

**Introdução à Aproximação
Numérica de Equações
Diferenciais Parciais Via o
Método de Elementos Finitos**

Publicações Matemáticas

**Introdução à Aproximação
Numérica de Equações
Diferenciais Parciais Via o
Método de Elementos Finitos**

Juan Galvis
Texas A&M University

Henrique Versieux
UFRJ



28^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2011 by Juan Galvis e Henrique Versieux

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

28^o Colóquio Brasileiro de Matemática

- Cadeias de Markov e Teoria do Potencial - Johel Beltrán
- Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução às Geometrias Euclidiana e Afim - M. Andrade e T. Lewiner
- De Newton a Boltzmann: o Teorema de Lanford - Sérgio B. Volchan
- Extremal and Probabilistic Combinatorics - Robert Morris e Roberto Imbuzeiro Oliveira
- Fluxos Estrela - Alexander Arbieto, Bruno Santiago e Tatiana Sodero
- Geometria Aritmética em Retas e Cônicas - Rodrigo Gondim
- Hydrodynamical Methods in Last Passage Percolation Models - E. A. Cator e L. P. R. Pimentel
- Introduction to Optimal Transport: Theory and Applications - Nicola Gigli
- Introduction to Stochastic Variational Analysis - Roger J-B Wets
- Introdução à Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Via o Método de Elementos Finitos - Juan Galvis e Henrique Versieux
- Matrizes Especiais em Matemática Numérica - Licio Hernanes Bezerra
- Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação - Bárbara Amaral, Alexandre Tavares Baraviera e Marcelo O. Terra Cunha
- Multiple Integrals and Modular Differential Equations - Hossein Movasati
- Nonlinear Equations - Gregorio Malajovich
- Partially Hyperbolic Dynamics - Federico Rodriguez Hertz, Jana Rodriguez Hertz e Raúl Ures
- Processos Aleatórios com Comprimento Variável - A. Toom, A. Ramos, A. Rocha e A. Simas
- Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner - Marcelo Escudeiro Hernandes

ISBN: 978-85-244-325-5

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Prefácio

Este livro tem como objetivo apresentar o Método de Elementos Finitos (MEF) a alunos de graduação em matemática ou áreas afins. Este método é uma importante ferramenta para a aproximação numérica de equações diferenciais parciais, que por sua vez aparecem na modelagem de problemas oriundos de diversas áreas do conhecimento, tais como: física e engenharias (dinâmica de fluidos, eletromagnetismo, elasticidade, elasticidade e ciência dos materiais, ...), biologia (modelos para população de espécies, reações bioquímicas, ...), finanças, etc. O texto foi escrito para ser acessível a alunos com conhecimentos de cálculo e álgebra linear.

Começaremos o livro apresentando a formulação variacional para a equação de Laplace, introduzindo assim o conceito de solução fraca para este problema. Usaremos esta equação simples como modelo para introduzir o método de elementos finitos. Apresentaremos ainda, o problema de condução de calor em uma dimensão espacial e introduziremos o MEF neste caso. Posteriormente, faremos um breve estudo da análise do erro de aproximação numérica para o problema de Laplace. Finalmente, apresentaremos de forma muito breve, alguns tópicos mais avançados relacionados ao MEF, tais como: métodos mistos, problemas de sela, método de Taylor-Hood aplicado a equação de Stokes, e um exemplo de problema não linear.

Os autores deixam aqui o seu agradecimento a Fernanda Coelho e Martha Miranda pela ajuda com a revisão do texto.

Conteúdo

1	A equação de Laplace	7
1.1	Primeiros exemplos	7
1.1.1	A equação de Laplace com condição de Dirichlet em dimensão um	8
1.1.2	A equação de Laplace com condição de Dirichlet em dimensão dois	9
1.1.3	A equação de Laplace com condição de Neumann em dimensão dois	11
1.2	Formulações de primeira ordem	12
1.2.1	Formulação de primeira ordem da equação de Laplace	13
1.2.2	Formulação de primeira ordem em aplicações físicas: introdução à modelagem matemática	13
2	O método de elementos finitos	16
2.1	O espaço de funções lineares por partes	18
2.1.1	Caso unidimensional	18
2.1.2	Caso bidimensional	19
2.1.3	Espaços de funções e condições de contorno	21
2.2	Outros espaços de funções	22
2.2.1	Funções bilineares	22
2.2.2	Espaços com funções polinomiais de ordem superior	23
2.3	A aproximação via elementos finitos	24
2.3.1	O problema de Laplace com condição de Dirichlet	24

2.3.2	O problema de Laplace com condição de Neumann	26
2.3.3	Considerações sobre a implementação numérica	28
2.4	Operador de interpolação	35
3	Método de elementos finitos aplicado à equação do calor	36
3.1	A equação do calor	36
3.2	Discretização espacial	37
3.3	Discretização temporal	38
3.3.1	Método reverso de Euler Galerkin	38
3.3.2	Formulação matricial do problema	40
4	Ferramentas da análise funcional	42
4.1	Alguns espaços de funções	42
4.1.1	Construção de espaços por completamento	43
4.2	Formulações fracas revisadas	46
4.2.1	Solução fraca para Laplace: 1D	46
4.2.2	Solução fraca para Laplace: 2D	47
4.2.3	Formulações de primeira ordem e construção de formulações fracas	48
4.2.4	Outras opções	53
4.3	Desigualdade de Poincaré	54
4.4	Teorema de Lax-Milgram	54
5	Análise do erro de aproximação para o MEF	57
5.1	Lema de Céa	58
5.2	Erro de aproximação	59
6	Outros tópicos	62
6.1	Problemas de ponto de sela	62
6.2	Aproximação de Galerkin para o problema de sela	64
6.3	Raviart-Thomas	65
6.4	Equação de Stokes: aproximação via Taylor-Hood	69
6.5	Um problema não linear	77
6.6	O método do gradiente conjugado	78

Capítulo 1

A equação de Laplace

Neste capítulo introduziremos a formulação fraca da equação de Laplace. Primeiramente, apresentaremos exemplos de formulações fracas em uma e duas dimensões, para diferentes tipos de condição de contorno. Posteriormente, apresentaremos a equação de Laplace como um sistema de equações de primeira ordem, e discutiremos brevemente a equação do Laplace como um modelo para a condução do calor. Observamos, que estudaremos com mais detalhes, usando ferramentas da *Análise Funcional*, as formulações fracas na seção 4.2.

1.1 Formulações e soluções fracas: primeiros exemplos

Nesta seção descreveremos a construção de formulações fracas para alguns exemplos envolvendo a equação de Laplace.

1.1.1 A equação de Laplace com condição de Dirichlet em dimensão um

No caso unidimensional, a equação de Laplace com condição de Dirichlet é dada por

$$\begin{cases} \text{Achar } u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -u''(x) = f(x), & \text{para } x \in (a, b) \\ u(x) = g(x), & \text{para } x = a, x = b. \end{cases} \quad (1.1)$$

Onde $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, e $g : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

Para obter a formulação fraca de (1.1), primeiro multiplicamos os dois lados da primeira igualdade em (1.1) por $v \in C_0^\infty(a, b)$, depois integramos os dois lados da equação e obtemos

$$\begin{cases} \text{Achar } u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ - \int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, & \forall v \in C_0^\infty(a, b) \\ u(x) = g(x), & \text{para } x = a, x = b, \end{cases} \quad (1.2)$$

em seguida, usando a fórmula de integração por partes e o fato $v(a) = v(b) = 0$ para toda $v \in C_0^\infty(a, b)$ obtemos

$$\begin{aligned} - \int_a^b u''(x)v(x)dx &= \int_a^b u'(x)v'(x)dx - [u'(b)v(b) - u'(a)v(a)] \\ &= \int_a^b u'(x)v'(x)dx - [u'(b)0 - u'(a)0] \\ &= \int_a^b u'(x)v'(x)dx. \end{aligned}$$

A equação (1.2) pode ser escrita então como

$$\begin{cases} \text{Achar } u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, & \forall v \in C_0^\infty(a, b) \\ u(x) = g(x), & \text{para } x = a, x = b. \end{cases} \quad (1.3)$$

O problema acima representa uma versão preliminar de uma formulação fraca da equação de Laplace em dimensão um. De fato, a

formulação (1.3) pode ser usada para construir métodos numéricos para aproximar a solução de (1.1), tais como discretizações de elementos finitos. No entanto, do ponto de vista matemático¹ a formulação (1.3) não está bem posta. O problema com esta formulação vem do fato de não termos definido o espaço de funções em que estamos buscando a função u , bem como não termos definido qual a regularidade das funções f e g . O estudo matemático relativo a existência e unicidade de soluções fracas para a equação de Laplace, usa ferramentas da análise funcional, tais ferramentas serão descritas de forma breve no capítulo 4.

1.1.2 A equação de Laplace com condição de Dirichlet em dimensão dois

Repetiremos o procedimento da seção anterior para construir a formulação fraca da equação de Laplace em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para tanto vamos:

1. Supor que existe uma solução u de nossa equação diferencial, multiplicar os dois lados da equação por uma *função teste* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrar os dois lados da igualdade.
2. Usar a fórmula de integração por partes em \mathbb{R}^2 (primeira identidade de Green) e a condição de contorno para ficar com expressões que envolvam apenas derivadas de primeira ordem.

Considere a equação de Laplace juntamente com a condição de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned} & \text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ & \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{para } x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x) = g(x), & \text{para } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para obter a formulação fraca de (1.4) multiplicamos os dois lados da primeira igualdade por uma função arbitrária $v \in C_0^\infty(\Omega)$, depois

¹Existência e unicidade de soluções. Dependência da solução dos dados do problema (e.g, dados de fronteira, coeficiente, domínio, ...), análise de erro de aproximações numéricas.

integraremos os dois lados da equação e obtemos

$$\begin{cases} \text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, & \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega) \\ u(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

Usamos a fórmula de integração por partes (primeira identidade de Green, Teorema da Divergência) e o fato $v(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} v(x)(\nabla u(x) \cdot \vec{\eta}(x))dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - 0 = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Lembramos que o $\vec{\eta}(x)$, na formula de integração por partes, denota a normal exterior ao domínio Ω em $x \in \partial\Omega$. O problema (1.5) pode ser escrito então como

$$\begin{cases} \text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, & \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega) \\ u(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

Assim como no caso unidimensional a formulação acima não esta matematicamente bem posta, pois não definimos os espaços de funções apropriados, abordaremos este problema no capítulo 4. A formulação (1.7) pode ser usada para construir métodos numéricos para aproximar a solução de (1.4).

Observação 1.1.1. *Note que por construção se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz (1.4), então u também satisfaz (1.7). Já o problema (1.7) não envolve derivadas de segunda ordem da solução u , portanto faz sentido buscar a solução em uma classe maior de funções. De fato, precisamos apenas que elas tenham a primeira derivada.*

É muito importante observar que se u satisfaz (1.7), e é uma função suficientemente regular (por exemplo $u \in C^2(\Omega)$) e f é contínua

podemos aplicar o procedimento inverso ao que apresentamos e obter que

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)v \, dx = 0$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, o que implica que

$$-\Delta u = f,$$

e portanto u é solução do problema original. Isto é, a formulação fraca nos permite generalizar o conceito de solução para a equação (1.4) para uma classe maior de funções.

1.1.3 A equação de Laplace com condição de Neumann em dimensão dois

Nesta subseção consideraremos a equação de Laplace com condição de contorno de Neumann:

$$\begin{aligned} &\text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ &\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u(x) = f(x), & \text{para } x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ -\nabla u(x) \cdot \vec{\eta}(x) = h(x), & \text{para } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.8) \\ &\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} u(x) dx = 0, & \text{(Condição de solvabilidade)} \\ \int_{\partial\Omega} h(x) dS = \int_{\Omega} f(x) dx & \text{(Condição de compatibilidade).} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Neste caso temos duas condições adicionais. A condição de solvabilidade $\int_{\Omega} u(x) = 0$ é usada para obter unicidade de solução u para o problema. Note que as duas primeiras equações envolvem somente derivadas da u , o que implica que a solução é definida módulo uma constante. Observamos que a condição de média zero pode ser substituída por outras condições que determinem unicidade. A condição de compatibilidade envolve somente dados do problema h e f e vem do seguinte fato: se integrarmos a primeira equação e aplicarmos o teorema da divergência e a condição no bordo, obteremos

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \vec{\eta}(x) dS = \int_{\partial\Omega} h(x) dS.$$

Para obter a formulação fraca de (1.8) multiplicamos os dois lados da primeira igualdade por $v \in C^\infty(\Omega)$, depois integramos os dois

lados da equação. Note que desta vez estamos usando $v \in C^\infty(\Omega)$ no lugar de $v \in C_0^\infty(\Omega)$. O motivo é que o valor da u não é prescrito no bordo $\partial\Omega$. Obtemos

$$\begin{cases} \text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, & \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \nabla u(x) \cdot \vec{\eta}(x) = h(x), & \text{para } x \in \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} u(x)dx = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

Da fórmula de integração por partes e usando a condição no bordo $-\nabla u(x) \cdot \vec{\eta}(x) = h(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} v(x) \left(\nabla u(x) \cdot \vec{\eta}(x) \right) dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} v(x) \left(h(x) \right) dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} v(x)h(x)dS. \end{aligned}$$

A equação (1.9) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} v(x)h(x)dS, & (1.10) \\ \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \\ \int_{\Omega} u(x)dx = 0. \end{cases}$$

No capítulo 4 escreveremos a versão final desta formulação fraca.

1.2 Formulação de primeira ordem

É importante observar que toda equação de segunda ordem pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem. Mais ainda, em muitos casos os modelos matemáticos são introduzidos usando formulações de primeira ordem, isto é, usando sistemas de equações de primeira ordem. Nesta seção discutiremos como escrever a equação de Laplace como um sistema de equações de primeira ordem. Dentro desta perspectiva, poderemos construir formulações fracas para

a equação de Laplace distintas das até aqui apresentadas; abordaremos este assunto na Seção 4.2. A formulações de primeira ordem são flexíveis para a elaboração de formulações fracas para equações diferenciais parciais, e são muito úteis para elaboração de métodos numéricos.

1.2.1 Formulação de primeira ordem da equação de Laplace

A equação de Laplace, $-\Delta u = f$, é uma equação de segunda ordem. Esta equação pode ser formulada como um sistema de equações de primeira ordem. De fato, vamos introduzir a variável vetorial

$$\vec{p} = -\nabla u, \quad (\vec{p} = (p_1, p_2) \text{ se } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \text{ ou } \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \text{ se } \Omega \subset \mathbb{R}^3).$$

Lembrando que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, obtemos que se u é tal que $\Delta u = f$, então, u e \vec{p} satisfazem o sistema de equações

$$\operatorname{div} \vec{p} = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1.11)$$

$$\vec{p} = -\kappa \nabla u \quad \text{em } \Omega. \quad (1.12)$$

O sistema de equações diferenciais acima envolve somente primeiras derivadas. Em contraste, a formulação de segunda ordem $-\Delta u = f$ envolve derivadas de segunda ordem.

Para a construção de formulações fracas, algumas vezes, pode ser útil considerar formulações de primeira ordem. Observe que obtemos de volta a formulação de segunda ordem substituindo \vec{p} por $-\kappa \nabla u$ em (1.11).

1.2.2 Formulação de primeira ordem em aplicações físicas: introdução à modelagem matemática

Considere um domínio Ω que representa um corpo sólido em duas ou três dimensões, veja a Figura 1.1 para uma ilustração em dimensão dois.

Seja $x \in \Omega$ ($x = (x_1, x_2)$ ou $x = (x_1, x_2, x_3)$). A *temperatura* do corpo é determinada pela quantidade de energia térmica do corpo

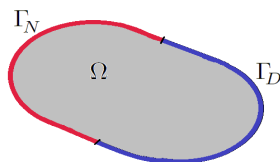


Figura 1.1: Domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e regiões Dirichlet and Neumann na fronteira.

sólido e suas propriedades termodinâmicas. Se $u(t, x)$ denota a temperatura do sólido no ponto x no tempo t , temos que u satisfaz,

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}\vec{p} = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1.13)$$

$$q = -\kappa\nabla u \quad \text{em } \Omega, \quad (1.14)$$

$$u = g \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (1.15)$$

$$-\vec{p} \cdot \vec{\eta} = h \quad \text{em } \Gamma_N. \quad (1.16)$$

O fluxo de calor é $\vec{p} = (p_1, p_2)$ em dimensão dois ou $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ em dimensão três.

A primeira igualdade é a equação ou lei de balanço do calor. Esta equação corresponde ao seguinte fato: dado um subdomínio $\Omega_0 \subset \Omega$, a mudança temporal da temperatura u é obtida somente por causa do fluxo de calor em Ω_0 e da fonte de calor representada por f . No caso $f = 0$, o fluxo do calor é conservado, assim a equação acima corresponde a uma lei de conservação do fluxo do calor. Chamaremos de *caso estacionário*, quando pudermos ignorar as mudanças no tempo i.e. $\frac{\partial}{\partial t}u = 0$. Observe que a equação simplifica-se para $-\operatorname{div}\vec{p} = f$.

A segunda equação (1.14) corresponde à lei constitutiva do modelo, ela relaciona o fluxo de calor \vec{p} com a temperatura u . A equação (1.14) é conhecida como Lei de Fourier. A relação entre a temperatura e o fluxo de calor depende das propriedades do material em questão e é, em geral, não linear. A relação linear acima é uma simplificação obtida ao se linearizar o modelo com respeito de uma temperatura de referência.

Supondo que a equação (1.14) vale para todo $x \in \Omega$ podemos substituir \vec{p} por $\kappa\nabla u$ na equação (1.13) obtendo a seguinte equação

de segunda ordem $\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f$. Veja a Seção 1.2.1.

A equação (1.15) corresponde à condição de fronteira de Dirichlet onde a temperatura (em cada instante do tempo) é conhecida em Γ_D . A última equação (1.16) é referente à condição de fronteira de Neumann, que corresponde ao caso onde o fluxo de calor entre o domínio e seu exterior é conhecido ao longo da parte do bordo denotada por Γ_N .

No *caso estacionário* temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\operatorname{div} \vec{p} = f \quad \text{em } \Omega, \quad (1.17)$$

$$\vec{p} = -\kappa \nabla u \quad \text{em } \Omega, \quad (1.18)$$

$$u = g \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (1.19)$$

$$-\vec{p} \cdot \vec{\eta} = h \quad \text{em } \Gamma_N. \quad (1.20)$$

Lembramos que quando $\Gamma_N = \partial\Omega$ (ou seja $\Gamma_D = \emptyset$), impomos a condição $\int_{\Omega} u(x) = 0$ para obter unicidade de solução, e precisamos da condição de compatibilidade $\int_{\partial\Omega} h(x) dS = \int_{\Omega} f(x) dx$. Veja a Seção 1.1.3.

