , que em princípio possa ser medida (chamada observável), é descrita por um operador linear hermitiano (ou auto-adjunto), T , que atua no espaço Y .
3. O único resultado possível de uma medição de um dado observável, T , é um dos autovalores de T . Imediatamente a seguir à medição, o estado do sistema é um autovetor de T , com o valor medido. Se o estado imediatamente anterior à medição for ψ , então o resultado da medição, μ_i , será obtido com a probabilidade

$$\text{Prob}(\mu_i) = |\langle \phi_i, \psi \rangle|^2$$

sendo os ϕ_i os autovetores de T .

4. Na representação de Schrödinger, a função de onda do sistema evolui de acordo com a equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H\Psi(t). \quad (\text{C.28})$$

sendo H o operador Hamiltoniano. Esta equação pode escrever-se em termos de um operador de evolução U , que, se H for independente do tempo, assume a forma

$$U = e^{itH/\hbar}, \quad (\text{C.29})$$

ficando $\Psi(t) = U\Psi(0)$ e sendo $\Psi(0)$ a função de onda no instante $t = 0$.

Este é um conjunto possível de postulados, necessários para um formalismo da teoria quântica.

Em resumo, a descrição de uma partícula tanto na Mecânica Clássica como na Mecânica Quântica tem os mesmos elementos básicos, que podemos separá-los em:

- I. Estados da partícula;
- II. Observáveis; e
- III. Dinâmica ou evolução no tempo;

porém o significado dos termos é bem diferente, mais detalhes sobre essas diferenças podem ser encontradas em [69].

Sendo assim, o estado físico quântico de uma partícula (no espaço \mathbb{R}^3) é descrito por sua função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$, que satisfaz à equação de Schrödinger. Temos que a probabilidade de encontrar a partícula na posição $\vec{r} = (x, y, z)$ no interior do elemento de volume $dV = dx dy dz$ é dado por

$$\int \int \int |\Psi|^2 dx dy dz \quad (\text{C.30})$$

(uma medida de probabilidade), conseqüentemente para o espaço todo temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1. \quad (\text{C.31})$$

Se conhecermos a função de onda de um sistema nós podemos calcular “praticamente” quase tudo a respeito dele.

Schrödinger foi o primeiro a tratar (já no seu primeiro artigo no total de quatro) *O Átomo de Hidrogênio* por meio de sua equação,

onde pode comprovar matematicamente vários resultados experimentais já conhecidos e também previstos pelo físico dinamarquês Niels Bohr.

Resolver a equação de Schrödinger significa achar uma fórmula analítica ou numérica para a função de onda. Em geral, a resolução da equação de Schrödinger é bastante difícil. Para poucos casos é que conhecemos soluções analíticas para esta equação. Apesar disto, a equação de Schrödinger tem grande importância na Mecânica Quântica.

Observação C.2.2. *Em 1926, o físico austríaco Erwin Schrödinger publicou quatro artigos, nos quais desenvolveu a sua versão teórica da Mecânica Quântica, um anos antes o físico alemão Werner Heisenberg publicou a sua. O próprio Schrödinger, entre outros, provou, logo em seguida, que ambas versões eram equivalentes.*

Um resultado central na teoria de Schrödinger é a equação de onda que é usada para o estudo quântico de um sistema, como por exemplo o Átomo de Hidrogênio. Assim, em Mecânica Quântica a primeira coisa a ser preparada para modelarmos um sistema é a equação de Schrödinger. A equação de Schrödinger nada mais é que uma equação diferencial de segunda ordem e com ela podemos obter informações importantes de uma sistema, como por exemplo, os níveis de energias do Átomo de Hidrogênio. O estudo, em detalhes, do Átomo de Hidrogênio por meio da equação de Schrödinger por ser encontrado em [90].

Apêndice D

Mecânica Clássica e Semiclássica

Grosso modo, *Mecânica Semiclássica* (MS) é uma maneira de usar a *Mecânica Clássica* (MC) para resolver problemas da *Mecânica Quântica* (MQ), cujo objetivo é substituir a resolução da equação de Schrödinger na MQ pela resolução da equações de Hamilton na MC.

