

**Cálculo e Estimação de
Invariantes Geométricos:
Uma Introdução às
Geometrias Euclidiana e Afim**

Publicações Matemáticas

**Cálculo e Estimação de
Invariantes Geométricos:
Uma Introdução às
Geometrias Euclidiana e Afim**

Maria Andrade
PUC-Rio

Thomas Lewiner
PUC-Rio



28^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2011 by M. Andrade e T. Lewiner

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

28^o Colóquio Brasileiro de Matemática

- Cadeias de Markov e Teoria do Potencial - Johel Beltrán
- Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução às Geometrias Euclidiana e Afim - M. Andrade e T. Lewiner
- De Newton a Boltzmann: o Teorema de Lanford - Sérgio B. Volchan
- Extremal and Probabilistic Combinatorics - Robert Morris e Roberto Imbuzeiro Oliveira
- Fluxos Estrela - Alexander Arbieto, Bruno Santiago e Tatiana Sodero
- Geometria Aritmética em Retas e Cônicas - Rodrigo Gondim
- Hydrodynamical Methods in Last Passage Percolation Models - E. A. Cator e L. P. R. Pimentel
- Introduction to Optimal Transport: Theory and Applications - Nicola Gigli
- Introduction to Stochastic Variational Analysis - Roger J-B Wets
- Introdução à Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Via o Método de Elementos Finitos - Juan Galvis e Henrique Versieux
- Matrizes Especiais em Matemática Numérica - Licio Hernanes Bezerra
- Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação - Bárbara Amaral, Alexandre Tavares Baraviera e Marcelo O. Terra Cunha
- Multiple Integrals and Modular Differential Equations - Hossein Movasati
- Nonlinear Equations - Gregorio Malajovich
- Partially Hyperbolic Dynamics - Federico Rodriguez Hertz, Jana Rodriguez Hertz e Raúl Ures
- Processos Aleatórios com Comprimento Variável - A. Toom, A. Ramos, A. Rocha e A. Simas
- Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner - Marcelo Escudeiro Hernandes

ISBN: 978-85-244-317-0

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Para Pietro
M.A.C.S.

Para Debora
T.L.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Objetos Geométricos	8
1.2	Medidas Invariantes	9
1.3	Contextos de Modelagem	10
1.4	Técnicas de Mudança de Contexto	11
1.4.1	Teorema da Função Implícita	11
1.4.2	Processos de Amostragem	12
1.4.3	Processos de Reconstrução	13
1.5	Noção de Invariância Discreta	13
2	Geometria Euclidiana: Curvas	15
2.1	Modelos Euclidiano de Curvas	15
2.1.1	Curvas Paramétricas Regulares	15
2.1.2	Curvas Implícitas	17
2.1.3	Curvas Poligonais	19
2.2	Mudança de Contexto	19
2.3	Comprimento de Arco	22
2.4	Vetor Tangente; Vetor Normal	24
2.5	Curvatura	25
2.6	Fórmula de Minkowski	28
2.7	Discussão	29
3	Geometria Euclidiana: Superfícies	31
3.1	Modelos Euclidianos de Superfícies	31
3.1.1	Superfície Paramétrica Regular	31
3.1.2	Superfície Implícita	35

3.1.3	Complexos Simpliciais	36
3.2	Mudança de Contextos	39
3.3	Plano Tangente; Vetor Normal	43
3.3.1	Plano Tangente	43
3.3.2	Vetor Normal	45
3.4	Primeira Forma Fundamental	46
3.4.1	Comprimento de Curva na Superfície	48
3.4.2	Área de uma Região em uma Superfície	48
3.5	Segunda Forma Fundamental	49
3.5.1	Aplicação Normal de Gauss	49
3.5.2	Curvatura	51
3.5.3	Cálculo das Curvaturas	54
3.5.4	Fórmula de Minkowski	58
3.6	Discussão	59
4	Geometria Afim: Curvas	61
4.1	Invariância Afim	61
4.2	Modelos de Curvas	66
4.3	Curvas Paramétricas	69
4.3.1	Comprimento de Arco Afim	69
4.3.2	Vetores Tangente e Normal Afins	71
4.3.3	Curvatura Afim	75
4.3.4	Gráfico	77
4.3.5	Estimadores a partir do Polígono Parabólico	77
4.4	Curvas Implícitas	79
4.4.1	Exemplos Fundamentais	80
4.4.2	Simplificação: Transformação A	80
4.4.3	Fórmulas Simplificadas	82
4.5	Discussão	82
5	Geometria Afim: Superfícies	85
5.1	Estrutura Afim	85
5.2	Superfícies Paramétricas	88
5.2.1	Curvas Assintóticas	88
5.2.2	Primeira Forma Fundamental Afim	90
5.2.3	Vetores Co-normal e Normal Afins	91
5.2.4	Curvaturas Afins	93
5.2.5	Gráfico	94

5.3	Interpretação Geométrica	95
5.3.1	Fórmula de Minkowski Afim	96
5.4	Cúbica Osculadora	98
5.5	Superfícies Implícitas	99
5.5.1	Métrica Afim	100
5.5.2	Co-normal Afim e Normal Afim	101
5.5.3	Curvaturas Afins	102
5.5.4	Exemplos Fundamentais	104
5.5.5	Reduções Geométricas e Fórmulas Simplificadas	104
5.6	Mudança de Contexto	110
5.7	Discussão	111
6	Conclusão	117
6.1	Problemas Discretos	117
6.2	Aplicações em Computação Visual	119
6.3	Desafios Atuais	120

Capítulo 1

Introdução

Os objetos geométricos são hoje modelados de diversas maneiras: parametrização por funções diferenciais, conjunto de pontos satisfazendo um sistema de equações, amostragem de parâmetros dentro de classes de formas, interpolação dentro de imagens no computador. Cada um destes contextos pode facilitar ou dificultar o uso de certas geometrias: descritiva, diferencial, integral ou discreta.

Classificar e reconhecer objetos geométricos é usualmente feito através do cálculo de invariantes, sendo essas medidas as ferramentas geométricas do contexto. Porém, quando se for tentar reconhecer que uma superfície discreta faz parte de uma classe (por exemplo, de superfície mínima), é necessário estimar invariantes discretos comparáveis aos invariantes da geometria diferencial.

Isso é uma tarefa difícil nesta diversidade de contextos, mas tem muitas aplicações, pois ajuda a complementar o processamento de imagens e a modelagem assistida por computador com os conhecimentos da geometria diferencial.

A aproximação de medidas invariantes de forma calculável no computador e numericamente estável já apresenta alguns desafios. Precisa-se ainda mostrar que essas medidas convergem para os invariantes diferenciais. Finalmente, garantir que cada estimador seja também invariante e que portanto preserva sua característica geométrica torna o problema mais sutil e interessante.

Este livro pretende apresentar algumas definições de invariantes usuais tanto no contexto diferencial como no contexto discreto. O enfoque do curso será no plano e superfícies no espaço tridimensional, afim de facilitar o acompanhamento deste e de poder incluir resultados discretos, pois ainda há poucos estudos sobre hipersuperfícies discretas mais gerais.

Além dos invariantes Euclidianos, já bastante estudados, apresentaremos invariantes afins. Por um lado, isso permite ilustrar conceitos conhecidos num caso mais crítico, em termos de intuição geométrica e estabilidade numérica. Por outro lado, os invariantes afins são temas de pesquisas atuais com muitas aplicações originais a serem desenvolvidas, em particular, nas áreas de visão computacional e reconhecimento de formas em duas e três dimensões.

1.1 Objetos Geométricos

Entendemos por objeto geométrico um conjunto contínuo de pontos no espaço \mathbb{R}^n . Neste livro, limitaremos aos casos $n = 2$ e $n = 3$, ou seja, objetos no plano \mathbb{R}^2 e no espaço \mathbb{R}^3 . Além de continuidade, exigiremos do conjunto a propriedade de variedade, isto é de ter uma dimensão.

Mais precisamente, um objeto geométrico S é uma variedade de dimensão d se ele é localmente equivalente ao espaço vetorial \mathbb{R}^d : para qualquer ponto $p \in S$, existe uma bola \mathcal{B} de \mathbb{R}^n tal que $\mathcal{B} \cap S$ é equivalente a uma bola B de \mathbb{R}^d . É importante notar que a dimensão d é a mesma para todos os pontos p . Se $d = 1$ e $n = 2$, chamamos S de curva planar, e se $d = 2$ e $n = 3$ então S é chamada de superfície. Serão os dois casos abordados neste texto.

A noção de equivalência do parágrafo anterior varia dependendo do contexto de estudo. Para estudar as propriedades topológicas usa-se geralmente a noção de homeomorfismo (existe uma função f contínua de inversa contínua entre $\mathcal{B} \cap S$ e B). Para estudos de geometria diferencial, será necessário uma equivalência com difeomorfismo (a função f precisa ser de classe \mathcal{C}^k ou \mathcal{C}^∞). No caso da geometria discreta, ainda não foi desenvolvido uma noção de equivalência única comum aos diversos estudos, e algumas equivalências discretas serão discutidas neste livro.

1.2 Medidas Invariantes

A etimologia da palavra *geometria* significa “medir a terra”, e de fato os primeiros estudos geométricos descrevem métodos para medir objetos. A medição consiste em associar a um objeto (ou a parte deste objeto) um número (ou nos estudos mais recentes uma estrutura matemática) de forma *reprodutível*.

Existe mais de uma noção da forma como a operação de medir pode ser reproduzida, cada noção gerando uma geometria diferente: geometria Euclidiana, afim, projetiva, etc. Por exemplo, a geometria Euclidiana define medidas que podem ser extraídas de um objeto rígido, e reproduzidas com resultado equivalente no mesmo objeto após movimentos rígidos: translações, rotações e simetrias.

Essas formas foram caracterizadas por Felix Klein no final do século *XIX* no seu programa de Erlangen associando a cada geometria um grupo de transformações que um objeto S pode sofrer. A geometria Euclidiana estuda as propriedades sob a ação do grupo dos movimentos rígidos, enquanto a geometria afim abrange todas as transformações afins, ou seja incluindo cisalhamento. Neste livro, chamaremos (por um leve abuso de linguagem) de geometria afim a geometria equiafim, incluindo transformações afins que preservem a forma de área no plano, e a forma de volume no espaço.

Uma vez escolhida uma geometria, e o grupo \mathcal{G} de transformações associadas, uma medida geométrica m é *invariante* pelo grupo \mathcal{G} se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = m(S)$. Tipicamente, medidas numéricas ($m(S) \in \mathbb{R}$) como o comprimento e a curvatura são invariantes. Quando a medida gera uma estrutura como um vetor, uma matriz ou um tensor, a medida geralmente não é invariante. Por exemplo no caso Euclidiano, a direção do vetor tangente a uma curva varia quando a curva sofre uma rotação. Porém, essa variação é simples de prever quando a rotação é conhecida. Uma medida m é *covariante* se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = A(m(S))$, e *contravariante* se $\forall S, \forall A \in \mathcal{G}, m(A(S)) = A^{-T}(m(S))$. O vetor tangente é covariante, e o vetor normal, dual do vetor tangente, é portanto de natureza contravariante. No caso Euclidiano, as transformações são auto-adjuntas (essencialmente matrizes ortogonais $A^{-T} = A$), portanto a distinção é menos relevante, mas será mais clara no caso afim.

1.3 Contextos de Modelagem

Um objeto geométrico é facilmente definido de forma literal. Por exemplo, um círculo C é usualmente definido a partir do seu centro \mathbf{c} e seu raio r como o conjunto de pontos do plano a distância r de \mathbf{c} . Usando coordenadas cartesianas, isso pode ser escrito como $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - \mathbf{c}_x)^2 + (y - \mathbf{c}_y)^2 = r^2\}$. Definindo a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = (x - \mathbf{c}_x)^2 + (y - \mathbf{c}_y)^2 - r^2$, temos que a curva $C = f^{-1}(\{0\})$. De forma geral, as definições literais conduzem à objetos definidos como pré-imagens de $\{0\}$ por uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de função implícita. Esse contexto de *modelagem implícita* é mais usado nas aplicações. Porém, ele não garante a propriedade de variedade. Por exemplo, para $f(x, y) = x \cdot y$, $f^{-1}(\{0\})$ é a união das duas retas $x = 0$ e $y = 0$, e a vizinhança da origem não é equivalente a um segmento de reta. O teorema de Sard garante que, se f é suficientemente diferenciável, $f^{-1}(\{z\})$ é uma variedade para quase todos os valores de z .

Para garantir a propriedade de variedade de um objeto S , ou seja, que S é localmente equivalente a uma bola de \mathbb{R}^d , é possível definir o objeto a partir das equivalências locais. As funções que garantem essas equivalências são chamadas de parametrizações locais. No caso mais simples, o objeto inteiro é definido por uma única parametrização. O objeto é chamado de gráfico se essa única parametrização pode ser escrita de forma a ser a identidade nas d primeiras coordenadas. A grande vantagem desta modelagem, chamada de *modelagem paramétrica*, é a possibilidade de calcular diretamente derivadas no objeto a partir das derivadas usuais em \mathbb{R}^d . Essa estrutura diferenciável é a base de cálculo de várias medidas invariantes, chamadas de invariantes diferenciáveis.

A fim de simplificar os cálculos, o objeto pode ser definido a partir de poucas parametrizações locais, cujas imagens cobrem amplas partes do objeto. Para simplificar ainda mais, essas parametrizações podem ser escolhidas dentro de família a parâmetro de funções, como funções polinomiais. Com um número finito de funções, cada uma definida por um conjunto finito de parâmetros, obtemos um modelo que pode ser representado no computador, chamado de *modelo paramétrico discreto*. As relações entre as imagens de cada função são descritas matematicamente através do conceito de complexo celu-

lar. Na prática, os modelos mais usados usam funções lineares com imagens simpliciais: curvas poligonais (cada função parametriza um segmento de reta) no plano ou superfícies trianguladas no espaço.

Finalmente, é possível também modelar as superfícies implícitas $f^{-1}(\{0\})$ no computador descrevendo f por um conjunto discreto de parâmetros. Os *modelos implícitos discretos* são muito similares em estrutura aos modelos paramétricos discretos do objeto de dimensão n em \mathbb{R}^{n+1} definido por $\{(p, f(p)), p \in \mathbb{R}^n\}$. Esse contexto pode ser descrito como uma partição do espaço \mathbb{R}^n em regiões onde as funções f são definidas. A partição é geralmente obtida por um reticulado regular (por exemplo grade) na região do espaço \mathbb{R}^n que contém o objeto, e cada função f é definida na sua célula do reticulado a partir de elementos comuns às células vizinhas, a fim de garantir uma função implícita globalmente contínua.

1.4 Técnicas de Mudança de Contexto

Para os contextos implícitos e paramétricos não discretos, medidas invariantes, covariantes ou contravariantes são geralmente calculadas usando cálculo infinitesimal, ou seja, usando integração ou diferenciação. A diferenciação é facilmente definida no caso paramétrico, e usamos este como base para definir os invariantes diferenciais. Apresentamos na presente seção técnicas para estender essas definições entre contextos diferentes.

1.4.1 Teorema da Função Implícita

A passagem local do contexto gráfico ao contexto implícito é trivial, pois dada a parametrização de um gráfico $f_p(\mathbf{x}_d) = (\mathbf{x}_d, g(\mathbf{x}_d))$ com $g : B \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir o objeto $f_p(B)$ de forma implícita por $f_i^{-1}(\{0\})$ com $f_i(\mathbf{x}_d, y) = y - g(\mathbf{x}_d)$.

A passagem no outro sentido, do implícito ao paramétrico, é garantido pelo teorema da função implícita:

Teorema 1.1 (Teorema da Função Implícita). Seja $S = f^{-1}(\{0\})$ uma variedade implícita, onde $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Considere $p \in S$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$, portanto, existe

uma coordenada z tal que $f_z(p) \neq 0$. Então existem uma vizinhança V_p de p e uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S \cup V_p = \{(\mathbf{x}_d, z) \in \mathbb{R}^{d+1}, \mathbf{x}_d \in U, z = g(\mathbf{x}_d)\}$.

Em outras palavras, qualquer variedade implícita é localmente o gráfico de uma função g . Usando a relação $f(\mathbf{x}_d, g(\mathbf{x}_d)) = 0$, as derivadas de g podem ser deduzidas das derivadas de f . Em particular, temos que $g_x(\mathbf{x}_d) = -\frac{f_x(p)}{f_z(p)}$, com $p = (\mathbf{x}_d, g(\mathbf{x}_d))$. Isso permite usar o cálculo diferencial dos invariantes no caso paramétrico no contexto implícito.

1.4.2 Processos de Amostragem

Os processos de amostragem descrevem as mudanças dos contextos não discretos para os contextos discretos. Do ponto de vista matemático, isso corresponde a restringir as funções, parametrizações ou funções implícitas, a um número finito de elementos dentro de um conjunto a parâmetro de funções. Esse processo nem sempre é possível, e os processos de amostragem são frequentemente associados aos problemas de aproximação. Por isso o cálculo no caso discreto é geralmente chamado de *estimação*.

Os processos de amostragem aparecem naturalmente com dados reais no computador. Por exemplo, uma fotografia digital é uma função implícita discreta que corresponde a uma medição de luz por médias locais. Essas médias constituem um processo de amostragem a partir da distribuição de luz real “contínua”. Porém, nesses casos reais, o erro de aproximação, em particular se contar as derivadas, é muito difícil de quantificar.

A abordagem usual de geometria discreta consiste em definir operações discretas que aproximem as operações dos contexto não discreto. Por exemplo, no caso de medida, é desejável que medidas feitas no contexto discreto convirjam para as medidas do caso diferenciável quando o erro de aproximação da amostragem vá para zero. Essas noções são delicadas de aplicar, porque são apenas resultados assintóticos, e porque os processos de amostragem que permitem formalizar essas análises (em particular as ϵ -amostragens) não são facilmente realizáveis na prática.

1.4.3 Processos de Reconstrução

Os processos de reconstrução consistem em mudar entre contextos discretos, tipicamente do contexto implícito discreto para o modelo paramétrico discreto. Existem vários métodos, dependendo do tipo de reticulado usado no modelo implícito discreto, da ordem de diferenciabilidade desejado para o modelo paramétrico discreto e do erro de aproximação suposto. O método mais tradicional é o *Marching Cubes*, que define em cada célula de uma grade regular uma aproximação por triângulos da superfície implícita.

Os processos de re-amostragem, ou seja, mudar a quantidade de funções, a repartição das suas imagens, ou ainda, o conjunto de funções admissíveis também correspondem a uma mudança de contextos discretos. Esses processos geralmente usam um modelo intermediário não discreto ajustado ao dado discreto.

1.5 Noção de Invariância Discreta

Em cada um dos contextos acima podem ser definidos grupos de transformações, e portanto invariantes discretos. Enquanto os invariantes nos contextos não discretos são estreitamente relacionados, os invariantes nos contextos discretos envolvem construções específicas que não correspondem além dos casos assintóticos.

Além disso, o grupo de transformações em certos contextos são difíceis de ser definido, em particular no caso mais usado que são as imagens digitais, ou seja, o caso implícito discreto com medidas invariantes usando grade regular alinhada com os eixos. Uma rotação da grade não a deixa alinhada com os eixos. Para usar as mesmas medidas, é necessário re-amostrar a função implícita numa grade alinhada com os eixos. Para chamar essas medidas de invariantes, precisaria garantir que o processo de re-amostragem é invariante também.

Mesmo com essas dificuldades, a definição de invariantes discretos tem um enorme potencial de aplicações em reconhecimento de formas, processamento de objetos complexos, visão computacional 2d e 3d. O presente livro apresenta alguns cálculos no caso diferenciável Euclidiano e diferenciável afim, e discreto afins.

Capítulo 2

Geometria Euclidiana: Curvas

Neste capítulo estudaremos curvas diferenciáveis e discretas em \mathbb{R}^2 e suas propriedades geométricas.

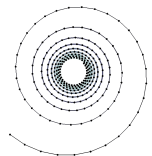
2.1 Modelos Euclidiano de Curvas

2.1.1 Curvas Paramétricas Regulares

Uma curva é dita diferenciável se ela pode ser descrita (parametrizada) por funções diferenciáveis. Porém, isto não implica que o desenho (traço) de uma curva seja suave. Isso ocorre no caso regular. Nesta subseção, vamos estudar curvas diferenciáveis em \mathbb{R}^2 , mais precisamente curvas regulares. Além disso, conceituaremos alguns tipos de curvas como por exemplo: curvas simples, periódica e fechada.

Definição 2.1. Uma curva diferenciável parametrizada é dada por uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde I é um intervalo real.

A palavra diferenciável na definição acima significa que α é uma aplicação que leva cada $t \in I$ em um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ tal que as funções reais $x(t)$, $y(t)$ são diferenciáveis.



O conjunto imagem \mathbf{C} da aplicação α , dada por

$$\mathbf{C} = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$$

é chamado traço de α . A aplicação α é dita uma parametrização de \mathbf{C} e denotaremos t o parâmetro da curva α .

Caso $I = (a, b)$, então os pontos limites $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, caso existam, são chamados pontos inicial e final de α . Se $\alpha(a) = \alpha(b)$ dizemos que α é uma curva fechada. Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita periódica se existe um número real $\rho > 0$, tal que

$$\alpha(t) = \alpha(t + \rho), \forall t \in \mathbb{R}.$$

O menor número ρ_0 tal que a equação acima é satisfeita é chamado de período.

A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples se a aplicação α for injetiva, isto é, se $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$, então $t_1 = t_2$. Em outras palavras, não tem auto-interseções.

Seja P um ponto em uma curva \mathbf{C} . Dentre todas as retas passando por P existe uma reta que melhor aproxima a curva, tal reta é chamada de *reta tangente*. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado de vetor tangente da curva α em t .

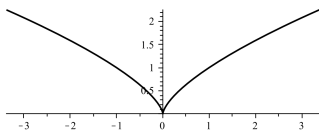


Figura 2.1: Curva com cúspide.

Exemplo 2.2. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ com $t \in \mathbb{R}$ é uma curva suave diferenciável parametrizada cujo traço está esboçado na figura 2.1. Note que $\alpha'(0) = (0, 0)$, isto é o vetor tangente é nulo para $t = 0$.

Exemplo 2.3. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, não é uma curva diferenciável parametrizada, pois $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$.

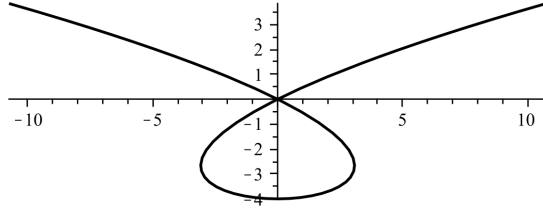


Figura 2.2: Curva com auto-interseção.

Exemplo 2.4. A aplicação α definida por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, com $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada não injetiva, pois temos $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$ (ver Figura 2.2).

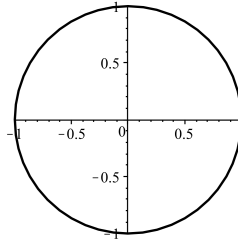


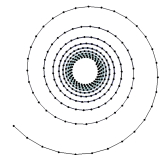
Figura 2.3: Círculo de raio 1.

Exemplo 2.5. A curva dada pela aplicação $\alpha : (0, 4\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ é uma curva diferenciável, periódica e fechada, mas não é injetiva, pois $\alpha(\pi) = \alpha(3\pi) = (-1, 0)$ (ver figura 2.3).

Definição 2.6. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável parametrizada. Dizemos que α é **regular** se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$. Caso contrário, o ponto $\alpha(t)$ tal que $\alpha'(t) = 0$ é **singular**.

2.1.2 Curvas Implícitas

Curvas implícitas podem ser descritas pela equação $f(x, y) = a$, onde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, uma curva implícita é o conjunto de pontos $C = \{(x, y) \in U, f(x, y) = a\}$ que satisfazem a equação.



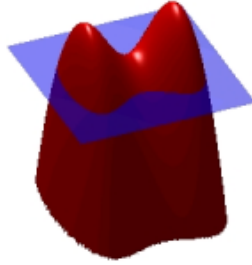


Figura 2.4: Curva de nível interseção do plano com a superfície.

Dizer que uma curva implícita é regular é equivalente a afirmar que o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$ é não-nulo. Isso garante que a curva implícita é de fato uma variedade sem recorrer ao teorema de Sard, e ainda permite usar o teorema da função implícita em qualquer ponto. Esse último teorema garante que a curva é localmente o gráfico de uma função. Porém, nem sempre é possível descrever a curva inteira como um gráfico, o círculo sendo o contra-exemplo mais usual (ver Figura 2.5).

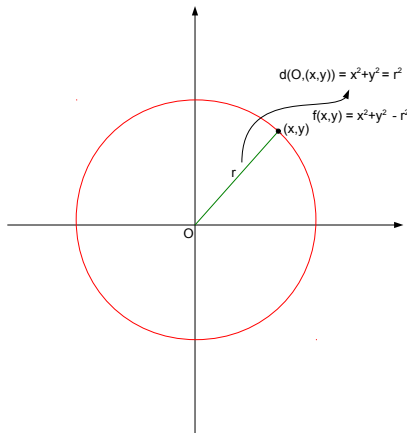


Figura 2.5: Círculo dado por uma função implícita.

2.1.3 Curvas Poligonais

No caso discreto paramétrico, a parametrização α é definida a partir de um conjunto finito de parâmetros. Uma opção é usar estes para definir uma equação da curva, por exemplo os parâmetros podem ser os coeficientes de polinômios definindo $x(t), y(t)$. É o caso das curvas *spline*, em particular as curvas de Bézier quando a base de polinômios é a base de Bernstein. Porém, seria muito limitante usar apenas curvas inteiramente descritas por um único par de polinômios. Por isso, usa-se curvas polinomiais por parte

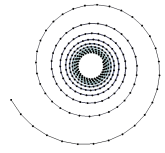
$$\alpha(t) = \begin{cases} (x_0(t), y_0(t)) & , t \in [t_0 = a, t_1] \\ (x_1(t), y_1(t)) & , t \in [t_1, t_2] \\ (x_2(t), y_2(t)) & , t \in [t_2, t_3] \\ \dots & \\ (x_{k-1}(t), y_{k-1}(t)) & , t \in [t_{k-1}, t_k] \\ (x_k(t), y_k(t)) & , t \in [t_k, t_{k+1} = b], \end{cases}$$

onde x_i e y_i são polinômios. Para a curva ser contínua, precisa garantir que $x_{i-1}(t_i) = x_i t_i$ e $y_{i-1}(t_i) = y_i t_i$ para $1 \leq i \leq k$. Pode-se impor curvas de classe C^1 impondo restrições similares nas derivadas de x_i e y_i .

O caso mais simples de curva contínua é onde todos os polinômios são de grau 1, ou seja, curvas lineares por parte. Essa é inteiramente definida pelas extremidades de cada parte $(x_i(t_i), y_i(t_i))$ para $0 \leq i \leq k + 1$ (com a convenção ou de curva fechada, ou que $(x_{k+1}(t_{k+1}), y_{k+1}(t_{k+1})) = (x_k(t_{k+1}), y_k(t_{k+1}))$). Esse modelo de curva é chamado de polígono.

2.2 Mudança de Contexto

Quando estudamos curvas no caso suave vimos que temos duas representações: paramétrica e implícita. É possível ver uma curva implícita, localmente, como um gráfico, isto é, como uma curva paramétrica, graças ao teorema da função implícita, a saber



Implícito para paramétrico

Teorema 2.7. [Teorema da Função Implícita] [Lag00] Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k ($k \geq 1$), definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0) , tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é um gráfico de uma função $g : I \rightarrow J$, de classe C^k . Além disso, $g_x(x) = -f_x/f_y$ estas derivadas sendo calculadas no ponto $(x, g(x))$.

Em outras palavras, o teorema nos diz condições sobre as quais uma relação como $f(x, y) = c$ define y como uma função de x . A solução é local no sentido que o tamanho do intervalo I pode ser menor do que o domínio da função f .

Paramétrico contínuo para discreto

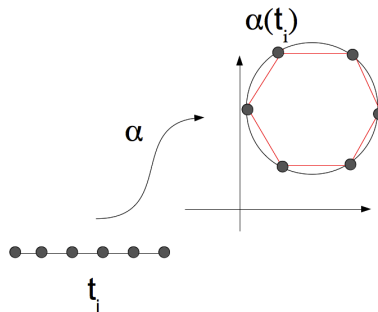


Figura 2.6: Aproximação poligonal de curvas.