Capítulo 2

O método de elementos finitos

Neste capítulo introduziremos o método de elementos finitos para a equação de Laplace

$$-\Delta u = f,$$

com diferentes tipos de condição de contorno. Ao longo deste capítulo, entenderemos como solução da equação acima uma função satisfazendo uma das formulações fracas discutidas no capítulo anterior.

Começaremos introduzindo o conceito de espaço de funções com dimensão finita, e a aproximação de Ritz-Galerkin. Na seção 2.1, descreveremos o espaço de funções lineares por partes, sendo este um exemplo básico de espaço de funções bastante utilizado no MEF. Finalmente, discutiremos o método de elementos finitos aplicado à equação de Laplace, e apresentaremos algumas considerações sobre sua implementação numérica.

Começaremos este capítulo introduzindo o conceito de espaço de funções com dimensão finita.

Definição 2.0.1. *Diremos que um espaço de funções V tem dimensão finita, se existe $n \in \mathbb{N}$, e um conjunto de funções $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que qualquer função $\varphi \in V$ pode ser escrita como uma combinação linear das funções ϕ_i . Isto é, existem n constantes α_i tal que, $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$.*

O método de elementos finitos se baseia na aproximação de Ritz-Galerkin, que consiste em buscar uma aproximação para a solução do problema (1.4) em um espaço de funções (reais com domínio Ω) que tenha dimensão finita. Desta forma, uma vez definido o espaço de dimensão finita V^h , que usaremos para aproximar a solução u de (1.4), vamos buscar a aproximação $u^h \in V^h$ de u , satisfazendo a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \nabla u^h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V^h.$$

Como o espaço V^h tem dimensão finita, este espaço pode ser gerado por uma base $\{\phi_i\}_i^{N^h}$. Assim podemos representar a solução aproximada u^h da seguinte forma

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i(x).$$

Fazendo esta substituição na formulação acima, e usando o fato que qualquer função em V^h pode ser escrita como um combinação linear das funções base ϕ_i , obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i(x) \right) \cdot \nabla \phi_j \, dx = \int_{\Omega} f \phi_j \, dx \quad \forall j \in \{1, \dots, N_h\}$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = \int_{\Omega} f \phi_j \, dx \quad \forall j \in \{1, \dots, N_h\}.$$

Definindo a matriz de rigidez $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx$$

e os vetores $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N^h})^t$ e $b = (b_i)$

$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx.$$

O problema original fica reduzido ao seguinte sistema linear

$$A\alpha = b.$$

Note que aqui não tratamos a condição de contorno da equação de Laplace, abordaremos este problema na seção 2.3.

2.1 O espaço de funções lineares por partes

Nesta seção introduziremos o espaço de funções lineares por partes, que consiste em um dos exemplos mais simples de espaço de elementos finitos. Primeiramente, consideraremos o caso unidimensional ($\Omega \subset \mathbb{R}$) e depois o caso bidimensional. Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vamos fazer a hipótese simplificadora que Ω é um domínio poligonal.

2.1.1 Caso unidimensional

Nesta subseção vamos supor que $\Omega = (a, b)$. Entenderemos como uma partição de Ω , uma divisão deste domínio em subintervalos dada da seguinte forma $[a, b] = \cup_{i=1}^N [z_{i-1}, z_i]$, onde $z_0 = a$, $z_N = b$ e $z_i < z_{i+1}$. As constantes z_i são chamadas vértices da partição.

Dada uma partição de Ω , vamos definir o espaço das funções contínuas lineares por partes da seguinte forma¹

$$V = \{f \in C(\Omega); f|_{(z_i, z_{i+1})} \text{ é linear}\} \quad (2.1)$$

isto é, $f|_{[z_i, z_{i+1}]}(x) = a_i x + b_i$, sendo a_i , e b_i constantes apropriadas.

Observe que o conjunto de funções $\phi_i \in V$, $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, onde

$$\phi_i(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

forma uma base para o espaço V . Mais especificamente, qualquer função $v \in V$ pode ser escrita como

$$v(x) = c_0 \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \dots + c_N \phi_N(x) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x).$$

¹Aqui usamos a notações $C(\Omega)$ para designar o conjunto das funções reais contínuas com domínio Ω , e $f|_A$ para designar a restrição de f ao conjunto A

Exercício 2.1.1. Verifique que as constantes c_i na fórmula acima satisfazem a seguinte relação

$$c_i = v(z_i).$$

Definição 2.1.2. Seja \mathcal{T}^h uma família de partições de $\Omega = (a, b)$. Isto é, para cada $h > 0$ temos uma partição $a = \alpha_0^h < \alpha_1^h < \alpha_{i+1}^h < \alpha_{N^h}^h = b$. Dizemos que a família \mathcal{T}^h é quase uniforme se existem constantes c_1 e c_2 tal que

$$\max_i (\alpha_{i+1}^h - \alpha_i^h) \leq c_1 h$$

e

$$\min_i (\alpha_{i+1}^h - \alpha_i^h) \geq c_2 h.$$

Exemplo 2.1.3. Um exemplo de família de partições é dado por: para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $h = (b - a)/n$, e

$$\alpha_i^h = a + \frac{i}{h}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Observamos que neste caso a partição é quase uniforme. Mais ainda, para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ temos que $\alpha_{i+1}^h - \alpha_i^h = h$, desta forma, dizemos que esta partição é uniforme.

Exercício 2.1.4. Construa uma família de partições do intervalo $(-1, 1)$ que seja quase uniforme e não seja uniforme.

2.1.2 Caso bidimensional

Começaremos introduzindo o conceito de triangulação.

Definição 2.1.5. Uma triangulação de um domínio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma subdivisão de Ω em um conjunto finito de triângulos satisfazendo a seguinte propriedade: qualquer vértice da partição não pertence ao interior de qualquer aresta da partição². Veja Figura 2.1.

²A restrição sobre vértices e arestas citada acima não é usada em alguns métodos numéricos sofisticados, como por exemplo, os que usam ferramentas de decomposição de domínios ou refinamento de malha

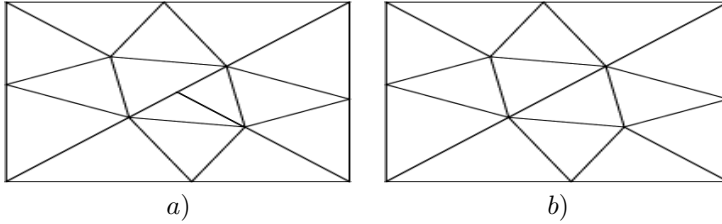


Figura 2.1: a) Partição não regular. b) Partição regular (triangulação).

Seja \mathcal{T} uma triangulação de Ω . Definimos o espaço de funções lineares por partes sobre \mathcal{T} , como o espaço formado pelas funções v tais que v restrita a cada triângulo de \mathcal{T} é linear nas variáveis x e y . Isto é, para todo triângulo $T \in \mathcal{T}$, temos que

$$v|_T(x, y) = ax + by + c,$$

onde a, b, c são constantes apropriadas, e dependem do triângulo T . Estas constantes correspondem aos três graus de liberdade que temos para cada função linear por partes restrita ao triângulo T . Assim como no caso unidimensional, vamos usar V para denotar o espaço das funções lineares por partes sobre \mathcal{T} .

Observamos que, no caso bidimensional, uma base para o espaço V é dada pelo conjunto de funções $\phi_i \in V$, $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, onde N representa a quantidade de vértices de \mathcal{T} e

$$\phi_i(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases} \quad (2.2)$$

Veja o gráfico de uma função base na Figura 2.2.

Exercício 2.1.6. *Suponha que a partição de Ω contém um triângulo T com vértices $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = (1, 0)$, e $z_3 = (1, 1)$. Encontre as restrições das funções base ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 ao triângulo com vértices, z_1 , z_2 e z_3 .*

Definição 2.1.7. *Seja \mathcal{T}^h uma família de triangulações de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $0 < h \leq 1$. Dizemos que a família \mathcal{T}^h é quase uniforme se existem*

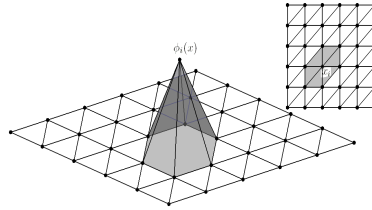


Figura 2.2: Função base.

constantes c_1 e c_2 tal que

$$\max_{T \in \mathcal{T}^h} \{ \text{diâmetro de } B_T \} \leq c_1 h$$

e

$$\min_{T \in \mathcal{T}^h} \{ \text{diâmetro de } b_T \} \geq c_2 h$$

onde B_T é o menor círculo contendo T , e b_T é o maior círculo contido em T .

Dada uma família de triangulações \mathcal{T}^h de Ω vamos denotar $V^h(\Omega)$ ou simplesmente V^h o espaço de funções lineares por partes aqui definido.

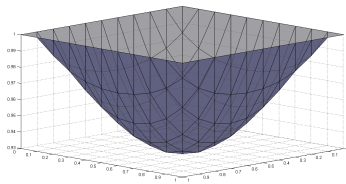


Figura 2.3: Exemplo de uma função linear por partes.

2.1.3 Espaços de funções e condições de contorno

Vale observar que a escolha do espaço de funções lineares a ser utilizado no problema depende da condição de contorno imposta ao

mesmo. Ao trabalharmos com condição de Dirichelet zero temos que, $u|_{\partial\Omega} = 0$, assim convém introduzir o seguinte subespaço de V^h

$$V_0^h(\Omega) = \{v \in V^h(\Omega); v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.3)$$

Observe que como as funções em V^h são lineares por partes, para que uma função v pertença ao espaço $V_0^h \subset V^h$ basta que $v \in V^h$, e $v(z) = 0$ para todo vértice z da partição \mathcal{T}^h situado na fronteira de Ω .

No problema com condição de Neumann, precisamos da condição $\int_{\Omega} u \, dx = 0$ para que tenhamos unicidade de solução. Assim, para tratar deste tipo de condição de fronteira, introduzimos o seguinte subespaço de V^h

$$\hat{V}^h = \{v \in V^h; \int_{\Omega} v \, dx = 0\}. \quad (2.4)$$

Exercício 2.1.8. *Verifique que uma função $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i$ pertence ao espaço \hat{V}^h se e somente se $\sum_{i=1}^N \alpha_i m_i = 0$ onde $m_i = \int_{\Omega} \phi_i$.*

Exercício 2.1.9. *Encontre o espaço de funções lineares por partes apropriado para tratar o problema com condição de fronteira mista. Isto é, o caso em que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $u|_{\Gamma_D} = 0$ e $\partial_{\eta} u|_{\Gamma_N} = 0$.*

2.2 Outros espaços de funções

No restante deste texto nos concentraremos quase que exclusivamente nos espaços de funções lineares por partes. Entretanto, é importante ressaltar que existem vários outros exemplos de espaços de funções de dimensão finita usados em métodos de elementos finitos. A seguir, descreveremos brevemente alguns destes espaços. Para mais detalhes veja [4, 5, 8].

2.2.1 Funções bilineares

Até o momento consideramos apenas partições triangulares do domínio Ω . No entanto, em alguns casos é conveniente considerar uma partição de Ω em retângulos. Neste caso, o espaço de funções bilineares por

partes aparece como um espaço natural para se trabalhar. Mais especificamente, uma função v pertence a este espaço se é contínua em Ω , e se para todo retângulo T da partição \mathcal{T} temos que

$$v|_T(x, y) = axy + by + cx + d$$

onde a, b, c, d são constantes apropriadas dependentes de T . Estas constantes correspondem aos quatro graus de liberdade que temos para cada função bilinear restrita aos retângulos da partição \mathcal{T} .

Exercício 2.2.1. *Suponha $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, encontre uma família de partições de Ω em retângulos e uma base para o espaço de funções bilineares.*

2.2.2 Espaços com funções polinomiais de ordem superior

Em alguns problemas se faz necessário o uso de espaços de funções mais regulares que o das funções lineares por partes. Uma forma de obter tais espaços é considerar funções que, restritas aos triângulos da malha, são polinômios de ordem 2, ou superior. Vamos apresentar um exemplo de tal tipo de espaço.

O espaço dos elementos triangulares de Bell é construído da seguinte forma. As funções neste espaço pertencem a $C^1(\Omega)$, e são polinômios de grau cinco, quando restritas a cada triângulo da malha. Isto é, para todo triângulo T da partição \mathcal{T} , e v neste espaço temos que

$$v|_T(x, y) = a_1x^5 + a_2y^5 + a_3x^4y + a_4xy^4 + a_5x^3y^2 + a_6y^2 + \dots \\ + a_{16}y + a_{17}x + a_{18}$$

onde as constantes a_i , $i = 1, \dots, 18$ correspondem aos dezoito graus de liberdade desta função. Supondo que o triângulo T tem vértices z_1 , z_2 e z_3 estes dezoito graus de liberdade são determinados pelos valores da função v e de suas derivadas de primeira e segunda ordem nos vértices z_1 , z_2 e z_3 .

2.3 A aproximação via elementos finitos

2.3.1 O problema de Laplace com condição de Dirichlet

Nesta seção obteremos a aproximação de u , solução de (1.4) com condição de Dirichlet zero, através do método de elementos finitos. Como foi dito anteriormente, a principal idéia do método de elementos finitos é buscar uma aproximação para a solução da formulação fraca da equação de Laplace em um espaço de dimensão finita V . No caso do problema com condição de Dirichlet zero, tomaremos $V = V_0^h$ definido no fim da seção 2.1. Nossa aproximação de elementos finitos é dada por $u^h \in V_0^h$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u^h \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_0^h. \quad (2.5)$$

Observe que h é um parâmetro que representa o tamanho da malha. Mais especificamente, suponha que a família de partição \mathcal{T}^h é quase uniforme, quanto menor for o valor h , menor serão os triângulos da malha, e teremos uma maior quantidade de vértices em \mathcal{T}^h . Ou seja, a dimensão do espaço V_0^h aumenta quando $h \rightarrow 0$. Veremos mais adiante que quanto menor for o valor de h melhor u^h aproximará u .

Veremos agora como transformar o problema acima em um sistema linear. Seja ϕ_i , $i \in \{1, \dots, N_0^h\}$, uma base para o espaço V_0^h . Primeiramente, observamos o seguinte resultado.

Exercício 2.3.1. *Verifique que u^h é solução de (2.5) se e somente se*

$$\int_{\Omega} \nabla u^h \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N_0^h\}. \quad (2.6)$$

Note também que podemos representar a função u^h da seguinte forma

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_0^h} \alpha_i \phi_i(x),$$

onde α_i são constantes a serem determinadas. Assim, por (2.6) temos

que

$$\int_{\Omega} \nabla \sum_{k=1}^{N_0^h} \alpha_k \phi_k \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N_0^h\}. \quad (2.7)$$

Explorando a linearidade do gradiente e da integral temos:

$$\sum_{k=1}^{N_0^h} \alpha_k \int_{\Omega} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N_0^h\}. \quad (2.8)$$

Definimos a matriz de rigidez $A \in \mathbb{R}^{N_0^h \times N_0^h}$, $A = (a_{ij})$ da seguinte forma

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \quad (2.9)$$

e os vetores coluna α , $b \in \mathbb{R}^{N_0^h}$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_0^h})^t$$

e $b = (b_1, b_2, \dots, b_{N_0^h})^t$ onde

$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx. \quad (2.10)$$

Assim, obtemos que o problema (2.7) é equivalente á resolução do seguinte sistema linear

$$A\alpha = b. \quad (2.11)$$

A matriz de rigidez A é simétrica positiva definida, e o método numérico iterativo do tipo gradiente conjugado, pode ser usado para resolver o sistema linear de forma eficiente. Observamos que quanto menor for h , melhor será a aproximação da solução u , porém o tamanho da matriz A aumentará (pois N_0^h aumenta), e portanto mais trabalho computacional será realizado para resolver o sistema linear.

Neste caso mais simples, as entradas (a_{ij}) da matriz de rigidez A , podem ser calculadas de forma exata usando a definição das funções base e a fórmula (2.9). Já para calcularmos o vetor b , na maioria dos casos, faz-se necessário o uso de um método de integração numérica

para calcular (2.10). O método da quadratura Gaussiana, por exemplo, pode ser usado para este fim. Veja a subseção 2.3.3 para uma discussão mais detalhada sobre o cálculo da matriz de rigidez e do vetor b .

Exercício 2.3.2. *Suponha que $g : \partial\Omega \rightarrow \Omega$ seja uma função contínua. Descreva como aproximar a solução da equação de Laplace com condição de contorno $u = g$ em $\partial\Omega$, usando o MEF com funções base lineares por partes.*

2.3.2 O problema de Laplace com condição de Neumann

Abordaremos primeiramente o problema de Laplace com condição de Neumann nula, e depois discutiremos o caso não homogêneo.

A aproximação para o problema de Laplace com condição de Neumann zero, é bem similar ao problema de Dirichlet zero. Neste caso, podemos aplicar o mesmo raciocínio apresentado para a condição de Dirichlet zero, substituindo o espaço V_0^h pelo espaço \hat{V}^h . Lembremos que o problema de Neumann, sem a imposição da condição $\int_{\Omega} u \, dx = 0$, não possui unicidade, ou seja suas soluções são definidas a menos de uma constante. Numericamente, isto se reflete da seguinte maneira: seja ϕ_i , $i : 1, \dots, N^h$ uma base para o espaço V^h definido em (2.2), defina a matriz de rigidez $A = (a_{ij})$ como

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N^h\}.$$

A matriz A assim definida não é inversível, tendo um núcleo com dimensão um. Este fato pode ser verificado tomando o produto A por um vetor múltiplo de $(1, 1, \dots, 1)^t$. Neste caso, temos que a i -ésima componente do vetor $A(1, 1, \dots, 1)^t$ é dada por

$$(A(1, 1, \dots, 1)^t)_i = \sum_{j=1}^{N^h} a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \sum_{j=1}^{N^h} \phi_j \, dx.$$

Observamos então, que por definição das funções ϕ_i , temos que

$$\sum_{j=1}^{N^h} \phi_j(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega,$$

logo

$$\nabla \sum_{j=1}^{N^h} \phi_j(x) = 0,$$

e $A(1, 1, \dots, 1)^t$ é o vetor nulo. Para resolver o problema no espaço \hat{V}^h , podemos encontrar uma solução qualquer para o sistema indeterminado $Ax = b$ e depois definir

$$\alpha = x - \sum_{i=1}^{N^h} \frac{x_i}{N^h}.$$

Desta forma, o vetor α satisfaz $A\alpha = b$ e $\sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i = 0$ e portanto $u^h = \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i$ é a solução desejada em \hat{V}^h ; veja o Exercício 2.1.8.

