

Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações

Publicações Matemáticas

**Componentes Irredutíveis dos
Espaços de Folheações**

Alcides Lins Neto
IMPA



26^o Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2007 by Alcides Lins Neto
Direitos reservados, 2007 pela Associação Instituto
Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
Impresso no Brasil / Printed in Brazil
Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

26^a Colóquio Brasileiro de Matemática

- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números - Alexander Arbieto, Carlos Matheus e Carlos Gustavo Moreira
- **Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações - Alcides Lins Neto**
- Elliptic Regularity and Free Boundary Problems: an Introduction - Eduardo V. Teixeira
- Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um - Flavio Abdenur e Luiz Felipe Nobili França
- Introduction to Generalized Complex Geometry - Gil R. Cavalcanti
- Introduction to Tropical Geometry - Grigory Mikhalkin
- Introdução aos Algoritmos Randomizados - Celina de Figueiredo, Guilherme da Fonseca, Manoel Lemos e Vinicius de Sá
- Mathematical Aspects of Quantum Field Theory - Edson de Faria and Wellington de Melo
- Métodos Estatísticos Não-Paramétricos e suas Aplicações - Aluisio Pinheiro e Hildete P. Pinheiro
- Moduli Spaces of Curves - Enrico Arbarello
- Noções de Informação Quântica - Marcelo O. Terra Cunha
- Three Dimensional Flows - Vítor Araújo e Maria José Pacifico
- Tópicos de Corpos Finitos com Aplicações em Criptografia e Teoria de Códigos - Ariane Masuda e Daniel Panario
- Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada - André Nachbin e Ailín Ruiz de Zárate
- Uma Introdução à Mecânica Celeste - Sérgio B. Volchan
- Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos - Humberto Bortolossi, Gilmar Garbugio e Brígida Sartini
- Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas - Lorenzo J. Díaz e Danielle de Rezende Jorge

ISBN: 978-85-244-0251-7

Distribuição: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br
<http://www.impa.br>

Prefácio

O problema da classificação das folheações holomorfas em variedades complexas, tem atraído nas últimas décadas inúmeros matemáticos. Tal problema comporta diversos aspectos : topológicos, analíticos, algébricos, entre outros. Neste texto, daremos particular ênfase aos aspectos algébricos. Mais especificamente, estudaremos as componentes irredutíveis dos espaços de folheações de codimensão um em espaços projetivos de dimensão maior ou igual a três.

Prova-se que uma folheação singular holomorfa de codimensão um no espaço projetivo complexo \mathbb{P}^n , pode ser definida em uma carta afim fixada, $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$, por uma equação diferencial do tipo $\omega = 0$, onde ω é uma 1-forma integrável com coeficientes polinomiais, isto é, tal que $\omega \wedge d\omega = 0$. Escrevendo

$$\omega = \sum_{j=1}^n A_j(z) dz_j ,$$

onde os $A_{j's}$ são polinômios em $z \in \mathbb{C}^n$, a condição de integrabilidade, $\omega \wedge d\omega = 0$, é equivalente às seguintes

$$A_i \left(\frac{\partial A_k}{\partial z_j} - \frac{\partial A_j}{\partial z_k} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial z_k} - \frac{\partial A_k}{\partial z_i} \right) + A_k \left(\frac{\partial A_j}{\partial z_i} - \frac{\partial A_i}{\partial z_j} \right) = 0$$

para quaisquer ternos de índices, com $1 \leq i < j < k \leq n$. Se fixarmos o grau máximo dos polinômios, vemos que os coeficientes dos $A_{j's}$ satisfazem equações algébricas quadráticas, as quais definem um sub-conjunto algébrico do conjunto de todas as formas polinomiais com coeficientes de um dado grau. O nosso objetivo será o de tentar classificar as componentes irredutíveis deste conjunto algébrico, dando uma descrição da folheação típica em cada uma.

A grosso modo, podemos classificar as componentes conhecidas em dois tipos :

- (1). Componentes em que o elemento típico é um pull-back de uma folheação em \mathbb{P}^2 por uma aplicação racional $\Phi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$.
- (2). Componentes em que o elemento típico tem alguma estrutura transversal projetiva, afim, ou por translações, fora de um subconjunto algébrico próprio.

As componentes do tipo pull-back serão estudadas no capítulo 2. Na seção 2.2 veremos o caso em que Φ tem grau um e na seção 2.3 o caso em que Φ tem grau maior. As componentes como em (2), incluem aquelas as folheações em que a forma definidora ω possui um fator integrante, isto é, existe uma função racional f tal que $d(\omega/f) = 0$. Em particular, veremos que existem componentes em que o elemento típico possui uma integral primeira racional (seção 3.2), ou seja, em que $\frac{\omega}{f} = dg$, onde $g: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$ é racional. Outras componentes deste tipo são as logarítmicas, em que a folheação típica pode ser definida por uma forma do tipo $\sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$, onde as f_j 's são polinômios (seção 3.3).

No capítulo 4 estudaremos as chamadas componentes excepcionais, ou seja, aquelas em que a folheação típica contém $n-1$ sub-folheações de dimensão um linearmente independentes num ponto genérico. Estas componentes incluem, por exemplo, aquelas em que a folheação típica é gerada por uma ação de um grupo de Lie de dimensão $n-1$ em \mathbb{P}^n . Observamos que, todos os exemplos conhecidos de componentes excepcionais se enquadram nos casos (1) ou (2) acima, embora, em princípio, possam existir algumas que não sejam como em (1) e (2).

No capítulo 5 classificaremos as componentes irredutíveis dos espaços de folheações de grau um e dois. Veremos que no caso de grau um o espaço possui duas componentes, uma do tipo racional e outra do tipo logarítmico (seção 5.1). Por outro lado, o espaço das folheações de grau dois possui seis componentes irredutíveis, uma do tipo pull-back, duas do tipo racional, duas do tipo logarítmico e uma excepcional (seção 5.2). Observamos que, os únicos casos em que as componentes são todas conhecidas, são estes dois e o caso de grau zero, o qual possui uma única componente irredutível. O caso de grau zero será visto na proposição 1.2.3 do capítulo 1.

No capítulo 6 apresentaremos outros aspectos do problema da classificação das componentes irredutíveis. Na seção 6.1 enunciaremos o problema do centro para folheações em $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e \mathbb{P}^2 e estabeleceremos uma conexão entre o mesmo e o da classificação das componentes irredutíveis em dimensão maior que dois. Na seção 6.2 introduziremos as seqüências de Godbillon-Vey associadas a uma folheação e provaremos o seguinte resultado : se uma folheação em \mathbb{P}^n admite uma seqüência de Godbillon-Vey finita então ela é como em (1) ou (2), ou seja, é um pull-back de uma folheação em \mathbb{P}^2 , ou admite uma estrutura transversal projetiva, afim ou por translações, fora de um sub-conjunto algébrico próprio. Motivados pelos resultados deste e dos capítulos anteriores, aproveitaremos para enunciar alguns problemas e conjecturas.

O capítulo 1 será dedicado a apresentar o material básico necessário para a leitura dos capítulos subsequentes. Resumiremos alguns resultados locais e globais clássicos das teorias de folheações e equações diferenciais, tais como o fenômeno de Kupka e os teoremas de formas normais de Poincaré e Poincaré-Dulac para germes de campos de vetores holomorfos, entre outros, que serão utilizados posteriormente.

Quanto aos pré-requisitos, admitiremos que o leitor tem conhecimento básico de geometria algébrica (Teorema de Bézout, teoria da interseção,...), álgebra multi-linear (formas diferenciais, produto exterior e interior), geometria analítica local (anel de germes de funções), geometria analítica (propriedades elementares das variedades de Stein e teoremas de extensão de Hartogs e Levi) e teoria do recobrimento e grupo fundamental. De qualquer forma, daremos referências para todos os resultados que serão utilizados ao longo do texto.

Gostaria de agradecer a M. G. Soares por ter me estimulado a escrever este texto e a H. Movasati por ter contribuído de forma fundamental na elaboração da seção 6.1 do capítulo 6.

Rio de Janeiro, 12 de abril de 2007.

Alcides Lins Neto

Notações

1. \mathcal{O}_p . Germes de funções holomorfas num ponto p .
2. \mathcal{O}_p^* . Germes de funções holomorfas num ponto p que não se anulam em p .
3. \mathcal{O}_n . Germes de funções holomorfas em $0 \in \mathbb{C}^n$.
4. $\mathcal{O}(U)$. Funções holomorfas num aberto U .
5. $\mathcal{O}^*(U)$. Funções holomorfas num aberto U que não se anulam em U .
6. Ω_p^k . Germes de k -formas holomorfas num ponto p .
7. Ω_n^k . Germes de k -formas holomorfas em $0 \in \mathbb{C}^n$.
8. \mathcal{X}_p . Germes de campos holomorfos num ponto p .
9. \mathcal{X}_n . Germes de campos holomorfos em $0 \in \mathbb{C}^n$.
10. $(V, z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$. Carta local num aberto V de uma variedade complexa. Substitui a notação $z: V \rightarrow \mathbb{C}^n$.
11. $[X, Y]$. Colchete de Lie de dois campos de vetores.
12. L_X . Derivada de Lie na direção do campo de vetores X .
13. $\alpha \wedge \beta$. Produto exterior de duas formas.
14. $i_X \omega$. Produto interior do campo X pela forma ω .
15. $j_p^k(f) = j^k(f, p)$. Jato de ordem k de f em p .
16. $f: (M, p) \rightarrow (N, q)$. Germe de aplicação de uma vizinhança de p em M numa vizinhança de q em N .
17. $\Pi_n: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$. Projeção da relação de equivalência que define \mathbb{P}^n . Se $p \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ então $\Pi_n(p) = [p] =$ reta de \mathbb{C}^{n+1} que passa pela origem e por p .

Índice

1	Introdução.	7
1.1	Folheações holomorfas.	7
1.1.1	Folheações regulares.	7
1.1.2	Folheações singulares.	13
1.2	Folheações em espaços projetivos.	16
1.3	O conjunto singular : folheações por curvas.	32
1.4	O conjunto singular : folheações de codimensão um.	38
1.4.1	O fenômeno de Kupka.	38
1.4.2	Redução de variáveis.	43
1.4.3	O conjunto singular em \mathbb{P}^n	47
1.5	Folheações com estruturas transversais.	51
1.5.1	Conceitos básicos.	51
1.5.2	Folheações com estrutura transversal projetiva.	54
1.6	Apêndice 1.	59
1.7	Exercícios	62
2	Componentes do tipo pull-back.	67
2.1	Singularidades simples nilpotentes.	67
2.2	Pull-backs lineares.	75
2.3	Pull-backs não lineares.	78
2.4	Exercícios.	89
3	Folheações definidas por formas fechadas.	91
3.1	Extensão de estruturas transversais.	91
3.2	Componentes racionais.	94
3.3	Componentes logarítmicas.	104

3.4	Exercícios.	118
4	Componentes excepcionais.	121
4.1	Folheações com feixe tangente localmente livre.	121
4.1.1	Resultados básicos.	122
4.1.2	Folheações com feixe tangente totalmente decomponível.	126
4.2	Componentes excepcionais.	133
4.2.1	Componentes provenientes de ações do grupo afim em \mathbb{C}^3	133
4.2.2	Outras componentes provenientes de ações.	151
4.3	Exercícios.	155
5	Folheações de graus um e dois.	158
5.1	Componentes de $\text{Fol}(n, 1)$	158
5.2	Componentes de $\text{Fol}(n, 2)$	161
5.3	Exercícios.	178
6	Problemas e conjecturas.	179
6.1	O problema do centro.	179
6.1.1	A variedade das folheações com um centro.	180
6.2	Seqüências de Godbillon-Vey.	185
6.3	Exercícios.	200

Capítulo 1

Introdução.

1.1 Folheações holomorfas.

1.1.1 Folheações regulares.

A grosso modo, uma folheação regular \mathcal{F} de classe C^r e dimensão real k numa variedade diferenciável M de dimensão m , onde $1 \leq k < m$ e $r \geq 0$, é uma decomposição de M em sub-variedades imersas de classe C^r e dimensão k disjuntas duas a duas, chamadas *folhas de* \mathcal{F} . Por exemplo, se X é um campo de vetores de classe C^r em M , as suas trajetórias são folhas de uma folheação regular de dimensão um no aberto $M \setminus \text{sing}(X)$, onde $\text{sing}(X) := \{p \in M \mid X(p) \neq 0\}$. Remetemos o leitor não familiarizado com estes conceitos à referência [C-LN]. No presente texto, lidaremos com folheações complexas holomorfas em variedades complexas e quando falarmos de dimensão nos referiremos à dimensão complexa dos objetos em questão.

Definição 1.1.1. Uma *folheação holomorfa regular* \mathcal{F} , de dimensão k , numa variedade variedade complexa M , de dimensão m , onde $1 \leq k < m$, é uma decomposição de M em sub-variedades holomorfas imersas conexas de dimensão k , chamadas folhas de \mathcal{F} , com as propriedades seguintes :

- (a). Para todo ponto $p \in M$ existe uma única folha L_p de \mathcal{F} passando por p . Se $q \in L_p$ então $L_q = L_p$.

- (b). Para todo $p \in M$, existe uma carta local holomorfa (U, ϕ) de M , com $p \in U$, e tal que $\phi: U \rightarrow V_k \times V_{m-k}$, onde V_k e V_{m-k} são abertos conexos de \mathbb{C}^k e \mathbb{C}^{m-k} respectivamente. Para todo $(x, y) \in V_k \times V_{m-k}$ a sub-variedade de dimensão k de U , $\phi^{-1}(V_k \times \{y\})$, é um aberto de L_q , onde $q = \phi^{-1}(x, y)$.

Diremos também que a folheação \mathcal{F} tem codimensão $m - k$.

Uma folheação de dimensão um, será também chamada de *folheação por curvas*.

Chamaremos o sistema de coordenadas (U, ϕ) de uma carta trivializadora de \mathcal{F} . As sub-variedades $\phi^{-1}(V_k \times \{y\})$ serão chamadas de placas da carta (U, ϕ) .

Observação 1.1.1. O seguinte fato decorre da definição : sejam (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) duas cartas trivializadoras de uma folheação de dimensão k , onde $\phi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$, $j = 1, 2$. Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ então a mudança de carta $\Phi_{21} := \phi_1 \circ \phi_2^{-1}: \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2)$ é da forma

$$\Phi_{21}(x, y) = (f(x, y), g(y)) .$$

Na verdade, em muitos textos de teoria das folheações, a definição é dada com a condição (b) da definição 1.1.1 mais esta condição de compatibilidade. A definição de folha é dada posteriormente. Para mais detalhes veja [C-LN].

Observação 1.1.2. Uma definição equivalente, é com "submersões locais". Ao atlas de cartas trivializadoras $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$, associamos coleções $\{\psi_j\}_{j \in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$, onde $\psi_j: U_j \rightarrow V_j \subset \mathbb{C}^{m-k}$ é uma submersão holomorfa, para todo $j \in J$, e $g_{ij}: \psi_i(U_{ij}) \rightarrow \psi_j(U_{ij})$ é um difeomorfismo satisfazendo $g_{ij} \circ \psi_i = \psi_j$, para quaisquer $i, j \in J$ tais que $U_i \cap U_j := U_{ij} \neq \emptyset$. Estas coleções são construídas à partir do atlas de cartas trivializadoras : dada uma carta trivializadora (U_i, ϕ_i) , onde $\phi_i := (f_1, f_2): U_i \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$, define-se a submersão $\psi_i := f_2: U_i \rightarrow f_2(U_i) \subset \mathbb{C}^{m-k}$. Dados i, j tais que $U_{ij} \neq \emptyset$, a mudança de carta $\phi_{ij} := \phi_j \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(U_{ij}) \rightarrow \phi_j(U_{ij})$ é da forma $\phi_{ij}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(y))$ e portanto $g_{ij} := g_2$ é um difeomorfismo entre $\psi_i(U_{ij})$ e $\psi_j(U_{ij})$ tal que $g_{ij} \circ \psi_i = \psi_j$. Para mais detalhes veja [C-LN].

Observação 1.1.3. Uma folheação regular \mathcal{F} de dimensão k numa variedade complexa M de dimensão m , induz naturalmente um sub-fibrado de posto k do fibrado tangente a M , TM . Este sub-fibrado, denotado por $T\mathcal{F}$, é dado por : se $p \in M$, a fibra $T_p\mathcal{F}$, de $T\mathcal{F}$ por p , é definida por

$T_p\mathcal{F}$ = espaço tangente no ponto p à folha de \mathcal{F} que passa por p .

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1.1. *Folheações dadas por submersões.* Sejam M e N variedades complexas e $f: M \rightarrow N$ uma submersão. Se $\dim(M) - \dim(N) = k$, onde $1 \leq k < m$, então as sub-variedades de dimensão k da forma $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, onde $z \in N$, são folhas de uma folheação \mathcal{F} de dimensão k de M (veja [C-LN]). Neste caso, para todo $p \in M$ temos $T_p\mathcal{F} = \ker(df(p): T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$).

No exemplo acima as folhas de \mathcal{F} são sub-variedades mergulhadas de M , mas em geral isto não ocorre, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.2. *Folheações lineares em toros complexos.* Um toro complexo de dimensão m pode ser identificado com o quociente de \mathbb{C}^m por um sub-grupo aditivo Γ de \mathbb{C}^m dado por $\bigoplus_{j=1}^{2m} \mathbb{Z}.v_j$, sendo $\{v_1, \dots, v_{2m}\}$ uma base de \mathbb{C}^m , considerado como um espaço vetorial real. A relação de equivalência \simeq é definida por : $p \simeq q \iff p - q \in \Gamma$.

Fixemos um toro complexo $T = \mathbb{C}^m/\Gamma$, onde $m \geq 2$, e denotemos por $\pi: \mathbb{C}^m \rightarrow T$ a projeção da relação de equivalência. Observamos que T herda de \mathbb{C}^m uma estrutura de grupo abeliano com a operação $+$: $T \times T \rightarrow T$ definida por $\pi(x) + \pi(y) := \pi(x + y)$. A operação está bem definida já que, se $x \simeq x'$ e $y \simeq y'$ então $x + y \simeq x' + y'$.

A cada sub-espaço complexo E de dimensão k de \mathbb{C}^m , onde $1 \leq k < m$, podemos associar uma folheação de dimensão k em T , $\mathcal{F}(E)$, definida da seguinte maneira : dado $\bar{p} = \pi(p) \in T$, a folha de $\mathcal{F}(E)$ por \bar{p} é por definição a sub-variedade imersa $\pi(E + p)$, onde $E + p$ é o sub-espaço afim $E + p = \{x + p \mid x \in E\}$. Note que $\pi(E)$ é um subgrupo abeliano conexo de dimensão real $2k$ de T , em geral não fechado em T , isomorfo a um produto da forma $(S^1)^\ell \times \mathbb{R}^n$, sendo $\ell + n = 2k$. As folhas de $\mathcal{F}(E)$ são transladados de $\pi(E)$, $\pi(E+p) = \pi(E) + \pi(p)$. Portanto se $\pi(E)$ é, por exemplo, denso em T ,

todas as folhas de $\mathcal{F}(E)$ são densas em T . Notamos que este caso pode ocorrer em exemplos específicos, assim como casos intermediários em que o fecho das folhas são sub-toros de dimensão real estritamente menor que $2m$ e no mínimo $2k$. No caso em que as folhas são sub-toros complexos de dimensão k , a folheação $\mathcal{F}(E)$ se enquadra no exemplo 1.1.1. Alguns exemplos deste tipo de folheação podem ser encontrados em [Sc-LN].

Exemplo 1.1.3. *Folheações definidas por campos de vetores holomorfos.* Seja X um campo de vetores holomorfo numa variedade complexa M de dimensão $m \geq 2$. As curvas complexas integrais de X definem uma folheação $\mathcal{F}(X)$ de dimensão um no aberto $U := M \setminus \text{sing}(X)$, onde $\text{sing}(X) = \{p \in M \mid X(p) = 0\}$. Neste caso, para todo $p \in U$ temos $T_p\mathcal{F}(X) = \mathbb{C} \cdot X(p)$. Remetemos o leitor à referência [Sc-LN] para mais detalhes.

Mais geralmente, se \mathcal{F} é uma folheação regular de dimensão k em M , diremos que os campos Z_1, \dots, Z_k , holomorfos num domínio $U \subset M$, *definem, ou geram \mathcal{F} em U* , se para todo $q \in U$ temos $T_q\mathcal{F} = \langle Z_1(q), \dots, Z_k(q) \rangle$, o sub-espço de T_qM gerado por $Z_1(q), \dots, Z_k(q)$. Em particular, os campos Z_1, \dots, Z_k são linearmente independentes em U .

Toda folheação \mathcal{F} de dimensão k em M pode ser definida numa carta trivializadora (U, ϕ) por k campos de vetores holomorfos independentes. Isto é feito da seguinte maneira : coloquemos $\phi = (x, y)$, onde $x = (x_1, \dots, x_k): U \rightarrow \mathbb{C}^k$ e $y: U \rightarrow \mathbb{C}^{m-k}$. As placas de \mathcal{F} em U são definidas por $(y = y_o)$, $y_o \in y(U)$. Coloquemos $X_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq k$. Os campos X_1, \dots, X_k geram \mathcal{F} em U , como o leitor pode verificar. Além disto, se denotamos por $z \mapsto X_{jz}$ o fluxo complexo local de X_j , a placa de \mathcal{F} por q pode ser parametrizada numa vizinhança de q por

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto X_{1z_1} \circ X_{2z_2} \circ \dots \circ X_{kz_k}(q) .$$

Notamos que $[X_i, X_j] = 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, k\}$, onde $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Lie. Esta condição é equivalente a de que os fluxos X_{iz_i} e X_{jz_j} comutam, isto é, $X_{iz_i} \circ X_{jz_j} = X_{jz_j} \circ X_{iz_i}$, sempre que ambos os membros são definidos (veja [C-LN]).

Esta condição de comutatividade não ocorre em geral para um conjunto de campos gerador da folheação em U . Com efeito, dada

uma matriz $F = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ de funções holomorfas, $f_{ij} \in \mathcal{O}(U)$, tal que $\det(F) \in \mathcal{O}^*(U)$ ($\det(F)(q) \neq 0, \forall q$), podemos tomar como geradores o conjunto de campos $Y_i := \sum_{j=1}^k f_{ij} \cdot X_j$. Se as funções f_{ij} não são constantes, não podemos afirmar que Y_i e Y_j comutam para $i \neq j$. Porém, o conjunto $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ é *involutivo*, no seguinte sentido : para todo $q \in U$ temos $[Y_i, Y_j](q) \in T_q \mathcal{F}$.

Definição 1.1.2. Seja E um sub-fibrado holomorfo de posto $k \geq 1$ de TM . Dizemos que um campo de vetores holomorfo X num aberto U de M é *tangente* a E , se para todo $p \in U$ vale que $X(p) \in E_p$, onde E_p designa a fibra de E por p . Dizemos que E é *involutivo*, ou *integrável*, se para quaisquer campos de vetores X e Y , tangentes a E num mesmo aberto conexo $U \subset M$, então $[X, Y]$ é tangente a E .

Vimos que toda folheação de dimensão k em M dá origem a um sub-fibrado de posto k integrável. A recíproca só é verdadeira, em geral, no caso $k = 1$: todo fibrado de posto um é integrável. Nem todo fibrado de posto $k \geq 2$ é integrável.

Exemplo 1.1.4. Consideremos o sub-fibrado E de posto dois em \mathbb{C}^3 gerado pelos campos de vetores $X = \frac{\partial}{\partial x}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$. No caso, $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z} := Z$, e como $X(p)$, $Y(p)$ e $Z(p)$ são linearmente independentes para todo $p \in \mathbb{C}^3$, E não é integrável.

Podemos também gerar a folheação \mathcal{F} em certos abertos utilizando 1-formas diferenciais holomorfas. Diremos que uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$, $U \subset M$, é *tangente* a \mathcal{F} , se para todo $q \in U$ temos $T_q \mathcal{F} \subset \ker(\omega(q))$. Diremos que a folheação \mathcal{F} de dimensão k é *gerada*, ou *definida*, num aberto U pelas formas $\omega_1, \dots, \omega_{m-k} \in \Omega^1(U)$, se para todo $q \in U$ temos

$$T_q \mathcal{F} = \{v \in T_q M \mid \omega_1(q) \cdot v = \dots = \omega_{m-k}(q) \cdot v = 0\} = \bigcap_{j=1}^{m-k} \ker(\omega_j(q))$$

Notemos que num aberto trivializador (U, ϕ) de \mathcal{F} a folheação é sempre gerada por formas. Se $\phi = (x, y) : U \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$, sendo $y = (y_1, \dots, y_{m-k})$, as formas $\omega_j = dy_j \in \Omega^1(U)$, $1 \leq j \leq m-k$, geram \mathcal{F} em U . As formas ω_j são todas fechadas, mas nem todo conjunto de formas que geram \mathcal{F} satisfaz esta propriedade. Por exemplo, se $F = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq m-k}$ é uma matriz de funções holomorfas em U tal que $\det(F) \in \mathcal{O}^*(U)$, podemos considerar o conjunto de geradores

$\eta_1, \dots, \eta_{m-k}$, onde $\eta_i = \sum_{j=1}^{m-k} f_{ij} \omega_j$. As formas η_j em geral não são fechadas, mas satisfazem à *condição de integrabilidade*

$$d\eta_j \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{m-k} = 0, \quad 1 \leq j \leq m-k. \quad (1.1)$$

Deixamos a prova de (1.1) para o leitor.

Sejam M uma variedade complexa de dimensão m e E um sub-fibrado holomorfo de posto k de TM , onde $1 \leq k < m$. Dado um aberto U de M , diremos que uma coleção de 1-formas $\{\eta_1, \dots, \eta_{m-k}\}$ gera $E|_U$, se para todo $p \in U$ temos

$$E_p = \bigcap_{j=1}^{m-k} \ker(\eta_j(p)).$$

Podemos agora enunciar o teorema de integrabilidade de Frobenius.

Teorema 1.1. (Teorema de Frobenius). *Nas condições acima, as seguintes afirmações são equivalentes :*

- (a). *Existe uma folheação regular \mathcal{F} de dimensão k tal que $T\mathcal{F} = E$.*
- (b). *E é integrável no sentido da definição 1.1.2.*
- (c). *Se $\{\eta_1, \dots, \eta_{m-k}\}$ é uma coleção de 1-formas holomorfas num aberto $U \subset M$ que gera $E|_U$ então elas satisfazem às equações de integrabilidade (1.1).*

A prova do resultado acima pode ser encontrada na referência [C-LN].

O caso de folheações de codimensão um será de particular interesse para nós. Neste caso, a folheação pode ser definida localmente por uma única 1-forma, digamos ω , e a condição de integrabilidade pode ser escrita como

$$\omega \wedge d\omega = 0. \quad (1.2)$$

Exemplo 1.1.5. Seja P um polinômio em \mathbb{C}^n sem pontos singulares, isto é, o conjunto $\text{sing}(P) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid dP(z) = 0\}$ é vazio. Neste caso, a forma diferencial $\omega = dP$ define uma folheação de codimensão em \mathbb{C}^n , $\mathcal{F}(P)$, cujas folhas são as hipersuperfícies de nível $P = \text{cte}$.

Note que esta situação é rara, pois um polinômio de grau maior ou igual a dois em \mathbb{C}^n , em geral tem pontos singulares. No caso em que P tem singularidades, as curvas de nível de P definem uma folheação regular no aberto $U = \mathbb{C}^n \setminus \text{sing}(P)$.

1.1.2 Folheações singulares.

Nem toda variedade complexa admite uma folheação regular. Por exemplo, nos espaços projetivos complexos, \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, não existem folheações holomorfas regulares de dimensão k , para $1 \leq k < n$. Veremos a prova deste resultado nos casos $k = 1$, $n = 2$ (corolário 1.3.1) e $k = n - 1$, $n \geq 3$ (seção 1.5). No entanto, todas as variedades algébricas admitem folheações regulares de qualquer codimensão em abertos de Zariski, isto é, abertos que são complementos de sub-conjuntos algébricos de codimensão pelo menos um. Veremos em seguida a definição de folheação singular, nos casos de dimensão um e codimensão um. Não nos preocuparemos aqui com o caso de folheação singular com dimensão intermediária $1 < k < \dim(M) - 1$.

Definição 1.1.3. Uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M é dada por uma cobertura $(U_j)_{j \in J}$ de M por abertos conexos e por coleções $(\omega_j)_{j \in J}$ e $(g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$, onde $U_{ij} = U_i \cap U_j$, tais que :

(I). $\omega_j \in \Omega^1(U_j)$, $\omega_j \neq 0$ e é integrável : $\omega_j \wedge d\omega_j = 0$.

(II). Se $U_{ij} \neq \emptyset$ então $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ e $\omega_i = g_{ij} \cdot \omega_j$ em U_{ij} .

Note que a condição (II) implica que, se $U_{ij} \neq \emptyset$ então $\text{sing}(\omega_i) \cap U_{ij} = \text{sing}(\omega_j) \cap U_{ij}$, isto é, os conjuntos singulares de ω_i e ω_j coincidem em U_{ij} . Isto permite definir o conjunto *singular* de \mathcal{F} por $\text{sing}(\mathcal{F}) = \cup_j \text{sing}(\omega_j)$. O conjunto $\text{sing}(\mathcal{F})$ é um sub-conjunto analítico de M , uma vez que é localmente definido por equações analíticas : dado $p \in U_j$ escolhemos uma carta local $(V, z = (z_1, \dots, z_m))$ com $p \in V$. Nesta carta temos $\omega_j|_V = \sum_{i=1}^m f_i(z) dz_i$ e $\text{sing}(\mathcal{F}) \cap V = (f_1 = \dots = f_m = 0)$.

Em outras palavras, a folheação é definida localmente por 1-formas holomorfas integráveis com uma condição de compatibilidade.

Analogamente, uma folheação de dimensão um \mathcal{G} em M é definida localmente por campos de vetores holomorfos não identicamente nulos com uma condição de compatibilidade. Em lugar da coleção de 1-formas, temos uma coleção de campos holomorfos $(X_j)_{j \in J}$, $X_j \in \mathcal{X}(U_j)$, e a condição de compatibilidade : se $U_{ij} \neq \emptyset$ então $X_i = g_{ij} \cdot X_j$. De forma análoga, define-se o conjunto singular de \mathcal{G} por

$\text{sing}(\mathcal{G}) = \cup_j \text{sing}(X_j)$. No caso de dimensão um, não há necessidade de condição de integrabilidade, uma vez que todo fibrado de dimensão um é integrável.

Observação 1.1.4. Uma folheação de codimensão um \mathcal{F} , dada por $((U_j)_{j \in J}, (\omega_j)_{j \in J}, (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset})$, induz em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ uma folheação regular, digamos \mathcal{F}' . O hiperplano tangente a \mathcal{F}' num ponto $p \in M$ é dado por $T_p \mathcal{F}' = \ker(\omega_j(p))$, onde $p \in U_j$. Devido à condição (II) da definição 1.1.3, este hiperplano independe do índice $j \in J$ tal que $p \in U_j$. As folhas de \mathcal{F} são, por definição, as folhas de \mathcal{F}' em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$.

De forma análoga, uma folheação de dimensão um \mathcal{G} em M induz uma folheação regular de dimensão um \mathcal{G}' em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{G})$. As folhas de \mathcal{G} são, por definição, as folhas de \mathcal{G}' .

Exemplo 1.1.6. Sejam N e M variedades complexas e \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em N . Dada uma aplicação holomorfa não constante $f: M \rightarrow N$, podemos definir uma folheação de codimensão um em M , que será denotada por $f^*(\mathcal{F})$, da seguinte maneira: se \mathcal{F} é definida pelo terno $((U_j)_{j \in J}, (\omega_j)_{j \in J}, (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset})$, então $f^*(\mathcal{F})$ é definida por $((V_j)_{j \in J}, (\eta_j)_{j \in J}, (h_{ij})_{V_{ij} \neq \emptyset})$ onde $V_j := f^{-1}(U_j)$, $\eta_j := f^*(\omega_j)$ e $h_{ij} := g_{ij} \circ f$. A folheação $f^*(\mathcal{F})$ será chamada de *pull-back*, ou *contra-imagem* de \mathcal{F} por f .

Definição 1.1.4. Dizemos que duas folheações de codimensão um \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 coincidem se $\text{sing}(\mathcal{F}_1) = \text{sing}(\mathcal{F}_2)$ e as folheações que elas induzem no complemento de $\text{sing}(\mathcal{F}_1)$ também coincidem.

Exemplo 1.1.7. Fixemos um sistema de coordenadas afim (z_1, \dots, z_n) de \mathbb{C}^n , $n \geq 2$. De acordo com a definição 1.1.4, as folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , definidas pelas 1-formas $\omega_1 := d(z_1^2) = 2z_1 dz_1$ e $\omega_2 := d(z_1^3) = 3z_1^2 dz_1$ coincidem, já que $\text{sing}(\mathcal{F}_1) = \text{sing}(\mathcal{F}_2) = (z_1 = 0)$ e as folhas de ambas são as hipersuperfícies $(z_1 = c)$, onde $c \neq 0$. Este exemplo é um tanto artificial, mas ilustra o fato de que se o conjunto singular das folheações possuem componentes de codimensão um as suas formas definidoras não são necessariamente múltiplas uma da outra e vice-versa.

Quando os conjuntos singulares são de codimensão dois, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.1. *Sejam $\mathcal{F}_1 = ((U_j)_{j \in J}, (\omega_j)_{j \in J}, (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset})$ e $\mathcal{F}_2 = ((V_\alpha)_{\alpha \in A}, (\eta_\alpha)_{\alpha \in A}, (h_{\alpha\beta})_{V_{\alpha\beta} \neq \emptyset})$ duas folheações de codimensão um numa variedade conexa M . Suponha que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F}_j)) \geq 2$, $j = 1, 2$. As seguintes condições são equivalentes :*

- (a). \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 coincidem em M .
- (b). \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 coincidem em algum aberto não vazio de M .
- (c). Para todo $p \in M$, se $p \in U_j \cap V_\alpha$, então existe um germe de função $f \in \mathcal{O}_p$ tal que $f(p) \neq 0$ e $\omega_{jp} = f \cdot \eta_{\alpha p}$, onde ω_{jp} e $\eta_{\alpha p}$ designam os germes de ω_j e de η_α em p , respectivamente.

Prova. É claro que (a) \implies (b) e que (c) \implies (a). Provemos que (b) \implies (c). Seja U um aberto maximal de M tal que $\mathcal{F}_1|_U$ coincide com $\mathcal{F}_2|_U$. Se $U \neq M$, como M é conexa, existe $p \in \partial U \neq \emptyset$. Suponhamos que $p \in U_j \cap V_\alpha$, de forma que $\mathcal{F}_1|_{U_j}$ é definida por ω_j e $\mathcal{F}_2|_{V_\alpha}$ por η_α . Fixemos um sistema de coordenadas holomorfo $(W, z = (z_1, \dots, z_m))$ em p tal que $W \subset U_j \cap V_\alpha$ é conexo, onde podemos escrever $\omega_j|_W = \sum_{\ell=1}^m f_\ell(z) dz_\ell$ e $\eta_\alpha|_W = \sum_{\ell=1}^m g_\ell(z) dz_\ell$. Seja $W_1 := W \cap U \setminus Z \neq \emptyset$, onde $Z = \text{sing}(\mathcal{F}_1) \cup \text{sing}(\mathcal{F}_2)$. Se $q \in W_1$ temos $\omega_j(q) \neq 0$, $\eta_\alpha(q) \neq 0$ e $\omega_j(q) \wedge \eta_\alpha(q) = 0$, já que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 coincidem em W_1 . Por outro lado, $\omega_j \wedge \eta_\alpha$ é analítica e se anula num aberto não vazio, logo $\omega_j \wedge \eta_\alpha \equiv 0$. Como $\omega_j \neq 0$, existe $\ell \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f_\ell \neq 0$. Vamos supor sem perda de generalidade que $f_1 \neq 0$. Temos $\omega_j \wedge \eta_\alpha = \sum_{r < s} (f_r \cdot g_s - f_s \cdot g_r) dz_r \wedge dz_s = 0$, de onde concluímos que $f_1 \cdot g_r = f_r \cdot g_1$ em W , para todo $r = 2, \dots, m$, já que W é conexo. Isto implica que $g_1 \neq 0$, pois caso contrário teríamos $g_r \equiv 0$ para todo r , ou seja $\eta_\alpha \equiv 0$ em W . Vemos também que $f_r \neq 0 \iff g_r \neq 0$ e que $h := g_1/f_1 \equiv g_r/f_r$, sempre que esta condição for verdadeira. Veremos em seguida que o germe de função meromorfa h_p é de fato holomorfo e que $h_p(p) \neq 0$.

Deixamos a prova para o leitor no caso em que $f_r(p) \neq 0$ para algum $r = 1, \dots, m$. Caso contrário, $f_r(p) = 0$ para todo $r = 1, \dots, m$, consideramos as decomposições das componentes f_r em fatores irreduzíveis em \mathcal{O}_p : elas não podem ter fator comum, digamos k , pois caso contrário $\text{sing}(\mathcal{F}_1)$ teria uma componente de codimensão um, cujo germe em p é ($k = 0$). Sendo assim, a relação $f_1 \cdot g_r = f_r \cdot g_1$ implica que $f_{1p}|g_{1p}$. De forma análoga $g_{1p}|f_{1p}$, o que implica que

$h_p \in \mathcal{O}_p$ e $h_p(p) \neq 0$. Utilizamos aqui que \mathcal{O}_p é um anel de fatorização única (veja [S]) e que $f_r, g_r \neq 0$ para algum $r \geq 2$ (se não fosse o caso, teríamos $f_1(p) \neq 0$). \square

O Resultado acima também é válido no caso de folheações de dimensão um, com as adaptações óbvias no enunciado.

De certa forma, podemos supor sempre que todas as componentes irredutíveis de $\text{sing}(\mathcal{F})$ têm codimensão ≥ 2 .

Proposição 1.1.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um na variedade complexa M tal que $\text{sing}(\mathcal{F})$ possui componentes irredutíveis de codimensão um. Então existe uma folheação \mathcal{G} de codimensão um em M tal que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{G})) \geq 2$ e \mathcal{G} coincide com \mathcal{F} em $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$.*

A idéia da prova, é dividir as formas que localmente definem \mathcal{F} , pela equação local das componentes de codimensão um de $\text{sing}(\mathcal{F})$. Os detalhes podem ser encontrados na referência [Sc-LN]. A folheação \mathcal{G} obtida de \mathcal{F} na proposição 1.1.2, será chamada de *extensão maximal* de \mathcal{F} . Pela proposição 1.1.1 ela não pode mais ser estendida em M .

Levando-se em conta a proposição 1.1.2, sempre que não mencionado em contrário, suporemos que todas as componentes irredutíveis do conjunto singular de uma folheação têm codimensão ≥ 2 .

1.2 Folheações em espaços projetivos.

O objetivo desta seção é provar que as folheações de codimensão um (resp. dimensão um) nos espaços projetivos complexos, \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, podem ser definidas por 1-formas integráveis (resp. campos de vetores) meromorfas (resp. meromorfos). Veremos também como elas podem ser definidas em coordenadas homogêneas. Como aplicação, provaremos dois resultados clássicos, devidos a G. Darboux, sobre folheações de codimensão um que admitem integrais primeiras meromorfas.

Seja M uma variedade complexa de dimensão $m \geq 2$. Uma 1-forma meromorfa ω em M é integrável se $\omega \wedge d\omega = 0$. Pelo teorema de Frobenius (Teor. 1.1), ω define uma folheação de codimensão um $\mathcal{F}(\omega)$ em $M \setminus |\omega|_\infty$, onde $|\omega|_\infty$ designa o conjunto de polos de ω . Note que $\text{sing}(\mathcal{F}(\omega))$ coincide com o conjunto de zeros de ω , que será

denotado por $|\omega|_0$. Em particular, $\text{sing}(\mathcal{F}(\omega))$ pode ter componentes de codimensão um.

Definição 1.2.1. Dizemos que uma folheação de codimensão um (resp. dimensão um) \mathcal{F} numa variedade M *pode ser definida por 1-formas* (resp. *campos*) *meromorfas*, se para todo $p \in M$ existe uma 1-forma meromorfa integrável ω (resp. um campo de vetores meromorfo X) em M tal que $p \notin |\omega|_\infty$ (resp. $p \notin |X|_\infty$), e ω (resp. X) define \mathcal{F} em $M \setminus |\omega|_\infty$ (resp. $M \setminus |X|_\infty$).

Exemplo 1.2.1. Seja $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j \neq 0$ uma 1-forma integrável em \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, onde f_1, \dots, f_n são polinômios. Vamos supor também que $\text{cod}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$, o que corresponde ao fato de f_1, \dots, f_n não terem fator comum em sua decomposição em fatores irredutíveis. Seja \mathcal{F} a folheação definida por ω em \mathbb{C}^n . Podemos estender \mathcal{F} a \mathbb{P}^n , como se segue. Consideremos \mathbb{C}^n como a carta afim $E_0 := \{[z] := [z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_0 = 1\}$. O hiperplano do infinito desta carta é dado por $H = \{[z] \in \mathbb{P}^n \mid z_0 = 0\}$. Fixemos um ponto $[z_o] \in H$, digamos, tal que $z_{on} \neq 0$, ou seja, tal que $[z_o] \in E_n := \{[x_1 : \dots : x_n : 1] \mid x_j \in \mathbb{C}\}$. A mudança de carta $\phi: E_n \rightarrow E_0$ é dada por $[z] = \phi([x : 1]) = [x/x_1 : 1/x_1]$. Portanto, a expressão de ω na carta E_n é :

$$\phi^*(\omega) = f_n(x/x_1, 1/x_1) d(1/x_1) + \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x/x_1, 1/x_1) d(x_{j+1}/x_1)$$

Como os f_j 's são todos polinômios, a 1-forma acima é meromorfa, sendo $|\phi^*(\omega)|_\infty = (x_1 = 0)$. Observamos que a multiplicidade de x_1 como polo de $\phi^*(\omega)$ é $k \geq 2$ (verifique). Podemos então escrever $\phi^*(\omega) = \omega_1/x_1^k$, onde ω_1 tem coeficientes polinomiais. A forma ω_1 é integrável, como o leitor pode verificar, portanto ela define uma folheação que estende \mathcal{F} a $H \cap E_n$. Procedendo de maneira análoga para os outros sistemas afins $E_j := \{[z] \mid z_j = 1\}$, obtemos formas integráveis ω_j , cujas folheações associadas, estendem \mathcal{F} a uma folheação \mathcal{G} de \mathbb{P}^n . A folheação \mathcal{G} pode ser definida por 1-formas meromorfas.

Um argumento análogo, permite provar que folheações definidas por campos de vetores polinomiais em \mathbb{C}^n se estendem a folheações em \mathbb{P}^n (veja [Sc-LN]).

Observação 1.2.1. *Expressão em coordenadas homogêneas.* Seja \mathcal{G} a folheação de \mathbb{P}^n definida pela -forma polinomial integrável $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j$ na carta afim $E_0 \simeq \mathbb{C}^n$, onde E_0 é como no exemplo 1.2.1. Seja $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção da relação de equivalência que define $\mathbb{P}^n: \pi(z) = [z]$. Na carta E_0 ela pode ser expressa como

$$\pi(z) = \pi(z_0, \dots, z_n) = [1 : z_1/z_0 : \dots : z_n/z_0] := [1 : w/z_0] .$$

Em particular,

$$\pi^*(\omega) = \frac{1}{z_0^2} \sum_{j=1}^n f_j(w/z_0) (z_0 dz_j - z_j dz_0) . \quad (1.3)$$

Como os f_j 's são polinômios, multiplicando $\pi^*(\omega)$ por uma potência apropriada de z_0 , obtemos uma 1-forma polinomial $\Omega = z_0^k \cdot \pi^*(\omega) = \sum_{j=0}^n F_j(z) dz_j$, satisfazendo às seguintes propriedades :

- (1). Ω é integrável e define a folheação $\pi^*(\mathcal{G})$.
- (2). Os polinômios F_j são homogêneos do mesmo grau, digamos $k \geq 1$.
- (3). Os polinômios F_j não têm fator comum.
- (4). A forma Ω satisfaz à relação $i_R(\Omega) = 0$, onde $R = \sum_{j=0}^n z_j \partial/\partial z_j$ é o campo radial de \mathbb{C}^{n+1} . Esta relação é equivalente a

$$\sum_{j=0}^n z_j F_j(z) \equiv 0 . \quad (1.4)$$

A relação em (4) é conseqüência de (1.3), já que $i_R(z_0 dz_j - z_j dz_0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Observe que $\text{sing}(\pi^*(\mathcal{G})) = (F_0 = \dots = F_n = 0)$ e portanto as componentes irredutíveis de $\text{sing}(\pi^*(\mathcal{G}))$ têm codimensão ≥ 2 , por (3). A relação em (4) é equivalente ao fato de que uma reta ℓ de \mathbb{C}^{n+1} que passa pela origem, ou está contida numa folha de $\pi^*(\mathcal{G})$, ou está contida em $\text{sing}(\pi^*(\mathcal{G}))$. Em particular, as folhas de $\pi^*(\mathcal{G})$ são "cones" com vértice na origem $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Notamos também que $\omega = \Omega|_{(z_0=1)}$, ou seja restringindo Ω ao hiperplano $z_0 = 1$ recuperamos a 1-forma ω original. De maneira

análoga, a restrição $\Omega|_{(z_j=1)}$ define uma 1-forma polinomial integrável na carta afim $E_j = (z_j = 1)$, que coincide, a menos de um fator constante, com a forma ω_j obtida no exemplo 1.2.1.

Diremos que a forma Ω representa \mathcal{G} em coordenadas homogêneas. Duas formas que representam \mathcal{G} em coordenadas homogêneas diferem por um fator constante não nulo. Este fato decorre de (3) (veja o exercício 1.1).

Observação 1.2.2. Seja Ω uma 1-forma em \mathbb{C}^{n+1} satisfazendo (1),..., (4) da observação 1.2.1. Se os coeficientes F_j de Ω são homogêneos de grau k então

$$i_R(d\Omega) = (k+1)\Omega \quad (1.5)$$

Em particular obtemos o seguinte fato : $d\Omega = 0$ se, e somente se $\Omega = 0$.

A relação (1.5) pode ser verificada considerando-se a derivada de Lie de Ω na direção do campo radial :

$$\begin{aligned} L_R(\Omega) &= \frac{d}{dt} R_t^*(\Omega)|_{(t=0)} = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^n F_j(e^t \cdot z) d(e^t \cdot z_j)|_{(t=0)} = \\ &= \frac{d}{dt} (e^{(k+1)t})|_{t=0} \cdot \sum_{j=0}^n F_j(z) dz_j = (k+1)\Omega . \end{aligned}$$

Estamos usando acima que o fluxo R_t de R é dado por $R_t(z) = e^t \cdot z$. Por outro lado, temos a relação $L_R(\Omega) = i_R(d\Omega) + d(i_R(\Omega)) = i_R(d\Omega)$ (veja [Sc-LN]), que implica (1.5).

Teorema 1.2. *Toda folheação de codimensão um (resp. dimensão um) em \mathbb{P}^n pode ser definida por 1-formas (resp. campos) polinomiais em cartas afins.*

Prova. Provaremos o resultado apenas no caso de codimensão um. Seja \mathcal{F} em \mathbb{P}^n , dada pelo terno $((U_j)_{j \in J}, (\eta_j)_{j \in J}, (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset})$ e tal que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. A idéia é provar que \mathcal{F} pode ser representada em coordenadas homogêneas como na observação 1.2.1.

Seja $\Pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção canônica : $\Pi(z) = [z]$. Procedendo como no exemplo 1.1.6, obtemos uma folheação $\mathcal{G} := \Pi^*(\mathcal{F})$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, dada pelo terno $((V_j)_j, (\theta_j)_j, (h_{ij})_{V_{ij} \neq \emptyset})$, onde $V_j =$

$\Pi^{-1}(U_j)$, $\theta_j = \Pi^*(\eta_j)$ e $h_{ij} = g_{ij} \circ \Pi$. Vamos provar que \mathcal{G} pode ser definida por uma 1-forma $\Omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^{n+1})$ satisfazendo (1), (2), (3) e (4) da observação 1.2.1. A prova será dividida em duas etapas : 1ª. Existe uma 1-forma Θ , definida num polidisco Q , com centro na origem, tal que $\Theta|_{Q \setminus \{0\}}$ define $\mathcal{G}|_{Q \setminus \{0\}}$. 2ª. \mathcal{G} pode ser definida por uma forma Ω satisfazendo (1),..., (4) da observação 1.2.1.

1ª etapa. Coloquemos $\theta_j = \sum_{r=0}^n f_r^j(z) dz_j$, onde $f_r^j \in \mathcal{O}(V_j)$. Afirmamos que existe $r_o \in \{0, \dots, n\}$ tal que $f_{r_o}^j \neq 0$ para todo $j \in J$.

Com efeito, a relação $\theta_i = h_{ij} \cdot \theta_j$ em $V_{ij} \neq \emptyset$, implica que $f_r^i = h_{ij} \cdot f_r^j$ em V_{ij} , para todo $r = 1, \dots, n+1$. Como $h_{ij} \in \mathcal{O}^*(V_{ij})$, obtemos que $f_r^i \neq 0 \iff f_r^j \neq 0$, sempre que $V_{ij} \neq \emptyset$. A prova decorre então dos seguintes fatos : 1º. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ é conexo. 2º. Dado $j_o \in J$ existe r_o tal $f_{r_o}^{j_o} \neq 0$, pois $\theta_{j_o} \neq 0$. Deixamos os detalhes para o leitor.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $f_0^j \neq 0$ para todo $j \in J$. Dados $j \in J$ e $1 \leq r \leq n$, considere a função meromorfa $\phi_r^j := f_r^j / f_0^j \in \mathcal{M}(V_j)$. Como $f_r^i = h_{ij} \cdot f_r^j$ e $f_0^i = h_{ij} \cdot f_0^j$ se $V_{ij} = V_i \cap V_j \neq \emptyset$, obtemos que $\phi_r^i = \phi_r^j$ em V_{ij} , para todo $r \in \{1, \dots, n\}$. Logo existe uma função meromorfa $\phi_r \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ tal que $\phi_r|_{V_j} = \phi_r^j$, para todo $j \in J$. Vamos agora utilizar o teorema de Levi (veja [Si]) : se $n \geq 1$, a função meromorfa ϕ_r pode ser estendida a uma função meromorfa em \mathbb{C}^{n+1} . Além disto, ela pode ser escrita como quociente de duas funções holomorfas : $\phi_r = g_r / h_r$, $g_r, h_r \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$, $h_r \neq 0$. Denotemos os germes de g_r e h_r em \mathcal{O}_{n+1} por g_{r0} e h_{r0} , respectivamente. Considerando as suas decomposições em fatores irredutíveis, podemos supor, após simplificação no quociente g_{r0}/h_{r0} , que eles não têm fator comum. Utilizando ainda que \mathcal{O}_{n+1} é um anel de fatoração única, podemos obter um mínimo múltiplo comum de h_{10}, \dots, h_{n0} , digamos $k_0 \in \mathcal{O}_{n+1}$: k_0 é tal que $h_{r0} | k_0$ para todo $r = 1, \dots, n$, e se ψ é tal que $h_{r0} | \psi$ para todo r então $k_0 | \psi$. Colocando $k_r := g_{r0} \cdot k_0 / h_{r0}$, consideramos o germe de 1-forma $\sum_{r=0}^n k_r dz_r$. Um representante Θ deste germe definido num polidisco Q , com centro na origem, define G em $Q \setminus \{0\}$, pois $\Theta \wedge \theta_j = 0$ para todo $j \in J$ tal que $V_j \cap Q \neq \emptyset$.

2ª etapa. Primeiramente observamos que $i_R(\Theta) = 0$. Com efeito, as fibras da aplicação $\Pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ são as retas que passam pela origem. Isto obriga que $i_R(\theta_j) = 0$ para todo $j \in J$, ou seja, $0 = i_R(\Theta \wedge \theta_j) = i_R(\Theta) \cdot \theta_j$, logo $i_R(\Theta) = 0$. Além disto, a forma

Θ é integrável, uma vez que define uma folheação. Consideremos a expansão de Θ em série de Taylor em torno da origem :

$$\Theta = \sum_{r \geq k} \Theta_r, \quad \Theta_k \neq 0. \quad (1.6)$$

Para todo $r \geq k$, o coeficiente de dz_s da 1-forma Θ_r é o polinômio homogêneo de grau r , obtido da expansão do germe k_s em série de Taylor. A idéia é provar que a 1-forma Θ_k define \mathcal{G} e satisfaz (1),..., (4). A forma Θ_k claramente satisfaz (2). Verifiquemos que ela satisfaz (1) e (4).

Expandindo em série de Taylor a relação $\Theta \wedge d\Theta = 0$, obtemos

$$0 = \Theta \wedge d\Theta = \sum_{\ell \geq k} \sum_{r+s=\ell} \Theta_r \wedge d\Theta_s \implies \Theta_k \wedge d\Theta_k = 0.$$

Em particular, Θ_k satisfaz (1). Análogamente, expandindo em série de Taylor a relação $i_R(\Theta) = 0$, obtemos que $i_R(\Theta_k) = 0$, já que os coeficientes de R são homogêneos de grau um, logo Θ_k satisfaz (4). Para verificar que Θ_k define \mathcal{G} e satisfaz (3), a idéia é provar que $\Theta = F \cdot \Theta_k$, onde $F \in \mathcal{O}(Q)$ e $F(0) = 1$. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.2). \square

Consideremos agora uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^n e uma reta $\ell \simeq \mathbb{P}^1$, mergulhada linearmente em \mathbb{P}^n . Tomemos uma carta afim $E \simeq \mathbb{C}^n$ de \mathbb{P}^n tal que ℓ é definida parametricamente por $\ell(t) = (t, 0, \dots, 0)$, $t \in \mathbb{C}$. Se \mathcal{F} é definida nesta carta por $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j$, então $\pi^*(\omega) = f_1(t, 0, \dots, 0).dt := P(t).dt$. Note que $P(t)$ é um polinômio. Se $P(t) \equiv 0$ a reta ℓ está contida numa folha de \mathcal{F} , ou em $\text{sing}(\mathcal{F})$. Diremos então que a reta ℓ é *invariante* por \mathcal{F} .

Caso $P(t) \neq 0$, uma raiz t_o de $P(t)$ corresponde a uma *tangência* de \mathcal{F} com ℓ , isto é, o ponto $p = (t_o, 0, \dots, 0)$ é tal que $T_p \ell \subset T_p \mathcal{F}$. A multiplicidade de t_o como raiz de $P(t)$ é, por definição, a *multiplicidade* de tangência de ℓ e \mathcal{F} em p . Estes conceitos independem da carta considerada, como o leitor pode verificar. Esta multiplicidade será denotada por $\text{Tang}(\mathcal{F}, \ell, p)$. O número total de tangências de ℓ com \mathcal{F} , $\sum_{p \in \ell} \text{Tang}(\mathcal{F}, \ell, p)$, será denotado por $\text{Tang}(\mathcal{F}, \ell)$.

Proposição 1.2.1. *Se ℓ_1 e ℓ_2 são duas retas não invariantes pela folheação de codimensão um \mathcal{F} , então $\text{Tang}(\mathcal{F}, \ell_1) = \text{Tang}(\mathcal{F}, \ell_2)$. O número $\text{Tang}(\mathcal{F}, \ell_1)$ é, por definição, o grau de \mathcal{F} .*

Deixamos a prova da proposição 1.2.1 como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.3).

O conjunto de folheações de codimensão um e de grau k em \mathbb{P}^n será denotado por $\mathbb{F}ol(n, k)$.

Observação 1.2.3. Uma folheação $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, k)$ é representada em coordenadas homogêneas por uma 1-forma Ω cujos coeficientes têm grau $k + 1$. Deixaremos a prova deste fato para o leitor (veja o Ex. 1.3). Em uma carta afim $(\mathbb{C}^n, (x_1, \dots, x_n))$ ela será representada por uma 1-forma polinomial ω que pode ser escrita como

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{k+1} , \quad (1.7)$$

onde os coeficientes de ω_j são polinômios homogêneos de grau j , $0 \leq j \leq k + 1$, e $i_{R_n}(\omega_{k+1}) = 0$, onde $R_n = \sum_{i=1}^n x_i \partial / \partial x_i$. Observamos ainda que $\omega_{k+1} \equiv 0$ se, e somente se, o hiperplano do infinito desta carta é invariante por \mathcal{F} . Verifiquemos estes fatos.

