Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas

Publicações Matemáticas

Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas

Lorenzo J. Díaz
PUC-Rio

Danielle de Rezende Jorge

impa

26º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

26º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números - Alexander Arbieto, Carlos Matheus e Carlos Gustavo Moreira
- Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações - Alcides Lins Neto
- Elliptic Regularity and Free Boundary Problems: an Introduction - Eduardo V. Teixeira
- Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um - Flavio Abdenur e Luiz Felipe Nobili França
- Introduction to Generalized Complex Geometry - Gil R. Cavalcanti
- Introduction to Tropical Geometry - Grigory Mikhalkin
- Introdução aos Algoritmos Randomizados - Celina de Figueiredo, Guilherme da Fonseca, Manoel Lemos e Vinicius de Sá
- Mathematical Aspects of Quantum Field Theory - Edson de Faria and Welington de Melo
- Métodos Estatísticos Não-Paramétricos e suas Aplicações - Aluisio Pinheiro e Hildete P. Pinheiro
- Moduli Spaces of Curves - Enrico Arbarello
- Noções de Informação Quântica - Marcelo O. Terra Cunha
- Three Dimensional Flows - Vítor Araújo e Maria José Pacifico
- Tópicos de Corpos Finitos com Aplicações em Criptografia e Teoria de Códigos - Ariane Masuda e Daniel Panario
- Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada - André Nachbin e Ailín Ruiz de Zárate
- Uma Introdução à Mecânica Celeste - Sérgio B. Volchan
- Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos - Humberto Bortolossi, Gilmar Garbugio e Brígida Sartini
- **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas - Lorenzo J. Díaz e Danielle de Rezende Jorge**

ISBN: 978-85-244-0266-1

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Talvez algo inimaginável.
Mas o inimaginável está aí
para ser imaginado

J. M. Coetze, (Homem lento)

Dijo el decir popular
que sean claras o oscuras
"de las cosas más seguras
la más segura es dudar"

J. Bergamín, (Canto rodado)

Preâmbulo

A idéia deste livro surgiu a partir do *cansaço* do Lorenzo com a ferradura. Depois de inúmeras palestras falando mais que o devido de "ferraduras" parecia um bom momento para divulgar os *Sistemas Dinâmicos* com outros exemplos. Nesse momento Lorenzo se interessou de forma diletante pela *Dinâmica Aritmética,* e a Danielle foi "vítima" desse interesse. Assim, as frações contínuas vieram a calhar, permitindo juntar a fascinação que elas exercem nos estudantes com temas mais complexos de dinâmica, com uma abordagem relativamente elementar no início. Além disso, as ramificações do tema frações contínuas são imensas, algumas, infelizmente poucas, são indicadas no texto. Realmente, é muito difícil resistir à atração deste tema.

Este livro cresceu a partir da dissertação de mestrado da Danielle, *Frações contínuas: propriedades ergódicas e de aproximação,* defendida no Departamento de Matemática da PUC-Rio em março de 2006. Este texto é uma versão adaptada, revisada, aumentada e (esperamos) melhorada da sua dissertação.

Sérgio Volchan e Carlos Gustavo Moreira (desde agora o "Gugu") leram atentamente a dissertação e fizeram inúmeros e valiosos comentários que agradecemos. Gugu também sugeriu exercícios e mostrou um entusiasmo olímpico no tema. Agradecemos ao Nicolau Saldanha por nos mostrar a figura que abre o texto. Vanderlei Horita dedicou muitos minutos à leitura da versão quase-final do texto e fez muitos comentários de grande utilidade. Finalmente, agradecemos os comentários e sugestões de Miguel Schnorr e Rômulo Rosa.

Parte do material deste curso foi apresentado no *II Encontro Regional de Sistemas Dinâmicos da UNESP* (setembro 2006) e na *In-*

ternational School for Mathematics and Development (Córdoba, Espanha) (julho 2006) em mini-cursos ministrados conjuntamente com o Gugu. Agradecemos aos organizadores destes encontros os convites, aos participantes as perguntas e comentários durante o curso e ao Gugu os ensinamentos no tema.

Agradecemos a Miriam Abdón sua leitura crítica e cuidadosa da versão quase-final do texto e suas sugestões. Além disso, sem seu apoio e ajuda durante os meses finais da redação não teria sido possível terminar este livro. Sua paciência e disposição para ouvir o Lorenzo falar de frações contínuas em jantares e cafés da manhã bem valem uma profundíssima gratidão.

Danielle agradece o apoio financeiro do CNPq (bolsa de mestrado) e Lorenzo agradece o apoio do CNPq, Faperj e do Instituto do Milênio.

Finalmente, agradecemos à organização do *26º Colóquio Brasileiro de Matemática* o convite para ministrar o curso e escrever este texto.

Pré-texto ou pretexto

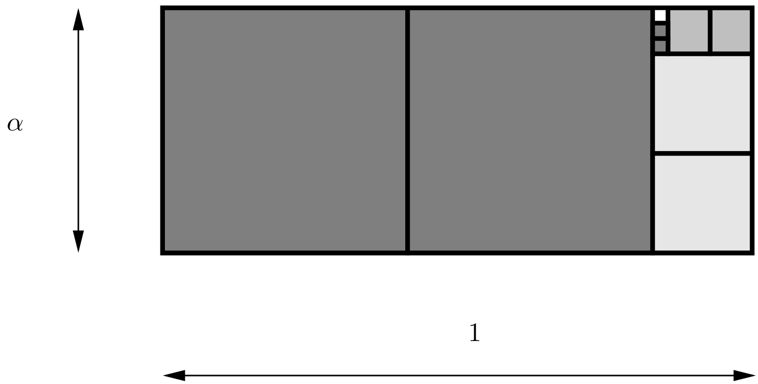

Figura 1: Representação em frações contínuas

$$\alpha = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}}.$$

Sumário

1 Introdução **9**

2 Expansão em frações contínuas **18**

2.1 Expansão em frações contínuas de números racionais . 20

2.2 A Transformação de Gauss e expansões de racionais . 24

2.2.1 Caso Racional 26

2.2.2 Caso irracional 27

2.3 Exercícios 31

3 Convergentes e Quocientes **32**

3.1 Propriedades aritméticas dos convergentes 34

3.1.1 Convergentes e matrizes 38

3.1.2 Interpretação geométrica dos quocientes 41

3.2 Convergência dos convergentes 44

3.2.1 Prova do Teorema 3.2 45

3.2.2 Unicidade da expansão em frações contínuas (irracionais) 46

3.3 Exercícios 52

4 Dois Exemplos **54**

4.1 O número de ouro 54

4.2 Expansão do número de Euler 56

4.2.1 Provas dos Lemas 4.3 e 4.5 60

4.3 Exercícios 63

5 Convergentes e boas aproximações 65
5.1 Aproximação por convergentes 67
5.2 Boas aproximações 69
5.3 Ordem de Aproximação 78
5.4 Exercícios 90

6 Números algébricos 91
6.1 Teor. de Liouville: aproximação de números algébricos 92
6.2 Periodicidade e equações quadráticas 100
6.3 Exercícios 111

7 Dinâmica da transformação de Gauss 113
7.1 Outras expansões 114
7.1.1 Expansões n-árias 114
7.1.2 Expansões β 118
7.1.3 Séries de Lüroth 123
7.2 Transformação de Gauss: itinerários 126
7.3 Propriedades Topológicas 132
7.4 Exercícios 135

8 Propriedades ergódicas 140
8.1 A medida de Lebesgue 141
8.2 Integração 145
8.3 Ergodicidade. Teorema Ergódico de Birkhoff 147
8.4 Propriedades Ergódicas 158
8.4.1 A medida de Gauss 159
8.4.2 A medida de Gauss é T-invariante 160
8.4.3 Ergodicidade da Medida de Gauss 162
8.5 Conseqüências da ergodicidade 170
8.6 Expoentes de Lyapunov 183
8.7 Exercícios 184

9 Aproximação Diofantina 188
9.1 Aproximação Diofantina 189
9.2 O Teorema de Khinchin 201

Capítulo 1

Introdução

Dado qualquer número real x existe uma seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ de números naturais[1] (em alguns casos esta seqüência pode ser finita) tal que o número x pode ser escrito da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

onde a_0 é um número inteiro. Esta expressão é a expansão em *frações contínuas* do número x, que denotaremos por

$$x = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \dots].$$

Isto significa que o número x é o limite da seqüência

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}.$$

[1] Neste livro o número zero não é considerado um número natural.

Os números a_i são chamados os *quocientes* de x e as frações p_k/q_k são os *convergentes* de x.

Uma das vantagens desta expansão é que podemos obter propriedades dos números reais apenas olhando sua expansão em frações contínuas. Três exemplos: os números racionais se caracterizam por ter expansão finita (Teorema 2.1), um número que é solução de uma equação algébrica de segundo grau (com coeficientes inteiros) se caracteriza por ter expansão periódica (Teorema 6.12), e em alguns casos é possível determinar se um número é transcendente simplesmente olhando para sua expansão em frações contínuas (Algoritmo 6.4). Este tipo de propriedades "intrínsecas" não ocorrem nas expansões n-árias.

Os objetivos deste texto são apresentar a teoria de frações contínuas enfatizando seus aspectos de aproximação, dinâmica e probabilidade (teoria ergódica) e estabelecer algumas relações entre eles. Estudaremos na primeira parte do livro resultados aritméticos sobre frações contínuas. Esta parte inclui o estudo da chamada aproximação diofantina (sucintamente, como um número é aproximado por números racionais). Na segunda parte estudaremos as frações contínuas do ponto de vista dinâmico (estudo da transformação de Gauss) e introduziremos alguns ingredientes de teoria ergódica. No último capítulo do texto faremos a conexão entre os problemas de aproximação estudados na primeira parte e a teoria ergódica, apresentando uma versão "probabilística" dos resultados de aproximação.

Por exemplo, no caso das expansões n-árias um problema natural é o de determinar a freqüência com que aparece um determinado número $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ na expansão n-ária de um número "típico" x. Veremos que este problema tem uma resposta simples. No caso das expansões em frações contínuas podemos considerar um problema similar que é determinar a freqüência assintótica com que aparece um determinado número natural k como quociente na expansão em frações contínuas de um número real $x \in (0, 1)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n,\, a_i(x) = k\}}{n},$$

onde $\#A$ denota o número de elementos de um conjunto finito A. Obviamente, a resposta a esta pergunta depende do número x. Em primeiro lugar, como pode ser observado no caso n-ário, em muitos casos este limite não existe. Além disso, há infinitos x tais que k não aparece nunca na sua expansão em frações contínuas. Porém, podemos responder a esta questão em termos probabilísticos: para quase todo número x do intervalo $[0,1)$ (isto é, um conjunto de medida de Lebesgue total ou com probabilidade 1) o número k aparece com uma freqüência que depende somente de k. No caso das expansões n-árias a resposta a esta pergunta não depende de $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ e a freqüência é $1/n$. No caso das frações contínuas a resposta é mais complicada (embora conceitualmente seja a mesma resposta do ponto de vista ergódico). Por exemplo, se $k < \ell$ a freqüência assintótica do quociente k é maior da que a do quociente ℓ. A resposta a este tipo de problema exemplifica a aplicação da teoria ergódica no estudo das frações contínuas.

Descreveremos a seguir a organização do texto assim como os principais resultados. Em primeiro lugar, tentamos escrever um texto autocontido minimizando pré-requisitos (um primeiro curso de Análise incluindo integração é suficiente). Como regra geral, ao longo do texto provamos os resultados necessários que não são cobertos em um primero curso de Análise. Por exemplo, provamos o Teorema de Baire sobre conjuntos residuais, o Lema de Borel-Cantelli e o Teorema de Birkhoff (este teorema é um resultado essencial de teoria ergódica e terá um papel destacado nos dois últimos capítulos do livro). As exceções a esta regra são alguns resultados básicos de teoria da medida e integração que resumiremos sem demonstração no Capítulo 8. Resumimos a seguir o conteúdo do livro.

No Capítulo 2, usando o Algoritmo da Divisão, obtemos a expansão em frações contínuas de números racionais. Este método nos leva a introduzir a *transformação de Gauss*,

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

onde $\lfloor \varsigma \rfloor$ denota a parte inteira de ς (veja a Figura 1.1).

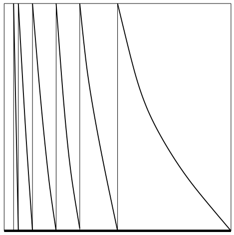

Figura 1.1: A transformação de Gauss

Esta transformação é uma função do intervalo $[0, 1)$ nele próprio com infinitas descontinuidades (os pontos da forma $1/n$, $n \in \mathbb{N}$). O ponto chave é que os quocientes $a_n(x)$ da expansão em frações contínuas de um número $x \in [0, 1)$ estão determinados pela sua órbita positiva $(T^i(x))_{i \geq 0}$ pela transformação de Gauss segundo a seguinte fórmula

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor, \quad n \geq 1, \tag{1.1}$$

onde definimos indutivamente $T^{i+1}(x) = T(T^i(x))$. Esta relação permite fazer a ponte entre as expansões em frações contínuas e a dinâmica (estudo das iterações da transformação de Gauss).

O Capítulo 3 é dedicado à expansão em frações contínuas (tanto de números racionais quanto de irracionais). Uma etapa essencial é estudar os quocientes e os convergentes de um número real. Obteremos propriedades aritméticas que desempenharão um papel importante. O resultado principal do capítulo é o Teorema 3.1 que estabelece uma relação biunívoca entre os números irracionais $\mathbb{I}_{(0,1)}$ do intervalo $(0, 1)$ e as seqüências infinitas de números naturais $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$x \mapsto [a_1(x), \ldots, a_k(x), \ldots].$$

Veremos que dada qualquer seqüência de números naturais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o limite $\ell = \lim_{k \to \infty} [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ existe e sua expansão em frações contínuas tem como quocientes exatamente os a_i, (isto é, $a_i(\ell) = a_i$).

Veremos dois exemplos interessantes de expansão em frações contínuas no Capítulo 4. O primeiro é o número de ouro, o número cujos quocientes são todos iguais a 1. Este número irracional aparecerá no texto como um contra-exemplo importante no Capítulo 5 no contexto da aproximação de números irracionais por racionais. Também obteremos a expansão do número de Euler e. Surpreendentemente, esta expansão tem uma fórmula de recorrência extremamente simples $2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, 16, 1, 1, \dots]$.

Iniciaremos o Capítulo 5 estudando como a seqüência de números racionais $[a_1(x), \dots, a_k(x)] = p_k(x)/q_k(x)$ dos convergentes de um número x se aproximam dele. Como a expansão em frações contínuas de um número racional é finita, este problema é interessante no caso em que x é irracional. O Teorema 5.1 estabelece cotas superiores e inferiores para esta aproximação e implica que a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b}, \quad C > 0,$$

tem infinitas soluções (independentemente do valor de $C > 0$). Este resultado é o primeiro passo para estudar a aproximação de números reais por racionais, *aproximação Diofantina*. De forma sucinta, veremos que os convergentes de um número irracional são suas melhores aproximações por números racionais.

De forma um pouco mais precisa, fixado $q \in \mathbb{N}$, consideraremos o conjunto $\mathcal{A}_q$ dos números racionais da forma a/b, $a \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq b \leq q$. Queremos determinar o número de $\mathcal{A}_q$ mais próximo de x (no máximo há dois pontos de $\mathcal{A}_q$ "mais próximos"de x). Estes números mais próximos são as *boas aproximações* de x (por racionais). Os Teoremas 5.4 e 5.6 garantem que os convergentes de x são suas boas aproximações.

A última parte do Capítulo 5 é dedicada a estudar para que números irracionais x existem $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Z}$ que verificam a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2}, \quad C > 0.$$

O Teorema 5.18 estabelece um resultado geral sobre as soluções da desigualdade: se os quocientes a_i de x são limitados então existe C tal que a desigualdade não tem solução; quando os quocientes são ilimitados temos sempre (para todo C) infinitos a/b que verificam a desigualdade.

Estudaremos também a desigualdade anterior em termos probabilísticos: o conjunto dos números irracionais para os quais a desigualdade não tem solução formam um conjunto de medida nula (Corolário 9.4). Provaremos este resultado no Capítulo 9 usando teoria ergódica, obtendo um bom exemplo onde a teoria aritmética de frações contínuas e a dinâmica se complementam.

Prosseguiremos o estudo da aproximação de números irracionais por racionais no Capítulo 6. Um número é *algébrico* se é raíz de um polinômio com coeficientes inteiros (se o polinômio tem grau n dizemos que é algébrico de grau n, onde n é mínimo com esta propriedade). Caso contrário o número é dito *transcendente.* O Teorema de Liouville (Teorema 6.2) carateriza os números algébricos como aqueles que não admitem boas aproximações (excedem uma determinada ordem) por números racionais no seguinte sentido: para todo número algébrico x de grau n existe uma constante $C(x) > 0$ tal que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \frac{C(x)}{b^n},$$

para todo a, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, tais que $x \neq \frac{a}{b}$. O Teorema de Liouville fornecerá um algoritmo (que usa frações contínuas) para construir números transcendentes x para os quais para cada $n \in \mathbb{N}$ existem números $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Z}$ tais que a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^n}$$

é satisfeita. Chamaremos estes números de *números de Liouville.*

Apresentamos também os primeiros resultados do texto envolvendo medida de Lebesgue (neste capítulo consideramos apenas conjuntos de medida zero, o que simplifica consideravelmente o estudo). Por exemplo, o conjunto dos números algébricos tem medida zero, portanto, os números transcendentes têm medida total. Provaremos, por exemplo, que o conjunto dos números de Liouville tem medida zero, assim os números transcendentes que não são de Liouville tem medida total. Aqui aparece pela primera vez a importante noção de conjunto *residual*, um tipo especial de conjunto denso (veja o Teorema de Baire 6.8) que usaremos no estudo da dinâmica da transformação de Gauss.

A última parte deste capítulo é dedicada ao estudo dos números x com expansões em frações contínuas de "tipo periódico", o caso mais simples ocorre quando existe k tal que

$$x = [a_1(x), \dots, a_k(a), a_1(x), \dots], \text{ ou seja, } a_i(x) = a_{i+k}(x), \forall i.$$

O número de ouro, que já apareceu no Capítulo 4, é um exemplo deste tipo de números. O Teorema de Lagrange 6.12 afirma que um número x tem expansão de tipo periódico se, e somente se, é raíz de um polinômio de grau dois com coeficientes inteiros.

Destinaremos o Capítulo 7 ao estudo das propriedades topológicas (transitividade, existência de órbitas densas, densidade de pontos periódicos) da transformação de Gauss.

Em primeiro lugar apresentaremos alguns exemplos mais simples de expansões de números reais com uma dinâmica subjacente, isto é, os dígitos da expansão de um número x (o equivalente aos quocientes da expansão em frações contínuas) são obtidos considerando iterações de funções mais simples que a transformação de Gauss (teremos fórmulas similares à expressão em (1.1)). Veremos três casos: as expansões n-árias (associadas à função $n\,x \bmod \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), as expansões β (associadas à função $\beta\,x \bmod \mathbb{Z}$, $\beta \in (1,2)$) e as séries de Lüroth (uma versão afim da transformação de Gauss).

Neste capítulo daremos uma prova dinâmica do Teorema 3.1 (correspondência biunívoca entre os números irracionais e as seqüências infinitas de números naturais). Veremos que os pontos periódicos da transformação de Gauss (i.e., $p \in [0,1)$ tais que $T^n(p) = p$ para algum $n \in \mathbb{N}$) são densos no intervalo $[0,1)$. Portanto, pelo Teorema de Lagrange obtemos que os números algébricos de grau dois são densos em $\mathbb{R}$.

O principal resultado do capítulo é a Proposição 7.7 que afirma que a transformação de Gauss é *topologicamente misturadora*: dados qualquer par de intervalos abertos U e V do intervalo $(0,1)$ há órbitas indo de U a V, isto é, existem $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $T^n(x) \in V$. O significado desta propriedade é que iterando positivamente qualquer intervalo aberto U (isto é, considerarando as imagens $T^i(U)$, $i \geq 0$) os conjuntos $T^i(U)$ se distribuem ao longo de todo o intervalo de $(0,1)$. A seguinte etapa é entender melhor esta distribuição, para isso introduziremos ferramentas ergódicas (probabilísticas).

No Capítulo 8 estudaremos algumas propriedades ergódicas da transformação de Gauss e obteremos versões probabilísticas de alguns resultados topológicos do Capítulo 7. Por exemplo, responderemos ao problema da freqüência assintótica dos quocientes que discutimos no início da introdução.

Iniciaremos o Capítulo 8 apresentando alguns resultados de teoria de medida e de integração (Seções 8.1 e 8.2). Na Seção 8.3 provaremos o Teorema Ergódico de Birkhoff (Teorema 8.6), que estabelece a relação entre dinâmica (iterações por T) e medida. Nessa seção também introduziremos a noção de *ergodicidade*.

De forma muito resumida, a ergodicidade é uma versão em termos de medida da noção topológica de transitividade. Por exemplo, uma conseqüência do Teorema de Birkhoff é que se uma medida ν é ergódica para uma transformação G, a freqüência assintótica com que a G-órbita de um ponto "típico" x visita um conjunto A é exatamente a medida $\nu(A)$ do conjunto. Por ponto típico entendemos pontos em um conjunto de medida total (isto corresponde à noção de ν-quase todo ponto, resumidamente ν-q.t.p.).

Provaremos no Teorema 8.13 que a transformação de Gauss possui uma medida ergódica μ (a chamada medida de Gauss) que é equivalente à medida de Lebesgue λ (isto é, as medidas de Lebesgue e de Gauss têm os mesmos conjuntos de medida zero e de medida total) Assim propriedades para quase todo ponto (q.t.p.) para a medida de Gauss são também propriedades q.t.p. para a medida de Lebesgue e vice-versa.

Usando a medida ergódica de Gauss e o Teorema de Birkhoff obteremos resultados probabilísticos sobre os quocientes da expansão em frações contínuas de números reais "típicos"(Proposições 8.21 e 8.22). Por exemplo, veremos que para quase todo ponto x se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)\right)=\infty.$$

Finalmente, apresentaremos a noção de expoente de Lyapunov (um número que mede a caoticidade de uma transformação e que generaliza a noção de derivada média de um ponto periódico) e o calcularemos para a transformação de Gauss.

No último capítulo do livro, usando os resultados ergódicos do capítulo precedente, daremos versões em termos de medida de Lebesgue do Teorema 5.18 sobre aproximações de números reais por racionais. Veremos que o conjunto dos números reais x cujos quocientes $a_i(x)$ são limitados tem medida nula (Teorema 9.3). Este resultado implicará que o conjunto dos números reais $x \in (0,1)$ para os quais a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

tem infinitas soluções para todo $C > 0$, tem de medida de Lebesgue total. Finalmente, no Teorema 9.11 (Teorema de Khinchin) daremos uma versão mais geral destes resultados.

Este texto é uma pequena introdução aos Sistemas Dinâmicos através das Frações Contínuas onde muitos tópicos são apenas esboçados. Por exemplo, apenas mencionamos o denominado *problema de Gauss* tratado no último capítulo do texto clássico de Khinchin [8]. O recente livro [7] contém um tratamento amplo da teoria métrica de frações contínuas e outras representações de números reais. Sobre este último tema, desenvolvido aqui brevemente, veja [5] que é uma excelente introdução à teoria ergódica de números. Outros textos recomendáveis sobre frações contínuas são [9, 14]. Uma introdução accesível à teoria dos números é [12].

Os interessados na Teoria Ergódica podem continuar o estudo nos livros clássicos [2, 10, 19] ou no texto do 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, [11]. Finalmente, um ótimo material para um primeiro curso de Dinâmica é [6], [3] é uma excelente continuação.

Certamente, a escolha destes textos é de caráter bastante pessoal, naturalmente existem outros bons textos disponíveis.

Capítulo 2

Expansão em frações contínuas e a Transformação de Gauss

Neste capítulo veremos primeiro que dado qualquer número racional x existe uma seqüência finita $(a_j)_{j=0}^{k}$ de números naturais tal que podemos escrever o número x da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}.$$

onde $a_0 = \lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x (isto é, o menor $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$). Esta expressão é *uma expansão (ou representação) em frações contínuas* de x. Veremos que no caso em que x é irracional existe uma seqüência infinita $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que x é o limite da seqüência de números racionais

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Os números a_i são os chamados *quocientes* de x e as frações (números racionais) p_k/q_k são os *convergentes* de x.

Usaremos a seguinte notação, dado $k \geq 1$ e uma família finita de números naturais $(a_i)_{i=1}^{k}$, escrevemos

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] = \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Observamos que escrevemos *uma* e não *a* expansão em frações contínuas de x. Há dois problemas a considerar, o primeiro é ver que todo número real possui uma expansão em frações contínuas. O segundo problema é discutir a unicidade desta expansão. Resolvidos estes problemas, *a expansão em frações contínuas* de um número estará (essencialmente) univocamente definida.

É conveniente ter em mente outras expansões de números reais que você já conhece (discutiremos sucintamente outras expansões na Seção 7.1). Por exemplo, o número 1 possui duas expansões decimais $1.0\bar{0}\ldots$ e $0.99\bar{9}\ldots$. Isto significa que $1 = \sum_{i=1}^{\infty}(9)\,10^{-i} = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(9)\,10^{-i}$. No nosso caso temos uma situação similar, por exemplo, $1/3 = [3] = [2, 1]$.

Na Seção 2.1 usaremos o Algoritmo da Divisão para obter expansões em frações contínuas de números racionais. Veremos que um número é racional se, e somente se, sua expansão em frações contínuas é finita. Na Seção 2.2 explicaremos a relação da nossa construção com a transformação de Gauss T. Esta transformação será a nossa principal ferramenta ao longo do texto. Veremos que para determinar a expansão em frações contínuas de um número temos que considerar a órbita de x pela transformação T, isto é, o conjunto de pontos

$T^n(x)$, onde, de forma indutiva, $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$. Esta relação nos permitirá fazer uma abordagem dinâmica no estudo das frações contínuas.

2.1 Expansão em frações contínuas de números racionais

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema que segue do Algoritmo da Divisão:

Teorema 2.1. *Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, possui uma expansão em frações contínuas finita, isto é, existe uma seqüência finita $(a_k)_{k=0}^m$ de números naturais tais que*

$$x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_k].$$

Observamos que esta expansão não é necessariamente única. Por exemplo,

$$\frac{3}{4} = [1, 3] = [1, 2, 1], \qquad \frac{1}{3} = [3] = [2, 1].$$

Observe que nestes casos estamos substituindo a_n (o último termo da expansão) por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$, obtendo desta forma duas expansões diferentes. Por outro lado, nossa construção usando o Algoritmo da Divisão fornece uma única expansão, que é a mais curta, para os números racionais. Veremos que os números irracionais têm uma única expansão. De fato, usando a transformação de Gauss veremos que existe uma forma canônica de associar a um número real *sua* expansão em frações contínuas.

Observe que é imediato que se $a_0, a_1, \ldots, a_m$ são números naturais então $a_0 + [a_1, \ldots, a_m]$ é um número racional. Portanto, a volta do teorema é imediata. Assim o ponto chave é ver como obter a expansão em frações contínuas de números racionais.

O Teorema 2.1 decorrerá da seguinte proposição que garante que um número racional possui uma expansão finita. De fato, a prova da proposição é construtiva e explica como obter uma expansão para números racionais.

Proposição 2.2. *Seja x um número racional no intervalo $(0,1)$. Então existem números naturais $a_1,\dots,a_n$ tais que*

$$x = [a_1,\dots,a_n].$$

A proposição implica que todo número racional do intervalo $(0,1)$ possui uma expansão finita em frações contínuas. Se $x \notin (0,1)$ temos que $x - \lfloor x \rfloor \in (0,1)$, portanto $x - \lfloor x \rfloor = [a_1,\dots,a_m]$ e $x = a_0 + [a_1,\dots,a_m]$, onde $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Portanto, a partir de agora restringiremos nossa atenção a números do intervalo $(0,1)$. Assim podemos supor que $x = \dfrac{r_1}{r_0}$ onde $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, $r_0 > r_1 > 0$, são primos entre si.

Para obter a expansão em frações contínuas de x faremos uso do Algoritmo da Divisão:

Algoritmo 2.3 (da Divisão de Euclides). *Dados dois números naturais a e b, $a \geq b$, escrevemos*

$$a = b\,q + p,$$

onde p e q são números naturais tais que $0 \leq p < b$. Os números p e q estão unicamente determinados.

Construtivamente, definimos p e q como segue. O número natural q é dado (de forma única) pelas relações

$$b\,q \leq a \quad e \quad b\,(q+1) > a.$$

Então, por construção, $p = (a - b\,q)$ é necessariamente estritamente menor do que a.

Prova da Proposição 2.2: Por hipótese, temos que $x = \dfrac{r_1}{r_0}$, onde $r_1 < r_0$ e r_0 e r_1 são números naturais primos entre si. Usando o Algoritmo da Divisão, obtemos números naturais $a_1 \geq 1$ e $r_2 \geq 0$, com $0 \leq r_2 < r_1$, tais que:

$$r_0 = a_1\,r_1 + r_2, \quad a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Pelo Algoritmo da Divisão temos que a_1 e r_2 estão determinados de forma única. Se r_2 for zero, o processo termina:

$$x = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_1}{a_1\,r_1 + r_2} = \frac{r_1}{a_1\,r_1} = \frac{1}{a_1} = [a_1].$$

Caso contrário, usando novamente o Algoritmo da Divisão, escrevemos

$$r_1 = a_2\,r_2 + r_3, \quad a_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor,$$

onde $0 \leq r_3 < r_2 < r_1$, obtendo

$$r_0 = a_1\,(a_2\,r_2 + r_3) + r_2.$$

Novamente, se r_3 for nulo o processo termina:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_1}{r_0} = \frac{a_2\,r_2 + r_3}{a_1\,(a_2\,r_2 + r_3) + r_2} = \\ &= \frac{a_2\,r_2}{a_1\,(a_2\,r_2) + r_2} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [a_1, a_2]. \end{aligned}$$

Caso contrário, $r_3 \neq 0$, obtemos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_1}{r_0} = \frac{a_2\,r_2 + r_3}{a_1\,(a_2\,r_2 + r_3) + r_2} = \\ &= \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{a_2\,r_2 + r_3}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_3}}} = \\ &= \left[a_1, a_2 + \frac{r_3}{r_2}\right]. \end{aligned}$$

Lembre que na expressão $[b_1, b_2, \ldots, b_m]$ somente necessitamos que os números b_i sejam estritamente positivos.

A seguir dividimos r_2 por r_3 e o processo continua de forma indutiva, obtemos assim seqüências $(a_k)_k$ e $(r_k)_k$ de números naturais que verificam a relação

$$r_k = a_{k+1}\,r_{k+1} + r_{k+2}, \quad a_{k+1} = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor,$$

onde

$$r_{k+2} < r_{k+1} < r_k \cdots < r_1 < r_0,$$

e expressões da forma

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{r_{k+1}}{r_k}}}} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}\right].$$

Este processo é necessariamente finito (há no máximo r_0 etapas). Portanto, existe um primeiro n tal que $r_{n+1} = 0$. Em tal caso,

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_1, \ldots, a_n].$$

Assim concluímos a prova. $\square$

Observação 2.4. Na prova da proposição a seqüência do dos quocientes a_k verifica

$$a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor, \quad a_2 = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor, \quad \cdots, \quad a_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor,$$

onde lembramos que $\lfloor \varsigma \rfloor$ denota a parte inteira de ς.

Observamos que neste processo os números naturais $a_1, \ldots, a_n$ e os *restos* $r_1, \ldots, r_n$ estão determinados de forma única.

Exemplo 2.5. Calcularemos a expansão em frações contínuas dos números racionais $\frac{23}{28}$ e $\frac{79}{28}$,

$$\frac{23}{28} = [1, 4, 1, 1, 2], \quad \frac{79}{28} = 2 + [1, 4, 1, 1, 2].$$

Usando o Algoritmo da Divisão obtemos

$$28 = \mathbf{1} \cdot 23 + 5, \quad 23 = \mathbf{4} \cdot 5 + 3$$

$$5 = \mathbf{1} \cdot 3 + 2, \quad 3 = \mathbf{1} \cdot 2 + 1, \quad 2 = \mathbf{2} \cdot 1 + 0.$$

A partir dessas igualdades obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{23}{28} &= \frac{1}{\frac{28}{23}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{23}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{23}{5}}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{3}{5}}} = \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{5}{3}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}}} = \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{23}{28} = [1, 4, 1, 1, 2].$$

Finalmente observamos que

$$\frac{79}{28} = 2 + \frac{23}{28} = 2 + [1, 4, 1, 1, 2].$$

2.2 A transformação de Gauss e a expansão em frações contínuas

Nesta seção introduziremos a *transformação de Gauss* e veremos a relação entre a expansão em frações contínuas de um número racional

x obtida usando o Algoritmo da Divisão e as iterações de x pela transformação de Gauss.

Usando a transformação da Gauss, obteremos a seqüência $a_i = a_i(x)$ dos quocientes de qualquer número real $x \in [0,1)$ de forma análoga a como fizemos com os números racionais na Seção 2.2.

Definição 2.6. *A transformação de Gauss T é definida por*

$$T : [0,1) \to [0,1), \quad T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0, \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

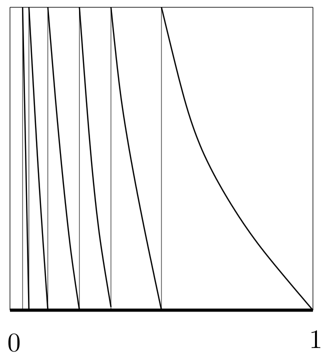

Figura 2.1: A transformação de Gauss

Definimos $T^0(x) = x$ e indutivamente $T^{i+1}(x) = T(T^i(x))$.

Observação 2.7. Um número $x \in (0,1)$ é irracional se, e somente se, $T(x)$ é irracional. Portanto, um número x é irracional se, e somente se, $T^n(x)$ é irracional (logo não nulo) para todo $n \geq 0$.

2.2.1 Caso Racional

Relacionaremos agora a transformação de Gauss e a expansão em frações contínuas de um número racional. Assumiremos que as expansões em frações contínuas dos números racionais são obtidas aplicando o Algoritmo da Divisão.

Considere $x = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ e lembre que a construção no capítulo anterior implica que se um número racional x verifica $x = [a_1, \ldots, a_k]$ então $r_{k+1} = 0$ e $r_0, r_1, \ldots, r_k$ são diferentes de zero. Escrevemos

$$x = T_0 = \frac{r_1}{r_0},\ T_1 = \frac{r_2}{r_1},\ \ldots,\ T_{k-1} = \frac{r_k}{r_{k-1}},\ T_k = \frac{r_{k+1}}{r_k} = 0. \quad (2.1)$$

Lembrando a definição dos a_n e dos r_n obtemos,

$$r_0 = a_1\, r_1 + r_2, \quad \frac{r_0}{r_1} = \frac{1}{x} = a_1 + T_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + T_1.$$

Portanto, da definição da transformação de Gauss,

$$T_1 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_0}{r_1} - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = T(x).$$

Além disso,

$$a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^0(x)} \right\rfloor.$$

Suponha agora indutivamente que $T^j(x) = T_j$, que a_j e r_j estão definidos e que $a_j = \lfloor 1/T^{j-1}(x) \rfloor$, para todo $1 \leq j \leq n < k$.

Escrevemos (usando o Algoritmo da Divisão)

$$r_n = a_{n+1}\, r_{n+1} + r_{n+2}$$

e observamos que

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^n(x)} \right\rfloor.$$

Logo,

$$T_{n+1} = \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor.$$

Por outro lado, pela hipótese de indução e das expressões acima,

$$\begin{aligned} T^{n+1}(x) &= T(T^n(x)) = T(T_n) = T\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right) = \\ &= \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = T_{n+1} \end{aligned}.$$

Assim, obtemos das expressões acima que $T^n(x) = T_n$ e que $a_n = \lfloor 1/T^{n-1}(x) \rfloor$ para todo n.

Estas expressões relacionam (no caso racional, até o momento) os quocientes a_i de um número racional x e os seus iterados pela transformação de Gauss:

$$x = [a_1, \dots, a_k], \qquad a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor, \quad n = 1, \dots, k.$$

2.2.2 Caso irracional

A construção na Seção 2.2.1 sugere a seguinte notação, dado $x \in [0, 1)$ escrevemos

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor \tag{2.2}$$

e definimos de forma indutiva, para $n \geq 1$,

$$a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x)) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor. \tag{2.3}$$

Pelas definições de $T(x)$ e $a_1(x)$ temos

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)}.$$

Repetindo o processo,

$$T(x) = \frac{1}{a_1(T(x)) + T(T(x))} = \frac{1}{a_2(x) + T^2(x)}.$$

Portanto, indutivamente obtemos

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}},$$

isto é,

$$x = [a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x) + T^n(x)]. \qquad (2.4)$$

Quando x é um número real qualquer, escolhemos $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Portanto, $x - a_0 \in [0, 1)$. Aplicando o processo anterior a $x - a_0$ temos que

$$x = \lfloor x \rfloor + [a_1(x - \lfloor x \rfloor), \ldots, a_n(x - \lfloor x \rfloor) + T^n(x - \lfloor x \rfloor)] .$$

Escrevemos

$$a_0(x) = \lfloor x \rfloor, \qquad a_i(x) = a_i(x - \lfloor x \rfloor), \quad i \geq 1,$$

e obtemos

$$x = a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) + T^n(x - \lfloor x \rfloor)] .$$

Assim, dado um número x irracional temos uma seqüência $(a_k(x))_{k\geq 0}$ infinita de números naturais e uma seqüencia de números racionais $([a_1(x), \ldots, a_k(x)])_{k\geq 0}$. A discussão precedente nos leva à seguinte definição:

Definição 2.8. *Considere $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que*

- *o número inteiro $a_n(x)$ é o n-*ésimo quociente *de x;*
- *o número racional $a_0(x) + [a_1(x), \ldots, a_n(x)] = p_n(x)/q_n(x)$ é o n-*ésimo convergente *de x.*

Observação 2.9. No caso em que x é racional as seqüências dos quocientes e dos convergentes são finitas, finaliza na etapa n-ésima quando $x = a_0(x) + [a_1(x), \ldots, a_n(x)]$. Também observamos que no caso racional os quocientes $a_i(x)$ obtidos são os mesmos que os dados pelo Algoritmo da Divisão.

Finalmente, quando escrevemos $p_n(x)/q_n(x)$ expressamos duas coisas, um número racional e uma representação dele onde $p_n(x)$ e $q_n(x)$ são relativamente primos (sem divisor comum diferente de um).

Por enquanto, a associação dos quocientes a um número x é puramente formal. No próximo capítulo veremos dois resultados (que formulamos para números em $(0, 1)$) que fundamentarão a nossa construção:

- Considere o conjunto dos números irracionais do intervalo $(0,1)$ e a transformação $\mathfrak{G}(x) = (a_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ que associa a cada número irracional x sua seqüência infinita de quocientes. A função $\mathfrak{G}$ é uma bijeção entre os números irracionais de $(0,1)$ e o conjunto das seqüências de números naturais (Teorema 3.1).

- Para todo número irracional $x \in (0,1)$ a seqüência infinita dos seus convergentes verifica $[a_1(x),\dots,a_n(x)] \to x$ (Teorema 3.2).

Provaremos estes resultados no próximo capítulo.

Fecharemos este capítulo com um exemplo simples de expansão em frações contínuas de um número irracional:

Exemplo 2.10 (Expansão de $\sqrt{3}$). Os quocientes de $\sqrt{3}$ formam uma seqüência períodica, onde

$$a_{2\,i+1}(\sqrt{3}) = 1 \quad \text{e} \quad a_{2\,i+2}(\sqrt{3}) = 2,$$

para todo $i \geq 0$. Escrevendo

$$a_0(\sqrt{3}) = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1,$$

temos

$$1 + [1,2,1,2,\dots].$$

Diremos que $1 + [1,2,1,2,\dots]$ é a expansão em frações contínuas de $\sqrt{3}$. A seqüência $1 + [1,2,1,2,\dots]$ converge para $\sqrt{3}$. Provaremos no Teorema 6.12, que um número tem uma expansão em frações contínuas períodica se, e somente se, é raíz de um polinômio de grau dois.

Prova: Temos $a_0 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$ e aplicamos a transformação de Gauss a $y = \sqrt{3} - 1 \in [0,1)$,

$$\begin{aligned} a_1(y) &= \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1. \end{aligned}$$

Para calcular $a_2(y)$,

$$
\begin{aligned}
a_2(y) &= \left\lfloor \frac{1}{T(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{y} - \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} \right\rfloor = \\
&= \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\,(\sqrt{3}+1)}{2} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2.
\end{aligned}
$$

Observamos que o processo de calcular os quocientes $a_i(y)$ é o mesmo que o de determinar as imagens $T^i(y)$. No cálculo anterior obtivemos

$$
\frac{1}{y} = \frac{1}{T^0(y)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \qquad \frac{1}{T^1(y)} = \sqrt{3}+1.
$$

Reformulamos agora a hipótese de indução de uma forma mais conveniente para os nossos objetivos,

$$
\frac{1}{T^{2\,i}(y)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \qquad \frac{1}{T^{2\,i+1}(y)} = \sqrt{3}+1.
$$

Observe que já obtivemos estas relações para $i = 0$ e $i = 1$. Suponha agora verdadeiras para todo $i = 0, \ldots, n$. Então, lembrando os cálculos já feitos para determinar $a_1(x)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
a_{2\,i+1}(y) &= \left\lfloor \frac{1}{T^{2\,i}(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1, \\
a_{2\,i+2}(y) &= \left\lfloor \frac{1}{T^{2\,i+1}(y)} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2.
\end{aligned}
$$

Para terminar a prova falta ver que a relação para os inversos dos $T^i(y)$ vale para todo n, mas isto decorre exatamente como nos casos $i = 0, 1$. Portanto, a expansão em frações contínuas de $\sqrt{3}$ é dada por $1 + [1, 2, 1, 2, ...]$. $\square$

2.3 Exercícios

Exercício 2.1. Considere um número racional x e suponha que sua expansão em frações contínuas (obtida usando o Algoritmo da Divisão) é $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ com $n \geq 2$. Prove que $a_n \geq 2$.