Agora apresentaremos uma forma de aproximar a solução do problema de Neumann não nulo. Mais especificamente, estamos interessados em aproximar a solução da equação de Laplace com a seguinte condição de fronteira

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega, \text{ e } \partial_\eta u = g \text{ em } \partial\Omega.$$

Suponha que seja dada uma função $\tilde{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\partial_\eta \tilde{g} = g$ onde $\partial_\eta v(x) = \nabla v(x) \cdot \vec{\eta}(x)$ denota a derivada na direção normal $\vec{\eta}(x)$. Observamos que a função $\tilde{u} = u - g$ é solução do seguinte problema

$$\Delta \tilde{u} = f + \Delta \tilde{g} \text{ em } \Omega, \text{ e } \partial_\eta \tilde{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Isto é, \tilde{u} é solução do problema de Neumann com condição nula, e consequentemente, podemos encontrar sua aproximação de elementos finitos seguindo os passos descritos no início desta subseção. Desta forma, sendo conhecida a aproximação \tilde{u}^h de \tilde{u} , podemos obter a aproximação de u tomando $u^h = \tilde{u}^h + \tilde{g}$.

É importante observar que, dada a função g , não é fácil encontrar \tilde{g} que satisfaça exatamente $\partial_\eta \tilde{g} = g$. Desta forma, é necessário aproximar \tilde{g} numericamente. Estratégias distintas podem ser usadas para este fim. Vamos agora descrever uma das mais simples. Definimos a função $\tilde{g}^h \in V^h$ da seguinte forma

$$\tilde{g}^h(z) = 0,$$

para todo vértice z da malha \mathcal{T}^h , pertencente ao interior de Ω . Os valores de $\tilde{g}^h(z)$ para os vértices pertencentes à $\partial\Omega$ são então escolhidos de forma que $\partial_\eta \tilde{g}^h(z) = g(z)$. Note que a função \tilde{g}^h é linear por partes e portanto não podemos calcular $\Delta \tilde{g}^h$. Assim, temos que fazer uso da formulação fraca do problema. Mais especificamente, a função \tilde{u}^h deve satisfazer

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}^h \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx + \int_{\Omega} \nabla \tilde{g}^h \cdot \nabla \phi_i \, dx$$

para toda ϕ_i na base de V^h .

2.3.3 Considerações sobre a implementação numérica

Começamos esta seção descrevendo melhor as funções base do espaço de funções lineares por partes.

Lema 2.3.3. *Seja \hat{K} o triângulo de referência com vértices $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = (1, 0)$ e $z_3 = (0, 1)$ e $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ e $\hat{\phi}_3$ as respectivas funções bases. As três funções bases de V^h restritas a \hat{K} são*

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = \hat{x}_1, \quad \hat{\phi}_3(\hat{x}) = \hat{x}_2,$$

para todo $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{K}$.

Deixamos a demonstração do lema anterior a cargo do leitor; veja o exercício 2.1.6. O lema seguinte nos permite construir funções base restritas a qualquer triângulo da partição \mathcal{T}^h , a partir das funções base restritas ao triângulo de referência \hat{K} do lema anterior.

Lema 2.3.4. *Seja K_i um elemento da triangulação \mathcal{T}^h com vértices $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ e $z = (z_1, z_2)$ (ordenados no sentido anti-horário) e $\phi_1 = \phi_u$, $\phi_2 = \phi_v$ e $\phi_3 = \phi_z$ as respectivas funções base. Seja \hat{K} o triângulo de referência e $F_{K_i} : \hat{K} \rightarrow K$ a função afim tal que $F_{K_i}(\hat{K}) = K_i$ e $F_{K_i}(0) = u$. Então*

$$F_{K_i}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} v_1 - u_1 & z_1 - u_2 \\ v_2 - u_1 & z_2 - u_2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} \in \hat{K}$$

e para cada $x \in K_i$, as três funções bases com suporte no elemento K_i são

$$\phi_j(x) = \hat{\phi}_j(\hat{x}), \quad \text{para todo } \hat{x} = F_{K_i}^{-1}(x), j = 1, 2, 3.$$

Também temos que

$$\nabla_x \phi_j = \nabla_{\hat{x}} \hat{\phi}_j(\hat{x}) B_{K_i}^{-1}$$

$$\text{onde } B_{K_i} = \begin{bmatrix} v_1 - u_1 & z_1 - u_2 \\ v_2 - u_1 & z_2 - u_2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.3.5. *Demonstre o lema acima.*

Na implementação do método de elementos finitos é necessário o cálculo de integrais, como por exemplo $\int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx$. Normalmente, tais integrais são aproximadas numericamente. Descreveremos agora uma forma útil de calcular a integral de uma função definida em um subconjunto de \mathbb{R}^2 . No triângulo de referência \hat{K} , vale a seguinte fórmula de quadratura.

Lema 2.3.6 (Quadratura de sete pontos no triângulo). *Dada uma função $g : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que a seguinte aproximação é válida*

$$\int_{\hat{K}} g(\hat{x}) d\hat{x} \approx \sum_{i=1}^7 g(\zeta_i) \omega_i.$$

Onde os pontos de quadratura e pesos ζ_i , ω_i são definidos na Tabela 2.1. A fórmula acima se torna uma igualdade quando g é um polinômio de grau menor ou igual a cinco.

A fim de aplicar a fórmula de quadratura do lema anterior para calcular a integral de uma dada função g no domínio Ω , usamos o seguinte fato

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T g(x) dx$$

e aplicamos a fórmula de mudança de variáveis dada pelo seguinte lema.

Lema 2.3.7. *Seja K_i um elemento da triangulação \mathcal{T}^h com vértices $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ e $z = (z_1, z_2)$ (ordenados no sentido anti-horário). Para toda função integrável $f : K_i = F_{K_i}(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ temos*

$$\int_{K_i} g(x) dx = \int_{\hat{K}} g(F_{K_i}(\hat{x})) \left| \det \begin{bmatrix} v_1 - u_1 & z_1 - u_2 \\ v_2 - u_1 & z_2 - u_2 \end{bmatrix} \right| d\hat{x}.$$

Ponto ζ_i	Peso ω_i
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{9}{90}$
$(\frac{6+\sqrt{15}}{21}, \frac{6+\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
$(\frac{9-2\sqrt{15}}{21}, \frac{6+\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
$(\frac{6+\sqrt{15}}{21}, \frac{9-2\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$
$(\frac{6-\sqrt{15}}{21}, \frac{6-\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$
$(\frac{9+2\sqrt{15}}{21}, \frac{6-\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$
$(\frac{6-\sqrt{15}}{21}, \frac{9+2\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$

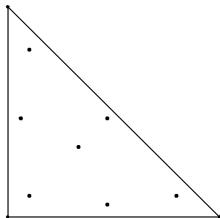


Tabela 2.1: Pontos e pesos da fórmula de quadratura com sete pontos no triângulo de referência (esquerda) e mapa dos pontos de quadratura no triângulo de referência (direita)

Observamos que no caso de funções lineares por partes, o cálculo das entradas da matriz de rigidez A pode ser feito de forma direta no caso da equação de Laplace. Entretanto, em vários outros problemas este cálculo não pode ser feito de forma simples, como no exemplo da equação

$$-\operatorname{div} \cdot (\kappa(x) \nabla u) = f \text{ em } \Omega \text{ e } u = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (2.12)$$

onde $0 < m < k(x) < M$, para constantes positivas m e M apropriadas. Esta é uma equação elíptica de segunda ordem obtida das equações (1.17) e (1.18). Observe que, quando $\kappa(x) = 1$ obtemos o Laplaciano.

Exercício 2.3.8. *Aplique raciocínio similar ao da Subseção 1.1.2 e obtenha uma formulação fraca para a equação (2.12).*

Se fizermos um procedimento análogo ao apresentado para o Laplaciano na subseção 2.3.1, podemos aplicar o MEF para a equação (2.12), e obteremos a seguinte fórmula para as entradas da matriz de rigidez referente a este problema

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j. \quad (2.13)$$

Sendo que, o vetor b correspondente ao problema $A\alpha = b$ permanece como no caso do Laplaciano sendo dado por (2.10).

Exercício 2.3.9. *Verifique as afirmações acima referentes ao MEF aplicado á equação (2.12).*

Neste caso, a integral acima precisa ser aproximada numericamente. Discutiremos agora como aproximar tal integral. Primeiramente observamos que podemos calcular a integral acima somando as contribuições locais relativas á cada elemento $T \in \mathcal{T}^h$. Note que em cada elemento triangular temos *três graus de liberdade*, isto é, somente três funções bases têm suporte em cada elemento T^3 .

Lema 2.3.10. *Considere a matriz de rigidez $A = (a_{ij})$ definida por (2.13). Sejam T_i , $i = 1, \dots, N_e^h$ os elementos de uma triangulação \mathcal{T}^h , onde N_e^h e N^h representam o número de triângulos e vértices desta partição, respectivamente. Definamos $R_i \in \mathbb{R}^{3 \times N^h}$ como a matriz de restrição ao elemento T_i , ou seja, a matriz R_i^T tem todas as entradas nulas com excessão das posições $(1, i_1)$, $(2, i_2)$, e $(3, i_3)$ (correspondentes aos vértices $x_{i_j} \in T_i$, $j \in \{1, 2, 3\}$), onde tem o valor um. Seja A_{T_i} a matriz local definida por*

$$A_{T_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_1}, \phi_{i_1}) & \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_1}, \phi_{i_2}) & \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_1}, \phi_{i_3}) \\ \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_2}, \phi_{i_1}) & \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_2}, \phi_{i_2}) & \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_2}, \phi_{i_3}) \\ \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_3}, \phi_{i_1}) & \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_3}, \phi_{i_2}) & \mathcal{A}_{T_i}(\phi_{i_3}, \phi_{i_3}) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

onde

$$\mathcal{A}_{T_i}(v, w) = \int_{T_i} \kappa(x) \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx. \quad (2.15)$$

Finalmente seja \mathbf{b}_{T_i} o lado direito local do vetor b dado por (2.10),

$$\mathbf{b}_{T_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{T_i}(\phi_{i_1}) \\ \mathcal{F}_{T_i}(\phi_{i_2}) \\ \mathcal{F}_{T_i}(\phi_{i_3}) \end{bmatrix}$$

onde \mathcal{F}_{T_i}

$$\mathcal{F}_{T_i}(v) = \int_{T_i} f(x)v(x)dx.$$

³Isto é, apenas três funções da base são diferentes de zero em T .

Temos então que

$$A = \sum_{i=1}^{N_e^h} R_i^T A_{T_i} R_i \quad (2.16)$$

e

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{N_e^h} R_i^T \mathbf{b}_{T_i}. \quad (2.17)$$

O lema anterior permite calcular a matriz A usando as contribuições locais de cada elemento. Isto representa uma grande vantagem para a implementação numérica. Na igualdade (2.16) o papel das matrizes R_i é fazer com que a contribuição calculada localmente corresponda ao seu devido lugar na matriz *global* A . As matrizes de extensão R_i , $i = 1, \dots, N_e^h$, podem ser substituídas por funções que transformem os índices locais $[1, 2, 3]$ do elemento T_i , nos índices globais $[i_1, i_2, i_3]$ (a mesma consideração se aplica às matrizes R_i^T , $i = 1, \dots, N_e^h$).

Note também que as matrizes locais são calculadas em cada elemento T_i separadamente.

Para resolver o sistema linear $Ax = b$ com a matriz A em (2.16) usando um método iterativo, somente precisamos de uma rotina que faça a operação de multiplicação matriz vezes vetor. Isto é, necessitamos calcular Ax dado $x \in \mathbb{R}^{N^h}$. O resultado de aplicar a matriz A ao vetor x pode ser calculado usando (2.16) diretamente. A fórmulas (2.16) e (2.17) são fundamentais para a construção de muitos algoritmos de decomposição de domínios na aproximação numérica de equações diferenciais parciais elípticas.

Exemplo: a equação de Laplace

Queremos aproximar a solução da equação de Laplace (1.1) usando elementos finitos.

$$\begin{cases} \text{Achar } u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -u''(x) = -1, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, u(1) = 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Agora introduziremos ideias básicas e úteis para a implementação computacional do método dos elementos finitos.

Formulação fraca

A formulação fraca de (2.18) foi construída na Seção 1.1.1.

Triangulação

Neste exemplo queremos usar a triangulação uniforme com quatro vértices

$$\mathcal{T}^h = \{x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 1\}.$$

Nesta triangulação temos três elementos, $T_1 = (0, \frac{1}{3})$, $T_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $T_3 = (\frac{2}{3}, 1)$.

Montagem da matriz

Depois de definir a triangulação, montamos a matriz A usando o lema 2.3.10, tomando $\kappa(x) = 1$. Para isto, precisamos construir, elemento por elemento, as matrizes locais A_{T_i} em (2.14) e as matrizes de restrição R_{T_i} , $i = 1, 2, 3$.

O primeiro elemento é $T_1 = (x_1, x_2) = (0, \frac{1}{3})$. As funções base em T_1 são $\phi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = 3(\frac{1}{3} - x)$ e $\phi_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 3x$, $x \in (x_1, x_2)$. Com estas duas funções base calculamos as entradas da matriz local A_{T_1} em (2.14) da seguinte forma

$$\mathcal{A}_{T_1}(\phi_1, \phi_1) = \int_{T_1} \phi_1' \phi_1' = \int_{x_1}^{x_2} |\phi_1'|^2 = (-3)^2 \frac{1}{3} = 3,$$

$$\mathcal{A}_{T_1}(\phi_1, \phi_2) = \mathcal{A}_{T_1}(\phi_2, \phi_1) = \int_{T_1} \phi_0' \phi_1' = \int_{x_1}^{x_2} (-3)(3) = -3,$$

$$\mathcal{A}_{T_1}(\phi_2, \phi_2) = \int_{T_1} \phi_2' \phi_2' = \int_{x_1}^{x_2} |\phi_2'|^2 = 3^2 \frac{1}{3} = 3.$$

Portanto $A_{T_1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Note que $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$R_1^T A_{T_1} R_1 = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente pode-se calcular as matrizes locais A_{T_i} e de restrição R_i para $i = 2$ e $i = 3$. Obtemos

$$A_{T_i} = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Temos finalmente que a matriz (Neumann) global é dada por

$$A = \sum_{i=1}^3 R_i^T A_{K_i} R_i = 3 \begin{bmatrix} (1) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (1+1) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (1+1) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (1) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$A = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que computacionalmente não é necessário criar as matrizes R_i e R_i^T , mas sim adicionar a matriz A_{T_i} nas posições corretas na matriz global A .

Montagem do lado direito

Agora montamos o lado direito \mathbf{b} usando (2.17). Novamente vamos calcular, elemento por elemento, os lados direitos locais \mathbf{b}_{T_i} , $i = 1, 2, 3$. Neste exemplo, a função do lado direito é $f(x) = -1$ para todo $x \in (0, 1)$. No elemento $T_1 = (x_1, x_2)$ temos

$$\mathcal{F}_{T_1}(\phi_1) = \int_{T_1} -1\phi_1(x)dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = -\frac{1}{6}$$

$$\mathcal{F}_{T_1}(\phi_2) = \int_{T_1} -1\phi_2(x)dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} dx = -\frac{1}{6}$$

e então $\mathbf{b}_{T_1} = -[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]^T$. Analogamente $\mathbf{b}_{T_2} = \mathbf{b}_{T_3} = -[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]^T$. Temos finalmente que

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 R_i^T \mathbf{b}_{T_i} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}.$$

Veja [2] para mais detalhes sobre implementação do MEF.

2.4 Operador de interpolação

Introduziremos agora o operador de interpolação $\mathcal{I}^h : C(\Omega) \rightarrow V^h$. Note que este operador associa a cada função contínua f uma nova função $\mathcal{I}^h f \in V^h$. Este operador será usado com frequência na teoria de elementos finitos. Ele é definido da seguinte forma: seja v_i , $i \in \{1, 2, \dots, N^h\}$ o conjunto dos vértices da triangulação \mathcal{T}^h . Dada uma função contínua f , $\mathcal{I}^h f \in V^h$ e $\mathcal{I}^h f(v_i) = f(v_i)$ para $i \in \{1, 2, \dots, N^h\}$. Note que $\mathcal{I}^h f$ é uma função contínua e está bem definido. Observe que a definição acima se aplica em uma ou duas dimensões.

Exercício 2.4.1. *Verifique que, dada uma função $f \in C(\Omega)$, existe uma única função $v \in V^h$ tal que $\mathcal{I}^h f = v$.*

Exercício 2.4.2. *Mostre que o operador \mathcal{I}^h não é injetivo. Isto é, construa um exemplo com duas funções $f_1, f_2 \in C(\Omega)$, $f_1 \neq f_2$ tal que $\mathcal{I}^h f_1 = \mathcal{I}^h f_2$ (Considere $\Omega = (0, 1)$).*

Capítulo 3

Método de elementos finitos aplicado à equação do calor

3.1 A equação do calor

A equação do calor modela a evolução da temperatura em um dado material ao longo do tempo. Faremos a seguinte hipótese simplificada: o material em questão se trata de uma barra homogênea representada pelo segmento de reta (a, b) . Neste caso temos a EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \kappa \Delta u = \kappa (\partial_x)^2 u \quad \text{em } \Omega = (a, b) \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde u_0 representa a distribuição de temperatura inicial da barra, e κ é uma constante positiva representando o coeficiente de difusão de calor. Observamos que no caso unidimensional temos que $\Delta u = \partial_x^2 u = u_{xx}$ e $\nabla u = u_x$. Diferentes tipos de condição de contorno podem ser associadas a esta equação. Como, por exemplo, fluxo de calor nas extremidades, $\partial_\eta u(t, a) = f(t)$, $\partial_\eta u(t, b) = g(t)$, temperatura fixa na extremidades, ou então condições mistas. Nestas notas vamos con-

siderar apenas o caso mais simples dado pela seguinte condição de Dirichlet, $u(t, a) = u(t, b) = 0$ e vamos supor $\kappa = 1$.

É possível mostrar que, dada uma função u_0 contínua no intervalo (a, b) , a equação do calor possui uma única solução infinitamente diferenciável definida para todo $t > 0$. Mais ainda, esta equação satisfaz o princípio do máximo, que diz que o máximo e o mínimo de $u(t, x)$ são limitados pelo máximo e mínimo de $u_0(x)$. Observe que tal propriedade condiz com o comportamento físico que esperamos do sistema. Um estudo mais profundo sobre esta equação pode ser encontrado em [12].

Diferentemente da equação de Laplace, a equação do calor depende do tempo. Desta forma, para aproximar numericamente a solução desta equação, vamos precisar discretizar também o tempo. O método que vamos apresentar aqui usa elementos finitos na variável espacial e uma discretização baseada na série de Taylor na variável temporal.