Esta idéia começou com a chamada velha MQ, ela foi revisada e melhorada a partir da segunda metade do século XX e tem sido usada, principalmente, em caos quântico onde os resultados apresentados são altamente precisos [91].

Sabemos que o termo *caos* em MC designa, a partir da segunda metade do século XX, um novo tipo de dinâmica complicada (movimento irregular) com características bem peculiares para determinados sistemas, como por exemplo, a separação exponencial de trajetórias vizinhas ao longo do tempo. Em oposto, temos o termo integrável (movimento regular) com características bem mais simples e distintas da anterior.

A partir do nascimento da MQ e com o desenvolvimento da dinâmica clássica surge a pergunta natural. “Existe na MQ algum tipo de dinâmica análoga tal como na MC”? O termo caos quântico surge em alusão ao termo caos clássico, mas com uma perspectiva de ser contextualizada na MQ, porém como sabemos existem várias difi-

culdades que não permitem definir caos mediante propriedades intrinsecamente quânticas, em MQ perde-se por completo o conceito de trajetória que é essencial em MC (para definir e estudar a dinâmica clássica), o que não permite, desta maneira, estabelecer uma conexão direta com o conceito de caos clássico. Desta forma, os conceitos, as definições e critérios utilizados em MC não possuem equivalentes em MQ, destaca-se também que a existência do caos clássico que está ligada ao fenômeno da não-linearidade dos sistemas não tem contrapartida no caos quântico (a equação de Schrödinger como sabemos é linear). Todavia, na MQ temos sistemas que, vistos classicamente, são integráveis e outros que são caóticos. Além disso, pelo *Princípio da Correspondência* a MC deve ser vista como o limite da MQ quando $\hbar \rightarrow 0$, assim é razoável que se trate, de algum modo, esses tipos de dinâmicas clássica no contexto da MQ, [54, 57, 91, 92].

Atualmente, quando se faz o estudo quântico comparativo de sistemas que classicamente são caóticos ou integráveis ele nos leva a conclusão de que o espectro quântico de energia dos sistemas classicamente caótico e dos sistemas classicamente integráveis distingue-se em relação as flutuações espectrais. De fato, as flutuações dos espectros de sistemas classicamente integráveis seguem a estatística de Poisson, enquanto as flutuações do espectro de sistemas classicamente caóticos coincidem com as predições dadas pela teoria de matrizes aleatórias, [54, 57]. Desta forma, pode-se também dizer que estas dinâmicas (regular ou irregular) estão, num certo sentido, presentes e têm suas peculiaridades na MQ.

Mais detalhes sobre esses assuntos podem ser consultados nas referências citadas acima.

D.1 O Limite Semiclássico

Temos dois pontos de vistas para efeitos de comparação de resultados clássicos e quânticos: o limite da MQ para escalas grandes e a quantização dos sistemas clássicos. Para sistemas clássicos integráveis obteve inicialmente uma regra de quantização que permitia decidir quais energias clássicas contínuas eram quanticamente possíveis, obtendo assim um espectro de energia discreto.

A partir do conhecimento da equação de Schrödinger, o cálculo

semiclássico que produz este resultado é a aproximação WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin) em uma dimensão e a sua generalização para dimensões altas EBK (Einstein, Brillouin e Keller).

Para sistemas não integráveis tal quantização não se aplica. Esse problema só foi resolvido por Gutzwiller [54], mediante o cálculo semiclássico de sua fórmula para um observável puramente quântico, como por exemplo, a densidade de estados a partir de grandezas puramente clássicas como as órbitas periódicas de sistemas análogos clássicos. Como já mencionamos a densidade de estados para um espectro de energia discreto $\{E_i\}$ define-se como

$$d(E) = \sum_i \delta(E - E_i) \quad (\text{D.1})$$

sendo $d(E)dE$ o número de estados no intervalo $[E, E + dE]$.

