

Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada

Publicações Matemáticas

Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada

André Nachbin
IMPA

Ailín Ruiz de Zárate
IMPA



26^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2007 by André Nachbin e Ailín Ruiz de Zárate

Direitos reservados, 2007 pela Associação Instituto

Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

26^a Colóquio Brasileiro de Matemática

- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números - Alexander Arbieto, Carlos Matheus e Carlos Gustavo Moreira
- Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações - Alcides Lins Neto
- Elliptic Regularity and Free Boundary Problems: an Introduction - Eduardo V. Teixeira
- Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um - Flavio Abdenur e Luiz Felipe Nobili França
- Introduction to Generalized Complex Geometry - Gil R. Cavalcanti
- Introduction to Tropical Geometry - Grigory Mikhalkin
- Introdução aos Algoritmos Randomizados - Celina de Figueiredo, Guilherme da Fonseca, Manoel Lemos e Vinicius de Sá
- Mathematical Aspects of Quantum Field Theory - Edson de Faria and Wellington de Melo
- Métodos Estatísticos Não-Paramétricos e suas Aplicações - Aluisio Pinheiro e Hildete P. Pinheiro
- Moduli Spaces of Curves - Enrico Arbarello
- Noções de Informação Quântica - Marcelo O. Terra Cunha
- Three Dimensional Flows - Vítor Araújo e Maria José Pacifico
- Tópicos de Corpos Finitos com Aplicações em Criptografia e Teoria de Códigos - Ariane Masuda e Daniel Panario
- **Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada - André Nachbin e Ailín Ruiz de Zárate**
- Uma Introdução à Mecânica Celeste - Sérgio B. Volchan
- Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos - Humberto Bortolossi, Gilmar Garbugio e Brígida Sartini
- Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas - Lorenzo J. Díaz e Danielle de Rezende Jorge

ISBN: 978-85-244-0262-3

Distribuição: IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

22460-320 Rio de Janeiro, RJ

E-mail: ddic@impa.br

<http://www.impa.br>

A Carlos Isnard

Conteúdo

Prefácio	3
1 Breve resumo em Análise Complexa elementar	5
1.1 Funções analíticas	5
1.2 Duas funções complexas importantes neste curso . . .	9
1.3 Equações de Cauchy-Riemann e funções harmônicas .	16
1.4 Funções analíticas estudadas como aplicações	18
1.4.1 Transformações de Möbius	23
1.5 Integração complexa	24
1.5.1 Integral de linha	25
1.6 Índice de caminho fechado	28
1.7 A Fórmula Integral de Cauchy e o Teorema de Cauchy	32
1.7.1 Fórmula Integral de Cauchy	33
1.7.2 Teorema de Cauchy	34
1.7.3 Novidades	34
2 Aplicação de Schwarz-Christoffel	36
2.1 Introdução à aplicação de Schwarz-Christoffel	36
2.2 Versão computacional da aplicação de SC	44
2.2.1 Um breve tutorial ao SCT	44
2.2.2 Aplicações do Exemplo 2.2	52
2.2.3 Aglomeramento	57
3 Variáveis complexas aplicadas à Dinâmica dos Fluidos	63
3.1 Formulação em variáveis complexas	63
3.2 Escoamentos com obstáculos	69

3.2.1	Teorema do Círculo, de Milne-Thomson	70
3.3	Escoamentos com rotação	71
3.4	Teorema de Blasius	79
3.5	Sustentação de um aerofólio	82
4	Integrais de contorno singulares	90
4.1	Integral de Cauchy	90
4.2	Valor Principal de Cauchy	92
4.3	Fórmulas de Plemelj	101
4.4	Representação de um escoamento cisalhante	103

Prefácio

Usar um tema antigo e elegante como Análise Complexa para fazer Matemática Aplicada moderna é no mínimo muito divertido. Mais do que isso, serve de excelente veículo para ilustrar como podemos juntar abstrações matemáticas, uma das raras belezas de nossa área, com problemas muito concretos, com objetivos muito claros (por exemplo em Dinâmica dos Fluidos) incluindo Matemática Computacional. Essa é a essência de Matemática Aplicada: é Matemática, tendo também como objetivo respostas concretas visando uma aplicação, muitas vezes combinando teoremas, com análise formal, com experimentos computacionais.

Nossa principal motivação em escrever este texto é fazer uma introdução, como um passeio com o leitor que não tem experiência com esta combinação de ingredientes. Obviamente nossa meta é estimular leituras futuras, um aprofundamento em Análise Complexa Aplicada e uma apreciação nessa forma em fazer Matemática (Aplicada). O Prof. Ablowitz, plenarista deste Colóquio, é um dos autores de um belíssimo livro em Análise Complexa.

Em nenhum Capítulo temos a intenção de fazer uma apresentação completa de um tema que seja, a começar pela breve revisão em alguns tópicos corriqueiros de um curso introdutório. Mas em seguida apresentamos nossa primeira novidade, atípica em cursos de Análise Complexa: uma introdução à Transformação de Schwarz-Christoffel juntamente com um tutorial sobre como fazer este tipo de aplicação conforme utilizando o MATLAB. Diversas rotinas MATLAB foram desenvolvidas pelo Prof. Driscoll e estão disponíveis (gratuitamente) na Internet. Este texto contém todas as informações necessárias para baixar as rotinas e começar a brincar com elas.

No Capítulo 3 rerepresentamos parte do texto de um Curso ministrado no Colóquio de 2001, texto este que está esgotado. Neste Capítulo mostramos como formular uma sub-área de Dinâmica dos Fluidos sobre a estrutura de Análise Complexa. Essa parte deve ser novidade para a grande maioria dos alunos de graduação pois não faz parte da ementa de Cursos em Análise Complexa. Além disso é muito importante como introdução ao quarto Capítulo, o mais avançado deste Curso e que visa a seduzir os mais jovens como um desafio intelectual. Neste Capítulo introduzimos Integrais Singulares como um interessante objeto de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos, mas também de interesse em Análise Matemática e no tratamento de singularidades. Demonstramos teoremas que extraem um sentido de integrais que normalmente não existiriam.

Em suma, em todo este curso queremos mostrar como singularidades são instrumentos ricos do ponto de vista de Análise Matemática e de Modelagem.

Os autores gostariam de agradecer de forma muito especial a Rodrigo Morante por sua valiosa contribuição na formatação deste texto e na confecção de suas diversas figuras.

A. N. faz um agradecimento especial à Roberta Visconti.

A. R. Z. faz um agradecimento especial a seus professores de Análise Complexa, Profa. Concepción Valdés e Prof. Carlos Isnard.

Desde já pedimos desculpas às leitoras por generalizar e nos referirmos sempre *ao leitor*.

Capítulo 1

Breve resumo em Análise Complexa elementar

Neste capítulo fazemos uma breve revisão de alguns conceitos e tópicos introdutórios em Análise Complexa, necessários à compreensão do restante de texto. Desta forma não temos a intenção de apresentar um texto introdutório ao assunto. Simplesmente queremos facilitar a leitura do texto que segue, onde está o foco principal deste Curso.

1.1 Funções analíticas

Seja G um aberto em \mathbb{C} e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que $f(z)$ é *diferenciável* no ponto $a \in G$ se existir o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \equiv f'(a) \equiv \frac{df}{dz}(a).$$

Fazemos a seguinte importante observação: $h \in \mathbb{C}$, ou seja h pode se aproximar da origem em qualquer direção! Isto é particular de funções a valores complexos. Uma importante consequência deste

fato são as equações de Cauchy-Riemann, conforme veremos no decorrer do Capítulo.

A partir de agora nossa terminologia é a seguinte. Dizemos que f' e diferenciável em G quando f for diferenciável em todo $z \in G$, aberto. Quando f' for contínua, dizemos que f é continuamente diferenciável.

Definição 1.1. A função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de *analítica* se f é continuamente diferenciável em G .

Contraste esta Definição 1.1 de analiticidade de uma função complexa com a correspondente definição para funções reais [20], p. 228:

Definição 1.2. A função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é *analítica para cada $a \in I$* (intervalo aberto) se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n \rightarrow f(a+h),$$

ou seja, a série converge para o valor da função desde que $|h| < \varepsilon$.

Para funções complexas consideramos apenas uma derivada para garantir analiticidade. Aqui estamos usando infinitas derivadas. E tem mais! Existem funções reais que são C^∞ mas não são analíticas. No exemplo a seguir vemos que a série não converge para o valor da função no ponto desejado.

Exemplo 1.1. Função C^∞ mas que não é analítica:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-1/x^2}, \\ f'(x) &= \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0 \end{aligned}$$

Veja a Figura 1.1. A série de Taylor em torno de zero é identicamente zero.

O incrível é que com a estrutura de variáveis complexas, ou seja a partir da definição da derivada complexa, a propriedade de uma

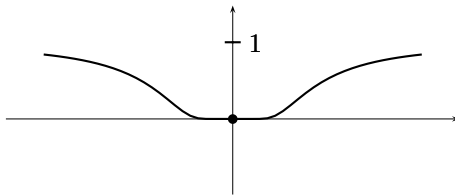


Figura 1.1: Função C^∞ mas não analítica, $f(x) = e^{-1/x^2}$.

função ser analítica decorre automaticamente da existência da primeira derivada!

Vale recordarmos que se as funções f e g são analíticas em G então $f + g$, fg e f/g também são analíticas (a última desde que $g \neq 0$). Temos também a Regra da Cadeia: sejam f e g analíticas em G e Ω , respectivamente. Suponha que $f(G) \subset \Omega$. Então $g \circ f$ é analítica em G e

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad \forall z \in G.$$

Se dissermos que f tem derivada em A , então A é um aberto. Se A não for aberto então f é analítica em um aberto G e $A \subset G$.

Um resultado clássico [10] nos diz que séries de potência representam funções analíticas. Este importante resultado está no enunciado da proposição e corolário a seguir:

Proposição 1.1. *Seja a função $f(z)$ definida pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$. Então*

1. *A série*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$$

tem raio de convergência R para cada $k \geq 1$.

2. *$f^{(k)}(z)$ é dada pela série acima, $k \geq 1$, $|z-a| < R$ e f tem infinitas derivadas na bola $B(a; R)$.*

3. Para cada $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Corolário 1.1. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ tem raio de convergência R então a série representa uma função analítica $f(z)$ em $B(a; R)$, ou seja

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

As demonstrações podem ser encontradas nos livros de texto indicados em nossas referências, como por exemplo em Conway [10].

Um resultado ainda mais poderoso nos diz que basta $f(z)$ ser diferenciável em, por exemplo, $B(a; R)$ para automaticamente ser C^∞ e ter uma série de potências convergente para valores de $f(z)$, $z \in B(a; R)$. Este resultado pode ser obtido através da representação integral de Cauchy.

Ainda relativo à série de potências, vejamos agora alguns fatos importantes.

Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} (z^n/n!)$. Pelo teste da razão [10] temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1).$$

A série acima tem raio de convergência infinito, ou seja, converge para todo $z \in \mathbb{C}$. A convergência é uniforme em cada compacto de \mathbb{C} . É natural que esta série de potências represente uma função analítica bastante conhecida e com definição semelhante ao caso real.

Definição 1.3. A função exponencial para $z \in \mathbb{C}$ é dada por

$$\exp(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Estudaremos algumas propriedades desta função assim como da função logaritmo. Mas antes recordemos as seguintes propriedades de séries de potências. As demonstrações podem ser encontradas no livro do Conway [10], entre outros.

Proposição 1.2. *Sejam $\sum a_n, \sum b_n$ duas séries que convergem absolutamente, ou seja, $\sum |a_n|, \sum |b_n|$ convergem. Omitimos os índices no somatório para o texto ficar mais leve.*

Seja $c_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$. Então $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$ converge absolutamente. O mesmo vale para $\sum d_n$, onde $d_n = a_n + b_n$.

Agora uma propriedade semelhante, só que para série de potências. Vimos que estas representam funções analíticas.

Proposição 1.3. *Sejam $\sum a_n(z-a)^n, \sum b_n(z-a)^n$ séries de potências com raio de convergência maior ou igual do que $r > 0$. Então $\sum (a_n + b_n)(z-a)^n$ e $\sum c_n(z-a)^n$, com c_n definido acima, têm raio de convergência maior ou igual do que $r > 0$ e*

$$\begin{aligned}\sum (a_n + b_n)(z-a)^n &= \sum a_n(z-a)^n + \sum b_n(z-a)^n, \\ \sum c_n(z-a)^n &= \sum a_n(z-a)^n \times \sum b_n(z-a)^n,\end{aligned}$$

para $|z-a| < r$.

1.2 Duas funções complexas importantes neste curso: e^z e $\log z$

Exemplo 1.2. Vimos que $f(z) = e^z$ é analítica em \mathbb{C} , logo

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!}$$

pode ser calculada desta forma. Note também que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Conclusão: $f'(z) = e^z$ como no caso real.

Temos diversas propriedades para esta função complexa, que poderiam ter sido antecipadas devido à analogia com o caso real. Em particular:

1. Seja $g(z) = e^z e^{-z}$. Então $g'(z) = e^z e^{-z} - e^z e^{-z} \equiv 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
Então $g(z)$ é constante com $g(0) = 1$. Assim concluímos que $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.
2. Já que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ então $e^{\bar{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{z})^n/n! = \overline{(e^z)}$.
Então:

$$|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = \exp(2\operatorname{Re} z),$$

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1.$$

Como era de se esperar $z = e^{i\theta}$ são números complexos sobre o círculo unitário.

Em analogia com e^x definimos

$$\cos z \equiv 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$\sin z \equiv z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

As seguintes propriedades valem:

1. Ambas as séries têm raio de convergência $R = \infty$. Portanto, $\cos z$ e $\sin z$ são analíticas em \mathbb{C} .
2. Podemos diferenciar a série de potências e concluir que

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

3. Estas séries de potências convergem absolutamente:

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

4. Temos que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, mas isso não significa que as funções \sin e \cos sejam limitadas por 1, em contraste com o caso real.

Obtemos também

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

a conhecida fórmula de Euler.

5. Já sabemos que $e^{i\theta}$ representa um número sobre o círculo unitário. Reciprocamente todo número sobre o círculo unitário pode ser representado como $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Logo, $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$z = |z| e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Chamamos θ de argumento de z ($\theta = \arg z$). O argumento pode ser escolhido num outro intervalo de comprimento 2π . O argumento, como função de z , não está determinado de forma unívoca. Finalmente:

$$e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}, \\ \arg e^z = \operatorname{Im} z. \end{cases}$$

Definição 1.4. Seja f tal que $f(z + c) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$. Então f é *periódica com período c* .

Sabemos que e^x não é uma função periódica. Vejamos no entanto o que acontece no caso complexo.

Exemplo 1.3. A função $e^z = e^{z+c} = e^z e^c$ será periódica se $e^c = 1$. Mas isto é possível pois $e^c = e^{2\pi ki} = \cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k) = 1$. Portanto o período é $c = 2\pi i$.

Veremos a seguir a consequência deste fato importante, ou seja, da exponencial complexa ser periódica. Em particular isto terá um grande impacto no logaritmo complexo, que precisará de cuidados especiais para ser definido como a função inversa da exponencial. Um dos pontos deste texto é mostrar como essa aparente “dor de cabeça” é na verdade uma bela ferramenta no trato de singularidades, e que pode ser utilizada em Modelagem Matemática de problemas, por exemplo, em Dinâmica dos Fluidos.

Definição 1.5. Queremos definir a função $\log w$, $w \in \mathbb{C}$ de tal forma que

$$w = e^z$$

quando $z = \log w$.

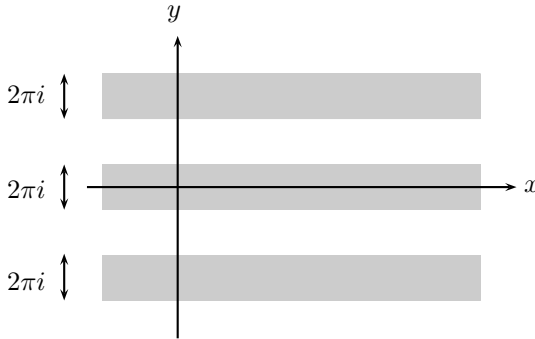


Figura 1.2: Comportamento de e^z repetido em cada faixa.

Listemos as dificuldades com este problema de inverter e^z :

1. A função e^z não é injetora (não é 1-a-1).
2. Considere $z \in \mathbb{C}$, onde $e^z \neq 0$. Como fazemos para definir $\log w$ quando $w \rightarrow 0$? Para examinar esta questão sabemos que se $z = x + iy$, então $|w| = e^x$, $y = \arg w + 2\pi k$. Sabemos inverter a parte real $|w| = e^x$ ou seja, escrevemos que

$$\{\ln |w| + i(\arg w + 2\pi k) : k \text{ inteiro}\} \quad (1.1)$$

representam as possíveis soluções de $w = e^z$, para um número complexo w dado. Isto é consequência da imagem de cada faixa representada na Figura 1.2 ser uma cópia do plano complexo w , onde $w = e^z$. Assim, sob ação do logaritmo, o plano complexo w tem infinitas (possíveis) pré-imagens no plano z .

Em resumo, isto nos leva à seguinte definição.

Definição 1.6 (Ramo do logaritmo). Seja $G \subset \mathbb{C} - \{0\}$ um aberto conexo com $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $z = \exp(f(z))$, para todo $z \in G$. Então f é um *ramo do logaritmo*.

Na definição acima f faz o papel da inversa de e^z dentro de G . Para tentar tornar esta discussão mais transparente estudemos o seguinte exemplo:

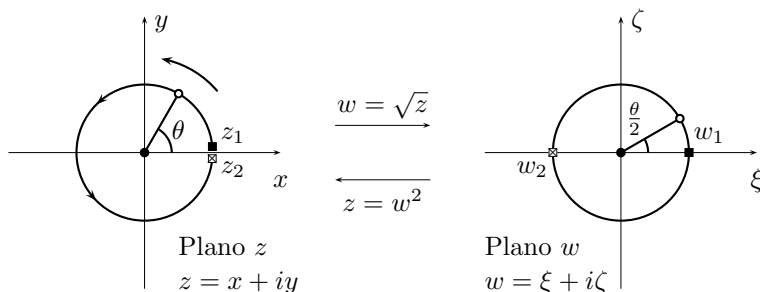


Figura 1.3: Ramo da função raiz quadrada.

Exemplo 1.4. Considere

$$w = f(z), \quad z = w^2.$$

Seja $z = e^{i\theta}$. Então podemos tentar definir a raiz quadrada como sendo $w = f(z) = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}$. Veja a Figura 1.3. Por exemplo,

$$\begin{aligned} z_1 = e^{i0} &\Rightarrow f(z_1) = w_1 = e^{i0} = 1, \\ z_2 = e^{i2\pi} &\Rightarrow f(z_2) = w_2 = e^{i\pi} = -1, \\ z_3 = e^{i4\pi} &\Rightarrow f(z_3) = w_3 = e^{i2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Não temos uma função bem definida, $z = 1$ tem múltiplas imagens! Para termos uma função bem definida precisamos restringir os valores de θ . Assim $0 < \theta < 2\pi$ representa um ramo da função $f(z)$ e $2\pi < \theta < 4\pi$ representa o outro ramo. Neste caso só temos dois ramos diferentes no sentido que se tomarmos $\theta : 4\pi < \theta < 6\pi$ a função vai ser a mesma que para $0 < \theta < 2\pi$. O ponto $z = 0$ (em torno do qual detectamos o problema de multi-valores da função) é chamado de *ponto de ramificação*. A *linha de corte* é uma linha partindo do ponto de ramificação, indicando como permitimos a variação do argumento, ou seja, indicando com qual ramo estamos trabalhando. Veja a Figura 1.4, na qual foi escolhido o ramo $0 < \theta < 2\pi$.

A cada ramo corresponde uma folha da Superfície de Riemann representada na Figura 1.5. Por *Superfície de Riemann* entendemos uma extensão do plano complexo a uma superfície com várias folhas “repetindo” \mathbb{C} . Esta descrição serve para ilustrarmos como cada

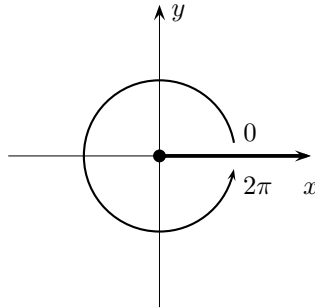


Figura 1.4: Ramo do argumento, \bullet : ponto de ramificação, $-$: corte.

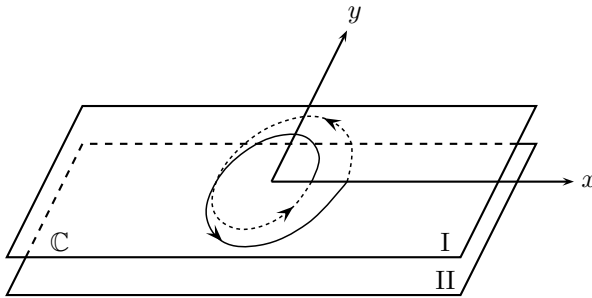


Figura 1.5: Superfície de Riemann de duas folhas.

função com múltiplos valores em um ponto fica bem definida na Superfície de Riemann apropriada. No caso da Figura 1.5, a linha de corte é o eixo real positivo. As folhas estão unidas através da linha de corte da forma indicada pela curva: começando na folha I com linha contínua, a curva dá uma volta em torno de zero e vai para a folha II, a curva (agora de linhas pontilhadas) dá mais uma volta ao redor de zero e volta para o ponto inicial em I. Não há dúvidas sobre o valor da função em cada ponto: a folha onde estivermos determina o ramo. Criamos uma função contínua e injetora na Superfície de Riemann para a função \sqrt{z} .

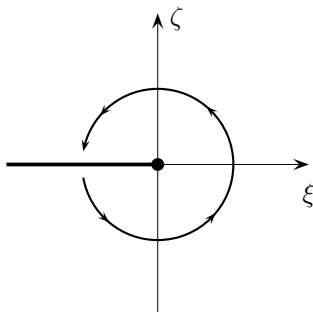


Figura 1.6: Ramo do logaritmo.

Voltemos ao caso anterior para estudarmos um ramo do logaritmo. Seja $G \equiv \mathbb{C} - \{w : w \leq 0\}$. Note como estamos restringindo o argumento de w , veja a Fig. 1.6. Desta forma G é aberto e conexo e cada $w \in G$ pode ser representado de forma única, como por exemplo

$$w = |w|e^{i\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Neste ramo temos $f(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, $r \equiv |w|$. Não temos ambigüidades quanto ao argumento θ .

Para o logaritmo existem infinitos ramos, associados aos valores de k no argumento, Eq. (1.1). Portanto, temos infinitas folhas na Superfície de Riemann correspondente ao logaritmo, veja a Figura 1.7.

Agora podemos usar a seguinte proposição para definir o logaritmo como uma função analítica em um aberto.

Proposição 1.4. *Sejam G e Ω abertos em \mathbb{C} tais que $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ são contínuas com $f(G) \subset \Omega$ e $g(f(z)) = z$ para todo $z \in G$. Se g for diferenciável com $g'(w) \neq 0$ então f é diferenciável com*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Se g for analítica (continuamente diferenciável) então f é analítica.