Multiplicando a equação (3.1) por uma função teste $v \in C_0^\infty(\Omega)$, integrando com relação a x e usando a identidade (1.6), obtemos a seguinte formulação fraca para a equação do calor

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \quad (3.2)$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

3.2 Discretização espacial

Nesta seção vamos introduzir a discretização espacial para a equação do calor (3.1). Seja \mathcal{T}^h uma família quase uniforme de partições de Ω , e V_0^h o espaço de funções lineares por partes associadas à família \mathcal{T}^h . Baseado na formulação fraca (3.2), definimos a aproximação semi-discreta da equação do calor da seguinte forma

$$\int_{\Omega} u_t^h(t, x) v(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u^h(t, x) \cdot \nabla v(x) \, dx \quad \forall v \in V_0^h \quad (3.3)$$

com $u^h(0, x) = \mathcal{I}^h u_0(x)$. Note que no problema acima discretizamos a variável espacial, mas continuamos com o tempo contínuo. Assim,

como no caso de Laplace, a formulação acima é equivalente a

$$\int_{\Omega} u_t^h(t, x) \phi_i(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u^h(t, x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx \quad (3.4)$$

$\forall i \in \{1, \dots, N_0^h\}$ com $u^h(0, x) = \mathcal{I}^h u_0(x)$, onde $\{\phi_i\}_{i \in \{1, \dots, N_0^h\}}$ forma uma base para V_0^h .

3.3 Discretização temporal

Vamos agora explicar como é feita a discretização da variável temporal do problema. Supondo que a função $u \in C^2((0, T) \times (a, b))$, obtemos da série de Taylor de u

$$u(t + \tau, x) = u(t, x) + \tau \partial_t u(t, x) + \tau^2 r(x, t)$$

onde o resto $r(x, t)$ é uniformemente limitado em t e x . Logo

$$\partial_t u(t, x) = \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} + \tau r(x, t).$$

Assim, podemos aproximar $\partial_t u$ da seguinte forma

$$\partial_t u(t, x) \approx \frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau}$$

e como $r(x, t)$ é limitado, temos um erro de aproximação da ordem de τ . Assim, vamos aplicar a aproximação acima na formulação (3.4).

3.3.1 Método reverso de Euler Galerkin

Vamos denotar $u^{n,h} \in V^h$ a aproximação para a solução da equação do calor no instante $t = n\tau$, ou seja $u(n\tau, \cdot)$. Partindo da formulação fraca da equação do calor (3.4) e usando a aproximação para $\partial_t u$ obtida acima, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{u^{n,h} - u^{n-1,h}}{\tau} v dx = - \int_{\Omega} \nabla u^{n,h} \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in V_0^h \quad (3.5)$$

ou equivalentemente $\forall i \in \{1, \dots, N_0^h\}$

$$\int_{\Omega} \frac{u^{n,h} - u^{n-1,h}}{\tau} \phi_i dx = - \int_{\Omega} \nabla u^{n,h} \cdot \nabla \phi_i dx \quad (3.6)$$

e $u^{0,h}(x) = \mathcal{I}^h u_0(x)$. Observe que no lado direito da equação acima aparece $u^{n,h}$ (poderíamos ter optado por $u^{n-1,h}$), por isto chamamos esta aproximação de reversa. Finalmente, nós definimos a nossa aproximação discreta $u^{\tau,h}(x, t)$ como uma interpolação linear por partes na variável t

$$u^{\tau}(t, x) = u^{n-1}(x) + \frac{t - (n-1)\tau}{\tau} (u^n(x) - u^{n-1}(x)) \quad (3.7)$$

para $t \in [(n-1)\tau, n\tau)$. O método reverso de Euler Galerkin é um exemplo de método implícito e de passo simples.

Definição 3.3.1. *Um método numérico para a equação do calor é dito de passo simples, se a formulação que permite calcular a aproximação da solução no instante $t = n\tau$ depende apenas da aproximação no instante $t = (n-1)\tau$. Caso contrário, o esquema numérico é dito de passo múltiplo.*

Definição 3.3.2. *Um esquema numérico de passo simples para a equação do calor¹ (3.1) é dito estável se $\exists c > 0$ tal que*

$$\|u^{n,h}\|_0 \leq c \|u^{0,h}\|_0. \quad (3.8)$$

Onde $\|f\|_0 = \int_{\Omega} f(x)^2 dx$

A estabilidade é fundamental para o bom desempenho de métodos numéricos para equações de evolução (ou seja equações que envolvam o tempo como variável). A desigualdade (3.8) nos garante que, se cometermos um pequeno erro em um determinado instante t_0 (que pode ser oriundo de erro de truncamento nos calculos numéricos), este pequeno erro pode até se propagar ao longo do tempo, mas ele não será amplificado quando avançamos no tempo.

Um esquema numérico para a equação do calor é dito condicionalmente estável, quando existe alguma relação entre τ e h que precisa ser respeitada para que o método seja estável. Por exemplo, alguns métodos numéricos para a equação do calor necessitam da condição $\tau/h^2 \leq c$ para que sejam estáveis, onde c é uma constante apropriada.

¹A definição de estabilidade aqui apresentada é apenas para o problema homogêneo, e não se aplica para o problema $u_t = \Delta u + f(t, x)$, $f \neq 0$.

Teorema 3.3.3. *O esquema de Euler Galerkin reverso é incondicionalmente estável.*

Prova. Tomando $v = u^{n,h}$ em (3.5), obtemos $\forall i \in \{1, \dots, N^h\}$

$$\int_{\Omega} \frac{u^{n,h}(x) - u^{n-1,h}(x)}{\tau} u^{n,h}(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u^{n,h}(x) \cdot \nabla u^{n,h}(x) dx \quad (3.9)$$

e como o lado direito da igualdade acima é negativo, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u^{n,h}(x))^2 dx &\leq \int_{\Omega} u^{n-1,h}(x) u^{n,h}(x) dx \\ &\leq \|u^{n-1,h}\|_0 \|u^{n,h}\|_0. \end{aligned}$$

Aqui aplicamos a desigualdade de Cauchy para obter a última estimativa. Assim, dividindo ambos os lados por $\|u^{n,h}\|_0$ obtemos

$$\|u^{n,h}\|_0 \leq \|u^{n-1,h}\|_0$$

e obtemos o resultado desejado usando, sucessivamente, a última desigualdade. \square

Veja [19, 25] para mais detalhes sobre a aproximação de equações de evolução.

3.3.2 Formulação matricial do problema

Como $u^{n,h} \in V_0^h$, sabemos que existem constantes α_i , tal que

$$u^{n,h}(x) = \sum_{i=1}^{N_0^h} \alpha_i^n \phi_i(x) \quad (3.10)$$

substituindo em (3.4) temos para $i \in \{1, \dots, N_0^h\}$

$$\sum_{j=1}^{N_0^h} \frac{\alpha_j^n(x) - \alpha_j^n}{\tau} \int_{\Omega} \phi_j(x) \phi_i(x) dx = - \sum_{j=1}^{N_0^h} \alpha_j^n \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx. \quad (3.11)$$

Definindo a matriz de massa $K \in \mathbb{R}^{N_0^h \times N_0^h}$ com entradas

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \phi_j(x) \phi_i(x) dx, \quad (3.12)$$

podemos reescrever o problema (3.11) da seguinte forma

$$K \frac{\alpha^n - \alpha^{n-1}}{\tau} = -A\alpha^n \quad (3.13)$$

onde A é a matriz de rigidez definida em (2.9), e $\alpha^n \in \mathbb{R}^{N_0^h}$ é o vetor com coordenadas α_i^n . Logo, de (3.13) obtemos

$$(K + \tau A)\alpha^n = K\alpha^{n-1}.$$

Assim, dada a solução no instante $(n-1)\tau$ (isto é α^{n-1}), podemos resolver o sistema linear acima e calcular a solução no instante $n\tau$.

Exercício 3.3.4. *Encontre a formulação matricial para um método numérico similar ao aqui apresentado, para resolver a equação do calor não homogênea*

$$u_t = \Delta u + f(t).$$

Capítulo 4

Ferramentas da análise funcional

Neste capítulo apresentaremos alguns aspectos da teoria matemática por trás do conceito de solução fraca. Começaremos introduzindo os espaços de função apropriados para a definição da solução fraca. Depois apresentaremos a definição precisa de solução fraca e anunciaremos os teoremas da Análise funcional que garantirão a existência e unicidade de solução para o problema fraco.

4.1 Alguns espaços de funções

Nesta seção introduziremos, alguns espaços de funções que nos permitirão definir de forma precisa a formulação fraca do problema de Laplace, e também serão importantes na análise de erro do MEF.

Dado uma espaço vetorial V , uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ define uma norma se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. dado $v \in V$, $\|v\| = 0$ se e somente se $v = 0$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ vale $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
3. Dados quaisquer $u, v \in V$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (4.1)$$

Diremos que o par $(V, \|\cdot\|)$ forma um espaço vetorial normado. Observamos que a métrica introduz uma noção de distância entre dois elementos do espaço V . De fato, dados $u, v \in V$ podemos definir a distância de u a v como $\|u - v\|$.

Exercício 4.1.1. *Seja $V = C([0, 1])$, isto é, espaço das funções reais contínuas com domínio dado pelo intervalo $[0, 1]$. Verifique que*

$$\|f\| = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

defina uma norma.

Dada uma sequência de elementos $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset V$, diremos que esta é uma sequência de Cauchy se $\forall \epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > k_0$

$$\|v_m - v_n\| \leq \epsilon.$$

Dizemos que uma sequência $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ tem limite $v \in V$ com relação à norma $\|\cdot\|$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0.$$

Exercício 4.1.2. *Suponha que $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ é uma sequência convergente com limite $v \in V$. Mostre que v_n é sequência de Cauchy.*

Exercício 4.1.3. *Suponha que $V = \mathbb{R}$, munido da norma $\|a\| = |a|$ (módulo de a , para todo $a \in \mathbb{R}$). Mostre que se a_n é uma sequência de Cauchy, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.*

4.1.1 Construção de espaços por completamento

Veremos nesta seção uma ferramenta que nos possibilitará definir os espaços de funções que usaremos para tratar o problema fraco de Laplace. Começaremos introduzindo o conceito de espaço vetorial normado e completo.

Definição 4.1.4. *Dizemos que um espaço vetorial normado V é completo se para qualquer sequência de Cauchy $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset V$, existe $v \in V$ tal que o limite de v_n quando $n \rightarrow \infty$ é igual a v .*

Exemplo 4.1.5. *O espaço das funções $C([0, 1])$ munido da norma $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]}$ é completo. Para um demonstração deste fato ver [11].*

Exercício 4.1.6. *Motre que o espaço $C([0, 1])$ munido da norma L^2 introduzida no exercício 4.1.1 não é completo. Dica: Construa uma sequência de funções f_n convergindo na norma L^2 para a função $f(x) = 1$ se $x > 1/2$ e $f(x) = 0$ se $x \leq 1/2$.*

Um resultado importante sobre espaços métricos, nos diz que é possível completar de forma única um espaço vetorial normado. Para uma demonstração deste fato veja [11].

Teorema 4.1.7. *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, então existe um único espaço vetorial completo $(H, \|\cdot\|)$ tal que¹*

- $V \subset H$,
- Dado qualquer elemento $v \in H$, existe uma sequência $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$$

Neste caso dizemos que V é denso em H ; ou ainda que H é o fecho de (ou completamento) V .

Espaço L^2

A norma L^2 de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\|f\|_0 = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é dado pelo fecho do espaço $C(\Omega)$ com relação à norma L^2

Exercício 4.1.8. *Suponha que $\Omega = (0, 1)$. Verifique que a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1/2 \\ 0, & \text{se } x > 1/2 \end{cases}$$

pertence ao espaço $L^2(\Omega)$.

¹Repare que V e H têm a mesma norma.

Espaços H^1 , H_0^1 e H -div

Definimos a norma H^1 da seguinte forma

$$\|f\|_1 = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 + |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Os espaços $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ são definidos, respectivamente, como o completamento dos espaços $C^\infty(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ com relação à norma $\|\cdot\|_1$.

Definimos ainda a seminorma H^1 como

$$|f|_1 = \left(\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Observe que a seminorma satisfaz a segunda e a terceira propriedade de norma; ver seção 4.1. No entanto, qualquer função f constante em Ω e distinta de zero, satisfaz $|f|_1 = 0$, mas não é nula.

Denotamos por $\partial\Omega$ o bordo do Ω . Note que, se $v \in H_0^1(\Omega)$ temos que $v = 0$ em $\partial\Omega$. Seja $\Gamma \subset \partial\Omega$ um subconjunto (relativamente aberto) do bordo de Ω , definimos o espaço $H_0^1(\Omega, \Gamma) \subset H^1(\Omega)$ como sendo o completamento do conjunto

$$C_0^\infty(\Omega, \Gamma) = \{v \in C^\infty(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

O espaço $H_0^1(\Omega, \Gamma)$ consiste das funções $v \in H^1(\Omega)$ tais que $v = 0$ em Γ .

Introduzimos também a norma H -div, definida da seguinte forma: dada uma função vetorial $\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\vec{v}(x_1, x_2) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$$

definimos

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{H(\text{div}, \Omega)} &= \int_{\Omega} |\vec{v}|^2 dx + \int_{\Omega} |\text{div} \vec{v}|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (v_1^2(x) + v_2^2(x)) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

O espaço $H(\text{div}, \Omega)$ é o completamento do espaço

$$\vec{C}^\infty(\Omega) := \{\vec{v} = (v_1, v_2) : v_1, v_2 \in C^\infty(\Omega)\}$$

com respeito da norma $\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Omega)}$.

Dado $x \in \partial\Omega$, seja $\vec{\eta}(x)$ o vetor normal exterior à $\partial\Omega$ em x , para $\Gamma \subset \partial\Omega$, definimos o espaço

$$H_0(\text{div}, \Omega, \Gamma) : \{\vec{v} \in H(\text{div}, \Omega) : \vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

Quando $\Gamma = \partial\Omega$ usamos a notação $H_0(\text{div}, \Omega) = H_0(\text{div}, \Omega, \Gamma)$.

4.2 Formulações fracas revisadas

Apresentaremos nesta seção a formulação fraca dos problemas estudados no Capítulo 1, usando os espaços de funções introduzidos na seção anterior. Começaremos esta seção introduzindo o conceito de funcional linear e forma bilinear.

Seja V um espaço de funções dotado de uma norma $\|\cdot\|$. Dizemos que uma aplicação $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado se (introduzimos aqui a notação $\langle f, v \rangle$ para denotar a aplicação do funcional f a uma função $v \in V$):

- para toda $v_1, v_2 \in V$ and $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\langle f, c_1v_1 + c_2v_2 \rangle = c_1\langle f, v_1 \rangle + c_2\langle f, v_2 \rangle$
- existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $|\langle f, v \rangle| \leq c\|v\|$.

Dizemos que uma aplicação $\mathcal{A} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(c_1v_1 + c_2v_2, d_1w_1 + d_2w_2) &= c_1d_1\mathcal{A}(v_1, w_1) + c_1d_2\mathcal{A}(v_1, w_2) \\ &\quad c_2d_1\mathcal{A}(v_2, w_1) + c_2d_2\mathcal{A}(v_2, w_2) \end{aligned}$$

para todo $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ e $w_i, v_i \in V$, $i \in \{1, 2\}$.

4.2.1 Solução fraca para Laplace: 1D

O espaço adequado para estudar a formulação fraca da equação de Laplace unidimensional é $H^1(a, b)$. Vamos também substituir o espaço das funções teste $C_0^\infty(a, b)$ pelo espaço $H_0^1(a, b)$ em (1.3).

Introduzimos a notação

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx \quad \text{para toda } u, v \in H^1(a, b) \quad (4.4)$$

e

$$\mathcal{F}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \text{para toda } v \in H^1(a, b). \quad (4.5)$$

Note que $\mathcal{A} : H^1(a, b) \times H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ define uma forma bilinear e $\mathcal{F} : H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear.

Assim, partindo da formulação (1.3) e usando os espaços apropriados, definimos a formulação fraca da equação de Laplace unidimensional com condição de Dirichlet como

$$\begin{aligned} &\text{Achar } u \in H^1(a, b) \text{ tal que:} \\ &\begin{cases} \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v), & \forall v \in H_0^1(a, b) \\ u(x) = g(x) & \text{para } x = a, x = b. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Observamos que, quando $g(a) = g(b) = 0$, o problema se reduz à

$$\begin{aligned} &\text{Achar } u \in H_0^1(a, b) \text{ tal que:} \\ &\begin{cases} \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) & \forall v \in H_0^1(a, b). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.2 Solução fraca para Laplace: 2D

Defina

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx \quad \text{para toda } u, v \in H^1(\Omega) \quad (4.8)$$

e

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \text{para toda } v \in H^1(\Omega). \quad (4.9)$$

Note que $\mathcal{A} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear e $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear. Seguindo as mesmas ideias da seção 4.2.1, definimos a formulação fraca de (1.4) como

$$\begin{aligned} &\text{Achar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que:} \\ &\begin{cases} \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Laplace com condição de Neumann

Defina

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \text{para toda } u, v \in H^1(\Omega) \quad (4.11)$$

e

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx + \int_{\partial\Omega} v(x)h(x)dS \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.12)$$

Note que $\mathcal{A} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear e $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear. Seguindo as mesmas ideias da seção 1.1.1 concluímos que a formulação fraca do problema introduzido na Seção 1.1.3 é

$$\begin{cases} \text{Achar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que:} \\ \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} u \, dx = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

4.2.3 Formulações de primeira ordem e construção de formulações fracas

Em problemas oriundos de aplicações, podemos estar interessados não apenas em obter uma boa aproximação para a solução u da equação resultante do sistema (1.17)–(1.20). Em alguns casos, podemos estar interessados em obter a aproximação de alguma função de u ou do gradiente de u , como por exemplo:

- Quantidades relacionadas à u tais como média de u , integrais de u em subdomínios, ou valores de u em subdomínios, etc.
- O fluxo $\vec{p}(x) = \kappa(x)\nabla u$ em (1.18) ou quantidades relacionadas com \vec{p} , ou ainda o fluxo médio, o fluxo do calor através da região da fronteira Γ_D , etc.

Observamos que podemos calcular tais grandezas relacionadas à u usando procedimentos posteriores, por exemplo, depois de calcular a temperatura u , o fluxo \vec{p} pode ser calculado como sendo $\vec{p} = \kappa\nabla u$. Mas este cálculo em geral é complicado e pode não ser a forma mais

eficiente de atacar o problema. Ou ainda, se o interesse é o cálculo da temperatura média no domínio Ω , calcular o fluxo \vec{p} não é muito relevante. As formulações de primeira ordem são úteis na construção de métodos numéricos apropriados para a obtenção de aproximações de grandezas relacionadas à u . As considerações que acabamos de mencionar têm um papel importante na escolha das ferramentas matemáticas e numéricas adequadas para a resolução de problemas aplicados.