A fórmula de Gutzwiller para a densidade de estados válida tanto para os sistemas integráveis como para os sistemas caóticos é dada por

$$d(E) := \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \cos\left(\frac{1}{\hbar} S_r(E) - \frac{\mu_r \pi}{2}\right) \quad (\text{D.2})$$

cuja soma é realizada sobre todas as órbitas periódicas do sistema, incluindo as de medida nula, as amplitudes A_r dependem do período e da estabilidade da órbita em relação a pequenas perturbações, S_r é a ação clássica e por fim μ_r é o conhecido índice de Maslov, [54, 57, 91, 92].

D.2 Função de Husimi

Vimos que, classicamente, a seção de Poincaré é uma ferramenta de grande utilidade na análise e no estudo das características de um dado sistema dinâmico, apesar de ser um recurso geométrico (que pode ser visualizado em baixas dimensões) ela é de grande auxílio e quando associada a outras ferramentas pode, de fato, servir como uma “prova” da existência ou não de comportamento caótico em um sistema dinâmico, como por exemplos os bilhares.

Por outro lado, versões quânticas de bilhares têm espectro de energia discreta e as manifestações das diferentes dinâmicas (regular ou

caótica) têm caminhos diferentes como já vimos. A *função de Husimi* de um autoestado quântico, quando utilizada, pode nos fornecer um padrão similar ao da seção de Poincaré clássica, o que seria, assim como a versão clássica, uma ferramenta de grande auxílio em nossas análises e estudos dessas versões quânticas de bilhares.

Grosso modo, a função de Husimi é uma projeção da autofunção no estado coerente em um espaço de fases. Desta forma, a função de Husimi fornece um método de extrair uma seção de superfície de Poincaré quântica de um estado quântico. Sendo assim, a seção de Poincaré quântica é o análogo quântico da seção de Poincaré clássica. Uma discussão como mais detalhes sobre tais assuntos, podem ser consultadas nas referências [93, 94] (para os sistemas bilhares) e [54] (para sistemas mais gerais).

Para finalizar, sabe-se que uma função de onda abstrata ψ é um vetor no espaço de configurações (que é um espaço de Hilbert), sendo assim este vetor pode ser expresso em termos de uma infinidade de representações ortonormais contínuas ou discretas [95], onde a interpretação probabilística se faz presente. Apesar do princípio de incerteza de Heisenberg, Wigner [54] conseguiu definir funções de (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , que denotaremos por $W_n(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ associadas as autofunções $\psi_n(\mathbf{q})$ dada por

$$W_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{1}{(2\pi i \hbar)^d} \int d\bar{q} \psi_n^*(q + \bar{q}) \psi_n(q - \bar{q}) \exp\left(-\frac{2ip\bar{q}}{\hbar}\right). \quad (\text{D.3})$$

A função de Wigner é as vezes usada em análises semiclássicas em funções de onda, sob certas condições, veja [57].

Observação D.2.1. *Tem-se um formalismo sobre a função de Wigner, onde ela é obtida por meio de um processo analítico usando a transformada de Weyl, [95].*

A função de Wigner associada ao estado ψ é uma função de (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , que quando projetada sobre \mathbf{q} ou \mathbf{p} fornece a distribuição correta de probabilidades nas representações de posição ou momento, mas $W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidades no espaço de fases, por ser negativa na maioria das vezes em algumas regiões do espaço de fases [95]. Remediamos isto definindo uma nova função conhecida como função de Husimi (que pode ser

vista como uma versão suavizada da função de Wigner [94]), mais detalhes em [95].

Desta forma, usando os fatos conhecidos para os bilhares clássicos (como vimos no capítulo 3 a seção de Poincaré clássica é construída usando a fronteira do bilhar) pode-se obter vantagens na obtenção da função de Husimi para os bilhares quânticos o que nos facilita a construção das seções de Poincaré quânticas e com isso tem-se uma conexão entre as dinâmicas clássicas e quânticas desses sistemas, permitindo assim análises e estudos comparativos dos respectivos comportamentos dinâmicos, tais estudos já foram feitos e podem ser consultados em detalhes, por exemplo, em [94, 96] entre outros.