Corolário 1.2. *Um ramo do logaritmo é analítico e sua derivada é z^{-1} .*

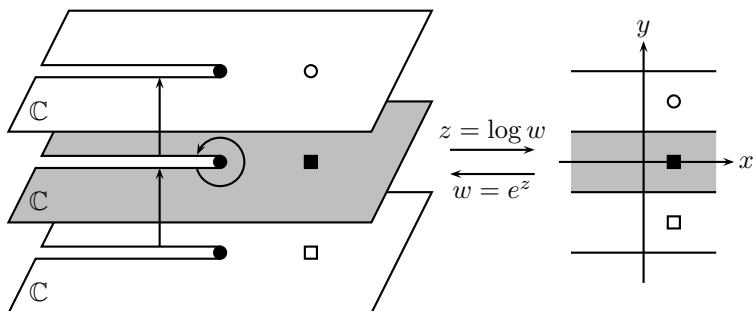


Figura 1.7: Superfície de Riemann de infinitas folhas.

Para um ramo do logaritmo as seguintes propriedades são válidas:

- $f(z) = \log z = w$,
- $g(w) = e^w$, onde $g(f(z)) = z$,
- $g'(w) = e^w$, com $g'(f(z)) = z \Rightarrow f'(z) = z^{-1}$.

O *ramo principal do logaritmo* é o ramo definido acima para $\mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$ com $\theta \in (-\pi, \pi)$. Para outras escolhas do argumento simplesmente chamamos cada um destes ramos de um *ramo do logaritmo*. Em geral quando nada é dito sobre o ramo do logaritmo é porque estamos trabalhando com o ramo principal.

1.3 Equações de Cauchy-Riemann e funções harmônicas

De agora em diante vamos abreviar nossa terminologia de forma que

aberto + conexo \equiv região.

Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica com

$$\begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(z), \\ z = x + iy. \end{cases}$$

Tomemos duas direções particulares na definição da derivada complexa

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Primeiro com $h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}.$$

Para $h \rightarrow 0$,

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2)$$

Agora em outra direção, pelo eixo imaginário, temos que

$$\frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + i \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{ih}.$$

No limite $h \rightarrow 0$:

$$\frac{df}{dz} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.3)$$

Como (1.2) e (1.3) devem ter o mesmo valor, concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Este sistema de EDPs (Equações Diferenciais Parciais) constitui as chamadas *equações de Cauchy-Riemann*. Usando a suavidade de u e v (partes real e imaginária de uma função analítica) então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Somando as duas EDPs temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta u = 0,$$

onde Δ é o operador Laplaciano. A função $u(x, y)$ é dita *harmônica*, e o mesmo vale para $v(x, y)$. No Capítulo sobre Dinâmica dos Fluidos veremos uma bela interpretação das equações de Cauchy-Riemann, além de aplicações deste tipo de formulação, através de potenciais

harmônicos e de potenciais complexos. Faremos uma cuidadosa construção do modelo em Dinâmica dos Fluidos de forma que a velocidade complexa de um fluido tenha uma interpretação física muito clara.

Temos também o seguinte resultado, para o qual a demonstração se encontra, por exemplo, no livro do Conway [10]. Neste texto nos será útil a direção demonstrada acima de que as partes real e imaginária de uma função analítica satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.

Teorema 1.1. *Sejam $u(x, y)$, $v(x, y)$ funções a valores reais definidas em uma região G tais que suas derivadas parciais sejam contínuas. Então $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) \equiv u + iv$ é analítica se e somente se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.*

Um outro problema de interesse, de utilidade em Dinâmica dos Fluidos é proposto a seguir. Seja G uma região tal que $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica. Existe uma função $v(x, y)$, $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ é analítica? Quando isto acontece dizemos que v é a *conjugada harmônica de u* . Nem sempre é fácil resolver este problema. Integrais singulares aparecem neste contexto, integrais essas semelhantes a algumas que veremos mais adiante neste texto [1, 12]. As integrais singulares associadas a conjugados harmônicos são chamadas de *Transformadas de Hilbert*. No entanto o tema é por demais avançado diante de nossa proposta de um texto introdutório. Mas podemos fazer uma pergunta que é fácil: são únicas as conjugadas harmônicas?

1.4 Funções analíticas estudadas como aplicações

Voltemos a olhar para $f(z) = z^2 = \xi + i\zeta$. Temos que $x^2 - y^2 + i(2xy) = \xi(x, y) + i\zeta(x, y)$. Mudamos a notação das partes real e imaginária de f para conectar com a leitura do próximo capítulo. Então através das constantes reais c e d escrevemos

$$\xi(x, y) = x^2 - y^2 = c$$

e

$$\zeta(x, y) = 2xy = d$$

que nos dão curvas de nível no plano $w = \xi + i\zeta$.

Para podermos analisar/estudar aspectos geométricos entre essas duas curvas comecemos pela definição abaixo.

Definição 1.7. Um *caminho* na região $G \subset \mathbb{C}$ é uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow G$, dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Quando $\gamma'(t)$ existe $\forall t \in [a, b]$ com $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, então dizemos que o *caminho é suave*. Se, além disso, $\gamma' \neq 0$ em $[a, b]$ dizemos que o caminho é *regular*. O caminho γ é *suave-por-partes* na partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, (*regular-por-partes*), quando γ é suave (*regular*) em cada sub-intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

Chamamos a atenção que

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

existe em $[a, b]$ com $\lim_{h \downarrow 0}$ e $\lim_{h \uparrow 0}$ existindo em a e b respectivamente. Como a parametrização é real temos que $\operatorname{Re} \gamma$ e $\operatorname{Im} \gamma$ têm derivadas bem definidas de acordo com o limite acima, ou seja, o da definição de derivada no sentido (usual) de funções reais.

Agora vamos estudar como se modificam os ângulos entre duas curvas quando transformadas por uma função analítica. Vamos supor que o caminho γ é regular, ou seja, $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Isto implica que existe o *vetor tangente de γ em $z = \gamma(t)$* : $[\operatorname{Re} \gamma'(t), \operatorname{Im} \gamma'(t)]^T$. O vetor tangente está orientado no mesmo sentido da curva γ e seu ângulo de inclinação é igual ao $\arg \gamma'(t)$.

Assim se temos dois caminhos suaves γ_1 e γ_2 tais que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $\gamma_1'(t_1) \neq 0$, $\gamma_2'(t_2) \neq 0$, podemos definir o *ângulo entre os dois caminhos em z_0* como $\arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1)$.

Uma outra propriedade importante. Seja $\gamma \subset G$ um caminho suave, e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, Então $\sigma = f \circ \gamma$ também é um caminho em \mathbb{C} , onde

$$\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Seja $z_0 = \gamma(t_0)$, $\gamma'(t_0) \neq 0$ e também $f'(z_0) \neq 0$. Então $\sigma'(t_0) \neq 0$ e

$$\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0).$$

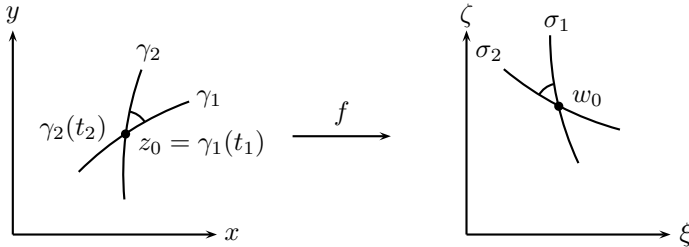


Figura 1.8: Ângulo preservado pela função analítica f quando $f'(z_0) \neq 0$.

Assim obtemos que

$$\arg f'(z_0) = \arg \sigma'(t_0) - \arg \gamma'(t_0). \quad (1.4)$$

Sejam $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, $\gamma_1'(t_1) \neq 0 \neq \gamma_2'(t_2)$, com vetores tangentes não paralelos. Considere também que $\sigma_1 \equiv f \circ \gamma_1$, $\sigma_2 \equiv f \circ \gamma_2$. Da Eq. (1.4) temos que

$$\arg \sigma_2'(t_2) - \arg \sigma_1'(t_1) = \arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1). \quad (1.5)$$

Veja a Figura 1.8.

Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 1.2. *Seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, analítica. Então f preserva ângulos em cada ponto $z \in G$ onde $f'(z) \neq 0$.*

Diante da exposição acima a seguinte definição é bem-vinda.

Definição 1.8. A função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ que preserva ângulos com

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}$$

existindo, para todo $a \in G$, é chamada de *aplicação conforme*.

Se f for analítica com $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in G$ então f é conforme. O contrário é verdadeiro: quando a função f for conforme em z_0 , então a função será analítica em z_0 .

Exemplos gráficos serão apresentados no Capítulo 2, demonstrando com grande precisão as curvas de nível indicadas no texto acima.

Começemos com um exemplo que será revisitado no próximo Capítulo.

Exemplo 1.5. Considere

$$f(z) = e^z.$$

Seja a reta $z = c + iy$, então $w = e^c e^{iy} = r e^{iy}$, a imagem é um círculo de raio r . Ambas curvas estão representadas na Figura 1.9 por uma linha contínua grossa. Considere também a reta $z = x + id$ paralela ao eixo x , cuja imagem $w = e^x e^{id} = e^x e^{i\theta}$ é um raio partindo de zero com ângulo $\theta = d$. O ângulo reto é mantido nas curvas imagem. Observe que quando

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty, & \quad w = e^x e^{i\theta} \rightarrow 0, \\ x \rightarrow +\infty, & \quad |w| = e^x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Também temos que

$$z = x + i\frac{\pi}{2} \Rightarrow w = e^x e^{i\pi/2} = ie^x \in \mathbb{I}.$$

Quando

$$z = x + iy \rightarrow x + i\pi, \quad w \rightarrow -e^x,$$

e se

$$z = x + iy \rightarrow x - i\pi, \quad w \rightarrow -e^x.$$

Em resumo, $f(z) = e^z$ definida em $G = \{z : -\pi < \text{Im } z < \pi\}$ é uma aplicação 1-a-1 com imagem

$$f(G) = \Omega = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}.$$

Exemplo 1.6. Consideremos a inversa da função definida no Exemplo 1.5. Trata-se do ramo principal do logaritmo. Restringindo o domínio a $\Omega_0 = \Omega \cap \{z : |z| \leq 1\}$ a imagem será a metade da faixa, veja a Figura 1.10. Repare na deformação da fronteira de Ω_0 e na preservação dos ângulos.

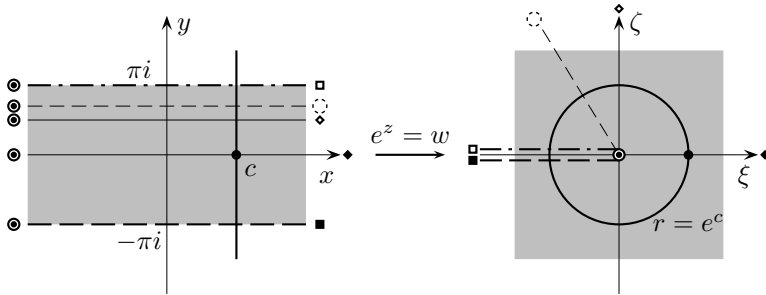


Figura 1.9: Aplicação conforme e^z da faixa na região $\Omega = \mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$.

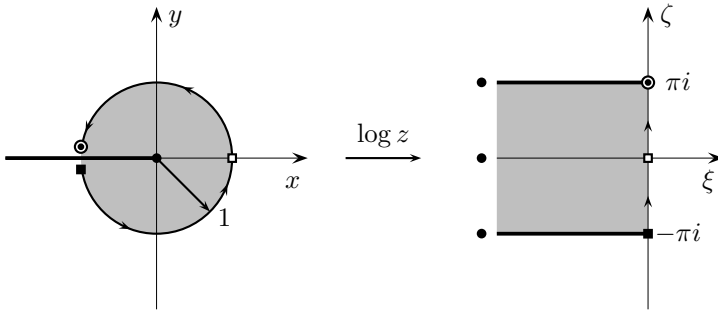


Figura 1.10: Mapeamento da região circular Ω_0 na metade da faixa de largura 2π .

1.4.1 Transformações de Möbius

Definição 1.9. Uma aplicação da forma

$$S(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d}$$

é chamada de *transformação linear (fracionada)*. Se a, b, c e d forem tais que $ad - bc \neq 0$ então $S(z)$ é chamada de *transformação de Möbius*.

Assim se $S(z)$ é de Möbius então a aplicação inversa

$$S^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

existe e $S(S^{-1}(z)) = S^{-1}(S(z))$. Também temos a propriedade que se S e T são duas transformações lineares então $S \circ T$ também é uma transformação linear. Note que dada

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq 0$, então

$$S(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)} \Rightarrow a, b, c \text{ e } d \text{ não são únicos.}$$

Ainda, denotando por \mathbb{C}_∞ os complexos estendidos ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$), e considerando que $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ então

$$S(\infty) = a/c, \quad S(-d/c) = \infty.$$

Isto nos indica (simbolicamente) como são mapeados os pontos no infinito. E temos o seguinte importante teorema sobre transformações de Möbius como aplicações conformes.

Teorema 1.3. *Uma transformação de Möbius leva círculos em círculos.*

Esse é um resultado clássico em Análise Complexa e a demonstração pode ser encontrada em, por exemplo, [3, 10]. Com a interpretação acima sobre os complexos estendidos, devemos lembrar que,

por exemplo, o semiplano superior pode ser pensado como um círculo de raio infinito e borda coincidindo com o eixo real.

Temos alguns casos particulares de transformações de Möbius. Primeiro, $S(z) = z + \alpha$ é uma translação, onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Temos também $S(z) = \alpha z$ uma dilatação com $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $S(z) = e^{i\theta} z$ uma rotação, e por fim $S(z) = 1/z$ uma inversão.

Proposição 1.5. *A transformação de Möbius S é uma composição de translações, dilatações e inversões [3, 10].*

Por fim uma propriedade útil na construção de aplicações conformes (de Möbius), que transformam uma região dada em outra.

Seja $S(z)$ uma transformação de Möbius com $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$, distintos, onde $S(a) = \alpha$, $S(b) = \beta$, $S(c) = \gamma$. Seja $T(z)$ outra transformação de Möbius com as mesmas propriedades. Então $R \equiv T^{-1} \circ S$ tem a, b, c como pontos fixos:

$$R(a) = a, \quad R(b) = b, \quad R(c) = c.$$

Mas uma transformação de Möbius só pode ter dois pontos fixos:

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \Rightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Então $T^{-1} \circ S = I$ e S fica *determinada/caracterizada* pela sua ação sobre *três* pontos em \mathbb{C}_∞ . Usaremos este fato para (manualmente/por inspeção) construirmos, por exemplo, uma aplicação do semiplano no disco unitário. Veremos este exemplo no próximo capítulo.

1.5 Integração complexa

Sabemos que a *integral indefinida* de $df = f'(z) dz$ (“anti-derivada”), é a função cuja derivada é igual à função analítica $f'(z)$ em uma região. Em Análise Complexa as *integrais definidas* em geral são tomadas sobre arcos diferenciáveis (caminhos diferenciáveis), ou diferenciáveis por partes. Usando a parametrização do caminho (ou arco) podemos nos apoiar na construção de *integrais reais* definidas.

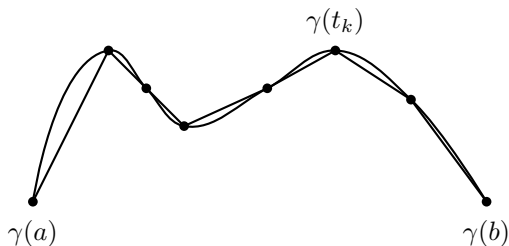


Figura 1.11: Partição P para uma função γ .

1.5.1 Integral de linha

Vamos iniciar esta parte sobre integrais com uma revisão relâmpago em conceitos associados a integrais de Riemann-Stieltjes [10].

Definição 1.10. A função

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad [a, b] \in \mathbb{R},$$

é dita ser de *variação limitada* (VL) se existir uma constante $M > 0$ tal que para toda partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ de $[a, b]$:

$$V(\gamma, P) \equiv \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

Veja a Fig. 1.11.

A variação total de γ , $V(\gamma)$ é definida por

$$V(\gamma) \equiv \sup_P \{V(\gamma, P) : P, \text{ partições de } [a, b]\}.$$

Um contraexemplo: $\gamma(t) = t + i \cos(1/t)$, $t \in [0, 1]$ não é de variação limitada.

Vejam os resultados úteis, que não serão demonstrados para podermos avançar mais rapidamente nos temas principais deste texto.

Proposição 1.6. *Seja a função $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de variação limitada.*

1. P, Q , partições de $[a, b]$, $P \subset Q$. Então $V(\gamma, P) \leq V(\gamma, Q)$.
2. $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, também VL, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então $\alpha\gamma + \beta\sigma$ é VL, com

$$V(\alpha\gamma + \beta\sigma) \leq |\alpha|V(\gamma) + |\beta|V(\sigma).$$

Proposição 1.7. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por partes (γ' contínua por partes). Então γ é VL com*

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Teorema 1.4. *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (VL) e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (contínua). Então existe $I \in \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ conseguimos obter $\delta > 0$ com a propriedade seguinte: dada a partição $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$ de $[a, b]$, tal que*

$$\|P\| = \max\{(t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq m)\} < \delta,$$

vale

$$\left| I - \sum_{k=1}^m f(\zeta_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \varepsilon,$$

para qualquer escolha de pontos ζ_k , $t_{k-1} \leq \zeta_k \leq t_k$.

Em resumo, a soma converge para I onde

$$\sum_{k=1}^m f(\zeta_k) \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{\Delta t_k} \Delta t_k$$

lembra uma integral numérica sobre uma *discretização* (uma grade) do caminho γ .

Assim temos que

$$I = \underbrace{\int_a^b f d\gamma}_{\text{integral de Stieltjes}} = \underbrace{\int_a^b f(t) d\gamma(t)}_{\text{na forma parametrizada}}.$$

Proposição 1.8. *Sejam f, g contínuas em $[a, b]$; γ, σ VL em $[a, b]$. Então para complexos α e β :*

$$1. \int_a^b (\alpha f + \beta g) d\gamma = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b g d\gamma.$$

$$2. \int_a^b f d(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b f d\sigma.$$

Proposição 1.9. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ VL; $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Então*

$$\int_a^b f d\gamma = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f d\gamma.$$

Teorema 1.5. *Seja γ suave por partes e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Então*

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t) dt.$$

Este teorema é bastante útil.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho. Então o conjunto

$$\text{tr } \gamma = \{z = \gamma(t) : a \leq t \leq b\}$$

é chamado de o *traço de γ* . As seguintes propriedades valem:

- O traço de γ é compacto.
- γ é um *caminho retificável* se γ é VL.
- $V(\gamma, P)$ é uma soma de segmentos retos.
- γ retificável $\Leftrightarrow \gamma$ tem comprimento finito $= V(\gamma)$.
- γ suave por partes $\Rightarrow \gamma$ é retificável $\Rightarrow V(\gamma) = \int_a^b \gamma'(t) dt$.
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ retificável com $\text{tr } \gamma \subset E \subset \mathbb{C}$. Se $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua então $f \circ \gamma$ é contínua em $[a, b]$.

Definição 1.11. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ retificável, $f : \text{tr } \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ contínua (quando definida sobre o traço de γ). Então escrevemos*

$$\int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t) = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz$$

para a *integral de linha* ao longo de γ .

Exemplo 1.7.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it}.$$

Note que $z \neq 0$ ao longo de $\text{tr } \gamma$.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it}) \frac{dz}{dt} dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} (ie^{it}) dt = 2\pi i$$

ou

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 1,$$

onde γ é o círculo unitário.

Exemplo 1.8. Seja m um inteiro positivo. Então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^m dz &= \int_0^{2\pi} e^{imt} (ie^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \\ &= i \left[\int_0^{2\pi} \cos(m+1)t dt + i \int_0^{2\pi} \sin(m+1)t dt \right] = 0. \end{aligned}$$

1.6 Índice de caminho fechado

Acabamos de ver que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = (2\pi i)n$$

se $\gamma(t) = a + e^{2\pi nit}$.

Proposição 1.10. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, retificável, fechada, suave, e $a \notin \text{tr } \gamma$. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \text{inteiro}.$$

Demonstração. Usando uma parametrização $\gamma(t)$ (para esta curva suave), onde $z \in \text{tr } \gamma$ e $dz = \gamma'(t) dt$, definimos

$$g(t) \equiv \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Obviamente $g(0) = 0$ e $g(1) = \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz$. Também temos que

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ou

$$g'(t)(\gamma(t) - a) - \gamma'(t) = 0.$$

Com o fator de integração $e^{g(t)}$ obtemos que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{g(t)} (\gamma(t) - a) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{g(t)} (\gamma(t) - a) = \text{constante}$$

$$e^{g(0)} (\gamma(0) - a) = (\gamma(0) - a) \stackrel{\text{constante}}{=} e^{g(1)} (\gamma(1) - a).$$

Portanto como a curva é fechada

$$e^{g(1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad g(1) = 2\pi i n, \quad n \text{ inteiro.}$$

□

Então provamos a proposição

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = n, \quad \text{inteiro.}$$

Naturalmente surge a definição de *índice de uma curva fechada*. Este importante conceito será usado no Capítulo 4 sobre integrais singulares.

Definição 1.12. Seja γ um caminho fechado retificável em \mathbb{C} . Então para $a \notin \text{tr } \gamma$

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz$$

é chamado de *índice de γ* e dá uma idéia do *número efetivo de voltas* (*winding number*) que $\gamma(t)$ dá em torno de a . Está associado à variação do argumento de $\gamma(t)$ neste percurso ao redor de a .

Proposição 1.11. *Sejam γ, σ retificáveis fechadas, compartilhando do mesmo ponto inicial. Então*

1. $n(\gamma, a) = -n(-\gamma, a)$ para todo $a \notin \text{tr } \gamma$.

2. $n(\gamma + \sigma, a) = n(\gamma, a) + n(\sigma, a)$ para todo $a \notin \text{tr } \gamma \cup \text{tr } \sigma$.

Vale lembrar que neste caso γ, σ são curvas definidas em $[0, 1]$, com $\gamma(1) = \sigma(0)$. Assim uma parametrização natural para a combinação dos dois caminhos é

$$(\gamma + \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \sigma(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Acima estudamos o caso onde

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt = 2\pi i n$$

quando $\gamma \equiv a + re^{i(2\pi n)t}$. Se usássemos nossa intuição de variáveis reais buscaríamos fazer o cálculo da forma

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = \log[\gamma(t) - a]_{t=0}^{t=1}.$$

Dois problemas surgiriam:

1. Com $\gamma(t)$ uma curva fechada obteríamos $\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = 0$. O resultado está errado!
2. Não temos como definir um ramo de $\log(z - a)$ quando o caminho completa um ciclo completo entorno do zero do \log . O corte do ponto de ramificação cortaria o caminho.

A alternativa (correta) para fazer sentido deste cálculo é tomar

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz &= \log[\gamma(1) - a] - \log[\gamma(0) - a] = \\ &= \left\{ \ln |\gamma(1) - a| + i \arg[\gamma(1) - a] - (\ln |\gamma(0) - a| + \right. \\ &\quad \left. + i \arg[\gamma(0) - a]) \right\} = i \{ \arg[\gamma(1) - a] - \arg[\gamma(0) - a] \}. \end{aligned}$$

Agora sim, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{índice} &\equiv n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz, \\ \text{do caminho} &= \frac{i}{2\pi} \left[\arg(\gamma(1) - a) - \arg(\gamma(0) - a) \right]. \end{aligned}$$

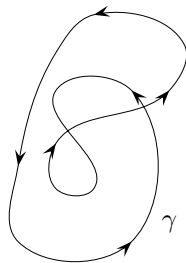


Figura 1.12: Curva γ e o aberto G com quatro regiões simplesmente conexas.