Além disso, a partir de uma curva paramétrica $\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ suave podemos obter uma curva poligonal da mesma. O método mais simples de aproximar α por uma curva poligonal é o de poligonização uniforme, que consiste em dividir o intervalo I em n partes

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b,$$

e avaliar a curva α nos pontos da partição $t_i, i = 0 \cdots n$, com isso obtemos uma sequência de pontos $\{p_i\}_{i=0}^n$, com $p_i = \alpha(t_i)$. Dizemos que a amostragem é *uniforme* quando $t_i = i\Delta t$, onde $\Delta t = (b - a)/n$.

Dessa forma obtemos uma representação da curva α usando uma amostragem pontual com amostras $\alpha(t_i)$ e utilizando interpolação linear reconstruímos uma aproximação da curva α . Para fazer a reconstrução os pontos da amostragem devem estar ordenados corretamente (ver [GV03]).

Implícito contínuo para discreto

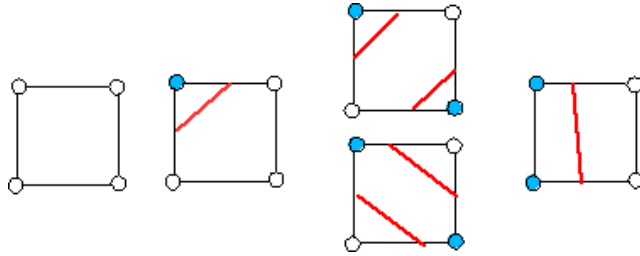
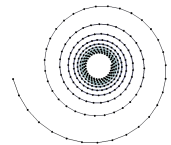


Figura 2.7: Casos do *Marching Squares*

Já no caso de curvas implícitas $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ o processo é um pouco mais complexo, pois para tomarmos amostras $p_i, i = 1 \dots n$, é necessário encontrar n raízes da equação $f(x, y) = 0$, o que pode ser difícil a depender da função f . Para reconstruir a curva implícita basta seguir a seguinte estratégia

1. Se conhecido o domínio de f , então o discretizamos e determinamos uma matriz, digamos 10×10 pontos, $P_{ij}(x_i, y_j)$.
2. A cada três pontos, definimos um triângulo.
3. Para cada ponto $P_{ij}(x_i, y_j)$ calculamos os valores da função $z_{ij} = f(x_i, y_j)$.
4. Para cada triângulo observamos os sinais $V_i = \text{sign}(z_{ij})$ em cada vértice e caso haja mudança de sinal, pelo teorema do valor intermediário, temos que a curva passa pela aresta que é definida a partir desses vértices. Se algum vértice $V_k = 0$, então a função se anula exatamente em V_k .



Considerando que apenas duas das possíveis condições do item 4 acontecem, aproximamos a curva neste triângulo por um segmento de reta unindo os dois pontos obtidos.

Um método bastante conhecido para construir curvas a partir de amostras bidimensionais é o algoritmo *Marching Squares* (ver Figura 2.7). Uma outra alternativa para a reconstrução de curvas é usar *spline* que é uma curva definida por dois ou mais pontos de controle.

2.3 Comprimento de Arco

Nesta seção mostraremos como calcular o comprimento de arco entre dois pontos de uma curva. Consideraremos a partir de agora apenas curvas regulares paramétricas, mas vale ressaltar que todos os cálculos expostos aqui também é válido no caso implícito, pois localmente uma curva implícita é vista como um gráfico.

Definição 2.8. Seja $t_0 \in I$, o **comprimento de arco** de uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ a partir do ponto t_0 , é definido por

$$L(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du.$$

Como $\alpha'(t) \neq 0$, L é uma função diferenciável e $\frac{dL}{dt} = \|\alpha'(t)\|$. Se $\|\alpha'(t)\| = 1$, dizemos que α está parametrizada pelo comprimento de arco, então, neste caso,

$$L(t) = \int_{t_0}^t dt = t - t_0.$$

Exercício 2.9. Mostre que o comprimento de arco está determinado de forma única a menos de uma constante.

Exemplo 2.10. [Círculo de raio r] Seja a curva $\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)),$$

cujo traço é um círculo de raio r e centro na origem $(0, 0)$. Observemos que,

$$\alpha'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \text{ e } \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \quad \forall t.$$

Isto significa que o vetor tangente é perpendicular ao raio. Notemos que $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 2\pi)$, logo podemos calcular o comprimento de arco do círculo que é dado por

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva com parâmetro t , podemos reparametrizá-la aplicando outro intervalo sobre I e usando a composição como uma nova curva. Mais precisamente, seja $h : J \rightarrow I$ diferenciável, onde $J \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto real, então a reparametrização de α é

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \beta(s) = \alpha(h(s)), h(s) = t.$$

É fácil verificar, usando a regra da cadeia, que $\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot \frac{dh(s)}{ds}$.

Teorema 2.11. Toda curva regular pode ser reparametrizada para obter velocidade unitária.

Demonstração: Seja α uma curva regular definida em I . O comprimento de arco é definido por

$$s(t) = \int_{t=a}^t \|\alpha'(u)\| du,$$

pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0.$$

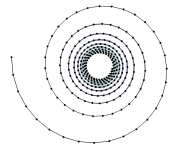
Usando o teorema do valor médio, segue que s é estritamente crescente em I . Portanto, é injetiva. Logo, s tem inversa na sua imagem, a qual denotaremos por $t(s)$ e suas respectivas derivadas estão relacionadas da seguinte forma

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{ds/dt(t(s))} > 0.$$

Seja $\beta(s) = \alpha(t(s))$. Então

$$|\beta'(s)| = \|\alpha'(t(s))\| \left| \frac{dt}{ds}(s) \right| = 1.$$

□



No caso discreto, o comprimento de uma curva poligonal é apenas a soma dos comprimentos de cada segmento da curva poligonal $[(x_i(t_i), y_i(t_i)), x_{i+1}(t_{i+1}), y_{i+1}(t_{i+1})]$. De fato, isso corresponde a definição inicial dada por Riemann do comprimento de arco de uma curva não discreta convexa é o supremo dos comprimentos de todas as curvas poligonais inscritas nela.

2.4 Vetor Tangente; Vetor Normal

Caso paramétrico

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos denotar por $\mathbf{t}(s)$ o vetor *tangente* $\alpha'(s)$, ou seja, $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um vetor diferenciável e $\|\mathbf{t}\| = 1$. Existem somente dois vetores ortogonais a \mathbf{t} . Definimos então $\mathbf{n}(s) = J\mathbf{t}(s)$, onde $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a rotação de 90 graus no sentido anti-horário. O vetor $\mathbf{n}(s)$ é chamado de *normal* da curva $\alpha(s)$ em s . Com esta escolha temos $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável e satisfaz

$$\|\mathbf{n}(s)\| = 1, \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0 \text{ e } \det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)) = 1, \forall s \in I.$$

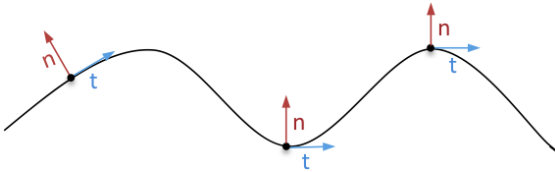


Figura 2.8: Vetores tangentes e normais.

Caso implícito

Já no caso da curva C ser definida implicitamente, ou seja, a curva é dada por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}$, temos que a principal ideia para encontrarmos estes elementos geométricos é usarmos o teorema da função implícita o qual garante que localmente a curva pode ser vista como um gráfico e a partir daí utilizar o caso de curvas paramétricas para obter essas propriedades.

Vamos admitir que o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$ é não-nulo. Podemos supor sem perda de generalidade que $f_y \neq 0$, então existe um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e uma função $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a curva localmente é dada como um gráfico $\{(x, g(x)); x \in J\}$. Agora, pela parte inicial sabemos como calcular os vetores tangentes e normais no caso paramétrico, ou seja, temos as fórmulas dos elementos \mathbf{t} e \mathbf{n} . Por um lado, observemos que tais fórmulas são dadas em função de g , mais precisamente

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= (1 + g_x^2)^{-1/2}(1, g_x), \\ \mathbf{n} &= (1 + g_x^2)^{-1/2}(-g_x, 1),\end{aligned}$$

que apenas sabemos sua existência e não a conhecemos. Por outro lado, sabemos calcular as relações entre as derivadas de f e g . Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}(f_y, -f_x), \\ \mathbf{n} &= (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}(f_x, f_y).\end{aligned}$$

2.5 Curvatura

A curvatura indica o quanto a curva muda a direção. Podemos expressar essa direção como uma base positiva de \mathbb{R}^2 a partir de elementos geométricos da curva.

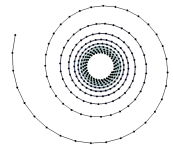
Caso paramétrico

Uma maneira de medir como o traço se curva é observar como a base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ associada a cada ponto varia quando nos movemos ao longo da curva. Esta mudança pode ser controlada pelo significado das derivadas de $\mathbf{t}'(s)$ e $\mathbf{n}'(s)$. Diferenciando as expressões

$$\|\mathbf{t}\|^2 = \|\mathbf{n}\|^2 = 1 \text{ e } \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle &= \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0 \text{ e} \\ \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle &+ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = 0.\end{aligned}$$



Portanto, o vetor $\mathbf{t}'(s)$ está na direção de $\mathbf{n}(s)$, isto é, existe uma função diferenciável $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ ou ainda $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$. O número real $\kappa(s)$ é chamado de *curvatura* da curva α em $s \in I$. Então, temos

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \text{ e } \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

Notemos que $|\kappa(s)| = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$ que é o valor absoluto da aceleração da curva α . Como $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$, esta aceleração é centrípeta e não tangencial. Por outro lado,

$$\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \det(\alpha'(s), \alpha''(s)),$$

e então o sinal de $\kappa(s)$ informa sobre a orientação da base formada pelo vetor velocidade e a aceleração da curva. Isto é, se $\kappa(s) > 0$ então a curva muda sua direção no sentido anti-horário e se $\kappa(s) < 0$ no sentido horário.

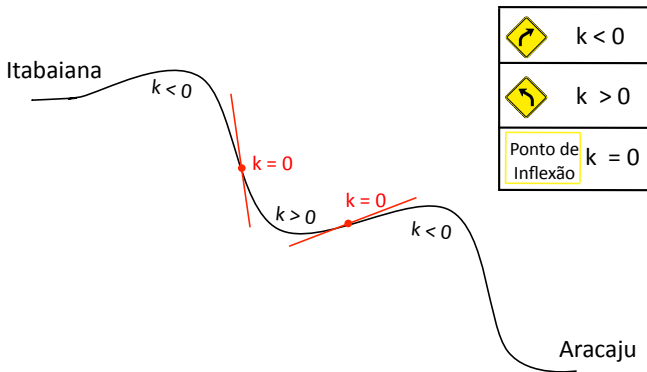


Figura 2.9: Sinais da curvatura.

Uma forma simples de ver o que acabamos de falar é o seguinte, suponhamos que estamos viajando de Itabaiana para Aracaju pela $BR - 235$ que a representaremos pela curva C , fixemos um sentido no qual a curva C é percorrida, neste caso dizemos que a curva é orientada, então podemos colocar um sinal na curvatura para indicar se estamos virando à direita ($-$) ou à esquerda ($+$) (ver Figura 2.9).

Podemos ainda dar outra interpretação geométrica para a curvatura da curva \mathbf{C} . Seja P um ponto em \mathbf{C} e seja r a reta tangente da curva em P , existe um círculo que é tangente à reta tangente em P e que melhor aproxima a curva tal círculo chamamos de *círculo osculador*, a curvatura nesse ponto é dada como o inverso do raio, ou seja, quanto maior o raio do círculo no ponto P menor será a curvatura nesse ponto.

Exemplo 2.12 (Círculo). Seja $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização do círculo dado por

$$\alpha(t) = c + r \left(\cos\left(\frac{t}{r}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{t}{r}\right) \right)$$

cujo centro é o ponto $c \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$. Se tomarmos $t_0 = 0$, temos

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = rt, t \in (0, 2\pi].$$

Reparametrizamos α por $\beta(s) = c + r \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) \right)$, daí

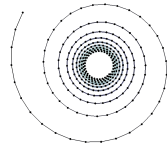
$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \beta''(s) = -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) \right), \\ \mathbf{n}(s) &= J\beta'(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) \right), \end{aligned}$$

então $\kappa(s) = 1/r, \forall s \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.13. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que a curvatura de α em $t \in I$ é dada por

$$\kappa = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)^3}}.$$

Exercício 2.14. Seja a elipse definida por $\alpha(t) = (a\cos(t), b\operatorname{sen}(t))$, com $t \in I \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\kappa = ab / (a^2 \operatorname{sen}^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}$.



Caso implícito

No caso em que a curva é definida por uma função $f(x, y) = c$ implícita, vimos que localmente ela pode ser vista como um gráfico $\{x \in J; (x, g(x))\}$, então nesse caso o nosso trabalho reduz a utilizar o caso paramétrico e obter a curvatura em função de g . Utilizando os resultados das relações das derivadas das funções f e de g , temos

$$\kappa = -\frac{f_{xx}f_x^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

Exercício 2.15. Considere o círculo de raio r dado pela seguinte função $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$. Mostre que

$$\mathbf{t} = r^{-1}(y, -x), \quad \mathbf{n} = r^{-1}(x, y), \quad \kappa = r^{-1}.$$

2.6 Fórmula de Minkowski

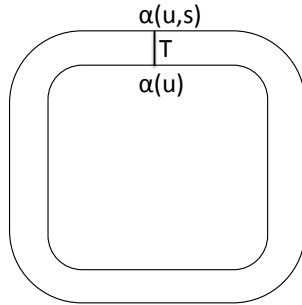


Figura 2.10: Variação da curva.

Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva, fechada, convexa, parametrizada pelo comprimento de arco e seja

$$P(u, t) = \alpha(u) + t\mathbf{n}(u),$$

variação de α , onde $t \in [0, T]$, \mathbf{n} é o vetor normal de α .

Como

$$\begin{aligned} P_u &= \alpha_u + tn_u = \alpha_u + sdn.\alpha_u = \alpha_u - tk\alpha_u = (1 - tk)\alpha_u, \\ P_t &= n, \end{aligned}$$

temos que $P_u \times P_t = (1 - tk)\alpha_u \times n$, logo $\|P_u \times P_t\| = (1 - tk)\|\alpha_u\|$, onde k é a curvatura da curva α . Daí,

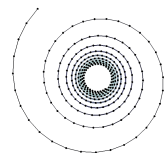
$$\begin{aligned} |B_t| &= |B| + \int_{v=a}^b \int_0^T (1 - tk)\|\alpha_u\| ds du \\ &= |B| + TL(\alpha) - \frac{T^2}{2} \int_a^b k du, \end{aligned}$$

onde $L(\alpha)$ é o comprimento da curva α , B é a região interna limitada pela curva α e $|B|$ é a área da região B .

2.7 Discussão

Nesse capítulo vimos as primeiras ilustrações dos problemas de mudança de contexto de modelagem. Enquanto o cálculo de invariantes diferenciais é facilmente expresso nas curvas paramétricas, não tem equivalentes diretos no caso discreto. Uma opção é recorrer à aproximação, seja por curvas discretas polinomiais onde as derivadas são definidas por manipulação algébrica no computador, seja passando pelo caso implícito, expressando as derivadas através do teorema da função implícita e estimando-as por aproximação numérica.

Outra opção consiste em usar a geometria do modelo de curvas implícitas. No caso, as derivadas são nulas ao longo de cada segmento do polígono, e não definidas nos seus vértices. Podemos interpretar isso como curvas onde o comprimento esta “concentrado” nas arestas, e a curvatura é concentrada nos vértices, separando os invariantes por tipo: invariantes envolvendo uma derivada nos elementos de dimensão 1 (segmentos de reta), e invariantes envolvendo duas derivadas nos elementos de dimensão 0 (um vértice é equivalente a uma bola em $\mathbb{R}^0 = \{0\}$). Essa observação sobre as dimensões esta na base dos estimadores atuais, usando cálculo exterior (formas diferenciais) no caso discreto [CSM03, TLHD03].



Capítulo 3

Geometria Euclidiana: Superfícies

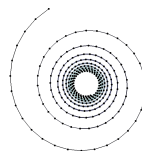
Este capítulo tem por objetivo estudar superfície regular e a partir da sua definição obtermos as propriedades geométricas como plano tangente, vetor normal e curvaturas os quais são fundamentais para dar continuidade no nosso trabalho. Além disso, falaremos também de algumas possibilidades de mudança de ponto de vista geométrico. A principal referência que utilizamos ao longo deste capítulo foi o livro do Manfredo [DC76].

3.1 Modelos Euclidianos de Superfícies

Vemos exemplos de superfícies todos os dias, como pneus, balões, bolas de futebol, latas, por exemplo. Uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida tomando pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si de tal forma que a figura resultante não tenha pontas, arestas ou auto-interseções.

3.1.1 Superfície Paramétrica Regular

A definição seguinte descreve a propriedade mencionada acima de uma maneira mais formal.



Definição 3.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\sigma : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S$ tal que

1. σ é diferenciável.
2. σ é um homeomorfismo. Como σ é contínua pela condição 1, isto significa que σ tem inversa $\sigma^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $p \in U$ a diferencial $d\sigma_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

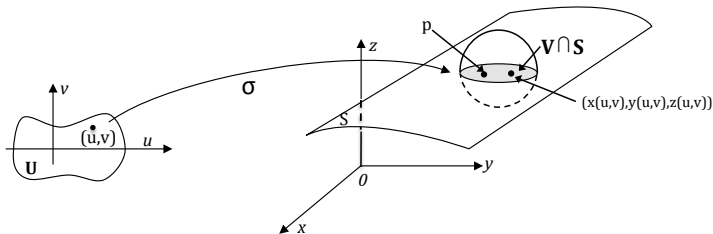


Figura 3.1: Definição de superfície.

Escrevendo σ em coordenadas, $\sigma(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$, podemos dizer que σ é diferenciável é equivalente a dizer que as funções x , y e z são diferenciáveis.

A última condição da definição equivale a $\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}} \neq 0$, ou seja, os vetores $\sigma_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$ e $\sigma_{\mathbf{v}} = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ são linearmente independentes.

A aplicação σ é chamada de *parametrização* em p . Ela tem o mesmo papel que a parametrização da curva α para superfícies, porém a expressão de σ pode variar de região para região permitindo mais tipos de superfícies. A vizinhança $V \cap S$ de p é chamada *vizinhança coordenada* e as variáveis u, v são denominadas *coordenadas locais* de S .

Exemplo 3.2. Consideremos a esfera unitária dada por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Afirmamos que S^2 é uma superfície regular.

De fato, seja a aplicação $\mathbf{x}_1 = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$, $(x, y) \in U$, onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 < 1)\}$. Vamos verificar as condições da definição.

1. Como $x^2 + y^2 < 1$, a função $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .
2. Verifica-se, facilmente, que x_1 é bijetiva e que x_1^{-1} é a restrição da projeção contínua $\Pi(x, y, z) = (x, y)$ ao conjunto $x_1(U)$. Assim, x_1^{-1} é contínua em $x_1(U)$.
3. $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$.

Agora vamos definir outras parametrizações para cobrir a esfera toda. Seja $\mathbf{x}_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}_2 = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), (x, y) \in U.$$

Como no caso anterior mostra-se que \mathbf{x}_2 é uma parametrização e além disso, $\mathbf{x}_1(U) \cup \mathbf{x}_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0)\}.$$

Utilizamos os planos xz e zy , definimos as seguintes parametrizações:

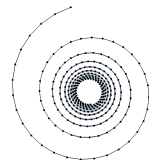
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(x, z) &= (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \\ \mathbf{x}_4(x, z) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), \\ \mathbf{x}_5(y, z) &= (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \\ \mathbf{x}_6(y, z) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), \end{aligned}$$

que junto com $\mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2$ cobre toda a esfera.

Exercício 3.3. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação diferenciável. O gráfico de f é o seguinte conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Mostre que o gráfico é uma superfície regular.



Mudança de parâmetros

A definição analítica de uma aplicação $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre uma superfície regular é delicada. Uma forma natural de pensarmos sobre o seu significado seria escolher para cada $p \in S$ uma parametrização. O problema é que tal ponto pode pertencer a duas ou mais parametrizações e é necessário garantir que o valor de $f(p)$ seja o mesmo em todas. Então, é importante mostrarmos que isso não depende do sistema de coordenadas escolhido. Neste sentido, podemos enunciar o seguinte resultado

Proposição 3.4 (Mudança de parâmetros). Seja p um ponto de uma superfície regular S e sejam $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\tau : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S tais que $p \in \sigma(U) \cap \tau(V) = W$. Então, a mudança de coordenadas $h = \sigma^{-1} \circ \tau : \tau^{-1}(W) \rightarrow \sigma^{-1}(W)$ é um difeomorfismo: h é diferenciável e tem inversa diferenciável h^{-1} .

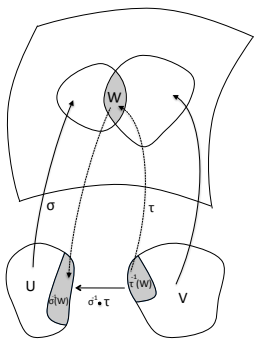


Figura 3.2: Mudança de parâmetros.

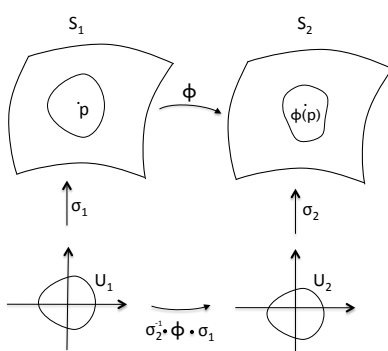


Figura 3.3: Aplicação diferenciável entre duas superfícies regulares.

Definição 3.5. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Então, f é diferenciável em $p \in V$ se para alguma parametrização $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com $p \in \sigma(U) \subset V$, a composição $f \circ \sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\sigma^{-1}(p)$. A função f é diferenciável em V se é diferenciável em todos os pontos de V .

Exemplo 3.6. O quadrado da distância a um ponto fixo $p_0 \in \mathbb{R}^3$ é dada por $f(p) = \|p - p_0\|^2$, $p \in S$. Notemos que f é uma função diferenciável.

Definição 3.7. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares. Dizemos que uma aplicação $\phi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ é diferenciável em $p \in V_1$, se, dadas parametrizações

$$\sigma_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \sigma_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

onde $p \in \sigma_1(U_1)$ e $\phi(\sigma_1) \subset \sigma_2(U_2)$, a aplicação

$$\sigma_2^{-1} \circ \phi \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $\sigma_1^{-1}(p)$.

3.1.2 Superfície Implícita

Definição 3.8. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação diferenciável e seja $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um valor regular de f se, para cada $p \in U$ com $f(p) = a$, temos $(df)_p \neq 0$, ou equivalentemente, $\nabla f(p) \neq 0$.

O próximo resultado mostra que a pré-imagem de um valor regular é uma superfície regular.

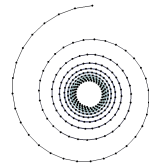
Proposição 3.9. Seja $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de uma função diferenciável, onde U é um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Se $S = f^{-1}(a)$ é um conjunto não-vazio, então S é uma superfície.

Demonstração: Basta utilizar o teorema da função implícita e o fato que todo gráfico é uma superfície regular. \square

Exemplo 3.10. O elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é uma superfície regular. De fato, é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

é uma função diferenciável e 0 é um valor regular da função f , pois, $f_x = 2x/a^2$, $f_y = 2y/b^2$, $f_z = 2z/c^2$ se anulam simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a $f^{-1}(0)$. Em particular, temos que a esfera é uma superfície regular, basta tomar $a = b = c = 1$.



Exercício 3.11. Mostre que o parabolóide $z = x^2 + y^2$ é uma superfície regular.

Exemplo 3.12. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$, onde a, b e c são números reais não-nulos. Temos que ϕ é diferenciável e que a restrição $\phi|_{S^2}$ é uma aplicação da esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

sobre o elipsóide

$$E^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

3.1.3 Complexos Simpliciais

Esta subseção introduz representações e mecanismos de geometria discreta para expressar superfícies de forma global. De uma certa forma, esses mecanismos criam uma base para mudanças de parâmetros entre as regiões onde pode-se aplicar o teorema da função implícita. Para isto, introduzimos representações de superfícies discretas em malhas triangulares, e mecanismos de gerar essas representações a partir de um sinal discreto.

O estudo global das superfícies requer frequentemente, até na Geometria Diferencial, abordagens menos fundamentadas no cálculo e mais nos processos construtivos. No caso discreto, as construções são expressas como algoritmos para adaptar-se ao computador.

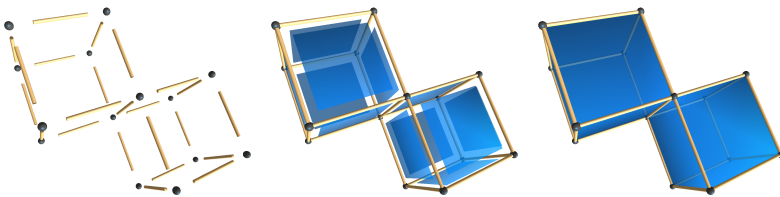


Figura 3.4: Um complexo celular com vértices, arestas e faces.

Complexo celular

A representação discreta usual de superfícies é similar à definição de superfície regular (seção 3.1): colando pedaços de reta ou de plano, eventualmente deformados. A diferença é que cada um dos pedaços não se recobrem, mas são postos lado a lado, colados pela fronteira deles. Cada pedaço é chamado de *célula*, tendo dimensão 0, 1 ou 2 se corresponder a um ponto, um pedaço de reta ou um pedaço de plano deformado.

Definição 3.13 (Célula). [LW69] Uma *célula* T de dimensão d é a imagem de um aberto limitado U de \mathbb{R}^d por uma aplicação ϕ bijetiva, contínua, de inversa contínua e estendível ao bordo de U . O *bordo* de T é a imagem do bordo de U por ϕ .

A aplicação ϕ modela a deformação de cada pedaço T . A superfície discreta é um conjunto de tais células justapostas, coladas no bordo delas (ver Figura 3.4). O bordo comum a duas células tem que ser uma célula de dimensão menor, a saber

Definição 3.14 (Complexo celular). Um *complexo celular* C é um conjunto de células disjuntas tais que o bordo de uma célula seja a união de células de dimensão menores.

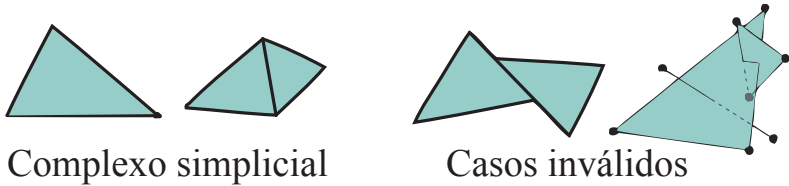
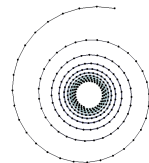


Figura 3.5: Um complexo simplicial e casos não válidos

Complexo simplicial

Essa definição de complexo celular (finito mergulhado) permite representar a grande maioria das superfícies diferenciais de forma exata. Porém, apesar de discreta, esta representação nem sempre pode ser usada no computador, principalmente por causa da deformação ϕ e



da eventual complexidade do bordo. Por isso é comum usar um caso particular de complexos celulares, mais simples, chamada de *complexos simpliciais* [BY98] (ver Figura 3.5). Neste caso, as células são simplexos, que generalizam pontos, segmentos de reta, triângulos, tetraedros, etc.

Definição 3.15 (Simplexo). Um simplexo T de dimensão d é o fecho convexo de $d + 1$ pontos em posição geral.

O fecho convexo é o menor conjunto convexo contendo os pontos. Por exemplo, o fecho convexo de três pontos no plano é o triângulo tendo esses pontos como vértices. Os pontos precisam está em posição geral (não tendo três pontos alinhados, quatro pontos coplanares) para evitar que o simplexo degenerere.

