Uma Introdução
à Mecânica Celeste

Publicações Matemáticas

Uma Introdução à Mecânica Celeste

Sérgio B. Volchan
PUC-Rio

impa

26º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

26º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números - Alexander Arbieto, Carlos Matheus e Carlos Gustavo Moreira
- Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações - Alcides Lins Neto
- Elliptic Regularity and Free Boundary Problems: an Introduction - Eduardo V. Teixeira
- Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um - Flavio Abdenur e Luiz Felipe Nobili França
- Introduction to Generalized Complex Geometry - Gil R. Cavalcanti
- Introduction to Tropical Geometry - Grigory Mikhalkin
- Introdução aos Algoritmos Randomizados - Celina de Figueiredo, Guilherme da Fonseca, Manoel Lemos e Vinicius de Sá
- Mathematical Aspects of Quantum Field Theory - Edson de Faria and Welington de Melo
- Métodos Estatísticos Não-Paramétricos e suas Aplicações - Aluisio Pinheiro e Hildete P. Pinheiro
- Moduli Spaces of Curves - Enrico Arbarello
- Noções de Informação Quântica - Marcelo O. Terra Cunha
- Three Dimensional Flows - Vítor Araújo e Maria José Pacifico
- Tópicos de Corpos Finitos com Aplicações em Criptografia e Teoria de Códigos - Ariane Masuda e Daniel Panario
- Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada - André Nachbin e Ailín Ruiz de Zárate
- **Uma Introdução à Mecânica Celeste - Sérgio B. Volchan**
- Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos - Humberto Bortolossi, Gilmar Garbugio e Brígida Sartini
- Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas - Lorenzo J. Díaz e Danielle de Rezende Jorge

ISBN: 978-85-244-0264-7

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

Sumário

1 Introdução **5**

1.1 Breve nota histórica 5

1.2 O Problema de N-Corpos 10

1.2.1 Preliminares 10

1.2.2 Formulação matemática do problema 12

1.3 Objetivos e o plano do livro 16

2 O Teorema de Existência e Unicidade **19**

2.1 Espaços métricos e normados 20

2.2 O teorema fundamental de existência e unicidade 25

2.3 Suave é Lipschitz 30

2.4 Existência e unicidade no problema de N-corpos 33

2.4.1 O demônio de Laplace 36

3 Leis de Conservação **40**

3.1 As integrais de movimento clássicas 41

3.2 Duas aplicações 46

3.3 Digressão sobre integrabilidade 48

4 O Teorema de Sundman-Weierstrass **54**
4.1 Colisões e colapso total 55
4.2 O teorema do colapso total 61
4.3 Sobre a estabilidade 64

5 Singularidades no problema de N-corpos **66**
5.1 Uma caracterização das singularidades . . . 67
5.2 Colisões e Pseudocolisões 70
5.3 A conjectura de Painlevé 74

Prefácio

Este livro é uma ampliação de notas de aula para um minicurso com o mesmo título apresentado nas Jornadas de Iniciação Científica do IMPA em novembro de 2006. Gostaria de aproveitar a ocasião para agradecer ao Marcelo Viana, responsável por aquele encontro, por seu entusiasmo pelo tema e sua insistência para que eu organizasse aquelas notas em um livro. Meus agradecimentos também ao Lorenzo J. Díaz pela sugestão de submeter uma versão mais aprofundada do tema para o Colóquio, assim como pelo seu encorajamento na empreitada e sua leitura crítica de partes do manuscrito.

Finalmente, me sinto muito honrado com o convite da comissão organizadora do 26° Colóquio de Brasileiro de Matemática e agradeço pela oportunidade de participar deste prestigioso encontro que celebra seu quinquagésmo aniversário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Breve nota histórica

O interesse e curiosidade a respeito dos fenômenos celestes remonta aos primórdios da humanidade, o que explica ser a Astronomia a ciência mais antiga. A Mecânica Celeste, por outro lado, é uma disciplina bem mais recente. Concebida como o ramo da Astronomia que estuda a dinâmica dos corpos sob interação gravitacional, ela teve seus fundamentos estabelecidos no século XVII. Sua origem, porém, é bem mais antiga e está ligada às observações e registros das posições dos astros em seu deslocamento diário na abóbada celeste, as chamadas *efemérides*. [1]

As civilizações da antiguidade clássica, como os Babilônios, Egípcios e Gregos, tinham necessidade de descrever (e prever) os movimentos dos astros, visando principalmente a elaboração de calendários. Motivados por razões tanto religiosas quanto prático-administrativas (e.g., organização estatal e agricultura), a confecção de tabelas

[1] Há indícios de que há cerca de 30.000 anos atrás o homem de Cro-Magnon já teria feito marcações em ossos de animais descrevendo as fases de lua. [16]

do movimento diário dos corpos celestes foi um grande estímulo para o desenvolvimento da Astronomia. É um feito notável destas civilizações o de terem sido capazes de descobrir padrões de regularidade nos complexos movimentos dos astros a ponto de poderem prever eventos tanto espetaculares, como os eclipses, quanto sutis, como a precessão dos equinócios. [2] Isso demonstra um grande avanço observacional e conceitual e podemos apenas especular o quanto contribuiu para formação da idéia de "lei natural".

O ápice do conhecimento astronômico grego ocorre com a publicação do *Almagesto* (do árabe, "o grande livro") de Claudius Ptolomeu (cerca de 100 d.C.), que foi a referência na área por cerca de 1500 anos. Nesta extraordinária obra é desenvolvido o famoso método dos epiciclos no qual o movimento dos planetas, tendo a Terra como centro (modelo geocêntrico), é descrito através da composição de movimento circulares uniformes. Apesar de apresentar notável precisão, tratava-se de um modelo fundamentalmente descritivo e pouco explicativo. Além disso utilizava muitas hipóteses sem fundamentação como, por exemplo, a noção da primazia do movimento circular uniforme, concebido como o único movimento "perfeito".

A fase moderna da Mecânica Celeste, em que se estuda a *dinâmica* de sistemas de corpos massivos sob a ação de forças de atração gravitacional com o intuito de *entender/explicar* o movimento daqueles corpos, realmente tem início com a chamada *síntese Newtoniana* no século XVII. Seu marco é a publicação em 1687 dos *Principia* de Isaac Newton, onde são formuladas as leis de movimento e se postula que estas leis são válidas tanto para corpos movendo-se

[2] Trata-se da rotação do eixo da Terra que oscila (como um pião) com período de cerca de 26000 anos, efeito descoberto por Hiparco por volta de 128-130 a.C., baseando-se em dados compilados pelos Babilônios

num laboratório terrestre quanto nos confins do Universo. Pode-se também afirmar que esta síntese só foi possível com o desenvolvimento de uma nova ferramenta matemática: o cálculo diferencial e integral.

O trabalho de Newton é a culminação de intensas investigações científicas e de especulações filosóficas nos duzentos anos precedentes. Como ele próprio reconheceu, só pode "ver mais longe" porque estava sobre os "ombros de gigantes" tais como Copérnico, Kepler, Brahe, Descartes e Galileu, entre muitos outros. Não se pode esquecer que muitas destas investigações foram estimuladas pelas necessidades e conquistas tecnológicas da época: cartografia, cronometria, instrumentação científica (e.g., relógios, telescópios) e problemas de navegação marítima (particularmente o famoso "problema da longitude").

A partir de então a Mecânica Celeste torna-se o "campo de provas" por excelência da validade e escopo da *Mecânica Clássica* (ou Mecânica *Newtoniana*). Como observou Poincaré (ver [5]),

> ... o verdadeiro objetivo da Mecânica Celeste não é o cálculo das efemérides ... mas reconhecer se a Lei de Newton é suficiente para explicar todos os fenômenos.

Nesse sentido o sucesso foi triunfal. Entre inúmeras outras conquistas, citamos a dedução das Leis de Kepler, umaa explicação das duas marés diárias, da precessão dos equinócios e do achatamento dos pólos terrestres, assim como a espetacular predição de Halley do reaparecimento do cometa que leva seu nome em 1758. O ápice veio em 1845 com a predição teórica da existência de um novo planeta, Netuno, através de estudos perturbativos da órbita de Urano, por Adams (na Inglaterra) e Le Verrier (na França).

Os problemas desafiadores da mecânica celestes sempre atraíram o interesse e esforços dos maiores matemáticos, físicos e astrônomos da história. Uma lista incompleta inclui Newton, Leibniz, Halley, Euler, Clairaut, D'Alembert, Delaunay, Lambert, Cauchy, Lagrange, Laplace, Liouville, Legendre, Clairaut, Poisson, Gauss, Jacobi, Weierstrass, Dirichlet, Hamilton, Hermite, Poincaré, Painlevé, Birkhoff, Lyapunov, Gyldén, Chazy, Tisserand, Hill e Sundman.

A Mecânica Celeste deixou assim um vasto legado, já que inúmeras idéias, métodos e técnicas criadas para abordar seus problemas ifluenciaram decisivamente várias áreas da matemática (em alguns casos dando origem a disciplinas autônomas). Podemos incluir: Cálculo e Análise, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Álgebra Linear, Cálculo Variacional, Variáveis Complexas, Mecânica Analítica e Hamiltoniana, Análise Numérica, Estatística e Probabilidade, Equações Diferenciais Ordinárias, Sistemas Dinâmicos e até Topologia e Teoria dos Números.

Os sucessos da síntese Newtoniana e, particularmente da Mecânica Celeste, contribuíram fortemente para que a Mecânica fosse alçada a modelo de ciência exata e para a consolidação do "modelo mecânico" do Universo. Porém, nem tudo fora explicado. Um problema recalcitrante era o da precessão do periélio da órbita do planeta mercúrio: um desvio observado de 43 segundos de arco por século em relação a predição Newtoniana e que só veio a ser explicado pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein (1915), portanto fora do escopo da Mecânica Clássica (de todo o modo corroborando a observação de Poincaré mencionada acima). [3]

[3] Outro problema, que permance em aberto, é a questão da "estabilidade" do sistema solar; grosso modo, trata-se de saber se, no longo prazo, o sistema solar irá colapsar sobre si mesmo ou se eventualmente irá se dispersar.

É verdade que a partir da segunda metade do século XIX a Mecânica Celeste foi sendo paulatinamente negligenciada pelos físicos cujo interesse se voltava para as novas disciplinas da Termodinâmica e do Eletromagnetismo. Também é desta época o surgimento da chamada “nova astronomia”, com o desenvolvimento de novos métodos de estudo e observação dos corpos celestes, particularmente a espectroscopia, o que eventualmente levou ao desenvolvimento vertiginoso da Astrofísica. Ademais, no início do século XX a atenção da maioria dos físicos se focalizou em duas novas teorias: a Relatividade e a Mecânica Quântica.

Entretanto, a Mecânica Celeste continuou a ser cultivada por astrônomos e matemáticos. Com o advento da era espacial e o desenvolvimento dos computadores, em meados da década de cinquenta do século passado, surgiram novos problemas extremamente desafiadores ligados a *exploração e navegação espaciais* tais como: controle de satélites e sondas exploratórias, viagens tripuladas, etc. A Mecânica Celeste ganhou novo impulso, despertando novamente o interesse de matemáticos de primeira linha, particularmente da escola russa e americana. Data desta época o célebre teorema KAM (devido a Kolmogorov, Arnold e Moser) sobre o efeito de perturbações em sistemas hamiltonianos, e que teve grande impacto na área de Sistemas Dinâmicos. Outro exemplo foi a retomada, por Pollard e Saari na década de sessenta, das investigações sobre a conjectura de Painlevé, sobre a qual falaremos no capítulo final destas notas.

Presentemente, a Mecânica Celeste é uma área de pesquisa muito ativa, de caráter multidisciplinar, com importantes contribuições recentes e contando com vários problemas em aberto.

1.2 O Problema de N-Corpos

Para apresentar a formulação matemática do problema fundamental da Mecânica Celeste, o chamado *problema de N-corpos*, precisamos lembrar de algumas noções de Física.

1.2.1 Preliminares

Começamos com seguintes pressupostos da Física Newtoniana:

- **a mecânica clássica**: ou seja, pressupomos o espaço-tempo Newtoniano e a existência de referenciais inerciais, isto é, em relação aos quais valem as três Leis de Newton da Dinâmica, a saber: a *1a. Lei* ou lei da inércia afirma que um corpo permanece estado de movimento retilíneo e uniforme a menos que sofra a ação de uma força; a *2a. Lei* diz que a ação de uma força sobre um corpo é a taxa de variação de seu momento linear,
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$
(no caso de uma partícula com massa $m > 0$ e velocidade $\mathbf{v}$, tem-se $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e a 2a. Lei fica: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$ é a aceleração da partícula; note que a massa é uma medida da inércia); a *3a. Lei* ou lei da ação e reação, diz que se um corpo exerce uma força sobre outro, este também exerce uma força sobre o primeiro, de mesma intensidade mas em sentido contrário.

- **a lei da gravitação universal**: a força de atração gravitacional entre quaisquer duas partículas de massas m e M, a uma distância $r > 0$ entre si, tem intensidade:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal. [4]

Como em todo modelo matemático de problemas físicos, vamos trabalhar sob certas simplificações ou idealizações, a saber:

(i) os corpos celestes (por exemplo, planetas) são consideradas como partículas (ou "pontos materiais"), logo destituídos de estrutura interna, sendo a massa a sua única propriedade intrínseca;

(ii) não há outro tipo de interação entre as partículas além da atração gravitacional e supomos que o sistema de N-corpos estudado está isolado do "resto do universo".

É importante salientar que estas são idealizações bastante severas e este modelo é quase uma caricatura da realidade. Assim, ainda que Newton tenha provado que o potencial gravitacional externo a um corpo com uma distribuição esféricamente simétrica de massa é o mesmo daquele gerado como se toda a massa estivesse concentrada em seu centro, é um fato que os corpos celestes reais não são homogêneos nem esféricos. Ao tratarmos os corpos como pontos materiais estaremos ignorando importantes efeitos ligados a extensão dos corpos tais como efeitos de maré, efeitos dissipativos, efeitos da rotação (precessão, ressonâncias), etc e que podem ser determinantes para o entendimento de sistemas reais. Ademais, estaremos desprezando a complexa estrutura interna dos corpos celestes,

[4] Em unidades do Sistema Internacional (SI), $G = 6,67.10^{-11} N.m^2/kg^2$.

que é um dos tópicos centrais da Astrofísica moderna (ciclo de vida de estrelas, constituição físico-química dos planetas, etc).