Com esse cálculo estamos contando o *número efetivo de voltas* em torno de um ponto. Como temos uma diferença de *argumentos* não importa o *ramo escolhido*.

No último Capítulo estudaremos o que acontece quando o ponto $z = a$ cruza o caminho γ , de um lado para o outro do domínio multiplamente conexo. Veremos que nosso objeto de controle é o índice da curva. O próximo teorema apresenta um resultado nesta direção.

Teorema 1.6. *Seja γ retificável, fechada e $G \equiv \mathbb{C} - \text{tr } \gamma$ um aberto. Então $n(\gamma, a)$ é constante para a em uma componente conexa de G . Em particular, $n(\gamma, a) = 0$ quando a está na componente ilimitada de G . Veja a Figura 1.12.*

Demonstração. Seja $f(a) : G \rightarrow \mathbb{C}$ onde $f(a) = n(\gamma, a)$. Detalhes da demonstração podem ser encontradas na página 82 do livro do Conway [10]. No entanto a idéia da demonstração é:

- Mostrar que f é contínua.
- Como conseqüência deste fato teremos que:
 - Se D é uma componente conexa de $G \Rightarrow f(D)$ é conexo.
 - $f(G) \subset \mathbb{Z}$ pois γ é fechada, portanto $f(D)$ é constante.

□

1.7 A Fórmula Integral de Cauchy e o Teorema de Cauchy

Em cursos usuais de Análise Complexa aprendemos que

$$\int_{\text{círculo}} f = 0, \quad \int_{\gamma} f = 0,$$

quando f é analítica em um disco contendo a curva retificável γ . Veja por exemplo a Proposição 2.15 no livro do Conway [10]. Agora queremos estudar casos de domínios mais gerais, como uma região perfurada. Por exemplo, seja $G = \mathbb{C} - \{0\}$, $f(z) = z^{-1}$ analítica em G . A região G tem um “buraco”, um furo, e não é simplesmente conexa. Agora temos um problema: $\int_{\gamma} f \neq 0$. Com G perfurada e f analítica damos analisamos diferentes casos de $\int_{\gamma} f$ através do índice de γ . Vejamos a seguir.

Lema 1.1. *Seja γ retificável, φ uma função definida e contínua em $\text{tr } \gamma$. Para cada $m \geq 1$ definimos*

$$F_m(z) \equiv \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^m} dw, \quad z \notin \text{tr } \gamma.$$

Então F_m é analítica em $\mathbb{C} - \text{tr } \gamma$ com

$$F'_m(z) = mF_{m+1}(z).$$

Demonstração. Um esboço em dois passos.

1. F_m é contínua: para estudar $F_m(z) - F_m(a)$ observe que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(w-z)^m} - \frac{1}{(w-a)^m} = \\ & = \left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-a} \right] \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{(w-z)^{m-k}} \frac{1}{(w-a)^{k-1}} \right) = \\ & = (z-a) \left[\frac{1}{(w-z)^m(w-a)} + \frac{1}{(w-z)^{m-1}(w-a)^2} + \cdots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{(w-z)(w-a)^m} \right] \end{aligned}$$

e usamos técnicas/estimativas semelhantes ao Teorema 1.6, notando que como $\text{tr } \gamma$ é compacto, φ contínua é limitada sobre $\text{tr } \gamma$.

2. Diferenciabilidade: escolhemos um a em $G = \mathbb{C} - \text{tr } \gamma$ com $z \in G$, $z \neq a$ de maneira que

$$\begin{aligned} \frac{F_m(z) - F_m(a)}{z - a} &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)(w - a)^{-1}}{(w - z)^m} dw + \dots + \\ &+ \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)(w - a)^{-m}}{(w - z)} dw. \end{aligned}$$

Como $a \notin \text{tr } \gamma$ então $\varphi(w)(w - a)^{-k}$, $k = 1, \dots, m$, são contínuas em $w \in \text{tr } \gamma$.

Pela primeira parte temos que cada integral acima é contínua, como *função de z* . Desta forma os limites destas integrais existem, caracterizando a existência do limite, escrito à esquerda, que define a derivada de F_m :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{F_m(z) - F_m(a)}{z - a} &= F'_m(a) = \\ &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{m+1}} dw + \dots + \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{m+1}} dw = mF_{m+1}(a). \end{aligned}$$

Além disso obtemos a fórmula de recorrência desejada. \square

Com as ferramentas acima, junto com técnicas em série de potências dentre outras, chegamos a dois teoremas clássicos e vitais em Análise Complexa. Apresentaremos apenas uma versão de cada teorema. Variantes destas versões podem ser encontradas em [1, 3, 10].

1.7.1 Fórmula Integral de Cauchy

Tendo em mãos o índice de uma curva assim como os valores de uma função analítica sobre o traço desta curva, que pode ser interpretado como a fronteira de um domínio, o teorema a seguir nos dá uma bela representação integral para o valor da função analítica em qualquer

ponto interior à curva. Esta será a representação integral de f através de seus valores de fronteira.

Seja G um aberto, subconjunto de \mathbb{C} , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, γ fechada, retificável em G com $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} - G$. Então para $a \in G - \text{tr } \gamma$:

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Seja o caso de uma curva simples γ . Então o valor de f em um ponto interior $z = a$ pode ser calculado usando apenas valores de f conhecidos na fronteira, ou seja, sobre o $\text{tr } \gamma$.

1.7.2 Teorema de Cauchy

Sejam as hipóteses da fórmula integral de Cauchy dada acima. Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ curvas fechadas retificáveis, tais que

$$\sum_{k=1}^m n(\gamma_k, w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{C} - G.$$

Então

$$\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0.$$

1.7.3 Novidades

O que foi apresentado neste capítulo é material clássico encontrado na maioria, senão todos, os livros em Análise Complexa. A novidade com respeito às integrais acima será a apresentação, em mais detalhe, da análise para a situação onde permitimos que o ponto interior à curva se aproxime da mesma. Em outras palavras, a pergunta é: o que acontece com o valor da integral quando fazemos tender um ponto interior $z = a$ na representação integral para um ponto no traço da curva? Estudaremos esta aproximação tanto pelo lado de dentro, como pelo lado de fora da componente conexa. O integrando irá “explodir” (ter uma singularidade) mas ainda assim poderemos fazer sentido matemático deste limite. E mais, indicaremos problemas

em Dinâmica dos Fluidos onde este limite desempenha um importante papel em Modelagem Matemática. Neste sentido o Capítulo 3 é uma peça chave nos auxiliando a descrever modelos complexos em Dinâmica dos Fluidos.

Outra novidade diz respeito a Aplicações Conformes. No próximo Capítulo apresentaremos a transformação de Schwarz-Christoffel, para domínios poligonais, assim como sua versão computacional em aplicações à Dinâmica dos Fluidos.

Essas novidades são atípicas em cursos de Análise Complexa em geral, em particular no nível graduação.

Capítulo 2

Aplicação de Schwarz-Christoffel

2.1 Introdução à aplicação de Schwarz-Christoffel

Faremos aqui uma breve introdução à aplicação de Schwarz-Christoffel (SC) descrevendo as noções fundamentais necessárias à compreensão deste interessante tópico em Aplicações Conformes. Apresentações mais aprofundadas encontram-se em livros como os de Henrici [12], Ablowitz e Fokas [1] e Driscoll e Trefethen [15]. Esperamos que nossa breve introdução sirva de base para uma primeira visita conceitual e teórica ao tema, assim como uma revisão ligeira e útil à sessão de uso do programa computacional Schwarz-Christoffel Toolbox (SCT). Este programa permite fazer numericamente aplicações conformes no MATLAB.

Por trás da aplicação de SC está uma classe de aplicações conformes, expressa pela função complexa f , tal que sua derivada pode ser escrita na forma

$$f'(z) \equiv \frac{df}{dz}(z) = \prod_{k=1}^N f_k(z), \quad (2.1)$$

onde as funções auxiliares f_k são aplicações com propriedades mais simples, como veremos a seguir. Então aceitemos esta forma proposta para a derivada da função f e vejamos algumas conseqüências deste fato. O primeiro fato importante da estrutura desta derivada (ou seja da forma de um produto) é que

$$\arg f'(z) = \sum_{k=1}^N \arg f_k(z). \quad (2.2)$$

Observe, no caso mais simples, que se $f(z) = g(z) \cdot h(z)$ então

$$f = |f|e^{i\theta_f} = |g|e^{i\theta_g}|h|e^{i\theta_h} = |g \cdot h| e^{i(\theta_g+\theta_h)}. \quad (2.3)$$

Nossa notação é tal que $|f|$ é o valor absoluto de f no ponto z e θ_f é o argumento do número complexo w igual a $f(z)$. A mesma notação se aplica às outras duas funções g e h . Em outras palavras, o exemplo acima deixa bem claro que os argumentos de um produto se somam. Como a aplicação de SC se presta a mapear regiões com fronteiras poligonais esta propriedade do argumento, descrita acima, é de importância vital. Assim se formos capazes de construir f_k tais que $\arg f_k$ sejam funções *degrau* (com saltos) então $\arg f'$ será uma função constante por partes e (por exemplo) $f(z)$ irá mapear o eixo real em uma poligonal. Vejamos a seguir como isso é possível, através de exemplos simples.

Como é típico em aplicações conformes o ponto de maior esforço digamos intelectual, na construção da função correspondente, diz respeito à parte ao longo da fronteira. Ou seja, em mapear a fronteira do domínio no plano complexo z corretamente na fronteira no plano complexo w , $w = f(z)$. Vejamos um exemplo simples onde a fronteira (ainda) não é uma poligonal. Depois veremos o caso de uma poligonal com um vértice apenas.

No exemplo da Figura 2.1 queremos ilustrar que controlando a localização da imagem e da pré-imagem de certos pontos ao longo da fronteira, construímos a aplicação conforme desejada. Seja o exemplo onde queremos mapear o semiplano superior no disco unitário, centrado na origem. Sabemos que transformações lineares fracionárias mapeiam discos em discos, onde um semiplano pode ser considerado como um disco de raio infinito [1, 3, 10]. Neste caso não é difícil

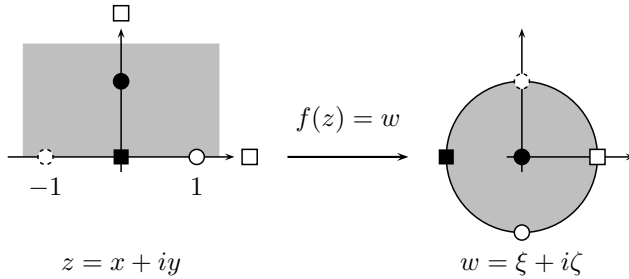


Figura 2.1: Aplicação do semiplano superior no disco unitário.

construir a aplicação por inspeção. Um ponto do semiplano superior irá para a origem do plano w enquanto que o eixo real do plano z irá formar o círculo de raio unitário. Um ponto no infinito no plano z irá ser mapeado para a borda do disco unitário. Vamos iniciar escolhendo duas coisas: $z = i$ como o ponto que vai para a origem e que um ponto no infinito vai ter como imagem $w = 1$. Assim uma ótima candidata à nossa aplicação conforme é a função

$$w = f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Note que já garantimos que $f(i) = 0$ e que $f(z) \rightarrow 1$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Na Figura 2.1 isto está indicado pelas bolinhas pretas e pelos quadrados brancos, que, no plano z , indicam esquematicamente um ponto no infinito. Seguindo regras de transformações lineares fracionárias [10] sabemos que três pontos ao longo de um círculo (no plano z) vão definir um outro círculo no plano w . É fácil verificar que $f(-1) = i$ (bolinhas tracejadas), $f(0) = -1$ (quadrados pretos) e também que $f(1) = -i$ (bolinhas brancas). Com bolinhas e quadradinhos representamos imagens e suas correspondentes pré-imagens (no plano z). Com isso fica evidente que a aplicação conforme $f(z) = w$ faz com que parte da fronteira, representada pelo eixo real positivo, abraça o disco unitário por baixo: curva passando pelo quadrado preto, bolinha branca e quadrado branco. Enquanto isso o eixo real negativo, do plano z , abraça o disco por cima. Todo o semiplano superior no plano z é mapeado para o interior do disco, com o eixo imaginário

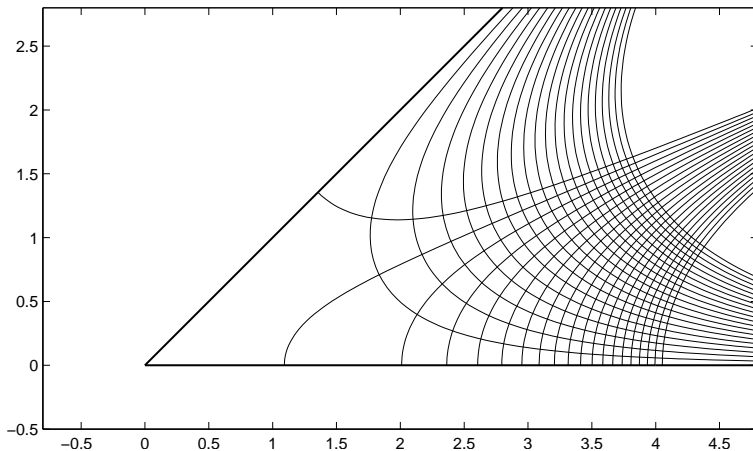


Figura 2.2: Aplicação do semiplano superior em um setor de ângulo $\pi/4$.

positivo ($y > 0$) sendo mapeado para o segmento $(-1, 1)$ no plano w .

Considere agora a seguinte função $f(z)$ tal que

$$\frac{df}{dz} = f_k, \quad \text{com } f_k(z) = (z - z_k)^{-\beta_k}.$$

É fácil de ver que

$$w = \int_0^z f'(Z) dZ = \int_0^z \frac{1}{(Z - z_k)^{\beta_k}} dZ = \frac{1}{\alpha_k} (z - z_k)^{\alpha_k} + \text{constante},$$

onde $1 - \beta_k = \alpha_k$. A constante é uma translação no plano w . O z_k é uma translação no plano z . Então basta olharmos para a função $\tilde{f}(z) = z^{\alpha_k}$. Esta aplicação leva o semiplano superior em um setor de ângulo $\alpha_k \pi$ conforme vemos na Figura 2.2. Por exemplo se $\beta_k = 3/4$ a imagem do semiplano superior é o quadrante $\arg w \in [0, \pi/4]$. As curvas dentro deste setor no plano w indicam as linhas x -constante (curvas que saem das arestas) assim como as linhas y -constante (curvas que tem o setor como assíntota). Esse gráfico foi feito usando o Schwarz-Christoffel Toolbox (SCT) [14] a ser descrito em detalhe

mais adiante. O SCT é um conjunto de rotinas do MATLAB que permitem construir a aplicação conforme numericamente.

Exemplo 2.1. Canal com um degrau: Agora vejamos um exemplo interessante que pode ser feito tanto analiticamente como numericamente: o problema de um canal com um degrau, conforme apresentado na Figura 2.3.

Esse canal pode ser visto de duas maneiras em termos de Dinâmica dos Fluidos. A primeira como o *perfil* vertical de um canal, ou seja, na qual o degrau está no fundo do canal que repentinamente muda de profundidade. A fronteira horizontal superior da faixa representa a superfície da água. Outra interpretação válida é a da *vista superior* de um canal ou rio, que repentinamente muda de largura. Como veremos no próximo Capítulo, estes dois problemas (vista lateral ou superior) em dinâmica de fluidos incompressíveis e irrotacionais, podem ser modelados pela equação de Laplace (funções harmônicas). Conforme vimos no Capítulo anterior, a parte real e a parte imaginária de uma função analítica (complexa) são funções harmônicas. A aplicação conforme preserva esta propriedade de analiticidade. Assim a aplicação conforme, vista como uma mudança de variáveis, preserva a propriedade da solução do problema em Dinâmica dos Fluidos ser uma função harmônica. Desta forma uma boa estratégia é resolver o problema de fluidos no domínio canônico, a faixa uniforme no plano z , e depois compor esta solução com a mudança de variáveis, ou seja com a aplicação conforme representada por $w = f(z)$ ou melhor substituindo $z = f^{-1}(w)$. Com isso obtemos a solução no domínio físico (no plano w) onde está definido o canal com um degrau.

Voltemos então para o problema da mudança de variáveis, ou seja para o problema de mapeamento conforme. Detalhes sobre a solução analítica deste problema podem ser encontrados no artigo de Floryan [11] (página 237) ou ainda em mais detalhe na página 287 do livro *Theoretical Hydrodynamics* de Milne-Thomson [23]. Este é um dos poucos casos em que podemos achar as pré-imagens analiticamente assim como integrar dw/dz . Em geral a integral de dw/dz é na forma de uma integral elíptica, ou variações da mesma devido a composições de aplicações conformes. Vide Driscoll e Trefethen [15] páginas 18–20 e página 41. Assim muitas dessas integrais não têm uma forma fechada como resultado.

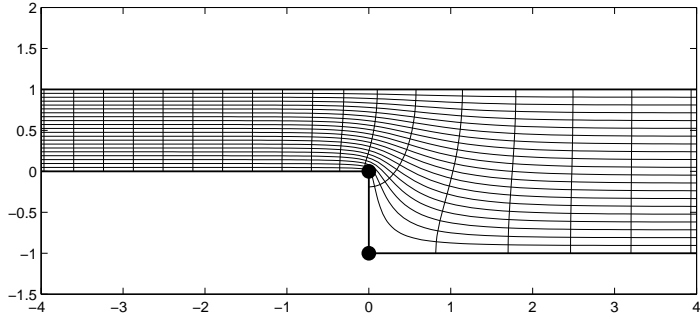


Figura 2.3: Domínio físico: canal com um degrau.

Seja a notação onde a altura do canal uniforme (plano z) é h , a altura à esquerda do degrau (no plano w) é H_1 e a altura à direita do degrau é H_2 , $H_1 < H_2$. Para a solução deste problema tomemos a derivada da aplicação conforme de SC na forma indicada na Eq. (2.1), ou seja, como um produto de duas funções auxiliares na forma de senos hiperbólicos:

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{H_1 H_2}{h^2} \right)^{1/2} \left[\sinh \left(\frac{\pi}{2h} z \right) \right]^{1/2} \left[\sinh \left(\frac{\pi}{2h} (z - z_2) \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.4)$$

onde uma pré-imagem foi colocada em $z = z_1 = 0$ e a outra está em $z = z_2$. Detalhes de como calcular esta segunda pré-imagem encontram-se em [23]. Floryan [11] já a apresenta como

$$z_2 = \frac{2h}{\pi} \ln \left(\frac{H_2}{H_1} \right).$$

Note que temos a liberdade de pré-estipular que a pré-imagem z_1 terá como imagem a origem, ou seja, podemos impor $w(z_1) = w(0) = 0$. Isso é coerente com o Teorema da Aplicação de Riemann [3, 10] que nos permite definir qual ponto ($z = a$) vai na origem, assim como o valor (real) $f'(a) > 0$. Ou seja, nos fornece três graus de liberdade na definição de uma aplicação de uma região simplesmente conexa no disco. Ao impormos que a origem vai na origem “gastamos” dois graus de liberdade (parte real e parte imaginária da restrição). Confirme que no resultado acima já estamos usando esse fato. Outro

ponto a se notar é que a aplicação de SC, em sua definição original, é do semiplano superior para o canal. Mas aqui Floryan está mapeando um canal plano em um canal com um degrau, “passando” pelo semiplano superior. Esta composição de aplicações conformes é que introduz a função seno hiperbólico. Verifique, fazendo esse exercício em Aplicações Conformes entre o semiplano e a faixa uniforme.

Voltando à solução analítica do canal com o degrau, a expressão da Eq. (2.4) pode ser integrada analiticamente para dar lugar à função

$$w(z) = \frac{H_2}{\pi} \left(\log \left(\frac{1+s}{1-s} \right) - \frac{H_1}{H_2} \log \left(\frac{H_2/H_1 + s}{H_2/H_1 - s} \right) \right) - i(H_2 - H_1), \quad (2.5)$$

onde

$$s^2 = \frac{\exp(z\pi/h) - (H_2/H_1)^2}{\exp(z\pi/h) - 1}.$$

Em breve iremos validar no MATLAB alguns resultados da solução analítica fornecida acima. Mas primeiro precisamos aprender a utilizar o Schwarz-Christoffel Toolbox (SCT) produzido pelo matemático aplicado Prof. Toby Driscoll, do Departamento de Matemática da University of Delaware, EUA.

Teorema 2.1 (Teorema para a fórmula de Schwarz-Christoffel). *Seja P o interior de um polígono Γ . Sejam os vértices definidos pelos pontos w_1, w_2, \dots, w_n e, em cada vértice, os ângulos interiores $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ no sentido anti-horário, veja a Fig. 2.4. Seja f uma aplicação conforme qualquer do semiplano superior no polígono P , com a pré-imagem de w_n no infinito (simbolicamente $f(\infty) = w_n$). Então a fórmula de SC para o semiplano (como domínio canônico) é*

$$f(z) = A + c \int^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta, \quad (2.6)$$

para valores complexos das constantes A e c .

Note que a integral na Eq. (2.6) é uma integral indefinida, i.e., a primitiva do integrando.

Temos uma translação no plano w , por exemplo, associada à definição da origem no domínio canônico. Temos também a constante de escalonamento c . Podemos mudar as escalas no semiplano

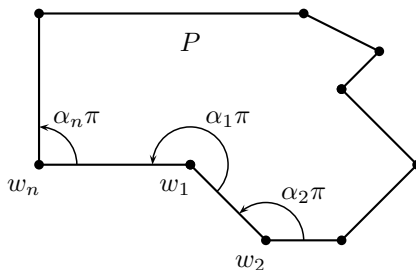


Figura 2.4: Notação para a fórmula de SC.

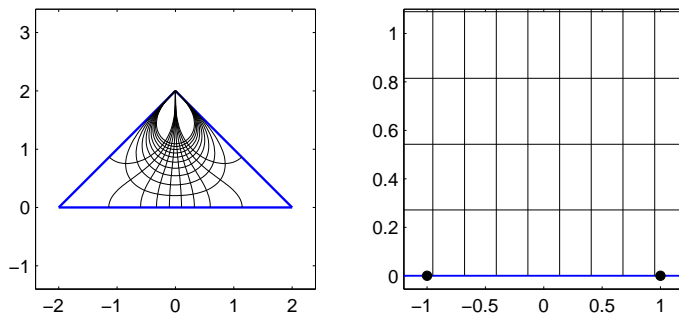


Figura 2.5: Aplicação do semiplano superior em um triângulo.

que ainda assim teremos a aplicação desejada: por exemplo multipliquemos todos os z por 2. Lembramos que z_k são as pré-imagens de w_k ou seja $f(z_k) = w_k$, onde $k = 1, \dots, n$.

A demonstração desta versão pode ser encontrada em Driscoll e Trefethen [15] (página 11) assim como para algumas variantes desse enunciado. A demonstração faz uso do Princípio de Reflexão de Schwarz, de uma expansão em uma Série de Laurent e do Teorema de Liouville. Este caso que trata de polígonos com vértices finitos é retratado na Figura 2.5 onde mapeamos numericamente um triângulo. Note que o vértice superior do triângulo foi mapeado para o infinito. Mais adiante consideraremos casos com vértices no infinito.