Exercício 2.2. Determine a expansão dos números do Exemplo 2.5 usando a transformação de Gauss.

Exercício 2.3. Determine a expansão em frações contínuas de $\sqrt{2}$.

Capítulo 3

Convergentes e Quocientes

Neste capítulo continuaremos o estudo da expansão em frações contínuas de números reais (o caso interessante é o dos números irracionais). No capítulo anterior, a cada número irracional x associamos, usando a transformação de Gauss, sua seqüência infinita $(a_k)_{k\geq 0}$ de quocientes. Veremos no Teorema 3.2 que se verifica

$$\begin{aligned} x &= \lim_{k\to\infty} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}} = \\ &= a_0 + \lim_{k\to\infty} [a_1, \dots, a_k]. \end{aligned}$$

O segundo resultado importante do capítulo é o Teorema 3.1, que afirma que a seqüência dos quocientes de um número irracional é infinita e que toda seqüência infinita de números naturais é a seqüência dos quocientes de um único número irracional. Obtemos assim uma correspondência biunívoca entre os números irracionais e as seqüências infinitas de números naturais.

Formularemos de forma precisa estes resultados. Denote por Σ_∞ o conjunto das seqüências infinitas de números naturais, $\iota = (\iota_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$\iota_k \in \mathbb{N}$ e por $\mathbb{I}_{(0,1)}$ o conjunto dos números irracionais do intervalo $(0,1)$. Considere a transformação

$$\mathfrak{G}\colon \mathbb{I}_{(0,1)} \to \Sigma_\infty, \quad \mathfrak{G}(x) = (a_k(x))_k$$

que associa a cada número irracional x sua seqüência de quocientes.

Teorema 3.1. *A função $\mathfrak{G}$ é uma bijeção.*

Por enquanto, a associação dos quocientes e convergentes a um número x é puramente formal. O Teorema 2.1 afirma que se x é racional então existe n tal que

$$x = a_0 + [a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)].$$

Veremos que os convergentes de um número convergem para ele:

Teorema 3.2. *Para todo número irracional x a seqüência infinita dos seus convergentes verifica*

$$\lim_{n\to\infty} a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x.$$

Como conseqüência da prova obteremos que os convergentes de um número x se aproximam de forma rápida dele. A Observação 3.6 afirma que

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

No Capítulo 5 estudaremos como um número é aproximado pelos seus convergentes e veremos que estes são de fato suas *melhores aproximações* por números racionais.

Para provar estes resultados necessitaremos de uma série de propriedades aritméticas dos convergentes, que usaremos sistematicamente ao longo do texto e terão um papel essencial. O estudo destas propriedades é feito na Seção 3.1. Na Seção 3.1.1 veremos como as propriedades dos convergentes podem ser obtidas usando uma linguagem matricial. Finalmente, na Seção 3.1.2 daremos uma interpretação geométrica dos convergentes. Esta discussão explicará a figura inicial do texto (Figura 1).

As provas dos teoremas acima encontram-se na Seção 3.2. Obteremos primeiro, de forma relativamente simples, o Teorema 3.2 a partir das propriedades dos convergentes.

Para provar o Teorema 3.1, o primeiro passo é ver que para toda seqüência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturais a seqüência $([a_1,\dots,a_k])_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, isto é, $[a_1,\dots,a_k]\to x$ para algum $x\in\mathbb{R}$ (Teorema 3.8). A segunda etapa é ver que a expansão em frações contínuas do limite x é dada exatamente pelos a_k's e que x é irracional.

3.1 Propriedades aritméticas dos convergentes

Para provar a *convergência dos convergentes* o primeiro passo é ver que os convergentes de um número x verificam algumas propriedades aritméticas (Propriedades (A), (B) e (C) abaixo).

A seguir fixaremos x e, para simplificar a notação, escreveremos a_i, p_i e q_i no lugar de $a_i(x)$, $p_i(x)$ e $q_i(x)$ quando não for necessário explicitar o número x (no item (B III) esta dependência deve ser necessariamente explícita).

Por convenção, escreveremos

$$q_{-1}(x)=0,\quad p_0(x)=a_0\quad \text{e}\quad p_{-1}(x)=q_0(x)=1.$$

Proposição 3.3 (Propriedades dos convergentes).

(A) *Para todo $n\geq 1$ se verifica*

$$p_n=a_n\,p_{n-1}+p_{n-2},\quad \textit{e}\quad q_n=a_n\,q_{n-1}+q_{n-2}.$$

(B) *Para todo $n\geq 0$,*

$$\textbf{(I)}\quad x=\frac{p_n+(T^n(x))\,p_{n-1}}{q_n+(T^n(x))\,q_{n-1}},$$

$$\textbf{(II)}\quad p_{n-1}\,q_n-p_n\,q_{n-1}=(-1)^n,$$

$$\textbf{(III)}\quad p_n(x)=q_{n-1}(T(x)).$$

(C) *Para todo $n \geq 2$ se verifica*

$$p_n(x) \geq 2^{(n-2)/2} \quad e \quad q_n(x) \geq 2^{(n-1)/2}.$$

Observação 3.4. Note que a Propriedade (B II) garante que qualquer divisor comum de p_n e q_n deve ser também um divisor de ± 1. Portanto, os números p_n e q_n são primos entre si e a fração p_n/q_n é irredutível.

Provaremos apenas a Propriedade (A), as outras seguem de forma análoga usando o método de indução. As provas dos itens (B) e (C) estão propostas como questões no Exercício 3.2.

Lema 3.5. *A seqüência de convergentes p_n/q_n verifica a Propriedade (A).*

Prova: Para provar a Propriedade (A), observamos que

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0$$

e que

$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + [a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1\, a_0 + 1}{a_1}.$$

Portanto, podemos escolher

$$p_1 = a_1\, a_0 + 1 \quad \text{e} \quad q_1 = a_1,$$

obtendo (A) para $n = 1$.

Para $n = 2$, por definição, temos

$$a_0 + [a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0\, a_2\, a_1 + a_0 + a_2}{a_2\, a_1 + 1}.$$

Portanto, podemos escolher

$$\begin{aligned} p_2 &= a_0\, a_2\, a_1 + a_0 + a_2 = a_2\,(a_1\, a_0 + 1) + a_0, \\ q_2 &= a_2\, a_1 + 1, \end{aligned}$$

obtendo (A) para $n = 2$.

Antes de provar (A) para $(n+1)$ necessitamos da seguinte propriedade dos p_k e q_k: *para todo $k \leq n$, os números inteiros positivos p_k e q_k dependem somente dos quocientes $a_0, a_1, \ldots, a_k$ e são independentes de a_{k+1}.* Para provar essa afirmação observamos que, pela hipótese de indução,

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_{n-1}\, p_{n-2} + p_{n-3}}{a_{n-1}\, q_{n-2} + q_{n-3}}.$$

e assim os números inteiros positivos p_{n-1}, q_{n-1} dependem somente dos inteiros positivos $a_{n-1}, p_{n-2}, p_{n-3}, q_{n-2}, q_{n-3}$. Novamente, como

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_{n-2}\, p_{n-3} + p_{n-4}}{a_{n-2}\, q_{n-3} + q_{n-4}},$$

temos que os inteiros positivos p_{n-2}, q_{n-2} dependem somente de a_{n-2}, p_{n-3}, p_{n-4}, q_{n-3} e q_{n-4}. Assim, indutivamente, obtemos a propriedade.

Para simplificar a notação suponhamos que $a_0(x) = 0$ (isto é, $x \in [0,1)$), observamos que

$$\begin{aligned}
[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] &= \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}} = \\
&= \left[a_1, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right].
\end{aligned}$$

Lembramos que o “colchete”$[x_1, \ldots, x_n]$ está definido para números estritamente positivos.

Agora estamos prontos provar a Propriedade (A) para $n+1$. Suponha, indutivamente, que a propriedade é verdadeira para todo

k menor ou igual do que n,

$$[a_1, \dots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}} =$$

$$= \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Lembre que o $(n+1)$-ésimo convergente $[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]$ é obtido substituindo na expressão do n-ésimo convergente $[a_1, \dots, a_n]$ o número a_n por $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$, portanto,

$$[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right].$$

Observamos que a substituição de a_n por $(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$ não altera a definição dos $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ precedentes. Portanto, como os números $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$ são independentes do quociente a_n, eles não se alteram com esta substituição. Isto é,

$$[a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_n\, a_{n+1}\, p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2}\, a_{n+1}}{a_n\, a_{n+1}\, q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2}\, a_{n+1}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}\,(a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}\,(a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}.$$

Lembrando que pela hipótese de indução

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}$$

obtemos

$$[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \frac{a_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + q_{n-1}}.$$

Portanto, podemos escolher

$$p_{n+1} = a_{n+1}\, p_n + p_{n-1}, \quad q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1},$$

que conclui a prova da Propriedade (A). $\square$

Com as Propriedades (A), (B) e (C) provaremos na Seção 3.2 que a seqüência dos convergentes de um número converge para o próprio número (ver o Teorema 3.2).

3.1.1 Convergentes e matrizes

Podemos escrever a Propriedade (A) usando matrizes. Definimos

$$M_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \qquad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Observe que

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} a_0 & p_1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Também se verifica que

$$\begin{aligned} M_{n-1}\, A_n &= \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} + a_n\, p_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-2} + a_n\, q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Assim a Propriedade (A) pode ser escrita em forma matricial,

$$M_n = M_{n-1}\, A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, indutivamente,

$$M_n = M_0\, A_1\, A_2 \cdots A_n.$$

Isto é,

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\det(M_n) = (-1)^n.$$

Isto é,

$$p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n.$$

Reobtemos assim a Propriedade (B II).

Observe que as matrizes M_n e A_n pertencem ao grupo multiplicativo $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ das matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante ± 1. Associada a qualquer matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$$

existe uma transformação de Möbius $\mathbb{M}$ do plano complexo compactificado $\hat{\mathbb{C}}$ definida como segue (veja [4, Capítulo III.3]): estabelecemos a seguinte identificação entre os números complexos e as matrizes 2×1,

$$\frac{z}{w} : = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad z : = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando a notação matricial e cometendo um pequeno abuso de notação, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(z) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} : = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}. \end{aligned}$$

Da definição de M_n e da relação $M_n = M_{n-1}\, A_n$ segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(z) &= M_n \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n + z\, p_{n-1} \\ q_n + z\, q_{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= M_{n-1}\, A_n \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = M_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ a_n + z \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se $z \neq -a_n$, na nossa identificação temos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_n + z \end{pmatrix} : = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_n+z} \\ \\ 1 \end{pmatrix} : = \frac{1}{a_n + z}.$$

Portanto, se $z \neq a_n$,

$$\mathbb{M}_n(z) = \mathbb{M}_{n-1}\left(\frac{1}{a_n + z}\right).$$

Para $z = a_n$ temos $M_n(z) = \infty$. No caso particular em que $z = 0$ temos

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Isto é,

$$\mathbb{M}_n(0) = \frac{p_n}{q_n} = a_0 + [a_1, \ldots, a_n].$$

Assim, a Equação (3.1) para $(n-1)$ fornece

$$\begin{aligned} M_{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ a_n + z \end{pmatrix} &= M_{n-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_n+z} \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} p_{n-1} + \frac{1}{a_n+z}\, p_{n-2} \\ \\ q_{n-1} + \frac{1}{a_n+z}\, q_{n-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{p_{n-1} + \frac{1}{a_n+z}\, p_{n-2}}{q_{n-1} + \frac{1}{a_n+z}\, q_{n-2}} &= \frac{a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} + z\, p_{n-1}}{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} + z\, q_{n-1}} = \\ &= \frac{p_n + z\, p_{n-1}}{q_n + z\, q_{n-1}} = a_0 + [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + z]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Esta última igualdade segue raciocinando exatamente como na prova do Lema 3.5 (veja o Exercício 3.3). Isto é,

$$\mathbb{M}_n(z) = \mathbb{M}_{n-1}\left(\frac{1}{a_n + z}\right) = a_0 + [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + z].$$

Finalmente, como $a_0+[a_1,\ldots,a_n+T^n(x)]=x$, lembre (2.4), fazendo $z=T^n(x)$ em (3.3) reobtemos a Propriedade (B I).

Observamos que as idéias apresentadas nesta seção servem como ponto de partida para relacionar de forma surprendente as frações contínuas com objetos mais complexos como o fluxo geodésico (grupo modular). Para esta relação veja [15].

3.1.2 Interpretação geométrica dos quocientes

Nesta seção daremos uma interpretação "geométrica" dos convergentes, que em particular explica a figura no início do texto.

Tomamos um número irracional $x=[a_1(x),a_2(x),\ldots]\in(0,1)$ e consideramos o intervalo $I_0=[0,x]\subset[0,1]$. A partir de agora, denotaremos o tamanho de um intervalo I por $|I|$. Assim, $|I_0|=x$. Como

$$a_1=a_1(x)=\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor,$$

temos que $a_1\le\dfrac{1}{x}<a_1+1$, e portanto,

$$a_1\,x\le 1<(a_1+1)\,x.$$

Isto significa que podemos colocar no máximo a_1 intervalos consecutivos de tamanho $|I_0|=x$ no intervalo $[0,1]$. Veja a Figura 3.1.

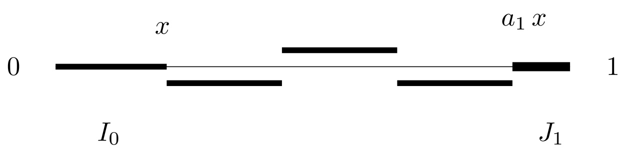

Figura 3.1: Os intervalos I_0 e J_1

Seja J_1 o intervalo de extremos $a_1\,x$ e 1, observe que $|J_1|=1-a_1\,x$. Transladamos este intervalo à origem obtendo $I_1=[0,1-a_1\,x]$. Como $|I_1|=1-a_1\,x=|J_1|$, obtemos

$$x=\frac{1}{a_1}-\frac{|I_1|}{a_1}=\frac{p_1}{q_1}-\frac{|I_1|}{a_1}. \tag{3.4}$$

Observamos que

$$\frac{|I_1|}{|I_0|} = \frac{1 - a_1\,x}{x} = \frac{1}{x} - a_1 = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = T(x). \tag{3.5}$$

Portanto,

$$a_2 = a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|I_0|}{|I_1|} \right\rfloor.$$

Então,

$$a_2 \le \frac{|I_0|}{|I_1|} < a_2 + 1.$$

Isto é,

$$a_2\,|I_1| \le |I_0| < (a_2 + 1)\,|I_1|.$$

Logo, cabem exatamente a_2 intervalos de tamanho $|I_1|$ dentro de I_0. Como no primeiro caso, disporemos estes intervalos a partir da origem. Seja J_2 o intervalo que resulta ao retirar de I_0 os a_2 intervalos consecutivos de tamanho I_1. Denotaremos por I_2 o transladado de J_2 à origem (veja a Figura 3.2). Temos

$$|I_2| = x - a_2\,|I_1| = x - a_2\,(1 - a_1\,x) = x\,(1 + a_2\,a_1) - a_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_2}{1 + a_2\,a_1} + \frac{|I_2|}{1 + a_2\,a_1} = \\ &= \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} + \frac{|I_2|}{1 + a_2\,a_1} = \qquad (3.6) \\ &= \frac{p_2}{q_2} + \frac{|I_2|}{1 + a_2\,a_1}. \end{aligned}$$

A idéia da construção é determinar quantos intervalos de tamanho $|I_2|$ cabem no intervalo I_1, obter um resto de intervalo J_3, translada-lo à origem, obtendo um intervalo I_3, e repetir o processo com os intervalos I_2 e I_3, e assim sucessivamente.

A construção é feita indutivamente. Suponhamos definidos os intervalos $I_0, I_1, \ldots, I_k$ com as propriedades acima. Denominaremos

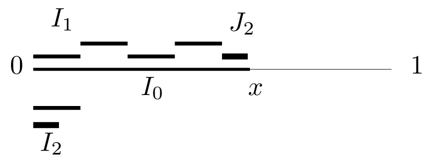

Figura 3.2: Construção do intervalo I_2

J_{k+1} o intervalo de extremos $a_{k+1}\,|I_k|$ e o extremo direito do segmento I_{k-1}, e por I_{k+1} o intervalo transladado de J_{k+1} à origem. Isto é,

$$J_{k+1} = [a_{k+1}\,|I_k|, |I_{k-1}|], \qquad I_{k+1} = [0, |I_{k-1}| - a_{k+1}\,|I_k|].$$

Provaremos que

$$\frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} = T^{k+1}(x), \quad k \geq 0. \tag{3.7}$$

O caso $k = 0$ já foi provado em (3.5). Suponha, indutivamente, que

$$\frac{|I_j|}{|I_{j-1}|} = T^j(x), \quad 1 \leq j \leq k.$$

Então, pela definição de I_{k+1},

$$\begin{aligned} \frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} \quad &= \frac{|I_{k-1}| - a_{k+1}\,|I_k|}{|I_k|} = \frac{|I_{k-1}|}{|I_k|} - a_{k+1} = \\ &= \frac{1}{T^k(x)} - a_{k+1} = \frac{1}{T^k(x)} - \left\lfloor \frac{1}{T^k(x)} \right\rfloor = T^{k+1}(x). \end{aligned}$$

Está assim provada a afirmação em (3.7).

Mostraremos agora que, para todo $k \geq 1$, temos

$$|I_k| = \begin{cases} x\,q_k - p_k, & \text{se } k \text{ é par;} \\ \\ p_k - x\,q_k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Para $k = 1$, 2 ito já foi provado nas Equações (3.4) e (3.6).

Suponha, indutivamente, que a afirmação acima é verdadeira para todo j, com $1 \leq j < k$.

Se k é um número par, temos que $k-2$ é par e $k-1$ é ímpar. Portanto, usando a Propriedade (A) e a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} |I_k| &= |I_{k-2}| - a_k\,|I_{k-1}| = \\ &= x\,q_{k-2} - p_{k-2} - a_k\,(p_{k-1} - x\,q_{k-1}) = \\ &= x\,(q_{k-2} + a_k\,q_{k-1}) - (p_{k-2} + a_k\,p_{k-1}) = x\,q_k - p_k. \end{aligned}$$

O que prova a Equação (3.8) quando k é par.

Analogamente, se k for ímpar, temos que

$$\begin{aligned} |I_k| &= |I_{k-2}| - a_k\,|I_{k-1}| = \\ &= p_{k-2} - x\,q_{k-2} - a_k\,(x\,q_{k-1} - p_{k-1}) = \\ &= (p_{k-2} + a_k\,p_{k-1}) - x\,(q_{k-2} + a_k\,q_{k-1}) = p_k - x\,q_k. \end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova da Equação (3.8).

Obtemos assim,

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_k}{q_k} + \dfrac{|I_k|}{q_k}, & \text{se } k \text{ é par;} \\[2ex] x = \dfrac{p_k}{q_k} - \dfrac{|I_k|}{q_k}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Se escolhermos $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + a_0$, o mesmo resultado vale para um número real y.

3.2 Convergência dos convergentes

No Teorema 3.2 desta seção provaremos que os convergentes de um número x convergem para ele, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} a_0(x) + [a_1(x), \ldots, a_k(x)] = x.$$

Certamente, como os números racionais têm expansão finita, esta afirmação somente é interessante no caso em que x é irracional.

Também veremos, no Teorema 3.8, que dada qualquer seqüência infinita de números naturais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência $([a_1,\ldots,a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Estes resultados são essenciais para obter a relação biunívoca entre os números irracionais e as expansões em frações contínuas infinitas estabelecida no Teorema 3.1.

3.2.1 Prova do Teorema 3.2

Lembramos que o Teorema 3.2 afirma que *para todo número irracional x a seqüência infinita dos seus convergentes verifica*

$$\lim_{n\to\infty} a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x.$$

Observamos que este teorema decorre de forma bastante direta das propriedades dos convergentes. Primeiro, provaremos o teorema para $x \in [0,1)$. Como x está fixo, omitiremos (quando possível) a dependência em x. Pela Propriedade (B I), temos

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_n\, q_n + (T^n(x)\, p_{n-1})\, q_n - p_n\, q_n - (T^n(x)\, q_{n-1})\, p_n}{q_n\,(q_n + T^n(x)\, q_{n-1})} = \\ &= \frac{T^n(x)(p_{n-1}\, q_n - q_{n-1}\, p_n)}{q_n\,(q_n + T^n(x)\, q_{n-1})}. \end{aligned}$$

Então, usando a Propriedade (B II), $p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{T^n(x)(p_{n-1}\, q_n - q_{n-1}\, p_n)}{q_n\,(q_n + T^n(x)\, q_{n-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{T^n(x)\,(-1)^n}{q_n\,(q_n + T^n(x)\, q_{n-1})} \right| = \qquad (3.9) \\ &= \frac{T^n(x)}{q_n\,(q_n + T^n(x)\, q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2}. \end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue observando que $0 \leq T^n(x) < 1$ e que q_n e q_{n-1} são positivos.

Finalmente, como a seqüência q_n é monótona crescente e $q_n > 1$ para todo $n \geq 2$ (estas afirmações seguem das Propriedades (A) e (C)), fazendo $n \to \infty$, temos que:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \to 0, \tag{3.10}$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x,$$

o que termina a prova do teorema para $x \in [0, 1)$.

Para um número real x tomamos $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ e repetimos a prova para $y = x - a_0 \in [0, 1)$, completando a demonstração do teorema. $\square$

Observação 3.6. A Equação (3.10) nos dá uma informação extremamente relevante: fornece uma estimativa superior da distância entre os convergentes de um ponto x e o próprio ponto. Usando a Propriedade (C) obtemos que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Discutiremos o problema da aproximação de um número real por números racionais no Capítulo 5.

3.2.2 Unicidade da expansão em frações contínuas (irracionais)

Vimos no Teorema 2.1, como conseqüência do Algoritmo da Divisão, que todo número racional tem expansão em frações contínuas finita. Vimos também que é possivel escolher duas representações em frações contínuas para os números racionais. Acabamos de mostrar que números irracionais possuem expansões infinitas (obtidas usando a transformação de Gauss) que convergem aos mesmos. Assim, uma pergunta natural é se um número irracional pode ter uma expansão em frações contínuas que não seja a obtida usando a transformação de Gauss. Veremos a seguir que isto não é possível.

Procederemos por absurdo, considere um número irracional $x \in (0,1)$ e suponha que $[a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ é a expansão obtida usando a transformação de Gauss e que existe $[b_1, \ldots b_n, \ldots]$ tal que

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = [b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots].$$

Afirmamos que neste caso, $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e portanto, as duas expansões são iguais. Escrevemos

$$r_1 = [a_2, \ldots, a_n, \ldots], \quad \text{e} \quad s_1 = [b_2, \ldots, b_n, \ldots].$$

Observe que r_1, $s_1 \in (0,1)$. Temos $x = [a_1 + r_1] = [b_1 + s_1]$. Portanto,

$$a_1 + r_1 = b_1 + s_1, \quad a_1 - b_1 = s_1 - r_1.$$

Afirmamos que $a_1 = b_1$. Caso contrário podemos supor que $a_1 > b_1$ e $a_1 - b_1 \geq 1$. Assim $s_1 - r_1 \geq 1$, mas isto é impossível pois $r_1, s_1 \in (0,1)$. Portanto,

$$a_1 = b_1, \quad r_1 = [a_2, \ldots, a_n, \ldots] = s_1 = [b_2, \ldots, b_n, \ldots].$$

A prova continua por indução, onde o padrão indutivo da demonstração é óbvio.

Esta prova é interessante pois explica o motivo da não unicidade da expansão dos racionais: como x é irracional necessariamente $r_1, s_1 \in (0,1)$, mas isto não acontece no caso racional (existe algum j tal que r_j ou $s_j \notin (0,1)$).

Assim, provamos o seguinte resultado.

Proposição 3.7. *Considere seqüências infinitas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturais tais que*

$$\lim_{n\to\infty} [a_1, \ldots, a_n] = \lim_{n\to\infty} [b_1, \ldots, b_n].$$

Então $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Note que para provar a proposição não é necessário supor que o limite seja irracional: como as seqüências são infinitas está garantido que os r_i e $s_i \in (0,1)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, como no caso $i=1$, temos $a_i = b_i$.

A seguir provaremos que toda expansão em frações contínuas infinita representa (converge para) um número irracional.

Teorema 3.8. *Considere uma seqüência infinita $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturais. Para cada n defina o número racional*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Então a seqüência $\dfrac{p_n}{q_n}$ converge a um número irracional $x \in (0,1)$.

Antes de provar o Teorema 3.8 veremos que os resultados acima estabelecem a relação biunívoca entre o conjunto dos números irracionais de $(0,1)$ e as expansões em frações contínuas infinitas

$$x \mapsto \mathfrak{G}(x) = (a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

mencionada no Teorema 3.1.

Prova do Teorema 3.1: Obviamente, a transformação $\mathfrak{G}$ está bem definida. Afirmamos que é injetora, se $x \neq y$ e $a_n(x) = a_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, pelo Teorema 3.2

$$x = \lim_{n\to\infty} [a_1(x), \ldots, a_n(x)] = \lim_{n\to\infty} [a_1(x), \ldots, a_n(x)] = y,$$

uma contradição. Obtemos assim a injetividade.

Para ver que a função $\mathfrak{G}$ é sobrejetora, considere qualquer seqüência de números naturais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pelo Teorema 3.8 temos que o número $x = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ está bem definido e é irracional. Pelo Teorema 3.2, temos que

$$[a_1, \ldots, a_n, \ldots] = x = [a_1(x), \ldots, a_n(x), \ldots].$$

Agora a Proposição 3.7 garante que $a_n = a_n(x)$ e portanto $\mathfrak{G}(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Prova do Teorema 3.8: Em primeiro lugar veremos que a seqüência $\dfrac{p_n}{q_n}$ é convergente. Necessitamos do seguinte resultado:

Lema 3.9. *As seqüências de convergentes verificam*

- $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ *é monótona decrescente e limitada.*
- $\dfrac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}$ *é monótona crescente e limitada.*

Portanto, as duas seqüências são convergentes

$$x^{+} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = x^{-}.$$

Uma primeira versão deste resultado se encontra no Exercício 3.1.

Prova do Lema: Pela Propriedade (B II),

$$p_{i-1}\, q_i - p_i\, q_{i-1} = (-1)^i.$$

Assim, dividindo esta expressão por $q_i\, q_{i-1}$ obtemos,

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_{i-1}\, q_i}, \quad i \geq 1. \tag{3.11}$$

Note também que pela Propriedade (A),

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-2}\, q_i - p_i\, q_{i-2}}{q_{i-2}\, q_i} =$$

$$= \frac{p_{i-2}\,(a_i\, q_{i-1} + q_{i-2}) - (a_i\, p_{i-1} + p_{i-2})\, q_{i-2}}{q_{i-2}\, q_i} =$$

$$= \frac{a_i\, p_{i-2}\, q_{i-1} + p_{i-2}\, q_{i-2} - a_i\, p_{i-1}\, q_{i-2} - p_{i-2}\, q_{i-2}}{q_{i-2}\, q_i} =$$

$$= \frac{a_i\,(p_{i-2}\, q_{i-1} - p_{i-1}\, q_{i-2})}{q_{i-2}\, q_i} = \frac{a_i\,(-1)^{i-1}}{q_{i-2}\, q_i},$$

onde a última igualdade segue usando a Propriedade (B II). Isto é,

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i\,(-1)^{i-1}}{q_{i-2}\, q_i},\ i \geq 2. \tag{3.12}$$

Tomando agora $i = 2\,n$ e $i = 2\,n+1$ em (3.11) e $i = 2\,n+1$ em (3.12) e observando que os q_i e os a_i são inteiros positivos, obtemos

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n-1}\, q_{2n}} > 0, \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}};$$

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n}\, q_{2n+1}} < 0, \qquad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Finalmente,

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{a_{2n+1}\,(-1)^{2n}}{q_{2n-1}\, q_{2n+1}} = \frac{a_{2n+1}}{q_{2n-1}\, q_{2n+1}} > 0.$$

Portanto,

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Então,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Analogamente, tomando $i = (2\,n+1)$ e $i = (2\,n+2)$ em (3.11) e $i = (2\,n+2)$ em (3.12), obtemos as seguintes desigualdades:

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n}\, q_{2n+1}} < 0, \qquad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}};$$

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n+1}\, q_{2n+2}} > 0, \qquad \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}};$$

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{a_{2n+2}\,(-1)^{2n+1}}{q_{2n}\, q_{2n+2}} < 0, \qquad \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Então,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Isto conclui a prova do lema. $\square$

Observação 3.10. De fato, na prova do lema é possível obter

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \cdots < \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Para isso, é suficiente, no primeiro passo, considerar $i = 2\,n$ e $i = (2\,n + m)$ na Equação (3.11) e $i = (2\,n + m)$ em (3.12), onde m é qualquer número ímpar. Na segunda etapa o raciocínio é similar.

A seguir veremos que $x^+ = x^-$. Como já vimos na demonstração do Lema 3.9, para $j \geq 1$,

$$\frac{p_{2\,j-1}}{q_{2\,j-1}} - \frac{p_{2\,j}}{q_{2\,j}} = \frac{(-1)^{2\,j}}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}} = \frac{1}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}.$$

Assim,

$$\left|\frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right| = \left|\frac{1}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}\right| = \frac{1}{q_{2\,j-1}\,q_{2\,j}}.$$

Como a seqüência q_i é monótona crescente e $q_i > 1$ se $i \geq 2$, temos que:

$$\left|\frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right| \to 0$$

quando $j \to \infty$. Logo,

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}} - \frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right) = 0.$$

Portanto:

$$\lim_{j\to\infty}\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} = x^- = x^+ = \lim_{j\to\infty}\frac{p_{2j}}{q_{2j}}.$$

Assim concluímos a prova da primeira parte do teorema: a seqüência de convergentes é convergente.

Falta ver, que o limite é um número irracional x. Temos que $x = x^+ = x^-$, isto é,

$$x = \lim_{i\to\infty}\frac{p_i}{q_i} = \lim_{i\to\infty}[a_1, a_2, ..., a_i] = [a_1, a_2, ...].$$

Vamos mostrar que x é irracional. Para isso, note que pelo Lema 3.9, se verifica

$$\frac{p_{2\,i}}{q_{2\,i}} < x < \frac{p_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}}.$$

Então,

$$0 < x - \frac{p_{2\,i}}{q_{2\,i}} < \frac{p_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}} - \frac{p_{2\,i}}{q_{2\,i}}.$$

E assim, pela Propriedade (B II),

$$\begin{aligned} 0 < |x\, q_{2\,i} - p_{2\,i}| \quad &< \left| \frac{p_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}}\, q_{2\,i} - p_{2\,i} \right| = \\ &= \left| \frac{p_{2\,i-1}\, q_{2\,i} - p_{2\,i}\, q_{2\,i-1}}{q_{2\,i-1}} \right| = \\ &= \left| \frac{(-1)^{2i}}{q_{2\,i-1}} \right| = \frac{1}{q_{2\,i-1}}. \end{aligned}$$

Raciocinando por absurdo, suponhamos que x seja racional, digamos $x = \dfrac{b}{a}$. Então, multiplicando a desigualdade anterior por a, obtemos

$$0 < |x\, q_{2\,i}\, a - \ p_{2\,i}\, a| = |b\, q_{2\,i} - \ p_{2\,i}\, a| < \frac{a}{q_{2\,i-1}}.$$

Lembramos que a seqüência $(q_i)_i$ é monótona (estritamente) crescente e $q_i > 1$ para todo $i \geq 2$. Portanto, podemos escolher i suficientemente grande de forma que $a < q_{2\,i-1}$. Isto significa que

$$0 < |b\, q_{2\,i} \ - \ p_{2\,i}\, a| < \frac{a}{q_{2\,i-1}} < 1.$$

Mas isto contradiz o fato de $(b\, q_{2\,i} \ - \ p_{2\,i}\, a) \in \mathbb{Z}$. Logo x é irracional. A prova do teorema está terminada. □

3.3 Exercícios

Exercício 3.1. Considere um número $x = [a_1(x), a_2(x), a_3(x) \ldots]$ e seus convergentes p_1/q_1, p_2/q_2 e p_3/q_3. Determine a posição relativa destes convergentes.

Exercício 3.2. Prove as Propriedades (B) e (C) dos convergentes na Proposição 3.3.

Exercício 3.3. Complete os detalhes da prova da Equação (3.3).

Exercício 3.4. Considere um número $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] \in (0,1)$. Seja p_n/q_n o n-ésimo convergente de x. Prove, usando o método de indução, que

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + [a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

Exercício 3.5. Considere um número racional

$$x = r/s = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in (0,1),$$

onde r e s são números naturais primos entre si. Mostre que:

- se a expansão em frações contínuas de x é *simétrica* (isto é, $a_i = a_{n-i}$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$), então r divide $s^2+(-1)^n$;

- se r divide $s^2 + (-1)^n$, então a expansão de x é simétrica.

Sugestão: use o Exercício 3.4.

Exercício 3.6. Prove que, dado qualquer número racional p/q (fração irredutível), existem matrizes triangulares de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ tais que

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 3.7. Complete os detalhes da prova da Observação 3.10.

Capítulo 4

Exemplos: os números de ouro e de Euler

Neste capítulo apresentaremos dois exemplos de expansões em frações contínuas. O primeiro deles é a expansão do *número de ouro,* que aparecerá diversas vezes no texto. O segundo exemplo é a expansão do número de Euler e. Este exemplo é interessante por dois motivos. Em primeiro lugar, e de forma surpreendente, sua expansão em frações contínuas tem uma fórmula de recorrência extraordinariamente simples. Em segundo lugar, sua obtenção envolve apenas propriedades relativamente simples dos convergentes e da expansão em séries de potências do número e.

4.1 O número de ouro e a seqüência de Fibonacci

O *número de ouro* $\mathcal{O}$ (ou *proporção áurea*) é obtido quando uma quantidade (por exemplo, um segmento de reta ou um retângulo) é dividida em duas partes tais que a proporção entre o todo e a maior parte é a mesma que a proporção entre a maior parte e a menor. Normalizando e tomando a quatidade inicial igual a 1 e o tamanho da maior parte igual a α, obtemos que o número de ouro $\mathcal{O}$ verifica:

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Note que

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Assim,

$$\mathcal{O} = 1 + \frac{1}{\mathcal{O}}.$$

Repetindo esse processo infinitas vezes obtemos a expansão em frações contínuas de $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} = 1 + [1, 1, \ldots, 1, \ldots].$$

Um *ponto fixo* da transformação de Gauss é um ponto p que verifica $p = T(p)$. Observe que a transformação de Gauss T possui um único ponto fixo p no intervalo $[1/2, 1) = I_1$ e que não existem dois pontos diferentes x e y tais que $T^n(x)$ e $T^n(y)$ pertençam a I_1 para todo $n \geq 0$. Isto decorre facilmente usando que T^2 possui derivada maior do que 1 em $[1/2, 1)$. Por outro lado, a expressão em frações contínuas de $\mathcal{O}$ implica que

$$\mathcal{O} - 1 \in [1/2, 1) \quad \text{e} \quad T^n(\mathcal{O} - 1) \in [1/2, 1), \quad (n \geq 0).$$

Portanto, $\mathcal{O} - 1$ é o (único) ponto fixo de T em $[1/2, 1)$. Isto implica que $\mathcal{O} - 1$ verifica

$$x = T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - 1.$$

Isto é, $\mathcal{O} - 1$ é a solução da equação $x^2 + x - 1 = 0$ em $[0, 1)$. Isto é,

$$\mathcal{O} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Resumimos este resultado na seguinte observação:

Observação 4.1. $T^n(\mathcal{O}-1) = \mathcal{O}-1$, para todo $n \geq 0$.

Lembramos que uma seqüência $(y_k)_{k\geq 0}$ é uma *seqüência de Fibonacci* se verifica a relação

$$y_{k-2} + y_{k-1} = y_k, \quad k \geq 2.$$

Seja p_k/q_k o k-ésimo convergente do número de ouro $\mathcal{O}$. Pela Propriedade (A) dos convergentes a seqüência $(q_i)_{i\geq -1}$ verifica

$$q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} = q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k \geq 1,$$

temos que $(q_i)_{i\geq 0}$ é uma *seqüência de Fibonacci.*

Afirmamos que no caso do número de ouro também se verifica $p_k = q_{k+1}$. Para isto raciocinamos indutivamente. Primeiro observe que $p_0 = a_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ e $q_0 = 1$. Portanto, $p_0 = q_1 = 1$. Suponha agora que $p_j = q_{j+1}$ para $1 \leq j \leq k$. Pela Propriedade (A) obtemos que

$$p_{k+1} = a_{k+1}\, p_k + p_{k-1} = a_{k+1}\, q_{k+1} + q_k = q_{k+2},$$

concluindo a prova de que $p_k = q_{k+1}$ para $k \geq 0$.

Consideremos agora a seqüência de Fibonacci $(y_k)_{n\geq 0}$ obtida da forma

$$y_{k+1} = q_k \quad \text{e} \quad y_{k+2} = q_{k+1} = p_k, \quad k \geq -1.$$

Pela Propriedade (B II) dos convergentes,

$$y_{k+1}\, y_{k+1} - y_{k+2}\, y_k = y_{k+1}^2 - y_{k+2}\, y_k = (-1)^k.$$

Pela Observação 3.4, y_{k+1} e y_{k+2} são primos entre si. Finalmente, pelo Teorema 3.2,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_{k+2}}{y_{k+1}} = \mathcal{O}.$$

4.2 A expansão do número de Euler e

Nesta seção veremos que a expansão em frações contínuas do número e é dada por

$$2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, 16, 1, 1, \ldots].$$

Para isso, consideraremos o número Θ cuja expansão em frações contínuas é

$$\Theta = 2 + [a_1, a_2, \ldots,], \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{3\,k-1} = 2^k \\ a_{3\,k} = a_{3\,k+1} = 1 \end{cases}.$$

Teorema 4.2. $\Theta = 2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, 16, \ldots] = e.$

A prova deste resultado é, infelizmente, um pouco técnica. Para facilitar a leitura, explicaremos as principais etapas da prova do teorema deixando para o final do capítulo as partes técnicas.

Para provar que e é igual ao número Θ usaremos a representação de e como série de potências

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Fixado $m \in \mathbb{Z}$ temos:

$$e^{1/m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{m}\right)^k.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left(e^{1/m} + e^{-1/m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k},$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{1/m} - e^{-1/m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1}.$$

Considere os números positivos

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n\,(n+k)!}{k!\,(2\,n+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n}. \tag{4.1}$$

Observamos que estes números estão bem definidos, ou seja, que a série acima é convergente. Para isso vemos primeiro que

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!\,(2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k} = \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{1/m} + e^{-1/m}\right). \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(1+k)!}{k!\,(2+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(1+k)\,k!}{k!\,(2+2\,k)\,(1+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+1} = \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{1/m} - e^{-1/m}\right).
\end{aligned}$$

O seguinte lema fornece uma fórmula de recorrência para os ξ_n:

Lema 4.3. *Os números ξ_n na Equação (4.1) verificam*

$$\xi_n - m\,(2\,n+1)\,\xi_{n+1} = \xi_{n+2}.$$

Posporemos a prova deste lema para o fim da seção

Seja $\delta_n = \dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$. Temos

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= \frac{\xi_0}{\xi_1} = \frac{e^{1/m} + e^{-1/m}}{e^{1/m} - e^{-1/m}} = \frac{e^{1/m}\,(e^{1/m} + e^{-1/m})}{e^{1/m}\,(e^{1/m} - e^{-1/m})} = \\
&= \frac{(e^{2/m}+1)}{(e^{2/m}-1)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 4.3,

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \frac{\xi_{n+2} + m\,(2\,n+1)\,\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} = \\
&= m\,(2\,n+1) + \frac{\xi_{n+2}}{\xi_{n+1}} = \\
&= m\,(2\,n+1) + \frac{1}{\delta_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{(e^{2/m}+1)}{(e^{2/m}-1)} = \delta_0 = m + \frac{1}{\delta_1} = m + \cfrac{1}{3\,m + \cfrac{1}{\delta_2}} = \cdots .$$

Acabamos de obter o seguinte resultado que usaremos mais adiante.

Lema 4.4. *Para $m \geq 1$ considere o número*

$$\Psi_m = \frac{e^{2/m}+1}{e^{2/m}-1}.$$

Então

$$\Psi_m = m + [b_1, \ldots, b_n, \ldots], \quad b_n = (2\,n+1)\,m.$$

Em particular, para $m = 2$ temos

$$\Psi_2 = \frac{e+1}{e-1} = 2 + [6, 10, \ldots, 2\,(2\,k+1), \ldots].$$

Observamos que os números $1/\Psi_m$ foram estudados por D'Lambert que provou a seguinte relação

$$(\Psi_m)^{-1} = [c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots], \quad c_n = (2\,n-1)\,m.$$

Veja o Exercício 4.1.

