

# **Análise em Fractais**



# Publicações Matemáticas

## Análise em Fractais

Milton Jara  
IMPA



29<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2013 by Milton Jara

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

## **29<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática**

- **Análise em Fractais – Milton Jara**
- Asymptotic Models for Surface and Internal Waves – Jean-Claude Saut
- Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos – Alberto Saa e Renato de Sá Teles
- Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções – Alex L. de Castro
- Eigenvalues on Riemannian Manifolds – Changyu Xia
- Equações Algébricas e a Teoria de Galois – Rodrigo Gondim, Maria Eulalia de Moraes Melo e Francesco Russo
- Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra – Alexandre Baraviera, Renaud Leplaideur e Artur Lopes
- Expansive Measures – Carlos A. Morales e Víctor F. Sirvent
- Funções de Operador e o Estudo do Espectro – Augusto Armando de Castro Júnior
- Introdução à Geometria Finsler – Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão
- Introdução aos Métodos de Crivos em Teoria dos Números – Júlio Andrade
- Otimização de Médias sobre Grafos Orientados – Eduardo Garibaldi e João Tiago Assunção Gomes

ISBN: 978-85-244-0350-7

**Distribuição:** IMPA  
Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: [ddic@impa.br](mailto:ddic@impa.br)  
<http://www.impa.br>

*À minha esposa e ao Pedro*



# Introdução

Ao longo dos últimos anos, a teoria de grafos tem se tornado uma área da matemática extremamente ativa, principalmente por causa da globalização. A ideia é que a grande interconetividade das relações interpessoais faz com que a modelagem de diversos fenômenos requera o estudo de equações definidas em objetos mais complexos do que domínios em  $\mathbb{R}^d$  ou subconjuntos de  $\mathbb{Z}^d$ . No que diz respeito à dita complexidade, o exemplo mais simples de conjunto com propriedades radicalmente diferentes ao espaço Euclidiano é o *triângulo de Sierpinski*, desenhado na Figura 1. De fato, o triângulo de Sierpinski é um dos exemplos mais simples de *fractal*. Se bem o triângulo de Sierpinski também não é um bom modelo da interconetividade do mundo globalizado, é um bom ponto de partida para tentar ver que tipo de conceitos clássicos no espaço Euclidiano podem ser generalizados a conjuntos mais complexos, como por exemplos os mencionados fractais. O objetivo desta monografia é dar uma exposição o mais elementar e auto-contida possível da construção duma teoria de equações diferenciais parciais no triângulo de Sierpinski.

Ao nosso conhecimento, o estudo matemático de equações diferenciais parciais no triângulo de Sierpinski começou com o trabalho [1], onde os autores constroem um processo estocástico que chamam de *movimento Browniano* no triângulo de Sierpinski, como limite de escala de passeios aleatórios em grafos discretos, definidos de maneira adequada. A relação entre o movimento Browniano e as equações diferenciais parciais vem do fato que as soluções fundamentais da equação do calor  $\partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u$  correspondem às probabilidades de transição do movimento Browniano. Portanto, se for possível definir um processo estocástico no triângulo de Sierpinski que possa ser le-

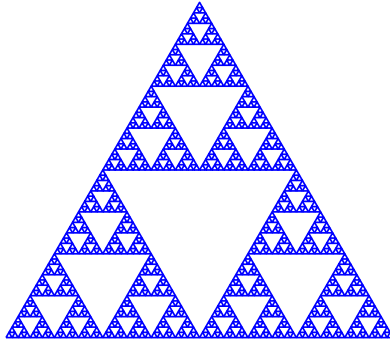


Figura 1: O triângulo de Sierpinski  $K$ .

gitimamente chamado de movimento Browniano, então será possível definir soluções da equação do calor no triângulo de Sierpinski.

A abordagem deste texto se baseia no artigo [3], que por sua vez simplifica a abordagem do livro "Analysis on Fractals" de Jun Kigami [4] para o caso particular do triângulo de Sierpinski. A ideia é utilizar a teoria de potencial em grafos, ver a monografia "Cadenas de Markov y Teoría de Potencial" do 28<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática [2], para construir aproximações discretas do operador Laplaciano no triângulo de Sierpinski  $K$ . Uma vez construído o operador Laplaciano  $\Delta$  em  $K$  e obtidas algumas das suas propriedades, podemos pelo menos definir o que entendemos por equação de Poisson  $\Delta f = g$  e por equação do calor  $\partial_t u = \Delta u$  em  $K$ .

O triângulo de Sierpinski  $K$  possui a propriedade seguinte. Se tirarmos os pontos médios dos três lados externos dele, *cortamos* o triângulo em três pedaços desconexos. Esta propriedade se conhece como *ramificação finita*, e ela não é uma propriedade geral de todo fractal. A construção do operador  $\Delta$  apresentada nesta monografia usa de maneira fundamental esta propriedade. Por uma parte, isto é uma desvantagem, posto que não seria possível em princípio adaptá-la para outros fractais que não apresentem esta propriedade de ramificação finita. Por outra parte, há sim notórios exemplos de fractais finitamente ramificados; em particular *árvores* são finitamente rami-



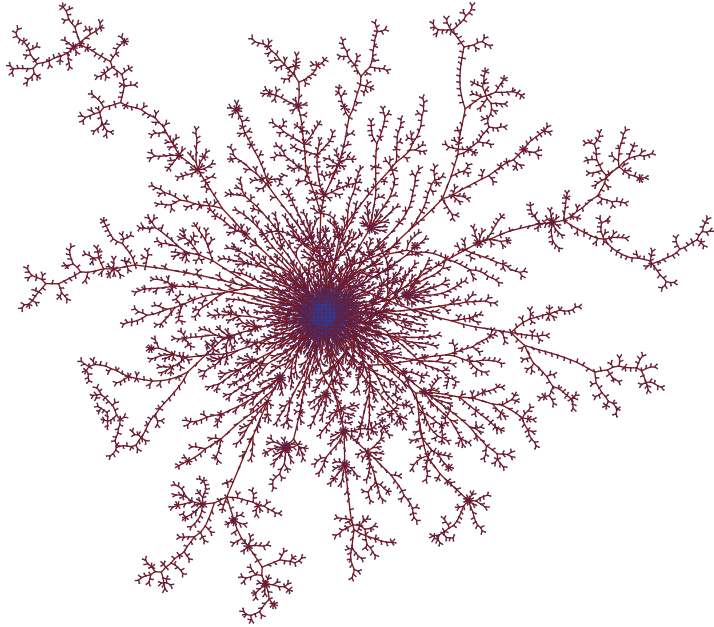


Figura 2: Uma árvore aleatória de alta interconetividade (imagem cortesia de Igor Kortchemski).

ficados. Na Figura 2, vemos um exemplo não trivial de árvore, que de fato é sim um modelo razoável de interconetividade. Esta árvore corresponde a uma árvore aleatória na qual com enorme probabilidade existe um ponto especial (a *raiz* da árvore) que está conectado a uma fração significativa dos outros pontos da árvore, enquanto os outros pontos estão tipicamente conectado só a uns poucos outros pontos. Esta propriedade é tipicamente encontrada em grafos que modelam interconetividade.

Ao custo duma certa perda de generalidade, a exposição nesta monografia tenta ser o mais elementar e auto-contida possível. Em particular, os pré-requisitos são um curso básico de equações diferenciais ordinárias e um curso de teoria da medida. Em particular,

não é necessário um conhecimento prévio de análise funcional ou de equações diferenciais parciais para seguir a exposição, mas o leitor atento notará que grande parte das definições e demonstrações desta monografia seguem muito de perto ideias clássicas de análise funcional e equações diferenciais parciais. De forma mais precisa, os pré-requisitos são os seguintes:

- O teorema de unicidade de equações diferenciais de Picard-Lindelöf,
- o fato que todo espaço métrico é completável,
- a completitude do espaço de medidas com respeito à topologia fraca,
- os teoremas de Tonelli e da convergência monótona.

Várias das demonstrações poderiam ser simplificadas e generalizadas usando em pontos chave elementos de análise funcional, como o lema de Riesz, mas visando manter os pré-requisitos no mínimo possível, ditas provas foram adaptadas para não usar análise funcional. Este fato faz com que os enunciados dos teoremas nesta monografia sejam essencialmente diferentes dos encontrados nas referências [3] e [4]. Como não há resultados novos nesta monografia, mas muitas das demonstrações são originais, decidimos chamar de ‘Proposição’ a todos os teoremas, lemas ou corolários enunciados na monografia.

A maior parte desta monografia foi preparada durante a visita do autor ao “Laboratoire d’Analyse, Topologie et Probabilité” da Université Aix-Marseille. O autor agradece a hospitalidade e a cordialidade de todos durante a minha estada.

# Conteúdo

	i
<b>Introdução</b>	<b>iii</b>
<b>1 O Triângulo de Sierpinski</b>	<b>1</b>
1.1 Construção do Triângulo de Sierpinski . . . . .	1
1.2 Dimensão de Hausdorff . . . . .	4
1.3 Medida de Hausdorff . . . . .	7
1.4 A métrica de Hausdorff e conjuntos invariantes . . . . .	9
1.5 Exemplos de fractais . . . . .	13
<b>2 O Laplaciano em <math>K</math></b>	<b>16</b>
2.1 O Laplaciano discreto em $\mathbb{R}^d$ . . . . .	16
2.2 O Laplaciano discreto num grafo finito . . . . .	17
2.3 Os grafos associados a $K$ . . . . .	18
2.4 O princípio de Dirichlet em $\mathbb{R}^d$ . . . . .	20
2.5 A forma da energia . . . . .	20
2.6 Resistências e métricas em $K$ . . . . .	23
2.7 Funções harmônicas . . . . .	32
2.8 A função de Green . . . . .	37
<b>3 Análise funcional em <math>K</math></b>	<b>42</b>
3.1 Os espaços de Sobolev $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_1^0$ . . . . .	42
3.2 O Laplaciano para extensões harmônicas . . . . .	47
3.3 O Laplaciano em $\mathcal{H}_1$ . . . . .	49

<b>4</b>	<b>Equações diferenciais parciais em <math>K</math></b>	<b>54</b>
4.1	A equação de Poisson em $K$ . . . . .	54
4.2	Soluções de energia da equação do calor . . . . .	58
4.3	Unicidade de soluções de energia . . . . .	60
4.4	Existência de soluções . . . . .	66

# Capítulo 1

## O Triângulo de Sierpinski

### 1.1 Construção do Triângulo de Sierpinski

Sejam  $a_0 = (0, 0)$ ,  $a_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $a_2 = (1, 0)$  os vértices de um triângulo equilátero  $\mathcal{T}_\emptyset \subseteq \mathbb{R}^2$ . O triângulo  $\mathcal{T}_\emptyset$  está formado pelos pontos da forma  $p_0 a_0 + p_1 a_1 + p_2 a_2$ , onde  $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+$ <sup>1</sup> satisfazem  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ . Definiremos as transformações afins  $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

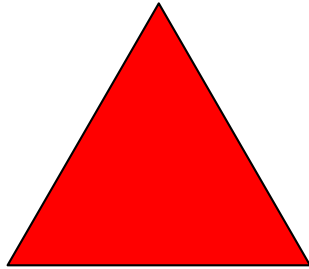


Figura 1.1: O triângulo  $\mathcal{T}_\emptyset$

$i = 0, 1, 2$  como

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{2}(x + a_i) \tag{1.1}$$

---

<sup>1</sup>Usaremos as convenções  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  e  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ .

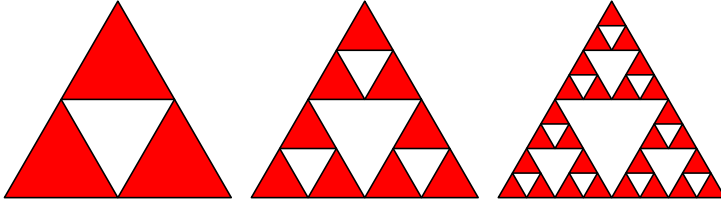


Figura 1.2: As primeiras etapas da construção de  $K$

para  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $i = 0, 1, 2$ . Definamos os conjuntos  $\{K_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  em  $\mathbb{R}^2$  de maneira indutiva. Começamos definindo  $K_0 = \mathcal{T}_\emptyset$  e para  $n \geq 0$ , definimos

$$K_{n+1} = \bigcup_{i=0,1,2} \varphi_i(K_n). \quad (1.2)$$

Notemos que  $K_1 \subseteq K_0$ . Um argumento indutivo mostra que então  $K_{n+1} \subseteq K_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Como o conjunto  $K_0$  é compacto e as funções  $\varphi_i$  são contínuas, vemos que  $K_n$  é compacto para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Pelo teorema dos compactos encaixados, o conjunto

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} K_n \quad (1.3)$$

é compacto e não vazio. Chamaremos ao conjunto  $K$  de *triângulo de Sierpinski*. Pelo momento só sabemos que o conjunto  $K$  é não vazio, mas a figura 1.2 sugere uma estrutura especial para  $K$ : o conjunto  $K$  é um *fractal*.

Agora apresentaremos uma outra construção do conjunto  $K$  que mostra que  $K$  tem muitos pontos. Seja  $V_0 = \{a_0, a_1, a_2\}$  e definamos a sequência  $\{V_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  de pontos em  $\mathbb{R}^2$  de forma indutiva como

$$V_{n+1} = \bigcup_{i=0,1,2} \varphi_i(V_n) \quad (1.4)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Notemos que  $V_0 \subseteq V_1$  e de forma indutiva,  $V_n \subseteq V_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Além disso, como  $V_0 \subseteq K_0$ , vemos que  $V_n \subseteq K_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Definamos

$$V_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n. \quad (1.5)$$

Olhando com atenção para a Figura 1.2, vemos que o conjunto  $K_n$  está composto por  $3^n$  triângulos de lado  $\frac{1}{2^n}$ . Cada um destes triângulos é a imagem de  $\mathcal{T}_\emptyset$  sob uma sequência de transformações afins escolhidas dentre  $\{\varphi_i; i = 0, 1, 2\}$ . Não é difícil se convencer de que dita sequência é única para cada triângulo. Uma forma eficiente de identificar estes triângulos é a seguinte. Dizemos que uma sequência finita  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_\ell)$  é uma sequência *ternária* se  $i_k \in \{0, 1, 2\}$  para todo  $k \in \{1, \dots, \ell\}$ . Diremos que  $\ell$  é o *tamanho* da sequência  $\mathbf{i}$ . Para cada sequência ternária  $\mathbf{i}$  de tamanho  $\ell$ , definiremos  $\varphi_{\mathbf{i}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$\varphi_{\mathbf{i}}(x) = \varphi_{i_\ell} \circ \dots \circ \varphi_{i_1}(x) \quad (1.6)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Para cada sequência ternária  $\mathbf{i}$ , definiremos  $\mathcal{T}_{\mathbf{i}} = \varphi_{\mathbf{i}}(\mathcal{T}_\emptyset)$ . Notemos que esta notação é consistente com a notação  $\mathcal{T}_\emptyset = K_0$ , se interpretarmos  $\emptyset$  como a sequência ternária de tamanho zero e  $\varphi_\emptyset$  como a identidade. Temos as propriedades seguintes:

**Proposição 1.** *Seja  $n \in \mathbb{N}$ , e seja  $\mathcal{I}_n$  o conjunto de sequências ternárias de tamanho  $n$ . Então,*

i)

$$K_n = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n} \mathcal{T}_{\mathbf{i}}. \quad (1.7)$$

ii) *Para  $\mathbf{i} \neq \mathbf{j} \in \mathcal{I}_n$ , a interseção de  $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}$  e  $\mathcal{T}_{\mathbf{j}}$  é vazia ou tem exatamente um ponto.*

iii) *O conjunto  $V_n$  é formado pelos vértices dos triângulos  $\{\mathcal{T}_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \in \mathcal{I}_n\}$ . Em particular, a cardinalidade de  $V_n$  é igual a  $\frac{3}{2}(3^n + 1)$ .*

iv) *Para todo  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n$ , o triângulo  $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}$  tem lado  $\frac{1}{2^n}$ .*

A prova desta proposição é muito simples, e portanto será omitida. Chamaremos aos elementos do conjunto  $\{\mathcal{T}_{\mathbf{i}}; \mathbf{i} \in \mathcal{I}_n\}$  de *triângulos* de  $K_n$ . Esta proposição tem a consequência seguinte:

**Proposição 2.** *O conjunto  $K$  é igual ao fecho do conjunto  $V_\infty$ .*

*Demonstração.* O item iii) da Proposição 1 implica que  $V_\infty \subseteq K$  e como  $K$  é compacto, concluímos que o fecho de  $V_\infty$  está contido em  $K$ . Sejam  $x \in K$  e  $\varepsilon > 0$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ . Seja  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n$

tal que  $x \in \mathcal{T}_i$ ; note-se que há pelo menos uma e no máximo duas seqüências ternárias  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n$  com essa propriedade. Seja  $y$  um dos vértices de  $\mathcal{T}_i$ . Então,  $y \in V_n$  e  $|y - x| \leq \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ .<sup>2</sup> Como  $x \in K$  e  $\varepsilon > 0$  são arbitrários, concluímos que  $K$  está contido no fecho de  $V_\infty$ , o que prova a proposição.  $\square$

## 1.2 Dimensão de Hausdorff

Uma das propriedades mais surpreendentes do triângulo de Sierpinski  $K$  e de fractais em geral, é que a dimensão do conjunto  $K$  é *fracionária*. É claro que neste momento, esta afirmação é totalmente vazia do ponto de vista matemático, visto que não contamos nem com uma definição de fractal, nem com uma definição de dimensão que admita valores fracionários. No entanto, olhando para a Figura 1.2 o triângulo de Sierpinski  $K$  parece ser um justo candidato (poderíamos dizer exemplo?) de fractal. Logo, se definirmos alguma noção de dimensão, então poderemos testá-la no conjunto  $K$ .

Denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel<sup>3</sup> associada à topologia usual de  $\mathbb{R}^d$ .

Sejam  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $r > 0$ . A bola aberta de centro  $x$  e raio  $r$  (ou simplesmente a *bola*) é definida como

$$\mathcal{B}(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^d; |y - x| < r\}. \quad (1.8)$$

Seja  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  um conjunto de Borel dado. Uma cobertura de  $B$  por bolas é uma família  $\mathcal{A} = \{A_i; i \in \mathcal{I}\}$  finita ou enumerável de bolas, tal que

$$B \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i. \quad (1.9)$$

Notemos que é possível parametrizar a cobertura  $\mathcal{A}$  por  $\{(x_i; r_i); i \in \mathcal{I}\}$ , onde  $\{x_i; i \in \mathcal{I}\}$  é uma seqüência de pontos (diferentes!) em  $\mathbb{R}^d$  e  $\{r_i; i \in \mathcal{I}\}$  é uma seqüência de números positivos: basta escolher

<sup>2</sup>Denotaremos por  $|x|$  a norma Euclidiana de  $x$ : para  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$ .

<sup>3</sup>Nestas notas, não precisaremos do conceito de conjunto de Borel; as definições serão feitas para conjuntos de Borel por completitude. O leitor não familiarizado com o conceito de conjunto de Borel pode trocar a frase “conjunto de Borel” por “compacto” sem perda de generalidade.



$x_i$  igual ao centro e  $r_i$  igual ao raio da bola  $A_i$ . Definimos o *raio* da cobertura  $\mathcal{A}$  (e o denotamos por  $|\mathcal{A}|$ ) como o supremo dos raios das bolas que a constituem:

$$|\mathcal{A}| = \sup_{i \in \mathcal{I}} r_i. \quad (1.10)$$

A medida exterior de Hausdorff de ordem  $\lambda \in [0, d]$  do conjunto  $B$  se define como

$$\bar{\nu}_\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{|\mathcal{A}| \leq r} \sum_{i \in \mathcal{I}} r_i^\lambda. \quad (1.11)$$

Notemos que o ínfimo nesta definição é sob coberturas por bolas de  $B$  de raio menor ou igual a  $r$ . Observemos que o limite em  $r$  está bem definido, mas pode ser igual a  $\infty$ . De fato, ao diminuir  $r$ , o ínfimo passa a ser calculado sob um conjunto de coberturas menor, pelo que o ínfimo cresce quando  $r \downarrow 0$ . Notemos que para  $r \leq 1$ ,  $\sum_i r_i^\lambda$  é decrescente em  $\lambda$ , pelo que a aplicação  $\lambda \mapsto \bar{\nu}_\lambda(B)$  é decrescente em  $\lambda$ . Este fato será utilizado repetidamente durante esta seção, sem mencioná-lo explicitamente. Definimos a *dimensão de Hausdorff* do conjunto  $B$  como

$$\dim_H(B) = \inf \{ \lambda \in [0, d]; \bar{\nu}_\lambda(B) = 0 \}. \quad (1.12)$$

Se o conjunto acima for vazio, definimos  $\dim_H(B) = d$ . Notemos que  $\bar{\nu}_\lambda(B) > 0$  para todo  $\lambda < \dim_H(B)$ , e que  $\bar{\nu}_d$  coincide com a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^d$ , pelo que se a medida de Lebesgue de  $B$  for não nula, então  $\dim_H(B) = d$ .

**Proposição 3.** *Para todo  $\lambda < \dim_H(B)$ ,  $\bar{\nu}_\lambda(B) = \infty$ .*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que para todo  $\lambda < \lambda_0$  tal que  $\bar{\nu}_\lambda(B) > 0$ ,  $\bar{\nu}_\lambda(B) = \infty$ . Se  $\bar{\nu}_\lambda(B) > 0$ , então existem  $\delta > 0$  e  $r_0 > 0$  tais que  $\sum_i r_i^{\lambda_0} \geq \delta$  para toda cobertura por bolas de  $B$  de raio menor ou igual a  $r_0$ . Portanto, se o raio da cobertura for menor ou igual a  $\bar{r}$ , então

$$\sum_i r_i^\lambda \geq \sum_i \bar{r}^{\lambda - \lambda_0} r_i^{\lambda_0} \geq \frac{\delta}{\bar{r}^{\lambda_0 - \lambda}}. \quad (1.13)$$

Como  $\frac{\delta}{\bar{r}^{\lambda_0 - \lambda}} \rightarrow \infty$  quando  $\bar{r} \rightarrow 0$ , a proposição está provada.  $\square$

Para calcular a dimensão de Hausdorff do triângulo de Sierpinski, usaremos a proposição seguinte:

**Proposição 4.** *Suponhamos que existe  $\lambda \in [0, d]$  tal que  $\bar{\nu}_\lambda(B) \in (0, \infty)$ . Então,  $\dim_H(B) = \lambda$ .*

*Demonstração.* Segue imediatamente da proposição anterior.  $\square$

**Proposição 5.** *A dimensão de Hausdorff do conjunto  $K$  é igual a  $\frac{\log 3}{\log 2}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{B}_\varnothing$  a bola fechada de centro  $x_\varnothing = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$  e raio  $r_\varnothing = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Em outras palavras,  $\mathcal{B}_\varnothing$  é o círculo (sólido!) circunscrito ao triângulo  $\mathcal{T}_\varnothing$ . Para cada sequência ternária  $\mathbf{i}$ , definimos  $\mathcal{B}_\mathbf{i} = \varphi_\mathbf{i}(\mathcal{B}_\varnothing)$ . Do mesmo jeito, definimos  $x_\mathbf{i} = \varphi_\mathbf{i}(x_\varnothing)$ , e  $r_\mathbf{i} = \frac{r_\varnothing}{2^\ell}$ , onde  $\ell$  é o comprimento da sequência  $\mathbf{i}$ . Desta forma,  $\mathcal{B}_\mathbf{i}$  é a bola fechada de centro  $x_\mathbf{i}$  e raio  $r_\mathbf{i}$ . O conjunto  $\{\mathcal{B}_\mathbf{i}; \mathbf{i} \in \mathcal{I}_n\}$  é uma cobertura de  $K_n$ , e portanto de  $K$ , por bolas fechadas. Logo, para todo  $\varepsilon > 0$ , a família  $\mathcal{A}_n = \{(x_\mathbf{i}, (1 + \varepsilon)r_\mathbf{i}); \mathbf{i} \in \mathcal{I}_n\}$  é uma cobertura por  $3^n$  bolas abertas de  $K$ , cada uma delas de raio  $\frac{(1 + \varepsilon)r_\varnothing}{2^n}$ . Concluimos que para todo  $\lambda \in [0, d]$ ,

$$\bar{\nu}_\lambda(K) \leq 3^n \left( \frac{r_\varnothing}{2^n} \right)^\lambda = r_\varnothing^\lambda \exp \{n(\log 3 - \lambda \log 2)\}. \quad (1.14)$$

Portanto, para todo  $\lambda > \frac{\log 3}{\log 2}$ , o lado direito desta desigualdade converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$  e portanto  $\bar{\nu}_\lambda(K) = 0$ .