Vamos agora introduzir o conceito de formulação fraca para o sistema de equações (1.17)-(1.20). Sendo as formulações fracas apresentadas nas seções 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3, nossos exemplos principais. Do ponto de vista da análise matemática, este tipo de formulação é importante pois ele nos permite estender o conceito de soluções de uma equação diferencial para uma classe maior de funções. Do ponto de vista da análise numérica, formulações fracas permitem uma maior flexibilidade na construção de métodos numéricos.

De uma forma abstrata podemos ver uma equação diferencial como sendo uma igualdade entre duas funções da forma

$$\mathcal{L}u = f \tag{4.14}$$

onde \mathcal{L} representa um operador diferencial (por exemplo, $\mathcal{L}u = -\Delta u$, $\mathcal{L}u = -\text{div}(a(x)\nabla u)$, etc). Note que a igualdade acima significa que, para todo ponto $x \in \Omega$, estamos impondo $\mathcal{L}u(x) = f(x)$. Existem várias formas de “enfraquecer” esta igualdade. Por exemplo, poderíamos substituí-la por uma média

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \, dx = \int_{\Omega} f \, dx$$

ou ainda proceder como fizemos nos exemplos das Seções 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3, que consiste em multiplicar a igualdade (4.14) por uma função teste e integrar por partes.

Vamos agora explorar as idéias apresentadas no último parágrafo para a construção de formulações fracas para o sistema (1.17)-(1.20). Observamos que podemos tratar equações distintas de nosso sistema de forma diferente, isto é podemos tratar uma ou mais das equações do sistema de forma forte e as demais de forma fraca. Dependendo desta escolha podemos obter formulações fracas distintas. Veja a Tabela 4.1 para dois exemplos.

A escolha correspondente à primeira coluna da Tabela 4.1, consiste em impor a primeira equação no sentido fraco e todas as outras equações no sentido forte, resultando na formulação fraca da Seção 1.1.2. De uma forma geral, a escolha de quais equações serão tratadas de forma forte ou fraca, depende do problema em questão. Por exemplo, provar existência de soluções pode ser mais fácil para uma determinada formulação fraca do que para outras. Ou ainda, a aplicação em mente (i.e. função de u ou ∇u que estamos interessados em aproximar) influencia na construção da formulação fraca.

Equação	Opção 1	Opção 2	A sua opção
$\operatorname{div} \vec{p} = f$ em Ω	Fraco	Fraco	
$\vec{p} = -\kappa \nabla u$ em Ω	Forte	Fraco	
$u = f$ em Γ_D	Forte	Forte	
$\vec{p} \cdot \vec{\eta} = g$ em Γ_N	Forte	Forte	

Tabela 4.1: Equações e duas opções para construir a formulação fraca.

Opção 1: equação de balanço no sentido fraco

Queremos achar a função u tal que $u = g$ em Γ_D . Para impor equação de balanço no sentido fraco, multiplicamos esta equação por uma função $v \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $v = 0$ em Γ_D . Integramos a equação resultante para obter

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{p} v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (4.15)$$

Aplicando a fórmula de integração por partes e as condições no bordo ($v = 0$ em Γ_D e $\vec{p} \cdot \vec{\eta} = h$ em Γ_N), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{p} v x &= \int_{\partial \Omega} v \vec{p} \cdot \vec{\eta} dS - \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\Gamma_D} v \vec{p} \cdot \vec{\eta} dS + \int_{\Gamma_N} v \vec{p} \cdot \vec{\eta} dS - \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \nabla v dx \\ &= 0 - \int_{\Gamma_N} v h dS - \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \nabla v dx. \end{aligned}$$

Chegamos assim à forma fraca da equação $\operatorname{div} \vec{q} = f$,

$$-\int_{\Omega} \vec{p} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} h v dS. \quad (4.16)$$

Substituindo a equação $\vec{p} = -k \nabla u$ (que é imposta no sentido forte) no resultado acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \text{Achar } u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } u = g \text{ em } \Gamma_D \text{ e tal que para} \\ & \text{toda } v \in C^\infty(\Omega) \text{ com } v = 0 \text{ em } \Gamma_D, \text{ vale} \\ & \left\{ \int_{\Omega} (\kappa \nabla u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} v h dS. \right. \end{aligned} \quad (4.17)$$

O procedimento acima é o mesmo que foi usado nas Seções 1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3. Tomando os espaços de Hilbert apropriados, obtemos

$$\begin{aligned} & \text{Achar } u \in H^1(\Omega) \text{ com } u = g \text{ em } \Gamma_D \text{ e tal que para toda} \\ & v \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D) \\ & \left\{ \int_{\Omega} (\kappa \nabla u) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} v h dS. \right. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Opção 2: equações de balanço e de lei constitutiva no sentido fraco

A equação de balanço no sentido fraco foi obtida na seção anterior. Ela é dada por (4.15) antes da integração por partes ou (4.16) se usarmos integração por partes.

Para obter a formulação fraca de

$$\vec{p} = -\kappa \nabla u \quad (4.19)$$

observamos que esta é uma equação vetorial. Usamos então, funções teste vetoriais $\vec{q} \in C^\infty(\Omega)^d$, onde $d = 2$ ou $d = 3$ é a dimensão espacial (e.g., $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ com $q_1, q_2, q_3 \in C^\infty(\Omega)$ no caso $d = 3$). Por conveniência (para aplicações posteriores) escreveremos $\kappa^{-1} \vec{p} + \nabla u = \vec{0}$. Multiplicamos (4.19) por funções teste vetoriais e integramos para obter,

$$\int_{\Omega} \kappa^{-1} \vec{p} \cdot \vec{q} dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{q} dx = \int_{\Omega} \vec{0} \cdot \vec{q} dx = 0. \quad (4.20)$$

Temos duas possíveis formulações fracas conforme aplicamos integração por partes ou não:

- Se não usamos integração por partes, obtemos de (4.16) e (4.20) multiplicada por -1 , a seguinte formulação

Achar u e \vec{p} tais que, para toda $\vec{q} \in C^\infty(\Omega)$, e $v \in C^\infty(\Omega)$ com $v = 0$ em Γ_D , vale

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \kappa^{-1} \vec{p} \cdot \vec{q} dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{q} dx = 0 \\ \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_N} h v dS. \\ \vec{q} \cdot \vec{\eta} = h \text{ em } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.21)$$

Finalmente, para obter a formulação fraca, precisamos introduzir os espaços de Hilbert adequados. Neste caso buscamos uma solução tal que $\vec{p} \in L^2(\Omega)^2$ e $u \in H^1(\Omega)$. Para os espaços das funções teste, usamos $\vec{q} \in L^2(\Omega)^2$ e $v \in H^1(\Omega)$. Obtemos assim

Achar $u \in H^1(\Omega)$ e $\vec{p} \in L^2(\Omega)^2$ tais que para toda $\vec{q} \in L^2(\Omega)^2$, e $v \in H_0^2(\Omega, \Gamma_D)$, vale

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \kappa^{-1} \vec{p} \cdot \vec{q} dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{q} dx = 0 \\ \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_N} h v dS. \\ \vec{q} \cdot \vec{\eta} = h \text{ em } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.22)$$

- Se aplicamos integração por partes em (4.20), requereremos $\vec{q} = \vec{0}$ em Γ_N , onde o fluxo \vec{p} é dado. Aplicando a fórmula de integração por partes e os dados do problema no bordo ($u = g$ em Γ_D e $\vec{q} = 0$ em Γ_N) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{q} dx &= \int_{\partial\Omega} u \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{q} dx \\ &= \int_{\Gamma_N} u \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS + \int_{\Gamma_D} u \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{q} dx \\ &= 0 + \int_{\Gamma_D} g \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{q} dx \end{aligned}$$

e, substituindo em (4.20), obtemos

$$\int_{\Omega} \kappa^{-1} \vec{p} \cdot \vec{q} dx - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \vec{q} dx = \int_{\Gamma_D} g \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS. \quad (4.23)$$

De (4.15) e (4.23), temos a seguinte formulação

Achar u e \vec{p} tal que para toda $\vec{q} \in C^\infty(\Omega)$ com $\vec{q} = 0$ em Γ_N e $v \in C^\infty(\Omega)$ vale

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \kappa^{-1} \vec{p} \cdot \vec{q} dx - \int_{\partial\Omega} u \operatorname{div} \vec{q} dx = \int_{\Gamma_D} g \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS. \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{p} v dx = - \int_{\Omega} f v dx. \\ \vec{p} \cdot \vec{\eta} = h \text{ em } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Apresentamos agora os espaços de funções adequados para esta formulação fraca. Usamos $u \in L^2(\Omega)$ e $\vec{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$. Para as funções teste, usamos $v \in L^2(\Omega)$ e $\vec{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega, \Gamma_N)$. Obtemos

Achar $u \in L^2(\Omega)$ e $\vec{p} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ tal que para toda $\vec{q} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega, \Gamma_N)$ e $v \in L^2(\Omega)$ vale

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \kappa^{-1} \vec{p} \cdot \vec{q} dx - \int_{\partial\Omega} u \operatorname{div} \vec{q} dx = \int_{\Gamma_D} g \vec{q} \cdot \vec{\eta} dS. \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{p} v dx = - \int_{\Omega} f v dx. \\ \vec{p} \cdot \vec{\eta} = h \text{ em } \Gamma_N. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

4.2.4 Outras opções

Outras opções para construções de formulações fracas podem ser consideradas. Um dos principais objetivos deste capítulo do livro é que o leitor compreenda a generalidade das idéias apresentadas nesta seção. Apresentamos três formulações fracas diferentes para a equação de Laplace ($\kappa = 1$),

1. A formulação fraca em (4.17) na Seção 4.2.3.
2. A formulação fraca em (4.21) na Seção 4.2.3.
3. A formulação fraca em (4.24) na Seção 4.2.3.

Outras formulações podem ser consideradas, por exemplo, a condição $u = g$ em Γ_D também ser imposta no sentido fraco.

Um problema importante ao se trabalhar com formulações fracas consiste na escolha de espaços de funções apropriados. Estes espaços devem ser escolhidos de tal forma que a nossa formulação fique bem definida e que possamos achar uma única solução (fraca) de nossa formulação.

As formulações fracas devem ser estudadas também do ponto de vista da análise numérica. Observamos que formulações distintas podem apresentar ordens de aproximação distintas para as diferentes variáveis, bem como complexidade numérica distintas. O leitor pode se perguntar: qual formulação fraca usar para atacar um problema prático? A resposta depende em parte dos recursos computacionais disponíveis, das grandezas relacionadas a u que queremos aproximar e outras considerações. Analistas numéricos experientes podem apresentar motivos práticos e teóricos para justificar a escolha de uma determinada formulação fraca.

4.3 Desigualdade de Poincaré

A desigualdade de Poincaré é uma ferramenta importante no estudo da existência de soluções fracas e na análise do erro de aproximação do MEF. Esta desigualdade nos permite mostrar que, quando nos restringimos ao espaço de funções H_0^1 , a seminorma $|\cdot|_{H^1}$ e a norma $\|\cdot\|_{H^1}$ são equivalentes. Mais especificamente, existe constante c tal que

$$\|v\|_1 \leq c|v|_1; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.26)$$

Observe que por definição vale $|v|_1 \leq \|v\|_1$. Sugerimos a leitura de [12] para a demonstração de (4.26). Deixaremos a cargo do leitor a demonstração desta desigualdade em um caso mais específico.

Exercício 4.3.1. *Seja $\Omega = (a, b)$. Mostre que existe uma constante c tal que*

$$\|v\|_1 \leq c|v|_1; \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

4.4 Teorema de Lax-Milgram

Vamos agora enunciar o Teorema de Lax-Milgram, que nos garante a existência de soluções fracas para o problema de Laplace.

Teorema 4.4.1. *Seja V um espaço de funções completo dotado de uma norma $\|\cdot\|$, e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, satisfazendo*

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V \quad (4.27)$$

e

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) \quad \forall u \in V \quad (4.28)$$

para constantes α e $\beta > 0$ apropriadas. Para cada funcional linear limitado $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma única função $u \in V$, tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle.$$

Recomendamos a leitura de [12] para uma demonstração deste fato. Vamos agora ver como aplicar o teorema de Lax-Milgram para garantir a existência de solução para a equação de Laplace.

Definimos

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

e

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

A escolha do espaço de funções V a ser utilizado vai depender do tipo de condição de contorno imposta ao problema. Consideraremos primeiramente a condição de contorno Dirichlet zero. Neste caso consideramos $V = H_0^1(\Omega)$, e usamos, respectivamente, as desigualdades de Cauchy e Poincaré para verificar que B satisfaz as hipóteses (4.27) e (4.28).

No caso do problema com condição de contorno Neumann zero, consideramos $V = \{v \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} v \, dx = 0\}$. É possível mostrar para esta escolha de espaço que a desigualdade de Poincaré também é satisfeita. Uma vez que a desigualdade de Poincaré é válida, podemos aplicar o teorema de Lax-Milgram de forma similar ao caso Dirichlet zero.

Observamos que o teorema de Lax-Milgram também pode ser usado para mostrar a existência e unicidade para a aproximação de elementos finitos. Para tanto, basta aplicar o teorema tomando o espaço de elementos finitos adequado à condição de contorno.

Várias generalizações do teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas na literatura em diferentes contextos. Para finalizar esta

seção, apresentamos uma generalização do teorema de Lax-Milgram devida a Nečas.

Teorema 4.4.2. *Sejam U e V espaços de Hilbert e $B(U, V) \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $\ell \in V'$. Suponha que*

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_U \|v\|_V, \quad \forall u \in U, v \in V, \quad (4.29)$$

temos a seguinte condição de inf-sup,

$$\sup_{0 \neq v} \frac{B(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_U, \quad \forall u \in U \quad (\text{Condição inf-sup}); \quad (4.30)$$

e para toda $v \in V$ vale,

$$\sup_{u \in U} B(u, v) > 0. \quad (4.31)$$

Então existe uma única função $u \in U$, tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Capítulo 5

Análise do erro de aproximação para o MEF

Neste capítulo estudaremos o erro de aproximação do método de elementos finitos aplicado à equação de Laplace com condição de Dirichlet zero. Isto é:

$$\begin{aligned} & \text{Achar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que:} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. , \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde a forma bilinear $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ é definida pela equação (4.8). Observe que neste caso a aproximação de elementos finitos u^h de u é a solução de:

$$\begin{aligned} & \text{Achar } u^h \in V_0^h(\Omega) \text{ tal que:} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(u^h, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V_0^h(\Omega) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Começaremos introduzindo o lema de Céa, que nos diz que o erro de aproximação do MEF depende do espaço de aproximação V_0^h escolhido. Considerando V^h como o espaço de funções lineares por partes, estudaremos o erro de aproximação entre uma dada função u e sua interpolação neste espaço.

5.1 Lema de Céa

O lema de Céa nos diz que o erro de aproximação do MEF, na norma H^1 , depende do quão bem a solução u pode ser aproximada no espaço V_0^h .

Lema 5.1.1. *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u - u^h\|_1 \leq c \inf_{v \in V_0^h} \|u - v\|_1$$

Prova. Pela desigualdade de Poincaré temos

$$\|u - u^h\|_1^2 \leq c|u - u^h|_1^2,$$

e usando a definição de $|\cdot|_1$ e da forma bilinear $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ (ver (4.8)) concluímos que

$$|u - u^h|_1^2 = \mathcal{A}(u - u^h, u - u^h).$$

Assim,

$$\|u - u^h\|_1^2 \leq c\mathcal{A}(u - u^h, u - u^h).$$

Pela bilinearidade de a temos

$$\mathcal{A}(u - u^h, u - u^h) = \mathcal{A}(u - u^h, u) - \mathcal{A}(u - u^h, u^h).$$

Usando a definição de \mathcal{A} , u , u^h , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u - u^h, u^h) &= \mathcal{A}(u, u^h) - \mathcal{A}(u^h, u^h) \\ &= \int_{\Omega} f(x)u^h(x) dx - \int_{\Omega} f(x)u^h(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente, obtemos que, para qualquer função $v \in V_0^h(\Omega)$, vale a seguinte relação

$$\mathcal{A}(u - u^h, v) = 0.$$

Logo, para todo $v \in V^h$ temos

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_1^2 &\leq c\mathcal{A}(u - u^h, u - u^h) \\ &\leq c\mathcal{A}(u - u^h, u - v) \\ &\leq c\|u - u^h\|_1\|u - v\|_1. \end{aligned}$$

A última desigualdade nos permite concluir o resultado desejado. \square

5.2 Erro de aproximação

O lema de Céa nos permite limitar o erro da aproximação pelo termo $c \inf_{v \in V_0^h} \|u - v\|_1$. Nesta seção, vamos usar este resultado para encontrar uma estimativa de erro em termos do tamanho da malha h . Mais especificamente, veremos que o erro de aproximação é $O(h)$ ¹. Para obter uma estimativa de erro em função de h , tomaremos $v = \mathcal{I}^h u$ no lema de Céa e usar o seguinte fato

$$\inf_{v \in V_0^h} \|u - v\|_1 \leq \|\mathcal{I}^h u - u\|_1.$$

Assim, nosso problema se resume a descobrir o quão bem o operador de interpolação aproxima a função u .

Lema 5.2.1. *Seja $\Omega = (a, b)$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto poligonal. Dada uma família de triangulações quase uniforme \mathcal{T}^h de Ω , seja V_0^h o espaço de funções lineares por partes associado à \mathcal{T}^h . Temos que*

$$\|\mathcal{I}^h u - u\|_1 \leq ch \|u\|_2,$$

onde a norma $\|\cdot\|_2$ é definida da seguinte forma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 + |\nabla f(x)|^2 + \sum_{ij} (\partial_{ij} f)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Prova. Vamos apresentar a demonstração de um resultado similar no caso $\Omega = (0, 1)$, e substituindo no resultado desejado a norma $\|\cdot\|_2$ pela norma uniforme² em $C^2(\Omega)$

$$\|u\|_{2,\infty} = \sup_{x \in \Omega} \left\{ |u(x)|, \left| \frac{du}{dx}(u) \right|, \left| \frac{d^2u}{dx^2}(u) \right| \right\}.$$

Seja \mathcal{T}^h uma partição uniforme de Ω de tamanho $h = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Pela desigualdade de Poincaré temos que

$$\|\mathcal{I}^h u - u\|_1 \leq c \|\mathcal{I}^h u - u\|_1.$$

¹A notação $O(h)$ significa que o termo pode ser limitado por ch , onde c é uma constante apropriada.

²A hipótese extra de termos uma malha uniforme é feita apenas para facilitar a exposição da demonstração. Já a troca da norma $\|\cdot\|_2$ pela $\|\cdot\|_{2,\infty}$ permite a apresentação de uma demonstração usando resultados básicos de análise real.