2.2 Versão computacional da aplicação de Schwarz-Christoffel

Nesta Seção nosso principal objetivo é iniciar o leitor ao uso do Schwarz-Christoffel Toolbox (SCT) produzido pelo Prof. Driscoll. Além de ser uma ferramenta computacional extremamente bem montada e divertida de utilizar, o SCT tem grande utilidade em estimular a intuição matemática de iniciantes. Também serve de ferramenta de pesquisa em problemas onde a aplicação de SC não tem uma fórmula analítica fechada para as integrais produzidas no processo de definição da aplicação. Os autores já fizeram uso desta ferramenta computacional em diversos artigos de pesquisa [27, 28, 24, 25, 26, 16].

2.2.1 Um breve tutorial ao SCT

Primeiro faça a escolha de um diretório (pasta) onde serão guardados todos os arquivos fornecidos por Driscoll em sua página-web de acesso a software:

<http://www.math.udel.edu/~driscoll/software/>

Os arquivos podem ser colocados em um diretório que seja automaticamente encontrado pelo MATLAB (*MATLAB path*) ou em um diretório particular para o qual o usuário do MATLAB redireciona o programa após iniciá-lo.

Ao acessar a página-web do Driscoll clique no hipertexto

Schwarz-Christoffel Toolbox for MATLAB

de onde pode-se baixar o manual do usuário em formato PDF (*User's Guide*) assim como versões do SCT compatíveis com o seu MATLAB. O ideal é obter a última versão para o MATLAB 7. Ao baixar o pacote SCT, vários arquivos-m (macros de comandos MATLAB) estarão a sua disposição para uso dentro do MATLAB.

No nosso entendimento a melhor maneira de ajudar o leitor a rapidamente brincar/explorar o SCT é dando alguns exemplos simples e específicos. Depois cada leitor pode explorar exemplos mais sofisticados no seu tempo, por conta própria, obviamente auxiliado pelo manual do usuário fornecido por Driscoll.

A partir de agora

>> comando

indica uma linha de comando MATLAB, onde >> indica o sinal de espera (*prompt*) do MATLAB.

Exemplo 2.2 (Canal com um degrau). Existem várias maneiras de se construir um polígono a ser mapeado pelo SCT. As mais fáceis são usando uma janela para a edição do polígono e o mouse para definir seus vértices. A versão mais sofisticada depende de qual versão do MATLAB o leitor esteja usando. Primeiro apresentaremos uma de nível intermediário. Depois descreveremos a mais sofisticada e cômoda, para por fim descrever a mais rústica, que tem por vantagem ser a mais fácil de automatizar e também a com maior potencial de ser compatível com qualquer versão do MATLAB.

Seqüência S1 para definir um polígono:

Siga os seguintes passos com nossos comentários (●) imediatamente abaixo do respectivo comando:

>> p = polyedit

- Surgirá na tela uma janela para a edição (via mouse) de um polígono a ser mapeado. No alto à direita há um quadrado/botão com cruzinhas azuis. Clicando neste botão o editor gera um reticulado que facilita a construção do polígono. Agora com o mouse clique nas posições dos vértices desejados. No caso do canal com um degrau clique no ponto $(0, 0)$ do reticulado. Uma bolinha vermelha irá aparecer neste ponto. Ela sempre aparece sobre os cruzamentos (nós) deste reticulado. Depois clique no ponto $(0, -1)$ e também no ponto $(4, -1)$. O programa SCT vai conectando estes vértices com arestas azuis. Agora um breve comentário para ajudar no próximo passo. Por exemplo, uma faixa uniforme é considerada como um retângulo com dois lados e quatro vértices no infinito. Logo o canal com um degrau deve ser interpretado como um polígono do mesmo tipo que o “retângulo” infinito. Para definir os pontos no infinito, indicando que trata-se de uma faixa infinita, dentada (o degrau!), clique o mouse na borda cinza, à direita do ponto $(4, -1)$ fora do domínio do reticulado. Suba com o mouse e clique de novo na

borda cinza à direita do ponto $(4, 1)$. Esses dois pontos no infinito não aparecem na tela, mas indicam ao programa a face do polígono que está no infinito. Clique no ponto $(4, 1)$. Um ponto vermelho irá aparecer. Clique no ponto $(-4, 1)$, indicando que a fronteira superior do canal é plana. Novamente crie dois pontos no infinito, à esquerda do canal, clicando primeiro perto do ponto $(-4, 1)$ e depois do ponto $(-4, 0)$. Por fim “fechamos” o polígono clicando sobre o ponto inicial $(0, 0)$. Clique no botão **OK** no topo e automaticamente a janela de edição fecha. O polígono está criado e guardado no *objeto* definido por p (*polygon object*).

```
>> f = stripmap(p)
```

- Esse comando executa o programa para o mapeamento do polígono definido em p para uma faixa uniforme de largura unitária. Vários tipos de aplicações de SC são permitidos, como listaremos adiante. Mas aqui estamos usando a *stripmap*, especializada em faixas. Neste caso específico (nem sempre isso acontece) uma janela é aberta automaticamente pedindo ao usuário para confirmar os pontos no infinito. Assim com o mouse clique sobre (apenas) “um dos pontos no infinito” à esquerda e depois em “um dos pontos no infinito” à direita. Ao fazermos isso imediatamente o SCT inicia o cálculo das pré-imagens, representando isso com uma caixinha na qual uma tarja vermelha vai indicando simbolicamente o tempo de execução. Ao final, a caixinha desaparece e os resultados são impressos na tela do MATLAB, indicando os vértices e ângulos definidos (na janela de edição) assim como os valores das pré-imagens, a constante c de escalonamento da aplicação e o erro estimado para o procedimento numérico, ou seja a solução iterativa de um sistema não-linear visando obter os valores para as pré-imagens dos vértices. Veja a Tabela 2.1. Compare a distância entre as pré-imagens do degrau com o valor teórico fornecido anteriormente.

```
>> plot(f, nv, nh)
```

- Com esse comando vemos o sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, gerado pela aplicação conforme. Em outras pala-

vértice	α	pré-vértice
Inf + 0.00000i	0.00000	-Inf
-4.00000 + 0.00000i	1.00000	0.000000000000e+00
0.00000 + 0.00000i	1.50000	4.166554810191e+00
0.00000 - 1.00000i	0.50000	4.607826010331e+00
4.00000 - 1.00000i	1.00000	6.250518843749e+00
Inf + 0.00000i	0.00000	Inf
4.00000 + 1.00000i	1.00000	6.249146065705e+00 + i
-4.00000 + 1.00000i	1.00000	-4.835976712414e-07 + i

$c = 1.4142136 + 0i$
Precisão estimada é de 3.78e-08

Tabela 2.1: Dados para o canal da Figura 2.3.

vas, o sistema cartesiano no plano z (linhas verticais x -constante, linhas horizontais y -constante) ao ser representado no domínio físico do plano w , aparece como as curvas ortogonais da Figura 2.3. O parâmetro nv fornece o número de linhas verticais a serem representadas, enquanto que nh o número de linhas horizontais. Na Figura 2.3, $nv = 8$.

Seqüência S2 para definir um polígono:

Agora vamos apresentar a maneira mais cômoda para gerar um polígono. Continuemos com o caso do canal com um degrau.

>> `scgui`

- Uma janela especial é aberta que a partir de agora chamaremos da janela `scgui`. Essa janela `scgui` serve tanto para a edição do polígono como também para a execução e visualização de propriedades da aplicação de SC. Clique no *lápiz* (topo à esquerda) para abrir uma janela de edição de polígonos.
- Repita os passos descritos acima em **S1** para a janela de edição de polígonos, terminando por clicar em **OK**. O polígono gerado aparece na janela do `scgui`. Se quiser fazer alguma mudança no polígono gerado clique no *lápiz com borracha* e a janela de edição re-abre permitindo editar o polígono. Experimente

isso, por exemplo, puxando um dos vértices com o mouse e colocando-o em uma nova posição.

- Escolha que aplicação conforme você deseja executar, ou seja, selecione o domínio canônico que quer trabalhar. Dependendo disto, o canal do domínio físico será mapeado para um disco, uma faixa, ou outro tipo de região canônica fornecida pelo SCT. Faça sua escolha clicando embaixo de *Canonical domains* e escolha (para esse exemplo) a opção *strip*, referente à faixa.
- Antes de executar a aplicação *strip*, escolhida acima, podemos optar por ver também (ou não) o domínio canônico. Ou seja, clicando abaixo de *View* temos três possibilidades: ver apenas o domínio físico, apenas o domínio canônico ou ambos. Escolha esta última que em geral é a mais interessante. Observe também que no topo à direita da janela **scgui** temos a opção de escolher a tolerância para o erro no processo iterativo de solução do sistema não-linear para obtenção das pré-imagens. Deixemos como está.
- Para executar a aplicação conforme escolhida clique no sinal “=” perto do lápis. O processo de execução já descrito acima é iniciado, pedindo confirmações de pontos no infinito etc. . . Ao final da execução (e por termos escolhido de ver os dois domínios ao mesmo tempo) aparecem no domínio canônico pontos referentes às pré-imagens.
- Para ver o sistema de coordenadas curvilíneas clique na “teia de aranha” no topo da janela **scgui**. Esse processo confirma nossa descrição acima de que linhas x -constantas no domínio canônico (no plano z) são mapeados em curvas verticais no domínio físico (no plano w).
- Tudo muito prático e cômodo, desde que saibamos o que queremos e o que significa cada botão da janela **scgui**. E tem mais. . . Clicando na *lente de aumento*, no topo da janela, obtemos informações quantitativas sobre a aplicação de SC: vértices gerados, ângulos e posições precisas da pré-imagens. Com esses valores dos ângulos e das pré-imagens podemos escrever a derivada

dw/dz da aplicação analiticamente e com grande precisão, indicada pela acurácia fornecida pela janela dos parâmetros (*lente de aumento*). Em alguns problemas a derivada é o que necessitamos pois nos fornece o Jacobiano da transformação. Isso foi usado em trabalhos de pesquisa dos autores e colaboradores [4, 5, 28, 24, 25, 26, 30] e apresentaremos um exemplo mais simples adiante.

- Por fim muitas vezes queremos ter um pouco mais de liberdade nos cálculos posteriores à aplicação de SC feita através da janela **scgui**. Nesses casos é interessante *exportar* o *objeto* MATLAB relativo ao polígono juntamente com a função que representa a aplicação. Mais adiante mostraremos como usar esses objetos. No topo da janela **scgui** clique em “>>” e uma janela de importação/exportação irá aparecer. Importar significa trazer variáveis/objetos da janela de comandos MATLAB para a janela **scgui**. Exportar significa o contrário. Assim como acabamos de trabalhar na janela **scgui** queremos exportar. Coloque um **p** no *objeto* polígono e um **f** na variável da aplicação (*Map variable*). Agora temos acesso ao **p** e ao **f** dentro da janela de comandos MATLAB, nos dando ainda mais flexibilidade de cálculo. Por exemplo abra uma nova figura fazendo

```
>> figure(2)
```

Depois use

```
>> plot(f, 20, 10)
```

para visualizar o canal com coordenadas curvilíneas.

Seqüência S3 para definir um polígono:

A seqüência de comandos abaixo é a que dá mais trabalho. No entanto ela é muito útil para problemas com fronteiras repletas de vértices e/ou com informação que não pode ser fornecida manualmente. Por exemplo em [4, 5, 28, 24, 25, 26, 30] o fundo do canal tem degraus de altura aleatória, fornecidas por um gerador de números aleatórios, ou uma seqüência de esquinas aleatórias, ou seja de alturas

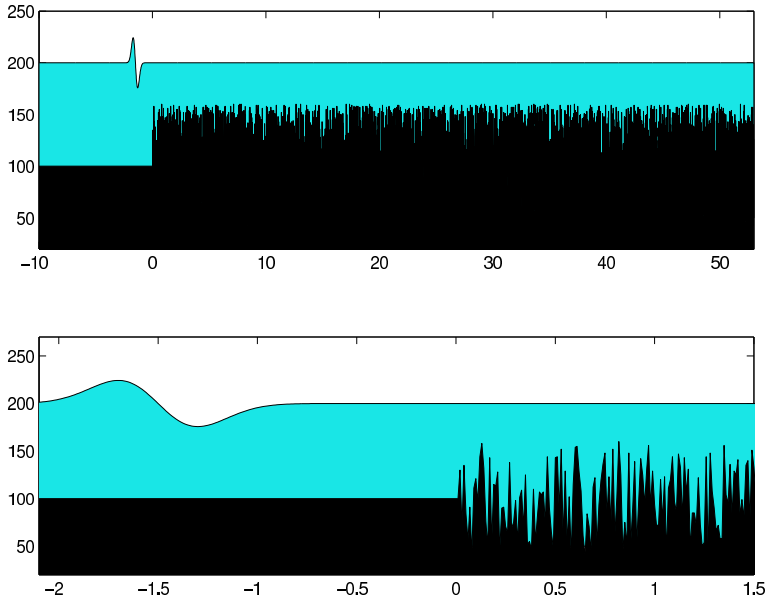


Figura 2.6: Canal com topografia aleatória: a região cinza representa o fluido e a preta a topografia no fundo do canal. Na parte superior vemos a onda que irá interagir com o fundo rugoso do canal que é altamente desordenado e longo. Na figura inferior temos um detalhe da figura superior. No eixo horizontal temos a coordenada ξ . No eixo vertical temos índices apenas de controle gráfico.

e ângulos aleatórios. Um exemplo deste tipo de topografia pode ser encontrado na Figura 2.6.

Vejamos como proceder quando o polígono não pode ser editado/fornecido manualmente/graficamente mas sim quantitativamente, através de um vetor. No caso da Figura 2.6 um programa MATLAB auxiliar foi escrito para gerar automaticamente os vetores $\mathbf{w}\mathbf{w}$ (com as posições w_k de cada vértice) e o $\mathbf{t}\mathbf{t}$ (com os parâmetros angulares α_k). Vamos continuar com o nosso exemplo do canal com um degrau. Nesse caso as posições dos vértices são facilmente conhecidas assim como os ângulos correspondentes:

nome	domínio canônico	domínio físico
diskmap	disco unitário	interior do polígono
hplmap	semiplano superior	interior do polígono
stripmap	faixa infinita	interior do polígono
externmap	disco	exterior do polígono

Tabela 2.2: Tabela com algumas aplicações conformes disponíveis no SCT.

```
>> ww = [-inf, 0, -i, inf, 4+i, -4+i];
```

- Esse vetor contém a posição complexa dos vértices, incluindo os dois “vértices”/pontos no infinito (indicados por **inf**).

```
>> tt = [0, 1.5, 0.5, 0, 1., 1.];
```

- Esse vetor contém os valores de α_k correspondendo aos ângulos em cada vértice. O ângulo no infinito tem por convenção ser *zero*. Já um ângulo em uma parte suave do domínio é π e assim $\alpha_k = 1$.

```
>> p = polygon(ww, tt);
```

- Com este comando construímos o polígono com vértices e α 's fornecidos pelos vetores **ww** e **tt**.

```
>> f = stripmap(p)
```

- Executamos a aplicação conforme da faixa canônica para o canal com um degrau.

No manual do usuário encontramos diversas possibilidades para realizar aplicações conformes entre o domínio canônico e o domínio físico. Reproduzimos parte desta informação na Tabela 2.2. Alguns casos chamados de *interior de polígono* incluem faixas ou semiplanos, onde o polígono é infinito conforme discutido anteriormente.

2.2.2 Aplicações do Exemplo 2.2

Nesta subsecção apresentamos algumas aplicações possíveis a partir do mapeamento de um canal com um degrau em uma faixa uniforme.

Geração de malha

Existem problemas em métodos numéricos em Equações Diferenciais Parciais (EDPs) para os quais não é simples gerar uma *malha* (ou grade) sobre a qual se pode definir o método numérico. Isto acontece com frequência em problemas com domínios complicados. Neste caso a aplicação conforme pode ser útil. Afinal é muito natural escolher um reticulado uniforme (malha uniforme) no domínio canônico no plano z . Ao usarmos o SCT temos a imagem dessa malha uniforme, na forma de um reticulado bem ajustado ao domínio físico, em particular a uma fronteira acidentada. Usando o manual *online* do SCT aprendemos que vários tipos de fronteiras acidentadas podem ser usadas, incluindo *cúspides* e *fraturas*. Vide

```
>> help polygon
```

que nos fornece o seguinte texto

```
POLYGON Construct polygon object.
```

```
POLYGON(W) constructs a polygon object whose vertices are specified by the complex vector W. Cusps and cracks are allowed.
```

```
POLYGON(X,Y) specifies the vertices with two real vectors.
```

```
POLYGON(W,ALPHA) or POLYGON(X,Y,ALPHA) manually specifies the interior angles at the vertices, divided by pi.
```

```
POLYGON accepts unbounded polygons (vertices at infinity). However, you must supply ALPHA, and the vertices must be in counterclockwise order about the interior.
```

A pergunta importante de ser respondida é: dado um ponto do reticulado no plano z como encontramos a sua imagem (um ponto da malha desejada) no plano w ? Com o SCT este cálculo é muito simples. Seja o vetor zz contendo pontos do reticulado no plano z . Então

```
>> ww = eval(f, zz);
```

- Este comando avalia a aplicação conforme $w = f(z)$ nos pontos interiores contidos no vetor \mathbf{zz} . Isto é executado numericamente pela variável da aplicação (*Map variable*) \mathbf{f} . Como resultado obtemos o vetor \mathbf{ww} contendo as coordenadas dos nós do reticulado no domínio físico, ou analogamente, os vértices de células de aproximação para a técnica numérica a ser utilizada, seja esta Elementos Finitos, Volumes Finitos, técnicas em Computação Gráfica, dentre outras. Pesquise no Google usando *mesh generation conformal map*. Também faça uma busca com *computational conformal geometry* e aproveite para visitar a página

<http://www.cise.ufl.edu/~gu/>

Em alguns casos pode ser interessante encontrar a pré-imagem de um ponto interior do domínio físico. Sejam pontos interiores alocados no vetor \mathbf{ww} . Suas pré-imagens no plano z são calculadas através da aplicação inversa:

```
>> zz = evalinv(f, ww);
```

Avaliando o Jacobiano

Em alguns problemas aplicados [28, 30] é importante avaliarmos o Jacobiano, da mudança de coordenadas, ao longo de uma curva. Lembramos que o Jacobiano $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana, ou seja,

$$|J| = \begin{vmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\zeta/\partial x & \partial\zeta/\partial y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2.$$

No cálculo do determinante utilizamos as equações de Cauchy-Riemann. Usando variáveis complexas tudo se resume a computar o valor absoluto da derivada da aplicação. Esse cálculo é simples, uma vez conhecemos as pré-imagens z_k e os parâmetros angulares α_k . Basta olharmos para o início deste capítulo. No entanto o SCT tem um comando para isso. Guarde no vetor \mathbf{zz} as posições de pontos ao longo de uma curva no plano z . Os valores do Jacobiano, avaliado em cada ponto (digamos) $\mathbf{zz}(\mathbf{k})$ desta curva, será armazenado no vetor \mathbf{ww} e é obtido através do comando

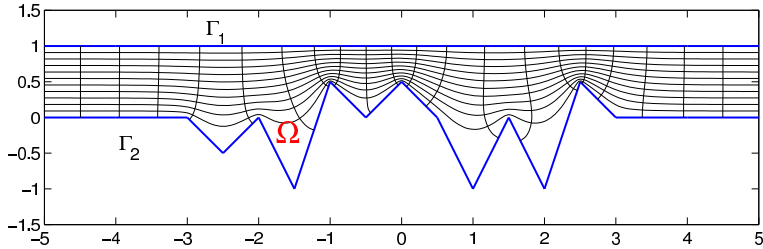


Figura 2.7: Canal com uma topografia altamente oscilatória. Uso da aplicação de Schwarz-Christoffel para solução da equação de Laplace neste domínio físico.

```
>> ww = evaldiff(f, zz);
```

Um bom exercício é verificar que muito rapidamente $|J| \rightarrow 1$ à esquerda do salto enquanto que $|J| \rightarrow 2$ à direita do salto. Por que $|J|$ toma esses valores?

Exemplo 2.3 (Teoria do potencial para ondas aquáticas). Vejamos um exemplo um pouco mais avançado, com respeito ao nível deste Curso. Existe um problema de ondas aquáticas de superfície [5, 30] onde temos que resolver a equação de Laplace (um problema em teoria do potencial) em um domínio rugoso como o da Figura 2.6. O domínio físico é o canal em repouso conforme vemos no caso esquemático mais simples apresentado na Figura 2.7. Seja o seguinte problema: no domínio Ω da Figura 2.7 resolver a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad w = \xi + i\zeta \in \Omega,$$

onde na fronteira superior ($\Gamma_1 : \zeta \equiv 1$), ao longo da superfície da água, impomos a condição

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}$$

e na complicada fronteira inferior (Γ_2) temos a condição de Neumann

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0.$$

Esta é uma condição para a derivada normal a Γ_2 que certamente tem um problema de ambigüidade nos vértices da topografia. Fisicamente esta condição significa que a topografia é impermeável, ou seja a velocidade normal é nula. Veremos isso com mais detalhe no próximo Capítulo. Com esta interpretação a ambigüidade da direção normal significa que perto de um pico de uma montanha a velocidade normal é nula à direita e à esquerda do pico. A constante g é a aceleração devido à gravidade e ϕ é o potencial de velocidades a ser definido com mais precisão no Capítulo a seguir. Mas em resumo, $(u, v) = \nabla\phi$ onde u e v são as velocidades horizontal e vertical do fluido no canal em questão. Daí a terminologia *teoria do potencial*.

Usando a aplicação conforme podemos fazer uma mudança de coordenadas cartesianas $\xi\zeta$ para coordenadas curvilíneas xy . Isto é análogo a resolver o problema no domínio canônico. Em coordenadas curvilíneas o problema acima fica enunciado na forma

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \quad \text{onde} \quad f(z) = w \in \Omega.$$

Em Γ_1 impomos a condição

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -g \frac{1}{\partial\zeta/\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

e em Γ_2 a condição de Neumann agora é trivial:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Vejamos o que aconteceu. Primeiro temos que o Laplaciano nas variáveis ξ, ζ dá lugar ao Laplaciano nas variáveis x, y . Isto pode ser justificado tanto do ponto de vista de funções analíticas complexas (argumento dado acima, com partes reais e imaginárias sendo harmônicas) ou fazendo a álgebra referente à troca de variáveis e notando que

$$|J| \cdot \Delta_w = \Delta_z,$$

onde por Δ denotamos o Laplaciano, com o w e o z denotando as variáveis em questão. Como a equação é homogênea (igual a zero) o

Jacobiano pode ser cancelado e não aparece na equação de Laplace. Depois notamos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right).$$

Como a linha $y \equiv 1$ é mapeada na linha $\zeta \equiv 1$ então $\partial x / \partial \zeta \equiv 0$ ao longo desta linha. Com isso o Jacobiano simplifica para $|J| = (\partial \zeta / \partial y)^2$ e obtemos uma simplificação para a troca de variáveis ao longo da superfície da água:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sqrt{|J|}} \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Agora uma observação importante. O Jacobiano tem singularidades em algumas das pré-imagens, basicamente nos pontos relativos a vértices com ângulos internos maiores que π , ou seja quando α_k for maior do que 1. No entanto, para esse problema de ondas em canais com topografia linear por partes, estamos avaliando o Jacobiano na fronteira oposta a que contém as pré-imagens de vértices. Logo nesta fronteira o Jacobiano é uma função suave. Leitores interessados em ver mais detalhes sobre estas questões devem consultar [28].