Seja $(P_k/Q_k)_k$ a seqüência dos convergentes de Ψ_2, onde $P_{-1} = 1$ e $Q_{-1} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{P_0}{Q_0} &= \frac{2}{1} = 2,\\
\frac{P_1}{Q_1} &= \frac{b_1\,P_0 + P_{-1}}{b_1\,Q_0 + Q_{-1}} = \frac{6\cdot 2+1}{6\cdot 1+0} = \frac{13}{6},\\
\frac{P_k}{Q_k} &= \frac{b_k\,P_{k-1} + P_{k-2}}{b_k\,Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{2\,(2\,k+1)\,P_{k-1} + P_{k-2}}{2\,(2\,k+1)\,Q_{k-1} + Q_{k-2}}.
\end{aligned}$$

Temos o seguinte resultado que estabelece a relação entre o número Θ do ínicio da seção (lembre que queremos provar $\Theta = e$) e o número Ψ_2.

Lema 4.5. *Os convergentes P_k/Q_k de Ψ_2 e p_k/q_k de Θ verificam*

- $p_{3\,k+1} = 2\,(2\,k+1)\,p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-2)+1}$, $k \geq 1$,

- $q_{3\,k+1} = 2\,(2\,k+1)\,q_{3\,(k-1)+1} + q_{3\,(k-2)+1}$, $k \geq 1$,

- $p_{3\,k+1} = P_k + Q_k$ *e* $q_{3\,k+1} = P_k - Q_k$, $k \geq 0$.

Deixaremos a prova deste lema para o fim da seção. Agora já estamos prontos para terminar a prova to Teorema 4.2. Usando as relações do Lema 4.5, obtemos que

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{\dfrac{(e+1)}{(e-1)}+1}{\dfrac{(e+1)}{(e-1)}-1} = \frac{\Psi_2+1}{\Psi_2-1} = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{P_k}{Q_k}+1}{\dfrac{P_k}{Q_k}-1} = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{P_k+Q_k}{P_k-Q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{3\,k+1}}{q_{3\,k+1}} = \Theta.
\end{aligned}
$$

Isto prova que o número $e = \Theta$ e conclui a prova do teorema. Falta provar os Lemas 4.3 e 4.5.

4.2.1 Provas dos Lemas 4.3 e 4.5

Prova do Lemma 4.3: Escrevemos

$$\Delta = \xi_n - m\,(2\,n+1)\,\xi_{n+1}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\Delta \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^n\,(n+k)!}{k!\,(2\,n+2\,k)!} - m\,(2\,n+1)\,\frac{2^{n+1}\,(n+1+k)!}{m\,k!\,(2\,n+2+2\,k)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n\,(n+k)!\,(2\,n+2+2\,k)\,(2\,n+1+2\,k)}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,n+1)\,2^{n+1}\,(n+1+k)!}{k!\,(2\,n+2+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n\,(n+k)!\,2\,(n+1+k)\,(2\,n+1+2\,k)}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\,n+1)\,2^{n+1}\,(n+1+k)!}{k!\,(2\,n+2+2\,k)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}\,(n+1+k)!\,((2\,n+1+2\,k)-(2\,n+1))}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \right) \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&= \frac{2^{n+1}\,(n+1)!((2\,n+1)-(2\,n+1))}{(2\,n+2)} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}\,(n+1+k)!\,(2\,k)}{k!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}\,k\,(n+1+k)!}{k\,(k-1)!\,(2\,n+2\,k+2)!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,k+n} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}\,((n+2)+(k-1))!}{(k-1)!\,(2\,(n+2)+2\,(k-1))!} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\,(k-1)+(n+2)} \\
&= \xi_{n+2}.
\end{aligned}$$

Concluindo a prova do lema. □

Prova do Lema 4.5: Seja p_k/q_k o convergente k-ésimo de Θ. Em primeiro lugar, note que por convenção,

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = \frac{2}{1} \quad \text{e} \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1\, p_0 + p_{-1}}{a_1\, q_0 + q_{-1}} = \frac{3}{1}.$$

Como $a_{3\,k} = a_{3\,k+1} = 1$ e $a_{3\,k-1} = 2\,k$, usando a Propriedade (A) dos convergentes de e, obtemos para $k \geq 1$ a relação

$$\begin{aligned}
p_{3\,k+1} &= a_{3\,k+1}\, p_{3\,k} + p_{3\,k-1} = p_{3\,k} + p_{3\,k-1} \\
&= a_{3\,k}\, p_{3\,k-1} + p_{3\,k-2} + p_{3\,k-1} \\
&= p_{3\,k-1} + p_{3\,k-2} + p_{3\,k-1} \\
&= 2\, p_{3\,k-1} + p_{3\,k-2} \\
&= 2\,(a_{3\,k-1}\, p_{3\,k-2} + p_{3\,k-3}) + p_{3\,k-2} \\
&= 2\,(2\,k\, p_{3\,k-2} + p_{3\,k-3}) + p_{3\,k-2} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + 2\, p_{3\,k-3} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + (a_{3\,k-3}\, p_{3\,k-4} + p_{3\,k-5}) + p_{3\,k-3} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + (a_{3\,(k-1)}\, p_{3\,k-4} + p_{3\,k-5}) + p_{3\,k-3} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + (p_{3\,k-4} + p_{3\,k-5}) + p_{3\,k-3} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,k-2} + (p_{3\,k-3} + p_{3\,k-4}) + p_{3\,k-5} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,(k-1)+1} + (a_{3\,(k-1)+1}\, p_{3\,k-3} + p_{3\,k-4}) + p_{3\,(k-2)+1} \\
&= (2\,(2\,k) + 1)\, p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-2)+1} \\
&= 2\,(2\,k + 1)\, p_{3\,(k-1)+1} + p_{3\,(k-2)+1}.
\end{aligned}$$

Concluímos assim o primeiro item do lema.

A prova para os q_k's segue de forma análoga, e está proposta como exercício.

Finalmente, a prova do último item também é por indução. Para $k = 0$ temos que

$$P_0 + Q_0 = 2 + 1 = 3 = p_1 \quad \text{e} \quad P_0 - Q_0 = 2 - 1 = 1.$$

Suponha que, para todo $1 \leq j < k$, se verifica

$$p_{3\,j+1} = P_j + Q_j \quad \text{e} \quad q_{3\,j+1} = P_j - Q_j. \tag{4.2}$$

Então, pela propriedade (A) dos convergentes,

$$P_k + Q_k = b_k\, P_{k-1} + P_{k-2} + b_k\, Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Pela hipótese de indução em (4.2) e pelos dois primeiros itens do lema,

$$\begin{aligned} P_k + Q_k \quad &= 2\,(2\,k+1)\,P_{k-1} + P_{k-2} + 2\,(2\,k+1)\,Q_{k-1} + Q_{k-2} = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(P_{k-1} + Q_{k-1}) + (P_{k-2} + Q_{k-2}) = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(p_{3\,(k-1)+1}) + (p_{3\,(k-2)+1}) = p_{3\,k+1}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} P_k - Q_k \quad &= (2\,(2\,k+1)\,P_{k-1} + P_{k-2}) - (2\,(2\,k+1)\,Q_{k-1} + Q_{k-2}) = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(P_{k-1} - Q_{k-1}) + (P_{k-2} - Q_{k-2}) = \\ &= 2\,(2\,k+1)\,(q_{3\,(k-1)+1}) + (q_{3\,(k-2)+1}) = q_{3\,k+1}. \end{aligned}$$

A prova do lema está terminada. □

4.3 Exercícios

Exercício 4.1. Considere os números

$$\Psi_m = \frac{e^{2/m} + 1}{e^{2/m} - 1}.$$

Como no Lema 4.4 Prove que

$$(\Psi_m)^{-1} = [c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots], \quad c_n = (2\,n-1)\,m.$$

Exercício 4.2. Seja p_k/q_k o k-ésimo convergente do número de Euler e. Prove que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica

$$4\,k\,q_{3\,k-2} \leq q_{3\,k+1} \leq (4\,k+3)\,q_{3\,k-2}.$$

Exercício 4.3. Usando o Exercício 4.2, prove que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica

$$4^{k-1}\,(k-1)\,! \leq q_{3\,k-2} \leq 4^{k-1}\,k!.$$

Capítulo 5

Convergentes e boas aproximações

Vimos no Teorema 3.2 que os convergentes de um número irracional convergem para ele. Neste capítulo estudaremos como os convergentes de um número se aproximam dele. Nosso primeiro objetivo é determinar a proximidade entre um número irracional e os seus convergentes. Já formulamos, na Observação 3.6, um primeiro resultado que estabelecia uma cota superior para a distância entre um número e os seus convergentes. O resultado a seguir estabelece cotas nos dois sentidos.

Teorema 5.1. *Seja x um número irracional e p_k/q_k seu k-ésimo convergente. Então, para todo $k \geq 0$, se verifica*

$$\frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}}.$$

Salientamos que este teorema será utilizado repetidas vezes ao longo do texto e terá um papel destacado.

A seguir, consideraremos o problema da aproximação de um número irracional x (digamos $x \in (0,1)$, para simplificar) por números racionais. Veremos que as aproximações dadas pelos seus convergentes *são as melhores.* De maneira mais precisa, considere um número (irracional) x, um número natural q, e o conjunto $\mathcal{A}_q$ dos números racionais com denominador menor ou igual do que q,

$$\mathcal{A}_q = \left\{ \frac{a}{b} : \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \leq q \right\}.$$

Queremos saber qual é o número de $\mathcal{A}_q$ mais próximo x. Observe que embora o conjunto $\mathcal{A}_q$ seja infinito, há somente um número finito de casos a considerar (essencialmente os números no intervalo $[0, 1]$). Portanto, esse número está bem definido (a princípio o número poderia não ser único e poderiam existir duas "melhores" aproximações). O número de $\mathcal{A}_q$ mais próximo de x é chamado de uma *boa aproximação de x*. Veremos que, com a única exceção de $x = 1/2$, as boas aproximações de x são seus convergentes. (Veja os Teoremas 5.4 e 5.6 que afirmam que *todo convergente é uma boa aproximação e vice-versa*).

A seguinte etapa é estudar para que números irracionais x as desigualdades da forma

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^n}, \qquad C > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

têm solução. Observamos que o Teorema 5.1 garante de forma imediata que quando $n = 1$ a desigualdade (5.1) sempre admite solução. Para isto é suficiente lembrar que, pela Propriedade (C), $q_k \to \infty$, portanto, $C > 1/q_{k+1}$ para k suficientemente grande. Assim, se verifica

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} < \frac{C}{q_k}$$

e a desigualdade tem solução. Estudaremos este tipo de problemas na Seção 5.3.

Em primeiro lugar, a Proposição 5.12 garante que quando $C = 1/2$ e $n = 2$, as soluções da desigualdade (5.1) são convergentes de x. Veremos também que quando $C \geq 1/\sqrt{5}$ e $n = 2$ a desigualdade possui infinitas soluções dadas por convergentes (veja o Corolário 5.14). Por outro lado, quando $C < 1/\sqrt{5}$ e $n = 2$, para o número de ouro $\mathcal{O} = 1 + [1, 1, \ldots]$ (introduzido na Seção 4.1) a desigualdade tem apenas um número finito de soluções.

Finalmente, o Teorema 5.18 estabelece um resultado geral sobre as soluções da desigualdade (5.1) quando $n = 2$: se os quocientes a_i

de x são limitados então existe C tal que a desigualdade não tem solução, quando os quocientes são ilimitados há sempre (para todo C) infinitas soluções para a desigualdade.

No próximo capítulo estudaremos a relação entre um número ser transcendente (não ser raiz de um polinômio com coeficientes inteiros) e a existência de boas aproximações.

5.1 Aproximação por convergentes

Nesta seção provaremos o Teorema 5.1:

Seja x um número irracional e p_k/q_k seu k-ésimo convergente. Então, para todo $k \geq 0$, se verifica

$$\frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}}.$$

Prova do Teorema 5.1: Consideraremos primeiro números irracionais $x \in (0,1)$. Pela Equação (3.9), temos que para todo $x \in (0,1)$,

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{T^k(x)}{q_k\,(q_k + T^k(x)\, q_{k-1})}.$$

Pela Observação 2.7, como x é irracional, temos que $T^k(x) \neq 0$ para todo k. Portanto, podemos dividir por $T^k(x)$, obtendo

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k\,((T^k(x))^{-1}\, q_k + q_{k-1})}. \tag{5.2}$$

A seguir obteremos cotas(superior e inferior) para o denominador desta expressão. Usando estas cotas provaremos o teorema.

Pela Equação (2.3), $a_{k+1}(x) = a_{k+1} = \lfloor (T^k(x))^{-1} \rfloor$ (omitimos a dependência dos quocientes e dos convergentes em x), temos que,

$$a_{k+1} \leq (T^k(x))^{-1} < a_{k+1} + 1. \tag{5.3}$$

Assim,

$$q_k\,(a_{k+1}\, q_k + q_{k-1}) < q_k\,((a_{k+1} + 1)\, q_k + q_{k-1}). \tag{5.4}$$

Pela Propriedade (A),

$$a_{k+1} = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k}. \tag{5.5}$$

Portanto, usando as desigualdades (5.3) e (5.4) e a igualdade acima (5.5), obtemos,

$$q_k\left((T^k(x))^{-1}\, q_k + q_{k-1}\right) < q_k\left((a_{k+1}+1)\, q_k + q_{k-1}\right) =$$

$$= q_k\left(\left(\frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k} + 1\right) q_k + q_{k-1}\right) =$$

$$= q_k\,(q_{k+1} + q_k).$$

$$q_k\left((T^k(x))^{-1}\, q_k + q_{k-1}\right) \geq q_k\left(a_{k+1}\, q_k + q_{k-1}\right) =$$

$$= q_k\left(\left(\frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k}\right) q_k + q_{k-1}\right) \geq$$

$$\geq q_k\,(q_{k+1} - q_{k-1} + q_{k-1}) = q_k\, q_{k+1}.$$

Logo, pela Equação (5.2),

$$\frac{1}{q_k\,(q_{k+1} + q_k)} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}}.$$

Acabamos de provar o teorema para x irracional em $(0,1)$.

Usando a prova anterior, mostraremos o teorema para $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Escolha $a_0 = \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y - a_0 \in [0,1)$. Como

$$\frac{p_k(y)}{q_k(y)} = a_0 + \frac{p_k(x)}{q_k(x)},$$

temos

$$\left|y - \frac{p_k(y)}{q_k(y)}\right| = \left|(x + a_0) - \left(a_0 + \frac{p_k(x)}{q_k(x)}\right)\right| = \left|x - \frac{p_k(x)}{q_k(x)}\right|.$$

Logo, pelo o que acabamos de mostrar,

$$\frac{1}{q_k(x)\,(q_{k+1}(x) + q_k(x))} < \left|y - \frac{p_k(y)}{q_k(y)}\right| \leq \frac{1}{q_k(x)\, q_{k+1}(x)}.$$

Observe que, por definição, $q_0(x) = 1 = q_0(y)$. Supondo que se verifica $q_j(x) = q_j(y)$ para $0 \leq j < k$, obtemos, usando a Propriedade (A), que

$$\begin{aligned} q_{k+1}(x) &= a_{k+1}(x)\, q_k(x) + q_{k-1}(x) = \\ &= a_{k+1}(y)\, q_k(y) + q_{k-1}(y) = q_{k+1}(y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{q_k(y)\,(q_{k+1}(y) + q_k(y))} < \left| y - \frac{p_k(y)}{q_k(y)} \right| \leq \frac{1}{q_k(y)\, q_{k+1}(y)}.$$

Isto finaliza a prova do teorema. □

5.2 Boas aproximações

Nesta seção, veremos uma aplicação das frações contínuas sobre a aproximação dos números irracionais por números racionais, também conhecida como *Aproximação Diofantina.*

O principal resultado desta seção é que *as melhores aproximações de um número real x por números racionais são os convergentes da sua expansão em frações contínuas* (com a única exceção, $x = 1/2$, como veremos no Teorema 5.6).

Em primeiro lugar, explicaremos o que significa ser *uma boa* aproximação do número real x.

Definição 5.2 (Boa Aproximação). *A fração a/b, $b > 0$, é uma* boa aproximação *do número real x se vale a desigualdade*

$$|d\,x - c| > |b\,x - a|, \quad \textit{para todo} \quad \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b} \quad \textit{com} \quad 0 < d \leq b.$$

Observação 5.3. A definição implica que se a/b é uma boa aproxima ção de x, então a/b é a melhor aproximação por números racionais de x dentre todos os números racionais em $\mathcal{A}_b$. Isto é, dado c/d com $0 < d \leq b$, temos

$$\begin{aligned} |d\,x - c| > |b\,x - a| \quad &\Longrightarrow \quad \left| \frac{d}{b}\, x - \frac{c}{b} \right| > \left| x - \frac{a}{b} \right| \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d}{b} \left| x - \frac{c}{d} \right| > \left| x - \frac{a}{b} \right|. \end{aligned}$$

Como $d/b \leq 1$, obtemos

$$\left|x - \frac{c}{d}\right| > \left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Para simplificar a exposição, ao longo deste capítulo suporemos que $x \in (0,1)$. O caso geral segue de forma totalmente análoga. Em primeiro lugar, provaremos que toda boa aproximação do número real x é um convergente de x. Em seguida, mostraremos a recíproca desta afirmação com sua única exceção $x = 1/2$.

Teorema 5.4. *Toda boa aproximação de $x \in (0,1)$ é um convergente da sua expansão em frações contínuas.*

Prova: Seja a/b uma boa aproximação de x. Provaremos o teorema por absurdo supondo que a/b não é um convergente de x.

Em primeiro lugar, veremos a posição de a/b em relação aos convergentes da expansão em frações contínuas de x. Pelo Lema 3.9, os convergentes de x estão na seguinte posição na reta real em relação a x:

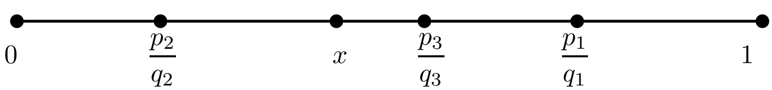

Figura 5.1: Posições relativas dos convergentes

Afirmamos que $0 \leq \dfrac{a}{b}$. Caso contrário, $0 > \dfrac{a}{b}$, como $x \geq 0$, temos

$$|1 \cdot x - 0| < \left|x - \frac{a}{b}\right| \leq |b\,x - a|, \quad \text{quando } 1 \leq b.$$

Logo, a/b não seria uma boa aproximação de x. Portanto, $0 \leq \dfrac{a}{b}$.

Provaremos também por contradição que $\dfrac{a}{b} < 1$. Suponha que $\dfrac{a}{b} \geq 1$. Em particular, $\dfrac{a}{b} \geq 1 > \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{1}{a_1} > x$, onde $\dfrac{p_1}{q_1}$ é o primeiro convergente de x. Então,

$$|b\,x - a| = b\left|x - \frac{a}{b}\right| > b\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| = b\left|\frac{p_1\,b - a\,q_1}{q_1\,b}\right|.$$

Como $p_1\,b - a\,q_1$ é um número inteiro diferente de zero,

$$|b\,x - a| > b\,\frac{1}{q_1\,b} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Por outro lado, temos

$$|x| = x \le \frac{1}{a_1}.$$

Então,

$$|b\,x - a| > \frac{1}{a_1} \ge |x - 0|.$$

Logo, a/b não seria uma boa aproximação de x, o que é uma contradição.

Como estamos supondo que a/b não é um convergente, podemos ter duas situações:

1. a/b está entre p_{k-1}/q_{k-1} e p_{k+1}/q_{k+1}, onde $k \ge 1$ pode ser par ou ímpar,

2. $a/b \in (p_1/q_1, 1)$.

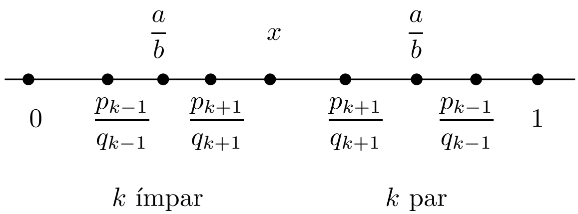

Figura 5.2: Posições relativas de a/b com respeito aos convergentes

Vejamos o que acontece no primeiro caso. Considere o intervalo

$$H_k = \left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) \ (k \text{ ímpar}), \quad H_k = \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}, \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right) \ (k \text{ par}).$$

Lema 5.5. *Suponha que* $\frac{a}{b} \in H_k$*, para algum* $k \geq 1$*. Então* $b > q_k$*.*

Prova: Suporemos que $\frac{a}{b} \in \left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)$, o outro caso é análogo. Por hipótese, $a\,q_{k-1} - b\,p_{k-1}$ é um inteiro diferente de zero, portanto

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{a\,q_{k-1} - b\,p_{k-1}}{b\,q_{k-1}}\right| \geq \frac{1}{b\,q_{k-1}}. \tag{5.6}$$

Por outro lado, pela posição relativa dos convergentes, temos que $a/b < p_k/q_k$, portanto,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \quad &< \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \\ &= \left|\frac{p_k\,q_{k-1} - p_{k-1}\,q_k}{q_k\,q_{k-1}}\right| = \\ &= \left|\frac{(-1)^k}{q_k\,q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k\,q_{k-1}},\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde na penúltima igualdade usamos a Propriedade (B II).

Das Equações (5.6) e (5.7) obtemos

$$\frac{1}{b\,q_{k-1}} < \frac{1}{q_k\,q_{k-1}}.$$

Portanto, $b > q_k$, concluindo a prova do lema. □

Voltando à prova do Teorema 5.4 e raciocinando como no lema acima, asumindo que $\frac{a}{b} \in \left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)$, como neste caso $x > \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, temos que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{p_{k+1}\,b - a\,q_{k+1}}{b\,q_{k+1}}\right| \geq \frac{1}{b\,q_{k+1}}.$$

Assim,

$$|b\,x - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Além disso, pelo Teorema 5.1,

$$\left|x-\frac{p_k}{q_k}\right|\le\frac{1}{q_k\,q_{k+1}}\quad\Longrightarrow\quad|q_k\,x-p_k|\le\frac{1}{q_{k+1}}.$$

Obtemos então,

$$|q_k\,x-p_k|\le|b\,x-a|,\quad\text{onde}\quad b>q_k.$$

Logo, a/b não é uma boa aproximação de x, o que contradiz a hipótese do teorema. Isto prova o teorema para o primeiro caso.

Consideremos agora o segundo caso, isto é,

$$1>\frac{a}{b}>\frac{p_1}{q_1}>x.$$

Neste caso temos

$$\left|x-\frac{a}{b}\right|>\left|\frac{p_1}{q_1}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{p_1\,b-a\,q_1}{b\,q_1}\right|\ge\frac{1}{b\,q_1}=\frac{1}{b\,a_1}.$$

Então, $|b\,x-a|>\dfrac{1}{a_1}$.

Por outro lado, $|x|\le\dfrac{1}{a_1}$. Obtemos então que,

$$|b\,x-a|>|x|=|1\,x-0|,\quad b\ge 1.$$

Isto contradiz o fato de a/b ser uma boa aproximação do número x. Terminamos, portanto, a prova do teorema. □

Provaremos agora a recíproca do Teorema 5.4 com a sua única exceção $x=1/2$. Observe que o 0-ésimo convergente de $1/2$ é $\dfrac{p_0}{q_0}=\dfrac{0}{1}=0$, que não é uma boa aproximação de $1/2$, pois

$$|1\cdot x-1|=|1\cdot x-0|=|x-0|.$$

Teorema 5.6. *Considere $x\in[0,1)$ com $x\ne 1/2$. Então todo convergente de x é uma boa aproximação dele.*

Prova: Temos que provar que, para todo $k \geq 0$, o k-ésimo convergente p_k/q_k de x é uma boa aproximação de x. Para isso consideremos para cada $\beta = 1, 2, \ldots, q_k$ e cada $\alpha \in \mathbb{Z}$ o número

$$M_x(\beta, \alpha) = |\beta\, x - \alpha|.$$

Queremos minimizar $M_x(\beta, \alpha)$, isto é, calcular,

$$M_x(q_k)\colon = \min\{M_x(\beta, \alpha)\colon \beta = 1, \ldots, q_k,\ \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

e ver que o mínimo é único e ocorre para $\alpha = p_k$ e $\beta = q_k$.

Observamos que fixado $\beta \in \{1, \ldots, q_k\}$ para minimizar $M_x(\beta, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, há no máximo um número finito de números α a considerar, pois se α minimiza a expressão, necessariamente $0 \leq \alpha \leq \lfloor q_k\, x \rfloor + 1$. Portanto, há um número finito de possíveis pares (β, α) que minimizam $M_x(q_k)$. Dentre estes pares escolhemos aqueles com $\beta = \beta_0$ mínimo. A princípio, fixado β_0 mínimo, poderiam existir dois valores de α, digamos α_0 e α_1, que minimizam,

$$M_x(q_k) = M_x(\beta_0, \alpha_0) = M_x(\beta_0, \alpha_1).$$

Observe que nesse caso, necessariamente, $\alpha_1 = \alpha_0 + 1$ e, portanto,

$$\beta_0\, x - \alpha_0 = \alpha_0 + 1 - \beta_0\, x \quad \Longrightarrow \quad \beta_0\, x = \alpha_0 + \frac{1}{2}.$$

Afirmamos que, fixado β_0 mínimo, existe uma única escolha para α, que denominaremos α_0:

Lema 5.7. *Se α_0 minimiza $M_x(\beta_0, \alpha)$ então $\alpha_1 = \alpha_0 \pm 1$ não minimiza $M_x(\beta_0, \alpha)$, isto é,*

$$M_x(q_k) = M_x(\beta_0, \alpha_0) < M_x(\beta_0, \alpha_1).$$

Posporemos a prova deste lema chave, usando-o concluiremos a prova do teorema. A conclusão da prova do teorema tem duas partes. Veremos, no Lema 5.8, que α_0/β_0 é uma boa aproximação de x. Portanto, pelo Teorema 5.4, α_0/β_0 é um convergente de x, que é exatamente p_k/q_k (Lema 5.9). Obteremos assim o teorema.

Lema 5.8. *O número α_0/β_0 é uma boa aproximação de x.*

Prova: Pelo Lema 5.7 α_0 é o único valor que minimiza $|\beta_0\, x - \alpha|$. Portanto, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq \alpha_0$, se verifica

$$|\beta_0\, x - \alpha_0| < |\beta_0\, x - \alpha|, \quad \text{onde} \quad \frac{\alpha_0}{\beta_0} \neq \frac{\alpha}{\beta_0}, \quad 1 \leq \beta_0.$$

Isto significa que α_0/β_0 é uma boa aproximação de x. □

Lema 5.9. $\alpha_0/\beta_0 = p_k/q_k$.

Prova: Como α_0/β_0 é uma boa aproximação de x, o Teorema 5.4 garante que ele é um convergente de x, $\dfrac{\alpha_0}{\beta_0} = \dfrac{p_s}{q_s}$. Pela escolha de β_0, $\beta_0 \leq q_k$, e como os q_i são crescentes, temos $s \leq k$. Se $s = k$ o lema está provado. Suponha agora por contradição que $s < k$. Veremos que este caso é impossível.

Pelo Teorema 5.1,

$$\left| x - \frac{p_s}{q_s} \right| > \frac{1}{q_s\,(q_s + q_{s+1})}.$$

Como $(q_i)_{i \geq 1}$ é uma seqüência monótona crescente, temos que

$$|q_s\, x - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k}. \tag{5.8}$$

Além disso, como pelo Teorema 5.1

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} \quad \Longrightarrow \quad |q_k\, x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Como $M_x(\beta_0, \alpha_0) = M_x(q_k)$ e $\beta_0 = q_s$ temos que

$$|q_s\, x - p_s| = |\beta_0\, x - \alpha_0| \leq |q_k\, x - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}. \tag{5.9}$$

De (5.8) e (5.9),

$$\frac{1}{q_k + q_{k-1}} < \frac{1}{q_{k+1}} \quad \Longrightarrow \quad q_{k+1} < q_k + q_{k-1}.$$

Esta desigualdade contradiz a definição de q_{k+1}, pois

$$q_{k+1} :\ = a_{k+1}\, q_k + q_{k-1}, \quad \text{onde } a_{k+1} \geq 1.$$

Isto implica que $q_{k+1} \geq q_k + q_{k-1}$. Esta contradição implica que s não é menor do que k, logo $s = k$, concluindo a prova do lema. $\square$

Para terminar a prova do teorema falta demonstrar o Lema 5.7.

Prova do Lema 5.7: Suponha por contradição que α_0 e $\alpha_1 = \alpha_0 + 1$ verificam

$$M_x(q_k) = M_x(\beta_0, \alpha_0) = M_x(\beta_0, \alpha_0 + 1).$$

Como já vimos, em tal caso se verifica que

$$\beta_0\, x - \alpha_0 = \alpha_0 + 1 - \beta_0\, x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0} \neq \frac{\alpha_0}{\beta_0}.$$

Em particular,

$$M_x(\beta_0, \alpha_0) = |\beta_0\, x - \alpha_0| > 0. \tag{5.10}$$

Afirmação 5.10. $\dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$ *é irredutível.*

Adiaremos a prova da afirmação para o fim da prova do lema. Expandindo o número racional $\dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$ (que suporemos em forma irredutível) em frações contínuas, temos que seu último convergente p_n/q_n, que é uma fração irredutível, é ele próprio, isto é,

$$p_n = 2\,\alpha_0 + 1, \quad q_n = 2\,\beta_0 = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Afirmação 5.11. $\beta_0 > q_{n-1}$.

Adiaremos também a prova desta afirmação e usando-a terminaremos a prova do lema, que lembramos é por contradição. Fazendo $x = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$, temos que

$$|q_{n-1}\, x - p_{n-1}| = \left| q_{n-1}\, \frac{p_n}{q_n} - p_{n-1} \right| = \left| \frac{q_{n-1}\, p_n - p_{n-1}\, q_n}{q_n} \right|.$$

Usando a Propriedade (B II), obtemos que

$$\begin{aligned}|q_{n-1}\, x - p_{n-1}| &= \left|\frac{q_{n-1}\, p_n - p_{n-1}\, q_n}{q_n}\right| = \\ &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2\,\beta_0} \leq \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Por outro lado,

$$|\beta_0\, x - \alpha_0| = \left|\beta_0\, \frac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0} - \alpha_0\right| = \frac{1}{2}. \tag{5.12}$$

Finalmente, das Equações (5.11) e (5.12) obtemos

$$|q_{n-1}\, x - p_{n-1}| \leq |\beta_0\, x - \alpha_0| = M_x(q_n).$$

Pela Afirmação 5.11 temos $q_{n-1} < \beta_0$, o que contradiz o fato de β_0 ser mínimo com a propriedade $M_x(\beta, \alpha) = M_x(q_n)$. Portanto, para terminar a prova do lema devemos provar as duas afirmações.

Prova da Afirmação 5.10: $\dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$ é irredutível.

Suponha que $\dfrac{2\,\alpha_0 + 1}{2\,\beta_0}$ não é irredutível, então existe $\ell \geq 2$, tal que

$$2\,\alpha_0 + 1 = \ell\, p \quad \text{e} \quad 2\,\beta_0 = \ell\, q.$$

De forma imediata temos que

$$|q\, x - p| = \frac{1}{\ell}\, |2\,\beta_0\, x - (2\,\alpha_0 + 1)| = 0.$$

Portanto, pela Equação (5.10),

$$M_x(q, p) = |q\, x - p| = 0 < M_x(\beta_0, \alpha_0) = M_x(q_k).$$

Como $q \leq \beta_0 \leq q_k$ esta desigualdade contradiz a definição de $M_x(q_k)$. Terminamos assim a prova desta afirmação. □

Prova da Afirmação 5.11: $\beta_0 > q_{n-1}$.

Lembre que se a decomposição em frações contínuas de um número racional y dada pelo Algoritmo da Divisão é da forma $y = [a_1, \ldots, a_n]$,

$n \geq 2$, então $a_n \geq 2$ (veja o Exercício 2.1). Portanto, se $n = 2$, então $a_n \geq 2$. Observe que se $n = 1$ então $x = 1/q_1 = 1/a_1$ onde $a_n = a_1 > 2$: caso contrário, teríamos que $x = 1/a_1 = 1/2$, contradizendo $x \neq 1/2$.

Em resumo, se $x = p_n/q_n$ com $n = 1$ temos

$$2\,\beta_0 = q_1 = a_1\,q_0 + q_{-1} = a_1\,q_0 > 2\,q_0, \quad \beta_0 > q_{n-1}.$$

Por outro lado, se $n \geq 2$,

$$2\,\beta_0 = a_n\,q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2\,q_{n-1} + q_0 = 2\,q_{n-1} + 1 > 2\,q_{n-1}.$$

Em ambos os casos obtemos $\beta_0 > q_{n-1}$, portanto a afirmação está provada. □

Provadas as duas afirmações, o Lema 5.7 está demonstrado. □

A prova do Teorema 5.6 agora está concluída. □

5.3 Ordem de Aproximação

Até agora vimos que as boas aproximações do número real x são dadas pelos seus convergentes. Nesta seção, dado um número irracional x, estudaremos a existência de números racionais a/b que verificam a desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2}, \quad \text{para certo } C > 0. \tag{5.13}$$

Na Seção 9.1, veremos que existem soluções para a desigualdade acima para quase todo número real (um conjunto de medida total em $\mathbb{R}$). Veja a Seção 8.1, onde discutiremos de forma sucinta alguns aspectos básicos da teoria da medida.

Obviamente na desigualdade (5.13) é suficiente considerar números irracionais, pois para os números racionais a desigualdade sempre tem solução. Também é suficiente considerar soluções da forma a/b onde a e b são primos entre si: se c/d verifica a Equação (5.13) e $a/b = c/d$ com a e b primos entre si, então a/b também verifica a desigualdade,

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| = \left| x - \frac{c}{d} \right| < \frac{C}{d^2} < \frac{C}{b^2},$$

pois $d > b$.

Por simplicidade, começaremos a examinar as soluções da equação para $C = 1/2$.

Proposição 5.12. *Toda fração irredutível a/b satisfazendo a desigualdade*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2\,b^2}$$

é um convergente de x.

Prova: Pelo Teorema 5.4, para provar a proposição é suficiente ver que a fração irredutível a/b é uma boa aproximação de x. Suponha, por absurdo, que a/b não seja uma boa aproximação de x. Então, existe $\dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a}{b}$ com $0 < d \leq b$ tal que,

$$|d\,x - c| \leq |b\,x - a| < \frac{1}{2\,b} \quad \Longrightarrow \quad \left|x - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2\,b\,d}.$$

Logo,

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{c}{d} - x\right| + \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2\,b\,d} + \frac{1}{2\,b^2} = \frac{b+d}{2\,b^2\,d}. \tag{5.14}$$

Por outro lado, como $\dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a}{b}$, temos que $c\,b - a\,d$ é um número inteiro diferente de zero. Portanto,

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c\,b - a\,d}{d\,b}\right| \geq \frac{1}{b\,d}. \tag{5.15}$$

De (5.14) e (5.15), como b e d são positivos, obtemos

$$\frac{1}{b\,d} < \frac{b+d}{2\,b^2\,d} \quad \Longrightarrow \quad 2\,b\; < b + d \quad \Longrightarrow \quad b < d,$$

o que é uma contradição.

Portanto, a/b é uma boa aproximação de x, completando a prova da proposição. $\square$

Proposição 5.13. *Dado um número real x e três convergentes consecutivos dele,*

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad \frac{p_n}{q_n},$$

no mínimo um deles satisfaz a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2}.$$

O seguinte corolário decorre facilmente da proposição e da distribuição alternada dos convergentes na reta real na Observação 3.10. Veja o Exercício 5.1.

Corolário 5.14. *Para todo número irracional x e toda constante $C \geq 1/\sqrt{5}$ a desigualdade*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N},$$

tem infinitas soluções.

Prova da Proposição: A prova da proposição é por contradição. Suponhamos que existe $k \geq 2$ tal que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}\, q_n^2}, \quad \text{para } n = k, k-1, k-2. \tag{5.16}$$

Obteremos a seguinte contradição: $q_k < q_{k-1} + q_{k-2}$, em oposição com a Propriedade (A) dos convergentes ($q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2}$).

Para simplificar escrevemos $r_n = (T^n(x))^{-1} \neq 0$ (lembre que x é irracional). Usando a Propriedade (B I) dos convergentes

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}} = \frac{p_n\, r_n + p_{n-1}}{q_n\, r_n + q_{n-1}},$$

obtemos que

$$\begin{aligned}\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{p_n\,r_n+p_{n-1}}{q_n\,r_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| = \\ &= \left|\frac{p_n\,r_n\,q_n+p_{n-1}\,q_n-p_n\,q_n\,r_n-p_n\,q_{n-1}}{q_n\,(q_n\,r_n+q_{n-1})}\right| = \\ &= \left|\frac{p_{n-1}\,q_n-p_n\,q_{n-1}}{q_n^2\,r_n+q_n\,q_{n-1}}\right|.\end{aligned}$$

Pela Propriedade (B II) dos convergentes, temos

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n^2\,r_n+q_n\,q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n^2\,r_n+q_n\,q_{n-1}}.$$

Para simplificar introduzimos a seguinte notação, que será muito útil nos próximos lemas,

$$\phi_k=\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}},\quad k\geq 2,\qquad \psi_k=\phi_k+r_{k-1}. \tag{5.17}$$

Com esta notação temos,

$$\begin{aligned}\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| &= \frac{1}{q_n^2\,r_n+q_n\,q_{n-1}} = \frac{1}{q_n^2\,r_n+q_n^2\,\phi_{n+1}} = \\ &= \frac{1}{q_n^2(r_n+\phi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2\,\psi_{n+1}}.\end{aligned} \tag{5.18}$$

As Equações (5.16) e (5.18) implicam que

$$\frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2}\leq\frac{1}{q_n^2\,\psi_{n+1}}\quad\Longrightarrow\quad\psi_{n+1}\leq\sqrt{5}.$$

Pela definição de ψ_k em (5.17), temos que ψ_k é racional, em particular, $\psi_k\neq\sqrt{5}$. Portanto,

$$\psi_{n+1}<\sqrt{5}\quad\text{para } n=k,k-1,k-2.$$

Temos o seguinte lema cuja prova adiaremos:

Lema 5.15. *Considere $k \geq 2$.*

$$\max\{\psi_k, \psi_{k-1}\} < \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad \phi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Aplicando o Lema 5.15 obtemos

$$\phi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{e} \quad \phi_{k+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_{k+1}} - \phi_k = \frac{q_k - q_{k-2}}{q_{k-1}} \quad &< \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \\ &= \frac{4-(\sqrt{5}-1)^2}{2\,(\sqrt{5}-1)} = 1 \end{aligned}$$

Isto é, $q_k < q_{k-1} + q_{k-2}$, o que contradiz a definição da seqüência $(q_k)_{k\geq -1}$: $q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2}$. Esta contradição implica a Proposição 5.13.

Portanto, para terminar a prova da proposição falta demonstrar o Lema 5.15.

Prova do Lema 5.15: O ponto chave do lema é a seguinte relação:

$$\psi_n = \frac{1}{\phi_{n+1}} + \frac{1}{r_n} = \phi_n + r_{n-1}. \tag{5.19}$$

Provada esta identidade, pelas hipóteses do lema, para cada $k \geq 2$ se verifica

$$\phi_k + r_{k-1} = \psi_k < \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\phi_k} + \frac{1}{r_{k-1}} = \psi_{k-1} < \sqrt{5}.$$

Reescrevendo as desigualdades,

$$0 < r_{k-1} < \sqrt{5} - \phi_k \quad \text{e} \quad \frac{1}{r_{k-1}} < \sqrt{5} - \frac{1}{\phi_k}.$$

Multiplicando as desigualdades obtemos

$$1 < \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\phi_k}\right)\left(\sqrt{5} - \phi_k\right) = 5 - \sqrt{5}\,\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{\phi_k} + 1.$$

Isto é,

$$5 - \sqrt{5}\,\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{\phi_k} > 0.$$

Multiplicando por $\dfrac{\sqrt{5}\,\phi_k}{5}$, obtemos

$$\phi_k^2 + 1 - \sqrt{5}\,\phi_k < 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0.$$

Portanto,

$$\left(\phi_k - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \phi_k\right) < \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \phi_k,$$

terminando a prova do lema.

Falta provar a Equação (5.19). Pela definição de ϕ_{n+1} e pela Propriedade (A) dos convergentes se verifica

$$\frac{1}{\phi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \phi_n.$$

Por outro lado, das definições de r_n, a_n e da transformação de Gauss,

$$\frac{1}{r_n} = T^n(x) = \frac{1}{T^{n-1}(x)} - \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor = r_{n-1} - a_n.$$

Assim temos que,

$$\frac{1}{\phi_{n+1}} + \frac{1}{r_n} = a_n + \phi_n + r_{n-1} - a_n = \phi_n + r_{n-1} = \psi_n.$$

Portanto,

$$\psi_n = \frac{1}{\phi_{n+1}} + \frac{1}{r_n} = \phi_n + r_{n-1}.$$

A prova do lema agora está completa. □

Provado o Lema 5.15, a demonstração da Proposição 5.13 está concluída. $\square$

Provaremos a seguir, usando o número de ouro que introduzimos na Seção 4.1, que a constante $C = 1/\sqrt{5}$ na Proposição 5.13 não pode ser melhorada: veremos que se $C < 1/\sqrt{5}$, então a desigualdade (5.13) pode ter apenas um número finito de soluções. Compare com o Corolário 5.14, que garante que, para números irracionais, quando $C \geq 1/\sqrt{5}$ existem infinitas soluções (dadas por convergentes) para a desigualdade (5.13).