Na carta $E_0 = (z_0 = 1)$ a folheação é representada por $\omega = \Omega|_{(z_0=1)}$. Coloquemos $z = (z_0, Z)$, onde $Z = (z_1, \dots, z_n)$. Levando em conta que $\Omega = \sum_{j=0}^n F_j(z) dz_j$ onde F_j é homogêneo de grau $k + 1$, obtemos $\omega = \sum_{j=1}^n F_j(1, Z) dz_j$. Logo ω pode ser escrita como em (1.7), já que $F_j(1, Z)$ é um polinômio de grau $\leq k + 1$ em Z . A relação $i_R(\Omega) = 0$ é equivalente a :

$$\sum_{j=0}^n z_j \cdot F_j(z) = 0 \implies F_0(1, Z) + \sum_{j=1}^n z_j \cdot F_j(1, Z) = 0 . \quad (1.8)$$

Note que o coeficiente, digamos $A_j(Z)$, de dz_j em ω_{k+1} é a parte homogênea de grau $k + 1$ de $F_j(1, Z)$, $1 \leq j \leq n$. Como o leitor pode verificar, a relação (1.8) implica que $\sum_{j=1}^n z_j \cdot A_j(Z) = 0$, que é equivalente a $i_{R_n}(\omega_{k+1}) = 0$. Finalmente, o hiperplano do infinito da carta E_0 em coordenadas homogêneas é dado por $(z_0 = 0)$. Este hiperplano é invariante por \mathcal{F} se, e somente se,

$$\Omega|_{(z_0=0)} = 0 \iff \sum_{j=1}^n F_j(0, Z) dz_j = 0 \iff F_j(0, Z) = 0 , \forall j ,$$

$$\iff F_j(z) = z_0 \cdot G_j(z) , \text{ gr}(G_j) = k \iff \omega_{k+1} \equiv 0 ,$$

ou seja, $\omega_{k+1} \equiv 0$ se, e somente se $\Pi(z_0 = 0)$ é invariante por \mathcal{F} .

Observação 1.2.4. Levando-se em conta as observações 1.2.1 e 1.2.3, podemos identificar $\mathbb{F}(n, k)$ com um sub-conjunto algébrico de um certo espaço projetivo \mathbb{P}^N . Seja $\Lambda_{k+1}(n)$ o espaço vetorial das 1-formas em \mathbb{C}^{n+1} , cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau $k+1$. Colocando $N+1 = \dim_{\mathbb{C}}(\Lambda_{k+1}(n))$ obtemos $\mathbb{P}(\Lambda_{k+1}(n)) \simeq \mathbb{P}^N$. Uma forma $\Omega \in \Lambda_{k+1} \setminus \{0\}$ representa uma folheação em \mathbb{P}^n se, e somente se, satisfaz

$$(I). \quad i_R(\Omega) = 0.$$

$$(II). \quad \Omega \wedge d\Omega = 0.$$

As relações (I) e (II) impõem condições algébricas nos coeficientes de Ω , sendo que as relações em (I) são lineares e as em (II) são quadráticas. Portanto $\mathbb{F}ol(n, k)$ pode ser identificado com o subconjunto algébrico de $\mathbb{P}(\Lambda_{k+1}(n))$ cujos elementos satisfazem (I) e (II). Um dos objetivos deste livro, será descrever de maneira "geométrica" as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, k)$. No exemplo 1.2.2, que será visto mais adiante, descrevemos $\mathbb{F}ol(n, 0)$ para todo $n \geq 2$. No capítulo 5 veremos a descrição das componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, 1)$ e de $\mathbb{F}ol(n, 2)$ para todo $n \geq 3$.

Veremos em seguida um critério para que uma hipersuperfície algébrica seja invariante por uma folheação de codimensão um. Dizeremos que um subconjunto algébrico irredutível $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão k , $1 \leq k < n$, é *invariante* pela folheação \mathcal{F} de codimensão um, se para todo $p \in X \setminus (\text{sing}(\mathcal{F}) \cup \text{sing}(X))$, temos :

$$T_p X \subset T_p \mathcal{F} \tag{1.9}$$

Quando X não é irredutível, diremos que ele é invariante, se todas as suas componentes irredutíveis o são. Observemos que, quando X é de codimensão um e invariante, então ele é a união de folhas de \mathcal{F} com componentes de $\text{sing}(\mathcal{F})$. Neste caso, se X for irredutível, diremos que ele é uma *folha algébrica* de \mathcal{F} .

Proposição 1.2.2. *Sejam \mathcal{F} uma folheação e X um sub-conjunto algébrico de \mathbb{P}^n , ambos de codimensão um. Suponhamos que \mathcal{F} e X são representados em coordenadas homogêneas pela 1-forma Ω e por $F \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, respectivamente. Então X é invariante por \mathcal{F} se,*

e somente se, $dF \wedge \Omega = F\Gamma$, onde $\Gamma \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1})$, tem coeficientes homogêneos de grau $gr(\mathcal{F})$.

Prova. Suponhamos primeiramente que F é irredutível. Vamos trabalhar em coordenadas homogêneas. Seja $\mathcal{G} = \pi^*(\mathcal{F})$, a qual é definida por Ω em \mathbb{C}^{n+1} . Dado $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\pi(p) \in X \setminus (sing(X) \cup sing(\mathcal{F}))$, a condição (1.9) é equivalente a $T_p \pi^{-1}(X) = T_p \mathcal{G}$, já que ambos os sub-espacos têm codimensão um. Como $T_p \pi^{-1}(X) = ker(dF(p))$ e $T_p \mathcal{G} = ker(\Omega(p))$, obtemos que $dF(p) \wedge \Omega(p) = 0$. Decorre daí que a 2-forma $dF \wedge \Omega$ se anula identicamente em $(F = 0)$. Este fato implica que todos os coeficientes de $dF \wedge \Omega$ são divisíveis por F , já que F é irredutível. Logo $dF \wedge \Omega = F\Gamma$, onde $\Gamma \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1})$.

Suponhamos agora que a decomposição de F em fatores irredutíveis é $F = F_1^{r_1} \dots F_k^{r_k}$. Pelo primeiro caso, a 2-forma $\Gamma_j := \frac{dF_j}{F_j} \wedge \Omega$ é holomorfa, para todo $j = 1, \dots, k$. Por outro lado,

$$\frac{d(F_1^{r_1} \dots F_k^{r_k})}{F_1^{r_1} \dots F_k^{r_k}} \wedge \Omega = \sum_{j=1}^k r_j \frac{dF_j}{F_j} \wedge \Omega = \sum_{j=1}^k r_j \cdot \Gamma_j := \Gamma.$$

Portanto, $dF \wedge \Omega = F\Gamma$, onde $\Gamma \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1})$. Consideremos agora os coeficientes Γ_{ij} e A_{ij} de $dz_i \wedge dz_j$ de Γ e $dF \wedge \Omega$, respectivamente. Note que A_{ij} é homogêneo de grau $gr(F) + gr(\mathcal{F})$. A relação $dF \wedge \Omega = F\Gamma$ implica que $A_{ij} = F\Gamma_{ij}$, para todo $i < j$, logo Γ_{ij} é homogêneo de grau $gr(\mathcal{F})$. Deixamos a prova da recíproca para o leitor. \square

Exemplo 1.2.2. *Folheações de grau zero.* Sejam L e M dois polinômios homogêneos de grau um em \mathbb{C}^{n+1} , linearmente independentes. A forma $\Omega := L dM - M dL$ satisfaz (1),..., (4) da observação 1.2.1, como o leitor pode verificar facilmente. Logo Ω representa uma folheação \mathcal{F} de grau zero em \mathbb{P}^n , já que seus coeficientes são de grau um. Isto também pode ser visto tomando a carta afim ($M = 1$). Nesta carta \mathcal{F} é representada por $\omega = d\ell$, onde $\ell = L|_{(M=1)}$. Como L e M são independentes, $d\ell$ é uma forma com coeficientes contantes em \mathbb{C}^n , logo as folhas de \mathcal{F} nesta carta são os hipeplanos ($\ell = cte$), ou seja, uma reta não paralela ao plano ($\ell = 0$) é transversal a todas as folhas de \mathcal{F} e não tem pontos de tangência com \mathcal{F} . Afirmamos que toda folheação de codimensão um e grau zero em \mathbb{P}^n é deste tipo.

Com efeito, ela é representada por uma 1-forma Ω com coeficientes homogêneos de grau um tal que $\Omega \wedge d\Omega = 0$. Note que a 1-forma $d\Omega$

tem coeficientes constantes e $d\Omega \neq 0$ pela observação 1.2.2. Por outro lado,

$$d\Omega \wedge d\Omega = d(\Omega \wedge d\Omega) = 0 \implies d\Omega = \alpha \wedge \beta, \quad (1.10)$$

onde α e β são 1-formas em \mathbb{C}^{n+1} com coeficientes constantes. De fato, sejam u e v vetores constantes de \mathbb{C}^{n+1} tais que $a := i_u(i_v(d\Omega)) \neq 0$. Temos :

$$\begin{aligned} 0 &= i_v(d\Omega \wedge d\Omega) = 2 i_v(d\Omega) \wedge d\Omega \implies 0 = i_u(i_v(d\Omega) \wedge \Omega) = \\ &= i_u(i_v(d\Omega)).d\Omega - i_v(d\Omega) \wedge i_u(d\Omega) \implies d\Omega = \alpha \wedge \beta, \end{aligned}$$

onde $\alpha = a^{-1}.i_v(d\Omega)$ e $\beta = i_u(d\Omega)$. Como α e β têm coeficientes constantes, existem polinômios de grau um L e M tais que $\alpha = dL$ e $\beta = dM$. Utilizando agora a observação 1.2.2, temos

$$\begin{aligned} 2.\Omega &= i_R(d\Omega) = i_R(dL \wedge dM) = \\ &= i_R(dL).dM - i_R(dM).dL = L.dM - M.dL, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Note que a aderência das folhas da folheação acima são os hiperplanos da forma $a.L + b.M = 0$, $[a : b] \in \mathbb{P}^1$. Diremos então que a folheação é dada por um *pencil* ou *feixe* de hiperplanos.

Baseados no exemplo 1.2.2, podemos enunciar o seguinte :

Proposição 1.2.3. *Para todo $n \geq 2$, $\mathbb{F}ol(n, 0)$ tem uma única componente irredutível, a qual é parametrizada por*

$$(L, M) \in \mathcal{P}(n+1, 1) \times \mathcal{P}(n+1, 1) \mapsto [L dM - M dL] \in \mathbb{P}(\Lambda_1(n)),$$

onde $\mathcal{P}(m, k)$ denota o conjunto de polinômios em homogêneos de grau k em \mathbb{C}^m .

Exemplo 1.2.3. Uma generalização natural do exemplo 1.2.2, é a seguinte : sejam $P, Q \in \mathcal{P}(n+1, k)$, sem fator comum. A forma $\Omega = P dQ - Q dP$ satisfaz às condições (1), (2) e (4) da observação 1.2.1. Por exemplo, $i_R(P dQ - Q dP) = 0$, pois $i_R(dP) = k.P$ e $i_R(dQ) = k.Q$ (relação de Euler). A aderência das folhas da folheação definida por ela são as componentes irredutíveis das hipersuperfícies

de grau k dadas por $L_\alpha := (a.P + b.Q = 0)$, $\alpha = [a : b] \in \mathbb{P}^1$. Em muitos casos a codimensão do conjunto singular de Ω tem codimensão ≥ 2 , mas em geral, não. Por exemplo, se a 2-forma $dP \wedge dQ$ não se anula ao longo de $(P = Q = 0) \setminus \{0\}$, temos $\text{cod}(\text{sing}(\Omega)) \geq 2$. Por outro lado, se existem a, b tais que $a.P + b.Q$ tem um fator múltiplo na sua decomposição em fatores irredutível, este fator divide Ω e portanto $\text{sing}(\Omega)$ tem ao menos uma componente de codimensão Ω . A folheação representada pela forma Ω , após dividida pelo fator de grau máximo possível, será denotada por $\mathcal{F}(P, Q)$ e será chamada de *pencil*, ou *feixe*, gerado por P e Q . A hipersuperfície $L_\alpha = (a.P + b.Q = 0)$ será chamada de *fibra* de $\mathcal{F}(P, Q)$.

O resultado que veremos em seguida, devido a G. Darboux, determina o fator de grau máximo que divide a forma $P dQ - Q dP$. Dada uma fibra $L_\alpha := (a.P + b.Q = 0)$, consideremos a decomposição em fatores irredutíveis $a.P + b.Q = f_{\alpha_1}^{r_1} \dots f_{\alpha_s}^{r_s}$, $r_j \geq 1$. Neste caso, colocamos

$$G_\alpha := f_{\alpha_1}^{r_1-1} \dots f_{\alpha_s}^{r_s-1}. \quad (1.11)$$

Proposição 1.2.4. *Seja $\Omega = P dQ - Q dP$, como no exemplo 1.2.3. Então $\Omega = G.\Theta$, onde :*

(a). $G = \prod_{\alpha \in \mathbb{P}^1} G_\alpha$, sendo G_α como em (1.11).

(b). $\text{cod}(\text{sing}(\Theta)) \geq 2$.

Em particular, $\mathcal{F}(P, Q)$ tem grau $2k - 2 - \text{gr}(G)$, onde $k := \text{gr}(P) = \text{gr}(Q)$.

Prova. A prova é baseada no seguinte fato : sejam $[a : b], [c : d] \in \mathbb{P}^1$ tais que $a.d - b.c \neq 0$. Coloquemos $P_1 := a.P + b.Q$ e $Q_1 := c.P + d.Q$. Então

$$P_1 dQ_1 - Q_1 dP_1 = (a.d - b.c)(P dQ - Q dP). \quad (1.12)$$

Deixamos a verificação de (1.12) para o leitor. Esta relação implica que G_α divide Ω para todo $\alpha \in \mathbb{P}^1$, uma vez que, se $\alpha = [a : b]$ então G_α divide tanto $a.P + b.Q$ como $d(a.P + b.Q)$.

Suponhamos que $P dQ - Q dP = F.\Theta$, onde $\text{cod}(\text{sing}(\Theta)) \geq 2$ e Θ representa $\mathcal{F}(P, Q)$ em coordenadas homogêneas. Seja f um fator irredutível de F . Vamos provar que, existe $\alpha = [a : b] \in \mathbb{P}^1$ tal

que $(f = 0) \subset (a.P + b.Q = 0)$. Para isto é suficiente provar que $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}(P, Q)$, ou seja, que $df \wedge \Theta = f.\Gamma$, onde $\Gamma \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1})$ (veja proposição 1.2.2). Vamos supor que f não é fator de $P.Q$. Podemos escrever $F = f^r.g$, onde r é máximo, isto é, f não divide g . Como $P dQ - Q dP = f^r.g.\Theta$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{Q} - \frac{dP}{P} = \frac{f^r.g}{P.Q} \Theta &\implies d\left(\frac{f^r.g}{P.Q}\right) \Theta = d\left(\frac{dQ}{Q} - \frac{dP}{P}\right) = 0 \implies \\ d\left(\frac{f^r.g}{P.Q}\right) \wedge \Theta + \frac{f^r.g}{P.Q} d\Theta = 0 &\implies \frac{d(f^r.g/P.Q)}{f^r.g/P.Q} \wedge \Theta = -d\Theta. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a última relação, obtemos que $g.P.Q.df \wedge \Theta = f.\Gamma_1$, onde $\Gamma_1 = -r^{-1}g.P.Q d\Theta + r^{-1}(P.Q.dg - g.QdP - g.P.dQ) \wedge \Theta$, é holomorfa. Como f não divide $g.P.Q$, f divide todos os coeficientes de $df \wedge \Theta$, logo $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}(P, Q)$, como queríamos. Isto implica que f é fator de $a.P + b.Q$, para algum $\alpha = [a : b]$. Resta provar que r coincide com a multiplicidade de f em G_α , digamos $r_\alpha - 1$, onde r_α é a multiplicidade de f em $P_1 = a.P + b.Q$ (veja (1.12)). Pela definição de r temos $r \geq r_\alpha - 1$. Por outro lado, se $r > r_\alpha - 1$, por absurdo, obtemos de (1.12) que f divide $Q_1 = c.P + d.Q$, para todo (c, d) tal que $a.d - b.c \neq 0$, o que só é possível se f dividir P e Q simultâneamente, o que foi excluído na hipótese. \square

Veremos a seguir um outro resultado devido a G. Darboux, que caracteriza as folheações do tipo $\mathcal{F}(P, Q)$, isto é, que possuem integral primeira meromorfa.

Teorema 1.3. *Se uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n possui uma infinidade de folhas algébricas distintas então ela tem uma integral primeira meromorfa.*

Prova. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n com uma infinidade de folhas algébricas. Sejam f_1, f_2, \dots equações homogêneas destas folhas e Ω uma 1-forma representando \mathcal{F} em coordenadas homogêneas. Vamos supor que $gr(\mathcal{F}) = k$, de forma que os coeficientes de Ω são homogêneos de grau $k + 1$. Pela proposição 1.2.2, para todo $j \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$\frac{df_j}{f_j} \wedge \Omega = \Gamma_j, \quad (1.13)$$

onde $\Gamma_j \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1})$ e tem coeficientes homogêneos de grau $gr(\mathcal{F}) = k$. Seja \mathbb{E} o conjunto de todas as 2-formas em \mathbb{C}^{n+1} com coeficientes homogêneos de grau k . Claramente, \mathbb{E} é um espaço vetorial de dimensão finita, digamos $N - 1$. Qualquer conjunto em \mathbb{E} com N elementos é linearmente dependente. Portanto, existe uma relação linear da forma $\sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \Gamma_j = 0$, onde $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \neq (0, \dots, 0)$. Decorre daí e de (1.13) que $\eta \wedge \Omega = 0$, onde

$$\eta = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{df_j}{f_j}. \quad (1.14)$$

Em particular, a 1-forma $\omega := f_1 \dots f_N \cdot \eta$ é holomorfa com coeficientes homogêneos e satisfaz $\omega \wedge \Omega = 0$. Como $\text{cod}(\text{sing}(\Omega)) \geq 2$, existe $h \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ tal que $\omega = h \cdot \Omega$ (veja o Ex. 1.1). Podemos então escrever que $\eta = G \cdot \Omega$, onde $G = h/f_1 \dots f_N$. De forma análoga, considerando os índices $2, \dots, N+1$, podemos construir uma 1-forma $\eta_1 := \sum_{j=2}^{N+1} \mu_j \frac{df_j}{f_j}$, com as seguintes propriedades :

- (i). Os vetores $(\lambda_1, \dots, \lambda_N, 0)$ e $(0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+1})$ são linearmente independentes.
- (ii). Existe uma função meromorfa G_1 tal que $\eta_1 = G_1 \cdot \Omega$.

A relação (ii) juntamente com $\eta = G \cdot \Omega$ implica que $\eta_1 = \frac{G_1}{G} \eta$. Como η e η_1 são fechadas, obtemos que

$$d(G_1/G) \wedge \eta = 0 \implies d(G_1/G) \wedge \Omega = 0 \implies d(G_1/G) = \phi \cdot \Omega,$$

onde ϕ é meromorfa. Como $G^2 \cdot d(G_1/G) = G \cdot dG_1 - G_1 \cdot dG$, para terminar a prova, é suficiente ver que a função G_1/G é não constante. Mas, este fato decorre de (i), como o leitor pode verificar. \square

Observação 1.2.5. Defina $N(k) := \dim(\mathbb{E}(k, n)) + 1$, onde $\mathbb{E}(k, n)$ é o conjunto de 2-formas em \mathbb{C}^{n+1} com coeficientes homogêneos de grau k . Da prova do teorema 1.3, podemos obter as seguintes conseqüências :

- (I). Se \mathcal{F} possui $N(gr(\mathcal{F})) + 1$ soluções algébricas distintas então \mathcal{F} tem integral primeira meromorfa.

(II). Se \mathcal{F} tem $N(\text{gr}(\mathcal{F}))$ soluções algébricas distintas então a forma Ω , que define \mathcal{F} em coordenadas homogêneas, pode ser escrita como

$$\Omega = G \cdot \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{df_j}{f_j} := G \cdot \eta, \quad (1.15)$$

onde G é meromorfa e f_1, \dots, f_N são polinômios homogêneos.

Levando em conta a relação de Euler, $i_R(df_j) = \text{gr}(f_j) \cdot f_j$, obtemos de $i_R(\Omega) = 0$ e (1.15), que

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \text{gr}(f_j) = 0. \quad (1.16)$$

Note que a forma η é fechada : $d\eta = 0$. Como conseqüência, Ω tem um *fator integrante* meromorfo : $d(\frac{\Omega}{G}) = 0$.

Gostaríamos ainda de observar que a relação (1.16) implica que existe uma 1-forma meromorfa fechada ω em \mathbb{P}^n tal que $\eta = \Pi^*(\omega)$ (veja o Ex. 1.5).

Definição 1.2.2. Diremos que uma 1-forma η num aberto U de \mathbb{C}^m é *logarítmica*, se $\eta = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}^*$ e $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}(U)$. Diremos que uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n é *logarítmica* se a forma Ω , que a define em coordenadas homogêneas, se escreve como $\Omega = G \cdot \eta$, onde G é meromorfa e η é logarítmica.

Mais geralmente, diremos que uma folheação \mathcal{G} numa variedade complexa M é *definida* por uma forma meromorfa fechada $\eta \neq 0$ em M , se \mathcal{G} é representada por η em $M \setminus (|\eta|_\infty \cup |\eta|_0)$, onde $|\eta|_\infty$ e $|\eta|_0$ denotam os conjuntos de polos e de zeros de η , respectivamente.

Veremos em seguida a classificação das formas fechadas meromorfas em \mathbb{P}^n , $n \geq 1$. Dada uma forma fechada meromorfa ω em \mathbb{P}^n , colocamos $\eta_\omega = \eta := \Pi^*(\omega)$. A forma η satisfaz $i_R(\eta) = 0$ e $i_R(d\eta) = 0$ (veja o Ex. 1.5).

Proposição 1.2.5. *Sejam $\omega \neq 0$ uma 1-forma meromorfa em \mathbb{P}^n e $\eta = \Pi^*(\omega)$. Então podemos escrever η como*

$$\eta = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{r_1-1} \dots f_k^{r_k-1}}\right), \quad (1.17)$$

onde :

(a). f_1, \dots, f_k, g são polinômios homogêneos.

(b). f_1, \dots, f_k são irredutíveis e primos dois a dois.

(c). Se $r_j \geq 2$ então f_j não divide g . Além disto, $gr(g) = \sum_j (r_j - 1).gr(f_j)$.

(d). $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $\sum_{j=1}^k \lambda_j.gr(f_j) = 0$.

(e). Se $\lambda_j = 0$ então $r_j \geq 2, 1 \leq j \leq k$.

Em particular ω é logarítmica se, e somente se, $r_j = 1, 1 \leq j \leq k$. No caso, $|\omega|_\infty = \cup_j S_j$, onde $S_j := \Pi(f_j = 0)$, r_j é a multiplicidade de S_j como polo de ω e λ_j é o resíduo de ω ao longo de $S_j, 1 \leq j \leq k$.

A idéia da prova da proposição 1.2.5, é utilizar que $H_1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus |\eta|_\infty, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^k$, onde k é o número de componentes irredutíveis de $|\eta|_\infty$. Esta prova pode ser encontrada em [SC-LN].

Para encerrar a seção, resumiremos, sem demonstração, alguns resultados sobre folheações por curvas que serão utilizados no futuro.

Uma folheação \mathcal{F} de dimensão um em \mathbb{P}^n , pode ser representada numa carta afim ($E \simeq \mathbb{C}^n, (z_1, \dots, z_n)$) de \mathbb{P}^n por um campo de vetores polinomial $X = \sum_{j=1}^n P_j(z) \partial / \partial z_j$ (veja o teorema 1.2). Os polinômios P_1, \dots, P_n são, em princípio quaisquer, uma vez que em dimensão um não há condição de integrabilidade.

Dado um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$, distinto do hiperplano do infinito de E , com equação ($L = 0$), onde L é um polinômio de grau um, o conjunto de tangências de \mathcal{F} com H , denotado por $Tang(\mathcal{F}, H)$, é da forma

$$\begin{aligned} Tang(\mathcal{F}, H) \cap E &= \{p \in H \mid X(p) = 0, \text{ ou } X(p) \neq 0 \text{ e } X(p) \in T_p H\} = \\ &= \{p \in H \mid dL(p).X(p) = 0\} = \{p \in H \mid X(L)(p) = 0\}. \end{aligned}$$

Note que $X(L) := \sum_{j=1}^n P_j \cdot \frac{\partial L}{\partial z_j}$ é um polinômio. Se $X(L)|_L \equiv 0$ o hiperplano H é invariante por \mathcal{F} . Caso contrário, $X(L)|_L$, pode ser considerado como um polinômio em $H \cap E \simeq \mathbb{C}^{n-1}$. Neste caso, o grau de $X(L)|_L$ é invariante, isto é, se H_1 e H_2 são dois hiperplanos distintos não invariantes, então os graus são iguais. Definimos então este número inteiro como o grau de \mathcal{F} (veja [Sc-LN]). O conjunto de folheações de \mathbb{P}^n de dimensão um e grau k será denotado por $\mathcal{X}(n, k)$.

Proposição 1.2.6. *Uma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{X}(n, k)$ é representada numa carta afim $(E, (z_1, \dots, z_n))$ de \mathbb{P}^n por um campo polinomial do tipo $X = X_0 + \dots + X_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} X_j$, onde os coeficientes de X são polinômios homogêneos de grau j , $1 \leq j \leq k+1$. Além disto, $X_{k+1} = g_k \cdot R_n$, onde g_k é um polinômio homogêneo de grau k e $R_n = \sum_{j=1}^n z_j \cdot \partial/\partial z_j$ é o campo radial em \mathbb{C}^n . O hiperplano do infinito de E é invariante por \mathcal{F} se, e somente se, $g_k \equiv 0$. Neste caso, o campo $X_k \neq 0$ não é da forma $X_k = g_{k-1} \cdot R_n$, onde g_{k-1} é homogêneo de grau $k-1$.*

Corolário 1.2.1. *O espaço $\mathcal{X}(n, k)$, de folheações de dimensão um e grau $k \geq 1$ em \mathbb{P}^n , é biholomorfo a um espaço projetivo de dimensão*

$$\dim(\mathcal{X}(n, k)) = n \binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n} - 1.$$

A prova do corolário 1.2.1 se baseia na proposição 1.2.6 e no fato de que $\dim(\mathcal{P}(m, \ell)) = \binom{m+\ell}{m}$, onde $\mathcal{P}(m, \ell)$ é o espaço de polinômios de grau ℓ em \mathbb{C}^m .

Exemplo 1.2.4. Uma folheação por curvas de grau zero em \mathbb{P}^n é representada numa carta afim por $X = X_0 + g_0 \cdot R_n$, onde X_0 é um vetor constante e $g_0 \in \mathbb{C}$. Se $g_0 = 0$, a folheação é definida em E por um campo constante e as suas folhas são as retas paralelas a X_0 (nesta carta). Se $g_0 \neq 0$, então $\text{sing}(\mathcal{F}) \cap E$ é um único ponto, $p = -X_0/g_0$. Neste caso, se T é a transformação afim $T(z) = g_0^{-1} \cdot z + X_0/g_0$ de E , obtemos $T^*(X) = R_n$, ou seja, podemos dizer que \mathcal{F} é representada em alguma carta afim pelo campo radial.

Observação 1.2.6. Seja $X = X_0 + \dots + X_k + g_k \cdot R_n$ como na proposição 1.2.6. Quando efetuamos uma mudança de carta afim, por exemplo $\phi = (z_1 = 1/x_1, z_2 = x_2/x_1, \dots, z_n = x_n/x_1)$, no campo X , obtemos um campo da forma $\phi^*(X) = Z/x_1^{k-1}$, onde Z é um campo polinomial do mesmo tipo de X : $Z = Z_0 + \dots + h_k \cdot R_n$. Isto significa que o campo X representa um campo meromorfo em \mathbb{P}^n com polo de multiplicidade $k-1$ no hiperplano do infinito de E .

Em particular, se $k=1$, o campo X se estende holomorficamente a \mathbb{P}^n . Neste caso, X é *completo*, isto é, o seu fluxo complexo X_t é definido em $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^n$. Em particular, as folhas de \mathcal{F} são órbitas de uma ação de \mathbb{C} em \mathbb{P}^n . Elas são de dois tipos possíveis: \mathbb{C} ou \mathbb{C}^* .

Uma ação de \mathbb{C} numa variedade complexa arbitrária pode ter três tipos de órbitas não constantes : \mathbb{C} , \mathbb{C}^* ou um toro complexo (veja o exemplo 1.1.2). No caso de \mathbb{P}^n prova-se no entanto que a terceira possibilidade não ocorre (veja o Ex. 1.7).

1.3 O conjunto singular : folheações por curvas.

O objetivo desta seção, é estabelecer alguns resultados, locais ou globais, sobre os conjuntos singulares das folheações por curvas, que serão utilizados futuramente neste texto.

Seja $Y = \sum_{i=1}^n P_i(z) \partial/\partial z_i$ um campo de vetores holomorfo, definido num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, tal que $0 \in U$. Vamos supor que $Y(0) = 0$, ou seja, $0 \in \text{sing}(Y)$. Neste caso, escrevemos a expansão de Y em série de Taylor em $0 \in \mathbb{C}^n$ como $Y = \sum_{j \geq 1} Y_j$, onde os coeficientes de Y_j são polinômios homogêneos de grau j . O campo de vetores linear $DY(0) := Y_1$ é chamado de *parte linear* de Y em 0. Ele pode ser identificado, em coordenadas, com a matriz jacobiana $J := (\frac{\partial P_i}{\partial z_j}(0))_{1 \leq i, j \leq n}$. Dizemos que 0 é uma singularidade *não degenerada* de Y , se a matriz jacobiana $DY(0)$ é não singular. Neste caso, 0 é um ponto isolado de $\text{sing}(Y)$. Mais geralmente, se 0 é um ponto isolado de $\text{sing}(Y)$, definimos a *multiplicidade* de Y em 0 por $m(Y, 0) = [P_1, \dots, P_n]_0$, onde $[P_1, \dots, P_n]_0$ designa a multiplicidade de interseção das sub-variedades $(P_j = 0)$, $j = 1, \dots, n$, em 0. Esta multiplicidade pode ser definida de várias maneiras, mas talvez a mais popular, seja

$$[P_1, \dots, P_n]_0 = \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_n / \langle P_1, \dots, P_n \rangle_0),$$

onde $\langle P_1, \dots, P_n \rangle_0$ designa o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos germes de P_1, \dots, P_n em 0. Em particular, vale que $m(Y, 0) \geq 1$, sempre que $Y(0) = 0$. Além disto, se 0 é singularidade não degenerada de Y , temos $m(Y, 0) = 1$.

O espectro da parte linear $DY(0)$ é invariante por mudanças de coordenadas : se $\phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de biholomorfismo, então $DY(0)$ e $D(\phi^*(Y))(0)$ são conjugados. Como conseqüência, estes conceitos podem ser estendidos a campos de vetores em variedades complexas : se Y é um campo holomorfo na variedade M^n e

$p \in \text{sing}(Y)$, tomamos uma carta local ϕ tal que $\phi(p) = 0$, exprimimos Y nesta carta e calculamos o espectro de $DY(0)$. Este espectro será denotado por $\text{esp}(Y, p)$. No caso de uma folheação por curvas \mathcal{F} e $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$, o campo que representa \mathcal{F} numa vizinhança de p , está definido módulo multiplicação por uma função que não se anula em p , digamos f . Como $D(f.Y)(p) = f(p).DY(p)$, o espectro em si não está bem definido, mas o seu projetivizado sim, no caso em que $DY(p)$ tem ao menos um auto-valor não nulo. Neste caso, usaremos a notação $[\text{esp}(\mathcal{F}, p)]$ para designar o projetivizado do espectro de $DY(p)$, onde Y representa \mathcal{F} numa vizinhança de p .

Notação 1.3.1. O conjunto de folheações em \mathbb{P}^n de dimensão k , cujas singularidades são todas não degeneradas, será denotado por $ND(n, k)$.

Proposição 1.3.1. *Para todo $n \geq 2$ e todo $k \geq 0$ o conjunto $\mathcal{X}(n, k) \setminus ND(n, k)$ é algébrico e próprio. Em particular, $ND(n, k)$ é conexo e denso em $\mathcal{X}(n, k)$.*

A prova do resultado acima pode ser encontrada em [Sc-LN]. Quanto ao número de singularidades de uma folheação por curvas, temos o seguinte resultado :

Proposição 1.3.2. *Uma folheação por curvas \mathcal{F} em $\mathcal{X}(n, k)$, com singularidades isoladas, possui $N(n, k) := k^n + k^{n-1} + \dots + k + 1 = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$ singularidades, contadas com multiplicidade. Em particular, se $\mathcal{F} \in ND(n, k)$ então ela possui exatamente $N(n, k)$ singularidades.*

A prova da proposição 1.3.2 pode ser feita utilizando o teorema de Bézout (veja [Sc-LN] e o Ex. 1.8).

Um aspecto importante da teoria local das singularidades é o de determinar formas normais, ou de fornecer critérios para que o campo seja linearizável numa singularidade.

Definição 1.3.1. Dizemos que um campo holomorfo Y numa variedade complexa M^n é *linearizável* em $p \in \text{sing}(Y)$, se existe um germe de carta local $\phi: (M, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\phi_*(Y)$ é um campo linear em \mathbb{C}^n . Dizemos que uma folheação por curvas \mathcal{F} em M é *linearizável* em p se ela pode ser representada numa vizinhança de p por um campo linearizável em p . Mais geralmente, diremos que dois campos

holomorfos X e Y , em variedades M e N , são *equivalentes* em $p \in M$ e $q \in N$, se existe um germe de biholomorfismo $\phi: (M, p) \rightarrow (N, q)$ e um germe $f \in \mathcal{O}_p^*$ ($f(p) \neq 0$), tais que $\phi^*(Y) = f.X$.

Os resultados mais importantes de linearização de campos são os teoremas de Poincaré e de Siegel-Brjuno. Em seguida, enunciaremos, sem provar, o teorema de Poincaré. A prova deste resultado e o enunciado do teorema de Siegel-Brjuno podem ser encontrados nas referências [Ar] e [C-S].

Sejam Y um campo de vetores holomorfo na variedade complexa M^n e $p \in \text{sing}(M)$ uma singularidade não degenerada de Y . Diremos que (Y, p) está no *domínio de Poincaré* se o fecho convexo de $\text{esp}(Y, p)$ em \mathbb{C} , não contém a origem $0 \in \mathbb{C}$. Caso contrário, diremos que (Y, p) está no *domínio de Siegel*. Seja $\text{esp}(Y, p) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Diremos que Y tem uma *ressonância* em p , se existe uma relação da forma

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \cdot \lambda_j, \text{ onde } m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall j, \text{ e } \sum_j m_j \geq 2. \quad (1.18)$$

Caso não existam relações como em (1.18), diremos que Y não possui ressonâncias em p . Convém notar o fato de que uma relação como em (1.18) é um invariante de $[\text{esp}(Y, p)]$.

Teorema 1.4. (Teorema de Poincaré). *Sejam Y um campo holomorfo na variedade complexa M e $p \in \text{sing}(Y)$. Suponha que Y não tem ressonâncias em p . Então :*

- (a). *Y é formalmente linearizável em p .*
- (b). *Se (Y, p) está no domínio de Poincaré então Y é linearizável em p .*

Para a definição de "formalmente linearizável", remetemos o leitor à referência [C-S].

Um conceito que utilizaremos ao longo do texto é o de *separatriz*. Diremos que uma folheação por curvas \mathcal{F} , numa variedade M de dimensão n , admite uma separatriz num ponto $p \in M$, se existe um germe de curva holomorfa S por p , o qual é invariante por \mathcal{F} . Isto significa que, se $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M, p)$ é uma parametrização de S e Y

é um campo que representa \mathcal{F} numa vizinhança de p então $\gamma'(t)$ e $Y \circ \gamma(t)$ são linearmente dependentes para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$.

No caso em que Y é não degenerado e linearizável em q , para cada auto-vetor de $DY(q)$, a folheação admite exatamente uma separatriz lisa (não singular) tangente ao sub-espaço gerado por este auto-vetor.

Exemplo 1.3.1. O caso de dimensão dois será utilizado ao longo do texto. Temos quatro possibilidades para uma singularidade q de Y , quando $esp(Y, q) \neq \{0\}$:

- (1). $esp(Y, q) = \{0, \lambda_2\}$, onde $\lambda_2 \neq 0$. Neste caso, diremos que q é uma *sela-nó* de Y .
- (2). $esp(Y, q) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Neste caso (Y, q) está no domínio de Poincaré e não tem ressonâncias. Portanto Y é linearizável em q .
- (3). $esp(Y, q) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, (Y, q) está no domínio de Poincaré, mas pode ter ressonâncias : se $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ou $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
- (4). $esp(Y, q) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}_-$. Neste caso, (Y, q) está no domínio de Siegel. O campo Y tem ressonância em q se, e somente se, $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Q}_-$.

Nos casos (2) e (4) o campo Y admite (exatamente) duas separatrizes lisas, tangentes aos auto-espaços de λ_1 e λ_2 . No caso da sela-nó, o campo admite uma forma normal formal do tipo $\hat{Y} = x^{p+1} \partial/\partial x + \lambda_2(1 + \mu \cdot x^p)y \partial/\partial y$, onde $\mu \in \mathbb{C}$. O número μ é um invariante formal do campo. A multiplicidade de Y em q é $m(Y, q) = m(\hat{Y}, 0) = p + 1$. O campo Y admite ao menos uma separatriz por q (tangente ao auto-espaço de λ_2), podendo ou não admitir uma outra tangente ao auto-espaço relativo ao auto-valor 0. Remetemos o leitor para as referências [Ma-Ra 1] e [Ma-Ra 2], onde são dadas classificações analíticas dos casos (1) e (4) com ressonância, respectivamente.

No caso (3) com ressonância, o resultado mais importante é a forma normal de Dulac, a qual enunciamos abaixo :

Teorema 1.5. *Seja Y um germe de campo de vetores holomorfo em $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $Y(0) = 0$ e $esp(Y, 0) = \{1, n\}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Então Y é*

conjugado ao germe :

$$Z = x \frac{\partial}{\partial x} + (n y + a x^n) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.19)$$

O campo Y é linearizável se, e somente se, $a = 0$. Se $a \neq 0$ o campo admite apenas uma separatriz por $0 : (x = 0)$. Se $a = 0$ o campo possui uma integral primeira meromorfa : $f(x, y) = x^n/y$.

A prova do teorema de Dulac pode ser encontrada em [C-S]. Este resultado admite uma generalização em $n \geq 3$ variáveis, cujo enunciado e prova podem ser encontrados em [Ar] ou [Ma].

No caso de folheações em \mathbb{P}^2 temos ainda o seguinte resultado (veja [LN 2] e [Sc-LN]) :

Teorema 1.6. *Para todo $k \geq 2$, o espaço $\mathbb{X}(2, k) = \text{Fol}(2, k)$ contém um sub-conjunto aberto e denso $S(2, k) \subset ND(2, k)$ com as seguintes propriedades :*

- (a). *Se $\mathcal{G} \in S(2, k)$ então \mathcal{G} não possui folha algébrica.*
- (b). *Se $\mathcal{G} \in S(2, k)$ e $p \in \text{sing}(\mathcal{G})$ então $\text{esp}(\mathcal{G}, p) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, onde $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}_+$. Em particular, cada singularidade de \mathcal{G} admite exatamente duas separatrizes lisas transversais em p .*

Veremos em seguida o teorema de Baum-Bott em superfícies complexas compactas. Este resultado admite generalizações em dimensão maior que dois (veja [B-B] e [Su]). Seja \mathcal{F} uma folheação por curvas numa superfície M . Se $p \in M$ é uma singularidade isolada de \mathcal{F} , podemos representar \mathcal{F} numa vizinhança de p por uma 1-forma holomorfa ω , a qual numa carta local $(U, (x, y))$ em p , tal que $x(p) = y(p) = 0$, se escreve como $\omega = P(x, y) dy - Q(x, y) dx$. Vamos supor que $U \cap \text{sing}(U) = \{p\}$. Seja β uma $(1, 0)$ -forma de classe C^∞ em $U \setminus \{p\}$ tal que $d\omega = \beta \wedge \omega$. Podemos tomar $\beta = \frac{P_x + Q_y}{|P|^2 + |Q|^2} (\overline{P} dx + \overline{Q} dy)$, por exemplo, como o leitor pode verificar. A 3-forma $\beta \wedge d\beta$, que é C^∞ em $U \setminus \{0\}$, é fechada :

$$0 = d^2(\omega) = d\beta \wedge \omega - \beta \wedge d\omega \implies d\beta \wedge \omega = 0 \implies d\beta = \mu \wedge \omega,$$

onde μ é C^∞ em $U \setminus \{0\}$, já que ω tem singularidade isolada. Logo $d(\beta \wedge d\beta) = d\beta \wedge d\beta = 0$.

Se β_1 é outra 1-forma tal que $d\omega = \beta_1 \wedge \omega$, vale que $\beta \wedge d\beta - \beta_1 \wedge d\beta_1 = d\mu$, para alguma 2-forma $\mu \in \Lambda^2(U \setminus \{0\})$. Com efeito, como $(\beta_1 - \beta) \wedge \omega = 0$, existe $g \in \mathbb{C}^\infty(U \setminus \{0\})$ tal que $\beta = \beta_1 + g.\omega$. O leitor pode verificar que $\beta \wedge d\beta - \beta_1 \wedge d\beta_1 = d(g.\omega)$. Em particular, $\beta \wedge d\beta$ define uma classe de cohomologia em $H_{DR}^3(U \setminus \{0\})$. Verifica-se também que esta classe de cohomologia é a mesma se calcularmos com uma -forma $\omega_1 = f.\omega$, onde $f(p) \neq 0$, ou seja, ela só depende da folheação numa vizinhança de p (verifique). O índice de Baum-Bott de \mathcal{F} em p é definido por :

$$BB(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_S \beta \wedge d\beta ,$$

onde $S = \partial B$ é de classe C^∞ e $B \subset U$ é um aberto com fronteira regular que contém p em seu interior.

Observação 1.3.1. No caso em que a singularidade é não degenerada e $[esp(\mathcal{F}, p)] = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ então o índice de Baum-Bott é $BB(\mathcal{F}, p) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$ (veja [Br]).

Teorema 1.7. *Seja \mathcal{F} uma folheação por curvas numa superfície complexa compacta M . Suponha que as singularidades de \mathcal{F} são isoladas. Então*

$$BB(\mathcal{F}) := \sum_{p \in \text{sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = N_{\mathcal{F}}^2 . \quad (1.20)$$

Convém aqui esclarecer o significado do número $N_{\mathcal{F}}^2$. A folheação \mathcal{F} é definida por um terno $((U_j)_{j \in J}, (\omega_j)_{j \in J}, (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset})$ (veja definição 1.1.3). A coleção $(g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}$ é um cociclo multiplicativo :

$$g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = 1$$

sempre que $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Este cociclo, por sua vez, define um elemento de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$, o qual é chamado de fibrado normal de \mathcal{F} e é denotado por $N_{\mathcal{F}}$. Por outro lado, temos a seqüência exata curta de feixes $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ que induz a seqüência longa em cohomologia

$$\dots \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Portanto, $\delta(N_{\mathcal{F}}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. A classe $\delta(N_{\mathcal{F}})$ pode também ser considerada como uma classe em $H^2(M, \mathbb{R}) \simeq H_{DR}^2(M)$ (Teorema de De Rham). Chamando esta classe de $[N_{\mathcal{F}}]$ temos (por definição) $N_{\mathcal{F}}^2 = \int_M [N_{\mathcal{F}}] \wedge [N_{\mathcal{F}}]$. A prova do teorema 1.7 pode ser encontrada na referência [Br].

No caso de folheações em \mathbb{P}^2 , temos a seguinte versão :

Corolário 1.3.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de grau k em \mathbb{P}^2 , com singularidades isoladas. Então $BB(\mathcal{F}) = (k + 2)^2$. Em particular, $sing(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.*

A prova do corolário 1.3.1 é baseada no fato de que se \mathcal{F} é uma folheação de grau k em \mathbb{P}^2 então $N_{\mathcal{F}} = (k + 2).H$, onde H é a classe de um hiperplano em $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}^*)$, ou seja $H^2 = 1$. Ela pode ser encontrada em [Sc-LN].

1.4 O conjunto singular : folheações de codimensão um.

Nesta seção faremos um estudo local do conjunto singular, em que introduziremos o "fenômeno de Kupka" e as componentes de Kupka. No final provaremos, como aplicação do teorema de Baum-Bott, que o conjunto singular de uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, possui ao menos uma componente irredutível de codimensão dois.

1.4.1 O fenômeno de Kupka.

O resultado abaixo, devido a I. Kupka (cf. [K]), será bastante utilizado.

Teorema 1.8. *Seja ω um germe em $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forma integrável, $n \geq 3$. Suponha que $0 \in sing(\omega)$ e que $d\omega(0) \neq 0$. Então existe um sistema de coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2}$ tal que $\omega = P(x, y) dy - Q(x, y) dx$.*

Prova. Diferenciando a relação $\omega \wedge d\omega = 0$ obtemos

$$d\omega \wedge d\omega = 0 \tag{1.21}$$

Utilizaremos (1.21) para demonstrar que existem coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2}$ tal que $d\omega = dx \wedge dy$. Com isto, obteremos do lema de Poincaré :

$$d(\omega - x dy) = 0 \implies \omega - x dy = df, f \in \mathcal{O}_n \implies$$

$$0 = \omega \wedge d\omega = (x dy + df) \wedge dx \wedge dy = df \wedge dx \wedge dy \implies$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0, \forall j \implies f = f(x, y) \implies$$

$\omega = P(x, y) dy - Q(x, y) dx$, onde $P(x, y) = x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ e $Q(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Em seguida provaremos a existência de um tal sistema de coordenadas. Seja B uma bola com centro em $0 \in \mathbb{C}^n$ na qual ω tem um representante, que denotaremos pela mesma letra. Como $d\omega(0) \neq 0$, diminuindo B , podemos supor que $d\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in B$. Dado $p \in B$ defina :

$$E_p = \{v \in T_p B \simeq \mathbb{C}^n \mid i_v(d\omega(p)) = 0\}.$$

Lema 1.4.1. *Para todo $p \in B$ o subespaço E_p tem codimensão dois. Além disto, o sub-fibrado E de TB , cuja fibra por $p \in B$ é E_p , é holomorfo e integrável.*

Prova. Deixamos as provas da primeira afirmação e de que E é holomorfo, como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.10). Verifiquemos que E é um fibrado integrável numa vizinhança de 0. Como $d\omega(0) \neq 0$, existem vetores $u, v \in \mathbb{C}^n$ tais que $d\omega(0)(u, v) \neq 0$. Fixemos uma vizinhança U de 0 tal que $f := d\omega(p)(u, v) \neq 0$ para todo $p \in U$. Considerando $X := u$ e $Y = f^{-1}.v$ como campos de vetores holomorfos em U , temos

$$0 = i_Y i_X(d\omega \wedge d\omega) = 2i_Y(i_X(d\omega) \wedge d\omega) =$$

$$= 2(d\omega(X, Y).d\omega - i_X(d\omega) \wedge i_Y(d\omega)) = 2(d\omega - \alpha \wedge \beta) \implies d\omega = \alpha \wedge \beta$$

onde $\alpha = i_X(d\omega)$ e $\beta = i_Y(d\omega)$. Afirmamos que α e β satisfazem às equações de integrabilidade (1.1) do teorema de Frobenius. Com efeito, diferenciando ambos os membros de $d\omega = \alpha \wedge \beta$ obtemos

$$0 = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta \implies d\alpha \wedge \alpha \wedge \beta = 0,$$

sendo que a última relação foi obtida tomando-se o produto exterior da primeira por α . Analogamente, fazendo o produto exterior da primeira relação por β obtemos $d\beta \wedge \alpha \wedge \beta = 0$, o que prova o lema. \square

Pelo lema 1.4.1, o fibrado E é tangente a uma folheação \mathcal{G} de codimensão dois. Consideremos uma carta trivializadora $(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_1, x_2, z)$ de \mathcal{G} numa vizinhança de 0, tal que as folhas de \mathcal{G} são da forma $(x_1 = c_1, x_2 = c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Tendo-se em vista a definição de E , obtemos que $d\omega = g dx_1 \wedge dx_2$ (verifique). Como $0 = d(g dx_1 \wedge dx_2) = dg \wedge dx_1 \wedge dx_2$, obtemos que $g = g(x_1, x_2)$, só depende de x_1 e x_2 . Consideremos agora a aplicação $H(x_1, x_2, z) = (x_1, h(x_1, x_2), z)$, onde $h(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} g(x_1, t) dt$. Como o leitor pode verificar, o determinante jacobiano de H em 0 vale $g(0, 0) \neq 0$, ou seja H define um biholomorfismo entre vizinhanças de $0 \in \mathbb{C}^n$, $H(x_1, x_2, z) = (x, y, z)$. Nas coordenadas (x, y, z) a forma $d\omega$ se escreve como $dx \wedge dh = dx \wedge dy$, o que prova o teorema. \square

Observação 1.4.1. O teorema de Kupka tem a seguinte interpretação geométrica : o germe de folheação $\mathcal{F}(\omega)$, gerada por ω , tem uma estrutura *produto* : é o produto de um germe de folheação regular de codimensão dois por um germe de folheação singular de dimensão um em $0 \in \mathbb{C}^2$.

Com efeito, a forma normal local $\omega = P(x, y) dy - Q(x, y) dx$, nos diz que :

(1). $\text{sing}(\mathcal{F}(\omega)) = \{(x, y, z) \mid P(x, y) = Q(x, y) = 0\}$. Em particular, se 0 é ponto isolado de $(P = Q = 0) \subset \mathbb{C}^2$, o germe de $\text{sing}(\mathcal{F}(\omega))$ em 0 é dado por $(x = y = 0)$, logo é liso e de codimensão dois. Caso contrário, podemos escrever $P = f.P_1$ e $Q = f.Q_1$, onde os germes P_1 e Q_1 não têm fator comum e $f(0) = 0$. Neste caso, $(f = 0)$ é uma componente de codimensão um de $\text{sing}(\mathcal{F}(\omega))$.

(2). Se L é uma curva integral não constante do campo de vetores $X = P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y$ (em \mathbb{C}^2) então $L \times \mathbb{C}^{n-2}$ é uma folha de $\mathcal{F}(\omega)$ (note que X e $P(x, y) dy - Q(x, y) dx$ definem o mesmo germe de folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$).

Definição 1.4.1. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão n . Dizemos que $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ é um ponto de *Kupka* se \mathcal{F} pode ser representada numa vizinhança de p por uma 1-forma ω tal que $d\omega(p) \neq 0$. Esta condição independe da 1-forma que representa \mathcal{F} , uma vez que se $\eta = g.\omega$, onde $g(p) \neq 0$,

então $d\eta(p) = g(p).d\omega(p) + dg(p) \wedge \omega(p) = g(p).d\omega(p) \neq 0$. O conjunto dos pontos singulares de Kupka de \mathcal{F} será denotado por $K(\mathcal{F})$.

Seja \mathcal{G} um germe de folheação $0 \in \mathbb{C}^2$. Diremos que $p \in K(\mathcal{F})$ tem *tipo transversal* \mathcal{G} , se \mathcal{F} pode ser representada numa vizinhança de p por uma 1-forma $\omega = P(x, y) dy - Q(x, y) dx$, como no teorema de Kupka, tal que \mathcal{G} coincide com a folheação gerada por $P(x, y) dy - Q(x, y) dx$.

Convém observar que, em geral, $K(\mathcal{F})$ não é um sub-conjunto analítico de M , como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1.4.1. Considere a forma logarítmica $\eta := \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{dx_j}{x_j}$ em \mathbb{C}^n , onde $n \geq 3$ e $\lambda_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. A forma $\omega = x_1 \dots x_n \cdot \eta$ é integrável e define uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{C}^n . No caso, temos :

(a). $\text{sing}(\mathcal{F}) = \cup_{i \neq j} (x_i = x_j = 0)$. Em particular, $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) = 2$.

(b). Num ponto $p \in \mathbb{C}^n$ tal que $x_i(p) = x_j(p) = x_k(p) = 0$, $i < j < k$, temos $d\omega(p) = 0$, ou seja $p \notin K(\mathcal{F})$. Denotemos por S o conjunto analítico de codimensão três $\cup_{i < j < k} (x_i = x_j = x_k = 0)$.

(c). Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $p \in (x_i = x_j = 0) \setminus S$ então $d\omega(p) \neq 0$. Em particular $p \in K(\mathcal{F})$. À partir daí é possível provar que

$$K(\mathcal{F}) = \bigcup_{(i,j) \in J} (x_i = x_j = 0) \setminus S, \text{ onde } J = \{(i, j) \mid \lambda_i \neq \lambda_j\}.$$

Portanto, se $K(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, ele nunca é fechado, logo não é um sub-conjunto analítico de \mathbb{C}^n .

Como conseqüência da estrutura de produto local, temos o seguinte resultado :

Proposição 1.4.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão $n \geq 3$ tal que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Então $K(\mathcal{F})$ é uma sub-variedade lisa de codimensão complexa dois. Seja $K(\mathcal{F}) = \cup_{j \in J} K_j$ a decomposição de $K(\mathcal{F})$ em componentes conexas. Dados $p, q \in K_j$ então os tipos transversais de \mathcal{F} em p e q coincidem.*

Definição 1.4.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade M de dimensão $n \geq 3$. Dizemos que um sub-conjunto*

analítico S de M é uma *componente de Kupka* de \mathcal{F} , se S é uma componente irredutível de $\text{sing}(\mathcal{F})$ tal que $S \subset K(\mathcal{F})$.

Pela proposição 1.4.1, uma componente de Kupka S de \mathcal{F} é necessariamente uma sub-variedade de codimensão dois de M . Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.4.2. Sejam \mathcal{G} uma folheação por curvas numa superfície complexa X e N uma variedade complexa e conexa de dimensão $n \geq 1$. Sejam $M := X \times N$ e $\mathcal{F} = \pi_1^*(\mathcal{G})$, onde $\pi_1: M \rightarrow X$ é a primeira projeção. Suponha que existe $p \in \text{sing}(X)$ tal que \mathcal{G} é representada numa vizinhança de p por um campo de vetores equivalente a um germe de campo $Y := P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y$ em $0 \in \mathbb{C}^2$ tal que $P_x(0) + Q_y(0) \neq 0$. Neste caso, $S := \{p\} \times N$ é uma componente de Kupka de \mathcal{F} com tipo transversal Y .

Exemplo 1.4.3. Sejam f e g polinômios homogêneos e irredutíveis em \mathbb{C}^{n+1} , onde $\text{gr}(f)/\text{gr}(g) = p/q$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Vamos denotar por $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção canônica. Suponha que as hipersuperfícies $\pi(f = 0)$ e $\pi(g = 0)$ são transversais. Esta última condição é equivalente à seguinte :

$$z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, f(z) = g(z) = 0 \implies df(z) \wedge dg(z) \neq 0. \quad (1.22)$$

Seja \mathcal{F} a folheação de \mathbb{P}^n definida em coordenadas homogêneas pela forma $\Omega = qgdf - pf dg$. Note que a função meromorfa $h = (f^q/g^p) \circ \pi$ de \mathbb{P}^n é uma integral primeira de \mathcal{F} . A sub-variedade de codimensão dois $\pi(f = g = 0)$ é uma componente de Kupka de \mathcal{F} . Isto decorre de (1.22) e de $d\Omega = (p+q)df \wedge dg$, como o leitor pode verificar. Esta componente de Kupka tem o tipo transversal do campo de vetores li-linear $px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y$ (veja o Ex. 1.11). A folheação \mathcal{F} será denotada por $\mathcal{F}(f, g)$. Observamos que o grau de $\mathcal{F}(f, g)$ é $\text{gr}(f) + \text{gr}(g) - 2$.

Em seguida enunciaremos alguns resultados conhecidos sobre folheações de \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, que possuem uma componente de Kupka. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, que possui uma componente de Kupka S .

Teorema 1.9. ([Ce-LN 1]). *Nas condições acima, se S é uma interseção completa então \mathcal{F} possui uma integral primeira meromorfa do tipo f^q/g^p , como no exemplo 1.4.3, ou seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f, g)$.*

A prova do teorema acima pode ser encontrada em [Ce-LN 1]. Nesta referência, conjectura-se que toda folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, que possui uma componente de Kupka é como no exemplo 1.4.2. Esta conjectura foi resolvida em alguns casos particulares, mas persiste ainda no caso geral. As tentativas de resolvê-la têm-se concentrado em tentar demonstrar que S é uma interseção completa. Em seguida enunciaremos alguns resultados nesta direção.