Por outro lado para visualizar o efeito suavizante mencionado acima podemos utilizar o SCT conforme descreveremos a seguir. Os detalhes deixaremos como um exercício para o leitor. Crie um canal com topografia poligonal e guarde em um vetor o perfil desta topografia, ou seja da geometria da fronteira inferior Γ_2 . Execute a aplicação de Schwarz-Christoffel via o SCT e avalie o Jacobiano ao longo da fronteira superior Γ_1 usando o comando `evaldiff`. Note que no domínio canônico a informação geométrica da topografia foi toda transferida para o coeficiente variável da condição em Γ_1 , ou seja para o Jacobiano. Usando o comando `hold`, que permite superimpor figuras, faça um gráfico com o perfil da topografia e do Jacobiano ao longo de Γ_1 . Veremos que o Jacobiano contém uma versão/representação suavizada da topografia. Veja um exemplo com duas montanhas triangulares na Figura 2.8.

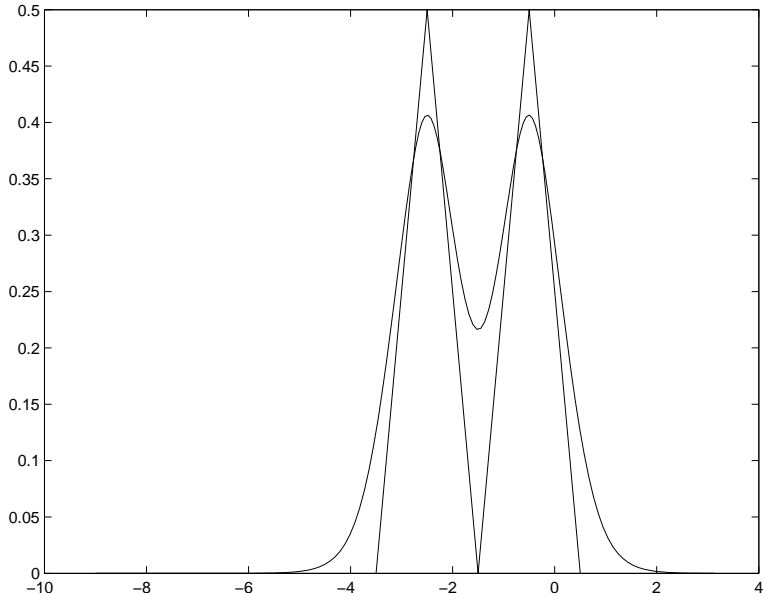


Figura 2.8: Efeito de suavização: canal com uma topografia contendo duas montanhas triangulares. Perfil das montanhas superimposto ao perfil do Jacobiano avaliado na fronteira superior. Na superfície do canal, onde teremos ondas, as duas montanhas são vistas como dois morros suaves.

2.2.3 Aglomeramento

Um fenômeno bastante interessante e difícil de lidar numericamente é o fenômeno de aglomeramento de pré-imagens. Em inglês isso é denominado de *crowding*. Em regiões excessivamente alongadas e/ou contorcidas as pré-imagens de vértices vizinhos podem ficar exponencialmente próximas de forma a não podermos distingui-las no computador. Usamos o termo *exponencialmente* pois ao alongarmos uma região, ou parte da mesma, a taxa de aproximação das pré-imagens em alguns casos pode ser medida e é exponencial. Um exemplo desta análise assintótica, para estimar a taxa de aglomeramento, se encontra na página 20 de Driscoll e Trefethen [15]. Em vez de reproduzir a

estimativa do livro vamos ilustrar esse fenômeno experimentalmente através do SCT.

Vamos ilustrar esse fenômeno com um exemplo mais simples que o de [15], mas o faremos de forma numérica. Tomando uma vista superior, seja a seguinte configuração de um canal, com um braço na sua margem inferior como se fosse um cais para embarcações. Esta configuração pode ser vista na Figura 2.9. Vejamos a seguir o efeito que tem a configuração geométrica alongada do cais, no mapeamento conforme correspondente. Vamos mapear o domínio físico (o canal) em uma faixa uniforme, ou seja um canal sem o cais. Repetindo um comentário anterior, em alguns problemas em Dinâmica dos Fluidos usamos o canal uniforme como um domínio computacional, para fazer contas mais facilmente. Uma vez que o problema é resolvido no domínio computacional, no plano z , fazemos a troca de variáveis através de $z = f^{-1}(w)$ e temos a solução no domínio físico, que é o de interesse. Então há casos em que podemos resolver o problema analiticamente no domínio computacional mas a troca de variáveis, ou seja a aplicação conforme, tem que ser feita numericamente. Em outros casos o problema é resolvido numericamente no domínio canônico, mas de forma muito mais eficiente por se tratar de uma configuração mais simples.

Usando o SCToolbox através do `stripmap` obtemos a Figura 2.10. À esquerda temos o domínio físico e à direita o domínio computacional. A bolinhas pretas indicam as pré-imagens do cais assim como os pontos extremos do domínio definidos para o aplicativo. Note como as linhas x -constante (verticais) e as y -constante (horizontais) no plano z são mapeadas no plano w . As posições precisas de todos esses pontos são fornecidas pelo MATLAB e podem ser encontradas na Tabela 2.3. Esta tabela nos fornece também os pontos no infinito. Note que temos várias pré-imagens bem próximas, com cinco casas decimais idênticas. Como o MATLAB trabalha com precisão dupla (15 dígitos de precisão; vide `help format`) ainda podemos distinguir estes pontos.

Vejamos como a aplicação de SC reage às mudanças de escala no domínio físico. Na Figura 2.11 mudamos o cais de forma que este tenha uma configuração menos alongada. Repetimos o procedimento anterior e vemos na Tabela 2.4 que as pré-imagens da região do cais estão ainda mais bem definidas. Apenas duas tem 4 dígitos idênticos.

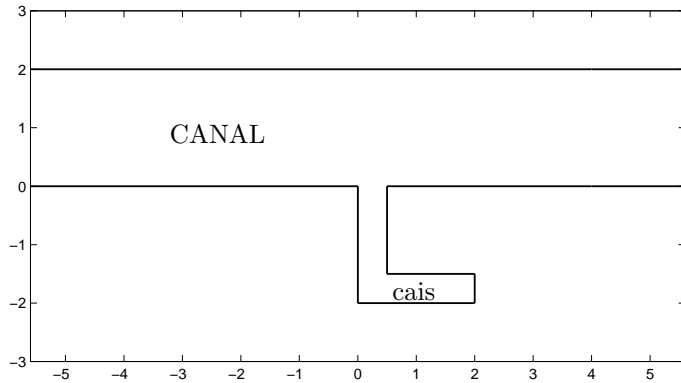


Figura 2.9: Canal com cais na margem inferior. Este canal, uma faixa com ramificação alongada, será mapeado em uma faixa uniforme.

Por fim na Figura 2.12 fazemos com que o cais seja mais alongado do que no primeiro exemplo apresentado na Figura 2.10. Na Tabela 2.5 vemos que duas pré-imagens são idênticas, o que não corresponde à teoria pois a aplicação é injetora. Nesse exemplo capturamos o fenômeno de *aglomeramento*. Se tentarmos alongar ainda mais o cais o programa SCT acusará um erro de divisão por zero e abortará a execução do `stripmap`.

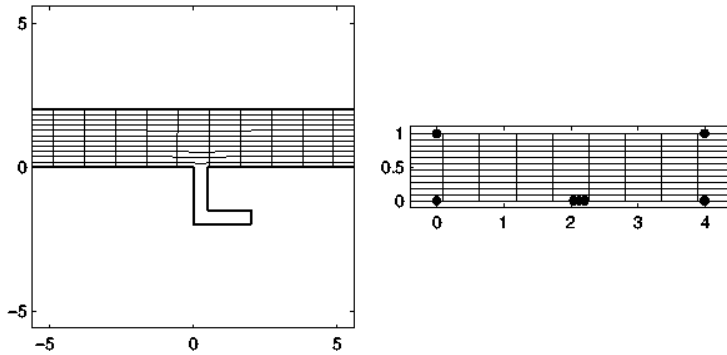


Figura 2.10: Aplicação da faixa em um canal com um cais.

vértice	α	pré-vértice
Inf + 0.00000i	0.00000	-Inf
-4.00000 + 0.00000i	1.00000	0.000000000000e+00
0.00000 + 0.00000i	1.50000	2.040654833443e+00
0.00000 - 2.00000i	0.50000	2.120026515678e+00
2.00000 - 2.00000i	0.50000	2.120028474902e+00
2.00000 - 1.50000i	0.50000	2.120028475165e+00
0.50000 - 1.50000i	1.50000	2.120030434389e+00
0.50000 + 0.00000i	1.50000	2.199398215779e+00
4.00000 + 0.00000i	1.00000	3.990037853769e+00
Inf + 0.00000i	0.00000	Inf
4.00000 + 2.00000i	1.00000	3.990093714224e+00 + i
-4.00000 + 2.00000i	1.00000	-2.547997926339e-05 + i

$c = 2 + 0i$
Precisão estimada é de 3.16e-08

Tabela 2.3: Dados para o canal da Figura 2.10.

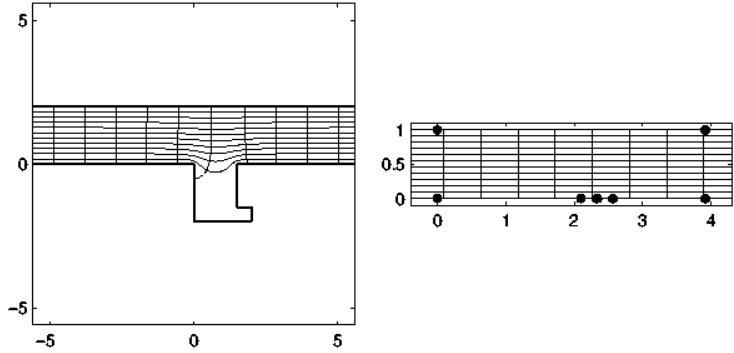


Figura 2.11: Aplicação da faixa em um canal com um cais.

vértice	α	pré-vértice
Inf + 0.00000i	0.00000	-Inf
-4.00000 + 0.00000i	1.00000	0.000000000000e+00
0.00000 + 0.00000i	1.50000	2.097690434288e+00
0.00000 - 2.00000i	0.50000	2.326018625121e+00
2.00000 - 2.00000i	0.50000	2.337580149044e+00
2.00000 - 1.50000i	0.50000	2.337696767718e+00
1.50000 - 1.50000i	1.50000	2.338930486862e+00
1.50000 + 0.00000i	1.50000	2.564674618781e+00
4.00000 + 0.00000i	1.00000	3.911795403869e+00
Inf + 0.00000i	0.00000	Inf
4.00000 + 2.00000i	1.00000	3.913041420002e+00 + i
-4.00000 + 2.00000i	1.00000	-1.180887350047e-04 + i

$c = 2 + 0i$
Precisão estimada é de 2.12e-08

Tabela 2.4: Dados para o canal da Figura 2.11.

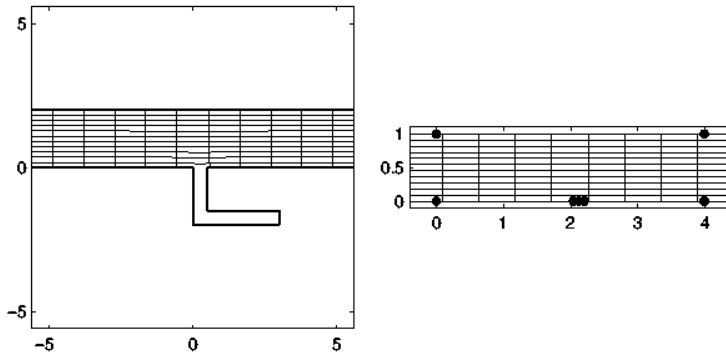


Figura 2.12: Aplicação da faixa em um canal com um cais.

vértice	α	pré-vértice
Inf + 0.00000i	0.00000	-Inf
-4.00000 + 0.00000i	1.00000	0.000000000000e+00
0.00000 + 0.00000i	1.50000	2.040541345848e+00
0.00000 - 2.00000i	0.50000	2.120692223256e+00
3.00000 - 2.00000i	0.50000	2.120694569955e+00
3.00000 - 1.50000i	0.50000	2.120694569955e+00
0.50000 - 1.50000i	1.50000	2.120696851721e+00
0.50000 + 0.00000i	1.50000	2.201765238555e+00
4.00000 + 0.00000i	1.00000	3.996138509198e+00
Inf + 0.00000i	0.00000	Inf
4.00000 + 2.00000i	1.00000	3.992803745591e+00 + i
-4.00000 + 2.00000i	1.00000	-8.346017077443e-06 + i

$c = 1.9986524 + 0i$
 Precisão estimada é de 3.79e-03

Tabela 2.5: Dados para o canal da Figura 2.12.

Capítulo 3

Variáveis complexas aplicadas à Dinâmica dos Fluidos

Neste capítulo vamos aplicar os resultados de variáveis complexas ao estudo de um fluido ideal. Trata-se de um fluido invíscido (sem fricção), de compressibilidade desprezível e no qual a vorticidade inicial (que indica rotação local das partículas do fluido), a princípio, é nula. Estamos no regime chamado de *escoamento potencial*, pois utilizaremos a teoria do potencial. Vejamos por quê, nas seções que se seguem.

3.1 Formulação em variáveis complexas

Vamos imaginar que temos a vista superior do escoamento de água num rio. Tiramos uma foto e em cada ponto do rio marcamos a velocidade da água, supondo que temos acesso a esses valores. Esta é uma visão Euleriana do escoamento porque definimos uma região W fixa onde o comportamento do fluido será estudado ao longo do tempo. O vetor velocidade $\vec{U} = (u, v)$ representa a velocidade de uma partícula de água que, no instante da foto, se encontrava no ponto

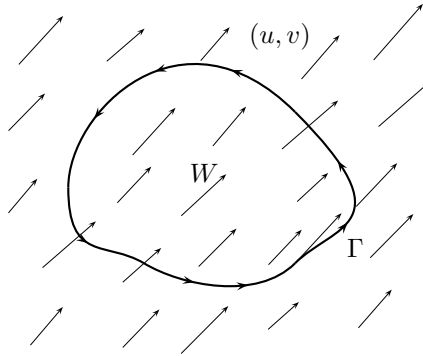


Figura 3.1: Vista superior do domínio de fluido.

onde desenhamos o vetor (veja a Figura 3.1). Em termos matemáticos escrevemos isto na forma

$$u(x, y, t) = \frac{dx}{dt}$$

e

$$v(x, y, t) = \frac{dy}{dt},$$

onde $(x(t), y(t))$ é o vetor posição de uma partícula genérica da água no rio. A velocidade na direção horizontal é $u(x, y, t)$ e na direção vertical $v(x, y, t)$.

Façamos um controle do escoamento do rio da seguinte maneira. Para ter uma idéia da quantidade de redemoinhos vamos desenhar curvas fechadas fixas (indicadas por Γ) na superfície do rio e calcular a rotação sobre esta curva:

$$\text{rotação} \equiv \oint_{\Gamma} (\vec{U} \cdot \vec{t}) ds, \quad (3.1)$$

onde \vec{t} representa o vetor unitário tangente à curva Γ e s é comprimento de arco. O sentido positivo para se percorrer Γ é o anti-horário. O que estamos fazendo? Estamos somando todas as projeções do vetor velocidade na direção tangente a Γ . Se o resultado for um número positivo então temos o efeito de um redemoinho girando no sentido

anti-horário (positivo na regra da mão-direita). Se for um número negativo temos o efeito de um redemoinho girando no sentido horário. Se for zero, não há rotação ao longo da curva Γ escolhida.

Controlemos outra grandeza: o fluxo normal através dessa mesma curva Γ . Isso é feito através da integral de linha abaixo:

$$\text{fluxo normal} \equiv \oint_{\Gamma} (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds. \quad (3.2)$$

O vetor unitário normal a Γ (simbolizado por \vec{n}) é positivo quando aponta para fora. Neste caso estamos somando todas as contribuições de entrada e saída de água, através da fronteira Γ . Se o balanço total for positivo é porque saiu mais água do que entrou. Lembre-se que a normal é positiva para fora. A interpretação é que temos uma fonte de água em algum ponto de W . Se a integral for negativa, então entrou mais água do que saiu, e por isso, deve haver um “ralo” (sumidouro) dentro do domínio W , pois consideramos o fluido incompressível sob o Princípio de Balanço de Massa, [8, 9].

Vamos inicialmente nos concentrar nos casos em que o escoamento é *irrotacional* (sem redemoinhos) e *incompressível*. Em qualquer região o volume de água que entra é igual ao volume que sai, com a hipótese de que a densidade é constante. Colocando isto na forma de uma expressão matemática temos que, para qualquer curva Γ escolhida,

$$\oint_{\Gamma} (\vec{U} \cdot \vec{t}) ds = 0$$

e

$$\oint_{\Gamma} (\vec{U} \cdot \vec{n}) ds = 0.$$

Usemos o Teorema de Green (página 495, [21])

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) &= \\ &= \iint_W \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy, \end{aligned}$$

para escrever as integrais de linha, dadas acima, na forma

$$\iint_W (\nabla \times \vec{U}) dx dy = 0$$

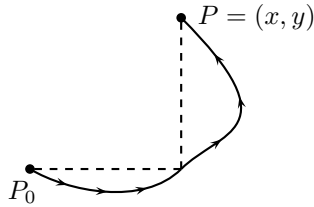


Figura 3.2: Integral de linha ao longo de um trecho da curva Γ .

e

$$\iint_W (\nabla \cdot \vec{U}) \, dx dy = 0.$$

Como essas identidades são válidas para quaisquer curvas Γ , que sejam simples, regulares e fechadas, e seus respectivos interiores W , concluímos que cada integrando deve ser identicamente nulo. Em outras palavras, concluímos que

$$\nabla \times \vec{U} = 0 \quad (3.3)$$

e que

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0. \quad (3.4)$$

Na primeira equação temos que a *vorticidade* $\omega = \nabla \times \vec{U}$ é zero, enquanto que $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ representa o regime de incompressibilidade. Quando o escoamento é irrotacional, podemos definir a *função potencial*

$$\phi(x, y, t) = \phi_0 + \int_{P_0}^P (u dx + v dy), \quad (3.5)$$

onde $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ são dois pontos ligados por um trecho da curva Γ , e $\phi_0 = \phi(x_0, y_0, t)$. Veja a Figura 3.2. Esta função é chamada de *potencial de velocidades* pois $(u, v) = \nabla \phi = (\phi_x, \phi_y)$. Verificar este fato é um ótimo exercício em Cálculo. Separe a integral em x da integral em y , como nas linhas pontilhadas da Figura 3.2, com a definição acima temos um campo conservativo e o valor da integral independe do caminho.

Da mesma forma, quando o escoamento é incompressível (sem fontes de massa) podemos definir a *função de corrente*

$$\psi(x, y, t) = \psi_0 + \int_{P_0}^P (u dy - v dx). \quad (3.6)$$

Neste caso $(u, v) = \nabla^\perp \psi = (\psi_y, -\psi_x)$. A notação é tal que, para uma função f com duas derivadas contínuas, $\nabla \cdot \nabla^\perp = 0$, no sentido que $f_{xy} - f_{yx} = 0$. Por que essa função se chama função de corrente? Este nome vem do fato da função nos permitir visualizar o escoamento no caso estacionário (quando a velocidade não depende do tempo). Vamos entender melhor esta afirmação. Calculemos

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

ao longo da curva $\psi = \text{constante}$. Usando o fato de o escoamento ser estacionário ($\partial\psi/\partial t = 0$) e as definições para as velocidades, escrevemos

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\nabla\psi \cdot \vec{U} = 0,$$

ou seja, o campo de velocidades é tangente às linhas de corrente, que neste caso são dadas pelas curvas de nível $\psi = \text{constante}$. Isso vem do fato de que o gradiente da função de corrente é ortogonal ao campo de velocidades. As partículas do fluido irão descrever trajetórias dadas pelas curvas $\psi = \text{constante}$. Adiante apresentaremos exemplos que confirmarão esta propriedade.

Vamos começar a migrar para o mundo das variáveis complexas. Esta é uma decisão quanto à Modelagem Matemática. Em vez de usarmos o modelo proveniente de Equações Diferenciais Parciais (veja a equação de Laplace abaixo), optamos pelo modelo proveniente de variáveis complexas. Começemos com algumas observações visando traduzir o modelo para a linguagem de variáveis complexas. Escoamentos incompressíveis e irrotacionais nos levaram a

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \rightarrow u_x = (-v)_y$$

e

$$\nabla \times \vec{U} = 0 \rightarrow u_y = -(-v)_x.$$

Estas são as equações de Cauchy-Riemann para u e $-v$. Note que se usarmos a primeira equação de Cauchy-Riemann e considerarmos o fato do escoamento ser irrotacional, temos que a função potencial é uma função harmônica, ou seja, satisfaz à equação de Laplace

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0.$$

Da mesma maneira, se usarmos a segunda equação de Cauchy-Riemann considerando um escoamento incompressível, temos que a função de corrente também é harmônica:

$$\Delta\psi = 0.$$

Temos duas funções harmônicas ϕ e ψ , que podemos considerar como sendo as partes real e imaginária de uma função complexa:

$$\Phi = \phi + i\psi, \quad (3.7)$$

onde o potencial complexo Φ é uma função de $z = x + iy$.

Vamos calcular a derivada do potencial complexo:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \phi_x + i\psi_x = -i(\phi_y + i\psi_y) = u - iv = \frac{d\bar{z}}{dt}. \quad (3.8)$$

A barra sobre o z significa conjugação complexa: $\bar{z} = x - iy$. Pela definição de velocidade confirmamos que ϕ e ψ são conjugados harmônicos, (veja o Capítulo 1). Assim, esta definição de potencial complexo é legítima.

Note que fizemos uma coisa muito interessante. Calculando apenas *uma* derivada complexa estaremos calculando *duas* velocidades. Existem muitos resultados da teoria de variáveis complexas que podem ser usados imediatamente, a serviço da Dinâmica dos Fluidos. Em particular, as aplicações conformes são apropriadas para simplificar a geometria do problema, como antecipamos no Capítulo 2. Esperamos convencer o leitor de todos esses fatos, através dos exemplos a seguir.

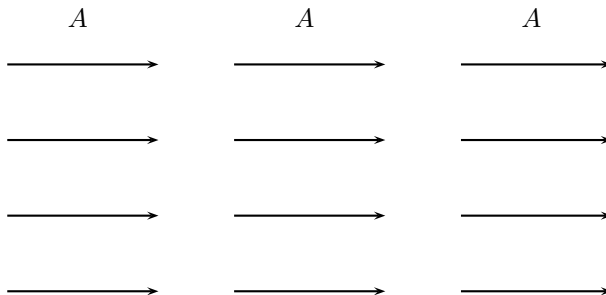


Figura 3.3: Escoamento uniforme com velocidade horizontal igual a A .