Seja agora  $\mathcal{A}$  uma cobertura por bolas de  $K$ . Como  $K$  é compacto,  $\mathcal{A}$  possui uma subcobertura finita, pelo que ao calcular  $\bar{\nu}_\lambda$ , podemos restringir o ínfimo a coberturas finitas. Logo, sem perda de generalidade, seja  $\mathcal{A}$  uma cobertura finita. Podemos supor também que o raio de  $\mathcal{A}$  é menor a  $r_\varnothing$ . Seja  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ . Multiplicando o raio de cada bola por um número em  $[1, 2)$ , obtemos uma nova cobertura  $\bar{\mathcal{A}} = \{(x_i; \bar{r}_i); i = 1, \dots, \ell\}$  tal que todos os raios das bolas nela são da forma  $\bar{r}_i = \frac{(1 - \varepsilon)r_\varnothing}{2^{n_i}}$ , com  $n_i \in \mathbb{N}_0$ . Temos que

$$\sum_{i=1}^{\ell} r_i^\lambda \geq \frac{1}{2^\lambda} \sum_{i=1}^{\ell} \bar{r}_i^\lambda. \quad (1.15)$$

Temos que uma bola de raio  $\frac{(1 - \varepsilon)r_\varnothing}{2^{n_i}}$  intersesta no máximo 4 triângulos de  $K_{n_i}$ . Além disso, para todo  $m \geq n_i$  cada triângulo de  $K_{n_i}$

contém exatamente  $3^{m-n_i}$  triângulos de  $K_m$ . Portanto, para todo  $m \geq \max_{1 \leq i \leq \ell} n_i$ , cada bola  $\bar{A}_i = \mathcal{B}(x_i, (1-\varepsilon)\bar{r}_i)$  intersesta no máximo  $4 \cdot 3^{m-n_i}$  triângulos de  $K_m$ . Como  $\bar{\mathcal{A}}$  é uma cobertura de  $K$  e o conjunto  $K$  contém os lados de todos os triângulos  $\mathcal{T}_i$ , concluímos que

$$\sum_{i=1}^{\ell} 4 \cdot 3^{m-n_i} \geq 3^m, \text{ de onde } \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{3^{n_i}} \geq \frac{1}{4}. \quad (1.16)$$

Por outra parte,

$$\frac{1}{3^{n_i}} = \left(\frac{1}{2^{n_i}}\right)^\lambda = \left(\frac{\bar{r}_i}{(1-\varepsilon)r_\emptyset}\right)^\lambda \leq \left(\frac{2r_i}{(1-\varepsilon)r_\emptyset}\right)^\lambda, \quad (1.17)$$

de onde concluímos que

$$\sum_{i=1}^{\ell} r_i^\lambda \geq \frac{(1-\varepsilon)^\lambda r_\emptyset^\lambda}{2^{2+\lambda}}, \quad (1.18)$$

e portanto  $\bar{\nu}_\lambda(K) \geq \frac{r_\emptyset^\lambda}{2^{2+\lambda}} > 0$ . Usando a Proposição 4, a proposição está provada.  $\square$

### 1.3 Medida de Hausdorff

Na seção anterior, definimos a medida exterior de Hausdorff  $\bar{\nu}_\lambda(B)$  de ordem  $\lambda$  para conjuntos de Borel  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Se bem a definição de  $\bar{\nu}_\lambda(B)$  faz sentido para todo conjunto  $B \subseteq \mathbb{R}^d$ , é um fato conhecido da teoria da medida que uma medida exterior definida num certo espaço mensurável  $E$  pode ser estendida a uma medida, somente se restringirmos a definição a conjuntos *mensuráveis*. A definição de conjunto mensurável depende da medida exterior em questão, mas é possível provar que no caso das medidas de Hausdorff, conjuntos de Borel são sempre mensuráveis, pelo que é possível falar da *medida* de Hausdorff  $\nu_\lambda(B)$  de um conjunto de Borel  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Se bem é possível usar a teoria da medida abstrata para construir ditas medidas de Hausdorff, nós só estaremos interessados no exemplo do triângulo de Sierpinski. Nesse caso, veremos que há a nossa disposição um método construtivo para definir a medida de Hausdorff em  $K$ .

Denotaremos por  $\mathcal{M}(K)$  o conjunto de medidas finitas definidas em  $K$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , seja  $\mu^n \in \mathcal{M}(K)$  a medida definida como

$$\mu^n(dx) = \frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} \delta_x(dx), \quad (1.19)$$

onde  $\delta_x$  é a delta de Dirac no ponto  $x \in K$ . Em outras palavras, para toda função  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int f(x)\mu^n(dx) = \frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} f(x). \quad (1.20)$$

**Proposição 6.** *Existe uma medida  $\mu$  em  $K$  tal que  $\mu^n \rightarrow \mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ , com respeito à topologia fraca no espaço de medidas finitas  $\mathcal{M}(K)$  em  $K$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 1,  $V_n$  tem  $\frac{3}{2}(3^n + 1)$  pontos. Seja  $\tau$  um dos triângulos de  $K_n$ . Então, existe  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n$  tal que  $\tau = \varphi_{\mathbf{i}}(\mathcal{T}_{\emptyset})$ . Portanto, para todo  $m > n$  temos que  $V_m \cap \tau = \varphi_{\mathbf{i}}(V_{m-n})$  e em particular o conjunto  $V_m \cap \tau$  tem  $\frac{3}{2}(3^{m-n} + 1)$  pontos. Logo,  $\mu^m(\tau) = \frac{3}{2}(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m})$ . Para  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A \subseteq K$ , definamos a oscilação de  $f$  em  $A$  como

$$\text{osc}(f; A) = \sup_{x, y \in A} |f(y) - f(x)|. \quad (1.21)$$

Lembremos que para mostrar convergência com respeito à topologia fraca em  $\mathcal{M}(K)$ , devemos provar convergência das integrais de funções contínuas. Denotaremos por  $\mathcal{C}(K)$  o espaço de funções contínuas  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Afirmamos que para toda  $f \in \mathcal{C}(K)$ , o limite (que chamaremos por enquanto de)  $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu^n$  existe. De fato, sejam  $m, n, \ell \in \mathbb{N}$  tais que  $m > n > \ell$ . Para cada  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\ell}$ , seja  $y_{\mathbf{i}}$  um dos vértices do triângulo  $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu^m - \int f d\mu^n \right| &\leq \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\ell}} \left| \int_{\mathcal{T}_{\mathbf{i}}} f d\mu^m - \int_{\mathcal{T}_{\mathbf{i}}} f d\mu^n \right| \\ &\leq \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\ell}} |f(y_{\mathbf{i}})| |\mu^m(\mathcal{T}_{\mathbf{i}}) - \mu^n(\mathcal{T}_{\mathbf{i}})| \\ &\quad + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\ell}} \text{osc}(f; \mathcal{T}_{\mathbf{i}}) (\mu^m(\mathbf{i}) + \mu^n(\mathcal{T}_{\mathbf{i}})) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Como o conjunto  $K$  é compacto, a função  $f$  é limitada e uniformemente contínua. Em particular,  $\sup_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_\ell} \text{osc}(f; \mathcal{T}_\mathbf{i})$  converge a 0 quando  $\ell \rightarrow \infty$ . A soma acima está limitada superiormente por

$$\frac{3}{2} \|f\|_\infty \left( \frac{1}{3^{n-\ell}} - \frac{1}{3^{m-\ell}} \right) + \frac{3}{2} \sup_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_\ell} \text{osc}(f; \mathcal{T}_\mathbf{i}) \left( 2 - \frac{1}{3^{m-\ell}} - \frac{1}{3^{n-\ell}} \right). \quad (1.23)$$

Tomando o limite quando  $m, n \rightarrow \infty$  e depois o limite quando  $\ell \rightarrow \infty$ , concluímos que a sequência  $\{\int f d\mu^n; n \in \mathbb{N}_0\}$  é de Cauchy, e portanto convergente.

Pela lineariedade do limite e da integração com respeito às medidas  $\{\mu^n; n \in \mathbb{N}_0\}$ , a aplicação  $f \mapsto \int f d\mu$  é um funcional linear de  $\mathcal{C}(K)$  em  $\mathbb{R}$ . Para provar que efetivamente existe uma medida  $\mu$  tal que  $\mu^n \rightarrow \mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ , é suficiente provar que este funcional linear é contínuo, e utilizar o Lema de Riesz. Mas para quaisquer  $f, g \in \mathcal{C}(K)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int g d\mu \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int (f - g) d\mu^n \right| \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - g\|_\infty \mu^n(K) \leq \frac{3}{2} \|f - g\|_\infty, \end{aligned} \quad (1.24)$$

o que prova a continuidade do funcional linear  $f \mapsto \int f d\mu$ , e finaliza a prova da proposição.  $\square$

Fora um fator multiplicativo não relevante, a medida  $\mu$  coincide com a medida de Hausdorff definida em  $K$ . Esta medida tem propriedades interessantes, como por exemplo auto-similariedade no sentido seguinte: para quaisquer conjunto de Borel  $A \subseteq K$  e  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,

$$\mu(\varphi_i(A)) = \frac{1}{3} \mu(A). \quad (1.25)$$

Notemos que  $\varphi_i$  é uma  $\frac{1}{2}$ -contração. Uma forma de entender a dimensão de Hausdorff de  $K$  é notar que  $\dim_H(K) = \log(\frac{1}{2}) / \log(\frac{1}{3})$ .

## 1.4 A métrica de Hausdorff e conjuntos invariantes

Na Seção 1.1 descrevemos duas construções equivalentes do triângulo de Sierpinski  $K$ . Ambas construções foram baseadas num método

iterativo; a diferença provém da escolha do conjunto inicial. A independência do resultado final não é uma coincidência, como veremos a continuação.

Sejam  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  dois conjuntos compactos. Definimos a distância (se bem ainda não sabemos se é uma distância ou não!) entre  $A$  e  $B$  como

$$d_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x - y| + \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |y - x|. \quad (1.26)$$

A interpretação geométrica da distância  $d_H(A, B)$  é a seguinte. O número  $\inf_{y \in B} |x - y|$  representa a distância do ponto  $x$  ao conjunto  $B$ , pelo que  $d_H(A, B)$  é simplesmente a distância do ponto mais afastado de  $A$  ao conjunto  $B$ , mais a distância do ponto mais afastado de  $B$  ao conjunto  $A$ .

Em princípio, o número  $d_H(A, B)$  está bem definido para quaisquer conjuntos  $A, B \in \mathbb{R}^d$  (ainda que possa ser igual a  $\infty$ ), mas a restrição a conjuntos compactos possui propriedades especiais.

**Proposição 7.** *Seja  $\mathcal{K}$  a família de conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$ . A função  $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma distância.*

*Demonstração.* Lembremos que para provar que a função  $d_H(\cdot, \cdot)$ , temos que provar que ela é simétrica, positiva a menos que os argumentos sejam iguais, e que ela satisfaz a desigualdade triangular. Sejam  $A, B \in \mathcal{K}$ . Se  $d_H(A, B) = 0$ , então  $\inf_{y \in B} |x - y| = 0$  para todo  $x \in A$ . Como  $B$  é compacto e a norma Euclidiana é uma função contínua, o ínfimo é alcançado em algum ponto, pelo que  $x \in B$ . Logo,  $A \subseteq B$ . De forma recíproca,  $B \subseteq A$  e concluímos que  $A = B$ . A definição de  $d_H$  é claramente simétrica nas suas variáveis, pelo que só falta provar a desigualdade triangular. Sejam  $A, B, C \in \mathcal{K}$ . Então,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} \inf_{z \in C} |x - z| &\leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \inf_{z \in C} \{|x - y| + |y - z|\} \\ &\leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x - y| + \sup_{y \in B} \inf_{z \in C} |y - z|, \end{aligned} \quad (1.27)$$

e trocando os papéis de  $C$  e  $A$ ,

$$\sup_{z \in C} \inf_{x \in A} |x - z| \leq \sup_{z \in C} \inf_{y \in B} |y - z| + \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} |y - x|. \quad (1.28)$$

Somando ambas desigualdades, obtemos a desigualdade triangular para  $d_H$ , o que prova a proposição.  $\square$

**Proposição 8.** *O espaço  $(\mathcal{K}, d_H)$  é um espaço métrico completo.*

*Demonstração.* Na proposição anterior, provamos que  $(\mathcal{K}, d_H)$  (chamado simplesmente de  $\mathcal{K}$  daqui em diante) é um espaço métrico. Falta provar a completitude dele. Seja  $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{K}$ . Para  $A \in \mathcal{K}$  e  $r \in \mathbb{R}_+$ , definamos a bola fechada de raio  $r$  em torno de  $A$  como

$$\mathcal{B}[A; r] = \{y \in \mathbb{R}^d; \inf_{x \in A} |x - y| \leq r\}. \quad (1.29)$$

Notemos que  $d_H(A, \mathcal{B}[A; r]) = r$  e notemos também que para quaisquer conjuntos  $A, B \in \mathcal{K}$ , se  $d_H(A, B) \leq r$  então  $A \subseteq \mathcal{B}[B; r]$  e  $B \subseteq \mathcal{B}[A; r]$ .<sup>4</sup> Suponhamos por agora que  $d_H(C_{n+1}, C_n) \leq \frac{1}{3^{n+1}}$ . Nesse caso,

$$d_H(C_m, C_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \text{ para todo } m \geq n. \quad (1.30)$$

Definamos  $F_n = \mathcal{B}[C_n; \frac{1}{3^n}]$ . Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d_H(F_{n+1}, C_n) &\leq d_H(F_{n+1}, C_{n+1}) + d_H(C_{n+1}, C_n) \\ &\leq \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Portanto,  $F_{n+1} \subseteq F_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, a sequência  $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$  é uma sequência de compactos encaixados, pelo que o conjunto

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad (1.32)$$

é um conjunto compacto e não vazio. Afirmamos que  $C$  é o limite da sequência  $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$ . De fato, pela Proposição 9 a seguir,  $d_H(F_n, C) = 0$  converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso, pela construção de  $F_n$  temos que  $d_H(C_n, F_n) = \frac{1}{3^{n+1}}$  e em particular  $d_H(C_n, F_n)$  também converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto prova a proposição no caso em que  $d_H(C_{n+1}, C_n) \leq \frac{1}{3^{n+1}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . No caso

<sup>4</sup>De fato, alguns autores definem a distância  $d_H(A, B)$  como o mínimo dos números  $r$  com esta propriedade.

geral, é possível escolher uma subsequência  $\{n_\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$  de modo que  $d_H(C_{n_{\ell+1}}, C_{n_\ell}) \leq \frac{1}{3^{\ell+1}}$  para todo  $\ell \in \mathbb{N}$ . Esta subsequência converge a um limite  $C$ . Pela desigualdade triangular,

$$d_H(C_\ell, C) \leq d_H(C_\ell, C_{n_\ell}) + d_H(C_{n_\ell}, C), \quad (1.33)$$

o que prova a convergência da sequência completa ao conjunto  $C \in \mathcal{K}$ .  $\square$

**Proposição 9.** *Seja  $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$  uma sequência de compactos encaixados, isto é,  $F_{n+1} \subseteq F_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $F = \bigcap_n F_n$ . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(F_n, F) = 0 \quad (1.34)$$

*Demonstração.* Como  $F_{n+1} \subseteq F_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$d_H(F_{n+1}, F) \leq d_H(F_n, F) \quad (1.35)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, a sequência  $\{d_H(F_n, F); n \in \mathbb{N}\}$  tem um limite finito e não negativo  $a$ . Então existe uma sequência  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  tal que  $x_n \in F_n$  e  $d(F, x_n) \geq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x_n \in F_1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma subsequência  $n'$  tal que  $x_{n'}$  converge a um ponto  $x$ . Mais ainda, para todo  $n \in \mathbb{N}$  a sequência  $\{x_{n'}\}_{n'}$  está eventualmente em  $F_n$ . Logo,  $x \in F_n$  para todo  $n$  e em particular  $x \in F$ . Por outra parte,  $d_H(x, F) \geq d_H(x_{n'}, F) - d_H(x, x_{n'})$ , que converge a  $a$ . Logo,  $a = 0$  e a proposição está provada.  $\square$

A distância  $d_H$  é conhecida como a *métrica de Hausdorff* no espaço  $\mathcal{K}$ . Consideremos agora a função  $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  definida como

$$\Phi(A) = \bigcup_{i=0,1,2} \varphi_i(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{K}. \quad (1.36)$$

Como as funções  $\{\varphi_i; i = 0, 1, 2\}$  são  $\frac{1}{2}$ -contrações (em  $\mathbb{R}^2$ !), vemos que  $d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \leq \frac{1}{2}d_H(A, B)$  para quaisquer compactos  $A, B \in \mathcal{K}$ . Em outras palavras,  $\Phi$  é uma  $\frac{1}{2}$ -contração (em  $\mathcal{K}$ !). A proposição seguinte se conhece como o teorema de ponto fixo de Banach:

**Proposição 10.** *Seja  $(E, d)$  um espaço métrico completo e seja  $\gamma \in [0, 1)$ . Seja  $\Phi : E \rightarrow E$  uma  $\gamma$ -contração, isto é,  $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ . Então, a equação  $\Phi(x) = x$  tem uma única solução.*



Esta proposição é clássica, pelo que omitiremos a prova dela. Usando esta proposição para a função  $\Phi$  definida acima, vemos que existe um único conjunto compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que

$$K = \bigcup_{i=0,1,2} \varphi_i(K). \quad (1.37)$$

Mais ainda, para qualquer compacto  $K' \subseteq \mathbb{R}^2$ , a sequência de compactos  $\{\Phi^n(K'); n \in \mathbb{N}\}$  converge a  $K$  com respeito à métrica de Hausdorff. O conjunto  $K$  é um velho conhecido nosso: corresponde ao triângulo de Sierpinski. De fato, esta proposição pode ser usada para obter uma nova prova da Proposição 2.

## 1.5 Exemplos de fractais

A Proposição 10 nos permite construir exemplos de fractais de maneira simples.

Para  $i, j = 0, 1, 2$ , definamos  $\psi_{i,j} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$\psi_{i,j}(x) = \frac{1}{3}(x + (i, j)) \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.38)$$

O *carpete de Sierpinski* se define como o único compacto  $K_{CS}$  tal que

$$K_{CS} = \bigcup_{(i,j) \neq (1,1)} \psi_{i,j}(K_{CS}). \quad (1.39)$$

É possível provar que a dimensão de Hausdorff do carpete de Sierpinski  $K_{CS}$  é igual a  $\frac{\log 8}{\log 3}$ . Ao olhar a Figura 1.3, o triângulo de Sierpinski e o carpete de Sierpinski parecem similares; um deles é obtido retirando o triângulo central de um triângulo equilátero e repetindo o procedimento nos três triângulos resultantes, e o outro é obtido retirando o quadrado central de um quadrado e repetindo o procedimento nos oito quadrados resultantes. No entanto, do ponto de vista da análise nesses fractais, eles possuem uma diferença essencial. O triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal *finitamente ramificado*, isto é, é possível separar ele em pedaços desconexos tirando um número finito (neste caso dois) de pontos dele. O carpete de Sierpinski *não é* finitamente ramificado. A teoria de análise que

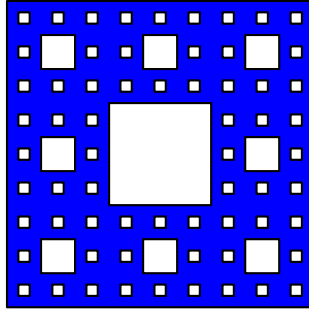


Figura 1.3: O carpete de Sierpinski

apresentaremos nestas notas em princípio pode ser generalizada para fractais finitamente ramificados, mas para fractais como o carpete de Sierpinski, é necessário desenvolver uma teoria completamente diferente.

Um outro exemplo de fractal finitamente ramificado que pode ser construído de forma similar ao carpete de Sierpinski é o fractal de Vicsek, que se define como o único compacto  $K_V$  tal que

$$K_V = \bigcup_{i+j \text{ par}} \psi_{i,j}(K_V). \quad (1.40)$$

Neste caso, retirando o ponto  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , separamos o conjunto  $K_V$  em quatro partes desconexas. A dimensão de Hausdorff de  $K_V$  é igual a  $\frac{\log 5}{\log 3}$ .

Um exemplo muito popular de fractal finitamente ramificado é a *árvore de Hata*. Consideremos as funções

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}(x + (1, 0)). \quad (1.41)$$

Sejam  $\gamma \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma rotação. Consideremos além de  $f_1$  e  $f_2$  a função

$$f_0(x) = \gamma T x + (0, 1). \quad (1.42)$$

A árvore de Hata se define então como o único compacto  $K_H$  tal que

$$K_H = \bigcup_{i=0,1,2} f_i(K_H). \quad (1.43)$$

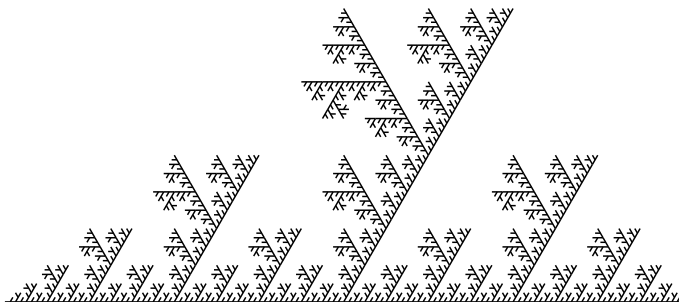


Figura 1.4: A árvore de Hata com  $\gamma = \frac{1}{2}$  e rotação de  $60^\circ$ .

Variando os parâmetros  $\gamma$  e  $T$  podemos obter fractais que se parecem com “árvores” ou “folhas”. A restrição  $\gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$  provém da proposição seguinte, que enunciaremos sem demonstração:

**Proposição 11.** *Seja  $\psi = \{\psi_i; i \in \mathcal{I}\}$  uma família finita de funções contínuas em  $\mathbb{R}^d$ . Seja*

$$\gamma_i = \sup_{x \neq y} \frac{|\psi_i(x) - \psi_i(y)|}{|x - y|} \quad (1.44)$$

e suponhamos que  $\gamma_i < 1$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Então, existe um único compacto  $K_\psi$  tal que

$$K_\psi = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \psi_i(K_\psi). \quad (1.45)$$

Além disso, seja  $\beta \geq 0$  tal que  $\sum_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i^\beta = 1$ . Então,  $\dim_H(K_\psi) \leq \beta \wedge d$ .