Proposição 5.16. *Considere $C < 1/\sqrt{5}$ e o número de ouro*

$$\mathcal{O} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + [1, 1, \ldots, 1, \ldots].$$

Então a desigualdade

$$\left|\mathcal{O} - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},$$

tem apenas um número finito de soluções.

Observe que, pela Proposição 5.12, toda fração irredutível que satisfaz a desigualdade

$$\left|\mathcal{O} - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2\,b^2}$$

é um convergente de $\mathcal{O}$. Portanto, todo a/b que verifica a desigualdade da proposição com $C < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$ é um convergente de $\mathcal{O}$, isto é, $a/b = p_k/q_k$, para algum k.

Prova: Para provar o lema veremos que existe uma seqüência $(\epsilon_k)_k$, $\epsilon_k \to 0$, tal que para todo k vale

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2\,\left(\sqrt{5} + \epsilon_k\right)}. \tag{5.20}$$

Logo, fixado $C < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, para todo k suficientemente grande se verifica

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{C}{q_k^2}.$$

Assim, a desigualdade
$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{C}{q_k^2}$$
é satisfeita apenas para um número finito de valores de k, obtendo a proposição.

Provaremos agora a igualdade na Equação (5.20). Nesta prova o fato de $\mathcal{O} - 1$ ser um ponto fixo da transformação de Gauss e sua expansão ser $1 + [1, 1, 1, \ldots]$ (estas duas afirmações são equivalentes) têm um papel essencial.

Pela Observação 4.1, $T^n(\mathcal{O}) = \mathcal{O} - 1$, para todo $n \geq 0$. Isto é,
$$T^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
Portanto,
$$(T^n(\mathcal{O}))\,\mathcal{O} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad (T^n(\mathcal{O}))^{-1} = \mathcal{O}.$$
Assim, pela Propriedade (B I) e raciocinando indutivamente obtemos
$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \frac{p_k + (T^k(\mathcal{O}))\,p_{k-1}}{q_k + (T^k(\mathcal{O}))\,q_{k-1}} = \frac{p_k\,(T^k(\mathcal{O}))^{-1} + p_{k-1}}{q_k\,(T^k(\mathcal{O}))^{-1} + q_{k-1}} = \\ &= \frac{p_k\,\mathcal{O} + p_{k-1}}{q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1}}.\end{aligned}$$
Logo, usando a Propriedade (B II),
$$\begin{aligned}\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| &= \left|\frac{p_k\,\mathcal{O} + p_{k-1}}{q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \\ &= \left|\frac{p_k\,q_k\,\mathcal{O} + p_{k-1}\,q_k - p_k\,q_k\,\mathcal{O} - p_k\,q_{k-1}}{q_k\,(q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1})}\right| = \\ &= \left|\frac{(-1)^k}{q_k\,(q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1})}\right| = \frac{1}{q_k\,(q_k\,\mathcal{O} + q_{k-1})} = \\ &= \frac{1}{q_k^2\left(\mathcal{O} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2\left(\mathcal{O} + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}. \tag{5.21}$$

Para continuar a prova da proposição precisamos da seguinte propriedade geral dos convergentes:

Lema 5.17. *Considere um número real*

$$x = a_0 + [a_1, \ldots, a_k, \ldots].$$

Para todo $k \geq 1$ se verifica

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + [a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Posporemos a prova do lema e continuaremos com a demonstração da proposição. Como $a_i = 1$ para todo $i \geq 0$, usando o Lema 5.17, temos

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + [a_{k-1}, \ldots, a_1] = 1 + [1, \ldots, 1]$$

Sabemos que

$$a_k + [a_{k-1}, \ldots, a_1] = 1 + [1, \ldots, 1] \to \mathcal{O}, \text{ quando } k \to \infty.$$

Portanto,

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\mathcal{O}} + \epsilon_k, \quad \epsilon_k \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Substituindo na Equação (5.21) e observando que se verifica

$$\mathcal{O} + \mathcal{O}^{-1} = \sqrt{5},$$

obtemos

$$\left|\mathcal{O} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2\left(\mathcal{O} + \mathcal{O}^{-1} + \epsilon_k\right)} = \frac{1}{q_k^2\left(\sqrt{5} + \epsilon_k\right)},$$

obtendo a Equação (5.20).

Para concluir a prova da proposição, é necessário provar o lema

Prova do Lema 5.17: A prova é feita por indução. Para $k = 1$ temos, pela Propriedade (A) dos convergentes, que

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1\, q_0 + q_{-1}}{1} = \frac{a_1}{1} = a_1.$$

Portanto, o lema é verdadeiro para $k = 1$. Suponha que o lema vale para todo j menor do que $(k-1)$,

$$\frac{q_j}{q_{j-1}} = a_j + [a_{j-1}, \dots, a_1], \quad j = 1, \dots, (k-1).$$

Pela Propriedade (A), $q_k = a_k\, q_{k-1} + q_{k-2}$, obtemos

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{a_k\, q_{k-1} + q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}}.$$

Usando a hipótese de indução

$$\begin{aligned} \frac{q_k}{q_{k-1}} &= a_k + \frac{1}{a_{k-1} + [a_{k-2}, \dots, a_1]} = \\ &= a_k + [a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1], \end{aligned}$$

obtendo assim o lema. □

Agora, a prova do Proposição 5.16 está terminada. □

Veremos que a Proposição 5.16 ilustra o caso geral: dado um número irracional x, para C suficientemente pequeno, a desigualdade diofantina (5.13),

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2},$$

não tem soluções se, e somente se, os quocientes $a_i(x)$ da expansão em frações contínuas de x são limitados.

Teorema 5.18. *Considere uma constante $C > 0$, um número real*

$$x = a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$$

e a desigualdade (5.13)

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2}, \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}.$$

Quocientes limitados. *Dada qualquer constante $M \geq 1$, para todo*

$$C < C_0(M) = \frac{1}{M+2}.$$

e todo número irracional x cujos quocientes a_i são limitados por M, $a_i < M$, a desigualdade (5.13) acima não tem solução.

Quocientes ilimitados. *Para todo número irracional x com quocientes ilimitados e toda constante $C > 0$, a desigualdade (5.13) acima tem infinitas soluções.*

Este teorema implica que números irracionais com quocientes limitados não possuem boas aproximações diofantinas. Veremos na Seção 9.1, que os números irracionais que possuem quocientes limitados constituem um conjunto pequeno (de medida zero). Assumindo este fato, o teorema implica que existe um conjunto de medida total de números que admitem um número infinito de boas aproximações diofantinas.

Prova: Provaremos primeiro a parte do teorema sobre quocientes limitados. Suponha que o número irracional x é tal que $a_i < M$ para todo $i \geq 0$. Veremos que não existem números racionais a/b que verificam a desigualdade.

Considere um número racional a/b, $b \in \mathbb{N}$, que satisfaz a desigualdade na hipótese do teorema, onde escolhemos a, b relativamente primos (isto é, a fração a/b é irredutível). Sabemos pela Proposição 5.12 que toda fração irredutível que satisfaz

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2\,b^2}$$

é um convergente de x. Portanto, como

$$C < C_0(M) = \frac{1}{M+2} < \frac{1}{2}$$

temos que a/b é um convergente de x, isto é $a/b = p_k/q_k$ para algum $k \geq 0$.

Assim, usando o Teorema 5.1 e a Propriedade (A) dos convergentes, temos para qualquer $k \geq 0$,

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \quad > \frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})} = \frac{1}{q_k\,(q_k + a_{k+1}\,q_k + q_{k-1})} =$$

$$= \frac{1}{q_k^2\,\left(1 + a_{k+1} + \dfrac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.$$

Como $q_k \geq q_{k-1}$ (lembre a Propriedade (A) dos convergentes) e como $a_k < M$ por hipótese,

$$1 + a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} < 1 + M + 1 = M + 2.$$

Assim, temos

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| = \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2\,(M+2)} = \frac{C_0(M)}{q_k^2} > \frac{C}{q_k^2}.$$

Esta última desigualdade implica que a/b não é solução da desigualdade do teorema quando $C < C_0(M)$. Concluímos assim a prova da primeira parte do teorema.

A segunda parte do teorema relativa aos quocientes ilimitados é uma conseqüência simples do Teorema 5.1. Observe que como os quocientes a_i de x são ilimitados, para qualquer $C > 0$ fixado, existem infinitos valores de k tais que

$$\frac{1}{a_{k+1}} < C.$$

Escolhemos k tal que a_{k+1} satisfaça esta desigualdade. Veremos que o convergente p_k/q_k de x verifica a desigualdade do teorema (para o C fixado). Portanto, se esta afirmação é verdadeira, a conclusão é que existem infinitos racionais que verificam a desigualdade.

Para provar esta afirmação, usamos o Teorema 5.1 e a Propriedade (A),

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \quad < \frac{1}{q_k\,q_{k+1}} = \frac{1}{q_k\,(a_{k+1}\,q_k + q_{k-1})} =$$

$$= \frac{1}{q_k^2\,a_{k+1} + q_k\,q_{k-1}} < \frac{1}{q_k^2\,a_{k+1}} < \frac{C}{q_k^2},$$

para infinitos valores de k. Isto termina a prova da segunda afirmação e do teorema. $\square$

5.4 Exercícios

Exercício 5.1. Complete os detalhes da prova do Corolário 5.14.

Exercício 5.2. Prove que, para todo $p, q \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{4\,q^2}.$$

Exercício 5.3. Prove que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\frac{1}{2\,(1+k)\,q_{3\,k-2}^2} < \left|e - \frac{p_{3\,k-2}}{q_{3\,k-2}}\right| \leq \frac{1}{2\,k\,q_{3\,k-2}^2},$$

onde p_k/q_k é o k-ésimo convergente de e.

Capítulo 6

Números algébricos: Aproximação e periodicidade

Começaremos este capítulo definindo *números algébricos* e *transcendentes.*

Definição 6.1. *Um número x é* algébrico de grau n *(sobre $\mathbb{Q}$) se existe um polinômio $f(z)$ com coeficientes inteiros, de grau $n \in \mathbb{N}$,*

$$f(z) = c_o + c_1\, z + \cdots + c_n\, z^n, \quad c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Z} \text{ e } c_n \neq 0,$$

tal que $f(x) = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$ é mínimo com esta propriedade.

Um número é algébrico *se é algébrico de grau n para algum $n \in \mathbb{N}$. Se o número x não é algébrico então ele é* transcendente.

Observamos que o conjunto dos números algébricos é enumerável: existe um conjunto enumerável de polinômios com coeficientes inteiros e cada polinômio possui um número finito de raízes reais, assim o conjunto dos números algébricos pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos finitos, (veja o Exercício 6.1). Portanto, existem números transcendentes e o seu cardinal é não enumerável. Esta última afirmação agora é imediata (segue do teorema de Cantor que afirma que $\mathbb{R}$ não é enumerável). No entanto, a primeira construção de números transcendentes é creditada a Liouville (por volta de 1850). Veremos seu algoritmo para construir números transcendentes.

Na Seção 6.1 provaremos o Teorema de Liouville (Teorema 6.2), que carateriza os números algébricos como aqueles que não admitem boas aproximações por números racionais que excedem uma determinada "ordem"(obviamente, se o número algébrico é racional, isto significa que não pode ser bem aproximado por outros números racionais). A prova deste teorema fornece um importante algoritmo para a construção de números transcendentes. Definiremos *números de Liouville* (de forma sucinta, aqueles números irracionais "bem" aproximados por números racionais) e veremos que o conjunto destes números tem medida de Lebesgue zero. Veremos que isto implica que existem números transcendentes que não são de Liouville.

Já provamos no Teorema 3.1 que os números irracionais se caraterizam por ter expansões em frações contínuas infinitas. Na última seção deste capítulo obteremos uma interessante conseqüência do Teorema 5.1: um número irracional tem expansão períodica (puramente períodica ou períodica a partir de um determinado termo) se, e somente se, é solução de uma equação algébrica de segundo grau (Teorema 6.12). Um exemplo deste tipo de número é o número de ouro que é uma raíz da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

6.1 Teorema de Liouville: aproximação de números algébricos

O principal resultado desta seção é o Teorema de Liouville.

Teorema 6.2 (Teorema de Liouville). *Seja x um número algébrico de grau n. Então, existe uma constante $C = C(x) > 0$ tal que*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| > \frac{C}{b^n}$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, tais que $x \neq \dfrac{a}{b}$.

Observação 6.3. Todo número racional $x = c/d$ verifica a equação

$$d\,x - c = 0.$$

Portanto, todo número racional é algébrico de grau 1.

Observamos que se $(c/d) \neq (a/b)$ e $C = 1/(2\,d)$ então

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c\,b - a\,d}{d\,b}\right| \geq \frac{1}{d\,b} > \frac{C}{b}.$$

Isto prova o Teorema de Liouville para números algébricos de grau 1.

Antes de provar o teorema deduziremos algumas conseqüências dele. Em primeiro lugar, o Teorema de Liouville limita a ordem das aproximações dos números algébricos por expansões em frações contínuas. Por outro lado, o Teorema de Liouville fornece uma poderosa ferramenta para construir números transcendentes (que são bem aproximados por números racionais), como explicaremos agora.

Observe que, pelo Teorema de Liouville, se um número $x \in (0,1)$ verifica que para toda constante $C > 0$ e todo número natural n existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{C}{q^n},$$

então o número x é transcendente.

Usaremos esta observação para construir números transcendentes.

Algoritmo 6.4 (Algoritmo de Liouville). *Considere um número x cujos quocientes a_i são definidos indutivamente como segue: suponha definidos os quocientes $a_1, \ldots, a_k$ e portanto definido o convergente p_k/q_k, escolhemos a_{k+1} satisfazendo a desigualdade*

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}.$$

O número resultante

$$x = [a_1, \ldots, a_k, \ldots]$$

é transcendente.

Prova: Para provar a afirmação observamos que, pelo Teorema 5.1 e pela Propriedade (A) dos convergentes,

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| &\leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} = \frac{1}{q_k\,(a_{k+1}\, q_k + q_{k-1})} \leq \\ &\leq \frac{1}{q_k^2\, a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}},\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da escolha de a_{k+1}.

Veremos agora que x não é algébrico. Se fosse algébrico de ordem k ele verificaria o Teorema de Liouville. Por outro lado, fixado qualquer $C > 0$ existe k tal que $C > 1/q_k$ (lembre que $q_k \to \infty$ quando $k \to \infty$). Mas o algoritmo implica que o número racional p_k/q_k verifica

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{k+1}} < \frac{C}{q_k^k},$$

o que pelo Teorema de Liouville contradiz o fato de x ser algébrico de ordem k. □

Esta construção motiva a seguinte definição:

Definição 6.5 (Número de Liouville). *Um número $x \in \mathbb{R}$ é* número de Liouville *se para todo número natural n existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$, tais que*

$$0 < \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^n}.$$

Observe que todo número de Liouville é transcendente (veja Exercício 6.6). Portanto, os números de Liouville não são racionais. De fato, os números transcendentes obtidos no algoritmo são de fato números de Liouville. O número e é um exemplo de número transcendente que não é de Liouville (veja o Exercício 6.5).

Por exemplo, o número

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

é um número de Liouville. Para isso observe que

$$\left|\alpha - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n!}}\right| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}} < \sum_{n=(m+1)!}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = $$

$$= \frac{2}{2^{(m+1)!}} = \frac{1}{2^{(m+1)!-1}} \leq \frac{1}{2^{m\,(m!)}}.$$

Agora é suficiente considerar o número

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n!}} = \frac{a}{b}, \quad b = 2^{n!}.$$

Discutiremos estes números depois da prova to Teorema 6.2.

Prova do Teorema 6.2: Pela Observação 6.3, precisamos demonstrar o teorema apenas para números irracionais.

Como x é algébrico de grau n, temos que x verifica uma equação com coeficientes inteiros da forma,

$$f(x) = c_o + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_n\, x^n = 0, \quad c_n \neq 0.$$

Assim

$$f(z) = (z - x)\, g(z), \tag{6.1}$$

onde g é um polinômio de grau $n-1$.

Afirmamos que $g(x) \neq 0$, pois caso contrário x seria um número algébrico de grau no máximo $(n-1)$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$g(z) \neq 0 \quad \text{para todo} \quad z \in V_\delta = [x - \delta, x + \delta].$$

Tomamos agora qualquer número racional a/b. Há dois casos que devemos tratar de forma diferente: $a/b \in V_\delta$ e $a/b \notin V_\delta$.

Se $a/b \in V_\delta$ então $g(a/b) \neq 0$. Fazendo $z = a/b$ na Equação (6.1), obtemos

$$\frac{a}{b} - x = \frac{f\left(\frac{a}{b}\right)}{g\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{c_o + c_1\,\left(\frac{a}{b}\right) + \cdots + c_n\,\left(\frac{a}{b}\right)^n}{g\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Multiplicando por b^n o numerador e o o denominador da última equação, temos

$$\frac{a}{b} - x = \frac{c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n}{b^n\, g\left(\dfrac{a}{b}\right)}.$$

Note que, $c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n \neq 0$, caso contrário, como $b^n \neq 0 \neq g(a/b)$, teríamos $x = a/b$, o que contradiz a irracionalidade de x. Portanto, como $c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n$ é um inteiro diferente de zero,

$$|c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n| \geq 1.$$

Seja $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$, para todo $z \in V_\delta$. Então,

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{c_o\, b^n + c_1\, a\, b^{n-1} + \cdots + c_n\, a^n}{b^n\, g\left(\dfrac{a}{b}\right)}\right| \geq \frac{1}{M\, b^n} > \frac{1}{(M+1)\, b^n}.$$

No segundo caso, $a/b \notin V_\delta$, como $b^n \geq 1$, temos que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \delta > \frac{\delta}{2\, b^n}.$$

Portanto, para provar o teorema basta escolher

$$C = \min\{1/(M+1), \delta/2\}.$$

Observe que esta constante não depende do número a/b escolhido. Agora a prova do teorema está concluida. □

Provaremos agora algumas propriedades dos números de Liouville. Primeiro afirmamos que o conjunto dos números de Liouville é não enumerável (veja o Exercício 6.5). Temos o seguinte resultado:

Proposição 6.6. *O conjunto dos números de Liouville tem medida zero.*

Lembre que um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ tem medida zero se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma família enumerável de abertos $\{(a_i, b_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i < \varepsilon.$$

Esta noção aparece de forma natural nos cursos de Análise quando se estuda a integral de Riemann.

Todo conjunto enumerável é um conjunto de medida zero. O conjunto de Cantor ternário é um exemplo de conjunto não enumerável de medida zero (veja o Exercício 6.4). A proposição implica que o conjunto dos números de Liouville é outro exemplo de conjunto não enumerável de medida zero.

Neste ponto necessitamos alguns argumentos simples da teoria da medida. Temos que os conjuntos dos números algébricos e de Liouville têm medida zero. Portanto, sua união tambem tem medida zero (veja o Exercício 6.4). Dizemos que um conjunto tem *medida total* se seu complementar tem medida zero. As afirmações precedentes implicam que o conjunto dos números transcendentes que não são de Liouville tem medida total.

Corolário 6.7. *Os números transcendentes que não são de Liouville têm medida total em* $\mathbb{R}$*. Portanto, existem números transcendentes que não são de Liouville.*

De fato, o corolário significa que os números transcendentes que não são de Liouville são a "maioria" (isto corresponde a noção de quase todo ponto que apresentaremos na Seção 8.1).

Prova da Proposição 6.6: Usando o Exercício 6.4 (a união enumerável de conjuntos de medida zero tem medida zero) é suficiente verificar que os números de Liouville do intervalo $[0,1]$ tem medida zero. Denotamos por $\mathbb{L}$ o conjunto dos números de Liouville em $[0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$ devemos exibir uma cobertura enumerável $\{(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ de $\mathbb{L}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i < \varepsilon$.

Consideramos a seguinte família enumerável de conjuntos abertos

$$V_{n,q} = \bigcup_{p=0}^{q-1} \left(\frac{p}{q} - \frac{p}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{p}{q^n}, \right), \quad q \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que, para todo n

$$\mathbb{L} \subset V_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} V_{n,q}. \tag{6.2}$$

Este fato segue da definição de número de Liouville: se $x \in \mathbb{L}$ então existem a, $b \in \mathbb{N}$ tais que $x \in (a/b - 1/b^n, a/b + 1/b^n)$. Portanto, $x \in V_{n,b}$.

Calcularemos agora a soma dos comprimentos dos intervalos de V_n. Temos que a soma dos seus comprimentos é

$$\sum_{q=2}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{q-1} \frac{2\,p}{q^n} \right) = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2\,q\,(q-1)}{q^n} \leq 2 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-2}}.$$

Observe que, se $n \geq 3$,

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-2}} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{n-2}}\,dx = \frac{1}{n-3}.$$

Portanto, a soma dos comprimentos é menor do que $2/(n-3)$. Agora é suficiente escolher n suficientemente grande tal que $2/(n-3) < \varepsilon$. A prova da proposição está terminada. $\square$

Fechamos a discussão sobre os números de Liouville com um resultado topológico que afirma que os números de Liouville formam um conjunto residual de $\mathbb{R}$.

Dizemos que um conjunto B de $\mathbb{R}$ é *residual* se existe uma família $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos de $\mathbb{R}$ tais que $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset B$. Definimos conjuntos residuais em $[0,1)$ da forma óbvia.

Veremos primeiro o Teorema de Baire que afirma que conjuntos residuais de $\mathbb{R}$ são densos. Para que o texto resulte auto-contido, provaremos este teorema (que usaremos também no Capítulo 7). Observamos que os conjuntos residuais verificam uma propriedade importante: por definição, a interseção de um conjunto enumerável de conjuntos residuais é um conjunto residual. Portanto, o Teorema de Baire garante que sua interseção é um conjunto denso. Por outro lado, a interseção finita de conjuntos densos pode não ser um conjunto denso. Por exemplo, a interseção do conjuntos dos números irracionais $\mathbb{I}$ e dos racionais $\mathbb{Q}$ que são densos em $\mathbb{R}$ é vazia.

Teorema 6.8 (Teorema de Baire). *Todo subconjuunto residual de $\mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Prova: A prova é por absurdo, suponha que existe um conjunto residual B que não é denso em $\mathbb{R}$. Pela definição de conjunto residual, existe uma família $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos de $\mathbb{R}$ tais que $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset B$. Pela hipótese de absurdo, existem um ponto $z_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que $[z_0-\varepsilon_0, z_0+\varepsilon_0] \cap B = \emptyset$. Como o conjunto U_1 é denso em $\mathbb{R}$ existem $z_1 \in (z_0-\varepsilon_0, z_0+\varepsilon_0) \cap U_1$ e $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ tais que $[z_1-\varepsilon_1, z_1+\varepsilon_1] \subset (z_0-\varepsilon_0, z_0+\varepsilon_0)$ e $[z_1-\varepsilon_1, z_1+\varepsilon_1] \subset U_1$.

Procedemos agora indutivamente e obtemos seqüências de pontos z_n e de números positivos tais que

- $z_n \in (z_{n-1}-\varepsilon_{n-1}, z_{n-1}+\varepsilon_{n-1}) \cap U_n$ (isto segue da densidade de U_n) e $[z_n-\varepsilon_n, z_n+\varepsilon_n] \subset U_n$,
- $[z_n-\varepsilon_n, z_n+\varepsilon_n] \subset (z_0-\varepsilon_0, z_0+\varepsilon_0)$,
- $\varepsilon_n < \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} < \dfrac{\varepsilon_0}{2^n}$.

Observe que a seqüência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy por construção (veja o Exercício 6.7). Considere $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ e observe que por construção

$$|z-z_n| \leq \sum_{k\geq n} |z_{k+1}-z_k| \leq \sum_{k\geq n+1} \varepsilon_k \leq \varepsilon_n \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} = \varepsilon_n.$$

Portanto, $z \in [z_n-\varepsilon_n, z_n+\varepsilon_n] \subset U_n$, para todo n. Assim, $z \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset B$. Por outro lado, $z \in [z_0-\varepsilon_0, z_0+\varepsilon_0]$ e, por hipótese, $[z_0-\varepsilon_0, z_0+\varepsilon_0] \cap B = \emptyset$. Obtemos assim uma contradição, terminando a prova do teorema. $\square$

Observação 6.9. Todo conjunto residual B de $\mathbb{R}$ não é enumerável. Veremos isto por absurdo, se B fosse enumerável teriamos $B = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma família $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos de $\mathbb{R}$ tais que $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset B$. Consideremos a nova família $V_n = U_n \setminus \{x_n\}$. Obviamente, cada V_n é aberto e denso em $\mathbb{R}$. Assim o conjunto $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ é residual, e portanto denso, em $\mathbb{R}$. Mas por construção o conjunto D é vazio: está contido em B e nenhum elemento x_n de B pertence a D.

Assim temos que $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso de $\mathbb{R}$ que não é residual. Os números irracionais formam um conjunto residual de $\mathbb{R}$ (veja o Exercício 6.8).

Observação 6.10. Lembramos que um espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$ é completo se toda seqüência de Cauchy é convergente. O Teorema de Baire vale para espaços métricos completos. De fato, a prova acima funciona considerando bolas em vez de intervalos abertos (veja o Exercício 6.9).

Proposição 6.11. *O conjunto dos números de Liouville é residual (portanto denso) em* $\mathbb{R}$.

Prova: É suficiente provar a proposição para números de Liouville do intervalo $[0,1]$. Observe que por construção, para cada n, o conjunto V_n contém os números racionais de $(0,1)$. Portanto é um conjunto aberto e denso de $[0,1]$. Consideramos a seguinte interseção enumerável de abertos e densos de $[0,1]$:

$$\mathbb{V} = \left(\bigcap_n V_n \right) \cap \left(\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (0,1) \setminus \{r\} \right)$$

Por construção, o conjunto $\mathbb{V}$ é residual em $[0,1]$. Afirmamos que $\mathbb{L} = \mathbb{V}$.

A inclusão $\mathbb{L} \subset \mathbb{V}$ segue da prova da proposição. Para a inclusão em sentido contrário observe que se $x \in \mathbb{V}$ então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $x \in V_n$ e portanto existem p e q tais que $|x - p/q| < 1/q^n$. Esta é exatamente a definição de número de Liouville. $\square$

6.2 Periodicidade e equações quadráticas

Vimos na Seção 4.1 que o número de ouro $\mathcal{O}$ satisfaz a equação quadrática

$$z^2 - z - 1 = 0$$

e tem expansão $1 + [1,1,1,\ldots]$, portanto, sua expansão é periódica. Veremos no Teorema 6.12 que estas duas propriedades (ser solução de uma equação quadrática e ter expansão periódica) estão muito relacionadas: *a expansão em frações contínuas de um número irracional x (necessariamente infinita) é periódica se, e somente se, x satisfaz uma equação quadrática, isto é, x é raíz de um polinômio da forma*

$$P(z) = a\,z^2 + b\,z + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a > 0.$$

Antes de provar esta afirmação, introduziremos uma notação para expansões em frações contínuas periódicas similar à usada para as expansões n-árias periódicas. Como no caso das expansões n-árias, há dois tipos de expansões periódicas, as puramente periódicas (como no caso do número de ouro) e as pré-periódicas (aquelas que são periódicas a partir de certo dígito).

Dizemos que a expansão em frações contínuas do número x é

- se

  $$x = a_0 + [a_1, a_2, \dots], \quad a_i = a_{i+m}, \quad \text{para todo } i \geq 0,$$

  onde m é mínimo com tal propriedade. Neste caso, escrevemos

  $$x = \overline{a_0 + [a_1, \dots, a_{m-1}}],$$

  Observamos que para os números do intervalo $(0,1)$ o número $a_0 = 0$ não é considerado. Portanto, ser periódico de período m significa que

  $$x = \overline{[a_1, \dots, a_m]}, \quad a_i = a_{i+m}, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

  Observamos que $x \in (0,1)$ tem expansão periódica de período m se, e somente se, $T^m(x) = x$ e $T^j(x) \neq x$ para $0 < j < m$ (veja o Exercício 6.11).

- *pré-periódica* de período $m > 0$ se existe $n \geq 1$ tal que

  $$x = a_0 + [a_1, a_2, \dots], \quad a_{n+(i+m)} = a_{n+i} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N},$$

  onde n e m são mínimos com tal propriedade. Isto é, existe um bloco inicial seguido de um outro bloco que se repete infinitas vezes. A notação para esse caso é

  $$x = a_0 + [a_1, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, \dots, a_{n+m-1}}].$$

  Observamos que $x \in (0,1)$ tem expansão pré-periódica se, e somente se, existe n tal que $T^n(x)$ tem expansão periódica (assim justificamos o nome pré-periódico para este tipo de expansões). Veja o Exercício 6.11.

Enunciaremos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 6.12 (Lagrange). *Seja x um número irracional. A expansão em frações contínuas de x é periódica ou pré-periódica se, e somente se, x é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros.*

Antes de provar o teorema, sugerimos que prove "a mão" que os números de intervalo $(0,1)$ de períodos um e dois são algébricos (Exercício 6.10).

Prova: Dividiremos a prova do teorema em duas proposições (suficiência e necessidade).

Proposição 6.13. *Se um número irracional x tem expansão periódica ou pré-periódica então satisfaz uma equação quadrática.*

Prova da Proposição: Veremos primeiro o caso em que a expansão de x é periódica (de período m). Observe que é suficiente provar o resultado para $x \in (0,1)$ (justifique!). Usando a periodicidade obteremos de forma explícita uma equação de segundo grau que tem x como raíz. O ponto chave da prova da proposição é o seguinte lema:

Lema 6.14. *Considere $x \in (0,1)$ irracional com expansão periódica de período m. Então $T^m(x) = x$.*

Lembre que no caso do número de ouro temos $\mathcal{O} - 1 = \mathcal{O}^{-1}$, portanto $\mathcal{O}$ é raiz de $x^2 - x - 1$.

Posporemos a prova do lema e continuaremos a demonstração da proposição. Pela Propriedade (B I) dos convergentes e o Lema 6.14,

$$x = \frac{p_m + (T^m(x))\, p_{m-1}}{q_m + (T^m(x))\, q_{m-1}} = \frac{p_m + x\, p_{m-1}}{q_m + x\, q_{m-1}}.$$

Logo,

$$x^2\, q_{m-1} + x\, q_m = x\, p_{m-1} + p_m.$$

Isto é,

$$q_{m-1}\, x^2 + (q_m - p_{m-1})\, x - p_m = 0.$$

Finalmente, como $m > 0$, temos que $q_{m-1} \geq q_0 = 1$. Portanto, a equação acima é uma equação quadrática. Isto prova a proposição no caso periódico. Provaremos agora o lema.

Prova do Lema 6.14: Por hipótese, se verifica

$$x = [\overline{a_1, \ldots, a_m}].$$

Observamos, primeiro, que pela definição de T e dos quocientes de x,

$$x = [a_1, \ldots, a_m + T^m(x)]$$

Por outro lado, pela periodicidade,

$$\begin{aligned} x &= \left[a_1, \ldots, a_m + [a_1, \ldots, a_m + \ldots]\right] = \\ &= [a_1, \ldots, a_m + x]\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[a_1, \ldots, a_m + T^m(x)] = [a_1, \ldots, a_m + x].$$

Agora, é óbvio que $T^m(x) = x$, obtendo o lema. □

O caso pré-periódico segue de forma similar, temos

$$x = [a_1, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n, \ldots, a_{n+m-1}}].$$

Primeiro obtemos uma versão do Lema 6.14 neste caso. Observe que

$$T^{n-1}(x) = [\overline{a_n, \ldots, a_{n+m-1}}].$$

Isto significa que $T^{n-1}(x)$ tem expansão periódica de período m e assim$T^{n-1+m}(x) = T^{n-1}(x)$. Então, pela Propriedade (B I) aplicada a $(n-1)$ e $(n+m-1)$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_{n-1} + (T^{n-1}(x))\,p_{n-2}}{q_{n-1} + (T^{n-1}(x))\,q_{n-2}} = \\ &= \frac{p_{n-1+m} + (T^{n-1+m}(x))\,p_{n-2+m}}{q_{n-1+m} + (T^{n-1+m}(x))\,q_{n-2+m}} = \\ &= \frac{p_{n-1+m} + (T^{n-1}(x))\,p_{n-2+m}}{q_{n-1+m} + (T^{n-1}(x))\,q_{n-2+m}}. \end{aligned}$$

Portanto, usando a primeira e a última igualdades obtemos

$$\begin{aligned} T^{n-1}(x) &= \frac{p_{n-1} - x\, q_{n-1}}{x\, q_{n-2} - p_{n-2}} = \\ &= \frac{p_{n-1+m} - x\, q_{n-1+m}}{x\, q_{n-2+m} - p_{n-2+m}}. \end{aligned}$$

Isto é

$$\frac{p_{n-1} - x\, q_{n-1}}{x\, q_{n-2} - p_{n-2}} = \frac{p_{n-1+m} - x\, q_{n-1+m}}{x\, q_{n-2+m} - p_{n-2+m}}.$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} a &= q_{n-2}\, q_{n-1+m} - q_{n-2+m}\, q_{n-1}, \\ b &= p_{n-1}\, q_{n-2+m} + q_{n-1}\, p_{n-2+m} - p_{n-1+m}\, q_{n-2} \\ &\quad - q_{n-1+m}\, p_{n-2}, \\ c &= p_{n-2}\, p_{n-1+m} - p_{n-2+m}\, p_{n-1}, \end{aligned}$$

obtemos que

$$a\, x^2 + b\, x + c = 0. \tag{6.3}$$

Afirmamos que a equação acima é uma equação quadrática, isto é, que $a \neq 0$. Caso contrário teriamos,

$$q_{n-2}\, q_{n-1+m} - q_{n-2+m}\, q_{n-1} = 0,$$

e portanto q_{n-1+m} dividiria $q_{n-2+m}\, q_{n-1}$. Pela Propriedade (B II), q_{n-1+m} e q_{n-2+m} são primos entre si. Portanto, se q_{n-1+m} necessariamente deve dividir q_{n-1}. Mas isto é absurdo já que $q_{n-1+m} > q_{n-1}$. Logo,

$$q_{n-2}\, q_{n-1+m} - q_{n-2+m}\, q_{n-1} \neq 0,$$

Assim a equação (6.3) é quadrática, o que prova a proposição no caso pré-periódico, e termina a prova da proposição. □

Proposição 6.15. *Considere um número irracional x que é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros. Então a expansão em frações contínuas de x é periódica ou pré-periódica.*

Prova: A prova da demonstração tem duas etapas. O primeiro passo é obter uma família de equações quadráticas (com coeficientes inteiros) tal que, para cada k, $T^k(x)$ é solução de uma equação da forma

$$A_k\,(T^k(x))^2 + B_k\,T^k(x) + C_k = 0, \quad A_k \in \mathbb{N},\, B_k,\, C_k \in \mathbb{Z}.$$

O segundo passo é ver que de fato existem um número finito de tais equações.

Provados estes dois passos temos que $T^k(x)$ assume um número finito de valores: Se há ℓ equações diferentes haverá no máximo $2\,\ell$ soluções diferentes e portanto $T^k(x)$ pode tomar no máximo $2\,\ell$ valores diferentes. Assim, existem $k \geq 0$ e $h > 0$ tais que $T^k(x) = T^{k+h}(x)$. Isto automaticamente implica que a seqüência $T^j(x)$ é periódica (se $k = 0$) ou pré-periodica. Portanto, a expansão de x em frações contínuas é periódica (no primeiro caso) ou pré-periódica (no segundo), provando a proposição.

Veremos a seguir as provas dos dois passos. Observamos primeiro que podemos supor que $x \in (0,1)$: $x \in \mathbb{R}$ é solução de uma equação quadrática com coeficientes inteiros se, e somente se, $\bar{x} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$ é solução de uma equação desse tipo.

Primeiro passo: Por hipótese, existem inteiros a, b e c, $a > 0$, tais que

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0.$$

Usando a Propriedade (B I),

$$x = \frac{p_k + (T^k(x))\,p_{k-1}}{q_k + (T^k(x))\,q_{k-1}}, \quad k \geq 1.$$

Substituimos x na equação acima pelo novo valor e obtemos, para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 = \quad & a\,(p_k + (T^k(x))\,p_{k-1})^2 + \\ & + b\,(p_k + (T^k(x))\,p_{k-1})\,(q_k + (T^k(x))\,q_{k-1}) + \\ & + c\,(q_k + (T^k(x))\,q_{k-1})^2. \end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
0 = \quad & a\,(p_k^2 + 2\,(T^k(x))\,p_{k-1}\,p_k + (T^k(x))^2\,p_{k-1}^2) + \\
& +b\,(p_k\,q_k + (T^k(x))p_k\,q_{k-1} + (T^k(x))\,p_{k-1}\,q_k + \\
& +(T^k(x))^2\,p_{k-1}\,q_{k-1}) + \\
& +c(q_k^2 + 2\,(T^k(x))\,q_k\,q_{k-1} + (T^k(x))^2\,q_{k-1}^2).
\end{aligned}
$$

Reorganizando a equação acima obtemos,

$$A_k\,(T^k(x))^2 + B_k\,T^k(x) + C_k = 0,$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_k &= a\,p_{k-1}^2 + b\,p_{k-1}\,q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2, \\
B_k &= 2\,a\,p_{k-1}\,p_k + b\,p_k\,q_{k-1} + b\,p_{k-1}\,q_k + \\
&\qquad +2\,c\,q_k\,q_{k-1}, \\
C_k &= a\,p_k^2 + b\,p_k\,q_k + c\,q_k^2.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Afirmamos que $A_k \neq 0$ para todo $k \geq 1$, assim obtemos uma família de equações quadráticas com coeficientes inteiros. Caso contrário, se $A_k = 0$, $T^k(x)$ seria um número racional e portanto x também seria racional, o que é absurdo (lembre que x é irracional por hipótese). Terminamos assim a prova do primeiro passo.

Segundo passo: Para provar que existem um número finito de equações é suficiente provar o seguinte:

Lema 6.16. *Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que* $\max\{|A_k|, |B_k|, |C_k|\} \leq M$.

Como os coeficientes das equações são inteiros, o lema implica que existem no máximo $(2\,M+1)^3$ equações.

Prova do Lema: Pelo Teorema 5.1, para $k \geq 1$,

$$\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \leq \frac{1}{q_k\,q_{k-1}} \leq \frac{1}{q_{k-1}q_{k-1}} = \frac{1}{q_{k-1}^2},$$

e podemos escrever

$$x = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{\epsilon}{q_{k-1}^2}, \quad \text{onde} \quad |\epsilon| \leq 1,$$

isto é,

$$p_{k-1} = x\, q_{k-1} + \frac{\epsilon}{q_{k-1}}.$$

Substituindo o valor de p_{k-1} na Equação (6.4) temos que

$$\begin{aligned} A_k \quad &= a \left(x\, q_{k-1} + \frac{\epsilon}{q_{k-1}} \right)^2 + b \left(x\, q_{k-1} + \frac{\epsilon}{q_{k-1}} \right) q_{k-1} + c\, q_{k-1}^2 = \\ &= a\, x^2\, q_{k-1}^2 + 2\, a\, x\, \epsilon + a \left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}} \right)^2 + b\, x\, q_{k-1}^2 + b\, \epsilon + c\, q_{k-1}^2 = \\ &= q_{k-1}^2 \, \big(a\, x^2 + b\, x + c \big) + 2\, a\, x\, \epsilon + a \left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}} \right)^2 + b\, \epsilon. \end{aligned}$$

Como por hipótese $a\, x^2 + b\, x + c = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} A_k \quad &= 2\, a\, x\, \epsilon + a \left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}} \right)^2 + b\, \epsilon = \\ &= \epsilon \left(2\, a\, x + b + a \left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Como $q_{k-1} \geq 1$ e $|\epsilon| \leq 1$, usando a desigualdade triangular,

$$|A_k| = \left| \epsilon \left(2\, a\, x + b + a \left(\frac{\epsilon}{q_{k-1}^2} \right) \right) \right| \leq 2\, |a\, x| + |b| + |a|.$$

Portanto, como x, a e b estão fixos, os coeficientes $|A_k|$ estão limitados por uma constante M_1.

Note também que, por definição, se verifica $A_i = C_{i-1}$ (confira diretamente na Equação (6.4)). Portanto,

$$|C_k| = |A_{k+1}| < M_1.$$

Portanto, os $|A_k|$ e $|C_k|$ são limitados. Falta obter uma cota para os B_k.

Podemos também, através de uma conta simples (mas infelizmente enfadonha), provar o seguinte

Afirmação 6.17. *O discriminante Δ da Equação (6.4) é*

$$\Delta = B_k^2 - 4\,A_k\,C_k = b^2 - 4\,a\,c.$$

Usando a afirmação obtemos,

$$|B_k|^2 = |B_k^2| = |b^2 - 4\,a\,c + 4\,A_k\,C_k|.$$

Portanto, como os $|A_k|$ e $|C_k|$ são limitados, e a, b e c estõ fixos, os B_k também são limitados. Para provar o lema necessitamos provar a afirmação.