Teorema 1.10. [CA-So]. *Se S é uma componente de Kupka de uma folheação em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, então S é numericamente equivalente a uma interseção completa. Em particular, \mathcal{F} tem tipo transversal em S equivalente a um campo linear da forma $px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y$, onde $p, q \in \mathbb{N}$.*

Um caso em que o problema foi resolvido é o seguinte :

Teorema 1.11. [CA 3]. *Seja S uma componente de Kupka de uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$. Suponha que o tipo transversal de \mathcal{F} em S não é equivalente ao do campo radial $R_2 := x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$. Então S é uma interseção completa e $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f, g)$, como no exemplo 1.4.2.*

1.4.2 Redução de variáveis.

O fenômeno de Kupka sugere a seguinte definição :

Definição 1.4.3. Seja ω um germe de p -forma holomorfa em $q_o \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq p \leq n$. Diremos que ω pode ser escrita com $k < n$ variáveis se existe um sistema de coordenadas holomorfo $(z, w) = (z_1, \dots, z_k, w)$ em q_o no qual podemos escrever $\omega = \sum_J f_J(z) dz^J$. No somatório adotamos a notação $J = (j_1, \dots, j_p)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq k$, e $dz^J = dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p}$. O posto de ω em q_o é o número mínimo de variáveis com que podemos escrever ω . Usaremos a notação $r_{k_{q_o}}(\omega)$ para o posto de ω em q_o .

O resultado seguinte é consequência imediata da definição.

Proposição 1.4.2. *Um germe $\omega \in \Omega_n^p$ pode ser escrito com $k < n$ variáveis se, e somente se, existem um germe de submersão $\phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ e um germe $\eta \in \Omega_k^p$ tais que $\omega = \phi^*(\eta)$.*

No caso de folheações de codimensão um, temos o seguinte :

Corolário 1.4.1. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação de codimensão um em $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$. As seguintes afirmações são equivalentes ;*

- (a). *\mathcal{F} pode ser representada por um germe de 1-forma ω com $\text{rk}(\omega)_0 = k < n$.*
- (b). *Existem um germe de folheação de codimensão um \mathcal{G} em $0 \in \mathbb{C}^k$ e uma submersão $\phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ tais que $\mathcal{F} = \phi^*(\mathcal{G})$.*

Quando uma das duas condições do corolário 1.4.1 for verificada, diremos que \mathcal{F} é equivalente a um produto de uma folheação de codimensão um em $(\mathbb{C}^k, 0)$ por uma folheação regular de codimensão k .

Em seguida veremos um critério de redução a três variáveis. Seja ω um germe de 1-forma integrável em $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 4$, tal que $\omega(0) = 0$, ou seja, $0 \in \text{sing}(\mathcal{F}(\omega))$. Se $d\omega(0) \neq 0$ estamos na situação do teorema de Kupka. Vamos supor então que $d\omega(0) = 0$. Seja $H = \psi(\mathbb{C}^3, 0)$, onde $\psi: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de mergulho. Consideremos a restrição $\eta := \omega|_H$. Como ψ é um mergulho, existe um (germe de) sistema de coordenadas $(z_1, \dots, z_n) = z = (x, y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{n-3}$ tal que $H = (y = 0)$. Se $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j$ temos $\eta = \sum_{j=1}^3 f_j(x, 0) dx_j$. Neste caso, podemos escrever $d\eta = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$, onde $f_{ij}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, 0) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, 0)$. Diremos que $d\eta$ tem *singularidade isolada* em $0 \in H$ se $\{x \mid f_{ij}(x) = 0, 1 \leq i < j \leq 3\} = \{0\} \subset H$. A definição independe do sistema de coordenadas. Além disto, se \tilde{H} é um outro mergulho de $(\mathbb{C}^3, 0)$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que os espaços tangentes T_0H e $T_0\tilde{H}$ coincidem então 0 é singularidade isolada de $d(\omega|_H)$ se, e somente se é singularidade isolada de $d(\omega|_{\tilde{H}})$. Deixamos a verificação destes fatos como exercício para o leitor. Neste caso diremos que ω tem uma singularidade *simples* em 0 .

Teorema 1.12. [C-LN 1]. *Se ω tem uma singularidade simples em $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 4$ então $\text{rk}(\omega, 0) \leq 3$. Em particular, $\mathcal{F}(\omega)$ é equivalente ao produto de uma folheação de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, 0)$ por uma folheação regular de codimensão três.*

Prova. A idéia é provar que se ω pode ser escrita com k variáveis, onde $4 \leq k \leq n$, então ela pode ser escrita com $k - 1$ variáveis. Mais especificamente, provaremos que se existe um sistema de coordenadas

$(x, y) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ onde $\omega = \sum_{j=1}^k f_j(x) dx_j$ então o germe de 1-forma $\eta := \sum_{j=1}^k f_j(x) dx_j$ em $(\mathbb{C}^k, 0)$ pode ser escrita com $k - 1$ variáveis. Desta forma, iremos supor que $k = n$ e todos os passos da indução serão similares a este caso.

Para provar que ω pode ser escrita com $n - 1$ variáveis vamos construir um germe de campo de vetores holomorfo X tal que $X(0) \neq 0$ e $i_X d\omega = 0$. Suponhamos por um instante que existe um tal campo. Neste caso, como $X(0) \neq 0$ existe um (germe de) sistema de coordenadas $z = (x, y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ tal que $X = \partial/\partial y$ (teorema do fluxo tubular, veja [Sc-LN]). Afirmamos que ω se escreve com $n - 1$ variáveis nesta carta local. Com efeito, utilizando a condição de integrabilidade, temos

$$0 = i(\omega \wedge d\omega) = i_X \omega \cdot d\omega - \omega \wedge i_X d\omega = i_X \omega \cdot d\omega \implies i_X \omega = 0 .$$

Utilizamos acima que $d\omega \neq 0$, já que 0 é singularidade isolada de $d(\omega|_H)$. Obtemos daí que (veja [Sc-LN]) :

$$L_X(\omega) = i_X d\omega + d(i_X \omega) = 0 ,$$

onde L_X denota a derivada de Lie na direção de X . Por outro lado, $L_X(\omega) = \frac{d}{dt}(X_t^*(\omega))|_{t=0}$ (veja [Sc-LN]), onde $X_t(x, y) = (x, y + t)$ é o fluxo de $X = \partial/\partial y$. Portanto $L_X(\omega) = 0$ implica que os coeficientes de ω não dependem de y , ou seja, $\omega = \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x) dx_j + f_n(x) dy$, onde $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{n-1}$. Finalmente, como $i_X \omega = 0$ obtemos que $f_n = 0$ e que ω pode ser escrita com $n - 1$ variáveis. Provemos a existência do campo X .

Consideremos um sistema de coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ tal que $H = (z_4 = \dots = z_n = 0)$. Vamos obter uma solução do problema da forma $X = \partial/\partial z_n + \sum_{j=1}^3 g_j(z) \partial/\partial z_j$, onde $g_j \in \mathcal{O}_n$, $1 \leq j \leq 3$. Coloquemos $d\omega = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \omega_{ij} dz_i \wedge dz_j$, $\omega_{rs} = -\omega_{sr}$ se $r \geq s$, e $i_X d\omega = \sum_{j=1}^n R_j dz_j$. Um cálculo direto mostra que

$$R_j = g_1 \cdot \omega_{1j} + g_2 \cdot \omega_{2j} + g_3 \cdot \omega_{3j} + \omega_{nj} , \quad 1 \leq j \leq n . \quad (1.23)$$

Portanto $i_X d\omega = 0$ é equivalente a $R_j \equiv 0$, $1 \leq j \leq n$, em (1.23).

Afirmamos que as relações $R_j \equiv 0$, $j = 1, 2 \implies R_j \equiv 0$, $j \geq 3$. Com efeito, suponhamos que $R_1 = R_2 = 0$. A relação de integrabilidade implica que $d\omega \wedge d\omega = 0$. Fazendo o produto interior desta

relação com X , obtemos $i_X \omega \wedge d\omega = 0$, relação que é verdadeira para qualquer campo X . Por outro lado, o coeficiente de $dz_j \wedge dz_1 \wedge dz_2$ em $i_X d\omega \wedge d\omega$ é

$$A_j = R_j \cdot \omega_{12} + R_1 \cdot \omega_{2j} + R_2 \cdot \omega_{j1} .$$

Como $A_j = R_1 = R_2 = 0$ obtemos $R_j \cdot \omega_{12} \equiv 0$. Por outro lado, a hipótese de que $d(\omega|_H)$ tem singularidade isolada em 0 implica que $\omega_{12} \neq 0$, logo $R_j \equiv 0$.

Explicitamente as relações $R_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, podem ser escritas como

$$\begin{cases} -g_2 \cdot \omega_{12} + g_3 \cdot \omega_{31} = \omega_{1n} \\ g_1 \cdot \omega_{12} - g_3 \cdot \omega_{23} = \omega_{2n} \\ -g_1 \cdot \omega_{31} + g_2 \cdot \omega_{23} = \omega_{3n} \end{cases} \quad (1.24)$$

Vamos escrever estas relações de um outro modo, de forma a utilizar o teorema da divisão de De Rham (veja o Apêndice 1.6). Sejam $Y := \omega_{23} \cdot \partial / \partial z_1 + \omega_{31} \cdot \partial / \partial z_2 + \omega_{12} \cdot \partial / \partial z_3$, $\alpha := \omega_{1n} \cdot dz_1 + \omega_{2n} \cdot dz_2 + \omega_{3n} \cdot dz_3$ e $\Theta := g_1 dz_3 \wedge dz_2 + g_2 dz_1 \wedge dz_3 + g_3 dz_2 \wedge dz_1$. O leitor pode verificar diretamente que as relações (1.24) são equivalentes a $i_Y \Theta = \alpha$. Por outro lado, o coeficiente de $dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_n$ em $d\omega \wedge d\omega$ é $\omega_{23} \cdot \omega_{1n} + \omega_{31} \cdot \omega_{2n} + \omega_{12} \cdot \omega_{3n} = i_Y \alpha$ e como $d\omega \wedge d\omega = 0$ obtemos que $i_Y \alpha = 0$. Portanto a solução do problema se reduz a um teorema de divisão : $i_Y \alpha = 0 \implies \alpha = i_Y \Theta$.

Para aplicar o teorema de De Rham (versão paramétrica) devemos verificar que $\text{cod}(\text{sing}(Y)) \geq 3$. Este fato decorre da hipótese : colocando $z = (u, v) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{n-3}$, a hipótese de que 0 é singularidade isolada de $d(\omega|_H)$ é equivalente a $\text{sing}(Y) \cap H = (\omega_{12}(u, 0) = \omega_{31}(u, 0) = \omega_{23}(u, 0) = 0) = \{0\}$. Isto implica que $\text{cod}(\text{sing}(Y)) \geq 3$: se $\text{sing}(Y)$ tivesse uma componente A de codimensão dois, por exemplo, $A \cap H$ teria codimensão dois em H , ou seja dimensão um, o que é uma contradição, já que $A \cap H \subset \text{sing}(Y) \cap H = \{0\}$. \square

O resultado seguinte é consequência do teorema 1.12 (veja o Ex. 1.12).

Corolário 1.4.2. *Seja $\omega \in \Omega_n^1$ integrável ($n \geq 4$) tal que $\omega(0) = 0$ e $d\omega(0) = 0$. Seja $\omega = \sum_{j=k}^{\infty} \omega_j$ a expansão de Taylor de ω em $0 \in \mathbb{C}^n$. Suponha que exista um 3-plano $H \subset \mathbb{C}^n$, passando pela origem, tal que $d(\omega_k|_H)$ tem singularidade isolada. Então $\text{rk}(\omega, 0) \leq 3$.*

Nos exemplos em seguida convencionamos que $n \geq 4$ e $H = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_j = 0, j \geq 4\}$.

Exemplo 1.4.4. Consideremos um germe de 1-forma integrável em $0 \in \mathbb{C}^n$, cuja expansão de Taylor em 0 é do tipo $\omega = \sum_{j \geq 2} \omega_j$, sendo $\omega_2|_H = \lambda_1.z_2 z_3 dz_1 + \lambda_2.z_1 z_3 dz_2 + \lambda_3.z_1 z_2 dz_3$, $\lambda_j \neq 0$, $1 \leq j \leq 3$. Note que a folheação gerada por $\omega_2|_H$ em H é do tipo logarítmica. Como $d(\omega_2|_H) = (\lambda_3 - \lambda_2)z_1 dz_2 \wedge dz_3 + (\lambda_1 - \lambda_3)z_2 dz_3 \wedge dz_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)z_3 dz_1 \wedge dz_2$, obtemos que se $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$, então ω pode ser escrita com três variáveis. Neste caso é possível provar também que a folheação $\mathcal{F}(\omega)$ pode ser definida por um germe de ação comutativa em $(\mathbb{C}^n, 0)$, isto é, existem germes de campos holomorfos comutativos X_1, \dots, X_{n-1} tais que $\omega = i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} dz_1 \wedge \dots dz_n$. O sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal forma que $X_j = \partial/\partial z_{j+1}$, se $j \geq 3$, e $X_i = \sum_{j=1}^3 f_{ij}(z_1, z_2, z_3) \partial/\partial z_j$ se $i = 1, 2$. Supondo condições de não ressonância nos λ_{j_s} é possível ainda provar que os campos X_1 e X_2 podem ser simultaneamente linearizados. Isto significa que existe um germe de biholomorfismo $\phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\omega = \phi^*(\omega_2|_H)$. Uma referência para este resultado é [Ce-LN 2].

Exemplo 1.4.5. Como sabemos, uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 pode ser definida em coordenadas homogêneas por uma 1-forma integrável Ω em \mathbb{C}^3 , cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau $gr(\mathcal{F}) + 1 := k$ e que satisfaz $i_R \Omega = 0$. Uma condição necessária para que $0 \in \mathbb{C}^3$ seja singularidade simples de Ω é que se $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ então p é não degenerada e $[\text{esp}(\mathcal{F}, p)] = \{\lambda_1 : \lambda_2\}$, onde $\lambda_2/\lambda_1 \neq -1$ (veja o Ex. 1.13). Neste caso, podemos aplicar o corolário 1.4.2 : se um germe de 1-forma integrável ω em $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 4$, é tal que $\omega = \sum_{j \geq k} \omega_j$, e ω_k satisfaz $\omega_k|_H = \Omega$ então $rk(\omega) = 3$. É possível ainda provar que ω é equivalente a Ω , ou seja, que existe um germe de submersão $\phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ tal que $\omega = \phi^*(\Omega)$. Este último resultado, cuja demonstração original foi dada em [C LN 1], será provado no capítulo 2.3.

1.4.3 O conjunto singular em \mathbb{P}^n .

O objetivo desta seção é provar que o conjunto singular de uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n tem ao menos uma componente

irredutível de codimensão dois. A idéia da prova é aplicar o teorema de Baum-Bott a uma restrição da folheação a um plano $\mathbb{P}^2 \simeq H \subset \mathbb{P}^n$ convenientemente escolhido.

Vamos utilizar que um sub-conjunto analítico X de dimensão k de uma variedade M pode ser estratificado de maneira única em sub-conjuntos analíticos $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k = X$ tais que para todo $j = 1, \dots, k$, temos que $\dim(X_{j-1}) < \dim(X_j)$ e $X_j \setminus X_{j-1}$ é uma sub-variedade lisa de M . Diremos que um outro conjunto analítico Y , com estratificação $\emptyset = Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_\ell = Y$, é transversal a X em M , se as sub-variedades $X_j \setminus X_{j-1}$ e $Y_i \setminus Y_{i-1}$ são transversais duas a duas. Convém observar que a nomenclatura *sub-variedade* é utilizada aqui no sentido da topologia diferencial, isto é, o conjunto $X_j \setminus X_{j-1}$ não é necessariamente fechado em M .

Dado $k < n$ denotaremos por $Gr(n, k)$ o conjunto de todos os planos $\mathbb{P}^k \simeq H \subset \mathbb{P}^n$ mergulhados linearmente em \mathbb{P}^n . Observamos que $Gr(n, k)$ tem uma estrutura natural de variedade complexa compacta de dimensão $(k+1)(n-k)$.

Definição 1.4.4. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um de \mathbb{P}^n , $n \geq 3$. Dizemos que um k -plano $H \in Gr(n, k)$ está em *posição geral*, ou é *genérico* com respeito a \mathcal{F} se :

- (a). H é transversal a $\text{sing}(\mathcal{F})$.
- (b). Se $p \in H \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ então \mathcal{F} tem uma integral primeira numa vizinhança U de p , digamos $f \in \mathcal{O}(U)$. Neste caso, exigiremos que, ou bem $df(p)|_{T_p H} \neq 0$, ou seja, $T_p \mathcal{F}$ é transversal a $T_p H$, ou bem p é uma singularidade de Morse de $f|_H$.

Esta última condição é equivalente a dizer que existe um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_k) em $p \in H$ tal que $f|_H = f(p) + \sum_{j=1}^k x_j^2$ (veja [Hi]). Um resultado que será utilizado algumas vezes neste texto é o seguinte :

Proposição 1.4.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 2$. Dado $1 \leq k < n$, o conjunto $G(n, k, \mathcal{F}) = \{H \in Gr(n, k) \mid H \text{ está em posição geral com respeito a } \mathcal{F}\}$ é denso em $Gr(n, k)$.*

Prova. Sejam C e D os conjuntos de k -planos H que satisfazem às condições (a) e (b) da definição 1.4.4, respectivamente. Como

$G(n, k, \mathcal{F}) = C \cap D$, basta provar que C e D são de Baire. O fato de que C é de Baire, é consequência da teoria da transversalidade e é deixada como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.14). Provemos que D é de Baire. Fixemos uma carta afim $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ e uma bola $B \subset \mathbb{C}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$, tal que \mathcal{F} possui uma integral primeira holomorfa não constante $f: B \rightarrow \mathbb{C}$, sendo $df(q) \neq 0$ para todo $q \in B$. Dado $X \subset \mathbb{P}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ defina $G(\mathcal{F}, X) = \{H \in Gr(n, k) \mid H \text{ satisfaz à condição (b) da definição 1.4.4 em todos os pontos de } X\}$.

Lema 1.4.2. *Na situação acima, o conjunto $G(\mathcal{F}, B)$ é denso em $Gr(n, k)$.*

Prova. Fixado $H \in Gr(n, k)$ tal que $H \cap B \neq \emptyset$, após uma rotação e uma translação em \mathbb{C}^n , podemos supor que $H \cap \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \{0\} \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} = \mathbb{C}^n$. Seja U a vizinhança de H em $Gr(n, k)$ tal que todo k -plano em U é o gráfico de uma função afim $\phi: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$, na decomposição considerada: $U = \{\psi(\mathbb{C}^k) \mid \psi(x) = (x, a + L(x))\}$, onde $a \in \mathbb{C}^{n-k}$ e $L \in \mathcal{L}(k, n-k)$. Seja $V = \{(x, a, L) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \times \mathcal{L}(k, n-k) \mid (x, a + L(x)) \in B\}$. Defina $F: V \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$ por

$$F_{(a,L)}(x) = F(x, a, L) = \left(x, \frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \psi(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}(f \circ \psi(x)) \right),$$

onde $\psi(x) = a + L(x)$. Então $H(a, L) := \text{graf}(x \mapsto a + L(x))$ está em $G(\mathcal{F}, B)$ se, e somente se, $F_{(a,L)}$ corta transversalmente a seção nula $\Sigma = \mathbb{C}^k \times \{0\}$ (veja [Hi]). Vamos agora utilizar o seguinte lema de transversalidade:

Lema 1.4.3. *Seja $F: W \times P \rightarrow M$, de classe C^∞ , onde W , P e M são variedades. Dado $p \in P$, defina $F_p := F|_{W \times \{p\}}$. Seja $S \subset M$ uma sub-variedade. Suponha que F é transversal a S . Então o conjunto $X = \{p \in P \mid F_p \text{ é transversal a } S\}$ é de Baire. Em particular, X é denso em P .*

A prova do lema 1.4.3 pode ser encontrada em [Hi]. Pelo lema 1.4.3 é suficiente provar que F é transversal a Σ . Por outro lado, isto é consequência do fato de que $df(q) \neq 0$ para todo $q \in B$. Deixamos a prova como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.15). \square

Fixemos agora uma bola compacta $B_1 \subset B$. Utilizando que o conjunto de funções definidas numa variedade compacta (com a topologia

C^2 -uniforme), cujas singularidades são todas de Morse, é um aberto (veja [Hi]), prova-se que $G(\mathcal{F}, B_1)$ é aberto em $Gr(n, k)$. Decorre daí e do lema 1.4.2 que $G(\mathcal{F}, B_1)$ é aberto e denso em $Gr(n, k)$. Com isto podemos obter uma cobertura enumerável de $\mathbb{P}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ por compactos $(B_m)_{m \geq 1}$ tal que $G(\mathcal{F}, B_m)$ é aberto e denso em $Gr(n, k)$ para todo $m \geq 1$. Como $C = \bigcap_{m \geq 1} G(\mathcal{F}, B_m)$, obtemos que C é de Baire, o que prova a proposição. \square

Teorema 1.13. *O conjunto singular de uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n contém ao menos uma componente irredutível de codimensão dois.*

Prova. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n e suponhamos por absurdo que todas as componentes irredutíveis de $\text{sing}(\mathcal{F})$ tenham codimensão maior que dois. Seja $H \simeq \mathbb{P}^2$ um 2-plano em posição geral com \mathcal{F} . Como $\dim(\text{sing}(\mathcal{F})) + 2 < n$, a condição de transversalidade entre H e $\text{sing}(\mathcal{F})$ corresponde a $\text{sing}(\mathcal{F}) \cap H = \emptyset$. Seja \mathcal{G} a folheação de H obtida pela restrição de \mathcal{F} a H , ou seja, dado $p \in H$, se \mathcal{F} é representada pela 1-forma integrável ω numa vizinhança U de p então \mathcal{G} é representada em $H \cap U$ por $\omega|_{H \cap U}$. No caso, $p \in \text{sing}(\mathcal{G})$ se, e somente se, $\omega|_H(p) = 0$. Note que $\omega(p) \neq 0$, uma vez que $H \cap \text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Portanto $p \in \text{sing}(\mathcal{G})$ se, e somente se, \mathcal{F} é tangente a H em p . Por outro lado, as tangências de \mathcal{F} com H são do tipo Morse, ou seja, \mathcal{F} tem uma integral primeira holomorfa f numa vizinhança de p tal que $f|_H(x, y) = f(p) + x^2 + y^2$ em algum sistema de coordenadas holomorfo em $p \in H$. Neste sistema de coordenadas \mathcal{G} é representada pelo campo dual de df , $X = 2x\partial/\partial y - 2y\partial/\partial x$, cujos auto-valores são $\pm 2i$. Como conseqüência obtemos que $BB(\mathcal{G}, p) = 0$ (veja a observação 1.3.1). Como todas as singularidades de \mathcal{F} são do tipo Morse, obtemos $\sum_{p \in \text{sing}(\mathcal{G})} BB(\mathcal{G}, p) = 0$. Por outro lado, pelo teorema de Baum-Bott (corolário 1.3.1) temos $\sum_p BB(\mathcal{G}, p) = (gr(\mathcal{G}) + 2)^2 > 0$, o que é uma contradição. \square

1.5 Folheações com estruturas transversais.

1.5.1 Conceitos básicos.

Como vimos na observação 1.1.2, uma folheação regular \mathcal{F} de codimensão k numa variedade complexa M de dimensão $m > k$, pode ser definida por coleções $\{(U_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$, onde $\{U_j\}_{j \in J}$ é uma cobertura de M por abertos conexos, $\psi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^k$ é uma submersão, para todo $j \in J$, e $g_{ij}: \psi_j(U_{ij}) \rightarrow \psi_i(U_{ij})$ é um difeomorfismo satisfazendo $g_{ij} \circ \psi_j = \psi_i$, para todo par (i, j) tal que $U_{ij} \neq \emptyset$. Vamos supor que $U_{ij} := U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} := U_{ij} \cap U_k$ são conexos para quaisquer $i, j, k \in J$. Observamos que se $U_i \cap U_j \cap U_k := U_{ijk} \neq \emptyset$ então $g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki}$ é a aplicação identidade de $\psi_i(U_{ijk})$ (verifique).

Lembremos que uma ação de um grupo $(G, *)$ numa variedade S é uma aplicação $\Phi: G \times S \rightarrow S$ satisfazendo $\Phi_1 = id_S$ e $\Phi_{g*h} = \Phi_g \circ \Phi_h$, onde $\Phi_g(s) = \Phi(g, s)$ é um homeomorfismo de S , para todo $g \in G$. Estamos interessados no caso em que S é uma variedade complexa e G é um sub-grupo de Lie do conjunto $Aut(S)$, dos biholomorfismos de S . Neste caso, usaremos a notação $\Phi_g(p) = g(p)$.

Definição 1.5.1. Sejam M e S variedades conexas complexas, M de dimensão n , \mathcal{F} uma folheação regular de codimensão k em M , S de dimensão k e $G \subset Aut(S)$ um sub-grupo de Lie de $Aut(S)$. Dizemos que \mathcal{F} tem *estrutura transversal* modelada em G se existem uma cobertura $\{U_j\}_{j \in J}$ de M por abertos e coleções $\{\psi_j\}_{j \in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ tais que :

- (a). Para todo $j \in J$, $\psi_j: U_j \rightarrow \psi_j(U_j) \subset S$ é uma submersão.
- (b). Se $U_i \cap U_j := U_{ij} \neq \emptyset$ então $g_{ij}: \psi_i(U_{ij}) \rightarrow \psi_j(U_{ij})$ é a restrição de uma transformação $h_{ij} \in G$ a $\psi_i(U_{ij})$, tal que $h_{ij} \circ \psi_i = \psi_j$.
- (c). Para todo $j \in J$, as folhas $\mathcal{F}|_{U_j}$ são as variedades de nível $\psi_j^{-1}(q)$, $q \in \psi_j(U_j)$.

Observe que, se $U_{ijk} \neq \emptyset$ então

$$h_{ij} \circ h_{jk} \circ h_{ki} = id_S . \quad (1.25)$$

Dizemos então que a coleção $\{h_{jk}\}_{U_{jk} \neq \emptyset}$ é um *cociclo* em G . A definição 1.5.1 pode ser encontrada em [Go].

Suponha que \mathcal{F} possui duas estruturas transversais modeladas em G , dadas por coleções $\{U_j\}_{j \in J}$, $\{\psi_j\}_{j \in J}$, $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ e $\{V_i\}_{i \in I}$, $\{\phi_i\}_{i \in I}$, $\{h_{ij}\}_{V_{ij} \neq \emptyset}$, respectivamente. Após considerarmos um refinamento das duas coberturas, podemos supor que elas coincidem : $I = J$ e $U_j = V_j$, $\forall j$. Diremos que as estruturas são *equivalentes*, se para todo $j \in J$ existe $k_j \in G$ tal $\psi_j = k_j \circ \phi_j$. Como o leitor pode verificar, isto corresponde a dizer que os cociclos $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ e $\{h_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ são equivalentes, isto é, que $h_{ij} = k_i^{-1} \circ g_{ij} \circ k_j$ para todo par (i, j) tal que $U_{ij} \neq \emptyset$.

Seja \mathcal{F} uma folheação em M com estrutura transversal modelada em $G \subset \text{Aut}(S)$. Sejam $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal holomorfo de M e $\hat{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$.

Teorema 1.14. *Nas condições acima, $\hat{\mathcal{F}}$ tem estrutura transversal modelada em G . Além disto, existe uma submersão $\phi: \hat{M} \rightarrow S$ tal que as folhas de $\hat{\mathcal{F}}$ são as superfícies de nível de $\phi: \psi^{-1}(s)$, $s \in S$. Em particular, se M é simplesmente conexa, então $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ e existe uma submersão $\phi: M \rightarrow S$ tal que as folhas de \mathcal{F} são as superfícies de nível de ϕ .*

Prova. Fixemos coleções $\{U_j\}_{j \in J}$, $\{\psi_j\}_{j \in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ que definem \mathcal{F} , como na definição 1.5.1. Vamos supor que todo U_j é um aberto trivializador de π , isto é, $\pi^{-1}(U_j) = \cup_{r \in I} U_j^r$, onde $\pi|_{U_j^r}: U_j^r \rightarrow U_j$ é um biholomorfismo, para todo r , sendo $U_j^r \cap U_j^s = \emptyset$ se $r \neq s$. Definimos então as submersões $\psi_j^r := \psi_j \circ \pi|_{U_j^r}: U_j^r \rightarrow S$. Considerando o conjunto de índices $K = J \times I$ temos a cobertura $\{V_k := U_j^r\}_{k=(j,r) \in K}$ de \hat{M} , por abertos conexos, e a coleção de submersões $\{\phi_k := \psi_j^r\}_{k=(j,r) \in K}$. Vamos agora definir o cociclo $\{h_{k\ell}\}_{V_{k\ell} \neq \emptyset}$. Tomando de início os $U_{j'}$ s suficientemente pequenos, podemos supor que dados $i \neq j \in J$ tais que $U_{ij} \neq \emptyset$, então dado $r \in I$, existe um único $s \in I$ tal que $U_j^r \cap U_i^s \neq \emptyset$. Fazendo $k = (j, r)$ e $\ell = (i, s)$ vemos que $g_{ij} \circ \phi_k = \phi_\ell$, logo colocamos $h_{k\ell} := g_{ij}$. Desta forma, $\hat{\mathcal{F}}$ tem estrutura transversal modelada em G .

Vamos agora construir a submersão global $\phi: \hat{M} \rightarrow S$. Para isto observamos o seguinte : dados $k, \ell \in K$ tais que $V_{k\ell} \neq \emptyset$, temos $\phi_k = h_{k\ell} \circ \phi_\ell$. Como $h_{k\ell} \in \text{Aut}(S)$, ou seja, está globalmente definido em

S , a submersão $h_{k\ell} \circ \phi_\ell$ está definida em todo V_ℓ . Portanto, a relação pode ser interpretada como : $h_{k\ell} \circ \phi_\ell: V_\ell \rightarrow S$ é uma continuação analítica de $\phi_k: V_k \rightarrow S$ a $V_k \cup V_\ell$. Com isto podemos estender $\phi := \phi_k$ ao aberto $\cup_{V_{k\ell} \neq \emptyset} V_\ell$, colocando $\phi|_{V_\ell} = h_{k\ell} \circ \phi_\ell$. Dado $q \in V_\ell \cap V_m$, onde $V_{k\ell m} \neq \emptyset$, o valor $\phi(q)$ está bem definido uma vez que $h_{k\ell} \circ \phi_\ell = h_{km} \circ h_{m\ell} \circ \phi_\ell = h_{km} \circ \phi_m$. Isto implica que a submersão $\phi = \phi_k: V_k \rightarrow S$ tem continuação analítica ao longo de qualquer caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ tal que $\gamma(0) = p \in V_k$. Denotemos esta continuação analítica por ϕ_γ . Se $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ é outro caminho com os mesmos extremos de γ , homotópico a γ com extremos fixos, então $\phi_\gamma = \phi_{\gamma_1}$. Como \hat{M} é simplesmente conexa, dois caminhos quaisquer em \hat{M} com os mesmos extremos são homotópicos com extremos fixos. Logo a continuação analítica independe do caminho e portanto podemos entender a submersão ϕ a toda variedade \hat{M} . \square

O par $(\hat{\mathcal{F}}, \phi)$ será chamado de *desenvolvimento* de \mathcal{F} com respeito à estrutura transversal.

Observação 1.5.1. Duas estruturas transversais de \mathcal{F} modeladas no mesmo grupo $G \subset Aut(S)$, digamos T_1 e T_2 , dão origem a desenvolvimentos diferentes $(\hat{\mathcal{F}}, \phi_1)$ e $(\hat{\mathcal{F}}, \phi_2)$. No entanto, se estas estruturas são equivalentes, existe uma transformação $h \in Aut(S)$ tal que $\phi_2 = h \circ \phi_1$. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.16).

Utilizando o teorema 1.14, vamos definir em seguida a *monodromia* da estrutura transversal. Sabemos da teoria do recobrimento que existe um homomorfismo injetivo natural de grupos $H: \Pi_1(M, p) \rightarrow Aut(\hat{M})$, onde $\Pi_1(M, p)$ denota o grupo fundamental de M com base em $p \in M$ (veja [EL]). A imagem $H(\Pi_1(M, p)) := Aut(\pi)$ é o grupo de automorfismos do recobrimento $\pi: \hat{M} \rightarrow M: Aut(\pi) = \{f \in Aut(\hat{M}) \mid f \circ \pi = \pi\}$. Seja $(\hat{\mathcal{F}}, \phi)$ o desenvolvimento de \mathcal{F} com respeito a uma estrutura transversal modelada em $G \subset S$. Dado $\gamma \in \Pi_1(M, p)$, como $H(\gamma) \in Aut(\hat{M})$, a aplicação $\phi \circ H(\gamma): \hat{M} \rightarrow S$ é uma submersão que também define a folheação $\hat{\mathcal{F}}$. O fato seguinte, que é deixado como exercício para o leitor, decorre da construção de ϕ e de $H(\gamma)$: existe um único $h(\gamma) \in G$ tal que $\phi \circ H(\gamma) = h(\gamma) \circ \phi$ (veja o Ex. 1.17). Isto define uma aplicação $\gamma \in \Pi_1(M, p) \mapsto h(\gamma) \in G$.

Note que

$$h(\gamma_1 * \gamma_2) \circ \phi = \phi \circ H(\gamma_1 * \gamma_2) = \phi \circ H(\gamma_1) \circ H(\gamma_2) = h(\gamma_1) \circ h(\gamma_2) \circ \phi \implies$$

$h(\gamma_1 * \gamma_2) = h(\gamma_1) \circ h(\gamma_2)$, já que ϕ é submersão. Logo $h: \Pi_1(M, p) \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos.

Corolário 1.5.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação em M com estrutura transversal modelada em $G \subset \text{Aut}(S)$. Seja $(\hat{\mathcal{F}}, \phi)$ o desenvolvimento de \mathcal{F} no recobrimento universal $\pi: M \rightarrow \hat{M}$, com respeito à estrutura. Então existe uma submersão $\psi: M \rightarrow S$ que define \mathcal{F} e tal que $\psi \circ \pi = \phi$ se, e somente se, a monodromia $h: \Pi_1(M, p) \rightarrow G$ da estrutura é trivial, isto é, $h(\gamma) = \text{id}_S$ para todo $\gamma \in \Pi_1(M, p)$.*

Prova. Decorre do seguinte fato bem conhecido : seja $f: \hat{M} \rightarrow X$ uma aplicação contínua, onde X é uma variedade. Então existe uma aplicação contínua $g: M \rightarrow X$ tal que $g \circ \pi = f$ se, e somente se, $\phi \circ H(\gamma) = g$ para todo $\gamma \in \Pi_1(M, p)$, onde $H: \Pi_1(M, p) \rightarrow \text{Aut}(\pi)$ é o isomorfismo natural (veja [EL]). Deixamos os detalhes para o leitor. \square

1.5.2 Folheações com estrutura transversal projetiva.

No caso de uma folheação de codimensão um, com estrutura transversal, S é uma superfície de Riemann, logo se S é simplesmente conexa, temos três possibilidades :

- (I). $S = \mathbb{P}^1$. Neste caso, tomando $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, temos $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = \left\{ \frac{a.z+b}{c.z+d} \mid a.d - b.c = 1 \right\}$.
- (II). $S = \mathbb{C}$. Como sabemos $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{a.z + b \mid a \neq 0\}$.
- (III). $S = H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Temos então $\text{Aut}(H) = \left\{ \frac{a.z+b}{c.z+d} \mid a.d - b.c = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Em todos os casos, $\text{Aut}(S)$ pode ser considerado como sub-grupo de $PSL(2, \mathbb{C}) := \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Diremos então que \mathcal{F} tem *estrutura transversal projetiva*. No caso em que a folheação \mathcal{F} tem estrutura transversal modelada em $\text{Aut}(\mathbb{C})$ diremos que ela tem *estrura*

transversal afim. Diremos que \mathcal{F} tem uma estrutura transversal por translações, se o grupo G é o grupo de translações de $\mathbb{C} : z \mapsto z + a$. Vejamos um exemplo.

Proposição 1.5.1. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação regular de codimensão um em M . Então \mathcal{F} tem uma estrutura transversal por translações se, e somente se, ela pode ser definida por uma 1-forma fechada holomorfa.*

Prova. Suponha que existe uma 1-forma holomorfa fechada $\omega \in \Omega^1(M)$ que define \mathcal{F} . Como \mathcal{F} é regular, temos $\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. Seja $\{B_j\}_{j \in J}$ uma cobertura de M por abertos biholomorfos a uma bola de \mathbb{C}^n , tais que $B_i \cap B_j := B_{ij}$ é conexo para quaisquer $i, j \in J$. Pelo lema de Poincaré, existe $f_j \in \mathcal{O}(B_j)$ tal que $\omega|_{B_j} = df_j$, para todo $j \in J$. Note que $f_j : B_j \rightarrow \mathbb{C}$ é uma submersão. Se $B_{ij} \neq \emptyset$ então

$$(df_j - df_i)|_{B_{ij}} \equiv 0 \implies f_i = f_j + b_{ij}, \quad b_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Colocando $g_{ij}(z) = z + b_{ij}$ temos $f_i = g_{ij} \circ f_j$, logo \mathcal{F} tem uma estrutura transversal por translações.

Reciprocamente, se \mathcal{F} tem uma estrutura transversal por translações, ela é dada por uma cobertura $\{U_j\}_{j \in J}$, uma coleção de submersões $\{f_j\}_{j \in J}$ e um cociclo $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ de translações. Se $g_{ij}(z) = z + b_{ij}$ então $f_i = f_j + b_{ij}$ em $B_{ij} \neq \emptyset$, ou seja $df_i = df_j$ em B_{ij} . Logo podemos definir uma 1-forma holomorfa fechada ω em M por $\omega|_{B_j} = df_j$, para todo $j \in J$. A forma ω define \mathcal{F} . \square

As folheações lineares de codimensão um dos toros complexos, fornecem exemplos como na proposição 1.5.1 (veja exemplo 1.1.2). Outro exemplo são as folheações logarítmicas em \mathbb{P}^n (veja a definição 1.2.2), mas neste caso a estrutura só é definida num aberto próprio de \mathbb{P}^n .

Observação 1.5.2. Se \mathcal{F} for simultaneamente definida por duas formas fechadas não múltiplas por uma constante, digamos ω_1 e ω_2 , então ela tem uma integral primeira. Com efeito, neste caso temos $\omega_2 = f \cdot \omega_1$, onde $f \in \mathcal{O}(M)$ é não constante. Por outro lado, $0 = d\omega_2 = df \wedge \omega_1$, logo df também define \mathcal{F} e f é uma integral primeira de \mathcal{F} .

Em particular, se \mathcal{F} possui duas estruturas transversais por translações distintas então \mathcal{F} tem uma integral primeira holomorfa.

Em seguida veremos um critério para que uma folheação tenha uma estrutura transversal afim.

Proposição 1.5.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M . Suponha que existe uma 1-forma meromorfa ω em M que define \mathcal{F} em $U := M \setminus |\omega|_\infty \cup |\omega|_0$. Então $\mathcal{F}|_U$ tem uma estrutura transversal afim se, e somente se, existe uma 1-forma fechada $\eta \in \Omega^1(U)$ tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$ em U .*

Prova. Suponhamos que \mathcal{F} tem uma estrutura transversal afim em U . Seja $(\{B_j\}_j, \{f_j\}_j, \{g_{jk}\}_{B_{jk} \neq \emptyset})$, que define a estrutura afim de $\mathcal{F}|_U$, onde $g_{jk}(z) = a_{jk} \cdot z + b_{jk} \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. No caso, $f_j: B_j \rightarrow \mathbb{C}$ é uma submersão, df_j define \mathcal{F} em B_j e $f_i = a_{ij} \cdot f_j + b_{ij}$ em $B_{ij} \neq \emptyset$. Como $\omega|_{B_j}$ também define $\mathcal{F}|_{B_j}$, temos $\omega|_{B_j} = g_j \cdot df_j$, onde $g_j \in \mathcal{O}^*(B_j)$. Se $B_{ij} \neq \emptyset$, obtemos

$$\omega|_{B_{ij}} = g_j \cdot df_j = g_i \cdot df_i = g_i \cdot a_{ij} \cdot df_j \implies \frac{g_j}{g_i}|_{B_{ij}} = a_{ij} \in \mathbb{C}^* \implies$$

$\frac{dg_i}{g_i} = \frac{dg_j}{g_j}$ em B_{ij} . Logo existe $\eta \in \Omega^1(U)$ tal que $\eta|_{B_j} = \frac{dg_j}{g_j}$ para todo j . A forma η é fechada e satisfaz $d\omega = \eta \wedge \omega$, pois em B_j temos $d\omega = dg_j \wedge df_j = \frac{dg_j}{g_j} \wedge \omega$.

Reciprocamente, suponhamos que $d\omega = \eta \wedge \omega$, onde $d\eta = 0$. Consideremos uma cobertura $\{B_j\}_j$ de U por abertos convexos tal que B_{jk} é conexo para quaisquer j, k . Pelo lema de Poincaré $\eta|_{B_j} = dh_j$, onde $h_j \in \mathcal{O}(B_j)$. Defina $g_j = \exp(h_j) \in \mathcal{O}^*(B_j)$. Vemos então que $\eta = \frac{dg_j}{g_j}$ em B_j . Logo, se $B_{ij} \neq \emptyset$ então $\frac{dg_j}{g_j} - \frac{dg_i}{g_i} = 0$, ou seja, existe $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$ tal que $\frac{g_j}{g_i}|_{B_{ij}} = a_{ij}$. Por outro lado,

$$d\left(\frac{\omega}{g_j}\right) = \frac{1}{g_j}(d\omega - \frac{dg_j}{g_j} \wedge \omega) = \frac{1}{g_j}(d\omega - \eta \wedge \omega) = 0,$$

logo pelo lema de Poincaré existe $f_j \in \mathcal{O}(B_j)$ tal que $\frac{\omega}{g_j} = df_j$. Como df_j não se anula em B_j , a aplicação $f_j: B_j \rightarrow \mathbb{C}$ é uma submersão. Finalmente, como $df_i = a_{ij} \cdot df_j$ em $B_{ij} \neq \emptyset$, existe $b_{ij} \in \mathbb{C}$ tal que $f_i = a_{ij} \cdot f_j + b_{ij}$ em B_{ij} . \square

Corolário 1.5.2. *Nas condições da proposição 1.5.2, se \mathcal{F} tem duas estruturas transversais afins não equivalentes no aberto $U = M \setminus |\omega|_\infty \cup |\omega|_0$ de M então \mathcal{F} é definida por uma forma fechada $\eta \neq 0$ em $U \setminus |\eta|_0$, sendo o conjunto analítico $|\eta|_0$ uma união de folhas de $\mathcal{F}|_U$.*

Prova. Nestas condições podemos escrever $d\omega = \eta_1 \wedge \omega = \eta_2 \wedge \omega$, onde $\eta_1 \neq \eta_2$ e $d\eta_1 = d\eta_2 = 0$. Logo, se $\eta := \eta_2 - \eta_1 \neq 0$ então $d\eta = 0$ e $\eta \wedge \omega = 0$. Daí concluímos que $\eta = f \cdot \omega$, onde $f \in \mathcal{O}(U)$ é não constante. Portanto, \mathcal{F} pode ser definida em $U \setminus |\eta|_0$ pela forma fechada η . Por outro lado, temos $0 = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$, o que implica que $(f = 0)$ é invariante por $\mathcal{F}|_U$ (veja a proposição 1.2.2). \square

Observação 1.5.3. Nas condições da proposição 1.5.2, se \mathcal{F} tem uma estrutura transversal afim em $M \setminus |\omega|_\infty \cup |\omega|_0$, então a estrutura pode ser estendida a todas as componentes irredutíveis de $|\omega|_\infty \setminus |\omega|_0$ não invariantes por \mathcal{F} . Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 1.18).

Definição 1.5.2. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão numa variedade algébrica M . Dizemos que \mathcal{F} possui uma estrutura transversal afim com *polos*, se :

- (a). \mathcal{F} pode ser definida por uma 1-forma meromorfa ω em $M \setminus |\omega|_\infty \cup |\omega|_0$.
- (b). $d\omega = \eta \wedge \omega$, onde η é fechada e meromorfa em M .

Neste caso, a estrutura afim definida por η se estende a todas as componentes de $|\omega|_\infty$ não invariantes por \mathcal{F} .

Exemplo 1.5.1. Seja \mathcal{F} a folheação de \mathbb{P}^n definida em coordenadas homogêneas pela forma

$$\Omega = f_1 \dots f_k \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{df_j}{f_j},$$

onde os f_j 's são polinômios homogêneos irredutíveis em \mathbb{C}^{n+1} , dois a dois relativamente primos, $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ e $\sum_j \lambda_j \cdot \text{gr}(f_j) = 0$. Note que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$, onde $\eta = \sum_j \frac{df_j}{f_j}$. Isto implica que \mathcal{F} tem uma estrutura transversal afim com polos em $X = \Pi(f_1 \dots f_k = 0)$.

Em seguida veremos um critério para que uma folheação de codimensão um tenha uma estrutura transversal projetiva. Vamos supor que a folheação \mathcal{F} seja definida por uma 1-forma meromorfa ω em $M \setminus |\omega|_\infty \cup |\omega|_0$, como na proposição 1.5.2. Suporemos também que existe uma 1-forma meromorfa ω_1 em M tal que $d\omega = \omega_1 \wedge \omega$. Observamos que esta última condição é sempre verdadeira se M é uma variedade algébrica. Seja $U := M \setminus (|\omega|_\infty \cup |\omega|_0 \cup |\omega_1|_\infty)$.

Teorema 1.15. *Nas condições acima, \mathcal{F} possui uma estrutura transversal projetiva em U se, e somente se, existe uma 1-forma $\omega_2 \in \Omega^1(U)$ tal que :*

$$\begin{cases} d\omega = \omega_1 \wedge \omega \\ d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 \end{cases} \quad (1.26)$$

Não faremos a prova do teorema acima, já que ela é um tanto extensa. Ela pode ser encontrada nas referências [Sc] ou [Sc-LN].

Definição 1.5.3. Um terno de 1-formas $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ satisfazendo às relações (1.26) será chamado de um *terno projetivo* associado à folheação \mathcal{F} . Nas condições do teorema 1.15, diremos que a estrutura transversal tem *polos* em M , se a 1-forma ω_2 é a restrição a U de uma forma meromorfa em M .

Observação 1.5.4. Seja $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ um terno de 1-formas meromorfas em M , sendo $\omega \neq 0$. Gostaríamos de observar aqui que elas satisfazem às relações (1.26) se, e somente se a 1-forma Ω , meromorfa em $\mathbb{C} \times M$, definida por

$$\Omega = dz - \omega - z.\omega_1 - \frac{z^2}{2}\omega_2 \quad (1.27)$$

é integrável (veja o Ex. 1.19). Isto significa que existe uma folheação de codimensão um \mathcal{G} em $\mathbb{C} \times M$ tal que $(z = 0) \subset \mathbb{C} \times M$ não é invariante por \mathcal{G} e $\mathcal{G}|_{(z=0)} = \mathcal{F}$, onde \mathcal{F} é a folheação definida por ω .

Observação 1.5.5. Nas condições do teorema 1.15, se $f \in \mathcal{O}^*(U)$ então a 1-forma $\eta := f.\omega$ também representa \mathcal{F} em U . Neste caso, $(f.\omega, \omega_1 + df/f, f^{-1}.\omega_2)$ é um terno projetivo. Com efeito, seja $\Phi: \mathbb{C} \times$

$U \rightarrow \mathbb{C} \times U$ dada por $\Phi(v, x) = (f(x)^{-1}.v, x)$. Seja Ω como em (1.27). Um cálculo direto mostra que

$$\Omega' := f.\Phi^*(\Omega) = dv - f.\omega - v\left(\omega_1 + \frac{df}{f}\right) - \frac{v^2}{2} \frac{\omega_2}{f},$$

o que prova que $(f.\omega, \omega_1 + df/f, f^{-1}\omega_2)$ é um terno projetivo, já que Ω' é integrável.

Em geral, é possível provar que se f e g são meromorfas em M , $\eta_1 := \omega + df/f + 2g\omega$ e $\eta_2 := f^{-1}(\omega_2 + 2dg + 2g\omega_1 + 2g^2\omega)$ então (ω, η_1, η_2) é um terno projetivo que define a mesma estrutura transversal de \mathcal{F} , fora do conjunto de polos de f e de g (veja [Sc], [Sc-LN] e o Ex. 1.19).

Exemplo 1.5.2. Sejam S uma superfície de Riemann, $\alpha \neq 0$ uma 1-forma meromorfa em S e a_0, a_1, a_2 funções meromorfas em S . Seja ω a 1-forma meromorfa em $\mathbb{C} \times S$ definida por

$$\omega = dz - (a_0 + z.a_1 + z^2.a_2)\alpha \quad (1.28)$$

A forma ω define uma folheação em $\mathbb{C} \times S$ que possui uma estrutura transversal projetiva no aberto $U := \mathbb{C} \times A$, onde $A = |a_0.\alpha|_\infty \cup |a_1.\alpha|_\infty \cup |a_2.\alpha|_\infty$. Com efeito, fazendo $\omega_1 := (a_1 + 2za_2)\alpha$ e $\omega_2 := 2a_2\alpha$ temos $d\omega = \omega \wedge \omega_2$, $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = 0 = \omega_2 \wedge \omega_1$. Estamos utilizando aqui que toda 1-forma meromorfa em S é fechada. Note que a folheação \mathcal{F} se estende a $\mathbb{P}^1 \times S$, pois se fizermos a mudança de variáveis $\phi(v, x) := (1/v, x) = (z, x)$ em ω , obtemos $-v^2.\phi^*(\omega) = dv + (a_0.v^2 + a_1.v + a_2)\alpha$. Este tipo de folheação é chamado de *folheação de Riccati* e corresponde à suspensão de um grupo de transformações projetivas por uma ação $\phi: \Pi_1(A) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (veja [Sc-LN], para a definição de suspensão, e [LN] para o caso em que $S = \mathbb{P}^1$).

1.6 Apêndice 1.

O objetivo deste Apêndice é provar o teorema de divisão a parâmetros de De Rham nos casos especiais que nos interessam. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ abertos de Stein. Usaremos a notação $\Omega_V^\ell(U)$ para designar o conjunto das ℓ -formas diferenciais α em $U \times V$ do tipo $\alpha = \sum_I a_I(z, t) dz_I$, onde $I = (i_1 < \dots < i_\ell)$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_\ell}$ e $a_I \in$

$\mathcal{O}(U \times V)$. O aberto V será considerado como o espaço de parâmetros. O fato fundamental que será utilizado sobre as variedades de Stein é o seguinte :

Teorema 1.16. *Seja M uma variedade de Stein. Se $X \subset M$ é um sub-conjunto analítico tal que $\text{cod}_M(X) \geq 3$ então $H^1(M \setminus X, \mathcal{O}) = 0$.*

Isto é equivalente a dizer que o primeiro problema de Cousin tem solução em $M \setminus X$. Dada uma cobertura $\mathcal{U} := \{U_j\}_{j \in J}$ de $M \setminus X$ por abertos, dizemos que a coleção $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ é um cociclo aditivo em \mathcal{U} se $g_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij})$ e dado $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então $(g_{ij} + g_{jk} + g_{ki})|_{U_{ijk}} = 0$. O primeiro problema de Cousin tem solução em $M \setminus X$ se para todo cociclo aditivo $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ em \mathcal{U} existe uma coleção $\{g_j\}_{j \in J}$ tal que $g_j \in \mathcal{O}(U_j)$ e $g_{ij} = (g_j - g_i)|_{U_{ij}}$, se $U_{ij} \neq \emptyset$. A demonstração do teorema 1.16 pode ser encontrada em [G-R].

Outro resultado que utilizaremos é a seguinte consequência do teorema de Hartogs-Levi (veja [Si]) :

Teorema 1.17. *Sejam M uma variedade complexa e $X \subset M$ um sub-conjunto de M com $\text{cod}_M(X) \geq 2$. Então toda função holomorfa (resp. meromorfa) em $M \setminus X$ se estende a uma (única) função holomorfa (resp. meromorfa) em M .*

Definição 1.6.1. Dizemos que uma 1-forma $\omega \in \Omega_V^1(U)$ satisfaz à p.d.p. ℓ (propriedade da divisão a parâmetros por ℓ -formas), se para toda ℓ -forma $\eta \in \Omega_V^\ell(U)$ tal que $\omega \wedge \eta = 0$ então existe $\alpha \in \Omega_V^{\ell-1}(U)$ tal que $\eta = \omega \wedge \alpha$.

O teorema de De Rham a parâmetros, em geral, pode ser enunciado da seguinte maneira :

Teorema 1.18. *Seja $\omega \in \Omega_V^1(U)$ tal que $\text{cod}_{U \times V}(\text{sing}(\omega)) \geq k + 1$. Então ω satisfaz à p.d.p. ℓ , para $1 \leq \ell \leq k$.*

Os casos que nos interessarão são $k = 1$ e $k = 2$. No caso $k = 1$ não é necessário supor que U seja de Stein, como veremos mais adiante.

A prova será baseada num lema, que enunciamos a seguir.

Lema 1.6.1. *Sejam $\omega \in \Omega_V(U)$ e $(p, q) \in U \times V$ tal que $\omega(p, q) \neq 0$. Seja $\eta \in \Omega_V^\ell(U)$ tal que $\omega \wedge \eta = 0$, $1 \leq \ell \leq n - 1$. Então existem vizinhanças $A \subset U$ de p , $B \subset V$ de q e $\alpha \in \Omega_B^{\ell-1}(A)$ tal que $e \eta = \omega \wedge \alpha$ em $A \times B$.*

Prova. Escrevamos $\omega = \sum_{j=1}^n a_j(z, t) dz_j$ e $\eta = \sum_I b_I(z, t) dz_I$. Como $\omega(p, q) \neq 0$ existe $r \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_r(p, q) \neq 0$. Seja $A \times B \subset U \times V$ vizinhança de (p, q) tal que $a_r(z, t) \neq 0$ para todo $(z, t) \in A \times B$. Seja $Y := a_r^{-1} \partial / \partial z_r$. Então $i_Y(\omega) = 1$ e

$$0 = i_Y(\omega \wedge \eta) = \eta - \omega \wedge i_Y(\eta) \implies \eta = \omega \wedge \alpha, \quad \alpha = i_Y(\eta).$$

Por outro lado, $i_Y(\eta) = \sum_I a_r^{-1} \cdot b_I(z, t) i_{\partial / \partial z_r}(dz_I) \in \Omega_B^{\ell-1}(A)$. \square

Prova no caso $k = 1$. Suponhamos que $\text{cod}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$ e que $\eta \in \Omega_V^1(U)$ é tal que $\omega \wedge \eta = 0$. Fixemos $(p, q) \in U \times V \setminus \text{sing}(\omega)$. Pelo lema 1.6.1, existe uma vizinhança $w := A \times B \subset U \times V \setminus \text{sing}(\omega)$ e $\alpha_w \in \Omega_B^0(A) := \mathcal{O}(W)$ tais que $\eta = \alpha_w \cdot \omega$. Se (w_1, α_{w_1}) e (w_2, α_{w_2}) são como acima e tais que $w_1 \cap w_2 \neq \emptyset$ e $\eta = \alpha_{w_1} \cdot \omega = \alpha_{w_2} \cdot \omega$ em $w_1 \cap w_2$ então $\alpha_{w_1} \equiv \alpha_{w_2}$ em $w_1 \cap w_2$. Isto implica que a função α_w se estende a uma função $\alpha \in \mathcal{O}(U \times V \setminus \text{sing}(\omega))$. Como $\text{cod}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$, a função α se estende a uma função holomorfa em $U \times V$, pelo teorema de Hartogs. \square

Prova no caso $k = 2$. Suponhamos que $\text{cod}(\text{sing}(\omega)) \geq 3$ e que $\eta \in \Omega_V^1(U)$ é tal que $\omega \wedge \eta = 0$. Utilizando o lema 1.6.1 podemos obter uma cobertura $\{W_j\}_{j \in J}$ de $U \times V \setminus \text{sing}(\omega)$ por abertos e uma coleção $\{\alpha_j\}_{j \in J}$, com as seguintes propriedades :

- (i). Para todo $j \in J$, $W_j = A_j \times B_j$ onde $A_j \subset U$ e $B_j \subset V$ são abertos.
- (ii). $\alpha_j \in \Omega_{B_j}^1(A_j)$ e $\eta = \omega \wedge \alpha_j$, para todo $j \in J$.