Do ponto de vista físico, a justificativa para tais idealizações está sempre ligada aos aspectos do sistema que se quer focalizar e às escalas (distâncias, tempos, energias) envolvidas. Para ter-se uma idéia de ordens de grandeza: no sistema solar a razão entre o diâmetro do Sol e sua distância a Plutão é da ordem de 10^{-4} e estima-se que 98% do momento angular total do sistema provem do movimento orbital (em comparação com a rotação intrínseca de cada corpo). Assim, parece razoável tratar os planetas como pontos materiais em uma escala da ordem do diâmetro do sistema solar. De qualquer modo, a Mecânica Celeste é parte integrante de qualquer estudo de sistemas de N-corpos reais, em particular do nosso sistema solar cuja dinâmica, aliás, está longe de ser bem compreendida (ver [23]).

É claro que outra justificativa para o estudo do problema de N-corpos é que se trata de um problema de interesse matemático intrínseco.

1.2.2 Formulação matemática do problema

Suponha escolhido um referencial inercial, que modelamos como o $\mathbb{R}^3$. Considere então $N \geq 2$ partículas, indexadas por $j = 1, 2, \ldots, N$, com massas $m_j > 0$ e que ocupam, no instante $t \in \mathbb{R}$, as posições $\mathbf{r}_j(t) = (x_{j1}(t), x_{j2}, x_{j3}(t))$. O problema fundamental da mecânica celeste é o de *estudar a evolução do sistema sob a ação das forças gravitacionais.*

A força de atração gravitacional que a k-ésima partícula exerce sobre a j-ésima, onde $k \neq j$, é dada pela Lei de

Gravitação Universal,

$$\mathbf{F}_{jk} = Gm_jm_k\frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3}.$$

Note que $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$, uma manifestação da 3a. Lei de Newton.

Assim, a formulação matemática do *problema de N-corpos gravitacional Newtoniano* é a seguinte: dadas as posições $\mathbf{r}_j(t_0)$ e velocidades $\dot{\mathbf{r}}_j(t_0)$ de todas as partículas $(j = 1, 2, \ldots, N)$ num instante inicial $t_0 \in \mathbb{R}$, satisfazendo $\mathbf{r}_i(t_0) \neq \mathbf{r}_j(t_0)$, se $i \neq j$; estudar o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$m_j\ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{N} Gm_jm_k\frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3}, \tag{1.1}$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$.

Aqui usamos a notação de Newton para derivadas em relação ao tempo; por exemplo, a velocidade da j-ésima partícula no instante t se escreve

$$\mathbf{v}_j(t) = \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}(t) = \dot{\mathbf{r}}_j(t).$$

Denotamos também a norma (ou distância) Euclideana usual em $\mathbb{R}^3$ por:

$$r_{jk} = \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_{ji} - x_{ki})^2}.$$

Note que para cada $j = 1, \ldots, N$, a equação 1.1 é tão somente a 2a. Lei de Newton (equações de movimento) para a j-ésima partícula, sendo o lado esquerdo da resultante (ou soma) das forças de atração gravitacionais excercidas pelas outras partículas sobre ela. Vemos que do ponto de vista matemático trata-se de estudar um *problema de valores iniciais*, ou seja um *sistema de* $3N$*-equações diferenciais ordinárias (não-linear) de 2a. ordem.*

É conveniente reformular o problema introduzindo a chamada função *energia potencial* (gravitacional) do sistema:

$$\begin{aligned} U: \quad & \mathbb{R}^{3N}/\Delta \longrightarrow]0,+\infty[\\ & \mathbf{x} \longmapsto U(\mathbf{x}) \equiv \sum_{1\leq j<k\leq N} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ é um vetor $6N$-dimensional cuja norma Euclideana correspondente denotamos por $|\mathbf{x}| = \sqrt{\|\mathbf{r}_1\|^2 + \ldots + \|\mathbf{r}_N\|^2}$.

Note que a função $U(\mathbf{x})$ só está definida para $\mathbf{x}$ fora do conjunto $\Delta = \cup_{1\leq i<j\leq N} \Delta_{ij}$, com

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} : \ \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\},$$

chamado *conjunto singular.*

Em $\mathbb{R}^{3N}/\Delta$, chamado *espaço de configurações* do sistema, a função U é “suave”, ou seja, de classe C^∞ (ver a seção 2.3) e, mais ainda, *real analítica.* [5]

Observação 1.1. *Em textos de Física toma-se para energia potencial a função* $V \equiv -U$*, que é então estritamente negativa. A* energia cinética *do sistema de* N *partículas é dada por*

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^2,$$

[5] Ou seja, possui uma expansão em série de Taylor em cada ponto do domínio.

onde $\mathbf{v}_j^2 = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j$, *é o produto escalar usual de vetores em* $\mathbb{R}^3$. *A função* $H \equiv T - U$ *chama-se* energia total *do sistema. Veremos no capítulo 3 que a energia total é uma grandeza conservada, razão pela qual diz-se que o sistema de* N *corpos é* conservativo.

O problema de N-corpos pode ser reescrito na forma

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{x}) = \Big(\frac{\partial U}{\partial x_{j1}}(\mathbf{x}), \frac{\partial U}{\partial x_{j2}}(\mathbf{x}), \frac{\partial U}{\partial x_{j3}}(\mathbf{x})\Big), \quad (1.2)$$

com $j = 1, \ldots, N$, com condições iniciais $\mathbf{r}_i(t_0) \neq \mathbf{r}_j(t_0)$, se $i \neq j$, e $\mathbf{v}_j(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_j(t_0)$.

Por sua vez, este sistema é equivalente ao seguinte sistema de $6N$ equações de *primeira* ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{v}_j \\ \dot{\mathbf{v}}_j = \dfrac{1}{m_j} \nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{x}) \qquad j = 1, \ldots, N \\ (\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) \in \mathbb{R}^{3N}/\Delta \times \mathbb{R}^{3N}, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde definimos os vetores $\mathbf{x}(t_0) = (\mathbf{r}_1(t_0), \ldots, \mathbf{r}_N(t_0))$ e $\mathbf{v}(t_0) = (\mathbf{v}_1(t_0), \ldots, \mathbf{v}_N(t_0))$.

O conjunto $(\mathbb{R}^{3N}/\Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$ chama-se *espaço de fases* do sistema. Assim, denotando por $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ os pontos deste espaço, onde $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$, o sistema de equações acima pode ser reescrito no formato ainda mais abstrato:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathsf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in (\mathbb{R}^{3N}/\Delta) \times \mathbb{R}^{3N}, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde

$$\mathsf{f}(\mathbf{y}) \equiv (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_N, \frac{1}{m_1} \nabla_{\mathbf{r}_1} U(\mathbf{x}), \ldots, \frac{1}{m_N} \nabla_{\mathbf{r}_N} U(\mathbf{x})).$$

Vemos então que, do ponto de vista matemático, o problema de N-corpos consiste em estudar o *sistema dinãmico* acima.

1.3 Objetivos e o plano do livro

A grande dificuldade ao abordar a Mecânica Celeste é o fato de tratar-se de uma disciplina extremamente vasta, com uma história longa e muito rica (para um panorama, ver [18]) e que permeia o desenvolvimento da própria ciência. Ao mesmo tempo é isto que, entre outros fatores, a torna fascinante.

Trata-se de uma área de estudo genuínamente multidisciplinar, envolvendo contribuições de todas as áreas da Física, Química, Geologia, as tecnologias de observação e medição e, claro, da Matemática. E sua história ilustra, de modo muito claro, a importância dos esforços e da criatividade de inúmeros indivíduos que contribuíram para dar conta dos imensos desafios que esta disciplina apresenta.

Que tipo de resultados se gostaria de obter do estudo do problema de N-corpos? Tradicionalmente são de dois tipos:

(I) <u>quantitativos</u>: soluções “explícitas”, soluções aproximadas, soluções particulares, teoria de perturbações, análise numérica, etc.

(II) <u>qualitativos</u>: comportamento assintótico de soluções, existência de órbitas periódicas, questões de estabilidade, simetrias, singularidades, etc. [6]

[6] O estudo dos aspectos qualitativos de problemas do tipo 1.4 acima, em contextos extremamente gerais e abstratos, demarca a chamada *Teoria dos Sistemas Dinâmicos*.

É claro que estes dois tipos de análise se superpõem freqüentemente. Históricamente, a busca de resultados quantitativos tiveram precedência e continuam a ser fundamentais, tanto na teoria quanto em aplicações (cálculo de efemérides, óbitas de satélites, missões espaciais, teoria de perturbações, etc). Apesar de os métodos aproximativos e perturbativos terem sido usados desde o início, havia a crença de que o mais importante era a obtenção de soluções "fechadas" ou "explícitas" das equações de movimento; ademais, se tinha a confiança de que cedo ou tarde elas seriam encontradas e nos permitiriam entender completamente o comportamento do sistema.

Foi só muito lentamente que se deu conta que esta busca era em grande medida uma ilusão. No final do século XIX, vários desenvolvimentos conduziram à uma mudança verdadeiramente revolucionária no estudo dos sistemas dinâmicos (com impacto em diversas áreas da matemática) liderada por Poincaré, Lyapunov e outros, na direção dos chamados métodos qualitativos (ou "geométricos"). Falaremos um pouco mais sobre isto posteriormente.

Neste minicurso apresentamos alguns aspectos matemáticos relativamente básicos do problema de N-corpos, numa linha que talvez se poderia chamar "qualitativa". Em particular, abordamos o intrigante problema das *singularidades*, que têm atraído muito interesse nos últimos anos.

Objetivo maior destas notas é despertar a curiosidade do leitor pelo universo da Mecânica Celeste e pelos problemas matemáticos associados. É claro que seria impossível cobrir território tão vasto em uma pequena monografia de nível intermediário. Dessa forma vários tópicos clássicos importantes e interessantes foram excluídos, tais como o problema de dois corpos, a equação de Kepler, etc (estes e muitos outros assuntos são tratados de forma magistral em [29], [24] ou [12]). Porém, sempre que possível (e dentro do escopo destas notas) procurei indicar o contexto ligado aos tópicos tratados, no intuito de motivar e auxiliar sua compreensão. A bibliografia sugerida contém uma amostra bastante diversificada na qual o leitor pode buscar um aprofundamento nos tópicos que lhe forem mais atraentes.

Uma vez que, do ponto de vista matemático, o problema de N-corpos é um problema de valores iniciais, tratamos no capítulo 2 do *teorema clássico de existência e unicidade* para equações diferenciais ordinárias. Além de motivar a introdução de vários conceitos matemáticas interessantes, este resultado será também crucial para a compreensão da questão das singularidades a ser discutida no capítulo 5. No capítulo 3 discutimos as *leis de conservação clássicas* associadas ao problema de N-corpos e (das quais quase tudo depende em Mecânica Celeste). Como aplicações, vemos dois resultados relativamente simples e que serão ferramentas essenciais até o final: *a identidade de Lagrange-Jacobi* e a *desigualdade de Sundman*. No capítulo 4 apresentamos o *teorema do colapso total de Sundman-Weierstrass*, um resultado muito importante, tanto do ponto de vista histórico quanto teórico e que envolve um tipo de singularidade bem conhecido, as colisões. Finalmente, no capítulo 5 abordamos o *problema das singularidades* com um pouco mais de detalhe, apresentamos a famosa *conjectura de Painlevé* e alguns desdobramentos relacionados.

Capítulo 2

O Teorema de Existência e Unicidade

Do ponto de vista matemático a primeira tarefa ao lidar com um problema de valores iniciais, tal como o problema de N-corpos, é a de saber se o problema admite solução e se ela é única. Ou seja, a primeira tarefa consiste em provar um teorema de existência e unicidade de soluções. Esse teorema é raramente apresentado em livros texto de física, talvez porque, como observou o físico e filósofo da ciência Mario Bunge, "para um físico ou engenheiro isso é como sair de um restaurante sem comer nada, mas tendo pago o couvert para ter o direito de ler o cardápio" [6]. Para um matemático, por outro lado, um tal resultado é como um certificado ou alvará garantindo que não se vai comer gato por lebre.

Metáforas a parte, o teorema clássico de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias (EDO's) não é tão difícil e envolve vários conceitos matemáticos interessantes, tais como espaços métricos, espaços de Banach, teoremas de ponto fixo, etc. Ademais, trata-se de um resultado crucial para compreender a noção de singularidade no problema de N-corpos, que abordaremos no capítulo final destas notas. Assim, neste capítulo vamos apresentar este teorema num formato suficiente para nossos propósitos (para mais detalhes pode-se consultar [15] ou [13]). Em uma primeira leitura pode-se pular este capítulo sendo que no capítulo 5 usaremos *diretamente* apenas o teorema 2.27.

Sucintamente, o teorema afirma que para o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde F é "suave" e tal que $|F(\mathbf{u})| \leq M$ numa vizinhança $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| \leq b$ da condição inicial $\mathbf{u}_0$, então *existe* uma *única* solução, ao menos num intervalo $|t - t_0| < \delta$, onde δ depende somente de b e M.

Este resultado, de natureza *local*, é uma versão do *teorema de Cauchy-Picard* que demonstraremos mais adiante. Para formulá-lo precisamos de algumas noções preliminares.

2.1 Espaços métricos e normados

Começamos com o conceito de espaço métrico, ou seja, um espaço munido de uma noção de distância.

Definição 2.1. *Um* espaço métrico *é um par* (X, ρ)*, onde* $X \neq \emptyset$ *é um conjunto qualquer, munido de uma aplicação* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$*, chamada* métrica*, satisfazendo:*

(a) para todo $x, y \in X$*,* $\rho(x, y) \geq 0$*, a igualdade valendo se, e só se,* $x = y$ *(*positividade*);*

*(b) para todo $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*simetria*);*

*(c) para todo $x, y, z \in X$, $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*desigualdade triangular*).*

Uma métrica num conjunto X define uma *topologia* em X da maneira usual, ou seja, em analogia com a topologia da reta estudada em cursos de introdução 'a análise. Podemos então lidar com a noção de *convergência* de seqüências de pontos de X, e portanto com *continuidade* de funções, etc. [1] Particularmente importante é o conceito de *completude*.

Definição 2.2. *Seja (X, ρ) um espaço métrico. Diz-se que a seqüência $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ é* de Cauchy *se, dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $m, n \geq N$, $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.*

O espaço é dito completo *se toda seqüência de de Cauchy é convergente.*

Exercício 2.3. *Mostre que toda seqüência convergente em um espaço métrico é de Cauchy neste espaço.*

Observação 2.4. *Assim, em um espaço métrico completo uma seqüência é convergente se, e somente se, é de Cauchy. Este é o chamado* critério de convergência de Cauchy.

O exemplo clássico de espaço métrico completo é a reta real $\mathbb{R}$ com a distância usual. Por outro lado, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com a mesma métrica, não é completo.

Dentre os espaços métricos destacamos a importante classe dos espaços vetoriais normados.

[1] De forma análoga 'a topologia na reta, diz-se que um subconjunto $G \subset X$ é *aberto* se, para cada ponto de $x_0 \in G$, existe uma *bola aberta* $B_b(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < b\}$, de raio $b > 0$ e centro x_0, tal que $B_b(x) \subset G$.