Prova da Afirmação 6.17: Em primeiro lugar, lembramos a definição de B_k em (6.4),

$$B_k = 2\,a\,p_{k-1}\,p_k + b\,p_k\,q_{k-1} + b\,p_{k-1}\,q_k + 2\,c\,q_k\,q_{k-1},$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
B_k^2 \quad &= (2\,a\,p_{k-1}\,p_k + b\,p_k\,q_{k-1} + b\,p_{k-1}\,q_k + 2\,c\,q_k\,q_{k-1})^2 = \\
&= 4\,a^2\,p_{k-1}^2\,p_k^2 + 2\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} + \\
&\qquad +2\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + 4\,a\,c\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + \\
&\qquad +2\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} + b^2\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + \\
&\qquad +b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + 2\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + \\
&\qquad +2\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + \\
&\qquad +b^2\,p_{k-1}^2\,q_k^2 + 2\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + \\
&\qquad +4\,a\,c\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + 2\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + \\
&\qquad +2\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + 4\,c^2\,q_{k-1}^2\,q_k^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
B_k^2 \quad &= 4\,a^2\,p_{k-1}^2\,p_k^2 + 4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1}+\\
&\qquad +4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + (8\,a\,c + 2\,b^2)\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k+\\
&\qquad +b^2\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + b^2\,p_{k-1}^2\,q_k^2+\\
&\qquad +4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + 4\,c^2\,q_{k-1}^2\,q_k^2.
\end{aligned}
$$

Como

$$A_k = a\,p_{k-1}^2 + b\,p_{k-1}\,q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2,$$

e

$$C_k = a\,p_k^2 + b\,p_k\,q_k + c\,q_k^2,$$

obtemos que

$$
\begin{aligned}
-4\,A_k\,C_k \quad &= -4\,\left(a\,p_{k-1}^2 + b\,p_{k-1}\,q_{k-1} + c\,q_{k-1}^2\right)\cdot\\
&\qquad \cdot\left(a\,p_k^2 + b\,p_k\,q_k + c\,q_k^2\right) =\\
&= -4\,a^2\,p_{k-1}\,p_k^2 - 4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k\\
&\qquad -4\,a\,c\,p_{k-1}^2\,q_{k-1}^2 - 4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1}\\
&\qquad -4\,b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k - 4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2\\
&\qquad -4\,a\,c\,p_k^2\,q_{k-1}^2 - 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k - 4\,c^2\,q_{k-1}\,q_k.
\end{aligned}
$$

Logo, lembrando que

$$\begin{aligned}
\Delta\ &= B_k^2 - 4\,A_k\,C_k = \\
&= 4\,a^2\,p_{k-1}^2\,p_k^2 + 4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} \\
&\quad +4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k + (8\,a\,c + 2\,b^2)\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k \\
&\quad +b^2\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k + b^2\,p_{k-1}^2\,q_k^2 + \\
&\quad +4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 + 4\,c^2\,q_{k-1}^2\,q_k^2 \\
&\quad -4\,a^2\,p_{k-1}\,p_k^2 - 4\,a\,b\,p_{k-1}^2\,p_k\,q_k \\
&\quad -4\,a\,c\,p_{k-1}^2\,q_{k-1}^2 - 4\,a\,b\,p_{k-1}\,p_k^2\,q_{k-1} \\
&\quad -4\,b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k - 4\,b\,c\,p_{k-1}\,q_{k-1}\,q_k^2 \\
&\quad -4\,a\,c\,p_k^2\,q_{k-1}^2 - 4\,b\,c\,p_k\,q_{k-1}^2\,q_k - 4\,c^2\,q_{k-1}\,q_k.
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima

$$\begin{aligned}
\Delta\ &= 8\,a\,c\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k - 2\,b^2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + \\
&\quad +(b^2 - 4\,a\,c)\,p_k^2\,q_{k-1}^2 + (b^2 - 4\,a\,c)\,p_{k-1}^2\,q_k^2 = \\
&= +(b^2 - 4\,a\,c) \\
&\qquad (-2\,p_{k-1}\,p_k\,q_{k-1}\,q_k + p_k^2\,q_{k-1}^2 + p_{k-1}^2\,q_k^2) = \\
&= (b^2 - 4\,a\,c)\,(p_k\,q_{k-1} - p_{k-1}\,q_k)^2.
\end{aligned}$$

Pela Propriedade (B II),

$$\Delta = (b^2 - 4\,a\,c)((-1)^{n+1})^2 = b^2 - 4\,a\,c.$$

Finalizamos assim a prova da afirmação. □

Provada a afirmação a demonstração do lema está concluída. □

Provado o lema a demonstração da Proposição 6.15 está finalizada. □

Provadas as Proposições 6.13 e 6.15 a prova do teorema está concluida. □

6.3 Exercícios

Exercício 6.1. Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

Exercício 6.2. Considere um número natural $k \geq 2$. Prove que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n!}}$$

é um número de Liouville. Quando $k = 10$ este número é conhecido como a constante de Liouville.

Exercício 6.3. Usando a expansão em frações contínuas, prove que o número e não é de Liouville.

Exercício 6.4. Prove que

- todo conjunto enumerável tem medida zero,
- a união enumerável de conjuntos de medida zero tem medida zero,
- o conjunto de Cantor ternário (definido como o fecho dos números do intervalo $[0, 1]$ que não possuem 1 na sua expansão em base 3) é não enumerável e tem medida zero.

Exercício 6.5. Prove que o conjunto dos números de Liouville não é enumerável.

Exercício 6.6. Prove que todo número de Liouville é transcendente.

Exercício 6.7. Prove que a seqüência $(z_n)_n$ na prova do Teorema de Baire (Teorema 6.8) é de Cauchy.

Exercício 6.8. Prove que o conjunto dos números irracionais é residual em $\mathbb{R}$.

Exercício 6.9. Prove o Teorema de Baire para espaços métricos completos.

Exercício 6.10. Prove diretamente que os números do intervalo $(0, 1)$ que verificam $T(x) = x$ ou $T^2(x) = x$ são algébricos de grau dois.

Exercício 6.11. Considere $x \in (0, 1)$.

- O número tem expansão periódica de período m se, e somente se, $T^m(x) = x$ e $T^j(x) \neq x$ para $0 < j < m$.

- O número tem $x \in (0, 1)$ tem expansão pré-periódica se, e somente se, existe n tal que $T^n(x)$ tem expansão periódica.

Exercício 6.12. Considere o número $x = 1 + [1, 2, 1, 1, 2, \ldots] = \overline{1 + [1, 2]}$. Encontre uma equação quadrática que tenha x como raíz.

Exercício 6.13. Considere o conjunto $\mathcal{L}$ dos números do intervalo $[0, 1]$ que são solução de alguma equação quadrática com coeficientes inteiros. Prove que $\mathcal{L}$ é denso em $[0, 1]$.

Capítulo 7

Dinâmica da transformação de Gauss

Veremos neste capítulo algumas propriedades dinâmicas da transformação de Gauss como a existência de órbitas densas e a densidade dos pontos periódicos. Por exemplo, a Proposição 7.10 afirma que existe um conjunto residual de pontos do intervalo $(0, 1)$ cujas órbitas são densas em $(0, 1)$. Também veremos algumas propriedades de *mistura* da transformação de Gauss.

Lembramos que estabelecemos no Capítulo 3 uma correspondência biunívoca entre os números irracionais e as seqüências infinitas de números naturais, usando as propriedades da expansão em frações contínuas. Na Seção 7.2, daremos uma prova dinâmica deste resultado usando algumas propriedades sobre a dinâmica da transformação de Gauss. Lembramos que um fato essencial é que a expansão em frações contínuas de um número x está determinada pelos seus iterados $T^i(x)$ pela transformação de Gauss. Este fato estabelece a relação entre a dinâmica e a expansão em frações contínuas e será explorado neste e no próximo capítulo.

Para motivar nossas construções envolvendo iterações da transformação de Gauss e introduzir algumas idéias dinâmicas da forma mais natural possível, veremos na Seção 7.1 outras expansões de números reais (n-ária, β e séries de Lüroth) obtidas compondo (iterando) funções. Isto é, a expansão tem associado um sistema dinâmico.

A expansão mais simples e mais familiar é a n-ária (da qual a decimal e a binária são exemplos) cujo sistema dinâmico associado é a multiplicação por $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$E_n \colon [0,1) \to [0,1), \quad E_n(x) = n\,x - \lfloor n\,x \rfloor.$$

Veremos também outros dois exemplos: as expansões β (cujo sistema dinâmico associado é a multiplicação por $\beta \in (1,2)$) e as expansões de Lüroth (uma versão linear da transformação de Gauss). Nestes exemplos, o sistema dinâmico subjacente é muito mais simples do que a transformação de Gauss. Por exemplo, nos casos acima as transformações são sempre afins e *uniformemente expansoras* (o módulo da derivada é estritamente maior do que um). Veremos que a propriedade de expansividade é muito útil.

Finalmente, na Seção 7.3 estudaremos algumas propriedades de mistura da transformação de Gauss (*transitividade* e *misturadora*). Veremos versões probabilísticas (ergódicas) de algumas destas propriedades no Capítulo 8

7.1 Outras expansões de números reais

Nesta seção discutiremos três exemplos de expansões de números reais: expansões n-árias e β e séries de Lüroth. Uma boa referência para o estudo deste tipo de expansões é [5]. Veja também o texo [16] sobre Dinâmica Aritmética, uma área dos sistemas dinâmicos onde confluem dinâmica simbólica, teoria ergódica e aritmética.

7.1.1 Expansões n-árias

Dado um número natural $n \geq 2$, a *expansão n-ária* de um número $x \in [0,1)$ consiste em escrever x como a soma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k(x)}{n^k}, \quad \nu_k(x) \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Os números $\nu_k(x)$ desempenham um papel similar aos quocientes $a_k(x)$ da expansão em frações contínuas. Analogamente, as somas

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k(x)}{n^k}$$

desempenham o papel dos convergentes.

Observe que no caso das expansões n-árias temos sempre uma cota para aproximação de x por $s_m(x)$ (veremos que o mesmo acontece no caso das frações contínuas):

$$|x - s_m(x)| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} n^{-k} = \frac{1}{n^m\,(n-1)}.$$

No caso das expansões n-árias é simples determinar os $\nu_k(x)$. Por exemplo, no caso da expansão decimal, $n = 10$, se $x = 0,1232147\ldots$ sabemos que $\nu_6(x) = \lfloor (10)\, E_{10}^5(x) \rfloor = 4$.

Consideramos os intervalos

$$J_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \subset [0,1), \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Observamos que $E_n(J_k) = [0,1)$. Consideramos também o espaço

$$\Sigma_n = \{0, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}}$$

de todas as seqüências infinitas $\iota = (\iota_k)_{k\in\mathbb{N}}$ formadas por números naturais ι_k com $0 \le \iota_k \le (n-1)$.

Definimos a seguinte transformação:

$$\iota\colon [0,1) \to \Sigma_n, \quad \iota(x) = (\iota_j(x))_{j=1}^{\infty},$$

onde $\iota_j(x) = k$ se, e somente se, $E_n^{j-1}(x) \in J_k$.

Observamos que esta transformação é injetora. A injetividade decorre de forma simples do fato de que E_n tem derivada $n \ge 2$ nos intervalos I_k. Observe também que se dois pontos x e y verificam que $\iota_j(x) = \iota_j(y)$ para todo $j = 1, \ldots, r$, então $E_n^j(x)$ e $E_n^j(y)$ pertencem ao mesmos J_{k_j} para todo $j = 0, \ldots, r-1$. Usando que a derivada de E_n^{r-1} é n^{r-1} obtemos, usando o Teorema do Valor Médio, que

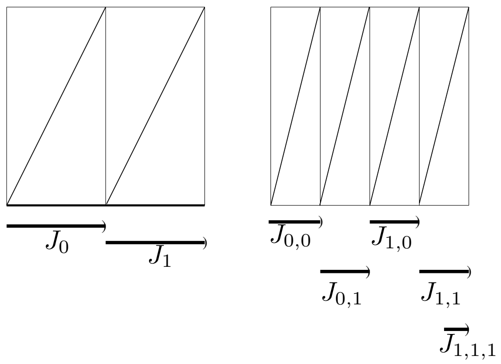

Figura 7.1: E_n e os intervalos $J_{i_1,\dots,i_k}$

$|x-y| \leq n^{-r}$. Portanto, se $\iota(x) = \iota(y)$ então se verifica $|x-y| \leq n^{-r}$ para todo $r \geq 0$ e obtemos que $x = y$.

Por outro lado, a transformação não é sobrejetora. Por exemplo, na base n, não existe nenhum ponto $x \in [0,1)$ tal que $\iota(x) = (\iota_k(x))_k$ com $\iota_k(x) = n-1$ para todo k. Mas é possível provar que as únicas seqüências de Σ_n que não são imagem de nenhum ponto de $[0,1)$ são as seqüências da forma $\iota_k = n-1$ para todo $k \geq k_0$. Este ponto será desenvolvido nos exercícios, mas explicaremos algumas idéias que aparecerão de novo (de forma mais complicada) no caso da transformação de Gauss.

Definimos, para $k, j \in \{0, \dots, (n-1)\}$, o conjunto $J_{k,j}$ como o subconjunto de J_k tal que

$$E_n(J_{k,j}) = J_j.$$

Este conjunto está bem definido e é um intervalo semi-aberto (fechado à esquerda aberto à direita). Na Figura 7.1 desenhamos no caso da base 2, a segunda geração de intervalos $J_{0,0}$, $J_{0,1}$, $J_{1,0}$ e $J_{1,1}$. Indutivamente, $J_{k_1,\dots,k_{m-1},k_m}$ é o subintervalo de $J_{k_1,\dots,k_{m-1}}$ tal que

$$E_n(J_{k_1,\dots,k_{m-1},k_m}) = J_{k_2,\dots,k_m}.$$

Portanto, também indutivamente,

$$E_n^{m-1}(J_{k_1,\dots,k_{m-1},k_m}) = J_{k_m}.$$

Na Figura 7.1 está também desenhado o intervalo $J_{1,1,1}$ de terceira geração.

Observamos que se $(\iota_j)_{j=1}^{\infty} \in \Sigma_n$ é uma seqüência tal que existem infinitos ι_j tais que $\iota_j \neq (n-1)$ então

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} J_{\iota_1,\dots,\iota_j} \neq \emptyset.$$

Pela definição da função ι, qualquer ponto $x \in \cap_{m=1}^{\infty} J_{\iota_1,\dots,\iota_m}$ verifica $\iota(x) = (\iota_j)_{j=1}^{\infty}$. A injetividade de ι implica que o ponto de interseção é único. Observe que como os intervalos encaixados $J_{\iota_1,\dots,\iota_m}$ não são fechados não é possível usar diretamente o Teorema de Bolzano para garantir que a interseção é não vazia. O ponto chave é que se a seqüência possui infinitos termos diferentes de $(n-1)$ então esta interseção coincide com a interseção dos fechos dos $J_{\iota_1,\dots,\iota_m}$.

Falta ver que o ponto x de interseção verifica

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\iota_j}{n^j}.$$

Escrevemos

$$E_n(x) = n\,x - \iota_1 \in [0,1), \quad \iota_1 = \iota_1(x) = \lfloor n\,x \rfloor.$$

Isto implica que ι_1 é tal que

$$x = E_n^0(x) \in \left[\frac{\iota_1}{n}, \frac{\iota_1+1}{n}\right) = J_{\iota_1}.$$

Escrevemos $\iota_2 = \lfloor n\,E_n(x) \rfloor = \iota_2(x)$ e, de forma indutiva,

$$\iota_k = \lfloor n\,E_n^{k-1}(x) \rfloor = \iota_k(x)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{\iota_1}{n} + \frac{E_n(x)}{n} = \frac{\iota_1}{n} + \frac{\iota_2}{n^2} + \frac{E_n^2(x)}{n^2} = \\ &= \frac{\iota_1}{n} + \frac{\iota_2}{n^2} + \dots + \frac{\iota_k}{n^k} + \frac{E_n^k(x)}{n^k}. \end{aligned}$$

Portanto se escrevemos

$$s_k(x) = \frac{\iota_1}{n} + \frac{\iota_2}{n^2} + \cdots + \frac{\iota_k}{n^k}.$$

temos que

$$|x - s_k(x)| = \left|\frac{E_n^k(x)}{n^k}\right| \leq \frac{1}{n^k}$$

Concluímos assim que $s_k(x) \to x$.

Um último comentário, na expansão n-ária (para simplificar fixamos $n = 2$) temos $x = 0.1 = 0.011\ldots\bar{1}\ldots$. Na nossa construção escolhemos a primeira representação.

7.1.2 Expansões β

Considere $\beta \in (1,2)$ e o conjunto $\Sigma_1 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ das seqüências infinitas de 0's e 1's. Dado um número real x, uma *expansão β de x* é uma seqüência $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_1$ que verifica

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \, \beta^{-n}. \tag{7.1}$$

Observe que dada uma seqüência $\varepsilon = (\varepsilon_n) \in \Sigma_1 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ temos

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \beta^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{-n} = \frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}}$$

e

$$\ell_\beta = \frac{\beta^{-1}}{1-\beta^{-1}} \geq 1.$$

Veremos que todo número $x \in [0, \ell_\beta]$ possui (ao menos) uma expansão β e veremos como construí-la (a chamada *expansão fominha*).

Obter uma expansão β de um número x é escolher potências de β^{-1} tais que sua soma seja x. Veremos que em geral existe mais de uma escolha satisfazendo essa condição (ou seja, há números com várias expansões β).

Observe que temos uma função

$$\pi_\beta \colon \Sigma_1 \to [0, \ell_\beta], \quad \pi_\beta((\varepsilon_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \, \beta^{-n}.$$

Os comentários acima podem ser reformulados como segue: a função π_β é sobrejetora (todo número de $[0,\ell_\beta]$ possui uma expansão β) mas em geral não é injetora (há números com duas expansões β).

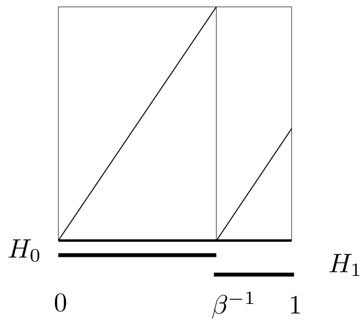

Figura 7.2: Expansão β. A transformação E_β

Como $\ell_\beta \geq 1$, há dois casos diferentes, $x \in [0,1)$ e $x \in [1,\ell_\beta]$. Veremos que o segundo caso se reduz ao primeiro de forma simples. Se $x \in [0,1)$ utilizaremos um método similar ao usado no caso das expansões n-árias. Definimos a função

$$E_\beta\colon [0,1) \to [0,1), \quad E_\beta(x) = \beta\, x - \lfloor \beta\, x \rfloor.$$

Consideramos os intervalos

$$H_0 = [0, \beta^{-1}), \quad H_1 = [\beta^{-1}, 1).$$

Observamos que $E_\beta(H_0) = [0,1)$ mas $E_\beta(H_1)$ está estritamente contido em $[0,1)$. Estes intervalos têm um papel similar aos intervalos $(J_i)_{i=0}^{n-1}$ na expansão n-ária e $(I_i)_{i\geq 1}$ na expansão em frações contínuas. A diferença neste caso é que a restrição de E_β não é sobrejetora no intervalo H_1.

Observamos também que se $x \in H_0$ então $\lfloor \beta\, x \rfloor = 0$ e se $x \in H_1$ então $\lfloor \beta\, x \rfloor = 1$.

O raciocínio agora é similar ao caso da expansão n-ária. Consideramos $x \in (0,1)$ e escrevemos

$$\beta\, x = \lfloor \beta\, x \rfloor + E_\beta(x).$$

Portanto,

$$x = \frac{\lfloor \beta\, x \rfloor}{\beta} + \frac{E_\beta(x)}{\beta}.$$

Repetindo o processo com $E_\beta(x)$ obtemos

$$x = \frac{\lfloor \beta\, x \rfloor}{\beta} + \frac{\lfloor \beta\, E_\beta(x) \rfloor}{\beta^2} + \frac{E_\beta^2(x)}{\beta^2}.$$

Finalmente, de forma indutiva obtemos

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lfloor \beta\, E_\beta^{i-1}(x) \rfloor}{\beta^i} + \frac{E_\beta^k(x)}{\beta^k}.$$

Escrevemos

$$\varepsilon_i = \lfloor \beta\, E_\beta^{i-1}(x) \rfloor \in \{0,1\}$$

onde, pela observação acima,

$$\varepsilon_i = j \quad \text{se, e somente se,} \quad E_\beta^{i-1}(x) \in H_j.$$

Assim, dado $x \in [0,1)$ obtemos uma seqüência $\varepsilon = (\varepsilon_k)_k \in \Sigma_1$. Afirmamos que a série $\pi_\beta(\varepsilon)$ converge para x. Sabemos que, para todo k, $E_\beta^k(x) \in (0,1)$. Portanto,

$$\left| x - \sum_{n=1}^{k} \frac{\varepsilon_n}{\beta^n} \right| = \frac{E_\beta^k(x)}{\beta^k} \leq \frac{1}{\beta^k} \to 0.$$

O método anterior para determinar os coeficientes ε_n da série é denominado de *algoritmo fominha*, justificaremos esta denominação mais tarde.

Acabamos de provar o seguinte resultado:

Proposição 7.1 (Expansão fominha). *Para todo* $x \in (0,1)$ *se verifica*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\, \beta^{-n}, \quad \varepsilon_k = \lfloor \beta E_\beta^{k-1}(x) \rfloor.$$

Veremos agora que é possível obter expansões como a anterior para todo $x \in [0, \ell_\beta]$. Acabamos de ver o caso $x \in [0, 1)$. Se $x \geq 1$ escolhemos k tal que

$$\beta^{-1} + \cdots + \beta^{-k} \leq x < \beta^{-1} + \cdots + \beta^{-k} + \beta^{-k-1}$$

e aplicamos o *algoritmo fominha* a $\bar{x}$,

$$\bar{x} = x - \beta^{-1} \cdots - \beta^{-k} \in (0, \beta^{-k-1}) \subset (0, 1).$$

Escrevemos

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varepsilon}_i \, \beta^{-i}.$$

Como $\bar{x} < \beta^{-k-1}$ temos necessariamente que $\bar{\varepsilon}_1 = \cdots = \bar{\varepsilon}_k = 0$. Portanto

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \, \beta^{-i},$$

onde $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_k = 1$ e $\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i$ se $i \geq k+1$. Obtemos assim uma expansão β para x.

A construção acima pode ser resumida no seguinte algoritmo para obter expansões β:

Observação 7.2 (Algoritmo fominha). Escolhemos $x \in [0, \ell_\beta]$.

- Fazemos $x = x_0$ Escolhemos o primeiro k_1 tal que $\beta^{-k_1} \leq x_0$. Neste caso, $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{k_1-1} = 0$ e $\varepsilon_{k_1} = 1$.

- Fazemos $x_1 = x_0 - \beta^{-k_1}$ e escolhemos o primeiro k_2 tal que $\beta^{-k_2} \leq x_1$. Note que necessariamente $k_2 > k_1$. Neste caso, $\varepsilon_{k_1+1} = \cdots = \varepsilon_{k_1+k_2-1} = 0$ e $\varepsilon_{k_1+k_2} = 1$.

- Definimos $x_2 = x_1 - \beta^{-k_2} = x_0 - \beta^{-k_1} - \beta^{-k_2}$ e procedemos indutivamente.

Em resumo, colocando as potências negativas de β em ordem decrescente, a expansão fominha é a expansão que sempre escolhe a maior potência disponível no momento. Preferir sempre a maior potência justifica o nome *fominha*.

O Exercício 7.1 pede para verificar que o processo descrito na Observação 7.2 coincide de fato como o algoritmo usado para definir os ε_i na Proposição 7.1.

Concluiremos esta seção mostrando que existem números com duas expansões β e justificaremos por que isso acontece.

Veremos primeiro um exemplo onde calcularemos $\sqrt{2}$-expansão fominha de $1/2$. Temos

$$\varepsilon_1 = \lfloor \sqrt{2}\, x \rfloor = \lfloor \sqrt{2}\,(1/2) \rfloor = 0,$$

pois $\sqrt{2}\,(1/2) < 2\,(1/2) = 1$. Portanto, $E_{\sqrt{2}}(1/2) = \sqrt{2}/2$. Logo,

$$\varepsilon_2 = \lfloor \sqrt{2}\,\sqrt{2}\,(1/2) \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1.$$

Isto implica que $E^2_{\sqrt{2}}(1/2) = 0$ e assim $E^k_{\sqrt{2}}(1/2) = 0$ para todo $k \geq 2$. Também temos $\sqrt{2}\,(E^k_{\sqrt{2}}(1/2)) = 0$ para todo $k \geq 2$. Logo $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ e $\varepsilon_k = 0$ para todo $k \geq 3$.

Podemos então escrever a $\sqrt{2}$-expansão fominha de $1/2$,

$$1/2 = 0 \cdot (\sqrt{2})^{-1} + 1 \cdot (\sqrt{2})^{-2}.$$

A expansão acima *não é a única* $\sqrt{2}$-expansão de $1/2$, também temos

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{2})^{-2n},$$

assim $(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ é outra $\sqrt{2}$-expansão de $1/2$.

Veremos a seguir que possuir duas expansões β é uma situação bastante geral. Consideramos $\beta \in (\frac{(1+\sqrt{5})}{2}, 2)$ e definimos

$$m = \left\lfloor \log_\beta \left(\frac{2-\beta}{\beta-1} \right) \right\rfloor + 2.$$

Então um cálculo simples dá

$$1 + \beta^{-m+1} < \frac{1}{\beta - 1},$$

(veja o Exercício 7.2).

Considere agora um número x tal que sua expansão β fominha seja da forma

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1, 0, \dots, 0, \varepsilon_{n+m+1}, \dots).$$

Construimos agora uma nova expansão β de x da seguinte forma. Definimos $x' = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \beta^{-j}$, então

$$x - x' = \beta^{-n-1} + \sum_{j=n+m+1}^{\infty} \varepsilon_j \beta^{-j}$$

Observamos que como a expansão de x considerada é fominha temos

$$\sum_{j=n+m+1}^{\infty} \varepsilon_j \beta^{-j} \in [0, \beta^{-n-m}]$$

pois se $\sum_{j=n+m+1}^{\infty} \varepsilon_j \beta^{-j} \geq \beta^{-n-m}$ então poderiamos utilizar a potência β^{-n-m} na expansão e teriamos $\varepsilon_{n+m} = 1$, uma contradição. Portanto

$$x - x' \in [\beta^{-n-1}, \beta^{-n-1} + \beta^{-n-m}].$$

Por outro lado, pela escolha de m temos

$$\beta^{-n-1} + \beta^{-n-m} = \beta^{-n-1}\left(1 + \beta^{-m+1}\right) < \frac{\beta^{-n-1}}{\beta - 1} = \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta^{-j}.$$

Daí

$$x - x' < \beta^{-n-2} + \beta^{-n-3} + \dots$$

Assim, com os mesmos $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon'_n = \varepsilon_n$, se fixamos $\varepsilon'_{n+1} = 0$ é possível escolher $(\varepsilon'_{n+2}, \varepsilon'_{n+3}, \dots)$ tais que $x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon'_j \beta^{-j}$. Nesta construção $\varepsilon'_{n+1} \neq \varepsilon_{n+1}$ e temos assim duas expansões β diferentes para x.

7.1.3 Séries de Lüroth

Considere a partição $B_k = [1/k, 1/(k-1))$, $k \geq 2$, do intervalo $(0, 1)$. Consideramos a seguinte versão afim da transformação de Gauss, chamada de *transformação de Lüroth*:

$$L\colon [0,1) \to [0,1) \quad \begin{cases} L(x) = n\,(n+1)\,x - n, & \text{se } x \in B_{n+1}, \\ L(x) = 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

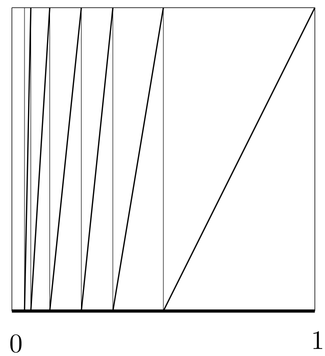

Figura 7.3: A transformação de Lüroth

Como no caso das frações contínuas, definimos $\ell_1(x) = k$ quando $x = L^0(x) \in (0,1)$ pertence ao intervalo B_k da partição. Indutivamente, definimos

$$\ell_j(x) = \ell_1(L^{j-1}(x)).$$

Nesta definição supomos que $L^{j-1}(x) \neq 0$ (portanto, $L^i(x) \neq 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, j-1$).

Observando que $\ell_1(x) = n$ se $x \in B_n$ a transformação de Lüroth pode ser re-escrita da seguinte forma

$$L(x) = \ell_1(x)\,(\ell_1(x) - 1)x - (\ell_1(x) - 1), \quad x \in B_n.$$

Afirmamos que todo número $x \in (0,1)$ pode ser escrito como uma série finita ou infinita,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\ell_1(x)} + \frac{1}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)\,\ell_2(x)} + \cdots \\ &+ \frac{1}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)\ldots\ell_{n-1}(x)\,(\ell_{n-1}(x)-1)\,\ell_n(x)} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $\ell_k(x) \geq 2$ para cada $k \geq 1$. Esta expressão de x é a chamada expansão em *série de Lüroth* de x.

Esta série é gerada de forma análoga às outras expansões já consideradas. Observamos que se $x \neq 0$, então

$$x = \frac{1}{\ell_1(x)} + \frac{L(x)}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)}.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} L(x) \quad &= \frac{1}{\ell_1(L(x))} + \frac{L^2(x)}{\ell_1(L(x))\,(\ell_1(L(x))-1)} = \\ &= \frac{1}{\ell_2(x)} + \frac{L^2(x)}{\ell_2(x)\,(\ell_2(x)-1)}. \end{aligned}$$

O padrão indutivo da definição da série é claro. Assim, supondo que $L(x), L^2(x), \ldots, L^{k-1}(x)$ são não nulos, obtemos,

$$\begin{aligned} x \quad &= \frac{1}{\ell_1(x)} + \cdots + \frac{1}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)\cdots\ell_{k-1}(x)\,(\ell_{k-1}(x)-1)\,\ell_k(x)} + \\ &+ \frac{L^k(x)}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)\cdots\ell_k(x)\,(\ell_k-1)}. \end{aligned}$$

Observe que se $L^k(x) = 0$ para algum $k \geq 1$, e escolhemos k mínimo com essa propriedade, então a expansão de Lüroth é finita e tem k termos.

No caso em que $L^k(x) \neq 0$ para todo k obtemos uma série infinita. Escrevemos $\Pi_1(x) = 1/\ell_1(x)$ e para $k \geq 2$.

$$\Pi_k(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)\cdots\ell_{k-1}(x)\,(\ell_{k-1}(x)-1)\,\ell_k(x)},$$

onde $\ell_k \geq 2$ para cada $k \geq 1$. Assim

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k(x).$$

Finalmente, mostremos que esta série converge para x. Seja $S_k(x)$ a soma dos primeiros k termos $\Pi_i(x)$ do somatório. Escrevemos o resto da k-ésima aproximação de x

$$R_k(x) = \frac{L^k(x)}{\ell_1(x)\,(\ell_1(x)-1)\cdots\ell_k(x)\,(\ell_k(x)-1)}.$$

Observando que $\ell_i(x) \geq 2$ se $i \geq 1$, obtemos $|R_k(x)| \leq 2^{-k}$. Finalmente, pela definição,

$$|x - S_k(x)| = |R_k(x)| \leq 2^{-k}.$$

Obtemos assim que $S_k(x) \to x$.

Da construção segue também que se x e y têm a mesma expansão de Lüroth então, para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} |x-y| &= |S_k(x) + R_k(x) - S_k(y) - R_k(y)| = \\ &= |R_k(x) - R_k(y)| \leq 2^{-k+1}, \end{aligned}$$

portanto $x = y$.

7.2 Transformação de Gauss: itinerários

Nesta seção, daremos uma prova dinâmica do Teorema 3.1 onde interpretaremos os quocientes $a_i(x)$ de x como o *itinerário* da órbita de x pela transformação de Gauss. Esta construção está relacionada com a forma em que eram obtidas as expansões da Seção 7.1.

Lembramos que o Teorema 3.1 associava a cada número irracional x a seqüência infinita dos seus quocientes $(a_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$, onde $x = [a_1(x), \ldots, a_n(x), \ldots]$. Esta associação estabelecia uma relação biunívoca entre os números irracionais e as seqüências infinitas de números naturais. O ponto chave da prova dinâmica do Teorema 3.1 é que a definição dos números $a_i(x)$ é feita de forma análoga às expansões da Seção 7.1.

Lembramos que denotamos o conjunto dos números irracionais do intervalo $(0,1)$ por $\mathbb{I}_{(0,1)}$. Escrevemos o intervalo $(0,1)$ como a união infinita dos intervalos

$$I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right), \quad k \geq 1.$$

Os extremos dos intervalos I_k são precisamente os pontos de descontinuidade da transformação de Gauss (excluida a origem). Lembre que, pela Observação 2.7, se $x \in \mathbb{I}_{(0,1)}$ então $T^i(x) \neq 0$ para todo i e portanto $T^i(x)$ pertence ao interior de algum intervalo I_k para todo $i \geq 0$. Observamos também que

$$T^k(x) \in I_m \quad \text{se, e somente se,} \quad \left\lfloor \frac{1}{T^k(x)} \right\rfloor = m.$$

Portanto, pela Definição 2.8,

$$a_k(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor = m \quad \Longleftrightarrow \quad T^{k-1}(x) \in I_m.$$

Para demonstrar de forma dinâmica o Teorema 3.1, estudaremos os itinerários dos pontos de $\mathbb{I}_{(0,1)}$ pela transformação de Gauss, isto é, determinaremos o intervalo I_k que contém o iterado i-ésimo de x (neste caso, $a_{i+1}(x) = k$). Observamos que a definição dos quocientes $a_i(x)$ é similar às construções feitas na Seção 7.1 usando agora a transformação de Gauss. As principais diferenças são que a transformação de Gauss não é uniformemente expansiva (isto é, não existe $\lambda > 1$ tal que $|T'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (0,1)$) e que T inverte localmente a ordem (sua derivada é negativa): se $x, y \in I_k$ e $x < y$ então, $T(x) > T(y)$. Porém, um fato importante, é que a transformação de Gauss tem alguma expansividade uniforme: existe $\lambda > 1$ tal que $(T^2)'(x) > \lambda$ para todo x (Exercício 7.5).

Pela definição de T, temos que $T(I_k) = [0,1)$ para todo $k \geq 1$. Além disso a restrição de T ao intervalo I_k é estritamente monótona decrescente, portanto é injetora. Dados k e $j \in \mathbb{N}$, definimos $I_{k,j}$ como o subconjunto de I_k tal que

$$T(I_{k,j}) = I_j.$$

Da monotonia estrita de T em I_k e da condição $T(I_k) = [0,1)$, obtemos que os conjuntos $I_{k,j}$ estão bem definidos e que são intervalos não vazios (intervalos abertos à esquerda e fechados à direita). Na Figura 7.4 estão desenhados os intervalos $I_{k,j}$ de segunda geração.

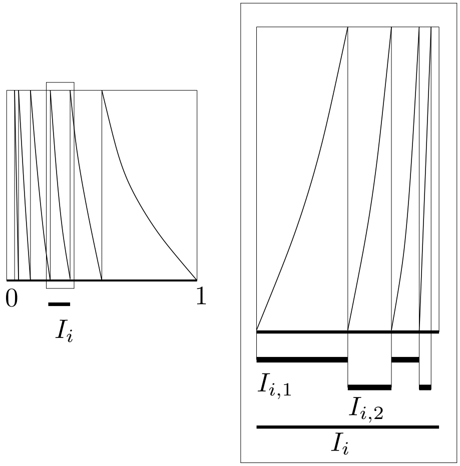

Figura 7.4: Intervalos de segunda geração

Suponhamos agora, por indução, que para todo $1 \leq k \leq n$ e para toda família de k números naturais $i_1, i_2, \ldots, i_k$, estão definidos intevalos não vazios $I_{i_i,\ldots,i_k}$ que verificam as relações

H1 (k) $I_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k} \subset I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$,

H2 (k) $T(I_{i_1,\ldots,i_k}) = I_{i_2,\ldots,i_k}$, e

H3 (k) $T^{k-1}(I_{i_1,\ldots,i_k}) = I_{i_k}$ (logo, $T^k(I_{i_1,\ldots,i_k}) = [0,1)$).

Acabamos de ver que estas relações são verdadeiras para $k = 2$. A seguir construiremos intervalos $I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}$ da etapa $(n+1)$. Dados números naturais $i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}$, consideremos o intervalo $I_{i_1,\ldots,i_n}$ e observamos que, pela hipótese de indução,

$$T^n(I_{i_1,\ldots,i_n}) = T(I_{i_n}) = [0,1).$$

Como a transformação T^n é estritamente monótona (crescente se n é par e decrescente se n é ímpar) raciocinando como no primeiro passo da indução, dado $I_{i_{n+1}}$ existe um subintervalo J de $I_{i_1,\ldots,i_n}$ tal que $T^n(J) = I_{i_{n+1}}$. Agora é suficiente tomar $I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}} = J$. Por construção,

$$T^n(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_{n+1}},$$

e assim o intervalo $I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}$ verifica as condições (H1) e (H3). Falta verificar (H2).

Para cada j $(1 \le j \le n)$ denotamos por $T^j_{i_1,\dots,i_n}$ a restrição de T^j ao intervalo $I_{i_1,\dots,i_n}$. Estas transformações são injetivas. Pela condição (H2) para n, temos

$$T(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) = T(T^{-n}_{i_1,\dots,i_n}(I_{i_{n+1}})) \subset T(I_{i_1,\dots,i_n}) = I_{i_2,\dots,i_n}.$$

Portanto,

$$T(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) \subset I_{i_2,\dots,i_n}.$$

Logo

$$T^{-(n-1)}_{i_1,i_2\dots,i_n}(I_{i_{n+1}}) = T^{-(n-1)}_{i_2,\dots,i_n}(I_{i_{n+1}}).$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} T(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) &= T(T^{-n}_{i_1,\dots,i_n}(I_{i_{n+1}})) = T^{-(n-1)}_{i_1,\dots,i_n}(I_{i_{n+1}}) = \\ &= T^{-(n-1)}_{i_2,\dots,i_n}(I_{i_{n+1}}). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela hipótese de indução,

$$T^{n-1}(I_{i_2,\dots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_{n+1}}.$$

Isto é,

$$I_{i_2,\dots,i_n,i_{n+1}} = T^{-(n-1)}_{i_2,\dots,i_n}(I_{i_{n+1}}).$$

Portanto,

$$T(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) = T^{-(n-1)}_{i_2\dots,i_n}(I_{i_{n+1}}) = I_{i_2,\dots,i_n,i_{n+1}}.$$

Isto termina a construção dos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}$.

Vejamos que nossa construção implica que para toda família de números naturais $i_1,\dots,i_n,i_{n+1},i_{n+2}$ se verifica

$$\text{fecho } (I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1},i_{n+2}}) = \overline{I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1},i_{n+2}}} \subset I_{i_1,\dots,i_n}. \qquad (7.2)$$

Neste ponto, que a função T tenha derivada negativa e considerar uma partição de $(0,1)$ com infinitos intervalos ajudam e são essenciais na demonstração. Por exemplo, uma afirmação similar sobre os fechos dos intervalos não era verdadeira no caso da expansão n-ária. Por exemplo, no caso $n=2$, o fecho intervalo $J_{1,1,1}$ não está contido em J_1.

Para provar a inclusão em (7.2), é suficiente lembrar que a definição de $I_{i_1,\dots,i_{n+1},i_{n+2}}$ implica que

$$T^n(I_{i_1,\dots,i_{n+1},i_{n+2}}) = I_{i_{n+1},i_{n+2}},$$

(veja o Exercício 7.4) e observar que $T^n(I_{i_1,\dots,i_n}) = [0,1)$, T^n é estritamente monótona, e que o fecho de $I_{i_{n+1},i_{n+2}}$ está contido em $[0,1)$.

Pela Equação (7.2), se verifica

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\dots,i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{fecho } (I_{i_1,\dots,i_k}).$$

Como a última interseção é de uma família de compactos encaixados, ela é não vazia,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\dots,i_k} \neq \emptyset.$$

A seguir relacionaremos os intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$ com os quocientes da expansão em frações contínuas.

Proposição 7.3. *Dado $x \in (0,1)$ seja $a_i(x)$ o i-ésimo quociente de x. Então*

$$I_{i_1,\dots,i_n} = \{x \in (0,1)\colon \quad i_1 = a_1(x), \dots, i_n = a_n(x)\}.$$

Prova: A prova da inclusão "$\subset$" é por indução. Considere

$$x \in I_{i_1} = \left[\frac{1}{i_1+1}, \frac{1}{i_1}\right).$$

Pela Equação (2.2), temos

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = i_1.$$

Logo a inclusão é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para todo $1 \le k \le n$. Consideremos $x \in I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}} \subset I_{i_1,\dots,i_n}$, assim temos $a_1(x) = i_1, \dots, a_n(x) = i_n$. Por outro lado, pelas propriedades dos intervalos $I_{i_1,\dots,i_k}$, temos

$$T(x) \in T(I_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_2,\dots,i_n,i_{n+1}}.$$

Portanto, pela hipótese de indução,

$$a_1(T(x)) = i_2, \dots, a_n(T(x)) = i_{n+1}.$$

Finalmente, o resultado decorre da Equação (2.3),

$$a_{n+1}(x) = a_n(T(x)) = i_{n+1}.$$

Isto conclui a prova da inclusão "$\subset$".