Se $W_{ij} \neq \emptyset$, obtemos que $\eta = \omega \wedge \alpha_j = \omega \wedge \alpha_i$ em W_{ij} , ou seja, $\omega \wedge (\alpha_j - \alpha_i) = 0$. Pelo caso $k = 1$, temos $\alpha_j - \alpha_i = g_{ij} \cdot \omega$, onde $g_{ij} \in \mathcal{O}(W_{ij})$, sempre que $W_{ij} \neq \emptyset$. A coleção $\{g_{ij}\}_{W_{ij} \neq \emptyset}$ é um cociclo aditivo em $\mathcal{U} = \{W_j\}_{j \in J}$. Logo, pelo teorema 1.16 existe uma coleção $\{g_j\}_{j \in J}$ tal que $g_j \in \mathcal{O}(W_j)$ e $g_{ij} = g_j - g_i$ em $W_{ij} \neq \emptyset$. Segue daí que se $W_{ij} \neq \emptyset$ então

$$\alpha_j - \alpha_i = g_j \cdot \omega - g_i \cdot \omega \implies \alpha_j - g_j \cdot \omega = \alpha_i - g_i \cdot \omega \implies$$

existe $\alpha \in \Omega^1(U \times V \setminus \text{sing}(\omega))$ tal que $\alpha|_{W_j} = \alpha_j - g_j \cdot \omega$ para todo $j \in J$. Note que $\eta = \omega \wedge \alpha$, já que $\eta|_{W_j} = \omega \wedge \alpha_j = \omega \wedge (\alpha_j - g_j \cdot \omega)$. A forma α se estende a uma 1-forma β em $\Omega^1(U \times V)$, pelo teorema 1.17,

já que as suas componentes se estendem. Por outro lado, $\beta \in \Omega_V^1(U)$, como o leitor pode verificar utilizando que para todo $j \in J$ temos $\beta|_{W_j} \in \Omega_{B_j}^1(A_j)$. \square

O teorema da divisão possui uma "versão dual", em termos de campos de vetores. Esta versão já foi utilizada na prova do teorema 1.12 da seção 1.4.2. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ abertos de Stein. Designaremos por $\mathcal{X}_V(U)$ o conjunto dos campos holomorfos X em $U \times V$ da forma $X = \sum_{j=1}^n a_j(z, t)\partial/\partial z_j$. Diremos que $X \in \mathcal{X}_V(U)$ tem a *p.d.p.l* (propriedade da divisão a parâmetros por ℓ -formas), se para toda ℓ -forma $\eta \in \Omega_V^1(U)$ tal que $i_X(\eta) = 0$ então existe $\alpha \in \Omega_V^{\ell+1}(U)$ tal que $\eta = i_X(\alpha)$.

Corolário 1.6.1. *Seja $X \in \mathcal{X}_V(U)$ tal que $\text{cod}(\text{sing}(X)) \geq k + 1$. Então X tem a *p.d.p.* por ℓ -formas, para $n - k \leq \ell \leq n - 1$. Em particular, se $n = 3$ e $k = 2$ então X tem a *p.d.p.l* para $\ell = 1, 2$.*

Prova. Para isto utilizamos o operador estrela de Hodge :

$*$: $\Omega_V^\ell(U) \rightarrow \Omega_V^{n-\ell}(U)$. Este é o único isomorfismo linear que satisfaz à seguinte propriedade : dado $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n)$, seja $J = (1 \leq j_1 < \dots < j_{n-\ell} \leq n)$ tal que $\sigma := (i_1, \dots, i_\ell, j_1, \dots, j_{n-\ell})$ é uma permutação de $(1, \dots, n)$. Defina $*(a.dz_I) = \text{sn}(\sigma).a.dz_J$, onde $a \in \mathcal{O}(U \times V)$ e $\text{sn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ . Dado o campo $X = \sum_{j=1}^n a_j \partial/\partial z_j \in \mathcal{X}_V(U)$, defina $\omega \in \Omega_V^1(U)$ por $\omega := \sum_{j=1}^n a_j dz_j$. Os seguintes fatos podem ser verificados diretamente pelo leitor :

$$(i). \quad *(*\eta) = (-1)^{\ell(n-\ell)}. \eta, \text{ para toda } \eta \in \Omega_V^\ell(U).$$

$$(ii). \quad i_X \eta = (-1)^{n-\ell} * (\omega \wedge *\eta) \text{ para toda } \eta \in \Omega_V^\ell(U).$$

A verificação de (ii) pode ser feita provando que $i_{\partial/\partial z_r}(dz_I) = (-1)^{n-\ell}. *(dz_r \wedge *(dz_I))$, se $I = (i_1 < \dots < i_\ell)$. Esta relação implica que X satisfaz à *p.d.p.l* se, e somente se, ω satisfaz à *p.d.p.*($n-\ell$). \square

1.7 Exercícios

Ex. 1.1. Sejam \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n com $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Prove que :

- (a). Se Ω e Θ são 1-formas que representam \mathcal{F} em coordenadas homogêneas então $\Omega = \lambda.\Theta$, onde $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

- (b). Se $\Theta \in \Omega^1(\mathbb{C}^{n+1})$ satisfaz $\Theta \wedge \Omega = 0$ então $\Theta = F.\Omega$, onde $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Ex. 1.2. Prove a última afirmação da prova do teorema 1.2 : $\Omega = F.\Omega_k$, onde F é holomorfa numa vizinhança da origem $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $F(0) \neq 0$.

Sugestão. Prove que \mathcal{G} é invariante por homotetias de \mathbb{C}^{n+1} : se $\phi_t(z) = t.z$, onde $t \in \mathbb{C}^*$, então $\phi_t^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$. Deduza daí que $\phi_t^*(\Omega) = G(z, t).\Omega$, onde G é holomorfa numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^{n+2}$.

Ex. 1.3. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n .

- (a). Prove a proposição 1.2.1 : se ℓ_1 e ℓ_2 são duas retas não invariantes por \mathcal{F} então $Tang(\mathcal{F}, \ell_1) = Tang(\mathcal{F}, \ell_2)$.
- (b). Prove a observação 1.2.3 : se $grau(\mathcal{F}) = k$ e \mathcal{F} é representada em coordenadas homogêneas por Ω então os coeficientes de Ω são polinômios homogêneos de grau $k + 1$.

Ex. 1.4. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n . Prove que \mathcal{F} pode ser definida por formas fechadas de duas maneiras distintas se, e somente se, \mathcal{F} tem uma integral primeira meromorfa.

Ex. 1.5. Seja η uma 1-forma meromorfa em \mathbb{C}^{n+1} , cujos coeficientes são funções racionais. Prove que existe uma 1-forma meromorfa ω em \mathbb{P}^n tal que $\eta = \Pi^*(\omega)$ se, e somente se, $i_R(\eta) = 0$ e $i_R(d\eta) = 0$.

Ex. 1.6. Verifique a afirmação da observação 1.2.6.

Ex. 1.7. Seja $\phi: \mathbb{C} \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ uma ação holomorfa de \mathbb{C} .

- (a). Prove que as órbitas não constantes de ϕ são biholomorfas a \mathbb{C} ou a \mathbb{C}^* .
- (b). Prove que ϕ possui ao menos uma órbita constante. Dê exemplo de uma ação que possui apenas uma órbita constante.
- (c). Dê exemplo de uma ação ϕ de \mathbb{C} em \mathbb{P}^n que possua todas as órbitas não constantes biholomorfas a \mathbb{C}^* .

Ex. 1.8. Prove que uma folheação \mathcal{F} em $\mathcal{X}(n, k)$, com singularidades isoladas, possui $N(n, k) = k^n + k^{n-1} + \dots + k + 1$ singularidades

contadas com multiplicidade. Em particular, se $\mathcal{F} \in ND(n, k)$ então \mathcal{F} possui exatamente $N(n, k)$ singularidades.

Sugestão. Considere uma carta afim $(E \simeq \mathbb{C}^n, (z_1, \dots, z_n))$ tal que $\text{sing}(\mathcal{F}) \subset E$. Seja X um campo polinomial, como na proposição 1.2.6, que representa \mathcal{F} em E . Aplique o teorema de Bézout para calcular o número de soluções do sistema $X = 0$, descontando as soluções no hiperplano infinito, que não são singularidades de \mathcal{F} .

Ex. 1.9. Seja \mathcal{F} a folheação em $Q := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|, |y| < 1\}$ definida pelo campo $X = (5 + x.y).(x \partial/\partial x - y \partial/\partial y)$. Prove que o campo X não é linearizável em $0 \in Q$, embora \mathcal{F} seja linearizável.

Ex. 1.10. Seja $\Theta = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \neq 0$ uma 2-forma em \mathbb{C}^n , onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Coloque $\Theta^j = \Theta \wedge \dots \wedge \Theta$ (j -vezes). Seja $A = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ a matriz anti-simétrica definida por: $b_{ij} = a_{ij}$, se $i < j$, $b_{ij} = -a_{ji}$, se $i > j$, $b_{jj} = 0$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $\Theta^{m+1} = 0$ e $\Theta^m \neq 0$.
- O posto de A é $2m$.
- Existe um isomorfismo linear $T \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $T^*(\Theta) = dy_1 \wedge dy_2 + \dots + dy_{2m-1} \wedge dy_{2m}$.
- O sub-espço $E = \{v \in \mathbb{C}^n \mid i_v \Theta = 0\}$ tem codimensão $2m$.

Ex. 1.11. Sejam f_1, \dots, f_m polinômios em \mathbb{C}^n , irredutíveis e primos entre si dois a dois, sendo $m \geq 3$. Seja \mathcal{F} a folheação em \mathbb{C}^n , $n \geq 3$, definida pela 1-forma $\omega = f_1 \dots f_m \cdot \eta$, onde

$$\eta = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{df_j}{f_j},$$

sendo $\lambda_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, m$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i < j$. Seja \mathcal{F} a folheação definida por ω . Sejam $Z = \cup_{i < j} (f_i = f_j = 0)$ e $W = \cup_{i < j < k} (f_i = f_j = f_k = 0)$. Prove que:

- $K(\mathcal{F}) \subset Z \setminus W$.
- Se $p \in K(\mathcal{F}) \cap (f_i = f_j = 0)$ para algum $i < j$ então $df_i(p) \wedge df_j(p) \neq 0$, ou seja os conjuntos analíticos $(f_i = 0)$ e $(f_j = 0)$

são lisos em p e transversais em p . Prove que, neste caso, o tipo transversal de \mathcal{F} em p é o mesmo da folheação linear definida por $\lambda_i w dz - \lambda_j z dw$.

Ex. 1.12. Prove o corolário 1.4.2.

Ex. 1.13. Seja Ω uma 1-forma em \mathbb{C}^3 que representa em coordenadas homogêneas uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 com $gr(\mathcal{F}) \geq 1$. Prove que $0 \in \mathbb{C}^3$ é singularidade isolada de $d\Omega$ se, e somente se, todas as singularidades de \mathcal{F} são não degeneradas e para todo $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ temos $[\text{esp}(\mathcal{F}, p)] = \{\lambda_1 : \lambda_2\}$ com $\lambda_2/\lambda_1 \neq -1$.

Ex. 1.14. Prove que o conjunto C definido na prova da proposição 1.4.3 é de Baire.

Sugestão. Utilize o lema 1.4.3.

Ex. 1.15. Sejam B uma bola de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ e $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ uma submersão holomorfa. Denote por $Gr(n, k)$ o conjunto de k -planos de \mathbb{C}^n , $1 \leq k < n$. Seja $\psi: \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \times \mathcal{L}(k, n-k) \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $\psi(x, a, L) = (x, a + L(x))$. Seja $V = \psi^{-1}(B)$ e defina $F: V \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$ por

$$F(x, a, L) := \left(x, \frac{\partial}{\partial x_1} f \circ \psi(x, a, L), \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} f \circ \psi(x, a, L) \right).$$

Prove que F é transversal a $\Sigma = \mathbb{C}^k \times \{0\}$.

Ex. 1.16. Suponha que uma folheação \mathcal{F} tem duas estruturas transversais T_1 e T_2 , modeladas no mesmo grupo $G \subset \text{Aut}(S)$. Sejam $(\hat{\mathcal{F}}, \phi_1)$ e $(\hat{\mathcal{F}}, \phi_2)$ os desenvolvimentos associados a T_1 e T_2 . Prove que se as estruturas são equivalentes então existe $h \in \text{Aut}(S)$ tal que $\phi_2 = h \circ \phi_1$.

Ex. 1.17. Seja \mathcal{F} uma folheação em M com uma estrutura transversal modelada em $G \subset \text{Aut}(S)$. Seja $(\hat{\mathcal{F}}, \phi)$ o desenvolvimento de \mathcal{F} no recobrimento universal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$. Dado $H \in \text{Aut}(\pi)$ prove que existe um único $h \in G$ tal que $\phi \circ H = h \circ \phi$.

Ex. 1.18. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M que possui uma estrutura transversal modelada em $G \subset \text{Aut}(S)$, definida fora de um conjunto analítico de codimensão um X de M . Prove que a estrutura se estende a qualquer componente irredutível de X não invariante por \mathcal{F} .

Ex. 1.19. Sejam ω , ω_1 e ω_2 1-formas meromorfas numa variedade complexa M .

- (a). Prove que a 1-forma meromorfa $\Omega := dz - \omega - z.\omega_1 - \frac{z^2}{2}\omega_2$ em $\mathbb{C} \times M$ é integrável se e somente se, $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ é um terno projetivo.
- (b). Sejam f e g funções meromorfas em M . Prove que se $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ é um terno projetivo então $(f.\omega, \eta_1, \eta_2)$ também é, onde $\eta_1 = \omega_1 + df/f + 2g\omega$ e $\eta_2 = f^{-1}(\omega_2 + 2g^2\omega + 2g\omega_1 + 2dg)$.

Sugestão para (b). Seja $\Phi(v, x) = (v/(g(x).v + f(x)), x)$. Calcule $\Omega' := f^{-1}.(g.v + f)^2.\Phi^*(\Omega)$.

Capítulo 2

Componentes do tipo pull-back.

O objetivo principal deste capítulo é provar que para todo $n \geq 3$ o espaço de folheações de grau k em \mathbb{P}^n , $\mathbb{F}ol(n, k)$, possui componentes irredutíveis nas quais todas as folheações são pull-back (ou contra-imagem) de folheações em \mathbb{P}^2 por aplicações racionais. Lembremos que uma aplicação racional $f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$ de grau algébrico $m \geq 1$, pode ser representada em coordenadas homogêneas por uma aplicação polinomial $F = (A, B, C): \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^3$, onde A, B, C são polinômios homogêneos de grau $m := gr(f)$. Distingüiremos dois casos, o caso em $gr(f) = 1$ (seção 2.2) e o caso em que $gr(f) > 1$ (seção 2.3). Na seção 2.1 veremos um resultado preliminar que será utilizado em ambos os casos.

2.1 Singularidades simples nilpotentes.

Recordemos que um germe de 1-forma holomorfa integrável ω em $0 \in \mathbb{C}^3$ tem uma singularidade simples, se $\omega(0) = 0$ e 0 é singularidade isolada de $d\omega$. A fim de simplificar alguns enunciados, vamos considerar o germe de campo de vetores $X := rot(\omega)$ (rotacional) que é definido por $i_X(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) = d\omega$. Note que nesta definição, estamos fixando um sistema de coordenadas (z_1, z_2, z_3) numa vizi-

nhança de $0 \in \mathbb{C}^3$. A forma ω tem uma singularidade simples em $0 \in \mathbb{C}^3$ se, e somente se, 0 é singularidade isolada de $\text{rot}(\omega)$.

Definição 2.1.1. Dizemos que $0 \in \mathbb{C}^3$ é s.s.n. (singularidade simples nilpotente) de ω se $D(\text{rot}(\omega))(0)$ é nilpotente. O conceito independe do sistema de coordenadas utilizado para calcular $\text{rot}(\omega)$ (verifique).

A prova do próximo resultado foi feita originalmente em [LN 1].

Teorema 2.1. *Suponha que 0 é s.s.n. do germe ω . Então existem um sistema de coordenadas $x := (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{C}^3, 0)$ e germes de campos de vetores $S, Z \in \mathcal{X}_3$ tais que :*

- (a). $\omega = i_S i_Z(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$, $d\omega = i_Z(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$ e $Z = \text{rot}(\omega)$ no sistema de coordenadas z .
- (b). $S = \frac{1}{q}T$, onde $T = p_1.x_1 \partial/\partial x_1 + p_2.x_2 \partial/\partial x_2 + p_3.x_3 \partial/\partial x_3$, onde $q, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ e $\text{tr}(S) < 1$.
- (c). $L_S(\omega) = \omega$ e $[S, Z] = (1 - \text{tr}(S)).Z$.

Em particular, a forma ω tem coeficientes polinomiais no sistema de coordenadas z , os quais são quase-homogêneos com respeito a T .

Prova. Fixemos um sistema de coordenadas $z = (z_1, z_2, z_3)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$. Vamos usar provisoriamente a notação $dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 := \nu$. Seja $X = \text{rot}(\omega)$. Da integrabilidade $\omega \wedge d\omega = 0$, obtemos $i_X \omega = 0$. Como 0 é singularidade isolada de X , existe um germe de 2-forma η tal que $\omega = i_X \eta$, pelo teorema da divisão. Como estamos em dimensão três, podemos escrever $\eta = -i_Y(\nu)$, onde $Y \in \mathcal{X}_3$. Logo, $\omega = i_Y i_X \nu = i_Y d\omega$. Estas relações implicam que $L_Y(\omega) = i_Y(d\omega) + d(i_Y(\omega)) = \omega$. Decorre daí que $L_Y(d\omega) = d\omega$ e portanto

$$i_X(\nu) = L_Y(i_X(\nu)) = i_{[Y, X]} \nu + i_X(L_Y(\nu)) = i_{[Y, X]} \nu + f.i_X \nu \implies$$

$[X, Y] = (1 - f)X$, onde $f = \text{div}(Y) := \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial z_2} + \frac{\partial Y_3}{\partial z_3}$, sendo $Y = \sum_{j=1}^3 Y_j \partial/\partial z_j$. Denotando por $T = DY(0)$, a parte linear de Y em 0 , temos $f(0) = \text{tr}(T)$. Obtivemos então germes de campos $X, Y \in \mathcal{X}_3$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = i_Y i_X \nu, \quad d\omega = i_X \nu \\ L_Y(\omega) = \omega, \quad L_Y(d\omega) = d\omega \\ [Y, X] = (1 - f)X, \quad f(0) = \text{tr}(T) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Por um teorema conhecido de álgebra linear, podemos escrever $T = S + N$ onde S é semi-simples, N é nilpotente e $[S, N] = 0$. Note que $tr(T) = tr(S)$ e $tr(N) = 0$.

Lema 2.1.1. *A parte semi-simples S tem auto-valores racionais positivos. Além disto, $tr(S) < 1$.*

Prova. Vamos aqui utilizar a forma normal formal de Brjuno para germes de campos de vetores (veja [Ma]). Existe um difeomorfismo formal \hat{F} de $(\mathbb{C}^3, 0)$ tal que $D\hat{F}(0) = I$ e $\hat{Y} := \hat{F}^*(Y) = S + \hat{W}$, sendo \hat{W} um campo formal tal que $D\hat{W}(0) = N$ e $[S, \hat{W}] = 0$. Além disto, o campo \hat{W} é nilpotente, no seguinte sentido: para todo $k \geq 1$, o campo formal \hat{Y} induz uma aplicação linear, Y_k , no espaço de 2-formas em \mathbb{C}^3 com coeficientes polinomiais de grau $\leq k$, \mathcal{P}_k , que vai ser pensado como o espaço de jatos de ordem k de 2-formas, colocando

$$Y_k(\alpha_k) := j^k(L_{\hat{Y}}(\alpha_k), 0) ,$$

onde $j^k(H, 0)$ indica o jato de ordem k de H (truncamento da série de potências em ordem k). De forma análoga, S e \hat{W} induzem aplicações lineares S_k e W_k em \mathcal{P}_k tais que $Y_k = S_k + W_k$. O fato de que S é um campo linear semi-simples, implica que S_k é semi-simples e $S_k(\alpha_k) = L_S(\alpha_k)$ para todo $\alpha_k \in \mathcal{P}_k$. De fato, considere um sistema de coordenadas tal que $S = \sum_j \lambda_j x_j \partial / \partial x_j$. Se $x^\sigma = x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot x_3^{\sigma_3}$ e $\alpha = x^\sigma \cdot dx_i \wedge dx_j$ então $S_k(\alpha) = L_S(\alpha) = (\langle \lambda, \sigma \rangle + \lambda_i + \lambda_j) \cdot \alpha$, onde $\langle \lambda, \sigma \rangle = \sum_j \lambda_j \cdot \sigma_j$. Portanto, S_k é semi-simples pois o conjunto de monômios $\{x^\sigma \cdot dx_i \wedge dx_j \mid |\sigma| \leq k, 1 \leq i < j \leq 3\}$ é uma base de \mathcal{P}_k de auto-vetores de S_k . No caso, W_k é a parte nilpotente de Y_k , sendo que $[S_k, W_k] = 0$, para todo $k \geq 1$.

Fixemos $k \geq 1$ e coloquemos $\eta_k = j^k(\hat{F}^*(d\omega), 0)$. A relação $L_Y(d\omega) = d\omega$ implica que $L_{\hat{Y}}(F^*(d\omega)) = F^*(d\omega)$, logo

$$(S_k + W_k)(\eta_k) = Y_k(\eta_k) = \eta_k , \quad \forall k \geq 1 .$$

Portanto η_k é um auto-vetor de Y_k . Como S_k e W_k são as partes semi-simples e nilpotente de Y_k , respectivamente, obtemos que $S_k(\eta_k) = \eta_k$ e $W_k(\eta_k) = 0$, para todo $k \geq 1$. Vamos agora utilizar que $d\omega$ tem singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^3$. Isto implica que existe $k \geq 1$ tal que $j^k(d\omega, 0)$ tem singularidade isolada em 0. Decorre daí que $\eta_k = j^k(F^*(d\omega), 0)$ tem singularidade isolada em 0. Escrevamos $\eta_k =$

$\sum_{\sigma, i < j} a_{\sigma ij} x^\sigma . dx_i \wedge dx_j$. Da relação $L_S(\eta_k) = \eta_k$ obtemos que $a_{\sigma ij} (\langle \lambda, \sigma \rangle + \lambda_i + \lambda_j) = a_{\sigma ij}$, para todo (σ, i, j) , o que implica

$$\langle \lambda, \sigma \rangle + \lambda_i + \lambda_j = 1, \text{ se } a_{\sigma ij} \neq 0. \quad (2.2)$$

Vamos provar que, sob as hipóteses do teorema, as soluções do sistema (2.2) estão em \mathbb{Q}_+ e $tr(S) < 1$.

Afirmamos que, dado $i \in \{1, 2, 3\}$ existem $1 \leq j < \ell \leq 3$, $k_i \geq 1$ e σ tais que $x^\sigma = x_i^{k_i}$ e $a_{\sigma j\ell} \neq 0$. Com efeito, para $i = 1$, por exemplo, se não existissem $j < \ell$ com a propriedade acima, teríamos $\eta_k(x_1, 0, 0) \equiv 0$ e 0 não seria singularidade isolada de η_k (verifique). Utilizando o fato anterior e as relações (2.2) obtemos que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ satisfazem a um sistema de equações da forma

$$k_i \cdot \lambda_i + \lambda_{j(i)} + \lambda_{\ell(i)} = 1, \text{ onde } j(i) < \ell(i), k_i \geq 1, i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Decorre de (2.3) que existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Além disto, se $\lambda_i / \lambda_j \in \mathbb{Q}_+$ para todo $i \neq j$ então $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}_+$ (verifique). Usaremos a notação $[esp(S)] \in [\mathbb{Q}_+]$, neste caso.

Defina $r(i) = \{1, 2, 3\} \setminus \{j(i), \ell(i)\}$. O sistema (2.3) pode ser escrito também como :

$$k_1 \cdot \lambda_1 - \lambda_{r(1)} = k_2 \cdot \lambda_2 - \lambda_{r(2)} = k_3 \cdot \lambda_3 - \lambda_{r(3)} = 1 - tr(S). \quad (2.4)$$

Suponhamos por absurdo que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(S) = 1$. Dividiremos a prova em dois casos : (a). $k_j \geq 2$ para $j = 1, 2, 3$. (b). $k_j = 1$ para algum $j \in \{1, 2, 3\}$.

Caso (a). Este caso decorre do fato de que a matriz do sistema $k_j \cdot \lambda_j - \lambda_{r(j)} = 0$, $j = 1, 2, 3$, tem determinante não nulo, se $k_1, k_2, k_3 > 1$, o que implicaria $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2, 3$. Deixamos a verificação para o leitor.

Caso (b). Vamos utilizar aqui que $DX(0) = j^1(X, 0)$ é nilpotente. Suponha $j^1(X, 0) := N$. Como $X = rot(\omega)$ e $D\tilde{F}(0) = I$, obtemos $\eta_1 = j^1(d\omega, 0) = j^1(i_X(\nu), 0) = i_N \nu$, logo $N \neq 0$, pela hipótese (b). Da relação $L_S(\eta_1) = \eta_1$ obtemos

$$i_N \nu = L_S(i_N \nu) = i_{[S, N]} \nu + i_N(L_S(\nu)) = i_{[S, N]} \nu + tr(S) \cdot i_N \nu.$$

Logo, $[S, N] = 0$, já que $tr(S) = 1$. Em particular, S tem pelo menos dois auto-valores iguais. Após uma mudança linear de coordenadas,

podemos supor que N está na forma canônica de Jordan com respeito a S , ou seja $N = a.x_1\partial/\partial x_2 + b.x_2\partial/\partial x_3$. Neste caso, $\eta_1 = i_N \nu = a.x_1 dx_3 \wedge dx_1 + b.x_2 dx_1 \wedge dx_2$, logo $k_3 > 1$. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$, as relações (2.4) implicam que $k_j = 1$, $1 \leq j \leq 3$, logo ao menos um dos auto-valores é diferente dos outros dois. Podemos supor então que $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Neste caso, $N = a.x_1.\partial/\partial x_2$, $\eta_1 = a.x_1 dx_3 \wedge dx_1$ e $k_2, k_3 > 1$. Utilizando as relações $k_2.\lambda_1 = k_2.\lambda_2 = \lambda_{r(2)}$ e $k_3.\lambda_3 = \lambda_{r(3)}$ obtemos uma contradição com $\lambda_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, 3$ (verifique).

Portanto, $tr(S) \neq 1$. Utilizando as relações (2.4) com $1 - tr(S) \neq 0$ é possível provar que $[esp(S)] \in [\mathbb{Q}_+]$. Isto pode ser feito, dividindo em três sub-casos para r : (1). r é constante. (2). $\# r\{1, 2, 3\} = 2$. (3). r é bijeção. No caso (1), por exemplo, obtemos que $k_1.\lambda_1 = k_2.\lambda_2 = k_3.\lambda_3$, logo $[esp(S)] \in [\mathbb{Q}_+]$. No caso (2), com $1 = r(1) = r(2) \neq r(3)$, por exemplo, temos $k_1.\lambda_1 = k_2.\lambda_2$ e $k_3.\lambda_3 - \lambda_2 = (k_1 - 1).\lambda_1 \neq 0$, o que implica que $k_1 > 1$ e que $\lambda_j \in \lambda_1.\mathbb{Q}_+$ para $j = 2, 3$. Deixamos os outros casos para o leitor (veja o Ex. 2.1).

Resta provar que $tr(S) < 1$. Para isto recorremos ao sistema na forma (2.3). Somando as três equações em (2.3) obtemos $m_1.\lambda_1 + m_2.\lambda_2 + m_3.\lambda_3 = 3$, onde $m_j \geq 3$ para $j = 1, 2, 3$. No caso, algum $m_j > 3$, pois caso contrário teríamos $tr(S) = 1$. Isto implica que $tr(S) < 1$, como queríamos. \square

Vamos agora utilizar a forma normal de Poincaré-Dulac (veja [Ma]): como os auto-valores de $L = DY(0)$ são racionais positivos, L está no domínio de Poincaré e o campo Y admite uma forma normal de Brjuno convergente, ou seja, podemos supor que $Y = S + W$, onde W é convergente e $[S, W] = 0$. Suponhamos por exemplo que $esp(S)$ não tem ressonâncias. Neste caso, temos $W = 0$ e podemos escrever $\omega = i_S i_X \nu$, onde $\nu = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$ e $d\omega = i_X \nu$. Neste caso, (2.1) implica que $[S, X] = (1 - tr(S))X$, como desejado. Basta então provar o seguinte resultado:

Lema 2.1.2. *Em qualquer caso, temos $W \equiv 0$.*

Prova. Sejam $X = \sum_j A_j \partial/\partial x_j$ e $W = \sum_j B_j \partial/\partial x_j$. Vamos supor que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Afirmamos que a relação $[S, W] = 0$ implica que podemos supor que $B_1 = 0$, $B_2(x) = f(x_1)$ e $B_3(x) = g(x_1, x_2)$. Com efeito, um monômio $x^\sigma.\partial/\partial x_j$, com coeficiente não nulo na série de Taylor de W , implica uma relação da forma $\langle \sigma, \lambda \rangle = \lambda_j$. Além

disto, $j^1(W)$ não pode conter monômios da forma $x_j.\partial/\partial x_j$, pois $[S, j^1(W)] = 0$ e $j^1(W)$ é nilpotente.

No caso em que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ as relações $\langle \sigma, \lambda \rangle = \lambda_j$ e o fato de que $j^1(W)$ é nilpotente implicam que $B_1 = 0$, $B_2 = f(x_1)$ e $B_3 = g(x_1, x_2)$. Deixamos a verificação para o leitor. No caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, W é linear e a afirmação decorre de que podemos supor que W está na forma canônica de Jordan, ou seja $W = a.x_1\partial/\partial x_2 + b.x_2.\partial/\partial x_3$. Consideremos o caso $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$. Neste caso, se ocorre um monômio da forma $x^\sigma.\partial/\partial x_1$ ou $x^\sigma.\partial/\partial x_2$, devemos ter $\sigma_3.\lambda_3 \leq \langle \sigma, \lambda \rangle = \lambda_1 = \lambda_2$, logo $\sigma_3 = 0$, ou seja B_1 e B_2 não dependem de x_3 . Além disto, o campo $Z := B_1\partial/\partial x_1 + B_2\partial/\partial x_2$ é linear, logo podemos supor que ele está na forma canônica de Jordan : $Z = a.x_1\partial/\partial x_2$. Se ocorre um monômio da forma $x^\sigma.\partial/\partial x_3$ temos $\sigma_3.\lambda_3 \leq \langle \sigma, \lambda \rangle = \lambda_3$, o que implica $\sigma_3 = 0$, pois caso contrário teríamos $\sigma = (0, 0, 1)$ e $j^1(W)$ não seria nilpotente. Logo B_3 não depende de x_3 , $B_1 = 0$ e B_2 só depende de x_1 , como queríamos. Deixamos o caso restante, $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$, para o leitor.

Supondo que $W = f(x_1)\partial/\partial x_2 + g(x_1, x_3)\partial/\partial x_3$, vamos provar que se $W \neq 0$ então X se anula identicamente no eixo ($x_1 = x_2 = 0$), o que contradiz o fato de X ter singularidade isolada. Vimos na prova do lema 2.1.1 que $L_W(d\omega) = 0$. Decorre daí que

$$0 = L_W(i_X \nu) = i_{[W, X]} \nu + \text{div}(W).i_X \nu = i_{[W, X]} \nu \implies$$

$[W, X] = 0$, pois $\text{div}(W) = \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_3} = 0$. A relação $[W, X] = 0$ é equivalente ao seguinte sistema de equações :

$$\begin{cases} W(A_1) = 0 \\ W(A_2) = f'(x_1).A_1 \\ W(A_3) = \frac{\partial g}{\partial x_1}.A_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}.A_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

A prova então se reduz ao seguinte resultado : sejam $h, k \in \mathcal{O}_3$, germes tais que $W(h) = k$. Se $k|_{(x_1=x_2=0)} = 0$ então $h|_{(x_1=x_2=0)} = 0$. Supondo o resultado provado, obtemos da primeira equação em (2.5) que $A_1|_{(x_1=x_2=0)} = 0$. Utilizando este fato na segunda equação obtemos que $A_2|_{(x_1=x_2=0)} = 0$. Finalmente, como $A_j|_{(x_1=x_2=0)} = 0$, $j = 1, 2$, a terceira equação implica que $A_3|_{(x_1=x_2=0)} = 0$.

Seja W_t o fluxo de W . Como $f(0) = g(0, 0) = 0$, temos $W|_{(x_1=x_2=0)} \equiv 0$. Logo, $W_t(0, 0, x_3) = (0, 0, x_3)$, para todo x_3 . Integrando a equação $W(h) = k$ obtemos $h(W_t(x)) = H(x, t)$, onde $H(x, t) = \int_0^t k(W_s(x)) ds$. Por outro lado, $H(0, 0, x_3, t) \equiv 0$, já que $k(0, 0, x_3) \equiv 0$. Como $h(x) = H(W_{-t}(x), t)$, temos finalmente que $h(0, 0, x_3) = H(0, 0, x_3, t) \equiv 0$. \square

Com isto terminamos a prova do teorema 2.1. \square

Definição 2.1.2. Seja ω uma 1-forma com s.s.n. em $0 \in \mathbb{C}^3$. Dizemos que 0 é s.s.n. de tipo $[p_1 : p_2 : p_3]$ se $\omega = i_S i_X \nu$, onde $S = \frac{1}{q}(p_1 z_1 \partial / \partial z_1 + p_2 z_2 \partial / \partial z_2 + p_3 z_3 \partial / \partial z_3)$ e $[S, X] = (1 - \text{tr}(S))X$, como no teorema 2.1.

Um caso particular importante que utilizaremos neste capítulo é quando $j^{k+1}(\omega, 0) = \Omega$, onde Ω é uma 1-forma com coeficientes homogêneos do mesmo grau $k+1$ tal que $i_R \Omega = 0$, sendo R o campo radial em \mathbb{C}^3 . Como vimos na observação 1.2.3, a forma Ω representa uma folheação \mathcal{G} em \mathbb{P}^2 de grau k . Por outro lado, o germe de Ω em $0 \in \mathbb{C}^3$ é simples se, e somente se, a folheação \mathcal{G} possui todas as singularidades não degeneradas e para todo $p \in \text{sing}(\mathcal{G})$ temos $[\text{esp}(\mathcal{G}, p)] = \{\lambda_1 : \lambda_2\}$, onde $\lambda_2/\lambda_1 \neq -1$ (veja exemplo 1.4.5). Se $\text{gr}(\mathcal{G}) \geq 2$ então a parte linear de $\text{rot}(\omega)$ é nula, logo nilpotente e $0 \in \mathbb{C}^3$ é s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ de ω . Gostaríamos ainda de observar que neste caso o campo linear S tal que $i_S d\Omega = \Omega$ é $S = \frac{1}{k+2}R$, onde R é o campo radial (veja a observação 1.2.2).

Corolário 2.1.1. Na situação acima, se $\text{gr}(\mathcal{G}) \geq 2$ então existe um germe de biholomorfismo $\phi: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ tal que $\phi^*(\omega) = \Omega$.

Uma outra consequência diz respeito à estabilidade das s.s.n.. Vamos considerar a seguinte situação : sejam $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid |z| \leq 1\}$, e $U = \{t \in \mathbb{C}^m \mid |t| < r\}$. Seja $(\omega_t)_{t \in U}$ uma família holomorfa de 1-formas integráveis definidas numa vizinhança V de \overline{B} .

Corolário 2.1.2. Na situação acima, suponha que $\text{sing}(d\omega_0) = \{0\}$ e que 0 é s.s.n. de tipo $[p : q : r]$ de ω_0 . Então existem $\epsilon > 0$, $\epsilon \leq r$, e uma função holomorfa $z: (|t| < \epsilon) \rightarrow \overline{B}$ tais que :

(a). $\text{sing}(d\omega_t) = \{z(t)\}$ para todo $|t| < \epsilon$.

(b). $z(t)$ é s.s.n. de tipo $[p : q : r]$ de ω_t para todo $|t| < \epsilon$.

Prova. Seja $X_t = \text{rot}(\omega_t)$, de forma que $d\omega_t = i_{X_t} \nu$, $\nu = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$. Seja $\rho_t = \inf\{|X_t(q)|; q \in \partial\overline{B}\}$. Como $\rho_0 > 0$ existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $|t| < \epsilon_1$ então $\rho_t > 0$, ou seja, X_t tem todas as singularidades em \overline{B} contidas no interior B de \overline{B} e estas são isoladas. Se $m(X_t, q)$ denota a multiplicidade de q como singularidade de X_t , temos também que

$$\sum_{q \in B} m(X_t, q) = m(X_0, 0), \quad \forall |t| < \epsilon_1. \quad (2.6)$$

Em particular, $\#(\text{sing}(X_t) \cap \overline{B}) \leq m(X_0, 0)$ para todo $|t| < \epsilon_1$. Decorre daí que o conjunto $\{(z, t) \mid X_t(z) = 0, z \in B, |t| < \epsilon_1\}$ tem codimensão três. Podemos então aplicar o teorema da divisão a parâmetros de De Rham (veja o Apêndice 1) : como $i_{X_t} \omega_t = 0$ existe uma 2-forma $\eta_t = a_1(z, t) dz_2 \wedge dz_3 + a_2(z, t) dz_3 \wedge dz_1 + a_3(z, t) dz_1 \wedge dz_2$, tal que $\omega_t = i_{X_t} \eta_t$. Por outro lado, $\eta_t = i_{Y_t} \nu$, $Y_t = -\sum_j a_j \partial / \partial z_j$, logo $\omega_t = i_{Y_t} i_{X_t} \nu$. Como 0 é s.s.n. de ω_0 , 0 é singularidade não degenerada de Y_0 , pelo teorema 2.1, ou seja $m(Y_0, 0) = 1$. Aplicando (2.6) ao campo Y_0 , obtemos que existe $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$ tal que se $|t| < \epsilon$ então Y_t possui uma única singularidade $z(t)$ em B , sendo $m(Y_t, z(t)) = 1$. Como é bem conhecido, neste caso, a função $z: (|t| < \epsilon) \rightarrow B$ é holomorfa. Afirmamos que $\text{sing}(X_t) \cap \overline{B} = \{z(t)\}$, se $|t| < \epsilon$.

Com efeito, de $\omega_t = i_{Y_t} i_{X_t} \nu = i_{Y_t} d\omega_t$ obtemos $L_{Y_t}(d\omega_t) = d\omega_t$. Fixemos $|t| < \epsilon$ e denotemos por ϕ_s o fluxo local de Y_t . Integrando $L_{Y_t}(d\omega_t) = d\omega_t$, obtemos que $\phi_s^*(d\omega_t) = e^s \cdot d\omega_t$. Esta última relação implica que se $d\omega_t(q) = 0$ então $d\omega_t(\phi_s(q)) = 0$ para todo s tal que $\phi_s(q)$ está definido. Como $\text{sing}(X_t) = \text{sing}(d\omega_t)$, obtemos que o fluxo ϕ_s deixa invariante $\text{sing}(X_t)$. Decorre daí que $\text{sing}(X_t) \subset \text{sing}(Y_t)$, já que $\text{sing}(X_t)$ é finito. Logo, $\text{sing}(X_t) = \{z(t)\}$.

Note que $z(t)$ é singularidade simples de ω_t , já que é singularidade isolada de $d\omega_t$. Sejam L_t e N_t as partes lineares de Y_t e de X_t em $z(t)$, respectivamente. Queremos provar que N_t é nilpotente e que $[\text{esp}(L_t)] = \{p : q : r\}$. Como já vimos na prova do teorema 2.1, a relação $L_{Y_t}(d\omega_t) = d\omega_t$ implica que $[Y_t, X_t] = (1 - \text{div}(Y_t))X_t$. A relação anterior implica que $[L_t, N_t] = (1 - \text{tr}(L_t))N_t := \alpha(t) \cdot N_t$. Como $\alpha(0) = 1 - \text{tr}(L_0) > 0$, se $\epsilon > 0$ for suficientemente pequeno então $\alpha(t) \neq 0$ para $|t| < \epsilon$. Desta forma reduzimos o problema a provar que se L e N são operadores lineares em \mathbb{C}^m tais que $\det(L) \neq$

0 e $[L, N] = \alpha.N$, onde $\alpha \neq 0$, então N é nilpotente. Deixamos a prova deste fato para o leitor (veja o Ex. 2.2). Daí obtemos que N_t é nilpotente para $|t| < \epsilon$, logo $z(t)$ é s.s.n. de ω_t . Decorre então do teorema 2.1 que os auto-valores de L_t estão em \mathbb{Q}_+ . Como a aplicação $t \mapsto L_t$ é contínua obtemos que $t \mapsto \text{esp}(L_t)$ é constante, como queríamos. \square

2.2 Pull-backs lineares.

Denotemos por $PBL(n, k)$ o conjunto das folheações em $\mathbb{F}ol(n, k)$ que são definidas em coordenadas homogêneas por formas do tipo $\Omega = F^*(\omega)$, onde $F: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^3$ é linear e $\omega = P.dx + Q.dy + R.dz$ define uma folheação $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, k)$. Note que se \mathcal{G} tem grau k então $gr(P) = gr(Q) = gr(R) = k + 1$, logo os coeficientes de Ω têm grau $k + 1$, já que F é linear. Portanto, $gr(\mathcal{F}(\Omega)) = k$. O resultado principal desta seção, cuja prova original foi dada em [C-LN 1], é o seguinte :

Teorema 1. *O conjunto $PBL(n, k)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$, para todo $n \geq 3$ e todo $k \geq 2$.*

Prova. Utilizaremos o seguinte resultado bem conhecido de geometria analítica :

Lema 2.2.1. *Sejam $A \subset B$ sub-conjuntos analíticos irredutíveis de uma variedade complexa M . Suponha que existe um aberto $U \neq \emptyset$ de A tal que $U \cap B = U$. Então $A = B$.*

Note que $PBL(n, k)$ é um sub-conjunto analítico irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$. Com efeito, $PBL(n, k) = \Phi(\mathbb{P}(\mathcal{L}(n + 1, 3)) \times \mathbb{F}ol(2, k))$, onde $\Phi(F, \mathcal{G}) = [F^*(\mathcal{G})]$. Como $\mathbb{P}(\mathcal{L}(n + 1, 3))$ e $\mathbb{F}ol(2, k)$ são espaços projetivos e Φ é algébrica, $PBL(n, k)$ é algébrico e irredutível.

Seja $G(2, k) = \{\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, k) \mid \text{todas as singularidades de } \mathcal{G} \text{ são não degeneradas e se } p \in \text{sing}(\mathcal{G}) \text{ então } [\text{esp}(\mathcal{G}, p)] = \{\lambda_1 : \lambda_2\}, \text{ onde } \lambda_2/\lambda_1 \neq -1\}$. Note $G(2, k)$ é um conjunto aberto e denso de $\mathbb{F}ol(2, k)$. Dado $n \geq 3$ seja $H(n + 1, 3) = \{F \in \mathcal{L}(n + 1, 3) \mid F \text{ tem posto três}\}$. Como $H(n + 1, 3)$ é aberto e denso em $\mathcal{L}(n + 1, 3)$, o conjunto $U := \Phi(\mathbb{P}(H(n + 1, 3)) \times G(2, k))$ é aberto e denso em $PBL(n, k)$. Provaremos então que se W é a componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$

que contém U então $W \cap U = U$. Para isto é suficiente provar que para todo $\mathcal{F}_o \in U$ existe uma vizinhança V de \mathcal{F}_o tal que $V \cap W = V$. Verificaremos este fato utilizando germes de famílias analíticas de folheações $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$, ou seja, germes de curvas no espaço de folheações, tais que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_o \in PBL(n, k)$ e $\mathcal{F}_t \in W$ para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$. Provaremos que $\mathcal{F}_t \in PBL(n, k)$. Isto é suficiente, uma vez que todo conjunto analítico irredutível é localmente conexo por curvas holomorfas, isto é, dado $\mathcal{F}_o \in W$ existe uma vizinhança V de \mathcal{F}_o em W tal que se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in V$ então existe uma curva analítica $\gamma: \mathbb{D} \rightarrow V$ ($\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$) tal que $\gamma(0) = \mathcal{F}_1$ e $\gamma(1/2) = \mathcal{F}_2$ (veja [Se]).

A prova do teorema será feita em duas etapas : 1ª etapa. $n = 3$. 2ª etapa. $n > 3$.

Prova para $n = 3$. Fixemos $\mathcal{F}_o \in U$. Então $\mathcal{F}_o = [F^*(\mathcal{G})]$, onde $F = (F_1, F_2, F_3) \in H(4, 3)$ tem posto três e $\mathcal{G} \in G(2, k)$. Como o posto de F é três, existem sistemas de coordenadas lineares em \mathbb{C}^4 e \mathbb{C}^3 tais que $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3)$. A folheação \mathcal{G} é representada em coordenadas homogêneas por $\omega = P_1.dz_1 + P_2.dz_2 + P_3.dz_3$, onde $P_j = P_j(z_1, z_2, z_3)$ é polinômio homogêneo de grau $k + 1$, $1 \leq j \leq 3$, e $\sum_j z_j.P_j = 0$. Logo, $\mathcal{F}_o := F^*(\mathcal{G})$ é representada pela forma $\Omega = F^*(\omega)$. Pela expressão de F nas coordenadas fixadas, temos $\Omega|_{z_4=1} = \omega$, ou seja, \mathcal{F}_o é representada nas coordenadas afins $(z_1, z_2, z_3) \simeq [z_1 : z_2 : z_3 : 1]$ por ω . Consideremos agora um germe de família holomorfa $(\Omega_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ de formas integráveis em \mathbb{C}^4 com coeficientes homogêneos de grau $k + 1$ tais que $i_{R_4}(\Omega_t) = 0$ para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$ e $\Omega_0 = \Omega$. Seja $\omega_t = \Omega_t|_{(z_4=1)}$. Afirmamos que existe um germe de função holomorfa $p: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (z_4 = 1) \simeq \mathbb{C}^3$ tal que, se $G_t(z) = z - p(t)$ então $G_t^*(\omega_t)$ tem coeficientes homogêneos de grau $k + 1$ e $i_{R_3}(G_t^*(\omega_t)) = 0$, onde R_3 é o campo radial de \mathbb{C}^3 . Isto implicará o teorema para $n = 3$, já que $G_t^*(\omega_t)$ representa uma folheação $\mathcal{G}_t \in \text{Fol}(2, k)$.

Provemos a afirmação. Como $gr(\mathcal{G}) \geq 2$, ω tem uma s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ em $0 \in \mathbb{C}^3$. Pelo corolário 2.1.2, existe um germe de aplicação holomorfa $p: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que $p(t)$ é s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ de ω_t . Consideremos a translação $G_t(z) = z - p(t)$. A forma $\eta_t := G_t^*(\omega_t)$ tem uma singularidade em $0 \in \mathbb{C}^3$. Vamos provar que $j_0^k(\eta_t) = 0$. Como η_t tem coeficientes polinomiais de grau $\leq k + 1$, isto implicará que os coeficientes de η_t são homogêneos de grau $k + 1$.

A forma η_t tem uma s.s.n. em $0 \in \mathbb{C}^3$ de tipo $[1 : 1 : 1]$ logo, existe um germe de biholomorfismo $H_t: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ tal que $\alpha_t := H_t^*(\eta_t) = i_{S_t} i_{Z_t}(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$, onde $L_{S_t} \alpha_t = \alpha_t$. Como vimos na prova do corolário 2.1.2, o operador S_t é semi-simples e $t \mapsto \text{esp}(S_t)$ é constante. Como $S_0 = \frac{1}{k+2} R_3$ (veja observação 1.2.2) temos $S_t = \frac{1}{k+2} R_3$, para todo t . Logo, $L_{R_3} \alpha_t = (k+2)\alpha_t$ e isto implica que os coeficientes de α_t são homogêneos de grau $k+1$ (verifique). Decorre daí que $j_0^k(\alpha_t) = 0$ e portanto $j_0^k(\eta_t) = 0$. Logo η_t tem coeficientes homogêneos de grau $k+1$ e $i_{R_3} \eta_t = 0$, como queríamos. \square

Prova para $n > 3$. A prova será baseada no teorema de redução de variáveis para singularidades simples (Teorema 1.12). Seja $\mathcal{F}_o = F^*(\mathcal{G}) \in PBL(n, k)$, onde $\mathcal{G} \in G(2, k)$ e $F \in \mathcal{L}(n+1, 3)$ tem posto três. Como na prova do caso $n = 3$, podemos supor que em coordenadas homogêneas temos $F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n+1}) = (z_1, z_2, z_3)$. Se ω representa \mathcal{G} nas coordenadas homogêneas (z_1, \dots, z_3) então $\Omega = F^*(\omega)$ representa \mathcal{F}_o nas coordenadas (z_1, z_2, z_{n+1}) . Como ω só depende das variáveis (z_1, z_2, z_3) , a folheação \mathcal{F}_o será representada no sistema de coordenadas afim $(z_{n+1} = 1) \simeq \mathbb{C}^n$ pela forma $\Omega|_{\mathbb{C}^n} = \omega$. Em particular, se $E = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_j = 0, 4 \leq j \leq n\} \simeq \mathbb{C}^3$ então $\omega|_E$ tem uma s.s.n. em $0 \in E$.

Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ um germe família holomorfa de folheações tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_o$. Suponhamos que \mathcal{F}_t é representada na carta afim $\mathbb{C}^n = (z_{n+1} = 1)$ pela forma ω_t com coeficientes polinomiais de grau $\leq k+1$. Como $E \simeq \mathbb{C}^3$, existe uma translação em E , $F_t(z) = z - p(t)$, tal que $F_t^*(\omega_t|_E)$ tem uma s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ em $0 \in E$. Esta translação se estende a um automorfismo de \mathbb{P}^n , o qual denotamos por G_t . Substituindo a família original por $(G_t^*(\mathcal{F}_t))_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$, se necessário, podemos supor que $\omega_t|_E$ tem uma s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ em $0 \in E$. Fixando $t \in (\mathbb{C}, 0)$, reduzimos o problema ao seguinte : seja $\alpha = \omega_t$ uma 1-forma integrável do tipo $\alpha = \alpha_0 + \dots + \alpha_{k+1}$, onde α_j tem coeficientes homogêneos de grau j . Suponha que $\alpha|_E = \alpha_{k+1}|_E$ tem s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ em $0 \in E$. Então $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$. Além disto, existe um $n-3$ plano F de \mathbb{C}^n transversal a E tal que \mathcal{F}_t é o produto da folheação gerada por $\alpha|_E$ pela folheação de codimensão três de \mathbb{C}^n por planos paralelos a F .

Como $\alpha|_E$ tem singularidade simples em $0 \in E$, pelo teorema 1.12 (redução de variáveis) o germe de $\mathcal{F}(\alpha)$ é equivalente ao produto

de um germe folheação regular \mathcal{H} de codimensão três por um germe singular de codimensão um em $(\mathbb{C}^3, 0)$. Em particular $\alpha_0 = \alpha(0) = 0$. A folheação \mathcal{H} é gerada por $\ell = n - 3$ campos holomorfos X_1, \dots, X_ℓ tais que $X_j(0) \neq 0$, $1 \leq j \leq \ell$. Isto significa que $i_{X_r} \alpha = 0$, $1 \leq r \leq \ell$. Seja $v_r = j_0^0(X_r)$. Então $F := \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$ é o sub-espaço tangente a \mathcal{H} em $0 \in \mathbb{C}^n$. Provemos por indução em $i = 0, \dots, k$ que $\alpha_i = 0$. Já vimos que $\alpha_0 = 0$. Suponhamos que $\alpha_i = 0$ para $i < m \leq k$ e provemos que $\alpha_m = 0$. Neste caso, a relação $\alpha \wedge d\alpha = 0$ implica que $\alpha_m \wedge d\alpha_m = 0$, ou seja α_m é integrável. Por outro lado, $0 = j_0^m(i_{X_r} \alpha) = i_{v_r} \alpha_m$, logo $i_{v_r} \alpha_m = 0$, $1 \leq r \leq \ell$. Como $\alpha_m|_E = 0$, obtemos que $\alpha_m = 0$ (verifique). Obtivemos também que $i_{v_r} \alpha_{k+1} = 0$ para todo $r = 1, \dots, \ell$. Logo a folheação por planos paralelos a F é tangente a \mathcal{F}_t , como queríamos. \square

Observação 2.2.1. O resultado do teorema também é válido para $k = 0$ e $k = 1$, isto é, $PBL(n, 0)$ e $PBL(n, 1)$ são componentes irredutíveis dos espaços de folheações correspondentes. No caso $k = 0$ este fato foi essencialmente provado no exemplo 1.2.2. No caso $k = 1$ o resultado é consequência do corolário 3.3.1 do teorema 4 que será provado no próximo capítulo.

2.3 Pull-backs não lineares.

Nesta seção estudaremos as folheações do tipo $F^*(\mathcal{G})$, onde $\mathcal{G} \in \mathbb{Fol}(2, k)$, $k \geq 0$, e $F: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma aplicação de grau algébrico $m \geq 2$. A exposição será baseada no artigo [Ce-LN-Ed]. Usaremos a notação

$$PB(n, m, k) = \{F^*(\mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \in \mathbb{Fol}(2, k), F: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2 \text{ e } gr(F) = m \geq 1\}.$$

Observação 2.3.1. $PB(n, m, k) \subset \mathbb{Fol}(n, \ell(m, k))$, onde $\ell(m, k) = m(k+2) - 2$. Além disto, $PB(n, m, k)$ é um sub-conjunto algébrico irredutível de $\mathbb{Fol}(n, \ell(m, k))$. Deixamos a verificação destes fatos para o leitor (veja o Ex. 2.3).

O resultado principal desta seção é o seguinte :

Teorema 2. *Para quaisquer $n \geq 3$, $m \geq 2$ e $k \geq 2$, $PB(n, m, k)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{Fol}(n, \ell(m, k))$.*

Prova. Utilizaremos o lema 2.2.1. Exibiremos um aberto denso U em $PB(n, m, k)$ tal que para toda folheação racional $\mathcal{F}_o \in U$ e todo germe de família holomorfa de folheações $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_o$, então $\mathcal{F}_t \in PB(n, m, k)$ para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$. Iremos agora a descrever o aberto U e alguns aspectos qualitativos das folheações em U .

Diremos que uma aplicação racional $f: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ de grau $m \geq 2$ é *genérica* se a sua expressão em coordenadas homogêneas $F = (F_1, F_2, F_3): \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^3$ satisfaz às seguintes propriedades :

- (a). f tem posto genérico 2. Isto é equivalente a dizer que F tem posto genérico 3. Em particular, o conjunto

$$X := \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid dF_1(p) \wedge dF_2(p) \wedge dF_3(p) = 0\}$$

é um sub-conjunto algébrico próprio de \mathbb{C}^{n+1} .

- (b). Se $p \in (F_1 = F_2 = F_3 = 0) \setminus \{0\}$ então $p \notin X$.

O conjunto das aplicações racionais genéricas de grau m , $f: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, será denotado por $Gen(n, m)$. Observamos que $Gen(n, m)$ é aberto e denso no conjunto de todas as aplicações de grau m (veja o Ex. 2.4).

Uma aplicação $f \in Gen(n, m)$, como acima, satisfaz à seguinte propriedade : seja $\Pi_r: \mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^r$ a projeção canônica. O conjunto $I(f) := \Pi_n(F_1 = F_2 = F_3 = 0)$ é o conjunto de *indefinição* de f , isto é, o domínio de f é $\mathbb{P}^n \setminus I(f)$. A condição (b) da definição implica que $I(f)$ é uma sub-variedade algébrica lisa de \mathbb{P}^n de codimensão três e grau m^3 . No caso $n = 3$, $I(f)$ é um conjunto de m^3 pontos em \mathbb{P}^3 .

O conjunto U será um sub-conjunto de $\Phi(Gen(n, m) \times (S(2, k) \cap G(2, k)))$, onde $\Phi(f, \mathcal{G}) = f^*(\mathcal{G})$. O conjunto $S(2, k)$ é dado pelo teorema 1.6. Resumimos abaixo as propriedades de $S(2, k)$ que utilizaremos.

- (c). Se $\mathcal{G} \in S(2, k)$ então \mathcal{G} não possui folha algébrica e todas as suas singularidades são não degeneradas. Em particular $\#(sing(\mathcal{G})) = N(k) := k^2 + k + 1 \geq 7$ (veja proposição 1.3.2).
- (d). Se $\mathcal{G} \in S(2, k)$ e $p \in sing(\mathcal{G})$ então \mathcal{G} admite exatamente duas separatrizes locais em p , as quais são lisas e transversais.

Seja agora $\mathcal{G} \in S(2, k) \cap G(2, k) := A$ e suponhamos que \mathcal{G} é representada em coordenadas homogêneas pela forma $\omega = \sum_{j=1}^3 P_j(z).dz_j$. Vamos descrever a folheação $f^*(\mathcal{G})$ numa vizinhança de um ponto $p \in I(f)$. Consideremos primeiramente o caso $n = 3$. Seja $\mathbb{C}^3 \simeq E \subset \mathbb{C}^4$ um plano afim ($0 \notin E$) tal que E corta transversalmente a reta $\Pi_3^{-1}(p)$ num ponto $q \in E$. Como $F(q) = 0$ e $dF_1(q) \wedge dF_2(q) \wedge dF_3(q) \neq 0$, pelo teorema da função inversa, existe um sistema de coordenadas local em $q \in E$, $(W, x \in \mathbb{C}^3)$ tal que $x(q) = 0$ e $F|_E(x) = (x_1, x_2, x_3)$. A forma que representa $\mathcal{F} := f^*(\mathcal{G})$ em coordenadas homogêneas é $\Omega := F^*(\omega)$ e a que representa \mathcal{F} nas coordenadas afins E é $\Omega|_E$. Em particular, nas coordenadas locais fixadas temos $\Omega|_E = \omega$. Portanto \mathcal{F} tem uma s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ em q . De forma análoga, no caso $n = r + 3 > 3$, a folheação \mathcal{F} será localmente equivalente numa vizinhança W de q a um produto de uma folheação regular de dimensão r pela folheação definida por ω em \mathbb{C}^3 (verifique).