# Capítulo 2

## O Laplaciano em $K$

### 2.1 O Laplaciano discreto em $\mathbb{R}^d$

O nosso objetivo é construir o operador Laplaciano em  $K$ . Para começar, nesta seção recordaremos brevemente a definição e algumas das propriedades do Laplaciano em  $\mathbb{R}^d$ . Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $\mathcal{C}^2$  se as derivadas parciais  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  existem e são contínuas para todo par ordenado  $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$ . Seja  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^2$ . O Laplaciano  $\Delta f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  se define como

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.1)$$

Seja  $n \in \mathbb{N}$  um parâmetro de escala. Uma aproximação discreta clássica do Laplaciano  $\Delta f$  é dada por

$$\Delta_n f(x) = n^2 \sum_z \left( f\left(x + \frac{z}{n}\right) - f(x) \right), \quad (2.2)$$

onde a soma é sobre vetores  $z$  da forma  $\pm e_i$ , onde  $\{e_i; i = 1, \dots, d\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ . Esta fórmula reflete a intuição geométrica que nos disse que  $\Delta f(x)$  representa a diferença entre o valor de  $f$  em  $x$  e o valor médio de  $f$  numa vizinhança em torno de  $x$ . Porém, há um

elemento que não é explicado pela intuição geométrica: a constante de escala  $n^2$  em frente à soma definindo  $\Delta_n f(x)$ . Este fato que parece completamente trivial em  $\mathbb{R}^d$  será de importância capital na definição do Laplaciano no triângulo de Sierpinski  $K$ .

## 2.2 O Laplaciano discreto num grafo finito

Para compreender melhor o Laplaciano discreto num contexto geral, precisaremos de introduzir a noção de *grafo*. Um grafo é um par  $G = (V, E)$  constituído por um conjunto de *vértices*  $V$ , finito ou enumerável, e por um conjunto de *elos*  $E \subseteq V \times V$ . Os elos  $e \in E$  representam uniões ou conexões entre vértices de  $V$ . Se o conjunto  $V$  for finito (e portanto  $E$  também será finito), dizemos que  $G$  é finito. Dizemos que um grafo  $G$  não tem laços se para todo  $x \in V$ ,  $(x, x) \notin E$ . Em outras palavras, se não há auto-conexões no grafo  $G$ . O grafo  $G$  se diz *não orientado* se  $E$  for um conjunto simétrico, isto é, se  $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$  para todo par  $(x, y) \in V \times V$ . Seja  $G = (V, E)$  um grafo não orientado. Dizemos que  $x, y \in V$  são *vizinhos* se  $(x, y) \in E$  (e portanto  $(y, x) \in E$  também). Nesse caso, usaremos a notação  $x \sim y$ . O grafo  $G$  se diz *conexo* se para quaisquer  $x, y \in V$  existir uma sequência finita de vértices  $\gamma = \{x_0, x_1, \dots, x_\ell\}$  tal que  $x_0 = x$ ,  $x_\ell = y$  e  $x_{i-1} \sim x_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ . Dita sequência se diz um *caminho* de  $x$  a  $y$ , e o número  $\ell$  se diz o *comprimento* do caminho  $\gamma$ . Chamaremos de *passos* do caminho  $\gamma$  a cada um dos pares  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

A partir de agora, suporemos que  $G = (V, E)$  é um grafo finito, sem laços, não orientado e conexo. Para não ter que lidar com casos triviais, suporemos que  $G$  tem mais de um vértice. A distância  $d_G(x, y)$  entre dois pontos  $x, y \in V$  se define como o menor número  $\ell$  tal que existe um caminho de  $x$  a  $y$  de comprimento  $\ell$ . Como o grafo é conexo,  $d_G$  está bem definida. Concatenando um caminho de  $x$  a  $y$  de comprimento mínimo com um caminho de  $y$  a  $z$  de comprimento mínimo, vemos que  $d_G$  satisfaz a desigualdade triangular. A simetria de  $d_G$  vem do fato que o grafo  $G$  é não orientado. Por definição  $d_G(x, y) = 0 \iff x = y$ . Logo,  $d_G$  é efetivamente uma distância em  $V$ .

O *grau* de um vértice  $x \in V$  se define como o número de vizinhos

de  $x$ :  $\text{gr}(x) = \#\{y \in V; y \sim x\}$ . Notemos que em qualquer grafo conexo com mais de um ponto,  $\text{gr}(x) \geq 1$  para todo  $x \in V$ .

Seja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos  $\mathcal{L}f : V \rightarrow \mathbb{R}$  como<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) \text{ para todo } x \in V. \quad (2.3)$$

O operador  $\mathcal{L}$  definido desta forma é conhecido como o *Laplaciano* no grafo  $G$ . O operador  $\mathcal{L}$  tem a seguinte interpretação probabilística. Um passeio aleatório  $\{x(t); t \geq 0\}$  se movimenta em  $V$  de acordo à dinâmica seguinte. Quando o passeio está no sítio  $x \in V$ , ele aguarda um tempo exponencial de parâmetro  $\text{gr}(x)$ , no fim do qual o passeio salta a um dos vizinhos de  $x$ , escolhido uniformemente ao acaso. O operador  $\mathcal{L}$  resulta ser o gerador da cadeia  $\{x(t); t \geq 0\}$ .

## 2.3 Os grafos associados a $K$

Na Seção 1.4 vimos que o processo iterativo que leva à definição do triângulo de Sierpinski define o mesmo conjunto para qualquer conjunto compacto inicial. Na Figura 2.1 vemos as primeiras etapas da construção iterativa de  $K$ , usando como conjunto inicial os lados do triângulo  $\mathcal{T}_\emptyset$ . Em vista da discussão da seção anterior sobre grafos, vértices e elos, é muito tentador usar estas figuras para definir uma sequência de grafos associados ao triângulo de Sierpinski  $K$ . Os vértices do grafo  $G_n$  seriam os vértices dos  $3^n$  triângulos de lado  $2^n$  que formam a  $n$ -ésima etapa da construção, e os elos seriam os  $3^{n+1}$  lados destes triângulos.

Definamos estes grafos  $\{G_n = (V_n, E_n); n \in \mathbb{N}\}$  de forma mais rigorosa. A sequência de vértices  $\{V_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  dos grafos  $\{G_n; n \in \mathbb{N}\}$  já foi definida na Seção 1.1. Definimos a sequência de elos  $\{E_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  de forma recursiva. Tomamos  $E_0 = \{(a_i, a_j); i \neq j \in \{0, 1, 2\}\}$  e para  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$E_{n+1} = \{(\varphi_i(x), \varphi_i(y)); (x, y) \in E_n, i = 0, 1, 2\}. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Usaremos a convenção seguinte. Cada vez que apareça o símbolo  $y \sim x$  no índice de uma soma, a soma será feita sobre todas as variáveis mudas, isto é, sobre todas as variáveis que não apareçam fora da soma. Por exemplo, a soma acima é feita sobre todos os vizinhos  $y$  de  $x$ . De forma sistemática, se a soma percorre só uma das variáveis  $x, y$ , a mesma será escrita à esquerda do símbolo  $\sim$ , como na soma acima.

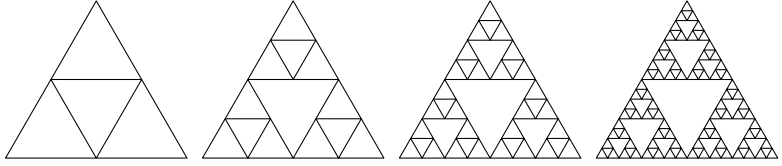
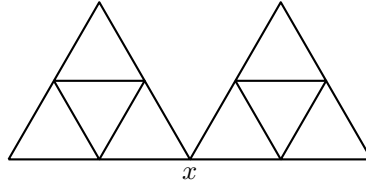


Figura 2.1: Os grafos associados ao triângulo de Sierpinski

Não é difícil se convencer de que esta definição rigorosa coincide com a definição formal dada acima. Algumas propriedades elementares do grafo  $G_n$  são as seguintes. O grafo  $G_n$  tem  $\frac{3}{2}(3^n + 1)$  vértices e  $3^{n+1}$  elos. Para todo  $x \in V_n \setminus V_0$ ,  $\text{gr}(x) = 4$ , enquanto  $\text{gr}(a_i) = 2$  para  $i = 0, 1, 2$ . Para todo  $x \in V_\infty \setminus V_0$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, a vizinhança de  $x$  é como na figura 2.2:

Figura 2.2: A vizinhança do ponto  $x$ 

Para  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos o Laplaciano discreto  $\Delta_n f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\Delta_n f(x) = 5^n \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)). \quad (2.5)$$

Exceto pela constante  $5^n$ , misteriosa neste ponto,  $\Delta_n$  é simplesmente o Laplaciano no grafo  $G_n$ . É difícil justificar a escolha da constante  $5^n$  em uma frase só; de fato passaremos grande parte das próximas duas seções justificando esta escolha.

## 2.4 O princípio de Dirichlet em $\mathbb{R}^d$

Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  um domínio regular. Por simplicidade, podemos tomar  $D = \{y \in \mathbb{R}^d; |y| \leq 1\}$ . Seja  $\partial D$  a fronteira de  $D$  e seja  $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $g$  é suave, e consideremos a solução da equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{em } D \\ f = g & \text{em } \partial D \end{cases} \quad (2.6)$$

A função  $f$  satisfaz o seguinte *princípio variacional*: para toda função  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  suave tal que  $h = g$  em  $\partial D$ ,

$$\int_D |\nabla f|^2 dx \leq \int_D |\nabla h|^2 dx. \quad (2.7)$$

Além disso, há igualdade se e somente se  $h = f$ . Em outras palavras, a solução do problema de Laplace coincide com o minimizante da *forma da energia*

$$\int_D |\nabla h|^2 dx \quad (2.8)$$

sob as funções que satisfazem  $h = g$  em  $\partial D$ . A integral acima é chamada de forma da energia por analogia com o seguinte problema eletrostático. Imaginemos que  $D$  é uma esfera de metal oca. Imagine-mos que a esfera está dividida em dois hemisférios separados por uma banda de material isolante. Agora impomos uma densidade de carga elétrica num hemisfério, e uma densidade diferente noutro hemisfério. O potencial elétrico  $V$  produzido pela configuração de carga especificada é a solução da equação de Laplace, onde  $g$  é a densidade de carga especificada. O campo elétrico associado é dado por  $E = \nabla V$ , e a energia eletrostática acumulada no interior da esfera é dada por  $\int |E|^2 dx$ .

## 2.5 A forma da energia

Para justificar a escolha da constante  $5^n$  na definição de  $\Delta_n$ , temos que compreender a inter-relação entre os diferentes grafos  $G_n$ . Frequentemente, vários dos grafos  $\{G_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  serão considerados simultaneamente, pelo que adotaremos algumas convenções. Seja



$V_\infty = \cup_n V_n$ . Para  $x, y \in V_\infty$ , escreveremos  $x \sim_n y$  se  $(x, y) \in E_n$ , isto é, se  $x$  e  $y$  são vizinhos no grafo  $G_n$ . Em particular,  $x, y \in V_n$ . Para  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $W \supseteq V_n$  e  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos  $\pi_n f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\pi_n f(x) = f(x)$  para qualquer  $x \in V_n$ . Em outras palavras,  $\pi_n f$  é a restrição de  $f$  a  $V_n$ . Usaremos a notação simplificada  $\Delta_n f$  para a função  $\Delta_n(\pi_n f) : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se não houver risco de confusão, usaremos a notação  $f$  em vez de  $\pi_n f$ .

Seja  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dada, e definamos para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  a *forma da energia*

$$\mathcal{E}_n(f, f) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{x \sim_n y} (f(x) - f(y))^2. \quad (2.9)$$

Uma mudança de variáveis esperta nesta soma mostra que  $\mathcal{E}_n(f, f) = -\int f \Delta_n f d\mu^n$ , o que em vista da discussão na seção anterior justifica o nome de forma da energia para  $\mathcal{E}_n(f, f)$  (exceto pela ainda misteriosa constante  $5^n$ !). Esta identidade é tão importante que a enunciaremos como uma proposição:

**Proposição 12** (Fórmula de Integração por Partes). *Para toda função  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\mathcal{E}_n(f, f) = - \int f(x) \Delta_n f(x) \mu^n(dx). \quad (2.10)$$

O seguinte par de proposições explicam por quê a escolha da constante  $5^n$  é especial.

**Proposição 13.** *Sejam  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Então,*

- a)  $\inf_{\beta_i \in \mathbb{R}} \sum_{i \neq j} \{(\alpha_i - \beta_j)^2 + \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_j)^2\} = \frac{3}{5} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ , onde ambas somas são sobre  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ ,
- b) o ínfimo é atingido se e somente se  $\beta_i = \frac{2s - \alpha_i}{5}$ , onde  $s = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ .

*Demonstração.* Usando multiplicadores de Lagrange, a prova desta proposição não passa dum exercício um pouco longo de cálculo em várias variáveis, pelo que a omitiremos. O leitor é fortemente convidado a fazer a prova, pois esta proposição é chave no curso destas notas.  $\square$

**Proposição 14.** *Para quaisquer  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ ,*

$$\mathcal{E}_{n+1}(f, f) \geq \mathcal{E}_n(f, f). \quad (2.11)$$

*Demonstração.* Notemos que  $\mathcal{E}_{n+1}(f, f)$  pode ser decomposta em  $3^n$  somas da forma

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} \sum_{i \neq j} \left\{ (\alpha_i - \beta_j)^2 + \frac{1}{2}(\beta_i - \beta_j)^2 \right\}, \quad (2.12)$$

onde os números  $\alpha_i$  são os valores de  $f$  nos vértices de um dos triângulos de  $V_n$  e os números  $\beta_i$  são os valores da função  $f$  nos pontos médios de dito triângulo. Usando a Proposição 13 em cada um destes triângulos, obtemos que  $\mathcal{E}_{n+1}(f, f) \geq \mathcal{E}_n(f, f)$ , o que prova a proposição.  $\square$

**Proposição 15.** *Para toda  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  existe uma única função  $g : V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = \pi_n g$  e*

$$\mathcal{E}_n(f, f) = \mathcal{E}_{n+1}(g, g). \quad (2.13)$$

*Demonstração.* Seja  $\tau$  um dos triângulos de  $V_n$  e sejam  $\{x_0, x_1, x_2\}$  os vértices de  $\tau$ . Sejam

$$y_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_0), \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \quad (2.14)$$

os pontos de  $V_{n+1} \setminus V_n$  contidos em  $\tau$ . Notemos que todo ponto em  $V_{n+1} \setminus V_n$  é desta forma para algum triângulo  $\tau$  de  $V_n$ . É suficiente definir  $g(x_i) = f(x_i)$  e

$$g(y_i) = \frac{2s - f(x_i)}{5} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \quad \text{onde } s = f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) \quad (2.15)$$

e notar que pela Proposição 13 a igualdade (2.13) vale, e para qualquer outra escolha de  $g$  a igualdade não vale.  $\square$

Em vista desta proposição, podemos definir, para qualquer função  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(f, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f, f). \quad (2.16)$$

Como o limite é monótono, ele sempre existe; no entanto ele pode ser igual a  $\infty$ . Chamaremos a  $\mathcal{E}(f, f)$  a *energia* de  $f$ . Para funções constantes,  $\mathcal{E}_n(f, f) = 0$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$ . Fora este exemplo trivial, pelo momento não podemos exibir nenhuma função  $f$  com energia finita. Nas próximas seções veremos que por uma parte  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$  para uma família razoavelmente grande de funções  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  e por outra parte a condição  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$  implica várias propriedades desejáveis para a função  $f$ .

Será útil estender a definição da forma da energia mais um pouco: para  $f, g : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ , definamos

$$\mathcal{E}_n(f, g) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{x \sim_n y} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)). \quad (2.17)$$

A aplicação  $(f, g) \mapsto \mathcal{E}_n(f, g)$  se diz a forma bilinear associada à forma da energia  $\mathcal{E}_n(\cdot, \cdot)$ . Notemos que  $\mathcal{E}_n(f, g)$  pode também ser definida usando a *identidade de polarização*

$$\mathcal{E}_n(f, g) = \frac{1}{4}(\mathcal{E}_n(f + g, f + g) - \mathcal{E}_n(f - g, f - g)). \quad (2.18)$$

A identidade de polarização permite estender a fórmula de integração por partes da Proposição 12: para quaisquer  $f, g : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{E}_n(f, g) = - \int f(x) \Delta_n g(x) \mu^n(dx) = - \int g(x) \Delta_n f(x) \mu^n(dx). \quad (2.19)$$

## 2.6 Resistências e métricas em $K$

Por enquanto não conhecemos nenhuma função  $f$  não trivial com energia finita. Posporemos a construção de funções não triviais  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$  para a próxima seção; nesta seção começaremos supondo que  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$  e deduziremos a partir desta suposição algumas propriedades de  $f$ . Se bem pode parecer estranho pospor a construção de funções de energia finita, por uma parte precisaremos na construção de alguns dos resultados desta seção, e por outra parte será útil construir ditas funções já sabendo algumas das propriedades que terão.

As definições a seguir podem parecer pouco naturais à primeira vista, mas elas são motivadas pela teoria de potencial discreta, que por sua vez está motivada pela teoria de circuitos elétricos. Uma excelente introdução ao assunto pode ser encontrada na monografia "Cadenas de Markov y Teoría de Potencial", do 28º Colóquio Brasileiro de Matemática [2].

Já mencionamos acima que se  $f$  for constante, então  $\mathcal{E}_n(f, f) = 0$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$ . A recíproca vale também: se  $\mathcal{E}_n(f, f) = 0$ , então  $f$  é constante em  $V_n$ . De fato, como  $\mathcal{E}_n(f, f)$  é igual à soma de termos não negativos,  $\mathcal{E}_n(f, f) = 0$  implica que todos esses termos são nulos, o que por sua vez implica que  $f(x) = f(y)$  para quaisquer  $x, y \in V_n$  tais que  $x \sim y$ . Como o grafo  $G_n$  é conexo, isto implica que  $f$  é constante em  $V_n$ . Para cada  $x, y \in V_n$  definamos

$$\mathcal{R}_n(x, y) = \sup_{\substack{f: V_n \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{E}_n(f, f) \neq 0}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\mathcal{E}_n(f, f)}. \quad (2.20)$$

Notemos que para qualquer  $x \in V_n$ ,  $\mathcal{R}(x, x) = 0$ . Notemos também que para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathcal{E}_n(af + b, af + b) = a^2 \mathcal{E}_n(f, f)$  para toda  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Escolhendo  $a$  e  $b$  de forma adequada, podemos reescrever  $\mathcal{R}_n(x, y)$  como

$$\mathcal{R}_n(x, y) = \sup_{\substack{f(x)=0 \\ f(y)=1}} \mathcal{E}_n(f, f)^{-1}. \quad (2.21)$$

Tomando  $a = \mathcal{E}_n(f, f)^{-1/2}$  e  $b = a \sum_z f(z)$ , podemos obter mais uma fórmula para  $\mathcal{R}_n(x, y)$ :

$$\mathcal{R}_n(x, y) = \sup_f |f(x) - f(y)|^2, \quad (2.22)$$

onde o supremo é sobre as funções  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\mathcal{E}_n(f, f) = 1$  e  $\sum_z f(z) = 0$ . Notemos que o conjunto de funções que satisfazem estas duas propriedades é compacto: a primeira condição define um *cilindro* em  $\mathbb{R}^{\#V_n}$  e a segunda condição define um hiperplano de codimensão 1, ortogonal ao cilindro anterior. Em particular, qualquer um dos supremos na definição de  $\mathcal{R}_n(x, y)$  é atingido em alguma função  $f$ .

A função  $\mathcal{R}_n(x, y)$  é conhecida como a resistência entre os pontos  $x$  e  $y$ , e corresponde ao inverso da corrente gerada entre  $x$  e  $y$  ao

aplicar um potencial elétrico unitário entre  $x$  e  $y$ . Se nada disto faz sentido para o leitor, não importa, pois não usaremos mais nada da teoria de potencial nestas notas. A função  $\mathcal{R}_n : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  é útil devido à proposição seguinte:

**Proposição 16.** *A função  $(x, y) \mapsto \sqrt{\mathcal{R}_n(x, y)}$  é uma distância em  $V_n$ .*

*Demonstração.* Como  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 1$ , há pelo menos um par de vértices  $x_0 \sim y_0$  em  $V_n$  tais que  $f(x_0) \neq f(y_0)$ , pelo que  $\mathcal{R}_n(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$ . Considerando  $f = 1 - f$ , vemos que  $\mathcal{R}_n(x, y) = \mathcal{R}_n(y, x)$ . Notemos que

$$\sqrt{\mathcal{R}_n(x, y)} = \sup_{f \neq \text{cte.}} \frac{|f(y) - f(x)|}{\sqrt{\mathcal{E}_n(f, f)}}. \quad (2.23)$$

A desigualdade

$$\frac{|f(z) - f(x)|}{\sqrt{\mathcal{E}_n(f, f)}} \leq \frac{|f(z) - f(y)|}{\sqrt{\mathcal{E}_n(f, f)}} + \frac{|f(y) - f(x)|}{\sqrt{\mathcal{E}_n(f, f)}}, \quad (2.24)$$

válida para toda função  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  não constante, implica a desigualdade triangular.  $\square$

Esta definição parece simples, mas veremos que tem consequências importantes. A ideia é que, por uma parte, é possível provar que a distância  $\sqrt{\mathcal{R}_n(\cdot, \cdot)}$  é Hölder-contínua com respeito à distância Euclidiana em  $V_n$ , uniformemente em  $n$ , e por outra parte é possível provar que toda função  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  é Hölder-contínua com respeito à distância  $\sqrt{\mathcal{R}_n(\cdot, \cdot)}$ . Esta ideia será desenvolvida na seguinte sequência de proposições:

**Proposição 17.** *Para quaisquer  $m > n \in \mathbb{N}_0$  e quaisquer  $x, y \in V_n$ ,  $d_{G_m}(x, y) = 2^{m-n} d_{G_n}(x, y)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in V_n$  e consideremos um caminho  $\gamma = \{x_0, \dots, x_\ell\}$  em  $G_{n+1}$  entre  $x$  e  $y$  de comprimento mínimo. Notemos que o conjunto  $V_n$  é totalmente desconexo como subconjunto do grafo  $G_{n+1}$ , isto é, não há elos em  $E_{n+1}$  unindo vértices de  $V_n$ . O conjunto  $V_{n+1} \setminus V_n$  é quase desconexo, no sentido que as partes conexas dele são

formadas por três pontos formando triângulos no interior dos triângulos de  $V_n$ , vide Figura 2.3. Sejam  $y_0 = x_{n_0}, y_1 = x_{n_1}, \dots, y_k = x_{n_k}$  os pontos pertencentes a  $V_n$  do caminho  $\gamma$ , ordenados de forma crescente. Em particular,  $y_0 = x$  e  $y_k = y$ . Afirmamos que  $n_i = 2i$  para todo  $i$ . De fato, para ir de  $x = y_0$  a  $y_1$  precisamos pelo menos de 2 passos, pois  $V_n$  é totalmente desconexo em  $G_{n+1}$ . Como  $V_{n-1}$  é totalmente desconexo em  $G_n$ , vemos que  $y_1$  tem que ser vizinho de  $x$  em  $V_n$ . Portanto, há efetivamente um caminho de comprimento 2 entre  $x$  e  $y_1$ , o que prova que  $n_1 = 2$ . O mesmo argumento prova que  $n_i - n_{i-1} = 2$  para todo  $i$ , o que prova a afirmação. Uma consequência do argumento que acabamos de usar, é que a um caminho de comprimento mínimo entre  $x$  e  $y$  em  $G_{n+1}$  podemos associar um caminho entre  $x$  e  $y$  em  $G_n$  de comprimento igual à metade do comprimento do caminho original. Ou seja,  $d_{G_{n+1}}(x, y) \geq 2d_{G_n}(x, y)$ . Dado um caminho de comprimento mínimo  $\{y_0, \dots, y_k\}$  entre  $x$  e  $y$  em  $G_n$ , é muito fácil construir um caminho em  $G_{n+1}$  entre  $x$  e  $y$  de comprimento igual ao dobro do caminho original: basta adicionar ao caminho os pontos da forma  $\frac{1}{2}(y_i + y_{i-1})$  para  $i = 1, \dots, k$ . Isto mostra que  $d_{G_{n+1}}(x, y) \leq 2d_{G_n}(x, y)$ , o que prova que  $d_{G_{n+1}}(x, y) = 2d_{G_n}(x, y)$ . De forma recursiva, concluímos que  $d_{G_{n+p}}(x, y) = 2^p d_{G_n}(x, y)$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ , o que prova a proposição.  $\square$

Em vista da Proposição 17, é natural definir a função  $d_V : V_\infty \times V_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+$  como  $d_V(x, y) = \frac{1}{2^n} d_{G_n}(x, y)$  para quaisquer  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $x, y \in V_n$  (note-se que para quaisquer  $x, y \in V_\infty$ , existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $x, y \in V_n$ ). A função  $d_V$  é uma distância em  $V_\infty$ , pois ela herda as propriedades de distância das distâncias  $d_{G_n}$ . A proposição seguinte nos dá uma primeira estimativa para a distância  $\sqrt{\mathcal{R}_n(\cdot, \cdot)}$ :

**Proposição 18.** *Para quaisquer  $x \sim_n y \in V_n$ ,  $\sqrt{\mathcal{R}_n(x, y)} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n}{2}}$ .*

*Demonstração.* É suficiente observar que se  $x \sim_n y$ , então  $\mathcal{E}_n(f, f) \geq (5/3)^n (f(y) - f(x))^2$ .  $\square$

Observemos que esta estimativa é exata a menos de constantes: usando a função teste  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z = x \\ 0 & \text{se } z \neq x, \end{cases} \quad (2.25)$$

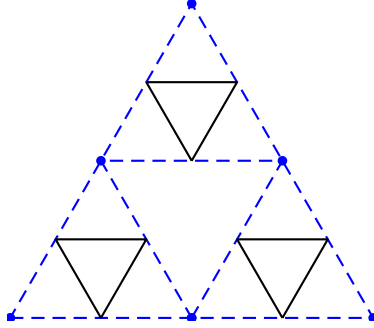


Figura 2.3: O conjunto  $V_{n+1} \setminus V_n$  como subgrafo de  $V_{n+1}$ . Os pontos de  $V_n$  estão marcados em azul, os elos entre pontos de  $V_{n+1} \setminus V_n$  estão desenhados em preto sólido e os elos restantes estão desenhados em azul pontilhado.

vemos que  $\sqrt{\mathcal{R}_n(x, y)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n}{2}}$ .