A inclusão "$\supset$" segue da definição dos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$ por indução. Temos que a afirmação é obviamente verdadeira quando $n = 1$: $a_1(x) = k$ se, e somente se, $x \in I_k$. Suponhamos que a afirmação vale para seqüências de comprimento n. Vejamos que é verdadeira para seqüências de comprimento $(n+1)$. Tome x tal que

$$a_1(x) = i_1, \dots, a_{n+1}(x) = i_{n+1}.$$

Devemos ver que $x \in I_{i_1,\dots,i_{n+1}}$. Pela Equação (2.3) temos

$$a_1(T(x)) = i_2, \dots, a_n(T(x)) = i_{n+1},$$

assim pela hipótese de indução se verifica que $T(x) \in I_{i_2,\dots,i_{n+1}}$. Por (H2), $T(I_{j,i_2,\dots,i_{n+1}}) = I_{i_2,\dots,i_{n+1}}$, portanto, $x \in I_{j,i_2,\dots,i_{n+1}}$ para algum j. Como $I_{j,i_2,\dots,i_{n+1}} \subset I_j$ e $x \in I_{i_1}$ (lembre que $a_1(x) = i_1$ e que $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$), temos que $j = i_1$. Terminamos assim a prova da proposição. $\square$

Provaremos a seguinte proposição (que simplesmente é uma reformulação do Teorema 3.1)

Proposição 7.4. *Dada uma seqüência infinita $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturais existe um único número (necessariamente irracional) $x \in (0,1)$ cujos quocientes $(a_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ verificam*

$$a_k(x) = i_k, \quad \textit{para todo } k.$$

Prova: É suficiente observar que se

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\dots,i_k} \neq \emptyset,$$

então, pela Proposição 7.3 se verifica

$$a_k(x) = i_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

A irracionalidade de x segue do fato da expansão ser infinita e portanto $T^i(x) \neq 0$ para todo $i \geq 0$ (lembre a Observação 2.7).

A unicidade é equivalente a que a interseção $\cap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\dots,i_k}$ seja exatamente um ponto. Suponha, por absurdo, que existem dois pontos x e y, com $x < y$, na interseção. Pela primeira parte da prova estes pontos são irracionais. Como o intervalo $[x, y]$ contém números racionais, pela Observação 2.7, existe $\ell \geq 1$ tal que $0 \in T^{\ell}([x, y])$. Por outro lado, $[x, y] \subset I_{i_1,\cdots,i_\ell}$ e por (H3) temos que $T^{\ell}([x, y]) \subset [0, 1)$. Como T^{ℓ} é estritamente monótona temos que $T^{\ell}(x) = 0$ ou $T^{\ell}(y) = 0$. Mas isto contradiz a irracionalidade de x e y.

Outra prova da unicidade dos quocientes (usando as idéias na Seção 7.1.1 sobre expansões n-árias) é provar que T^2 tem derivada estritamente maior do que 1 (existe $\lambda > 1$ tal que $(T^2)'(x) \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (0, 1)$, veja o Exercício 7.5). Esta propriedade proibe a existência de mais de um ponto na interseção $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\dots,i_k}$, veja o Exercício 7.6. □

7.3 Propriedades Topológicas

Nesta seção estudaremos algumas propriedades topológicas da transformação de Gauss: transitividade, topologicamente misturadora, existência de órbitas densas e densidade de pontos periódicos. Estas propriedades decorrem da construção dos intervalos $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$ da Seção 7.2.

Definição 7.5. *Considere um espaço métrico* $(\mathbb{X}, d)$. *Uma função* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *é*

- topologicamente transitiva *se para todo par de conjuntos abertos não vazios* U *e* V *de* $\mathbb{X}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$*;*

- topologicamente misturadora *se para todo par de conjuntos abertos não vazios U e V de $\mathbb{X}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se verifica $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq k_0$.*

Obviamente, toda transformação topologicamente misturadora é topologicamente transitiva. Observamos que existem transformações que são topologicamente transitivas que não são topologicamente misturadoras. Os exemplos mais simples são as rotações irracionais do círculo:

Exemplo 7.6. Considere o círculo $\mathbb{S}^1$, que é obtido identificando pontos x, $y \in \mathbb{R}$ tais que $x - y \in \mathbb{Z}$, isto é, $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\sim$, onde $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Z}$. Consideramos em $\mathbb{S}^1$ a distância induzida pelos números reais.

A rotação de ângulo $\alpha \in [0,1)$, $R_\alpha \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, é a transformação induzida pela translação

$$\tau_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tau_\alpha(x) = x + \alpha.$$

Isto é, se denotamos por $[x]$ o ponto de $\mathbb{S}^1$ correspondente ao ponto $x \in \mathbb{R}$, então

$$R_\alpha \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad R_\alpha([x]) = [\tau_\alpha(x)].$$

Esta transformação está bem definida (não depende do ponto da classe escolhido: $x \sim y$ se, e somente se, $\tau_\alpha(x) \sim \tau_\alpha(y)$).

Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, todos os pontos da circunferência são periódicos e têm o mesmo período: existe $k > 0$ tal que $R_\alpha^k([x]) = [x]$ para todo $[x] \in \mathbb{S}^1$.

Se $\alpha \in \mathbb{I}$, a órbita positiva $\{R_\alpha^n([x])\}_{n \geq 0}$ de qualquer ponto $[x] \in \mathbb{S}^1$ é densa em $\mathbb{S}^1$. Isto implica que as rotações de ângulo irracional são topologicamente transitivas.

Por definição, uma rotação é uma isometria: se I é um intervalo então $R_\alpha(I)$ e I têm o mesmo comprimento. Usando este fato não é dificil verificar que a rotação não é topologicamente misturadora.

Pedimos para provar estes fatos no Exercício 7.8.

Proposição 7.7. *A transformação de Gauss T é topologicamente misturadora.*

Prova: Consideremos dois abertos não vazios U e V de $[0,1)$. Sabemos que existe um intervalo $I_{i_1,\dots,i_j,k}$ contido em U (para isto basta tomar j suficientemente grande, veja o Exercício 7.6). Pela Propriedade (H3) dos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$, obtemos

$$T^{j+1}(I_{i_1,\dots,i_j,k}) = T(I_k) = [0,1).$$

Portanto, para todo $m \geq 1$ se verifica $T^{j+m}(U) = [0,1)$. Logo $T^{j+m}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $m \geq 1$. Tomando $k_0 = j$ na definição de transformação topologicamente misturadora terminamos a prova. □

Escólio 7.8. *Dado qualquer conjunto aberto U de $[0,1)$ existe $k > 0$ tal que $T^k(U) = [0,1)$.*

Corolário 7.9. *Os pontos periódicos da transformação de Gauss formam um conjunto denso de $[0,1)$.*

Prova: Pelo Escólio 7.8, dado qualquer intervalo aberto I existem $k \in \mathbb{N}$ e um subintervalo $J = (a,b)$ de I $(0 < a < b < 1)$ tais que T^k é contínua em J e $T^k(J) = (0,1)$. Portanto, o fecho de J está contido em $T^k(J)$ e por continuidade (Teorema do Valor Médio) T^k possui um ponto fixo em J. Como o intervalo I pode ser escolhido arbitrariamente pequeno obtemos o resultado. □

Usando o Teorema de Baire (Teorema 6.8) que afirma que conjuntos residuais de $\mathbb{R}$ são densos em $\mathbb{R}$ provaremos o seguinte resultado:

Proposição 7.10. *Existe um conjunto residual D de $[0,1)$ tal que a órbita positiva de qualquer ponto de D é densa em $[0,1)$.*

Prova: Em primeiro lugar observamos que dado qualquer aberto U do intervalo $[0,1)$ o conjunto das pré-imagens de U,

$$P(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T^{-i}(U),$$

contém um aberto que é denso em $[0,1)$. Vejamos que esta afirmação é conseqüência do Escólio 7.8.

Tome um ponto $x \in [0,1)$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Escólio 7.8, existe $i > 0$ tal que $U \subset T^i((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$. Portanto, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap T^{-i}(U) \neq \emptyset$. Isto prova que $P(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T^{-i}(U)$ é denso em [0,1).

Observe que como T não é contínua não podemos garantir que o conjunto $P(U)$ seja aberto. Este problema se resolve considerando a restrição T_0 de T ao intervalo $(0, 1)$ menos os pontos da forma $1/k$, $k \in \mathbb{N}$. Esta nova transformação é contínua (eliminamos exatamente os pontos de descontinuidade). É suficiente raciocinar com T_0 para obter que $P(U)$ contém um aberto que é denso em $[0, 1)$. Complete os detalhes.

Consideremos agora todos os intervalos de raio racional centradas em pontos de $\mathbb{Q}$ contidos em $[0, 1)$. Denotamos esta família enumerável de intervalos abertos por $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sabemos que, para todo n,

$$P_n = P(U_n) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T^{-i}(U_n).$$

contém um subconjunto aberto e denso de $[0, 1)$. Portanto, pelo Teorema 6.8, o conjunto

$$D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$$

é um subconjunto residual de $[0, 1)$.

Afirmamos que a órbita positiva de qualquer ponto $z \in D$ é densa no intervalo $[0, 1)$. Dados $y \in [0, 1)$ e $\varepsilon > 0$ devemos encontrar um iterado positivo de z em $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Observamos que existe algum aberto U_n contido em $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Como $z \in D$, $z \in P(U_n)$, e portanto existe j tal que $z \in T^{-j}(U_n)$. Assim, $T^j(z) \in U_n \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, concluindo a prova. $\square$

7.4 Exercícios

Exercício 7.1. Prove que o algoritmo definido na Observação 7.2 e o método da prova da Proposição 7.1 usando a função E_β dão origem à mesma β-expansão.

Exercício 7.2. Considere $\beta \in (\frac{(1+\sqrt{5})}{2}, 2)$ e defina

$$m = \left\lfloor \log_\beta \left(\frac{2-\beta}{\beta - 1} \right) \right\rfloor + 2.$$

Prove que

$$1+\beta^{-m+1} < \frac{1}{\beta-1}.$$

Exercício 7.3. Prove que o intervalo $I_{i_1,\dots,i_m}$ é semi-aberto. Determine onde é aberto e onde é fechado (direita e/ou esquerda).

Exercício 7.4. Considere números naturais $i_1,\dots,i_{n+1},i_{n+2}$ e o intervalo $I_{i_1,\dots,i_{n+1},i_{n+2}}$. Prove que

$$T^n(I_{i_1,\dots,i_{n+1},i_{n+2}}) = I_{i_{n+1},i_{n+2}}.$$

Exercício 7.5. Determine explicitamente $\lambda > 1$ tal que $(T^2)'(x) \geq \lambda$ para todo $x \in (0,1)$.

Obtenha a *hiperbolicidade* da transformação de Gauss: existem constantes $C > 0$ e $\sigma > 1$ tal que $|(T^n)|'(x) \geq C\,\sigma^n$ para todo $n \geq 1$.

Exercício 7.6. Usando a constante $\lambda > 1$ do Exercício 7.5, prove que o intervalo $I_{i_1,\dots,i_{2\,k-1},i_{2\,k}}$ tem comprimento menor ou igual do que λ^{-k}. Conclua que dada qualquer seqüência infinita $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a interseção $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{i_1,\dots,i_k}$ contém no máximo um ponto. Conclua também que todo intervalo aberto contém infinitos intervalos $I_{i_1,\dots,i_k}$.

Exercício 7.7. Considere $k \geq 2$ e defina

$$C_k = \mathit{fecho}(\{x \in [0,1) \colon T^i(x) \in \cup_{j=1}^{k} I_j \quad \text{para todo } i \geq 0\}).$$

Prove que o conjunto C_k é um conjunto:

- de Cantor (fechado, todo ponto de C_k é ponto de acumulação de pontos de C_k, e as componentes conexas de C_k são pontos),
- invariante pela transformação de Gauss ($T(C_k) = C_k$).

Exercício 7.8. Considere a rotação de ângulo α da circunferência definida no Exemplo 7.6. Prove que:

1. Se $\alpha \in \mathbb{Q}$ todos os pontos da circunferência são periódicos e têm o mesmo período: existe $k > 0$ tal que $R_\alpha^k([x]) = [x]$ para todo $[x] \in \mathbb{S}^1$. Escreva $\alpha = p/q$ na forma irredutível. Determine k em função de p/q.

2. Se $\alpha \in \mathbb{I}$ a órbita positiva $\{R_\alpha^n([x])\}_{n\geq 0}$ de qualquer ponto $[x] \in \mathbb{S}^1$ é densa em $\mathbb{S}^1$.

3. Rotações de ângulo irracional são topologicamente transitivas.

4. Rotações (de ângulo racional ou irracional) nunca são topologicamente misturadoras.

Exercício 7.9. Considere um espaço métrico $(\mathbb{X}, d)$. Uma isometria de $\mathbb{X}$ é uma transformação $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que, para todo par de pontos $x, y \in \mathbb{X}$, se verifica $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Prove que se $\mathbb{X}$ contém no mínimo dois pontos uma isometria de $\mathbb{X}$ nunca é topologicamente misturadora.

Exercício 7.10. Considere um espaço métrico compacto $(\mathbb{X}, d)$ e uma transformação $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ topologicamente transitiva. Prove que, para todo conjunto aberto U de $\mathbb{X}$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $n = n(U, \varepsilon)$ tal que o conjunto

$$U \cup f(U) \cup \cdots \cup f^n(U)$$

é ε-denso em $\mathbb{X}$ (isto é, dado $x \in \mathbb{X}$ existe um ponto do z conjunto tal que $d(x, z) < \varepsilon$).

Exercício 7.11. Estude se as transformações E_n, E_β e L associadas as expansões n-árias, β e de Lüroth são topologicamente transitivas e/ou topologicamente misturadoras.

Estude também se os pontos periódicos destas transformações são densos no intervalo $[0, 1)$.

Exercício 7.12. Dados $\beta \in (1, 2)$ e $t \in (0, \beta^{-1} - 1)$, considere a transformação do intervalo $[0, 1]$ desenhada na Figura 7.5,

$$B_{\beta,t}\colon [0,1] \to [0,1], \qquad \begin{cases} B_{\beta,t}(x) = \beta\, x, & x \in [0, \beta^{-1}] \\ B_{\beta,t}(x) = x + t, & x \in (\beta^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Prove que $B_{\beta,t}$ é topologicamente misturadora.

Exercício 7.13. Estude a veracidade da seguinte afirmação: todo ponto periódico da transformação de Lüroth é racional.

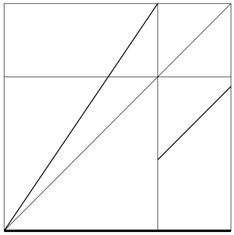

Figura 7.5: A função $B_{\beta,t}$

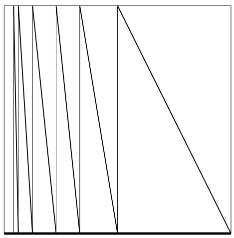

Figura 7.6: A função D (mistura de Gauss e Lüroth)

Exercício 7.14. Determine de forma explícita um número

$$x = [a_1, \dots, a_k, \dots]$$

tal que sua órbita positiva pela transformação de Gauss seja densa em $[0, 1)$. Isto é, determine uma lei de formação dos a_i de x que garanta que a órbita de x seja densa.

Exercício 7.15. Dado $\varepsilon > 0$ determine de forma explícita um ponto periódico z cuja órbita positiva pela transformação de Gauss seja ε-densa em $[0, 1)$ (isto é, para todo ponto do intervalo $[0, 1)$ existe algum iterado positivo de z a distância menor do que ε).

Exercício 7.16. Considere a versão afim D da transformação de Gauss (mistura de transformação de Gauss e de Lüroth) na Figura 7.6 (as descontinuidades de D são $1/n$, $n \in \mathbb{N}$) Prove uma versão do Teorema 3.1 para as expansões associadas a D.

Exercício 7.17. Considere o ponto $\zeta = e - 2$. Prove que a órbita positiva de ζ pela transformação de Gauss tem exatamente três pontos de acumulação: 0, $1/2$ e 1. Use a expansão em frações contínuas de e na Seção 4.2.

Capítulo 8

Transformação de Gauss: Propriedades ergódicas

Neste e no próximo capítulo, estudaremos algumas propriedades ergódicas da transformação de Gauss e obteremos versões probabilísticas de alguns dos resultados obtidos nos capítulos precedentes.

Nas duas primeiras seções, faremos uma revisão dos resultados da Teoria da Medida de Lebesgue que nos serão úteis nas seções seguintes (teoria de medida e teoria de integração). Na Seção 8.3, provaremos o Teorema Ergódico de Birkhoff (Teorema 8.6), um resultado chave que estabelece a relação entre dinâmica (iterações por T) e medida. Nessa seção, também introduziremos a noção de ergodicidade, cuja importância segue do Teorema de Birkhoff.

Na Seção 8.4, estudamos as propriedades ergódicas ("estatísticas") da transformação de Gauss. Definiremos a medida de Gauss. Veremos que ela é equivalente à medida de Lebesgue (isto é, as duas medidas têm os mesmos conjuntos de medida nula) e que, portanto, resultados para *quase todo ponto* (q.t.p) (isto é, para conjuntos de medida total) com respeito à medida de Gauss são também resultados q.t.p. para a medida de Lebesgue (e vice-versa).

O principal resultado do capítulo afirma que a medida de Gauss é ergódica . Na Seção 8.5, usando a ergodicidade da transformação de Gauss e o Teorema de Birkhoff obteremos resultados probabilísticos sobre a distribuição dos dígitos (quocientes) da expansão em frações contínuas de números reais "típicos"(propriedades q.t.p.).

Finalmente, na Seção 8.6, apresentaremos a noção de expoente de Lyapunov e o calcularemos para a transformação de Gauss.

8.1 A medida de Lebesgue

Nesta seção, introduziremos de forma sucinta alguns conceitos e resultados básicos da medida de Lebesgue (e da teoria da medida) em $\mathbb{R}$. Uma referência para este tema é, por exemplo, [1].

Já vimos, na Seção 6.1, o conceito de conjunto de medida zero, o exemplo mais simples de conjunto mensurável e também o ponto de partida da teoria da medida. Nesta seção, definiremos *conjuntos mensuráveis* e explicaremos como é determinada a medida destes conjuntos. O exemplo canônico de um conjunto mensurável em $\mathbb{R}$ é o intervalo $[a, b]$ cuja medida de Lebesgue λ é o seu comprimento, ou seja $\lambda([a, b]) = b - a$ (tanto faz se o intervalo é aberto o fechado). Salientamos que a noção de medida é uma generalização das idéias de comprimento, área e volume.

Axiomaticamente, dado um conjunto $\mathbb{X}$, dizemos que uma família de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $\mathbb{X}$ é uma *álgebra* se as seguintes condições são satisfeitas:

- $\mathbb{X} \in \mathcal{F}$,
- para todo $A \in \mathcal{F}$ seu complementar $A^c = \mathbb{X} \setminus A$ também pertence a $\mathcal{F}$,
- $A \cup B \in \mathcal{F}$ para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$.

Observe que uma álgebra é apenas uma coleção de subconjuntos de $\mathbb{X}$ que é fechada com respeito as operações básicas de conjuntos.

Do ponto de vista de medida (para poder fazer operações considerando limites) é necessário considerar uniões infinitas (enumeráveis) de conjuntos. Isto nos leva a noção de σ-álgebra. Uma álgebra $\mathcal{F}$ é uma *σ-álgebra* se também verifica a condição:

- para toda família enumerável $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathcal{F}$ se verifica que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ também pertence a $\mathcal{F}$.

Um exemplo trivial de σ-álgebra de um conjunto $\mathbb{X}$ é o conjunto de suas partes (isto é, a coleção $\mathcal{F}$ está formada por todos os subconjuntos de $\mathbb{X}$).

Uma forma padrão de obter σ-álgebras é através das chamadas σ-álgebras geradas por coleções de subconjuntos de $\mathbb{X}$, definidas como segue. Considere uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$, a *σ-álgebra gerada* por $\mathcal{A}$ é a menor σ-álgebra de $\mathbb{X}$ que contém todos os conjuntos de $\mathcal{A}$.

O caso mais importante para nós ocorre quando fazemos $\mathbb{X} = [0,1]$ e consideramos a família $\mathcal{I}$ de todos os intervalos abertos (a,b) de $[0,1]$. A σ-álgebra gerada por $\mathcal{I}$ é a σ-álgebra de Borel, que denotaremos por $\mathcal{B}$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados de *Borelianos.* Como conseqüência da definição de σ-álgebra gerada, os intervalos fechados e semi-abertos são também Borelianos. Os conjuntos formados por um número finito de pontos também são Borelianos. Portanto, todo conjunto enumerável de $[0,1]$ é um Boreliano. Em particular, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ de $[0,1]$ (união enumerável de pontos) é um Boreliano. Assim, o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}_{[0,1]}$ de $[0,1]$ (complementar de um Boreliano) também é um Boreliano.

Considere um par $(\mathbb{X},\mathcal{F})$ onde $\mathbb{X}$ é um conjunto e $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra definida em $\mathbb{X}$. Uma *medida* μ definida em $(\mathbb{X},\mathcal{F})$ é uma função

$$\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$$

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

para toda família enumerável $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{F}$. Esta propriedade é denominada de *σ-aditividade.* Diremos que $(\mathbb{X},\mathcal{F},\mu)$ é um *espaço de medidad.*

Uma função $\nu\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ é *aditiva* se $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i)$ para toda família finita $(A_i)_{i=1}^{k}$ de conjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{F}$.

Observe que no par $(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ podemos definir diferentes medidas, obtendo diferentes espaços de medida com a mesma σ-álgebra. Veremos exemplos dessa situação mais adiante.

Dizemos que a medida μ é *finita* se $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ e *normalizada* se $\mu(\mathbb{X}) = 1$. Neste caso, dizemos que $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ é um *espaço de probabilidade.* Observamos que toda medida finita pode ser normalizada.

Dado um espaço de medida $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$, dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ vale em *μ-quase toda parte* (μ-q.t.p) se existe um conjunto de medida zero Z tal que a propriedade $\mathcal{P}$ é satisfeita para todo $x \notin Z$. Em teoria da medida as propriedades que consideramos relevantes são aquelas satisfeitas por conjuntos de medida positiva (o melhor caso são as propriedades q.t.p., aquelas satisfeitas por um conjunto de medida total). Conjuntos de medida zero são desconsiderados.

Voltemos agora aos Borelianos. Temos definida a função (medida) λ nos intervalos e estes intervalos geram a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Queremos, agora, a partir da medida dos intervalos, estender a medida λ para a σ-álgebra dos Borelianos $\mathcal{B}$.

Observe que temos definida a seguinte álgebra $\mathcal{B}_0$ em $[0,1]$: um conjunto I está em $\mathcal{B}_0$ se, e somente se, I é união finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois. Obviamente, se $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ é uma família de intervalos disjuntos dois a dois, e $I = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$, então

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

A extensão da medida λ a todos os conjuntos da σ-álgebra de Borel é dada pelo seguinte teorema clássico (cuja prova omitimos, veja [1]):

Teorema 8.1 (Extensão de Caratheodory). *Considere um conjunto $\mathbb{X}$, uma álgebra $\mathcal{F}_0$ definida em $\mathbb{X}$ e uma função finitamente aditiva*

$$\mu_0 \colon \mathcal{F}_0 \to [0, \infty].$$

Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra gerada em $\mathbb{X}$ por $\mathcal{F}_0$. Então existe uma única medida $\mu \colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ que estende μ_0, isto é, se $A \in \mathcal{F}_0$ se verifica $\mu(A) = \mu_0(A)$.

Com um pequeno abuso de notação, denotaremos também por λ a medida que estende a medida λ dos intervalos de $[0,1]$, que é chamada de *medida de Lebesgue.*

Consideraremos adiante medidas definidas na σ-álgebra de Borel que são diferentes da medida de Lebesgue e que são obtidas usando *densidades. densidade (de uma medida)* Dada uma função contínua e positiva $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definimos a medida λ_ϕ do intervalo (a,b) como segue

$$\lambda_\phi([a,b]) = \int_a^b \phi(x)\,dx.$$

Usando o Teorema 8.1, podemos estender a medida λ_ϕ para toda a σ-álgebra dos Borelianos. Dizemos que ϕ é a densidade da medida λ_ϕ com respeito à medida de Lebesgue λ. Assim, usando densidades, obtemos diferentes medidas definidas na mesma σ-álgebra.

Finalizamos esta seção definindo funções mensuráveis. Considere dois espaços mensuráveis $(\mathbb{X},\mathcal{F})$ e $(\mathbb{Y},\mathcal{G})$. Uma função $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é *mensurável* se para todo conjunto $G \in \mathcal{G}$ se verifica que $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$, onde

$$f^{-1}(G) = \{x \in \mathbb{X}\colon f(x) \in G\}.$$

Observação 8.2. Considere dois espaços mensuráveis $(\mathbb{X},\mathcal{F})$ e $(\mathbb{Y},\mathcal{G})$. Suponha que a σ-álgebra $\mathcal{G}$ é gerada pela álgebra $\mathcal{A}$. Para verificar que uma função $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é mensurável, é suficiente verificar que $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$.

Em particular, se consideramos funções $f\colon [0,1] \to [0,1]$ e a σ-álgebra de Borel em $[0,1]$, para ver que f é mensurável, é suficiente verificar que as pré-imagens de intervalos por f são mensuráveis. Em particular, as funções contínuas $f\colon [0,1] \to [0,1]$ são mensuráveis, veja o Exercício 8.4.

Observação 8.3. Considere uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, de funções mensuráveis. As funções

$$f^+(x) = \limsup_n f_n(x), \quad f^-(x) = \liminf_n f_n(x),$$

são mensuráveis. Veja o Exercício 8.5.

Dado um espaço de probabilidade $(\mathbb{X},\mathcal{F},\mu)$, dizemos que uma transformação mensurável $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *preserva a medida* μ ou que μ *é f-invariante* se, para todo conjunto $A \in \mathcal{F}$, se verifica que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Observe que, como f é mensurável, temos que $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

8.2 Integração

Nesta seção, revisaremos algumas das propriedades básicas da integral de Lebesgue de funçoes mensuráveis. Estas propriedades aparecem nos cursos de Análise quando se estuda a integral de Lebesgue. Uma excelente referência é [13, Capítulo 9].

Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$, nosso objetivo é definir a integral $\int_{\mathbb{X}} f(x)\, d\mu$ de uma função mensurável $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ (em $\mathbb{R}$ consideramos a σ-álgebra de Borel). Esta definição é feita em diferentes etapas que, essencialemente, correspondem às somas superiores e inferiores (e aos seus limites) na definição de integral de Lebesgue.

Primeiro, dado um conjunto $A \in \mathcal{F}$, a *função indicadora ou característica* do conjunto A, denotada por $\mathbb{I}_A$ é definida por

$$\mathbb{I}_A\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \mathbb{I}_A(x) = 1, & \text{se } x \in A \\ \mathbb{I}_A(x) = 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Definimos a integral de $\mathbb{I}_A$ com respeito a medida μ como

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_A(x)\, d\mu = \mu(A).$$

Dizemos que uma função $\phi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é uma *função simples* se existem coleções finitas $(A_i)_{i=1}^n$ de conjuntos de $\mathcal{F}$ disjuntos dois a dois e $(a_i)_{i=1}^n$ de números reais tais que

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbb{I}_{A_i}(x).$$

Definimos a integral de uma função simples ϕ como

$$\int_{\mathbb{X}} \phi(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^n \left(a_i \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_{A_i}(x)\, d\mu \right) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mu(A_i).$$

Agora, dada uma função simples ϕ e um conjunto mensurável $A \in \mathcal{F}$, consideramos a função $\phi(x)\, \mathbb{I}_A(x)$, que é uma função simples:

$$\phi(x)\, \mathbb{I}_A(x) = \sum_{i=1}^n a_i\, (\mathbb{I}_{A_i}(x)\, \mathbb{I}_A(x)) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbb{I}_{A_i \cap A}(x).$$

Portanto, a integral de $\phi(x)\,\mathbb{I}_A(x)$ já esta definida. Definimos

$$\int_A \phi(x)\,d\mu = \int_X \phi(X)\,\mathbb{I}_A(x)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(A_i \cap A).$$

Dada uma função mensurável $f\colon \mathbb{X} \to [0,\infty)$, consideramos o conjunto de funções

$$\mathcal{S}_f = \{\phi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}, \quad \phi \text{ simples e } 0 \le \phi(x) \le f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{X}\}.$$

Definimos, agora, a integral de f no conjunto $\mathbb{X}$ como

$$\int_X f(x)\,d\mu = \sup\left\{\int_X \phi(x)\,d\mu \quad : \quad \phi \in \mathcal{S}_f\right\}.$$

Finalmente, dada uma função mensurável $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, escrevemos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

As funções f^+ e f^- são mensuráveis e $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Quando as integrais $\int_{\mathbb{X}} f^+(x)\,d\mu < \infty$ e $\int_{\mathbb{X}} f^-(x)\,d\mu < \infty$, dizemos que f é *integrável* e definimos

$$\int_{\mathbb{X}} f(x)\,d\mu = \int_{\mathbb{X}} f^+(x)\,d\mu - \int_{\mathbb{X}} f^-(x)\,d\mu.$$

Neste caso, dizemos que $f \in L^1(\mathbb{X}, \mu)$.

Enunciaremos sem prova dois resultados clássicos de teoria de integração que utilizaremos no texto.

Teorema 8.4 (Convergência Dominada). *Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ e uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{X} \to [0,\infty)$, de funções ν-integráveis. Suponha que existe $g \in L^1(\mathbb{X}, \nu)$ tal que $|f_n(x)| \le |g(x)|$ para ν-quase todo ponto $x \in \mathbb{X}$. Então as funções*

$$x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad e \quad x \mapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

são ν-integráveis e se verifica

$$\int_{\mathbb{X}} (\liminf_{n\to\infty} f_n)\,d\nu \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n\,d\nu,$$

$$\int_{\mathbb{X}} (\limsup_{n\to\infty} f_n)\,d\nu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n\,d\nu.$$

Em particular, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente ν-q.t.p. se verifica

$$\int_{\mathbb{X}} (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n\, d\nu.$$

Lema 8.5 (Lema de Fatou). *Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ e uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{X} \to [0,\infty)$, de funções ν-integráveis. Suponha que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n\, d\nu < \infty.$$

Então, a função

$$x \mapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

é ν-integrável e se verifica

$$\int_{\mathbb{X}} (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\nu \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n\, d\nu.$$

Finalmente, observamos que podemos usar funções integráveis como densidades, generalizando a construção de medidas com densidade na Seção 8.1 (onde as densidades eram funções contínuas).

8.3 Ergodicidade. Teorema Ergódico de Birkhoff

Consideremos um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ e uma transformação $G\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ mensurável que preserva a medida ν (i.e., para todo $A \in \mathcal{F}$ se verifica $\nu(A) = \nu(G^{-1}(A))$). Uma pergunta natural que aparecerá repetidas vezes neste capítulo é a de determinar com que freqüência as órbitas de pontos "típicos" visitam um conjunto. De forma mais precisa, consideremos um conjunto mensurável B e um ponto $x \in \mathbb{X}$, queremos determinar com que freqüência a órbita de x por G visita o conjunto B, isto é, queremos calcular

$$\mathfrak{B}_n(x) = \frac{\#\{0 \le i \le n-1 :\ G^i(x) \in B\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x),$$

onde $\#A$ denota o número de elementos de A.

A idéia é fazer o número de iterados n tender para infinito e calcular, caso exista, o limite, isto é, a média assintótica,

$$\mathfrak{B}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n(x).$$

Este limite, quando existe, é o tempo médio que a órbita de um ponto x permanece no conjunto B. Observe que, embora os limites superiores e inferiores da seqüência $(\mathfrak{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sempre existam, há pontos para os quais este limite não existe. Veja o Exercício 8.15.

Uma conseqüência do Teorema de Birkhoff, que provaremos nesta seção, é que o limite $\mathfrak{B}(x)$ existe ν-q.t.p., é uma função de $L^1(\mathbb{X},\nu)$ e verifica

$$\int_{\mathbb{X}} \mathfrak{B}(x)\, d\nu = \nu(B).$$

É simples ver que a função $\mathfrak{B}$ verifica $\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{B}(G(x))$.

Finalmente, outra conseqüência do Teorema de Birkhoff é que quando a medida é *ergódica* então o limite não depende ν-q.t.p. do ponto: este limite é exatamente a medida de B:

$$\mathfrak{B}(x) = \nu(B), \quad \text{para } \nu\text{-quase todo ponto } x \in \mathbb{X}.$$

Esta aplicação do Teorema de Birkhoff mostra a importância da noção de ergodicidade.

Para motivar a noção de ergodicidade, em primeiro lugar, lembramos que, do ponto de vista de medida, os conjuntos de medida zero podem ser "ignorados". Considere agora um espaço de probabilidade $(\mathbb{X},\mathcal{F},\nu)$ e uma função mensurável $G\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que a medida ν é G-invariante. Suponha que existe um conjunto B com $0 < \nu(B) < 1$ tal que $G^{-1}(B) = B$. Neste caso, também temos $G^{-1}(\mathbb{X} \setminus B) = \mathbb{X} \setminus B$ e assim, existem dois conjuntos G-invariantes de medida positiva: B e $C = \mathbb{X} \setminus B$. Podemos considerar duas transformações "independentes" $G_{|_B}$ e $G_{|_C}$, as restrições de G aos conjuntos B e C. Do ponto de vista de medida, estas duas transformações podem ser estudadas de forma totalmente independentes. Queremos evitar esta situação e considerar uma única "unidade" dinâmica (do ponto de vista mensurável). Isto nos leva a estudar sistemas que não podem ser decompostos como acima, o que nos leva à noção de ergodicidade.

Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ e uma função mensurável $G\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que ν é G-invariante. Dizemos que a medida ν é *ergódica* para G (ou que o sistema (G, ν) é ergódico) se para todo subconjunto G-invariante $B \in \mathcal{F}$, (ou seja $B = G^{-1}(B)$), se verifica que $\nu(B) = 0$ ou $\nu(B) = 1$.

No Exercício 8.11, damos uma definição alternativa de ergodicidade. De forma simplificada, podemos dizer que ergodicidade é a versão mensurável da transitividade.

Provaremos, a seguir, o Teorema de Birkhoff para que o livro seja o mais autocontido possível. Apresentamos uma prova sucinta, em que propomos algumas pequenas etapas como exercícios (de fato, estes exercícios são muito apropriados para obter familiaridade com teoria da medida).

Teorema 8.6 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ e uma transformação $G\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ que preserva a medida ν. Então, para qualquer função $f \in L^1(\mathbb{X}, \nu)$, existe uma função mensurável $g_f \in L^1(\mathbb{X}, \nu)$ e G-invariante que verifica as seguintes propriedades:*

- *para ν-quase todo $x \in \mathbb{X}$ se verifica*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ G^i(x) = g_f(x).$$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{X}} f\, d\nu = \int_{\mathbb{X}} g_f\, d\nu.$

Além disso, se a medida ν é ergódica (respeito a G), então g_f é constante ν-q.t.p., em particular,
$$g_f(x) = \int_{\mathbb{X}} f\, d\nu, \quad \text{para } \nu\text{-quase todo ponto } x \in \mathbb{X}.$$

Prova: Primeiro observamos que é suficiente fazer a demonstração para funções características. No Exercício 8.6, pedimos para provar o Teorema de Birkhoff no caso geral usando o resultado para funções características. Portanto, consideraremos o caso $f = \mathbb{I}_B$, a função característica de algum subconjunto mensurável B de $\mathbb{X}$. Note que, neste caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \le i \le n-1\, ;\, G^i(x) \in B\}}{n}, \quad (8.1)$$

onde $\#(A)$ denota o número de elementos do conjunto A.

Observamos também que a parte difícil do Teorema de Birkhoff é a primeira, as outras afirmações seguem usando propriedades de integração de forma mais ou menos direta.

Em primeiro lugar provaremos que o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x)$$

existe para quase todo ponto $x \in \mathbb{X}$ e define uma função G-invariante (definida em quase toda parte), que obviamente denotaremos por g_f. Observe que é suficiente definir g_f em ν-quase toda parte.

Para isso, definimos

$$L^+(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x) \quad \text{e}$$

$$L^-(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x)$$

e devemos ver que estas funções coincidem ν-q.t.p.. Por definição,

$$0 \le L^-(x) \le L^+(x) \le 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{X}, \qquad (8.2)$$

logo estas funções estão bem definidas.

Observe que

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x)$$

é uma seqüência de funções mensuráveis. Assim, pela Observação 8.3,

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} S_n \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n\to\infty} S_n$$

são funções mensuráveis.

Não é dificil ver que, por definição, as funções L^+ e L^- são G-invariantes, isto é, $L^{\pm}(G(x)) = L^{\pm}(x)$, veja o Exercício 8.8.

Para provar a primeira parte do teorema, basta mostrar que

Proposição 8.7. *$L^+(x) = L^-(x)$ para ν-quase todo ponto $x \in \mathbb{X}$.*

O fato da igualdade da proposição ser verdadeira somente ν-q.t.p. e não para todo ponto é o motivo pelo qual o Teorema de Birkhoff vale somente para quase todo ponto.

Provada a proposição, basta tomar para quase todo $x \in \mathbb{X}$,

$$g_f(x) = L^+(x) = L^-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x).$$

Da G-invariância e mensurabilidade de $L^{\pm}$ obtemos que g_f é G-invariante e mensurável.

Prova da Proposição: É óbvio que $L^-(x) \le L^+(x)$, para todo $x \in X$. Então, precisamos apenas provar que

$$L^-(x) \ge L^+(x), \quad \text{para } \nu\text{-quase todo ponto } x \in \mathbb{X}. \tag{8.3}$$

Então, para obter (8.3), é suficiente provar que

$$\int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu \le \nu(B) \le \int_{\mathbb{X}} L^-(x)\, d\nu.$$

Veja o Exercício 8.7 que afirma que se ϕ, $\varphi \in L^1(\mathbb{X}, \nu)$ são funções tais que $0 \le \phi(x) \le \varphi(x)$ e $\int_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, d\nu \le \int_{\mathbb{X}} \phi(x)\, d\nu$, então $\phi(x) = \varphi(x)$ para ν-quase todo ponto $x \in \mathbb{X}$. Esta desigualdade envolvendo uma integral explica porque a proposição vale ν-q.t.p..

Provaremos apenas a primeira desigualdade, a segunda é obtida de forma análoga, veja o Exercício 8.10.

Lema 8.8.

$$\int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu \le \nu(B).$$

Prova do Lema: Considere qualquer $\varepsilon > 0$. Pela definição de limite superior, para cada $x \in \mathbb{X}$, existem infinitos inteiros $n \geq 1$ tais que

$$S_n(x) \geq L^+(x) - \varepsilon.$$

Para ilustrar a dificuldade e o ponto chave da demonstração, raciocinaremos primeiro em um caso ideal: suponha que existe n tal que $S_n(x) \geq L^+(x) - \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Neste caso, integrando a função $S_n(x)$ obtemos

$$\nu(B) = \int_{\mathbb{X}} S_n(x)\, d\nu \geq \int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu - \varepsilon,$$

onde a primeira desigualdade segue facilmente da definição (a prova deste fato se encontra abaixo para a função auxiliar $S'_n(x)$ introduzida na prova, mas é uma boa idéia fazer você a prova agora). Portanto, $\int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu \leq \nu(B) + \varepsilon$. Se isto fosse verdade para todo ε, a prova estaria terminada. Infelizmente, estas afirmações não são verdadeiras mas são *quase* verdade (isto é, falham em um conjunto de medida pequena, isto está explícito em (8.5)). A idéia é introduzir uma função auxiliar S'_n que verifica esta condição ideal e que é muito parecida com S_n. Assim, estimativas para S'_n podem ser transladadas para S_n. Vejamos os detalhes.

Considere

$$N(x) = \min\{n \geq 1 :\ S_n(x) \geq L^+(x) - \varepsilon\}.$$

Em particular,

$$S_{N(x)}(x) \geq L^+(x) - \varepsilon. \tag{8.4}$$

Para cada número natural M, definimos o conjunto mensurável

$$B_M = \{x \in \mathbb{X} \colon N(x) > M\}.$$

Obviamente, $B_{M+1} \subset B_M$ e $\cap_{M\in\mathbb{N}} B_M$ é um conjunto de medida nula. Portanto, existe $M = M(\varepsilon) > 0$ suficientemente grande tal que

$$\nu(B_M) < \varepsilon. \tag{8.5}$$

Pedimos para provar estas afirmações no Exercício 8.5.

Considere o novo conjunto mensurável $A = B \cup B_M$ e a função

$$S'_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x).$$

Obviamente, como $B \subset A$ e, portanto, $\mathbb{I}_A(x) \geq \mathbb{I}_B(x)$, se verifica que $S'_n(x) \geq S_n(x)$.

Afirmação 8.9.

$$S'_n(x) \geq \frac{(n-M)}{n} (L^+(x) - \varepsilon).$$

Posporemos a prova da afirmação e terminaremos a demonstração do lema. Integrando, obtemos

$$\int_{\mathbb{X}} S'_n(x)\, d\nu \geq \frac{n-M}{n} \left(\int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu - \varepsilon \right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} S'_n(x)\, d\nu &= \int_{\mathbb{X}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x)\, d\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_A \circ G^i(x)\, d\nu \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{G^{-i}(A)} \mathbb{I}_A(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \nu(G^{-i}(A)) = \nu(A),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de G preservar a medida ν. Logo,

$$\nu(A) \geq \frac{n-M}{n} \left(\int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu - \varepsilon \right).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\nu(A) \geq \int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu - \varepsilon.$$

Por outro lado, usando a estimativa sobre a medida de B_M em (8.5), obtemos

$$\nu(A) = \nu(B \cup B_M) \leq \nu(B) + \nu(B_M) \leq \nu(B) + \varepsilon.$$

Logo,

$$\nu(B) \geq \nu(A) - \varepsilon \geq \int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu - \varepsilon - \varepsilon = \int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu - 2\,\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\nu(B) \geq \int_{\mathbb{X}} L^+(x)\, d\nu.$$

Finalizamos assim a prova do lema. Provaremos agora a afirmação.