Referências

Bibliográficas

- [1] A.B. Katok, *Billiard table as a mathematician's playground*, disponível em http://www.math.psu.edu/katok_a/pub/Russian-bill.pdf, 2009.
- [2] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, A.M.S. Colloquium Publications New York, 1927.
- [3] R. Markarian, *Bilhares. A Hipótese Ergódica de Boltzmann*, Matemática Universitária, nro 29 - pp. 45-74, 2000.
- [4] M. V. Berry, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*. Eur. J. Phys., vol. 2, pp. 91-102, 1981.
- [5] Y. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Russian Mathematical Surveys 25, pp. 137-188, 1970.
- [6] L. A. Bunimovich, *On billiards close to dispersing*, Mat. Sb. 94, pp. 49-73, 1974. Math. USSR Sb. 23, pp 45-67, 1974.
- [7] L. A. Bunimovich, *The ergodic properties of certain billiards*, Funkt. Anal. Prilozh. 8, pp. 73-74, 1974.
- [8] N. Chernov, R. Markarian, *Chaotic Billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, 2006.
- [9] L.A. Bunimovich, *Mushrooms and other billiards with divided phase space*, Chaos 11 p. 802, 2001.

- [10] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems, 2nd* - Cambridge University Press, 2002.
- [11] J.Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa - Projeto Euclides, 1979.
- [12] L. Fichmann e E.M. Sallum, *Sistemas Dinâmicos: noções básicas, 2ed*, IME-USP, 2006.
- [13] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Notas de Aula, disponível em <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode.pdf>, 2000.
- [14] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd* - Addison Wesley Publishing Company, 1989.
- [15] V.I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir Moscovo, 1985.
- [16] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer Science+Business Media Inc., 2006.
- [17] N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. Do Prado, *Caos: Uma Introdução*, Editora Edgard Blücher Ltda, 1994.
- [18] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, 2nd*, Springer-Verlag New York, 2003.
- [19] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.W. Strelcyn, *Lypunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part 1: Theory.*, Meccanica 15, pp. 9-20, 1980.
- [20] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.W. Strelcyn, *Lypunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part II: Numerical application*, Meccanica 15, pp. 21-30, 1980.
- [21] R.M. May, *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*, Nature, pp. 261-459, 1976.

- [22] E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, 20 pp. 130-141, 1963.
- [23] M.W. Hirsch, S. Smale and R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier, 2004
- [24] M.A.M. de Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica*, 1ªed., Editora Livraria da Física, 2011.
- [25] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir Moscovo, 2004.
- [26] N.A.Lemos, *Mecânica Analítica*, 2ed, Editora Livraria da Física, 2007.
- [27] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, 2003.
- [28] L. Markus and K.R. Meyer, *Generic Hamiltonian Dynamical Systems Are Neither Integrable Nor Ergodic*, AMS, Providence, Mem. Amer. Math. Soc., v. 144, 1974.
- [29] A. N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 98, pp. 527-530, 1954.
- [30] J. Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II, pp. 1-20, 1962.
- [31] V. I. Arnold, *Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasiperiodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Russian Mathematical Surveys 18 pp. 9-36, 1963.
- [32] V. I. Arnold, *Small divisor problems in classical and celestial mechanics*, Russian Mathematical Surveys 18 pp. 85-192, 1963.
- [33] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelle de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, 1899.
- [34] E. Gutkin, *Billiard Dynamics: A Survey with the emphasis on open problems*, Regular and Chaotic Dynamics, V. 8, nº 1, 2003