Os simplexos de dimensão 0, 1 e 2 são respectivamente chamados de vértices, arestas e triângulos. Observe que as faces de dimensão $d - 1$ de um simplexo de dimensão d são simplexos de dimensão $d - 1$, pois são os fechos convexos de d dos $d + 1$ pontos.

Exercício 3.16. Verifique que um simplexo de dimensão d tem $\binom{d}{k}$ faces de dimensão k .

Propriedade de variedade local

Para um complexo simplicial corresponder a uma superfície (não necessariamente suave), não pode haver simplexos de dimensão maior ou igual a 3, nem vértices ou arestas isolados (não contidos no bordo de outra célula). Cada ponto de um triângulo verifica a propriedade de variedade local. Para a aresta, ela pode ser considerada no meio de um pedaço de plano se ela pertencer exatamente ao bordo de dois triângulos.

Esta propriedade será fundamental para os algoritmos de *Marching Cubes*. Um vértice verifica a propriedade de variedade local se a união das arestas e dos triângulos em volta dele é conexa. Neste caso, chamamos o complexo simplicial de *malha triangular* ou de *superfície discreta triangulada*.

Exercício 3.17. Verifique que a condição de variedade local para um vértice é válida apenas se as arestas em volta verificarem a condição de variedade local.

3.2 Mudança de Contextos

Implícito para paramétrico

Introduzimos na seção anterior as definições de superfícies regulares e discreta em \mathbb{R}^3 . Um resultado fundamental para o estudo de superfícies implícitas é o Teorema da Função Implícita, a saber

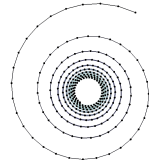
Teorema 3.18. [Teorema da Função Implícita] Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, $p = (x_0, y_0, z_0) \in U$, $a \in \mathbb{R}$ e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável. Suponhamos que $f(p) = a$ e $f_z(p) \neq 0$. Então existem uma vizinhança V de (x_0, y_0) em \mathbb{R}^2 e uma vizinhança W de z_0 em \mathbb{R} tal que $V \times W \subset U$ e uma função diferenciável $g : V \rightarrow W$ com $g(x_0, y_0) = z_0$ tal que:

$$\{p \in V \times W \mid f(p) = a\} = \{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in V\}.$$

Em outras palavras, se $f_z(p) \neq 0$, podemos utilizar a equação $f(x, y, z) = a$ para expressar z como uma função de x e y , em uma certa vizinhança de p . Isto possibilita ver uma superfície implícita regular localmente como um gráfico, ou seja, como uma superfície paramétrica. Notemos que não conhecemos a função g do teorema da função implícita, mas podemos relacionar as derivadas da função f com as da g ,

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -\frac{f_x(p)}{f_z}, \\ g_y(x, y) &= -\frac{f_y(p)}{f_z}, \\ g_{xx}(x, y) &= -\frac{f_{xx}}{f_z} + 2\frac{f_{xz}f_x}{f_z^2} - \frac{f_{zz}f_x^2}{f_z^3}, \\ g_{xy}(x, y) &= -\frac{f_{xy}}{f_z} + \frac{f_{yz}f_x + f_yf_{xz}}{f_z^2} - \frac{f_yf_{zz}f_x}{f_z^3}, \\ g_{yy}(x, y) &= -\frac{f_{yy}}{f_z} + 2\frac{f_{yz}f_y}{f_z^2} - \frac{f_{zz}f_y^2}{f_z^3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde as derivadas de f são calculadas em p .



Estas expressões são bastante úteis quando formos encontrar as propriedades geométricas de superfícies implícitas.

Se quisermos passar do contexto de superfícies implícitas para o caso discreto uma ferramenta muito conhecida é o algoritmo *Marching Cubes* que percorre as amostras da grade e gera uma triangulação local da superfície. Para isso, é necessário o estudo das funções multilíneas por partes, pois o algoritmo *Marching Cubes* [LC87] usa a interpolação trilinear.

Implícito contínuo para discreto

Podemos construir uma representação discreta de superfície a partir de um sinal discreto $g[i, j, k]$ passa por interpolar o sinal g por uma função contínua (ou suave) f , e considerar a superfície implícita definida por f . Veremos interpolação, chamada de multilinear, que gera uma função f contínua (além de C^∞ por partes), e permite uma construção direta da superfície discreta no computador.

Interpolação trilinear por partes Seja $g[i, j, k]$ sinal tridimensional. A interpolação local no cubo $f_{i,j,k} : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tem que respeitar as restrições $\{f_{i,j,k}(o_u, o_v, o_w) = g[i + o_u, j + o_v, k + o_w]$ para $o_{uvw} \in \{0, 1\}$.

A interpolação trilinear por partes é obtida definindo $f_{i,j,k}$ como a única cúbica que respeite as restrições acima

$$\begin{aligned}
 f_{i,j,k}(u, v, w) = & (1-u)(1-v)(1-w) \cdot g [i , j , k] \\
 & + u (1-v)(1-w) \cdot g [i + 1, j , k] \\
 & + (1-u) v (1-w) \cdot g [i , j + 1, k] \\
 & + u v (1-w) \cdot g [i + 1, j + 1, k] \\
 & + (1-u)(1-v) w \cdot g [i , j , k + 1] \\
 & + u (1-v) w \cdot g [i + 1, j , k + 1] \\
 & + (1-u) v w \cdot g [i , j + 1, k + 1] \\
 & + u v w \cdot g [i + 1, j + 1, k + 1].
 \end{aligned}$$

Essa interpolação conserva a propriedade de ser bilinear em qualquer plano paralelo aos eixos, e linear em qualquer reta paralela a um eixo, garantindo a continuidade da interpolação e a simplicidade da solução ao longo das arestas de cada cubo (ver Figura 3.6).

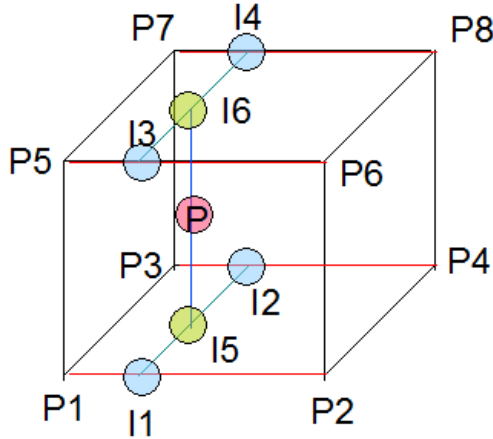
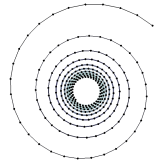


Figura 3.6: Interpolação trilinear dentro de um cubo pode ser feita por combinações de várias interpolações lineares ao longo dos eixos.

O algoritmo *Marching Cubes* Com isso podemos explicar como é feita a geração de triângulos no *Marching Cubes*. Supondo que $g[i, j, k] \neq 0$, então temos no máximo um vértice por aresta. Considerando um cubo por vez, temos que gerar triângulos ligando os vértices, com as restrições de gerar uma malha triangular válida. Em particular, os triângulos não podem se intersectar, e eles tem que se justapor corretamente com os triângulos vizinhos.

Existem casos simples, por exemplo, quando um canto do cubo tem valor de g positivo e todos os outros negativos. Neste caso, existem três arestas do cubo saindo do canto positivo, indo para cantos negativos, portanto apenas três arestas do cubo vão ter vértices. Com apenas três vértices, dá para criar apenas um triângulo e o caso está resolvido (ver Figura 3.7).

Pode-se dividir cada cubo em tetraedros e usar interpolação baricêntrica, o que gera apenas 3 casos distintos [Blo94, Vel96]. Porém, a topologia da superfície gerada não depende mais apenas do sinal discreto g mas também da escolha (arbitrária) da decomposição dos cubos em tetraedros.



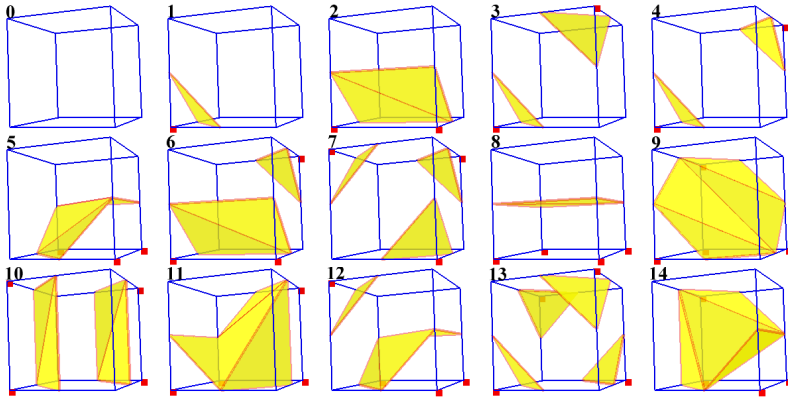


Figura 3.7: Casos básicos do algoritmo *Marching Cubes*.

No caso que uma função diferenciável g tiver originada o sinal g ($g[i, j, k] = g(i \cdot \delta x, j \cdot \delta y, k \cdot \delta z)$) e que g for conhecida, pode-se também refinar o reticulado até que em cada cubo a topologia da superfície seja simples [vGW94, LOdF02, PLLdF06]. Em teoria, este procedimento pode gerar um reticulado infinitamente denso (por exemplo numa superfície com uma alça arbitrariamente pequena), o que não é viável no computador. Porém, com técnicas de aritmética exata, é possível isolar estes casos (ver Figura 3.8).

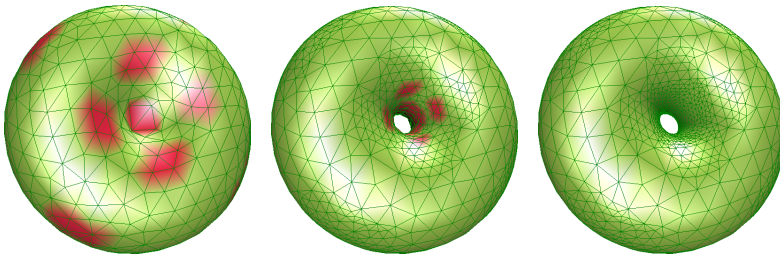


Figura 3.8: Reticulado adaptado para garantir a topologia do resultado: as partes vermelhas indicam regiões não validadas.

3.3 Plano Tangente; Vetor Normal

Nesta seção vamos definir plano tangente e o vetor normal em uma superfície regular.

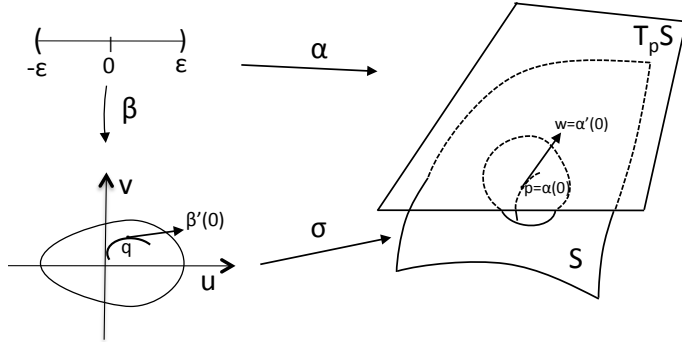


Figura 3.9: Plano tangente.

3.3.1 Plano Tangente

Podemos também considerar curvas desenhadas sobre a superfície S . Mostraremos que, para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , passando por p , constituem um plano, o qual denotaremos por $T_p S$ (plano tangente a superfície em p).

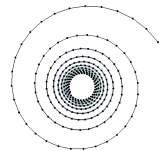
Caso paramétrico

Definição 3.19. Uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Uma curva α é desenhada sobre S se para todo $t \in I$, existem funções $u(t)$, $v(t)$ diferenciáveis, tais que $\alpha(t) = \sigma(u(t), v(t))$.

Definição 3.20. Fixado $(u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$, as curvas

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \sigma(u(t), v_0), \\ \beta(t) &= \sigma(u_0, v(t)), \end{aligned}$$

são chamadas as curvas coordenadas de σ em $(u_0, v_0) \in U$.



Proposição 3.21. Seja $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2, $d\sigma_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide com o conjunto de vetores tangentes a curvas desenhadas sobre S passando em p .

Demonstração: A demonstração é deixada como exercício, mas a ideia está na figura 3.9. □

O plano tangente de S em p pode também ser visto como

$$T_p(S) = \{v, v \text{ é tangente a } S \text{ em } p\}.$$

As coordenadas de um vetor $w \in T_p S$ na base associada a σ são determinadas da seguinte forma. Seja $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma curva em U dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$ e seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ definida por $\alpha(t) = \sigma \circ \beta(t)$, com $\beta(0) = q = \sigma^{-1}(p)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\sigma \circ \beta) \\ &= \sigma_{\mathbf{u}}(q)u'(0) + \sigma_{\mathbf{v}}(q)v'(0). \end{aligned}$$

Assim, na base $\{\sigma_{\mathbf{u}}(q), \sigma_{\mathbf{v}}(q)\}$ w tem coordenadas $u'(0)$, $v'(0)$.

Vale notar que a noção de plano tangente é transportada (preservada) por aplicações diferenciáveis. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares e seja $\phi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ aplicação diferenciável. Seja $p \in V$, sabemos que todo vetor $v \in T_p S_1$ é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ com $\alpha(0) = p$. A curva $\beta = \phi \circ \alpha$ é tal que $\beta(0) = \phi(p)$ e, portanto, $\beta'(0)$ é um vetor tangente em $T_{\phi(p)} S_2$.

Exercício 3.22. Dado w , como acima, mostre que o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de α e que a aplicação $d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2$ definida por $d\phi_p(w) = \beta'(0)$ é linear.

Caso implícito

Suponhamos que a superfície S seja dada por uma função implícita diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a seja um valor regular de f e $S = f^{-1}(a)$, então o plano tangente da superfície é dado por

$$T_p S = \ker((df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}), \forall p \in S.$$

De fato, se $v \in T_p S$, então existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Portanto, $(f \circ \alpha)(t) = a, \forall t$, e por diferenciação em $t = 0$,

$$(df)_p(v) = (f \circ \alpha)'(0) = 0.$$

Portanto, v pertence ao núcleo de $(df)_p$. Como $T_p S$ e $\ker((df)_p)$ são subespaços lineares de dimensão dois e um está contido no outro, temos o resultado.

3.3.2 Vetor Normal

Suponhamos inicialmente que a superfície regular S seja paramétrica, então podemos escolher para cada $p \in \sigma(U)$, um vetor normal unitário, dado por

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}}{\|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\|}(p), \quad p \in \sigma(U).$$

O vetor $\mathbf{N}(p)$ é chamado vetor normal à superfície em p .

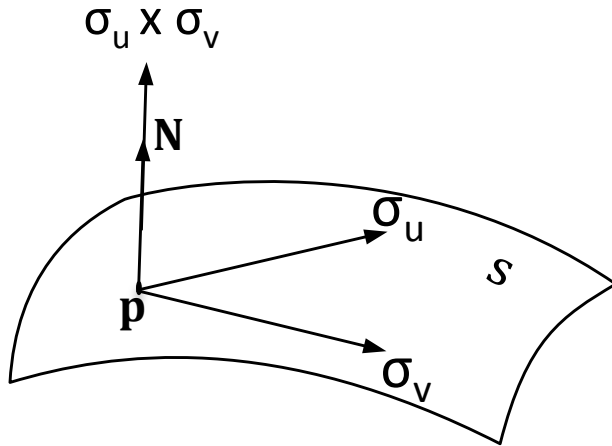
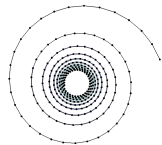


Figura 3.10: Vetor normal.



Se $S = f^{-1}(a)$, onde a é um valor regular de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, afirmamos que o espaço tangente à superfície S no ponto p é o complementar ortogonal da reta gerada $\nabla f(p)$. De fato, seja $v \in T_p S$, então existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, logo $f \circ \alpha(t) = a$, o que implica

$$\langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle = (f \circ \alpha)'(0) = 0,$$

o que mostra que $\nabla f(p)$ é ortogonal a $T_p S$. Isto quer dizer que o vetor normal em p é

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}.$$

3.4 Primeira Forma Fundamental

Nesta seção, estudaremos a primeira forma fundamental que permite medir a área de regiões e o comprimento de curvas em superfícies.

O produto interno de $\mathbb{R}^3 \supset S$ induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, indicado por $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, que associa um número real a cada par de vetores $(w_1, w_2) \in (T_p S)^2$. A este produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$.

Definição 3.23. A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de primeira forma fundamental da superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Caso paramétrico

Vamos expressar I_p em termos da base $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}\}$ de $T_p S$. Seja $w \in T_p S$, então existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ dada por $\alpha(t) = \sigma(u(t), v(t))$ tal que $\alpha(0) = p = \sigma(u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. Obtemos os coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \sigma_{\mathbf{u}} u' + \sigma_{\mathbf{v}} v', \sigma_{\mathbf{u}} u' + \sigma_{\mathbf{v}} v' \rangle_p \\ &= \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle_p u'^2 + 2 \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle_p u' v' + \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle_p v'^2 \\ &= E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2. \end{aligned}$$

Os valores das funções na expressão anterior são calculadas em $t = 0$ e os coeficientes

$$E(u_0, v_0) = \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle, \quad F(u_0, v_0) = \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle \quad e \quad G(u_0, v_0) = \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}\}$ de $T_p S$. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $\sigma(u, v)$, obtemos que as funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ são diferenciáveis nessa vizinhança.

Exemplo 3.24. Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano passando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais w_1 e w_2 . Então uma parametrização para P é

$$\sigma(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2. \tag{3.2}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são, para esse plano $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$.

Exercício 3.25. Considere a esfera $\mathbb{S}^2(r)$ centrada na origem e de raio $r > 0$. Sejam $V = \{(\theta, \phi); 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ e $\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\sigma(\theta, \phi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta).$$

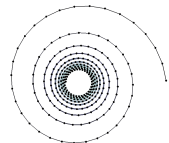
Mostre que σ é uma parametrização para $\mathbb{S}^2(r)$, e que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = r^2, \quad F = 0 \quad e \quad G = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Caso implícito

Consideremos a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$, onde f é uma função suave. Seja $p \in S$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_z(p) \neq 0$. Isso implica, pelo teorema da função implícita, que existe uma função suave $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a equação $z = g(x, y)$ descreve a superfície S em uma vizinhança de p , V_p , ou seja, nessa vizinhança S é parametrizada como um gráfico $\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}$. Os coeficientes da primeira forma fundamental no ponto $p = (x, y, g(x, y))$ são

$$E = \frac{f_z^2 + f_x^2}{f_z^2}, \quad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2} \quad e \quad G = \frac{f_z^2 + f_y^2}{f_z^2}.$$



3.4.1 Comprimento de Curva na Superfície

Agora mostraremos como a primeira forma fundamental está relacionada com o comprimento de arco de curvas. Seja $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ curva parametrizada, vimos que o comprimento de arco é

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Se $\alpha(t) = \sigma(u(t), v(t))$ está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização $\sigma(u, v)$, podemos calcular o comprimento de arco de α entre $a \leq t \leq b$ por

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt.$$

3.4.2 Área de uma Região em uma Superfície

Nesta subseção, mostraremos a relação entre os coeficientes da primeira forma fundamental e a área de uma região em uma superfície.

Seja $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização da superfície S . A função

$$\|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\| = \sqrt{EG - F^2}$$

representa a área do paralelogramo de lados $\sigma_{\mathbf{u}}$ e $\sigma_{\mathbf{v}}$. Integrando este elemento de área sobre a região de um plano que define a superfície temos a área da superfície.

Definição 3.26. Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular contida na imagem da parametrização $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Então a área de R é dada por

$$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\| dudv .$$

Exercício 3.27. Mostre que $A(R)$ não depende da escolha da parametrização.

3.5 Segunda Forma Fundamental

Estudaremos a segunda forma fundamental a qual permitirá introduzir as curvaturas Gaussiana e média, estas dão informações sobre o comportamento local da superfície.

3.5.1 Aplicação Normal de Gauss

A seguir, vamos estudar a aplicação normal de Gauss. A variação desta dá origem ao conceito de curvatura.

Caso paramétrico

Seja $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização da superfície regular S .

A aplicação $\mathbf{N} : \sigma(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ que toma seus valores na esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é chamada *aplicação normal de Gauss*.

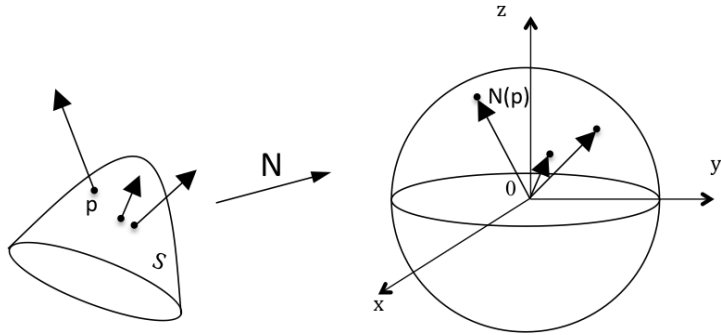
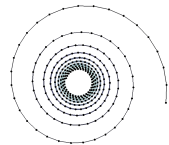


Figura 3.11: A aplicação de Gauss.

A sua derivada $d\mathbf{N}_p : T_pS \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)}S$ é uma aplicação linear. Como T_pS e $T_{\mathbf{N}(p)}S$ são paralelos (perpendiculares à mesma normal) podemos identificá-los, assim

$$d\mathbf{N}_p : T_pS \rightarrow T_pS.$$



Exemplo 3.28. Seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz + d = 0\}$ um plano. O vetor normal em $p \in P$ é dado por

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$$

e é constante, logo $d\mathbf{N}_p = 0$.

Exercício 3.29. Mostre que a aplicação $d\mathbf{N}_p$ é auto-adjunta, isto é $\langle d\mathbf{N}_p v, w \rangle = \langle v, d\mathbf{N}_p w \rangle$.

Definição 3.30. Seja $p \in S$ e seja $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de $d\mathbf{N}_p$ é chamado curvatura Gaussiana K de S em p . A metade do traço de $d\mathbf{N}_p$ é chamado de curvatura média H de S em p .

Definição 3.31. A forma quadrática $\mathcal{I}_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definida em $T_p S$ por

$$\mathcal{I}_p(v) = -\langle d\mathbf{N}_p(v), v \rangle$$

é chamada segunda forma fundamental de S em p .

Vamos escrever a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}\}$. Seja $\alpha(t) = \sigma(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\sigma(0) = p$. O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha'(t) = \sigma_{\mathbf{u}}u' + \sigma_{\mathbf{v}}v'$ e a diferencial da aplicação de Gauss

$$d\mathbf{N}(\alpha') = \mathbf{N}'(u(t), v(t)) = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v' .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p(\alpha') &= -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \sigma_{\mathbf{u}}u' + \sigma_{\mathbf{v}}v' \rangle \\ &= eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2, \end{aligned}$$

onde

$$e = -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle, \quad f = -\langle \mathbf{N}_v, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle \quad e \quad g = -\langle \mathbf{N}_v, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle.$$

Os coeficientes e , f e g são chamados coeficientes da segunda forma fundamental.

Caso implícito

Notemos que os coeficientes e , f e g foram determinados a partir da parametrização σ de S . Podemos determiná-los no caso em que a superfície é dada por uma função implícita $S = f^{-1}(a)$. Isto segue diretamente do teorema da função implícita, pois localmente a superfície S é vista como um gráfico $\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}$ e usando as equações (3.1) obtemos

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, (0, 0, g_{xx}) \rangle = -\frac{f_{xx}f_z^2 - 2f_{xz}f_xf_z + f_{zz}f_x^2}{f_z^2\sqrt{f_z^2 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{\det(A_1)}{f_z^2|\nabla f|}, \\
 f &= \langle N, (0, 0, g_{xy}) \rangle = -\frac{f_{xy}f_z^2 - f_zf_{yz}f_x - f_zf_yf_{xz} + f_yf_{zz}f_x}{f_z^2\sqrt{f_z^2 + f_x^2 + f_y^2}} \\
 &= \frac{\det(A_2)}{f_z^2|\nabla f|}, \\
 g &= \langle N, (0, 0, g_{yy}) \rangle = -\frac{f_{yy}f_z^2 - 2f_{yz}f_yf_z + f_{zz}f_y^2}{f_z^2\sqrt{f_z^2 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{\det(A_3)}{f_z^2|\nabla f|},
 \end{aligned}$$

onde

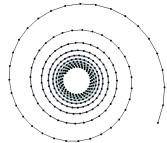
$$A_1 = \begin{vmatrix} f_{xx}f_{xz}f_x \\ f_{xz}f_{zz}f_z \\ f_x f_z 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} f_{xy}f_{yz}f_y \\ f_{xz}f_{zz}f_z \\ f_x f_z 0 \end{vmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{vmatrix} f_{yy}f_{yz}f_y \\ f_{yz}f_{zz}f_z \\ f_y f_z 0 \end{vmatrix}.$$

3.5.2 Curvatura

Daremos agora uma interpretação geométrica da segunda forma fundamental.

Definição 3.32. Seja C uma curva regular na superfície S passando por $p \in S$, κ a curvatura de C em p , e $\cos(\theta) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$, onde \mathbf{n} é o vetor normal a C e \mathbf{N} é o vetor normal a S em p . O número $\kappa_n = \kappa \cos(\theta)$ é chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p .

A curvatura normal κ_n é o comprimento da projeção do vetor $\kappa \mathbf{n}$ sobre o normal à superfície em p , com sinal dado pela orientação \mathbf{N} de S em p .



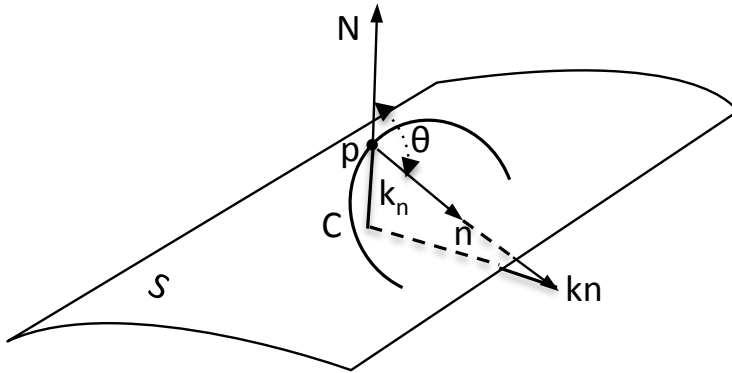


Figura 3.12: Curvatura normal.

A curvatura normal de C não depende da orientação de C , mas troca de sinal com uma mudança de orientação da superfície.

Podemos dar uma interpretação geométrica da segunda forma fundamental \mathcal{I}_p utilizando a curvatura normal. De fato, seja $C \subset S$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha(s)$, com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $\mathbf{N}(s)$ a restrição do vetor normal \mathbf{N} à curva $\alpha(s)$, teremos $\mathcal{I}_p(\alpha'(0)) = \kappa_n(p)$.

Exercício 3.33. Com a notação acima, prove que a segunda forma fundamental verifica $\mathcal{I}_p(\alpha'(0)) = \kappa_n(p)$.

Como $d\mathbf{N}_p$ é uma aplicação auto-adjunta sabemos pelo teorema espectral que existe uma base $\{e_1, e_2\}$ ortonormal de T_pS tal que

$$d\mathbf{N}_p(e_1) = -k_1 e_1 \text{ e } d\mathbf{N}_p(e_2) = -k_2 e_2.$$

Definição 3.34. O máximo k_1 da curvatura e o mínimo k_2 da curvatura são chamadas curvaturas principais em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovalores e_1 e e_2 são chamadas direções principais em p .