**Proposição 19.** Para quaisquer  $x, y \in V_n$ ,  $\mathcal{R}_{n+1}(x, y) = \mathcal{R}_n(x, y)$ .

*Demonstração.* Seja  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\mathcal{R}_n(x, y) = \mathcal{E}_n(f, f)^{-1}$ ,  $f(x) = 0$  e  $f(y) = 1$ . Usando a função  $g$  construída na Proposição 15 como função teste para o supremo em (2.21), vemos que  $\mathcal{R}_{n+1}(x, y) \geq \mathcal{E}_{n+1}(g, g)^{-1} = \mathcal{E}_n(f, f) = \mathcal{R}_n(x, y)$ . Por outra parte, seja  $f : V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = 0, \quad f(y) = 1, \quad \mathcal{R}_{n+1}(x, y) = \mathcal{E}_{n+1}(f, f)^{-1}. \quad (2.26)$$

Se  $\mathcal{E}_n(f, f) < \mathcal{E}_{n+1}(f, f)$ , então existe  $g : V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = f(x)$  para  $x \in V_n$  e em particular tal que  $g(x) = 0$ ,  $g(y) = 1$ , e tal que

$$\mathcal{E}_{n+1}(g, g)^{-1} = \mathcal{E}_n(f, f)^{-1} > \mathcal{E}_{n+1}(f, f)^{-1}, \quad (2.27)$$

o que contradiz o fato que  $\mathcal{R}_{n+1}(x, y) = \mathcal{E}_{n+1}(f, f)$ . Concluimos que

$$\mathcal{R}_{n+1}(x, y) = \mathcal{E}_n(f, f)^{-1} \leq \mathcal{R}_n(x, y), \quad (2.28)$$

o que prova a proposição.  $\square$

Da mesma forma que a Proposição 17 nos leva à definição da distância  $d_V$ , esta proposição nos leva a definir a resistência  $\mathcal{R} : V_\infty \times V_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+$  como

$$\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}_n(x, y) \text{ para quaisquer } n \in \mathbb{N}_0, x, y \in V_n. \quad (2.29)$$

Da mesma forma que  $d_V$  é uma distância em  $V_\infty$ , a função  $\sqrt{\mathcal{R}(\cdot, \cdot)}$  também é uma distância em  $V_\infty$ . Seja  $\beta = \frac{\log(5/3)}{2 \log 2}$ . Notemos que para  $x \sim_n y$ , temos que  $(\frac{3}{5})^{\frac{n}{2}} = d_V(x, y)^\beta$ . A relevância da constante  $\beta$  é explicada pela proposição seguinte:

**Proposição 20.** *Existe  $c < \infty$  tal que para quaisquer  $x, y \in V_\infty$ ,  $\sqrt{\mathcal{R}(x, y)} \leq c d_V(x, y)^\beta$ .*

*Demonstração.* É suficiente provar a proposição para  $x, y \in V_n$  com uma constante  $c$  que não dependa de  $n$ . Sejam  $x, y \in V_n$ . Pela Proposição 19, podemos supor que um destes pontos não está em  $V_{n-1}$ . Por simetria, podemos supor que dito ponto é  $x$ . Seja  $\gamma = \{z_0, \dots, z_\ell\}$  um caminho de comprimento mínimo entre  $x$  e  $y$ . Seja  $x_1$  o primeiro ponto de  $V_{n-1}$  visitado pelo caminho  $\gamma$ . Afirmamos que  $x_1 = z_i$  para  $i = 1$  ou  $2$ . De fato, como visto no decorrer da prova da Proposição 17, como  $x \in V_n \setminus V_{n-1}$ , se o caminho  $\gamma$  não passa por  $V_{n-1}$ , ele fica num subgrafo com 3 pontos. Portanto, não pode dar mais de dois passos neste subgrafo. Ao sair do subgrafo, o caminho chega em  $V_{n-1}$ , o que prova que  $i = 1, 2$  ou  $3$ . Se o caminho  $\gamma$  dá 3 passos antes de entrar em  $V_{n-1}$ , ou ele chega num vértice de  $V_{n-1}$  que é vizinho de  $x$ , em cujo caso há um caminho dois passos mais curto, ou ele chega num vértice de  $V_{n-1}$  que é vizinho de  $z_1$ , em cujo caso há um caminho de  $x$  a  $y$  um passo mais curto. Concluimos que  $i = 1$  ou  $2$ . Seja também  $y_1$  o último ponto de  $V_{n-1}$  visitado pelo caminho  $\gamma$ . Temos que  $y_1 = z_{\ell-i}$  para  $i = 0, 1$  ou  $2$ . Note-se que o pedaço do caminho  $\gamma$  que leva de  $x_1$  a  $y_1$  deve ser um caminho de comprimento mínimo entre  $x_1$  e  $y_1$ , pois se não fosse este o caso, poderíamos usar dito caminho de comprimento mínimo para encurtar  $\gamma$ . Recapitulando, todo caminho de comprimento mínimo entre  $x$  e  $y$  pode ser decomposto em três pedaços: um primeiro pedaço com no máximo 2 passos, um segundo pedaço que é um caminho de comprimento mínimo (em  $G_n$ !) entre pontos de  $V_{n-1}$  e um pedaço com no máximo 2 passos.



No decorrer da demonstração da Proposição 17, provamos a afirmação seguinte:

- Para todo caminho  $\gamma$  de comprimento mínimo em  $G_n$  entre pontos  $x, y \in V_{n-1}$  existe um único caminho  $\gamma'$  de comprimento mínimo em  $G_{n-1}$  entre  $x$  e  $y$  que está contido em  $\gamma$ . Mais ainda, o comprimento de  $\gamma$  é igual ao dobro do comprimento de  $\gamma'$ .

Utilizemos de forma recursiva esta afirmação e vejamos o quê podemos dizer sobre o caminho  $\gamma$ . O caminho de comprimento mínimo em  $G_{n-1}$  entre  $x$  e  $y$  pode ser decomposto em três pedaços: um primeiro pedaço com no máximo 2 passos, um segundo pedaço que é um caminho de comprimento mínimo entre pontos  $x_2, y_2 \in V_{n-2}$  e um terceiro pedaço com no máximo dois passos. Repetimos este raciocínio até que  $x_{\ell_0} = y_{\ell_0}$  ou  $x_{\ell_0} \sim_{n-\ell_0} y_{\ell_0}$  para algum  $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$ . Desta forma obtemos uma sequência de pontos  $\{x_i, y_i; i = 0, \dots, \ell_0\}$  com as propriedades seguintes:

- a)  $x_0 = x$  e  $y_0 = y$ ,
- b) para  $i = 1, \dots, n-1$ , o caminho  $\gamma$  vai de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  e de  $y_i$  a  $y_{i-1}$  em no máximo  $2^i$  passos,
- c) o caminho  $\gamma$  vai de  $x_{\ell_0}$  a  $y_{\ell_0}$  em exatamente 0 ou  $2^{\ell_0}$  passos.

O leitor motivado pode tentar mostrar que o número de passos  $2^i$  entre as diferentes etapas da construção pode ser melhorado, mas no argumento a seguir, uma constante multiplicativa não fará diferença. Se  $x_{\ell_0} \neq y_{\ell_0}$ , o caminho  $\gamma$  tem no mínimo  $2^{\ell_0}$  passos e no máximo

$$2^{\ell_0} + 2 \sum_{i=1}^{\ell_0} 2^i = 5 \cdot 2^{\ell_0} - 4. \quad (2.30)$$

Em particular,  $2^{\ell_0} \leq d_V(x, y) \leq 5 \cdot 2^{\ell_0}$ . Se  $x_{\ell_0} = y_{\ell_0}$ , então  $x_{\ell_0-1} \neq x_{\ell_0}$  ou  $y_{\ell_0-1} \neq y_{\ell_0}$ . Logo, o caminho  $\gamma$  tem no mínimo  $2^{\ell_0-1}$  passos e no máximo

$$2 \sum_{i=1}^{\ell_0} 2^i = 4 \cdot 2^{\ell_0} - 2. \quad (2.31)$$

Concluimos que para quaisquer  $x, y \in V_n$ ,

$$\frac{1}{2} 2^{\ell_0} \leq d_{G_n}(x, y) \leq 5 \cdot 2^{\ell_0}, \quad (2.32)$$

o que em termos de  $d_V$  escreve-se como

$$\frac{1}{5}d_V(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-\ell_0}} \leq 2d_V(x, y). \quad (2.33)$$

Afirmamos que  $\sqrt{\mathcal{R}_n(x, y)}$  satisfaz uma desigualdade similar. Combinando as Proposições 18 e 19, vemos que

$$\sqrt{\mathcal{R}_n(x_i, x_{i+1})} \leq 2\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n-i}{2}}, \quad (2.34)$$

$$\sqrt{\mathcal{R}_n(y_i, y_{i+1})} \leq 2\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n-i}{2}}, \quad (2.35)$$

$$\sqrt{\mathcal{R}_n(x_{\ell_0}, y_{\ell_0})} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n-\ell_0}{2}}. \quad (2.36)$$

Lembremos que para todo  $k \in \mathbb{R}$ ,  $(\frac{3}{5})^k = (\frac{1}{2})^{\beta k}$ . Usando a desigualdade triangular para  $\sqrt{\mathcal{R}_n(\cdot, \cdot)}$ , concluímos que existe uma constante  $c_\beta$  tal que

$$\sqrt{\mathcal{R}_n(x, y)} \leq \frac{1}{2^{\beta n}} \left( 4 \sum_{i=1}^{\ell_0} 2^{\beta i} + 2^{\beta \ell_0} \right) \leq \frac{c_\beta}{2^{\beta(n-\ell_0)}} \leq 2^\beta c_\beta d_V(x, y)^\beta, \quad (2.37)$$

o que prova a proposição.  $\square$

Agora provaremos que a distância  $d_V$  é equivalente à distância Euclidiana:

**Proposição 21.** *Existe constante  $c > 0$  tal que  $d_V(x, y) \leq c|x - y|$  para quaisquer  $x, y \in V_\infty$ .*

*Demonstração.* Começaremos provando a afirmação seguinte:

- Para qualquer  $x \in V_\infty$ ,  $d_V(x, a_0) \leq 1$ .

Procederemos por indução em  $V_n$ . Para  $x \in V_0$ , a afirmação é óbvia. Suponhamos que a afirmação vale para qualquer  $x \in V_n$  e seja  $x \in V_{n+1}$ . Suponhamos que  $x \in \mathcal{T}_0 = \varphi_0(\mathcal{T}_\emptyset)$ , e seja  $\gamma$  o caminho de comprimento mínimo entre  $\varphi_0^{-1}(x)$  e  $a_0$  em  $V_n$ . Notemos que a imagem de  $\gamma$  via  $\varphi_0$  é um caminho em  $V_{n+1}$  de comprimento<sup>2</sup> menor ou igual a  $\frac{1}{2}$ . Se  $x \in \mathcal{T}_1$ , o argumento acima não funciona, pois

<sup>2</sup>Na prova desta proposição, usaremos como definição de comprimento de um caminho  $\gamma = \{x_0, \dots, x_\ell\}$  em  $V_n$  o número  $\frac{\ell_0}{2^n}$ , de modo que o comprimento dum caminho de comprimento mínimo entre  $x$  e  $y$ ,  $x, y \in V_n$ , seja igual a  $d_V(x, y)$ . Estendendo o caminho  $\gamma$  a  $V_m$ ,  $m \geq n$  da forma natural, vemos que o comprimento dele não depende de  $m$ .

nos dá um caminho de comprimento menor ou igual a  $\frac{1}{2}$  entre  $x$  e  $\varphi_1(a_0)$ . Mas é claro que  $d_V(\varphi_1(a_0), a_0) = \frac{1}{2}$ , pelo que a desigualdade triangular prova a afirmação nesse caso. Se  $x \in \mathcal{T}_2$ , o argumento é o mesmo.

Sejam agora  $x, y \in V_\infty$ . Seja  $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$  o menor  $\ell \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\{x, y\} \in \mathcal{T}_i$  para algum  $i \in \mathcal{I}_\ell$ . O conjunto  $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}_i \cap K_{\ell_0+1}$  é a união de três triângulos de  $K_{\ell_0+1}$ , que portanto têm lado  $\frac{1}{2^{\ell_0+1}}$ . Há dois deles, que chamaremos de  $\mathcal{T}^1$  e  $\mathcal{T}^2$ , tais que  $\{x, y\}$  pertence à sua união. Seja  $z$  o vértice em comum destes dois triângulos. Escolhamos os índices de  $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2$  de modo que  $x \in \mathcal{T}^1$  e  $y \in \mathcal{T}^2$ ;  $x$  e  $y$  não podem estar no mesmo  $\mathcal{T}^i$ ,  $i = 1, 2$ , porque  $\mathcal{T}_i$  é o menor triângulo com essa propriedade. Seja  $\ell_1$  ( $\ell_2$  respetivamente) o menor  $\ell \in \mathbb{N}_0$  tal que existe um triângulo  $\mathcal{T}^3$  ( $\mathcal{T}^4$  respetivamente) em  $K_{\ell_1}$  (em  $K_{\ell_2}$  respetivamente), contido em  $\mathcal{T}^1$  ( $\mathcal{T}^2$  respetivamente) que contém  $z$  mas não contém  $x$  ( $y$  respetivamente). Suponhamos que  $\ell_1 \geq \ell_2$ ; senão, simplesmente trocamos o papel de  $x$  e  $y$ . Notemos que  $|x-y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2^{\ell_1}}$  (ver Figura 2.4). Por outra parte, notemos que para qualquer triângulo  $\mathcal{T}$  em  $K_\ell$ , qualquer  $x_0 \in \mathcal{T} \cap V_\infty$  e qualquer vértice  $z_0$  de  $\mathcal{T}$ , temos que  $d_V(x_0, z_0) \leq \frac{1}{2^\ell}$ . Isto segue do fato que  $\mathcal{T} \cap V_\infty = \varphi_i(\mathcal{T}_\emptyset)$  para algum  $i \in \mathcal{I}_\ell$  em conjunção com a afirmação. Concluimos que

$$\begin{aligned} d_V(x, y) &\leq d_V(x, z) + d_V(y, z) \leq \frac{1}{2^{\ell_1-1}} + \frac{1}{2^{\ell_2-1}} \leq \frac{4}{2^{\ell_1}} \\ &\leq \frac{8}{\sqrt{3}} |y - x|, \end{aligned} \quad (2.38)$$

o que prova a proposição.  $\square$

Finalmente, temos todos os ingredientes para provar a principal proposição desta seção:

**Proposição 22.** *Seja  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$ . Seja  $\beta = \frac{\log(5/3)}{2 \log 2}$ . Então, existe  $\kappa > 0$  independente de  $f$  tal que*

$$|f(y) - f(x)| \leq \kappa \mathcal{E}(f, f)^{1/2} |x - y|^\beta \quad (2.39)$$

para quaisquer  $x, y \in V_\infty$ .

*Demonstração.* Se  $\mathcal{E}(f, f) = 0$ , então  $f$  é constante e não há nada que provar. Suponhamos que  $\mathcal{E}(f, f) > 0$ , Pela definição de  $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$ ,

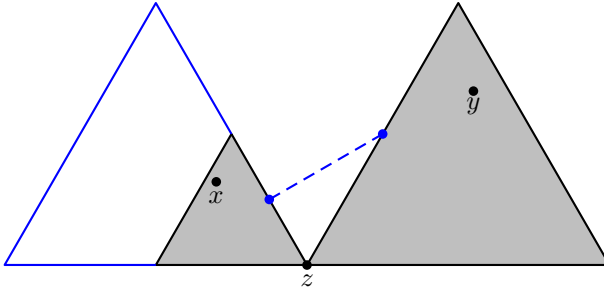


Figura 2.4: Os triângulos  $\mathcal{T}^i$ . Os triângulos  $\mathcal{T}^3$  e  $\mathcal{T}^4$  aparecem em cinza; a fronteira do triângulo  $\mathcal{T}^1$  está marcada em azul e no caso desenhado o triângulo  $\mathcal{T}^2$  é igual ao triângulo  $\mathcal{T}^4$ . A mínima distância possível entre  $x$  e  $y$  é atingida na linha pontilhada.

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{|f(y) - f(x)|}{\mathcal{E}(f, f)^{1/2}} &\leq \sqrt{\mathcal{R}(x, y)} \leq 2^\beta c_\beta d_V(x, y)^\beta \\ &\leq \kappa |y - x|^\beta \end{aligned} \quad (2.40)$$

para  $\kappa = 2^\beta c_\beta c$ , o que prova a proposição.  $\square$

## 2.7 Funções harmônicas

Os resultados da seção anterior não são muito úteis a menos que possamos mostrar a existência de funções  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$ . Acontece que a Proposição 15 nos fornece uma receita para construir exemplos de tais funções. Seja  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  dada. Dizemos que uma função  $g : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *extensão harmônica* de  $f$  se:

- i)  $g(x) = f(x)$  para qualquer  $x \in V_n$  (isto é,  $f = \pi_n g$ ),

$$\text{ii) } \mathcal{E}(g, g) = \mathcal{E}_n(f, f).$$

**Proposição 23.** *Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  existe uma única extensão harmônica de  $f$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 15, existe uma única função  $g_{n+1} : V_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\text{i) } g_{n+1}(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in V_n \text{ (isto é, } f = \pi_n g_{n+1}),$$

$$\text{ii) } \mathcal{E}_{n+1}(g_{n+1}, g_{n+1}) = \mathcal{E}_n(f, f).$$

De forma recursiva, existe uma sequência de funções  $\{g_m; m \geq n\}$  de  $V_m$  em  $\mathbb{R}$  tais que

$$\text{i) para quaisquer } m > \ell > n \text{ e } x \in V_\ell, g_m(x) = g_\ell(x),$$

$$\text{ii) para quaisquer } x \in V_n \text{ e } m > n, g_m(x) = f(x),$$

$$\text{iii) para qualquer } m > n, \mathcal{E}_m(g_m, g_m) = \mathcal{E}_n(f, f).$$

A função  $g : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = g_m(x)$  para quaisquer  $m \geq n$  e  $x \in V_m$  é a extensão harmônica procurada. Como  $g_{n+1}$  é única, as funções  $g_m$ ,  $m \geq n$  são únicas e  $g$  também resulta ser única, o que prova a proposição.  $\square$

Observemos que uma outra demonstração da unicidade da extensão harmônica de uma função  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  é a seguinte. Se  $g, g'$  forem duas extensões harmônicas de  $f$ , então a diferença  $g - g'$  é uma extensão harmônica da função nula em  $V_n$ . Mas nesse caso teríamos  $\mathcal{E}(g - g', g - g') = 0$ , de onde  $g = g'$ . Este tipo de argumento será explorado mais à frente.

Para  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  dada, denotaremos por  $Hf$  a sua extensão harmônica, que em virtude da Proposição 23 está bem definida. O caso particular de uma extensão harmônica de uma função  $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  é importante: nesse caso diremos que a função  $h = Hf$  é *harmônica*.

**Proposição 24.** *O espaço de funções harmônicas é um espaço vetorial de dimensão 3.*

*Demonstração.* Olhando a expressão da função  $g$  obtida na prova da Proposição 15, vemos que a extensão harmônica é uma operação linear, pelo que o espaço de funções harmônicas é um espaço vetorial. Como o espaço de funções  $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$  tem dimensão 3, e toda função harmônica é a extensão harmônica da sua restrição ao conjunto  $V_0$ , pela unicidade da extensão harmônica concluímos que o espaço de funções harmônicas também tem dimensão 3.  $\square$

A proposição seguinte justifica a denominação *função harmônica*.