Vamos agora descrever o conjunto singular de \mathcal{F} nas coordenadas locais fixadas. Como ω representa \mathcal{G} em \mathbb{C}^3 , temos $\text{sing}(\omega) = \Pi_3^{-1}(\text{sing}(\mathcal{G}))$. Por outro lado, \mathcal{G} possui $N(k)$ singularidades. Logo $\text{sing}(\mathcal{F}) \cap W$ consiste de $N(k)$ sub-variedades lisas de codimensão dois que se cruzam ao longo de $I(f) \cap W$. Se $a \in \text{sing}(\mathcal{G})$ então $[\text{esp}(\mathcal{G}, a)] = \{\lambda_1 : \lambda_2\}$ onde $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Isto implica que, se $S(a)$ é a componente de $\text{sing}(\mathcal{F})$ correspondente a $\Pi_3^{-1}(a)$ então $W \cap S(a) \setminus I(f)$ está no conjunto de Kupka de \mathcal{F} e o seu tipo transversal tem parte linear com $[\text{esp}] = \{\lambda_1 : \lambda_2\}$.

Para definir o aberto $U \subset PB(n, m, k)$ que usaremos na demonstração, precisamos de mais uma condição. Seja $PC(f) = \{p \in \mathbb{P}^n \setminus I(f) \mid \text{o posto de } Df(p): T_p\mathbb{P}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{P}^2 \text{ é menor que dois}\}$. $PC(f)$ é o conjunto de pontos críticos de f . O conjunto $VC(f) := f(PC(f))$ é chamado de *conjunto de valores críticos de f* . No nosso caso, $VC(f)$ é uma curva algébrica em \mathbb{P}^2 (veja o Ex. 2.5). Se $\mathcal{G} \in A$ então $\text{sing}(\mathcal{G})$ contém um número finito $N(k)$ de singularidades. Em particular, fixada $f \in \text{Gen}(n, m)$, o conjunto $\{\mathcal{G} \in A \mid \text{sing}(\mathcal{G}) \cap VC(f) = \emptyset\}$ é aberto e denso em $\mathbb{F}ol(2, k)$. O conjunto $U_1 := \{(f, \mathcal{G}) \in \text{Gen}(n, m) \times A \mid VC(f) \cap \text{sing}(\mathcal{G}) = \emptyset\}$ é aberto e denso em $\text{Gen}(n, m) \times A$. Como conseqüência, $U := \{f^*(\mathcal{G}) \mid (f, \mathcal{G}) \in U_1\}$ é aberto e denso em $PB(n, m, k)$. Dada $\mathcal{F} \in U$, denotaremos por $K(\mathcal{F})$ fecho em \mathbb{P}^n do conjunto dos pontos de Kupka de \mathcal{F} .

Lema 2.3.1. *Seja $\mathcal{F} = f^*(\mathcal{G}) \in U$, com $\text{sing}(\mathcal{G}) = \{p_1, \dots, p_{N(k)}\}$. Então $K(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{N(k)} V_i$ onde $V_i = \overline{f^{-1}(p_i)}$. Além disto, V_i é lisa conexa de codimensão dois e grau m^2 , para todo $i = 1, \dots, N(k)$. Em particular, cada V_i é uma componente irredutível de $K(\mathcal{F})$, $I(f) \subset V_i$ e V_i é uma interseção completa.*

Prova. O fecho V_q da fibra $f^{-1}(q)$, $q \in \mathbb{P}^2$, é dado em \mathbb{P}^n por $[F_1 : F_2 : F_3] = q = [a_1 : a_2 : a_3]$. Se $a_3 \neq 0$, isto corresponde ao sub-conjunto algébrico $V_q = \Pi_n(a_3.F_1 - a_1.F_3 = a_3.F_2 - a_2.F_3 = 0)$. Se $q \notin VC(f)$ então $V_q \setminus I(f)$ é lisa de codimensão dois e grau m^2 e do tipo interseção completa : $V_q = \Pi_n[(a_3.F_1 - a_1.F_3 = 0) \cap (a_3.F_2 - a_2.F_3 = 0)]$. A condição (b) da definição de $Gen(n, m)$ implica então que V_q é lisa nos pontos de $I(f)$. É conhecido também que uma interseção completa de dimensão maior que um em \mathbb{P}^n é conexa (teorema de Lefschetz). Portanto, se $q \notin VC(f)$ então V_q é irredutível. Provamos então que cada V_i é lisa irredutível, interseção completa e de grau m^2 . Por outro lado, se $p \in V_i \setminus I(f)$ então f é uma submersão de uma vizinhança A de p numa vizinhança B de p_i , na qual a folheação \mathcal{G} é representada por uma forma holomorfa η tal que $d\eta \neq 0$, logo \mathcal{F} é representada por $f^*(\eta)$, onde $d f^*(\eta) \neq 0$. Portanto, p é de Kupka para \mathcal{F} . Vemos então que $\bigcup_i V_i \subset K(\mathcal{F})$. Deixamos a prova de que $K(\mathcal{F}) \subset \bigcup_i V_i$ para o leitor (veja o Ex. 2.6). \square

Fixemos $\mathcal{F}_o = f^*(\mathcal{G}) \in U$ e um germe de família holomorfa $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ de folheações tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_o$. Sejam $\text{sing}(\mathcal{G}) = \{p_1, \dots, p_{N(k)}\}$ e $K(\mathcal{F}_o) = \bigcup_i V_i$, $V_i = \overline{f^{-1}(p_i)}$.

Lema 2.3.2. *Existe um germe de isotopia de classe C^∞ , $(I(t))_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$, com as seguintes propriedades :*

- (a). $I(0) = I(f)$ e $I(t)$ é algébrico e liso de codimensão três para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$.
- (b). Para todo $p \in I(t)$, existe uma vizinhança $W(p, t) = W$ de p tal que $\mathcal{F}_t|_W$ é equivalente ao produto de uma folheação regular de codimensão três por uma folheação singular de codimensão um definida por uma 1-forma $\omega_{p,t}$. Além disto, $\omega_{p,t}$ representa uma folheação $\mathcal{G}_{p,t} \in S(2, k)$ e o germe de família $(\omega_{p,t})_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ é holomorfo.

Prova. No caso $n = 3$ isto é consequência do corolário 2.1.2 do teorema 2.1, já que $I(f)$ é finito. No caso $n > 3$ consideramos uma vizinhança tubular C^∞ , $\pi: W \rightarrow I(f)$, de $I(f)$ com fibras $B_z := \pi^{-1}(z) \simeq B^3$, onde B^3 é uma bola de dimensão complexa 3. Isto é possível porque a variedade $I(f)$ é lisa de codimensão três (veja [Hi]). A idéia é construir um germe de aplicação C^∞ , $\psi: (\mathbb{C}, 0) \times I(f) \rightarrow W$ tal que para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$ temos $\psi(t, z) \in B_z$. Vamos trabalhar com um representante do germe $(\mathcal{F}_t)_t$, definido num disco $D = (|t| < \epsilon) \subset \mathbb{C}$.

Fixemos $p \in I(f)$ e uma carta local holomorfa em p , $\Phi = (x, y): V \rightarrow \mathbb{C}^{n-3} \times \mathbb{C}^3$, tal que $V_1 := V \cap I(f) = (y = 0)$, $\Phi(p) = (0, 0)$ e $V \subset W$. Dado $z_o = (x_o, 0) \in V \cap I(f)$, seja $F_z = (x = x_o) \subset \{x_o\} \times \mathbb{C}^3$. Para $z = (x, 0) \in V_1$ fixo, sabemos que $\mathcal{F}_0|_{B_z}$ tem uma s.s.n. do tipo $[1 : 1 : 1]$ em z . Pelo corolário 2.1.2 existem $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon$ e uma aplicação holomorfa $\psi_z: (|t| < \epsilon_1) \rightarrow F_z$ tal que $\mathcal{F}_t|_{F_z}$ tem uma s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ em $\psi_z(t)$. Podemos escrever $\phi_z(t) = (x, Y(t, x))$, onde $t \mapsto Y(t, x) \in \mathbb{C}^3$ é holomorfa. A estrutura de produto local holomorfo para \mathcal{F}_t no ponto $(x, Y(t, x))$ implica que o germe $(t, x) \mapsto Y(t, x)$ é holomorfo (verifique). Podemos definir Y como função holomorfa numa vizinhança C de $\{0\} \times V$. Para t fixado, o gráfico gr_{Y_t} da aplicação $x \in C \cap (\{t\} \times \mathbb{C}^{n-3}) \mapsto Y(t, x)$ é uma sub-variedade holomorfa W .

Consideremos a fibração dada pela vizinhança tubular $\pi: W \rightarrow I(f)$. Como as fibras de π são transversais a $I(f)$, para $|t|$ pequeno, a fibra B_w corta gr_{Y_t} no máximo em um ponto, digamos $\psi(t, w)$. Para $t = 0$, temos $Y(0, x) = 0$, logo, $\psi(0, w) = w$, ou seja ψ está definida numa vizinhança de $\{0\} \times V_1$. Note que a aplicação ψ é C^∞ no seu domínio. Para terminar, observemos que a aplicação ψ não depende da carta em p , (V, Φ) , considerada, já que o ponto $\psi(t, w)$ pode ser definido como a única s.s.n. em B_w de \mathcal{F}_t . Tomando uma cobertura de $I(f)$ por domínios de cartas locais como acima, podemos estender ψ a um germe de aplicação $\psi: (\mathbb{C}, 0) \times I(f) \rightarrow W$ tal que $\psi(t, w) \in B_w$ é a única s.s.n. de \mathcal{F}_t em B_w , para todo $t \in (\mathbb{C}, 0)$. Como $I(f)$ é compacto, este germe tem um representante, denotado pela mesma letra, $\psi: (|t| < \delta) \times I(f) \rightarrow W$, $\delta > 0$. Colocando $I(t) = \psi(\{t\} \times I(f))$, temos a isotopia desejada.

A afirmação (b) é consequência do teorema de redução de variáveis da seção 1.4.2. Este teorema implica também que $I(t)$ é uma sub-

variedade holomorfa lisa de codimensão tres. \square

Observação 2.3.2. No caso $n > 3$ a variedade $I(t)$ é conexa, já que $I(f)$ é conexa (teorema de Lefschetz). A estrutura de produto local em $I(t)$ implica então que o tipo transversal de \mathcal{F}_t ao longo de $I(t)$ é constante. Em particular, $\mathcal{G}(p, t)$ não depende de $p \in I(t)$. No caso $n = 3$, no entanto, $I(t) = \{q_1(t), \dots, q_{m^3(t)}\}$ e não podemos garantir a priori que $\mathcal{G}(q_i(t)) = \mathcal{G}(q_j(t))$, se $i \neq j$.

Como no lema anterior vamos considerar um representante do germe $(\mathcal{F}_t)_t$ definido num disco $D_\delta := (|t| < \delta)$.

Lema 2.3.3. *Existem $\epsilon > 0$ e isotopias de classe C^∞ , $\phi_i: D_\epsilon \times V_i \rightarrow \mathbb{P}^n$, $i = 1, \dots, N(k)$, tais que se $V_i(t) = \phi_i(\{t\} \times V_i)$ então :*

- (a). $V_i(t)$ é sub-variedade algébrica lisa de codimensão dois de \mathbb{P}^n e $V_i(0) = V_i$, para todo $i = 1, \dots, N(k)$ e todo $t \in D_\epsilon$.
- (b). $I(t) \subset V_i(t)$, para todo $i = 1, \dots, N(k)$ e todo $t \in D_\epsilon$. Além disso, se $i \neq j$ então $V_i(t) \cap V_j(t) = I(t)$, para todo $t \in D_\epsilon$, sendo a interseção transversal.
- (c). $V_i(t) \setminus I(t)$ está contido no conjunto de pontos de Kupka de \mathcal{F}_t , para todo $i = 1, \dots, N(k)$ e todo $t \in D_\epsilon$. Em particular, em cada $V_i(t)$ o tipo transversal de \mathcal{F}_t é constante e coincide com o tipo transversal de alguma singularidade de $\mathcal{G}(p, t)$, para algum $p \in I(t)$.

Prova. Fixemos $i \in \{1, \dots, N(k)\}$. Como V_i é lisa de codimensão dois, existe uma vizinhança tubular $\pi_1: A_1 \rightarrow V_i$ de classe C^∞ de V_i tal que a fibra $F_z := \pi_1^{-1}(z)$ é difeomorfa a uma bola B^2 de dimensão complexa dois. Podemos supor que π_1 é compatível com π , onde π é como no lema 2.3.2, isto é, se $z_o \in I(f)$ e $z \in V_i \cap B_{z_o}$ então $F_z \subset B_{z_o}$ (veja [Hi]). O argumento é o mesmo do lema precedente : vamos construir um germe de aplicação C^∞ , $\phi: (\mathbb{C} \times V_i, \{0\} \times V_i) \rightarrow A_1$ tal que $\phi(t, z) \in F_z$ para todo t . Como V_i é compacta, ϕ tem um representante $\phi: D_\epsilon \times V_i \rightarrow A_1$ e tomamos $V_i(t) = \phi(\{t\} \times V_i)$.

Fixemos $z_o \in V_i \setminus I(f)$. Afirmamos que existe um germe de aplicação $\phi_{z_o}: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow F_{z_o}$ tal que $\phi_{z_o}(t)$ é uma singularidade de Kupka de \mathcal{F}_t , para todo t (onde está definida). Com efeito, seja

$(\omega_t)_{t \in D_\delta}$ uma família holomorfa de 1-formas holomorfas integráveis tal que ω_t representa \mathcal{F}_t numa vizinhança fixa W_{z_o} de z_o em \mathbb{P}^n . Como $d\omega_0(z_o) \neq 0$, tomamos W_{z_o} de forma que $d\omega_0(p) \neq 0$ para todo $p \in W_{z_o}$. Seja $\epsilon(z_o) > 0$ tal que, se $|t| < \epsilon(z_o)$ então $d\omega_t(p) \neq 0$ para todo $p \in W_{z_o}$. Com isto, se $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_t) \cap W_{z_o}$ então p é de Kupka para \mathcal{F}_t , se $|t| < \epsilon(z_o)$. Vamos agora utilizar a estrutura transversal local de produto para \mathcal{F}_o . Como F_{z_o} é transversal a V_i e $\mathcal{F}_o = \mathcal{F}_0$ tem uma singularidade de Kupka em z_o , $\omega_0|_{F_{z_o}}$ tem uma singularidade de multiplicidade um em $z_o \in F_{z_o} \simeq B^2$. Como estas singularidades são estáveis por perturbações, existe um germe de aplicação C^∞ , $\phi_{z_o}: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow F_{z_o}$, tal que $\phi_{z_o}(t)$ é uma singularidade de multiplicidade um de $\omega_t|_{F_{z_o}}$, para todo t . O ponto $\phi_{z_o}(t)$ é uma singularidade de \mathcal{F}_t (verifique), para todo t tal que $\phi_{z_o}(t) \in W_{z_o}$, logo é de Kupka. Com isto construímos um germe de aplicação C^∞ ,

$$\phi: (\mathbb{C} \times (V_i \setminus I(f)), \{0\} \times (V_i \setminus I(f))) \rightarrow A_1,$$

tal que $\phi(t, z) \in F_{z_o}$ e $\phi(t, z)$ é singularidade de Kupka de \mathcal{F}_t , para todo t .

Vamos agora estender o germe ϕ aos pontos de $\{0\} \times I(f)$. Fixemos $z_o \in I(f)$. Como vimos, existem vizinhança W_{z_o} de z_o e uma submersão $g: W_{z_o} \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que $\mathcal{F}_o|_{W_{z_o}}$ é representada por $\omega = g^*(\alpha)$, onde α representa a folheação $\mathcal{G} \in S(2, k)$ de \mathbb{P}^2 em coordenadas homogêneas. Temos $\mathcal{F}_o|_{W_{z_o}} = g^*(\Pi_2^*(\mathcal{G}))$ e $V_i \cap W_{z_o} = g^{-1}(\Pi_2^{-1}(p_i))$, com $p_i \in \text{sing}(\mathcal{G})$. Além disto, existe uma família holomorfa de 1-formas $(\omega_t)_{|t| < \delta}$ tal que $\omega_0 = \omega$ e ω_t representa $\mathcal{F}_t|_{W_{z_o}}$, para todo $|t| < \delta$. Pela construção do lema 2.3.2, $\psi(t, z_o)$ é uma s.s.n. de tipo $[1 : 1 : 1]$ de $\omega_t|_{B_{z_o}}$, para $t \in D_\epsilon$. A forma $\omega_t|_{B_{z_o}}$, em algum um sistema de coordenadas local em $\psi(t, z_o)$, representa uma folheação $\Pi_2^*(\mathcal{G}_t)$, onde \mathcal{G}_t é folheação holomorfa de \mathbb{P}^2 e a família $(\mathcal{G}_t)_{t \in D_\epsilon}$ é holomorfa, com $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. Como $S(2, k) \cap G(2, k)$ é aberto em $\text{Fol}(2, k)$, podemos supor que para $|t| < \epsilon$, $\mathcal{G}_t \in S(2, k) \cap G(2, k)$ e tem uma singularidade $p_i(t)$ tal que a aplicação $t \mapsto p_i(t) \in \mathbb{P}^2$ é holomorfa e $p_i(0) = p_i$. Isto implica que $\text{sing}(\omega_t|_{B_{z_o}})$ possui uma componente irredutível $S_i(t)$ de codimensão dois e lisa que corresponde à singularidade $p_i(t)$, sendo $S_i(0) = V_i \cap B_{z_o}$. Como $\mathcal{G}_t \in S(2, k)$, todo ponto $q \in S_i(t) \setminus \{\psi(t, z_o)\}$ é de Kupka para \mathcal{F}_t . A família $(S_i(t))_{t \in D_\epsilon}$ é uma deformação analítica do germe de $V_i \cap B_{z_o}$ em z_o .

Vamos agora utilizar a condição de compatibilidade. Como $S_i(0) = V_i \cap B_{z_o}$, para todo $z \in V_i \cap B_{z_o}$, $S_i(0)$ é transversal a $F_z \subset B_{z_o}$ em B_{z_o} . Logo, existem uma vizinhança C de z_o em $S_i(0)$ e $\epsilon_1 > 0$ tais que $S_i(t)$ é transversal a F_z para todo $z \in C$ e todo $t \in D_{\epsilon_1}$. Neste caso, fixado $z \in C$, se $|t|$ é suficientemente pequeno, $S_i(t) \cap F_z$ contém um único ponto $\zeta(t, z)$ e o germe de função $\zeta: (C \times C, \{o\} \times C) \rightarrow B_{z_o}$ é de classe C^∞ . Observe que os germes ϕ e ζ coincidem ao longo de $\{0\} \times (C \setminus \{z_o\})$, já que se $z \in C \setminus \{z_o\}$ e $|t|$ é suficientemente pequeno então $\phi(t, z) \in F_z$ e $\zeta(t, z) \in F_z$ são singularidades de Kupka de \mathcal{F}_t e só existe uma tal singularidade em F_z . Como $z_o \in I(f)$ é arbitrário, obtivemos uma extensão C^∞ do germe ϕ ao longo de $\{0\} \times V_i$, como queríamos. \square

Em seguida, construiremos $\epsilon > 0$ e famílias holomorfas de aplicações racionais $(f_t)_{t \in D_\epsilon}$ e de folheações $(\mathcal{G}_t)_{t \in D_\epsilon}$, tais que $\mathcal{F}_t = f_t^*(\mathcal{G}_t)$, para todo $|t| < \epsilon$. Como $k \geq 2$ a folheação \mathcal{G} possui $k^2 + k + 1 > 3$ singularidades. Podemos então supor que $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$ e $p_3 = [0 : 0 : 1]$. Isto significa que se $F = (F_1, F_2, F_3)$, é a expressão homogênea de f , então V_1 , V_2 e V_3 são as interseções completas $\Pi_n(F_2 = F_3 = 0)$, $\Pi_n(F_1 = F_3 = 0)$ e $\Pi_n(F_1 = F_2 = 0)$, respectivamente. Vamos agora utilizar um resultado de geometria algébrica que garante que uma pequena deformação de uma interseção completa de codimensão dois lisa é uma interseção completa lisa (veja [Ca]). Mais precisamente, como V_1 e V_2 são interseções completas transversais, existe $\epsilon > 0$ tal que se $|t| < \epsilon$ então $V_1(t)$ e $V_2(t)$ são interseções completas transversais $V_1(t) = \Pi_n(F_2(t) = F_3(t) = 0)$ e $V_2(t) = \Pi_n(F_1(t) = \hat{F}_3(t) = 0)$, sendo que as famílias de polinômios, de grau m , $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ e $\hat{F}_3(t)$, $t \in D_\epsilon$, são holomorfas e $F_1(0) = F_1$, $F_2(0) = F_2$ e $F_3(0) = \hat{F}_3(0) = F_3$. Definimos então $f(t)$ como o projetivizado de $F(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t))$. Como $Gen(n, m)$ é aberto, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $|t| < \epsilon_1$ então $f(t) \in Gen(n, m)$. Afirmamos que $V_i(t)$ é fibra de $f(t)$ para todo t próximo de $t = 0$.

Com efeito, seja $J(t) = \Pi_n(F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0)$. Provemos primeiramente que $J(t) = I(t)$ se $|t| < \epsilon_1$. De fato, $I(t) = V_1(t) \cap V_2(t) = \Pi_n(F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = \hat{F}_3(t) = 0) \subset J(t)$. No caso $n = 3$ tanto $J(t)$ quanto $I(t)$ são conjuntos finitos contendo m^3 pontos, logo $I(t) = J(t)$. No caso $n > 3$, $J(t)$ é liso de codimensão três e conexo (teorema de Lefschetz). Neste caso, como $I(t)$ tem a mesma

dimensão temos $I(t) = J(t)$. Em particular, obtivemos que

$$I(t) = \Pi_n(F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0) \subset V_2(t) \subset \Pi_n(\hat{F}_3(t) = 0) .$$

Vamos agora utilizar o teorema de Noether, o qual pode ser enunciado no caso em que estamos interessados, como se segue. Seja $G_1, \dots, G_k \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ onde $1 \leq k \leq m$ e $m \geq 2$. Seja $X = (G_1 = \dots = G_k = 0)$. Suponha que o conjunto $Y := \{p \in X \mid dG_1(p) \wedge \dots \wedge dG_k(p) = 0\}$ é finito. Se $G \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ é tal que $G|_X \equiv 0$ então $G \in \langle G_1, \dots, G_k \rangle$, o ideal gerado por G_1, \dots, G_k .

No nosso caso, tomamos $k = 3$, $G_1 = F_1(t)$, $G_2 = F_2(t)$ e $G_3 = F_3(t)$. Neste caso $Y = \{0\}$. Logo, vale o teorema de Noether e temos $\hat{F}_3(t) \in \langle F_1(t), F_2(t), F_3(t) \rangle$. Utilizando o fato de que todos os polinômios envolvidos são homogêneos de mesmo grau m , obtemos que

$$\hat{F}_3(t) = f_1(t).F_1(t) + f_2(t).F_2(t) + f_3(t).F_3(t) ,$$

onde $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_3(0) = 1$ e $f_i(t) \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 3$. Isto implica que $V_2(t)$ é uma fibra de $f(t)$, como o leitor pode verificar. Analogamente, se $V_i(t) = \Pi_n(H_1^i(t) = H_2^i(t) = 0)$, utilizando que $I(t) \subset V_i(t)$, prova-se, utilizando o teorema de Noether, que $H_1^i(t), H_2^i(t) \in \langle F_1(t), F_2(t), F_3(t) \rangle$ e que $V_i(t)$ é fibra de $f(t)$, para todo t suficientemente pequeno. Deixamos os detalhes para o leitor.

Obtivemos então uma família holomorfa de aplicações racionais $(f(t))_{t \in D_\epsilon}$ tal que $V_i(t)$ é fibra de $f(t)$ para todo $t \in D_\epsilon$ e todo $i \in \{1, \dots, N(k)\}$. Diminuindo $\epsilon > 0$, se necessário, vamos agora definir uma família $(\mathcal{G}(t))_{t \in D_\epsilon}$, tal que $\mathcal{F}(t) = f(t)^*(\mathcal{G}(t))$, para todo $|t| < \epsilon$. No caso $n > 3$, sabemos que $I(t)$ é conexo e que $\mathcal{F}(t)$ é localmente equivalente ao longo de $I(t)$ ao produto de um germe de folheação regular de codimensão três por um germe de folheação singular em $(\mathbb{C}^3, 0)$ do tipo $\Pi_3^*(\mathcal{G}(t))$, onde $\mathcal{G}(t) \in \text{Fol}(2, k)$, sendo $t \mapsto \mathcal{G}(t)$ holomorfa. No caso $n = 3$, tomamos $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(q_1(t))$ (veja a observação 2.3.2). Como $S(2, k) \cap G(2, k)$ é aberto podemos supor que $\mathcal{G}(t) \in S(2, k) \cap G(2, k)$, se $|t| < \epsilon$. Defina $\hat{\mathcal{F}}(t) = f(t)^*(\mathcal{G}(t)) \in PB(n, m, k)$. O próximo resultado implica o teorema.

Lema 2.3.4. *Existe $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_1 \leq \epsilon$, tal que $\hat{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(t)$, se $|t| < \epsilon_1$.*

Prova. Vamos considerar primeiramente o caso $n = 3$. Sejam $I(t) = \{q_1(t), \dots, q_{m^3}(t)\}$ e $M(t)$ a variedade racional obtida de \mathbb{P}^3

após blowing-ups pontuais em $q_1(t), \dots, q_{m^3}(t)$. Seja $\pi(t): M(t) \rightarrow \mathbb{P}^3$ a aplicação de blowing-up. O divisor excepcional de $\pi(t)$ consiste de m^3 sub-variedades $E_j(t) = \pi(t)^{-1}(q_j(t))$, $1 \leq j \leq m^3$, biholomorfas a \mathbb{P}^2 . Denotemos $\mathcal{F}_1(t) = \pi(t)^*(\mathcal{F}(t))$ e $\hat{\mathcal{F}}_1(t) = \pi(t)^*(\hat{\mathcal{F}}(t))$. Gostaríamos de observar que a aplicação $f(t) \circ \pi(t): M(t) \setminus \cup_j E_j(t) \rightarrow \mathbb{P}^2$ se estende a uma aplicação holomorfa $f_1(t): M(t) \rightarrow \mathbb{P}^2$, se $|t|$ é suficientemente pequeno. Isto é consequência de que $dF_1(t)(q_j(t)) \wedge dF_2(t)(q_j(t)) \wedge dF_3(t)(q_j(t)) \neq 0$, $1 \leq j \leq m^3$, se $|t|$ é pequeno (veja o Ex. 2.7). A aplicação $f(t)$ pode ser interpretada como se segue. Cada fibra de $f(t)$ passa por $q_1(t)$ uma única vez, o que implica que cada fibra de $f_1(t)$ corta transversalmente $E_1(t)$ uma única vez. Como $M(t) \setminus \cup_j E_j(t)$ é biholomorfa a $\mathbb{P}^3 \setminus I(t)$, identificando $E_1(t)$ com \mathbb{P}^2 , podemos imaginar que, se $q \in M(t) \setminus \cup_j E_j(t)$ então $f(t)(q) = 0$ o ponto de interseção da fibra $f_1(t)^{-1}(f_1(t)(q))$ com $E_1(t)$. Com esta interpretação em mente, temos

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{F}_1(t)|_{E_1(t)} = \hat{\mathcal{F}}_1(t)|_{E_1(t)}.$$

A primeira igualdade vem do fato de que $\mathcal{F}(t)$ é representada numa carta local por uma 1-forma $\omega(t)$, que representa $\mathcal{G}(t)$ em coordenadas homogêneas. A segunda decorre de que $\hat{\mathcal{F}}_1 = f_1(t)^*(\mathcal{G}(t))$. Como $t \mapsto p_1(t) \in \mathbb{P}^2$ é holomorfa, existe uma família holomorfa de automorfismos de \mathbb{P}^2 , $t \mapsto A(t)$ tal que $A(t)(0) = p_1(t)$. Substituindo, se necessário, $\mathcal{G}(t)$ por $A(t)^*(\mathcal{G}(t))$, podemos supor que $p_1(t) = [0 : 0 : 1] \in E_1(t) \simeq \mathbb{P}^2$. Seja $V_1^1(t)$ o transformado estrito de $V_1(t)$ por $\pi(t)$. Tendo-se em vista as identificações anteriores, podemos supor que $V_1^1(t) = f_1(t)^{-1}[0 : 0 : 1]$. No sistema de coordenadas afim $A = (x_1, x_2) = [x_1, x_2, 1]$ de \mathbb{P}^2 temos $p_1(t) = (0, 0)$. Seja $X(t) = P(x_1, x_2, t)\partial/\partial x_1 + Q(x_1, x_2, t)\partial/\partial x_2$ um campo que representa $\mathcal{G}(t)$ em A , onde $t \mapsto X(t)$ é holomorfa. Existe uma família holomorfa $t \mapsto B(t)$ de rotações de $A \simeq \mathbb{C}^2$, tal que os auto-espacos de $D(B(t)^*(X(t)))(0)$ são os eixos x_1 e x_2 . Desta forma, substituindo se necessário $\mathcal{G}(t)$ por $B(t)^*(\mathcal{G}(t))$, podemos supor que $\mathcal{G}(t)$ tem uma separatriz $\gamma_1(t)$ tangente ao eixo x_1 , para $|t|$ pequeno. Correspondente a $\gamma_1(t)$ temos uma folha $\hat{L}(t)$ de $\hat{\mathcal{F}}_1(t)$. A folha $\hat{L}(t)$ é aquela que contém $f_1(t)^{-1}(\gamma(t))$ (lembrar que $\hat{\mathcal{F}}_1(t) = f_1(t)^*(\mathcal{G}(t))$). Por outro lado, $V_1^1(t)$ está contido no conjunto de Kupka de $\mathcal{F}_1(t)$, para $|t|$ pequeno. Com efeito, fora de $\cup_j E_j$ isto é claro. Em $E_1(t)$ isto decorre de que se $\Delta = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}$ então $\Delta(0, 0, 0) \neq 0$. Com um

argumento análogo prova-se que $V_1^1(t) \cap E_j(t)$ está no conjunto de Kupka de $\mathcal{F}_1(t)$ para todo $j = 2, \dots, m^3$. Utilizando agora a estrutura produto local de $\mathcal{F}_1(t)$ ao longo de $V_1^1(t)$ vemos que $\mathcal{F}_1(t)$ possui uma folha $L(t)$ tal que $L(t) \cap E_1(t) \supset \gamma_1(t)$. Afirmamos que $L(t)$ e $\hat{L}(t)$ coincidem para $|t|$ pequeno, isto é, $\mathcal{F}_1(t)$ e $\hat{\mathcal{F}}_1(t)$ têm uma folha não algébrica em comum. Como veremos no final, isto implicará que $\mathcal{F}(t) = \hat{\mathcal{F}}(t)$.

De fato, fixemos uma bola $B \subset A \simeq \mathbb{C}^2$ com centro em 0 tal que 0 é a única singularidade de $\mathcal{G}(t)$ em \bar{B} para todo $|t| < \epsilon$. Seja $V(t) := f_1(t)^{-1}(B)$ e coloquemos $f_1(t) = (g(t), h(t))$, onde $g(t), h(t): V(t) \rightarrow \mathbb{C}$. Se S é uma curva holomorfa compacta contida em $V(t)$ então S é necessariamente uma fibra de $f_1(t)$. Isto decorre do princípio do máximo aplicado à função holomorfa $f_1(t)|_S: S \rightarrow B$. Como $\gamma(t)$ é tangente ao eixo x_1 , ela é o gráfico de uma função ϕ_t , isto é, $\gamma(t) = (x_2 - \phi(x_1, t) = 0)$, onde $\phi(0, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0, t) = 0$. Podemos tomar o domínio da função ϕ_t uniforme, isto é, existem $r > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que se $|t| < \epsilon$ e $|x_1| < r$ então $\phi_t: (|x_1| < r) \rightarrow \mathbb{C}$. Como $\mathcal{F}_1(0) = \hat{\mathcal{F}}_1(0)$, então $L(0) = \hat{L}(0)$. Portanto para $|a| < r$ a folha $L(0) = \hat{L}(0)$ corta transversalmente a superfície $f_1^{-1}(x_1 = a) = g(0)^{-1}(a)$ na curva $(g(0) = a, h(0) = \phi(a, 0)) \subset V(0)$. Por transversalidade, podemos garantir que existe $0 \leq r_1 < r$ tal que se $|a| < r_1$ então a folha $L(t)$ corta transversalmente a superfície $g(t)^{-1}(a)$ numa curva holomorfa contida em $V(t)$. Esta curva é uma fibra de $f_1(t)$, logo é a fibra que contém o ponto $(a, \phi(a, t)) \in \gamma_1(t)$. Decorre daí que $L(t)$ e $\hat{L}(t)$ coincidem numa vizinhança de $V_1^1(t)$. Logo $L(t) = \hat{L}(t)$, se $|t|$ é pequeno.

Concluimos acima que $\mathcal{F}_1(t)$ e $\hat{\mathcal{F}}_1(t)$ têm uma folha comum, $L(t)$. Isto implica que $F(t) := \pi(t)(L(t))$ é uma folha de ambas as folheações $\mathcal{F}(t)$ e $\hat{\mathcal{F}}(t)$. Seja $T(t) := \text{Tang}(\mathcal{F}(t), \hat{\mathcal{F}}(t))$ o conjunto de tangências entre $\mathcal{F}(t)$ e $\hat{\mathcal{F}}(t)$. Este conjunto pode ser definido por $T(t) = \Pi_3(\{z \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \mid \Omega(t) \wedge \hat{\Omega}(t) = 0\})$, onde $\Omega(t)$ e $\hat{\Omega}(t)$ definem $\mathcal{F}(t)$ e $\hat{\mathcal{F}}(t)$, respectivamente. Portanto é um conjunto algébrico. Como ele contém uma superfície imersa não algébrica de dimensão dois, $L(t)$, temos necessariamente $T(t) = \mathbb{P}^3$. Isto prova o teorema no caso $n = 3$.

Suponhamos que $n \geq 4$. O argumento anterior implica que se H é um 3-plano genérico de \mathbb{P}^n (veja a proposição 1.4.3) então $\mathcal{F}(t)|_H = \hat{\mathcal{F}}(t)|_H$. Com efeito, tais planos cortam transversalmente todos os

estratos do conjunto singular, e em particular $I(t)$ em m^3 pontos. Isto implica que $f(t)|_H$ tem posto dois para todo $|t| < \epsilon$ (verifique). Podemos então aplicar o argumento do caso $n = 3$. Isto implica que $\mathcal{F}(t) = \hat{\mathcal{F}}(t)$ e termina a prova do lema e do teorema (veja o exercício Ex. 2.8). \square \square

Observação 2.3.3. O resultado do teorema 2 é ainda verdadeiro nos casos $k = 0, 1$ e $m \geq 2$, isto é, $PB(n, m, k)$ é componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, \ell(m, k))$, para $k = 0, 1$. Nestes casos, $PB(n, m, k)$ coincide com outras componentes que serão estudadas no próximo capítulo (Teorema 3 e corolário 3.3.1 do teorema 4).

2.4 Exercícios.

Ex. 2.1. Prove as soluções do sistema

$$k_1 \cdot \lambda_1 - \lambda_{r(1)} = k_2 \cdot \lambda_2 - \lambda_{r(2)} = k_3 \cdot \lambda_3 - \lambda_{r(3)} = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \neq 0$$

são racionais positivas, se $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.

Ex. 2.2. Sejam L e N operadores lineares em \mathbb{C}^m tais que $\det(L) \neq 0$ e $[L, N] = \alpha \cdot N$ onde $\alpha \neq 0$. Prove que N é nilpotente.

Ex. 2.3. Prove que $PB(n, m, k) \subset \mathbb{F}ol(n, m(k+2) - 2)$.

Ex. 2.4. Prove que o conjunto das aplicações racionais genéricas de grau m , $Gen(n, m)$, é um aberto de Zariski não vazio do conjunto de todas as aplicações racionais de grau m de \mathbb{P}^n em \mathbb{P}^2 .

Ex. 2.5. Seja $f: \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^2$ uma aplicação racional não constante de grau $m \geq 2$. Prove que o conjunto de valores críticos de f é uma curva algébrica de \mathbb{P}^2 .

Ex. 2.6. Prove que a última afirmação da prova do lema 2.3.1 : $K(\mathcal{F}) \subset \cup_i V_i$.

Ex. 2.7. Sejam $f \in Gen(3, m)$ e M a variedade obtida explodindo os m^3 pontos de \mathbb{P}^3 em $I(f)$. Seja $\pi: M \rightarrow \mathbb{P}^3$ a aplicação de blowing-up. Prove que $f \circ \pi: M \setminus \pi^{-1}(I(f)) \rightarrow \mathbb{P}^2$ se estende a uma aplicação holomorfa $f_1: M \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Ex. 2.8. Seja $A \subset Gr(k, n)$ um conjunto denso de k -planos de \mathbb{P}^n , $k \geq 2$. Sejam \mathcal{F} e $\hat{\mathcal{F}}$ duas folheações tais que $\mathcal{F}|_H = \hat{\mathcal{F}}|_H$ para todo $H \in A$. Prove que $\mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}$.

Capítulo 3

Folheações definidas por formas fechadas.

Neste capítulo veremos que, para todo $n \geq 3$ e todo $k \geq 0$, existem componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, k)$ em que todas as folheações são definidas por formas fechadas. Na seção 3.2 serão vistas as componentes *racionais*, nas quais todas as folheações possuem uma integral primeira racional. Na seção 3.3 serão estudadas as componentes do tipo *logarítmico*. A seção 3.1 será dedicada a apresentar alguns resultados de extensão de estruturas transversais projetivas e afins, que serão utilizadas nas provas dos teoremas principais.

3.1 Extensão de estruturas transversais.

Lembremos que uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^n , definida por uma 1-forma meromorfa ω , admite uma estrutura transversal afim com polos num aberto $U \subset \mathbb{P}^n$ se, e somente se, existe uma 1-forma meromorfa fechada em U , η , tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$ (veja a proposição 1.5.2). Ela possui uma estrutura transversal projetiva com polos em U se, e somente se, existem 1-formas meromorfas em U , ω_1 e ω_2 , tais que $d\omega = \omega_1 \wedge \omega$, $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1$ (veja o teorema 1.15). Portanto, a extensão de tais estruturas a \mathbb{P}^n , se reduz a estender as formas meromorfas em U a formas meromorfas em \mathbb{P}^n . O resultado

principal que utilizaremos é o seguinte :

Teorema 3.1. *Sejam E um fibrado vetorial holomorfo em \mathbb{P}^n e X um sub-conjunto algébrico de \mathbb{P}^n definido em coordenadas homogêneas por k polinômios, onde $1 \leq k \leq n-1$. Seja V uma vizinhança conexa de X . Então toda seção meromorfa (resp. holomorfa) de E em V , se estende a uma seção meromorfa (resp. holomorfa) de E em \mathbb{P}^n .*

A prova do teorema é baseada no teorema de extensão de Levi, no caso meromorfo, e no de Hartogs, no caso holomorfo. Como ela é razoavelmente longa, não será feita aqui. Recomendamos ao leitor as referências [Sc-LN] e [Si]. Deste teorema, obtemos as seguintes conseqüências :

Corolário 3.1.1. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um sub-conjunto algébrico interseção completa de codimensão um ou dois, onde $n \geq 3$. Seja V uma vizinhança conexa de X . Então toda k -forma meromorfa em V se estende a uma k -forma meromorfa em \mathbb{P}^n .*

Observamos que um sub-conjunto algébrico de \mathbb{P}^n , tipo interseção completa e de dimensão ≥ 1 , é conexo. Em particular X possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas.

Corolário 3.1.2. *Sejam \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, e $X \subset \mathbb{P}^n$ um sub-conjunto algébrico interseção completa de codimensão um ou dois. Seja V uma vizinhança conexa de X . Se \mathcal{F} tem uma estrutura transversal afim (resp. projetiva) com polos numa vizinhança conexa V de X , então esta estrutura se estende a uma estrutura transversal afim (resp. projetiva) com polos de \mathcal{F} em \mathbb{P}^n .*

Uma outra conseqüência, que será utilizada mais à frente, é a seguinte :

Proposição 3.1.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, tal que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Seja $2 \leq k < n$ e suponha que existem um k -plano H , em posição geral com \mathcal{F} , e uma 1-forma meromorfa fechada ω em H , tal $\mathcal{F}|_H$ é definida por ω . Então ω se estende a uma única forma meromorfa fechada η em \mathbb{P}^n que define \mathcal{F} em \mathbb{P}^n .*

Prova. Afirmamos que ω se estende meromorficamente a uma 1-forma α numa vizinhança V de H , que define \mathcal{F} em V .

Seja $S = \text{sing}(\mathcal{F}|_H)$. Primeiramente, vamos provar que ω se estende a uma vizinhança de $H \setminus (|\omega|_\infty \cup S)$. Fixemos $p \in H \setminus (|\omega|_\infty \cup S)$. Como $S \supset \text{sing}(\mathcal{F}) \cap H$, p não é singularidade de \mathcal{F} . Além disto, $T_p\mathcal{F}$ é transversal a T_pH . Logo, existe um sistema de coordenadas local $(W, (x, y, z) \in \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-k})$ tal que $p \in W$, $x(p) = 0 \in \mathbb{C}^{k-1}$, $y(p) = 0 \in \mathbb{C}$, $z(p) = 0 \in \mathbb{C}^{n-k}$, $H \cap W = (z = 0)$ e $\mathcal{F}|_W$ é definida pela forma dy , isto é, as suas folhas são as hipersuperfícies $(y = cte)$. Como ω representa \mathcal{F} fora de $|\omega|_\infty \cup |\omega|_0$, temos necessariamente $\omega|_{W \cap H} = f \cdot dy$, onde $f \in \mathcal{O}(W \cap H)$. Logo, $0 = d\omega = df \wedge dy$, o que implica que $f = f(y)$, ou seja só depende de y . Em particular, a forma $f(y)dy$ estende $\omega|_{W \cap H}$ a W . Coloquemos $\alpha_W = f(y)dy \in \Omega^1(W)$. A forma α_W representa \mathcal{F} em $W \setminus |\alpha_W|_0$. Seja $(W_j)_{j \in J}$ uma cobertura de $H \setminus (|\omega|_\infty \cup S)$ por abertos de \mathbb{P}^n , onde em cada W_j está definida uma forma holomorfa fechada α_j que representa \mathcal{F} em $W_j \setminus |\alpha_j|_0$ e $\alpha_j|_{W_j \cap H} = \omega|_{W_j \cap H}$. Se $W_i \cap W_j := W_{ij} \neq \emptyset$ então $\alpha_j = \alpha_i$ em W_{ij} . De fato, escrevendo as coordenadas $(W_j, (x, y, z))$ como anteriormente, obtemos que $\alpha_j = f_j(y)dy$ e que $\alpha_i = f_i(y)dy$ em W_{ij} . Como $0 = (\alpha_j - \alpha_i)|_{W_{ij} \cap H} = (f_j(y) - f_i(y))dy$, obtemos que $\alpha_j = \alpha_i$ em W_{ij} . Isto implica que ω se estende a uma forma fechada holomorfa α , como desejada, definida numa vizinhança de $H \setminus (|\omega|_\infty \cup S)$.

A forma α se estende meromorficamente a uma vizinhança de um ponto $p \in |\omega|_\infty \setminus S$. Com efeito, em primeiro lugar, todas componentes irredutíveis de $|\omega|_\infty$ são invariantes por $\mathcal{F}|_H$ (veja a proposição 1.2.5 e o Ex. 3.1). Como $p \notin \text{sing}(\mathcal{F}|_H) = S$, $|\omega|_\infty$ é liso em p . Neste caso, existe um sistema de coordenadas $(W, (x, y, z) \in \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-k})$ tal que $W \cap H = (z = 0)$, $\mathcal{F}|_{W \cap H}$ é definida por dy e $W \cap H \cap |\omega|_\infty = (y = 0)$. Como anteriormente, podemos escrever $\omega|_{W \cap H} = f(y)dy$, só que agora f tem um polo em $(y = 0)$. A forma $\alpha_W := f(y)dy$ estende meromorficamente $\omega|_{W \cap H}$ a W . Além disto, esta forma estende α a uma vizinhança de p (verifique). Desta maneira, estendemos ω a uma forma meromorfa fechada α , definida numa vizinhança V_1 de $H \setminus S$.

Resta agora estender ω a uma vizinhança de S . Para isto notamos que $\text{cod}_H(S) \geq 2$, ou seja, dado $p \in S$ existe um 2-plano $P \subset H$ tal que p é um ponto isolado de $P \cap S$ em P . Seja $(W, (x, y) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2})$ uma carta local em p tal que $P \cap W = (y = 0)$ e $p = (x = y = 0)$. Como p é isolado em $P \cap S$, existe $r > 0$ tal que se $\overline{B}_r := (y = 0, |x| \leq r)$ então $S \cap \overline{B}_r = \{(0, 0)\}$. Logo, $(y = 0, r/2 \leq |x| \leq r) \subset H \setminus S$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $\Delta_\epsilon := (|y| < \epsilon, r/2 < |x| < r) \subset V_1$, o aberto onde

α está definida. Observamos agora que Δ_ϵ é um domínio de Hartogs, cujo fecho analítico é $Q := (|y| < \epsilon, |x| < r)$ (veja [Sc-LN] ou [Si]). O teorema de extensão de Levi garante que α se estende a uma forma meromorfa em Q , logo a uma vizinhança de p . Denotando esta forma por α_Q , temos $d\alpha_Q|_{\Delta_\epsilon} = 0$, logo α_Q é fechada.

Com isto, estendemos ω a uma 1-forma meromorfa fechada α , definida numa vizinhança conexa V de H , que representa \mathcal{F} em V . Pelo teorema 3.1, α se estende a uma 1-forma meromorfa η em \mathbb{P}^n . Esta forma é necessariamente fechada, já que $d\eta|_V = 0$. Se \mathcal{G} é a folheação definida por η em \mathbb{P}^n , então \mathcal{F} e \mathcal{G} coincidem num aberto não vazio de \mathbb{P}^n , logo $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Isto prova o resultado. \square

3.2 Componentes racionais.

Nesta seção exibiremos algumas componentes de $\mathbb{F}ol(n, k)$, $n \geq 3$, em que todas as folheações têm integral primeira racional. Toda função racional f de \mathbb{P}^n , pode ser escrita na forma $f = P/Q$, onde P e Q são polinômios homogêneos do mesmo grau, ou seja, $f[z_0 : \dots : z_n] = P(z_0, \dots, z_n)/Q(z_0, \dots, z_n)$. Vamos supor que P e Q não têm fator comum. Em qualquer caso, a forma $\Omega := P dQ - Q dP$, define uma folheação em \mathbb{P}^n de codimensão um, $\mathcal{F}(f)$, em que f uma integral primeira. Por exemplo, se $P = F^{\ell \cdot p}$ e $Q = G^{\ell \cdot q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ são relativamente primos e $\ell > 1$, então $f = g^\ell$, onde $g = F^p/G^q$. Portanto, $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$. A idéia, é fixar um grau k para a folheação e procurar, dentre as que possuem integral primeira, aquelas em que qualquer deformação holomorfa em $\mathbb{F}ol(n, k)$ seja por folheações que têm integral primeira.

Exemplo 3.2.1. Sejam F_1, \dots, F_r polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} não constantes. Sejam n_1, \dots, n_r inteiros não nulos tais que $\sum_{j=1}^r n_j \cdot gr(F_j) = 0$. Esta última condição implica que existe uma função racional f em \mathbb{P}^n tal que $f[z] = F_1^{n_1}(z) \dots F_r^{n_r}(z)$ para todo $[z] \in \mathbb{P}^n$. A forma

$$\Omega := F_1 \dots F_r \frac{df}{f} = F_1 \dots F_r \sum_{j=1}^r n_j \frac{dF_j}{F_j}$$

define uma folheação em \mathbb{P}^n de grau $\sum_j gr(F_j) - 2$, já que $i_R \Omega = 0$.

Observe que se $r \geq 3$, a forma Ω admite a deformação não trivial

$$\Omega_\lambda := F_1 \dots F_r \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}, \quad \lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{C}^*)^r.$$

onde $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot gr(F_j) = 0$. A forma Ω_λ não possui integral primeira se $[\lambda_1 : \dots : \lambda_r] \notin \mathbb{P}(\mathbb{Q}^r)$.

O exemplo 3.2.1 nos motiva a procurar componentes irredutíveis que contenham folheações com integrais primeiras da forma $f = F^p/G^q$, onde $p = gr(G)$ e $q = gr(F)$, ou seja, definidas em coordenadas homogêneas pela forma $\Omega := pG dF - qF dG$. A folheação $\mathcal{F}(\Omega)$, definida por Ω , tem grau $k = gr(F) + gr(G) - 2$. Em princípio, $sing(\Omega)$ pode conter componentes de codimensão um. Diremos que o par (F, G) é *genérico*, se F e G são irredutíveis e se as hipersuperfícies definidas em \mathbb{P}^n por $(F = 0)$ e $(G = 0)$ são transversais. Estas condições implicam que

$$F(z) = G(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \implies dF(z) \wedge dG(z) \neq 0. \quad (3.1)$$

Observamos que, se (F, G) é um par genérico então $cod(sing(\Omega)) \geq 2$ (veja o Ex. 3.2). Além disto, se denotamos por $\mathcal{P}(n, q, p)$ o conjunto de todos os pares (F, G) , de polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} , onde $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$, então o sub-conjunto de pares genéricos, $G(n, q, p)$, é aberto e denso em $\mathcal{P}(n, q, p)$ (veja o Ex. 3.3).

Usaremos a notação: $\mathcal{R}(n; p, q) = \{\mathcal{F}(\Omega) \in \mathbb{F}ol(n, p+q-2) \mid \Omega = qF dG - pG dF, gr(F) = q \text{ e } gr(G) = p\}$. A prova do próximo resultado, pode ser encontrada em parte na referência [GM-LN]. A demonstração que daremos é baseada numa idéia contida em [Sc].

Teorema 3. *Seja (F, G) um par polinômios homogêneos genéricos em \mathbb{C}^{n+1} , $n \geq 3$, onde $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$. Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ um germe de família holomorfa de folheações de grau $p+q-2$ tal que \mathcal{F}_0 é definida em coordenadas homogêneas por $qF dG - pG dF$. Então $\mathcal{F}_t \in \mathcal{R}(n, q, p)$ para todo t . Em particular, $\mathcal{R}(n; p, q)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, p+q-2)$ para todo $n \geq 3$.*

Prova. Fixemos um germe de família holomorfa de folheações $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$, com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\Omega)$, sendo $\Omega := qF dG - pG dF$ e (F, G)

um par genérico, com $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$. O conjunto singular de \mathcal{F}_0 contém uma componente de Kupka $K_0 := \Pi_n(F = G = 0)$, de tipo transversal $X := qx\partial/\partial x + py\partial/\partial y$. Com efeito, (3.1) implica que se $w \in K_0$ então existe um sistema de coordenadas local em w , $(W, u := (x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2})$, tal que $u(w) = 0$ e $f(u) := \frac{F^p}{G^q}(u) = \frac{x^p}{y^q}$. Como f é integral primeira de \mathcal{F}_0 , esta folheação pode ser representada em W pela forma $\omega := qx\,dy - py\,dx$. Como $d\omega = (p+q)dx \wedge dy \neq 0$, K_0 é componente de Kupka com tipo transversal X , pois $i_X \omega = 0$.

Vamos considerar um representante do germe $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ definido em $(|t| < \delta)$.

Lema 3.2.1. *Existem $0 < \epsilon \leq \delta$, e uma isotopia C^∞ , $\psi: D_\epsilon \times K_0 \rightarrow \mathbb{P}^n$ tais que :*

- (a). $K_t := \psi(\{t\} \times K_0)$ é componente de Kupka de \mathcal{F}_t , para todo $|t| < \epsilon$.
- (b). \mathcal{F}_t é de tipo transversal $qx\partial/\partial x + py\partial/\partial y$, para todo $|t| < \epsilon$.

Prova. A prova da parte (a) do lema é análoga à do lema 2.3.3 da seção 2.3. Deixamos os detalhes para o leitor. Provemos a parte (b). Denotemos por X_t um germe de campo holomorfo em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que representa o tipo transversal de \mathcal{F}_t em K_t . Podemos supor que $X_t = P(x, y, t)\partial/\partial x + Q(x, y, t)\partial/\partial y$, onde P e Q são holomorfas em (x, y, t) , $P(x, y, 0) = qx$, $Q(x, y, 0) = py$ e $X_t(0) = 0$ (veja o Ex. 3.4). Como $esp(X, 0)$ está no domínio de Poincaré, diminuindo ϵ se necessário, podemos supor que $esp(X_t, 0)$ está no domínio de Poincaré, para todo $t \in D_\epsilon$. Sendo assim, temos três possibilidades (exclusivas) :

- (i). X_t é linearizável e equivalente a $\lambda_1 x\partial/\partial x + \lambda_2 y\partial/\partial y$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_2/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{N} \cup \mathbb{Q}_-$.
- (ii). X_t é linearizável e equivalente a $\lambda(x\partial/\partial x + (y+ax)\partial/\partial y)$, onde $\lambda \neq 0$ e $a \in \mathbb{C}$.
- (iii). X_t é equivalente a $\lambda(x\partial/\partial x + (ny+ax^n)\partial/\partial y)$, onde $\lambda \neq 0$, $n \geq 2$ e $a \in \mathbb{C}$.

As formas normais acima decorrem do teorema de linearização de Poincaré e do teorema de Dulac (veja os teoremas 1.4 e 1.5). Vamos então considerar a situação geral de uma folheação \mathcal{F} de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, com uma componente de Kupka K com tipo transversal como em (i), (ii) ou (iii).

Lema 3.2.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n tal que o conjunto singular possui uma componente de Kupka K com tipo transversal como em (i), (ii) ou (iii) e no domínio de Poincaré. Então :*

(a). *No caso (i) temos $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Q}_+$.*

(ii). *Nos casos (ii) e (iii) temos $a = 0$.*

Prova. Vamos supor primeiramente que $n = 3$. Neste caso, $K \subset \mathbb{P}^3$ é uma curva algébrica lisa. Seja $\mathcal{W} := (W_j)_{j \in J}$ uma cobertura de \mathbb{P}^3 por abertos, onde para cada $j \in J$ existe um sistema de coordenadas $(W_j, (x_j, y_j, z_j)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tal que $K \cap W_j = (x_j = y_j = 0)$ e se $V_j := W_j \cap K \neq \emptyset$ então $\mathcal{F}|_{W_j}$ é representada por um campo Y_j como em (i), (ii) ou (iii). As coordenadas são tomadas de tal forma que $Y_j = \lambda_1 x_j \partial/\partial x_j + (\lambda_2 y + a \cdot x_j^n) \partial/\partial y_j$, $n \geq 1$. Supomos também que a cobertura é de Leray (veja [G-H]). Como $K \cap W_j = (x_j = y_j = 0)$, se $W_{ij} := W_i \cap W_j \neq \emptyset$ então $W_j \cap (x_i = y_i = 0) = W_i \cap (x_j = y_j = 0)$, logo existem funções $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathcal{O}^*(W_{ij})$ tais que

$$\begin{cases} x_i = \alpha_{ij} \cdot x_j + \beta_{ij} \cdot y_j \\ y_i = \gamma_{ij} \cdot x_j + \delta_{ij} \cdot y_j \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde $\Delta_{ij} := \alpha_{ij} \cdot \delta_{ij} - \beta_{ij} \cdot \gamma_{ij} \in \mathcal{O}^*(W_{ij})$. Se A_{ij} é a matriz dada por (3.2), então a coleção $(A_{ij})_{W_{ij} \neq \emptyset}$ é um cociclo multiplicativo de matrizes que representa as transições do fibrado normal N_K de K em \mathbb{P}^3 . A sua segunda classe de Chern $c_2(N_K)$, considerada como elemento de $H_{DR}^4(\mathbb{P}^3)$, representa o grau de K , isto é, se $c_1(N_H) \in H_{DR}^2(\mathbb{P}^3)$ representa o fibrado normal de um 2-plano, então $\int_{\mathbb{P}^3} c_1(H) \wedge c_2(N_K) = gr(K)$ (veja [G-H]). Além disto, $\Delta_{ij} = det(A_{ij})$ e $L := (\Delta_{ij})_{W_{ij} \neq \emptyset}$ é um cociclo multiplicativo em $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}^*)$. A primeira classe de Chern de L , considerada como elemento de $H_{DR}^2(\mathbb{P}^3)$, satisfaz $\int_K c_1(L) > 0$

(veja [G-H]). No caso em que K é uma interseção completa de duas superfícies algébricas de graus p e q , temos $gr(K) = p \cdot q$ (teorema de Bézout) e $\int_K c_1(L) = p + q$.