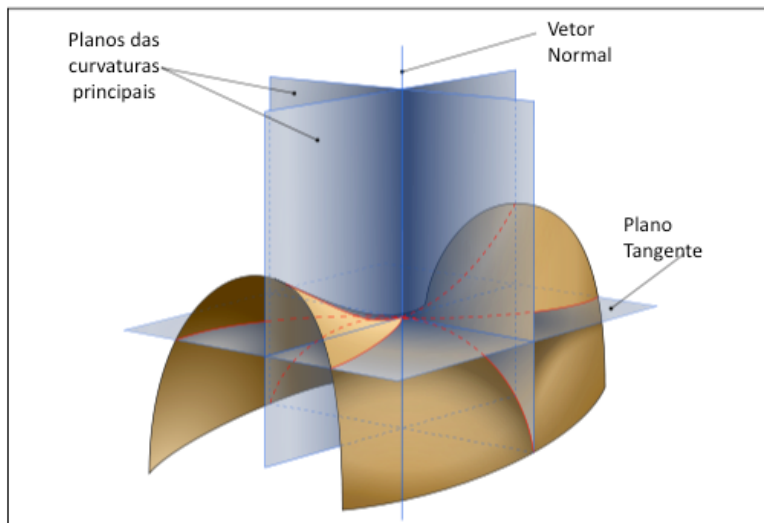
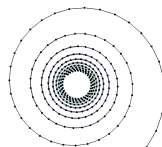


Figura 3.13: Interpretação das curvaturas principais (© wikipedia).

Em termos das curvaturas principais, as curvaturas Gaussiana e média são, respectivamente, dadas por

$$K = k_1 k_2 \text{ e } H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

As curvaturas principais podem ser interpretadas da seguinte maneira: dado $p \in S$, onde é definido um plano tangente e o vetor normal \mathbf{N} , consideramos todos os planos que passam por p e contém \mathbf{N} . As interseções destes planos com a superfície nos dão uma família de curvas, cujas curvaturas máxima e mínima são as curvaturas principais da superfície.



3.5.3 Cálculo das Curvaturas

Vamos calcular as fórmulas explícitas para as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície parametrizada regular, em função dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental.

Caso paramétrico

Vimos na subseção anterior que $d_p\mathbf{N} : T_pS \rightarrow T_pS$, assim podemos escrever $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v$ na base $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}\}$ do plano tangente T_pS , ou seja, existem funções $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= a_{11}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{12}\sigma_{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{N}_v &= a_{21}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{22}\sigma_{\mathbf{v}}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Vamos encontrar os coeficientes $a_{i,j}$ em termos da base $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}\}$.

Tomando o produto interno de cada uma das igualdades da expressão (3.3) por $\sigma_{\mathbf{u}}$ e $\sigma_{\mathbf{v}}$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_u \rangle &= a_{11}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{12}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_v \rangle &= a_{21}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{22}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_v \rangle &= a_{21}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{22}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_u \rangle &= a_{11}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle + a_{12}\langle \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Como $\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N} \rangle = 0 = \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N} \rangle$, temos

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_u \rangle &= -\langle \sigma_{uu}, \mathbf{N} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{u}}, \mathbf{N}_v \rangle &= -\langle \sigma_{uv}, \mathbf{N} \rangle, \\ \langle \sigma_{\mathbf{v}}, \mathbf{N}_v \rangle &= -\langle \sigma_{vv}, \mathbf{N} \rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}e &= -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle \mathbf{N}_u, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}_v, \sigma_{\mathbf{u}} \rangle, \\ g &= -\langle \mathbf{N}_v, \sigma_{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{N}, \sigma_{vv} \rangle.\end{aligned}$$

Vamos obter, agora, os coeficientes $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ em termos de e, f e g .

Usando as equações (3.4), segue que

$$\begin{aligned} -f &= \langle \mathbf{N}_u, \sigma_v \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{11}F + a_{12}G, \\ -f &= \langle \mathbf{N}_v, \sigma_u \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{22} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = a_{21}E + a_{22}F, \\ -e &= \langle \mathbf{N}_u, \sigma_u \rangle = a_{11} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + a_{12} \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle = a_{11}E + a_{12}F, \\ -g &= \langle \mathbf{N}_v, \sigma_v \rangle = a_{21} \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + a_{22} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = a_{21}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$, $F = \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle$ e $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$ são os coeficientes da primeira forma fundamental.

Em termos de matrizes

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Em particular temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Como

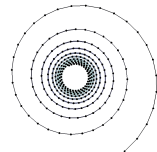
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

segue que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$K(p) = \det(a_{i,j}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(\mathcal{I}_p)}{\det(I_p)}.$$



Calculando a curvatura, vimos anteriormente que k_1 e k_2 satisfazem

$$d\mathbf{N}(v) = -k(v) = -kI(v), \text{ para algum } v \in T_pS - \{0\},$$

onde $I : T_pS \rightarrow T_pS$ é a aplicação identidade. Por definição de autovalores temos que a aplicação linear $d\mathbf{N} = kI$ não é invertível. Logo,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0.$$

Isto é equivalente a

$$k^2 + k \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{tr}(A)} + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\text{det}(A)} = 0,$$

aqui $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$.

Como k_1 e k_2 são as raízes da equação acima, obtemos

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2} \text{tr}(A) = -\frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Exemplo 3.35 (Plano). Vimos anteriormente que $d\mathbf{N} = 0$. Logo, $K = H = 0$.

Exemplo 3.36 (Esfera). Consideremos a parametrização definida no exercício 3.25. Temos que o vetor normal em cada ponto é

$$\mathbf{N} = (\text{sen}(\theta)\cos(\psi), \text{sen}(\theta)\sin(\psi), \cos(\theta)).$$

Verificamos que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$e = -r, \quad f = 0 \quad \text{e} \quad g = -r\text{sen}^2(\theta).$$

Logo, as curvaturas Gaussiana e média, respectivamente, são $K = r^{-2}$ e $H = r^{-1}$.

Exercício 3.37. Verifique os cálculos do exemplo anterior.

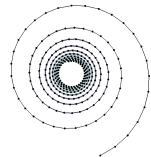
Caso implícito

Vimos anteriormente como calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de uma superfície dada por uma função implícita $S = f^{-1}(a)$ e usando as definições das curvaturas Gaussiana e média, temos que

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\det(A_1) \det(A_3) - \det(A_2)^2}{f_z^2 |\nabla f|^4} \\
 &= \frac{(f_{zz} f_{yy} - f_{yz}^2) f_x^2 + (-2f_{xy} f_{zz} + 2f_{xz} f_{yz}) f_y f_x}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2} \\
 &+ \frac{2(-f_{xz} f_{yy} + f_{xy} f_{yz}) f_x f_z + (f_{xx} f_{zz} - f_{xz}^2) f_y^2}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2} \\
 &+ \frac{-2(-f_{xz} f_{xy} + f_{xx} f_{yz}) f_y f_z + (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) f_z^2}{(f_z^2 + f_x^2 + f_y^2)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2|\nabla f|^3} \left(\det(A_1) \left(1 + \frac{f_y^2}{f_z^2} \right) - 2 \det(A_2) \left(\frac{f_x f_y}{f_z^2} \right) \right) \\
 &+ \frac{1}{2|\nabla f|^3} \left(\det(A_3) \left(1 + \frac{f_x^2}{f_z^2} \right) \right) \\
 &= \frac{(f_y^2 + f_z^2) f_{xx} + (f_x^2 + f_z^2) f_{yy} + (f_x^2 + f_y^2) f_{zz}}{2|\nabla f|^3} \\
 &- \frac{(f_x f_y f_{xy} + f_x f_z f_{xz} + f_y f_z f_{yz})}{|\nabla f|^3}.
 \end{aligned}$$

Observação 3.38. Notemos que ao permutarmos as variáveis x , y e z nas expressões de K e H obtemos o mesmo resultado. Isto decorre da invariância das curvaturas.



3.5.4 Fórmula de Minkowski

Teorema 3.39. [Fórmula de Minkowski] Seja Ω um domínio no plano e seja S uma superfície compacta, convexa parametrizada por $\sigma(u, v)$ tal que $S = \sigma(\Omega)$. Consideremos uma variação dessa superfície ao longo do vetor normal, isto é, $\sigma_t(u, v) = \sigma(u, v) + t\mathbf{N}(u, v)$, onde $0 \leq t \leq T$. Então,

$$\text{Vol}(\mathcal{U}) = \text{Vol}(U) + T\text{Area}(\Omega) - T^2 \iint_{\Omega} H dA + \frac{T^3}{3} \iint_{\Omega} K dA,$$

onde U é a região limitada por S e \mathcal{U} é a região limitada por S_t .

Demonstração: Seja $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S e seja $\sigma_t : U \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ variação da superfície S , dada por $\sigma_t(u, v) = \sigma(u, v) + t\mathbf{N}(u, v)$,

Derivando com relação a u , v e t a expressão $\sigma_t(u, v)$, obtemos

$$\begin{aligned} (\sigma_t)_u &= \sigma_{\mathbf{u}} + t\mathbf{N}_u, \\ (\sigma_t)_v &= \sigma_{\mathbf{v}} + t\mathbf{N}_v, \\ \sigma_t &= \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Como $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}\}$ forma uma base para $T_p S$, temos que

$$\begin{aligned} N_u &= dN(\sigma_{\mathbf{u}}) = a_{11}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{12}\sigma_{\mathbf{v}}, \\ N_v &= dN(\sigma_{\mathbf{v}}) = a_{21}\sigma_{\mathbf{u}} + a_{22}\sigma_{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} (\sigma_t)_u \times (\sigma_t)_v &= \sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}(1 + t(a_{11} + a_{22})) \\ &+ t^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

Vimos anteriormente que $-2H = a_{11} + a_{22}$ e $K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Logo,

$$(\sigma_t)_u \times (\sigma_t)_v = (\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}})(1 - 2tH + t^2K),$$

e usando o fato que $k_1 \leq k_2$, obtemos

$$\|(\sigma_t)_u \times (\sigma_t)_v\| = (1 - 2tH + t^2K)\|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\|,$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 Vol(\mathcal{U}) &= Vol(U) + \iint_{\Omega} \int_{t=0}^T \|(\sigma_t)_u \times (\sigma_t)_v\| dudvds \\
 &= Vol(U) + \iint_{\Omega} \int_{t=0}^T \|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\| dudvds \\
 &+ \iint_{\Omega} \int_{t=0}^T (-2sH) \|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\| dudvds \\
 &+ \iint_{\Omega} \int_{t=0}^T (s^2K) \|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\| dudvds \\
 &= Vol(U) + TA(s) - T^2 \iint_{\Omega} HdA + \frac{T^3}{3} \iint_{\Omega} KdA.
 \end{aligned}$$

□

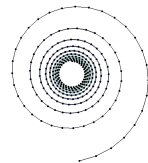
3.6 Discussão

Ao longo desse capítulo estudamos superfícies regulares tanto paramétricas como implícitas, notamos que o teorema da função implícita é um resultado fundamental para obtermos as propriedades geométricas no caso implícito a partir do caso paramétrico.

Além disso, para construir uma representação discreta da superfície a partir de sinais discreto, vimos que o algoritmo *Marching Cubes* é muito útil, mas tal algoritmo apresenta casos ambíguos durante a extração da malha, de forma que nem sempre tem a topologia correta e nem a malha converge para a superfície.

Contando que os sinais podem ser ou positivo ou negativo em cada um dos 8 cantos do cubo, temos $2^8 = 256$ configurações básicas, redutíveis à 15 casos se tirar casos equivalentes por rotação ou simetria. Porém, se incluirmos os sub-casos para garantir que a triangulação corresponda com a topologia da interpolação tri-linear, isso gera 33 casos bases derivados em mais de 730 por simetria [LLVT03]. Esta complexidade tornou a busca por alternativas ao *Marching Cubes* original [NY06].

As abordagens detalhadas anteriormente não têm um formalismo único: funções multilineares permitem criar globalmente uma su-



superfície discreta, já para o estudo local para estimar invariantes geralmente usa aproximação, por exemplo através de interpolação splines. Idealmente, usar-se-ia uma única interpolação para tudo, abrindo o caminho para estudar categorias de interpolação com as suas respectivas propriedades. Esta tendência faz parte da pesquisa atual, mas está só começando.

Existem já alguns elementos simples para desenvolver teorias com este objetivo. A abordagem mais antiga é de garantir convergência das construções: se refinarmos infinitamente o reticulado e se o sinal g convergir (localmente ou uniformemente) para uma função implícita diferenciável, as curvaturas calculadas por splines convergem para as curvaturas da superfície implícita diferenciais? A topologia gerada pelo *Marching Cubes* vai corresponder à topologia da superfície suave? A resposta é *a priori* positiva, apesar de requerer por enquanto condições de regularidade sobre g que não são necessárias no caso diferencial [MDSB02, BCM03, MT02].

Um outro problema é a invariância da superfície gerada. O processo de amostragem ao longo do reticulado não é invariante por movimentos rígidos, pois privilegia as direções paralelas aos eixos. Isto dificulta a análise de invariantes no caso implícito discreto.

Finalmente, uma abordagem recente e promissora consiste em preservar as relações entre a topologia e a geometria. Por exemplo, o teorema de Gauss-Bonnet estipula que a integral da curvatura Gaussiana numa superfície sem bordo é igual à $2\pi\chi$, onde χ é a característica de Euler. Isto é válido nos complexos celulares definindo a curvatura Gaussiana como o déficit angular em cada vértice v : $2\pi - \sum \beta_i$ onde β_i são os ângulos em v dos triângulos tendo v na fronteira [Ban67]. Porém, usando a estimativa da curvatura por splines e a característica de Euler dada pelo complexo simplicial resultando do *Marching Cubes* com interpolação trilinear, esta relação não vale mais. Pode assim servir de critério para construir uma teoria de interpolação mais coerente.

Capítulo 4

Geometria Afim: Curvas

Neste capítulo veremos as propriedades geométricas invariantes por transformações afins em curvas, a saber os vetores tangente e normal e a curvatura.

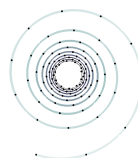
4.1 Invariância Afim

Na geometria Euclidiana, as propriedades geométricas como vetores tangente e normal em curvas são covariantes por isometrias, ou seja, se aplicarmos uma isometria a curva temos que os novos vetores tangente e normal são dados pela isometria aplicado à curva inicial, já a curvatura da curva é invariante, isto é, ela não se altera por isometria. No entanto, tais propriedades geométricas não são invariantes por transformações lineares em geral. Mas, se nos limitarmos as transformações lineares afins, $Ax, x \in \mathbb{R}^2$, que preservam áreas, ou seja, $\det(A) = 1$, obteremos invariantes afins.

Neste sentido, queremos encontrar propriedades geométricas \mathcal{P} que são invariantes por transformações do grupo

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2,$$

onde A é uma matriz satisfazendo $\det(A) = 1$.



Definição 4.1. A geometria afim de curvas planas é o estudo das propriedades destas curvas invariantes por esse grupo de transformações.

Definição 4.2. Uma propriedade \mathcal{P} é dita invariante por A se $\mathcal{P}(A(p)) = \mathcal{P}(p)$, para todo $p \in \mathbf{C}$, onde \mathbf{C} é uma curva.

Observação 4.3. O conjunto de transformações afins forma um grupo com a operação de composição de funções.

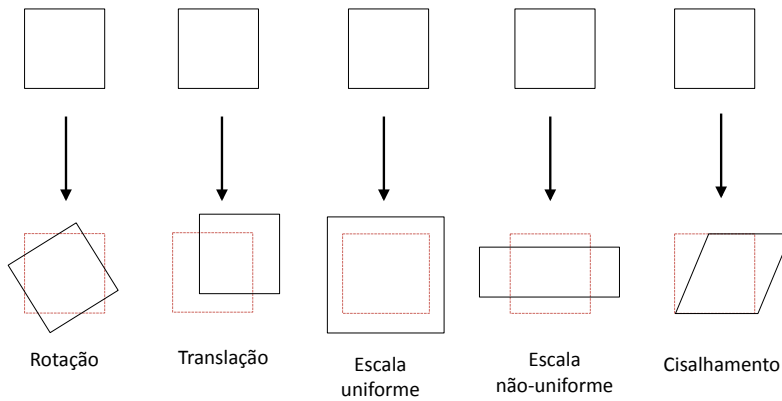


Figura 4.1: Transformações afins.

Propriedades Básicas de Transformações Afins

Transformações afins

1. levam retas em retas,
2. levam retas paralelas em retas paralelas,
3. preservam razão de comprimentos ao longo de uma reta dada.

Transformações e Invariantes	Euclidiana	Afim
Transformações		
Rotação	ok	ok
Translação	ok	ok
Escala uniforme		ok
Escala não-uniforme		ok
Cisalhamento		ok
Invariantes		
Comprimento	ok	ok
Ângulo	ok	
Paralelismo	ok	ok

Tabela 4.1: As transformações contidas nos grupos Euclidiano e afim, e alguns invariantes sob estes grupos.

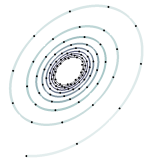
Invariância das Derivadas

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular e seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear afim. Se aplicarmos A em α , isto é, $A \circ \alpha$, temos que o vetor tangente na nova curva é $A \circ \alpha'$. Neste caso, a derivada é dita *covariante*.

Agora se tivermos com uma curva implícita definida pelo conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ e aplicarmos a transformação linear afim em C , temos que

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\} \\
 &\Leftrightarrow A.\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\} \\
 &\Leftrightarrow \{A.(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\} \\
 &\Leftrightarrow \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; f(A^{-1}(x, y))^T = 0\},
 \end{aligned}$$

daí segue que a direção do vetor normal da nova curva é dada por $A^{-1}(f_x, f_y)^T$, o que implica que a direção do vetor tangente é dada por $A^T(-f_y, f_x)^T$. Dizemos portanto que a derivada de f é *contravariante* com respeito a aplicação A se a direção do vetor tangente da nova curva for $A^T(-f_y, f_x)^T$.



Cônicas

Aqui temos por objetivo ilustrar figuras geométricas que são afins congruentes. O próximo conceito nos diz o sentido da congruência que estamos falando.

Definição 4.4. Uma figura f_1 é *afim-congruente* com uma figura f_2 se existe uma transformação afim, não necessariamente linear, que leva f_1 em f_2 .

A relação afim-congruente é uma relação de equivalência, em particular temos que todos os triângulos são afim-congruentes.

O próximo passo é mostrar que existem curvas que são afim congruentes, tais curvas são as cônicas. As quais definiremos a seguir.

Definição 4.5. Uma cônica é um conjunto em \mathbb{R}^2 definido pela equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0, \quad (4.1)$$

onde A, B, C, F, G, H são números reais e A, B e C não todos nulos.

As três formas de cônica não degeneradas são elipses, parábolas e hipérboles. Uma cônica não degenerada é uma

- hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$,
- parábola se $B^2 - 4AC = 0$,
- elipse se $B^2 - 4AC < 0$.

O número $\Delta = B^2 - 4AC$ é chamado de discriminante da cônica.

O próximo resultado mostra a grande diferença entre as geometrias Euclidiana e afim.

Proposição 4.6. Temos as seguintes congruências:

1. Qualquer elipse é afim-congruente ao círculo unitário centrado na origem e raio dado por $x^2 + y^2 = 1$.
2. Qualquer hipérbole é afim-congruente à hipérbole $xy = 1$.
3. Qualquer parábola é afim-congruente à parábola $y^2 = x$.

Demonstração: 1. Qualquer elipse é afim-congruente com a elipse na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pois fazendo uma rotação e translação obtemos tal forma. Agora consideremos a transformação afim:

$$p : (x, y) \mapsto (x_1, y_1),$$

onde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

daí, $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

2. Qualquer hipérbole é afim-congruente com a hipérbole na forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pois fazendo uma rotação e translação obtemos tal forma. Agora consideremos a transformação afim:

$$p_1 : (x, y) \mapsto (x_1, y_1),$$

onde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

assim, $x_1^2 - y_1^2 = 1 = (x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = 1$. Finalmente, aplicando a transformação afim $p_2 : (x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$, sendo

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

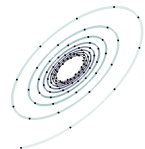
o que implica $x_2 y_2 = 1$.

3. Notemos que qualquer parábola é afim-congruente com a parábola $y^2 = ax$. Por rotação e translação obtemos tal forma. Agora consideremos a transformação afim $t : (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$, onde

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o que segue $y_1^2 = x_1$.

□



4.2 Modelos de Curvas

Modelo contínuo

Vimos que a curvatura da curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular é $k = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha'\|^3}$, o que implica que α' e α'' são linearmente independentes quando $k \neq 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $\alpha' \wedge \alpha'' > 0$, ou seja, α é *localmente estritamente convexa*.

Definição 4.7. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é não degenerada se satisfaz $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0$.

Observação 4.8. Daremos a interpretação geométrica da definição, suponhamos que $\alpha' \wedge \alpha'' > 0, \forall t \in I$. Utilizando o Teorema de Taylor, para δ suficientemente pequeno temos

$$\alpha(t + \delta) - \alpha(t) = \delta\alpha'(t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha''(\epsilon),$$

onde ϵ está entre t e $t + \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \wedge (\alpha(t + \delta) - \alpha(t)) &= \alpha'(t) \wedge \left(\delta\alpha'(t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha''(\epsilon) \right) \\ &= \frac{1}{2}\delta^2\alpha'(t) \wedge \alpha''(\epsilon). \end{aligned}$$

Notemos $\alpha'(t) \wedge \alpha''(\epsilon) > 0$, devido a continuidade da função determinante, daí a secante desde $\alpha(t)$ para $\alpha(t + \delta)$ pertence a um mesmo lado da reta tangente. Isto é, a curva α é não degenerada, significa que a curva não tem pontos de inflexão, ou ainda que a curvatura da curva não muda de sinal.

A observação acima sugere a seguinte definição.

Definição 4.9. [LM98] Uma curva α é localmente estritamente convexa se não possui pontos de inflexão. Mais geralmente, α é localmente convexa se sua curvatura não muda de sinal, podendo eventualmente se anular em algum ponto. Finalmente, α é convexa se, para qualquer $p \in \alpha$, α está inteiramente contida num dos semi-planos fechados determinados pela reta tangente em p .

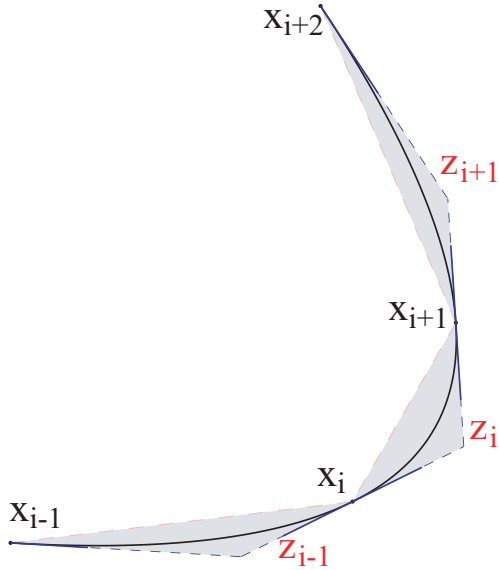
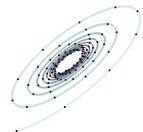


Figura 4.2: Pontos e triângulos de suporte numa parábola amostrada.

Modelo discreto

No caso discreto, pode-se replicar o modelo onde o comprimento está “concentrado” nas arestas e as curvaturas são concentradas nos vértices. Para isso, precisa-se de um modelo onde as arestas tem curvaturas zero, e esse equivalente afim de linhas retas são as parábolas. Em outras palavras, é uma curva polinomial por parte, onde os polinômios tem grau 2, descrevendo parábolas (ver Figura 4.2). A beleza no caso de estudo afim de curvas (que não funciona no caso de superfícies) é que essas parábolas podem ser unicamente definidas a partir dos vértices da curva e da direção da tangente em cada vértice. Assim, esse modelo de polígono parabólico [CLM06, CLM07] contém uma informação de derivada a mais, para estimadores afins que evoluem mais derivações que os equivalentes Euclidianos. Além disso, a direção tangente é covariante afim, portanto o modelo de polígono parabólico é bem adequado para os estimadores afins.



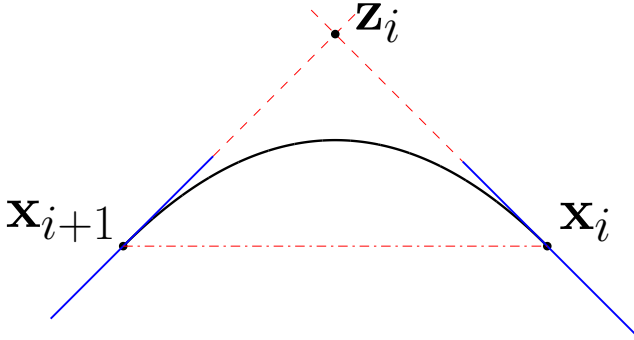


Figura 4.3: Triângulo de suporte $\mathbf{x}_i \mathbf{z}_i \mathbf{x}_{i+1}$.

O modelo de polígono parabólico é então definido por um conjunto de pontos $\mathbf{x}_i = \alpha(t_i) = (x_i(t_i), y_i(t_i))$ e de direções tangentes l_i em cada ponto \mathbf{x}_i . A cada aresta $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$ esta associada uma única parábola passando por \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_{i+1} e tangente às direções l_i e l_{i+1} . Essa parábola pode ser definida a partir do ponto de suporte \mathbf{z}_i , interseção das retas tangentes em \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_{i+1} (ver Figura 4.3). Essa parábola pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \alpha_i(s) &= \mathbf{x}_i + s\tau_i + \frac{s^2}{2}\eta_i \quad , \quad \text{onde } s \in [0, 1] \quad \text{e} \quad (4.2) \\ \tau_i &= -\frac{2}{L_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i) \quad , \\ \eta_i &= \frac{2}{L_i^2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1} - 2\mathbf{z}_i) \quad \text{e} \\ L_i &= 2\sqrt[3]{A_i} \quad . \end{aligned}$$

onde L_i é a raiz cúbica da área do triângulo de suporte $\mathbf{x}_i \mathbf{z}_i \mathbf{x}_{i+1}$. Veremos na próxima seção que L_i é o comprimento afim da parábola, τ_i o vetor tangente afim à parábola em \mathbf{x}_i e η_i o vetor normal afim (constante) à parábola.

4.3 Curvas Paramétricas

Vamos primeiro considerar o caso em que a curva seja paramétrica e depois com as expressões de cada propriedade geométrica obtaremos os invariantes afins em curvas implícitas, isto é possível, pois localmente qualquer curva implícita regular pode ser vista como um gráfico. Por questão de simplicidade do texto, quando nos referirmos a transformações afins, estamos trabalhando com transformações lineares que preservam área.

4.3.1 Comprimento de Arco Afim

No estudo de curvas na geometria Euclidiana o primeiro ingrediente para encontrar as propriedades geométricas é o cálculo do comprimento de arco. Vimos que sempre é possível reparametrizar uma curva regular de tal forma que o vetor velocidade da curva seja unitário. Agora, queremos definir o comprimento de arco afim e com isso poder avançar no estudo das propriedades geométricas que são invariantes por transformações afins.

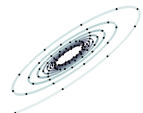
Definição 4.10. Seja α uma curva definida no plano e seja A uma transformação afim do plano. Uma função escalar g em α é *invariante afim* se, para todo ponto $p \in \alpha$, $g(A(p)) = g(p)$. Analogamente um vetor V em α é *invariante afim* se, para todo $p \in \alpha$, $V(A(p)) = V(p)$. Esta notação é mais conhecida como *invariante equiafim*.

O próximo resultado mostra que toda curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ não degenerada pode ser reparametrizada de tal forma que $\alpha' \wedge \alpha'' = 1$.

Proposição 4.11. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva não-degenerada, então existe um difeomorfismo $h : I \rightarrow J$ tal que $\alpha_s \wedge \alpha_{ss} = 1, \forall s \in J$.