**Proposição 25.** *Seja  $h : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Então, para quaisquer  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $x \in V_n \setminus V_0$ ,*

$$\Delta_n h(x) = 0. \quad (2.41)$$

*Demonstração.* Como  $h$  é harmônica, para qualquer  $\ell \in \mathbb{N}_0$   $h$  é a extensão harmônica da sua restrição  $\pi_\ell h$  ao conjunto  $V_\ell$ . Seja  $x \in V_\infty \setminus V_0$  e seja  $\ell \in \mathbb{N}_0$  tal que  $x \in V_{\ell+1} \setminus V_\ell$ . Sejam  $y_i \in V_{\ell+1}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  os quatro vizinhos de  $x$  no grafo  $G_{\ell+1}$ . O mínimo da soma  $\sum_i (\lambda - h(y_i))^2$  é atingido em  $\lambda_0 = \frac{1}{4} \sum_i h(y_i)$ . Portanto, se  $h(x) \neq \lambda_0$ , poderíamos diminuir  $\mathcal{E}_{\ell+1}(h, h)$  trocando o valor de  $h(x)$  para  $\lambda_0$ , contradizendo o fato que  $\mathcal{E}_{\ell+1}(h, h) = \mathcal{E}_\ell(h, h)$ . Logo,  $\Delta_n h(x) = 0$ .  $\square$

Seja  $h_i : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2$  a função harmônica que satisfaz  $h_i(a_j) = \delta_{i,j}$ ,  $j = 0, 1, 2$ . É possível calcular os valores de  $h_i(x)$ ,  $x \in V_n$  de forma recursiva. Definamos os pontos  $\{b_0, b_1, b_2\}$  como

$$b_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad b_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_0), \quad b_2 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1). \quad (2.42)$$

Isto é, os pontos  $\{b_0, b_1, b_2\}$  são os pontos médios dos lados do triângulo  $\mathcal{T}_\emptyset$ . Resolvendo um pequeno sistema de equações lineares ou lembrando da fórmula obtida na prova da Proposição 15, podemos provar que

$$h_i(b_j) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & j = i \\ \frac{2}{5}, & j \neq i. \end{cases} \quad (2.43)$$

Para calcular  $h_i$  em  $V_2$ , podemos usar novamente a fórmula obtida na prova da Proposição 15, ou podemos usar a observação seguinte: pensando cada triângulo de  $K_1$  como uma pequena cópia do grafo

$G_1$ , a extensão harmônica em questão é uma combinação linear de cópias das funções  $h_0, h_1, h_2$ . Seja  $x \in V_2 \setminus V_1$ . Suponhamos que  $x$  está no triângulo de vértices  $a_0, b_1, b_2$ . Neste caso,  $x = \varphi_0(y)$  para algum  $y \in V_1 \setminus V_0$ . As cópias de  $h_0, h_1, h_2$  mencionadas acima são simplesmente as funções  $h_i \circ \varphi_0^{-1}$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Temos que

$$h_i(x) = h_i(a_0)h_0(\varphi_0^{-1}(x)) + h_i(b_1)h_2(\varphi^{-1}(x)) + h_i(b_2)h_2(\varphi^{-1}(x)). \quad (2.44)$$

para  $i = 0, 1, 2$ . Depois de examinar as fórmulas similares no caso em que  $x$  está em algum dos outros dois triângulos de  $K_1$ , vemos que as funções  $\{h_i; i = 0, 1, 2\}$  satisfazem as relações

$$h_i \circ \varphi_j = \sum_{k=0,1,2} h_i(\varphi_j(a_k))h_k \quad (2.45)$$

para  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ . Em princípio, só mostramos que estas fórmulas valem para  $x \in V_2 \setminus V_1$ , mas uma vez enunciadas, não é difícil provar que elas valem para qualquer  $x \in V_\infty$ . Notemos que as constantes  $h_i(\varphi_j(a_k))$  são os valores das funções harmônicas nos pontos  $b_0, b_1, b_2$ . Notemos também que a função  $h \equiv 1$  é harmônica. Portanto,  $\sum_i h_i(x) = 1$  para qualquer  $x \in V_\infty$ . Usando estas observações, podemos simplificar as fórmulas para  $h_i \circ \varphi_j$  e obter que

$$\begin{aligned} h_i \circ \varphi_i &= \frac{1}{5}(2 + 3h_i) \\ h_j \circ \varphi_i &= \frac{1}{5}(1 + h_j - h_i). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Esta fórmula é muito útil para calcular valores das funções  $\{h_i; i = 0, 1, 2\}$  de forma iterativa. De fato, para qualquer  $x \in V_\infty$ , para calcular os valores de  $\{h_i(\varphi_j(x)); i = 0, 1, 2\}$  só é necessário conhecer os valores de  $\{h_i(x); i = 0, 1, 2\}$ .

Neste ponto, o leitor já deve estar convencido de que os pontos  $\{a_0, a_1, a_2\}$  são especiais. Chamaremos a  $V_0 = \{a_0, a_1, a_2\}$  de *fronteira* do triângulo de Sierpinski  $K$ . Usando as fórmulas de acima podemos calcular  $\Delta_n h_0(a_i)$ . Começaremos com  $a_0$ . Seja  $\lambda_n$  o valor de  $h_0(x)$  para  $x \sim_n a_0$ . Por simetria, este valor é o mesmo para os dois vizinhos de  $a_0$ . Vemos que a sequência  $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$  satisfaz a recorrência

$$\lambda_{n+1} = \frac{2 + 3\lambda_n}{5}. \quad (2.47)$$

Esta recorrência pode ser resolvida usando o método de variação de parâmetros. Pondo  $\lambda_n = c_n \left(\frac{3}{5}\right)^n$ , vemos que

$$c_{n+1} = c_n + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}, \quad (2.48)$$

de onde

$$c_n = c_0 + \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{5}{3}\right)^i = c_0 + \left(\frac{5}{3}\right)^n - 1. \quad (2.49)$$

Concluimos que  $\lambda_n = 1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n (c_0 - 1)$ . Como  $\lambda_0 = 0$ , temos que  $c_0 = 0$  e  $\lambda_n = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$ . Portanto,  $\Delta_n h_0(a_0) = -2 \cdot 3^n$ . Lembremos que para toda função  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sum_{x \in V_n} \Delta_n f(x) = 0$ . Em particular,

$$\sum_{i=0,1,2} \Delta_n h_0(a_i) = 0. \quad (2.50)$$

Por simetria,  $\Delta_n h_0(a_1) = \Delta_n h_0(a_2)$ , pelo que  $\Delta_n h_0(a_i) = 3^n$  e em geral,

$$\Delta_n h_i(a_j) = \begin{cases} -2 \cdot 3^n, & i = j, \\ 3^n, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.51)$$

Isto motiva a definição seguinte. Para  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  e  $i = 0, 1, 2$ , definiremos

$$\partial_i^n f = \frac{1}{3^n} \Delta_n f(a_i). \quad (2.52)$$

Chamaremos a  $\{\partial_i^n f; i = 0, 1, 2\}$  de *derivadas direcionais* de  $f$  em  $V_0$ . Como sugerido pela notação, o limite  $\partial_i f = \lim_n \partial_i^n f$ , se existir, será o análogo da derivada normal de  $f$  na fronteira dum domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ .

**Proposição 26.** *Seja  $f : V_\ell \rightarrow \mathbb{R}$  e seja  $Hf : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  a extensão harmônica de  $f$ . Então, para todo  $n \geq \ell$ ,*

$$\Delta_n(Hf)(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } x \notin V_n \\ 3^{n-\ell} \Delta_\ell f(x) & ; \text{ se } x \in V_n. \end{cases} \quad (2.53)$$

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_\ell$ . Para  $i = 0, 1, 2$ , seja  $x_i = \varphi_{\mathbf{i}}(a_i)$ . Em particular, os pontos  $x_0, x_1, x_2$  são os vértices do triângulo  $\mathcal{T}_{\mathbf{i}}$ . Para  $y \in V_\infty \cap \mathcal{T}_{\mathbf{i}}$ , temos que (compare com (2.45)):

$$Hf(y) = \sum_{i=0,1,2} f(x_i) h_i(\varphi_{\mathbf{i}}^{-1}(y)), \quad (2.54)$$



Isto mostra que  $\Delta_n Hf(y) = 0$  se  $y \notin V_\ell$ . Seja  $\tilde{\partial}_i^n f$  a derivada direcional da função  $Hf \circ \varphi_i$  no ponto  $a_i$ . Em outras palavras,  $\tilde{\partial}_i^n f$  é a derivada direcional da função  $f$  restrita ao triângulo  $\mathcal{T}_i$ , avaliada no vértice  $x_i = \varphi_i(a_i)$ . Vemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_0^n f &= \sum_{j=0,1,2} f(x_0) \partial_j^{n-\ell} h_0(\varphi_i^{-1}(x_j)) \\ &= 3^{n-\ell} (f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_0)),\end{aligned}\tag{2.55}$$

e vemos que fórmulas similares valem para  $\tilde{\partial}_i^n f$ ,  $i = 1, 2$ . Somando as duas derivadas direcionais em  $x_i$ , a proposição está provada.  $\square$

## 2.8 A função de Green

Consideremos o problema seguinte. Seja  $n \in \mathbb{N}_0$  e seja  $A \subseteq V_n$ . Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e consideremos a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta_n h(x) = 0, & x \in V_n \setminus A, \\ h(x) = f(x), & x \in A. \end{cases}\tag{2.56}$$

**Proposição 27.** *A equação (2.56) admite uma única solução. Mais ainda, a solução  $h_f$  desta equação é o único ponto mínimo de  $\mathcal{E}_n(g, g)$  no conjunto*

$$\{g : V_n \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in A\}.\tag{2.57}$$

*Demonstração.* A equação (2.56) é simplesmente um sistema não homogêneo de  $\#V_n$  equações lineares em  $\#V_n$  incógnitas. Portanto, é suficiente provar existência e unicidade da solução do sistema homogêneo associado, isto é, considerar o caso  $f \equiv 0$ . Efetuando uma mudança de variáveis e usando o fato que  $h(x) = 0$  para qualquer  $x \in A$ , não é difícil provar as igualdades

$$0 = - \sum_{x \in V_n} h(x) \Delta_n h(x) = \sum_{x \sim_n y} (h(y) - h(x))^2,\tag{2.58}$$

o que mostra que  $h$  é constante. Como  $h(x) = 0$  em  $A$ , concluímos que  $h \equiv 0$ . Vejamos agora que  $h$  minimiza  $\mathcal{E}_n(g, g)$ . Seja  $x \in V_n \setminus A$

e seja  $h_x^\lambda : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h_x^\lambda(y) = \begin{cases} h(y), & y \neq x, \\ h(x) + \lambda, & y = x. \end{cases} \quad (2.59)$$

Seja  $\psi_x(\lambda) = \mathcal{E}_n(h_x^\lambda, h_x^\lambda)$ . Esta função é quadrática e positiva em  $\lambda$ , pelo que tem exatamente um ponto mínimo. Como  $\Delta_n h(x) = 0$ , vemos que  $\psi_x'(0) = 0$ , pelo que o mínimo de  $\psi_x$  é atingido em  $\lambda = 0$ . Logo, a função  $h$  é um mínimo local de  $\mathcal{E}_n(g, g)$ . De forma recíproca, se  $\tilde{h}$  fosse um outro mínimo de  $\mathcal{E}_n(g, g)$  sujeito à restrição  $g = f$  em  $A$ ,  $\tilde{h}$  também satisfaria (2.56), pelo que teríamos que  $\tilde{h} = h$ , o que prova que  $h$  é um mínimo *global* de  $\mathcal{E}_n(g, g)$  sujeito à restrição  $g = f$  em  $A$ .  $\square$

A proposição seguinte se conhece como o *princípio do máximo*.

**Proposição 28.** *Seja  $h$  a solução de (2.56). Então,*

$$\min_{x \in A} f(x) \leq \min_{y \in V_n} h(y) \leq \max_{y \in V_n} h(y) \leq \max_{x \in A} f(x). \quad (2.60)$$

*Demonstração.* Seja  $M = \max_{x \in A} f(x)$ . Notemos que para qualquer função  $g : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g = f$  em  $A$ , a função  $\tilde{g} = \min\{g, M\}$  satisfaz  $\mathcal{E}_n(\tilde{g}, \tilde{g}) \leq \mathcal{E}_n(g, g)$ . Pela proposição anterior, se  $\tilde{g} \neq g$ , então  $g$  não é solução de (2.56). Concluímos que  $h \leq M$ . De forma análoga, pode-se provar que  $h \geq m = \min_{x \in A} f(x)$ .  $\square$

Seja  $x \in V_n \setminus V_0$  e seja  $\mathcal{G}_n(x, \cdot) : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  a solução da equação

$$\begin{cases} \Delta_n \mathcal{G}_n(x, y) = 0, & y \neq x, a_0, a_1, a_2, \\ \Delta_n \mathcal{G}_n(x, x) = -3^n, & y = x, \\ \mathcal{G}_n(x, a_i) = 0, & i = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (2.61)$$

Esta equação é de fato muito similar à equação (2.56). Vemos que esta equação é também um sistema não homogêneo de equações  $\#V_n$  equações lineares em  $\#V_n$  incógnitas. O sistema homogêneo é idêntico ao sistema homogêneo associado à equação (2.56), pelo que existência e unicidade de  $\mathcal{G}_n(x, \cdot)$  estão garantidas pela Proposição 27. Notemos que *a posteriori*, a função  $\mathcal{G}_n(x, \cdot)$  satisfaz a equação (2.56) para o conjunto  $A = V_0 \cup \{x\}$  e a função  $f$  dada por

$f = 0$  em  $V_0$  e  $f(x) = \mathcal{G}_n(x, x)$ . O princípio do máximo nos permite provar que  $\mathcal{G}_n$  é não negativa. De fato, se  $\mathcal{G}_n(x, x)$  for negativo,  $\mathcal{G}_n(x, x) \leq \mathcal{G}_n(x, y) \leq 0$  para qualquer  $y \in V_n$ , e em particular para  $y \sim_n x$ . Logo, teríamos que  $\Delta_n \mathcal{G}_n(x, x) \geq 0$ ,<sup>3</sup> o que contradiz o fato que  $\Delta_n \mathcal{G}_n(x, x) = -3^n$ . O caso  $\mathcal{G}_n(x, x) = 0$  também não é possível, pois nesse caso teríamos  $\mathcal{G}_n(x, \cdot) \equiv 0$ . Logo,  $\mathcal{G}_n(x, x) > 0$  e pelo princípio do máximo,  $\mathcal{G}_n(x, y) \geq 0$  para qualquer  $y \in V_n$ . Para  $x \in V_0$ , definimos  $\mathcal{G}_n(x, \cdot) \equiv 0$ . A função  $\mathcal{G}_n : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}_+$  obtida deste modo é chamada de *função de Green*. Na proposição seguinte, enunciamos algumas propriedades básicas da função de Green  $\mathcal{G}_n$ :

**Proposição 29.** *Para quaisquer  $x, y \in V_n$ ,  $\mathcal{G}_{n+1}(x, y) = \mathcal{G}_n(x, y)$  e  $\mathcal{G}_n(x, y) = \mathcal{G}_n(y, x)$ . Além disso,*

$$\sup_{\substack{x \in V_n \\ n \in \mathbb{N}_0}} \mathcal{E}_n(\mathcal{G}_n(x, \cdot), \mathcal{G}_n(x, \cdot)) < \infty. \quad (2.62)$$

*Demonstração.* A identidade  $\mathcal{G}_{n+1}(x, y) = \mathcal{G}_n(x, y)$  segue do fato que  $\mathcal{G}_{n+1}(x, \cdot)$  é a continuação harmônica de  $\mathcal{G}_n(x, \cdot)$  em  $V_{n+1}$ . Isto não é totalmente óbvio, pois temos que justificar a identidade

$$\Delta_{n+1} H \mathcal{G}_n(x, x) = -3^{n+1}. \quad (2.63)$$

Mas isto é justamente o conteúdo da Proposição 26. Seja  $\delta_n : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\delta_n(x, y) = \begin{cases} 3^n, & \text{se } x = y, \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases} \quad (2.64)$$

Em outras palavras,  $\delta_n$  é a função delta de Dirac em  $V_n$  (com respeito à medida  $\mu_n$ ). A simetria da função  $\mathcal{G}_n$  é consequência da simetria da função  $\delta_n$ . De fato, (2.61) é equivalente a dizer que  $\Delta_n \mathcal{G}_n(x, \cdot) = -\delta_n(x, \cdot)$  em  $V_n \setminus V_0$  e  $\mathcal{G}_n(x, \cdot) = 0$  em  $V_0$ . Definamos  $H : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$H(x, y) = 5^n \sum_{x' \sim_n x} (\mathcal{G}_n(x', y) - \mathcal{G}_n(x, y)) \quad (2.65)$$

---

<sup>3</sup>Notemos que aqui o Laplaciano é calculado na *segunda variável*. Será este o caso em toda expressão envolvendo  $\mathcal{G}_n(x, \cdot)$  e  $\Delta_n$ , a menos que seja advertido explicitamente o contrário.

se  $x \in V_n \setminus V_0$  e  $H(x, y) = 0$  se  $x \in V_0$ . Em outras palavras,  $H(x, y) = \Delta_n \mathcal{G}_n(x, y)$ , onde agora o Laplaciano é calculado na *primeira variável*. A função  $H$  satisfaz a equação

$$\begin{cases} \Delta_n H(x, y) = -\Delta_n \delta_n(x, y), & x \in V_n \setminus V_0, \\ H(a_i, y) = 0, & i = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (2.66)$$

onde o Laplaciano age *na segunda variável* em ambas funções. Por outra parte, a função  $\tilde{H} : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\tilde{H}(x, y) = \begin{cases} \Delta_n \mathcal{G}_n(x, y), & y \in V_n \setminus V_0 \\ 0, & y \in V_0 \end{cases} \quad (2.67)$$

é solução da equação

$$\begin{cases} \Delta_n \tilde{H}(x, y) = -\Delta_n \delta_n(x, y), & x \in V_n \setminus V_0, \\ \tilde{H}(a_i, y) = 0, & i = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (2.68)$$

onde os Laplacianos voltaram a ser calculados na primeira variável. Como  $\delta_n$  é simétrica, vemos que  $\Delta_n \tilde{H}(y, x) = \Delta_n H(x, y)$  para  $y \in V_n \setminus V_0$ ; os Laplacianos sendo calculados na variável  $y$ . Pela Proposição 27, concluímos que  $\tilde{H}(y, x) = H(x, y)$ , ou seja, que  $\Delta_n \mathcal{G}_n(y, x) = \Delta_n \mathcal{G}_n(x, y)$ , onde os dois Laplacianos são calculados na variável  $y$ . Usando mais uma vez a Proposição 27, concluímos que  $\mathcal{G}_n(y, x) = \mathcal{G}_n(x, y)$ , o que prova a simetria de  $\mathcal{G}_n$ .

A última afirmação segue do princípio do máximo e da fórmula de integração por partes. De fato, pela dita fórmula de integração por partes,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(\mathcal{G}_n(x, \cdot), \mathcal{G}_n(x, \cdot)) &= -\frac{1}{3^n} \sum_{y \in V_n} \mathcal{G}_n(x, y) \Delta_n \mathcal{G}_n(x, y) \\ &= \mathcal{G}_n(x, x). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Portanto, é suficiente provar que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in V_n} \mathcal{G}_n(x, x) < \infty. \quad (2.70)$$

Como  $\mathcal{G}_n(x, 0) = 0$ , usando a Proposição 22 vemos que

$$\mathcal{G}_n(x, x) \leq \kappa \mathcal{G}_n(x, x)^{1/2} |x|^\beta, \quad (2.71)$$

de onde  $\mathcal{G}_n(x, x) \leq \kappa^2 |x|^{2\beta}$ , o que somado ao fato que  $V_\infty$  é um subconjunto de  $K$ , que é limitado, prova a proposição.  $\square$

Notemos que pela proposição anterior, podemos definir a função de Green  $\mathcal{G} : V_\infty \times V_\infty$  como

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}_n(x, y) \tag{2.72}$$

para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $x, y \in V_n$ .

# Capítulo 3

## Análise funcional em $K$

Lembremos a Proposição 22: para quaisquer função  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$  e pontos  $x, y \in V_\infty$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa \mathcal{E}(f, f)^{1/2} |y - x|^\beta. \quad (3.1)$$

Em outras palavras, se  $\mathcal{E}(f, f) < \infty$ , então  $f$  é Hölder-contínua de índice  $\beta$ . Em particular,  $f$  possui uma única extensão contínua (que também chamaremos de)  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Portanto, faz sentido só considerar funções contínuas no que diz respeito à forma da energia. Seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Lembremos que  $\pi_n f$  é a projeção de  $f$  no conjunto  $V_n$ . Definamos  $\mathcal{E}(f, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(\pi_n f, \pi_n f)$ . Por continuidade, a relação 3.1 vale para quaisquer  $x, y \in K$ .

A partir de agora, sempre identificaremos funções  $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  de energia finita com as suas extensões contínuas em  $K$ . Em particular, consideraremos as extensões harmônicas definidas na seção 2.7 como sendo funções contínuas definidas em  $K$ .

### 3.1 Os espaços de Sobolev $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_1^0$

Definamos o *espaço de Sobolev*  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(K)$  como

$$\mathcal{H}_1 = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua ; } \mathcal{E}(f, f) < \infty\}. \quad (3.2)$$

Definamos também o espaço  $\mathcal{H}_1^0$  como

$$\mathcal{H}_1^0 = \{f \in \mathcal{H}_1; f(a_1) = 0, i = 0, 1, 2\}. \quad (3.3)$$

Notemos que pela Proposição 22, se  $f \in \mathcal{H}_1$  então  $f$  é contínua, pelo que faz sentido se perguntar o valor de  $f$  em pontos específicos. Este não é o caso para funções  $f$  que são meramente integráveis com respeito à medida  $\mu$ .

**Proposição 30.** *Sejam  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1^0$  os espaços definidos acima. Então,*

- i) os espaços  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1^0$  são espaços vetoriais,*
- ii) a aplicação  $f \mapsto \mathcal{E}(f, f)^{1/2}$  é uma norma em  $\mathcal{H}_1^0$ ,*
- iii) o espaço  $\mathcal{H}_1^0$  é completo com respeito à norma  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)^{1/2}$ ,*
- iv) para quaisquer  $f, g \in \mathcal{H}_1$ , o limite*

$$\mathcal{E}(f, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f, g) \quad (3.4)$$

*existe e é finito. Mais ainda, a aplicação  $(f, g) \mapsto \mathcal{E}(f, g)$  é um produto interno em  $\mathcal{H}_1^0$ .*

*Demonstração.* Notemos que por definição,  $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{C}(K)$ . Como  $\mathcal{C}(K)$  é um espaço vetorial, para provar que  $\mathcal{H}_1$  é um espaço vetorial é suficiente provar que  $\mathcal{H}_1$  é fechado sob multiplicação por escalares e sob soma de funções em  $\mathcal{H}_1$ . Notemos que para quaisquer  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}_n(\lambda f, \lambda f) = \lambda^2 \mathcal{E}_n(f, f)$ . Logo, se  $f \in \mathcal{H}_1$ , então  $\lambda f \in \mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{E}(\lambda f, \lambda f) = \lambda^2 \mathcal{E}(f, f)$ . Sejam  $f, g \in \mathcal{H}_1$ . Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(f + g, f + g) &= \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{x \sim_n y} (f(y) + g(y) - f(x) - g(x))^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{5}{3}\right)^n \sum_{x \sim_n y} \left\{ (f(y) - f(x))^2 + (g(y) - g(x))^2 \right\} \\ &\leq 2 \{ \mathcal{E}_n(f, f) + \mathcal{E}_n(g, g) \}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Concluimos que  $f + g \in \mathcal{H}_1$ , o que prova que o conjunto  $\mathcal{H}_1$  é um espaço vetorial. Por definição,  $\mathcal{H}_1^0$  é o núcleo da aplicação linear  $f \mapsto$

$(f(a_0), f(a_1), f(a_2))$ . Como  $\mathcal{H}_1$  é um espaço vetorial,  $\mathcal{H}_1^0$  também é um espaço vetorial, o que prova i).