- [35] M. Wojtkowski, *Invariant families of cones and Lyapunov exponents.*, Erg. Theor. & Dyn. Sys. V. 5. pp. 145-161, 1985.
- [36] M. Wojtkowski, *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents.*, Comm. Math. Phys. V. 105, pp. 391-414, 1986
- [37] N. Chernov and R. Markarian, *Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards*, 2nd, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [38] A. Bäcker, *Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computations for chaotic quantum systems*, in The Mathematical Aspects of Quantum Maps, M. Degli Esposti and S. Graffi (eds). Springer Lectures Notes in Physics 618, pp. 91-144, 2003.
- [39] A. Bäcker, *Quantum chaos in billiards*, Computing in Science and Engineering, vol. 9, no. 3, pp. 60-64, May/June 2007.
- [40] D.F.M. Oliveira e E.D. Leonel, *On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 15, pp. 1092-1102, 2010.
- [41] S. Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, American Mathematical Society, disponível em <http://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf>, September 28, 2005.
- [42] V. V. Kozlov and D. V. Treshchëv, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Translations of Mathematical Monographs, 89 American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.
- [43] E. Kreyszig, *Inroductory Functional Analysis with Applications*, Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1978.
- [44] B.V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep., pp. 52-265, 1979.
- [45] E.G. Altmann, A.E. Motter and H. Kantz, *Stickiness in mushroom billiards*, Chaos 15, 033105, 2005.

- [46] L.A. Bunimovich, *Kinematics, equilibrium, and shape in Hamiltonian systems: The "LAB" effect*, Chaos 13, pp. 903-912, 2003.
- [47] M.A. Porter e S. Lansel, *Mushrooms Billiards*, Notices of the AMS, Vol. 53, 334, 2006.
- [48] L. A. Bunimovich, *On ergodic properties of nowhere dispersing billiards*, Comm. Math. Phys. 65, pp. 295-312, 1979.
- [49] N. I. Chernov and C. Haskell *Nonuniformly hyperbolic K-systems are Bernoulli*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 16, pp. 19-44, 1996.
- [50] D. Ornstein and B. Weiss, *On the Bernoulli nature of systems with some hyperbolic structure*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 18, pp. 441-456, 1998.
- [51] A.H. Barnett e T. Betcke, *Quantum Mushroom Billiards*, Chaos 17, 043125, 2007.
- [52] S. Lansel and M.A. Porter, *A Graphical User Interface to Simulate Classical Billiard Systems*, arXiv:nlin/0405003. Software disponível em <http://www.stanford.edu/~slansel/billiards.htm>
- [53] <http://classicalchaos.org/index.html>
- [54] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer-Verlag, 1990.
- [55] M.V. Berry, *Quantum Chaology, Not Quantum Chaos*, Physica Scripta. Vol. 40, pp. 335-336, 1989.
- [56] Z. Rudnick, *What is... Quantum Chaos?*, Notices of the AMS, Vol. 55, Number 1, 2008.
- [57] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos: An Introduction*, Cambridge University Press, 1999.
- [58] D.D. de Menezes, M. Jar e Silva and F. M. de Aguiar, *Numerical experiments on quantum chaotic billiards*, Chaos 17, 2007.
- [59] J.R. Kuttler and V.G. Sigillito, *Eigenvalues of the Laplacian in two dimensions*, Siam Review, vol. 26. no. 2, 1984.

- [60] O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. 52, 1, 1984.
- [61] M.V. Berry, *Regular and Irregular Semiclassical Wave Functions*, J.Phys.A, 10, pp. 2083-91, 1977.
- [62] M.V. Berry and M. Tabor, *Level Clustering in the Regular Spectrum*, Proc. Royal Soc. London A, vol. 356, pp. 375-394, 1977.
- [63] M.V. Berry and M. Robnik, *Semiclassical Level Spacings When Regular and Chaotic Orbits Coexist*, J. Phys. A 17, 2413, 1984.
- [64] I.C. Percival, *Regular and Irregular Spectra*, J. Phys. B 6, L229, 1973.
- [65] M. L. Mehta, *Random Matrices*. Academic Press, third edition, 2004.
- [66] A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, *Técnicas e Construções de Ensembles de Matrizes Aleatórias e Estatísticas Correlatas*, Revista Brasileira de Ensino de Física 28, 3, 2006.
- [67] A.C. Bertuola, *Quaternions, Números Complexos e os Ensembles de Matrizes Aleatórias*, Revista Brasileira de Ensino de Física 31, 4, 2009.
- [68] T. Myint-U and L. Denmath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 4nd ed., Birkhäuser Boston, 2007.
- [69] J. Thayer, *Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, 2007.
- [70] V.A. Fock, *Princípios de Mecânica Quântica*, 2ª ed. - Editora Mir Moscovo, 1986.
- [71] A.F.R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*, EDUSP, 2003.
- [72] A. Bäcker, R. Ketzmerick, S. Löck, M. Robnik, G. Vidmar, R. Höhmann, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, *Dynamical tunneling in mushroom billiards*, Phys. Rev. Lett., 100, 174103, 2008.