Demonstração: De fato, suponhamos que exista um difeomorfismo $h : I \rightarrow J$ tal que $\alpha_s \wedge \alpha_{ss} = 1, \forall s \in J$. Consideremos a reparametrização $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$. Assim, $\alpha(t) = \beta(h(t)) = \beta(s)$. Diferenciando esta última equação temos

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \beta_s \frac{ds}{dt}, \\ \alpha_{tt} &= \beta_{ss} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \alpha_s \frac{d^2s}{dt^2}.\end{aligned}$$



Logo,

$$\begin{aligned} \det(\alpha_t, \alpha_{tt}) &= \det\left(\beta_s \frac{ds}{dt}, \beta_{ss} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \alpha_s \frac{d^2s}{dt^2}\right) \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \det(\alpha_s, \alpha_{ss}). \end{aligned}$$

Por outro lado, estamos supondo que $\det(\alpha_s, \alpha_{ss}) = 1$. O que implica,

$$ds = \det(\alpha_t, \alpha_{tt})^{1/3} dt.$$

Fixando $t_0 \in I$ definimos

$$s = h(t) = \int_{t_0}^t \det(\alpha'(x), \alpha''(x))^{1/3} dx \quad (4.3)$$

Dessa forma, definindo h como a equação (4.3) temos que h é suave e usando o teorema fundamental do cálculo mais o fato que α é não degenerada temos que $h'(t) = \det(\alpha'(t), \alpha''(t))^{1/3} \neq 0, \forall t \in I$, logo h é um difeomorfismo. \square

Observação 4.12. No caso mais geral, isto é, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, é fácil mostrar que

$$h(t) = \int_I \det(\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)})^{2/(n(n+1))} dx.$$

Definição 4.13. O **comprimento de arco afim** de uma curva não degenerada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ medido a partir de $t_0 \in I$, é definida por

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \det(\alpha'(x), \alpha''(x))^{1/3} dx.$$

Além disso, dizemos que α está **parametrizada pelo comprimento de arco afim** quando $\det(\alpha_s, \alpha_{ss}) = 1, \forall s \in J = h(I)$.

Como consequência dos resultados anteriores obtemos

Colorário 4.14. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva não degenerada parametrizada pelo comprimento de arco, então existe um difeomorfismo $h : J \rightarrow I$ tal que $\alpha \circ h$ esta parametrizada por comprimento de arco afim.

Em particular, se $t = l$ for o comprimento de arco, então $\alpha_t = \mathbf{t}$ e $\alpha_{tt} = \mathbf{n}$, o que implica $h(t) = \int_{t_0}^t \kappa^{1/3} dl$.

Observação 4.15. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim, então a curvatura Euclidiana é sempre positiva. Pois, a curvatura Euclidiana é dada por

$$k(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s)\|^3}.$$

Como α esta parametrizada pelo comprimento de arco afim temos $\alpha' \wedge \alpha'' = 1$, logo

$$k(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|^3} > 0.$$

Exercício 4.16. Verifique que o comprimento afim da parábola definida pela equação (4.2) é de fato L_i .

4.3.2 Vetores Tangente e Normal Afins

Vamos definir os vetores tangente e normal afins em curvas regulares. Inicialmente, vamos determiná-los no caso paramétrico e depois usaremos o teorema da função implícita para ver a curva localmente como um gráfico e assim utilizaremos as definições do caso paramétrico para obtermos tais invariantes.

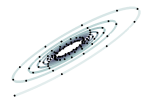
Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $a \wedge b = \det(a, b)$ forma bilinear anti-simétrica dada pelo determinante. Sabemos da geometria Euclidiana que $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \in SO(2, \mathbb{R})$, onde $SO(2, \mathbb{R})$ é o grupo das rotações do plano e \mathbf{t} e \mathbf{n} são respectivamente os vetores unitários tangente e normal da curva α .

Queremos agora construir em cada ponto de α um par de vetores (τ, η) tal que $\tau \wedge \eta = 1$.

Observação 4.17. O significado geométrico da condição

$$(\tau, \eta) \in SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2); \det(A) = 1\}$$

é que o paralelogramo orientado determinado pelos vetores τ e η possui área unitária.



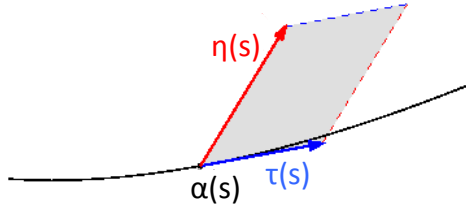


Figura 4.4: Interpretação geométrica do tangente e normal afins.

Definição 4.18. Dada α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco afim, seus vetores tangente e normal afim são definidos, respectivamente por

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha_s, \\ \eta &= \alpha_{ss},\end{aligned}$$

onde s é o parâmetro de arco afim.

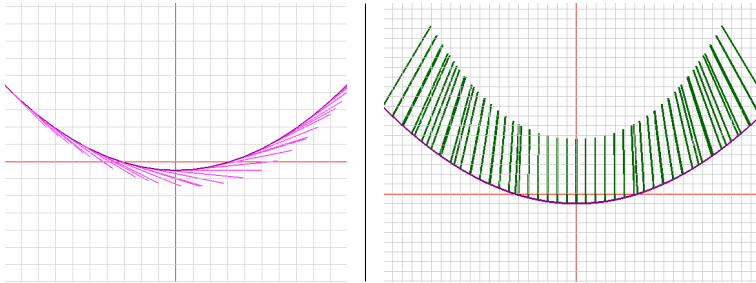


Figura 4.5: Invariantes afins na parábola: tangente e normal, respectivamente.

É interessante termos a expressão dos vetores tangente e normal afins quando a curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ não está parametrizada pelo comprimento de arco afim. Sendo assim, temos que o elemento de comprimento de arco afim é dado por

$$ds = (x'y'' - y'x'')^{1/3} dt = (\alpha' \wedge \alpha'')^{1/3} dt.$$

Daí, segue que os vetores tangente e normal afim são

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha_s = \alpha_l \frac{dl}{ds} = \mathbf{t} \kappa^{-1/3} \\ &= (x'y'' - y'x'')^{-1/3} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = (\alpha' \wedge \alpha'')^{-1/3} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \\ \eta &= \alpha_{ss} = \left(\mathbf{t} \kappa^{-1/3} \right)_s = \frac{d}{dl} (\mathbf{t} \kappa^{-1/3}) \frac{dl}{ds} = -\frac{1}{3} \kappa^{-5/3} \kappa_l \mathbf{t} + \kappa^{1/3} \mathbf{n} \\ &= (\alpha' \wedge \alpha'')^{-1/3} \tau' = 3^{-1} (\alpha' \wedge \alpha'')^{-5/3} \begin{bmatrix} -x' & 3x'' \\ -y' & 3y'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \wedge \alpha''' \\ \alpha' \wedge \alpha'' \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{t} , \mathbf{n} e κ são os vetores tangente, normal e a curvatura Euclidiana da curva.

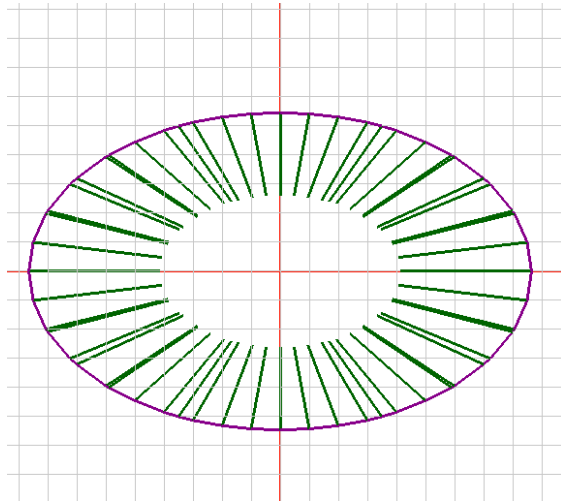
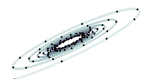


Figura 4.6: Normal afim na elipse.

Exemplo 4.19. Seja $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$ parametrização da elipse. Temos que o comprimento de arco afim é $s = (ab)^{1/3} t$. Para reparametrizar a elipse pelo comprimento de arco afim, usamos a nova parametrização $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{(ab)^{1/3}}\right), b \sin\left(\frac{s}{(ab)^{1/3}}\right) \right)$.



Portanto, os vetores tangente e normal afins são

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha_s = \left(-a^{2/3}b^{-1/3} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{(ab)^{1/3}}\right), a^{-1/3}b^{2/3} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{(ab)^{1/3}}\right) \right), \\ \eta &= \alpha_{ss} = \left(-a^{1/3}b^{-2/3} \cos\left(\frac{s}{(ab)^{1/3}}\right), -a^{-2/3}b^{1/3} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{(ab)^{1/3}}\right) \right).\end{aligned}$$

Em particular, obtemos que α e \mathbf{n} são paralelos, ou seja, o vetor normal afim da elipse aponta para o centro.

Exercício 4.20. Calcule os vetores e normais afins das outras curvas cônicas.

Exercício 4.21. Verifique que vetor tangente afim e o vetor normal afim em \mathbf{x}_i da parábola definida pela equação (4.2) são de fato os coeficientes τ_i e η_i da expressão

$$\alpha_i(s) = \mathbf{x}_i + s\tau_i + \frac{s^2}{2}\eta_i.$$

Agora daremos uma interpretação geométrica do vetor normal afim η , a qual pode ser obtida em [Buc83]. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva parametrizada não degenerada, isto é, sem pontos de inflexão, ou ainda $\alpha(I)$ é localmente estritamente convexa. Seja $p = \alpha(t_0)$, $t_0 \in I$, como $\alpha(I)$ não tem pontos de inflexão, segue que existe um $\epsilon > 0$ tal que $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ os pontos $\alpha(t)$ estão do mesmo lado da reta tangente de $\alpha(I)$ em $\alpha(t_0)$.

Considere uma linha tangente em $\alpha(t_0)$ e sejam L_{t_0} linhas paralelas a $\alpha'(t_0)$ no mesmo lado da reta tangente contendo um pedaço da curva $\mathcal{P} := \{\alpha(t); t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon\}$. Para linhas suficientemente próximas a reta tangente $\alpha'(t_0)$ elas intersectam \mathcal{P} em exatamente dois pontos. Para cada linha pegamos o pontos médio do segmento ligando essa interseção. Traçamos uma linha que começa em p e passa por estes pontos médios. A reta tangente limitando o lugar dos pontos médios quando aproximamos a p é exatamente a reta normal afim, ou seja, esta reta contém o vetor normal afim η em p . Note-mos que esta construção é invariante afim, pois paralelismo e pontos médios são invariantes sobre transformações afins.

4.3.3 Curvatura Afim

Queremos encontrar a curvatura afim. Primeiro vamos supor que a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco afim, isto quer dizer, por definição, que α satisfaz a equação $\alpha_s \wedge \alpha_{ss} = 1$, diferenciando esta equação, obtemos $\alpha_s \wedge \alpha_{sss} = 0$, ou seja, α_s e α_{sss} são colineares. Logo, existe uma função $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de **curvatura afim** (ver Figura 4.7), definida pela equação

$$\alpha_{sss} = -\mu\alpha_s \tag{4.4}$$

Definição 4.22. Dada uma curva $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco afim a curvatura afim $\mu(s)$ no ponto $\alpha(s)$ é definida por $\mu(s) = [\alpha_{ss}, \alpha_{sss}] = [\eta, \eta_s]$.

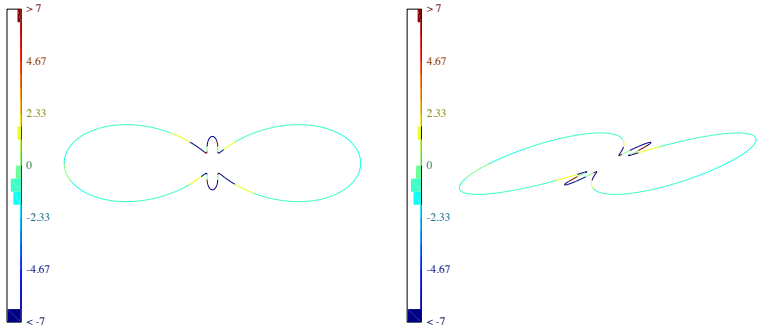
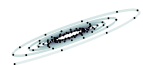


Figura 4.7: Curvatura afim de uma lemniscata, antes e depois de uma transformação afim.

No caso em que a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco temos que a curvatura afim é dada por

$$\mu(t) = -\frac{5}{9} \frac{(\alpha' \wedge \alpha''')^2}{(\alpha' \wedge \alpha'')^{8/3}} + \frac{1}{3} \frac{(\alpha' \wedge \alpha^{(4)}) + 4(\alpha'' \wedge \alpha''')}{(\alpha' \wedge \alpha'')^{5/3}} \tag{4.5}$$

Exemplo 4.23. Vamos calcular a curvatura afim da elipse. Temos que $\alpha_{sss} = \left(b^{-1} \operatorname{sen} \left(\frac{s}{(ab)^{1/3}} \right), -a^{-1} \operatorname{cos} \left(\frac{s}{(ab)^{1/3}} \right) \right)$. Logo, a curvatura afim da elipse é $\mu = (ab)^{-2/3}$. Em particular, quando $a = b = R$, temos que $\mu = R^{-4/3}$.



Proposição 4.24. Em termos da curvatura Euclidiana da curva α e de suas derivadas com respeito ao comprimento de arco usual a curvatura afim é

$$\mu(s) = \kappa^{4/3} - \frac{5}{9}\kappa^{-8/3}\kappa_l^2 + \frac{1}{3}\kappa^{-5/3}\kappa_{ll}.$$

Demonstração: Seja s o parâmetro de arco afim. Vimos que a curvatura afim é $\mu(s) = [\eta, \eta_s]$. Como $\eta = -\frac{1}{3}\kappa^{-5/3}\kappa_l \mathbf{t} + \kappa^{1/3} \mathbf{n}$, temos

$$\eta_s = \frac{5}{9}\kappa^{-8/3}\kappa_l^2\kappa^{-1/3}\mathbf{t} - \frac{1}{3}\kappa^{-2}\kappa_{ll}\mathbf{t} - \frac{1}{3}\kappa^{-2}\kappa_l\mathbf{t}_l + \frac{1}{3}\kappa^{-1}\kappa_{ll}\mathbf{n} - \kappa\mathbf{t},$$

logo,

$$\mu(s) = \kappa^{4/3} - \frac{5}{9}\kappa^{-8/3}\kappa_l^2 + \frac{1}{3}\kappa^{-5/3}\kappa_{ll}.$$

□

Observação 4.25. Os vetores *tangente* e *normal afins* são covariantes e a *curvatura afim* é *invariante* por transformações afins. De fato, seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja A uma transformação equi-linear, isto é, que preserva área, temos que

$$\begin{aligned} (A\alpha)_s &= A\alpha_s = A\tau, \\ (A\alpha)_{ss} &= A\alpha_{ss} = A\eta. \end{aligned}$$

Daí, a nova curvatura é $[A\alpha_{ss}, A\alpha_s] = [\alpha_s, \alpha_{ss}] = \mu(s)$.

O próximo resultado mostra que a curvatura afim é de fato o invariante fundamental na geometria afim.

Proposição 4.26. Seja $\mu = \mu(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então existe uma curva localmente estritamente convexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo parâmetro comprimento de arco é s e cuja curvatura afim é μ . Além disso, se $\bar{\alpha}$ é outra curva tendo as mesmas propriedades, então existe um único movimento afim levando α em $\bar{\alpha}$, ou seja, μ determina α a menos de transformações afins.

4.3.4 Gráfico

Um exemplo simples e bastante interessante para o estudo de propriedades geométricas afins de curvas é o gráfico, ou seja, a curva α é dada por $\alpha(t) = (t, y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Neste caso as equações dos vetores tangente e normal e a curvatura reduzem-se a

$$\begin{aligned}\tau(t) &= y''^{-1/3}(1, y'), \\ \eta(t) &= -3^{-1}y''^{-5/3}(y''', y'y''' - 3y''^2), \\ \mu(t) &= \frac{-5}{9} \frac{y'''^2}{y''^{8/3}} + \frac{1}{3} \frac{y^{(4)}}{y''^{5/3}}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

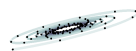
4.3.5 Estimadores a partir do Polígono Parabólico

Podemos considerar o polígono parabólico como uma aproximação da curva de forma similar ao caso Euclidiano com curvas poligonais. De fato, para curvas convexas, o comprimento afim é o ínfimo dos comprimentos de todas as polígonos parabólicos amostrados a partir da curva. Pode-se também estimar a curvatura como a variação da normal entre duas parábolas consecutivas, ponderada pelo comprimento de arco afim de cada parábola

$$\bar{\mu}_i = \frac{\eta_{i-1} \times \eta_i}{\frac{1}{2}(L_{i-1} + L_i)}.$$

Para exemplificar a noção de estimador, podemos colocar aqui a prova da convergência de μ_i quando a distância entre duas amostras sucessivas de uma curva $\alpha(s)$ vai para 0 [LC07]. Podemos parametrizar a curva $\alpha(s)$ em função do comprimento de arco afim s e, a menos de uma transformação afim, olhar os pontos $\mathbf{x}_{i-1} = \alpha(-u)$, $\mathbf{x}_i = \alpha(0) = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_{i+1} = \alpha(t)$ com tangente horizontal em \mathbf{x}_i : $\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha'(0) = (1, 0)$ e $\alpha''(0) = (0, 1)$. Denotando por μ a curvatura afim na origem, e ν a derivada da curvatura afim $\nu = \mu'(0)$, podemos expandir cada função coordenada da curva pela fórmula de Taylor

$$\begin{aligned}x(s) &= s - \frac{\mu}{6} \cdot s^3 - \frac{\nu}{24} \cdot s^4 + O(s^5), \\ y(s) &= \frac{s^2}{2} + \frac{\mu}{24} \cdot s^4 + -\frac{\nu}{60} \cdot s^5 + O(s^6).\end{aligned}\tag{4.7}$$



O ponto de suporte \mathbf{z}_i depende do parâmetro t (definindo $\mathbf{x}_{i+1} = \alpha(t)$), e ele pertence ao eixo horizontal (pois a tangente em \mathbf{x}_i é horizontal): $\mathbf{z}_i(t) = (z(t), 0)$. O comprimento de arco afim é dado por $L(t) = \sqrt[3]{4z(t)y(t)}$. Podemos definir uma transformação afim (mas não equi-afim) que fixa $(\alpha(0), \alpha'(0))$ e leva $(\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1})$ para $((t, \frac{t^2}{2}), (1, t))$

$$T = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2z(t)}{L(t)} & \frac{2(x(t) - 2z(t))}{L(t)^2} \\ 0 & \frac{2y(t)}{L(t)^2} \end{bmatrix}.$$

Um cálculo direto permite estimar as quantidades acima

$$\begin{cases} z(t) &= \frac{1}{2} \cdot t + \frac{\mu}{24} \cdot t^3 + \frac{\nu}{60} \cdot t^4 + O(t^5), \\ L(t) &= t + O(t^5), \\ A(t) &= 1 + \frac{\mu}{12} \cdot t^2 + \frac{\nu}{30} \cdot t^3 + O(t^4), \\ B(t) &= -\frac{\mu}{2} \cdot t - \frac{3\nu}{20} \cdot t^2 + O(t^3), \\ D(t) &= 1 - \frac{\mu}{12} \cdot t^2 - \frac{\nu}{30} \cdot t^3 + O(t^4). \end{cases}$$

O estimador de curvatura $\bar{\mu}_i = \frac{\eta_{i-1} \times \eta_i}{\frac{1}{2}(L_{i-1} + L_i)}$ pode ser estimado também por

$$\bar{\mu}_i(t, u) = \mu_i + \frac{3}{10}(t - u)\nu + O(t^2 + u^2).$$

Isso prova a convergência do estimador, e ainda mostra que se a amostragem for regular ($t = u$), a convergência é mais rápida ainda. Nesse caso, temos ainda que a assinatura (a derivada da curvatura) pode ser estimada a partir de \mathbf{x}_{i-1} , \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_{i+1} e $\mathbf{x}_{i+2} = \alpha(v)$, por

$$\bar{\nu}_i = \frac{\bar{\mu}_{i+1} - \bar{\mu}_i}{L_i + \frac{3}{10}L_{i+1} - \frac{3}{10}L_{i-1}} = \nu_i + O(t + u + v).$$

Da assinatura é possível deduzir invariantes de geometria projetiva, o que permite estender o modelo de polígonos parabólicos para outras aplicações [LC08, LC10].

4.4 Curvas Implícitas

Nesta seção encontraremos os invariantes geométricos afins: τ , η e μ de uma curva implícita $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A principal ideia para encontrarmos tais invariantes afins é usarmos o teorema da função implícita, o qual garante que localmente a curva pode ser vista como um gráfico e usar o teorema de Sard o que diz que o conjunto dos pontos onde o vetor gradiente se anula tem medida nula.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que o vetor gradiente $\nabla f = (f_x, f_y) \neq 0$, logo podemos admitir que $f_y \neq 0$, então existe um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e uma função $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a curva localmente é dada como um gráfico, ou seja, $\{x \in J; (x, g(x))\}$. Suponhamos ainda que a curva seja convexa, isto equivale a $g'' \neq 0$ e podemos ainda admitir que $g'' > 0$.

Usando a seção anterior temos as fórmulas dos invariantes τ , η e μ , mas observemos que tais fórmulas são dadas em função de g , então basta encontrar relações entre as derivadas de f e g , que é consequência direta do teorema da função implícita.

	Parábola	Hipérbole	Elipse
f	$y - \frac{1}{2}x^2$	$xy = c, c > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$
t	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1, x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^4+c^2}} \cdot (x^2, -c)$	$\frac{1}{\sqrt{a^4y^2+x^2b^4}} \cdot (a^2y, -xb^2)$
n	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (-x, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{x^4+c^2}} \cdot (c, x^2)$	$\frac{1}{\sqrt{a^4y^2+x^2b^4}} \cdot (xb^2, a^2y)$
κ	$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{-2c^2x^3}{(c^2+x^4)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+x^2b^4)^{\frac{3}{2}}}$
τ	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1, x)$	$2^{-\frac{1}{3}} \cdot (c^{-\frac{1}{3}}x, -c^{\frac{2}{3}}x^{-1})$	$(-a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{4}{3}}y, a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}x)$
η	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (-x, 1)$	$2^{-\frac{2}{3}} \cdot (c^{-\frac{2}{3}}x, c^{\frac{1}{3}}x^{-1})$	$(-ab^{-\frac{2}{3}}x, -ab^{-\frac{2}{3}}y)$
μ	0	$-(2c)^{-\frac{2}{3}}$	$(ab)^{-\frac{2}{3}}$

Tabela 4.2: Exemplos fundamentais de estruturas afins.



4.4.1 Exemplos Fundamentais

As formas mais básicas da geometria Euclidiana são as retas, com normal constante e portanto curvatura nula, e o círculo com curvatura constante. Na geometria afim, as formas equivalentes são as parábolas com normal afim constante, e a elipse e a hipérbole com curvaturas afins constantes positiva e negativa, respectivamente. Suas estruturas estão colocadas na tabela 4.2.

4.4.2 Simplificação: Transformação A

Como todas as fórmulas são encontradas a partir do teorema da função implícita, muitos termos podem ser simplificados se o vetor gradiente de f for o vetor constante, por exemplo, $(0, 1)$ depois de uma transformação afim. Em termos do grau de liberdade, estamos procurando por uma transformação A , a qual é uma matriz 2×2 . Temos 4 coeficientes a determinar, sob a restrição de transformação afim impomos mais uma restrição $\det A = 1$, o que reduz o grau de liberdade em 1. Fazemos uma rotação R para deixar o vetor tangente vertical, a seguir fazemos um escalonamento não uniforme S ao longo do eixo vertical que deixa o gradiente unitário.

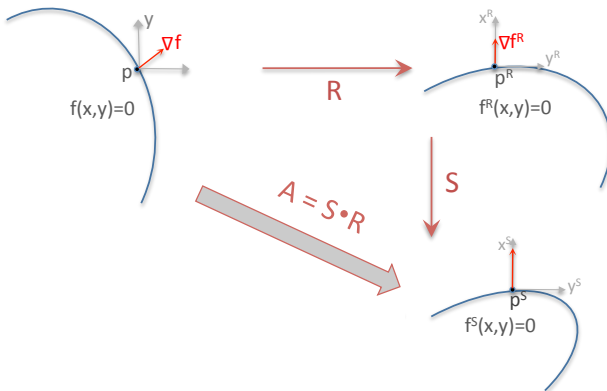


Figura 4.8: A construção da transformação A .

A transformação completa é definida no seguinte resultado

Teorema 4.27. Em cada ponto regular p da curva implícita dada por $\{p \in \mathbb{R}^2, f(p) = 0\}$, existe uma transformação afim A tal que, em cada ponto $\tilde{p} = A(p)$ da curva implícita

$$\{\tilde{p} \in \mathbb{R}^2, f(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p})) = 0\}$$

transformada o gradiente é o vetor unitário vertical: $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = (0, 1)$.

Demonstração: Primeiro observemos que

$$\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = \nabla f(p) \cdot A^{-1}$$

onde o gradiente é escrito em linha. Podemos deduzir as transformações com uma simples descrição geométrica: decompos a transformação como $A = SR$ (veja Figura 4.8), onde R é uma rotação em \mathbb{R}^2 e S é um escalonamento não uniforme. A rotação R é a rotação que deixa $\nabla f(p)$ vertical, isto é, o novo vetor gradiente é dado por $(0, \|\nabla f(p)\|)$. Mais precisamente,

$$R = \frac{1}{\|\nabla f\|} \begin{pmatrix} f_y & -f_x \\ f_x & f_y \end{pmatrix}.$$

Denotaremos por f^R a função implícita transformada, ou seja, denotamos $f^R(p) = f(R^{-1}(p))$. Usando a observação acima temos que

$$(\nabla f^R)^T = R^{-T}(\nabla f)^T = R(\nabla f)^T = (0, \|\nabla f(p)\|)^T.$$

Como estamos trabalhando com transformações afins, podemos definir o escalonamento S como a matriz diagonal $S = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$, onde $\lambda = \|\nabla f^R\| = \|\nabla f\|$. Denotando a função transformada por $f^S(p) = f^R(S^{-1}(p)) = f((SR)^{-1}(p))$, temos

$$(\nabla f^S)^T = S^{-T}(\nabla f^R)^T = (0, 1)^T.$$

□

4.4.3 Fórmulas Simplificadas

Nesta subseção, vamos considerar uma curva implícita definida por $\{p \in \mathbb{R}^2, f(p) = 0\}$ em uma vizinhança de p tal que $\nabla f(p) = (0, 1)$. Do teorema anterior, conhecemos que podemos obter tal situação para qualquer ponto regular. Em tal situação, as fórmulas simplificadas para as estruturas implícitas são dadas por

$$\begin{aligned}\tau &= \left(-f_{xx}^{-1/3}, 0\right), \\ \eta &= \left(\frac{f_{xxx} - 3f_{xy}f_{xx}}{3(-f_{xx})^{5/3}}, -(f_{xx})^{1/3}\right), \\ \mu &= \frac{-5f_{xxx}^2 + 18f_{xxx}f_{xy}f_{xx} + 9f_{xx}^3f_{yy} - 9f_{xy}^2f_{xx}^2}{9(-f_{xx})^{8/3}} \\ &\quad - \frac{18f_{xx}^2f_{xxy} + 3f_{xx}f_{xxxx}}{9(-f_{xx})^{8/3}}.\end{aligned}$$

4.5 Discussão

Vimos ao longo deste capítulo estruturas geométricas, em curvas, que são invariantes por transformações afins. Por um lado, ganhamos a invariância de propriedades geométricas sob um grupo maior que o grupo das transformações rígidas que é o grupo maior que o grupo das transformações afins. Por outro lado, para determinar tais invariantes, precisamos calcular invariantes até a quarta ordem o que torna o custo computacional bem mais caro que no caso Euclidiano que precisava apenas da derivada segunda. Além disso, vimos que a curvatura afim da curva é o invariante fundamental da geometria afim.

Para visualizarmos as propriedades geométricas afins em curvas implícitas (ver Figura 4.5, Figura 4.6) utilizamos o algoritmo *Marching Squares* e implementamos dentro dele tais propriedades geométricas. Uma das dificuldades naturais dessa implementação é o cálculo exato das derivadas de f até a quarta ordem.

Ao verificar a invariância por meio da comparação dos estimadores afins antes e depois de uma transformação afim, os vértices gerados

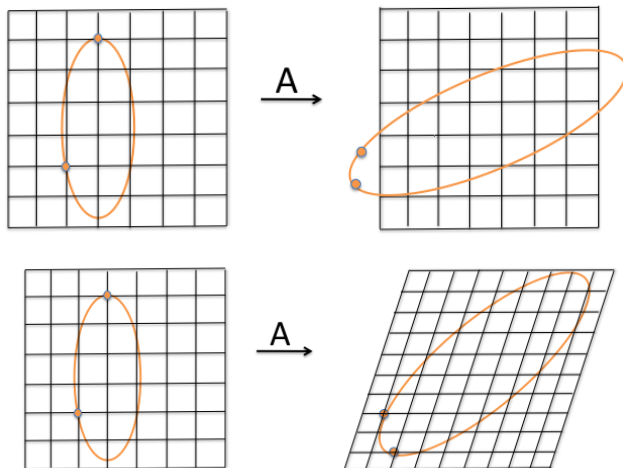


Figura 4.9: Domínio sem correção, depois que aplicamos uma transformação afim (em cima) e domínio com correção (embaixo).

pelo algoritmo *Marching Squares* não estão em posições correspondentes e não são uniformemente distribuídos. Tentamos reduzir essa disparidade nos experimentos com a função implícita analítica adaptando o domínio transformado em uma caixa delimitadora da imagem do domínio original (ver Figura 4.9), uma medida com invariância global ainda é difícil de implementar.