Definição 2.5. *Uma* espaço vetorial normado *é um par* $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, *onde* $\mathbb{V}$ *é um espaço vetorial (digamos, sobre os reais) munido de uma aplicação* $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to [0, +\infty[$, *tal que*

(i) para todo $v \in \mathbb{V}$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

(ii) para todo $v, w \in \mathbb{V}$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;

(iii) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathbb{V}$, $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.

Exercício 2.6. *Verifique que todo espaço vetorial normado é um espaço métrico com a métrica* $\rho(v, w) \equiv \|v - w\|$.

Um espaço vetorial normado completo (em relação a norma) chama-se *espaço de Banach*. Estes são espaços extremamente úteis e muito comuns em aplicações.

O protótipo de espaço de Banach é o $\mathbb{R}^n$ munido da norma euclideana usual: para $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. É conveniente em algumas situações trabalhar com outras normas tais como $|\mathbf{v}| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ ou $|\mathbf{v}| = \sum_{1 \leq i \leq n} |v_i|$.

Outros exemplos de importantes de espaços de Banach envolvem espaços de funções. Um exemplo surge naturalmente ao estudarmos o espaço das soluções do problema de valores iniciais que estamos analisando. Lembre que naquele contexto, estamos lidando com uma função vetorial $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em n variáveis reais, definida e contínua num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Como F associa a cada ponto de $\mathbf{u} \in \Omega$, um vetor, $F(\mathbf{u})$, diz-se que a F é um *campo vetorial* em Ω.

Definição 2.7. *Uma* solução *do problema (3.1) é uma função diferenciável* $\mathbf{u} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *definida num intervalo* I *(aberto, para fixar idéias) tal que para todo* $t \in I$*:*

(a) $\mathbf{u}(t) \in \Omega$*;*

(b) $\dot{\mathbf{u}}(t) = F(\mathbf{u}(t))$*, com* $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$*.*

Consideremos então o espaço vetorial $C(I)$ das funções $\mathbf{u} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *contínuas* e *limitadas* no intervalo aberto I. [2] Defina, para $\mathbf{u}(\cdot) \in C(I)$ a chamada "norma do sup":

$$\|\mathbf{u}\| = \sup_{t \in I} |\mathbf{u}(t)|.$$

O teorema seguinte diz o limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas é uma função contínua. Por esta razão a norma do sup também é chamada de "norma da convergência uniforme".

Teorema 2.8. $(C(I), \|\cdot\|)$ *é espaço de Banach.*

Exercício 2.9. *Demonstre o teorema acima.*

O ingrediente crucial na demonstração que faremos do teorema de Cauchy-Picard é o seguinte *teorema de ponto fixo*, um resultado surpreendentemente simples dado seu grande alcance. Precisamos do conceito de uma *contração* entre espaços métricos.

Definição 2.10. *Seja* (X, ρ) *um espaço métrico. Dizemos que uma aplicação* $\mathbf{\Phi} : X \to X$ *é uma* contração *se*

$$\rho(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda \rho(x, y),$$

para todo $x, y \in X$*, e uma certa constante* $0 < \lambda < 1$*.*

Exercício 2.11. *Mostre que toda contração é uma aplicação contínua.*

---

[2] Se o intervalo I fosse fechado e limitado, logo compacto, a função $\mathbf{u}(\cdot)$, sendo contínua, seria automáticamente limitada.

Teorema 2.12 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja (X, ρ) um espaço métrico completo e $\Phi : X \to X$ uma contração. Então Φ possui um único ponto fixo, ou seja, um ponto $p \in X$ tal que $\Phi(p) = p$.*

Prova: Quanto a unicidade, suponha que existam p e q tais que $\Phi(p) = p$ e $\Phi(q) = q$. Então,

$$\rho(p,q) = \rho(\Phi(p), \Phi(q)) \leq \lambda\rho(p,q),$$

o que implica (lembrando que $0 < \lambda < 1$) que $\rho(p,q) = 0$, donde $p = q$.

Quanto a existência, tome $x_0 \in X$ qualquer e defina a seqüência $\{x_n\}_{n\geq 1}$, construída por iteração partindo de x_0: ou seja $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

Afirmamos que esta seqüência é de Cauchy. De fato, note que para $n \geq 1$,

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(\Phi(x_n), \Phi(x_{n-1}) \leq \lambda\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Iterando, vemos que $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \rho(x_1, x_0)$, onde $a = \rho(x_1, x_0)$ é constante. Agora, pela desigualdade triangular, para $n, k \geq 1$,

$$\rho(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=1}^{k} \rho(x_{n+j-1}, x_{n+j}) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda^{n+j-1} a \leq \frac{a\lambda^n}{1-\lambda},$$

que vai a zero quando n tende a infinito, lembrando que $0 < \lambda < 1$.

Mas, como (X, ρ) é completo, existe $p \in X$ tal que $p = \lim_{n\to\infty} x_n$, e uma vez que Φ é contínua vem que

$$\Phi(p) = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

$\square$

2.2 O teorema fundamental de existência e unicidade

Sob a hipótese de que o campo vetorial F é função contínua pode-se provar que sempre *existe* uma solução para o problema de valores iniciais: isto segue do *teorema de Peano* [13]. Porém este resultado não garante que a solução é única, como ilustra o problema unidimensional seguinte:

$$\begin{cases} \dot{u} = 3u^{2/3} \\ \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

que admite as soluções $u_1(t) = t^3$ e $u_2(t) \equiv 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para assegurar a existência *e* unicidade de soluções é preciso impor alguma hipótese adicional sobre o campo vetorial F. Uma hipótese suficiente é a chamada *condição de Lipschitz.*

Definição 2.13. *Uma função $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde Ω é um aberto, é dita* Lipschitziana em Ω *se existe uma constante $K > 0$ (dita* constante de Lipschitz*) tal que para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em Ω,*

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

A função F é dita localmente Lipschitziana *em Ω se, para todo $\mathbf{x_0} \in \Omega$, a F restrita à bola $B_b(\mathbf{x_0})$ satisfaz a condição de Lipschitz (com uma constante de Lipschitz correspondente, que pode depender de $\mathbf{x_0}$).*

Mais adiante veremos que toda função “suave” (basta ser contínuamente diferenciável) é localmente Lipschitziana.

Para aplicar o teorema do ponto fixo de Banach para o problema de valores iniciais, usamos a seguinte exercício:

Exercício 2.14. *Mostre que* $\mathbf{u}(t)$*, para* $t \in I$ *é solução do problema de valores se, e somente se,* $\mathbf{u}(t)$ *é função contínua satisfazendo a equação integral,*

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} F(\mathbf{u}(s))ds, \tag{2.2}$$

para $t \in I$*.*

Em suma, resolver o problema de valores iniciais equivale a resolver esta equação integral.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de existência e unicidade para o problema de valores iniciais.

Teorema 2.15 (Teorema de Cauchy-Picard). *Seja* $F : B_b(\mathbf{u}_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *contínua e lipschitziana na bola* $B_b(\mathbf{u}_0)$*, com constante de Lipschitz* K*, e tal que* $|F(\mathbf{u})| \leq M$ *para* $\mathbf{u} \in \Omega$*. Então o problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

tem uma única solução no intervalo $I_\delta =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ *onde* $0 < \delta < \min\{b/M, 1/K\}$*.*

Prova: Considere $\mathbb{V} = C(I_\delta, B_b(\mathbf{u}_0))$ o espaço vetorial das funções contínuas $\mathbf{u} : I_\delta \to B_b(\mathbf{u}_0)$. Vimos que com a norma do sup o espaço $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach; em particular é um espaço métrico completo. A idéia da prova é construir uma contração adequada para poder aplicar o teorema do ponto fixo. A dica é o exercício 3.13.

Defina a aplicação Φ que associa a cada $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, a função $\Phi(\mathbf{u}) : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ onde, para $t \in I_\delta$,

$$\Phi(\mathbf{u})(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^{t} F(\mathbf{u}(s))ds.$$

Note que $\Phi(\mathbf{u})(\cdot)$ é função diferenciável, logo contínua, e para todo $t \in I_\delta$, temos

$$|\Phi(\mathbf{u})(t) - \mathbf{u}_0| \leq \int_{t_0}^{t} |F(\mathbf{u}(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq M\delta < b,$$

ou seja $\Phi(\mathbf{u})(t) \in B_b(\mathbf{u}_0)$. Logo,

$$\|\Phi(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_0\| = \sup_{t \in I_\delta} |\Phi(\mathbf{u})(t) - \mathbf{u}_0| < b,$$

ou seja $\Phi(\mathbf{u}) \in C(I_\delta, B_b(\mathbf{u}_0)) = \mathbb{V}$. Assim, Φ é uma aplicação de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$.

Ademais, se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{V}$, temos, para todo $t \in I_\delta$,

$$|\Phi(\mathbf{u}_1)(t) - \Phi(\mathbf{u}_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |F(\mathbf{u}_1(s)) - F(\mathbf{u}_2(s))|ds \leq K\delta\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|,$$

ou ainda

$$\|\Phi(\mathbf{u}_1) - \Phi(\mathbf{u}_2)\| \leq \lambda\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|,$$

com $0 < \lambda = K\delta < 1$.

Em outras palavras, $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é uma contração no espaço métrico completo $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$. Pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe um único elemento $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, ou seja, que satisfaz a equação integral vista acima. Finalmente, pelo exercício 3.12 o teorema está demonstrado. $\square$

Corolário 2.16. *Se o campo vetorial* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é localmente Lipschitz no aberto* Ω*, então o problema de valores iniciais tem uma única solução, ao menos num intervalo* $I =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$*, para* δ *suficientemente pequeno.*

Exercício 2.17. *Demonstre o corolário acima.*

O teorema fundamental de existência e unicidade é um resultado local e é natural perguntar-se se é possível prolongar ou extender a solução para um intervalo de tempo maior ou mesmo se há um *intervalo máximo de existência.*

Nessa direção o seguinte resultado é importante.

Proposição 2.18. *Seja* F *como no corolário 2.16. Suponha que* $\mathbf{u}_1(\cdot)$ *e* $\mathbf{u}_2(\cdot)$ *satisfazem a equação*

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = F(\mathbf{u}(t)),$$

nos intervalos abertos I_1 *e* I_2*, respectivamente. Se para* $t_0 \in I_1 \cap I_2$ *tivermos* $\mathbf{u}_1(t_0) = \mathbf{u}_2(t_0)$*, então para todo intervalo aberto* $I \subset I_1 \cap I_2$*, contendo* t_0*, tem-se* $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$*, para todo* $t \in I$*.*

Prova: Seja $I \subset I_1 \cap I_2$, contendo t_0. Pelo teorema de existência e unicidade, segue que existe δ suficientemente pequeno tal que para todo $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$ temos $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$. Seja J a união de todos estes intervalos, ou seja, J é o *maior* intervalo aberto contido em I e contendo t_0, no qual $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$. Então afirmamos que $J = I$. Pois, caso fosse $J \subsetneq I$, então $\bar{t} \in I$, onde $\bar{t}$ é um dos extremos (digamos, o direito) do intervalo J. Ora, por continuidade,

$$\mathbf{u}_1(\bar{t}) = \lim_{t \to \bar{t}} \mathbf{u}_1(t) = \lim_{t \to \bar{t}} \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_2(\bar{t}).$$

Mas então, aplicando novamente o teorema de existência e unicidade, vem que existe um intervalo $\bar{I} =]\bar{t}-\epsilon, \bar{t}+\epsilon[\subset I$ no qual $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$. Dessa forma temos que $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ para todo t no intervalo $J \cup \bar{I}$ que é estritamente maior que J, uma contradição. □

Temos agora o seguinte resultado sobre prolongamento ou extensão de soluções.

Teorema 2.19 (Soluções maximais). *Seja F como no corolário acima 2.16. Então, existe uma única* solução maximal *para o problema de valores iniciais. Ou seja, uma solução* $\mathbf{u}(\cdot)$ *definida num intervalo aberto J, dito* intervalo maximal*, de forma que se $\mathbf{w}(\cdot)$ é outra solução do mesmo problema de valores iniciais no intervalo I, então $I \subset J$ e para todo $t \in I$ temos $\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t)$.*

Prova: Pelo teorema de Cauchy-Picard, existe uma única solução do problema de valores iniciais em um intervalo aberto I contendo t_0; seja J a união de todos estes intervalos. Considere a função $\mathbf{u}(\cdot)$ em J tal que para $t \in I$, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t)$, onde $\mathbf{w}(\cdot)$ é a única solução em I. Então, $\mathbf{u}(\cdot)$ é bem definida já que, pelo lema anterior, as soluções em dois intervalos quaisquer I_1, I_2 coincidem em $I_1 \cap I_2$. Como todo $t \in J$ está em algum I, segue que $\mathbf{u}(\cdot)$ é a única solução do problema de valores iniciais em J, logo a solução maximal. □

Quando o intervalo maximal não é toda a reta, digamos o intervalo $]-\infty, t^*[$ com $t^* < \infty$, então a solução não pode ser prolongada além deste intervalo e diz-se que ela possui uma *singularidade* em $t = t^*$. [3]

---

[3]Não confundir com a noção de *ponto singular* do campo vetorial F, que é um ponto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ tal que $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Exemplo 1. *Considere o problema*

$$\begin{cases} \dot{u} = u^2 \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

que por integração simples tem como solução $u(t) = 1/1-t$ *para* $t \in]-\infty, 1[$*, sendo este último seu intervalo máximo de existência; ocorre uma singularidade em* $t = 1$*. Note que* $\lim_{t \to 1-} u(t) = +\infty$*.*

Exercício 2.20. *Ache a singularidade da solução do problema*

$$\begin{cases} \dot{u} = -1/2u \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

O teorema seguinte descreve a situação geral:

Teorema 2.21. *Seja* F *um campo vetorial como no corolário 2.16. Suponha que a solução* $\mathbf{u}(t)$ *do problema de valores iniciais correspondente tenha uma singularidade em* $t = t^*$*. Então, quando* t *tende a* t^**, ou* $\mathbf{u}(t)$ *tende para a fronteira de* Ω *ou* $\|\mathbf{u}(t)\| \to +\infty$ *(ou ambas as coisas).*

Como veremos no capítulo 5 um teorema de caracterização das singularidades para o problema de N-corpos (ver teorema 5.2), omitimos a demonstração do teorema acima (ver [13]).

2.3 Suave é Lipschitz

É muito comum o caso em que o campo vetorial do problema de valores iniciais é “suave”. Esse é o caso para o problema de N-corpos. Gostaríamos de saber se o teorema de existência e unicidade se aplica nesta situação. A resposta é afirmativa pois tais campos "suaves" são necessariamente localmente Lipschitzianos.

Lembremos algumas noções de cálculo diferencial em várias variáveis (ver, por exemplo [19]).