Notemos que se $\|u\|_{2,\infty}$ é finita, então a derivada segunda de u é uniformemente limitada em Ω . Logo, u' é Lipschitz contínua, ou seja

$$|u'(x) - u'(y)| \leq \|u\|_{2,\infty}|x - y|. \quad (5.3)$$

Pela série de Taylor de u , se $x, a \in (0, 1)$ temos

$$u(x) = u(a) + (x - a)u'(a) + (x - a)^2r(x),$$

onde $|r(x)| \leq c\|u\|_{2,\infty}$. Assim, para $x \neq a$

$$u'(a) = \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + (x - a)r(x)$$

e

$$\left| u'(a) - \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \right| \leq c(x - a)c\|u\|_{2,\infty}. \quad (5.4)$$

Sejam $z_0 = 0, z_1 = h, z_2 = 2h \dots, z_k = 1$ os $k + 1$ vértices da partição \mathcal{T}^h . Por definição temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^h u - u|_1^2 &= \int_0^1 \left(\frac{d}{dy}(\mathcal{I}^h u - u) \right)^2 dy = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{d}{dy}(\mathcal{I}^h u - u) \right)^2 dy. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por definição do operador de interpolação, quando nos restringimos ao intervalo (z_{i-1}, z_i) temos que

$$\frac{d}{dy}(\mathcal{I}^h u(y) - u(y)) = \frac{u(z_i) - u(z_{i-1})}{h} - u'(y)$$

e

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{dy}(\mathcal{I}^h u(y) - u(y)) \right| \\ &= \left| \frac{u(z_i) - u(z_{i-1})}{h} - u'(z_{i-1}) + u'(z_{i-1}) - u'(y) \right| \\ &\leq \left| \frac{u(z_i) - u(z_{i-1})}{h} - u'(z_{i-1}) \right| + |u'(z_{i-1}) - u'(y)| \end{aligned}$$

Usamos (5.4) para estimar o primeiro termo do lado direito da última desigualdade e (5.3) para estimar o segundo termo do lado direito da última desigualdade. Assim, para $y \in (z_{i-1}, z_i)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dy}(\mathcal{I}^h u(y) - u(y)) \right| &\leq (|z_i - z_{i-1}| + c|y - z_{i-1}|) \|u\|_{2,\infty} \\ &\leq (c+1)h \|u\|_{2,\infty}. \end{aligned}$$

Substituindo a última estimativa em (5.5) obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^h u - u|_1^2 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{z_{i-1}}^{z_i} ((c+1)h \|u\|_{2,\infty})^2 dy \\ &\leq ((c+1)h \|u\|_{2,\infty})^2. \end{aligned}$$

O que nos permite obter o resultado desejado.

Para uma demonstração do teorema original veja [4, 5, 8]. \square

Capítulo 6

Outros tópicos

A teoria matemática do método de elementos finitos é muito extensa e aborda muitas questões interessantes. Neste capítulo mencionaremos rapidamente alguns tópicos adicionais importantes. O leitor interessado pode consultar [4, 5, 8], entre outros. Mencionamos também algumas teses do IMPA [28, 9, 29, 17, 13, 22, 3].

6.1 Problemas de ponto de sela

Observamos que o teorema de Lax-Milgram não pode ser aplicado para mostrar a existência de soluções fracas discutidas na seção 4.2.3. Para estudar a existência de soluções para as formulações ali discutidas, precisamos fazer uso das chamadas formulações de ponto de sela. Nesta seção apresentamos uma breve introdução a este tipo de formulação. Veja [4, 15] para mais detalhes.

Sejam X e M dois espaços de Hilbert com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_M$. Sejam X' e M' os espaços duais¹ de X e M , respectivamente. Suponha que $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ são duas formas bilineares contínuas². Podemos definir os operadores lineares $A :$

¹ X' é o espaço dos funcionais lineares limitados $f : X \rightarrow \mathbb{R}$; M' é definido similarmente.

²Isto é: $a(v, u) \leq c\|v\|_X\|u\|_X$.

$X \rightarrow X'$ e $B : X \rightarrow M'$ por

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= a(u, v) \quad \forall (u, v) \in X \times X. \\ \langle Bv, \mu \rangle &= b(v, \mu) \quad \forall (v, \mu) \in X \times M. \end{aligned}$$

Considere a seguinte formulação fraca abstrata,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } \ell \in X' \text{ e } \chi \in M', \text{ achar } (u, \lambda) \in X \times M \text{ tais que:} \\ a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in X \\ b(u, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Esta formulação é equivalente ao problema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } \ell \in X' \text{ e } \chi \in M', \text{ achar } (u, \lambda) \in X \times M \text{ tais que:} \\ Au + B'\lambda = \ell \quad \text{in } X' \\ Bu = \chi \quad \text{in } M'. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Defina $\Phi : X \times M \rightarrow X' \times M'$ por, $\Phi(u, v) := (Au + B'\mu, Bv)$. Se Φ é um isomorfismo de $X \times M$ em $X' \times M'$, então o problema (6.2) é dito *bem posto*. Neste caso, existe uma única solução $(u, p) \in X \times M$, que depende continuamente dos dados iniciais ℓ e χ .

Denote $V(\chi) := \left\{ v \in X \mid Bv = \chi \right\}$ e considere o problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } u \in V(\chi) \text{ tal que:} \\ a(u, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V = V(0). \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Denote também $V^0 = \left\{ g \in X' : \langle g, v \rangle = 0 \text{ in } V(0) \right\}$.

Lema 6.1.1 (Teorema do Brezzi). *Se $a(\cdot, \cdot)$ é V -elíptica (o coerciva), i.e., se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \text{para toda } v \in V = V(0),$$

então o problema (6.1) é bem-posto se e somente se a forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$ satisfaz a condição inf-sup: Existe uma constante $\beta > 0$ tal que:

$$\inf_{\mu \in M \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta > 0.$$

6.2 Aproximação de Galerkin para o problema de sela

Agora vamos aplicar a método de Galerkin para o problema (6.1). Sejam $X^h \subset X$ e $M^h \subset M$ espaços de elementos finitos. A formulação de Galerkin é escrita como sendo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } (u^h, p^h) \in X^h \times M^h \text{ tais que:} \\ a(u^h, v) + b(v, p^h) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V^h \\ b(u^h, q) = \langle \chi, q \rangle \quad \forall q \in M^h. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Como antes definimos $V^h := \{v \in X^h : b(v, q) = 0 \quad \forall q \in M^h\}$. O problema (6.4) é equivalente ao problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } u^h \in V^h \text{ tal que:} \\ a(u^h, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in V^h. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

e depois achar $p^h \in M^h$ with $b(v, p^h) = -a(u^h, v) + \langle \ell, v \rangle$ in X^h . Temos o seguinte resultado, (veja [5])

Lema 6.2.1. *Suponha que V e V^h são subespaços do X e que M^h é subespaço de M . Suponha também que a forma bilinear $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua na norma C e elíptica em V^h com constante α . Seja (u, q) a solução do problema 6.1 e seja $(u^h, p^h) \in V^h$ a solução de problema discreto (6.4). Temos o seguinte erro de aproximação*

$$\|u - u^h\|_X \leq \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \inf_{v \in V^h} \|u - v\|_X + \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V^h \setminus \{0\}} \frac{|a(u - u^h, v)|}{\|v\|_X},$$

onde o segundo termo do lado direito da desigualdade acima pode ser limitado por

$$\frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V^h \setminus \{0\}} \frac{|a(u - u^h, v)|}{\|v\|_X} \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{q \in M^h} \|p - q\|_M.$$

Vemos que o erro de aproximação depende somente das propriedades de aproximação dos espaços V^h e M^h . Os resultados para o erro de aproximação para a variável p são mais delicados e não serão tratados aqui.

6.3 Formulação de primeira ordem e elementos finitos de Raviart-Thomas

Dizemos que um método de elementos finitos é um método misto, quando este envolve a aproximação de mais de um espaço de função. Os métodos mistos foram desenvolvidos explorando a formulação fraca mais geral discutida na subseção 4.2.3. Observamos que as aproximações de elementos finitos apresentados até aqui para a equação de Laplace se basearam na formulação fraca (4.10).

Nesta Seção vamos apresentar de forma breve um exemplo de método de elementos finitos misto proposto por Raviart e Thomas. Vamos apresentar apenas o caso mais simples deste método, no qual as funções base são lineares por partes, para a aproximação de ∇u e constante por partes, para a aproximação de u .

Primeiramente, relembremos ao leitor a equação de Laplace vista como um sistema de primeira ordem,

$$\begin{cases} \vec{u} = -\frac{\kappa}{\nu} \nabla p + \vec{f} & \text{em } \Omega & (\text{Lei de Darcy}^3) \\ \operatorname{div} \vec{u} = g & \text{em } \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{\eta} = h & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.6)$$

A matriz $\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{11}(x) & \kappa_{21}(x) \\ \kappa_{21}(x) & \kappa_{22}(x) \end{bmatrix}$ é uma matriz com entradas positivas e com autovalores uniformemente positivos. Em modelos de fluidos em meios porosos, κ representa a permeabilidade do meio no domínio Ω . Para simplificar a exposição, vamos supor que κ é uma constante positiva.

Introduzimos as seguintes formas bilineares

$$a(\vec{u}, \vec{v}) := \int_{\Omega} \frac{\nu}{\kappa} \vec{u} \cdot \vec{v} dx \quad \text{para toda } \vec{u}, \vec{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad (6.7)$$

$$b(\vec{v}, q) := - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{v} dx \quad \text{para toda } \vec{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \text{ e } q \in L^2(\Omega).$$

e (abusando da notação) o funcional linear

$$f(\vec{v}) := \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx \quad \text{para toda } \vec{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$$

A formulação fraca proposta para este problema na Subseção 4.2.3 pode ser escrita como

$$\text{Achar } u \in H(\text{div}, \Omega) \text{ e } p \in L^2(\Omega) \text{ tais que} \quad (6.8)$$

$$\begin{cases} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = f(\vec{v}) & \forall \vec{v} \in H_0(\text{div}, \Omega, \partial\Omega) \\ b(\vec{u}, q) = 0 & \forall q \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (6.9)$$

Os espaços de elementos finitos de Raviart-Thomas, usados para aproximar a função vetorial u , consistem de polinômios por partes, de forma que a função vetorial resultante tenha divergente (que é também polinômio por partes mas descontínuo) definido em $L^2(\Omega)$.

Os espaços de elementos finitos de Raviart-Thomas, usados para aproximar a função vetorial u , restritos a um triângulo K da partição de Ω com lados e_1, e_2, e_3 , são definidos por (veja [4, 7, 15])

$$RT_k(K) := \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} + r(x) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

onde p, q e r são polinômios de grau k . Se $\vec{v} \in RT_k(K)$ então $\text{div} \vec{v}$ é um polinômio de grau k e $\vec{v} \cdot \vec{\eta}|_{e_i}$ é um polinômio de grau k para todo lado e_i , $i = 1, 2, 3$. Vamos introduzir apenas o espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas de mais baixa ordem. Note que, em duas dimensões, a velocidade do espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas $RT_0(K)$, $K \in \mathcal{T}$, tem a forma

$$\vec{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Uma observação importante é que para determinar a, b e c acima, é suficiente especificar três graus de liberdade, em particular, podemos determinar $\vec{v} \in RT_0(K)$ especificando o componente normal em cada uma das três arestas do triângulo K . Definimos

$$\vec{X}^h := RT_0 := \left\{ \vec{v} \in \vec{X} : \vec{v}|_K \in RT_0(K) \quad \forall K \right\}, \quad (6.10)$$

e

$$M^h := P^0 := \{p \in M : p|_K \in P_0(K) \quad \forall K\}. \quad (6.11)$$

O espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas é dado pelo par (\vec{X}^h, M_0^h) com $M_0 = M \cap L_2(\Omega)$.

Agora introduzimos as funções base do espaço de elementos finitos de Raviart-Tomas. Primeiro, para cada aresta e da triangulação \mathcal{T}^h , associamos um vetor normal $\vec{\eta}_e$. Lembramos que cada aresta e compartilhada com dois triângulos tem dois vetores normais associados. Neste caso, $\vec{\eta}_e$ coincide com um destes dois vetores normais. Para cada aresta e , temos uma função base definida por

$$\vec{\phi}_e \in RT_0, \quad \vec{\phi}_e \cdot \vec{\eta}_e = 1 \text{ e } \vec{\phi}_e \cdot \vec{\eta}_{e'} = 0, \text{ para toda aresta } e' \neq e.$$

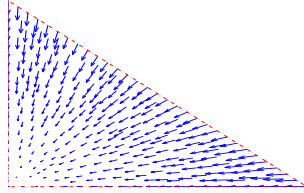


Figura 6.1: Função base da velocidade do Raviart-Tomas correspondente à hipotenusa do triângulo e . Neste caso, $\vec{\eta}_e$ aponta para dentro do triângulo.

O espaço das pressões M^h tem uma função base para cada triângulo da malha, que corresponde à função característica do triângulo. A função base associada ao elemento K é definida por

$$p_K = 1 \text{ em } K \text{ e } p_K = 0 \text{ em todo } K' \text{ com } K' \neq K.$$

Note que estas funções base da pressão não têm média zero. A condição de média zero para a pressão pode ser obtida usando um procedimento posterior ou impondo um multiplicador de Lagrange que force esta condição.

A formulação discreta para nosso problema é dada por

$$\begin{aligned} &\text{Achar } u^h \in \vec{X}^h \text{ e } p^h \in M^h \text{ tais que} & (6.12) \\ &\begin{cases} a(\vec{u}^h, \vec{v}^h) + b(\vec{v}^h, p^h) &= f(\vec{v}^h) & \forall \vec{v}^h \in \vec{X}_0^h \\ b(\vec{u}^h, q^h) &= 0 & \forall q^h \in M_0^h. \end{cases} \end{aligned}$$

Aqui usamos a notação $\vec{X}_0^h := \vec{X}_0^h \cap H_0(\text{div}, \Omega, \partial\Omega)$. Como antes, o problema (6.12) é equivalente ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Aqui usamos U, V, \dots e P, Q, \dots , para denotar o vetor cujas coordenadas correspondem aos coeficientes das combinações lineares das bases de Raviart-Thomas, que representam as funções $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}^h$ e $p, q \in M^h$, respectivamente.

As matrizes \mathcal{A}, \mathcal{B} e o vetor F são definidos por

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= V^T \mathcal{A} U, \\ b(\vec{u}, q) &= Q^T \mathcal{B} U, \\ f(\vec{v}) &= V^T F. \end{aligned} \quad (6.14)$$

O sistema linear (6.13) fica indeterminado se usarmos funções base para M^h que não tenham média zero. Para resolver este problema podemos, por exemplo, adicionar um multiplicador de Lagrange, de tal forma que (6.13) é substituído pelo sistema linear,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^T & 0 \\ \mathcal{B} & 0 & W \\ 0 & W^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

onde o vetor W é definido tal forma que a última equação imponha a condição de média zero para a pressão.

Note que a matriz do sistema linear (6.15) é inversível, simétrica mas não é definida positiva (têm autovalores negativos e positivos). Esta matriz é também esparsa e mal condicionada, como é usual nos sistemas lineares resultantes de discretizações de elementos finitos.

A aproximação de elementos finitos de Raviart-Thomas satisfaz (veja [4, 5]):

Lema 6.3.1. *Seja (u, p) a solução fraca de equação (6.6) (eq. de Darcy) e seja (u^h, p^h) a aproximação de elementos finitos de Raviart-Thomas, temos a seguinte estimativa de erro a priori*

$$\|u - u^h\|_X + \|p - p^h\|_M \leq C \left(h\|u\|_{H^1(\Omega)^2} + h\|p\|_{H^1(\Omega)} + \inf_{g^h \in M^h} \|g - g^h\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Aqui, C é uma constante positiva.

A prova do resultado acima usa o lema 6.2.1 e as propriedades de interpolação do espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas. Veja [4].

Finalizamos esta seção apresentando um exemplo numérico usando elementos finitos de Raviart-Thomas para aproximar a solução do problema (6.6). Consideraremos o domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Para construir a triangulação, dividimos o D em $n \times n$ quadrados e cada quadrado é dividido em dois triângulos. Obtemos assim uma triangulação uniforme e estruturada do Ω com $h = \sqrt{2}/n$. Escolhemos os dados do problema (6.6) de tal forma que a solução exata seja dada por

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \text{ com } u_1 = e^{-x_1} \sin(x_2), \quad u_2 = -e^{-x_1} \cos(x_2);$$

e

$$p = e^{-x_1} \sin(x_2) - (e^{-1} - 1)(\cos(1) - 1).$$

Na Figura 6.2 mostramos a solução exata e a calculada usando elementos finitos de Raviart-Thomas com $h = \sqrt{2}/8$ e a triangulação uniforme na figura. Na Figura 6.3 mostramos pressões calculadas usando elementos finitos de Raviart-Thomas para diferentes valores de tamanho da malha.

Finalmente, na Figura 6.4, apresentamos o decaimento dos erros da velocidade (norma $H(\text{div}, \Omega)$) e da pressão (norma $L^2(\Omega)$) quando a malha é refinada.