Por um lado, o modelo do polígono parabólico é mais adequado, para conseguir uma amostragem relativamente regular no comprimento afim. Por outro lado, os métodos implícitos discretos são mais sistemáticos a partir dos estimadores diferenciais. De fato, veremos no próximo capítulo que foi possível estender o *Marching Squares* para superfície, enquanto ainda não foi proposto um equivalente de polígonos parabólicos para superfícies.

Capítulo 5

Geometria Afim: Superfícies

Neste capítulo, começamos o nosso estudo de propriedades geométricas em superfícies regulares imersas em \mathbb{R}^3 , invariantes por transformações afins. Mostraremos a definição matemática dessas propriedades em superfícies paramétricas e usaremos o teorema da função implícita juntamente com o desenvolvimento teórico da parte paramétrica para obter os invariantes geométricos de uma superfície implícita. Além disso, descrevemos como é possível obter tais invariantes afins no computador.

5.1 Estrutura Afim

A diferença básica entre a Geometria Riemanniana e a Geometria Diferencial Afim é que a ideia da primeira é introduzir uma métrica na variedade e estudar propriedades dessa métrica, já na outra consideramos formas de volume que estão definidas de forma natural. A compatibilidade dessas formas de volume induz uma conexão que dá origem a um único campo de vetores transversal. Este campo de vetores juntamente com o plano tangente descreve a geometria da superfície. Em particular, a geometria Euclidiana apresenta alguns problemas para serem utilizados em computação gráfica, como por



exemplo o grupo das transformações dessa geometria não tem uma álgebra natural associada [GV03], pois a translação não é linear e no espaço Euclidiano não há uma distinção entre pontos e vetores.

No que segue consideraremos superfícies suaves imersas em \mathbb{R}^3 localmente convexa, o que geometricamente significa que a curvatura Gaussiana K é não-nula.

Queremos encontrar propriedades geométricas \mathcal{P} que são invariantes por transformações do grupo

$$SA(3, \mathbb{R}) = \{A \in M(3); \det(A) = 1\}.$$

Uma propriedade \mathcal{P} é dita invariante por A se $\mathcal{P}(A(p)) = \mathcal{P}(p)$, para todo $p \in S^2$, onde S^2 é uma superfície. Para isso, o primeiro passo é entender o significado de transformações afins.

Transformações Afins

Vamos entender o significado de transformações afins para continuarmos o nosso estudo de invariantes afins.

Definição 5.1. [GV03] Uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é afim se T preserva combinação afim de pontos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^n a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(P_i), \quad a_i \in \mathbb{R}, P_i \in \mathbb{R}^3. \quad (5.1)$$

Um caso interessante da definição acima é quando $n = 3$, pois temos o que chamamos de coordenadas baricêntricas. Outro ponto importante é que transformações afins preservam retas, ou seja, sejam a e b pontos em \mathbb{R}^3 e seja $r(t) = (1-t)a + tb$ a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos a e b , então $T(r(t)) = (1-t)T(a) + tT(b)$. Além disso, transformações afins preservam retas paralelas. Com efeito, duas retas r e s são retas paralelas se, e somente se, existem pontos distintos a e b sobre r e c e d sobre s tais que $a - c = b - d$, daí $T(a) - T(c) = T(b) - T(d)$ e a reta definida por $T(a)$ e $T(b)$ é paralela àquela definida por $T(c)$ e $T(d)$.

Agora, se $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear, então existem $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz).$$

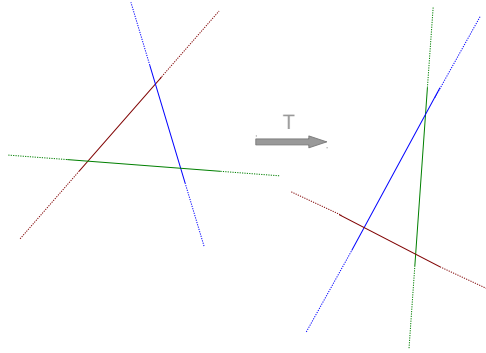


Figura 5.1: Transformação afim preserva retas.

Verifica-se facilmente que $T(1, 0, 0) = (a, d, g)$, $T(0, 1, 0) = (b, e, f)$ e $T(0, 0, 1) = (c, f, i)$. Logo existe uma bijeção entre as transformações lineares de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 e as matrizes 3×3 . Dito isso, uma extensão natural das transformações lineares são as *afins*, como mostra o próximo resultado

Proposição 5.2. A transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é afim se e só se T é da forma $T(u) = L(u) + v_0$, onde L é linear e $v_0 \in \mathbb{R}^3$.

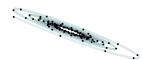
Demonstração: Suponhamos que $T(u) = L(u) + v_0$. Vamos mostrar que T é afim. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} T(tA + (1 - t)B) &= L(tA + (1 - t)B) + v_0 \\ &= tL(A) + tv_0 + (1 - t)L(B) - tv_0 + v_0 \\ &= tT(A) + (1 - t)T(B). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se T é afim, definamos $L(u) = T(u) - v_0$, onde $v_0 = T(0, 0, 0) = T(\mathbf{0})$, logo basta mostrar que L é linear. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} L(\alpha u + v) &= T(\alpha u + v) - T(\mathbf{0}) = T(\alpha u + v - \alpha \mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) \\ &= \alpha T(u) + T(v) - \alpha T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) \\ &= \alpha L(u) + L(v). \end{aligned}$$

□



Ou seja, T é afim se, somente se T é da forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz + t_0 \\ dx + ey + fz + t_1 \\ gx + hy + iz + t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},$$

onde $v_0 = (t_0, t_1, t_2)$.

Obtemos que as transformações rígidas, que é o grupo das transformações da geometria Euclidiana, são transformações afins. Casos particulares de transformações afins: identidade, translação, escalonamento, rotação e cisalhamento. Por questão de simplicidade ao escrever transformação afim significará transformação equi-afim linear, transformações lineares que preservam volumes.

5.2 Superfícies Paramétricas

Nesta seção vamos encontrar as propriedades geométricas invariantes por transformações afins em superfícies paramétricas regulares.

5.2.1 Curvas Assintóticas

Queremos encontrar uma métrica que seja invariante sobre transformações afins, a motivação dessa métrica vem do estudo de curvas assintóticas em superfícies regulares.

Definição 5.3. [Buc83] Uma curva $\sigma(t)$ em uma superfície S é dita *assintótica* se em cada ponto da curva seu plano osculador coincide com o plano tangente da superfície no mesmo ponto.

Seja $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S , onde U é um aberto e seja $\gamma : I \rightarrow U$ uma curva, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. A curva $\sigma \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva assintótica se, e somente se,

$$[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, (\sigma \circ \gamma)_{tt}] = 0, \forall t \in I.$$

A equação anterior é invariante por transformação afim.

Utilizando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \sigma_{\mathbf{u}} \frac{du}{dt} + \sigma_{\mathbf{v}} \frac{dv}{dt}, \\ \sigma_{tt} &= \sigma_{uu} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\sigma_{uv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \sigma_{vv} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \sigma_{\mathbf{u}} \frac{d^2u}{dt^2} + \sigma_{\mathbf{v}} \frac{d^2v}{dt^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, (\sigma \circ \gamma)_{tt}] &= [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \dot{u}^2 \sigma_{uu} + 2\dot{u}\dot{v} \sigma_{uv} + \dot{v}^2 \sigma_{vv}] \\ &= \dot{u}^2 [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{uu}] + 2\dot{u}\dot{v} [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{uv}] \\ &\quad + \dot{v}^2 [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{vv}].\end{aligned}$$

Definindo $L = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{uu}]$, $M = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{uv}]$ e $N = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{vv}]$, obtemos

$$[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, (\sigma \circ \gamma)_{tt}] = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2.$$

Portanto a curva $\sigma \circ \gamma$ é assintótica se, e somente se

$$L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = 0.$$

Estes determinantes e a forma diferencial quadrática

$$[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, (\sigma \circ \gamma)_{tt}] dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (5.2)$$

são todos invariantes afins sobre um sistema de parâmetros. Vamos estudar a forma diferencial (5.2) quando introduzirmos novos parâmetros \bar{u} , \bar{v} ao invés de u e v . Notando que

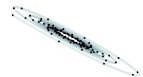
$$\sigma_{\bar{u}} = \sigma_{\mathbf{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \sigma_{\mathbf{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \quad e \quad \sigma_{\bar{v}} = \sigma_{\mathbf{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \sigma_{\mathbf{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},$$

obtemos

$$[\sigma_{\bar{u}}, \sigma_{\bar{v}}, \sigma_{tt}] = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, (\sigma \circ \gamma)_{tt}] \mathfrak{J}, \quad (5.3)$$

onde \mathfrak{J} é o determinante Jacobiano

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}.$$



A forma quadrática em (5.2) é multiplicada por um fator \mathfrak{J} quando introduzimos os novos parâmetros \bar{u} , \bar{v} . Comparando os termos correspondentes da identidade (5.3) com relação a $d\bar{u}$, $d\bar{v}$, temos

$$(\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2) = (LN - M^2)\mathfrak{J}^4.$$

Assim,

$$\frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{1/4}} = \frac{[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{tt}]}{|LN - M^2|^{1/4}} dt^2,$$

isto mostra que, exceto a diferença de sinal, (5.2) é uma forma diferencial invariante afim. A métrica procurada é a métrica de Berwald-Blaschke dada por

$$ds^2 = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{|LN - M^2|^{1/4}},$$

onde $L = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{uu}]$, $M = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{uv}]$ e $N = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{vv}]$, a qual será considerada não-degenerada, isto é, $|LN - M^2| \neq 0$.

5.2.2 Primeira Forma Fundamental Afim

Definição 5.4. A primeira forma fundamental afim é a aplicação definida por

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=u,v} g_{ij} di dj,$$

onde $g_{11} = \frac{L}{|LN - M^2|^{1/4}}$, $g_{12} = g_{21} = \frac{M}{|LN - M^2|^{1/4}}$ e $g_{22} = \frac{N}{|LN - M^2|^{1/4}}$.

Observação 5.5. Podemos relacionar a primeira forma fundamental afim com os coeficientes l_{ij} da segunda forma fundamental Euclidiana da seguinte maneira

$$l_{ij} = \langle \mathbf{N}, \sigma_{ij} \rangle = \left\langle \frac{\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}}{\|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\|}, \sigma_{ij} \right\rangle = \frac{[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \sigma_{ij}]}{\|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\|},$$

sendo \mathbf{N} o normal Euclidiano dado por $\mathbf{N} = \frac{\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}}{\|\sigma_{\mathbf{u}} \times \sigma_{\mathbf{v}}\|}$.

Dessa forma, temos que o sinal da curvatura Gaussiana Euclidiana $K = \frac{\det(l_{ij})}{EG - F^2}$ está relacionada com o de $d = LN - M^2$. Logo,

1. $K < 0 \iff d < 0$,
2. $K = 0 \iff d = 0$,
3. $K > 0 \iff d > 0$.

O ponto onde $d < 0$, $d = 0$ ou $d > 0$ é chamado, respectivamente, ponto hiperbólico, parabólico ou elíptico. A partir de aqui vamos desconsiderar pontos parabólicos.

5.2.3 Vetores Co-normal e Normal Afins

Os vetores co-normais e normais afins são propriedades geométricas fundamentais para definirmos as curvaturas Gaussiana e média afins. Inicialmente, temos que calcular o normal Euclidiano e a curvatura Gaussiana Euclidiana. Em [Cal82] encontramos uma definição para os vetores normais e co-normais afins, a seguir damos outra definição que é equivalente a anterior.

Consideremos uma parametrização $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suave. O normal Euclidiano $\mathbf{N} : \sigma(U) \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é dado por $\mathbf{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$.

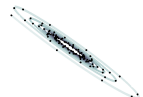
Relações de ortogonalidade não são preservadas sobre transformações afins. Portanto o normal Euclidiano \mathbf{N} é um vetor contravariante (se $\langle \mathbf{N}, d\sigma \rangle = 0$, então $\langle A^{-T}\mathbf{N}, Ad\sigma \rangle = 0$). Portanto, podemos definir um vetor contravariante com a mesma direção de \mathbf{N} chamado de *co-normal afim* ν que é obtido pelo rescalonamento do vetor normal Euclidiano

$$\nu = |K|^{-1/4}\mathbf{N}, \tag{5.4}$$

onde K é a curvatura Gaussiana Euclidiana. O co-normal afim satisfaz $\langle \nu, d\sigma \rangle = 0$ e a métrica afim satisfaz $d^{1/4} = \pm[\nu, \nu_u, \nu_v]$ ¹. Seja U uma vizinhança de qualquer ponto $p \in S$ e para qualquer $q \neq p \in U$ temos que

$$\langle \nu(p), \sigma(q) - \sigma(p) \rangle > 0.$$

¹O sinal \pm depende se o ponto é elíptico ou hiperbólico. Por questão de clareza no texto vamos considerar que estamos trabalhando em pontos elípticos



Esta relação faz sentido, pois $\sigma(U)$ é uma superfície convexa tal que $\sigma(U(p))$ pertence a um dos lados do plano tangente $d\sigma(p)$ em p .

Como $\mathbf{d}^{1/4} = [\nu, \nu_u, \nu_v] \neq 0$, então as derivadas $\nu_{\{u,v\}}$ definem um plano próprio. O vetor normal afim pode ser obtido através do vetor ortogonal ao plano gerado por $\{\nu_u, \nu_v\}$, este seria análogo ao vetor normal Euclidiano \mathbf{N} . Mais precisamente, o vetor *normal afim* ξ é definido localmente pela relação

$$\langle \nu, \xi \rangle = 1, \quad \langle \xi, \nu_{\{u,v\}} \rangle = 0.$$

O normal afim satisfaz $\langle \nu, \xi_{\{u,v\}} \rangle = 0$ e $\mathbf{d}^{1/4} = [\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \xi]$. Esta última relação mostra que uma base local em cada ponto p da superfície pode ser obtida por $\{\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \xi\}$. Isto permite definir estruturas a partir da teoria de Cartan dos “moving frames”. Desde que o normal afim ξ satisfaz $\langle \nu, \xi \rangle = 1$, $\langle \xi, \nu_u \rangle = \langle \xi, \nu_v \rangle = 0$, temos que existe uma função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\xi = \lambda(\nu_u \times \nu_v), \quad \text{com } \lambda = [\nu, \nu_u, \nu_v]^{-1} = \mathbf{d}^{-1/4}.$$

Além disso, utilizando o operador de Laplace-Beltrami $\Delta_{\mathbf{g}}$, onde \mathbf{g} é a métrica de Berwald-Blaschke, é possível definir (ver [Buc83]) o normal afim por $\xi = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{g}} \sigma$, sendo $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S , temos

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{|LN - M^2|^{1/4}}{\sqrt{LN - M^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{N\sigma_{\mathbf{u}} - M\sigma_{\mathbf{v}}}{\sqrt{LN - M^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{L\sigma_{\mathbf{v}} - M\sigma_{\mathbf{u}}}{\sqrt{LN - M^2}} \right\}.$$

Afirmamos que ξ não pertence ao $T_p S$. Com efeito,

$$[\sigma_{\mathbf{u}}, \sigma_{\mathbf{v}}, \xi] = |LN - M^2|^{1/4} = |EG - F^2|^{1/2},$$

onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental Euclidiana. Como estamos desconsiderando pontos parabólicos temos que o determinante acima é diferente de 0.

Na geometria Euclidiana o plano tem vetor normal \mathbf{N} constante, em particular as curvaturas são nulas e a esfera tem curvatura constante, por comparação com a geometria afim os parabolóides têm normal afim ξ constante e curvaturas afins nulas, já o elipsóide tem curvatura constante.

Existe uma interpretação geométrica natural do normal afim em pontos elípticos [Buc83]. Consideremos uma superfície S e seja um ponto $p \in S$ elíptico. Seja \mathcal{P}_t uma família de planos paralelos ao plano tangente $\mathcal{P}_0 = T_p S$. A interseção de \mathcal{P}_t com a superfície, para t suficientemente pequeno, limita um domínio convexo em \mathcal{P}_t . Cada curva planar convexa tem um centro de massa, o lugar do centro de massa, ou centro de gravidade, desses domínios define uma curva cuja direção tangente é a direção do normal afim de S em p .

5.2.4 Curvaturas Afins

No caso de geometria Euclidiana as curvaturas descrevem a variação do normal. Vimos que $\langle \nu, \xi_{\{u,v\}} \rangle = 0$, isto é, as derivadas $\xi_{\{u,v\}}$ são ortogonais a ν , o qual é paralelo a \mathbf{N} , em particular ξ_u e $\xi_v \in T_p S$. Portanto, podemos definir o operador forma $S : T_p S \rightarrow T_p S$ dado por $S_p(v) = -D_v \xi$.

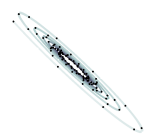
Definição 5.6. Os autovetores e autovalores do operador forma são chamados, respectivamente, direções e curvaturas principais afins.

Como $\xi_{\{u,v\}}$ são tangentes à superfície temos que existem funções $(b_{ij})_{1 \leq i \leq 2} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}\xi_u &= b_{11}\sigma_{\mathbf{u}} + b_{12}\sigma_{\mathbf{v}}, \\ \xi_v &= b_{21}\sigma_{\mathbf{u}} + b_{22}\sigma_{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

Os coeficientes b_{ij} formam uma matriz $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq 2}$, cujo determinante e o negativo da metade do traço são respectivamente as curvaturas Gaussiana e média afins: $\mathcal{K} = \det B$, $\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \text{tr} B$. Podemos escrevê-los explicitamente como

$$\begin{aligned}b_{11} &= d^{-1/4} \cdot [\xi_u, \sigma_{\mathbf{v}}, \xi], \\ b_{12} &= d^{-1/4} \cdot [\sigma_{\mathbf{u}}, \xi_u, \xi], \\ b_{21} &= d^{-1/4} \cdot [\xi_v, \sigma_{\mathbf{v}}, \xi], \\ b_{22} &= d^{-1/4} \cdot [\sigma_{\mathbf{u}}, \xi_v, \xi].\end{aligned}\tag{5.5}$$



5.2.5 Gráfico

Suponhamos que a superfície S seja um gráfico, ou seja, ele é parametrizado por $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y))$, onde $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, U é um aberto e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função.

Vamos encontrar os invariantes afins dados nas subseções anteriores. Os coeficientes da métrica de Berwald-Blaschke são dados por $L = g_{xx}$, $M = g_{xy}$ e $N = g_{yy}$ e $d = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$, onde as derivadas de g são calculadas em (x, y) . O vetor co-normal é dado por

$$\nu = |K|^{-1/4} \mathbf{N} = |g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2|^{-1/4} (-g_x, -g_y, 1), \quad (5.6)$$

onde K é a curvatura Gaussiana Euclidiana

$$K = (1 + g_y^2 + g_x^2)^{-2} (g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2).$$

As coordenadas do normal afim ξ são

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{4} d^{-7/4} \left(g_{xx}g_{xy}g_{yyy} - g_{xx}g_{yy}g_{xxy} - g_{yy}^2g_{xxx} - 2g_{xy}^2g_{xxy} \right. \\ &\quad \left. + 3g_{yy}g_{xy}g_{xxy} \right), \\ \xi_2 &= \frac{1}{4} d^{-7/4} \left(g_{yy}g_{xy}g_{xxx} - g_{xx}g_{yy}g_{xxy} - g_{xx}^2g_{yyy} - 2g_{xy}^2g_{xxy} \right. \\ &\quad \left. + 3g_{xx}g_{xy}g_{xxy} \right), \\ \xi_3 &= \frac{1}{4} d^{-7/4} \left(4g_{xy}^4 + 4g_{xx}^2g_{yy}^2 - 8g_{xx}g_{yy}g_{xy}^2 + 3g_xg_{yy}g_{xy}g_{xxy} \right. \\ &\quad \left. + 3g_yg_{xx}g_{xy}g_{xxy} - g_xg_{yy}^2g_{xxx} - g_yg_{xx}^2g_{yyy} - 2g_xg_{xy}^2g_{xxy} \right. \\ &\quad \left. - 2g_yg_{x,y}^2g_{xxy} - g_xg_{xx}g_{yy}g_{xxy} - g_yg_{xx}g_{yy}g_{xxy} + g_xg_{xx}g_{xy}g_{yyy} \right. \\ &\quad \left. + g_yg_{yy}g_{xy}g_{xxx} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Agora usando as equações (5.5) temos as curvaturas Gaussiana e média afins.

5.3 Interpretação Geométrica da Curvatura Gaussiana Afim

Nesta seção apresentaremos uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana afim. Esse resultado é uma extensão da interpretação geométrica da curvatura Gaussiana Euclidiana (ver [DC76]).

Teorema 5.7. Seja p um ponto de uma superfície S e seja V uma vizinhança conexa de p onde $\mathcal{K}(p) > 0$. Então

$$\mathcal{K}(p) = \lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

onde A é a área de uma região $B \subset V$, contendo p , A' é a área da imagem de B pela imersão $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, que é correspondente ao vetor normal afim ξ , R é a região do plano uv correspondendo a B , $|R| = \text{área}(R)$ e o limite é tomado através de uma sequência de regiões B_n que convergem para p , no sentido em que para toda esfera S centrada em p , existe N tal que S contém todas B_n para $n > N$.

Demonstração: A área de B é dada por

$$A = \iint_R \|x_u \times x_v\| dudv,$$

onde $\sigma(u, v)$ é uma parametrização com $\sigma(0) = p$, cuja vizinhança coordenada contém V e R é a região do plano uv parametrizando B . A área A' de $\xi(B)$ é

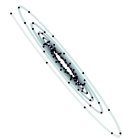
$$A' = \iint_R \|\xi_u \times \xi_v\| dudv.$$

Sabemos que podemos escrever

$$\begin{aligned} \xi_u &= ax_u + bx_v, \\ \xi_v &= cx_u + dx_v, \end{aligned}$$

sendo a curvatura Gaussiana afim em p igual a $ad - bc$, obtemos

$$A' = \iint_R \mathcal{K} \|x_u \times x_v\| dudv. \tag{5.8}$$



Seja $|R|$ a área da região R . Passando ao limite quando $|R| \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{A'}{A} &= \lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{|R|}}{\frac{A}{|R|}} \\ &= \frac{\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{1}{|R|} \iint_R \mathcal{K} \|x_u \times x_v\| dudv}{\lim_{|R| \rightarrow 0} \frac{1}{|R|} \iint_R \|x_u \times x_v\| dudv} \\ &= \frac{\mathcal{K} \|x_u \times x_v\|}{\|x_u \times x_v\|} \\ &= \mathcal{K}, \end{aligned}$$

na penúltima igualdade usamos o teorema do valor médio para integrais duplas. \square

Vale comentar que usamos a conversão de que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa V e a área de sua imagem por ξ , ver equação (5.8), têm o mesmo sinal se $\mathcal{K} > 0$ em V , e sinais opostos se $\mathcal{K} < 0$ em V . Sendo assim, o resultado acima também é válido quando $\mathcal{K}(p) < 0$.

5.3.1 Fórmula de Minkowski Afim

Nesta subsecção estendemos a conhecida fórmula de Minkowski para dados geométricos afins.

Teorema 5.8. [Fórmula de Minkowski Afim] Seja Ω um domínio no plano e seja S uma superfície parametrizada por $\sigma(u, v)$ compacta e convexa tal que $S = \sigma(\Omega)$. Consideremos uma variação dessa superfície ao longo do vetor normal afim, isto é, $\sigma_t(u, v) = \sigma(u, v) + t\xi(u, v)$, onde $0 \leq t \leq T$. Então,

$$Vol(\mathcal{U}) = Vol(U) + T\bar{A}(\Omega) - T^2 \iint_{\Omega} \mathcal{H} d\bar{A} + \frac{T^3}{3} \iint_{\Omega} \mathcal{K} d\bar{A},$$

onde U é a região limitada por $\sigma(u, v)$, \bar{A} é área afim da região Ω , $d\bar{A} = d^{1/4}dA$ é o elemento de área afim e \mathcal{U} é a região limitada por $\sigma_t(u, v)$.

Demonstração: Por definição temos que

$$Vol(\mathcal{U}) = Vol(U) + \int_{\sigma_t(\mathcal{D})} 1dV,$$

onde $\mathcal{D} = \{(u, v, t)/(u, v) \in \Omega, t \in [0, T(p)]\}$. Usando a fórmula de mudança de variáveis temos que

$$\int_{\sigma_t(\mathcal{D})} 1dV = \iiint_{\mathcal{D}} 1|det(Jac(\sigma_t))|dtdA,$$

onde $Jac(\sigma_t)$ é a matriz Jacobiana de σ_t .

Usando a notação $[\cdot, \cdot]$ para o determinante, obtemos

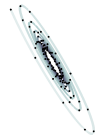
$$\begin{aligned} det(Jac(\sigma_t)) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_t}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_t}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} \end{vmatrix} \\ &= [\sigma_{\mathbf{u}} + t\xi_u, \sigma_{\mathbf{v}} + t\xi_v, \xi] \\ &= [x_u, x_v, \xi] + t([\xi_u, x_v, \xi] + [x_u, \xi_v, \xi]) + t^2 [\xi_u, \xi_v, \xi] \\ &= (1 + t(a + d) + t^2\mathcal{K})(d^{1/4}), \\ &= (1 - 2\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})(d^{1/4}). \end{aligned}$$

Usamos a equação (5.8) na penúltima igualdade.

Logo,

$$\begin{aligned} Vol(\mathcal{U}) &= Vol(U) + \iint_{\Omega} \int_{t=0}^T (1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})d^{1/4}dAdt \\ &= Vol(U) + \iint_{\Omega} \int_{t=0}^T (1 - 2t\mathcal{H} + t^2\mathcal{K})d\bar{A}dt \\ &= Vol(U) + T\bar{A}(\Omega) - T^2 \iint_{\Omega} \mathcal{H}d\bar{A} + \frac{T^3}{3} \iint_{\Omega} \mathcal{K}d\bar{A}, \end{aligned}$$

onde $\bar{A}(\Omega)$ é a área afim da região Ω e $d\bar{A}$ é o elemento de área afim. \square



5.4 Cúbica Osculadora

Um fato interessante é que não existe um parabolóide osculador à superfície que seja invariante por transformações afins (ver [Spi99]). É possível mostrar a existência de *cúbicas osculadoras* à superfície e além disso existe uma transformação afim que leve tais cúbicas em outras que são mais simples de entender. A classificação dessas cúbicas depende do sinal da métrica. A demonstração da existência das cúbicas osculadoras é equivalente a mostrar que o normal afim é vertical $\xi = (0, 0, 1)$.

É possível mostrar que se $p \in S$ é um ponto hiperbólico ou elíptico, então para cada $X_3 \in T_p^\perp S$, complemento ortogonal do plano tangente, dadas a função quadrática $\phi : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ e a função cúbica $\psi : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ olhando para a segunda e terceira ordem os termos da expansão da série de Taylor para a função que descreve S em termos do sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 , para qualquer base $\{X_1, X_2\}$ de $T_p S$. Então existe uma única direção para X_3 a qual faz ϕ e ψ apolar, ou seja, isso garanti que o normal afim $\xi = (0, 0, 1)$ em p .

Definição 5.9. Dizemos que duas formas φ e ψ dadas anteriormente são apolar se elas satisfazem a $\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}\right)^2(\varphi, \psi) = 0$. A expressão anterior é denominada condição de apolaridade.