Definição 2.22. *Uma função vetorial* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, no aberto* Ω*, é* diferenciável *no ponto* $\mathbf{x}_0$ *se existe uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\lim_{|\mathbf{h}|\to 0} \frac{|F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

A transformação linear T é chamada *a derivada* de F no ponto $\mathbf{x}_0$, denotada por $DF(\mathbf{x}_0)$. A matriz desta transformação, com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, tem como componentes as derivadas parciais:

$$[T]_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Assim, com certo abuso de linguagem, a ação de T sobre um vetor coluna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ fica,

$$DF(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j.$$

Toda transformação linear T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ tem a seguinte propriedade : existe uma constante $A > 0$ tal que para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $|T(\mathbf{v})| \leq A|\mathbf{v}|$.

Exercício 2.23. *Verifique esta afirmação tomando* $A = (\sum_{i,j}^{N} t_{ij}^2)^{1/2}$ *(lembre que* $[T(\mathbf{v})]_i = \sum_{i=1}^{N} t_{ij} v_j$ *e use a desigualdade de Cauchy-Schwarz).*

Assim pode-se definir a norma de T por

$$\|T\| = \max_{|\mathbf{v}|\leq 1} |T(\mathbf{v})|,$$

e segue que $|T(\mathbf{v})| \leq \|T\||\mathbf{v}\|$.

Exercício 2.24. *Prove que o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é um espaço de Banach.*

No caso de $T = DF(\mathbf{x})$ a norma $\|DF(\mathbf{x})\|$ depende, é claro, de $\mathbf{x}$.

Diz-se que F é de *classe* C^1 no aberto Ω se todas as derivadas parciais $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\cdot)$ existem e são contínuas em Ω. Nesse caso escreve-se $F \in C^1(\Omega)$. [4] De forma análoga se define funções de classe C^k, $k \geq 2$ (e classe C^∞, significando ser de classe C^k para todo $k \geq 1$).

Se $F \in C^1(\Omega)$, então usando a regra da cadeia para a função composta $\varphi(t) = F(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ não é difícil verificar o "teorema fundamental do cálculo" na forma:

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 DF(\mathbf{x} + t\mathbf{h})(\mathbf{h})\, dt.$$

Pode-se também provar o seguinte critério de diferenciabilidade: se $F \in C^1(\Omega)$, então F é diferenciável em Ω (ver [19]).

Estamos agora em condições de provar o seguinte fato.

Proposição 2.25. *Considere um campo vetorial $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido no aberto Ω. Se $F \in C^1(\Omega)$, então F é localmente Lipschitz em Ω.*

Prova: Sendo Ω aberto então, para cada $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, existe uma bola aberta de centro $\mathbf{x}_0$ e raio ϵ contida em Ω. Considere então a bola fechada W, com mesmo centro e com

[4] Isto equivale a dizer que é contínua a aplicação que associa a cada $\mathbf{x} \in \Omega$ o operador linear $DF(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, sendo este último o espaço das transformações lineares, concebido como o espaço das matrizes m por n.

raio $\epsilon/2$. Como $F \in C^1(\Omega)$, a função $\mathbf{x} \to \|DF(\mathbf{x})\|$ é uma função real contínua no compacto W; logo existe $K = \max_{\mathbf{x}\in W} \|DF(\mathbf{x})\|$.

Tome $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ em W e seja $\mathbf{h} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$. Então, para $0 \leq t \leq 1$ temos $\mathbf{x} + t\mathbf{h} \in W$ (em outras palavras, W é um conjunto convexo). Considere a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(t) = F(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$. Como observado anteriormente, temos

$$F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{x}) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 DF(\mathbf{x} + t\mathbf{h})(\mathbf{h})\, dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{x})| &\leq \int_0^1 |DF(\mathbf{x} + t\mathbf{h})(\mathbf{h})|dt \\ &\leq \int_0^1 \|DF(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\|.|\mathbf{h}|dt \leq K|\mathbf{h}| = K|\mathbf{z} - \mathbf{x}|, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

Observação 2.26. *É possível mostrar que se o campo vetorial é função “suave”, digamos de classe C^k (ou mesmo analítica), então a solução do problema de valores iniciais “herda” esta suavidade sendo função de de classe C^k (respectivamente, analítica).*

2.4 Existência e unicidade no problema de N-corpos

Finalmente podemos enunciar o teorema fundamental de existência e unicidade de soluções para o problema de N-corpos.

Teorema 2.27. *Considere o problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} m_j\ddot{\mathbf{r}}_j = \nabla_{\mathbf{r}_j}U(\mathbf{x}) \\ \\ (\mathbf{r}_1(t_0),\ldots,\mathbf{r}_N(t_0),\mathbf{v}_1(t_0),\ldots,\mathbf{v}_N(t_0)) \in (\mathbb{R}^{3N}/\Delta)\times\mathbb{R}^{3N}. \end{cases}$$

Prova: Por simplicidade, vamos tomar a constante de gravitação $G = 1$. Seja $D > 0$ tal que $\min_{j\neq k} r_{jk}(t_0) \geq D/2$; então, o problema tem uma única solução, ao menos em um intervalo $|t-t_0| < \delta$, onde δ depende apenas de D, das massas e da energia total.

Consideramos o problema equivalente de 1a. ordem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathsf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in (\mathbb{R}^{3N}/\Delta)\times\mathbb{R}^{3N}, \end{cases}$$

onde

$$\mathsf{f}(\mathbf{y}) \equiv (\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_N,\frac{1}{m_1}\nabla_{\mathbf{r}_1}U(\mathbf{x}),\ldots,\frac{1}{m_N}\nabla_{\mathbf{r}_N}U(\mathbf{x})),$$

e $\mathbf{y} = (\mathbf{x},\mathbf{v})$. A idéia então é checar que para $|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0| < b$ tem-se $|\mathsf{f}(\mathbf{y})| \leq M$ e aplicar o teorema de existência e unicidade, uma vez que $\mathsf{f}(\cdot)$ é suave (analítica).

Começamos notando que, como $r_{jk}(t_0) > 0$ para todo $j \neq k$, existe uma constante $D > 0$ tal que a separação mínima entre as partículas no instante inicial satisfaz

$$r_{\min}(t_0) \equiv \min_{j\neq k} r_{jk}(t_0) > D/2.$$

Suponha então que $|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0| < D/8$. Como $|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0| = \sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 + |\mathbf{v}-\mathbf{v}_0|^2}$, segue que $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| < D/8$ e $|\mathbf{v}-\mathbf{v}_0| < D/8$.

Lembrando que $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j(t_0)\|^2}$, segue que para $j = 1, \ldots, N$ temos $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j(t_0)\| < D/8$. Afirmamos que para $j \neq k$,

$$r_{jk} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\| \geq D/4.$$

De fato, isto segue da desigualdade triangular:

$$D/2 \leq r_{jk}(t_0) = \|\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_k(t_0)\| \leq \\ \|\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_j\| + \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\| + \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k(t_0)\|,$$

logo,

$$\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\| \geq D/2 - \|\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_j\| - \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k(t_0)\| \\ \geq D/2 - D/8 - D/8 = D/4.$$

Portanto, temos que $\min_{j\neq k} r_{jk} \geq D/4$, logo $1/r_{\min} \leq 4/D$ e com isso vamos obter uma estimativa para $\nabla_{\mathbf{r}_k} U(\mathbf{x})$. Mais precisamente, como

$$\frac{1}{m_k}\nabla_{\mathbf{r}_k} U(\mathbf{x}) = \sum_{j\neq k} \frac{m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|^3},$$

segue que, para $k = 1, \ldots, N$,

$$\frac{1}{m_k}\|\nabla_{\mathbf{r}_k} U(\mathbf{x})\| \leq \sum_{j\neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^2} \leq c_1 \frac{16}{D^2},$$

onde a constante c_1 depende apenas das massas.

Agora,

$$\frac{1}{2} m_k \|\mathbf{v}_k\|^2 \leq T_{t_0} = U_{t_0} + h,$$

onde h é a energia total do sistema em t_0. Mas de $r_{\min}(t_0) > D/2$, vem que $1/r_{\min}(t_0) < 2/D$ e obtemos a seguinte estimativa:

$$U_{t_0} \leq \frac{1}{r_{\min}(t_0)} \sum_{1\leq j<k\leq N} m_j m_k \leq A,$$

onde a constante A depende apenas de D e das massas. Assim, para $k = 1, \dots, N$,

$$\|\mathbf{v}_k\|^2 \leq \frac{2}{m_k}\sqrt{A+h}.$$

Como $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_N(t_0))$, segue que

$$|\mathbf{v}(t_0)| \leq c_2\sqrt{A+h},$$

onde a constante c_2 só depende das massas. Pela desigualdade triangular,

$$|\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0| + |\mathbf{v}(t_0)| < \frac{D}{8} + c_2\sqrt{A+h} \equiv c_3.$$

Em suma, concluímos que se $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < D/8$, então

$$|\mathsf{f}(\mathbf{y})| \leq \sqrt{c_3^2 + Nc_1(16/D^2)} \equiv M,$$

onde M só depende de D, h e das massas. Aplicando o teorema 3.15 a prova está terminada. □

Observação 2.28. *É claro que podemos aplicar o teorema sobre a existência de soluções maximais; segue também que a solução do problema de N-corpos é função analítica do tempo uma vez que o campo vetorial $\mathsf{f}(\cdot)$ é função analítica.*

2.4.1 O demônio de Laplace

Já mencionamos que o triunfo da síntese Newtoniana serviu de base para a "visão mecanicista" do Universo. Nesta cosmovisão tudo poderia ser explicado e predito, em princípio, pelo movimento dos corpos materiais em interação: de acordo com o teorema de existência e unicidade toda a evolução (futura e passada) do sistema a partir de certo instante está completamente determinada, uma vez que seja dado o o estado (ou seja, posições e velocidades) do sistema naquele instante.

Essa idéia foi popularizada por Laplace através de seu "demônio", numa famosa passagem de seu livro *Essay philosophique sur la probabilités*, que reproduzimos:

> Podemos considerar o estado presente do universo como o efeito de seu passado e a causa de seu futuro. Um intelecto que em um dado instante conhecesse todas as forças que animam a natureza assim como as posições mútuas dos entes que a compõe, se este intelecto fosse suficientemente vasto para submeter estes dados a análise, poderia condensar numa única fórmula o movimento dos maiores corpos do universo e aquele do mais leve átomo; para um tal intelecto nada poderia ser incerto e o futuro assim como o passado estariam presentes diante de seus olhos.

Isto, porém, se revelou por demais ingênuo e simplista. Em primeiro lugar, desde o início havia um questionamento sobre a "natureza" da gravitação no esquema Newtoniano. Particularmente havia a antiga crítica dos cartesianos sobre "ação a distância": a capacidade, que consideravam quase "mágica", das forças gravitacinais de agirem instantâneamente e sobre distâncias arbitrárias.

Descartes propunha uma visão alternativa (ainda que totalmente mecânica), supostamente mais intuitiva: a chamada "teoria dos vórtices" segundo a qual as ações entre os corpos se fazem sempre por um mecanismo de contato através de um meio hipotético, chamado "éter". A este respeito, o matemático René Thom comenta que "Descartes, com os seus vórtices e seus átomos enganchados, explicava tudo e não calculava coisa alguma; Newton, com a lei da gravitação em $1/r^2$, calculava tudo e não explicava nada " [28]. Na verdade comete-se aqui um equívoco com relação a noção de "explicação": a teoria de Descartes nunca se mostrou a altura e a realidade é que não explicava nada e tampouco calculava, enquanto que a teoria Newtoniana, com sua clareza conceitual e seus cálculos precisos explica muito, *mas não tudo!* E deve-se notar que na mecânica clássica, organizada como um sistema hipotético-dedutivo, o conceito de "força" é um conceito primitivo, não definido. Sobre a natureza "última" da gravitação o próprio Newton era reticente e a questão foi retomada no ínicio do século XX no contexto da Teoria Geral da Relatividade de Einstein.

Por outro lado, a limitação do mecanicismo ficou ainda mais clara com ao surgimento de novas áreas da Física, como a Termodinâmica e o Eletromagnetismo, cuja relação com a Mecânica era uma questão delicada e profunda. Como é sabido, ao final do século XIX as investigações sobre a compatibilidade entre essas disciplinas levou eventualmente à formulação da Mecânica Quântica e da Teoria da Relatividade.

Finalmente, no âmbito da própria mecânica Newtoniana, a visão Laplaciana se revelou simplista. De fato, como veremos nos próximos capítulos, a existência de singularidades de soluções do problema de N-corpos mostra que nem sempre as soluções existem para $-\infty < t < +\infty$; logo, nem sempre é possível prolongar soluções para todo o passado e todo o futuro.

Além disso, no final do século XIX, as investigações pioneiras de Poincaré em Mecânica Celeste revelaram que o problema de N-corpos, para $N \geq 3$, é muito mais rico e complexo do que se imaginava. Em particular, seu trabalho revelou a existência de soluções com "sensibilidade com relações iniciais", ou seja, duas soluções que partem de condições iniciais muito próximas podem ter órbitas que se separaram exponencialmente rápido. Como a medição de posições e velocidades iniciais incluem pequenos erros observacionais inevitáveis, pode ser o caso de que tais erros sejam magnificados rapidamente o que tenderia a destruir a predizibilidade a respeito do comportamento das órbitas ao longo prazo. Essa descoberta de Poincaré ressurgiu em finais da década de 60 do século vinte (em parte devido ao uso intensificado de simulações numéricas) desembocando, nas décadas seguintes, numa explosão da pesquisa sobre a chamada dinâmica "caótica".

Capítulo 3

Leis de Conservação

Munidos do teorema de existência e unicidade podemos passar ao estudo de uma das noções cruciais na análise do problema de N-corpos: as *integrais*, constantes de movimento ou ainda "integrais primeiras". São também chamadas *Leis de Conservação*, pois usualmente estão associadas a certas grandezas de significado físico fundamental e que permancem constantes ao longo do tempo.

No que se segue supomos que $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ é a solução do problema de N-corpos com dadas condições iniciais.

Definição 3.1. *Uma* integral de movimento *é uma função real diferenciável* $\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ *tal que*

$$\dot{\mathcal{I}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) = 0,$$

ou seja $\mathcal{I}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) = C$*, onde a constante* C *é determinada pelas condições iniciais.*

Observação 3.2. *Uma integral de movimento é portanto constante* ao longo da solução. *É claro que funções identi-*

camente constantes são integrais de movimento, ditas triviais; o interesse está nas integrais não-triviais.