Prova da Afirmação: Definimos

$$N'(x) = \begin{cases} N(x), & \text{se } N(x) \leq M \\ 1, & \text{se } N(x) > M \end{cases}$$

Observe que $N'(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Vamos provar que

$$S'_{N'(x)}(x) \geq L^+(x) - \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{X}. \tag{8.6}$$

Provaremos a afirmação, dividindo a órbita de x em partes de "tamanho $N'(x)$". Se $N(x) > M$, então $N'(x) = 1$ e $x \in B_M \subset A$. Assim, usando a desigualdade (8.2),

$$\begin{aligned} S'_{N'(x)}(x) &= \frac{1}{N'(x)} \sum_{i=0}^{N'(x)-1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x) = \\ &= \mathbb{I}_A(x) = 1 \geq L^+(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Falta provar para o caso $N'(x) \leq M$. Neste caso, $N'(x) = N(x)$ e como $B \subset A$,

$$\begin{aligned} S'_{N'(x)}(x) &= \frac{1}{N'(x)} \sum_{i=0}^{N'(x)-1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x) = \frac{1}{N(x)} \sum_{i=0}^{N(x)-1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x) \geq \\ &\geq \frac{1}{N(x)} \sum_{i=0}^{N(x)-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x) = S_{N(x)}(x) \geq L^+(x) - \varepsilon, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da Equação (8.4). Isto termina a prova da desigualdade (8.6).

Dividiremos agora a soma $S'_n(x)$ em diferentes parcelas onde podemos usar a estimativa em (8.6). Consideraremos segmentos de órbita de tamanho $N'(x)$, $N'(G^{N'(x)}(x))$ e assim por diante. Mais precisamente, dado $x \in \mathbb{X}$, definimos indutivamente

$$n_0 = n_0(x) = 0,$$

$$n_k = n_k(x) = n_{k-1}(x) + N'(G^{n_{k-1}(x)}(x)), \quad \text{para } k \geq 1.$$

Escolha n maior do que M e defina

$$\ell = \max\{k \geq 1 \colon n_k(x) \leq n\}.$$

Observe que, como $N'(y) \leq M$,

$$n_\ell(x) \geq n - M. \tag{8.7}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} S'_n(x) \quad &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n_\ell - 1} \mathbb{I}_A \circ G^i(x) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\ell-1}\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \mathbb{I}_A \circ G^j(x) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\ell-1} N'(G^{n_i}(x))\, S'_{N'(G^{n_i}(x))}(G^{n_i}(x)) \geq \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\ell-1} N'(G^{n_i}(x))\,(L^+(G^{n_i}(x)) - \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{\ell-1} (n_{i+1} - n_i)\,(L^+(G^{n_i}(x)) - \varepsilon). \end{aligned}$$

Como L^+ é G-invariante, obtemos

$$\begin{aligned} S_n'(x) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\ell-1} (n_{i+1} - n_i)\,(L^+(G^{n_i}(x)) - \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\ell-1} (n_{i+1} - n_i)\,(L^+(x) - \varepsilon) = \\ &\geq \frac{1}{n}\, n_\ell\,(L^+(x) - \varepsilon) \\ &\geq \frac{1}{n}\,(n - M)\,(L^+(x) - \varepsilon), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (8.7). Terminamos, assim, a prova da afirmação. □

Provada a afirmação, o lema está demostrado. □

Demonstrado o lema, a prova da proposição está terminada. □

Para terminar a prova da primeira parte do teorema, falta ver que

$$g_f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x)$$

é ν-integrável em $\mathbb{X}$. Observe que todas as funções que estamos considerando são positivas. Usando o Teorema da Convergência Dominada (Teorema 8.4) e o Lema de Fatou (Lema 8.5), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} |g_f(x)|\,d\nu = \int_{\mathbb{X}} g_f(x)\,d\nu &= \int_{\mathbb{X}} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B(G^i(x))\,d\nu = \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B(G^i(x))\,d\nu = \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B(G^i(x))\,d\nu. \end{aligned}$$

Usando que G preserva a medida ν,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} |g_f(x)|\, d\nu \quad &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B(G^i(x))\, d\nu = \\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B(x)\, d\nu = \\ &= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B(x)\, d\nu = \nu(B) < \infty.\end{aligned}$$

Logo a função g_f é ν-integrável, terminando a prova da primeira parte do Teorema de Birkhoff.

Falta mostrar a segunda parte do teorema, isto é, que

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B\, d\nu = \int_{\mathbb{X}} g_f\, d\nu,.$$

Observe que, pelo Teorema de Convergência Dominada (Teorema 8.4) e como a medida ν é G-invariante, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} g_f\, d\nu \quad &= \int_{\mathbb{X}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x)\, d\nu = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B \circ G^i(x)\, d\nu = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B(x)\, d\nu = \\ &= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{I}_B(x)\, d\nu.\end{aligned}$$

Finalmente provaremos a última parte do Teorema de Birkhoff: se ν é ergódica então g_f é constante ν-q.t.p.. Para cada constante C, defina $A_C = \{x \in X : g_f(x) > C\}$. Estes conjuntos são mensuráveis. Como g_f é G-invariante, temos

$$A_C = G^{-1}(A_C),$$

isto é, A_C é G-invariante. Assim, $\nu(A_C) = 0$ ou 1, já que ν é ergódica com respeito a G. Suponha que g_f não é constante para ν-quase todo ponto $x \in X$. Então existe C tal que $0 < \nu(A_C) < 1$, uma contradição. Logo a função g_f é uma constante.

A prova do Teorema de Birkhoff está terminada. □

8.4 Propriedades Ergódicas

Começamos esta seção observando que é simples construir medidas ergódicas para a transformação de Gauss. Basta considerar qualquer ponto periódico p de período n, $T^n(p) = p$ e $T^i(p) \neq p$ se $0 < i < n$, e considerar a medida ν definida na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tal que

$$\nu(A) = \frac{\#\{i \in [0, n-1] : T^i(p) \in A\}}{n}.$$

Esta medida é T-invariante e ergódica (veja o Exercício 8.13). A medida ν tem a grande desvantagem de não ter nenhuma relação com a nossa medida natural em $\mathbb{R}$, a medida de Lebesgue. Por exemplo, o conjunto $\{p\}$ tem medida de Lebesgue zero e $\nu(\{p\}) = 1/n$. Por outro lado, se consideramos o conjunto

$$K = (0, 1) \setminus \{p, T(p), \dots, T^{n-1}(p)\},$$

temos $\lambda(K) = 1$ e $\nu(K) = 0$. Portanto, esta medida não é interessante para nossos objetivos.

Nesta seção, veremos que a Transformação de Gauss possui uma medida invariante e ergódica, que chamaremos *medida de Gauss,* que é equivalente à medida de Lebesgue (as medidas têm os mesmos conjuntos de medida zero). Esta equivalência nos permitirá transladar propriedades válidas para a medida de Gauss à medida de Lebesgue. A medida de Gauss terá um papel fundamental neste capítulo e sua importância ficará evidente nas sucessivas aplicações do Teorema de Birkhoff.

8.4.1 A medida de Gauss

No intervalo $[0,1)$, consideraremos a σ-álgebra dos Borelianos $\mathcal{B}$. Portanto, pelo Teorema de Extensão de Caratheodory (Teorema 8.1), é suficiente definir a medida de Gauss μ nos intervalos (que geram a σ-álgebra).

Definição 8.10. *A* medida de Gauss μ *do intervalo* (a,b) *de* $[0,1)$ *é dada por*

$$\mu(a,b) = \frac{1}{\log 2}\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right). \tag{8.8}$$

Faremos alguns comentários sobre esta medida (as informações procedem de [8, Seção 15] e [7, Seção 1.2.2]). Considere a função $m_n\colon [0,1) \to [0,1]$, definida por

$$m_n(b) = \lambda(\{y\colon T^n(y) \in [0,b)\}) = \lambda(T^{-n}([0,b))).$$

O objetivo é entender o comportamento assintótico desta função, isto é, estudar o limite

$$\lim_{n\to\infty} m_n(b),$$

quando existir. No seu diário do ano 1800 (e usando notação moderna), Gauss escreveu

$$\lim_{n\to\infty} m_n(b) = \frac{\log(1+b)}{\log 2}.$$

A prova deste resultado nunca foi encontrada. Posteriormente, em 1812, em carta dirigida a Laplace, Gauss perguntou sobre o erro desta aproximação

$$\mathrm{erro}_n(b) = m_n(b) - \frac{\log(1+b)}{\log 2}.$$

Esta questão é atualmente conhecida como o *Problema de Gauss.* A primeira solução para esta questão foi dada por Kuzmin, que provou que o erro_n era da ordem de $q^{\sqrt{n}}$, $0 < q < 1$, veja [8, Teorema 33]. Sucessivas melhoras da estimativa do erro foram apresentadas posteriormente (para uma discussão mais profunda do Problema de Gauss, veja também [7, Capítulo 2]).

Certamente, o limite $\log(1+b)/\log 2$ parece ser a origem (ou a motivação) da definição da medida de Gauss. Note que

$$\mu([0,b]) = \frac{1}{\log 2}\int_0^b \frac{dx}{1+x} = \frac{\log(1+b)}{\log 2},$$

que dá exatamente o valor proposto por Gauss.

Provaremos nesta seção que a medida de Gauss é T-invariante (Proposição 8.12) e ergódica (Teorema 8.13). Observamos que a medida de Lebesgue não é invariante para a transformação de Gauss, veja o Exercício 8.12.

Em primeiro lugar, observamos que a fórmula da medida de Gauss permite comparar as medidas de Lebesgue e de Gauss de conjuntos mensuráveis. Veremos que este fato será de grande utilidade. Mais precisamente:

Observação 8.11. Como a densidade da medida de Gauss verifica

$$\frac{1}{2\log 2} < \frac{1}{(\log 2)\,(1+x)} \le \frac{1}{\log 2},$$

temos que, para qualquer conjunto mensurável $A \subseteq [0,1)$,

$$\frac{1}{2\log 2}\,\lambda(A) < \mu(A) \le \frac{1}{\log 2}\,\lambda(A).$$

Esta relação implica que as medidas de Gauss e de Lebesgue são equivalentes (isto é, as duas medidas definidas na mesma σ-álgebra $\mathcal{B}$ possuem os mesmos conjuntos de medida nula).

8.4.2 A medida de Gauss é T-invariante

Proposição 8.12. *A medida de Gauss μ é T-invariante.*

Prova: Observamos que é suficiente verificar a invariância para os intervalos (pois estes geram a σ-álgebra de Borel). Em primeiro lugar, temos que

$$x \in I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n.$$

Portanto, qualquer número $x \in I_n$ pode ser escrito da forma $x = \frac{1}{n+\alpha}$, onde $\alpha \in (0,1)$. Por definição temos,

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\tfrac{1}{n+\alpha}\right) = (n+\alpha) - \lfloor n+\alpha \rfloor = \\ &= n + \alpha - n = \alpha. \end{aligned}$$

Logo, se $(a,b) \subset [0,1)$, temos que sua pré-imagem no intervalo I_n é

$$\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right).$$

Portanto, como o intervalo (a,b) tem uma pré-imagem em cada intervalo I_n, temos que

$$T^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right).$$

Seja $\mu(T^{-1}((a,b))) = K$, então temos que

$$\begin{aligned} K = \quad & \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1+\frac{1}{n+a}}{1+\frac{1}{n+b}}\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{\frac{n+a+1}{n+a}}{\frac{n+b+1}{n+b}}\right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{n+a+1}{n+a} \, \frac{n+b}{n+b+1}\right) \end{aligned}$$

Observe que a última fração pode ser escrita da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+a+1) - \log(n+a) + \log(n+b) - \log(n+b+1)}{\log 2}.$$

Claramente, há uma série de cancelamentos e obtemos que

$$K = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1+b}{1+a} \right) = \mu((a,b)).$$

Isto termina a prova da proposição. □

8.4.3 Ergodicidade da Medida de Gauss

O principal resultado desta seção é o seguinte:

Teorema 8.13. *A transformação de Gauss é ergódica com respeito á medida de Gauss μ.*

A idéia fundamental da prova do teorema é comparar a medida de Gauss de um conjunto A e a medida relativa de $T^{-n}(A)$ nos intervalos $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$ de geração n. Veremos que, em termos de medida, a n-ésima pré-imagem de A se distribui de forma *bastante* uniforme nos intervalos $I_{[n]}$. Provaremos primeiro esta propriedade para a medida de Lebesgue (Proposição 8.17). A partir dela, usando a Observação 8.11 que permite comparar as medidas de Gauss e de Lebesgue, obteremos a mesma propriedade para a medida de Gauss (Proposição 8.16).

De forma um pouco mais precisa, a prova da ergodicidade da medida de Gauss tem três etapas. Em primeiro lugar, consideraremos os intervalos $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$ da Seção 7.2. Uma propriedade importante destes intervalos é a seguinte (veja o Exercício 8.16):

Observação 8.14. Os intervalos $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, da Seção 7.2 geram a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$.

Portanto, poderemos fixar nossa atenção nos intervalos $I_{[n]}$. Uma primeira etapa essencial da prova é o cálculo da medida de Lebesgue dos intervalos $I_{[n]}$. Pela Observação 8.11, este cálculo nos dará uma estimativa (superior e inferior) de sua medida de Gauss.

A segunda etapa consiste em obter as propriedades de distribuição uniforme das pré-imagens $T^{-n}(A)$ nos intervalos $I_{[n]}$ para a medida de Lebesgue. A última etapa é transladar esta distribuição uniforme para a medida de Gauss.

Para facilitar a leitura da prova, formularemos primeiro a Proposição 8.15, que implica o Teorema 8.13 de forma imediata. Depois, formularemos duas proposições chave que implicam esta proposição. Desta forma, apresentaremos as etapas da prova em ordem inversa.

Prova do Teorema 8.13.

Lembramos que dada uma medida ν e dois conjuntos mensuráveis A e B com $\nu(B) > 0$, a *medida condicional* de A com respeito a B, $\nu(A|B)$, é definida como
$$\frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}.$$
O Teorema 8.13 segue de forma imediata da seguinte proposição:

Proposição 8.15. *Existe uma constante $K > 0$ tal que, para todo conjunto mensurável e T-invariante A tal que $\mu(A) > 0$ e para todo conjunto mensurável $B \subseteq [0, 1)$, se verifica:*

$$\frac{1}{K}\,\mu(B) < \mu(B|A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \leq K\,\mu(B).$$

Para provar o Teorema 8.13, argumentaremos por absurdo. Suponha que existe um conjunto T-invariante A tal que $0 < \mu(A) < 1$. Escolhemos $B = ([0, 1)\backslash A)$, então $1 > \mu(B) > 0$. Pela Proposição 8.15, temos que
$$\frac{1}{K}\,\mu(B) < \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} = \frac{0}{\mu(A)} = 0,$$
o que contradiz o fato de $\mu(B) > 0$. Portanto, a medida de Gauss μ é ergódica. $\square$

Dois resultados auxiliares.

Nosso objetivo é provar a Proposição 8.15. O principal ingrediente da sua prova é o seguinte resultado que compara a medida de um conjunto A com a medida relativa da n-ésima pré-imagem de A nos intervalos $I_{[n]}$.

Proposição 8.16. *Existe uma constante $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo intervalo $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$ e todo conjunto mensurável A contido em $[0,1)$, se verifica*

$$\frac{1}{K}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq K\,\mu(A).$$

Observamos que, na proposição, não é necessária a T-invariância do conjunto A.

Para provar a Proposição 8.16, obteremos um resultado similar para a medida de Lebesgue:

Proposição 8.17. *Para todo Boreliano $A \subset [0,1)$, todo $n \in \mathbb{N}$ e todo intervalo $I_{[n]}$ se verifica*

$$\frac{1}{2}\,\lambda(A) < \lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq 2\,\lambda(A).$$

Comparando a medida de Lebesgue e a de Gauss, obteremos a Proposição 8.16. Finalmente, para provar a Proposição 8.17, necessitaremos determinar a medida de Lebesgue dos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$ e escrevê-los em função dos convergentes.

Salientamos que a Proposição 8.17 é a parte principal da prova do Teorema 8.13. Provaremos a seguir as proposições. O esquema da prova é

$$\text{Prop. } 8.15 \Leftarrow \text{Prop. } 8.16 \Leftarrow \text{Prop. } 8.17.$$

Proposição 8.16 $\Rightarrow$ Proposição 8.15.

Para provar a Proposição 8.15 veremos que os intervalos $I_{[n]}$ verificam a proposição. Visto isso, como os intervalos $I_{[n]}$ geram a σ-algebra, obtemos

$$\frac{1}{K}\,\mu(B) < \mu(B|A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \leq K\,\mu(B) \tag{8.9}$$

para qualquer conjunto mensurável $B \subseteq [0,1)$. Pedimos para completar os detalhes desta afirmação no Exercício 8.17.

A proposição para os intervalos $I_{[n]}$ segue da Proposição 8.16 e da T-invariância de A,

$$\frac{1}{K}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) = \mu(A|I_{[n]}) \leq K\,\mu(A).$$

Reescrevemos esta desigualdade,

$$\frac{1}{K}\,\mu(A) < \frac{\mu(T^{-n}(A)\cap I_{[n]})}{\mu(I_{[n]})} = \frac{\mu(A\cap I_{[n]})}{\mu(I_{[n]})} \leq K\,\mu(A).$$

Como $\mu(A) > 0$ e $T^{-n}(A) = A$, esta condição é equivalente a

$$\frac{1}{K}\,\mu(I_{[n]}) < \frac{\mu(T^{-n}(A)\cap I_{[n]})}{\mu(T^{-n}(A))} = \frac{\mu(A\cap I_{[n]})}{\mu(A)} \leq K\,\mu(I_{[n]}).$$

Isto é,

$$\frac{1}{K}\,\mu(I_{[n]}) < \mu(I_{[n]}|T^{-n}(A)) = \mu(I_{[n]}|A) \leq K\,\mu(I_{[n]}).$$

A prova da proposição para os intervalos $I_{[n]}$ está completa. Como os intervalos $I_{[n]}$ geram a σ-álgebra, temos que a proposição está demostrada. □

Proposição 8.17 ⇒ Proposição 8.16.

Usaremos a relação entre as medidas de Gauss e de Lebesgue dada pela Observação 8.11,

$$\frac{1}{2\log 2}\,\lambda(A) < \mu(A) \leq \frac{1}{\log 2}\,\lambda(A).$$

Pela Proposição 8.17,

$$\begin{aligned}
\mu(A) \quad &\leq \frac{1}{\log 2}\,\lambda(A) < \frac{2}{\log 2}\,\lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) = \\
&= \frac{2}{\log 2}\,\frac{\lambda(T^{-n}(A)\cap I_{[n]})}{\lambda(I_{[n]})} \leq \\
&\leq \frac{2}{\log 2}\,\frac{(2\,\log 2)\,\mu(T^{-n}(A)\cap I_{[n]})}{\log 2\,\mu(I_{[n]})} = \\
&= \frac{4}{\log 2}\,\mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\log 2}{4}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}). \tag{8.10}$$

Para a outra desigualdade, escrevemos

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) &= \frac{\mu(T^{-n}(A)\cap I_{[n]})}{\mu(I_{[n]})} \leq \\
&\leq \frac{2\,\log 2}{\log 2}\,\frac{\lambda(T^{-n}(A)\cap I_{[n]})}{\lambda(I_{[n]})} = \\
&= 2\,\lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq \\
&\leq 4\,\lambda(A) \leq (8\,\log 2)\,\mu(A).
\end{aligned}$$

Obtemos assim

$$\mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) < (8\,\log 2)\,\mu(A). \tag{8.11}$$

Usando as desigualdades em (8.10) e (8.11), obtemos $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K}\,\mu(A) < \mu(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq K\,\mu(A).$$

Obtendo assim a proposição $\square$.

Prova da Proposição 8.17.

A primeira etapa da prova da proposição é determinar a medida de Lebesgue dos intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$ e escrevê-los em função dos convergentes.

Lema 8.18. *Os intervalos $I_{i_1,\dots,i_n}$ são dados por:*

- $I_{i_1,\dots,i_n} = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right)$, *se n é par,*
- $I_{i_1,\dots,i_n} = \left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right]$, *se n é ímpar,*

onde $\frac{p_n}{q_n}$ é o n-ésimo convergente $[i_1,\dots,i_n]$.

Prova: Veremos, em primeiro lugar, que os extremos de $I_{i_1,\dots,i_n}$ são

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{e} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}.$$

Para isso, é suficiente lembrar que, por construção, todo número x do intervalo $I_{i_1,\dots,i_n}$ é da forma

$$x = [i_1, i_2, \dots, i_n + T^n(x)],$$

veja a Equação (2.4). Então, pela Propriedade (B I), todo número $x \in I_{i_1,\dots,i_n}$ verifica

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))\, p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))\, q_{n-1}}.$$

Como $0 \leq T^n(x) < 1$, temos que todo número $x \in I_{i_1,\dots,i_n}$ está entre

$$\frac{p_n}{q_n} \quad \text{e} \quad \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}.$$

Por outro lado, pela Propriedade (B II), temos que

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \quad &\Longleftrightarrow p_n\, q_n + p_n\, q_{n-1} < p_n\, q_n + p_{n-1}\, q_n \\ &\Longleftrightarrow 0 < p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n \\ &\Longleftrightarrow n \text{ é par }. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do lema. □

Lema 8.19. *Seja λ a medida de Lebesgue, então se verifica*

$$\lambda(I_{i_1,\dots,i_n}) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}, \quad [i_1, \dots, i_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Prova: Pelo Lema 8.18 e a Propriedade (B II), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda(I_{i_1,\dots,i_n}) &= \left|\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| = \\ &= \left|\frac{p_n\,q_n+p_{n-1}\,q_n-p_n\,q_n+p_n\,q_{n-1}}{q_n(q_n+q_{n-1})}\right| = \\ &= \left|\frac{(-1)^n}{q_n(q_n+q_{n-1})}\right| = \frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}.\end{aligned}$$

Terminamos assim a prova do lema. □

Fim da prova da Proposição 8.17: Fixados um número natural n e uma família $i_1,\dots,i_n$ de números naturais, consideramos o intervalo $I_{[n]}=I_{i_1,\dots,i_n}$. Pelo Lema 8.18,

$$I_{[n]}=I_{i_1,\dots,i_n}=\left[\frac{p_n}{q_n},\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right) \quad (n \text{ par}),$$

$$I_{[n]}=I_{i_1,\dots,i_n}=\left(\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}},\frac{p_n}{q_n}\right] \quad (n \text{ ímpar}).$$

Pela Propriedade (B I), todo $z\in I_{i_1,\dots,i_n}$ pode ser escrito da forma

$$z=\frac{p_n+(T^n(z))\,p_{n-1}}{q_n+(T^n(z))\,q_{n-1}}.$$

Para qualquer intervalo $(a,b)\subset[0,1)$, temos

$$z\in T^{-n}((a,b))\cap I_{[n]}=\{z\colon z\in I_n \text{ e } a<T^n(z)<b\},$$

donde

$$\begin{aligned}T^{-n}((a,b))\cap I_{[n]} &= \left(\tfrac{p_n+a\,p_{n-1}}{q_n+a\,q_{n-1}},\tfrac{p_n+b\,p_{n-1}}{q_n+b\,q_{n-1}}\right), \quad n \text{ par},\\ T^{-n}((a,b))\cap I_{[n]} &= \left(\tfrac{p_n+b\,p_{n-1}}{q_n+b\,q_{n-1}},\tfrac{p_n+a\,p_{n-1}}{q_n+a\,q_{n-1}}\right), \quad n \text{ ímpar}.\end{aligned}$$

Assim, para qualquer intervalo $(a,b) \subset [0,1)$ e $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$
\begin{aligned}
K_n &= \lambda(T^{-n}((a,b)) \cap I_{[n]}) = \\
&= \pm \left(\frac{p_{n-1}\, b + p_n}{q_{n-1}\, b + q_n} - \frac{p_{n-1}\, a + p_n}{q_{n-1}\, a + q_n} \right) = \\
&= \pm \left[\left(\frac{a\, b\, p_{n-1}\, q_{n-1} + a\, p_n\, q_{n-1} + b\, p_{n-1}\, q_n + p_n\, q_n}{(q_n + b\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-a\, b\, p_{n-1}\, q_{n-1} - b\, p_n\, q_{n-1} - a\, p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_n}{(q_n + b\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) \right] = \\
&= \pm \left(\frac{b\, p_{n-1}\, q_n + a\, p_n\, q_{n-1} - a\, p_{n-1}\, q_n - b\, p_n\, q_{n-1}}{(q_n + b\, q_{n-1})\,(q_n + a\, q_{n-1})} \right) = \\
&= \pm \left(\frac{(b-a)\,(p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1})}{(q_n + a\, q_{n-1})\,(q_n + b\, q_{n-1})} \right) = \\
&= \frac{b-a}{(q_n + a\, q_{n-1})\,(q_n + b\, q_{n-1})}.
\end{aligned}
$$

Na última igualdade, usamos a Propriedade (B II). Observe que usamos $+$ quando n é par e $-$ quando n é ímpar.

Usando o valor de $K_n = \lambda(T^{-n}((a,b)) \cap I_{[n]})$, que acabamos de obter, e o Lema 8.19,

$$
\lambda(I_{i_1,\dots,i_n}) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda(T^{-n}((a,b))|I_{[n]}) &= \frac{\lambda(T^{-n}((a,b)) \cap I_{[n]})}{\lambda(I_{[n]})} = \\
&= (b-a)\, \frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + b\, q_{n-1})(q_n + a\, q_{n-1})}.
\end{aligned} \tag{8.12}
$$

Afirmação 8.20. $\dfrac{1}{2} < \dfrac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + b\, q_{n-1})(q_n + a\, q_{n-1})} \leq 2.$

Posporemos a prova da afirmação e concluiremos a prova da Proposição 8.17. Usando a Equação (8.12) e a Afirmação 8.20, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\lambda((a,b)) &= \frac{1}{2}\,(b-a) < \lambda(T^{-n}((a,b))|I_{[n]}) \leq \\ &\leq 2\,(b-a) = 2\,\lambda((a,b)). \end{aligned}$$

Finalmente, usando mais uma vez que os intervalos (a,b) geram a σ-algebra da medida de Gauss, obtemos

$$\frac{1}{2}\,\lambda(A) < \lambda(T^{-n}(A)|I_{[n]}) \leq 2\,\lambda(A) \tag{8.13}$$

para qualquer conjunto mensurável $A \subseteq [0,1)$.

Para concluir a prova da Proposição 8.17, falta demonstrar a Afirmação 8.20.

Prova da Afirmação: Provaremos a última desigualdade (a primeira decorre de forma análoga e será omitida). Como a seqüência $(q_i)_{i\geq -1}$ é monótona crescente e $q_i > 1$ para todo $i \geq 2$ (lembre a Propriedade (C)), temos que

$$\begin{aligned} 2\,q_n\,(q_n+q_{n-1}) &\leq 2\,q_n\,(q_n+q_n) = 4\,q_n^2 = \\ &= 4\,(q_n+0\,q_{n-1})(q_n+0\,q_{n-1}) \\ &\leq 4\,(q_n+a\,q_{n-1})(q_n+b\,q_{n-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{q_n\,(q_n+q_{n-1})}{(q_n+a\,q_{n-1})(q_n+b\,q_{n-1})} \leq \frac{4}{2} = 2.$$

O que prova a última desigualdade da afirmação. $\square$

A prova da Proposição 8.17 agora está concluida. $\square$

8.5 Conseqüências da ergodicidade

Com a ergodicidade da Transformação de Gauss podemos usar o Teorema de Birkhoff para obter algumas propriedades sobre a distribuição de dígitos (quocientes) na expansão em frações contínuas de quase todo número do intervalo $[0,1)$ (isto é, um conjunto de medida de Gauss total). Como a medida de Gauss é equivalente à medida de Lebesgue, obteremos propriedades para um conjunto de medida de Lebesgue 1 em $[0,1)$. Por exemplo, obteremos a freqüência com que um determinado número natural aparece na seqüência de quocientes de quase todo número real x (veja a Proposição 8.21). Enunciaremos outras propriedades sobre quocientes e os convergentes de quase todo número real na Proposição 8.22.

É interessante comparar estes resultados com os correspondentes para as expansões n-árias. Por exemplo, pelo Teorema de Birkhoff temos o seguinte resultado (veja o Exercício 8.20):

Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $x \in [0,1)$, seja $(\iota_1(x), \dots, \iota_k(x), \dots)$ a expansão n-ária de x. Para λ-quase todo ponto $x \in [0,1)$, a freqüência com que aparece um número $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ na expansão n-ária de x verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{j \in [1,n] \colon \iota_j(x) = k\}}{n} = \frac{1}{n} = \lambda\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right).$$

A seguinte proposição é o equivalente do resultado acima para frações contínuas. Existem dois motivos para a freqüência com que aparecem os dígitos não ser constante como no caso n-ário. Primeiro, há um número infinito de dígitos. Segundo, a medida de Gauss dos intervalos $I_k = [1/(k+1), 1/k)$ depende de k e diminui quando k cresce. Assim, o dígito $k+1$ aparece com freqüência menor do que o dígito k.

Proposição 8.21. *Para quase todo $x \in [0,1)$, a freqüência com que aparece um número $k \in \mathbb{N}$ na expansão em frações contínuas $[a_1(x), a_2(x), \dots]$ de x, verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \in [1,n] \colon a_i(x) = k\}}{n} = \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} = \mu(I_k).$$

O "quase todo ponto" na proposição pode ser para as medidas de Lebesgue ou Gauss, é equivalente.

Prova: Dado $k \in \mathbb{N}$, considere a função característica $\mathbb{I}_{I_k}(x)$ do intervalo $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$. Como $a_n(x) = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$, temos que:

$$a_n(x) = k \iff T^{n-1}(x) \in I_k \iff \mathbb{I}_{I_k}(T^{n-1}(x)) = 1.$$

Assim,

$$\frac{\#\{1 \leq i \leq n,\, a_i(x) = k\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_{I_k}(T^i(x)).$$

Como a transformação de Gauss T é ergódica com respeito à medida de Gauss e $\mathbb{I}_{I_k} \in L^1([0,1),\mu)$, pelo Teorema de Birkhoff, para μ-quase todo ponto $x \in [0,1)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_{I_k}(T^i(x)) = \int_0^1 \mathbb{I}_{I_k}(T^i(x))\, d\mu = \mu(I_k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu(I_k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_{I_k}(T^i(x)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \leq i \leq n,\, a_i(x) = k\}}{n}. \end{aligned}$$

Finalmente, pela definição da medida de Gauss (lembre a Equação (8.8)), temos

$$\mu(I_k) = \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1 + \dfrac{1}{k}}{1 + \dfrac{1}{k+1}}\right) = \frac{1}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

Donde obtemos a proposição. $\square$

Na Proposição 8.21, calculamos a freqüência com que aparece um número natural k na expansão em frações contínuas de quase todo ponto do intervalo $[0,1)$. A seguir, generalizaremos este resultado calculando a freqüência com que um determinado bloco $i_1, \ldots, i_k$ de k números naturais aparece na expansão.

Como $a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x))$, temos que

$$a_{j+r}(x) = i_{r+1} \Longleftrightarrow a_1(T^{j+r-1}(x)) = i_{r+1} \Longleftrightarrow T^{j+r-1}(x) \in I_{i_{r+1}}.$$

Portanto, da definição do intervalo $I_{i_1,\cdots,i_k}$, concluímos que

$$a_j(x) = i_1, \ldots, a_{j+k-1} = i_k \Longleftrightarrow T^{j-1}(x) \in I_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Como no primeiro caso, onde o bloco era de um elemento, consideramos o intervalo $I_{i_1,\ldots,i_k} = I_{[k]}$ e a função característica do conjunto $\mathbb{I}_{I_{[k]}}$ no intervalo $I_{[k]}$. Temos que

$$a_j(x) = i_1, \ldots, a_{j+k-1}(x) = i_k \Longleftrightarrow \mathbb{I}_{I_{[k]}}(T^{j-1}(x)) = 1.$$

Como $I_{[k]}$ é um Boreliano, a função $\mathbb{I}_{I_{[k]}}$ é integrável. Além disso, a Transformação de Gauss preserva a medida de Gauss μ. Portanto, o Teorema de Birkhoff afirma que, para μ-quase todo ponto $x \in [0,1)$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{I_{[k]}}(T^{j-1}(x)) = \int_0^1 \mathbb{I}_{I_{[k]}}\, d\mu = \mu(I_{[k]}).$$

Como, dado $x \in [0,1)$, se verifica

$$\frac{\#\{j \in [1,n] \colon a_j(x) = i_1, \ldots, a_{j+k-1}(x) = i_k\}}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{I_{[k]}}(T^{j-1}(x)),$$

obtemos que quase todo ponto $x \in [0,1)$ satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{j \in [1,n] \colon a_j(x) = i_1, \ldots, a_{j+k-1}(x) = i_k\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{I_{[k]}}(T^{j-1}(x)) = \mu(I_{[k]}).$$

Pela Equação (8.8) e o Lema 8.18, temos que

- Se k é par

$$\mu(I_{[k]}) = \frac{1}{\log 2}\ \log\left(\frac{1+\dfrac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}}{1+\dfrac{p_k}{q_k}}\right);$$

- Se k é ímpar

$$\mu(I_{[k]}) = \frac{1}{\log 2}\ \log\left(\frac{1+\dfrac{p_k}{q_k}}{1+\dfrac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}}\right).$$

Na seguinte proposição enunciamos algumas propriedades assintóticas sobre os dígitos da expansão em frações contínuas de quase todo ponto do intervalo $[0,1)$.

Proposição 8.22. *Para quase todo $x \in [0,1)$:*

(I)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)\right)=\infty.$$

(II)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\,a_2(x)\,\cdots\,a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}.$$

(III)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \log(q_n(x)) = \frac{\pi^2}{12\ \log 2}.$$

(IV)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \log\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| = \frac{-\pi^2}{6\log 2}.$$

Isto significa que o erro de aproximação entre x e o convergente $\dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$ é da ordem de $\exp\left(\dfrac{-n\,\pi^2}{6\ \log 2}\right)$.

Prova: A idéia da prova é encontrar, para cada caso, uma função integrável que descreva a distribuição dos dígitos e aplicar o teorema de Birkhoff.

(I) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)\right) = \infty.$

Consideramos a função

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = a_1(x).$$

Como $a_i(x) = a_1(T^{i-1}(x))$, temos que

$$\frac{1}{n}\left(a_1(x) + \cdots + a_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)).$$

Infelizmente, $f \notin L^1([0,1),\mu)$ e, portanto, não podemos aplicar o Teorema de Birkhoff diretamente. De fato, temos que

$$1 > T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{1-x}{x}.$$

Donde,

$$\int_0^1 f\, d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx \geq \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1-x}{x\,(1+x)}\, dx = \infty.$$

Para sanar o problema da não integrabilidade de f consideramos seus truncamentos (este é um truque freqüente em medida e um argumento similar já foi usado na prova do Teorema de Birkhoff quando definimos $N'(x)$). Isto é, para cada $N > 0$ definimos a função

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq N; \\ 0 & \text{se } f(x) > N. \end{cases}$$

Note que esta nova função f_N é limitada e tem um número finito de descontinuidades, portanto é integrável. Mais uma vez, como T preserva a medida de Gauss μ, podemos aplicar o Teorema de Birkhoff a cada f_N. Assim, para qualquer $N > 0$ e para quase todo ponto

$x \in [0,1)$, se verifica

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_N(T^i(x)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_N(T^i(x)) = \\ &= \int_0^1 f_N\, d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f_N(x)}{1+x}\, dx.\end{aligned}$$

Mas, já vimos que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \frac{f_N(x)}{1+x}\, dx = \infty.$$

Portanto, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \infty.$$

Isto termina a prova do item (I).

(II) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\, a_2(x)\, \cdots\, a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}.$

Em primeiro lugar, observamos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log(a_1(T^i(x)))\right) &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(a_i(x))\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\cdots a_n(x)}.\end{aligned}$$

Esta igualdade nos leva a estudar somas da forma

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log(a_1(T^i(x)))$$

e a considerar a função $g(x) = \log(a_1(x))$. Para aplicar o teorema de Birkhoff a $g(x)$, necessitamos do seguinte lema cuja prova adiaremos:

Lema 8.23. *$g \in L^1([0,1),\mu)$.*

Podemos agora aplicar o Teorema de Birkhoff à função g (lembre que T preserva a medida de Gauss), obtendo que, para quase todo $x \in [0,1)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) = \int_0^1 g\, d\mu.$$

Dividindo o intervalo $[0,1)$ em intervalos $I_k = [1/(k+1), 1/k)$, onde a função g é constante e igual a $\log k$, obtemos

$$\int_0^1 g\, d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k} g\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} g\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \log k \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} d\mu.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k\, d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}\right).$$

Esta igualdade implica que, para quase todo ponto $x \in [0,1)$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\, a_2(x) \cdots a_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i(x)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log a_1(T^i(x))\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\log\left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}\right)\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}.$$

Assim, finalizamos a prova de (II) assumindo o Lema 8.23.

Prova do Lema 8.23: Para provar o lema é suficiente ver que a integral de g com respeito a medida de Gauss é finita. Usando a fórmula da medida de Gauss na Definição 8.10, temos que

$$\int_0^1 g\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

Portanto, é suficiente ver que a última série é convergente. Expandindo em série de Taylor a função $\log(1+\frac{1}{x})$ no ponto 1, obtemos que, se k é suficientemente grande, então

$$\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Portanto, para provar o lema, é suficiente verificar a convergência da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}.$$

A convergência da série segue da integral $\int_1^\infty (\log x)/x^2\,dx$ ser convergente (integre por partes para obter esta afirmação). Logo $g \in L^1([0,1),\mu)$. $\square$

A prova do item (II) esta concluída.

(III) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(q_n(x)) = \frac{\pi^2}{12\,\log 2}$.

Iniciaremos a prova observando que a presença do termo $\pi^2/12$ é devida a seguinte igualdade (veja, por exemplo, [17])

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}. \tag{8.14}$$

Lembramos que $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$ (Propriedade (B III) dos convergentes) e obtemos,

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{1}{q_n(x)}\,\frac{p_n(x)}{q_{n-1}(T(x))}\,\frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-2}(T^2(x))}\cdots\frac{p_2(T^{n-2}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))}\,\frac{p_1(T(x))}{q_0(T(x))}.$$

Reagrupando os fatores, obtemos

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\,\frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))}\,\frac{p_{n-2}(T^2(x))}{q_{n-2}(T^2(x))}\cdots\frac{p_1(T(x))}{q_1(T(x))}\,\frac{1}{q_0(x)}.$$

Assim, tomando logaritmos,

$$\log\left(\frac{1}{q_n(x)}\right) = \log\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right).$$

Dividindo por n,

$$-\frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right).$$

Obtendo finalmente que

$$-\frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log T^k(x) +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right) - \log T^k(x)\right).$$

Portanto, para concluir a prova do item (III), é suficiente provar o seguinte lema:

Lema 8.24. *Para quase todo ponto $x \in [0,1)$,*

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(T^k(x)) = -\frac{\pi^2}{12 \log 2} \quad e$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x))}\right) - \log T^k(x)\right) = 0.$$

Prova: A primeira afirmação do lema segue do Teorema de Birkhoff (devemos verificar que $\log x \in L^1([0,1),\mu)$, mas isto está implícito nos argumentos que seguem). Isto é, para quase todo ponto $x \in [0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(T^k(x)) = \int_0^1 \log x \, d\mu = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \left[\log(x) \log(1+x) - \int \frac{\log(1+x)}{x}\, dx\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\, dx.$$

Onde a penúltima igualdade é obtida integrando por partes e a última aplicando a regra de l'Hôpital (sucessivas vezes).

Expandindo em série $\log(1+x)$, obtemos (omitimos os detalhes)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log T^k(x) = -\frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2\,i+1}\, x^i}{i}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{\log 2} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{\log 2} \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{\log 2} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\right) = -\frac{1}{\log 2} \left(\frac{\pi^2}{12}\right).$$

Para a última igualdade lembre da Equação (8.14).

Vamos agora provar a segundo item. Para n par temos que

$$I_{i_1,\cdots,i_n} = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio, dado $x \in I_{i_1,\cdots,i_n}$, temos

$$0 < \frac{\log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{x - \frac{p_n}{q_n}} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{onde} \quad \gamma \in \left(\frac{p_n}{q_n}, x\right).$$

Portanto, como $\frac{p_n}{q_n} < \gamma < x < \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$, usando a Propriedade (B II), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \quad &< \log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right) < \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) < \\ &< \frac{q_n}{p_n}\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{q_n}{p_n}\left(\frac{q_n\, p_{n-1} - p_n\, q_{n-1}}{q_n\,(q_n + q_{n-1})}\right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{p_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{p_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n}. \end{aligned}$$

Lembramos que, para n ímpar,

$$I_{i_1,\cdots,i_n} = \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right].$$

De maneira totalmente análoga, temos que

$$\begin{aligned} 0 > \log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \tfrac{1}{\gamma}\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right) > \\ > \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right)\frac{1}{\gamma} > -\frac{1}{q_n}. \end{aligned}$$

Portanto, nos dois casos se verifica

$$\left|\log x - \log\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)\right| < \frac{1}{q_n}.$$

Observando que $T^k(x) \in I_{i_1,\dots,i_{n-k}}$, a mesma prova fornece

$$\left|\log(T^k(x)) - \log\left(\frac{p_n(T^k(x))}{q_n(T^k(x))}\right)\right| < \frac{1}{q_{n-k}(T^k(x))}.$$

Como, pela Propriedade (C) dos convergentes, $q_n(T^k(x)) \geq 2^{(n-1)/2}$, temos que

$$\left|\log(T^k(x)) - \log\left(\frac{p_n(T^k(x))}{q_n(T^k(x))}\right)\right| \to 0$$

quando $n \to \infty$. Isto termina a prova do lema (e do item (III)). $\square$

(IV) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| = \frac{-\pi^2}{6\log 2}$.