Proposição 5.10 (Classificação das cúbicas osculadoras). Seja \mathcal{G} uma cúbica osculadora em um ponto p de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Se p é um ponto elíptico então existe uma transformação afim $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A(\mathcal{G}) \subset \mathbb{R}^3$ é o gráfico de

$$(u, v) \mapsto \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{C}{6}(u^3 - 3uv^2), \text{ para algum } C.$$

Se p é um ponto hiperbólico então podemos escolher A tal que $A(\mathcal{G})$ é o gráfico de umas das três funções

$$\begin{aligned} (u, v) &\mapsto \frac{1}{2}(u^2 - v^2) + \frac{C}{6}(u^3 + 3uv^2), \\ (u, v) &\mapsto \frac{1}{2}(u^2 - v^2) + \frac{C}{6}(v^3 + 3vu^2), \\ (u, v) &\mapsto \frac{1}{2}(u^2 - v^2) + \frac{1}{6}(u + v)^3. \end{aligned}$$

Demonstração: A prova completa desse resultado pode ser encontrada em [Spi99] não a demonstraremos pois não é o objetivo desse trabalho. A ideia da prova é mostrar que é possível obter o normal afim $\xi = (0, 0, 1)$, o que equivale a mostrar os coeficientes da expansão de Taylor de segunda e terceira ordem satisfazem as equações de apolaridade. \square

5.5 Superfícies Implícitas

Consideremos a partir daqui superfície descrita implicitamente, isto é, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$, onde f é de classe C^4 e 0 é valor regular de f . Dado um ponto $p \in S$ que é regular, ou seja, $\nabla f(p) = (f_x, f_y, f_z)(p) \neq 0$, assumiremos, sem perda de generalidade que $f_z(p) \neq 0$. O teorema da função implícita garante a existência de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a equação $z = g(x, y)$ descreve a superfície S em uma vizinhança de p . Portanto, S pode ser parametrizada em volta de p como um gráfico $\mathcal{G} = \{(x, y, g(x, y)) / (x, y) \in U\}$. Embora, em geral seja difícil de encontrar g , as derivadas de g no ponto (x, y) são facilmente expressas a partir das derivadas de f , usando o fato que

$$f(x, y, g(x, y)) = 0,$$

obtemos

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(p)}{f_z(p)} \quad e \quad g_y(x, y) = -\frac{f_y(p)}{f_z(p)}. \quad (5.9)$$

Notemos que as fórmulas encontradas a partir do teorema da função implícita podem conduzir a instabilidades numéricas quando $|f_z(p)|$ tem valor pequeno.

Os *vetores tangentes* que são combinações de

$$\mathbf{g}_x = (1, 0, g_x) \quad e \quad \mathbf{g}_y = (0, 1, g_y),$$

são naturalmente covariantes sobre qualquer transformação linear A , isto é, $\mathbf{g}_{\{x, y\}}(A(p)) = A\mathbf{g}_{\{x, y\}}(p)$ (isto é uma consequência direta da regra da cadeia).



5.5.1 Métrica Afim

A métrica afim usual neste plano tangente é a métrica de *Berwald-Blaschke*, que corresponde a formas elementares de volumes de uma curva na superfície (ver subseção 5.2.1). Ela pode ser expressa pela forma bilinear

$$\mathbf{d}^{-1/4} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} L &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{xx}] = g_{xx}(x, y), \\ M &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{xy}] = g_{xy}(x, y), \\ N &= [\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_{yy}] = g_{yy}(x, y), \\ \mathbf{d} &= LN - M^2 = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2. \end{aligned}$$

Ao longo do desenvolvimento teórico supomos que a métrica de Berwald-Blaschke é não-degenerada $\mathbf{d} \neq 0$. Geometricamente isso significa que a curvatura Gaussiana Euclidiana não zera. Se $\mathbf{d} > 0$, então a superfície é estritamente convexa. O elemento de área afim da superfície é dado por

$$\mathbf{d}\bar{A} = |\mathbf{d}|^{1/4} \cdot \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.$$

As fórmulas para a métrica no caso implícito podem ser obtidas usando a equação (3.1), onde as derivadas de g são calculadas em (x, y) e as de f em $(x, y, g(x, y))$. Em particular,

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = \frac{1}{f_z^4} \cdot \left(\right. & (f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2) f_x^2 + 2(f_{xz}f_{xy} - f_{xx}f_{yz}) f_y f_z + \\ & (f_{zz}f_{xx} - f_{xz}^2) f_y^2 + 2(f_{xy}f_{yz} - f_{yy}f_{xz}) f_z f_x + \\ & \left. (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) f_z^2 + 2(f_{yz}f_{xz} - f_{zz}f_{xy}) f_x f_y \right). \end{aligned}$$

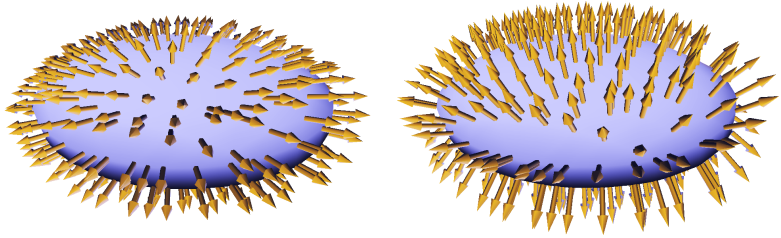


Figura 5.2: Normal afim ξ (à esquerda) e co-normal ν (à direita) direções no elipsóide, o co-normal é co-linear com o normal Euclidiano, enquanto que o normal afim aponta em direção ao centro do elipsóide, enfatizando que um elipsóide é a imagem afim de uma esfera.

5.5.2 Co-normal Afim e Normal Afim

O vetor covariante normal afim, chamado de *co-normal afim* ν pode ser obtido escalonando o vetor normal Euclidiano [Cal82] (ver Figura 5.2) pela equação (5.6)

$$\nu = |K|^{-1/4} \mathbf{N} = |g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2|^{-1/4} (-g_x, -g_y, 1), \quad (5.10)$$

onde K é a curvatura Gaussiana Euclidiana. O vetor co-normal afim satisfaz $\langle \nu, \mathbf{g}_{\{x,y\}} \rangle = 0$. e a métrica $\mathbf{d}^{1/4} = [\nu, \nu_x, \nu_y]$.

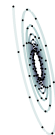
A fórmula geral para o co-normal em uma superfície implícita pode ser encontrada a partir das equações (3.1) e (5.6)

$$\nu = \frac{1}{f_z \mathbf{d}^{1/4}} (f_x, f_y, f_z).$$

Agora descreveremos fórmulas para o vetor normal afim. Como $[\nu, \nu_x, \nu_y] = \mathbf{d}^{1/4} \neq 0$, então temos que ν_x e ν_y definem um plano próprio. O vetor afim pode ser obtido olhando para o vetor ortogonal a este plano e seria equivalente ao normal Euclidiano (ver Figura 5.2). Mais precisamente, o vetor *normal afim* ξ é definido localmente pela relação:

$$\langle \nu, \xi \rangle = 1, \quad \langle \xi, \nu_{\{x,y\}} \rangle = 0.$$

O normal afim satisfaz $\langle \nu, \xi_{\{x,y\}} \rangle = 0$ e $[\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \xi] = \mathbf{d}^{1/4}$.



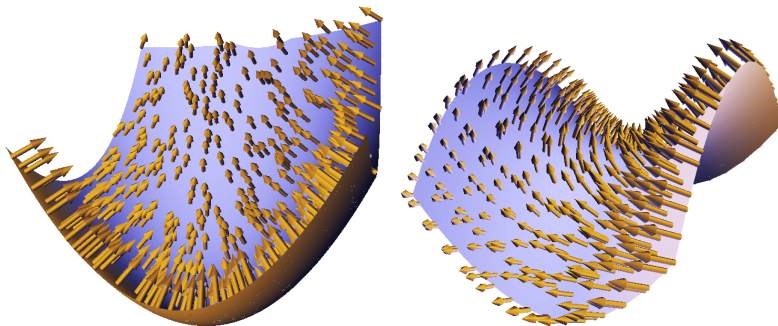


Figura 5.3: Os parabolóides elíptico e hiperbólico tem co-normal afim apontando para o centro de cada superfície.

Esta última relação mostra que uma base local em cada ponto p da superfície pode ser obtida por $\{\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \xi\}$. Isto segue da definição de estruturas a partir da teoria de “moving frame” de Cartan [NS94]. Sabemos que $\langle \xi, \nu \rangle = 1$, $\langle \nu, \xi_x \rangle = \langle \nu, \xi_y \rangle = 0$. Portanto, existe uma função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\xi = \lambda (\nu_x \times \nu_y), \text{ com } \lambda = [\nu, \nu_x, \nu_y]^{-1} = \mathbf{d}^{-1/4}.$$

A fórmula explícita para o normal afim em função das derivadas de g foi dada nas equações (5.7), para encontramos ξ em função de f basta usar as equações (3.1) e de forma análoga ao cálculo destas equações obtemos as expressões das derivadas de terceira e quarta de g em função de f .

Exercício 5.11. Calcule as expressões dos vetores co-normal e normal afins de uma superfície implícita.

5.5.3 Curvaturas Afins

Na geometria Euclidiana as curvaturas afins são obtidas a partir da variação do normal afim (ver Figura 5.4). Visto que $\langle \nu, \xi_{\{x,y\}} \rangle = 0$, então temos que as derivadas $\xi_{\{x,y\}}$ do normal afim são ortogonais a ν que é paralelo a \mathbf{N} . Portanto, $\xi_{\{x,y\}}$ são tangentes a superfície.

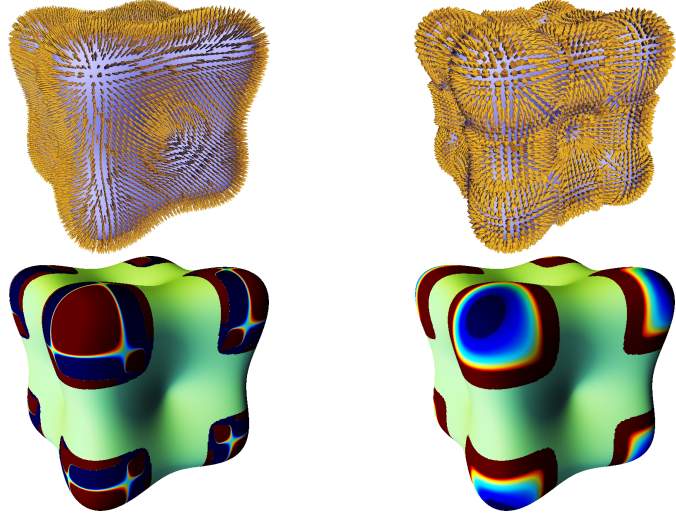


Figura 5.4: Estruturas afins da superfície blobby dada pela expressão $(3x)^4 + (3y)^4 + (3z)^4 - 45x^2 - 45y^2 - 45z^2 + 6 = 0$ (da esquerda para a direita) direção conormal ν , direção normal ξ , curvaturas Gaussiana \mathcal{K} e média \mathcal{H} , coloridas de verde para azul, a parte central verde correspondente a métrica degenerada.

Logo existem funções $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{aligned} \xi_x &= b_{11} \mathbf{g}_x + b_{12} \mathbf{g}_y, \\ \xi_y &= b_{21} \mathbf{g}_x + b_{22} \mathbf{g}_y. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} b_{11} &= d^{-1/4} \cdot [\xi_x, \mathbf{g}_y, \xi], \\ b_{12} &= d^{-1/4} \cdot [\mathbf{g}_x, \xi_x, \xi], \\ b_{21} &= d^{-1/4} \cdot [\xi_y, \mathbf{g}_y, \xi], \\ b_{22} &= d^{-1/4} \cdot [\mathbf{g}_x, \xi_y, \xi]. \end{aligned}$$

Os coeficientes b_{ij} formam uma matriz $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ cujo determinante e menos da metade do traço são respectivamente as curvaturas Gaussiana e média afins: $\mathcal{K} = \det B$ e $\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \text{tr } B$.



5.5.4 Exemplos Fundamentais

	Parabolóide Elíptico	Parabolóide Hiperbólico	Esfera
f	$z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$	$z - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 - r^2$
\mathbf{N}	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-x, -y, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(-x, y, 1)$	$\frac{1}{r} \cdot (x, y, z)$
K	$(1 + x^2 + y^2)^{-2}$	$-(1 + x^2 + y^2)^{-2}$	r^{-2}
d	1	-1	$r^2 z^{-4}$
ν	$(-x, -y, 1)$	$(-x, y, 1)$	$r^{-1/2}(x, y, z)$
ξ	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$	$r^{-3/2}(x, y, z)$
\mathcal{K}	0	0	r^{-3}
\mathcal{H}	0	0	$-2r^{-3/2}$

Tabela 5.1: Exemplos fundamentais de estruturas afins.

As formas mais simples da geometria Euclidiana são o plano cuja normal é constante e portanto a curvatura é zero e a esfera cuja curvatura é constante. Na geometria afim as formas equivalentes são os parabolóides com normal afim constante (ver Figura 5.5), o elipsóide e o hiperbolóide de uma e duas folhas com curvaturas constantes. Suas estruturas afins estão atribuídas na tabela 5.1.

5.5.5 Reduções Geométricas e Fórmulas Simplificadas

As fórmulas para as estruturas afins encontradas são uma extensão para o caso de gráfico

$$G = \{ (x, y, g(x, y)), (x, y) \in U \}$$

e seus tamanhos crescem bastante quando usamos o teorema da função implícita para expressar essas estruturas afins diretamente em termos da função implícita f . Isso leva à uma significativa instabilidade numérica durante o cálculo (ver Figura 5.10) e prejudica a invariância afim das quantidades calculadas.

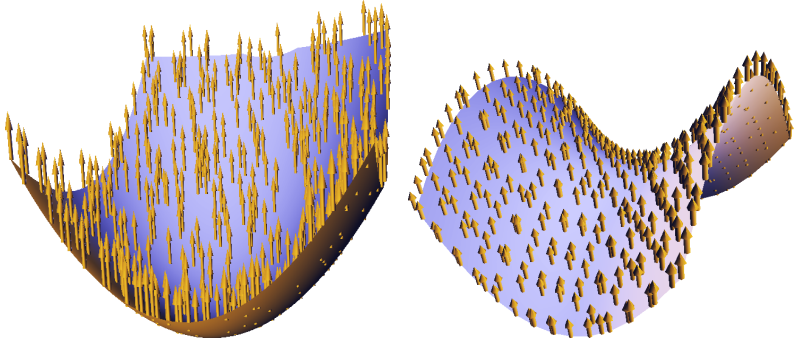


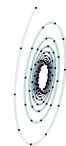
Figura 5.5: Os parabolóides elíptico e hiperbólico tem normal afim ξ constante, os quais têm o papel do plano Euclidiano na geometria afim.

No entanto, sabemos a maneira como cada quantidade varia sobre uma transformação afim: a métrica e as curvaturas são invariantes, o co-normal é covariante e o normal é contravariante. Aqui definimos uma transformação afim A que simplifica as fórmulas acima e melhora (ou isola) as instabilidades numéricas. Na próxima subseção, primeiro introduziremos esta transformação, encontraremos as fórmulas para a estrutura afim depois da simplificação e finalmente mostraremos como calcular a estrutura afim para a superfície implícita no caso geral usando a simplificação.

Simplificação: Transformação A

Como todas as fórmulas implícitas são encontradas a partir do teorema da função implícita, muitos termos podem ser simplificados se pudermos definir o gradiente de f por um vetor constante por exemplo $(0, 0, 1)$ depois de uma transformação afim A . Por outro lado, alinhar as direções das curvaturas principais Euclidianas com os eixos x e y reduz ainda mais o tamanho de nossas fórmulas.

Mais precisamente, procuramos por uma transformação afim A . Neste caso, teremos uma composição de uma rotação R_1 e um escalonamento S e uma rotação R_2 , onde $S \circ R_1$ leva o vetor gradiente de f para $(0, 0, 1)$ e a rotação R_2 no plano xy alinha as direções prin-



cipais aos eixos. Como consequência garantimos que $f_{xy} = 0$, o que simplifica o processo de obtenção dos invariantes afins. O efeito desta transformação sobre as derivadas é descrita no seguinte teorema e a construção de A (ver Figura 5.6) é detalhada na sua demonstração.

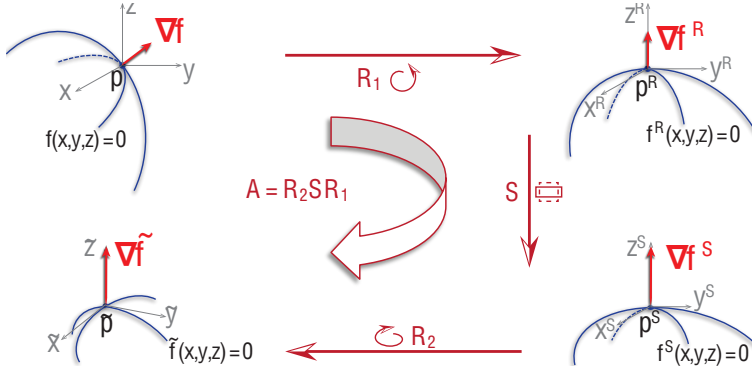


Figura 5.6: A construção da transformação A .

Teorema 5.12. Em cada ponto regular p de uma superfície implícita $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$ existe uma transformação equiafim A tal que em cada ponto $\tilde{p} = A(p)$ a superfície implícita transformada definida por $\{\tilde{p} \in \mathbb{R}^3, \tilde{f}(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p})) = 0\}$ tem as seguintes propriedades

- O vetor gradiente é o vetor unitário vertical: $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = (0, 0, 1)$.
- A derivada cruzada \tilde{f}_{xy} zero, ou seja, $\tilde{f}_{xy}(\tilde{p}) = 0$.

Demonstração: Primeiro observe que $\nabla \tilde{f}(\tilde{p}) = \nabla f(p) \cdot A^{-1}$ (escrevendo o gradiente em linha). Deduzimos as transformações para o primeiro item com a geometria descritiva simples. Decompomos a transformação afim como $A = R_2 S R_1$ (ver Figura 5.6), onde R_1 é a rotação em \mathbb{R}^3 , S é um escalonamento não-uniforme ao longo de z e do plano xy e R_2 é uma rotação no plano xy . A rotação R_1 é uma aplicação de rotação de $\nabla f(p)$ para o vetor vertical $(0, 0, \|\nabla f(p)\|)$. Denotemos por f^R a função implícita transformada que é dada por $f^R(p) = f(R_1^{-1}(p))$. Verifica-se que o vetor gradiente de f^R é

$$(\nabla f^R)^T = R_1^{-T} (\nabla f)^T = R_1 (\nabla f)^T = (0, 0, \|\nabla f(p)\|)^T.$$

Escalonamos o gradiente obtido. Entretanto, para obter uma transformação afim, temos que compensar a escala ao longo de z no plano xy . Portanto, definimos o escalonamento S pela matriz diagonal $S = \text{diag}\left(\eta^{-\frac{1}{2}}, \eta^{-\frac{1}{2}}, \eta\right)$, onde $\eta = \|\nabla f^R\| = \|\nabla f\|$. Denotando $f^S(p) = f^R(S^{-1}(p))$, obtemos

$$(\nabla f^S)^T = S^{-T}(\nabla f^R)^T = (0, 0, 1)^T.$$

Finalmente, rotacionamos a superfície no plano xy para alinhar as direções das curvaturas principais da superfície transformada dada por $\{p \in \mathbb{R}^3; f^S(p) = 0\}$ com os eixos x e y . Isto é equivalente a diagonalizar a parte tangente da matriz Hessiana de f^S :

$$\begin{bmatrix} f_{xx}^S & f_{xy}^S \\ f_{xy}^S & f_{yy}^S \end{bmatrix}.$$

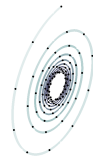
A rotação R_2 é então a rotação no plano xy de ângulo

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2f_{xy}^S}{f_{xx}^S - f_{yy}^S}\right).$$

Isto leva à função $\tilde{f}(p) = f^S(R_2^{-1}(p)) = f(A^{-1}(p))$. Como o gradiente de f^S está ao longo do eixo z , a rotação planar R_2 não o altera. Uma vez que a matriz Hessiana $H_{\tilde{f}}$ de \tilde{f} é dada pela composição das formas quadráticas: $H_{\tilde{f}} = R_2^{-T} H_{f^S} R_2^{-1} = R_2 H_{f^S} R_2^T$, obtemos assim $\tilde{f}_{xy} = 0$. \square

Observação 5.13. Em termos dos graus de liberdade a transformação A é uma matriz 3×3 . Destes 9 coeficientes a restrição da transformação ser afim, o que implica que $\det A = 1$, reduz um grau de liberdade. A rotação R_1 e o escalonamento S , cada um, reduz o grau de liberdade em três: o ângulo ou o fator de escala e um eixo.

A rotação planar R_2 tem um grau de liberdade: o ângulo. Embora ainda exista um grau de liberdade de reposição para os coeficientes, a segunda derivada tem dependência quadrática sobre os coeficientes de A e não há nenhuma garantia de que uma simplificação maior seria viável sem decidir o sinal da métrica (ou equivalentemente o sinal da curvatura gaussiana euclidiana).



Fórmulas Simplificadas

Consideremos superfícies implícitas $\{p \in \mathbb{R}^3; f(p) = 0\}$ definidas em volta de um ponto p tal que $\nabla f(p) = (0, 0, 1)$ e $f_{xy}(p) = 0$. Notemos que a partir do teorema anterior asseguramos esta condição para qualquer ponto regular através de uma transformação afim A. Com esta condição, encontramos as fórmulas simplificadas para as estruturas afins de uma superfície implícita

Vetores Tangentes - Como $f_x = f_y = 0$, deduzimos da (5.9) que

$$\mathbf{g}_x = (1, 0, 0) \quad e \quad \mathbf{g}_y = (0, 1, 0) .$$

Métrica - A métrica se reduz a simples expressão: $\mathbf{d} = f_{xx}f_{yy}$.

Co-normal - A partir da métrica e do vetor gradiente, obtemos

$$\nu = |f_{xx}f_{yy}|^{-1/4} (0, 0, 1).$$

Normal - O normal afim se reduz a

$$\xi = \frac{1}{4 |f_{xx}f_{yy}|^{7/4}} \begin{pmatrix} f_{yy}^2 f_{xxx} + f_{xx} f_{yy} f_{xyy} - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} \\ f_{xxy} f_{xx} f_{yy} - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} + f_{xx}^2 f_{yyy} \\ 4f_{xx}^2 f_{yy}^2 \end{pmatrix} .$$

Curvaturas - As expressões de curvaturas têm uma forma bastante simples, comparada com a expressão antes da transformação, a saber

$$\begin{aligned} b_{11} = & \frac{1}{16f_{xx}^{11/4} f_{yy}^{7/4}} (8f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xz}^2 - 8f_{xx}^3 f_{yy}^2 f_{zz} + 8f_{xx}^3 f_{yy} f_{yz}^2 \\ & - 4f_{xx}^2 f_{yy} f_{xxyy} - 4f_{xx} f_{yy}^2 f_{xxxx} + 7f_{yy}^2 f_{xxx}^2 + 3f_{xx}^2 f_{xyy}^2 \\ & + 12f_{xx} f_{yy} f_{xxy}^2 + 2f_{xx} f_{yy} f_{xxx} f_{xyy} + 4f_{xx}^2 f_{xxy} f_{yyy} \\ & + 24f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xxz} - 24f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} f_{xxx} - 24f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} f_{xxy}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{21} = & \frac{1}{16 f_{xx}^{11/4} f_{yy}^{7/4}} (15 f_{xx} f_{yy} f_{xxy} f_{xyy} - f_{xx} f_{yy} f_{xxx} f_{yyy} \\
 & - 4 f_{xx}^2 f_{yy} f_{xyyy} - 24 f_{xx}^2 f_{yy} f_{yz} f_{xyy} - 4 f_{xx} f_{yy}^2 f_{xxx} \\
 & + 24 f_{xx}^2 f_{yy}^2 f_{xyz} - 24 f_{xx} f_{yy}^2 f_{xz} f_{xxy} + 7 f_{yy}^2 f_{xxx} f_{xxy} \\
 & + 7 f_{xx}^2 f_{xyy} f_{yyy})
 \end{aligned}$$

As fórmulas para b_{12} e b_{22} são obtidas trocando x por y e vice-versa em b_{21} e b_{11} .

O caso geral a partir das fórmulas simplificadas

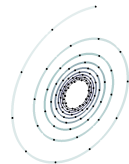
A redução anterior é responsável pelo crescimento da estabilidade numérica e pela melhoria das estimativas das estruturas afins. Começando da função implícita original f em p calculamos a transformação que é definida a partir das derivadas primeira e segunda de f em p segue do teorema 5.12, levando a uma nova função implícita definida por $\tilde{f}(\tilde{p}) = f(A^{-1}(\tilde{p}))$ com $\tilde{p} = A(p)$.

Primeiro calculamos as derivadas de \tilde{f} a partir das derivadas da f e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
 \nabla \tilde{f}(\tilde{p}) &= \nabla f(p) \cdot A^{-1} \\
 H_{\tilde{f}}(\tilde{p}) &= A^{-T} \cdot H_f(p) \cdot A^{-1} \\
 \tilde{f}_{ijk}(\tilde{p}) &= \sum_{(a,b,c) \in \{x,y,z\}^3} f_{abc}(p) A_{a,i}^{-1} A_{b,j}^{-1} A_{c,k}^{-1}, \quad \forall (i,j,k) \in \{x,y,z\}^3, \\
 \tilde{f}_{ijkl}(\tilde{p}) &= \sum_{(a,b,c,d) \in \{x,y,z\}^4} f_{abcd}(p) A_{a,i}^{-1} A_{b,j}^{-1} A_{c,k}^{-1} A_{d,l}^{-1}, \quad \forall (i,j,k,l) \in \{x,y,z\}^4,
 \end{aligned}$$

onde $A_{a,i}^{-1}$ são os coeficientes da matriz inversa A^{-1} de linha a e coluna i . Usando essas derivadas podemos calcular as estruturas afins $\tilde{\nu}(\tilde{p})$, $\tilde{\xi}(\tilde{p})$, $\tilde{\mathcal{K}}(\tilde{p})$ e $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{p})$ da superfície implícita definida por \tilde{f} . A partir das invariâncias dessas estruturas podemos deduzir as estruturas afins para a superfície original $\{p \in \mathbb{R}^3, f(p) = 0\}$ em p

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nu}(\tilde{p}) &= \nu(p) \cdot A^{-1}, \\
 \tilde{\xi}(\tilde{p}) &= \xi(p) \cdot A^T, \\
 \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{p}) &= \mathcal{K}(p), \\
 \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{p}) &= \mathcal{H}(p).
 \end{aligned}$$



5.6 Mudança de Contexto

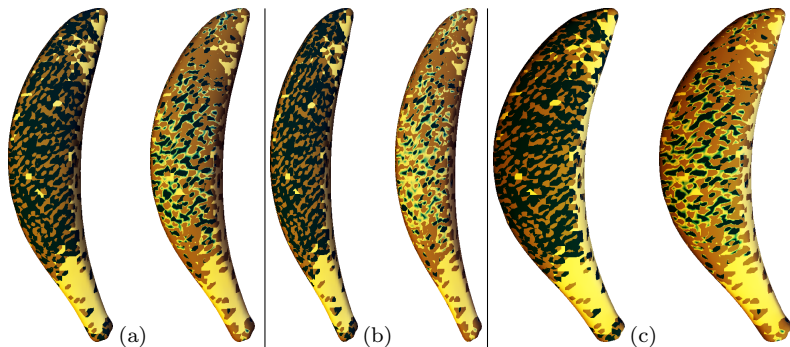


Figura 5.7: Modelo implícito de uma banana (b) com as curvaturas Gaussianas afim (à esquerda) e média (à direita), cores escuras indicam maiores curvaturas. Nos itens (a) e (c) aplicamos transformações afins $p \mapsto A \cdot p$ ao item (b). Notemos que as características das cores se preservaram, ou seja, as curvaturas se mantiveram, comparando com o caso Euclidiano onde claramente isso não ocorreria.