6.4 Equação de Stokes: aproximação via Taylor-Hood

Nesta seção apresentaremos uma curta introdução à aproximação numérica da equação de Stokes usando elementos finitos de Taylor-Hood de mais baixa ordem. A equação de Stokes modela escoamentos de fluidos quando o número de Reynolds é muito baixo. Isto ocorre quando as forças relativas à viscosidade do fluido predominam às forças inerciais. O modelo se baseia na conservação da massa e na conservação do momento. Consideraremos apenas a equação com

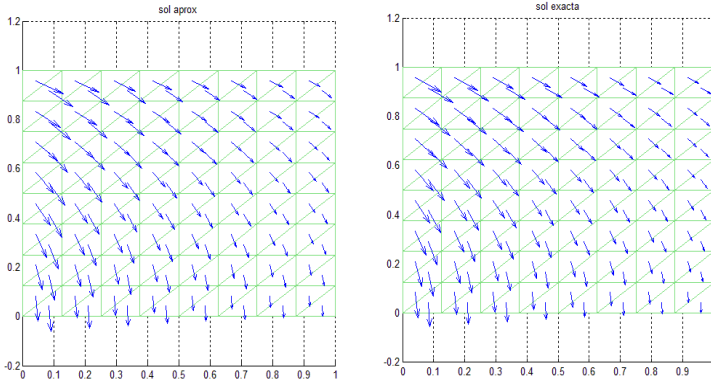


Figura 6.2: Velocidade solução \vec{u}^h aproximada interpolada no centro de cada triângulo (esquerda) e velocidade solução \vec{u} exata interpolada no ponto meio de cada triângulo (direita). Neste exemplo $h = \sqrt{2}/n$ com $n = 8$.

condição de fronteira de Dirichlet. Mais especificamente, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, estamos interessados em aproximar a solução de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T(\vec{u}, p) = \vec{f} & \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{u} = g & \text{em } \Omega \\ \vec{u} = \vec{h} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.16)$$

Acima, $T(\vec{v}, p) := -pI + 2\nu\vec{D}\vec{v}$ onde ν é a viscosidade do fluido e $\vec{D}\vec{v} := \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla^T\vec{v})$ é o tensor de estresse linearizado, note que $\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ é uma função vetorial e usamos a notação

$$\nabla\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla^T\vec{v} = (\nabla\vec{v})^T.$$

Acima, usamos também a notação

$$\operatorname{div}E = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{21}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial e_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{22}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad \text{se } E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}.$$

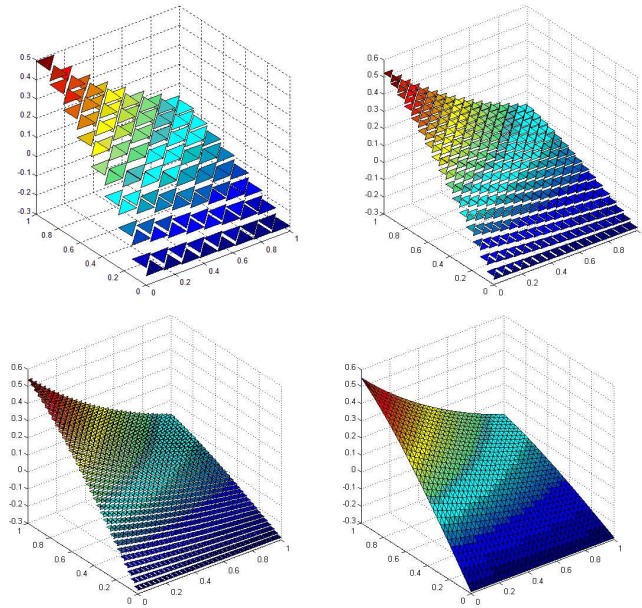


Figura 6.3: Solução aproximada p^h da pressão usando $h = \sqrt{2}/n$ com $n = 8$ (esquerda acima), $n = 16$ (direita acima), $n = 64$ (esquerda abaixo) e solução exata p interpolada nos vértices da malha (direita abaixo).

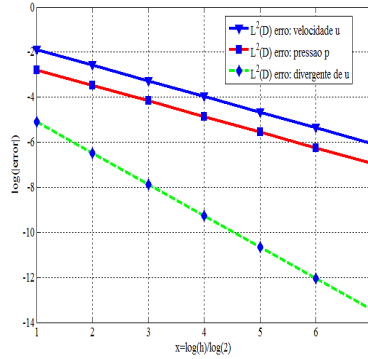


Figura 6.4: Logaritmo do erro de aproximação em diferentes normas: $L^2(\Omega)$ para a pressão e velocidade, e logaritmo da seminorma $\|\operatorname{div}(u - u^h)\|_{L^2(\Omega)}$ do erro da velocidade.

Abaixo vamos usar a notação “ \cdot ” para o produto interno de vetores e matrizes, isto é, se \vec{u}, \vec{v} são vetores e E, F são matrizes 2×2 , temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \text{ se } \vec{u} = (u_1, u_2) \text{ e } \vec{v} = (v_1, v_2),$$

e

$$E \cdot F = \sum_{i,j=1}^2 e_{ij} f_{ij} \quad \text{se } E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\operatorname{div} \nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix}.$$

Para deduzir uma forma fraca para o problema de Stokes, procedemos como antes. Multiplicamos as equações por funções teste correspondentes e usamos integração por partes.

Para toda $\vec{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega)^2$, temos

$$\int_{\Omega} (-2\nu \operatorname{div} \vec{D}\vec{u}) \cdot \vec{v} dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{v} dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx. \quad (6.17)$$

Da fórmula de Green temos que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \nabla \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} - \int_{\partial\Omega} (\nabla \vec{u} \vec{\eta}) \cdot \vec{v} dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} dx - 0, \\ &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \nabla \vec{u}^T) \cdot \vec{v} dx &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{v} dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla \vec{u}^T \vec{\eta}) \cdot \vec{v} dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{v} dx. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$- \int_{\Omega} (2 \operatorname{div} \vec{D} \vec{u}) \cdot \vec{v} dx = 2 \int_{\Omega} \vec{D} \vec{u} \cdot \vec{D} \vec{v} dx.$$

Para a segunda equação de (6.16) temos

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{v} dx = \int_{\partial\Omega} p \vec{v} \cdot \vec{\eta} dS - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx. \quad (6.18)$$

Para $\vec{u}, \vec{v} \in H^1(\Omega)^2$ e $q \in L^2(\Omega)$ defina as formas bilineares

$$a(\vec{u}, \vec{v}) := 2\nu \int_{\Omega} \vec{D} \vec{u} \cdot \vec{D} \vec{v} dx \quad (6.19)$$

$$b(\vec{v}, q) := - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \vec{v} dx. \quad (6.20)$$

$$F(\vec{v}) := \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{f} dx. \quad (6.21)$$

Obtemos a seguinte formulação fraca para o problema de Stokes

$$\begin{aligned} \text{Achar } u \in H^1(\Omega)^2 \text{ and } p \in L^2(\Omega) \text{ tais que} & \quad (6.22) \\ \left\{ \begin{array}{ll} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) &= F(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2 \\ b(\vec{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \\ \vec{u} = \vec{g} & \text{in } \partial\Omega. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Suponha que Ω é um domínio poligonal e que \mathcal{T}_h é uma triangulação de Ω . Vamos introduzir o espaço de elementos finitos conhecido como Taylor-Hood de mas baixa ordem. Veja [5, 7, 15]. O espaço de Taylor-Hood de ordem k consiste de polinômios de grau $k + 1$ por partes, contínuos para a velocidade em cada componente e polinômios de grau k por partes, contínuos para a pressão. Definimos

$$\vec{X} := \vec{P}^2 := \left\{ \vec{v} \in H^1(\Omega)^2 \cap C^0(\bar{\Omega})^2 : \begin{array}{l} \vec{v}_K = \vec{v}_K \circ F_K^{-1} \text{ em } \\ K \text{ e} \\ \vec{v}_K \in P^2(\hat{K})^2 \end{array} \right\}, \quad (6.23)$$

onde $\vec{v}_K := \vec{v}|_K$. Definimos também

$$M := P^1(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : \begin{array}{l} q_K = \hat{q}_K \circ F_K^{-1} \text{ em } K \\ \text{e } \hat{q}_K \in P^1(\hat{K}) \end{array} \right\}.$$

O par de espaços de elementos finitos de Taylor-Hood de ordem um é dado pelo par (\vec{X}, M_0) onde $M_0 = M \cap L_0(\Omega)$.

Como foi mencionado anteriormente, a escolha de espaços de elementos finitos mistos é delicada. Os espaços de funções teste para a velocidade e a pressão tem que ser os adequados. Por exemplo, o espaço de elementos finitos para a pressão tem que ter o “tamanho” certo (não pode ser muito grande nem muito pequeno quando comparado com o espaço para a velocidade). Estes espaços precisam ser definidos de forma que a condição de inf-sup (veja (6.1.1)) seja satisfeita.

A formulação discreta do problema de Stokes, usando as bases usuais para espaços de polinômios por partes, é escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Achar } u^h \in \vec{X}^h \text{ e } p^h \in M^h \text{ tais que} & \quad (6.24) \\ \left\{ \begin{array}{ll} a(\vec{u}^h, \vec{v}^h) + b(\vec{v}^h, p^h) & = f(\vec{v}^h) \quad \forall \vec{v}^h \in \vec{X}_0^h \\ b(\vec{u}^h, q^h) & = 0 \quad \forall q^h \in M_0^h. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Aqui usamos a notação $\vec{X}_0^h := \vec{X}_0^h \cap H_0^1(\Omega)$. O problema (6.24) é equivalente ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Assim como na seção anterior, aqui usamos U, V, \dots e P, Q, \dots , para denotar o vetor cujas coordenadas correspondem aos coeficientes das combinações lineares das bases de Raviart-Thomas, que representam as funções $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{X}^h$ e $p, q \in M^h$, respectivamente. As matrizes \mathcal{A}, \mathcal{B} e o vetor F são definidos por,

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= V^T \mathcal{A} U, \\ b(\vec{u}, q) &= Q^T \mathcal{B} U, \\ f(\vec{v}) &= V^T F. \end{aligned} \tag{6.26}$$

A condição de média zero para a pressão pode ser imposta como no caso das equações de Raviart-Thomas, veja (6.15).

Um resultado de aproximação análogo ao resultado de aproximação dos elementos finitos de Raviart-Thomas no Lemma 6.3.1, pode ser obtido para os elementos finitos de Taylor-Hood. Este resultado não será apresentado aqui, veja [4, 5]). A prova do resultado de aproximação usa o Lema 6.2.1 e as propriedades de interpolação do espaço de elementos finitos de Taylor-Hood.

Apresentaremos um exemplo numérico usando elementos finitos de Taylor-Hood para aproximar a solução do problema (6.16). Consideramos o domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Para construir a triangulação, dividimos Ω em $n \times n$ quadrados e cada quadrado é dividido em dois triângulos. Obtemos assim uma triangulação uniforme e estruturada de Ω com $h = \sqrt{2}/n$. Escolhemos os dados do problema (6.6) de tal forma que a solução exata venha dada por $\vec{u} = (u_1, u_2)$ com $u_1 = 4x_1(1 - x_1) \sin(2\pi x_2)$ e $u_2 = 16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)$ e $p = x_1^2 + x_2^2 - 2/3$.

Na Figura 6.5 mostramos a solução exata e a calculada usando elementos finitos de Taylor-Hood com $h = \sqrt{2}/8$ e a triangulação uniforme na figura. Na Figura 6.6 mostramos pressões calculadas usando elementos finitos de Taylor-Hood com $h = \sqrt{2}/64$.

Finalmente, na Figura 6.7, apresentamos o decaimento dos erros na velocidade (norma $H^1(\Omega)$) e da pressão (norma $L^2(\Omega)$) quando a malha é refinada.

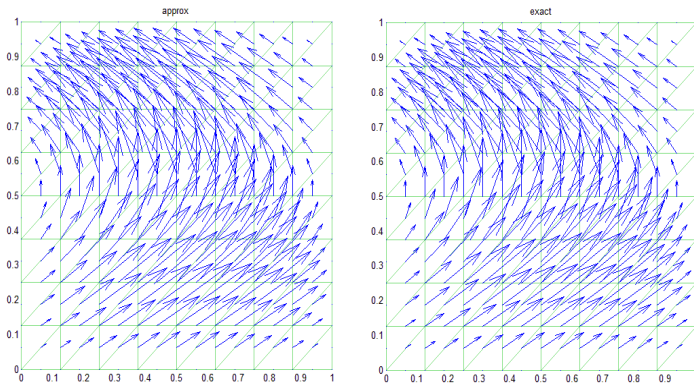


Figura 6.5: Velocidade solução \vec{u}^h aproximada interpolada no centro de cada triângulo (esquerda) e velocidade solução \vec{u} exata interpolada no ponto meio de cada triângulo (direita). Neste exemplo $h = \sqrt{2}/n$ com $n = 8$.

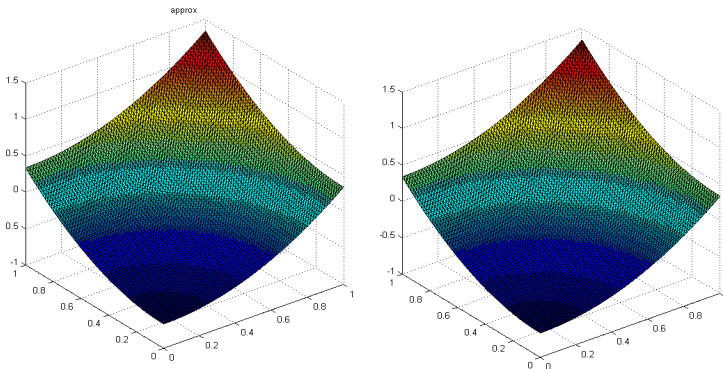


Figura 6.6: Pressão solução aproximada p^h usando $h = \sqrt{2}/n$ com $n = 64$ (esquerda) e solução exata p interpolada nos vértices da malha (direita).

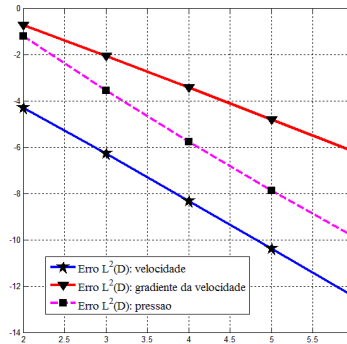


Figura 6.7: Logaritmo do erro de aproximação em diferentes normas, $L^2(\Omega)$ para a pressão e velocidade, e logaritmo da seminorma $\|\nabla(\vec{u} - \vec{u}^h)\|_{L^2(D)}$ do erro da velocidade.

6.5 Um problema não linear

Nesta seção, discutiremos brevemente um exemplo de problema não linear. Vamos considerar a equação conhecida como o p -laplaciano

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \quad \text{em } \Omega \text{ e } u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (6.27)$$

onde $p > 1$ é um parâmetro do problema. Multiplicando a equação acima por uma função teste $\phi \in C_0^1(\Omega)$ e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f \phi \, dx \quad \text{em } \Omega \text{ e } u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (6.28)$$

Seja W^h um espaço de funções com dimensão finita (a ser usado para aproximar u) e seja ϕ_i , $i \in \{1, \dots, N^h\}$ uma base para este espaço, poderíamos considerar por exemplo, $W^h = V_0^h$ o espaço de funções lineares por partes discutido no capítulo 2.1. Desta forma escrevemos

$$u^h = \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i.$$

Assim, substituindo a expressão acima em (6.28), e aplicando raciocínio análogo ao apresentado para a equação de Laplace obtemos

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i \right|^{p-2} \nabla \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = \int_{\Omega} f \phi_j \, dx \quad \forall j \in \{1, \dots, N^h\}$$

Definimos assim uma função $F : \mathbb{R}^{N^h} \rightarrow \mathbb{R}^{N^h}$

$$F(\alpha) = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ f_2(\alpha) \\ \vdots \\ f_{N^h}(\alpha) \end{pmatrix},$$

onde

$$f_j(\alpha) = \int_{\Omega} \left| \nabla \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i \right|^{p-2} \nabla \sum_{i=1}^{N^h} \alpha_i \phi_i \cdot \nabla \phi_j - f \phi_j \, dx.$$

Logo, o nosso problema numérico se reduz a encontrar $\alpha \in \mathbb{R}^{N^h}$, tal que

$$F(\alpha) = 0.$$

Finalmente, observamos que podemos resolver o problema acima por um método iterativo, como por exemplo, Newton.

Veja [20] para um outro exemplo de problema não linear.

6.6 O método do gradiente conjugado

Apresentaremos agora um método iterativo poderoso para a resolução de sistemas lineares

$$Ax = b,$$

onde a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é auto-adjunta e definida positiva.

Definimos a norma gerada pela matriz A por

$$\|x\|_A = (x, Ax) = (A^{1/2}x, A^{1/2}x) = \|A^{1/2}x\|_2,$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a norma Euclidiana de \mathbb{R}^n . Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ditos conjugados com relação a A , ou A -ortogonais se eles são

ortogonais com relação ao produto interno gerado pela matriz A , isto é

$$(x, Ay) = x^T Ay = 0.$$

O conjunto $\{d_i\}_{i=1}^n$ é dito conjugado se d_i é conjugado a d_j para todo $i \neq j$. Neste caso, temos $d_i^T Ad_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Suponha que $\{d_i\}_{i=1}^n$ são direções conjugadas em \mathbb{R}^n , temos que estas direções são linearmente independentes. Logo $\text{span}\{d_i\}_{i=1}^n = \mathbb{R}^n$ e se x_* é tal que

$$Ax_* = b. \quad (6.29)$$

Portanto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i. \quad (6.30)$$

Das equações (6.29) e (6.30), obtemos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i Ad_i = b$ e tomando produto interno com d_j para j fixo, mas arbitrário, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i d_j^T Ad_i = d_j^T b$$

usando o fato $d_j^T Ad_i = 0$ para $i \neq j$, obtemos

$$\alpha_j = \frac{d_j^T b}{d_j^T Ad_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Para $j = 1, \dots, n$, defina a j -ésima aproximação de x_* por

$$x_j = \sum_{i=1}^j \alpha_i d_i. \quad (6.31)$$

Como $Ax_* = b$, obtemos

$$0 = Ax_* - b = Ax_{j-1} - b + \sum_{i=j}^n \alpha_i Ad_i,$$

e tomando novamente produto com d_j^T , temos

$$\alpha_j = -\frac{d_j^T(Ax_{j-1} - b)}{d_j^T Ad_j} = \frac{d_j^T q_{j-1}}{d_j^T Ad_j},$$

onde o j -ésimo resíduo é

$$q_j = -(Ax_j - b) = b - Ax_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Observe que, dado x_k , podemos calcular

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_{k+1} d_{k+1} \quad \text{onde } \alpha_{k+1} = \frac{d_{k+1}^T q_k}{d_{k+1}^T Ad_{k+1}}. \quad (6.32)$$

Faremos uso do seguinte lema auxiliar.

Lema 6.6.1. *Suponha que $x_0 = 0$ e $i \leq k$, então $d_i^T q_k = 0$.*

Prova. De (6.30) obtemos

$$q_k = b - Ax_k = A(x_* - x_k) = A \left[\sum_{j=k+1}^n \alpha_j d_j \right] = \sum_{j=k+1}^n \alpha_j Ad_j$$

e portanto para $i \leq k$,

$$d_i^T q_k = \sum_{j=k+1}^n \alpha_j d_i^T Ad_j = 0.$$

□

Corolário 6.6.2. *Se temos as k primeiras direções conjugadas $\{d_i\}_{i=1}^k$, e $q_k = b - Ax_k \neq 0$ então os vetores $d_1, d_2, \dots, d_k, q_k$ são linearmente independentes.*

Suponha que temos $k + 1$ direções A -ortogonais d_1, d_2, \dots, d_k . Para obter outra direção conjugada a partir de q_k , aplicamos Gram-Schmidt com relação ao produto interno A , isto é, geramos d_{k+1} com

$$d_{k+1} = q_k - \sum_{j=1}^k \bar{a}_{jk} d_j, \quad (6.33)$$

onde $\text{span}\{d_1, \dots, d_k, q_k\} = \text{span}\{d_1, \dots, d_k, d_{k+1}\}$, e os coeficientes \bar{a}_{jk} são definidos a seguir. Tomando produto interno com Ad_i , $i = 1, \dots, k$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= d_i^T Ad_{k+1} = d_i^T Aq_k - \sum_{j=1}^k \bar{a}_{jk} d_i^T Ad_j \\ &= d_i^T Aq_k - \bar{a}_{ik} d_i^T Ad_i. \end{aligned}$$

Logo, temos que $\bar{a}_{ik} = \frac{d_i^T Aq_k}{d_i^T Ad_i}$. O teorema a seguir nos mostra que fazendo hipóteses apropriadas somente o coeficiente \bar{a}_{kk} é diferente de zero.