Note que, pelo Teorema 5.1, (omitimos a dependência em x)

$$\frac{1}{q_n\,(q_{n+1}+q_n)} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n\,q_{n+1}}.$$

Como $q_{n+1} \geq q_n$, temos que,

$$2\,q_n\,q_{n+1} = q_n\,(q_{n+1}+q_{n+1}) \geq q_n\,(q_{n+1}+q_n).$$

Logo,

$$\frac{1}{2\,q_n\,q_{n+1}} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n\,q_{n+1}}.$$

Tomando logaritmos e usando suas propriedades, temos que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{2\,q_n\,q_{n+1}}\right) &= -\log 2 - \log q_n - \log q_{n+1} < \\
&< \log\left(\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|\right) \leq \log\left(\frac{1}{q_n\,q_{n+1}}\right) = \\
&= -\log q_n - \log q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Dividindo por n,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\,\log 2 - \frac{1}{n}\,\log q_n - \frac{1}{n}\,\log q_{n+1} &< \frac{1}{n}\,\log\left(\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|\right) \leq \\
&\leq -\frac{1}{n}\,\log q_n - \frac{1}{n}\,\log q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Como o item (III) implica que, para quase todo ponto $x \in [0,1)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2}$$

e como (também para quase todo ponto)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \log q_{n+1} = \frac{\pi^2}{12 \log 2},$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\log \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \right) = -2 \left(\frac{\pi^2}{12 \log 2} \right) = \frac{-\pi^2}{6 \log 2}.$$

Isto termina a prova do item (IV) e da proposição. □

8.6 Expoentes de Lyapunov

Quantidades importantes associadas a um sistema dinâmico são seus expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov medem a velocidade média com que as órbitas se separam e são, portanto, um indicador da caoticidade de um sistema dinâmico. Os expoentes de Lyapunov são generalizações da derivada em um ponto periódico: se p é um ponto periódico de período n de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então o expoente de Lyapunov de f no ponto p é éxatamente $\frac{1}{n} \log |(f^n)'(p)|$.

Na nossa discussão, nos restringiremos ao caso da aplicação de Gauss. Consideraremos pontos x onde a derivada de x esteja definida. Este conjunto tem medida total, pois seu complementar é um conjunto enumerável. Observe também que os pontos $x \in [0,1)$ tais que a derivada de T está definida para todo ponto $T^i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, é um conjunto de medida total. O *expoente de Lyapunov da órbita do ponto x* é definido por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\prod_{i=0}^{n-1} |T'(T^i(x))| \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{T^i(x)^2} \right) =$$

$$= - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(T^i(x)),$$

sempre e quando este limite existe. Denotaremos este limite (quando existe) por $\chi(x)$.

No Exercício 8.18 pedimos para calcular expoentes de Lyapunov de pontos periódicos (provar a fórmula $\chi(p) = \frac{1}{n} \log |(T^n)'(p)|$, se $T^n(p) = p$). Obviamente, existem pontos para os quais este limite não existe (no Exercício 8.21 pedimos para dar exemplos desta situação).

Um resultado interessante, veja o Exercício 8.19, é o seguinte: considere o número de ouro $\mathcal{O}$, como na Seção 4.1, e defina $\mathcal{O}' = \mathcal{O} - 1$. Lembramos que $T(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'$. É imediato verificar que qualquer ponto fixo p de T verifica $\chi(p) \geq \chi(\mathcal{O}')$. Um resultado mais surpreendente é que, para qualquer ponto $x \in [0,1)$ tal que seu expoente de Lyapunov $\chi(x)$ existe, temos que $\chi(x) \geq \chi(\mathcal{O}')$. Em outras palavras, o mínimo dos expoentes de Lyapunov é atingido exatamente no ponto $\mathcal{O}'$. Observe que o máximo dos expoentes de Lyapunov não é atingido: para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $x \in (0,1)$ tal que $\chi(x) \geq N$.

Finalmente, observamos que quase todos os pontos $x \in [0,1)$ possuem expoente de Lyapunov ($\chi(x)$ está definido) e o expoente de Lyapunov é o mesmo para quase todos os pontos. Estas afirmacões decorrem do Teorema de Birkhoff. Lembre que, no Lema 8.24, provamos que, para quase todo ponto $x \in [0,1)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\prod_{i=0}^{n-1} |T'(T^i(x))| \right) = \frac{\pi^2}{6\,\log 2}.$$

Neste caso, este limite é o *expoente de Lyapunov de T com respeito à medida μ*, e é denotado por χ_μ.

8.7 Exercícios

Exercício 8.1. Considere uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de um conjunto $\mathbb{X}$. Considere uma família enumerável $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathcal{F}$. Prove que se verifica que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ pertence a $\mathcal{F}$.

Exercício 8.2. Considere uma medida de probabilidade ν e uma seqüência $(F_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos mensuráveis tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) < \infty.$$

Prove que

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

Exercício 8.3. Considere uma família de σ-álgebras $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definidas em um conjunto $\mathbb{X}$. Prove que $\mathcal{F} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_j$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{X}$.

Exercício 8.4. Considere a σ-álgebra dos Borelianos em $[0,1]$. Prove que toda função contínua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ é mensurável.

Exercício 8.5. Considere uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, de funções mensuráveis. Prove que as funções

$$f^+(x) = \limsup_n f_n(x), \quad f^-(x) = \limsup_n f_n(x),$$

são mensuráveis.

Exercício 8.6. Usando a versão do Teorema de Birkhoff (Teorema 8.6) para funções características, prove, primeiro, o Teorema de Birkhoff para funções simples e depois para funções em $L^1(\mathbb{X},\nu)$.

Exercício 8.7. Considere funções $\phi, \varphi \in L^1(\mathbb{X},\nu)$ tais que $0 \leq \phi(x) \leq \varphi(x)$ e $\int_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, d\nu \leq \int_{\mathbb{X}} \phi(x)\, d\nu$. Prove que $\phi = \varphi$ ν-q.t.p..

Exercício 8.8. Prove que as funções L^+ e L^- na prova do Teorema 8.6 são G-invariantes.

Exercício 8.9. Usando a notação do Teorema de Birkhoff, defina para cada número natural M o conjunto

$$B_M = \{x \in \mathbb{X}\colon N(x) > M\}.$$

Prove que:

1. B_M é mensurável,

2. $\bigcap_{M\in\mathbb{N}} B_M$ é um conjunto de medida nula e, portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $\nu(B_k) < \varepsilon$.

Exercício 8.10. Usando a notação do Teorema de Birkhoff, prove que $\int_{\mathbb{X}} L^-(x)\, d\nu \geq \nu(B)$.

Exercício 8.11. Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \nu)$ e uma função mensurável $G\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ que preserva a medida ν (i.e., $\nu(A) = \nu(G^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathcal{F}$).

Prove que uma medida ν é ergódica se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(G^i(x)) = \int_{\mathbb{X}} \varphi(x)\, d\nu$$

para toda função $\varphi \in L^1(\mathbb{X}, \nu)$ e ν-quase todo ponto $x \in \mathbb{X}$.

Exercício 8.12. Prove que a medida de Lebesgue não é invariante pela transfomação de Gauss.

Exercício 8.13. Considere um ponto periódico p de período n da transformação de Gauss ($T^n(p) = p$ e $T^i(p) \neq p$ se $0 < i < n$) e a medida ν definida na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tal que

$$\nu(A) = \frac{\#\{i \in [0, n-1]\colon T^i(p) \in A\}}{n}.$$

Prove que ν é T-invariante e ergódica.

Exercício 8.14. Estude se a medida de Lebesgue é invariante para as transformações E_n, E_β e L associadas as expansões n-árias, β e de Lüroth (veja a Seção 7.1). Lembre que é suficiente provar isto para intervalos.

Exercício 8.15. Considere a transformação de Gauss. Determine de forma explícita um Boreliano B e pontos $x \in [0, 1)$ tais que o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \in [0, n-1]\colon T^i(x) \in B\}}{n}$$

não exista.

Mostre um exemplo onde

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\#\{i \in [0, n-1]\colon T^i(x) \in B\}}{n} = 1 \quad \text{e}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\#\{i \in [0, n-1]\colon T^i(x) \in B\}}{n} = 0.$$

Exercício 8.16. Mostre que os intervalos $I_{[n]} = I_{i_1,\dots,i_n}$ da Seção 7.2 geram a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$.

Exercício 8.17. Suponha que existe $K > 0$ tal que, para todo intervalo $I_{[n]}$ e todo conjunto mensurável T-invariante A com $\mu(A) > 0$, se verifica que

$$\frac{1}{K}\,\mu(I_{[n]}) \leq \frac{\mu(I_{[n]} \cap A)}{\mu(A)} \leq K\,\mu(I_{[n]}).$$

Prove que todo conjunto mensurável $B \subseteq [0,1)$ verifica

$$\frac{1}{K}\,\mu(B) < \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)} \leq K\,\mu(B).$$

Exercício 8.18. Considere um ponto periódico p de período n de T. Mostre que

$$\chi(p) = \frac{1}{n}\log|(T^n)'(p)|.$$

Exercício 8.19. Seja $\mathcal{O}' = \mathcal{O} - 1$, onde $\mathcal{O}$ é o número de ouro na Seção 4.1. Considere um ponto $x \in [0,1)$ tal que seu expoente de Lyapunov $\chi(x)$ está definido. Prove que

$$\chi(x) \geq \chi(\mathcal{O}').$$

Prove que, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $x \in (0,1)$ tal que $\chi(x) \geq N$.

Exercício 8.20. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, seja $(\iota_1(x), \dots, \iota_k(x), \dots)$ a expansão n-ária de $x \in [0,1)$. Prove que, para λ-quase todo $x \in [0,1)$, a freqüência com que aparece um número $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ na expansão n-ária de x verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{j \in [1,n]\colon \iota_j(x) = k\}}{n} = \frac{1}{n}.$$

Determine a freqüência com que aparece um bloco $k_1, \dots, k_r$ de comprimento r na expansão n-ária de λ-quase todo ponto.

Exercício 8.21. Dê exemplos de pontos $x \in [0,1)$ tal que o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1} |T'(T^i(x))|\right)$$

não exista.

Capítulo 9

Aproximação Diofantina. Teorema de Khinchin

Neste capítulo, daremos uma versão em termos de medida de Lebesgue do Teorema 5.18 sobre boas aproximações de números reais por racionais. Provaremos que o conjunto de números reais x cujos quocientes $a_i(x)$ são limitados tem medida nula (Teorema 9.3). Como conseqüência, obteremos que o conjunto dos números reais $x \in (0,1)$ para os quais a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

tem infinitas soluções para todo $C > 0$ tem medida total (Corolário 9.4).

No Teorema 9.11 (Teorema de Khinchin), veremos uma versão mais geral destes resultados. Dada uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, consideraremos a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{f(b)}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

De forma sucinta, o Teorema 9.11 estabelece a existência de infinitas soluções Lebesgue-q.t.p. para a desigualdade em função da divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

9.1 Aproximação Diofantina

Pelo Teorema 5.18, um número x ter quocientes limitados é equivalente à desigualdade

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{C}{b^2}$$

não ter solução quando C é suficientemente pequeno. Veremos, nesta seção, que os números reais para os quais a desigualdade não tem solução (isto é, aqueles com quocientes limitados) constituem um conjunto de medida nula. Em particular, o conjunto dos números reais com quocientes ilimitados tem medida total. Assim, pelo Teorema 5.18, quase todos os números admitem infinitas soluções para desigualdade dada acima.

Seja $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números positivos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto

$$E_n = E_{\alpha_n} = \{x = [a_1(x), \dots, a_k(x), \dots] \in [0,1) \colon a_n(x) > \alpha_n\}.$$

Observe que os conjuntos E_n são Borelianos (veja o Exercício 9.1).

Definimos também o conjunto

$$E_\infty = \{x \in [0,1) \colon a_i(x) > \alpha_i \quad \text{para infinitos valores de } i\},$$

isto é, E_∞ é o conjunto dos pontos $x \in [0,1)$ que pertencem a infinitos E_n. Portanto, se verifica

$$E_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n. \tag{9.1}$$

Portanto, o conjunto E_∞ é mensurável.

Um dos principais resultados desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 9.1. *Considere a medida de Gauss μ, uma seqüência de números poistivos $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e a seqüência de conjuntos mensuráveis $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então se verifica:*

- *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty$, *então* $\mu(E_\infty) = 0$;

- *se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$, *então* $\mu(E_\infty) = 1$.

Como as medidas de Gauss e Lebesgue são equivalentes, este teorema ainda vale se pusermos a medida de Lebesgue no lugar da medida de Gauss.

Pela definição de E_∞ em (9.1), podemos reescrever o teorema acima da seguinte maneira:

- $\displaystyle\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = 0$, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty$;

- $\displaystyle\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = 1$, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$.

Observação 9.2. Como uma aplicação do Teorema 9.1, obtemos que a série

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \tag{9.2}$$

é divergente para quase todo número em $[0, 1)$ (isto é, uma nova prova do item (I) na Proposição 8.22).

Para isso, é suficiente ver que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

é divergente (basta aplicar o Teste de Cauchy[1] e lembrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ é divergente) e considerar a seqüência $\alpha_n = n \log n$ e os

[1] O teste de Cauchy afirma que dada uma seqüência decrescente de números não negativos $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$, $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^k\, a_{2^k}$ é convergente, veja por exemplo [18, Proposição 7.3.4]. De fato, é simples ver que a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^k\, a_{2^k}$ implica a divergência da série inicial.

conjuntos $E_n = E_{\alpha_n}$ e E_∞. Pelo Teorema 9.1, o conjunto E_∞ tem medida total. Portanto, para quase todo ponto $x \in [0,1)$,

$$a_n(x) > n \log n \quad \text{para infinitos valores de } n.$$

Então,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \geq \log n$$

para infinitos valores de n e para quase todo ponto $x \in [0,1)$. Assim, a soma em (9.2) é divergente para quase todo ponto x.

Posporemos a demonstração do Teorema 9.1 e obteremos a seguir uma importante conseqüência dele. Considere o conjunto L dos números irracionais de $[0,1)$ cujos quocientes são limitados,

$$L = \{x \in [0,1)\colon \text{existe } \ell(x) \text{ tal que } a_j(x) \leq \ell(x) \text{ para todo } j\}.$$

Teorema 9.3. *O conjunto L tem medida de Gauss (Lebesgue) nula.*

Este teorema implica que o conjunto dos números em $[0,1)$ que possuem quocientes limitados tem medida de Lebesgue zero. Portanto, o conjunto dos números irracionais que têm quocientes ilimitados tem medida total. Esta observação e o Teorema 5.18 implicam diretamente o seguinte:

Corolário 9.4. *Considere a desigualdade*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2}, \quad C > 0,\ a,\ b \in \mathbb{N}.$$

Existe um subconjunto de $[0,1)$ de medida de Lebesgue igual a 1 tal que esta desigualdade admite infinitas soluções para todo $C > 0$.

Prova do Teorema 9.3: Para cada número natural i, definimos o conjunto

$$L_i = \{x \in [0,1)\colon \text{existe } N(x) \text{ com } a_j(x) \leq i \text{ para todo } j \geq N(x)\}.$$

Afirmação 9.5.

$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Portanto, para provar que a medida de Gauss do conjunto L é nula, é suficiente provar que a medida de cada L_i é nula.

Prova da Afirmação: Suponha que $x \in L$, então existe $\ell(x)$ tal que $a_i(x) \leq \ell(x)$ para todo i. Portanto, $x \in L_{\ell(x)}$ (podemos tomar $N(x) = 1$) e obtemos a inclusão $L \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$.

Para provar a outra inclusão, considere $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$. Então $x \in L_i$ para algum i. Isto implica que existe $N(x)$ tal que $a_j(x) \leq i$ para todo $j \geq N(x)$. Considere agora

$$\ell(x) = \max\{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{N(x)}, i\}.$$

Neste caso, $a_j(x) \leq \ell(x)$ para todo j. Portanto, $x \in L$. □

Para ver que, para todo i, o conjunto L_i tem medida nula, consideraremos a seqüência constante $\alpha_n = i$, para todo n, cuja série associada é divergente, e os conjuntos $E_n = E_{\alpha_n}$ associados a esta seqüência. Pelo Teorema 9.1, $\mu(E_\infty) = 1$.

Temos o seguinte lema:

Lema 9.6. $(L_i)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = E_\infty.$

Este lema implica que L_i tem medida nula: $\mu((L_i)^c) = \mu(E_\infty) = 1$, portanto, $\mu(L_i) = 0$.

Assim, para terminar a prova do teorema, falta demonstrar o último lema.

Prova do Lema: Em primeiro lugar, suponha que $x \in (L_i)^c$. Então, existem infinitos n tais que $a_n(x) > i = \alpha_n$. Ou seja, x está em infinitos E_n. Portanto, por definição,

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n,$$

obtendo a inclusão "$\subset$".

Agora, suponha que x está em infinitos E_n, isto é,

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Então, existem infinitos valores de j tais que $a_j(x) > \alpha_j = i$. Logo, $x \notin L_i$. Isto termina a prova da afirmação. $\square$

A prova do Teorema 9.3 está finalizada. $\square$

Na prova do Teorema 9.1 usaremos o seguinte resultado clássico da teoria de medida, cuja prova incluimos para que a exposição seja completa:

Lema 9.7 (Lema de Borel-Cantelli). *Considere uma medida de probabilidade ν e uma seqüência $(F_n)_{n\geq 1}$ de conjuntos mensuráveis. Suponha que se verifica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) < \infty,$$

então

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} F_n\right) = 0.$$

Prova: Observe que, para todo r,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=r}^{\infty} F_n.$$

Portanto (lembre o Exercício 8.2),

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} F_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=r}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=r}^{\infty} \nu(F_n) \quad \text{para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) < \infty$, fixando-se $\varepsilon > 0$, existe r tal que

$$\sum_{n=r}^{\infty} \nu(F_n) < \varepsilon.$$

Logo,

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=r}^{\infty} \nu(F_n) < \varepsilon.$$

Como esta desigualdade vale para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto tem medida nula, o que termina a prova do lema. $\square$

Prova do Teorema 9.1: Em primeiro lugar, consideramos o conjunto

$$E_n' = \{x \in [0,1) \colon a_1(x) > \alpha_n\} = \left[0, \frac{1}{\alpha_n}\right). \tag{9.3}$$

Um motivo para introduzir os conjuntos E_n' é o fato de ser muito simples estimar suas medidas de Gauss (lembre a Observação 8.11):

$$\mu(E_n') \leq \frac{1}{(\log 2)\,\alpha_n}. \tag{9.4}$$

Afirmamos que

$$E_n = T^{-(n-1)}(E_n'). \tag{9.5}$$

Para isso, é suficiente lembrar que $a_1(T^{n-1}(x)) = a_n(x)$ e escrever

$$\begin{aligned} T^{-(n-1)}(E_n') &= \{x \in [0,1) \colon T^{n-1}(x) \in E_n'\} = \\ &= \{x \in [0,1) \colon a_1(T^{n-1}(x)) > \alpha_n\} = \\ &= \{x \in [0,1) \colon a_n(x) > \alpha_n\} = E_n. \end{aligned}$$

Observe que, como a medida de Gauss é T-invariante,

$$\mu(E_n) = \mu(T^{-(n-1)}(E_n')) = \mu(E_n'). \tag{9.6}$$

Provaremos, agora, a primeira parte do teorema:

- $\mu(E_\infty) = 0, \quad \text{se} \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty.$

  Fixe n. As Equações (9.4) e (9.6) implicam que

$$\mu(E_n) = \mu(E_n') \leq \frac{1}{(\log 2)\,\alpha_n}.$$

Como, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\alpha_n < \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < \infty.$$

Assim, podemos aplicar o lema de Borel-Cantelli aos conjuntos E_∞ e E_n e obter que $\mu(E_\infty) = 0$.

Provaremos, agora, o segundo item do teorema.

- $\mu(E_\infty) = 1, \quad \text{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$

Para provar a afirmação, é suficiente verificar que $\mu(E_\infty^c) = 0$. Observamos que

$$\mu(E_\infty^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right)^c\right).$$

Pelas leis de De Morgan,

$$\mu(E_\infty^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right).$$

Escrevemos

$$A_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c, \quad \text{onde} \quad A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots.$$

Portanto,

$$\mu(E_\infty^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Assim, para provar que $\mu(E_\infty^c) = 0$, é suficiente ver que cada A_k tem medida nula.

Observamos que, para todo m,

$$A_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c \subset E_k^c \cap \cdots \cap E_{k+m}^c \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_k) \leq \mu(E_k^c \cap \cdots \cap E_{k+m}^c).$$

Logo a segunda parte do teorema decorre da seguinte proposição:

Proposição 9.8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica*

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_n^c \cap E_{n+1}^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c) = 0.$$

Prova da Proposição: O passo principal da prova da proposição é a seguinte desigualdade: para todo n e $m \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\mu(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c) \leq \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \frac{1}{(K\ \log 2)} \frac{1}{1+\alpha_{n+i}}\right). \tag{9.7}$$

Veremos, primeiro, como a desigualdade (9.7) implica a proposição.

Afirmação 9.9. *Suponha que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ é divergente. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha_n}$ também é divergente.*

Posporemos a prova desta afimação. A afirmação implica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha_{n+i}} = \infty$ para todo i. Observamos que

$1 - x < e^{-x}$ (isto segue usando a expansão de Taylor). Logo, usando (9.7), temos que

$$\begin{aligned}
\mu(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c) \quad &\leq \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \frac{1}{(K\ \log 2)} \frac{1}{1+\alpha_{n+i}}\right) < \\
&< \prod_{i=0}^{m} \exp\left(-\frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right) = \\
&= \exp\left(-\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right).
\end{aligned}$$

Como a série $\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}$ é divergente, temos que

$$0 \quad = \lim_{m\to\infty} \exp\left(-\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{K\ \log 2} \frac{1}{1+\alpha_{n+i}}\right).$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c) = 0,$$

obtendo a Proposição 9.8. Demonstraremos, agora, a afirmação acima.

Prova da Afirmação: Dividiremos a prova desta afirmação em dois casos:

- $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ contém uma subseqüência limitada;
- $(\alpha_n)_{n\geq 1} \to \infty$ quando $n \to \infty$.

No primeiro caso, existem $M > 0$ e uma subseqüência $(\alpha_{n_k})_{n_k}$ tais que $(1 + \alpha_{n_k}) < M$ para infinitos n_k. Portanto,

$$\frac{1}{1+\alpha_{n_k}} > \frac{1}{M},$$

que, obviamente, implica a afirmação no primeiro caso.

Para provar a afirmação quando $\alpha_n \to \infty$ observamos que existem uma constante $K > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$, se verifica

$$\frac{1+\alpha_n}{\alpha_n} < K \quad \Longrightarrow \quad 1 + \alpha_n < K\,\alpha_n.$$

Portanto,

$$\frac{1}{1+\alpha_n} > \frac{1}{K\,\alpha_n} \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Isto é,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha_n} > \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{K\,\alpha_n}.$$

Finalmente, pelo teste de comparação, a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ implica a afirmação. $\square$

Para provar a proposição falta demonstrar a desigualdade (9.7). Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 9.10. *Considere $n \in \mathbb{N}$ e o intervalo $I_{[n-1]} = I_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$, então se verifica*

$$\mu(E_n | I_{[n-1]}) \geq \frac{1}{(K\,\log 2)\,(1+\alpha_n)}.$$

Prova do Lema: A igualdade (9.5) e a Proposição 8.16 implicam que

$$\begin{aligned}
\mu(E_n|I_{[n-1]}) &= \frac{\mu(E_n \cap I_{[n-1]})}{\mu(I_{[n-1]})} = \frac{\mu(T^{-(n-1)}(E'_n) \cap I_{[n-1]})}{\mu(I_{[n-1]})} = \\
&= \mu(T^{-(n-1)}(E'_n)|I_{[n-1]}) > \frac{1}{K}\,\mu(E'_n) = \\
&= \frac{1}{K}\,\mu([0,1/\alpha_n)) \geq \frac{1}{K\,\log 2}\,\log\left(\frac{1+\dfrac{1}{\alpha_n}}{1+0}\right) = \\
&= \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)}{K\,\log 2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\log\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{\alpha_n}} \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{\alpha_n\left(1+\dfrac{1}{\alpha_n}\right)} = \frac{1}{1+\alpha_n},$$

obtemos que

$$\mu(E_n|I_{[n-1]}) \geq \frac{1}{(K\,\log 2)\,(1+\alpha_n)}.$$

Isto termina a demonstração do lema. □

Agora estamos prontos para concluir a prova da desigualdade (9.7). Fixado n, veremos que, para todo $m \geq 0$, vale a desigualdade. Provaremos este fato por indução em m.

Em primeiro lugar, para $m = 0$, note que pelas definições de E_n e como os intervalos $I_{[n-1]}$ de geração $(n-1)$ determinam uma partição de $[0,1)$ temos

$$E_n = \bigcup_{\iota \in J(n-1)} I_{[\iota]} \cap E_n,$$

onde

$$J(n-1) = \{\iota = (i_1, \ldots, i_{n-1})\colon i_1 \geq 1, \ldots, i_{n-1} \geq 1\}.$$

Observe que a união é considerada sobre todos os intervalos $I_{[\iota]}$ de geração $(n-1)$, portanto, a união é disjunta e se verifica que

$$\sum_{\iota \in J(n-1)} \mu(I_{[\iota]}) = 1.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mu(E_n) &= \mu\left(\bigcup_{\iota \in J(n-1)} I_{[\iota]} \cap E_n\right) = \\
&= \sum_{\iota \in J(n-1)} \mu\left(I_{[\iota]} \cap E_n\right) = \\
&= \sum_{\iota \in J(n-1)} \frac{\mu\left(I_{[\iota]} \cap E_n\right)}{\mu(I_{[\iota]})} \mu(I_{[\iota]}) = \\
&= \sum_{\iota \in J(n-1)} \mu(E_n | I_{[\iota]})\, \mu(I_{[\iota]}).
\end{aligned}$$

Então, pelo Lema 9.10,

$$\begin{aligned}
\mu(E_n) &\geq \sum_{\iota \in J(n-1)} \frac{1}{(K \log 2)(1+\alpha_n)} \mu(I_\iota) = \\
&= \frac{1}{(K \log 2)(1+\alpha_n)} \sum_{\iota \in J(n-1)} \mu(I_{[i]}) = \\
&= \frac{1}{(K \log 2)(1+\alpha_n)}.
\end{aligned}$$

Como $1 = \mu([0,1)) = \mu(E_n^c \cup E_n) = \mu(E_n^c) + \mu(E_n)$, temos que

$$\mu(E_n^c) = 1 - \mu(E_n) \leq 1 - \frac{1}{(K \log 2)(1+\alpha_n)}.$$

Portanto, a desigualdade (9.7) está provada para $m = 0$.

Suponha que a desigualdade (9.7) é verdadeira para $(m-1)$,

$$\mu(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m-1}^c) \leq \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right).$$

Para provar a desigualdade para m, afirmamos que se verifica

$$E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m-1}^c = \bigcup_{\iota \in H(n+m-1)} I_{[\iota]},$$

onde

$$H(n+k) = \{i_1, \ldots, i_{n+k} \in \mathbb{N}\colon i_n \leq \alpha_n, \ldots, i_{n+k} \leq \alpha_{n+k}\},$$

veja o Exercício 9.2. Portanto,

$$E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m-1}^c \cap E_{n+m}^c = \bigcup_{\iota \in H(n+m-1)} I_{[\iota]} \cap E_{n+m}^c.$$

Como a união dos intervalos $I_{[\iota]}$ é disjunta, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu\left(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c\right) &= \mu\left(\bigcup_{\iota \in H(n+m-1)} I_{[\iota]} \cap E_{n+m}^c\right) = \\
&= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}^c\right).
\end{aligned}$$

Como, para qualquer intervalo, se verifica

$$\mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}^c\right) + \mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}\right) = \mu\left(I_{[\iota]}\right),$$

escrevendo $S = \mu\left(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m}^c\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu\left(I_{[\iota]}\right) - \mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}\right) = \\
&= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \mu\left(I_{[\iota]}\right) - \frac{\mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}\right)}{\mu\left(I_{[\iota]}\right)}\,\mu\left(I_{[\iota]}\right) = \\
&= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \left(1 - \frac{\mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}\right)}{\mu\left(I_{[\iota]}\right)}\right) \mu\left(I_{[\iota]}\right).
\end{aligned}$$

Como os intervalos $I_{[\iota]}$ são de geração $(n+m-1)$, podemos aplicar o Lema 9.10 ao conjunto E_n e a cada intervalo $I_{[\iota]}$ para obter a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \left(1 - \frac{\mu\left(I_{[\iota]} \cap E_{n+m}\right)}{\mu\left(I_{[\iota]}\right)}\right) \mu\left(I_{[\iota]}\right) \leq \\ &\leq \sum_{\iota \in H(n+m-1)} \left(1 - \frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+m})}\right) \mu\left(I_{[\iota]}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+m})}\right) \mu(E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m-1}^c). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} S &\leq \left(1 - \tfrac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+m})}\right) \left(\textstyle\prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \tfrac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right)\right) = \\ &= \prod_{i=0}^{m} \left(1 - \frac{1}{(K\ \log 2)\,(1+\alpha_{n+i})}\right). \end{aligned}$$

Isto termina prova a desigualdade (9.7).

Agora a prova da Proposição 9.8 está concluida. □

Observamos que, concluída a prova da proposição, a demonstração do Teorema 9.1 está finalizada. □

9.2 O Teorema de Khinchin

Terminaremos este capítulo com um resultado que generaliza os precedentes. Dizemos que uma função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *nunca é crescente* se verifica $g(k) \geq g(k+1)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 9.11 (Khinchin). *Considere uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, um ponto $x \in [0,1)$ e a desigualdade*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{f(b)}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

- *Se* $b\,f(b)$ *nunca é crescente e* $\sum_{b\in\mathbb{N}} f(b) = \infty$*, então, para* λ*-quase todo ponto* $x \in [0,1)$*, existem infinitas soluções para a desigualdade.*

- *Se* $\sum_{b\in\mathbb{N}} f(b) < \infty$*, então para* λ*-quase todo* $x \in [0,1)$*, existe (no máximo) um número finito de soluções para a desigualdade.*

Observação 9.12. Aplicaremos o teorema para duas escolhas de f.

- Se fizermos $f(b) = C/b$, $C > 0$, a primeira parte do teorema dá uma nova prova do Corolário 9.4.

- Se tomarmos $f(b) = C/(b^{1+\alpha})$, $\alpha > 0$ e $C > 0$, aplicando o segundo item do teorema obtemos que a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^{2+\alpha}}, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

tem um número finito de soluções para quase todo ponto x.

Prova: Para iniciar a prova do primeiro item, fixe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\log N > \frac{\pi^2}{12\,\log 2}.$$

Pelo item (III) da Proposição 8.22, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12\,\log 2} < \log N.$$

Assim, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\frac{1}{n}\log q_n(x) < \log N \tag{9.8}$$

para todo n suficientemente grande.

Considere a função $\phi(n) = N^n\, f(N^n)$. Como $b\, f(b)$ nunca é crescente, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} f(b) &= \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{b\, f(b)}{b} \leq \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{N^n\, f(N^n)}{b} = \\ &= N^n\, f(N^n) \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

Logo, pela estimativa

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \log\, n,$$

temos que

$$\begin{aligned}\sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} f(b) &\leq N^n\, f(N^n) \sum_{b=N^n}^{N^{n+1}-1} \frac{1}{b} \leq \\ &\leq \phi(n)\, \log\left(\frac{N^{n+1}-1}{N^n}\right) \leq \phi(n)\, \log N.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{b\in\mathbb{N}} f(b) = \infty$, usando o teste de comparação, obtemos que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi(n) = \infty$.

Consideramos os conjuntos

$$D_n = \left\{x \in [0,1); \quad a_n(x) > \frac{1}{\phi(n-1)}\right\}.$$

Tomando $\alpha_n = 1/\phi(n-1)$, o Teorema 9.1 implica que o conjunto

$$D_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} D_n$$

tem medida de Gauss total.

Além disso, pela Propriedade (A) dos convergentes e pelo Teorema 5.1, temos que, dado qualquer $x \in [0,1)$, se verifica

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| &\leq \frac{1}{q_n(x)\,q_{n+1}(x)} \leq \frac{1}{q_n(x)\,(a_{n+1}(x)\,q_n(x) + q_{n-1}(x))} \\ &\leq \frac{1}{a_{n+1}(x)\,q_n^2(x)}.\end{aligned}$$

Portanto, se $x \in D_\infty$, existem infinitos n tais que

$$\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| < \frac{\phi(n)}{q_n(x)^2}.$$

Assim, como $b\,f(b)$ nunca é crescente e $q_n(x) < N^n$ para quase todo ponto $x \in [0,1)$ (lembre a Equação (9.8) no início da demonstração), se verifica

$$\phi(n) = N^n\,f(N^n) \leq q_n(x)\,f(q_n(x))$$

para infinitos valores de n. Portanto, para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\phi(n)}{q_n^2} < \frac{f(q_n)}{q_n} \quad \text{para infinitos valores de } n.$$

Isto prova a primeira parte do teorema.

Para provar a segunda parte, para cada $b \in \mathbb{N}$ considere o conjunto

$$H_b = \left\{x \in [0,1); \quad \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{f(b)}{b} \text{ para algum } a \in \mathbb{N}\right\}.$$

Considere também

$$H_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{b=k}^{\infty} H_b.$$

Para provar o teorema, é suficiente ver que H_∞ tem medida de Lebesgue nula. Observe que se $x \notin H_\infty$ então pertence a, no máximo, um número finito de conjuntos H_b, digamos $b_1, \ldots, b_m$. Para cada b_i, existem, no máximo, $(b_i - 1)$ valores de a que podem verificar a desigualdade. Desta forma, fixado $x \notin H_\infty$ como acima, existem, no máximo, $b_1 + \cdots + b_m$ soluções para a desigualdade.

Provaremos que H_∞ tem medida nula. Pela definição de H_b,

$$H_b = \bigcup_{1\le a\le b} \left(\frac{a}{b} - \frac{f(b)}{b}, \frac{a}{b} + \frac{f(b)}{b}\right).$$

Como esta união tem no máximo b intervalos e cada intervalo tem comprimento $(2\,f(b))/b$, temos que

$$\lambda(H_b) \le b\left(\frac{2\,f(b)}{b}\right) = 2\,f(b).$$

Como $\sum_b f(b) < \infty$, pelo teste de comparação,

$$\sum_b \lambda(H_b) < \infty.$$

Então, pelo Lema de Borel-Cantelli (Lema 9.7),

$$\lambda(H_\infty) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{b=k}^{\infty} H_b\right) = 0.$$

Isto termina a demonstração do teorema. □

Exercício 9.1. Dada uma seqüência $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números positivos, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$E_n = E_{\alpha_n} = \{x = [a_1(x), \dots, a_k(x), \dots] \in [0,1) \colon a_n(x) > \alpha_n\}.$$

Prove que estes conjuntos pertencem à σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$.

Exercício 9.2. Com a notação do Teorema 9.1. Prove que se verifica

$$E_n^c \cap \cdots \cap E_{n+m-1}^c = \bigcup_{\iota\in H(n+m-1)} I_\iota,$$

onde

$$H(n+k) = \{i_1, \dots, i_{n+k} \in \mathbb{N} \colon i_n \le \alpha_n, \dots, i_{n+k} \le \alpha_{n+k}\}.$$

Exercício 9.3. Considere a função

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(b) = \frac{\log(\log(b))}{b\,\log(b)}.$$

Prove que para quase todo ponto x a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{f(b)}{b}$$

tem infinitas soluções. Verifique, usando os Exercícios 4.3 e 5.3, que para o número e a desigualdade acima tem infinitas soluções.

Referências Bibliográficas

[1] R. G. Bartle, *A modern theory of integration*, Graduate Studies in Mathematics, **32**, American Mathematical Society, (2001).

[2] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, John Wile & Sons, Inc., (1965).

[3] M. Brin, G. Stuck, *Introduction to dynamical systems,* Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

[4] J. Conway, *Functions of one complex variable,* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **11**, Springer-Verlag, (1978).

[5] K. Dajani, C. Kraaikamp, *Ergodic theory of numbers,* Carus Mathematical Monographs, **29**, Mathematical Association of America, (2002).

[6] B. Hasselblatt, A. Katok, *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments,* Cambridge University Press, (2003).

[7] M. Iosifescu, C. Kraaikamp, *Metrical theory of continued fractions,* Mathematics and its Applications, **547**, Kluwer Academic Publishers, (2002).

[8] Ya. A. Khinchin *Continued fractions,* (reprint of the 1964 translation), Dover Publications, Inc., (1997).

[9] K. Kneisl, *The continued fraction system(and related systems),*

[10] R. Mañé, *Introdução à teoria ergódica,* Projeto Euclides, **14**, IMPA, (1983).

[11] K. Oliveira, *Um primeiro curso em teoria ergódica e aplicações,* Publicações Matemáticas do IMPA, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (2002).

[12] J. P. de Oliveira Santos, *Introducção à teoria dos números,* Coleção Matemática Universitária, IMPA, (2006).

[13] C. Pugh, *Real mathematical analysis,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (2002).

[14] A. Rockett, P. Szüsz, *C*ontinued fractions, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, (1993).

[15] C. Series, *Geometrical methods and symbolic codingg*, em *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic spaces,* Oxford Science Publ., pp. 125-150,(1992).

[16] N. Sidorov, *Arithmetic dynamics,* em *Topics in dynamics and ergodic theory,* London Math. Soc. Lecture Note Ser., **310**, Cambridge Univ. Press, pp 145-180, (2003).

[17] E. L. Stark, $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$, Praxis Math, **12**, pp. 1-3, (1970).

[18] T. Tao, *Analysis. I,* Texts and Readings in Mathematics, **37**, Hindustan Book Agency, New Delhi, (2006).

[19] P. Walters, *An introduction to Ergodic Theory,* Graduate Texts in Mathematics, **79**, Springer-Verlag, (1982).

Índice Remissivo

σ-aditividade, 141
álgebra, 140
    σ-álgebra, 140
    σ-álgebra de Borel, 141
    σ-álgebra gerada, 141

aditividade, 141
algébrico, *veja* número algébrico
algoritmo
    da divisão, 20
    de Liouville, 92
    fominha, 119
aproximação
    boa, 68
    Diofantina, 68, 188
        quocientes, 188
    ordem de, 77
    por convergentes, 66

Baire, *veja* Teorema de Baire
Birkhoff, *veja* Teorema Ergódico de Birkhoff
boa aproximação, 65
Borel-Cantelli, *veja* lema de Borel-Cantelli

Caratheodory, *veja* Teorema de Extensão de Caratheodory
conjunto
    Boreliano, 141
    residual, 97
convergência dominada, 145
convergentes, 18, 27
    aproximação por, 66
    boas aproxim., 68
    convergência, 43
    matrizes, 37
    propriedades, 33

Diofantina, *veja* aproximação Diofantina

ergódico, 148
espaço de medida, 141
expansão
    β, 117
    n-ária, 113
    do número e, 55
    do número de ouro, 54
    em frações contínuas, 17
    fominha, 117, 120
    periódica, 100
    simétrica, 52
expansor, *veja* transformação expansora
expoente de Lyapunov, 182

Fatou, *veja* lema de Fatou

Fibonacci, *veja* seqüência de Fibonacci
função
  característica, 144
  indicadora, 144
  integrável, 145
  mensurável, 143
  simples, 144

Gauss
  medida, *veja* medida de Gauss
  Problema de, 158
  transformação, *veja* transformação de Gauss

hiperbolicidade, 135

Khinchin, *veja* Teorema de Khinchin
Kuzmin, 158

Lüroth
  série, *veja* série de Lüroth
  transformação, *veja* transformação de Lüroth
Lagrange, *veja* Teorema de Lagrange
Lebesge, *veja* medida de Lebesgue
lema
  de Borel-Cantelli, 192
  de Fatou, 146
Liouville
  algoritmo, *veja* algoritmo de Liouville
  número, *veja* número de Liouville
  Teorema, *veja* Teorema de Liouville
Lyapunov, *veja* expoente de Lyapunov

medida, 142
  f-invariante, 143
  condicional, 162
  de Gauss, 158
  de Lebesgue, 142
  ergódica, 148
misturador, 132

número
  algébrico, 90
  de Euler e, 55
  de Liouville, 93
  de ouro, 53, 99
    boas aproximações, 83
  rotação, 132
  transcendente, 90

periódica, *veja* expansão periódica

quase toda parte (q.t.p.), 142
quocientes, 18, 27
  interpretação geom., 40

rotação, 132

série de Lüroth, 124
seqüência de Fibonacci, 55

Teorema
  convergência dominada, 145
  de Baire, 97
  de Extensão de Caratheodory, 142
  de Khinchin, 200
  de Lagrange, 101
  de Liouville, 91
  Ergódico de Birkhoff, 148
topologicamente
  misturador, 132

transitivo, 131
transcendente, *veja* número transcendente
transformação
de Gauss, 24
de Lüroth, 123
expansora, 113
que preserva medida, 143
transitivo, 131