Diz-se que integrais $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ são independentes *se os gradientes $\nabla_{\mathbf{x},\mathbf{v},t}\mathcal{I}_1, \ldots, \nabla_{\mathbf{x},\mathbf{v},t}\mathcal{I}_n$, são vetores linearmente independentes.*

A existência de integrais de movimento é muito importante pois fornece informações valiosas sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se a função $\mathcal{I}(\mathbf{y})$ é uma integral, então sabemos que a solução do problema de valores iniciais está restrita a uma superfície de nível desta função, reduzindo de uma unidade a "dimensão" do problema. Se pensava que conhecendo um número suficiente de integrais se poderia então "resolver" ou "integrar" completamente as equações de movimento. Infelizmente as coisa são mais complicadas, como discutiremos na seção 3.3. Por ora, vejamos as integrais de movimento clássicas do problema de N-corpos.

3.1 As integrais de movimento clássicas

As dez integrais de movimento clássicas do problema de N-corpos são:

(1) a energia total H;

(2) as componentes do momento linear total $\mathbf{P}$;

(3) as componentes do centro de massa do sistema $\mathbf{R}_{cm}$;

(4) as componentes do momento angular total $\mathbf{L}$,

e ligadas, respectivamente, às leis de conservação da energia, do momento linear, do movimento do centro de massa e do momento angular.

Começamos com a energia. Lembramos que a *energia cinética total* do sistema de partículas é definida por

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^2.$$

Temos então que, ao longo da solução,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^{N} \nabla_{\mathbf{r}_j} U \cdot \dot{\mathbf{r}}_j = \frac{dU}{dt},$$

onde a penúltima identidade segue das equações de movimento e a última segue da regra da cadeia aplicada a $U(\mathbf{x}(t))$. Obtemos assim a *Lei da Conservação da Energia*,

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

isto é, $H(\mathbf{y}(t)) = h$, uma constante ao longo da solução.

A seguir, definimos o *momento linear total do sistema*:

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j,$$

que é simplesmente a soma dos momentos lineares das partículas individuais.

Para deduzir sua lei de conservação, soma-se os termos nos dois lados da equação de movimento para obter:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1, k\neq j}^{N} \frac{G m_j m_k}{r_{kj}^3}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) = \mathbf{0},$$

uma vez que cada termo é cancelado por um outro com sinal oposto. Segue que que

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \frac{d}{dt}(\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = \frac{d}{dt}(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \tag{3.1}$$

que é a *Lei de Conservação do Momento Linear*. Temos então que

$$\mathbf{P} = \mathbf{a},$$

para um vetor constante $\mathbf{a}$. Note que temos três integrais de movimento, correspondendo a cada componente do vetor $\mathbf{P}$.

Agora, como

$$\mathbf{P} = \frac{d}{dt}(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j),$$

segue que:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \tag{3.2}$$

para um vetor constante $\mathbf{b}$, o que resulta em mais três integrais.

A equação 3.2 tem a seguinte interpretação. Considere a massa total do sistema, $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$; então o vetor posição do *centro de massa* (CM) do sistema é definido por

$$\mathbf{R}_{cm} \equiv \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j,$$

que é a média ponderada das posições das partículas onde os “pesos” são as respectivas massas. Do que vimos acima decorre que $\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{0}$ e podemos reescreve a equação acima como

$$\mathbf{R}_{cm}(t) = \mathbf{V}_{cm}t + \mathbf{R}_0, \tag{3.3}$$

onde $\mathbf{V}_{cm} = \mathbf{P}/M = \mathbf{a}/M$ é a velocidade do CM e $\mathbf{R}_0 = \mathbf{b}/M$ sua posição inicial. Esta equação diz que, não importa quão complicado é o movimento das partículas, o CM do sistema tem movimento retilíneo e uniforme.

A equação 3.2 também equivale a chamada *Lei de Conservação para o Movimento do Centro de Massa*,

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{0},$$

onde

$$\mathbf{G} \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j - t\mathbf{P}.$$

Uma vez que o CM tem movimento retilíneo e uniforme, então o referencial do CM é um referencial inercial, e portanto no qual valem as Leis de Newton. A propósito, no caso do sistema solar 99,9% da massa se concentra no Sol de forma que com boa aproximação pode-se tomar o centro do Sol como o CM do sistema (sistema heliocêntrico).

Considerando as posições das partículas *em relação ao CM*,

$$\mathbf{r}_j{}' = \mathbf{r}_j - \mathbf{R}_{cm},$$

então, como $\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{0}$, segue que as equações de movimento têm a mesma forma quando escritas em termos dos vetores $\mathbf{r'}_j$ quanto em termos dos vetores $\mathbf{r}_j$ (verifique!). Sem perda de generalidade vamos supor de agora em diante que o centro de massa está fixo na origem: $\mathbf{R}_{cm} = \mathbf{0}$.

Assim, as leis de conservação do momento linear e do movimento do CM ficamvista até aqui ficam:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j = \mathbf{0} \\ \\ \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \end{cases}$$

totalizando 6 integrais de movimento independentes.

Finalmente, definimos o *momento angular total* do sistema de partículas, em relação a origem (no caso, o CM) por:

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \wedge \dot{\mathbf{r}}_j, \tag{3.4}$$

que é uma medida da "rotação" do sistema (em relação a origem).

Fazendo o produto vetorial pelo vetor $\mathbf{r}_j$ nas equações de movimento, e somando, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \wedge \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{G m_j m_k}{r_{kj}^3} \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{r}_k = \mathbf{0},$$

onde usamos $\mathbf{r}_j \wedge \mathbf{r}_j = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r}_j \wedge \mathbf{r}_k = -\mathbf{r}_k \wedge \mathbf{r}_j$. Comparando com a equação 3.4, obtemos a *Lei de Conservação do Momento Angular*,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \wedge \dot{\mathbf{r}}_j\right) = \mathbf{0}.$$

Portanto, $\mathbf{L} = \mathbf{c}$, para um vetor constante $\mathbf{c}$, 3 integrais de movimento adicionais.

Em resumo obtivemos as dez integrais de movimento clássicas. Observe que todas são funções algébricas das posições, velocidades e do tempo.

3.2 Duas aplicações

As Leis de Conservação têm muitas aplicações no estudo do problema de N-corpos. Nesta seção, veremos dois resultados relativamente simples e que serão utilizados em toda discussão subseqüente: *a identidade de Lagrange-Jacobi* e *a desigualdade de Sundman.*

Estes resultados são expressos através de uma grandeza muito útil chamada *momento de inércia* do sistema de partículas, definido por:

$$I \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j^2,$$

que, grosso modo, é uma medida da distribuição espacial das massas do sistema. [1]

Lema 3.3 (Identidade de Lagrange-Jacobi). *No problema de N-corpos temos*

$$\ddot{I} = 2T - U = T + h = U + 2h.$$

Para demonstrar este lema precisamos do resultado do exercício seguinte.

Exercício 3.4. *Uma função real f em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é dita homogênea de grau p se $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tais que $\lambda \mathbf{x} \in U$. Prove o* teorema

[1] Na literatura de Física e Engenharia o momento de inércia é definido sem o fator 1/2.

de Euler*: se f é homogênea e diferenciável em U, então $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x})$.*

Prova do Lema: Basta fazer o cálculo explícitamente. Temos

$$\dot{I} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{v}_j \Rightarrow \ddot{I} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^2 + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j$$
$$= 2T + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \cdot \nabla_{\mathbf{r}_j} U = 2T - U,$$

onde na última identidade usamos que

$$-U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \cdot \nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{x}),$$

que segue do fato da energia potencial U ser uma função homogênea de grau -1 e da aplicação do teorema de Euler (ver exercício anterior). As duas últimas igualdades no enunciado seguem imediatamente da conservação da energia. $\square$

O fato do potencial ser sempre positivo e ser função homogênea de grau -1 tem uma interessante conseqüência com relação ao "equilíbrio" de sistemas de N-corpos:

Exercício 3.5. *Mostre que não há nenhuma configuração de N corpos sob interação gravitacional em que* todas *as partículas permaneçam em repouso.*

Lema 3.6 (Desigualdade de Sundman). *Considere o momento angular total do sistema, $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{v}_j$ e seja*

$c = \|\mathbf{c}\|$. *Então,*

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h).$$

Demonstração:

Trata-se de uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz da álgebra linear; temos:

$$\begin{aligned}
c \leq \sum_{j=1}^{N} m_j \|\mathbf{r}_j \wedge \mathbf{v}_j\| \leq \sum_{j=1}^{N} m_j \|\mathbf{r}_j\| \|\mathbf{v}_j\| = \\
\sum_{j=1}^{N} (\sqrt{m_j}\|\mathbf{r}_j\|)(\sqrt{m_j}\|\mathbf{v}_j\|) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j^2} \\
= \sqrt{2I}\sqrt{2T} = \sqrt{4IT},
\end{aligned}$$

e o resultado segue da identidade de Lagrange-Jacobi na forma $T = \ddot{I} - h$. □

3.3 Digressão sobre integrabilidade

Até os finais do século XIX as integrais de movimento eram de interesse primordial, consideradas como uma espécie de "santo graal" da teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO). A idéia é que cada integral permitiria *reduzir* a dimensão do sistema de uma unidade de forma que, de posse de um número suficiente de integrais independentes, seria possível resolver qualquer sistema de forma "mais ou menos explícita" [22]. Esta é a idéia do chamado "método das quadraturas" para achar a solução através de um número finito de operações "elementares" e de integrações de funções "conhecidas".

O procedimento era concebido da seguinte forma. Considere o sistema de EDO's autônomo de dimensão n:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, \dots, y_n), \end{cases} \tag{3.5}$$

com certas condições iniciais. Suponha que exista uma integral de movimento, $\mathcal{I}(y_1, \dots, y_n)$, de forma que ao longo da solução $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ tem-se

$$\mathcal{I}(y_1, \dots, y_n) = C.$$

A solução do sistema estaria então restrita à superfície de nível C de $\mathcal{I}$, de dimensão $n-1$, reduzindo portanto o problema de uma dimensão.

Mais precisamente, isolando na equação acima uma das variáveis, digamos y_1, teríamos

$$y_1 = g(y_2, \dots, y_n). \tag{3.6}$$

Substituindo na primeira equação do sistema 3.5, obtemos:

$$\dot{y}_1 = f_1(g(y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n) \equiv \varphi_1(y_2, \dots, y_n). \tag{3.7}$$

As equações restantes ficam,

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = f_2(g(y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n) = \varphi_2(y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(g(y_2, \dots, y_n), y_2, \dots, y_n) = \varphi_n(y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Resolvendo este novo sistema nas variáveis $y_2, \dots, y_n$, e substituindo a solução $(y_2(t), \dots, y_n(t))$ na equação 3.7 restaria

$$\dot{y}_1(t) = \psi(t) \equiv \varphi_1(y_2(t), \dots, y_n(t)),$$

que é "resolvida" por uma integração usual.

Em suma, a idéia do método é que, conhecendo $n-1$ integrais independentes e aplicando sucessivamente o procedimento descrito acima, o sistema de EDO's poderia ser "completamente integrado".

Claro está que a coisa não é assim tão simples e é preciso observar as várias hipóteses envolvidas. Por exemplo, dada uma integral de movimento, temos de supor que é possível isolar uma das variáveis em termos das outras, talvez recorrendo ao Teorema da Função Implícita, supondo suas hipóteses satisfeitas. Por sua vez, este teorema é puramente local e existencial, não fornecendo usualmente uma "fórmula explícita". Uma saída aqui seria a de buscar integrais de movimento que fossem funções "simples", digamos *algébricas* nas variáveis $y_1, \ldots, y_n$. [2]

Entretanto, sendo preciso com o que se entende por "operações elementares" sobre funções (digamos, operações algébricas e inversões) e por integrações de funções "elementares", é é possível (sob certas hipóteses adicionais envolvendo teoria de grupos), justificar o método das quadraturas: trata-se de um teorema devido a Sophus Lie (ver [3]). Mas, daí a dizer que se vai obter desta maneira uma "fórmula fechada" ou "explícita" para a solução, é uma outra história!

De toda maneira, o método depende da existência de integrais de movimento não-triviais. Um teorema clássico de EDO's, o chamado *teorema de retificação*, garante que todo sistema n-dimensional "suave" possui $n-1$-integrais independentes, definidas *localmente* numa vizinhança de cada ponto $(y_1, \ldots, y_n)$ no qual, para algum $i = 1, \ldots, n$, tenha-

[2] Mas mesmo funções algébricas, a menos de casos muito simples, só são definidas implícitamente.

se $f_i(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ (ver [1]). Porém, não há grande interesse em integrais definidas apenas localmente e sim globalmente numa dada região.

Com relação problema de N-corpos própriamente dito, tem-se um sistema de EDO's $6N$-dimensional. As 10 integrais clássicas (já conhecidas por Lagrange em 1772) permitiriam reduzir a dimensão do problema a $6N-10$. Lagrange observou (no contexto do problema de três corpos) que era possível reduzir em mais uma dimensão usando uma das coordenadas de posição/velocidade como parâmetro no lugar o tempo ("eliminação do tempo"). [3]

O problema de dois corpos é integrável por quadraturas e são conhecidos os tipos de trajetórias possíveis: são as seções cônicas (elipses, hipérboles ou parábolas, dependendo das condições iniciais, ver [5]). Ainda assim, *não* é verdade que exista uma "fórmula explícita", em termos de funções "elementares", quw forneça a posição das partículas em função do tempo: o problema implica resolver uma equação transcendente, a chamada *equação de Kepler*, que admite, porém, soluções em séries (ver [12] e [2]).

No caso de 3 corpos, as 10 integrais clássicas reduzem o problema de 18 para 8 dimensões. A busca por novas integrais primeiras continuou por várias décadas até que em 1887 Heinrich Bruns publicou um resultado afirmando que no problema de N-corpos não existem integrais primeiras (independentes) além das 10 integrais clássicas e que sejam funções algébricas das posições, velocidades e do tempo. [4]

---

[3] Em 1843 Jacobi mostrou que, explorando uma certa simetria do problema, é possível reduzir mais uma dimensão ("eliminação dos nodos"). No total o problema de N corpos pode ser reduzido de $6N$ para $6N-12$ dimensões.

[4] A versão original do teorema, assim como várias generalizações, continham erros que só recentemente foram eliminados. [10]

Este resultado mostra que o problema de N corpos não é integrável *pelo método das quadraturas*. Por outro lado, isto não quer dizer que não existe uma solução "exata", por exemplo, através de séries.

E de fato, em 1909 o astrônomo finlandês Karl Sundman achou tal solução geral para o problema de três corpos em termos de uma série uniformemente convergente em potências de $t^{2/3}$, válida para todo tempo t. Note que não se trata de um solução aproximada, tal como em teoria de perturbações (utilizada já há bastante tempo em mecânica celeste). Entretanto, tal solução exata, apesar de conceitualmente importante, é de certa forma inútil para extrair informações interessantes, digamos de caráter qualitativo, sobre o comportamento do sistema. E também do ponto de vista do cálculo numérico é um total desastre devido ao fato que a velocidade de convergência da série ser absurdamente lenta: estima-se que para atingir precisão usual em astronomia de posição seria preciso somar da ordem de $10^{8.000.000}$ de termos!