- [73] A.L. Schnirelman, *Usp. Mat. Nauk.* 29, 181, 1974.
- [74] N. Burq and M. Zworski, *Bouncing Ball Modes and Quantum Chaos*, *SIAM Review*, Vol. 47, No . 1, pp . 43-49, 2005.
- [75] M. V. Berry, *Classical Chaos and Quantum Eigenvalues* in Order and Chaos in nonlinear physical systems, eds. Stig Lundqvist, Norman H March and Mario P Tosi; Plenum Press, New York and London, pp. 341-348, 1988.
- [76] A.M.O. de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*, 3.ed. Editora da UNICAMP, 1995.
- [77] A. Bäcker, *Eigenfunctions in chaotic quantum systems*, disponível em <http://d-nb.info/98965575X/34>
- [78] A. Bäcker and F. Steiner, *Quantum chaos and quantum ergodicity*, in: *Ergodic Theory, Analysis and Efficient Simulation of Dynamical Systems*, B. Fiedler (ed.), pp. 717-752, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 2001.
- [79] M. Robnik, *Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries*, *J. Phys. A* 16, pp. 3971-3986, 1983.
- [80] H. R. Dullin e A. Bäcker, *About ergodicity in the family of limaçon billiards*, *Nonlinearity* 14, pp. 1673-1687, 2001.
- [81] A. Bäcker and R. Schubert, *Autocorrelation function of eigenstates in chaotic and mixed systems*, *J. Phys. A* 35, pp. 539-564, 2002.
- [82] R.G.Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [83] H. L. Royden, *Real Analysis*, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.
- [84] M. Marques, *Teoria da Medida*, Editora da Unicamp, 2009.
- [85] R. Mañé, *Introdução à Teoria Ergódica*, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

- [86] Oliveira, C. R. de, *Introdução à Análise Funcional*, Publicações Matemáticas do IMPA, 2001.
- [87] D. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, 2005.
- [88] J.L. Lopes, *A estrutura quântica da matéria: do átomo pré-socrático às partículas elementares*, 2005.
- [89] J.V. Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, 1955.
- [90] Peixoto, E.M.A., *Química Quântica. Parte I e II: O Átomo de Hidrogênio* Química Nova/Abril, 1978.
- [91] J.B. Keller, *Semiclassical Mechanics*, SIAM REVIEW, Vol. 27, No. 4, December 1985.
- [92] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, Niels Bohr Institute, disponível em <http://ChaosBook.org>.
- [93] B. Crespi, G. Perez, and S. J. Chang, *Quantum Poincaré sections for two-dimensional billiards*, Phys. Rev. E 47, 986, 1993.
- [94] A. Bäcker, S. Fürstberger, and R. Schubert, *Poincaré Husimi representation of eigenstates in quantum billiards*, Phys. Rev. E 70, 2004.
- [95] M.A.M. de Aguiar, *O Limite Semiclássico da Mecânica Quântica*, Notas de Aula, 1998, disponível em <http://www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Notas/notas.html>
- [96] S. Ree and S. L. Reichl, *Classical and quantum chaos in a circular billiard with a straight cut*, Phys. Rev. E 60, 1999.