Exemplo 3.1. Vamos começar com o escoamento uniforme representado pela Figura 3.3. O potencial é obtido facilmente por inspeção: $\Phi(z) = Az$. Uma coisa é certa. As linhas de corrente ($\psi(x, y) = \text{constante}$) são linhas horizontais. Verifique! A velocidade complexa é

$$\frac{d\Phi}{dz} = A = u - iv \quad \Rightarrow \quad (u, v) = (A, 0).$$

Não resta dúvida de que temos o potencial complexo correto!

3.2 Escoamentos com obstáculos

Exemplo 3.2. Vamos colocar um cilindro circular, de raio R , no caminho do escoamento uniforme do Exemplo 3.1. Veja a Figura 3.4. Agora temos um rio, visto de cima, e uma coluna de uma ponte ou de um pier. Como será o escoamento laminar (sem turbulência) em torno desta coluna? Bastou colocar a coluna e o problema já fica bem mais difícil! Não dá para usar inspeção. Na literatura de Dinâmica dos Fluidos [23] temos o Teorema do Círculo, que enunciaremos a seguir:

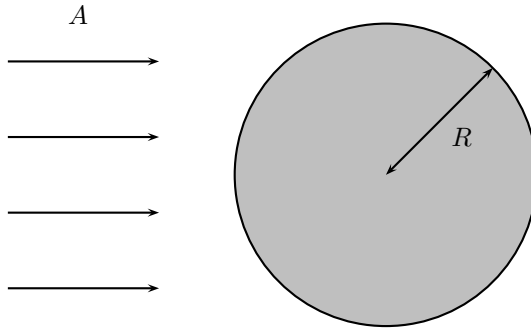


Figura 3.4: Cilindro de raio R na presença de um escoamento uniforme.

3.2.1 Teorema do Círculo, de Milne-Thomson

Teorema 3.1 (Teorema do Círculo, de Milne-Thomson). *Seja o potencial complexo livre (i.e. sem obstáculos) dado por $f(z)$, uma função diferenciável na região $|z| \leq R$. Então, na presença de um cilindro de raio R , centrado na origem, o potencial complexo é dado por*

$$\Phi(z) = f(z) + \bar{f}(R^2/\bar{z}). \quad (3.9)$$

Para o leitor que tem uma formação um pouco mais avançada em variáveis complexas, é fácil argumentar que o teorema acima pode ser aplicado para cilindros de seção transversal não-circulares. Temos que fazer a seguinte modificação. A existência de tais escoamentos é garantida pelo Teorema da Aplicação de Riemann (*Riemann Mapping Theorem*) de regiões simplesmente conexas em um disco unitário. O resultado final é obtido a partir da composição $\Phi(z(w))$, onde $z(w)$ representa o mapeamento de um cilindro não-circular (no plano complexo w) para um cilindro circular (no plano complexo z). Vale ressaltar que o Teorema do Círculo nada mais é do que uma variante do Princípio de Reflexão de Schwarz [1, 10]. No Teorema do Círculo, a reflexão é feita com respeito ao círculo. A reflexão de z , com relação

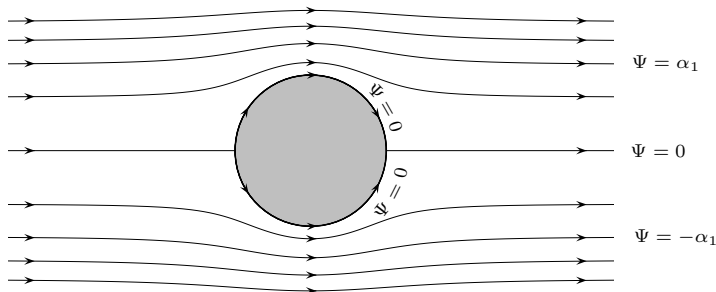


Figura 3.5: Linhas de corrente para um cilindro de raio R na presença de um escoamento uniforme.

ao círculo, é denotada por $z^* = R^2/\bar{z}$.

Vamos usar o resultado do Teorema do Círculo para o ponto $z = Re^{i\theta}$ sobre o círculo:

$$\Phi(z) = f(Re^{i\theta}) + \bar{f}(R^2/Re^{-i\theta}) = f(z) + \bar{f}(z) = 2\text{Re } f,$$

onde $\text{Re } f$ representa a parte real de f . Sobre o círculo temos que $\psi(x, y) = 0$. Logo o escoamento é na direção dessa linha de corrente e por isso a água desliza em torno do cilindro, acompanhando a sua forma. No caso de $f(z) = Az$ as linhas de corrente estão esboçadas na Figura 3.5. Este tipo de configuração aparece em escoamentos reais. Duas ótimas referências são o livro *Album of Fluid Motion* (fotos nos. 1, 6 e 24) [32], composto apenas por fotos de experimentos em laboratório, e o interessantíssimo CD-ROM *Multi-Media Fluid Mechanics* [13].

3.3 Escoamentos com rotação

Exemplo 3.3. Vamos estudar o potencial complexo

$$\Phi(z) = -ia \log(z), \quad (3.10)$$

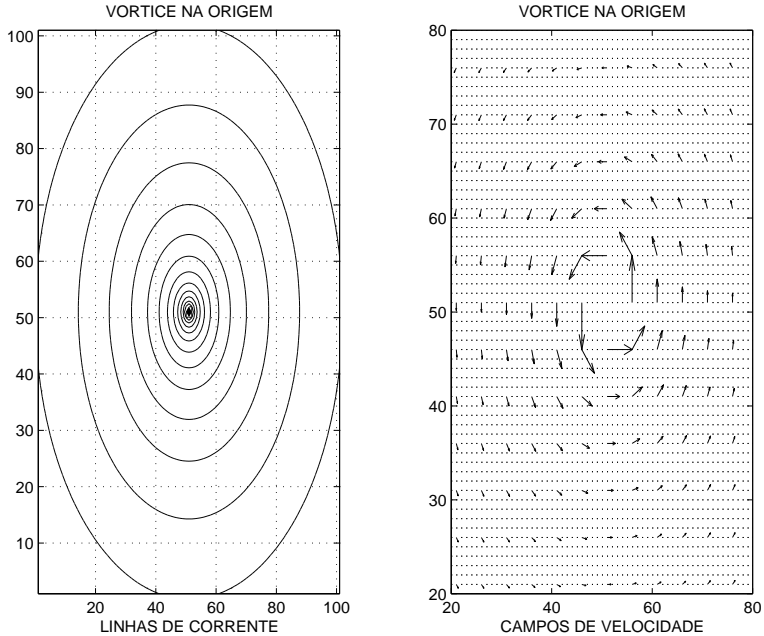


Figura 3.6: Linhas de corrente para um vórtice localizado na origem.

onde $\log(x) = \ln(x)$, para $x > 0$. Vamos visualizar o escoamento através da função de corrente, usando coordenadas polares ($z = re^{i\theta}$):

$$\psi = -a \log(r).$$

As linhas de corrente, $\psi = -a \log(r) = \text{constante}$, são circulares. O campo de velocidades é dado por

$$\frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{a}{z} = -\frac{a}{r} (\sin(\theta) + i \cos(\theta)).$$

A visualização é apresentada na Figura 3.6 e o potencial complexo representa um *vórtice puntual* em $z = 0$. Esse escoamento não é mais irrotacional mas, ainda assim, pode ser modelado usando-se variáveis complexas. Note que o potencial complexo tem uma singularidade

em $z = 0$ e por isso a velocidade não é definida nesse ponto; ela tem um polo em $z = 0$.

A *circulação* em torno de uma curva material $\Gamma(t)$ é dada por

$$C(t; \Gamma) = C(t) \equiv \oint_{\Gamma(t)} \vec{U} \cdot \vec{t} \, ds.$$

Uma *curva material* é uma curva constituída por partículas fixas cuja evolução temporal é acompanhada, [9, 8]. No entanto, na maioria dos exemplos apresentados neste texto esta integral coincide com a definição de rotação, onde a curva é fixa. Um exemplo de curva material é dado na Seção 4.4.

Exemplo 3.4. Vamos analisar um cilindro de raio R na presença de um vórtice, posicionado em $z = z_0$, $|z_0| > R$. O potencial é dado pelo Teorema do Círculo. Note que o potencial livre é dado por $f(z) = -ia \log(z - z_0)$. Esta função é diferenciável em $|z| \leq R$. A singularidade de f está fora do disco. Veja a Figura 3.7. Temos pelo Teorema do Círculo

$$\Phi(z) = -ia \log(z - z_0) + ia \log\left(\frac{R^2}{z} - \bar{z}_0\right). \quad (3.11)$$

Para entender melhor o que acontece quando usamos o Teorema do Círculo, vamos reescrever o potencial acima na forma:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = -ia \log(z - z_0) + ia \log\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}\right) - \\ - ia \log(z) + ia \log(-\bar{z}_0). \end{aligned}$$

O último termo é uma constante e por isso não afeta o campo de velocidades. Podemos ignorá-lo. Os outros representam três vórtices, sendo dois fictícios: um na origem com intensidade a , e outro em $z_0^* = R^2/\bar{z}_0$ com intensidade $-a$ (girando no sentido horário). Os dois vórtices fictícios (i.e., dentro do cilindro) fazem com que a borda do cilindro coincida com a linha de corrente $\psi = 0$. Em outras palavras, se tirarmos o cilindro e colocarmos esses três vórtices, vamos ter as mesmas linhas de corrente fora do círculo de raio R , mas teremos um escoamento dentro do círculo que agora representa uma região com água também. Ver Figura 3.8.

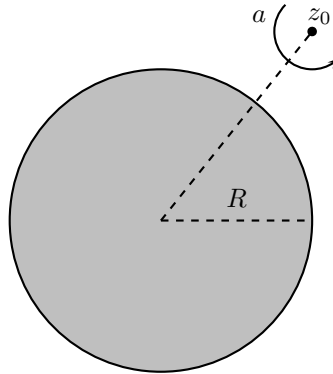


Figura 3.7: Cilindro de raio R na presença de um vórtice.

Há vários exercícios a serem feitos. Eles estão um pouco acima do nível planejado para esse texto. Fica aqui uma sugestão: calcular a velocidade angular do vórtice em z_0 em torno do cilindro. A dica é usar a expressão com três vórtices e desprezar o efeito do potencial para o vórtice em z_0 . Em outras palavras, deve-se usar o potencial modificado

$$\tilde{\Phi}(z) = ia \log \left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_0} \right) - ia \log(z).$$

Fazemos isso pois um vórtice não induz uma velocidade sobre si mesmo. Desta maneira, removemos a singularidade do campo de velocidades em z_0 .

Exemplo 3.5. Estudemos agora um exemplo mais complexo. Este exemplo exige ainda mais destreza em variáveis complexas, mas esperamos que isto sirva de estímulo para o leitor.

Considere uma linha infinita de vórtices de mesma intensidade a . Veja a Figura 3.9. Este tipo de configuração aparece em escoamentos reais (*Album of Fluid Motion*, foto no. 98, [32]). Obviamente na prática temos uma estrutura de vórtices longa, mas finita. No entanto o modelo infinito facilita a Modelagem Matemática como veremos a seguir. A subsequente passagem para duas fileiras infinitas de vórtices

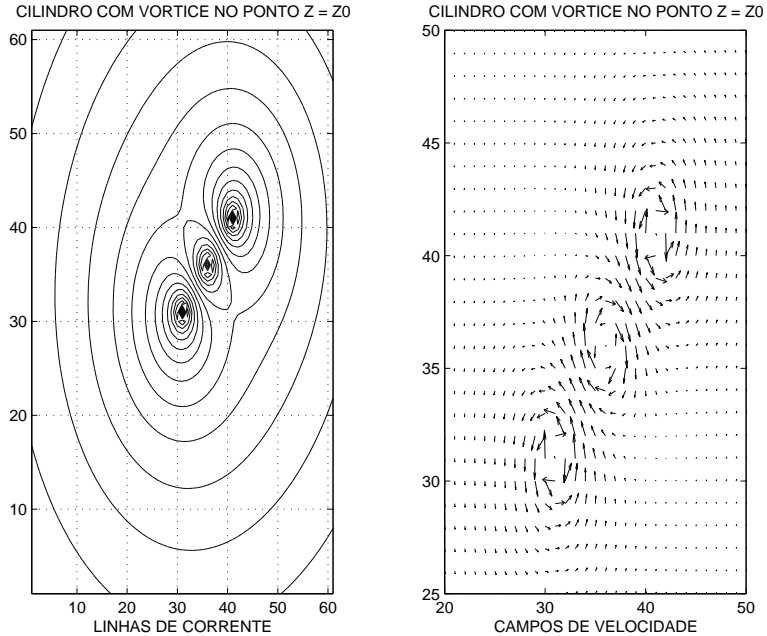


Figura 3.8: Cilindro de raio R na presença de um vórtice em z_0 e outros dois fictícios.

não é difícil. A fileira dupla com vórtices de intensidades contrárias (a em cima; $-a$ embaixo) é conhecida como a *via de vórtices de von Karmán*. A via de von Karmán se move com velocidade constante. Após compreender o presente exemplo tente calcular esta velocidade [2]. Estas estruturas aparecem no “rastros” (esteira) deixados por navios, asas de aviões, bolas de golf e outros objetos em movimento, [13].

Usando a nossa experiência em exemplos anteriores, vamos tentar escrever o potencial complexo para esta nova configuração de vórtices. Que tal

$$“\Phi(z)” = -ia \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(z - nd)?$$

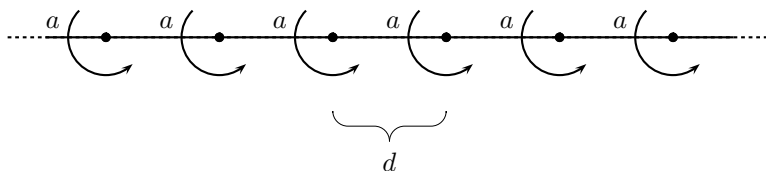


Figura 3.9: Linha infinita com vórtices de intensidade a .

Infelizmente esta expressão não faz sentido. Por isso já colocamos as aspas. Esta série não converge, apesar de formalmente representar uma linha infinita de vórtices, todos de intensidade $+a$. Vamos consertar este modelo. O ponto de partida é reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{“}\Phi(z)\text{”} &= -ia \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{z}{nd} \right) + \log \left(1 + \frac{z}{nd} \right) + \log(-n^2 d^2) \right) - \\ &\quad - ia \log(z). \end{aligned}$$

O último termo, dentro do somatório, é uma constante e por isso pode ser jogado fora sem interferir no campo de velocidades (dado por $d\Phi/dz$). Agora podemos escrever uma série que matematicamente faz sentido:

$$\Phi(z) = -ia \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\log \left(1 - \frac{z^2}{n^2 d^2} \right) \right) - ia \log(z).$$

Ou ainda

$$\Phi(z) = -ia \log \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(z \left(1 - \frac{z^2}{n^2 d^2} \right) \right) \right\}.$$

Fazemos a troca do limite pelo produto baseado no seguinte resultado, proveniente da aplicação do Teorema de Fatoração de Weierstrass [10]:

$$\sin \left(\frac{\pi z}{d} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(z \left(1 - \frac{z^2}{n^2 d^2} \right) \right),$$

onde o produto converge uniformemente em compactos contidos no plano complexo. Em face a este resultado, escrevemos o potencial complexo para uma linha com infinitos vórtices de intensidade a :

$$\Phi(z) = -ia \log \left(\sin \left(\frac{\pi z}{d} \right) \right). \quad (3.12)$$

Um resultado extremamente elegante. Uma boa verificação é fazer z se aproximar de $z_0 = nd$. Quando isto acontece

$$\sin \left(\frac{\pi z}{d} \right) \approx \frac{\pi}{d}(z - nd)$$

e

$$\Phi(z) \approx -ia \log(z - nd) - ia \log \left(\frac{\pi}{d} \right).$$

O segundo termo é uma constante e o comportamento, perto de um vórtice localizado em $z_0 = nd$, é o desejado.

O campo de velocidades é dado por

$$\frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{a\pi}{d} \cot \left(\frac{\pi z}{d} \right) = u - iv.$$

Temos um número infinito de *pontos de estagnação* (pontos localizados em $z = (2n + 1)d/2$, onde $u - iv = 0$). A função de corrente é dada por

$$\psi(x, y) = -\frac{a}{2} \log \left[\frac{1}{2} \left(\cosh \left(\frac{2\pi y}{d} \right) - \cos \left(\frac{2\pi x}{d} \right) \right) \right]$$

e as linhas de corrente estão esboçadas na Figura 3.10.

Podemos imaginar que temos uma linha de “liquidificadores” idênticos, isto é *vórtices puntuais*, situados em $z = nd$, $n = 1, 2, \dots$. Na parte de cima os “liquidificadores” produzem uma correnteza para a esquerda, enquanto que na parte de baixo uma correnteza para a direita. O esboço das linhas de corrente está de acordo com a nossa intuição. Uma partícula passando perto de um “liquidificador” vai tender a ser puxada para o meio de dois “liquidificadores”, ou seja, puxada pelo redemoinho do primeiro. Mas antes que isso aconteça, o efeito do segundo “liquidificador” vizinho faz com que a partícula seja atirada para fora do redemoinho do primeiro “liquidificador”, e ela continuará sobre essa trajetória ondulada (Figura 3.10). As partículas muito próximas a um vórtice puntual ficarão descrevendo órbitas praticamente circulares.

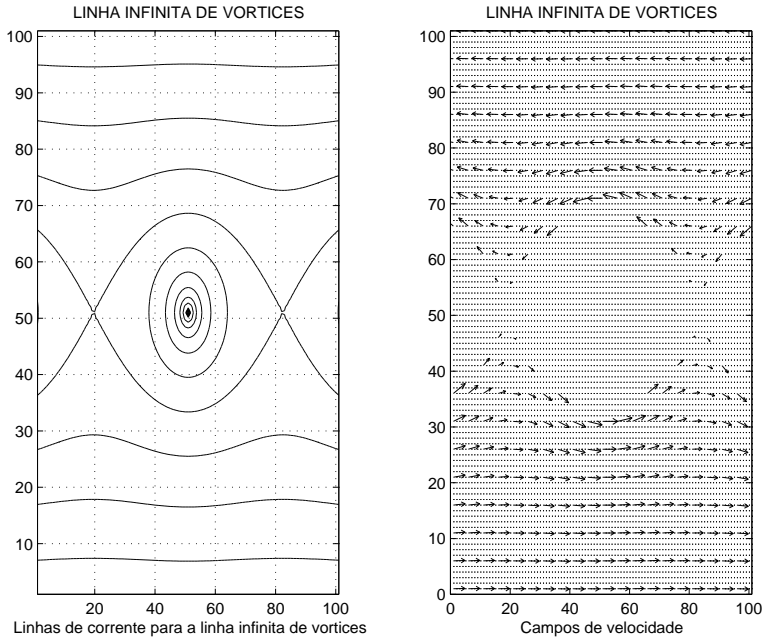


Figura 3.10: Linhas de corrente para a linha infinita de vórtices.

Exemplo 3.6. Neste último exemplo vamos estender o Exemplo 3.5 para uma distribuição contínua de vórtices. A distribuição contínua é tal que a intensidade total, sobre um intervalo de comprimento $d = 2\pi$, continua sendo a . A intensidade de cada vórtice é $a ds/2\pi$, onde ds representa um infinitésimo de comprimento de arco. Para formular o potencial complexo, temos que somar o efeito de todos os vórtices desse intervalo. A “soma” é dada pela integral

$$\Phi(z) = \frac{-ia}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(\sin \left(\frac{z-s}{2} \right) \right) ds,$$

para valores de z fora do eixo real. Esse potencial complexo representa uma linha *contínua*, infinita, de vórtices. A essa linha se dá

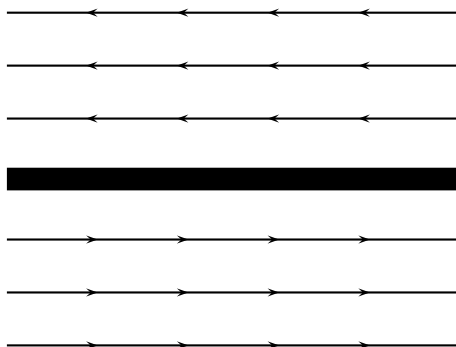


Figura 3.11: Linhas de corrente para uma folha de vorticidade.

o nome de *folha de vorticidade*, representada pela linha grossa na Figura 3.11. Neste modelo matemático, dito macroscópico, a estrutura detalhada dos vórtices pontuais (isolados) foi “achatada”. É como se víssemos o caso anterior de bem longe. Assim chamamos este modelo de macroscópico pois o espaçamento entre vórtices é tão pequeno que vemos o conjunto como uma distribuição contínua de vórtices.

No Capítulo 4 vamos mostrar que o campo de velocidades da folha é representado por uma integral singular. As linhas de corrente estão representadas na Figura 3.11; temos o que chamamos de um escoamento cisalhante.

3.4 Teorema de Blasius

Teorema 3.2 (Teorema de Blasius). *Considere um escoamento potencial estacionário em torno de um obstáculo fixo de seção transversal B , veja a Fig. 3.12. Seja o escoamento identificado pelo potencial complexo $w(z)$ e a força $[X, Y]^T$, sobre o obstáculo, pela função $F = X - iY$. Então*

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

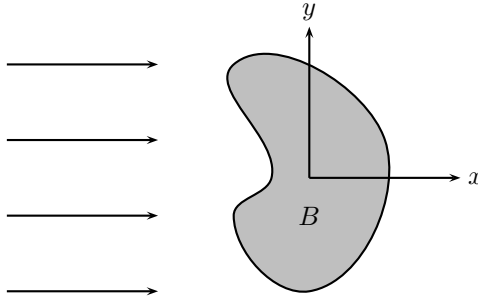


Figura 3.12: Geometria para o Teorema de Blasius.

e

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right\},$$

onde M_0 é o momento em torno da origem. O efeito da gravidade está sendo ignorado.

Demonstração. O primeiro passo é transcrever o problema para a linguagem de variáveis complexa. Temos que

$$\vec{n} = (dy, -dx), \quad d\vec{F} = -p(dy, -dx) = (dX, dY).$$

Na forma complexa

$$dF = dX - idY = -pdy - i(pdx) = -ip(dx - idy) = -ipd\bar{z}$$

onde p representa a pressão, o único esforço que o fluido ideal exerce sobre o obstáculo.

Por que definir $F = X - iY$ e $dF = dX - idY$? Isto é em decorrência da velocidade complexa ser $dw/dz = u - iv$. Como

$$F = m \cdot \text{aceleração} = m \frac{du}{dt} - im \frac{dv}{dt},$$

então a convenção está correta. Note que os resultados são escritos em termos de dw/dz .