Assim, chegamos a curiosa conclusão de que nem sempre uma solução "explícita" é interessante ou informativa para a compreensão de um sistema dinâmico. Isto está em linha com aquela transição revolucionária que ocorreu na Matemática ao final do século XIX, que vai de uma visão *quantitativa* para uma *qualitativa*. Enquanto a primeira tem como foco a busca de soluções "fechadas" e/ou cálculo "explícito", a segunda se preocupa mais com o estudo de famílias de soluções (ou mesmo de famílias de sistemas) e de suas propriedades "típicas". Este é o espírito da obra monumental de Poincaré, Lyapunov e outros.

Note-se que entre as conseqüências desta reavaliação da noção de "integrabilidade" está a retomada da busca de soluções particulares do problema de N-corpos, assim como o estudo de casos especiais, usualmente contendo certas simetrias ou simplificações adicionais que facilitam a análise. A propósito, muito recentemente foram descobertas novas soluções surpreendentes do problema de N-corpos, as chamadas *coreografias*, nas quais as partículas "se perseguem" ao longo de uma curva fechada, por exemplo numa curva em forma de "oito" no problema de 3-corpos (para uma introdução, ver [21]).

Capítulo 4

O Teorema de Sundman-Weierstrass

No final do capítulo precedente, mencionamos que Sundman demonstrou a existência de soluções exatas para o problema de 3-corpos por meio de uma série de potências uniformemente convergente e para todo instante de tempo. A dificuldade fundamental da demonstração deste teorema é a possibilidade de ocorrência de *singularidades* que são "obstruções" ao prolongamento de soluções para além de certo valor do parâmetro temporal.

Nessa altura já era conhecido que no caso de três corpos as únicas singularidades possíveis são as *colisões*, um resultado demonstrado por Painlevé em 1895 e cuja bela demonstração veremos no capítulo seguinte. Assim, podem ocorrer colisões binárias ou ternárias, sendo que esta última possibilidade corresponde ao chamado *colapso total* do sistema.

Sundman provou inicialmente que as colisões binárias são de certa forma "removíveis": através de uma mudança de variáveis adequada é possível estender a solução para além do instante deste tipo de colisão. [1]. Esta *regularização* de singularidades é uma técnica extremamente importante e de uso corrente em Mecânica Celeste e aplicações (ver, por exemplo, [4]).

Infelizmente a regularização não funciona para colisões ternárias, sendo então necessário evitar condições iniciais que levem a elas. Sundman provou então o seu *teorema do colapso total* que diz que se o momento angular total do sistema é não-nulo, então não ocorre colisão tripla. Deste modo, a solução exata do problema de 3-corpos que ele obteve é válida exceto para condições iniciais que satisfazem a condição $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ora, pode-se mostrar que o conjunto das condições iniciais que satisfazem esta condição é "pequeno" ou "atípico", no sentido de que tem volume zero no espaço de fase. [2] Em suma, a solução de Sundman existe para condições iniciais "típicas".

O teorema do colapso total ou *teorema de Sundman-Weierstrass* se generaliza para o caso geral de N-corpos, como demonstramos neste capítulo. Precisamos de algumas noções e resultados preliminares.

4.1 Colisões e colapso total

Considere o vetor $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t))$ que fornece as posições das partículas correspondentes a uma solução do problema de N corpos.

Definição 4.1. *Diz-se que ocorre uma* colisão *no instante*

[1] Tudo se passa como se as partículas sofressem um choque elástico no instante de uma colisão binária e então continuassem o movimento (ver [25])

[2] Mais precisamente, tem medida de Lebesgue zero, pois consiste em uma superfície "suave" de dimensão inferior a do espaço de fases (de maneira análoga a uma superfície esférica que tem volume zero em $\mathbb{R}^3$.

t^* se cada $\mathbf{r}_j(t)$ tem limite finito, $j = 1, \ldots, N$, quando $t \to t^*$, sendo que ao menos dois deles são iguais, isto é: para algum $i \neq k : \mathbf{r}_i(t^*) = \mathbf{r}_k(t^*)$.

Equivalentemente, uma colisão ocorre quando o vetor $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t))$ converge, quando $t \to t^*$, para um ponto $\mathbf{x}^* \in \Delta$, onde Δ é o conjunto singular (ver seção 1.2).

Observação 4.2. *(a) Colisões são exemplos de* singularidades *das soluções do problema de N-corpos. Note que se ocorre colisão em $t^* < \infty$, então*

$$\lim_{t \to t^*} U(\mathbf{x}(t)) = +\infty,$$

e as equações de movimento não fazem mais sentido. Em particular, pela conservação da energia a velocidade de alguma(s) das partículas diverge quando $t \to t^*$.

Uma questão natural que abordaremos adiante é de saber se existem outros tipos de singularidades além das colisões.

(b) No problema de N-corpos podem ocorrer colisões duplas, triplas, quádruplas, etc. No caso $N = 3$ as únicas possibilidades são colisões duplas ou triplas (colapso total). Como mencionamos, as colisões binárias podem ser regularizadas *através de uma certa mudança de parâmetro temporal e, portanto, de certa forma são singularidades "removíveis".*

(c) Colisões são eventos "raros" ou "atípicos": pode-se provar que o subconjunto das condições iniciais do problema de N-corpos que levam o sistema a uma colisão, é um subconjunto "pequeno" no espaço de fases

no sentido de terem volume (medida de Lebesgue) zero (ver [26]).

(d) *Devemos mencionar que as colisões são idealizações matemáticas, uma vez que estamos lidando com pontos materiais. As colisões* reais *entre objetos celestes são eventos extremamente complexos e de grande importância, por exemplo, para entender a formação do sistema solar. Ademais, tudo indica que os efeitos de uma colisão da Terra com um asteróide foram a causa provável da extinção dos dinossauros há cerca de 65 milhões de anos atrás (para mais informações sobre colisões no sistema solar, ver [7]).*

Podemos agora definir o colapso total no problema de N-corpos.

Definição 4.3. *Diz-se que ocorre o* colapso total *no instante t^* (finito ou não) se todas as partículas colidem no mesmo ponto.*

O seguinte fato simples sobre o momento de inércia é muito útil no estudo do colapso total.

Lema 4.4. *O momento de inércia I pode ser expresso como*

$$I = \frac{1}{2M} \sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}^2.$$

Demonstração: Lembrando que $r_{jk} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|$ temos, para $k, j = 1, \ldots, N$,

$$\sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j^2 + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_k^2 - 2\mathbf{r}_k \cdot (\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j).$$

Como por hipótese o CM está em repouso na origem, o último termo é zero a equação acima ficam:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)^2 = 2I + M\mathbf{r}_k^2.$$

Multiplicando agora por m_k e somando vem que

$$\sum_{k=1}^{N} m_j \sum_{j=1}^{N} m_j m_k r_{jk}^2 = 2IM + 2IM = 4IM,$$

e o resultado segue. □

O importante corolário a seguir mostra que $\sqrt{I}$ é uma estimativa da separação máxima entre as partículas enquanto que U^{-1} é uma estimativa da sua separação mínima.

Corolário 4.5. *Existem constantes positivas A, B, C e D, que dependem somente das massas $m_1, \ldots, m_N$, tais que:*

$$A\sqrt{I} \leq R \leq B\sqrt{I}$$

e

$$CU^{-1} \leq r \leq DU^{-1},$$

onde $r = r_{\min} \equiv \min_{j\neq k} r_{jk}$ e $R = r_{\max} = \max_{j\neq k} r_{jk}$ são, respectivamente, a separação mínima e máxima entre as partículas.

Demonstração: Seja $m_0 \equiv \min\limits_{1\leq i\leq N} m_i$. Temos então,

$$\frac{m_0^2}{2M}R^2 \leq \frac{m_0^2}{2M}\sum_{j<k} r_{jk}^2 \leq I = \frac{1}{2M}\sum_{j<k}^{N} m_j m_k r_{jk}^2 \leq$$

$$(\frac{1}{2M}\sum_{j<k} m_j m_k)R^2 = (\frac{1}{4M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} m_j m_k)R^2 = \frac{M}{4}R^2.$$

Ou seja,

$$\frac{m_0^2}{2M}R^2 \leq I \leq \frac{M}{4}R^2,$$

ou ainda,

$$\frac{2M}{m_0^2}I \geq R^2 \geq \frac{4}{M}I \Rightarrow \frac{2}{M}\sqrt{I} \leq R \leq \frac{\sqrt{2M}}{m_0}\sqrt{I},$$

e tomamos $A = 2/\sqrt{M}$ e $B = \sqrt{2M}/m_0$.

Por outro lado, como $\sum_{j<k} m_j m_k = M/2$, temos

$$U \leq \sum_{j<k} \frac{Gm_j m_k}{r} \leq \frac{GM^2}{2r}.$$

Além disso, para $1 \leq j, k \leq N$,

$$U \geq \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}} \geq \frac{Gm_0^2}{r_{jk}},$$

e como em cada instante ao menos um dos r_{jk}'s é igual a r, temos

$$U \geq \frac{Gm_0^2}{r}.$$

Juntando, vem que

$$\frac{Gm_0^2}{r} \leq U \leq \frac{GM^2}{2r} \Rightarrow \frac{Gm_0^2}{U} \leq r \leq \frac{GM^2}{2U}.$$

Tomamos então $C = Gm_0^2$ e $D = GM^2/2$. □

Uma conseqüência deste corolário é que se o colapso ocorre, ele se dá na origem.

Corolário 4.6. *Se ocorre o colapso total no instante $t = t^*$ (finito ou não), então ele ocorre na origem.*

Demonstração: Como por hipótese todas as partículas colidem, temos que, para todo $j = 1, \ldots, N$, existem e coincidem os limites $\lim_{t \to t^*} \mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j(t^*)$. Portanto, se $j \neq k$,

$$\lim_{t \to t^*} r_{jk}(t) = \lim_{t \to t^*} \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_k(t)\| = \|\mathbf{r}_j(t^*) - \mathbf{r}_k(t^*)\| = 0.$$

Como $0 \leq r_{min}(t) \leq r_{jk}$ para todo $j \neq k$, segue que $\lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) = 0$ e pelo corolário 4.5 vem que

$$\lim_{t \to t^*} I(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j^2(t^*) = 0,$$

e daí que para todo $j = 1, \ldots, N$, temos $\mathbf{r}_j(t^*) = \mathbf{0}$. □

O resultado seguinte mostra que o colapso total não demora um tempo infinito para ocorrer.

Proposição 4.7. *Se o colapso total ocorre no instante $t = t^*$, então $t^* < +\infty$.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que o colapso ocorra para $t^* = +\infty$. (raciocínio análogo vale para o caso $t^* = -\infty$). Pelo corolário 4.6, para todo $j \neq k$, temos

$$\lim_{t \to +\infty} r_{jk}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} r(t) = 0,$$

onde $r(t) = \min_{j \neq k} r_{jk}$ é a separação mínima das partículas. Portanto, pela estimativa do corolário 4.5,

$$\lim_{t \to +\infty} U(\mathbf{x}(t)) = +\infty.$$

Mas, da identidade de Lagrange-Jacobi, $\ddot{I}(t) = U(\mathbf{x}(t)) + 2h$, decorre que

$$\lim_{t \to +\infty} \ddot{I}(t) = +\infty.$$

Portanto, existe $t_1 > 0$ tal que para todo $t > t_1$ tem-se $\ddot{I}(t) \geq 1$. Integrando esta desigualdade duas vezes no intervalo $[t_1, t]$, segue que

$$I(t) \geq \frac{1}{2}t^2 + at + b,$$

onde a e b dependem apenas de t_1. Assim,

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = +\infty,$$

o que é uma contradição. $\square$

Observação 4.8. *Note então que o colapso total em* $t = t^*$ *(necessáriamente* $< \infty$*) se, e somente se* $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 0$.

4.2 O teorema do colapso total

Podemos agora enunciar o teorema do colapso total, devido a Sundman (1907), resultado já conhecido por Weierstrass para o caso do problema de tres corpos (sem, porém, tê-lo publicado).

Teorema 4.9 (Teorema de Sundman-Weierstrass). *Se ocorre o colapso total no problema de* N*-corpos, então o momento angular total é nulo:* $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Em outras palavras, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ é condição necessária para ocorrer o colapso total, ou ainda: se $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, não ocorre colapso total. [3] Intuitivamente, quando o momento angular total é nulo "remove-se a rotação" do sistema, o que permite a ocorrência do colapso total.

[3] Sundman provou algo mais: se $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, então $r_{\max}(t) \geq D(\mathbf{c}) > 0$, de forma que as partículas permanecem estritamente isoladas de colisões triplas.

Exercício 4.10. *Mostre que a recíproca do teorema acima é verdadeira para o o problema de dois corpos.*

Observação 4.11. *A a recíproca não é verdadeira para $N \geq 3$: basta imaginar a situação em que os corpos estão confinados a mover-se em uma reta (logo necessáriamente $\mathbf{c} = \mathbf{0}$); porém nesse caso sempre ocorrem colisões binárias (no futuro ou no passado). Outro exemplo (sem colisões) é a coreografia em forma de oito para o problema de três corpos.*

Para a demonstração do teorema 4.9 precisaremos do seguinte lema de cálculo:

Lema 4.12. *Seja*

$$\begin{aligned} f : \quad & [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

função duas vezes diferenciável em $]a,b[$, com $f(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ em $]a,b[$. Se $f(b) = 0$, então $f'(x) < 0$ em $]a,b[$.

Exercício 4.13. *Demonstre o lema acima.*

Passamos a prova do teorema.