Teorema 6.6.3. *Se $d_1 = b$, e $d_i \neq 0$, $i = 1, \dots, k$, temos então $\bar{a}_{1k} = \bar{a}_{2k} = \dots = \bar{a}_{(k-1)k} = 0$.*

Para provar o teorema anterior precisamos de um lema simples.

Lema 6.6.4. *Suponha que $x_0 = 0$, $q_1 = b$, d_1 é um múltiplo escalar de b e $d_i \neq 0$, $i = 1, \dots, k$. Defina*

$$V_k := \text{span}\{d_1, \dots, d_k\} = \text{span}\{d_i\}_{i=1}^k.$$

Temos que

1. $V_k = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}$ (subespaço de Krylov!)
2. $V_k = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\}$
3. $AV_k \subseteq V_{k+1}$
4. $q_k^T AV_{k-1} = \{0\}$, $q_k^T V_{k-1} = \{0\}$ e $q_k^T q_i = 0$ para $i \leq k-1$.

Prova.

1. Usamos indução para provar a primeira afirmação. Sabemos que $V_1 = \text{span}\{d_1\} = \text{span}\{b\}$. Suponha que o lema vale para o inteiro k . Assim, para $x_k \in V_k$ temos que $q_k = b - Ax_k \in \text{span}\{AV_k, b\} = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b, A^k b\}$. Portanto, de (6.33) e da hipótese de indução vemos que

$$d_{k+1} \in \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b, A^k b\}.$$

Logo, $\text{span}\{d_i\}_{i=1}^{k+1} \subseteq \text{span}\{A^i b\}_{i=0}^k$ e como os vetores $\{d_i\}_{i=1}^{k+1}$ são linearmente independentes eles devem gerar um espaço de dimensão $k + 1$. Isto prova o primeiro enunciado.

2. Este resultado segue do processo de ortogonalização em (6.33).
3. Este resultado é consequência do ítem 1.
4. A prova deste ítem segue do ítem 2. e o Lema 6.6.1.

□

Agora provamos o Teorema 6.6.3.

Prova. Se $i \leq k - 1$ usando (6.33) temos

$$\begin{aligned} d_i^T Ad_{k+1} &= d_i^T Aq_k - \sum_{j=1}^k \bar{a}_{jk} d_i^T Ad_j \\ &= d_i^T Aq_k - \bar{a}_{ik} d_i^T Ad_j. \end{aligned}$$

Note que $d_i^T Ad_{k+1} = 0$, por 3. do Lema 6.6.4 temos que $d_i^T Aq_k = 0$, e $d_i^T Ad_j \neq 0$, o que implica que $a_{ik} = 0$. □ Temos então a seguintes fórmulas para a direção conjugada $k + 1$ e o seu coeficiente α_{k+1} em (6.30) e (6.32),

$$d_{k+1} = q_k - a_{kk} d_k, \quad \bar{a}_{kk} = \frac{d_k^T Aq_k}{d_k^T Ad_k}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{d_{k+1}^T q_k}{d_{k+1}^T Ad_{k+1}}.$$

Vamos simplificar um pouco mais estas fórmulas. Note que da primeira fórmula acima e do Lema 6.6.1 obtemos

$$\alpha_{k+1} = \frac{(q_k - a_{kk} d_k) q_k}{d_{k+1}^T Ad_{k+1}} = \frac{q_k^T q_k}{d_{k+1}^T Ad_{k+1}},$$

e na iteração k teríamos $\alpha_k d_k^T Ad_k = q_{k-1}^T q_{k-1}$. Como podemos escrever $q_k = q_{k-1} - \alpha_k Ad_k$ e usando 4. do Lema 6.6.4 obtemos que

$$q_k^T q_k = q_k^T (q_{k-1} - \alpha_k Ad_k) = -\alpha_k q_k^T Ad_k.$$

Juntando estas duas últimas igualdades temos

$$\beta_k := -\bar{a}_{kk} = -\frac{d_k^T Aq_k}{d_k^T Ad_k} = -\frac{-\frac{1}{\alpha_k} q_k^T q_k}{\frac{1}{\alpha_k} q_{k-1}^T q_{k-1}} = \frac{q_k^T q_k}{q_{k-1}^T q_{k-1}}.$$

<ol style="list-style-type: none"> 1. Inicializar $q_0 = b - Ax_0$ 2. Iterar $k = 1, 2, \dots$, ate a convergência $\beta_k = \frac{(q_{k-1}, q_{k-1})}{(q_{k-2}, q_{k-2})} \quad [\beta_1 = 0]$ $d_k = q_{k-1} + \beta_k d_{k-1} \quad [d_1 = q_0]$ $\alpha_k = \frac{(q_{k-1}, q_{k-1})}{(d_k, Ad_k)}$ $x_k = x_{k-1} + \alpha_k d_k$ $q_k = q_{k-1} - \alpha_k Ad_k$

Tabela 6.1: Algoritmo do gradiente conjugado.

Usando estas fórmulas finais descrevemos o algoritmo na Tabela 6.1.

Embora o método do gradiente conjugado convirja em n iterações, em algumas aplicações n poder ser um número muito grande acarretando um trabalho computacional inviável. Neste caso podemos adotar a estratégia de obter uma aproximação da solução do problema $Ax = b$. Mais especificamente, consideraremos uma aproximação da forma $x \approx x_{k_0}$ para algum k_0 menor que n . Esta estratégia é justificada pelo estudo da análise de convergência do método do gradiente conjugado que apresentamos agora.

Note que se $x_k := \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i$, com $\{d_i\}_{i=1}^n$ direções conjugadas e $x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i$, então x_k é projeção ortogonal (no produto interno gerado pela matriz A) do vetor x_* no espaço $V_k = \text{span}\{d_i\}_{i=1}^k$. Das propriedades gerais das projeções ortogonais, obtemos

$$(d_i, A(x_* - x_k)) = 0 \quad i = 1, \dots, k,$$

e

$$\min_{y \in V_k} \|x_* - y\|_A = \|x_* - x_k\|_A. \quad (6.34)$$

Denote por \mathbb{P}_{k-1} o conjunto de polinômios de grau menor o igual que $k - 1$. Dado $y \in V_k$, usando o Lema 6.6.4 pode-se exprimir

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i A^{i-1} b.$$

Se P é o polinômio de grau $k - 1$ definido por $P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i x^i$ podemos escrever $y = P(A)b$. Obtemos que

$$\begin{aligned} V_k &= \{P(A)b : P \in \mathbb{P}_{k-1}\} \\ &= \{P(A)Ax_* : P \in \mathbb{P}_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Com esta igualdade, (6.34) e o fato $\|y\|_A = \|A^{1/2}y\|_2$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ concluímos que

$$\begin{aligned} \|x_* - x_k\|_A &= \min_{y \in V_k} \|x_* - y\|_A = \min_{P \in \mathbb{P}_{k-1}} \|x_* - P(A)Ax_*\|_A \\ &= \min_{P \in \mathbb{P}_{k-1}} \|A^{1/2}[I - P(A)]x_*\|_2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Considere a decomposição espectral da matriz auto-adjunta e positiva definida $A = Q^* \Lambda Q$, onde Q é uma matriz ortonormal (tem colunas ortonormais) e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal com os autovetores de A ordenados do maior ao menor, isto é, $\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}$. Temos que a decomposição espectral $I - P(A)A = Q^*[I - P(\Lambda)\Lambda]Q$ e usando propriedades das matrizes ortonormais temos

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}[I - P(A)A]x_*\|_2 &= \|[I - P(A)A]A^{1/2}x_*\|_2 \\ &\leq \|I - P(A)A\|_2 \|A^{1/2}x_*\|_2 \\ &\leq \|Q^*[I - P(\Lambda)\Lambda]Q\|_2 \|x_*\|_A \\ &= \|I - P(\Lambda)\Lambda\|_2 \|x_*\|_A \end{aligned}$$

onde temos usado a desigualdade $\|Bz\|_2 \leq \|B\|_2 \|z\|_2$ válida para toda matriz B . Lembrando que para B auto-adjunta e definida positiva $\|B\|_2$ é o máximo autovalor de B , temos,

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}[I - P(A)A]x_*\|_2 &= \|I - P(\Lambda)\Lambda\|_2 \|x_*\|_A \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |1 - P(\lambda_i)\lambda_i| \|x_*\|_A \\ &\leq \max_{\lambda \in [\lambda_n, \lambda_1]} |1 - P(\lambda)\lambda| \|x_*\|_A, \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde na última linha o máximo é tomado no intervalo $[\lambda_n, \lambda_1]$ e não somente nos n autovalores $\lambda_n, \dots, \lambda_1$. Finalmente pondo (6.36) em (6.35) obtemos

$$\begin{aligned} \|x_* - x_k\|_A &\leq \|x_*\|_A \min_{P \in \mathbb{P}_{k-1}} \max_{\lambda \in [\lambda_n, \lambda_1]} |1 - \lambda P(\lambda)| \\ &= \|x_*\|_A \min_{P \in \mathbb{P}_k, P(0)=1} \max_{\lambda \in [\lambda_n, \lambda_1]} |P(\lambda)| \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde para obter a última igualdade notamos que se P é de grau $k-1$ então o polinômio definido por $1 - \lambda P(\lambda)$ é de grau k e tem o valor 1 quando $\lambda = 0$.

Para entender melhor o problema de minimização (6.37) estudamos polinômios ortogonais de Chebyshev (Tchebyshev). Uma das muitas definições dos Polinômio de Chebyshev é a seguinte. Define-se o polinômio de Chebyshev de grau k por ⁴

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1}(x)), & \text{se } |x| \leq 1, \\ \cosh(k \cosh^{-1}(x)), & \text{se } |x| > 1. \end{cases} \quad (6.38)$$

Note que $T_k(x) = \cos(k\theta)$ onde $\cos(\theta) = x$ com $\theta \in [-\pi, 0]$ e portanto T_k define um polinômio de grau k na variável x já que $\cos(k\theta)$ é um polinômio em $\cos(\theta)$. Obtemos

$$T_k(1) = 1, \quad |T_k(x)| \leq 1, \quad \text{para todo } x \in [-1, 1].$$

$$\int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Os polinômios $T_n(x)$ podem também ser obtidos a partir da recorrência

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad (6.39)$$

⁴Para ver que as duas partes da definição dão os mesmos polinômios podemos verificar a fórmula de recorrência (6.39) para cada uma. Uma outra forma de ver este fato é que passando a variável complexa temos

$$\cosh(k \cosh^{-1}(\zeta)) = \cos(-ik \cosh^{-1}(\zeta)) = \cos(k \cos^{-1}(\zeta))$$

para todo ζ no domínio das duas funções no plano complexo.

que pode ser deduzida facilmente de (6.38).

Na equação (6.37) podemos tomar $P = \bar{T}_k$ definido a partir do polinômio de Chebyshev de grau k , T_k , por

$$\bar{T}_k(\lambda) = \frac{T_k(g(\lambda))}{T_k(g(0))} \quad \text{com} \quad g(\lambda) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n - 2\lambda}{\lambda_1 - \lambda_n}.$$

Observe que g leva o intervalo $[\lambda_n, \lambda_1]$ no intervalo $[-1, 1]$ com $g(\lambda_n) = 1$, $g(\lambda_1) = -1$. Os zeros do polinômio T_k ficam localizados no intervalo $[-1, 1]$. Temos então que no caso $\lambda_1 \neq \lambda_n$

$$g(0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} > 1, \quad \text{logo} \quad T_k(g(0)) \neq 0,$$

vemos que $\bar{T}_k(0) = 1$. Os zeros do polinômio \bar{T}_k ficam localizados no intervalo $[\lambda_n, \lambda_1]$. De (6.37) vemos que

$$\|x_* - x_k\|_A \leq \max_{[\lambda_n, \lambda_1]} |\bar{T}_k(\lambda)| \|x_*\|_A \leq \frac{1}{T_k(g(0))} \|x_*\|_A$$

com

$$g(0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} = \frac{\text{Cond}(A) + 1}{\text{Cond}(A) - 1},$$

e onde o *número de condição*⁵ de A é definido por

$$\text{Cond}(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}. \quad (6.40)$$

Para continuar com o argumento usaremos o seguinte resultado.

Lema 6.6.5. *Para todo x com $|x| \geq 1$ existe z tal que*

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \text{e} \quad T_k(x) = \frac{z^k + z^{-k}}{2}.$$

⁵ou número de condição espectral

Note que $\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)+1}}{\sqrt{\text{Cond}(A)-1}} \geq 1$, e que podemos escrever

$$\frac{\text{Cond}(A) + 1}{\text{Cond}(A) - 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{Cond}(A)} + 1} + \frac{1}{\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)-1}}{\sqrt{\text{Cond}(A)+1}}} \right]$$

Aplicando o Lema 6.6.5 com $z = \frac{\sqrt{\text{Cond}(A)-1}}{\sqrt{\text{Cond}(A)+1}}$ temos que

$$\begin{aligned} T_k(g(0)) &= T_k \left[\frac{\text{Cond}(A) + 1}{\text{Cond}(A) - 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{Cond}(A)} + 1} \right]^k + \left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)} + 1}{\sqrt{\text{Cond}(A)} - 1} \right]^k \right] \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_k(g(0))} &= \frac{2}{\left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)-1}}{\sqrt{\text{Cond}(A)+1}} \right]^k + \left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)+1}}{\sqrt{\text{Cond}(A)-1}} \right]^k} \\ &\leq \frac{2}{\left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)+1}}{\sqrt{\text{Cond}(A)-1}} \right]^k} = 2 \left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)} + 1}{\sqrt{\text{Cond}(A)} - 1} \right]^k. \end{aligned}$$

Fica provado então o seguinte Teorema.

Teorema 6.6.6. *Seja x_* tal que $Ax_* = b$ e x_k o k -ésimo iterado do gradiente conjugado. Então*

$$\|x_* - x_k\|_A \leq 2 \left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{Cond}(A)} + 1} \right]^k \|x_*\|_A.$$

Corolário 6.6.7. *Para o caso em que $x_0 \neq 0$, aplicamos o argumento anterior a*

$$A\delta x = b - Ax_0, \quad (\delta x)_0 = 0$$

e obtemos

$$\|x_* - x_k\|_A \leq 2 \left[\frac{\sqrt{\text{Cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{Cond}(A)} + 1} \right]^k \|x_* - x_0\|_A$$

para todo k .

Provaremos agora o Lema 6.6.5 para completar a demonstração do teorema anterior. *Prova* Se $x \geq 1$, pode-se exprimir

$$x = \cosh(\zeta) = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \text{com } z = e^\zeta,$$

usando a definição do T_k em (6.38).

$$T_k(x) = \cosh(k \cosh^{-1} \zeta) = \frac{e^{k\zeta} + e^{-k\zeta}}{2} = \frac{z^k + z^{-k}}{2}.$$

Box

O Teorema 6.6.6 nos diz que o erro do método do gradiente conjugado na norma da energia depende do número de condição da matriz $\text{Cond}(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

Em geral, dada uma matriz inversível B , o número de condição na norma $\|\cdot\|_2$ é definido por

$$\text{Cond}(B) = \|B\|_2 \|B^{-1}\|_2.$$

Pode-se provar que quando A é auto-adjunta e definida positiva temos que $\text{Cond}(A) = \lambda_1/\lambda_n$.

Veja [27, 26] para mais detalhes sobre métodos iterativos.

Bibliografia

- [1] R. ADAMS, J. FOURNIER; *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN, S. FUNKEN; *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. Numer. Algorithms*, 20(2-3):117–137, 1999.
- [3] C. BORGES; *Coarse grid correction operator splitting for parabolic partial differential equations* Dissertação de mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [4] D. BRAESS; *Finite elements: Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*, Cambridge, 2001.
- [5] S. BRENNER, R. SCOTT; *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, 1994.
- [6] H. BRÉZIS; *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1983.
- [7] F. BREZZI, M. FORTIN; *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer series in computational mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, 1991.
- [8] P. CIARLET; *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, SIAM, 2002.

- [9] D. CONCEIÇÃO; *Balancing Domain Decomposition Preconditioners for Non-symmetric Problems*. Tese de doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2006.
- [10] R. DAUTRAY, J.L. LIONS; *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 3–4, Masson, 1984.
- [11] E. LIMA; *Espaços métricos*, Projeto Euclides, 1993.
- [12] L. EVANS; *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [13] J. GALVIS; *Domain Decomposition Analysis for Heterogeneous Darcy's Flow*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2008.
- [14] J. GALVIS; *Introdução aos métodos de decomposição de domínio*, 27 Colóquio Brasileiro de Matemática IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [15] V. GIRAULT, P. RAVIART; *Finite element methods for navier-stokes equations*, Springer series in computational mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1986.
- [16] G. GOLUB, C. F. VAN LOAN; *Matrix computations* Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition, 1996.
- [17] E. GONÇALVES; *Preconditioners for Elliptic Control Problems* Tese de doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2009.
- [18] P. GRISVARD; *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman, 1985.
- [19] C. JOHNSON; *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [20] R. KOHN, H. VERSIEUX; *Numerical Analysis of a Steepest-Descent PDE Model for Surface Relaxation below the Roughening Temperature*, SIAM J. Numer. Anal. 48, 2010.

- [21] J. MARTI; *Introduction to sobolev spaces and finite element solutions of elliptic boundary value problems*, Computational mathematics and applications, Academic Press, 1986.
- [22] M. MIRANDA; *The weighted extended B-Splines finite element method*. Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2005.
- [23] J. NEČAS; *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967.
- [24] P. RAVIART, J. THOMAS; *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1983.
- [25] J. RULLA; *Error analysis for implicit approximations to solutions to Cauchy problems*, SIAM J. Numer. Anal. 33 no. 1, 68-87 1996.
- [26] Y. SAAD; *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, second edition, 2003.
- [27] J. SHEWCHUK; *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain* Technical report, August 1994. <http://www.cs.cmu.edu/~jrs/jrspapers.html>.
- [28] H. VERSIEUX; *Numerical boundary corrector methods and analysis for a second order elliptic PDE with highly oscillatory periodic coefficients with applications to porous media*. Tese de doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2006.
- [29] J. WROBEL; *Perda de Injetividade em Reservatórios Estratificados*. Tese de doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2005.