Consideremos o caso (i). Vamos nos restringir aos índices $j \in J$ tais que $W_j \cap K \neq \emptyset$. O campo $Y_j = \lambda_1 x_j \partial / \partial x_j + \lambda_2 y_j \partial / \partial y_j$ representa o tipo transversal de \mathcal{F} em K . Ele possui duas separatrizes lisas por $0 \in \mathbb{C}^2$, as curvas $(x_j = 0)$ e $(y_j = 0)$. Além disto, estas separatrizes são as únicas lisas, já que $\lambda_1 / \lambda_2, \lambda_2 / \lambda_1 \notin \mathbb{N}$. Como Y_j está no domínio de Poincaré, temos também $Re(\lambda_2 / \lambda_1) > 0$. Além do mais, todas curvas integrais de Y_j em \mathbb{C}^2 , são aderentes à origem, logo ele não possui integral primeira holomorfa não constante. Isto implica que, se U é um aberto conexo qualquer tal que $U \cap K \neq \emptyset$ então $\mathcal{F}|_U$ não possui integral primeira holomorfa não constante.

O fato de que $(x_j = 0)$ e $(y_j = 0)$ são as únicas separatrizes lisas de Y_j implica que, se $W_{ij} \neq \emptyset$ então $W_i \cap (x_j = 0) = W_j \cap (x_i = 0)$, ou $W_i \cap (x_j = 0) = W_j \cap (y_i = 0)$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vale que $W_i \cap (x_j = 0) = W_j \cap (x_i = 0)$ (verifique). Analogamente, $W_i \cap (y_j = 0) = W_j \cap (y_i = 0)$. Em particular, existem germes de hipersuperfícies S_1 e S_2 ao longo de K tais que $S_1 \cap W_j = (x_j = 0)$ e $S_2 \cap W_j = (y_j = 0)$. Além disto, temos $\beta_{ij} = \gamma_{ij} \equiv 0$, $x_i = \alpha_{ij} \cdot x_j$ e $y_i = \delta_{ij} \cdot y_j$ em (3.2), se $W_{ij} \neq \emptyset$. Note que os cociclos multiplicativos $L_1 := (\alpha_{ij}|_{V_{ij}})_{V_{ij} \neq \emptyset}$ e $L_2 := (\delta_{ij}|_{V_{ij}})_{V_{ij} \neq \emptyset}$ em $H^1(K, \mathcal{O}^*)$, representam os fibrados normais a S_1 e S_2 , respectivamente. Vamos agora obter uma relação entre eles.

A folheação $\mathcal{F}|_{W_j}$ é representada pela 1-forma $\omega_j = \lambda_1 x_j dy_j - \lambda_2 y_j dx_j$. Se $W_{ij} \neq \emptyset$ existe $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(W_{ij})$ tal que $\omega_i = g_{ij} \cdot \omega_j$. Daí obtemos :

$$\eta_i := \lambda_1 \frac{dy_i}{y_i} - \lambda_2 \frac{dx_i}{x_i} = \phi_{ij} \left(\lambda_1 \frac{dy_j}{y_j} - \lambda_2 \frac{dx_j}{x_j} \right) := \phi_{ij} \cdot \eta_j ,$$

onde $\phi_{ij} = \frac{x_j \cdot y_j \cdot g_{ij}}{x_i \cdot y_i} = \frac{g_{ij}}{\alpha_{ij} \cdot \delta_{ij}}$ é holomorfa em W_{ij} . Como as formas η_i e η_j são fechadas, temos $d\phi_{ij} \wedge \eta_j = 0$, o que implica que ϕ_{ij} é uma integral primeira holomorfa de \mathcal{F} em W_{ij} , ou seja, ϕ_{ij} é constante. De fato, $\phi_{ij} \equiv 1$, pois os resíduos de η_i e de η_j em $S_2 \cap W_{ij}$ são iguais a $\lambda_1 \neq 0$. Portanto, $\eta_i = \eta_j$ em W_{ij} e existe uma forma meromorfa fechada η , definida numa vizinhança de K , tal que $\eta|_{W_j} = \eta_j$ para

todo $j \in J$. Por outro lado, de $\eta_i = \eta_j$ em $W_{ij} \neq \emptyset$ obtemos que

$$\lambda_1 \frac{d\delta_{ij}}{\delta_{ij}} = \lambda_1 \frac{d(y_i/y_j)}{(y_i/y_j)} = \lambda_2 \frac{d(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)} = \lambda_2 \frac{d\alpha_{ij}}{\alpha_{ij}}. \quad (3.3)$$

De (3.3) obtemos que $\lambda_1 \cdot c_1(L_2) = \lambda_2 \cdot c_1(L_1)$, onde $c_1(L_r) \in H_{DR}^2(K)$ é a primeira classe de Chern de L_r , $r = 1, 2$. Logo, se $m_r := \int_K c_1(L_r)$, $r = 1, 2$, então

$$\lambda_1 \cdot m_2 = \lambda_2 \cdot m_1 \quad (3.4)$$

Por outro lado, como $\mu_{ij} = \Delta_{ij}|_{V_{ij}} = \alpha_{ij} \cdot \beta_{ij}|_{V_{ij}}$, temos

$$\frac{d\mu_{ij}}{\mu_{ij}} = \frac{d\alpha_{ij}}{\alpha_{ij}} + \frac{d\beta_{ij}}{\beta_{ij}} \implies c_1(L) = c_1(L_1) + c_1(L_2) \implies$$

$m_1 + m_2 = \int_K c_1(L) > 0$. Como $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ (veja [G-H]), obtemos desta última relação e de (3.4) que $m_1, m_2 \neq 0$ e que $\lambda_2/\lambda_1 = m_2/m_1 \in \mathbb{Q}$. Finalmente, como $Re(\lambda_2/\lambda_1) > 0$, temos $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Q}_+$, como queríamos.

Os casos (ii) e (iii) serão tratados simultaneamente. A folheação tem o tipo normal da forma $\omega = x dy - (ny + a \cdot x^n)dx$, onde $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $a \neq 0$. Neste caso, podemos supor $a = 1$ e $\omega = x dy - (ny + x^n)dx$. A folheação definida por ω em \mathbb{C}^2 possui apenas uma separatriz pela origem : a curva $(x = 0)$. Além disto, ela não possui integral primeira meromorfa não constante numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ (verifique). Observe também que x^{n+1} é um fator integrante de ω , já que

$$x^{-1-n} \cdot \omega = d(y/x^n) - \frac{dx}{x} := \eta. \quad (3.5)$$

Portanto, $\mathcal{F}|_{W_j}$ é representada por $\omega_j := x_j dy_j - (ny_j + x_j^n)dx_j$, sendo $(x_j = 0) \subset W_j$ um germe de hipersuperfície invariante por $\mathcal{F}|_{W_j}$. Como no caso (i), isto implica que, se $W_{ij} \neq \emptyset$ então $W_j \cap (x_i = 0) = W_i \cap (x_j = 0)$ e existe um germe de hipersuperfície S ao longo de K tal que $S \cap W_j = (x_j = 0)$. Além disto, temos em (3.2) que $\beta_{ij} \equiv 0$, $x_i = \alpha_{ij} \cdot x_j$ e que $\Delta_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \delta_{ij}$. O fibrado normal a S ao longo de K é definido pelo cociclo $L_1 := (\alpha_{ij}|_{V_{ij}})_{V_{ij} \neq \emptyset}$.

Seja g_{ij} tal que $\omega_i = g_{ij} \cdot \omega_j$, $W_{ij} \neq \emptyset$, e coloquemos $\eta_j := x_j^{-1-n} \cdot \omega_j$. Daí obtemos que $\eta_i = \phi_{ij} \cdot \eta_j$, onde $\phi_{ij} = \frac{x_j^{n+1} \cdot g_{ij}}{x_i^{n+1}} = \frac{g_{ij}}{\alpha_{ij}^n}$ é holomorfa em W_{ij} . Decorre de (3.5) que η_i e η_j são fechadas, logo $d\phi_{ij} \wedge \eta_j = 0$, ou seja, ϕ_{ij} é integral primeira holomorfa de $\mathcal{F}|_{W_{ij}}$. Portanto, ϕ_{ij} é constante. Como os resíduos de η_i e η_j em $S \cap W_{ij}$ são iguais a -1 , obtemos $\phi_{ij} \equiv 1$ e $\eta_i = \eta_j$ em W_{ij} . Daí e de (3.5) obtemos

$$\frac{d\alpha_{ij}}{\alpha_{ij}} = \frac{d(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)} = d\left(\frac{y_i}{x_i^n} - \frac{y_j}{x_j^n}\right). \quad (3.6)$$

Lembremos agora que $c_1(L_1)$, considerado como uma classe em $H^2(\mathcal{W}, \mathbb{C})$, é dado por um 2-cociclo $(\ell_{ijk})_{V_{ijk} \neq \emptyset}$, onde $\ell_{ijk} = \frac{1}{2\pi i} (lg(\alpha_{ij}) + lg(\alpha_{jk}) + lg(\alpha_{ki}))|_{W_{ijk}}$, sendo $lg(\alpha_{ij})$ uma determinação do logaritmo de α_{ij} em W_{ij} . A relação (3.6) implica que, se $lg(\alpha_{ij})$ é uma tal determinação então

$$lg(\alpha_{ij}) = \frac{y_i}{x_i^n} - \frac{y_j}{x_j^n} + 2\pi i \cdot c_{ij},$$

onde $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Logo, se $K \cap W_{ijk} \neq \emptyset$ então $\ell_{ijk} = c_{ij} + c_{jk} + c_{ki}$, ou seja $\ell = \delta(c)$, e ℓ é trivial em $H^2(K, \mathbb{C})$. Isto implica que $\int_K c_1(L_1) = 0$. Por outro lado, $H_{DR}^2(\mathbb{P}^3) \simeq \mathbb{Z}$ e é gerado pela classe do fibrado normal de um hiperplano $c_1(N_H)$. Logo, $c_1(L_1) = m \cdot c_1(N_H)$, onde $m \in \mathbb{Z}$. Como $\int_K c_1(N_H) = gr(K) > 0$ (veja [G-H]), obtemos que $m = 0$, logo $c_1(L_1) = 0$ em $H_{DR}^2(\mathbb{P}^3)$. Utilizando agora que a matriz A_{ij} é triangular ($b_{ij} = 0$) podemos concluir que $c_2(N_K) = c_1(L_1) \wedge c_1(L_2)$, onde L_2 é a classe obtida do cociclo $(\delta_{ij})_{W_{ij} \neq \emptyset}$. No entanto, isto implica que $gr(K) = \int_{\mathbb{P}^3} c_1(N_H) \wedge c_2(N_K) = 0$, um absurdo. Logo, $a = 0$ e o lema está demonstrado no caso $n = 3$.

O caso em que $n > 3$ pode ser reduzido ao anterior, tomando um 3-plano $H \subset \mathbb{P}^n$ em posição geral com \mathcal{F} . Neste caso, a folheação $\mathcal{F}|_H$ satisfaz às propriedades requeridas na prova do caso $n = 3$ e obtemos o resultado. Deixamos os detalhes para o leitor. \square

Para terminar a prova do lema 3.2.1, basta agora observar que a aplicação $t \mapsto esp(X_t, 0)$ é contínua. Pelo lema 3.2.2, necessariamente o quociente dos auto-valores $\lambda_2(t)/\lambda_1(t) \in \mathbb{Q}_+$, logo é constante. Utilizando (b) do lema 3.2.2 obtemos que a forma normal de X_t é do tipo $X_t = \lambda(t) \cdot (q x \partial / \partial x + p y \partial / \partial y)$, o que prova o lema 3.2.1. \square

Voltando à demonstração do teorema 3, temos três possibilidades para o tipo transversal de \mathcal{F}_t em K_t :

- (I). $\omega = q x dy - p y dx$, onde $p/q = k/\ell$, $\text{mdc}(k, \ell) = 1$ e $k, \ell > 1$.
- (II). $\omega = x dy - \ell y dx$, onde $\ell = p/q > 1$.
- (III). $\omega = x dy - y dx$.

Lema 3.2.3. *Existe uma vizinhança V_t de K_t tal que :*

- (a). *No caso (I) existe uma forma fechada meromorfa η_t em V_t que representa $\mathcal{F}_t|_{V_t}$.*
- (b). *No caso (II), \mathcal{F}_t possui uma estrutura transversal afim com polos em V_t .*
- (c). *No caso (III), \mathcal{F}_t possui uma estrutura transversal projetiva em $V_t \setminus K_t$.*

Prova. O caso (I) corresponde a (i) do lema 3.2.1. Como vimos na prova do lema 3.2.2, existe uma 1-forma fechada meromorfa η_t numa vizinhança V_t de K_t que representa $\mathcal{F}_t|_{V_t}$. Ela é dada localmente por $\eta_t = q \frac{dy}{y} - p \frac{dx}{x}$.

No caso (II), em que o tipo transversal é $\omega = x dy - \ell y dx$, temos o fator integrante $x^{\ell+1}$, isto é, $x^{-1-\ell} \cdot \omega = d(y/x^\ell)$. Seja $(W_j)_{j \in J}$ uma cobertura de K_t por abertos e $(x_j, y_j, z_j)_{j \in J}$ uma coleção de cartas como na prova do lema 3.2.2. A folheação \mathcal{F}_t é representada em W_j por $\omega_j := x_j dy_j - \ell y_j dx_j$ e $\eta_j := x_j^{-1-\ell} \cdot \omega_j$ é fechada. Como na prova do lema 3.2.2, se $W_{ij} \neq \emptyset$ então $\eta_i = \phi_{ij} \cdot \eta_j$, onde ϕ_{ij} é constante. Aqui não podemos afirmar que $\phi_{ij} = 1$, já que a forma η_i tem residuo zero ao longo de $S \cap W_i$. No entanto, $\eta_i = \phi_{ij} \cdot \eta_j$ em W_{ij} implica que existe uma constante $\psi_{ij} \in \mathbb{C}$ tal que $y_i/x_i^\ell = \phi_{ij} \cdot (y_j/x_j^\ell) + \psi_{ij}$ e isto fornece uma estrutura transversal afim com polos. Deixamos os detalhes para o leitor.

Consideremos o caso (III). O problema neste caso é que as separatrizes de $\omega = 0$ são as retas $ax + by = 0$ e elas são indistingüíveis, no sentido de que não podemos afirmar a priori que existe um germe de hipersuperfície invariante S_t ao longo de K_t , como nos casos (I) e (II). Sejam $(W_j)_{j \in J}$ e $(x_j, y_j, z_j)_{j \in J}$ como anteriormente, de maneira que $\mathcal{F}_t|_{W_j}$ é representada por $\omega_j := x_j dy_j - y_j dx_j$. Seja $(g_{ij})_{W_{ij} \neq \emptyset}$ tal que $\omega_i = g_{ij} \cdot \omega_j$, se $W_{ij} \neq \emptyset$. O que podemos afirmar, neste

caso, é que se $h_{ij} = \sqrt{g_{ij}}$ (um ramo da raiz quadrada) então existem $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij} \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha_{ij} \cdot \delta_{ij} - \beta_{ij} \cdot \gamma_{ij} = 1$ e

$$\begin{cases} x_i = h_{ij} (\alpha_{ij} \cdot x_j + \beta_{ij} \cdot y_j) \\ y_i = h_{ij} (\gamma_{ij} \cdot x_j + \delta_{ij} \cdot y_j) \end{cases} \implies \frac{x_i}{y_i} = \frac{\alpha_{ij} \cdot x_j + \beta_{ij} \cdot y_j}{\gamma_{ij} \cdot x_j + \delta_{ij} \cdot y_j}. \quad (3.7)$$

Isto fornece a estrutura transversal projetiva fora de K_t , (lembrar que $K_t \cap W_j = (x_j = y_j = 0)$). A prova de (3.7) é deixada como exercício para o leitor (veja o Ex. 3.5). \square

A idéia agora é provar que é possível estender as estruturas transversais em V_t a estruturas transversais com polos em todo \mathbb{P}^n . Isto pode ser feito utilizando o teorema de Catanese (veja [Ca]), o qual já mencionamos na prova do teorema 2, segundo o qual uma deformação de uma interseção completa lisa de codimensão dois é uma interseção completa. Com isto, K_t é uma interseção completa para $|t|$ pequeno e pelo corolário 3.1.2 podemos estender as estruturas dadas pelo lema 3.2.3 a todo \mathbb{P}^n . Outra forma de provar a extensão destas estruturas transversais é utilizar o argumento de [Sc] :

Lema 3.2.4. *Existem uma vizinhança conexa V de K_0 e $\epsilon > 0$ tais que se $|t| < \epsilon$ então :*

- (a). $K_t \subset V$ se $|t| < \epsilon$.
- (b). ∂V é de classe C^∞ e \mathcal{F}_t é transversal a ∂V para todo $|t| < \epsilon$.
- (c). As estruturas transversais dadas pelo lema 3.2.3 em $V \cap V_t$, se estendem a V .

Como V é, a priori, uma interseção completa, as estruturas se estendem a \mathbb{P}^n . Deixamos a prova do lema 3.2.4 como exercício para o leitor (veja o Ex. 3.6).

Consideremos o caso (I). Neste caso, \mathcal{F}_t pode ser definida por uma 1-forma fechada meromorfa α_t em \mathbb{P}^n , que estende a forma η_t definida em V_t . Seja $(\alpha_t)_\infty$ o divisor de polos de α_t . Se X é uma componente irredutível de $(\omega)_\infty$ então $X \cap K_t \neq \emptyset$, ou seja, $X \cap V_t \subset (\eta_t)_\infty$. Num ponto $w \in X \cap K_t$ temos coordenadas $(W, (x, y, z))$ tais que $\eta_t = \alpha_t = p \frac{dy}{y} - q \frac{dx}{x}$ e isto implica que $X \cap W = (x = 0)$ ou $(y = 0)$. Decorre daí que $(\alpha_t)_\infty$ possui apenas duas componentes irredutíveis que são polos de ordem um de α_t . Levando em conta os

resíduos de α_t , pela proposição 1.2.5 da seção 1.2, podemos escrever em coordenadas homogêneas, $\alpha_t = p \frac{dF_t}{F_t} - q \frac{dG_t}{G_t}$, onde F_t e G_t são polinômios homogêneos. Portanto, \mathcal{F}_t tem a integral primeira F_t^p/G_t^q e está em $\mathcal{R}(n; p, q)$.

Vejamos o caso (II). Sejam ω_t uma 1-forma meromorfa que representa \mathcal{F}_t em \mathbb{P}^n e $(W_j, (x_j, y_j, z_j))_{j \in J}$ uma coleção de cartas tais que $\mathcal{F}_t|_{W_j}$ é representada por $\omega_j := x_j dy_j - \ell y_j dx_j$. Para todo $j \in J$ existe uma função f_j , meromorfa em W_j , tal que $\omega_t = f_j \cdot \omega_j$. Logo,

$$\omega_t = f_j \cdot x_j^{\ell+1} \cdot d(y_j/x_j^\ell) \implies d\omega_t = \theta_j \wedge \omega_j,$$

onde $\theta_j = (\ell + 1) \frac{dx_j}{x_j} + \frac{df_j}{f_j}$. Afirmamos que existe uma 1-forma meromorfa θ em V_t tal que $\theta|_{W_j} = \theta_j$. Com efeito, se $W_{ij} \neq \emptyset$, temos $f_i \cdot x_i^{\ell+1} \cdot d(y_i/x_i^\ell) = f_j \cdot x_j^{\ell+1} \cdot d(y_j/x_j^\ell)$, o que implica, $d(y_i/x_i^\ell) = \frac{f_j \cdot x_j^{\ell+1}}{f_i \cdot x_i^{\ell+1}} d(y_j/x_j^\ell)$. Portanto, $\frac{f_j \cdot x_j^{\ell+1}}{f_i \cdot x_i^{\ell+1}} = \phi_{ij}$ é constante, como vimos na prova do lema 3.2.3. Tomando a derivada logarítmica desta última relação, obtemos que $\theta_i = \theta_j$ em W_{ij} .

A estrutura transversal afim de \mathcal{F}_t é obtida extendendo a forma θ (veja o corolário 3.1.1). Podemos escolher ω_t de forma que $|\omega_t|_\infty$ é um hiperplano ($H = 0$), não invariante por \mathcal{F}_t . Neste caso, $|f_j|_\infty = (H = 0) \cap W_j \neq (x_j = 0)$, o que implica que $|\theta|_\infty \cap W_j \supset (x_j = 0) \cup |f_j|_\infty$. Em particular, $|\theta|_\infty$ possui duas componentes irredutíveis : $(H = 0)$ e uma outra, $(F_t = 0)$, tal que $W_j \cap (F_t = 0) = (x_j = 0)$, para todo $j \in J$. Utilizando a proposição 1.2.5 da seção 1.2, obtemos que $\theta = (\ell + 1) \frac{dF_t}{F_t} - m \frac{dH}{H}$, onde $m = (\ell + 1) \cdot gr(F_t)$. Em particular, temos

$$d\omega_t = \theta \wedge \omega_t = \frac{d(F_t^{\ell+1}/H^m)}{F_t^{\ell+1}/H^m} \wedge \omega_t \implies d\left(\frac{\omega_t}{F_t^{\ell+1}/H^m}\right) = 0,$$

ou seja $\mu_t := \frac{H^m}{F_t^{\ell+1}} \cdot \omega_t$ é fechada. Afirmamos que $(\mu_t)_\infty = (F_t^{\ell+1})$ e que os seus resíduos são todos nulos, ou seja, $\mu_t = df_t$, onde f_t é racional. Com efeito, como

$$\theta|_{W_j} = (\ell + 1) \frac{dx_j}{x_j} + \frac{df_j}{f_j} = (\ell + 1) \frac{dF_t}{F_t} - m \frac{dH}{H},$$

existem $g_j, h_j \in \mathcal{O}^*(W_j)$ tais que $x_j = g_j \cdot F_t|_{W_j}$ e $f_j = h_j \cdot H^{-m}|_{W_j}$

(verifique). Daí obtemos,

$$\mu_t|_{W_j} = \frac{H^m}{F_t^{\ell+1}} \cdot \omega_t|_{W_j} = \frac{H^m \cdot f_j}{F_t^{\ell+1}} \cdot \omega_j = h_j \cdot g_j^\ell \cdot d(y_j/x_j^\ell). \quad (3.8)$$

Logo, $d(h_j \cdot g_j^\ell) \wedge d(y_j/x_j^\ell) = 0$, o que implica que $h_j \cdot g_j^\ell = c_j$ é uma constante. Por outro lado, se X é uma componente irredutível de $|\mu_t|_\infty$ então $X \cap K_t \neq \emptyset$, ou seja, $X \cap W_j \neq \emptyset$, para algum $j \in J$. Decorre daí e de (3.8) que $X \cap W_j = (x_j = 0) = (F_t = 0) \cap W_j$, sendo a multiplicidade de $(F_t = 0)$ em $(\mu_t)_\infty$ igual a $\ell + 1$, como queríamos. A relação (3.8) implica também que os resíduos de μ_t são nulos. Portanto, $\mu_t = df_t$, onde $f_t = G_t/F_t^\ell$ e $gr(G_t) = \ell \cdot gr(F_t)$, ou seja, $q \cdot gr(G_t) = q \cdot \ell \cdot gr(F_t) = p \cdot gr(F_t)$. Em particular, a folheação \mathcal{F}_t é definida em coordenadas homogêneas por $\Omega_t := q F_t dG_t - p G_t dF_t$ e tem grau $gr(F_t) + gr(G_t) - 2 = gr(F_0) + gr(G_0) - 2$. Daí obtemos que $gr(F_t) = gr(F_0) = q$ e $gr(G_t) = gr(G_0) = q$. Logo, $\mathcal{F}_t \in \mathcal{R}(n, p, q)$, como queríamos.

Consideremos agora o caso (III). Neste caso, \mathcal{F}_t tem uma estrutura transversal projetiva em $V_t \setminus K_t$. Esta estrutura se estende a uma estrutura transversal projetiva em $\mathbb{P}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_t)$. Deixaremos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 3.7). Como $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F}_t)) \geq 2$, o grupo fundamental de $\mathbb{P}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_t)$ é trivial (veja [EL]). Pelo teorema 1.14 da seção 1.5.1, existe uma submersão holomorfa $\tilde{f}_t: \mathbb{P}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que as folhas \mathcal{F}_t são as superfícies de nível de \tilde{f}_t . Considerando \tilde{f}_t como função meromorfa, ela se estende a uma função racional $f_t: \mathbb{P}^n - \rightarrow \mathbb{P}^1$, pelo teorema de Levi. Em coordenadas homogêneas temos $f_t = F_t/G_t$, onde F_t e G_t são polinômios homogêneos do mesmo grau. Levando-se em conta que $f_t|_{\mathbb{P}^n \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_t)}$ é uma submersão, obtemos que \mathcal{F}_t é representada em coordenadas homogêneas por $\Omega_t := G_t dF_t - F_t dG_t$. Logo, $gr(\mathcal{F}_t) = gr(F_t) + gr(G_t) - 2 = gr(F_0) + gr(G_0) - 2$, o que implica $gr(F_t) = gr(G_t) = gr(F_0) = gr(G_0)$. Portanto, $\mathcal{F}_t \in \mathcal{R}(n, p, p)$. Isto termina a prova do teorema 3. \square

3.3 Componentes logarítmicas.

Lembremos que uma 1-forma logarítmica ω em \mathbb{P}^n é dada em coordenadas homogêneas por $\omega = \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$, onde $r \geq 2$, F_1, \dots, F_r são

polinômios homogêneos e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são tais que $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot gr(F_j) = 0$. Vamos supor $r \geq 3$, já que o caso $r = 2$ foi estudado na seção 3.2.

Definição 3.3.1. Diremos que uma r -upla $F := (F_1, \dots, F_r)$ de polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} é *genérica* se as hipersuperfícies em \mathbb{P}^n definidas por $(F_j = 0)$ são lisas e estão em posição geral. Esta condição é equivalente às seguintes :

- (I). Dados $1 \leq \ell \leq \min(r, n)$ e um multi-índice $\sigma = (1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_\ell \leq r)$, se $p \in (F_{\sigma_1} = \dots = F_{\sigma_\ell} = 0) \setminus \{0\}$ então

$$dF_{\sigma_1}(p) \wedge \dots \wedge dF_{\sigma_\ell}(p) \neq 0 \quad (3.9)$$

- (II). Se $r > n$, $n < \ell \leq r$ e $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\ell)$ então $(F_{\sigma_1} = \dots = F_{\sigma_\ell} = 0) = \{0\}$.

Observamos que o conjunto de r -uplas genéricas de polinômios, (F_1, \dots, F_r) , com graus $gr(F_j) = p_j$, $1 \leq j \leq r$, é aberto e denso no conjunto de todas as r -uplas de polinômios de graus correspondentes (veja o Ex. 3.8).

Vamos usar a notação $\Omega(F, \lambda) = F_1 \dots F_r \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$. Note que, se $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$ então os coeficientes de $\Omega(F, \lambda)$ são homogêneos de grau $gr(F_1) + \dots + gr(F_r) - 1$. Portanto, $\Omega(F, \lambda)$ define uma folheação $\mathcal{F}(F, \lambda)$ em \mathbb{P}^n de grau $k = gr(F_1) + \dots + gr(F_r) - 2$. Em geral $\text{sing}(\Omega(F, \lambda))$ contém componentes de codimensão um.

Proposição 3.3.1. *Se $F = (F_1, \dots, F_r)$ é uma r -upla genérica de polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} , $n \geq 3$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$ são tais que $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot gr(F_j) = 0$ então $\text{cod}(\text{sing}(\Omega(F, \lambda))) \geq 2$.*

Prova. Suponhamos por absurdo que todas as componentes de $\Omega(F, \lambda)$ são divisíveis por um polinômio homogêneo G não constante. Neste caso, como $n \geq 3$, $\Pi_n((G = 0) \cap (F_1 = F_2 = 0)) \neq \emptyset$. Fixemos $p \in \Pi_n((G = 0) \cap (F_1 = F_2 = 0))$ e seja $I = \{j \mid 1 \leq j \leq r \text{ e } p \in \Pi_n(F_j = 0)\}$. Reordenando os F_j 's, se necessário, podemos supor que $I = \{1, 2, \dots, \ell\}$, onde $\ell \leq r$. A condição (II) da definição 3.3.1 implica que $\ell \leq n$. Fixemos um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ tal que $p = 0 \in \mathbb{C}^n$.

Lema 3.3.1. *Nas hipóteses acima, existe um sistema de coordenadas local $(W, (x_1, \dots, x_\ell, y) \in \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{C}^{n-\ell})$ tal que o germe ω de $\Omega(F, \lambda)|_W$ em $0 \in \mathbb{C}^n$ se escreve como*

$$\omega = h \cdot x_1 \dots x_\ell \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{dx_j}{x_j}, \quad (3.10)$$

sendo $h \in \mathcal{O}_n^*$.

Prova. Com efeito, como $dF_1(p) \wedge \dots \wedge dF_\ell(p) \neq 0$, a aplicação $g := (F_1, \dots, F_\ell)|_{\mathbb{C}^n}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^\ell$ é uma submersão em $0 \in \mathbb{C}^n$. Logo existe um sistema de coordenadas local $(W, (z_1, \dots, z_\ell, y) \in \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{C}^{n-\ell})$ tal que $F_j|_W = z_j$, se $1 \leq j \leq \ell$, e $F_i \in \mathcal{O}^*(W)$, se $i > \ell$. Fazendo $g := F_{\ell+1} \dots F_r|_W$ e $\theta := \sum_{j>\ell} \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}|_W$, obtemos

$$\Omega(F, \lambda)|_W = g \cdot z_1 \dots z_\ell \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{dz_j}{z_j} + \theta \right)$$

Como $F_j|_W \in \mathcal{O}^*(W)$ se $j > \ell$, a forma θ é holomorfa e fechada em W . Logo, existe $\phi \in \mathcal{O}(W)$ tal que $\theta = d\phi$. Colocando $\psi := e^{\phi/\lambda_1}$, obtemos $d\phi = \lambda_1 d\psi/\psi$. Logo,

$$\Omega(F, \lambda)|_W = \frac{g}{\psi} \cdot (\psi \cdot z_1) \dots z_\ell \left(\sum_{j=2}^{\ell} \lambda_j \frac{dz_j}{z_j} + \lambda_1 \frac{d(\psi \cdot z_1)}{\psi \cdot z_1} \right)$$

Fazendo $h := g/\psi$, $x_1 := \psi \cdot z_1$ e $x_j := z_j$, $2 \leq j \leq \ell$, obtemos $\omega = h \cdot x_1 \dots x_\ell \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \frac{dx_j}{x_j}$ e o resultado, já que a aplicação $z \mapsto (\psi \cdot z_1, z_2, \dots, z_n) := (x_1, \dots, x_n)$ é um biholomorfismo em $0 \in \mathbb{C}^n$. \square

Voltando à demonstração da proposição, seja g o germe de $G|_{\mathbb{C}^n}$ em $0 \in \mathbb{C}^n$. Como $g(0) = 0$, obtemos de (3.10) que $g | \lambda_j x_1 \dots x_\ell / x_j$, para todo $j = 1, \dots, \ell$. Como $\lambda_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, \ell$, temos $g | x_1 \dots x_\ell / x_j$, para todo $j = 1, \dots, \ell$. Isto implica que o germe ($g = 0$) está contido em $X := \cup_{1 \leq i < j \leq \ell} (x_i = x_j = 0)$, que é um germe de conjunto de codimensão dois, um absurdo. Logo, $\text{cod}(\text{sing}(\Omega(F, \lambda))) \geq 2$, como queríamos. \square

Definição 3.3.2. Dados $r \geq 3$ e $1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_r$, usaremos a notação $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ para o fecho do conjunto de folheações de codimensão um de \mathbb{P}^n , de grau $k := p_1 + \dots + p_r - 2$, que são representadas

em coordenadas homogêneas por uma 1-forma do tipo $\Omega(F, \lambda) \neq 0$, onde $F = (F_1, \dots, F_r)$ é uma r -upla de polinômios homogêneos com $gr(F_j) = p_j$, $1 \leq j \leq r$. Note que $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ é um sub-conjunto algébrico irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$.

Observação 3.3.1. Como vimos na proposição 1.2.5 da seção 1.2, uma 1-forma fechada η em \mathbb{P}^n , em geral se escreve como

$$\eta = \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + d\left(\frac{G}{F}\right), \quad (3.11)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$, $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot gr(F_j) = 0$, $F = F_1^{s_1-1} \dots F_r^{s_r-1}$, $s_j \geq 1$, $1 \leq j \leq r$, e $gr(G) = \sum_{j=1}^r (s_j - 1) \cdot gr(F_j)$. No caso, λ_j é o resíduo de η em $(F_j = 0)$ e s_j é a multiplicidade de F_j como polo de η , $1 \leq j \leq r$. A folheação definida por η em \mathbb{P}^n , $\mathcal{F}(\eta)$, é representada em coordenadas homogêneas por $\Omega := F_1^{s_1} \dots F_r^{s_r} \cdot \eta$, se $cod(sing(\Omega)) \geq 2$, e tem grau $k = gr(\mathcal{F}(\eta)) = \sum_{j=1}^r s_j \cdot gr(F_j) - 2$ (verifique).

O que gostaríamos de observar é que

$$\mathcal{F}(\eta) \in \mathcal{L}(n; gr(F_1), \dots, gr(F_r), p),$$

onde $p = \sum_{j=1}^r (s_j - 1) gr(F_j)$. A idéia é provar que existe uma família holomorfa, $(\mathcal{F}_t)_{t \in D_\epsilon}$, de folheações em $\mathcal{L}(n; gr(F_1), \dots, gr(F_r), p)$, tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\eta)$. Com efeito, coloquemos $p_j := gr(F_j)$. Defina

$$\Omega_t = \Omega + t \cdot G \cdot F_1 \dots F_r \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Como $cod(sing(\Omega)) \geq 2$, existe $\epsilon > 0$ tal que $cod(sing(\Omega_t)) \geq 2$, se $|t| < \epsilon$. Afirmamos que Ω_t define uma folheação \mathcal{F}_t em $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r, p)$ para $0 < |t| < \epsilon$.

Com efeito, de (3.11) obtemos,

$$\Omega = F_1 \dots F_r \cdot F \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + F_1 \dots F_r \cdot dG - G \cdot F_1 \dots F_r \sum_{j=1}^r (s_j - 1) \frac{dF_j}{F_j}.$$

Denotando $H = F_1 \dots F_r$, vem que

$$\Omega_t = H(F + t \cdot G) \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + H \cdot dG - G \cdot H \sum_{j=1}^r (s_j - 1) \frac{dF_j}{F_j} =$$

$$\begin{aligned}
&= H(F+t.G) \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + \frac{1}{t} H d(F+t.G) - \frac{1}{t} H(F+t.G) \sum_{j=1}^r (s_j-1) \frac{dF_j}{F_j} \\
&= H(F+t.G) \sum_{j=1}^r \left(\lambda_j - \frac{s_j-1}{t} \right) \frac{dF_j}{F_j} + \frac{1}{t} H d(F+t.G) .
\end{aligned}$$

Em particular, se $\eta_t := \frac{1}{H(F+t.G)} \cdot \Omega_t$, temos

$$\eta_t = \sum_{j=1}^r \left(\lambda_j - \frac{s_j-1}{t} \right) \frac{dF_j}{F_j} + \frac{1}{t} \frac{d(F+t.G)}{F+t.G} .$$

Portanto, Ω_t é integrável, já que η_t é fechada. Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^r \left(\lambda_j - \frac{s_j-1}{t} \right) \cdot gr(F_j) + \frac{1}{t} \cdot gr(F+t.G) = 0$$

e portanto Ω_t define uma folheação em $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r, p)$ se $0 < |t| < \epsilon$.

O resultado principal desta seção, cuja prova original foi dada em [CA 1] e [CA 2], é o seguinte :

Teorema 4. *Se $n \geq 3$ então para todo $r \geq 3$ e toda r -upla (p_1, \dots, p_r) , onde $p_j \in \mathbb{N}$ e $p_1 \leq \dots \leq p_r$, $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$, onde $k = \sum_{j=1}^r p_j - 2$.*

Prova. Diremos que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ é genérico, se satisfaz às seguintes condições : (i). Se $i \neq j$ então $\lambda_j/\lambda_i \notin \mathbb{R}$. (ii). Se i, j, ℓ são distintos dois a dois então $2\lambda_i \neq \lambda_j + \lambda_\ell$. Seja $U \subset \mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ definido por $U = \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ é representada em } \mathbb{C}^{n+1} \text{ por } \Omega = \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}, \text{ onde } (F_1, \dots, F_r) \text{ e } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{C}^*)^r, \text{ são genéricas} \}$. Note que U é aberto e denso em $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ (verifique). A demonstração do teorema se reduz a provar que, se $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ é um germe de família holomorfa em $\mathbb{F}ol(n, k)$, tal que $\mathcal{F}_0 \in U$, então $\mathcal{F}_t \in \mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ para todo t .

Em seguida descreveremos o conjunto de Kupka de uma folheação $\mathcal{F}_o \in U$, representada por $\Omega = \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$. Dado um multi-índice $\sigma = (1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_\ell \leq r)$, onde $1 \leq \ell \leq r$, coloquemos

$$K_\sigma := \Pi_n(F_{\sigma_1} = \dots = F_{\sigma_\ell} = 0) .$$

Pela condição (II) da definição 3.3.1, se $\ell > n$ então $K_\sigma = \emptyset$. Coloquemos também

$$\hat{K}_\sigma := K_\sigma \setminus \bigcup_{\substack{\mu \supset \sigma \\ \mu \neq \sigma}} K_\mu .$$

Afirmamos que o conjunto de Kupka de \mathcal{F}_o é

$$\hat{K}(\mathcal{F}_o) = \bigcup_{i < j} \hat{K}_{ij} .$$

Com efeito, em primeiro lugar, se $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_o) \setminus \cup_{i < j} \hat{K}_{ij}$, então $p \notin \cup_j \Pi_n(F_j = 0)$, pela condição (I) da definição 3.3.1 (as F_j 's são lisas). Neste caso, \mathcal{F}_o pode ser representada numa vizinhança de p pela forma $\eta|_{\mathbb{C}^n}$, onde $\eta = \sum_j \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$ e $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ é um sistema afim tal que $p \in \mathbb{C}^n$. Como $d\eta = 0$, p não é singularidade de Kupka de \mathcal{F}_o . Por outro lado, se $p \in \hat{K}_{ij}$, onde $i < j$, pelo lema 3.3.1 existe um sistema de coordenadas $(W, z = (x_i, x_j, y)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2}$ tal que $z(p) = 0$ e $\mathcal{F}_o|_W$ é representada por $\omega = h.x_i.x_j (\lambda_i \frac{dx_i}{x_i} + \lambda_j \frac{dx_j}{x_j})$, com $h \in \mathcal{O}^*(W)$. Como $d\omega(0) = h(0).(\lambda_j - \lambda_i)dx_i \wedge dx_j \neq 0$, obtemos que p é ponto de Kupka de \mathcal{F}_o . Isto prova a afirmação. Note que o tipo transversal de \mathcal{F}_o em \hat{K}_{ij} é dado pelo campo de vetores $X_{ij} := \lambda_i x_j \partial / \partial x_j - \lambda_j x_i \partial / \partial x_i$, ou pela forma $\omega_{ij} := \lambda_i x_j dx_i + \lambda_j x_i dx_j$.

Por questões técnicas, dividiremos a prova em duas etapas : $n = 3$ e $n > 3$.

1ª etapa. $n = 3$. Neste caso, se $i < j < \ell$ então $K_{ij\ell} = \Pi_n(F_i = F_j = F_\ell = 0)$ se reduz a um ponto. Vamos denotar este ponto por $p_{ij\ell}$. Temos também $K_{ij} = \hat{K}_{ij} \cup \{p_{ij\ell} \mid \ell \neq i, j\}$. Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ um germe de família holomorfa em $\mathbb{F}ol(n, k)$ tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_o$. Consideremos um representante da família num disco $D_\delta := \{|t| < \delta\}$ e fixemos uma família holomorfa $(\Omega_t)_{t \in D_\delta}$ de 1-formas, tal que Ω_t representa \mathcal{F}_t em coordenadas homogêneas, sendo $\Omega_0 = \Omega$.

Lema 3.3.2. *Para todo terno $i < j < \ell$, existe $0 < \epsilon \leq \delta$ e uma aplicação holomorfa $P_{ij\ell}: D_\epsilon \rightarrow \mathbb{P}^n$, com as seguintes propriedades :*

- $P_{ij\ell}(t)$ é singularidade simples de \mathcal{F}_t , se $t \in D_\epsilon$, sendo $P_{ij\ell}(0) = p_{ij\ell}$.
- Existe uma vizinhança $V_{ij\ell}$ de $p_{ij\ell}$ tal que $P_{ij\ell}(t)$ é a única singularidade simples de \mathcal{F}_t em $V_{ij\ell}$.

(c). \mathcal{F}_t pode ser definida em $V_{ij\ell}$ por uma 1-forma fechada mero-morfa.

Prova. Sem perda de generalidade, vamos supor que $i = 1, j = 2$ e $\ell = 3$. Fixemos um sistema de coordenadas afim $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3$ tal que $p_{123} = 0 \in \mathbb{C}^3$. Neste caso, $\mathcal{F}_t|_{\mathbb{C}^3}$ é representada por $\omega_t = \Omega_t|_{\mathbb{C}^3}$. Pelo lema 3.3.1, existe um sistema de coordenadas $(W, x = (x_1, x_2, x_3))$ tal que $x(0) = 0$ e $\omega_0 = h.x_1.x_2.x_3(\lambda_1 \frac{dx_1}{x_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{x_2} + \lambda_3 \frac{dx_3}{x_3})$, sendo $h \in \mathcal{O}^*(W)$. Coloquemos $\theta_t := h^{-1}.\omega_t, t \in \mathbb{D}$. Note que $d\theta_0 = \mu_1.x_1 dx_2 \wedge dx_3 + \mu_2.x_2 dx_3 \wedge dx_1 + \mu_3.x_3 dx_1 \wedge dx_2$, onde $\mu_1 = \lambda_3 - \lambda_2, \mu_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ e $\mu_3 = \lambda_2 - \lambda_1$. Como $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R}$ para $i \neq j$, temos $\mu_j \neq 0$ se $1 \leq j \leq 3$. Definindo $Y_t := \text{rot}(\theta_t)$, por $i_{Y_t}\nu = d\theta_t, \nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, temos $Y_0 = \mu_1.x_1 \partial/\partial x_1 + \mu_2.x_2 \partial/\partial x_2 + \mu_3.x_3 \partial/\partial x_3$, logo p_{123} é uma singularidade simples de \mathcal{F}_0 e não degenerada de Y_0 . Em particular, existem $\epsilon_1 > 0$ e uma função holomorfa $P: (|t| < \epsilon_1) \rightarrow W$ tais que $P(0) = 0$ e $P(t)$ é a única singularidade de Y_t em W , sendo esta não degenerada. Logo, podemos aplicar o teorema da divisão a parâmetros de De Rham a Y_t : como $i_{Y_t}\theta_t = 0$, existe uma família holomorfa de campos de vetores em $W, (X_t)_{t \in D_{\epsilon_1}}$, tal que $\theta_t = i_{X_t}i_{Y_t}\nu = i_{X_t}d\theta_t$. Em particular, $\theta_t(P(t)) = 0$ e $P(t)$ é uma singularidade simples de θ_t . Como já vimos anteriormente, temos também $L_{X_t}(\theta_t) = \theta_t$ e $L_{X_t}(d\theta_t) = d\theta_t$. Esta última relação implica que

$$[X_t, Y_t] = (1 - \text{div}(X_t))Y_t := f_t.Y_t, \quad (3.12)$$

onde $\text{div}(X_t)$ é definido por $L_{X_t}(\nu) = \text{div}(X_t).\nu$. Ela implica também que $X_t(P(t)) = 0$ (verifique). Afirmamos que $f_t(P(t)) = 0$, se $|t| < \epsilon_1$.

Com efeito, sejam A_t e B_t as partes lineares de X_t e Y_t em $P(t)$, respectivamente. Colocando $a(t) = f_t(P(t))$, a relação (3.12) implica que $[A_t, B_t] = a(t).B_t$. Por outro lado, como $\det(B_t) \neq 0$ existe $s \in \mathbb{C}$ tal que $\det(A_t + s.B_t) \neq 0$. Fazendo $C_t := A_t + s.B_t$, obtemos $[C_t, B_t] = a(t).B_t$. Se $a(t) \neq 0$, esta última relação implicaria que B_t seria nilpotente (veja o exercício 2.2 do capítulo 2), um absurdo. Portanto, $f_t(P(t)) = 0$ para $t \in D_{\epsilon_1}$. Em particular, obtemos $[A_t, B_t] = 0$ e $\text{tr}(A_t) = 1$, já que $\text{div}(X_t)(P(t)) = \text{tr}(A_t)$.

Observemos agora, que a condição $2\lambda_i \neq \lambda_j + \lambda_\ell$, se os índices são distintos, implica que $\mu_i \neq \mu_j$, se $1 \leq i < j \leq 3$, ou seja, B_0 tem auto-valores dois a dois diferentes. Logo, existe $0 < \epsilon_2 \leq \epsilon_1$ tal

que se $t \in D_{\epsilon_2}$ então B_t tem auto-valores dois a dois diferentes. Em particular, A_t e B_t são diagonalizáveis na mesma base.

Lema 3.3.3. *Existem uma bola $V \subset W$ com centro em $0 \in \mathbb{C}^3$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$ e funções holomorfas $f_j: D_\epsilon \times V \rightarrow \mathbb{C}$ com as seguintes propriedades :*

(a). $f_j(t, P(t)) = 0$ para $t \in D_\epsilon$.

(b). Se $f_{jt}(q) = f_j(t, q)$ então $df_{1t} \wedge df_{2t} \wedge df_{3t}$ não se anula em V .

(c). Se $\eta_t := \frac{1}{f_{1t} \cdot f_{2t} \cdot f_{3t}} \cdot \theta_t$ então

$$\eta_t = \lambda_1(t) \frac{df_{1t}}{f_{1t}} + \lambda_2(t) \frac{df_{2t}}{f_{2t}} + \lambda_3(t) \frac{df_{3t}}{f_{3t}} \quad (3.13)$$

Em particular, η_t é logarítmica em V e define $\mathcal{F}_t|_V$.

Prova. Observemos primeiramente que existe $s_o \in \mathbb{C}$ tal que $esp(A_0 + s_o \cdot B_0)$ está no domínio de Poincaré e não tem ressonâncias. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 3.9). Podemos supor também que os auto-valores de $Z_0 := A_0 + s_o \cdot B_0$ são distintos dois a dois. Coloquemos $Z_t := X_t + s_o \cdot Y_t$. A parte linear de Z_t em $P(t)$ é $A_t + s_o \cdot B_t$. Como os auto-valores de Z_0 são distintos dois a dois, diminuindo ϵ_2 , podemos supor que $esp(A_t + s_o \cdot B_t) := \{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t)\}$, onde as aplicações $t \in D_\epsilon \mapsto \zeta_j(t) \in \mathbb{C}^*$ são holomorfas, $1 \leq j \leq 3$, e $\zeta_i(t) \neq \zeta_j(t)$ se $1 \leq i < j \leq 3$. Como Z_0 está no domínio de Poincaré, existem $\alpha \in \mathbb{C}$, com $|\alpha| = 1$, e uma bola V com centro em 0 , tal que $\bar{V} \subset W$, Z_0 é transversal a ∂V e os auto-valores de $\alpha \cdot Z_0$ têm parte real negativa.

Denotemos por ϕ_s^t , $|t| < \epsilon_2$, $s \in \mathbb{C}$, o fluxo complexo de Z_t . Colocando $\psi_s^t := \phi_{\alpha \cdot s}^t$, $s \in \mathbb{R}$, vemos que $\psi_s^0(V) \subset V$, para todo $s > 0$, e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_s^0(q) = 0$ para todo $q \in V$. A condição : "estar no domínio de Poincaré e não ter ressonâncias", é uma condição aberta. Portanto, existe $0 < \epsilon < \epsilon_2$ tal que se $|t| < \epsilon$ então :

(i). $esp(A_t + s_o \cdot B_t)$ está no domínio de Poincaré e não tem ressonâncias.

(ii). Z_t é transversal a ∂V .

(iii). Para todo $s > 0$ temos $\psi_s^t(V) \subset V$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_s^t(q) = P(t)$ para todo $q \in V$.

Afirmamos que para todo $t \in D_\epsilon$ e todo $j = 1, 2, 3$, existe $f_{jt}: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que

$$Z_t(f_{jt}) = \zeta_j(t) \cdot f_{jt} \quad (3.14)$$

Com efeito, fixemos t com $|t| < \epsilon$. Como Z_t é linearizável em $P(t)$, existe um sistema de coordenadas $(W_t, z_t := (z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}))$ tal que $P(t) \in W_t$, $z_t(P(t)) = 0$ e $Z_t = \zeta_1(t) \cdot z_{1t} \partial / \partial z_{1t} + \zeta_2(t) \cdot z_{2t} \partial / \partial z_{2t} + \zeta_3(t) \cdot z_{3t} \partial / \partial z_{3t}$. Como $Z_t(z_{jt}) = \zeta_j(t) \cdot z_{jt}$, tomamos $f_{jt}|_{W_t} = z_{jt}$, $1 \leq j \leq 3$. Utilizando (iii) vamos estender f_{jt} a V .

Integrando a relação (3.14) obtemos $f_{jt}(\phi_u^t(q)) = e^{\zeta_j(t) \cdot u} \cdot f_{jt}(q)$, que por sua vez, é equivalente a

$$f_{jt}(\psi_s^t(q)) = e^{\alpha \cdot \zeta_j(t) \cdot s} \cdot f_{jt}(q) .$$

Dado $q \in V$ existe $s > 0$ tal que $\psi_s^t(q) \in W_t$, logo podemos definir

$$H(q, s) := e^{-\alpha \cdot \zeta_j(t) \cdot s} \cdot z_{jt}(\psi_s^t(q)) . \quad (3.15)$$

A função H independe de $s > 0$ tal que $\psi_s^t(q) \in W_t$, uma vez que

$$\frac{\partial H / \partial s}{H} = -\alpha \cdot \zeta_j(t) + \alpha \frac{Z_t(z_{jt})}{z_{jt}} = 0 ,$$

logo a expressão (3.15) estende f_{jt} a toda bola V .

Coloquemos $\nu_t = df_{1t} \wedge df_{2t} \wedge df_{3t}$. Como $\zeta_1(t) + \zeta_2(t) + \zeta_3(t) = 1$, temos

$$L_{Z_t}(\nu_t) = \nu_t \implies (\psi_s^t)^*(\nu_t) = e^{\alpha \cdot s} \cdot \nu_t , \quad \forall s > 0 .$$

Esta última relação implica que ν_t não se anula em V , já que não se anula em W_t (verifique).

Afirmamos que $\eta_t := \frac{1}{f_{1j} \cdot f_{2t} \cdot f_{3t}} \cdot \theta_t$ é fechada. É suficiente provar que $d\eta_t|_{W_t} = 0$. Para simplificar a notação vamos colocar $Z_t|_{W_t} = \zeta_1 \cdot z_{1t} \partial / \partial z_{1t} + \zeta_2 \cdot z_{2t} \partial / \partial z_{2t} + \zeta_3 \cdot z_{3t} \partial / \partial z_{3t}$, uma vez que t está fixado. Vamos demonstrar que

$$\theta_t = \lambda_1(t) \cdot z_{2t} \cdot z_{3t} dz_1 + \lambda_2(t) \cdot z_{1t} \cdot z_{3t} dz_2 + \lambda_3(t) \cdot z_{1t} \cdot z_{2t} dz_3 .$$

Isto implicará que $\eta_t|_{W_t} = \lambda_1(t) \frac{dz_1}{z_1} + \lambda_2(t) \frac{dz_2}{z_2} + \lambda_3(t) \frac{dz_3}{z_3}$.

Como $L_{X_t}(\theta_t) = \theta_t$ e $L_{Y_t}(\theta_t) = 0$, temos $L_{Z_t}(\theta_t) = \theta_t$. Seja $\theta_t = \sum_{i\sigma} a_{i\sigma} \cdot z^\sigma \cdot dz_i$ a série de Taylor de θ_t em $0 = z_t(P(t))$. Daí obtemos

$$\sum_{i\sigma} a_{i\sigma} \cdot z^\sigma \cdot dz_i = L_{Z_t} \left(\sum_{i\sigma} a_{i\sigma} \cdot z^\sigma \cdot dz_i \right) = \sum_{i\sigma} (\zeta_i + \langle \sigma, \zeta \rangle) \cdot a_{i\sigma} \cdot z^\sigma \cdot dz_i,$$

ou seja, $\zeta_i + \langle \sigma, \zeta \rangle = 1$ sempre que $a_{i\sigma} \neq 0$. Se $i = 1$, por exemplo, temos $(1 + \sigma_1)\zeta_1 + \sigma_2 \cdot \zeta_2 + \sigma_3 \cdot \zeta_3 = 1$. Como $\sum_i \zeta_i = 1$, obtemos $\sigma_1 \cdot \zeta_1 + \sigma_2 \cdot \zeta_2 + \sigma_3 \cdot \zeta_3 = \zeta_2 + \zeta_3$. Se $\sigma_2 \geq 1$, por exemplo, temos $\zeta_3 = \sigma_1 \cdot \zeta_1 + (\sigma_2 - 1) \cdot \zeta_2 + \sigma_3 \cdot \zeta_3$. Como $\text{esp}(A_t + s_\circ \cdot B_t)$ não tem ressonâncias, vem que $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$. Analogamente, se $\sigma_3 \geq 1$, obtemos $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$. Portanto, a única possibilidade para que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \neq (0, 1, 1)$ é $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Isto implica que o coeficiente de dz_1 em θ_t é da forma $d(g_1(z_1)) + \lambda_1(t) z_2 z_3 dz_1$. Argumentando de maneira análoga com $i = 2, 3$, obtemos que

$$\theta_t = dg + \lambda_1(t) \cdot z_2 \cdot z_3 dz_1 + \lambda_2(t) \cdot z_1 \cdot z_3 dz_2 + \lambda_3(t) \cdot z_1 \cdot z_2 dz_3 := dg + \beta,$$

onde $g(z_1, z_2, z_3) = g_1(z_1) + g_2(z_2) + g_3(z_3)$. Por sua vez, a integrabilidade de θ_t implica que $dg \wedge d\beta = 0$. Como o leitor pode verificar, utilizando que $\lambda_j(t) - \lambda_i(t) \neq 0$, $i \neq j$, obtém-se que $g'_1(z_1) = g'_2(z_2) = g'_3(z_3) = 0$, ou seja, $dg = 0$.

Para terminar a demonstração do lema, é suficiente provar que podemos supor que $f_j(t, q) := f_{jt}(q)$ é holomorfa em $D_\epsilon \times V$. Para isto, é suficiente normalizar o sistema de coordenadas escolhido para linearizar Z_t em $P(t)$: tomamos $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, z_{3t})$ de forma que a matriz jacobiana $Dz_t(P(t)) = I$, a matriz identidade. Com esta escolha, o sistema de coordenadas é único e $(t, q) \mapsto z_t(q)$ é holomorfa (verifique). \square

Lema 3.3.4. *Fixado $1 \leq i < j \leq r$, existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança conexa V_{ij} de K_{ij} e isotopias de classe C^∞ , $\psi_{ij}: K_{ij} \times D_\epsilon \rightarrow V$, com as seguintes propriedades:*

- (a). *Se $K_{ij}(t) := \psi_{ij}(\{t\} \times K_{ij})$ então $p_{ij\ell}(t) \in K_{ij}(t)$, para todo $t \in D_\epsilon$ e todo $\ell \neq i, j$.*
- (b). *Se $\hat{K}_{ij}(t) := K_{ij}(t) \setminus \{p_{ij\ell}(t) \mid \ell \neq i, j\}$ então $\hat{K}_{ij}(t)$ está contido no conjunto de Kupka de \mathcal{F}_t .*

(c). O tipo transversal de \mathcal{F}_t em $\hat{K}_{ij}(t)$ é da forma $\lambda_i(t).x dy + \lambda_j(t).y dx$, onde a aplicação $t \mapsto (\lambda_i(t), \lambda_j(t)) \in \mathbb{C}^2$ é holomorfa e $\lambda_i(0) = \lambda_i$, $\lambda_j(0) = \lambda_j$.

(d). Existe uma 1-forma logarítmica η_{ijt} em V_{ij} que define \mathcal{F}_t .