Sejam  $f, g \in \mathcal{H}_1$  e consideremos a função  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_n(f + \lambda g, f + \lambda g)$ . Vemos que esta função é não negativa e que o seu mínimo é igual a

$$\frac{\mathcal{E}_n(f, f)\mathcal{E}_n(g, g) - \mathcal{E}_n(f, g)^2}{\mathcal{E}_n(g, g)}. \quad (3.6)$$

Concluimos que  $\mathcal{E}_n(f, g)^2 \leq \mathcal{E}_n(f, f)\mathcal{E}_n(g, g)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(f + g, f + g) &= \mathcal{E}_n(f, f) + \mathcal{E}_n(g, g) + 2\mathcal{E}_n(f, g) \\ &\leq \mathcal{E}_n(f, f) + \mathcal{E}_n(g, g) + 2\sqrt{\mathcal{E}_n(f, f)}\sqrt{\mathcal{E}_n(g, g)} \quad (3.7) \\ &\leq (\sqrt{\mathcal{E}_n(f, f)} + \sqrt{\mathcal{E}_n(g, g)})^2. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , concluimos que

$$\mathcal{E}(f + g, f + g)^{1/2} \leq \mathcal{E}(f, f)^{1/2} + \mathcal{E}(g, g)^{1/2} \quad (3.8)$$

para quaisquer  $f, g \in \mathcal{H}_1$ . Acima já mostramos que  $\mathcal{E}(\lambda f, \lambda f) = |\lambda|\mathcal{E}(f, f)$ . Se  $\mathcal{E}(f, f) = 0$ , então  $\mathcal{E}_n(f, f) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , o que implica que  $f$  é constante em  $V_\infty$ . Como  $f$  é contínua e  $V_\infty$  é denso em  $K$ , concluimos que  $f$  é constante. Notemos que em  $\mathcal{H}_1$ , esta constante é arbitrária, pelo que  $\mathcal{E}(f, f)^{1/2}$  é só uma seminorma e não uma norma em  $\mathcal{H}_1$ . Por outra parte, como  $f(a_0) = 0$  para toda  $f \in \mathcal{H}_1^0$ , se  $f$  for constante então  $f \equiv 0$ , o que prova que  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)^{1/2}$  é uma norma em  $\mathcal{H}_1^0$ .

Provaremos agora que o espaço  $\mathcal{H}_1^0$  é completo com respeito à norma  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Seja  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{H}_1^0$ . Suponhamos primeiro que  $\mathcal{E}(f_n - f_{n+1}, f_n - f_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pela Proposição 22 mais o fato que  $f_{n+1}(a_0) - f_n(a_0) = 0$ ,

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{\kappa}{2^n} \text{ para quaisquer } x \in K, n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Portanto, a soma

$$f = f_1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_{n+1} - f_n) \quad (3.10)$$

é uniformemente convergente, pelo que a função  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida e é contínua. Provemos que  $f \in \mathcal{H}_1^0$ . Seja  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Como



$\mathcal{E}_\ell(f, f)$  é uma soma finita,

$$\mathcal{E}_\ell(f, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\ell(f_n, f_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(f_n, f_n) \leq \mathcal{E}(f_1, f_1) + 1. \quad (3.11)$$

Logo,  $\mathcal{E}_\ell(f, f)$  é uniformemente limitada em  $\ell$  e em particular  $f \in \mathcal{H}_1$ . Como  $f_n = 0$  em  $V_0$ , também temos que  $f = 0$  em  $V_0$  e em particular  $f \in \mathcal{H}_1^0$ . De forma semelhante,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f - f_n, f - f_n) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\ell(f - f_n, f - f_n) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\ell(f_m - f_n, f_m - f_n) \\ &\leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

o que prova a convergência de  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  a  $f$  em  $\mathcal{H}_1^0$  e com respeito à norma  $\mathcal{E}(\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Seja agora  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  uma sequência de Cauchy arbitrária. Existe uma subsequência  $n' = \{n_i; i \in \mathbb{N}\}$  tal que  $\mathcal{E}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}, f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \leq \frac{1}{2^i}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Esta subsequência converge a um limite  $f \in \mathcal{H}_1^0$ . Considerando as funções  $\tilde{f}_n = f_n - f$ , podemos supor que  $f = 0$ . Observando que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f_i, f_i)^{1/2} &\leq \mathcal{E}(f_{n_i}, f_{n_i})^{1/2} + \mathcal{E}(f_{n_i} - f_i, f_{n_i} - f_i)^{1/2} \\ &\leq \mathcal{E}(f_{n_i}, f_{n_i})^{1/2} + \frac{1}{2^{i-1}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

vemos que  $f$  é o limite em  $\mathcal{H}_1^0$  da sequência completa  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ .

Para provar que  $\mathcal{E}(f, g)$  está bem definido, é suficiente notar que

$$\mathcal{E}_n(f, g) = \frac{1}{4} (\mathcal{E}_n(f + g, f + g) - \mathcal{E}_n(f - g, f - g)) \quad (3.14)$$

e ver que o lado direito desta igualdade é convergente quando  $n \rightarrow \infty$ . As propriedades de produto interno decorrem do fato que  $\mathcal{E}_n(f, g)$  é um produto interno no espaço  $\{f : V_n \rightarrow \mathbb{R}; f(a_i) = 0, i = 0, 1, 2\}$ .  $\square$

Em vista da Proposição 30, para  $f \in \mathcal{H}_1$  definimos a *norma*  $\mathcal{H}_1$  de  $f$  como

$$\|f\|_1 = \mathcal{E}(f, f)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Há um pouco de abuso de notação nesta definição, porque  $\|\cdot\|_1$  é só uma seminorma em  $\mathcal{H}_1$ , mas como  $\|\cdot\|_1$  é efetivamente uma norma

no espaço  $\mathcal{H}_1^0$ , isto não será relevante. Esta observação justifica pelo menos parcialmente a introdução do espaço  $\mathcal{H}_1^0$ . No entanto, o conjunto  $\mathcal{H}_1^0$  aparece ao considerar equações diferenciais com condições de fronteira de Dirichlet, como veremos mais adiante.

A Proposição 22 implica a chamada *desigualdade de Poincaré* no espaço  $\mathcal{H}_1^0$ . Para  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , definamos as normas  $L^2(\mu)$ ,  $L^\infty$  de  $f$  como

$$\|f\|_0 = \left(\int f^2 d\mu\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|. \quad (3.16)$$

**Proposição 31.** *Para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ ,*

$$\|f\|_\infty \leq \kappa \|f\|_1. \quad (3.17)$$

*Em particular, existe constante finita  $c_0$  tal que  $\|f\|_0 \leq c_0 \|f\|_1$  para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 22, para quaisquer  $f \in \mathcal{H}_1$ ,  $x \in K$ ,

$$|f(x) - f(a_0)| \leq \kappa \mathcal{E}(f, f)^{1/2} |x|^\beta. \quad (3.18)$$

Como  $|x| \leq 1$  para  $x \in K$  e como  $f(a_0) = 0$  para  $f \in \mathcal{H}_1^0$ , a primeira afirmação da Proposição está provada. Como  $\int f^2 \mu(dx) \leq \|f\|_\infty^2 \mu(K)$ , a segunda afirmação segue imediatamente para  $c_0 = \mu(K)^{1/2}$ .  $\square$

O espaço  $\mathcal{H}_1$  não é um espaço normado com respeito à seminorma  $\|\cdot\|_1$ , mas não é difícil construir uma outra norma  $\|\!\| \cdot \|\!\|$  em  $\mathcal{H}_1$  tal que a restrição dela ao conjunto  $\mathcal{H}_1^0$  seja equivalente à norma  $\|\cdot\|_1$ . É suficiente definir

$$\|\!\|f\|\!\| = \sqrt{\left(\int f d\mu\right)^2 + \mathcal{E}(f, f)}. \quad (3.19)$$

**Proposição 32.** *No espaço  $\mathcal{H}_1$ , a norma  $\|\!\| \cdot \|\!\|$  definida em (3.19) é equivalente à norma  $\sqrt{\|\cdot\|_0^2 + \|\cdot\|_1^2}$ . Em particular,  $\|\!\| \cdot \|\!\|$  é equivalente a  $\|\cdot\|_1$  em  $\mathcal{H}_1^0$ .*

*Demonstração.* Lembremos que  $(\int f d\mu)^2 \leq \mu(K) \int f^2 d\mu$ . Então,

$$\|\!\|f\|\!\|^2 \leq \mu(K) (\|f\|_0^2 + \mathcal{E}(f, f)) \quad (3.20)$$

já que  $\mu(K) = \frac{3}{2} > 1$ . Por outra parte,

$$\begin{aligned} \int f^2 d\mu &= \left( \int f d\mu \right)^2 + \frac{1}{2\mu(K)} \int (f(x) - f(y))^2 \mu(dx)\mu(dy) \\ &\leq \left( \int f d\mu \right)^2 + \frac{\kappa^2}{2\mu(K)} \mathcal{E}(f, f), \end{aligned} \quad (3.21)$$

pelo que  $\|f\|_0^2 + \mathcal{E}(f, f) \leq (1 + \frac{\kappa^2}{2\mu(K)})\mathcal{E}(f, f)$ , o que prova a equivalência entre as normas. A Proposição 31 mostra que para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ ,

$$\sqrt{\|f\|_0^2 + \|f\|_1^2} \leq \sqrt{\kappa^2 + 1} \|f\|, \quad (3.22)$$

o que prova a equivalência de  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\|\cdot\|\|$  em  $\mathcal{H}_1^0$ .  $\square$

A desigualdade de Poincaré enunciada na Proposição 31 pode ser estendida ao espaço  $(\mathcal{H}_1, \|\|\cdot\|\|)$ :

**Proposição 33.** *Existe  $c_0 \in \mathbb{R}_+$  tal que*

$$\|f\|_\infty \leq c_0 \|\|f\|\| \quad (3.23)$$

para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1$ .

*Demonstração.* Como  $f \in \mathcal{H}_1$ ,  $f$  é contínua. Pelo teorema do valor médio, existe  $x_0 \in K$  tal que  $\int f d\mu = f(x_0)$ . Pela Proposição 22, vemos que para qualquer  $x \in K$ ,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |\int f d\mu| \leq \max\{1, \kappa\} (|\int f d\mu| + \mathcal{E}(f, f)^{1/2}), \quad (3.24)$$

o que prova a Proposição.  $\square$

## 3.2 O Laplaciano para extensões harmônicas

Sejam  $\ell \in \mathbb{N}$  e  $f : V_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ , e seja  $h_f : K \rightarrow \mathbb{R}$  a extensão harmônica de  $f$ . Recordemos a fórmula para  $\Delta_n h_f$ ,  $n \geq \ell$ :

$$\Delta_n h_f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin V_\ell \\ 3^{n-\ell} \Delta_\ell f(x) & , x \in V_\ell. \end{cases} \quad (3.25)$$

Notemos em particular que  $\frac{1}{3^n} \Delta_n h_f$  não depende de  $n$  (exceto pelo fato que  $x \in V_n$ ). O fator  $3^n$  nos sugere pensar em  $\Delta_n h_f$  não como uma função, mas como uma *medida*. Clarifiquemos esta afirmação. Seja  $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Lembremos que a definição da medida de Hausdorff  $\mu$  foi feita atribuindo massa  $\frac{1}{3^n}$  a cada ponto de  $V_n$ . Isto nos leva a definir, para  $f, g : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  o *produto interno*

$$\langle f, g \rangle_n = \frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} f(x)g(x). \quad (3.26)$$

Esta definição estende-se de forma natural a funções contínuas  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ ; a continuidade sendo necessária para evitar modificar  $f$  no conjunto  $V_\infty$  que tem medida 0 com respeito a  $\mu$ . Vemos que para qualquer  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\langle \psi, \Delta_n h_f \rangle_n = \frac{1}{3^\ell} \sum_{x \in V_\ell} \psi(x) \Delta_\ell f(x). \quad (3.27)$$

Esta última expressão é igual a  $\int \psi(x) \nu(dx)$ , onde  $\nu = \nu(f)$  é a medida finita com sinal em  $K$  dada por

$$\nu(dx) = \frac{1}{3^\ell} \sum_{x \in V_\ell} \Delta_\ell f(x) \delta_x(dx). \quad (3.28)$$

Portanto, tomando em conta que convergência de medidas é determinada por convergência de integrais com respeito a funções contínuas, definimos  $\Delta h_f \in \mathcal{M}(K)$  como  $\Delta h_f = \nu$ .

Uma pergunta relevante é quão geral é esta definição do operador Laplaciano. A proposição seguinte mostra que o operador  $\Delta$  definido desta forma é densamente definido.

**Proposição 34.** *O conjunto de extensões harmônicas é um espaço vetorial denso em  $\mathcal{H}_1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, a função  $\lambda Hf$  é a extensão harmônica de  $\lambda f$ , pelo que o espaço de extensões harmônicas é fechado sob multiplicação por escalares. Sejam  $m \geq n$  e  $f : V_m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $Hf + Hg$  é a extensão harmônica da função  $\tilde{f} : V_m \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\tilde{f}(x) = f(x) + Hg(x)$

para todo  $x \in V_m$ . Logo, o conjunto de extensões harmônicas é um espaço vetorial. Seja agora  $f \in \mathcal{H}_1^0$ , e definamos  $\{f_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  como  $f_n = H\pi_n f$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Afirmamos que  $f_n \rightarrow f$  com respeito à norma  $\mathcal{H}_1$ . De fato, a fórmula de integração por partes mais a Proposição 26 nos diz que para  $n, p \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+p}(f, f_n) &= -\frac{1}{3^{n+p}} \sum_{x \in V_{n+p}} f(x) \Delta_{n+p} f_n(x) \\ &= -\frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} f(x) \Delta_n f(x) \\ &= \mathcal{E}_n(f, f). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Portanto, vemos que  $\mathcal{E}_{n+p}(f - f_n, f - f_n) = \mathcal{E}_{n+p}(f, f) - \mathcal{E}_n(f, f)$ . Tomando o limite quando  $p \rightarrow \infty$ , concluímos que  $\|f - f_n\|_1^2 = \mathcal{E}(f, f) - \mathcal{E}_n(f, f)$ , e como  $f \in \mathcal{H}_1^0$ , esta última quantidade converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Proposição 35.** *O conjunto de extensões harmônicas é um espaço vetorial denso em  $\mathcal{C}(K)$ .*

*Demonstração.* Notemos que este resultado é consequência da Proposição 34 e do fato que a norma  $\mathcal{H}_1$  domina uniformemente à norma do supremo. No entanto, daremos uma prova alternativa que é de interesse por sim mesma. Sejam  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $\varepsilon > 0$ . Como  $K$  é compacto, a função  $f$  é uniformemente contínua. Seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  se  $|x - y| \leq \frac{1}{2^n}$ . Seja  $h_n = H\pi_n f$ , isto é,  $h_n$  é a extensão harmônica da restrição de  $f$  a  $V_n$ . Seja  $\tau$  um triângulo de  $V_n$ , de vértices  $x_0, x_1, x_2$ . Para qualquer  $y \in \tau \cap K$ , temos que  $\max_i |f(y) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por outra parte,

$$\min_i f(x_i) \leq h_n(y) \leq \max_i f(x_i), \tag{3.30}$$

pelo que concluímos que para qualquer  $y \in \tau$ ,  $|f(y) - h_n(y)| < \varepsilon$ , o que prova a proposição.  $\square$

### 3.3 O Laplaciano em $\mathcal{H}_1$

Na seção anterior vimos como definir o Laplaciano numa extensão harmônica  $h = H\pi_n f$ , onde  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $f \in \mathcal{C}(K)$  são arbitrários. O

resultado desta operação não é uma função, senão uma medida com sinal, atômica e suportada em  $K$ . Gostaríamos de achar uma forma de estender a definição do Laplaciano  $\Delta$  a um espaço maior. Seja  $\mathbb{H}$  o espaço de extensões harmônicas. Uma alternativa muito lógica seria aproveitar que  $\mathbb{H}$  é denso em  $\mathcal{H}_1$  para estender a definição de  $\Delta f$  para  $f \in \mathcal{H}_1$  arbitrária. Infelizmente, a aplicação  $\Delta : \mathbb{H} \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{M}(K)$  não é contínua. Uma linha de raciocínio que podemos adotar é utilizar o conceito de *fecho* de um operador linear. Sejam  $W_1, W_2$  espaços vetoriais completos, e seja  $\mathcal{D} \subseteq W_1$  um subespaço vetorial denso em  $W_1$ . Seja  $\mathcal{L} : \mathcal{D} \rightarrow W_2$  um operador linear. Dizemos que  $\mathcal{L}$  é *fechado* se o *grafo* do operador dado por  $\mathcal{L} \{(x, \mathcal{L}x); x \in \mathcal{D}\} \subseteq W_1 \times W_2$  é fechado. Dizemos que  $\mathcal{L}$  é *fechável* se o fecho do seu grafo é o grafo de algum operador linear de  $W_1$  em  $W_2$ .

Os espaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{M}(K)$  são espaços métricos completos (de fato  $\mathcal{H}_1$  é um *espaço de Banach*). Temos a proposição seguinte:

**Proposição 36.** *O operador linear  $\Delta : \mathbb{H} \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{M}(K)$  é fechável.*

*Demonstração.* Basta provar que para qualquer sequência  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  de extensões harmônicas tal que  $f_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{H}_1^0$  e  $\Delta f_n \rightarrow \nu$  em  $\mathcal{M}(K)$ , temos que  $\nu = 0$ . Seja  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  uma dessas sequências. Como  $f_n \in \mathbb{H}$ , existe  $\ell = \ell(n) \in \mathbb{N}_0$  tal que

$$\Delta f_n(dx) = \frac{1}{3^\ell} \sum_{x \in V_\ell} \Delta_\ell f_n(x) \delta_x(dx). \quad (3.31)$$

Seja  $h \in \mathcal{H}_1$ . Em particular,  $h \in \mathcal{C}(K)$  e

$$\int h(x) \nu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h(x) \Delta f_n(dx). \quad (3.32)$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} \int h(x) \Delta f_n(dx) &= \left(\frac{5}{3}\right)^\ell \sum_{x \in V_\ell} h(x) \sum_{y \sim_\ell x} (f_n(y) - f_n(x)) \\ &= \mathcal{E}_\ell(h, f_n), \end{aligned} \quad (3.33)$$

e portanto  $|\int h(x) \Delta f_n(dx)| \leq \mathcal{E}_\ell(h, h)^{1/2} \mathcal{E}_\ell(f_n, f_n)^{1/2}$ . Vemos que  $\int h(x) \Delta f_n(dx) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Notemos que se  $f_n \rightarrow 0$  em  $\mathcal{H}_1$ , então  $\mathcal{E}(f_n, f_n) \rightarrow 0$ . Logo,  $\int h d\nu = 0$  para toda  $h \in \mathcal{H}_1$ , e como  $\mathcal{H}_1$  é denso em  $\mathcal{C}(K)$ , concluímos que  $\nu = 0$ , o que prova a proposição.  $\square$

Esta proposição nos leva à nossa primeira definição do operador Laplaciano em  $K$ . Dizemos que o *fecho* do operador  $\Delta : \mathbb{H} \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{M}(K)$  é o *operador Laplaciano* em  $K$ . Denotaremos este operador pelo mesmo símbolo  $\Delta$ , o que não dará lugar a confusões, pois o mesmo é a única extensão fechada do Laplaciano definido anteriormente para funções em  $\mathbb{H}$ . Denotaremos por  $\mathcal{D}$  o domínio de  $\Delta$ .

A principal desvantagem desta definição é que o domínio dele é difícil de descrever. De fato, neste ponto não somos capazes de provar que o domínio é estritamente maior do que  $\mathbb{H}$ . Uma forma de superar este problema é dada pela cadeia de proposições seguinte:

**Proposição 37.** *Para quaisquer  $h \in \mathcal{H}_1$ ,  $f \in \mathcal{D}$ ,*

$$\left| \int h(x) \Delta f(dx) \right| \leq \|h\|_1 \|f\|_1. \quad (3.34)$$

*Demonstração.* No decorrer da prova da Proposição 36, provamos que (3.34) vale para  $h \in \mathcal{H}_1$  e  $f \in \mathbb{H}$ . Seja  $f \in \mathcal{D}$ . Então, existe uma sequência  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  em  $\mathbb{H}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  em  $\mathcal{H}_1$  e  $\Delta f_n \rightarrow \Delta f$  em  $\mathcal{M}(K)$ . Além disso, podemos supor que  $\int f_n d\mu = 0$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e que  $\int f d\mu = 0$ , pois  $\Delta(f + \lambda) = \Delta f$  para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Seja  $h \in \mathcal{H}_1$ . Em particular,  $h \in \mathcal{C}(K)$  e portanto

$$\begin{aligned} \left| \int h(x) \Delta f(dx) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int h(x) \Delta f_n(dx) \right| \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(h, h)^{1/2} \mathcal{E}(f_n, f_n). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por conta da média zero das funções  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  e  $f$ , temos que  $\mathcal{E}(f_n, f_n) = \|f_n\|^2 \rightarrow \|f\|^2 = \mathcal{E}(f, f)$ , o que prova a proposição.  $\square$

Agora definiremos uma norma em  $\mathcal{M}(K)$  da seguinte forma: seja  $\nu \in \mathcal{M}(K)$ . Então, a *norma*  $\mathcal{H}_{-1}$  de  $\nu$  é dada por

$$\|\nu\|_{-1} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}_1 \\ f \neq 0}} \frac{\int f d\nu}{\|f\|}. \quad (3.36)$$

Notemos que pelo momento não sabemos se  $\|\cdot\|_{-1}$  é uma norma ou não. Esta questão é respondida pela proposição seguinte:

**Proposição 38.** *A norma  $\mathcal{H}_{-1}$  é uma norma em  $\mathcal{M}(K)$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 33, vemos que para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1$ ,  $\|f\|_\infty \leq c_0 \|f\|$ . Logo, para qualquer  $\nu \in \mathcal{M}(K)$ ,  $\int f d\nu \leq c_0 \|f\| \|\nu\|$  e em particular  $\|\nu\|_{-1} \leq c_0 |\nu|$  é finita para qualquer  $\nu \in \mathcal{M}(K)$ . Notemos que é imediato da definição que  $\|\lambda\nu\|_{-1} = |\lambda| \|\nu\|_{-1}$  e que  $\|\nu + \nu'\|_{-1} \leq \|\nu\|_{-1} + \|\nu'\|_{-1}$  para quaisquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\nu, \nu' \in \mathcal{M}(K)$ . Logo,  $\|\cdot\|_{-1}$  é uma seminorma em  $\mathcal{M}(K)$ . Se  $\|\nu\|_{-1} = 0$ , então  $\int h d\nu \leq 0$  para qualquer  $h \in \mathcal{H}_1$ . Considerando  $h$  e  $-h$ , vemos que  $\int h d\nu = 0$  para qualquer  $h \in \mathcal{H}_1$ . Como  $\mathcal{H}_1$  é denso em  $\mathcal{C}(K)$ , concluímos que  $\nu = 0$ , o que prova a proposição.  $\square$

Definimos o *espaço de Sobolev*  $\mathcal{H}_{-1}$  como o fecho de  $\mathcal{M}(K)$  com respeito à norma  $\|\cdot\|_{-1}$ . Consideremos a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{M}(K) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\langle h, \nu \rangle = \int h d\nu$  para quaisquer  $h \in \mathcal{H}_1$ ,  $\nu \in \mathcal{M}(K)$ . Observemos que a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é contínua em  $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_{-1}$ . Em particular, ela possui uma única extensão contínua (ainda denotada por)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_{-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . De fato, é suficiente notar que

$$|\langle h, \nu \rangle| = \left| \int h d\nu \right| \leq \|\nu\|_{-1} \|h\|. \quad (3.37)$$

O espaço  $\mathcal{H}_{-1}$  é extremamente abstrato, pois além do fato que  $\mathcal{M}(K)$  é denso em  $\mathcal{H}_{-1}$ , não podemos dizer mais nada sobre ele. Por outra parte, a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nos permite identificar  $\mathcal{H}_{-1}$  como um subconjunto do dual topológico do conjunto  $\mathcal{H}_1$ : seja  $\nu \in \mathcal{H}_{-1}$ . Então, a aplicação  $h \mapsto \langle h, \nu \rangle$  é linear e contínua.

Seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Podemos identificar  $f$  com a medida  $f(x)\mu(dx)$ , o que nos dá uma imersão canônica do espaço de funções limitadas no espaço  $\mathcal{M}(K)$  de medidas finitas. Com esta identificação, vemos que para  $f, g \in L^2(\mu)$  podemos definir o produto interno  $\langle f, g \rangle = \int f g d\mu$ , de forma que ele coincida com o produto definido anteriormente no caso em que  $f \in \mathcal{H}_1$  e  $g d\mu \in \mathcal{M}(K)$ . Este é sempre o caso, pois  $g \in L^1(\mu)$  e  $\mu(K) < \infty$ .

Vejam agora qual é a utilidade do espaço  $\mathcal{H}_{-1}$ . Temos que:

**Proposição 39.** *O operador  $\Delta : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$  é contínuo. Em particular, existe uma única extensão contínua (que ainda denotaremos por)  $\Delta : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$  do Laplaciano em  $K$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 37, para quaisquer  $h \in \mathcal{H}_1$ ,  $f \in \mathcal{D}$



com  $h \neq 0$ ,

$$\left| \frac{\int h \Delta f(dx)}{\|h\|} \right| \leq \|f\|_1. \quad (3.38)$$

Maximizando sobre  $h \in \mathcal{H}_1$ , obtemos a prova da proposição.  $\square$

Desta forma, temos construído mais uma extensão da definição do operador Laplaciano em  $K$ . A vantagem desta construção é que agora o Laplaciano de uma função  $f$  está bem definido para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1$ .<sup>1</sup> A desvantagem é que o espaço  $\mathcal{H}_{-1}$  é bem abstrato; nem sequer sabemos se ele é diferente de  $\mathcal{M}(K)$ . No próximo capítulo veremos que o fato mais relevante desta construção é que é possível identificar  $\mathcal{H}_{-1}$  com um subconjunto do dual topológico de  $\mathcal{H}_1$ , o que permitirá introduzir o conceito de *solução fraca* de equações diferenciais envolvendo o Laplaciano  $\Delta$ .

Como o Laplaciano  $\Delta$  é contínuo como função de  $\mathcal{H}_1$  em  $\mathcal{H}_{-1}$ , a fórmula de integração por partes (2.19) é imediatamente generalizada

**Proposição 40.** *Para quaisquer  $f, g \in \mathcal{H}_1$ ,*

$$\mathcal{E}(f, g) = \langle f, -\Delta g \rangle = \langle g, -\Delta f \rangle. \quad (3.39)$$

---

<sup>1</sup>Outra vantagem é que esta extensão pode ser definida sem fazer menção ao conceito de *fecho* dum operador linear

## Capítulo 4

# Equações diferenciais parciais em $K$

Agora que temos definido o Laplaciano  $\Delta$  para funções no espaço de Sobolev  $\mathcal{H}_1$ , podemos começar a definir equações diferenciais parciais no conjunto  $K$ . Possivelmente os exemplos mais simples de equações diferenciais parciais envolvendo o operador Laplaciano são a *equação de Poisson*  $\Delta u = g$  e a *equação do calor*  $\partial_t u = \Delta u$ . Lembremos que os pontos  $\{a_0, a_1, a_2\}$  do conjunto  $V_0$  podem ser interpretados como a fronteira do conjunto  $K$ . Portanto, é razoável impor algum tipo de condição de fronteira no conjunto  $V_0$ . A condição de fronteira mais simples é a dita condição de fronteira de *Dirichlet*, que corresponde a fixar o valor da função  $u$  no conjunto  $V_0$ . Por simplicidade, consideraremos o caso em que impomos que  $u \equiv 0$  em  $V_0$ , o caso geral não difere muito deste caso particular.

### 4.1 A equação de Poisson em $K$

Seja  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Dizemos que uma função  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *solução forte* da equação de Poisson

$$\Delta u = g \tag{4.1}$$

em  $K$  com condição de fronteira de Dirichlet identicamente nula se:

- i)  $u \in \mathcal{H}_1^0$ ,
- ii)  $\Delta u \in \mathcal{M}(K)$  e existem constantes  $b_1, b_2, b_3$  tais que

$$\Delta f(dx) = g(x)\mu(dx) + \sum_{i=0,1,2} b_i \delta_{a_i}(dx). \quad (4.2)$$

Lembremos que na Seção 3.3 o Laplaciano duma função  $u \in \mathcal{H}_1$  foi descrito como um elemento do espaço abstrato  $\mathcal{H}_{-1}$ . Na prática, não é fácil decidir se  $\Delta u$  é ou não uma medida, pelo que introduziremos uma outra noção de solução da equação (4.1). Dizemos que uma função  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *solução fraca* da equação (4.1) se:

- i)  $u \in \mathcal{H}_1^0$ ,
- ii) para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ ,

$$\langle u, \Delta f \rangle = \int g(x)f(x)\mu(dx). \quad (4.3)$$

Acontece que, apesar da notação, soluções fracas não são mais fracas do que soluções fortes de (4.1). De fato, temos a proposição seguinte:

**Proposição 41.** *Toda solução fraca de (4.1) é uma solução forte.*

*Demonstração.* Seja  $u$  uma solução fraca de (4.1). Seja  $f \in \mathcal{H}_1^0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sejam  $u^n = H\pi_n u$  e  $f^n = H\pi_n f$ . Lembremos que  $u^n \rightarrow u$  e  $f^n \rightarrow f$  em  $\mathcal{H}_1^0$ . Temos que  $\langle u, \Delta f \rangle = \lim_n \langle u^n, \Delta f^n \rangle = \lim_n \langle \Delta u^n, f^n \rangle = \langle \Delta u, f \rangle$ . Concluimos que para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ ,

$$\langle \Delta u, f \rangle = \int g(x)f(x)\mu(dx). \quad (4.4)$$

Da definição de  $\mathcal{H}_{-1}$  pode-se ver que se  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{H}_{-1}$  satisfazem  $\langle \nu_1, f \rangle = \langle \nu_2, f \rangle$  para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ , então existem constantes  $\{b_i; i = 0, 1, 2\}$  tais que  $\nu_1 - \nu_2 = \sum_i b_i \delta_{a_i}$ . De fato, esta propriedade é consequência da propriedade análoga no espaço  $\mathcal{M}(K)$ . Portanto, como  $\mathcal{M}(K) \subseteq \mathcal{H}_{-1}$ , concluimos que  $\Delta u \in \mathcal{M}(K)$  e que  $\Delta u(dx) = g(x)\mu(dx) + \sum_i b_i \delta_{a_i}(dx)$ , como queríamos provar.  $\square$

A ideia por trás desta proposição é que a condição  $u \in \mathcal{H}_1^0$  é na verdade uma condição muito forte. Em geral, a noção de solução fraca poderia não exigir que  $u \in \mathcal{H}_1^0$ , mas é exatamente esta condição a que nos permite usar o fato que  $\Delta u$  existe para provar a proposição.

A unicidade das soluções fracas de (4.1) não é muito difícil de provar, como veremos na proposição seguinte:

**Proposição 42.** *Existe no máximo uma solução fraca da equação (4.1).*

*Demonstração.* Sejam  $u_1, u_2$  duas soluções de (4.1) e seja  $v = u_1 - u_2$ . Então,  $v \in \mathcal{H}_1^0$  e  $\langle v, \Delta f \rangle = 0$  para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ . Como  $v \in \mathcal{H}_1^0$ ,  $v \in \mathcal{C}(K)$  e além disso  $v = 0$  em  $V_0$ . Consideremos o espaço  $\mathcal{H}$  de extensões harmônicas definido na Seção 3.3. Resolvendo o análogo discreto de (4.1), para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $h : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\sum_x h(x) = 0$  é possível achar  $f \in \mathbb{H}$  tal que  $\Delta_n f = h$ . Lembremos que nesse caso,

$$\Delta f = \frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} \Delta_n f(x) \delta_x(dx). \quad (4.5)$$

Concluimos que o espaço  $\{\Delta f; f \in \mathbb{H}\}$  é denso no espaço  $\{\nu \in \mathcal{M}(K); \nu(K) = 0\}$ . Da mesma forma, o espaço  $\{\Delta f; f \in \mathbb{H} \cap \mathcal{H}_0^1\}$  é denso no espaço  $\{\nu \in \mathcal{M}(K); \nu(K) = 0, \nu(a_i) = 0, i = 0, 1, 2\}$ . Em particular, os valores de  $\langle v, \Delta f \rangle$  para  $f \in \mathbb{H} \cap \mathcal{H}_0^1$  determinam  $v$  a menos duma função harmônica. Como já sabemos que  $v = 0$  em  $V_0$ , concluimos que  $v \equiv 0$ , o que prova a unicidade requerida.  $\square$

Notemos que podemos generalizar a definição de solução forte de (4.1) para o caso em que  $g \in \mathcal{M}(K)$ . No caso de soluções fracas, podemos generalizar a definição para o caso em que  $g \in \mathcal{H}_{-1}$ . Não é difícil verificar que tanto a Proposição 41 quanto a Proposição 42 podem ser generalizadas para estas situações mais gerais.

A existência de soluções de (4.1) obtém-se construindo de forma explícita uma solução de (4.1). Para isso usaremos a função de Green introduzida na seção 2.8. Começaremos estendendo a função  $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$  a  $K \times K$ :

**Proposição 43.** *A função de Green  $\mathcal{G} : V_\infty \times V_\infty$  é Hölder-contínua. Em particular,  $\mathcal{G}$  estende-se continuamente a uma função (ainda denotada por)  $\mathcal{G} : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as propriedades enunciadas na Proposição 29.*

*Demonstração.* Pelas Proposições 22 e 29, a função  $\mathcal{G}$  é uniformemente Hölder-contínua na segunda variável. Pela simetria de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}$  é também uniformemente Hölder-contínua na primeira variável, o que prova a Hölder-continuidade de  $\mathcal{G}$ . As outras propriedades são preservadas por dita extensão, o que prova a proposição.  $\square$

Uma observação importante, é que para qualquer  $x \in V_\infty$ , a função  $\mathcal{G}(x, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução forte de (4.1) com  $g = -\delta_x(dx)$ . Se  $x \in K \setminus V_\infty$ , então não é óbvio mostrar que  $\mathcal{G}(x, \cdot)$  é solução forte de (4.1) com  $g = -\delta_x(dx)$ . A proposição seguinte é uma aplicação não trivial do conceito de solução fraca:

**Proposição 44.** *Para qualquer  $x \in K$ ,  $\mathcal{G}(x, \cdot)$  é a solução de (4.1) com  $g = -\delta_x(dx)$ .*

*Demonstração.* Como soluções fracas e fortes são equivalentes, é suficiente provar que  $\mathcal{G}(x, \cdot)$  é uma solução fraca de (4.1) com  $g = -\delta_x(dx)$ . Para  $f \in \mathcal{H}_1^0$  e  $\ell \in \mathbb{N}$ , seja  $f^\ell = \pi_\ell f$ . Suponhamos que  $\Delta f \in \mathcal{M}(K)$ . Lembremos que o conjunto de funções  $f$  tais que  $\Delta f \in \mathcal{M}(K)$  é denso em  $\mathcal{H}_1^1$ . Seja  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  tal que  $x_n \in V_n$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e tal que  $\lim_n x_n = x$ . Temos que  $\mathcal{G}(x_n, \cdot) \rightarrow \mathcal{G}(x, \cdot)$  quando  $n \rightarrow \infty$  com respeito à topologia uniforme. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}(x, \cdot), \Delta f \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}(x_n, \cdot), \Delta f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}(x_n, \cdot), \Delta f^\ell \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \langle \Delta \mathcal{G}(x_n, \cdot), f^\ell \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \{ -f^\ell(x_n) \} \\ &= -f(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como  $\mathcal{G}(x, \cdot) \in \mathcal{H}_1^0$ , pela densidade mencionada acima concluímos que  $\langle \mathcal{G}(x, \cdot), \Delta f \rangle = -f(x)$  para qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ , o que prova a proposição.  $\square$

A prova acima é uma aplicação clássica do conceito de solução fraca numa equação diferencial. Como a formulação fraca só envolve integrais, ela é estável via aproximações uniformes, como no caso acima.

Notemos que a proposição acima responde a pergunta sobre a existência de soluções de (4.1) no caso  $g = -\delta_x(dx)$ . Para funções

$g : K \rightarrow \mathbb{R}$  arbitrárias, a proposição seguinte explica como construir uma solução de (4.1):

**Proposição 45.** *Seja  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Defina  $u : K \rightarrow \mathbb{R}$  como*

$$u(x) = - \int g(y) \mathcal{G}(x, y) \mu(dy) \quad (4.7)$$

para qualquer  $x \in K$ . Então,  $u$  é uma solução de (4.1).

*Demonstração.* Suponhamos para começar que  $g$  é contínua. Para  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in V_n$ , seja  $u^n(x) = \int g(y) \mathcal{G}(x, y) \mu^n(dy)$ . Notemos que como  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_n$  em  $V_n \times V_n$ , para qualquer  $x \in V_n \setminus V_0$  temos que

$$\Delta_n u^n(x) = - \frac{1}{3^n} \sum_{y \in V_n} g(y) \Delta_n \mathcal{G}_n(x, y) = g(x), \quad (4.8)$$

onde o Laplaciano é calculado na primeira coordenada. Pela continuidade das funções  $g$  e  $\mathcal{G}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in V_n} |u^n(x) - u(x)| = 0. \quad (4.9)$$

Notemos que para  $g$  limitada, só temos convergência pontual de  $u^n$  a  $u$ . Seja agora  $f \in \mathbb{H} \cap \mathcal{H}_1^0$ . Para  $n$  suficientemente grande, temos que

$$\langle u^n, \Delta f \rangle = \langle u^n, \Delta_n f \rangle_n = \langle \Delta_n u^n, f \rangle_n = \langle g, f \rangle_n. \quad (4.10)$$

Pela convergência uniforme de  $u^n$  a  $u$ , concluímos que  $\langle u, \Delta f \rangle = \langle g, f \rangle$ . Logo, só falta mostrar que  $u \in \mathcal{H}_1^0$  para provar a proposição. Pela Proposição 43, existe uma constante  $c$  finita tal que  $\mathcal{E}(\mathcal{G}(\cdot, y), \mathcal{G}(\cdot, y)) \leq c$  para qualquer  $x \in K$ . Interpretando a integral  $\int g(y) \mathcal{G}(x, y) \mu(dy)$  como uma combinação linear de elementos  $\mathcal{G}(\cdot, y)$  de  $\mathcal{H}_1^0$ , concluímos que  $\mathcal{E}(u, u) < \infty$ . Por definição,  $u(a_i) = 0$  para  $i = 0, 1, 2$ , o que prova que  $u \in \mathcal{H}_1^0$ .  $\square$

## 4.2 Soluções de energia da equação do calor

Seja  $T > 0$  fixo e seja  $u = \{u(x, t); x \in K, t \in [0, T]\}$  uma função real. Denotaremos por  $u_t : K \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $x \mapsto u(x, t)$ . Dizemos que  $u$

tem *energia finita* se

$$\int_0^T \mathcal{E}(u_t, u_t) dt < \infty. \quad (4.11)$$

Notemos que esta condição não garante que  $\mathcal{E}(u_t, u_t)$  seja finita para todo  $t \in [0, T]$ . Por outra parte para toda função  $u$  de energia finita,  $\mathcal{E}(u_t, u_t)$  é finita para quase todo  $t \in [0, T]$  (com respeito à medida de Lebesgue em  $[0, T]$ ). Em particular,  $u_t$  é uma função contínua para quase todo  $t \in [0, T]$  e logo  $u_t(x)$  está bem definido para quase todo  $t \in [0, T]$ . Seja  $\mathcal{H}_{1,T}^0$  o espaço de funções de energia finita que satisfazem  $u_t(a_i) = 0$  para quase todo  $t \in [0, T]$  e para qualquer  $i = 0, 1, 2$ . O espaço  $\mathcal{H}_{1,T}^0$  é uma versão espaço-temporal do espaço  $\mathcal{H}_1^0$ . Assim como o espaço  $\mathcal{H}_1^0$  é completo con respeito à norma  $\|\cdot\|_1$ , o espaço  $\mathcal{H}_{1,T}^0$  é um espaço completo com respeito à norma

$$\|u\|_{1,T} =: \left( \int_0^T \mathcal{E}(u_t, u_t) dt \right)^{1/2}. \quad (4.12)$$

A função

$$(u, v) \mapsto \int_0^T \mathcal{E}(u_t, v_t) dt \quad (4.13)$$

define um produto interno em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ .

Seja  $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$  dada. Dizemos que uma função  $u = \{u(x, t); x \in K, t \in [0, T]\}$  é uma *solução de energia* da equação do calor com condição de fronteira de Dirichlet identicamente nula

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in K \setminus V_0, t \in [0, T] \\ u(x, t) = 0, & x \in V_0, t \in [0, T] \\ u(0, x) = \psi(x), & x \in K \end{cases} \quad (4.14)$$

se:

i)  $u \in \mathcal{H}_{1,T}^0$ ,

ii) para qualquer trajetória  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1^0$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\langle f_T, u_T \rangle = \langle f_0, \psi \rangle + \int_0^T \{ \langle u_t, \partial_t f_t \rangle - \mathcal{E}(f_t, f_t) \} dt. \quad (4.15)$$

Em outras palavras,  $u$  é uma solução de energia de (4.14) se ela for uma solução fraca de (4.14) e além disso  $u$  tiver energia finita. Chamaremos a esta condição adicional de *condição de energia*. Neste ponto é importante notar que se  $u$  for só uma solução fraca de (4.14), não podemos deduzir que  $u$  tem energia finita. De forma lógica, quanto mais fraca uma noção de solução de uma equação diferencial, mais fácil é provar existência de soluções e mais difícil é provar unicidade das soluções. De forma recíproca, quanto mais forte uma noção de solução, mais fácil é provar unicidade de ditas soluções, e mais difícil é provar a existência de ditas soluções. Se uma noção de solução for muito fraca, então há o risco da equação em questão ter múltiplas soluções. Se uma noção de solução for muito forte, há o risco da equação em questão não ter soluções. Veremos que a condição de energia finita está no meio do caminho, no sentido que existência e unicidade das soluções de (4.14) podem ser provadas com ideias nas quais a condição de energia finita entra de forma decisiva.

### 4.3 Unicidade de soluções de energia

Nesta seção provaremos que para qualquer  $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$  existe no máximo uma solução de energia da equação (4.14). Sejam  $u^1, u^2$  duas soluções de (4.14) e definamos  $v = u^2 - u^1$ . Então, como a equação (4.14) é linear e o conjunto  $\mathcal{H}_{1,T}^0$  é um espaço vetorial, temos que  $v$  é uma solução de energia de (4.14) com  $\psi \equiv 0$ . Dizemos que uma função  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1^0$  de classe  $C^1$  é uma *função teste*. Como  $v$  tem energia finita, podemos supor que  $t \mapsto v_t$  é um caminho em  $\mathcal{H}_1^0$ . Definamos  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1^0$  como

$$f_t = \int_t^T v_s ds \quad (4.16)$$

para  $t \in [0, T]$ . Notemos que como  $v$  tem energia finita,  $f$  é um caminho *contínuo* em  $\mathcal{H}_1^0$ . De fato, pela desigualdade triangular,



para quaisquer  $s < t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \|f_t - f_s\|_1 &= \int_s^t \mathcal{E}(v_{t'}, v_{t'})^{1/2} dt' \leq \sqrt{t-s} \left( \int_s^t \mathcal{E}(v_{t'}, v_{t'}) dt' \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{t-s} \|v\|_{1,T}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

No entanto, estamos longe de poder provar que  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e portanto uma função teste. De fato, se  $f$  fosse de classe  $\mathcal{C}^1$ , então  $v$  seria contínua, exigência que não faz parte da definição de solução de energia. Suponhamos por um momento que  $f$  é uma função teste, e que certas mudanças na ordem de algumas integrais estão bem justificadas. Então, substituindo  $f$  em (4.15) e fazendo algumas manipulações algébricas, vemos que

$$0 = \int_0^T \langle v_t, v_t \rangle dt + \mathcal{E}(f_0, f_0). \quad (4.18)$$

Como ambos termos no lado direito desta expressão são não negativos, concluímos que  $v \equiv 0$ , o que provaria a unicidade buscada. Mas, como mencionado anteriormente, não sabemos se  $f$  é uma função teste ou não. Neste tipo de situações, a estratégia natural consiste em aproximar  $f$  por funções teste, para as quais as manipulações algébricas estejam bem justificadas, e depois mostrar que o resultado final é estável sob o passo ao limite correspondente. Seja  $\delta \in (0, T)$  e definamos  $v^\delta = \{v_t^\delta(x); x \in K, t \in [0, T]\}$  como

$$v_t^\delta = \frac{1}{\delta} \int_{t(1-\frac{\delta}{t})}^{t(1-\frac{\delta}{t})+\delta} v_s ds. \quad (4.19)$$

A definição de  $v^\delta$  pode parecer estranha a primeira vista, mas  $v_t^\delta$  é simplesmente a média de  $v$  num intervalo de comprimento  $\delta$  ao redor de  $t$ . Como dito intervalo deve estar à direita de  $t$  se  $t = 0$  e deve estar à esquerda de  $t$  se  $t = T$ , os índices da integral em (4.19) interpolam linearmente entre estes dois requerimentos.

Definamos agora  $f^\delta = \{f^\delta(x, t); x \in K, t \in [0, T]\}$  como

$$f_t^\delta = \int_t^T v_s^\delta ds. \quad (4.20)$$

Um cálculo similar ao efetuado para provar que  $f$  é uma trajetória contínua em  $\mathcal{H}_1^0$  prova que  $v^\delta$  é uma trajetória contínua em  $\mathcal{H}_1^0$  e logo  $f^\delta$  é de classe  $C^1$ . Em consequência  $f^\delta$  pode ser utilizada como função teste, de onde obtemos que

$$0 = \int_0^T \{ -\langle v_t^\delta, v_t \rangle - \mathcal{E}(f_t^\delta, v_t) \} dt. \quad (4.21)$$

Na sequência de proposições seguintes, provaremos que esta relação continua sendo válida ao tomar o limite  $\delta \rightarrow 0$ .