Demonstração: Seja $t^* < +\infty$ o instante do colapso total, que supomos positivo, sem perda de generalidade. Então, como visto na seção anterior, para todo $j \neq k$,

$$\lim_{t \to t^*} r_{\min}(t) = 0,$$

e portanto pelo corolário 5.5

$$\lim_{t \to t^*} U(t) = +\infty.$$

Portanto, pela desigualdade de Lagrange-Jacobi,

$$\lim_{t \to t^*} \ddot{I}(t) = +\infty.$$

Logo, para t numa vizinhança de t^* temos $\ddot{I}(t) > 0$. Como $I(t) > 0$, segue do lema 4.12 que $I(t)$ é estritamente decrescente nesta vizinhança:

$$\text{se}\, t \in [t_1, t_2],\ \text{onde}\ t_2 < t^*, \text{então} - \dot{I}(t) < 0.$$

Considere agora a desigualdade de Sundman na forma:

$$\ddot{I}(t) \geq \frac{c^2}{4I} + h,$$

para $t \in [t_1, t_2]$. Multiplicando por $-\dot{I}(t) > 0$, obtemos:

$$-\dot{I}\ddot{I} \geq -\frac{c^2}{4}\frac{\dot{I}}{I} - h\dot{I},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{I})^2 \geq -\frac{c^2}{4}\frac{d}{dt}\ln(I) - h\frac{d}{dt}I.$$

Integrando ambos os lados de t_1 a t_2 obtemos:

$$-\frac{1}{2}[\dot{I}^2(t_2) - \dot{I}^2(t_1)] \geq \frac{c^2}{4}\ln[I(t_1)/I(t_2)] - h[I(t_2) - I(t_1)],$$

ou, reagrupando,

$$\frac{c^2}{4}\ln[I(t_1)/I(t_2)] \leq h[I(t_2) - I(t_1)] + \frac{1}{2}[\dot{I}^2(t_1) - \dot{I}^2(t_2)].$$

Mas, $I(t_2) - I(t_1) \leq I(t_2)$ e $\dot{I}^2(t_1) - \dot{I}^2(t_2) \leq \dot{I}^2(t_1)$, e temos então que

$$\frac{c^2}{4} \leq \frac{hI(t_2) + \dot{I}^2(t_1)}{\ln[I(t_1)/I(t_2)]},$$

onde o lado esquerdo tende a 0 quando t_2 tende a t^* (com t_1 fixo). Como c é constante, concluímos que $c = 0$, o que completa o teorema. □

4.3 Sobre a estabilidade

O teorema de Sundman-Weierstrass pode ser visto como um teorema sobre a "estabilidade" do sistema de N-corpos no sentido de que especifica uma condição para que o sistema não desabe ou colapse sobre si mesmo sob ação da atração gravitacional mútua.

O problema da estabilidade do sistema solar tem uma longa história, sendo um tema central em Mecânica Celeste desde a época de Newton. [4] O problema se encontra em aberto tanto do ponto de vista do modelo idealizado de N-corpos pontuais quanto de versões realísticas do sistema solar (para um a discussão histórica, ver o excelente artigo [17]).

Uma das dificuldades deste problema é a de estabelecer o que se entende por "estabilidade" de um sistema dinâmico e, de fato, existem mais de cinqüenta definições diferentes na literatura. No caso do problema de N-corpos, uma noção bastante natural parece ser a seguinte: uma solução do problema de N corpos é *estável* se satisfaz as seguintes condições: para todo $i \neq j$ e todo $t \in \mathbb{R}$ e para uma constante $K > 0$,

(a) $r_{ij} \neq 0$;

(b) $r_{ij} \leq K$,

que exige ausência de colisões (e não apenas do colapso total) e que o movimento permaneça "confinado" em uma região limitada do espaço (no passado e no futuro).

Porém, é muito difícil decidir quando estas condições são satisfeitas; em particular não se conhece todos os possíveis

[4] A propósito, Newton achava que o sistema solar era inerentemente instável e que era necessária a intervenção divina, de tempos em tempos, para "dar corda" no sistema e evitar a catástrofe.

movimentos finais (isto é, para $t \to \infty$) nem mesmo para o problema de 3-corpos (ver [3]). Uma possível saída é buscar provar que a estabilidade é uma propriedade "típica" no sentido de ser válida para a "vasta maioria" das condições iniciais do sistema; mesmo isto não é trivial de provar.

Aqui, vamos apenas apresentar um resultado clássico elementar de estabilidade, que é uma outra aplicação da identidade de Lagrange-Jacobi.

Teorema 4.14 (Critério de estabilidade de Jacobi). *Uma condição necessária para que a solução seja estável (no sentido definido acima) é que a energia total $h = T - U$ seja negativa.*

Prova: Considere uma solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e tal que $h \geq 0$. Pela identidade de Lagrange-Jacobi,

$$\ddot{I} = U + 2h \geq U > 0,$$

uma vez que o potencial é estritamente positivo. Temos então que $I(t)$ é uma função definida em $\mathbb{R}$, limitada inferiormente e estritamente convexa; logo necessáriamente $\lim_{t\to\infty} I(t) = \infty$. Portanto, pelo lema 4.4, não pode ser que $r_{ij}(t) \leq K$ para todo $i \neq j$ e todo $t \in \mathbb{R}$.. $\square$

Infelizmente a condição não é suficiente para $N \geq 3$.

Capítulo 5

Singularidades no problema de N-corpos

Vimos que o teorema de existência e unicidade para EDO's garante que o problema de N-corpos (por simplicidade consideramos $t_0 = 0$):

$$\begin{cases} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{x}),\ j = 1, \ldots, N \\ \\ (\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0)) \in \mathbb{R}^{3N}/\Delta \times \mathbb{R}^{3N} \end{cases}$$

possui uma única solução $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t))$, ao menos num intervalo de tempo $]t^-, t^+[$, talvez muito pequeno (solução local). Para fixar idéias, consideramos apenas a evolução futura do sistema, ou seja em $[0, t^+[$.

Por outro lado, pelo teorema 2.27, sabemos que existe um intervalo maximal de existência, digamos $[0, t^*[$, com $0 < t^+ \leq t^* \leq +\infty$. É natural perguntar se este intervalo coincide ou não com $[0, +\infty)$. Isso leva a noção de uma *singularidade* no problema de N-corpos.

Definição 5.1. *Se $t^* < +\infty$, diz-se que a solução $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t))$ tem uma* singularidade *no instante $t = t^*$. Caso $t^* = +\infty$ a solução é dita* regular.

Assim, uma singularidade indica uma "obstrução" ao prolongamento de soluções. Um exemplo de singularidades no problema de N-corpos são as *colisões*, que já discutimos no capítulo anterior. Mas, será que existem outros tipos de singularidades?

A questão da *natureza da singularidades* no problema de N-corpos foi abordada pelo matemático francês Paul Painlevé numa célebre série de palestras ministradas em Estocolmo em 1895. Nestas palestras ele obteve vários resultados fundamentais que o levaram a formular sua famosa conjectura sobre a existência de singularidades não-colisionais para o caso de $N \geq 4$ e que só foi demonstrada recentemente.

Para entendermos a conjectura de Painlevé, precisamos de seu teorema de caracterização de singularidades.

5.1 Uma caracterização das singularidades

É de se esperar, examinando as equações de movimento, que a ocorrência de singularidades esteja ligada a possibilidade de que as distâncias $r_{jk}(t)$ entre alguma(s) partículas tornarem-se arbitrariamente pequenas quando t tende a t^*. Isto é exatamente o que Painlevé demonstrou no seguinte *teorema de caracterização de singularidades*:

Teorema 5.2 (Painlevé, 1895). *Uma solução do problema de N-corpos possui uma singularidade no instante*

t^* *se, e somente se,*

$$\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0,$$

onde $r_{\min}(t) = r(t) \equiv \min_{j\neq k} r_{jk}(t)$

Prova:

($\Leftarrow$) Suficiência: Suponha que $\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0$ e que, por absurdo, *não* ocorra uma singularidade no instante $t = t^*$. Então a solução $\mathbf{x}(t)$ é uma função suave para todo t num intervalo limitado $[t_1, t^*]$ com extremidade t^*. Portanto existe uma constante $b_1 > 0$ tal que

$$|\ddot{\mathbf{x}}(t)| \leq b_1,$$

neste mesmo intervalo. Segue das equações de movimento que os vetores $\nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{x}(t))$, $j = 1, \ldots, N$ também são limitados.

Pelo teorema fundamental do cálculo (componente a componente) e usando a desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t^*)| &= |\int_t^{t^*} \ddot{\mathbf{x}}(s)ds| \\ &\leq \int_t^{t^*} |\ddot{\mathbf{x}}(s)|ds \leq b_1|t^* - t_1| = b_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Logo, pela desigualdade triangular,

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| \leq |\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t^*)| + |\dot{\mathbf{x}}(t^*)| \leq b_3,$$

para uma certa constante b_3 e para todo $t \in [t_1, t^*]$.

Como $\|\dot{\mathbf{r}}_j(t)\| \leq |\dot{\mathbf{x}}(t)|$ para $j = 1, \ldots, N$ e

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j=1}^{N} \nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j,$$

segue que $\dfrac{d}{dt}U(\mathbf{x}(t))$ é limitado e portanto $U(\mathbf{x}(t))$ é limitado.

Mas, pela estimativa do corolário 4.5,

$$\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0 \Rightarrow \limsup_{t\to t^*} U(\mathbf{x}(t)) = +\infty,$$

donde $U(\mathbf{x}(t))$ não poderia ser limitado. Esta contradição leva a concluir que t^* tem de ser uma singularidade.

($\Rightarrow$) Necessidade:

Suponha que ocorra uma singularidade em $t = t^*$ e se quer mostrar que,

$$\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0.$$

Como $\limsup_{t\to t^*} r_{\min}(t) \geq \liminf_{t\to t^*} r_{\min}(t) \geq 0$, basta mostrar que $\limsup_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0$.

Suponha, por absurdo, que fosse

$$\limsup_{t\to t^*} r_{\min}(t) = D > 0.$$

Então existe uma seqüência $\{t_\nu\}_{\nu\geq 1}$ com $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} t_\nu = t^*$ e tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} r_{\min}(t_\nu) = D > 0.$$

Ademais, para ν suficientemente grande e para todo $j \neq k$, temos

$$r_{jk}(t_\nu) \geq r_{\min}(t_\nu) > D/2.$$

Ora, então estamos em condições de aplicar o teorema de existência e unicidade (teorema 2.27) com condições iniciais $\mathbf{y}(t_\nu) = (\mathbf{x}(t_\nu), \mathbf{v}(t_\nu))$. Ou seja, se $|\mathbf{y} - \mathbf{y}(t_\nu)| < D/8$ temos $|\mathsf{f}(\mathbf{y})| \leq M$, onde M depende apenas de D, das massas e da energia total h (e esta última é a mesma que em $t = 0$

pois o sistema é conservativo). Portanto, o problema de N-corpos com condição inicial $\mathbf{y}(t_\nu)$ tem uma única solução num intervalo $|t - t_\nu| < \delta/2$, onde $\delta > 0$ depende apenas de D, das massas e h.

Tomando ν suficientemente grande tal que $|t_\nu - t^*| < \delta/2$, vemos que as equações de movimento tem uma única solução no intervalo:

$$|t - t^*| \leq |t - t_\nu| + |t_\nu - t^*| < \delta.$$

Mas, nesse caso (e usando a proposição 2.19) a solução partindo de $t = 0$ foi prolongada para além do instante t^* e portanto, este último não poderia ser um instante de ocorrência de uma singularidade. Esta contradição conclui o teorema. $\square$

5.2 Colisões e Pseudocolisões

O teorema de Painlevé tem uma interpretação geométrica interessante. Considere a distância entre um ponto $\mathbf{x}$ e o conjunto singular Δ, definida por

$$\rho(\mathbf{x}, \Delta) = \inf_{\mathbf{z} \in \Delta} |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

.

Exercício 5.3. *Mostre que*

$$\min_{j \neq k} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\| = \sqrt{2}\, \rho(\mathbf{x}, \Delta).$$

Segue do exercício acima que o teorema de Painlevé equivale a dizer que uma singularidade ocorre em $t = t^*$ se, e somente se a distância de $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t))$ ao conjunto singular Δ vai a zero; simbólicamente

$$\mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \to t^*} \Delta.$$

Conseqüentemente obtém-se a seguinte classificação das singularidades do problema de N-corpos em *dois tipos*:

- colisões: quando $\lim_{t\to t^*} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \in \Delta$, isto é, seja $\mathbf{x}(t)$ atinge um dado ponto de Δ, ou ainda $\rho(\mathbf{x}^*, \Delta) = 0$;
- pseudocolisões: quando $\mathbf{x}(t)$ se aproxima de Δ quando $t \to t^*$, sem porém nunca atingir Δ.

Ou seja, de um lado temos o caso "intuitivo" das colisões, em que a distância entre ao menos duas partículas é zero em $t = t^*$: o conjunto singular é atingido. Por outro, temos o caso em que a distância mínima entre as partículas tende a zero sem que haja colisão. Este tipo de singularidade é bem menos intuitivo. Assim, ainda que $\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0$ poderíamos ter, para certo par jk de partículas, que

$$\liminf_{t\to t^*} r_{jk}(t) = 0 \text{ e } \limsup_{t\to t^*} r_{jk}(t) > 0,$$

de forma que elas poderiam "oscilar", ora se aproximando ora se afastando entre, sem nunca colidirem.

A existência de soluções com singularidades do tipo colisões era bem conhecida para o caso de $N = 2$ e $N = 3$ (e o teorema 5.8 mais adiante mostra que colisões sempre ocorrem no problema de N-corpos retilíneo).

Mas e quanto a existência de pseudocolisões? É fácil mostrar que para $N = 2$ elas não existem: de fato, se ocorre uma singularidade em $t = t^*$, então pelo teorema 5.2,

$$r_{\min}(t) \equiv r_{12}(t) = \|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\| \xrightarrow{t\to t^*} 0.$$

Então,

$$I(t) = \frac{1}{2M} r_{12}^2(t) \xrightarrow{t\to t^*} 0,$$

e lembrando que $I(t) = 1/2(m_1\mathbf{r}_1^2(t)+m_2\mathbf{r}_2^2(t))$, concluímos que $\lim_{t\to t^*}\mathbf{r}_1(t) = \lim_{t\to t^*}\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{0}$, tratando-se de uma colisão.

Painlevé mostrou que também no caso $N = 3$ o único tipo de singularidade que pode ocorrer são colisões:

Teorema 5.4 (Painlevé, 1895). *No problema de três corpos, todas as singularidades são colisões.*

Precisamos do seguinte lema que afirma que o momento de inércia sempre tem limite quando t tende a t^*:

Lema 5.5. *Se ocorre uma singularidade em $t = t^*$, então*

$$\lim_{t\to t^*} I(t) = I^* \in [0, +\infty].$$

Prova do Lema: Pelo teorema 5.2 ocorre uma singularidade no instante $t = t^*$ se, e só se $\lim_{t\to t^*} r_{\min}(t) = 0$. Disto segue que $\limsup_{t\to t^*} U(\mathbf{x}(t)) = +\infty$ e, pela identidade de Lagrange-Jacobi, $\lim_{t\to t^*}\ddot{I}(t) = +\infty$. Logo, para t suficientemente próximo de t^*, temos $\ddot{I}(t) > 0$, donde que $\dot{I}(t)$ é crescente numa vizinhança de t^*. Daí que $I(t)$ é monótona (crescente ou decrescente) nesta vizinhança. Lembrando que $I(t) \geq 0$ o lema segue. $\square$

Prova do Teorema: Pelo lema, $I^* \in [0, +\infty]$. Se $I^* = 0$, segue do teorema de Sundman-Weierstrass que ocorre o colapso total, ou seja uma colisão múltipla, e não há nada a demonstrar.