Prova. A prova da existência da isotopia é análoga à demonstração do lema 2.3.3 da seção 2.3. Tomamos uma vizinhança tubular, $\pi: W \rightarrow K_{ij}$, de classe C^∞ , com fibra $\pi^{-1}(z) := F_z \simeq B^2$, onde B^2 é uma bola de \mathbb{C}^2 . Dado $z \in \hat{K}_{ij}$, existe um sistema de coordenadas $(W, (x_i, x_j, y) \in \mathbb{C}^3)$, tal que \mathcal{F}_0 é representada numa vizinhança de z por $\omega = \lambda_i.x_j dx_i + \lambda_j.x_i dx_j$. Seja $(\omega_t)_{t \in \mathbb{D}}$ uma família holomorfa de 1-formas em W tal que ω_t representa $\mathcal{F}_t|_W$ e $\omega_0 = \omega$. Como $\omega_0|_{F_z}$ tem uma singularidade não degenerada em $z = F_z \cap K_{ij}$, existe um germe $t \in (\mathbb{C}, z) \mapsto \psi_z(t) \in F_z$ tal que $\psi_z(t)$ é a única singularidade de $\omega_t|_{F_z}$. O ponto $\psi_z(t)$ é uma singularidade de Kupka de \mathcal{F}_t e $\text{sing}(\mathcal{F}_t) \cap F_z = \{\psi_z(t)\}$. Isto define um germe de isotopia $\psi: (\mathbb{C}, 0) \times \hat{K}_{ij} \rightarrow \mathbb{P}^3$ com as propriedades desejadas. A extensão deste germe aos pontos $p_{ij\ell}$, $\ell \neq i, j$, é feita utilizando o lema 3.3.3. Segundo este lema, fixado $\ell \neq i, j$, existem uma vizinhança $V = V_{ij\ell}$ de $p := p_{ij\ell}$ e $f_{it}, f_{jt}, f_{\ell t}: V \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $df_{it} \wedge df_{jt} \wedge df_{\ell t}$ não se anula em V e $\mathcal{F}_t|_V$ é representada por $f_{it}.f_{jt}.f_{\ell t}.\eta_{ijt}$, onde

$$\eta_{ijt} = \lambda_i(t) \frac{df_{it}}{f_{it}} + \lambda_j(t) \frac{df_{jt}}{f_{jt}} + \lambda_\ell(t) \frac{df_{\ell t}}{f_{\ell t}} \quad (3.16)$$

No caso, escolhemos as submersões f_i, f_j, f_ℓ de forma que $V \cap K_{ij} = (f_{i0} = f_{j0} = 0)$. Extendemos o germe ψ_{ij} ao ponto p , colocando $\{\psi_{ij}(t, p)\} = F_p \cap (f_{it} = f_{jt} = 0)$, que está bem definido, porque a interseção de F_p com $(f_{it} = f_{jt} = 0)$ é transversal, se $|t|$ é pequeno. Como K_{ij} é compacto, existe um representante de ψ_{ij} definido em $D_\epsilon \times K_{ij}$, $\epsilon > 0$, o qual denotamos pelo mesmo símbolo. Note que $\hat{K}_{ij}(t) := K_{ij}(t) \setminus \{p_{ij\ell}(t) \mid t \in D_\epsilon\}$ está contido no conjunto de Kupka de \mathcal{F}_t , sendo que o tipo transversal de \mathcal{F}_t ao longo de $\hat{K}_{ij}(t)$ é $\lambda_i(t).y dx + \lambda_j(t).x dy$, já que $\mathcal{F}_t|_{V_{ij\ell}}$ é representada por ω_t .

Com isto, já provamos (a), (b) e (c). Para provar (d), utilizaremos o seguinte fato, cuja prova deixamos como exercício para o leitor (veja o Ex. 3.10) : dado $z \in \hat{K}_{ij}$ existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança W de z em \mathbb{P}^3 e aplicações holomorfas $g_i, g_j: D_\epsilon \times W \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

- (i). Colocando $g_{it}(q) := g_i(t, q)$ e $g_{jt} := g_j(t, q)$, temos $dg_{it}(q) \wedge dg_{jt}(q) \neq 0$ para todo $q \in W$.
- (ii). $K_{ij}(t) \cap W = (g_{it} = g_{jt} = 0)$.
- (iii). $\mathcal{F}_t|_W$ é representada por $\theta_t = \lambda_i(t) \cdot g_{jt} \overline{dg_{it}} + \lambda_j(t) \cdot g_{it} \overline{dg_{jt}}$.

Como $t \mapsto \lambda_i(t), \lambda_j(t)$ são holomorfas e $\lambda_j(0)/\lambda_i(0) \notin \mathbb{R}$, vamos supor que $\lambda_j(t)/\lambda_i(t) \notin \mathbb{R}$, se $|t| < \epsilon$.

Utilizando a afirmação acima, podemos obter um recobrimento $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ de $\hat{K}_{ij}(t)$ por abertos e coleções $(g_{it}^\alpha, g_{jt}^\alpha)_{\alpha \in A}$, tais que $g_{it}^\alpha, g_{jt}^\alpha \in \mathcal{O}(W_\alpha)$ e $dg_{it}^\alpha \wedge dg_{jt}^\alpha$ não se anula em W e $\mathcal{F}_t|_{W_\alpha}$ é representada por $\theta_t^\alpha = \lambda_i(t) \cdot g_{jt}^\alpha \overline{dg_{it}^\alpha} + \lambda_j(t) \cdot g_{it}^\alpha \overline{dg_{jt}^\alpha}$, para todo $\alpha \in A$. Seja

$$\eta_t^\alpha := \lambda_i(t) \frac{dg_{it}^\alpha}{g_{it}^\alpha} + \lambda_j(t) \frac{dg_{jt}^\alpha}{g_{jt}^\alpha}.$$

Afirmamos que se $W_{\alpha\beta} := W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ então $\eta_t^\alpha = \eta_t^\beta$ em $W_{\alpha\beta}$.

Para simplificar a notação vamos colocar $g_{it}^\alpha = x, g_{jt}^\alpha = y, g_{it}^\beta = u$ e $g_{jt}^\beta = v$. Existe $h \in \mathcal{O}^*(W_{\alpha\beta})$ tal que $\theta_t^\alpha = h \cdot \theta_t^\beta$. Daí obtemos

$$\lambda_i(t) \frac{dx}{x} + \lambda_j(t) \frac{dy}{y} = \frac{h \cdot u \cdot v}{x \cdot y} (\lambda_i(t) \frac{du}{u} + \lambda_j(t) \frac{dv}{v}) \quad (3.17)$$

Logo, $d(\frac{h \cdot u \cdot v}{x \cdot y} \wedge \theta_t = 0$, ou seja, $\frac{h \cdot u \cdot v}{x \cdot y}$ é uma integral primeira de \mathcal{F}_t em $W_{\alpha\beta}$. Como $\lambda_j(t)/\lambda_i(t) \notin \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_t|_{W_{\alpha\beta}}$ não possui integral primeira meromorfa, $\frac{h \cdot u \cdot v}{x \cdot y} = c_{\alpha\beta}$ é uma constante. Comparando os resíduos nos dois membros de (3.17), obtemos $c_{\alpha\beta} = 1$, o que prova a afirmação. Com um argumento similar, prova-se que se $W_\alpha \cap V_{ij\ell} \neq \emptyset$ então $\eta_t^\alpha = \eta_{ij\ell t}$ em $W_\alpha \cap V_{ij\ell}$. Colocando $V_{ij} := (\cup_{\alpha \in A} W_\alpha) \cup (\cup_{\ell \neq i, j} V_{ij\ell})$, podemos definir uma forma $\eta_{ij t}$ em V_{ij} por $\eta_{ij t}|_{W_\alpha} = \eta_t^\alpha$, para todo $\alpha \in A$, e $\eta_{ij t}|_{V_{ij\ell}} = \eta_{ij\ell t}$, para todo $\ell \neq i, j$. \square

Terminemos a prova do teorema no caso $n = 3$. Seja $V = \cup_{i \neq j} V_{ij}$, onde as V_{ij} são dadas pelo lema 3.3.4. Por este lema, \mathcal{F}_t pode ser representada em V por uma forma logarítmica. Note que V é conexa. Para provar este fato, é suficiente demonstrar que o conjunto $K := \cup_{i < j} K_{ij}$ é conexo. De fato, decorre do teorema de Lefschetz, que K_{ij} é conexo, já que é uma interseção completa para todo $i \neq j$. Por

outro lado, se $i < j < k$ então $p_{ijk} \in K_{ij} \cap K_{jk}$, logo $K_{ij} \cup K_{jk}$ é conexo. Em particular, para todo j fixo, $\cup_{i \neq j} K_{ij}$ é conexo. Logo, K é conexo.

Por outro lado, se $1 \leq i < j \leq r$ e $k \neq i, j$ então $V_{ij} \cap V_{ik} = V_{ijk}$ e $\eta_{ijt} = \eta_{ijk} = \eta_{ikt}$ em V_{ijk} . Portanto, existe uma forma logarítmica η_t em V tal que $\eta_t|_{V_{ij}} = \eta_{ijt}$ para todo $i \neq j$. Como K_{ij} é interseção completa, a forma $\eta_t|_{V_{ij} \setminus K_{ij}}$ se estende a \mathbb{P}^3 pelo corolário 3.1.1 da seção 3.1, para todo $i < j$. Estas extensões coincidem, uma vez que V é conexo. Portanto, η_t se estende a uma forma meromorfa fechada em \mathbb{P}^3 , a qual denotaremos também por η_t . Pela proposição 1.2.5 da seção 1.2, podemos escrever

$$\eta_t = \sum_{j=1}^s \rho_j(t) \frac{dG_{jt}}{G_{jt}} + d(H/G_t),$$

onde $\rho_j(t) \in \mathbb{C}^*$ e $G_t = G_{1t}^{m_1-1} \dots G_{st}^{m_s-1}$, sendo $m_i \geq 1$ a ordem de G_{it} em $(\eta_t)_\infty$. Levando em conta que $(G_{it} = 0) \cap K_{jk}(t) \neq \emptyset$ e o fato de que $\eta_t|_{V_{jk}}$ é logarítmica, podemos concluir que $m_i = 1$ para todo i , ou seja, que a forma η_t é logarítmica. Obtemos também que $\cup_{i \neq j} (G_{it} = G_{jt} = 0) = \cup_{\ell \neq k} K_{\ell k}(t)$. Levando em conta as componentes irredutíveis destes conjuntos, vemos que, se $1 \leq i < j \leq s$ então existem $1 \leq \ell < k \leq r$ tais que $(G_{it} = G_{jt} = 0) = K_{\ell k}(t)$. Daí concluímos que $s = r$ e reordenando os $G_{i's}$ podemos supor que $(G_{it} = G_{jt} = 0) = K_{ij}(t)$. Levando em conta a forma local de η_t em $P_{ijk}(t) \in V_{ijk}$ dada em (3.13), $\eta_t = \lambda_i(t) \frac{dx_i}{x_i} + \lambda_j(t) \frac{dx_j}{x_j} + \lambda_k(t) \frac{dx_k}{x_k}$, onde $K_{ij}(t) \cap V_{ijk} = (x_i = x_j = 0)$, e comparando os resíduos, obtemos $\rho_j(t) = \lambda_j(t)$, para todo j . Por outro lado, como $t \mapsto K_{ij}(t)$ é uma isotopia para todo $i \neq j$, sendo $K_{ij}(0) = K_{ij} = (F_i = F_j = 0)$, obtemos que $gr(K_{ij}) = gr(K_{ij}(t))$, ou seja $gr(G_{it}).gr(G_{jt}) = gr(F_i).gr(F_j)$, para todo $i \neq j$. Daí concluímos que

$$\frac{gr(G_{1t})}{gr(F_1)} = \dots = \frac{gr(G_{rt})}{gr(F_r)} := a.$$

Finalmente, como $gr(\mathcal{F}_t) = \sum_{j=1}^r gr(G_{jt}) - 2 = \sum_{j=1}^r gr(F_j) - 2 = gr(\mathcal{F}_0)$, obtemos $a = 1$ e $gr(G_{jt}) = gr(F_j) = p_j$, para todo j . Portanto, $\mathcal{F}_t \in \mathcal{L}(3; p_1, \dots, p_r)$, se $|t| < \epsilon$. Isto termina a prova no caso $n = 3$.

2ª etapa. $n > 3$. Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{D}}$ uma família holomorfa de folheações em $\mathbb{F}ol(n, k)$, onde $\mathcal{F}_0 \in U \subset \mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$ é dada por $\Omega = F_1 \dots F_r \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$. Seja $\mathbb{P}^3 \simeq H \subset \mathbb{P}^n$ um 3-plano em posição geral com \mathcal{F}_0 . Coloquemos $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t|_H$. A folheação \mathcal{G}_0 é definida em coordenadas homogêneas em $\mathbb{C}^4 \simeq H_0 := \Pi_n^{-1}(H)$ por

$$\theta = \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dG_j}{G_j}, \quad G_j = F_j|_{H_0}.$$

Como H corta transversalmente todas as componentes de $\text{sing}(\mathcal{F}_0)$, a r -upla (G_1, \dots, G_r) é genérica (verifique). Pelo caso $n = 3$, obtemos que \mathcal{G}_t é definida em H_0 por

$$\theta_t = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{dG_{jt}}{G_{jt}}, \quad (3.18)$$

onde $gr(G_{jt}) = gr(G_j) = p_j$, para todo $j = 1, \dots, r$. Em particular, $\mathcal{F}_t|_H$ é definida por uma forma meromorfa fechada. Pela proposição 3.1.1, esta forma se estende a uma forma meromorfa fechada ω_t em \mathbb{P}^n que define \mathcal{F}_t . Levando em conta a proposição 1.2.5 da seção 1.2 e (3.18), é possível provar que

$$\omega_t = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{dF_{jt}}{F_{jt}},$$

onde $F_{jt}|_{H_0} = G_{jt}$ (verifique). Em particular, $gr(F_{jt}) = gr(G_{jt}) = p_j$ para todo $j = 1, \dots, r$. Logo, $\mathcal{F}_t \in \mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$. Isto termina a prova do teorema 4. \square

Uma conseqüência interessante do teorema 4, é a seguinte :

Corolário 3.3.1. *PB(n, m, 1) é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, 3m - 2)$ para todo $n \geq 3$ e todo $m \geq 1$.*

Prova. Lembremos que $PB(n, m, 1) = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} = F^*(\mathcal{G})\}$, onde \mathcal{G} é uma folheação de grau um em \mathbb{P}^2 e $F = (F_1, F_2, F_3): \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^3$ tem componentes F_j homogêneas de grau m . Por outro lado, uma folheação de grau um em \mathbb{P}^2 com todas as singularidades não degeneradas, é definida em algum sistema afim de coordenadas por um campo de

vetores linear do tipo $X = \lambda_1.x_1\partial/\partial x_1 + \lambda_2.x_2\partial/\partial x_2$, ou seja, pela forma $\omega = \lambda_1.x_1 dx_2 - \lambda_2.x_2 dx_1$. Em coordenadas homogêneas, \mathcal{G} é definida por $\Omega = x_1.x_2.x_3 \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dx_j}{x_j}$, $\lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$. Portanto, $\mathcal{F} = F^*(\mathcal{G})$ é definida pela forma fechada

$$\eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j},$$

logo está em $\mathcal{L}(n; m, m, m)$. O corolário decorre então do teorema 4. \square

3.4 Exercícios.

Ex. 3.1. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M . Suponha que existe uma 1-forma meromorfa fechada ω em M tal que ω representa \mathcal{F} em $M \setminus (|\omega|_\infty \cup |\omega|_0)$. Prove que todas as componentes irredutíveis de $|\omega|_\infty \cup |\omega|_0$ são invariantes por \mathcal{F} .

Ex. 3.2. Prove que se (F, G) é um par genérico de polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} , onde $n \geq 2$, $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$, então $cod(sing(pG dF - qF dG)) \geq 2$.

Ex. 3.3. Prove que o conjunto de pares de polinômios genéricos é aberto e denso no conjunto de todos os pares (F, G) , de polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} com $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$ (veja a definição de par genérico antes do enunciado do teorema 3).

Ex. 3.4. Sejam \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão ≥ 3 e $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{D}}$ uma família holomorfa de folheações em M tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Suponha que $sing(\mathcal{F})$ possui uma componente de Kupka compacta K com tipo transversal $X = \lambda_1 x\partial/\partial x + \lambda_2 y\partial/\partial y$, onde $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Prove que existem $\epsilon > 0$ e uma isotopia $\psi: D_\epsilon \times K \rightarrow M$ tais que :

- (a). $K_t := \psi(\{t\} \times K)$ é componente de Kupka de \mathcal{F}_t para todo $t \in D_\epsilon$, sendo $K_0 = K$.
- (b). O tipo transversal de K_t é dado por $X_t = P(x, y, t)\partial/\partial x + Q(x, y, t)\partial/\partial y$, onde P e Q são holomorfos em (x, y, t) , $P(x, y, 0) = \lambda_1 x$ e $Q(x, y, 0) = \lambda_2 y$.

Ex. 3.5. Sejam $(x, y), (u, v): (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ germes de submersões tais que

$$x dy - y dx = g(u dv - v du),$$

onde $g \in \mathcal{O}_n^*$. Prove que existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tais que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ e

$$\begin{cases} x = \sqrt{g}(\alpha.u + \beta.v) \\ y = \sqrt{g}(\gamma.u + \delta.v) \end{cases}.$$

Ex. 3.6. Sejam $\omega_0 = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $Re(\lambda_2/\lambda_1) > 0$. Seja $B_r = \{z = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < r\}$. Considere uma família de 1-formas $\omega_t = P(x, y, t) dy - Q(x, y, t) dx$, onde $P, Q \in \mathcal{O}(B_2 \times \mathbb{D})$. Denote por \mathcal{F}_t a folheação definida por ω_t . Prove que existe $\epsilon > 0$ tal que :

- ω_t tem uma única singularidade não degenerada $p(t) \in B_1$ com $esp(\mathcal{F}_t, p(t)) = \{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$, sendo $Re(\lambda_2(t)/\lambda_1(t)) > 0$, para todo $|t| < \epsilon$.
- \mathcal{F}_t é transversal a ∂B_1 , para todo $|t| < \epsilon$.
- Se $\lambda_2(t)/\lambda_1(t) \notin \mathbb{N} \cup 1/\mathbb{N}$ então \mathcal{F}_t pode ser definida em B_1 por uma única 1-forma meromorfa fechada tal que o seu divisor de polos contém exatamente duas componentes irredutíveis que se cruzam em $p(t)$ e têm resíduos $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$.
- Se $\lambda_2(t)/\lambda_1(t) \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ e \mathcal{F}_t tem duas separatrizes locais em $p(t)$ então \mathcal{F}_t tem uma integral primeira meromorfa em B_1 do tipo Y/X^n , onde $X, Y: B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ são submersões. Em particular, $\mathcal{F}_t|_{B_1}$ tem uma estrutura transversal afim em $B_1 \setminus (X = 0)$.
- Se $\lambda_2(t) = \lambda_1(t)$ e \mathcal{F}_t tem duas separatrizes locais em $p(t)$ então \mathcal{F}_t tem uma integral primeira meromorfa em B_1 do tipo Y/X , onde $X, Y: B_1 \rightarrow \mathbb{C}$ são submersões. Em particular, $\mathcal{F}_t|_{B_1}$ tem uma estrutura transversal projetiva em $B_1 \setminus \{p(t)\}$.

Prove que as conclusões acima implicam o lema 3.2.4 da seção 3.2.

Ex. 3.7. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, que possui uma componente de Kupka K com tipo transversal $x dy - y dx$. Prove que, se K é interseção completa então \mathcal{F} possui uma estrutura transversal projetiva em $\mathbb{P}^n \setminus sing(\mathcal{F})$.

Ex. 3.8. Prove que o conjunto de r -uplas genéricas, (F_1, \dots, F_r) , de polinômios, é aberto e denso no conjunto de todas as r -uplas, de polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} com graus correspondentes.

Ex. 3.9. Sejam $A, B \in GL(3, \mathbb{C})$ tais que

- (a). $[A, B] = 0$ e $tr(A) = 1$.
- (b). $det(B) \neq 0$, $B = diag(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, numa certa base E de \mathbb{C}^3 , sendo $\mu_i \neq \mu_j$ se $i \neq j$. Neste caso, $A = diag(a_1, a_2, a_3)$ na base E .
- (c). Para $i \neq j$, seja $\lambda_{ij} = a_i \cdot \mu_j - a_j \cdot \mu_i$. Suponha que $\lambda_{ij}/\lambda_{ik} \notin \mathbb{R}$ se i, j e k são distintos dois a dois.

Prove que existe $s \in \mathbb{C}$ tal que $esp(A + s.B(t))$ está no domínio de Poincaré e não tem ressonâncias.

Ex. 3.10. Seja $(\omega_t)_{t \in \mathbb{D}}$ uma família holomorfa de 1-formas integráveis numa vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^3$. Suponha que $\omega_0 = \lambda_1 \cdot x_2 dx_1 + \lambda_2 \cdot x_1 dx_2$, onde $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Prove que existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança $0 \in W = B \times D \subset U$, onde $B \subset \mathbb{C}^2$ é uma bola e $D \subset \mathbb{C}$ é um disco, e aplicações holomorfas $g_1, g_2: D_\epsilon \times W \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $dg_{1t}(q) \wedge dg_{2t}(q) \neq 0$, para todo $q \in W$, e

$$\omega_t|_W = h_t \cdot (\lambda_1(t) \cdot g_{2t} dg_{1t} + \lambda_2(t) \cdot g_{1t} dg_{2t}),$$

sendo $h_t \in \mathcal{O}^*(W)$ e $t \mapsto \lambda_j(t)$ é holomorfa para $j = 1, 2$.

Sugestão. Veja as demonstrações do teorema 1.8 e do lema 3.3.3.

Capítulo 4

Componentes excepcionais.

Neste capítulo estudaremos algumas componentes de $\mathbb{F}ol(n, k)$, $n \geq 3$, nas quais a folheação típica possui $n - 1$ folheações de dimensão um tangentes. Como veremos, algumas destas componentes são rígidas, no sentido de que duas folheações típicas na componente são equivalentes por um automorfismo de \mathbb{P}^n . Dentre estas, veremos as denominadas componentes de *Klein-Lie*, nas quais a folheação típica é dada, em algum sistema de coordenadas afim, por uma ação do grupo afim em que a órbita genérica tem codimensão um.

4.1 Folheações com feixe tangente localmente livre.

Nesta seção veremos alguns resultados sobre folheações com feixe de vetores tangentes localmente livre. O resultado principal é o teorema 5 (veja [C-P]).

4.1.1 Resultados básicos.

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M . O feixe de vetores tangentes a \mathcal{F} é o feixe \mathcal{TF} definido por

$$\mathcal{T}_p\mathcal{F} = \{v \in \mathcal{X}_p \mid v \text{ é tangente a } \mathcal{F}\}.$$

O feixe \mathcal{TF} é livre em $p \in M$ se existem $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathcal{X}_p$ que geram $\mathcal{T}_p\mathcal{F}$, visto como módulo sobre \mathcal{O}_p . Em outras palavras, se \mathcal{TF} é livre em p e $\mathcal{T}_p\mathcal{F} = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ então para todo $v \in \mathcal{T}_p\mathcal{F}$ existem $f_1, \dots, f_{n-1} \in \mathcal{O}_p$ tais que $v = \sum_j f_j.v_j$. Diremos que \mathcal{TF} é localmente livre, se ele é livre em todos os pontos de M . Por exemplo, se $p \notin \text{sing}(\mathcal{F})$ então \mathcal{TF} é livre em p . Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1.1. Suponha que existem $n - 1$ campos de vetores meromorfos em M (conexa), X_1, \dots, X_{n-1} , tangentes a \mathcal{F} , e $p \in M \setminus \cup_j (X_j)_\infty$ tal que $X_1(p) \wedge \dots \wedge X_{n-1}(p) \neq 0$, isto é, $p \notin \text{sing}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{T}_p\mathcal{F} = \langle X_1(p), \dots, X_{n-1}(p) \rangle$. Então \mathcal{TF} é localmente livre. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 4.1). Observamos ainda que se $\dim(M) = 2$ então \mathcal{TF} é localmente livre.

Um exemplo específico são as folheações do tipo pull-back linear, $PBL(n, k)$, $n \geq 3$, $k \geq 0$ (veja o Ex. 4.2). Outro, que inclui este como caso particular, é o seguinte.

Exemplo 4.1.2. Sejam X_1, \dots, X_{n-1} campos de vetores em \mathbb{C}^{n+1} , tais que :

- (a). O conjunto $A := \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid R(p) \wedge X_1(p) \wedge \dots \wedge X_{n-1}(p) = 0\}$ tem codimensão ≥ 2 , onde R é o campo radial em \mathbb{C}^{n+1} . Esta condição implica que A tem codimensão dois.
- (b). Os coeficientes de X_j são homogêneos do mesmo grau d_j , $1 \leq j \leq n - 1$.
- (c). O conjunto $\{R := X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ gera uma álgebra de Lie, ou seja, $[X_i, X_j] = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ijk} X_k$, onde $a_{ijk} \in \mathbb{C}$.

Notamos que $[X_0, X_j] = [R, X_j] = (d_j - 1).X_j$, $1 \leq j \leq n - 1$. Neste caso, a 1-forma

$$\Omega = i_R i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu, \quad \nu = dz_0 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$$

é integrável e define uma folheação \mathcal{F} de codimensão um em \mathbb{P}^n de grau $d = d_1 + \dots + d_{n-1}$. No caso, $\text{sing}(\mathcal{F}) = \Pi_n(A)$. Nas componentes que serão estudadas na seção 4.1.2, as folheações típicas serão deste tipo.

Exemplo 4.1.3. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em M , onde $\dim(M) \geq 3$. Suponha que $\text{sing}(\mathcal{F})$ tem uma componente irredutível S de codimensão ≥ 3 . Se $p \in S$ é um ponto liso de S então $\mathcal{T}\mathcal{F}$ não é livre em p . Vamos provar este fato no caso em que $\dim(M) = 3$ e deixar como exercício o caso $\dim(M) \geq 4$ (veja o Ex. 4.3).

Sem perda de generalidade, vamos supor que $p = 0 \in \mathbb{C}^3$. Suponha por absurdo que $\mathcal{T}_0\mathcal{F} = \langle v_1, v_2 \rangle$, onde $v_1, v_2 \in \mathcal{X}_0$. Sejam X_1 e X_2 representantes de v_1 e v_2 , respectivamente, definidos num polidisco Q contendo 0. Podemos supor que $\text{sing}(\mathcal{F}) \cap Q = \{0\}$. Como é sabido da teoria dos feixes, dado $q \in Q$, os germes, X_{1q} e X_{2q} , de X_1 e X_2 em q , geram $\mathcal{T}_q\mathcal{F}$ (veja [G-H]). Por outro lado, o conjunto $A := \{q \in Q \mid X_1(q) \wedge X_2(q) = 0\}$, isto é, o conjunto onde $X_1(q)$ e $X_2(q)$ são linearmente dependentes, tem dimensão ≥ 1 , ou seja, contém uma curva γ , onde $0 \in \gamma$ (verifique). Logo, existe $q \in A \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{T}_q\mathcal{F} = \langle X_{1q}, X_{2q} \rangle$. Porém, $q \notin \text{sing}(\mathcal{F})$ e $\dim_{\mathbb{C}}(\langle X_{1q}, X_{2q} \rangle) \leq 1$, o que é um absurdo.

Exemplo 4.1.4. Se $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$, é uma singularidade de Kupka, então $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é livre em p . Este fato decorre do teorema de Kupka (seção 1.4). Deixamos os detalhes para o leitor.

Exemplo 4.1.5. Se $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ é uma singularidade simples então $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é livre em p . Este fato decorre dos teoremas 1.12 da seção 1.4.2 e 2.1 da seção 2.1. Deixamos os detalhes para o leitor.

Como conseqüência dos exemplos 4.1.4 e 4.1.5, temos a seguinte :

Proposição 4.1.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M , $\dim(M) \geq 3$. Suponha que todas as singularidades de \mathcal{F} são de Kupka, ou são simples. Então $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é localmente livre.*

No caso de \mathbb{P}^n usaremos a notação : $SK(n, k) = \{\mathcal{F} \in \text{Fol}(n, k) \mid \text{todas as singularidades de } \mathcal{F} \text{ são de Kupka ou simples}\}$.

Observação 4.1.1. $\mathcal{SK}(n, k)$ é aberto em $\mathbb{F}ol(n, k)$ para todo $n \geq 3$ e todo $k \geq 0$. Em particular, o seu fecho em $\mathbb{F}ol(n, k)$, $\overline{\mathcal{SK}}(n, k)$, é uma união de componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, k)$. Não provaremos este fato aqui, mas gostaríamos de mencionar que um problema em aberto é o de classificar as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, k)$ contidas em $\overline{\mathcal{SK}}(n, k)$.

Observação 4.1.2. Algumas das componentes estudadas nos capítulos anteriores estão contidas em $\overline{\mathcal{SK}}(n, k)$. Por exemplo $\mathcal{R}(n; 1, 1) = \mathbb{F}ol(n, 0) = \overline{\mathcal{S}}(n, 0)$, para todo $n \geq 3$, e $PBL(n, k) \subset \overline{\mathcal{SK}}(n, k)$, para $n \geq 3$, $k \geq 0$. Também $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1) \subset \overline{\mathcal{SK}}(n, 1)$, já que $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1) = PB(n, 1, 1) = PBL(n, 1)$.

Por outro lado, $\mathcal{R}(n; p, q) \not\subset \overline{\mathcal{SK}}(n, p+q-2)$, se $p+q > 2$. De fato, se $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n, p, q)$, $p+q > 2$, então \mathcal{F} é representada por $\Omega = p.G dF - q.F dG$, onde $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$. Logo, $d\Omega = (p+q) dG \wedge dF$ se anula em $X := (dF \wedge dG = 0)$. Como $p+q \geq 2$, $X \neq \{0\}$. Por outro lado, se (F, G) é um par genérico então $X \cap (F = G = 0) = \{0\}$ e $(dF = 0) = (dG = 0) = \{0\}$. Logo, se $p \in X \setminus \{0\}$ então $\Pi_n(p)$ é uma singularidade de \mathcal{F} que não é de Kupka nem simples. Vale também que, se $p_1 + \dots + p_r > 3$ então $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r) \not\subset \mathcal{SK}(n, p_1 + \dots + p_r - 2)$ (veja o Ex. 4.4).

Observação 4.1.3. Em geral, o conjunto $L = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, k) \mid \mathcal{T}\mathcal{F} \text{ é localmente livre}\}$ não é um aberto de $\mathbb{F}ol(n, k)$. Vejamos um exemplo. Sejam (F, G) um para genérico de polinômios em \mathbb{C}^3 , com $gr(F) = q$ e $gr(G) = p$, onde $p+q > 2$, e \mathcal{G} a folheação em \mathbb{P}^2 , definida em coordenadas homogêneas por $\omega = p.G dF - q.F dG$. Seja $\Phi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$ uma aplicação de grau um e posto dois, $n \geq 3$. Se $\mathcal{F} = \Phi^*(\mathcal{G})$ então $\mathcal{F} \in PBL(n, p+q-2)$, logo $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é localmente livre. Por outro lado, $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n, p, q)$, pois $(F^p/G^q) \circ \Phi$ é integral primeira de \mathcal{F} . Logo, qualquer aberto U de $\mathbb{F}ol(n, p+q-2)$ que contém \mathcal{F} , contém também um ponto genérico $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{R}(n, p+q-2)$, para o qual $\mathcal{T}\mathcal{F}_1$ não é localmente livre, pela observação anterior.

Definição 4.1.1. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão $n \geq 3$. Diremos que $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é *decomponível*, se $\mathcal{T}\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, onde \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 são subfeixes não triviais de $\mathcal{T}\mathcal{F}$. Diremos que $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é *totalmente decomponível*, se $\mathcal{T}\mathcal{F} = \bigoplus_{j=1}^{n-1} \mathcal{E}_j$, onde \mathcal{E}_j é um sub-feixe de posto um de $\mathcal{T}\mathcal{F}$, para todo $j = 1, \dots, n-1$.

Observação 4.1.4. Uma folheação de codimensão um \mathcal{F} numa variedade M de dimensão n tem feixe tangente totalmente decomponível se, e somente se, existem $n - 1$ folheações por curvas $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$ em M , tais que se $p \in M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$, então $p \notin \text{sing}(\mathcal{G}_j)$, $1 \leq j \leq n - 1$, e $T_p\mathcal{F} = T_p\mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus T_p\mathcal{G}_{n-1}$. A prova deste fato decorre diretamente das definições e é deixada para o leitor. Neste caso, diremos que as folheações $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$ geram \mathcal{F} e usaremos a notação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1})$.

No caso de \mathbb{P}^n , temos o seguinte :

Proposição 4.1.2. *Uma folheação de codimensão um \mathcal{F} em \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, tem feixe tangente totalmente decomponível se, e somente se, existem campos de vetores X_1, \dots, X_{n-1} em \mathbb{C}^{n+1} tais que :*

- (a). X_j tem coeficientes homogêneos de grau d_j , $1 \leq j \leq n - 1$.
- (b). \mathcal{F} é definida em coordenadas homogêneas pela forma

$$\Omega = i_R i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu,$$

onde R é o campo radial em \mathbb{C}^{n+1} e $\nu = dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$.

Em particular, conjunto $A := \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid R(p) \wedge X_1(p) \wedge \dots \wedge X_{n-1}(p) = 0\}$ tem codimensão dois e o sistema $\{R, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ é involutivo. Além disto, $gr(\mathcal{F}) = d_1 + \dots + d_{n-1}$.

Prova. Suponhamos que \mathcal{TF} é totalmente decomponível. Neste caso, existem folheações por curvas em \mathbb{P}^n , $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$, que geram \mathcal{F} e tais que $gr(\mathcal{G}_j) = d_j$, $1 \leq j \leq n - 1$.

Fixemos $j \in \{1, \dots, n - 1\}$. A folheação \mathcal{G}_j pode ser representada no sistema de coordenadas afim $E_0 = (z_0 = 1) \simeq \mathbb{C}^n$ por um campo polinomial Y_j do tipo

$$Y_j = \sum_{i=1}^n (p_i^j(x) + g^j(x) \cdot z_i) \partial / \partial z_i,$$

onde $x = (z_1, \dots, z_n)$, $gr(p_i^j) \leq d_j$ e g^j é homogêneo de grau d_j . Coloquemos $P_i^j(z_0, x) = z_0^{d_j} \cdot p_i^j(x/z_0)$, $1 \leq i \leq n$, e

$$X_j(z_0, x) := -g^j(x) \partial / \partial z_0 + \sum_{i=1}^n P_i^j(z_0, x) \partial / \partial z_i.$$

Afirmamos que $\Omega = i_R i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu$ define \mathcal{F} em coordenadas homogêneas.

Com efeito, se $\tilde{Y}_j := z_0.X_j(z_0, x) + g^j(x).R$ então \tilde{Y}_j é tangente a E_0 e $\tilde{Y}_j|_{E_0} = Y_j$, como o leitor pode verificar. Por outro lado,

$$\begin{aligned} z_0^{n-1}.\Omega &= i_R i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} \nu = (-1)^{n-1} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} (i_R \nu) = \\ &= (-1)^{n-1} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} (z_0 \nu_1 - dz_0 \wedge \zeta), \end{aligned}$$

onde $\nu_1 = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ e ζ é holomorfa. Isto implica que

$$\Omega|_{E_0} = (z_0^{n-1}.\Omega)|_{E_0} = i_{Y_1} \dots i_{Y_{n-1}} \nu_1 := \omega.$$

Como $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$ geram \mathcal{F} , ω representa \mathcal{F} nas coordenadas afins E_0 , Ω representa \mathcal{F} em coordenadas homogêneas. Deixamos a prova da recíproca para o leitor. \square

4.1.2 Folheações com feixe tangente totalmente decomponível.

O resultado que enunciaremos em seguida é devido a J. V. Pereira e F. Cukierman (veja [C-P]). Consideraremos a seguinte situação : seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em \mathbb{P}^n com feixe tangente totalmente decomponível, onde $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n-1})$, $d := gr(\mathcal{F}) = d_1 + \dots + d_{n-1}$, $d_j = gr(\mathcal{F}_j)$, $1 \leq j \leq n-1$. Seja Ω a forma que representa \mathcal{F} em coordenadas homogêneas.

Teorema 5. *Na situação acima, se $cod(sing(d\Omega)) \geq 3$ então :*

- \mathcal{F} é um ponto liso de $\mathbb{F}ol(n, gr(\mathcal{F}))$. Denotemos por $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ a componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, gr(\mathcal{F}))$ que contém \mathcal{F} e por $lis(\mathcal{I}(\mathcal{F}))$ a sua parte lisa.
- Se $\mathcal{H} \in lis(\mathcal{I}(\mathcal{F}))$ então $\mathcal{H} = \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-1})$, onde $gr(\mathcal{H}_j) = d_j$, $1 \leq j \leq n-1$.

Prova. Como vimos na proposição 4.1.2, \mathcal{F} é representada em coordenadas homogêneas por $\Omega = i_R i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu$, onde X_j é homogêneo de grau $d_j = gr(\mathcal{F}_j)$, $1 \leq j \leq n-1$. A fim de unificar a notação vamos colocar $R := (-1)^{n-1} X_n$, de modo que $\Omega = i_{X_1} \dots i_{X_n} \nu$.

Lema 4.1.1. *Seja Y um campo de vetores homogêneo em \mathbb{C}^{n+1} com $gr(Y) = p$. Suponha que $Y \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_n \equiv 0$. Então existem polinômios homogêneos h_1, \dots, h_n tais que $gr(h_j) + d_j = p$, $1 \leq j \leq n$, e*

$$Y = \sum_{j=1}^n h_j \cdot X_j . \quad (4.1)$$

Em particular, se $i < j$ então existem polinômios homogêneos, $a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^n$, tais que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k \cdot X_k . \quad (4.2)$$

Prova. Vamos utilizar que $cod(sing(\Omega)) \geq 2$. Note que $sing(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid X_1(z) \wedge \dots \wedge X_n(z) = 0\}$. Dado $z \notin sing(\Omega)$, existem $h_1(z), \dots, h_n(z) \in \mathbb{C}$ (únicos) tais que $Y(z) = \sum_{j=1}^n h_j(z) \cdot X_j(z)$, já que $X_1(z), \dots, X_n(z)$ são linearmente independentes e $Y(z), X_1(z), \dots, X_n(z)$ são dependentes. Isto define funções holomorfas $h_j: \mathbb{C}^{n+1} \setminus sing(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$. Como $cod(sing(\Omega)) \geq 2$ estas funções se estendem a funções holomorfas em \mathbb{C}^{n+1} , pelo teorema de Hartogs. Levando em conta que Y, X_1, \dots, X_n são homogêneos, concluímos que h_1, \dots, h_n são homogêneos e $gr(h_j) + gr(X_j) = gr(Y)$.

Como Ω é integrável, os campos X_1, \dots, X_n são involutivos. Isto acarreta que, se $i < j$ então $[X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_n = 0$, logo de (4.1) obtemos (4.2). \square

Lema 4.1.2. *Existem campos homogêneos Y_j , $1 \leq j \leq n-1$, tais que*

$$(a). \quad d\Omega = (d+2) i_{Y_1} \dots i_{Y_{n-1}} \nu .$$

$$(b). \quad Y_j = X_j - h_j \cdot R, \text{ onde } gr(h_j) + 1 = gr(X_j), \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ (h_j = 0 \text{ se } gr(X_j) = 0).$$

Prova. Utilizaremos a seguinte fórmula :

$$d(i_{Z_1} \dots i_{Z_q} \nu) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} i_{[Z_i, Z_j]} i_{Z_1} \dots \widehat{i_{Z_i}} \dots \widehat{i_{Z_j}} \dots i_{Z_q} \nu + \\ + \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} div(Z_j) i_{Z_1} \dots \widehat{i_{Z_j}} \dots i_{Z_q} \nu \quad (4.3)$$

Na fórmula (4.3) o símbolo $\widehat{i_{Z_j}}$ significa que omitimos o termo i_{Z_j} no produto interior repetido. Ela é válida para qualquer q -upla (Z_1, \dots, Z_q) de campos holomorfos em \mathbb{C}^m . Deixamos a prova como exercício para o leitor (veja o Ex. 4.5). Como o leitor pode verificar, obtemos de (4.3) e (4.2) que

$$d\Omega = \sum_{j=1}^n g_j i_{X_1} \dots \widehat{i_{X_j}} \dots i_{X_n} \nu, \quad (4.4)$$

onde g_j é polinômio homogêneo de grau $d_j - 1$, $1 \leq j \leq n$. No caso, como $i_{X_n} d\Omega = (-1)^{n-1} (d+2) \Omega$, obtemos $g_n = d+2$. Colocando $Y_j := X_j - h_j \cdot R = X_j + (-1)^n \cdot h_j \cdot X_n$, onde $h_j := \frac{(-1)^{j-1}}{d+2} g_j$, $1 \leq j \leq n-1$, temos

$$\begin{aligned} Y_1 \wedge \dots \wedge Y_{n-1} &= X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} h_j X_1 \wedge \dots \widehat{X_j} \wedge \dots \wedge X_n = \\ &= \frac{1}{d+2} \sum_{j=1}^n g_j X_1 \wedge \dots \wedge \widehat{X_j} \wedge \dots \wedge X_n, \end{aligned}$$

como o leitor pode verificar. A relação acima e (4.4) implicam (a). \square

Coloquemos $\theta_o := \frac{1}{d+2} d\Omega$, de forma que $\theta_o = i_{Y_1} \dots i_{Y_{n-1}} \nu$. A condição de integrabilidade, $\Omega \wedge d\Omega = 0$, implica que $\theta_o \wedge \theta_o = 0$.

Denotemos por Ω_s^r o conjunto das r -formas em \mathbb{C}^{n+1} , cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau s e por \mathcal{X}_s o conjunto dos campos polinomiais homogêneos de grau s em \mathbb{C}^{n+1} . Seja $\mathcal{X}^d := \mathcal{X}_{d_1} \times \dots \times \mathcal{X}_{d_{n-1}}$. Defina $\Phi: \Omega_d^2 \rightarrow \Omega_{2d}^4$ e $\Psi: \mathcal{X}^d \rightarrow \Omega_d^2$ por $\Phi(\theta) = \theta \wedge \theta$ e $\Psi(Z_1, \dots, Z_{n-1}) = i_{Z_1} \dots i_{Z_{n-1}} \nu$. Consideremos os seguintes sub-conjuntos algébricos de $\Omega_d^2(n+1)$:

$$(I). \quad \Gamma = \{\theta \in \Omega_d^2(n+1) \mid \Phi(\theta) = 0\}.$$

$$(II). \quad \Lambda = \Psi(\mathcal{X}^d).$$

Note que $\Lambda \subset \Gamma$. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 4.6).

Dados $\theta, \alpha \in \Gamma$, temos $D\Phi(\theta) \cdot \alpha = 2\alpha \wedge \theta$ (verifique). Por outro lado, se $Z = (Z_1, \dots, Z_{n-1}) \in \mathcal{X}^d$ e $W = (W_1, \dots, W_{n-1})$ então $D\Psi(Z) \cdot W = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi(Z_1, \dots, Z_{j-1}, W_j, Z_{j+1}, \dots, Z_{n-1})$ (verifique).

Dado $\theta = \Psi(Z) \in \Lambda$, considere os seguintes sub-espacos vetoriais de Ω_d^2 :

$$(i). T_\theta \Gamma = \ker(D\Phi(\theta)).$$

$$(ii). T_\theta \Lambda = \text{Im}(D\Psi(Z)).$$

Como $\Lambda \subset \Gamma$, temos $\Phi \circ \Psi = 0$. Em particular, se $\theta = \Psi(Z) \in \Lambda$ ent\~ao $D\Phi(\theta) \circ D\Psi(Z) = 0$, ou seja, $T_\theta \Lambda \subset T_\theta \Gamma$.

Lema 4.1.3. *Seja $\theta = \Psi(Z) \in \Lambda$ e suponha que $\text{cod}(\text{sing}(\theta)) \geq 3$. Ent\~ao $T_\theta \Lambda = T_\theta \Gamma$.*

Prova. Vamos utilizar aqui o teorema 1.16 do Ap\~endice 1 : como $\text{cod}(\text{sing}(\theta)) \geq 3$, temos $H^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \text{sing}(\theta), \mathcal{O}) = 0$. Seja $\mathcal{U} = (U_k)_{k \in K}$ uma cobertura de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \text{sing}(\theta)$, por polidiscos de \mathbb{C}^{n+1} , com a seguinte propriedade : para todo $k \in K$ existem campos de vetores holomorfos Z_n^k, Z_{n+1}^k em U_k tais que $\{Z_1(q), \dots, Z_{n-1}(q), Z_n^k(q), Z_{n+1}^k(q)\}$ \u00e9 uma base de $T_q \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, para todo $q \in U^k$. Deixamos para o leitor a verifica\u00e7\~ao de que existe uma tal cobertura.

Seja $\alpha \in T_\theta \Gamma$, isto \u00e9, tal que $\alpha \wedge \theta = 0$. Queremos provar que existe $W = (W_1, \dots, W_{n-1}) \in \mathcal{X}^d$ tal que $\alpha = D\Psi(Z).W$. Observemos em primeiro lugar que $i_{Z_r} i_{Z_s} \alpha = 0$ para todo $r < s \leq n-1$. Com efeito, como $\theta = i_{Z_1} \dots i_{Z_{n-1}} \nu$, temos $i_{Z_j} \theta = 0$, para todo $j \leq n-1$, logo

$$\alpha \wedge \theta = 0 \implies i_{Z_s}(\alpha) \wedge \theta = 0 \implies i_{Z_r} i_{Z_s}(\alpha) \cdot \theta = 0 \implies .$$

$i_{Z_r} i_{Z_s} \alpha = 0$. Este fato implica que para todo $k \in K$ existe uma $(n-1)$ -upla de campos de vetores holomorfos em U_k , $W^k = (W_1^k, \dots, W_{n-1}^k)$, tal que $\alpha = D\Psi(Z).W^k = \sum_{j=1}^{n-1} i_{Z_1} \dots i_{Z_{j-1}} i_{W_j^k} i_{Z_{j+1}} \dots i_{Z_{n-1}} \nu$. Deixamos a verifica\u00e7\~ao deste fato como exerc\u00edcio para o leitor (veja o Ex. 4.7).

Dados $k, \ell \in K$ tais que $U_{k\ell} := U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$, colocamos $W_j^{k\ell} := W_j^\ell - W_j^k$. Se $U_{k\ell} \neq \emptyset$, temos

$$\sum_{j=1}^{n-1} i_{Z_1} \dots i_{Z_{j-1}} i_{W_j^{k\ell}} i_{Z_{j+1}} \dots i_{Z_{n-1}} \nu = 0 \implies$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} Z_1 \wedge \dots \wedge Z_{j-1} \wedge W_j^{k\ell} \wedge Z_{j+1} \wedge \dots \wedge Z_{n-1} = 0 \implies$$

$$W_j^{k\ell} \wedge Z_1 \wedge \dots \wedge Z_{n-1} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n-1, \quad (4.5)$$

sendo que a relação (4.5) foi obtida fazendo o produto exterior da relação anterior por Z_j . Fixemos $j \in \{1, \dots, n-1\}$. A relação (4.5) implica que existem $h_{ji}^{k\ell} \in \mathcal{O}(U_{k\ell})$, $1 \leq i \leq n-1$, tais que

$$W_j^\ell - W_j^k = W_j^{k\ell} = \sum_{i=1}^{n-1} h_{ji}^{k\ell} Z_i \quad (4.6)$$

O argumento é análogo ao da prova do lema 4.1.1 e é deixado para o leitor. Sejam $k, \ell, m \in K$ tais que $U_{k\ell m} := U_{k\ell} \cap U_m \neq \emptyset$. A relação (4.6) implica que $\sum_{i=1}^{n-1} (h_{ji}^{k\ell} + h_{ji}^{\ell m} + h_{ji}^{mk}) Z_i = 0$, uma vez que $W_j^{k\ell} + W_j^{\ell m} + W_j^{mk} = 0$. Por outro lado, como Z_1, \dots, Z_{n-1} são linearmente independentes em todos os pontos de $U_{k\ell m}$, obtemos que $h_{ji}^{k\ell} + h_{ji}^{\ell m} + h_{ji}^{mk} = 0$, ou seja, $(h_{ji}^{k\ell})_{U_{k\ell} \neq \emptyset}$ é um cociclo em $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, para todo $i = 1, \dots, n-1$. Como $H^1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \text{sing}(\theta), \mathcal{O}) = 0$, o cociclo é trivial, isto é, para todo $k \in K$ e para todo $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, existe $g_{ji}^k \in \mathcal{O}(U_k)$ tal que se $U_{k\ell} \neq \emptyset$ então $h_{ji}^{k\ell} = g_{ji}^\ell - g_{ji}^k$. Da relação (4.6) obtemos que, se $U_{k\ell} \neq \emptyset$ então

$$(W_j^\ell - \sum_{i=1}^{n-1} g_{ji}^\ell Z_i)|_{U_{k\ell}} = (W_j^k - \sum_{i=1}^{n-1} g_{ji}^k Z_i)|_{U_{k\ell}},$$

ou seja, existe um campo holomorfo \tilde{W}_j em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \text{sing}(\theta)$ tal que $\tilde{W}_j|_{U_k} = W_j^k - \sum_{i=1}^{n-1} g_{ji}^k Z_i$, para todo $k \in K$, $1 \leq j \leq n-1$. Como $\text{cod}(\text{sing}(\theta)) \geq 3$, o campo \tilde{W}_j se estende a um campo holomorfo em \mathbb{C}^{n+1} , o qual será denotado pelo mesmo símbolo, $1 \leq j \leq n-1$. Coloquemos $\tilde{\alpha} := \sum_{j=1}^{n-1} i_{Z_1} \dots i_{Z_{j-1}} i_{\tilde{W}_j} i_{Z_{j+1}} \dots i_{Z_{n-1}} \nu$. Um cálculo direto mostra que $\tilde{\alpha}|_{U_k} = \alpha|_{U_k} - g^k \cdot \theta$, onde $g^k = \sum_{j=1}^{n-1} g_{jj}^k$, para todo $k \in K$. Como α e $\tilde{\alpha}$ não dependem de $k \in K$, existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $g|_{U_k} = g^k$, para todo $k \in K$, ou seja $\alpha = \tilde{\alpha} - g \cdot \theta$. Colocando $\hat{W}_1 = \tilde{W}_1 - g \cdot Z_1$ e $\hat{W}_j = \tilde{W}_j$ para $j \geq 2$, obtemos que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} i_{Z_1} \dots i_{Z_{j-1}} i_{\hat{W}_j} i_{Z_{j+1}} \dots i_{Z_{n-1}} \nu \quad (4.7)$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$, considere a expansão de \hat{W}_j em série de Taylor em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\hat{W}_j = \sum_{r \geq 0} W_{jr}$, onde W_{jr} é um campo

homogêneo de grau $r \geq 0$. Substituindo estas expressões em (4.7) e levando em conta que os coeficientes de α são homogêneos de grau $d = d_1 + \dots + d_{n-1}$ e que $gr(Z_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n-1$, obtemos que $\alpha = D\Psi(\theta).W$, onde $W = (W_1 d_1, \dots, W_{n-1} d_{n-1})$, o que prova o lema. \square

Corolário 4.1.1. *Seja $\theta \in \Lambda$ tal que $\text{cod}(\text{sing}(\theta)) \geq 3$. Então Γ é liso em θ . Em particular, existe uma vizinhança U de θ em Γ tal que $U \subset \Lambda$.*

Prova. Utilizaremos os seguintes fatos gerais :

- (I). Sejam $f: (\mathbb{C}^m, a) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ um germe de aplicação holomorfa e $X = f^{-1}(0)$. Defina $T_a X := \ker(Df(a)) \subset T_a \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^m$. Suponha que para todo $v \in T_a X$ existe um germe de curva $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ tal que $\gamma'(0) = v$. Então X é liso em a e $\dim(X) = \dim(T_a(X))$.
- (II). Sejam $g: (\mathbb{C}^\ell, b) \rightarrow (\mathbb{C}^m, a)$ um germe de aplicação holomorfa e $Y = g^{-1}(a)$. Defina $T_a Y = \text{Im}(Dg(b)) \subset \mathbb{C}^m$. Então Y é irredutível e $\dim(Y) \geq \dim(T_a Y)$.

A prova de (I) e (II) é deixada como exercício para o leitor (veja os exercícios 4.8 e 4.9). Sejam Λ_θ e Γ_θ os germes de Λ e Γ em θ , respectivamente. É suficiente demonstrar que $\Gamma_\theta = \Lambda_\theta$ e que Γ_θ é liso. Provamos no lema 4.1.3 que $T_\theta \Gamma = T_\theta \Lambda$. Dado $\alpha \in T_\theta \Gamma$, existe $W \in \mathcal{X}^d$ tal que $\alpha = D\Psi(Z).W$, onde $\theta = \Psi(Z)$. O germe de curva $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \Lambda \subset \Gamma$ definido por $\gamma(t) = \Psi(\theta + t.\alpha)$ satisfaz $\gamma'(0) = \alpha$. Logo, Γ_θ é liso e $\dim(\Gamma_\theta) = \dim(T_\theta \Gamma)$, por (I). Em particular, Γ_θ é irredutível. Por outro lado, como $\Lambda = \Psi(\mathcal{X}^d)$, (II) implica que $\dim(\Lambda_\theta) \geq \dim(T_\theta \Lambda) = \dim(T_\theta \Gamma) = \dim(\Gamma_\theta)$. Portanto, $\Lambda_\theta = \Gamma_\theta$, já que ambos os germes Λ_θ e Γ_θ são irredutíveis. \square

O corolário 4.1.1 implica que $\theta_o = \frac{1}{d+2} d\Omega$ é um ponto liso de Γ e que existe uma vizinhança U de θ_o em Γ tal que $U \subset \Lambda$. Seja $(\mathcal{F}_t)_{t \in D_\delta}$ uma família holomorfa de folheações em \mathbb{P}^n , onde \mathcal{F}_t é representada em coordenadas homogêneas por Ω_t , sendo $\Omega_0 = \Omega$ e $t \mapsto \Omega_t$ holomorfa. A 2-forma $\theta_t := \frac{1}{d+2} d\Omega_t$ satisfaz $\theta_t \wedge \theta_t = 0$, logo $\theta_t \in \Gamma$ e existe $\epsilon > 0$ tal que se $|t| < \epsilon$ então $\theta_t \in \Lambda$, ou seja, $\theta_t = i_{Y_1^t} \dots i_{Y_{n-1}^t} \nu$, com $Y_j^t \in \mathcal{X}_{d_j}$, $1 \leq j \leq n-1$. Por outro lado, $\Omega_t = \frac{1}{d+2} i_R d\Omega_t = i_R i_{Y_1^t} \dots i_{Y_{n-1}^t} \nu$, logo pela proposição 4.1.2,

\mathcal{F}_t é gerada por folheações $\mathcal{F}_1^t, \dots, \mathcal{F}_{n-1}^t$ de dimensão um em \mathbb{P}^n com $gr(\mathcal{F}_j^t) = d_j, 1 \leq j \leq n-1$.

Em particular, o conjunto $TD(\mathcal{F}) := \{\mathcal{G} \in \text{lis}(\mathcal{I}(\mathcal{F})) \mid \text{o feixe tangente de } \mathcal{G} \text{ é totalmente decomponível}\}$ é aberto em $\mathcal{I}(\mathcal{F})$. Por outro lado, a proposição 4.1.2 implica que o conjunto das folheações $\mathcal{H} = \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{n-1})$ onde $gr(\mathcal{H}_j) = d_j, 1 \leq j \leq n-1$, pode ser parametrizado pelo sub-conjunto algébrico $SI = \{Z = (Z_1, \dots, Z_{n-1}) \in \mathcal{X}^d \mid R, Z_1, \dots, Z_{n-1} \text{ são involutivos}\}$ de \mathcal{X}^d , pela aplicação $\psi(Z) = i_R i_{Z_1} \dots i_{Z_{n-1}} \nu$. Lembremos que $\Omega = \psi(Y)$, representa \mathcal{F} em coordenadas homogêneas. Seja $\mathcal{I}(Y)$ a componente irredutível de SI que contém Y . Então $\psi(\mathcal{I}(Y))$ é um sub-conjunto algébrico irredutível de $\mathbb{F}ol(n, d)$. Como $TD(\mathcal{F}) \cap \psi(\mathcal{I}(Y))$ é um aberto não vazio de $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ obtemos que $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \psi(\mathcal{I}(Y))$, já que ambos são irredutíveis. Isto termina a prova do teorema. \square

Observação 4.1.5. O conjunto $\{\theta \in \Omega_d^2 \mid \text{cod}(\text{sing}(\theta)) \geq 3\}$ é aberto em Ω_d^2 , o conjunto de 2-formas em \mathbb{C}^{n+1} com coeficientes homogêneos de grau d . Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 4.10). Isto implica que o conjunto $\mathbb{F}_3(n, d) := \text{fecho de } \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, d) \mid \mathcal{F} \text{ é representada em coordenadas homogêneas por } \Omega, \text{ sendo } \text{cod}(\text{sing}(d\Omega)) \geq 3\}$, é uma união de componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, d)$. Uma pergunta natural é a seguinte : que componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, d)$ estão contidas em $\mathbb{F}_3(n, d)$?