Índice Remissivo

- σ -álgebra, 83
- automorfismo, 87
- bilhar cardióide, 41
- bilhar circular, 41
- bilhar Cogumelo, 50
- bilhar dispersivo de Sinai, 44
- bilhar em elipse, 48
- bilhar estádio de Bunimovich, 44
- bilhar limaçon, 81
- bilhar plano, 32
- bilhar quântico, 73
- bilhares ergódicos, 44
- cáustica, 47
- campo de cones invariantes, 28
- campo de vetores, 7
- cogumelo perfeito, 55
- colchete ou parêntese de Poisson, 21
- colisão regular, 35
- colisão tangencial, 35
- conjectura de Birkhoff, 48
- conjunto invariante, 87
- constante de movimento, 18
- coordenadas de Birkhoff, 41
- coordenadas generalizadas, 21
- correlações, 88
- curva integral, 6
- curvatura, 34
- densamente definido, 98
- densidade cumulativa, 77
- densidade de probabilidade, 100
- desigualdade CSB, 94
- desigualdade triangular, 94
- desvio padrão, 100
- dinâmica hiperbólica, 44
- distribuição de Berry-Robnik, 79
- distribuição de Poisson, 78
- distribuição de Wigner, 78
- distribuição do espaçamento de níveis de energia, 78
- e.d.o. autônoma, 7
- e.d.o. de ordem n , 7
- equação de Helmholtz, 73
- equação diferencial ordinária, 6
- equação discreta, 9
- equação integral, 6
- equações de Hamilton, 17
- ergodicidade, 41
- espaço L^2 , 96

- espaço com produto interno, 93
 espaço das funções $C([0, 1], \mathbb{C})$, 97
 espaço de Banach, 95
 espaço de funções $C([0, 1], \mathbb{C})$, 94
 espaço de Hilber, 95
 espaço de medida, 84
 espaço de seqüências l^2 , 93, 96
 espaço Euclideanos \mathbb{R}^n , 93
 espaço mensurável, 83
 espaços Euclideanos \mathbb{R}^n , 96
 espaços Unitários \mathbb{C}^n , 93, 96
 estado, 100
 expoente de Lyapunov, 13

 fórmula de Gutzwiller, 107
 fluxo do bilhar, 35
 fluxo local, fluxo global, 10
 freqüências não-ressonantes, 26
 freqüências racionalmente dependentes, 26
 freqüências ressonantes, 26
 função contínua de Hölder, 88
 função mensurável, 87
 função T-invariante, 47

 hiperbolicidade, 28, 41

 Image Construction Trick, 56

 K-propriedade, 88

 métrica, 95
 mapa de Poincaré, 12
 mapa logístico, 15
 medida, 84
 medida de Lebesgue, 85
 medida de Liouville, 40
 medida de probabilidade, 85
 medida ergódica, 87

 medida finita, 85
 medida invariante, 87
 mesa de bilhar, 34
 mixing, 88
 momentos generalizados, 21
 movimento irregular ou caótico, 24
 movimento regular, 24

 norma, 94
 norma induzida pelo produto interno, 95

 observável, 101
 operador adjunto Hilbert, 98
 operador auto-adjunto, 98
 operador linear limitado, 97
 operador posição, 101

 parede dispersiva, 34
 parede focalizadora, 34
 parede plana, 34
 Problema de Cauchy, 6
 propriedade de Bernoulli, 89

 raio de curvatura, 34

 seção de Poincaré, 12
 semi-álgebra, 84
 sistema conservativo, 18
 sistema de Lorenz, 16
 sistema dinâmico, 11
 sistema dinâmico contínuo, 11
 sistema dinâmico discreto, 11
 sistema dissipativo, 18
 sistema hamiltoniano ou de Hamilton, 17
 sistema integrável, 22

- sistemas Hamiltonianos genéricos,
50
- spectral staircase, 77

- teorema de Ergodicidade Quântica,
80
- teorema de Liouville, 18
- teorema de Liouville (quadratura),
22
- teorema de Liouville-Arnold, 23
- teorema de recorrência de Poincaré,
18
- teorema de Schnirelman, 76
- teorema ergódico multiplicativo de
Oseledec, 28
- teorema KAM, 27
- transformação canônica, 20
- transformação de Poincaré, 12
- transformação do bilhar ou mapa
do bilhar, 36

- valor esperado, 100
- variáveis ação-ângulo, 23
- variança da distribuição, 100