**Proposição 46.** *Para toda  $v \in \mathcal{H}_{1,T}^0$  temos que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|v^\delta - v\|_{1,T} = 0. \quad (4.22)$$

*Demonstração.* Definamos  $\mathcal{K}^\delta : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  como

$$\mathcal{K}^\delta(s, t) = \frac{1}{\delta} \mathbb{1}(0 \leq s - t(1 - \frac{\delta}{T}) \leq \delta). \quad (4.23)$$

Notemos que  $v_t^\delta = \int_0^T \mathcal{K}^\delta(s, t) v_s ds$ . A função  $\mathcal{K}^\delta$  é o que se conhece como *núcleo de integração*, e a sequência  $\{\mathcal{K}^\delta; \delta \in (0, T)\}$  é o que se conhece como *aproximação da identidade*. Temos que

$$\begin{aligned} \|v_t^\delta\|_1^2 &= \|\int \mathcal{K}^\delta(s, t) v_s ds\|_1^2 \\ &\leq \int_0^T \mathcal{K}^\delta(s, t) ds \int_0^T \mathcal{K}^\delta(s, t) \|v_s\|_1^2 ds \\ &\leq \int_0^T \mathcal{K}^\delta(s, t) \|v_s\|_1^2 ds. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando o lema de Tonelli, vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|v_t^\delta\|_1^2 dt &\leq \int_0^T \left( \int_0^T \mathcal{K}^\delta(s, t) dt \right) \|v_s\|_1^2 ds \\ &\leq \left(1 - \frac{\delta}{T}\right)^{-1} \int_0^T \|v_t\|_1^2 dt. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Portanto, a família de aplicações lineares  $\{v \mapsto v^\delta; \delta \in (0, \frac{T}{2})\}$  é uniformemente contínua. Afirmamos que é suficiente provar a proposição

para uma família de caminhos  $v$  densa em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ . De fato, se este for o caso, é possível achar uma sequência  $\{v^n; n \in \mathbb{N}\}$  de funções em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ . Tais que:

- i)  $\|v - v^n\|_{1,T}$  converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ ,
- ii) para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|(v^n)^\delta - v^n\|_{1,T}$  converge a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ .

Neste caso,

$$\begin{aligned} \|v - v^\delta\|_{1,T} &\leq \|v - v^n\|_{1,T} + \|v^n - (v^n)^\delta\|_{1,T} + \|(v^n)^\delta - v^\delta\|_{1,T} \\ &\leq \left(1 + \left(1 + \frac{\delta}{T}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \|v - v^n\|_{1,T} + \|v^n - (v^n)^\delta\|_{1,T}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Quando  $\delta \rightarrow 0$ , o primeiro termo do lado direito desta desigualdade converge a  $2\|v - v^n\|_{1,T}$ , e o segundo termo converge a 0 por hipótese. Agora  $n$  é arbitrário pelo que mandando  $n \rightarrow \infty$ , concluímos que  $\|v - v^\delta\|_{1,T}$  converge a 0 quando  $\delta \rightarrow 0$ , o que prova a afirmação.

Portanto, só precisamos achar um conjunto denso de funções  $v$  para as quais podemos provar a proposição. Mas, se o caminho  $t \mapsto v_t$  for uniformemente contínuo como função de  $[0, T]$  em  $\mathcal{H}_1^0$ ,

$$\|v_t^\delta - v_t\|_1 \leq \int_0^T \mathcal{K}^\delta(s, t) \|v_s - v_t\|_1 dt \leq \omega_\delta(v), \quad (4.27)$$

onde

$$\omega_\delta(v) = \inf_{|s-t| \leq \delta} \|v_s - v_t\|_1 \quad (4.28)$$

é o módulo de continuidade do caminho  $t \mapsto v_t$ . Portanto, a proposição vale para trajetórias  $t \mapsto v_t$  uniformemente contínuas. Como ditas trajetórias são densas em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ , a proposição segue.  $\square$

**Proposição 47.**

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \langle v_t^\delta, v_t \rangle dt = \int_0^T \langle v_t, v_t \rangle dt. \quad (4.29)$$

*Demonstração.* Pela Proposição 31,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^T (\langle v_t^\delta, v_t \rangle - \langle v_t, v_t \rangle) dt \right| &\leq \int_0^T |\langle v_t^\delta - v_t, v_t \rangle| dt \\
 &\leq \int_0^T \|v_t^\delta - v_t\|_\infty \|v_t\|_\infty dt \leq \kappa^2 \int_0^T \|v_t^\delta - v_t\|_1 \|v_t\|_1 dt \\
 &\leq \kappa^2 T \left( \int_0^T \|v_t^\delta - v_t\|_1 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|v_t\|_1^2 dt \right)^{1/2},
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

que converge a 0 quando  $\delta \rightarrow 0$  pela Proposição 46.  $\square$

**Proposição 48.**

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \mathcal{E}(f_t^\delta, v_t) = \int_0^T \mathcal{E}(f_t, v_t) dt. \tag{4.31}$$

*Demonstração.* O limite acima pode ser rescrito como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \mathcal{E}(f_t^\delta - f_t, v_t) dt = 0. \tag{4.32}$$

Esta integral é o produto interno em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$  entre  $f_t^\delta - f$  e  $v_t$ . Logo, é suficiente provar que  $f^\delta$  converge a  $f$  em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ , isto é, provar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \|f_t^\delta - f_t\|_1^2 dt = 0. \tag{4.33}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \|f_t^\delta - f_t\|_1^2 &= \left\| \int_t^T (v_s^\delta - v_s) ds \right\|_1^2 \\
 &\leq (T-t) \int_0^T \|v_s^\delta - v_s\|_1^2 ds \\
 &\leq T \|v^\delta - v\|_1^2,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

que pela Proposição 46 converge a 0 quando  $\delta \rightarrow \infty$ .  $\square$

Combinando as Proposições 47 e 48 e a identidade (4.21), concluímos que

$$\int_0^T \{ \langle v_t, v_t \rangle + \mathcal{E}(f_t, v_t) \} dt = 0. \quad (4.35)$$

Agora precisaremos de uma última proposição:

**Proposição 49.** *Seja  $v \in \mathcal{H}_{1,T}^0$  e seja  $f \in \mathcal{H}_{1,T}^0$  definida como*

$$f_t = \int_t^T v_s ds. \quad (4.36)$$

Então,

$$\int_0^T \mathcal{E}(f_t, v_t) dt = \frac{1}{2} \mathcal{E}(f_0, f_0). \quad (4.37)$$

*Demonstração.* Como  $v$  tem energia finita, temos que  $f_t \in \mathcal{H}_1^0$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $v_t \in \mathcal{H}_1^0$  para quase todo  $t \in [0, T]$ . Para estes valores de  $t$ , temos que

$$\mathcal{E}(f_t, v_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(f_t, v_t). \quad (4.38)$$

Mais ainda, o limite é monótono (não decrescente, para ser mais precisos). Pelo teorema da convergência monótona,

$$\int_0^T \mathcal{E}(f_t, v_t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathcal{E}_n(f_t, v_t) dt. \quad (4.39)$$

Por outra parte,  $\mathcal{E}_n(f_t, v_t)$  é simplesmente uma soma finita, pelo que podemos trocar a ordem da soma e da integral para provar que

$$\int_0^T \mathcal{E}_n(f_t, v_t) dt = \frac{1}{2} \mathcal{E}_n(f_0, f_0). \quad (4.40)$$

Tomando o limite  $n \rightarrow \infty$ , a proposição está provada.  $\square$

Uma vez provadas todas estas proposições, a unicidade das soluções de energia de (4.14) pode ser provada em duas linhas. De fato, se  $u^1, u^2$  são soluções de energia, então  $v = u^1 - u^2$  satisfaz

$$\int_0^T \langle v_t, v_t \rangle dt + \frac{1}{2} \mathcal{E}(f_0, f_0) = 0, \quad (4.41)$$

onde  $f_0 = \int_0^T v_t dt$ . Como ambos termos são não negativos, concluímos que  $\int_0^T \langle v_t, v_t \rangle dt = 0$ , o que implica que  $v_t = 0$  para quase todo  $t \in [0, T]$ . Logo,  $v = 0$  como elemento de  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ , o que prova que  $u_1 = u_2$ .

## 4.4 Existência de soluções

Para provar a existência de soluções de energia de (4.14), usaremos uma ideia vinda de análise numérica: consideraremos as soluções de uma sequência de equações semidiscretas e mostraremos que dito conjunto de soluções possui pelo menos um ponto limite, que provaremos que é uma solução de energia de (4.14).

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\psi_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  dados. Seja  $\{u_t^n(x); t \geq 0, x \in V_n\}$  a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_t^n(x) = \Delta_n u_t^n(x) \text{ para } x \in V_n \setminus V_0 \text{ e } t \geq 0, \\ u_t^n(x) = 0 \text{ para } x \in V_0 \text{ e } t \geq 0, \\ u_0^n(x) = \psi_n(x) \text{ para } x \in V_n \setminus V_0. \end{cases} \quad (4.42)$$

A função  $\psi_n$  é dita a *condição inicial* deste sistema. Pelo teorema de Picard-Lindelöf, para qualquer condição inicial  $\psi_n$  este sistema tem uma única solução. Logo, a função  $u^n = \{u_t^n(x); t \geq 0, x \in V_n\}$  está bem definida. A função  $u^n$  é dita a solução da equação do calor em  $V_n$  com condição inicial  $\psi_n$  e condições de fronteira nulas. Para  $t \geq 0$ , denotemos por  $\hat{u}_t^n$  a extensão harmônica de  $u_t^n$  ao conjunto  $K$ . Na sequência de proposições seguinte, mostraremos que sob condições adequadas nas funções  $\{\psi_n; n \in \mathbb{N}\}$ , a sequência  $\{\hat{u}^n; n \in \mathbb{N}\}$  é relativamente compacta com respeito a uma topologia adequada, e que todo ponto limite dela é uma solução de energia de (4.42). Antes de começar com a demonstração desta afirmação, provaremos um par de proposições que são fundamentais na teoria de equações diferenciais parciais: o princípio do máximo e a estimativa da energia. Estas duas proposições nos darão informação *a priori* das soluções de (4.42), que não dependerá muito da condição inicial  $\psi_n$  ou do índice  $n$ . Por completude, provaremos o princípio do máximo para uma generalização da equação (4.42). Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T \in [0, \infty]$  fixos e sejam  $\psi_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_n^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2$  dadas. Suporemos que

as funções  $\{g_n^i; i = 0, 1, 2\}$  são contínuas. Notemos que pode ser que  $T = \infty$ . Dizemos que  $u^n = \{u_t^n(x); t \in [0, T], x \in V_n\}$  é uma solução da equação do calor em  $V_n$  com condição inicial  $\psi_n$  e condições de fronteira  $\{g_n^i; i = 0, 1, 2\}$  se

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_t^n(x) = \Delta_n u_t^n(x) \text{ para } x \in V_n \setminus V_0 \text{ e } t \geq 0, \\ u_t^n(a_i) = g_n^i(t) \text{ para } x \in V_0 \text{ e } t \geq 0, \\ u_0^n(x) = \psi_n(x) \text{ para } x \in V_n \setminus V_0. \end{cases} \quad (4.43)$$

O teorema de Picard-Lindelöf prova que esta equação tem uma única solução, que é diferenciável em  $t$  se  $x \notin V_0$ .

O chamado *princípio do máximo* corresponde à proposição seguinte:

**Proposição 50** (Princípio do máximo). *Seja  $u^n$  uma solução de (4.43). Então,*

$$\sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in V_n}} u_t^n(x) = \sup_{(x, t) \in \mathcal{C}_T} u_t^n(x), \quad (4.44)$$

onde  $\mathcal{C}_T = \{(x, t); t \in [0, T], x \in V_0\} \cup \{(x, 0); x \in V_n\}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que não. Seja  $S$  o supremo à direita de (4.44). Então existem  $t \in (0, T]$  e  $M \in \mathbb{R}$  tais que

$$\max_{x \in V_n \setminus V_0} u_t^n(x) > M > S. \quad (4.45)$$

Seja  $t_0 = \inf\{t \geq 0; \max_x u_t^n(x) \geq M\}$  e seja  $A = \{x \in V_n; u_{t_0}^n(x) = M\}$ . Pela continuidade de  $u^n$ ,  $A$  é não vazio e por hipótese,  $A \cap V_0 = \emptyset$ . seja  $x_0 \in A$  tal que  $y \sim_n x_0$  para algum  $y \notin A$ . Então  $u_{t_0}^n(z) \leq M = u_{t_0}^n(x_0)$  para todo  $z \sim_n x_0$  e a desigualdade é estrita pelo menos no caso  $z = y$ . Logo,  $\Delta_n u_{t_0}^n(x_0) < 0$ . Por outra parte, para qualquer  $0 < s < t_0$ ,  $u_s^n(x_0) < u_{t_0}^n(x_0)$ , pelo que  $\frac{d}{dt} u_{t_0}^n(x_0) \geq 0$ , o que é uma contradição.  $\square$

Agora provaremos a chamada *estimativa da energia*:

**Proposição 51** (Estimativa da energia). *Seja  $\{u_t^n(x); t \in [0, T], x \in V_n\}$  uma solução da equação (4.42) com condição inicial  $\psi_n$ . Então,*

para qualquer  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} u_t^n(x)^2 + \int_0^t 2\mathcal{E}_n(u_s^n, u_s^n) ds = \frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} \psi_n(x)^2, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{E}_n(u_t^n, u_t^n) + \int_0^t \frac{1}{2 \cdot 3^n} \sum_{x \in V_n} (\Delta_n u_s^n(x))^2 ds = \mathcal{E}_n(\psi_n, \psi_n). \quad (4.47)$$

*Demonstração.* É suficiente notar que

$$\frac{d}{dt} \sum_{x \in V_n} u_t^n(x)^2 = \sum_{x \in V_n} 2u_t^n(x) \Delta_n u_t^n(x) = -2\mathcal{E}_n(u_t^n, u_t^n) \quad (4.48)$$

e integrar esta relação no intervalo  $[0, t]$ . Na primeira igualdade usamos o fato que  $u_t^n = 0$  em  $V_0$  para trocar  $\frac{d}{dt} u_t^n(a_i)$  por  $\Delta_n u_t^n(a_i)$ , e na segunda igualdade usamos a fórmula de integração por partes (2.19)  $\square$

O princípio do máximo e a estimativa da energia é todo o que precisamos para provar a compacidade relativa mencionada acima.

**Proposição 52.** *Seja  $\{\psi_n; n \in \mathbb{N}\}$  uma sequência de funções de  $V_n$  em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos que existe uma constante  $\kappa$  finita tal que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n} \sum_{x \in V_n} \psi_n(x)^2 \leq \kappa, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in V_n} |\Delta_n \psi^n(x)| \leq \kappa. \quad (4.49)$$

*Seja  $u^n = \{u_t^n(x); t \in [0, T], x \in V_n\}$  a solução de (4.42) com condição inicial  $\psi_n$  e seja  $\hat{u}^n$  a extensão harmônica de  $u^n$ . Então a sequência  $\{\hat{u}^n; n \in \mathbb{N}\}$  é equicontínua.*

*Demonstração.* Pela estimativa da energia, vemos que  $\mathcal{E}_n(u_t^n, u_t^n)$  é decrescente em  $t$ . Como a condição (4.49) implica que  $\mathcal{E}_n(\psi_n, \psi_n) \leq \kappa$ , concluímos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_n(u_t^n, u_t^n) \leq \kappa. \quad (4.50)$$

Em particular, pela Proposição 22 as funções  $\{\hat{u}_t^n; t \in [0, T], n \in \mathbb{N}\}$  são uniformemente equicontínuas na variável espacial  $x$ . Definamos



agora  $v^n = \{v_t^n(x); t \in [0, T], x \in V_n\}$  como

$$v_t^n(x) = \begin{cases} \Delta_n u_t^n(x), & x \in V_n \setminus V_0, \\ 0, & x \in V_0 \end{cases} \quad (4.51)$$

para  $x \in V_n$  e  $t \in [0, T]$ . Vemos que  $v^n$  é uma solução de (4.42) com condição inicial  $\Delta_n \psi_n$ . Pelo princípio do máximo,

$$\sup_{\substack{x \in V_n \\ t \in [0, T]}} |v_t^n(x)| \leq \sup_{x \in V_n} |\Delta_n \psi_n(x)| \leq \kappa. \quad (4.52)$$

Como  $\frac{d}{dt} u_t^n(x) = \Delta_n u_t^n(x)$  para  $t \in [0, T]$ ,  $x \in V_n \setminus V_0$ , concluímos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{x \in V_n \\ t \in [0, T]}} \left| \frac{d}{dt} u_t^n(x) \right| \leq \kappa. \quad (4.53)$$

Em particular, as funções  $\{u_t^n(x); x \in V_n, n \in \mathbb{N}\}$  são uniformemente Lipschitz (e em particular equicontínuas) na variável temporal, o que prova a proposição.  $\square$

Agora provaremos que todo ponto limite das soluções aproximadas da equação (4.14) é uma solução de energia:

**Proposição 53.** *Sob as hipóteses da Proposição 52, todo ponto limite de  $\{\hat{u}^n; n \in \mathbb{N}\}$  é uma solução de energia da equação (4.14).*

*Demonstração.* Seja  $u = \{u_t(x); t \in [0, T], x \in K\}$  um ponto limite de  $\{\hat{u}^n; n \in \mathbb{N}\}$ . Por simplicidade, denotaremos por  $n$  a subsequência ao longo da qual  $u^n$  converge a  $u$ . Para quaisquer  $\ell \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\ell(u_t, u_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\ell(\hat{u}_t^n, \hat{u}_t^n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\hat{u}_t^n, \hat{u}_t^n) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(u_t^n, u_t^n) \leq \kappa. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Concluímos que  $\mathcal{E}(u_t, u_t) \leq \kappa$  para qualquer  $t \in [0, T]$ , e em particular  $\int_0^T \mathcal{E}(u_t, u_t) dt < \infty$ . Por definição,  $u_t^n(a_i) = 0$  para  $i = 0, 1, 2$ . Logo,  $u \in \mathcal{H}_{1,T}^0$ . Seja agora  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1^0$  uma trajetória de classe  $\mathcal{C}^1$ . Como  $u^n$  é solução de (4.42), vemos que

$$\langle f_T, u_T^n \rangle_n = \langle f_0, \phi^n \rangle_n + \int_0^T \{ \langle u_t^n, \partial_t f \rangle_n - \mathcal{E}_n(f_t, f_t) \} dt. \quad (4.55)$$

Notemos que todos os termos desta igualdade são convergentes quando  $n \rightarrow \infty$ , e o limite é justamente a relação (4.15), o que prova que  $u$  é solução de (4.14).  $\square$

Observemos que a convergência de  $\psi^n$  a uma condição inicial limite  $\psi$  é parte da convergência de  $\hat{u}^n$  a  $u$ . Pelo momento, a proposição acima não é o resultado de existência que a gente gostaria de ter. De fato, as condições (4.49) impostas na sequência  $\{\psi^n; n \in \mathbb{N}\}$  são bem restritivas, e nem sequer sabemos se existem sequências não triviais de funções  $\{\psi^n; n \in \mathbb{N}\}$  satisfazendo estas condições. Por este motivo, provaremos a proposição seguinte:

**Proposição 54.** *Seja  $g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Então existe sequência  $\{\psi^n; n \in \mathbb{N}\}$  satisfazendo (4.49) tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in V_n} |\psi^n(x) - \psi(x)| = 0, \quad (4.56)$$

onde  $\psi$  é a solução de  $\Delta\psi = g$ .

*Demonstração.* Suponhamos por um momento que  $g$  é contínua. Notemos que

$$|\psi(x)| = \left| \int g(y)\mathcal{G}(x, y)\mu(dy) \right| \leq \|g\|_\infty \|\mathcal{G}\|_\infty \mu(K). \quad (4.57)$$

Portanto,  $\psi$  é limitada. Como  $\mathcal{G}_n$  é simplesmente a restrição de  $\mathcal{G}$  ao conjunto  $V_n \times V_n$ , vemos que  $\psi^n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\psi^n(x) = \frac{1}{3^n} \sum_{y \in V_n} g(y)\mathcal{G}(x, y) \quad (4.58)$$

satisfaz as propriedades requeridas. Para  $g$  limitada, fazemos o seguinte. Para  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in V_n$ , escolhemos um triângulo  $\tau$  em  $V_n$  que contenha  $x$ , e definimos

$$g^n(x) = \frac{1}{\mu(\tau)} \int_\tau g(y)\mu(dy), \quad (4.59)$$

$$\psi^n(x) = \frac{1}{3^n} \sum_{y \in V_n} g^n(y)\mathcal{G}(x, y). \quad (4.60)$$

As propriedades requeridas são agora consequência da continuidade da função  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Esta proposição tem como consequência imediata o resultado de existência de soluções de (4.14) seguinte:

**Proposição 55.** *Para qualquer  $\psi \in \mathcal{H}_1^0$  tal que  $\Delta\psi$  é uma função limitada, existe uma solução de energia de (4.14) com condição inicial  $\psi$ .*

A estimativa da energia permite estender este resultado de existência de forma substancial:

**Proposição 56.** *Para qualquer  $\psi \in L^2(\mu)$ , existe uma solução de energia de (4.14) com condição inicial  $\psi$ .*

*Demonstração.* Passando ao limite na estimativa da energia (4.46), vemos que as soluções de (4.14) construídas acima satisfazem

$$\|u\|_{1,T}^2 \leq \int \psi(x)^2 \mu(dx). \quad (4.61)$$

Pela linearidade da equação (4.14), vemos que se  $\{\psi^\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^2(\mu)$ , então as correspondentes soluções de energia  $\{u^\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$  formam uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$ . O mesmo argumento usado para provar que os limites obtidos na Proposição 53 são soluções de energia de (4.14) servem para provar que limites em  $\mathcal{H}_{1,T}^0$  de soluções de energia de (4.14) são também soluções de energia de (4.14). Portanto, só resta provar que o conjunto de funções  $\psi \in \mathcal{H}_1^0$  tais que  $\Delta\psi$  é uma função limitada, é denso em  $L^2(\mu)$ . Seja  $x \in K$  e para cada  $\ell \in \mathbb{N}$  seja  $\tau^\ell$  um triângulo em  $V_\ell$  que contém  $x$ . Definamos  $g^\ell : K \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g^\ell(y) = \frac{1}{\mu(\tau^\ell)} \mathbb{1}(y \in \tau^\ell). \quad (4.62)$$

A sequência  $\{g^\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$  é uma aproximação de  $\delta_x(dx)$ . Seja  $\psi^\ell$  a solução de  $\Delta\psi^\ell = -g^\ell$ . Como  $\mathcal{G}$  é contínua, vemos que  $\psi^\ell$  converge uniformemente a  $\mathcal{G}(x, \cdot)$ . Este argumento é facilmente modificável para construir uma sequência  $\{\psi^\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$  de funções em  $\mathcal{H}_1^0$  tais que  $\Delta\psi^\ell$  é uma função limitada, e tais que  $\{\psi^\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$  converge uniformemente a uma extensão harmônica qualquer  $f \in \mathcal{H}_1^0$ . Como as extensões harmônicas são densas em  $\mathcal{H}_1^0$ , a proposição está provada.  $\square$



# Bibliografia

- [1] Martin T. Barlow and Edwin A. Perkins. Brownian motion on the sierpinski gasket. *Probability Theory and Related Fields*, 79(4):543–623, 1988.
- [2] Johel Beltrán. *Cadenas de Markov y Teoría de Potencial*, 28<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, *Publicações Matemáticas*. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [3] Milton Jara. Hydrodynamic limit for a zero-range process in the sierpinski gasket. *Communications in Mathematical Physics*, 288(2):773–797, 2009.
- [4] Jun Kigami. *Analysis on fractals*, volume 143, *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.