Suponha então que $I^* > 0$ (possívelmente $= +\infty$). Mostremos inicialmente que a partir de certo instante em diante o *mesmo* par de partículas assume a separação mínima $r_{\min}$.

Como $\lim_{t\to t^*} I(t) = I^* > 0$ segue do corolário 4.5 que, de certo instante em diante e para uma certa constante

$D > 0$, temos

$$r_{\max}(t) = \max_{j \neq k} r_{jk}(t) \geq D > 0.$$

Por outro lado, pelo teorema 5.2, vem que de certo instante em diante $r_{\min}(t) < D/2$, ou seja, para ao menos um par jk de partículas tem-se: $r_{jk}(t) < D/2$.

Afirmamos que de certo instante em diante *o mesmo* par de partículas assume a distância mínima $r_{\min}$. Caso contrário, em algum instante $\bar{t}$ dois pares (digamos 12 e 23) trocariam o papel de $r_{\min}$ e teríamos: $r_{\min}(\bar{t}) = r_{12}(\bar{t}) = r_{23}(\bar{t}) < D/2$. Mas isso não é possível pois, por um lado, da desigualdade triangular aplicada ao triângulo com vértices nas partículas 1, 2 e 3, tem-se:

$$r_{13}(\bar{t}) \leq r_{12}(\bar{t}) + r_{23}(\bar{t}) < D.$$

Por outro lado, teríamos $r_{13}(\bar{t}) = r_{\max}(\bar{t})$, ao passo que $r_{\max}(t) \geq D$ a partir de certo instante em diante.

Mostremos agora que os vetores posição $\mathbf{r}_j(t)$, com $j = 1, 2, 3$, têm limites bem definidos quando t tende a t^*. De fato, como uma das partículas, digamos a 3 (seguindo o exemplo acima) acaba por afastar-se definitivamente das restantes 1 e 2 (e com $r_{13} \geq D/2$ e $r_{23} \geq D/2$), segue das equações de movimento que para t numa vizinhança de t^*,

$$\|\ddot{\mathbf{r}}_3\| \leq \frac{Gm_1}{r_{13}^2} + \frac{Gm_2}{r_{23}^2} \leq A,$$

para uma constante A. Portanto, para instantes t_n e t_m numa vizinhança de t^*,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_3(t_n) - \mathbf{v}_3(t_m)\| &= \| \int_{t_m}^{t_n} \ddot{\mathbf{r}}_3(s)ds\| \\ &\leq \int_{t_m}^{t_n} \|\ddot{\mathbf{r}}_3\|(s)ds \leq A|t_n - t_m| \overset{t_n,t_m \to t^*}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Segue do critério de convergência de Cauchy que $\mathbf{v}_3(t) = \dot{\mathbf{r}}_3(t)$ tem limite bem definido quando t tende a t^*. Em particular é limitado: para t numa vizinhança de t^* temos

$$\|\mathbf{v}_3(t)\| = \|\dot{\mathbf{r}}_3(t)\| \leq B,$$

para uma constante B. Um argumento análogo ao que acabamos de fazer nos leva então a concluir que

$$\lim_{t \to t^*} \mathbf{r}_3(t) = \boldsymbol{\rho},$$

onde $\boldsymbol{\rho}$ é um vetor constante.

Mas pela lei de conservação relativa ao movimento do centro de massa, $m_1\mathbf{r}_1(t) + m_2\mathbf{r}_2(t) = -m_3\mathbf{r}_3(t0$, ou ainda $m_1(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)) + (m_1 + m_2)\mathbf{r}_2(t) = -m_3\mathbf{r}_39t)$. Como $\lim\limits_{t \to t^*} r_{12} = \lim\limits_{t \to t^*} \|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)\| = 0$, segue que

$$\lim_{t \to t^*} \mathbf{r}_2(t) = \lim_{t \to t^*} \mathbf{r}_1(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{\rho}.$$

Em outras palavras, temos uma colisão binária em $t = t^*$ e o teorema está demonstrado. $\square$

Observação 5.6. *Note que também obtivemos*

$$\lim_{t \to t^*} I(t) = I^* < +\infty.$$

5.3 A conjectura de Painlevé

Não conseguindo estender seu resultado para $N \geq 4$, Painlevé propôs o seguinte desafio ao final de suas série de palestras:

Conjectura 1 (Conjectura de Painlevé, 1895). *O problema de N-corpos, para $N \geq 4$ admite soluções com singularidades do tipo pseudocolisões.*

Esta conjectura mostrou-se extremamente difícil e ficou em aberto até recentemente. O primeiro progresso foi obtido pelo físico e astrônomo sueco E. H. von Zeipel, que propôs uma caracterização alternativa para colisões e, *a fortiori*, para pseudocolisões:

Teorema 5.7 (von Zeipel, 1908). *No problema de N-corpos, uma singularidade em $t = t^*$ é uma colisão se, e somente se*

$$\lim_{t \to t^*} I(t) = I^* < +\infty.$$

A demonstração, que omitimos, pode ser encontrada em [20] ou [8]. Note que a necessidade é trivial.

Segue do teorema de von Zeipel e do corolário 4.5 que uma singularidade é uma pseudocolisão se, e somente se,

$$\lim_{t \to t^*} \max_{j \neq k} r_{jk}(t) = +\infty,$$

ou seja, o sistema de N-corpos "explode" ao infinito em tempo finito.

Este resultado ficou esquecido por muito tempo, em parte por ter sido publicado em um periódico de pouca circulação. Outra razão deve-se a críticas sobre supostas falhas na prova, o que era infundado (ver [20]). Uma outra razão pode ter sido a influência da teoria da relatividade especial de Einstein, segundo a qual existe um limite superior para a velocidade dos corpos massivos, a saber a velocidade da luz.

Como aplicação do teorema de von Zeipel, vejamos um caso do problema de N-corpos que também não admite pseudocolisões, a saber, o *caso retilíneo*.

Teorema 5.8 (Saari, 1973). *Se as N partículas estão restritas a mover-se numa reta fixa com relação ao CM, então todas as singularidades são colisões.*

Prova: Vamos supor que a reta coincide com o eixo x do referencial do CM. Sejam $x_1, \ldots, x_N$ as posições das N partículas ao longo desta reta, da esquerda para a direita. Como estamos no referencial do CM, $\sum_{i=1}^N x_i = 0$, e portanto temos segue que $x_1 \leq 0$ e $x_N \geq 0$ em cada instante.

Suponha, por contradição, que exista uma singularidade pseudocolisional no instante $t = t^*$. Então, pelo teorema de von Zeipel, temos que $\lim_{t \to t^*} I(t) = +\infty$. Logo, da estimativa 4.5 vem que $\lim_{t \to t^*} r_{\max}(t) = +\infty$. Como as partículas não podem trocar a ordem de seu posicionamento ao longo do eixo, temos que $r_{\max}(t) = |x_N(t) - x_1(t)|$ e portanto teríamos $\lim_{t \to t^*} |x_N(t) - x_1(t)| = +\infty$.

Afirmamos que $\lim_{t \to t^*} x_N(t) = +\infty$. De fato, suponha que $x_N(\cdot)$ fosse limitado e, portanto, do limite acima, que $\lim_{t \to t^*} x_1(t) = -\infty$. Então, como $\sum_{i=1}^N x_i(t) = 0$, vem que

$$\sum_{i=2}^{N} x_i(t) = -m_1 x_1(t) \xrightarrow{t \to t^*} +\infty.$$

Ora, isto implica que para algum $i = 2, \ldots, N-1$ tem-se $\limsup_{t \to t^*} x_i(t) = +\infty$, e como x_N está à direita de todos os outros x_i, segue que $\limsup_{t \to t^*} x_N(t) = +\infty$, contradizendo a hipótese de ser $x_N(\cdot)$ limitado. Em resumo até o aqui: se ocorre uma pseudocolisão em $t = t^*$, então $\lim_{t \to t^*} x_N(t) = +\infty$.

Por outro lado, a equação de movimento para a N-ésima partícula é

$$m_N \ddot{x}_N = \sum_{j \neq N} G m_N m_j \frac{x_j - x_N}{|x_j - x_N|^3},$$

e como $x_j < x_N$ para $j = 1, \ldots, N-1$, segue que $\ddot{x}_N(t) < 0$. Ou seja, $x_N(t)$ tem concavidade para baixo; logo não pode ser que $\lim_{t\to t^*} x_N(t) = +\infty$. Essa contradição prova o teorema. $\square$

Observação 5.9. *Note que no problema de N corpos retilíneo podemos afirmar que sempre ocorre uma singularidade (que será necessáriamente uma colisão). De fato, suponha que não ocorra singularidades. Como estamos no referencial do CM, segue que sempre $x_N(t) > 0$ ($x_N = 0$ somente no caso do colapso total, que é uma singularidade colisional). Por outro lado, da equação de movimento acima temos sempre que $\ddot{x}_N(t) < 0$. Ora, estas duas condições são incompatíveis para uma função $x_N(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, necessariamente ocorre uma singularidade.*

E no caso *geral* do problema de N-corpos? A solução veio somente após décadas de investigações tanto teóricas quanto numéricas (com o desenvolvimento dos computadores). [1] Do ponto de vista teórico, foram instrumentais os desenvolvimentos da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

Resumimos os acontecimentos-chave (para mais detalhes ver [9] e [11]). O primeiro grande avanço veio em 1975 com a prova de Mather e McGehee da existência de pseudocolisões para soluções do problema de 4-corpos retilíneo, mas que era insatisfatória por exigir um número infinito de regularizações de colisões binárias. Em 1984, Gerver anunciou uma solução pseudocolisional do problema de 5-corpos no plano, porém sem apresentar uma prova completa. Em 1988, em sua tese de doutorado sob orientação de Saari, Jeff Xia obteve a prova da conjectura de Painlevé para o problema de 5-corpos. A prova continha alguns erros, mas foi retificada e publicada em 1992. Enquanto isto, em 1991,

[1] O uso de simulações numéricas como guia heurístico também parece ter sido muito importante nas recentes descobertas das novas soluções do problema de N-corpos, ver [21]

Gerver publica uma demonstração alternativa da conjectura de Painlevé. Os métodos de Gerver e Xia são bastante diferentes, mas ambos exploram a "fonte inesgotável" de energia do potencial gravitacional para transformá-la em energia cinética através de repetidos "encontros próximos" entre certas partículas do sistema.

Em suma, podemos anunciar (ver [9] e referências lá contidas):

Teorema 5.10 (Xia, 1992; Gerver, 1991). *Existem soluções com singularidades pseudocolisionais no problema de N-corpos, para $N \geq 5$.*

A conjectura de Painlevé foi portanto demonstrada para $N \geq 5$. O caso de $N = 4$ corpos permanece em aberto. [2]

[2] Outros problemas em aberto são discutidos em [11] e [30].

Referências Bibliográficas

[1] V. I. Arnold, *Ordinary differential equations*, The MIT Press, (1973).

[2] , V. I. Arnold, *Huygens & Barrow, Newton & Hooke,* Birkhäuser, (1990).

[3] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical Apects of Classical and Celestial Mechanics*, 2nd. edition, Springer, (1997).

[4] E. Belbruno, *Capture dynamics and chaotic motions in celestial mechanics,* Princeton University Press, (2005).

[5] D. Boccaletti, G. Pucacco, *Theory of Orbits,* vol. I, Springer, (1996).

[6] M. Bunge, *Chasing reality,* University of Toronto Press, (2006).

[7] A. Celletti, *Singularities, Collisions and Regularization Theory*, in Singularities in Gravitational Systems:

Applications to Chaotic Transport in the Solar System (Lecture Notes in Physics) Daniel Benest, Claude Froeschle (eds.) pp. 1-23, (2002).

[8] F. Diacu, *Singularities of the N-Body Problem,* CRM, (1992).

[9] F. Diacu, *Painlevé's conjecture,* The Mathematical Intelligencer, **15**, 2, pp. 6-12, (1993).

[10] E. Julliard-Tosel, *Brun's theorem: the proof and some generalizations,* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **76**, pp. 241-281, (2000).

[11] C. Falcolini, *Collisions and Singularities in the n-body Problem,* in Singularities in Gravitational Systems: Applications to Chaotic Transport in the Solar System (Lecture Notes in Physics) Daniel Benest, Claude Froeschle (eds.), pp. 73-80, (2002).

[12] N. Grossman, *The sheer joy of celestial mechanics,* Birkhäuser, (1996).

[13] M. de Guzman, *Ecuaciones diferenciales ordinarias,* Editorial Alhambra, (1975).

[14] M. Henkel, *Sur la solution de Sundman du probléme des trois corps,* Philosophia Scientiae, **5**, 2, pp. 161-184, (2001).

[15] M. W. Hirsch, S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Universidad Textos, (1983).

[16] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, 4th. edition, Springer, (2003).

[17] J. Laskar, *La stabilité du système solaire,* in Chaos et déterminisme, A. D. Dalmedico, J.-L. Chabert, K. Chemla, Éditions du Seuil, (1992).

[18] C. M. Linton, *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge University Press, (2004).

[19] J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Vector Calculus,* 2nd. edition, W. H. Freeman, (1981).

[20] R. McGehee, *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics*, Expositiones Mathematicae, **4**, pp. 335-343, (1986).

[21] R. Montgomery, *A New Solution to the Three-Body Problem,*, Notices of the AMS, **48**, 5, pp. 471-481, (2001).

[22] J. Moser, *Dynamical Systems–Past and Present,* Documenta Mathematica, Extra Volume, ICM, I, pp. 381-402, (1998).

[23] C. D. Murray, S. F. Dermott, *Solar System Dynamics,* Cambridge University Press, (2005).

[24] H. Pollard, *Celestial Mechanics,* The Carus Mathematical Monographs, **18**, The Mathematical Association of America, (1976).

[25] D.G. Saari, *A visit to the Newtonian N-body problem via elementary complex variables,* The American Mathematical Monthly, **97**, pp 105-119, (1990).

[26] D. G. Saari, *Collisions, Rings and Other Newtonian N-Body Problems,* CBMS, Regional Conference Series

in Mathematics, **104**, American Mathematical Society (2005).

[27] C. L. Siegel, J. K. Moser, *Curso de Mecânica Celeste*, 2a. edição, Fundação Calouste Gulbenkian, (1971).

[28] A. Sparzani, *Força/Campo,* Enciclopédia Einaudi, vol. 24, Física, Imprensa Nacioonal-Casa da Moeda, (1993).

[29] V. G. Szebehely, H. Mark, *Adventures in celestial mechanics,* Wiley, (1998)

[30] Z. Xia, *Some of the problems that Saari didn't solve,* Contemporary Mathematics, **292**, pp. 267-270, (2002).

SÉRGIO B. VOLCHAN
(volchan@mat.puc-rio.br)
Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea
Cep:22453-900 Rio de Janeiro
Brasil