Precisamos obter uma expressão para a pressão. Pela Lei de Bernoulli [9, 8] temos que

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{U}^2\|}{2} = \text{constante, digamos } H.$$

Logo

$$p = \rho H - \frac{\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz} \frac{\overline{dw}}{dz} \right).$$

Então

$$F = \oint_{\partial B} dF = -i\rho H \oint_{\partial B} d\bar{z} + \frac{\rho i}{2} \oint_{\partial B} \frac{dw}{dz} \frac{\overline{dw}}{dz} d\bar{z}.$$

Finalmente

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

pois

$$\frac{\overline{dw}}{dz} d\bar{z} = \frac{dw}{dz} dz.$$

Para o momento temos que

$$\begin{aligned} M_0 &= \oint_{\partial B} px \, dx + py \, dy, \\ &= \oint_{\partial B} p - \frac{\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz} \frac{\overline{dw}}{dz} \right) \operatorname{Re}(z \, d\bar{z}), \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_{\partial B} \frac{dw}{dz} \frac{\overline{dw}}{dz} z \, d\bar{z}, \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_{\partial B} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z \, dz. \end{aligned}$$

□

Agora podemos fazer uso de vários resultados em Análise Complexa. Considere um círculo C englobando o contorno ∂B . Se o

escoamento potencial $w(z)$ for tal que não existem singularidades entre C e ∂B , então podemos usar o *Teorema de Cauchy* [1, 10] e substituir as integrais do Teorema Blasius por integrais sobre C . Isto é particularmente útil quando o comportamento assintótico de $w(z)$, longe do obstáculo, for conhecido e simples.

Vale observar que a força em um obstáculo B não é invariante por uma aplicação conforme. No entanto a circulação é invariante. Verifique!

A componente de F normal ao escoamento é a sustentação. A componente de F na direção contrária ao escoamento é a força de arrasto, de resistência ao escoamento, devido à forma do obstáculo (não há fricção no modelo!).

3.5 Sustentação de um aerofólio

Através de um exemplo bastante simples vamos estudar um dos princípios básicos que fazem um avião voar.

Seja o potencial complexo

$$w(z) = A \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{K}{2\pi} \log \frac{z}{R},$$

onde a velocidade longe do cilindro de raio R é dada por $[A, 0]^T$ e a circulação em torno do cilindro é dado por $(-K)$. Verifique!

Calculemos os pontos de estagnação:

$$\frac{dw}{dz} = A \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{i}{2\pi} \frac{k}{z} = A + \left(\frac{iR}{z} \right)^2 A + \left(\frac{iR}{z} \right) \frac{K}{2\pi R} = 0.$$

Seja $\alpha = iR/z$. Temos que

$$\alpha = \frac{-\frac{K}{2\pi R} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2\pi R}\right)^2 - 4A^2}}{2A}.$$

Com respeito às raízes temos 3 casos:

$$0 < \frac{K}{AR} < 4\pi, \quad \frac{K}{AR} = 4\pi \quad \text{e} \quad \frac{K}{AR} \geq 4\pi$$

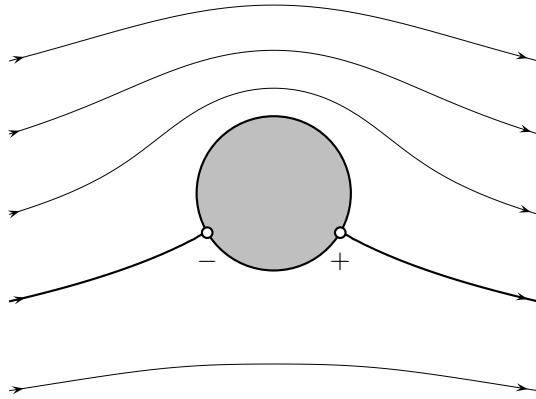


Figura 3.13: Linhas de corrente para o caso (1): raízes complexas distintas para os pontos de estagnação (indicados por “o”).

Caso (1) \Rightarrow raízes complexas:

$$\alpha = -\frac{K}{4\pi AR} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{4\pi AR}\right)^2 - 1} = -\sin \beta \pm i \cos \beta,$$

ao definirmos $\sin \beta = \frac{K}{4\pi AR}$.

Logo

$$\frac{iR}{z} = i(\pm \cos \beta + i \sin \beta),$$

com

$$z_+ = R e^{-i\beta}$$

e

$$z_- = -R e^{i\beta}.$$

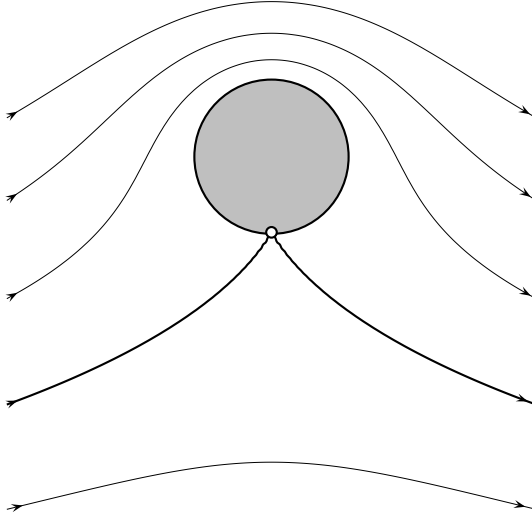


Figura 3.14: Linhas de corrente para o caso (2): raiz dupla complexa. Os pontos de estagnação coalescem.

Estes pontos de estagnação estão sobre o obstáculo B , veja a Fig. 3.13. Note que $\sin \beta = 0$ quando $K = 0$ (caso sem circulação).

Caso (2) \Rightarrow raízes duplas:

Exatamente quando $\frac{K}{4\pi AR} = 1 = \sin \beta$. Neste caso $\beta = \frac{\pi}{2}$ e os pontos de estagnação z_+ e z_- coalescem, veja a Fig. 3.14.

Caso (3) \Rightarrow raízes reais:

Neste caso temos as raízes

$$\alpha_+ = -\frac{K}{4\pi AR} + \sqrt{\left(\frac{K}{4\pi AR}\right)^2 - 1}$$

e

$$\alpha_- = -\frac{K}{4\pi AR} - \sqrt{\left(\frac{K}{4\pi AR}\right)^2 - 1}.$$

Como

$$\alpha = \frac{iR}{z}$$

os pontos de estagnação

$$z_{\pm} = i \frac{R}{\alpha_{\pm}}$$

estão localizados ao longo do eixo dos y , como mostra a Fig. 3.15.

Resumindo: no estudo apresentado vemos que conforme K aumenta, a partir de zero, a velocidade na parte superior do cilindro aumenta enquanto que na parte inferior diminui devido à circulação criada artificialmente neste modelo matemático. Pela Lei de Bernoulli vemos que a pressão na parte inferior será maior do que na parte superior do cilindro. Vejamos pelo Teorema de Blasius que isto gera a sustentação do cilindro, ou seja, uma componente da força na vertical.

Pelo Teorema de Blasius temos que

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left[A \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{i}{2\pi} \frac{K}{z} \right]^2 dz,$$

pelo Teorema de Cauchy,

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{2Ai}{2\pi} \frac{K}{z} dz = \frac{i\rho}{2} \left[2\pi i \left(\frac{2AKi}{2\pi} \right) \right].$$

Logo

$$F = X - iY = -i\rho AK \Rightarrow Y = \rho AK.$$

Temos sustentamento do aerofólio devido à presença da circulação. Uma limitação desta teoria simplificada é a ausência de força de arrasto, que indica o efeito de resistência do ar ao movimento. Mas mesmo sendo um modelo excessivamente simplificado, variáveis complexas nos revela um ingrediente importante na sustentação de um aerofólio: a *circulação*.

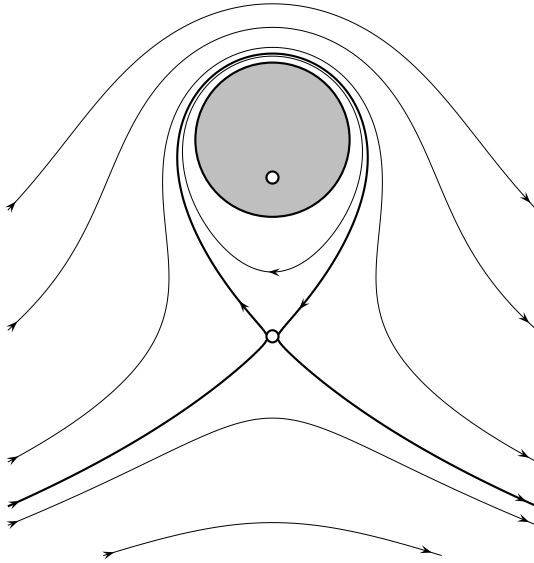


Figura 3.15: Linhas de corrente para o caso (3): raízes reais. Um ponto de estagnação é virtual.

Vejamos as seguintes extensões para o problema do cilindro ilustrado acima. Considere um obstáculo elíptico. Considere a aplicação conforme onde

$$z = w + \frac{\lambda^2}{w}, \quad \text{e } \lambda \text{ é uma constante real.}$$

Para um círculo no plano w temos no plano z

$$z = x + iy = R e^{i\theta} + \frac{\lambda^2}{R e^{i\theta}} = \left(R + \frac{\lambda^2}{R}\right) \cos \theta + i \left(R - \frac{\lambda^2}{R}\right) \sin \theta.$$

Logo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde

$$a = \left(R + \frac{\lambda^2}{R} \right) \quad \text{e} \quad b = \left(R - \frac{\lambda^2}{R} \right).$$

Levamos um círculo de raio R em uma elipse, com eixos $2a$ e $2b$. O potencial complexo

$$\Phi(w) = A \left(w + \frac{R^2}{w} \right) + i \frac{K}{2\pi} \log \left(\frac{w}{R} \right)$$

reescrito na forma

$$\Phi(z) = A \left(w(z) + \frac{R^2}{w(z)} \right) + i \frac{K}{2\pi} \log \left(\frac{w(z)}{R} \right),$$

$$w(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2} (z^2 - 4\lambda^2)^{1/2}$$

representa o escoamento (análogo ao anterior) em torno de um cilindro elíptico com circulação $(-K)$ e velocidade $[A, 0]^T$ no infinito. Veja o comportamento assintótico da transformação conforme. A força será a mesma neste caso!

Se o parâmetro λ for tomado igual a R , a elipse vira uma placa. Ajustando o ângulo de incidência do escoamento no infinito, podemos representar a configuração da Figura 3.16.

Podemos generalizar o resultado para o cálculo da força sobre o cilindro com através do teorema abaixo.

Teorema 3.3 (Teorema de Kutta-Joukowski, [2, 8, 9]). *Seja o escoamento potencial incompressível, exterior à região B . Seja a velocidade no infinito dada pelo vetor $\vec{U} = [A_x, A_y]^T$, constante. A força exercida sobre o obstáculo B é dada por*

$$F = [X, Y]^T = -\rho K \|\vec{U}\| \vec{n},$$

onde \vec{n} é o vetor unitário, normal a $\vec{U} = [A_x, A_y]^T$, e K é a circulação em torno de B .

A demonstração faz uso da *série de Laurent* [1, 10, 23] para o potencial complexo, em conjunção com o Teorema de Blasius e o Teorema de Cauchy. Note que não há uma componente da força no sentido contrário ao escoamento. Este é o chamado *Paradoxo*

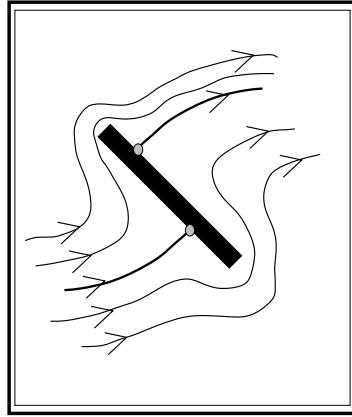


Figura 3.16: Caso da elipse que degenera em uma placa, um aerofólio plano.

de *D'Alembert*. O paradoxo se dá em face de termos ignorado a viscosidade. Esse paradoxo ainda é mais surpreendente em 3D [2, 8, 9].

A engenharia pode tirar proveito desse paradoxo no sentido que, quanto menor a camada limite em torno da asa, e quanto maior a circulação gerada, melhor para a eficiência do aerofólio. A *camada limite* é a região onde o fluido está sob o efeito da viscosidade. Neste curso não entraremos no tópico de aerofólios. No entanto aproveitamos para dar dois exemplos dos chamados aerofólios de Joukowski: considere a aplicação conforme

$$z = w + \frac{R^2}{w},$$

conhecida como a *transformação de Joukowski*. Sejam as geometrias apresentadas na Figura 3.17. Os discos não-centrados dão lugar aos aerofólios esboçados no plano z complexo, uma análise detalhada pode ser achada em [1].

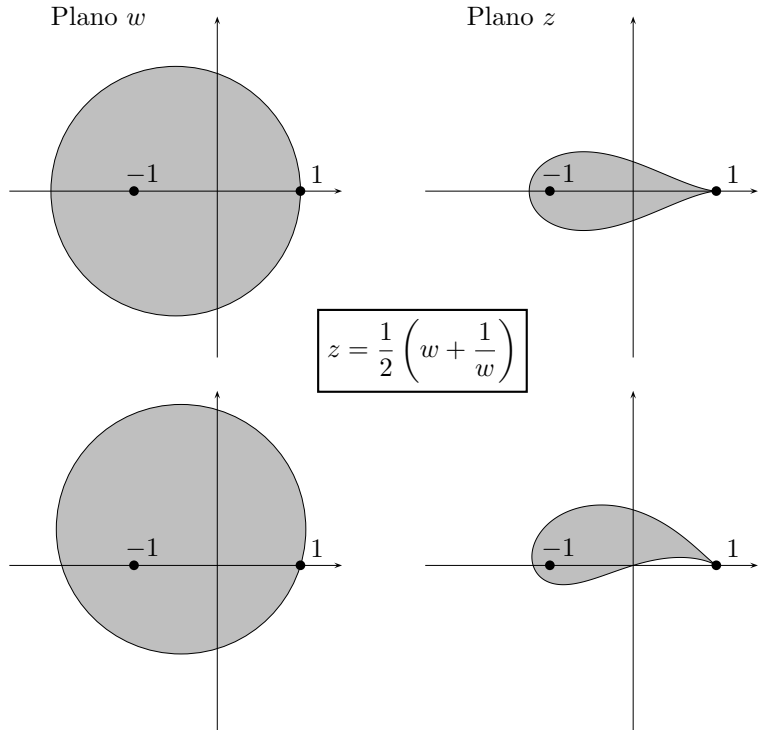


Figura 3.17: Aerofólios obtidos pela transformação de Joukowski.

Capítulo 4

Integrais de contorno singulares

Neste Capítulo damos continuidade à idéia de introduzir singularidades como objetos de grande utilidade em Matemática Aplicada. Este é o Capítulo mais avançado do Curso, que vai além do nível elementar, mais que visa estimular o leitor a aprofundar seu conhecimento no fascinante tema de Análise Complexa Aplicada, e em particular, no tema de integrais de contorno singulares.

4.1 Integral de Cauchy

Consideremos uma curva $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ *simples*, ou seja, que não se corta, regular, não necessariamente fechada. Se for fechada, Γ estará orientada no sentido positivo (anti-horário). Seja $h : \text{tr } \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de valores complexos, contínua por partes, definida no traço de Γ .

Para $z \in \mathbb{C} - \text{tr } \Gamma$ definimos a integral de Cauchy

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z} dw. \quad (4.1)$$

Já vimos uma integral deste tipo quando consideramos a fórmula integral de Cauchy. Nesse caso, para f analítica num aberto convexo

contendo a curva fechada e simples Γ tínhamos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo z no interior de Γ . Esta representação integral da função f provou ser útil, já que permite intercambiar limites (Lema 1.1) além de derivadas e séries.

Analogamente, para todo $z \in \mathbb{C} - \text{tr } \Gamma$ o integrando na Eq. (4.1) é uma função a duas variáveis que denotamos por $g(z, w)$ tal que

$$g : (\mathbb{C} - \text{tr } \Gamma) \times \text{tr } \Gamma \rightarrow \mathbb{C},$$

$$g(z, w) = \frac{h(w)}{w - z}.$$

A função g é analítica com relação à primeira componente e contínua por partes com relação a w . Como o integrando na Eq. (4.1) depende continuamente (continuamente por partes) em w , a integração com respeito a w preserva a analiticidade com respeito a z , veja o Capítulo 4 de [10]. Logo $\varphi(z)$ é analítica em todo ponto de $\mathbb{C} - \text{tr } \Gamma$.

Se Γ não for fechada o conjunto $\mathbb{C} - \text{tr } \Gamma$ é conexo e a Eq. (4.1) define uma única função analítica φ . Caso contrário, $\mathbb{C} - \text{tr } \Gamma$ possui duas componentes conexas nas quais a Eq. (4.1) define uma função analítica. Estas funções podem ser bem diferentes em cada componente. Por exemplo, se considerarmos $h = 1$ para todo z de Γ fechada, então a integral de Cauchy

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

nada mais é do que o índice de z com respeito a Γ . Ela vale 1 no interior da curva Γ e zero no exterior. A diferença $1 - 0 = h(z_0)$, com $z_0 \in \Gamma$, não é casual.

Vamos ver que no caso geral o salto que experimenta a integral de Cauchy ao aproximarmos por um lado ou o outro (todos termos a serem definidos ainda) do ponto $z_0 \in \Gamma$, é do valor de $h(z_0)$. Portanto, descartamos a possibilidade de definirmos por continuidade a função φ em Γ . Isto longe de ser ruim, vai ser de muita utilidade nas

aplicações. Nossa meta neste capítulo é indicar como em problemas aplicados (por exemplo em Dinâmica dos Fluidos) podemos fazer uso do salto deste tipo de função definida através de integrais de Cauchy e suas variações. Na última Seção, faremos uma breve introdução à utilidade das integrais singulares em Modelagem Matemática de problemas aplicados.

4.2 Valor Principal de Cauchy

Vimos que para $z \in \mathbb{C} - \text{tr } \Gamma$ a integral na Eq. (4.1) está bem definida. Porém, se $z \in \text{tr } \Gamma$ a integral é singular. Precisamos dar uma interpretação a esta integral e definir, se possível, um único valor para ela quando $z \in \text{tr } \Gamma$. No caso real, com Γ um segmento de reta e $h = 1$, a integral imprópria nem sempre existe. Vejamos no exemplo.

Exemplo 4.1. Seja $f(x) = 1/x$ uma função a valores reais definida em $[-L, L] - \{0\}$. A integral imprópria

$$\int_{-L}^L f(x) dx$$

não existe. Para uma demonstração rigorosa veja a caracterização da existência da integral imprópria na página 181 de [21].

Porém, o Valor Principal de Cauchy definido como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-L}^{-\rho} f(x) dx + \int_{\rho}^L f(x) dx,$$

existe e é zero porque para todo $0 < \rho < L$ vale

$$\int_{-L}^{-\rho} f(x) dx + \int_{\rho}^L f(x) dx = 0,$$

veja a Figura 4.1. Em outras palavras conseguimos formalizar o cancelamento da parte positiva com a parte negativa da integral.

Portanto, no caso de funções complexas, onde as integrais são definidas ao longo de curvas mais gerais do que segmentos do eixo real, uma construção especial deve ser feita capaz de resolver situações como acima.

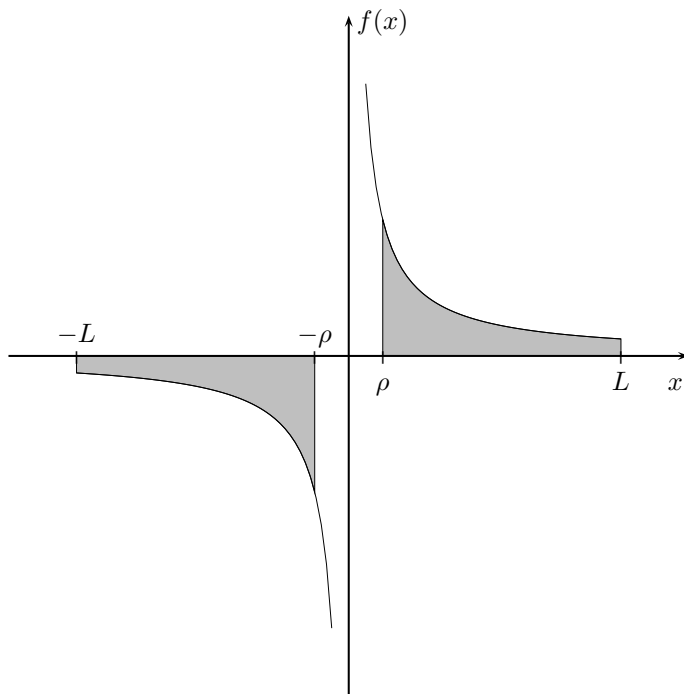


Figura 4.1: Valor Principal de Cauchy de uma função real.

Seja $z_0 = \Gamma(t_0)$ um ponto da curva Γ que não é extremo quando Γ não for fechada, ou seja, $t_0 \neq a, b$. Vamos considerar uma bola fechada com centro em z_0 e raio $\rho > 0$, suficientemente pequeno para que a circunferência $\Delta : |z - z_0| = \rho$ corte Γ em pelo menos dois pontos. Veja a Figura 4.2. Sejam tais pontos $z_1 = \Gamma(t_1)$ e $z_2 = \Gamma(t_2)$ com $t_1 < t_0 < t_2$, sendo t_1 o maior valor em $[a, t_0]$ tal que $\Gamma(t_1)$ pertença à circunferência e t_2 o menor valor em $(t_0, b]$ tal que $\Gamma(t_2)$ pertença à circunferência. Denotemos por Γ_ρ a parte de Γ entre z_1 e z_2 , ou seja $\Gamma_\rho = \Gamma([t_1, t_2])$. Então, a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} \frac{h(w)}{w - z_0} dw \quad (4.2)$$

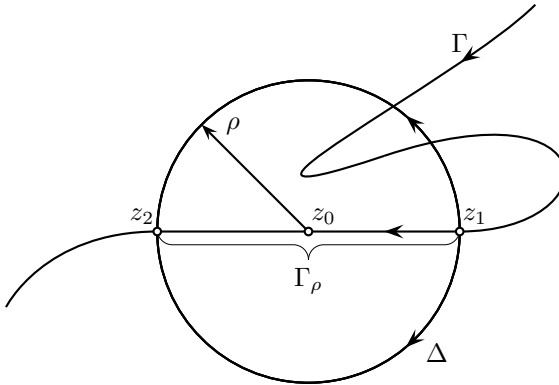


Figura 4.2: Definição de Valor Principal de Cauchy.

existe para todo $\rho > 0$. Se quando $\rho \rightarrow 0$ o limite destas integrais existir, chamaremos este limite de o *Valor Principal de Cauchy da integral (4.2)* para $z = z_0$ e utilizamos a notação:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z_0} dw = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho}} \frac{h(w)}{w - z_0} dw.$$

Nesse caso, definimos

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z_0} dw. \quad (4.3)$$

Observe que a definição do Valor Principal de Cauchy (VPC) dada generaliza a definição conhecida dos cursos de Análise utilizada no Exemplo (4.1). No lugar de integrais ao longo de segmentos de reta no eixo real, agora integramos ao longo de uma curva no plano complexo.

Por outro lado, esta nova definição não é restritiva pois a integral da Eq. (4.3) pode existir como integral imprópria. Isto é, se existir o limite

$$\lim_{\rho_1, \rho_2 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho_1}^-} \frac{h(w)}{w - z_0} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho_2}^+} \frac{h(w)}{w - z_0} dw, \quad (4.4)$$

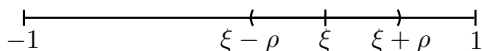
onde $\Gamma_{\rho_1^-} = \Gamma([t_1, t_0])$ e $\Gamma_{\rho_2^+} = \Gamma([t_0, t_2])$. Ou seja, consideramos z_1 e z_2 se aproximando de z_0 mas não necessariamente de forma simétrica. Então o Valor Principal de Cauchy existe e coincide com o valor da integral imprópria, já que basta considerar $\rho_1 = \rho_2$ no limite (4.4).