Estudamos ao longo destas últimas seções propriedades geométricas que são invariantes em superfícies paramétricas. Já no caso da superfície ser definida implicitamente utilizamos o teorema da função implícita para reduzir ao caso de superfícies paramétricas, pois localmente a superfície pode ser vista como um gráfico e assim utilizando a parte paramétrica desenvolvida obtemos tais invariantes diferenciáveis. No caso implícito discreto utilizamos o algoritmo *Marching Cubes* [LC87] para obtermos a extração de superfícies implícitas e a partir das expressões conhecidas dos invariantes geométricos implementamos tais funções dentro do *Marching Cubes*. Um dos pontos fundamentais para obtermos boas estimativas de invariantes afins é termos boas derivadas de f até a quarta ordem, e isso não é uma tarefa simples.

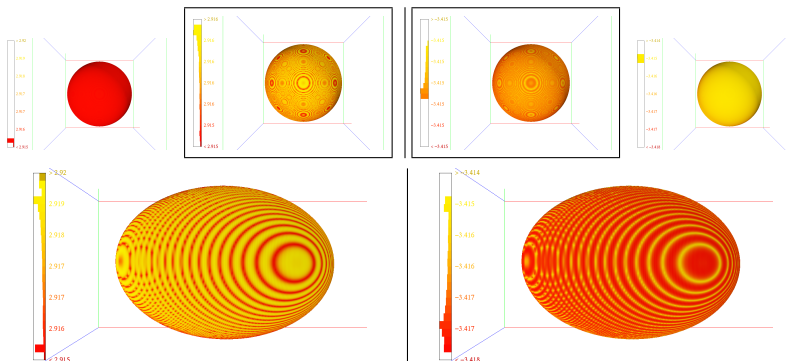
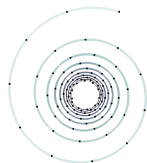


Figura 5.8: Incorporando os estimadores dentro do Marching Cubes revela o padrão não-invariante do processo de amostragem. Vista de \mathcal{K} (esquerda) e \mathcal{H} (direita) antes (em cima) e depois (em baixo) da transformação afim $[[0.9, 0, 0.9], [0, 2, 0], [1.1, 0, 0.6]]$

5.7 Discussão

Representações implícitas de modelos geométricos são amplamente usados em aplicações, como por exemplo para deformação, operações Booleanas e offsets [FHK02]. O cálculo das estruturas geométricas e topológicas de tais representações pode ser delicado, embora ele seja bastante conhecido para representações paramétricas [DC76]. Fórmulas de curvaturas para superfícies implícitas não tinham sido dadas de diversas maneiras de forma clara até recentemente [Gol05].

Recentemente, medidas invariantes afins têm recebido muita atenção na comunidade de visão computacional para melhorar a correspondência e o registro [MS05, MS06, ZBK⁺08]. Na verdade, curvas em um objeto vistas em duas fotos distintas têm diferentes medidas Euclidianas, distância ou curvatura [Low04]. No entanto, se a curva está contida em um plano paralelo ao plano de projeção, então as medidas afins corresponderiam nas fotos. Para dados 3d a quantificação de formas similares tem tido um grande número de aplicações em correspondência e registro [ASBH90, GCO06, RWP06] e reconstrução [GSH⁺07]. Embora alguns objetos sejam claramente similares, eles não são localmente equivalentes Euclidianos (ver Figura 5.7).



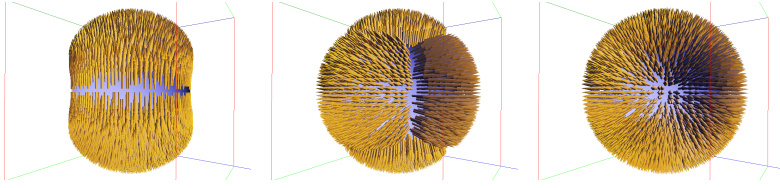


Figura 5.9: Normal afim ξ sempre calculado usando z na derivação implícita (esquerda), o eixo na maioria dos casos alinhado com o gradiente (meio), ou a nossa redução geométrica (à direita).

Uma das características geométricas desejadas no nosso estudo de propriedades invariantes foi a invariância por transformações afins. Sabemos da geometria Euclidiana que as curvaturas são invariantes por movimentos rígidos, entretanto não são invariantes por transformações afins quaisquer. Neste sentido, buscamos estudar propriedades geométricas que fossem invariantes por um grupo maior de transformações que as transformações rígidas que são as transformações afins lineares que preservam volumes. Vimos que para obter tais invariantes foi necessário pedir que a função que define a superfície seja de classe C^4 . Do ponto de vista numérico isso causa mais dificuldade na estimativa dos invariantes.

Utilizamos o algoritmo Marching Cubes [LC87] para extração de superfícies implícitas. O primeiro passo para usarmos este algoritmo e construirmos o nosso foi o cálculo das derivadas até a quarta ordem.

	Matrizes A, A^{-1}	Aplicações de $\partial(\tilde{f})$	Fórmulas simplificadas	Total
<i>Simplificada</i>	749	7.335	1.783	9.867
<i>Direta</i>				23.690

Tabela 5.2: Número de operações para um único ponto. As fórmulas simplificadas são muito mais concisas e incluem principalmente operações de mapear as derivadas.

Podemos trabalhar diretamente com as fórmulas obtidas dos invariantes, o que em particular causa algumas instabilidades numéricas ou utilizar a existência de uma transformação afim A que simplifica

bastante os cálculos. As fórmulas simplificadas são mais estáveis que o cálculo direto sem transformação, como confirmado em nossos experimentos. Usamos o software Maple para otimizar ambas as fórmulas diretas e com transformação, visando reduzir o número de operações. A comparação do número de operações nas fórmulas diretas e simplificadas explica claramente o ganho de estabilidade das fórmulas simplificadas (ver tabela 5.2).

No entanto, a principal ferramenta de derivação para obter as fórmulas das estruturas afins de superfícies implícitas vem do teorema da função implícita, onde todas as derivadas de g são obtidas através de uma divisão por f_z . Portanto, qualquer implementação numérica pode sofrer quando o gradiente é quase zero. Nas fórmulas simplificadas essa instabilidade é confinada na transformação A (em especial na escala não-uniforme S).

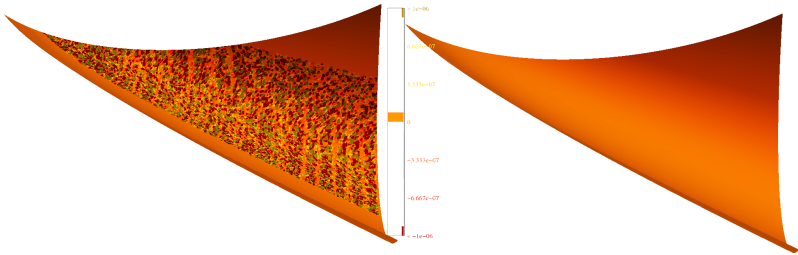
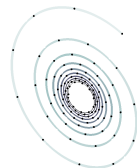


Figura 5.10: A curvatura afim do parabolóide é $\mathcal{K} = 0$, mas uma estimativa direta leva à instabilidade numérica (à esquerda). Com fórmulas simplificadas a estimativa é mais estável (à direita).

Além disso, a métrica Berwald-Blaschke degenera $d = 0$ quando a curvatura Gaussiana Euclidiana é zero. Em particular, as curvaturas afins devem ser infinito em pontos de sela, que são delicadas de lidar em um contexto numérico. Um tratamento independente dos pontos de inflexão tem sido proposto para as curvas através de uma cuidadosa reamostragem local [CLM07] e poderia ser estendido para as superfícies em trabalhos futuros. Esta instabilidade permanece no interior da fórmulas simplificadas.



As definições das curvaturas afins requerem o cálculo de derivadas até a quarta ordem, daí qualquer estimador será muito sensível a erros numéricos. A redução geométrica que apresentamos permite reduzir o erro numérico ligado ao alinhamento com o eixo do gradiente (ver Figura 5.9) que mostra claramente que a qualidade do estimador direto diminui quando a direção se torna mais oblíqua, provocando descontinuidades nas mudanças de eixo (semelhante ao caso mais simples de curvatura Euclidiana de curvas paramétricas [LGLC05]), defeito que é corrigido pela nossa redução.

Esta grande redução simplifica as fórmulas (ver tabela 5.2), o que melhora bastante a estabilidade numérica. Isto é ilustrado na Figura 5.10, onde o parabolóide teria curvatura 0 mas o método direto introduz um ruído de ordem 10^{-5} neste simples caso.

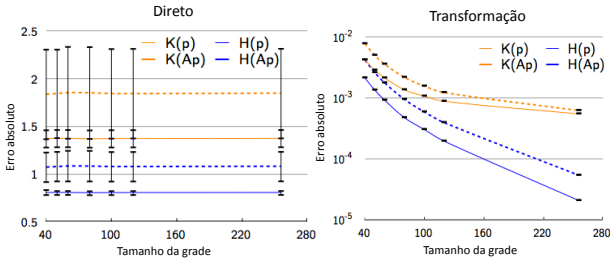


Figura 5.11: Convergência sobre o modelo da esfera. Erro absoluto versus tamanho da grade, antes (sólido) e depois (tracejada), a transformação afim da Figura 5.8, comparando o método direto (à esquerda, em escala linear) com o método de transformação (à direita, em escala log). A barra representa o quinto da variância do erro absoluto.

Geramos pela primeira vez os histogramas de distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} antes e depois de uma aplicação afim. Podemos comparar os resultados obtidos pelo método direto e com transformação em um modelo de toro (ver Figura 5.12). Mais uma vez o método de transformação preserva melhor o significado geométrico das medidas estimadas. Mesmo em issosuperfícies mais complexa, como a retratada nas Figuras 5.7 and 5.13, as curvaturas e as regiões degeneradas são claramente mapeadas a partir dos diferentes modelos

da mesma classe afim.

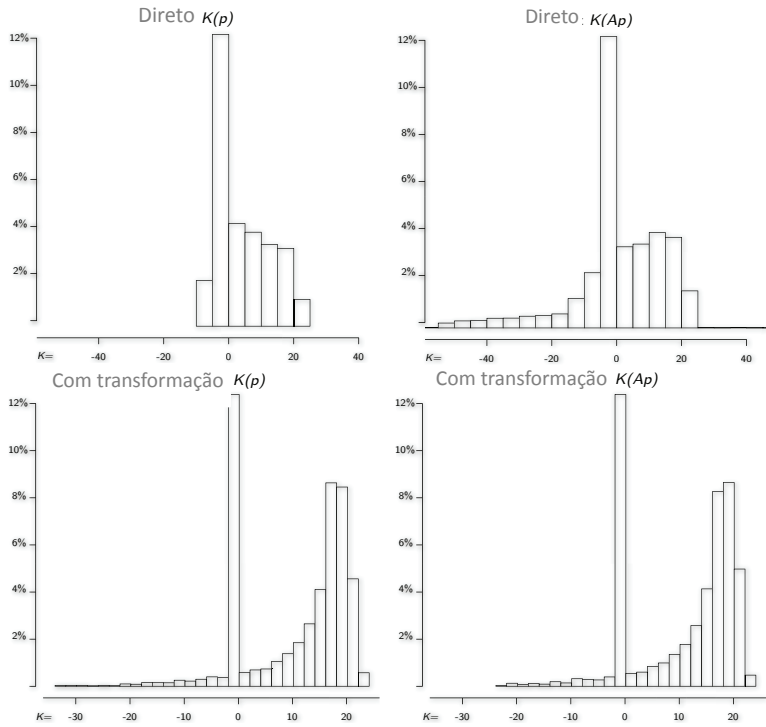
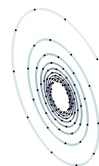


Figura 5.12: No toro $z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5)^2 = 0$, a distribuição da curvatura Gaussiana afim \mathcal{K} é melhor preservada sobre a transformação afim $((1.4, -0.2, 0), (0.1, 0.7, 0), (0, 0, 1))$ se usamos o método com transformação (direita) comparado com o direto (esquerda).



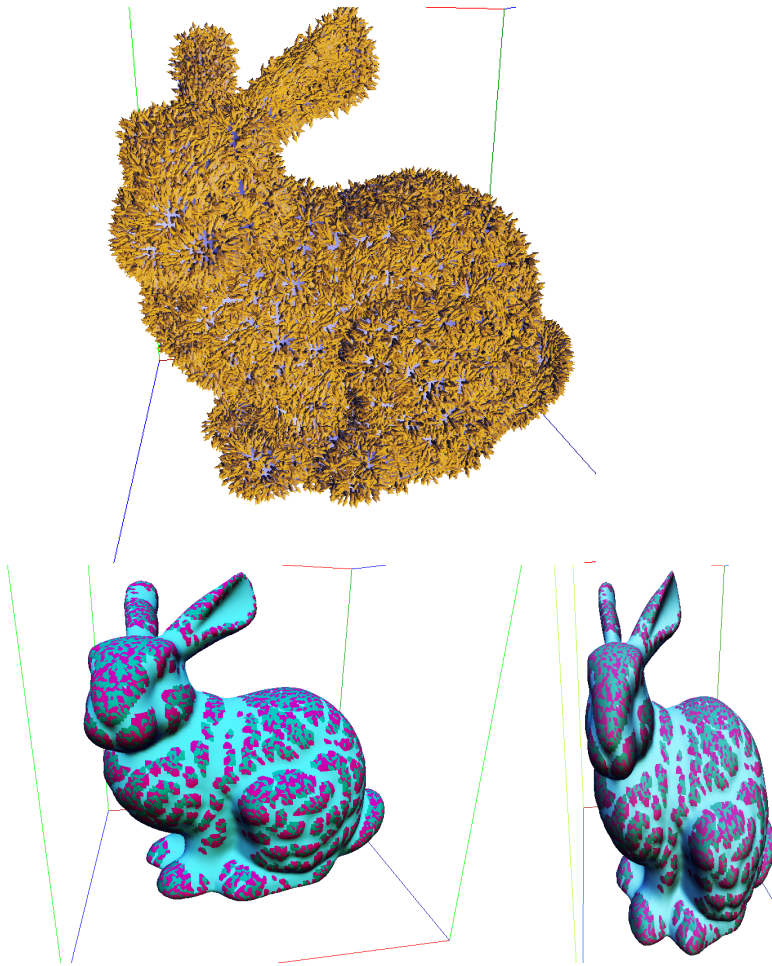


Figura 5.13: Mesmo em uma issosuperfície mais complexa, a curvatura Gaussiana afim estimada é preservada depois de aplicarmos uma transformação afim.

Capítulo 6

Conclusão

Vimos nesse livro alguns aspectos de invariantes Euclidianos e afins para curvas e superfícies. Existem diversas origens e bases teóricas para esses invariantes, e ainda variações e mais invariantes de outras ordens de diferenciação. Escolhemos apresentar diretamente o cálculo desses invariantes no caso diferencial paramétrico, antes de estender para os demais casos, tornando o livro mais acessível e dando uma visão dos diversos contextos de modelagem, em particular os contextos discretos visto a importância deles nas aplicações.

6.1 Problemas Discretos

Os problemas discretos se tornaram fundamentais com a emergência do computador no auxílio aos cálculos, em particular ao cálculo geométrico. Porém, vale notar que eles também foram fundamentais a várias definições geométricas, como por exemplo a noção de comprimento de curva por retificação. Esse exemplo ilustra bem diversos problemas do mundo discreto.

O comprimento de uma curva \mathbf{C} é definido como o limite do comprimento das curvas poligonais amostradas sobre \mathbf{C} . As curvas admissíveis (retificáveis) são as curvas para quais o limite é independente do processo de amostragem. A passagem ao limite gera uma noção de derivada da parametrização embutido na forma fundamen-

tal $\|\alpha'\|$. Finalmente, o limite pode ser simplificado num supremo no caso convexo. Vamos analisar cada observação.

A força da definição de curvas admissíveis reside na possibilidade de caracterizá-las a partir da regularidade da parametrização. Esse processo é muito mais delicado para superfícies, mesmo suaves, pois existem processos de amostragem que não garantem propriedades elementares de convergência da área, como o lampião de Schwarz. Portanto, a passagem ao limite tem que ser associada a um certo tipo de amostragem, geralmente triangulações de Delaunay, podendo haver variações e assim mais de uma definição, não equivalentes, de invariantes discretos.

O problema discreto fica mais complicado ainda na prática pois, com dados reais, a curva limite \mathbf{C} não é conhecida. Uma abordagem consiste em interpolar ou aproximar os dados discretos por uma curva suave, e definir os invariantes a partir das derivadas dessa curva suave. Nesse livro, esse processo foi usado no caso de invariantes afins de superfícies implícitas discretas. Outra abordagem consiste em definir um invariante da curva discreta, e garantir que ele converge para o invariante da curva limite, sob um processo de amostragem controlado, como foi o caso dos polígonos parabólicos. Poderia definir o invariante sem a convergência para uma noção conhecida no caso limite, mas perderia a interpretação do invariante calculado.

Finalmente, os casos convexos, ou estritamente convexos para a geometria afim, geram melhores condições para a estimação de invariantes. Em particular no caso afim, os pontos de inflexão geram problemas numéricos para estimar os invariantes, pois tem curvatura infinita. Porém, os dados reais vem corrompidos por ruído. Mesmo um círculo, uma vez perturbado por um ruído pequeno, deixa de ser convexo. A literatura matemática relata muitos métodos para remoção de ruído, mas para garantir que a medida estimada é invariante, o processo de remoção de ruído também tem que ser invariante.

6.2 Aplicações em Computação Visual

Apesar dessas dificuldades, existem muitos interesses da parte computacional em conseguir definir medidas invariantes e robustas a ruído e processos de (re-)amostragem. Existem três tipos de aplicações típicas para o cálculo de invariantes: modelagem e processamento geométricos e reconhecimento de formas.

A modelagem e o processamento geométricos desenvolve técnicas para criar ou editar formas, tipicamente em duas ou três dimensões. Desde a última década essas técnicas se popularizaram e pretendem ser utilizadas de forma “intuitiva”, querendo que um usuário mesmo inexperiente consiga prever o efeito de cada ferramenta. Isso é geralmente feito ou por imitação da realidade (escultura, artesanato, etc.), ou usando conceitos imediatamente perceptíveis como a suavidade (curvatura) das superfícies desenhadas. No primeiro caso, usa-se modelagem física, geralmente baseada em equações diferenciais, voltando em problemas similares aos encontrados nesse livro: definir derivadas em objetos discretos e/ou garantir os invariantes (volume ou energia) do sistema.

O reconhecimento de formas aparenta com a classificação de curvas e superfícies. Nesse caso, o objetivo é de identificar duas formas dentro de um conjunto. Um exemplo clássico é a OCR (*optical character recognition*) que consiste em extrair letras de um texto, e identificar cada letra. Aparecem problemas devidos à variação das fontes de caracteres, em particular para documentos manuscritos, e ao ruído presentes nos documentos escaneados. Além disso, a grande quantidade de letras num documento necessitam de um processo eficiente, precisando reduzir a curva a um conjunto pequeno de descritores, contando a topologia e a geometria das curvas de bordo de cada letra. Em três dimensões, existem bases de modelos 3d, comerciais ou acadêmicas, que permitem obter objetos virtuais sem a dificuldade de desenhá-los. Em particular isso foi incorporado no *Google Sketch'up*, com a base *Google 3d Warehouse*, porém ainda com semelhança no texto acompanhando o modelo, em vez de descrição geométrica que ainda é um desafio para chegar a aplicações industriais.

6.3 Desafios Atuais

Existem desafios tanto teóricos como práticos. Enquanto, dado uma curva desenhada no quadro, é simples descrever as propriedades Euclidianas da curva (por exemplo deduzir o sinal da curvatura), é muito menos intuitivo no caso das propriedades afins de uma superfície. O presente livro é um dos primeiros trabalhos a apresentar figuras de curvatura afim em superfícies não triviais. Seria talvez um primeiro passo para desenvolver um intuito maior dos invariantes afins, para considerar esses invariantes úteis para outras áreas da Matemática em vez de apenas um fim em si só. Além disso, um trabalho similar resta a fazer no caso projetivo, rico em aplicações porém pouco estudado do ponto de vista dos invariantes.

Do lado prático, muitas aplicações reais em fotografia e filmagem 3d, usam projeções dos objetos geométricos para modelá-los. O processo de projeção é complexo, mas preservam os invariantes afins de objetos planos. Porém, a aquisição é ruidosa e envolve um processo de amostragem nos pixels da camera, o que dificulta o cálculo das curvaturas de forma robusta e invariante. Enquanto existem vários métodos de aproximação invariantes Euclidianos, como mínimos quadrados no espaço, ainda poucos foram desenvolvidos no caso afim.

*Maria e Thomas,
Rio de Janeiro, 10 de maio de 2011.*

Referências

Bibliográficas

- [ASBH90] K. Arbert, W. Snyder, H. Burkhardt, and G. Hirzinger, *Application of affine-invariant Fourier descriptors to recognition of 3-D objects*, Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **12** (1990), no. 7, 640–647.
- [Ban67] T. Banchoff, *Critical points and curvature for embedded polyhedra*, Differential Geometry **1** (1967), 257–268.
- [BCM03] V. Borrelli, F. Cazals, and J.-M. M.-M. Morvan, *On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures*, Computer Aided Geometric Design **20** (2003), no. 6, 319 – 341.
- [Blo94] J. Bloomenthal, *An implicit surface polygonizer*, Graphics Gems IV (Boston) (P. Heckbert, ed.), Academic Press, Boston, 1994, pp. 324–349.
- [Buc83] S. Buchin, *Affine differential geometry*, Routledge, 1983.
- [BY98] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec, *Algorithmic geometry*, Cambridge University Press, 1998.
- [Cal82] E. Calabi, *Hypersurfaces with maximal affinely invariant area*, American Journal of Mathematics **104** (1982), no. 1, 91–126.

- [CLM06] M. Craizer, T. Lewiner, and J.-M. Morvan, *Parabolic polygons and discrete affine geometry*, Sibgrapi (Manaus), IEEE, 2006, pp. 19–26.
- [CLM07] M. Craizer, T. Lewiner, and J.-M. Morvan, *Combining points and tangents into parabolic polygons: an affine invariant model for plane curves*, Journal of Mathematics Imaging and Vision **29** (2007), no. 2-3, 131–140.
- [CSM03] D. Cohen-Steiner and J.-M. Morvan, *Restricted Delaunay triangulations and normal cycle*, Symposium on Computational Geometry, ACM, 2003, pp. 312–321.
- [DC76] M. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [FHK02] G. Farin, J. Hoschek, and M. Kim, *Handbook of computer aided geometric design*, North-Holland, 2002.
- [GCO06] R. Gal and D. Cohen-Or, *Salient geometric features for partial shape matching and similarity*, Transactions on Graphics **25** (2006), no. 1, 130–150.
- [Gol05] R. Goldman, *Curvature formulas for implicit curves and surfaces*, Computer Aided Geometric Design **22** (2005), no. 7, 632–658.
- [GSH⁺07] R. Gal, A. Shamir, T. Hassner, M. Pauly, and D. Cohen-Or, *Surface reconstruction using local shape priors*, Symposium on Geometry Processing, Eurographics, 2007, pp. 253–262.
- [GV03] J. Gomes and L. Velho, *Fundamentos de computação gráfica*, IMPA, 2003.
- [Lag00] E. Lages, *Análise no espaço r^n* , Projeto Euclides, 2000.
- [LC87] W. Lorensen and H. Cline, *Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm*, Siggraph, ACM, 1987, p. 169.

- [LC07] T. Lewiner and M. Craizer, *Convergence of affine estimators on parabolic polygons*, Tech. report, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2007.
- [LC08] T. Lewiner and M. Craizer, *Projective estimators for point-tangent representations of planar curves*, Sibgrapi, 2008, pp. 223–229.
- [LC10] T. Lewiner and M. Craizer, *Projective splines and estimators for planar curves*, Journal of Mathematical Imaging and Vision **36** (2010), no. 1, 81–89.
- [LGLC05] T. Lewiner, J. Gomes, H. Lopes, and M. Craizer, *Curvature and torsion estimators based on parametric curve fitting*, Computers & Graphics **29** (2005), no. 5, 641–655.
- [LLVT03] T. Lewiner, H. Lopes, A. Vieira, and G. Tavares, *Efficient implementation of Marching Cubes' cases with topological guarantees*, Journal of Graphics Tools **8** (2003), no. 2, 1–16.
- [LM98] L. Lima and F. Montenegro, *Evolução de curvas planas pela curvatura*, X Escola de Geometria Diferencial, 1998.
- [LOdF02] H. Lopes, J. B. Oliveira, and L. H. de Figueiredo, *Robust adaptive polygonal approximation of implicit curves*, Computers & Graphics **26** (2002), no. 6, 841–852.
- [Low04] D. Lowe, *Distinctive image features form scale invariant keypoints*, International Journal of computer Vision **60** (2004), no. 2, 91–110.
- [LW69] A. T. Lundell and S. Weingram, *The topology of cw complexes*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
- [MDSB02] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr, *Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds*, Mathematical Visualization III (Berlin) (H.-C. Hege and K. Polthier, eds.), Springer, Berlin, 2002.

- [MS05] K. Mikolajczyk and C. Schmid, *A performance evaluation of local descriptors*, Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **27** (2005), no. 7, 1615–1630.
- [MS06] K. Mikolajczyk and C. Schmid, *A comparison of affine region detectors*, International Journal of Computer Vision **65** (2006), no. 1, 43–72.
- [MT02] J.-M. Morvan and B. Thibert, *Smooth surface and triangular mesh : comparison of the area, the normals and the unfolding*, Solid Modeling and Applications (C. Hoffman and W. Bronsvort, eds.), ACM, 2002, pp. 147–158.
- [NS94] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry: geometry of affine immersions*, Cambridge University Press, 1994.
- [NY06] T. Newman and H. Yi, *A survey of the marching cubes algorithm*, Computers & Graphics **30** (2006), no. 5, 854–879.
- [PLLdF06] A. Paiva, H. Lopes, T. Lewiner, and L. H. de Figueiredo, *Robust adaptive meshes for implicit surfaces*, Sibgrapi 2006 (XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing) (Manaus, AM), IEEE, 2006, pp. 205–212.
- [RWP06] M. Reuter, F. Wolter, and N. Peinecke, *Laplace-Beltrami spectra as shape-DNA of surfaces and solids*, Computer-Aided Design **38** (2006), no. 4, 342–366.
- [Spi99] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, 1999.
- [TLHD03] Y. Tong, S. Lombeyda, A. N. Hirani, and M. Desbrun, *Discrete multiscale vector field decomposition*, Transactions on Graphics **22** (2003), no. 3, 445–452.
- [Vel96] L. Velho, *Simple and efficient polygonization of implicit surfaces*, Journal of Graphics Tools **1** (1996), no. 2, 5–25.

- [vGW94] A. van Gelder and J. Wilhelms, *Topological considerations in isosurface generation*, ACM Transactions on Graphics **13** (1994), no. 4, 337–375.
- [ZBK⁺08] M. Zuliani, L. Bertelli, C. Kenney, S. Chandrasekaran, and B. Manjunath, *Drums, curve descriptors and affine invariant region matching*, International Journal of computer Vision **26** (2008), 347–360.

Índice Remissivo

- Área, 48
- Aplicação de Gauss, 49
- Cálculo das curvaturas, 54
- Cúbica osculadora, 98
- Cônicas, 64
- Complexo Celular, 37
- Complexo simplicial, 36
- Comprimento de arco, 22, 48
 - afim, 69
- Curva, 15
 - assintótica, 88
 - estritamente convexa, 66
 - fechada, 16
 - implícita, 17, 79
 - paramétrica, 15, 69
 - periódica, 16
 - poligonal, 19
 - simples, 16
- Curvatura
 - afim, 75
 - curvas, 25
 - Gaussiana, 52, 57
 - afim, 93
 - média, 52, 57
 - afim, 93
 - normal, 51
- Fórmula de Minkowski
 - afim, 96
 - curvas, 28
 - superfície, 58
- Geometria afim
 - curvas, 61
 - superfície, 85
- Métrica de Berwald-Blaschk, 90
- Mudança de parâmetros, 34
- Plano tangente, 44
- Primeira forma fundamental, 46
 - afim, 90
- Reduções geométricas, 104
- Segunda forma fundamental, 49
- Superfície, 31
 - implícita, 35, 99
 - paramétrica, 31, 88
- Teorema da função implícita, 20, 39
- Transformação afim, 62, 86
- Vetor co-normal, 91, 101
- Vetor normal, 24
 - afim, 72, 92, 101
- Vetor tangente, 24