Vejamos agora um exemplo semelhante ao Exemplo 4.1 só que estaremos introduzindo uma notação que nos permitirá calcular o Valor Principal de Cauchy para integrais sobre curvas complexas.

Exemplo 4.2. Seja $\Gamma = [-1, 1]$, e $-1 < \xi < 1$. A integral imprópria

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - \xi} dw$$

não existe. Vejamos se existe o Valor Principal de Cauchy. Considere $\rho < \min(\xi + 1, 1 - \xi)$, de forma que Δ_{ρ} corte Γ em dois pontos:



Então

$$\int_{-1}^{\xi - \rho} \frac{1}{w - \xi} dw = \ln \rho - \ln(1 + \xi)$$

e

$$\int_{\xi + \rho}^1 \frac{1}{w - \xi} dw = \ln(1 - \xi) - \ln \rho.$$

Assim, existe a integral

$$\int_{\Gamma - \Gamma_{\rho}} \frac{1}{w - \xi} dw = \ln \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)$$

e é independente de ρ . Portanto, no limite,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\rho}} \frac{1}{w - \xi} dw = \ln \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right).$$

No exemplo seguinte, a curva Γ não está mais no eixo real.

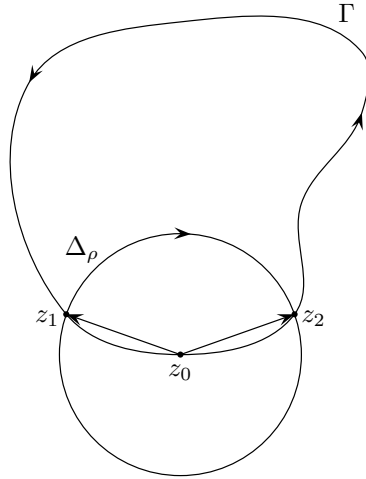


Figura 4.3: VPC para o Exemplo 4.3.

Exemplo 4.3. Consideremos mais uma vez $h(z) = 1$ e a integral

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{w - z_0} dw$$

com $z_0 \in \Gamma$, um ponto sobre a curva fechada Γ orientada no sentido positivo. Seja $\rho > 0$ de forma tal que a circunferência Δ corte Γ nos pontos z_1 e z_2 , conforme descrito na definição de VPC. Chamemos de Δ_ρ o arco de circunferência desde z_1 até z_2 centrado em z_0 , veja a Figura 4.3. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} \frac{1}{w - z_0} dw &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho + \Delta_\rho} \frac{1}{w - z_0} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\rho} \frac{1}{w - z_0} dw. \end{aligned}$$

A integral ao longo do caminho fechado $\Gamma - \Gamma_\rho + \Delta_\rho$ é zero porque z_0 está no exterior do caminho. Por isso, $1/(w - z_0)$ é analítica no interior do caminho e nele próprio e podemos aplicar o teorema de Cauchy.

Para calcular a segunda integral vamos parametrizar o caminho Δ_ρ na forma polar

$$w = z_0 + \rho e^{i\theta},$$

onde o argumento θ percorre os valores compreendidos entre $\alpha = \arg(z_1 - z_0)$ e $\beta = \arg(z_2 - z_0)$ com os argumentos α e β escolhidos de tal maneira que

$$-2\pi < \beta - \alpha < 0.$$

Por exemplo, na Figura 4.3,

$$0 < \beta < \alpha < 2\pi.$$

Se $\text{Im } z_2$ fosse menor do que $\text{Im } z_0$, escolheríamos β tal que

$$\alpha - 2\pi < \beta < 0.$$

Substituindo na integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\rho} \frac{1}{w - z_0} dw$$

obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} (\beta - \alpha).$$

Intuitivamente, o limite de $(\beta - \alpha)$ quando o raio ρ tende a zero é $-\pi$, porque os quocientes

$$\frac{z_0 - z_1}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{z_2 - z_0}{\rho}$$

tendem ao vetor unitário tangente à curva regular Γ em z_0 . Formalmente,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = -1.$$

Em coordenadas polares temos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} e^{i(\beta - \alpha)} = -1.$$

O ramo da função argumento correspondente a $(\beta - \alpha)$ é $(-2\pi, 0)$, portanto, o ramo da função logaritmo correspondente devolve $\log(-1) = -i\pi$. Pela continuidade do ramo da função logaritmo,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \beta - \alpha = -\pi.$$

Com isto,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\rho} \frac{1}{w - z_0} dw = -\frac{1}{2}$$

e assim,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} \frac{1}{w - z_0} dw = \frac{1}{2}.$$

Resumindo, para uma curva fechada Γ vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw = \begin{cases} 0, & \text{se } z \text{ pertence ao exterior de } \Gamma, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } z \text{ pertence a } \Gamma, \\ 1, & \text{se } z \text{ está no interior de } \Gamma. \end{cases}$$

O resultado do meio é na verdade um VPC, ou seja, deve ser escrito na forma

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2}.$$

Voltando à integral do início deste Capítulo, sob quais condições para $h(w)$, $w \in \Gamma$, é possível garantir a existência do Valor Principal de Cauchy? Vamos ver que é suficiente que h satisfaça uma condição de Hölder em Γ para que o VPC exista.

Definição 4.1. Seja h uma função complexa definida num subconjunto compacto $S \subset \mathbb{C}$. Se para todo par de pontos $z_1, z_2 \in S$ valer

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq \mu |z_1 - z_2|^\gamma$$

para constantes fixas $\mu > 0$ e $0 < \gamma \leq 1$, dizemos que h *satisfaz a condição de Hölder uniforme em S* .

Comentários sobre a definição: Se $\gamma = 1$ temos a condição de Lipschitz. Uma função analítica numa região contendo Γ satisfaz uma condição de Lipschitz. Prove! A condição de Hölder nos permite

trabalhar com uma classe maior de funções, com menos regularidade que uma função analítica.

Se γ fosse maior do que 1 na Definição 4.1, da definição de derivada teríamos que a derivada existe em todo ponto e vale zero, pois o quociente incremental tende a zero. Logo h seria constante em Γ , como no Exemplo 4.3.

Agora podemos responder a pergunta feita acima. Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja Γ uma curva regular simples e z_0 um ponto sobre Γ tal que z_0 não seja extremo de Γ . Considere h uma função complexa definida em Γ que satisfaz uma condição de Hölder uniforme em Γ . Então existe o Valor Principal de Cauchy*

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z_0} dw.$$

Se Γ for fechada e orientada no sentido positivo vale

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(w) - h(z_0)}{w - z_0} dw + \frac{1}{2} h(z_0), \quad (4.5)$$

para todo $z_0 \in \text{tr } \Gamma$.

Observação: A primeira integral no membro direito da Eq. (4.5) deve ser entendida, no caso geral, como integral imprópria. Por exemplo, se a derivada de h no ponto z_0 existir, removemos a aparente singularidade definindo o integrando em z_0 como o valor da derivada de h nesse ponto:

$$\text{integrando} = \begin{cases} \frac{h(w) - h(z_0)}{w - z_0}, & w \neq z_0, \\ h'(z_0), & w = z_0. \end{cases}$$

Com isto o integrando é contínuo em z_0 e temos uma integral no sentido usual. Métodos numéricos fazem uso deste truque para calcular integrais singulares. No final do Capítulo faremos comentários a respeito destas integrais dessingularizadas.

Note também a relação com o Teorema dos Resíduos, aqui aparece uma fração (neste caso metade) do resíduo $h(z_0)$ correspondente à função

$$\frac{h(z)}{z - z_0}$$

com um polo simples em z_0 .

Demonstração. Suponhamos primeiro que Γ é fechada. Considerando Γ_ρ mais uma vez vale

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma-\Gamma_\rho} \frac{h(w)}{w-z_0} dw &= \\ &= \int_{\Gamma-\Gamma_\rho} \frac{h(w)-h(z_0)}{w-z_0} dw + h(z_0) \int_{\Gamma-\Gamma_\rho} \frac{1}{w-z_0} dw. \end{aligned}$$

O limite da última integral quando $\rho \rightarrow 0$ foi calculado no Exemplo 4.3 e vale πi .

O limite da primeira integral existe, inclusive como integral imprópria, porque pela condição de Hölder para h vale

$$\left| \frac{h(w)-h(z_0)}{w-z_0} \right| \leq \mu |w-z_0|^{\gamma-1}.$$

Utilizando a versão complexa da caracterização da existência da integral imprópria (veja a página 181 do livro de Lima [21]) junto com a propriedade abaixo (Eq. (9) em [3]):

$$\left| \int_\Gamma f(z) dz \right| \leq \int_\Gamma |f(z)| |dz|,$$

onde $|dz|$ é o comprimento de arco, o resultado segue. Veja os detalhes na página 312, [22].

Basicamente o que foi feito foi somar e subtrair um termo com $h(z_0)$ para dessingularizar a primeira integral à direita. Por dessingularizar queremos dizer que o integrando da primeira integral à direita tem no máximo uma singularidade integrável, ou seja, não precisamos apelar para o VPC. Assim, essa integral fica cotada por uma integral que sabemos ser finita.

Quando Γ não for fechada, podemos unir seus extremos por uma curva Γ_1 de tal forma que $\Gamma + \Gamma_1$ seja uma curva fechada, simples e orientada no sentido positivo. Definimos h como sendo zero em Γ_1 , com isto h satisfaz uma condição de Hölder em $\Gamma + \Gamma_1$ e o resultado segue do caso anterior. \square

Por último, se o integrando de interesse for do tipo

$$f(w) = \frac{h(w)}{w - z_0} + g(w - z_0),$$

com $z_0 \in \Gamma$ e g contínua em um aberto contendo Γ , de forma que exista o VPC

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z_0} dw,$$

então escrevemos

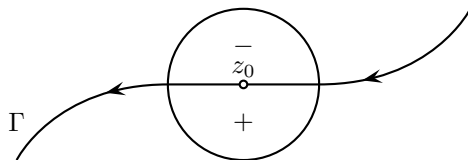
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(w)}{w - z_0} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(w - z_0) dw.$$

Ou seja, na prática podemos escolher o VPC mais fácil de calcular.

4.3 Fórmulas de Plemelj

No Exemplo 4.3 vimos que os limites da integral de Cauchy, quando nos aproximamos de um ponto $z_0 \in \Gamma$ por cada lado da curva Γ , não são necessariamente iguais nem coincidem com o Valor Principal de Cauchy $\varphi(z_0)$ definido na Seção anterior. Observamos também que o salto experimentado por φ ao nos aproximar de Γ é de $h(z_0)$. Nesta Seção vamos estabelecer fórmulas gerais que relacionam os limites laterais com o VPC para funções h que satisfazem uma condição de Hölder. O resultado é conhecido como *fórmulas de Plemelj* (1908) ou *fórmulas de Sokhotskyi* (1873), em homenagem a Josip Plemelj e Yulian Vasilievich Sokhotski, respectivamente. Este último antecipou o resultado em 35 anos!

Começemos por precisar o que entendemos por nos aproximar por um lado ou outro da curva Γ . Consideremos uma circunferência Δ centrada em $z_0 \in \text{tr} \Gamma$ com raio pequeno o suficiente para cortar Γ somente em dois pontos. Vamos chamar de *positiva* (+) a região de $\Delta - \Gamma$ que está à esquerda da direção positiva de Γ e de *negativa* (-) a região que fica à direita segundo a orientação de Γ . Veja a Figura 4.4. Se o limite da integral de Cauchy $\varphi(z)$ existir quando nos aproximarmos de $z_0 \in \Gamma$ por pontos na região +, denotaremos este limite por $\varphi^+(z_0)$. Analogamente, se para qualquer seqüência na região - existir o limite de $\varphi(z)$ ao nos aproximarmos de z_0 , denotaremos este

Figura 4.4: Regiões de cada lado de Γ .

limite por $\varphi^-(z_0)$. O Teorema de Plemelj estabelece que esses limites efetivamente existem.

Teorema 4.2. *Seja Γ uma curva simples, regular, não necessariamente fechada. Denotamos por h uma função complexa definida em Γ que satisfaz uma condição de Hölder uniforme em Γ . Então existem os limites $\varphi^+(z_0)$ e $\varphi^-(z_0)$ da integral de Cauchy e valem as fórmulas de Plemelj:*

$$\begin{aligned}\varphi^+(z_0) &= \varphi(z_0) + \frac{1}{2}h(z_0), \\ \varphi^-(z_0) &= \varphi(z_0) - \frac{1}{2}h(z_0),\end{aligned}\tag{4.6}$$

para todo $z_0 \in \text{tr } \Gamma$ que não seja extremo da curva Γ .

Observe que $\varphi(z_0)$ é o VPC, para o qual demonstramos a existência no Teorema 4.1. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [12], vol. 3, página 94, junto com vários enunciados de versões deste Teorema.

Se subtrairmos e somarmos as equações em (4.6) obtemos

$$\varphi^+(z_0) - \varphi^-(z_0) = h(z_0)\tag{4.7}$$

e

$$\varphi^+(z_0) + \varphi^-(z_0) = 2\varphi(z_0).\tag{4.8}$$

A Eq. (4.7) afirma que a integral de Cauchy experimenta um salto ao passarmos de um lado para outro de Γ , em z_0 , salto este de valor $h(z_0)$. A Eq. (4.8) nos dá um valor médio do potencial nesta região. Em Dinâmica dos Fluidos isto pode ser interpretado como o valor médio da velocidade de um fluido sob um escoamento cisalhante.

4.4 Representação de um escoamento cisalhante

No Capítulo 3 vimos que o potencial complexo

$$\Phi(z) = \frac{-ia}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(\sin \left(\frac{z-s}{2} \right) \right) ds, \quad (4.9)$$

com $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, representa uma linha contínua infinita de vórtices, chamada de *folha de vorticidade*. Neste caso, todos os vórtices pontuais têm intensidade constante.

A derivada do potencial complexo acima é

$$\frac{d\Phi}{dz}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \cot \left(\frac{z-s}{2} \right) ds,$$

onde usamos a Regra de Leibniz. Esta integral pode ser interpretada como uma integral de Cauchy se escrevermos

$$\cot w = \frac{1}{w} + g(w),$$

onde g é uma função contínua em zero onde $g(0) = 0$. Com efeito, existe

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left(\cot w - \frac{1}{w} \right) = 0$$

e podemos definir a função contínua, em uma vizinhança de zero, como sendo

$$g(w) = \begin{cases} \cot w - \frac{1}{w}, & w \neq 0, \\ 0, & w = 0. \end{cases}$$

Então o campo de velocidades é dado por

$$\frac{d\Phi}{dz}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} g \left(\frac{z-s}{2} \right) ds.$$

O segmento $[0, 2\pi]$ na integral parametrizada está orientado no sentido positivo do eixo real e por isso o semiplano superior é a região $+$ e o semiplano inferior a região $-$. Aplicando a fórmula de Plemelj ao primeiro termo temos,

$$\frac{d\Phi^\pm}{dz}(x) = \mp \frac{a}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a}{x-s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} g \left(\frac{x-s}{2} \right) ds,$$

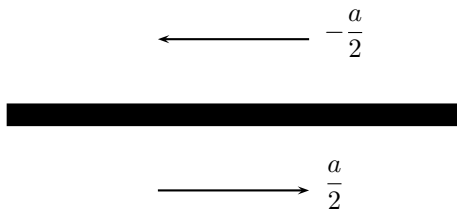


Figura 4.5: Escoamento cisalhante uniforme.

ou seja,

$$\frac{d\Phi^\pm}{dz}(x) = \mp \frac{a}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \cot\left(\frac{x-s}{2}\right) ds.$$

O VPC acima é zero, verifique! Portanto,

$$\frac{d\Phi^\pm}{dz}(x) \equiv u - iv = \mp \frac{a}{2}.$$

Ou seja, a velocidade horizontal do fluido é $\mp \frac{a}{2}$ na vizinhança da folha de vorticidade enquanto que a velocidade vertical v é nula. Assim temos uma expressão integral sofisticada para representar um escoamento cisalhante uniforme perto da folha de vorticidade plana, como a da Figura 4.5.

Este resultado é o ponto de partida para o estudo da instabilidade de uma folha de vorticidade submetida a perturbações periódicas. No final dos anos 1980 e começo dos anos 90, este problema despertou grande interesse de matemáticos, [18, 19, 31]. Vejamos como se escrevem as equações para a evolução de uma curva no plano complexo, equações estas que dependem de uma integral singular.

No contexto do movimento bidimensional de uma interface Γ separando dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e invíscidos, podemos parametrizar a curva Γ como $z(e, t) = x(e, t) + iy(e, t)$, $0 \leq e \leq 2\pi$, tal que $z(e + 2\pi, t) = 2\pi + z(e, t)$. Vamos supor que inicialmente não há vorticidade exceto na interface. Existe um teorema que prova que

a vorticidade vai se manter confinada na interface por todo tempo, [9].

Podemos generalizar a formulação acima e considerar que a intensidade de cada vórtice não é mais constante. Neste caso, com uma densidade de vorticidade denotada por γ , temos uma generalização do potencial complexo Eq. (4.9) e escrevemos

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(e', t) \log \left[\sin \left(\frac{z - z(e', t)}{2} \right) \right] de', \quad z \notin \Gamma.$$

O campo de velocidades correspondente é

$$\frac{d\Phi}{dz}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(e', t) \cot \left(\frac{z - z(e', t)}{2} \right) de'.$$

A fórmula de Plemelj pode ser aplicada da mesma forma vista no caso da folha plana. Quando $z \in \Gamma$, o VPC dá lugar a uma equação para a evolução da curva Γ :

$$\frac{dx}{dt}(e, t) + i \frac{dy}{dt}(e, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma(e', t) \cot \left(\frac{z(e, t) - z(e', t)}{2} \right) de'.$$

Em [6, 17, 29] é apresentada a equação para a evolução de $\gamma(e, t)$ equação esta que depende da curvatura de $z(e, t)$. Assim o sistema de evolução fica completo, com três equações e três incógnitas. Mas aqui vamos nos ater à integral singular.

Por fim mencionamos que existem métodos numéricos para calcular integrais singulares no computador. Chamamos a atenção para duas técnicas. Em [29] é usada a técnica de dessingularização da integral. Em [31] é usada a Regra do Trapézio Alternada. Seja a integral

$$\int_0^{2\pi} f(e') \cot \left(\frac{e - e'}{2} \right) de'.$$

A primeira técnica, relatada por Pullin, realiza a integração numérica de

$$\int_0^{2\pi} (f(e') - f(e)) \cot \left(\frac{e - e'}{2} \right) de',$$

onde o integrando no ponto $e = e'$ vale $f'(e')$. Na técnica relatada por Shelley,

$$\int_0^{2\pi} f(e') \cot\left(\frac{e - e'}{2}\right) de' \approx 2\Delta e \sum_{\substack{k=1 \\ j+k \text{ ímpar}}}^N \left[f(e_k) \cot\left(\frac{e_j - e_k}{2}\right) \right],$$

onde os pontos são usados de forma alternada produzindo um resultado de alta precisão para um espaçamento Δe pequeno.

Vários problemas de pesquisa, computacionais em sua maioria, surgiram a partir desta formulação integral. Importantes contribuições estão listadas nas referências do artigo [6]. Especificamente, em [18] encontra-se um estudo cuidadoso dos métodos numéricos para resolver este tipo de equações. Estes métodos com folhas de vorticidade também podem ser utilizados para estudar o fenômeno da quebra de ondas, como pode ser encontrado em [7].

Bibliografia

- [1] Ablowitz, M. J. e Fokas, A. S., *Complex Variables, introduction and applications*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] Acheson, D. J., *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1990.
- [3] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis, an introduction to the theory of one complex variable*, McGraw Hill editora, 1978.
- [4] Artiles, W. e Nachbin, A., “Nonlinear evolution of surface gravity waves over highly variable depth”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, 234501, 2004.
- [5] Artiles, W. e Nachbin, A., “Asymptotic nonlinear wave modeling through the Dirichlet-to-Neumann operator”, *Meth. Appl. Anal.*, Vol. 11, No. 3, pp. 1–18, 2004.
- [6] Baker, G. R. e Nachbin, A., “Stable methods for vortex sheet motion in the presence of surface tension”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 19, no. 5, pp. 1737–1766, 1998.
- [7] Baker, G. R., Meiron D. I. e Orszag S. A., “Generalized vortex methods for free-surface flow problems”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 123, pp. 477–501, 1982.
- [8] Batchelor, G., K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [9] Chorin, A. J. e Marsden, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, 1990.

- [10] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable I*, 2nd. ed., Springer-Verlag, 1978.
- [11] Floryan, J. M., “Conformal-mapping based coordinate generation method for channel flows”, *J. of Computational Physics*, Vol. 58, no. 2 pp. 229–245, 1985.
- [12] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3* John Wiley & Sons, 1993.
- [13] Homsy, G. M., Aref, H., Breuer, K. S., Hochgreb, S., Kosoff, J. R., Munson, B. R., Powell, K. G., Robertson, C. R. e Thoroddsen S. T., *Multi-Media Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, CD-ROM, 2000.
- [14] Driscoll, T. A., <http://www.math.udel.edu/~driscoll/software>.
- [15] Driscoll, T. A., e Trefethen, L. N., *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, 2002.
- [16] Garnier, J., Muñoz, J. C., e Nachbin, A., “Effective behavior of solitary waves over random topography”, submetido para publicação, 2006.
- [17] Hou, T., Lowengrub, J., e Shelley, M., “Removing stiffness from interfacial flows with surface tension”, *J. of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 312–338, 1994.
- [18] Krasny, R., “A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 167, pp. 65–93, 1986.
- [19] Krasny, R., “Desingularization of periodic vortex sheet roll-up”, *J. of Computational Physics*, Vol. 65, pp. 292–313, 1986.
- [20] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 1*, Projeto Euclides, 1991.
- [21] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 2*, Projeto Euclides, 1981.
- [22] Markushevich, A. I., *Theory of functions of a complex variable, Vol. 1*, Prentice-Hall, 1965.

- [23] Milne-Thomson, L. M., *Theoretical hydrodynamics*, Dover, 5th. ed, 1996.
- [24] Muñoz, J. C. e Nachbin, A., “Dispersive wave attenuation due to orographic forcing”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 64, no. 3, pp. 977-1001, 2004.
- [25] Muñoz, J. C. e Nachbin, A., “Stiff Microscale forcing and solitary wave refocusing”, *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, Vol. 3, no. 3, pp. 680–705, 2005.
- [26] Muñoz, J. C. e Nachbin, A., “Improved Boussinesq-type equations for highly-variable depths”, *IMA J. Appl. Math.*, Vol. 71, pp. 600–633, 2006.
- [27] Nachbin, A., “The localization length of randomly scattered water waves”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 296, pp. 353–372, 1995.
- [28] Nachbin, A., “A terrain-following Boussinesq system”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 63, no. 3, pp. 905–922, 2003.
- [29] Pullin, P. I., “Numerical studies of surface-tension effects in nonlinear Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 119, pp. 5073–532, 1982.
- [30] Ruiz de Zárate, A., e Nachbin, A., “A reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth”, submetido para publicação, 2007.
- [31] Shelley, M. J., “A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 244, pp. 493–526, 1992.
- [32] Van Dyke, M., *Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, 1982