Por exemplo, se $\text{sing}(\mathcal{F})$ tem uma componente irredutível C de codimensão ≥ 3 , então $\mathcal{I}(\mathcal{F})$, a componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, d)$ que contém \mathcal{F} , não está contida em $\mathbb{F}_3(n, d)$. Este fato decorre do teorema da divisão de De Rham. De fato, seja $D := \Pi_n^{-1}(C)$. Note que $\text{cod}(D) \geq 3$. A condição de integrabilidade, $\Omega \wedge d\Omega = 0$, implica que se $p \in D \setminus \{0\}$ então existe um germe de 1-forma α em p tal que $d\Omega_p = \alpha \wedge \Omega_p$. Isto implica que o germe de conjunto $X := \{q \in \Sigma \mid \alpha \wedge \Omega_p = 0\}_p$, contém $D \cap \Sigma$ e tem dimensão $\geq \dim(D) + 1$ (verifique). Portanto, $\text{sing}(d\Omega)$ contém uma componente de codimensão ≥ 2 .

Um exemplo de componente contida em $\mathbb{F}_3(n, d)$ é $PBL(n, d)$, $n \geq 3, d \geq 0$. Outro exemplo é $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r)$, onde $r \leq n+1$ e $p_j = 1$ para todo $j = 1, \dots, r$ (veja o Ex. 4.11).

4.2 Componentes excepcionais.

Nesta seção veremos alguns exemplos de componentes que satisfazem às hipóteses do teorema 5. Na seção 4.2.1 descreveremos algumas componentes obtidas por algumas ações do grupo afim em \mathbb{C}^3 . Na seção 4.2.2 descreveremos outras componentes provenientes de ações em dimensão superior a três.

4.2.1 Componentes provenientes de ações do grupo afim em \mathbb{C}^3 .

A maior parte dos resultados que exporemos nesta seção, foram demonstrados originalmente em [C-LN-CA-G]. Consideremos o campo linear $S = \sum_{j=1}^n p_j z_j \partial/\partial z_j$ em \mathbb{C}^n , onde $1 \leq p_j$ é inteiro, $1 \leq j \leq n$, e $\text{mdc}(p_1, \dots, p_n) = 1$. Diremos que um campo holomorfo X em \mathbb{C}^n é *quase-homogêneo* com respeito a S , se

$$[S, X] = \lambda.X, \quad \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Por exemplo, se $p_j = 1$, $1 \leq j \leq n$, então S é o campo radial em \mathbb{C}^n e (4.8) implica que X é homogêneo de grau $\lambda + 1$.

Proposição 4.2.1. *Seja $X \neq 0$ quase-homogêneo com respeito a $S = \sum_{j=1}^n p_j z_j \partial/\partial z_j$ com $[S, X] = \lambda.X$. Suponhamos que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. Então :*

- (a). X é campo polinomial.
- (b). $\lambda \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \geq -p_n$.
- (c). O conjunto $Ld(S, X) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid S(z) \text{ e } X(z) \text{ são linearmente dependentes}\}$ é uma união de órbitas da ação induzida por S , $S_t(z) := \exp(t.S).z$.
- (d). Se $0 \in \mathbb{C}^n$ é singularidade isolada de X então

$$m(X, 0) = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda + p_j)}{\prod_{j=1}^n p_j}, \quad (4.9)$$

onde $m(X, 0)$ é a multiplicidade de X em 0 (veja a seção 1.3).

Prova. Seja $X = \sum_j a_{j\sigma} z^\sigma \partial/\partial z_j$ a expansão em série de Taylor de X em $0 \in \mathbb{C}^n$. De $[S, X] = \lambda.X$ obtemos

$$a_{j\sigma} \langle P, \sigma \rangle - p_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad (4.10)$$

onde $\langle P, \sigma \rangle := \sum_j p_j \cdot \sigma_j$, como o leitor pode verificar. Logo, se $a_{j\sigma} \neq 0$, temos $\lambda = \langle P, \sigma \rangle - p_j \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \geq -p_n$. Para ver que X é polinomial, basta observar que para todo $j = 1, \dots, n$ o conjunto $A_j = \{\sigma \mid \langle P, \sigma \rangle = \lambda + p_j\}$ é finito (verifique). Para provar (c), notemos que (4.8) implica que $L_S(S \wedge X) = [S, S] \wedge X + S \wedge [S, X] = \lambda.S \wedge X$, o que acarreta $S_t^*(S \wedge X) = e^{\lambda \cdot t}.S \wedge X$. Esta última relação implica que $S(z) \wedge X(z) = 0 \iff S(S_t(z)) \wedge X(S_t(z)) = 0, t \in \mathbb{C}$, que é equivalente a (c).

Provemos (d). Coloquemos $X = \sum_{j=1}^n X_j(z) \partial/\partial z_j$. A relação $[S, X] = \lambda.X$ é equivalente a

$$S(X_j) = (\lambda + p_j) X_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.11)$$

como o leitor pode verificar. Por outro lado, $m(X, 0)$ é o número de soluções do sistema de equações $X_j(z) = c_j$, onde $c_j \neq 0, 1 \leq j \leq n$. Denotaremos este sistema por $(X = c)$. Defina $f_j(x) := X_j(x_1^{p_1}, \dots, x_n^{p_n}), 1 \leq j \leq n$. Vemos então que

$$R(f_j)(x) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i^{p_i} \frac{\partial X_j}{\partial z_i}(x_1^{p_1}, \dots, x_n^{p_n}) = (\lambda + p_j) f_j(x).$$

Em particular, f_j é homogêneo de grau $\lambda + p_j, 1 \leq j \leq n$. Pelo teorema de Bézout, o sistema $(f = (f_1, \dots, f_n) = c)$, possui $N := \prod_{j=1}^n (\lambda + p_j)$ soluções, digamos $x_r = (x_{1r}, \dots, x_{nr}), 1 \leq r \leq N$ (tomamos c um valor regular de f). Cada solução x_r dá origem a uma solução $z_r = (x_{1r}^{p_1}, \dots, x_{nr}^{p_n})$ do sistema $(X = c)$. Por outro lado, se δ_{s_j} é uma p_j -ésima raiz da unidade, $1 \leq j \leq n$, temos $((\delta_{s_1} \cdot x_{1r})^{p_1}, \dots, (\delta_{s_n} \cdot x_{nr})^{p_n}) = z_r$, o que mostra que para cada solução z_r do sistema $(X = c)$ obtemos $p_1 \dots p_n$ soluções do sistema $(f = c)$. Logo $(X = c)$ possui $N/(p_1 \dots p_n)$ soluções, como queríamos. \square

No caso $n = 3$, podemos definir a 1-forma integrável $\omega := i_S i_X \nu$, onde $\nu = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$. Como consequência da proposição 4.2.1, obtemos que ω é polinomial e que $\text{sing}(\omega)$ é uma união de órbitas de S . Além disto, se $\tau = \sum_{j=1}^3 p_j = \text{tr}(S)$ então $d\omega = i_Y \nu$, onde

$$Y = (\lambda + \tau) X - \text{div}(X).S, \quad d(i_X \nu) := \text{div}(X).\nu. \quad (4.12)$$

A relação (4.12) decorre de (4.3) da prova do lema 4.1.2. O campo Y satisfaz também às relações $[S, Y] = \lambda Y$ e $i_S i_Y \nu = (\lambda + \tau)\omega$. Se $\omega \neq 0$ então ω define uma folheação em \mathbb{P}^3 , a qual será denotada por $\mathcal{F}(S, X)$.

Observação 4.2.1. Denotemos por \mathcal{G}_Y a folheação por curvas de \mathbb{P}^3 dada em \mathbb{C}^3 por um campo polinomial Y . Gostaríamos de observar que, em geral, $gr(\mathcal{F}(S, X)) \neq 1 + gr(\mathcal{G}_X)$. No caso em que $S = R$, o radial, temos $gr(\mathcal{G}_R) = 0$ e $gr(\mathcal{F}(R, X)) = gr(\mathcal{G}_X)$.

Suponhamos que $S \neq R$. Neste caso, $gr(\mathcal{G}_S) = 1$. Coloquemos $gr(\mathcal{G}_X) = k$ e $gr(\mathcal{F}(S, X)) = \ell$. Podemos escrever $X = \sum_{j=0}^{k+1} X_j$, onde X_j é campo homogêneo de grau j , sendo $X_{k+1} = g.R$, onde g é homogêneo de grau k , e se $g \equiv 0$ então $X_k \neq h.R$, onde h é homogêneo de grau $k-1$. Logo, $\omega := i_S i_X \nu = \sum_{j=0}^{k+1} i_S i_{X_j} \nu := \sum_{j=1}^{k+2} \omega_j$, onde $\omega_{j+1} = i_S i_{X_j} \nu$. Se $g \neq 0$ então $\omega_{k+2} = g.i_S i_R \nu \neq 0$ e $i_R(\omega_{k+2}) = 0$, logo $\ell = k+1$. No caso em que $g \equiv 0$, temos $\omega_{k+2} \equiv 0$ e $\omega_{k+1} = i_S i_{X_k} \nu$, logo $gr(\mathcal{F}(S, X)) \leq k+1$, em geral. Poderíamos ter, por exemplo, $X_k = f.S + h.R$, onde f e g são homogêneos de grau $k-1$ e $f \neq 0$. Neste caso, $\ell < k+1$.

Em geral, é possível provar que existe um campo Y , da forma $Y = X + k.S$, tal que $gr(\mathcal{G}_Y) = \ell - 1$, $\mathcal{F}(S, Y) = \mathcal{F}(S, X)$ e $[S, Y] = \lambda Y$. Deixamos a prova deste fato como exercício para o leitor (veja o Ex. 4.12). De agora em diante, vamos assumir que $gr(\mathcal{F}(S, X)) = gr(\mathcal{G}_X) + 1$ e que $S \neq R$.

Lembremos que $\mathcal{SK}(3, k) = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(3, k) \mid \text{todas as singularidades de } \mathcal{F} \text{ são de simples ou de Kupka}\}$.

Teorema 4.1. *Sejam $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$, $S \neq R$, $p, q, r \in \mathbb{N}$, $\text{mdc}(p, q, r) = 1$, e X tais que $[S, X] = \lambda X$ e $gr(\mathcal{F}(S, X)) = gr(\mathcal{G}_X) + 1$. Coloque $\mathcal{F}_o := \mathcal{F}(S, X)$. Se $\mathcal{F}_o \in \mathcal{SK}(3, d+1)$ então $\mathcal{F}(S, X)$ satisfaz às hipóteses do teorema 5 e \mathcal{F}_o é um ponto liso de $\mathbb{F}ol(3, d+1)$. Denotemos por $\mathcal{I}(\mathcal{F}_o)$ a componente irredutível de $\mathbb{F}ol(3, d+1)$ que contém \mathcal{F}_o . Se $\lambda > 0$ e \mathcal{F} é um ponto liso de $\mathcal{I}(\mathcal{F}_o)$ então $\mathcal{F} = \phi^*(\mathcal{F}(S, Z))$, onde $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)$ e Z é um campo que satisfaz $[S, Z] = \lambda Z$.*

Prova. Vamos denotar por R o radial em \mathbb{C}^4 , por R_3 o radial em \mathbb{C}^3 , $\nu_o = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ e $\nu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Como $S \neq R_3$, vamos supor que $p \neq q, r$.

Suponhamos $X = P + g_d.R_3$, onde g_d é homogêneo de grau d e $P = P_1\partial/\partial x_1 + P_2\partial/\partial x_2 + P_3\partial/\partial x_3$ é polinomial de grau d . Vamos considerar $\mathbb{C}^3 \simeq E_4 := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_4 = 1\}$ e colocar $E_j := \{x \in \mathbb{C}^4 \mid x_j = 1\}$, $1 \leq j \leq 4$. Considere-mos os campos homogêneos de \mathbb{C}^4 , $T = p x_1\partial/\partial x_1 + q x_2\partial/\partial x_2 + r x_3\partial/\partial x_3$ e $Y = \sum_{j=1}^4 Y_j(x)\partial/\partial x_j$, onde $Y_4(x) = -g_d(x_1, x_2, x_3)$ e $Y_j(x) = x_4^d.P_j(x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4)$. Note que $T|_{E_4} = S$ e que $(x_4.Y - Y_4.R)|_{E_4} = X$. Isto implica que \mathcal{F}_o é definida em coordenadas homogêneas por $\Omega = i_R i_T i_Y \nu_o$ (verifique). Coloquemos $\omega_j := \Omega|_{E_j}$. Como $\mathcal{F}_o \in \mathcal{SK}(3, d+1)$, obtemos que $\text{cod}_{E_j}(\text{sing}(d\omega_j)) \geq 3$, ou seja, $\text{sing}(d\omega_j)$ é discreto em E_j , $1 \leq j \leq 4$. Como $\text{sing}(d\Omega) \cap E_j \subset \text{sing}(d\Omega|_{E_j}) = \text{sing}(d\omega_j)$, obtemos que $\text{sing}(d\Omega) \cap E_j$ é discreto. Isto implica que $\text{sing}(d\Omega)$ é uma união finita de retas de \mathbb{C}^4 que passam pela origem. Logo $\text{cod}(\text{sing}(d\Omega)) \geq 3$ e \mathcal{F}_o satisfaz às hipóteses do teorema 5. Por este teorema, \mathcal{F}_o é um ponto liso de $\mathbb{F}ol(3, d+1)$. Além disto, se \mathcal{F}_1 é um ponto liso de $\mathcal{I}(\mathcal{F}_o)$ então $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, onde $gr(\mathcal{H}_1) = 1$ e $gr(\mathcal{H}_2) = d$.

Suponhamos $\lambda > 0$. Neste caso, $p_0 := [0 : 0 : 0 : 1]$ é uma singularidade simples nilpotente de \mathcal{F}_o de tipo $[p : q : r]$. Com efeito, como $[S, X] = \lambda X$, $\lambda > 0$, temos $X(p_0) = X(0) = 0$ (verifique). Se $L = DX(0)$ então $[S, L] = \lambda L$ e L é nilpotente, pelo exercício 2.2 do capítulo 2. Portanto X é nilpotente em $0 \in \mathbb{C}^3$ e p_0 é s.s.n. de tipo $[p : q : r]$.

Seja $(\Omega_u)_{u \in (\mathbb{C}, 0)}$ um germe de família holomorfa de 1-formas homogêneas em \mathbb{C}^4 tal que $\Omega_0 = \Omega$ e Ω_u representa, em coordenadas homogêneas, uma folheação $\mathcal{F}_u \in \mathbb{F}ol(3, d+1)$. Coloquemos $\omega_u = \Omega_u|_{E_4}$, de maneira que ω_u representa \mathcal{F}_u em E_4 .

Pelo corolário 2.1.2 do capítulo 2, existe um germe de função holomorfa $u \in (\mathbb{C}, 0) \rightarrow s(u) \in \mathbb{C}^3$ tal que $s(0) = 0$ e $s(u)$ é s.s.n. de ω_u de tipo $[p : q : r]$.

O teorema 5 implica que $\Omega_u = i_R i_{T_u} i_{Y_u} \nu_o$, onde $T_0 = T$, $Y_0 = Y$, T_u é homogêneo de grau um, Y_u de grau d e $u \mapsto T_u$, $u \mapsto Y_u$ são holomorfas. Como $\text{esp}(T_0) = \text{esp}(T) = \{p, q, r, 0\}$, $0, p \neq q, r$, existe $\delta > 0$ tal que se $|u| < \delta$ então os auto-valores $\lambda_1(u), \dots, \lambda_4(u)$ de T_u satisfazem $\lambda_4(0) = 0$, $\lambda_1(0) = p$, $\lambda_4(u) \notin \{\lambda_1(u), \lambda_2(u), \lambda_3(u)\}$ e $\lambda_1(u) \notin \{\lambda_2(u), \lambda_3(u), \lambda_4(u)\}$. Isto implica que :

- (i). Os germes $u \mapsto \lambda_1(u)$ e $u \mapsto \lambda_4(u)$ são holomorfos. Além disto,

podemos obter os auto-valores de T_u relativos a $\lambda_1(u)$ e $\lambda_4(u)$, digamos $e_1(u)$ e $e_2(u)$, de tal forma que $e_j(u) \in E_j$, $j = 1, 4$. Neste caso, os germes $u \mapsto e_1(u)$ e $u \mapsto e_4(u)$ são holomorfos. Note que $e_1(0) = (1, 0, 0, 0)$ e $e_4(0) = (0, 0, 0, 1) = p_0$.

- (ii). O auto-espço invariante F_u de T_u relativo aos auto-valores $\lambda_j(u)$, $j = 2, 3$, tem dimensão dois, $F_0 = (x_1 = x_4 = 0)$ e $u \mapsto F_u$ é holomorfa.

Estes fatos implicam que existe um germe de família holomorfa de isomorfismos de \mathbb{C}^4 , $(V_u)_{u \in (\mathbb{C}, 0)}$, tal que $V_u^{-1}(F_u) = F_0 = (x_1 = x_4 = 0)$, $V_u^{-1}(e_1(u)) = e_1(0)$ e $V_u^{-1}(e_4(u)) = e_4(0)$ e $\det(V_u) = 1$. Tomando $T_u^* = V_u^*(T_u)$ e $Y_u^* = V_u^*(Y_u)$ temos $T_u^*(F_0) = F_0$, $T_u^*(e_j(0)) = \lambda_j(u).e_j(0)$, $j = 1, 4$, e $\Omega_u^* := V_u^*(\Omega_u) = i_R i_{T_u^*} i_{Y_u^*} \nu_o$, já que $V_u^*(R) = R$ e $\det(V_u) = 1$. Podemos então supor, sem perda de generalidade, que $T_u(F_0) = F_0$, $T_u(e_1(0)) = \lambda_1(u).e_1(0)$ e $T_u(p_0) = \lambda_4(u).p_0$. Colocando $S_u := T_u - \lambda_4(u).R$, temos $\Omega_u = i_R i_{S_u} i_{Y_u} \nu_o$, $S_0 = T$, $S_0|_{E_4} = S$, $S_u(p_0) = 0$ e $S_u(F_0) \subset F_0$. Como o leitor pode verificar, estes fatos implicam que S_u é tangente a E_4 , isto é a componente de S_u em $\partial/\partial x_4$ é identicamente nula. Além disto, S_u não depende de x_4 , ou seja, se $(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1, z, x_4)$ então $S_u(x_1, z, x_4) = \mu_1(u).x_1 \partial/\partial x_1 + S_{2u}(z) \partial/\partial x_2 + S_{3u}(z) \partial/\partial x_3$, onde $\mu_1(u) = \lambda_1(u) - \lambda_4(u)$. Colocando $Y_u = \sum_{j=1}^4 Y_{ju} \partial/\partial x_j := \tilde{Y}_u + Y_{4u} \partial/\partial x_4$ e $R = R_3 + x_4 \partial/\partial x_4$, obtemos $\Omega_u = x_4.\alpha_u + Y_{4u}.\beta_u + f_u.dx_4$, onde

$$\begin{cases} \alpha_u = i_{S_u} i_{\tilde{Y}_u} (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \\ \beta_u = i_{R_3} i_{S_u} (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \\ f_u = i_{R_3} i_{S_u} i_{\tilde{Y}_u} (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \end{cases} . \quad (4.13)$$

Em particular, se $Z_u(z) := \tilde{Y}_u(z, 1) - Y_{4u}(z, 1).R_3$ então $\omega_u = \Omega_u|_{E_4} = i_{S_u} i_{Z_u} \nu$, como o leitor pode verificar. Por outro lado, ω_u possui uma s.s.n. $s(u)$, de tipo $[p : q : r]$, tal que $u \mapsto s(u)$ é holomorfa e $s(0) = 0$. Como S_u é linear nas coordenadas (x_1, x_2, x_3) , esta singularidade só pode ser $s(u) = 0$, ou seja a função $s(u)$ é constante. Coloquemos $d\omega_u = i_{W_u} \nu$. Afirmamos que $i_{S_u} i_{W_u} \nu = a(u).\omega_u$, onde $a \in \mathbb{C}_1^*$.

Com efeito, temos $L_{S_u}(\omega_u) = i_{S_u}(d\omega_u)$, já que $i_{S_u} \omega_u = 0$. A integrabilidade de ω_u implica $0 = i_{S_u}(d\omega_u \wedge \omega_u) = i_{S_u}(d\omega_u) \wedge \omega_u$, logo $L_{S_u}(\omega_u) \wedge \omega_u = 0$. Do teorema da divisão, obtemos $L_{S_u}(\omega_u) = f_u.\omega_u$,

onde f_u é holomorfa em $E_4 \simeq \mathbb{C}^3$. Provemos que f_u é constante. A mudança de coordenadas de $E_1 = \{[1 : y_2 : y_3 : y_1] \mid y \in \mathbb{C}^3\}$ para E_4 é $x_1 = 1/y_1$, $x_2 = y_2/y_1$ e $x_3 = y_3/y_1$. A forma ω_u tem um polo de ordem $d+3$ no plano ($y_1 = 0$), logo na carta E_1 temos $\omega_u = \frac{1}{y_1^{d+3}}\eta_u$, onde η_u é holomorfa. O campo S_u se estende holomorficamente a \mathbb{P}^3 , logo $L_{S_u}(\eta_u) = g_u \cdot \eta_u$, onde g_u é holomorfa em E_1 . Isto acarreta que

$$\begin{aligned} g_u \cdot \eta_u &= L_{S_u}(y_1^{d+3} \cdot \omega_u) = (d+3)y_1^{d+2}S_u(y_1) \cdot \omega_u + y_1^{d+3}L_{S_u}(\omega_u) = \\ &= [(d+3)\frac{S(y_1)}{y_1} + f_u] \eta_u = [-(d+3)\mu_1(u) + f_u] \eta_u \implies \end{aligned}$$

$f_u = g_u + (d+3)\mu_1(u)$. Logo f_u se estende holomorficamente a $E_1 \cup E_4$. Como $\mathbb{P}^3 \setminus (E_1 \cup E_4)$ tem codimensão dois, f_u se estende holomorficamente a \mathbb{P}^3 , logo é constante.

Para $u = 0$ temos $S_0 = S$, $W_0 = \text{rot}(\omega)$ e $i_S i_{W_0} \nu = (\lambda + \tau)\omega$, ou seja, $f_0 = (\lambda + \tau) \neq 0$, logo $i_{S_u} i_{W_u} \nu = a(u) \cdot \omega_u$, onde $a(u) = f_u \in \mathcal{O}_1^*$. Em particular, temos

$$\begin{aligned} a(u) i_{W_u} \nu &= L_{S_u}(i_{W_u} \nu) = i_{[S_u, W_u]} \nu + \text{tr}(S_u) \cdot i_{W_u} \nu \implies \\ [S_u, W_u] &= \lambda(u) \cdot W_u, \quad \lambda(u) = a(u) - \text{tr}(S_u). \end{aligned}$$

Como $\lambda(0) = \lambda > 0$, temos $\lambda(u) \in \mathcal{O}_1^*$. Além disto, se $N_u = DW_u(0)$ então $[S_u, N_u] = \lambda(u) \cdot N_u$. Como $\lambda(u) \neq 0$, N_u é nilpotente, pelo exercício 2.2, logo W_u é nilpotente. O lema 2.1.2 da seção 2.1 implica que S_u é semi-simples. Como 0 é s.s.n. de tipo $[p : q : r]$ de ω_u , temos $\text{esp}(S_u) = \{\alpha(u) \cdot p, \alpha(u) \cdot q, \alpha(u) \cdot r\}$, onde $\alpha(0) = 1$. Logo existe um automorfismo linear de $\mathbb{C}^3 \simeq E_4$, Φ_u , tal que $u \mapsto \Phi_u$ é holomorfa, $\det(\Phi_u) = 1$ e $\Phi_u^*(S_u) = \alpha(u) \cdot S$. Daí obtemos $\Phi_u^*(\omega_u) = i_S i_{Y_u} \nu$, onde $Y_u = a(u)^{-1} \cdot \alpha(u) \cdot \Phi_u^*(W_u)$, sendo $[S, Y_u] = \beta(u) \cdot Y_u$, $\beta(u) = \alpha(u)^{-1} \cdot \lambda(u)$. Como S tem auto-valores $p, q, r \in \mathbb{N}$, $\beta(u) \in \mathbb{N}$ para todo u , logo $\beta(u) \equiv \lambda$ e $[S, Y_u] = \lambda \cdot Y_u$. Isto termina a prova do teorema 4.1. \square

Veremos em seguida algumas condições necessárias para que $\mathcal{F}(\omega) \in SK(3, d+1)$, ou seja, para que suas singularidades sejam todas de Kupka ou simples e $gr(\mathcal{F}(\omega)) = d+1$. Analisaremos apenas o caso em que $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$, onde $p > q > r$. Não estudaremos os casos $p = q > r$ e $p > q = r$.

Teorema 4.2. *Sejam $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$, onde $p < q < r$, e X tal que $[S, X] = \lambda X$ e $gr(\mathcal{F}(S, X)) = gr(\mathcal{G}_X) + 1$. Coloquemos $q_1 = p - r$, $r_1 = p - q$, $\lambda_1 = p(d - 1) - \lambda$ e $N(d) = d^3 + d^2 + d + 1$. Suponha que $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d + 1)$, onde $d \geq 1$. Então :*

$$\begin{aligned} (a). \quad m &:= \frac{(\lambda + p)(\lambda + q)(\lambda + r)}{p \cdot q \cdot r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ (b). \quad m_1 &:= \frac{(\lambda_1 + p)(\lambda_1 + q_1)(\lambda_1 + r_1)}{p \cdot q_1 \cdot r_1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ (c). \quad N(d) - 1 &\leq m + m_1 \leq N(d), \text{ se } d \geq 2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Prova. Seja $Y_0 := rot(\omega) = (\lambda + \tau)X - div(X) \cdot S$, por (4.12). Para que as singularidades de $\mathcal{F}(S, X)$ em \mathbb{C}^3 sejam todas de Kupka ou simples, é necessário que, ou bem 0 seja singularidade isolada de Y_0 , ou bem $Y_0(0) \neq 0$, já que $sing(d\omega) = sing(Y_0)$ é uma união de órbitas de S . Se $Y_0(0) = 0$, então esta singularidade é isolada e obtemos da proposição 4.2.1 que

$$m = m(Y, 0) = \frac{(\lambda + p)(\lambda + q)(\lambda + r)}{p \cdot q \cdot r} \in \mathbb{N}.$$

Se $Y_0(0) \neq 0$, então o desenvolvimento de Taylor de Y_0 em 0 contém um monômio constante : $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ ou $\partial/\partial z$. Se ele contém o monômio $\partial/\partial x$ temos $\lambda = -p$, já que $[S, \partial/\partial x] = -p\partial/\partial x$ e neste caso, $m = 0$. Nos outros casos, obtemos também $m = 0$, como o leitor pode verificar. Logo $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, o que prova (a).

Estudemos agora $\mathcal{F}(S, X)$ numa vizinhança do plano do infinito. Para isto consideramos $\mathbb{C}^3 \simeq E_0 := \{[x : y : z : 1] \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$. Com esta convenção, o campo S , que se estende a um campo holomorfo de \mathbb{P}^3 , possui quatro singularidades : $p_0 = [0 : 0 : 0 : 1]$, $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$ e $p_3 = [0 : 0 : 1 : 0]$. Note que, se $E_j = \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_0] \mid x_j = 1\}$, então $p_j \in E_j$, sendo $esp(S, p_0) = \{p, q, r\}$, $esp(S, p_1) = \{-p, q - p, r - p\} = \{-p, r_1, q_1\}$, $esp(S, p_2) = \{p - q, r - q, -q\}$ e $esp(S, p_3) = \{p - r, q - r, -r\}$. Destas singularidades, as únicas que podem ser simples nilpotentes para $\mathcal{F}(S, X)$ são p_0 e p_1 , já que $DS(p_j)$ tem auto-valores com sinais diferentes se $j \in \{2, 3\}$ (veja o lema 2.1.1 da seção 2.1). A mudança de carta da carta original para E_1 , é $u = 1/x$, $w = y/x$, $v = z/x$,

logo $S = -p u \partial / \partial u - q_1 v \partial / \partial v - r_1 w \partial / \partial w$. O campo $S_1 = -S$ tem auto-valores positivos e desempenha o papel de S na carta E_1 .

O campo X tem um polo de ordem $d - 1$ no plano do infinito, já que $gr(\mathcal{G}_X) = d$. Logo, na carta E_1 temos $X = \frac{1}{u^{d-1}} \cdot X_1$, onde X_1 é polinomial, e $\mathcal{F}(S, X)$ é definida pela forma $\omega_1 = i_{S_1} i_{X_1} \nu_1$, onde $\nu_1 = du \wedge dv \wedge dw$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} [S_1, X_1] &= [-S, u^{d-1} \cdot X] = S_1(u^{d-1}) \cdot X - u^{d-1} \cdot [S, X] = \\ &= p(d-1)u^{d-1} \cdot X - u^{d-1} \cdot \lambda \cdot X = \lambda_1 X_1 . \end{aligned}$$

Seja $Y_1 = rot(\omega_1)$. Por argumento anterior, obtemos que $[S_1, Y_1] = \lambda_1 \cdot Y_1$. Logo, se $Y_1(0) = 0$ então $m_1 \in \mathbb{N}$, onde m_1 é como em (4.14). Por outro lado, se $Y_1(0) \neq 0$ então $m_1 = 0$, o que prova (b).

Provemos (c). Na singularidade $p_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$, tomamos as coordenadas afins $E_2 = \{[u : 1 : v : w] \mid (u, v, w) \in \mathbb{C}^3\}$. Nestas coordenadas temos $S = (p - q) u \partial / \partial u + (r - q) v \partial / \partial v - q w \partial / \partial w$ e $X = \frac{1}{w^{d-1}} X_2$, onde X_2 é polinomial, e a folheação é representada por $\omega_2 = i_S i_{X_2} du \wedge dv \wedge dw$. Além disto, $[S, X_2] = (\lambda - q(d-1)) X_2$, o que implica que $Y_2 := rot(\omega_2)$ satisfaz $[S, Y_2] = (\lambda - q(d-1)) Y_2$. Como $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d+1)$, temos duas hipóteses : ou bem $Y_2(p_2) \neq 0$, ou bem $Y_2(p_2) = 0$ e p_2 é singularidade isolada de Y_2 . Afirmamos que se $Y_2(p_2) = 0$ então $\lambda = q(d-1)$. Com efeito, suponha por absurdo que $Y_2(p_2) = 0$ e $\lambda \neq q(d-1)$. Se $L = DY_2(p_2)$ então $[S, L] = (\lambda - q(d-1)) L$. Pelo exercício 2.2 do capítulo 2, obtemos que L é nilpotente. Logo Y_2 é um campo nilpotente. Porém, o lema 2.1.1 da seção 2.1 implica que os auto-valores de S em p_2 têm o mesmo sinal, o que não ocorre, já que $p - q > 0 > -q$. Portanto, $\lambda = q(d-1)$ e $[S, L] = 0$, o que acarreta $[S, Y_2] = 0$. Afirmamos que $det(L) \neq 0$.

Com efeito, podemos escrever, $Y_2 = Y_2(u) \partial / \partial u + Y_2(v) \partial / \partial v + Y_2(w) \partial / \partial w$. Seja $Y_2(u) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} \cdot u^i \cdot v^j \cdot w^k$. Vamos provar que $a_{100} \neq 0$. Como $[S, Y_2] = 0$, temos $S(Y_2(u)) = Y_2(S(u)) = (p - q) Y_2(u)$. Suponhamos por absurdo que $a_{100} = 0$. Neste caso, $h_1 := Y_2(u)|_{(v=w=0)} = \sum_{i \geq 2} a_{i00} u^i$ e $S(h_1) = \sum_{i \geq 2} i(p - q) a_{i00} \cdot u^i = (p - q) h_1$, logo $h_1 \equiv 0$. Analogamente, colocando $h_2 := Y_2(v)|_{(v=w=0)} = \sum_{j \geq 1} b_j \cdot v^j$, temos $S(h_2) = (r - q) h_2$, logo

$$\sum_{j \geq 1} (r - q) b_j \cdot v^j = \sum_{j \geq 1} b_j \cdot S(v^j) = \sum_{j \geq 1} b_j \cdot (p - q) \cdot v^j \implies h_2 = 0 .$$

Com um argumento análogo, obtemos $Y_2(w)|_{(v=w=0)} = 0$, ou seja, $Y_2|_{(v=w=0)} = 0$ e p_2 não é singularidade isolada de Y_2 . Portanto, $a_{100} \neq 0$ e $Y_2|_{(v=w=0)} = \alpha_1.u\partial/\partial u$, onde $\alpha_1 = a_{100} \neq 0$ é autovalor de L . De forma análoga, obtemos que $Y_2|_{(u=w=0)} = \alpha_2.v\partial/\partial v$ e $Y_2|_{(u=v=0)} = \alpha_3.w\partial/\partial w$, onde $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$. Isto implica que $L = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\det(L) \neq 0$, como queríamos. Provamos então que, ou bem $Y_2(p_2) \neq 0$, ou bem $Y_2(p_2) = 0$ e neste caso, $\lambda = q(d-1)$ e $\det(DY_2(p_2)) \neq 0$. Com um argumento análogo, na singularidade p_3 , prova-se que, ou bem $Y_3(p_3) \neq 0$, ou bem $\lambda = r(d-1)$ e $\det(DY_3(p_3)) \neq 0$, onde $Y_3 = \text{rot}(\omega_3)$, é análogo a Y_2 .

Lema 4.2.1. *Existe uma folheação de dimensão um \mathcal{G} em \mathbb{P}^3 tal que $\text{sing}(\mathcal{G}) \subset \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ e $m(\mathcal{G}, p_j) = m(Y_j, p_j)$, $1 \leq j \leq 4$.*

Prova. Vamos provar primeiramente que existem folheações por curvas \mathcal{G}_0 e \mathcal{G}_1 de grau d , com as seguintes propriedades : $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_{Z_j}$, onde Z_j é campo polinomial em E_j com $[S, Z_j] = \lambda_j Z_j$ ($\lambda_0 = \lambda$), p_j é singularidade isolada de Z_j e $m(Z_j, p_j) = m_j$ ($m_0 = m$), ou $p_j \notin \text{sing}(Z_j)$ e $m(Z_j, p_j) = m_j = 0$, $j = 0, 1$.

Suponhamos por um instante que existem tais folheações. Neste caso, consideramos o pencil $\mathcal{G}_\alpha := \mathcal{G}_0 + \alpha.\mathcal{G}_1$, que é definido da seguinte maneira : na carta E_0 , podemos escrever $Z_1 = \frac{1}{x^{d-1}}\tilde{Z}_1$. Tomamos $Z_\alpha := Z_0 + \alpha.\tilde{Z}_1$, $Z_\infty = \tilde{Z}_1$ e $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}_{Z_\alpha}$. Note que, $[S, \tilde{Z}_1] = \lambda\tilde{Z}_1$, logo $[S, Z_\alpha] = \lambda Z_\alpha$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$. Em particular, se $m > 0$, que corresponde a $\lambda > 0$, então $Z_\alpha(p_0) = 0$ e $m(Z_\alpha, p_0) = m$, desde que p_0 seja singularidade isolada de Z_α . Além disto, o conjunto $A := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \mid p_0 \text{ não é singularidade isolada de } \mathcal{G}_\alpha\}$ é algébrico e próprio, uma vez que $0 \notin A$. Analogamente, se $Z_0(p_0) \neq 0$, o conjunto $A := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \mid p_0 \in \text{sing}(\mathcal{G}_\alpha)\}$ é algébrico e próprio. Da mesma forma, o conjunto $B := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \mid p_1 \text{ não é singularidade isolada de } \mathcal{G}_\alpha\}$ (ou $B := \{\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \mid p_1 \text{ não é singularidade isolada de } \mathcal{G}_\alpha\}$) é algébrico e próprio. Logo, se $\alpha \notin A \cup B$ a folheação $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\alpha$ satisfaz $m(\mathcal{G}, p_0) = m$ e $m(\mathcal{G}, p_1) = m_1$. Levando em conta a relação $[S, Z_\alpha] = \lambda Z_\alpha$, concluímos que qualquer componente irreduzível de $\text{sing}(\mathcal{G}_\alpha)$ é uma órbita de S . Como todas as órbitas de S são aderentes a $\{p_0, p_1\}$ (verifique), concluímos que, se p_2 ou p_3 é singularidade de \mathcal{G} então ela é isolada e vale $m(\mathcal{G}, p_j) = m(Y_j, p_j)$, $j = 2, 3$.

As construções de \mathcal{G}_0 e \mathcal{G}_1 são análogas, logo iremos construir apenas \mathcal{G}_0 .

Coloquemos $X = \sum_{j=1}^{d+1} X_j$, onde, ou bem $X_{d+1} = g.R$ com $g \neq 0$ homogêneo de grau d , ou bem $g \equiv 0$ e $X_d \neq h.R$, h homogêneo de grau $d-1$. Como $Y_0 = \text{rot}(\omega) = (\lambda + \tau)X - \text{div}(X)S$, obtemos no segundo caso que Y_0 é polinomial de grau d e $\text{gr}(\mathcal{G}_{Y_0}) = d$, logo podemos tomar $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}_{Y_0}$. No primeiro caso, no entanto, $\text{gr}(\mathcal{G}_{Y_0}) = d+1$, e a parte homogênea de grau $d+1$ de Y_0 é $(\lambda + \tau)gR - \text{div}(g.R)S = g[(\lambda + \tau)R - (d+3)S] := g(mR - nS)$. Coloquemos $Y_0 = P + g(mR - nS)$, onde $P = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y + C\partial/\partial z$. Neste caso, definimos

$$Z_0 = \frac{A}{m - np + \beta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B}{m - nq + \beta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{C}{m - nr + \beta} \frac{\partial}{\partial z} + g.R$$

onde β é escolhido de tal forma que os denominadores das frações sejam não nulos. Note que $[S, Z_0] = \lambda Z_0$ e que $\text{sing}(Z_0) = \text{sing}(Y_0 + \beta.g.R)$ (verifique). Por outro lado, como $m(Y_0, p_0) = m$, se $|\beta|$ é pequeno então $Y_0 + \beta.g.R$ tem singularidade isolada em p_0 , ou não se anula em p_0 , conforme o caso. Logo, $m(Z_0, p_0) = m$, pois $[S, Z_0] = \lambda Z_0$. \square

Obtivemos então que $\text{sing}(\mathcal{G}) \subset \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ e que $m(\mathcal{G}, p_j) = m(Y_j, p_j) := m_j$, $0 \leq j \leq 3$. Pela proposição 1.3.2 da seção 1.3, o número de singularidades de \mathcal{G} , contadas com multiplicidade é $N(d) = d^3 + d^2 + d + 1 = m + m_1 + m_2 + m_3$. Se $d \geq 1$, temos $m_2, m_3 \leq 1$, logo $N(d) - 2 \leq m + m_1 \leq N(d)$. Por outro lado, obtivemos que se $Y_2(p_2) = 0$ (resp. $Y_3(p_3) = 0$), então $\lambda = q(d-1)$ (resp. $\lambda = r(d-1)$). Se $d \geq 2$, temos $q(d-1) \neq r(d-1)$, logo se $Y_2(p_2) = 0$ então $Y_3(p_3) \neq 0$, ou vice-versa. Portanto, neste caso temos $m_2 + m_3 \leq 1$ e $m + m_1 \geq N(d) - 1$. \square

Corolário 4.2.1. *Sejam $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$ e X tais que $p > q > r$ e $[S, X] = \lambda X$. Suponha que $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d+1)$, $d \geq 1$, e que todas as singularidades de $\mathcal{F}(S, X)$ em \mathbb{C}^3 são do tipo Kupka. Então*

(a). $r = 1$, $\lambda = -1$, $q = d+1$ e $p = d^2 + d + 1$.

(b). Existe $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $\phi^*(\mathcal{F}(S, X))$ é definida por $\eta =$

$i_{S^i Y}(\nu)$, onde

$$Y = \frac{\partial}{\partial z} + qz^d \frac{\partial}{\partial y} + (f(y, z) + y^d) \frac{\partial}{\partial x},$$

sendo $f(y, 0) \equiv 0$ e $S(f) = (d^2 + d)f$.

(c). $\mathcal{F}(S, X)$ admite uma integral racional, a qual na carta do ítem (b) se escreve como

$$H(x, y, z) = \frac{(y - z^q)^p}{(x - \phi(y, z))^q},$$

sendo $\phi(y, z)$ um polinômio que satisfaz $X(\phi) = X(x) = f(y, z) + py^d$.

(d). $\text{sing}(\mathcal{F}(S, X)) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, onde γ_1 é uma órbita de S em \mathbb{C}^3 , γ_2 e γ_3 são órbitas de S contidas no plano do infinito de \mathbb{C}^3 . Nas coordenadas $\mathbb{C}^3 = \{[x : y : z : 1] \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$, elas são parametrizadas como $\gamma_1(t) = [a.t^p : t^q : t : 1]$, $\gamma_2(t) = [1 : t : 0 : 0]$ e $\gamma_3(t) = [1 : b.t^{d+1} : c.t^d : t]$, com $a, b, c \neq 0$. Além disto, elas são tangentes em $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$ e todos os pontos em $\text{sing}(\mathcal{F}(S, X)) \setminus \{p_1\}$ são de Kupka.

Reciprocamente, dados campos de vetores S como em (a) e X como em (b), a folheação $\mathcal{F}(S, X)$ está em $\mathcal{SK}(3, d+1)$.

Prova. Sejam $\omega = i_{S^i X}\nu$ e $Y_0 = \text{rot}(\omega) = (\lambda + \tau)X - \text{div}(X).S$. Como as singularidades de $\mathcal{F}(S, X)$ em \mathbb{C}^3 são de Kupka, temos $\text{sing}(Y_0) = \emptyset$ e $\lambda \in \{-p, -q, -r\}$. Afirmamos que $\lambda = -r$ e $Y_0 = a.\partial/\partial z + b.z^d \partial/\partial y + f(y, z) \partial/\partial x$, onde $a, b \neq 0$, $S(f) = (p - r)f$ e $f \neq 0$.

Com efeito, podemos escrever $Y_0 = \sum_{j=1}^{d+1} P_j$, onde $P_0 \neq 0$, $\text{gr}(\mathcal{G}_{Y_0}) \in \{d, d+1\}$ e P_j é homogêneo de grau j , $1 \leq j \leq d+1$, já que $\text{gr}(\mathcal{F}(S, X)) = d+1$ e $\text{sing}(Y_0) = \emptyset$. Note que $[S, P_j] = \lambda.P_j$, $1 \leq j \leq d+1$, já que S é linear. Isto implica que $P_0 = a.v$, onde $v \in \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ e $a \neq 0$. Se $v = \partial/\partial x$, temos $\lambda = -p$, $Y_0 = a.\partial/\partial x$ e $\text{gr}(\mathcal{F}(S, X)) = 1$, como o leitor pode verificar, o que contradiz $\text{gr}(\mathcal{F}(S, X)) = d+1 \geq 2$. Se $P_0 = a.\partial/\partial y$ então $\lambda = -q$. Analisando os monômios não nulos de Y_0 , prova-se que

$Y_0 = a.\partial/\partial y + g(y, z)\partial/\partial z$, onde $g \neq 0$, $S(g) = (p - r)g$ e $gr(g) = d$. Deixamos a verificação deste fato para o leitor. Efetuando a mudança de coordenadas $(u, v, w) = (1/x, z/x, y/x)$, obtemos que $Y_0 = \frac{1}{u^{d-1}}Y_1$, onde $Y_1 = a.u^d\partial/\partial w - \tilde{g}(v, w)R$, sendo $\tilde{g}(v, w) = u^d.g(w/u, v/u)$ e R o radial. Neste caso, \tilde{g} é homogênea de grau d e se $\omega_1 = i_{S_1}i_{Y_1}\nu$ e $m_1 = \lambda_1 + \tau = p(d - 1) - \lambda + \tau > 0$ então

$$\text{rot}(\omega_1) = m_1.Y_1 - \text{div}(Y_1).S = m_1.a.u^d - \tilde{g}(m_1 R - (d + 3)S),$$

como já vimos anteriormente. Em particular, $\text{sing}(\text{rot}(\omega_1)) \supset (u = \tilde{g}(v, w) = 0)$, logo tem componentes de dimensão um, o que contradiz $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d + 1)$. Portanto, $P_0 = a.\partial/\partial z$ e $\lambda = -r$.

Analisando os monômios não nulos de Y_0 obtemos $Y_0 = a.\partial/\partial z + b.z^m \partial/\partial y + f(y, z) \partial/\partial x$, onde $S(b.z^m) = (q - r)b.z^m$ e $S(f) = (p - r)f$. Note que neste caso, $gr(Y_0) = d$ e $P_{d+1} = 0$. Efetuando a mudança de coordenadas $(u, v, w) = (1/x, z/x, y/x)$, vem que $Y_0 = \frac{1}{u^{d-1}}Y_1$, onde $Y_1 = a.u^d\partial/\partial v + b.u^{d-m}.v^m\partial/\partial w - \tilde{f}(v, w).R$, onde $\tilde{f}(v, w) = u^d.f(w/u, v/u)$. Logo, se $\omega_1 = i_{S_1}i_{Y_1}\nu$ então $\text{rot}(\omega_1) =$

$$= m_1.a.u^d\partial/\partial v + m_1.b.u^{d-m}.v^m\partial/\partial w - \tilde{f}(v, w).(m_1.R - (d + 3)S)$$

Para que $\text{rot}(\omega_1)$ tenha singularidade isolada em $0 = p_1$, devemos ter $m = d$, $b \neq 0$ e $\tilde{f}(0, w) \neq 0$, ou seja, $\tilde{f}(0, w) = c.w^n$, $c \neq 0$. Decorre daí que

$$Y_0 = a.\partial/\partial z + b.z^d \partial/\partial y + f(y, z) \partial/\partial x,$$

onde $f(y, 0) = c.y^n$ e $a, b, c \neq 0$. Utilizando que $[S, Y_0] = -r Y_0$, obtemos

$$\begin{cases} r.d - q = -r \implies & q = (d + 1)r \\ n.q - p = -r \implies & p = (n(d + 1) + 1)r \end{cases} \quad (4.15)$$

Como $\text{mdc}(p, q, r) = 1$, as relações em (4.15) implicam $r = 1$, $q = d + 1$ e $p = n.q + 1 = n(d + 1) + 1$, $n \geq 1$. Provemos que $p = d^2 + d + 1$. Vamos utilizar (b) de (4.14). No caso, $\lambda_1 = p(d - 1) - \lambda = n(d^2 - 1) + d$, $q_1 = p - 1 = n(d + 1)$ e $r_1 = p - q = n(d + 1) - d$. Logo,

$$m_1 = \frac{(\lambda_1 + p)(\lambda_1 + q_1)(\lambda_1 + r_1)}{pq_1r_1} = \frac{d^2(d + 1)(nd + 1)}{n(d + 1) - d} \quad (4.16)$$

Pelo lema 4.2.1 existe uma folheação \mathcal{G} de grau d tal que $m(\mathcal{G}, p_j) = m(Y_j, p_j)$, $0 \leq j \leq 3$. Sabemos que $m(Y_0, p_0) = 0$ e $m(Y_1, p_1) = m_1$. Afirmamos que $m(Y_j, p_j) = 0$, $j = 2, 3$. Com efeito, na prova de (c) de (4.14) demonstramos que se $Y_2(p_2) = 0$ (resp. $Y_3(p_3) = 0$) então $\lambda = q(d-1) \geq 0$ (resp. $\lambda = r(d-1) \geq 0$). Como $\lambda = -1$, temos $m(Y_j, p_j) = 0$ para $j = 0, 2, 3$. Logo, $m_1 = d^3 + d^2 + d + 1$. Substituindo este valor em (4.16) e explicitando n , obtemos $n = d$ e $p = d(d+1) + 1 = d^2 + d + 1$, como o leitor pode verificar. Com isto provamos (a).

Obtivemos acima que $Y_0 = a.\partial/\partial z + b.z^d \partial/\partial y + f(y, z) \partial/\partial x$, onde $f(y, 0) = c.y^d$, $a, b, c \neq 0$. Logo, podemos escrever $f(y, z) = g(y, z) + c.y^d$, onde $c \neq 0$ e $g(y, 0) = 0$. Tomando $\phi(x, y, z) = (\alpha.x, \beta.y, \gamma.z)$, com $\gamma = a$, $\beta = q.b^{-1}.a^{-d}$ e $\alpha = c^{-1}.\beta^{-d}$, vem que $\phi^*(Y_0) := Y$, onde Y é como em (b) (verifique).

Para obter a integral primeira, observamos primeiramente que o campo Y é completo, isto é, o seu fluxo Φ está definido em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$. Integrando diretamente a EDO $\frac{dw}{dt} = Y(w)$, temos $\Phi_t(x, y, z) = (x + \phi_1(t, y, z), y + \phi_2(t, z), z + t)$, onde $\phi_2(t, z) = (z+t)^q - z^q$ e $\phi_1(t, y, z) = \int_0^t [f(y + \phi_2(s, z), z + s) + (y + \phi_2(s, z))^d] ds$ (veja o Ex. 4.13).

Por outro lado, calculando $\omega = i_S i_Y \nu$, temos

$$\eta := \omega|_{(z=0)} = (px - qy^q)dy - qydx,$$

como o leitor pode verificar. Um cálculo direto mostra que a função meromorfa $h(x, y) = y^p / (x + qd^{-1}y^q)^q$ é integral primeira de η (verifique). Como $\Phi_{-z}(x, y, z) = (x + \phi_1(-z, y, z), y - z^q, 0)$, a função $H(x, y, z) = h(x + \phi_1(-z, y, z), y - z^q)$ é integral primeira de $\mathcal{F}(S, X)$. Como o leitor pode constatar, H satisfaz (c) do corolário 4.2.1.

A verificação de (d) pode ser feita utilizando que $\mathcal{F}(S, X)$ é definida em \mathbb{C}^3 por $\omega = i_S i_{Y_0} \nu$ e nas coordenadas $E_1 = \{[1 : w : v : u] \mid (u, v, w) \in \mathbb{C}^3\}$ por $i_S i_{Y_1} \nu_1$, onde $Y_1 = u^d \partial/\partial v + qv^d \partial/\partial w - (f(v, w) + w^d)R$. Deixamos os detalhes para o leitor. \square

Definição 4.2.1. Diremos que uma folheação \mathcal{G} em \mathbb{P}^n , $n \geq 3$, é de Klein-Lie, se $\mathcal{G} = f^*(\mathcal{F}(S, X))$, onde $f: \mathbb{P}^n - \rightarrow \mathbb{P}^3$ tem grau um e posto três e $\mathcal{F}(S, X)$ é como no corolário 4.2.1.

Em seguida veremos uma classificação no caso $d = 1$.

Corolário 4.2.2. *Sejam $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$, onde $p > q > r$, e X tais que $[S, X] = \lambda X$ e $gr(\mathcal{F}(S, X)) = 2$. Suponha que $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, 2)$. Então temos duas possibilidades :*

- (a). $X = \lambda_1 x\partial/\partial x + \lambda_2 y\partial/\partial y + \lambda_3 z\partial/\partial z$. Neste caso, $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{L}(3; 1, 1, 1, 1)$.
- (b). *Existe um sistema de coordenadas afim $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3$ onde $\mathcal{F}(S, X)$ é dada por $i_S i_Y (du \wedge dv \wedge dw)$, sendo $Y = \partial/\partial w + w\partial/\partial v + v\partial/\partial u$. Além disto, $(p, q, r) = (3, 2, 1)$, $\lambda = -1$ e a função meromorfa*

$$H(u, v, w) = \frac{(v - w^2/2)^3}{(u - vw + w^3/3)^2}$$

é uma integral primeira de $\mathcal{F}(S, X)$.

Prova. Como $d = 1$ temos $\lambda_1 = p(d-1) - \lambda = -\lambda$. Logo $\lambda + \lambda_1 = 0$ e temos duas possibilidades : (a). $\lambda = \lambda_1 = 0$. (b). $\lambda > 0$ e $\lambda_1 < 0$, ou vice-versa.

Caso (a). Neste caso, temos $[S, X] = 0$ e um cálculo direto, utilizando que $gr(\mathcal{F}(S, X)) = 2$ e $p_0 = 0$ é singularidade isolada, mostra que $X = \lambda_1 x\partial/\partial x + \lambda_2 y\partial/\partial y + \lambda_3 z\partial/\partial z$, $\eta = \frac{1}{xyz} i_S i_X \nu$ é logarítmica e $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{L}(3; 1, 1, 1, 1)$. Deixamos os detalhes apra o leitor.

Caso (b). Suponhamos por exemplo que $\lambda < 0$ e $\lambda_1 > 0$. Neste caso, $Y_0(0) \neq 0$ e as singularidades de $\mathcal{F}(S, X)$ em \mathbb{C}^3 são todas de Kupka. Logo, o corolário 4.2.1 implica que $(p, q, r) = (d^2 + d + 1, d + 1, 1) = (3, 2, 1)$, $\lambda = -1$ e $\lambda_1 = 1$. Além disto, existe $\phi \in Aut(\mathbb{C}^3)$ tal que $X = \partial/\partial w + w\partial/\partial v + (f(v, w) + v)\partial/\partial u$, sendo $f(v, 0) = 0$, $gr(f) = 1$ e $S(f) = 2f$. Isto implica que $f = 0$ e X é como em (b). Para ver que H é integral primeira de $\mathcal{F}(S, X)$ é suficiente verificar que $S(H) = X(H) = 0$, o que deixamos para o leitor. \square

Definição 4.2.2. Dada $\mathcal{F} \in \mathbb{Fol}(n, k)$ denotemos por $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ a órbita de \mathcal{F} pela ação do grupo de automorfismos de \mathbb{P}^n em $\mathbb{Fol}(n, k)$, isto é, $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \{T^*(\mathcal{F}) \mid T \in Aut(\mathbb{P}^n)\}$. Dizemos que \mathcal{F} é *rígida*, se o fecho de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ em $\mathbb{Fol}(n, k)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{Fol}(n, k)$. Dizemos que uma componente irredutível \mathcal{I} de $\mathbb{Fol}(n, k)$ é *rígida*, se $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{F})}$ para alguma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{I}$.

Como conseqüência de (b) do corolário 4.2.2, temos o seguinte :

Corolário 4.2.3. *Se S e Y são como em (b) do corolário 4.2.2 então $\mathcal{F}(S, Y)$ é rígida.*

Vamos em seguida dar uma classificação no caso em que $S = 3x\partial/\partial x + 2y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$.

Corolário 4.2.4. *Sejam $S = 3x\partial/\partial x + 2y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$ e $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d+1)$. Coloquemos $\omega = i_S i_X \nu$ e $Y := \text{rot}(\omega) = Y_1\partial/\partial x + Y_2\partial/\partial y + Y_3\partial/\partial z$. Então*

(a). $d \in \{1, 2, 3\}$.

(b). Se $d = 1$ então $\mathcal{F}(S, X)$ é como em (b) do corolário 4.2.2.

(c). Se $d = 2$ então $\lambda = 1$, $\lambda_1 = 2$, ou vice-versa, e se $[S, Y] = Y$ então

$$\begin{cases} Y_1(x, y, z) = ay^2 + bxz \\ Y_2(x, y, z) = cx + dyz \\ Y_3(x, y, z) = ey + fz^2 \end{cases}, \quad (4.17)$$

onde $b + d + 2f = 0$.

(d). Se $d = 3$ então $\lambda = \lambda_1 = 3$ e

$$\begin{cases} Y_1(x, y, z) = ax^2 + bxyz + cy^3 - 3\alpha xz^3 \\ Y_2(x, y, z) = dxy + exz^2 + fy^2z - \alpha yz^3 \\ Y_3(x, y, z) = gxz + hy^2 + iyz^2 + \alpha z^4 \end{cases}, \quad (4.18)$$

onde $2a + d + g = b + 2f + 2i = 0$.

No caso (b) coloquemos $\Lambda_2 := \mathbb{P}(\{(a, \dots, f) \mid b + d + 2f = 0\})$ e no caso (c) $\Lambda_3 := \mathbb{P}(\{(a, \dots, f) \mid 2a + d + g = b + 2f + 2i = 0\})$. Dado $\alpha \in \Lambda_j$ denotemos por Y_α o campo cujas componentes são como em (4.17) ou (4.18), conforme o caso. Existem sub-conjuntos algébricos próprios $\Gamma_j \subset \Lambda_j$, $j = 2, 3$, tais que se $\alpha \in \Lambda_j \setminus \Gamma_j$ então $\mathcal{F}(S, Y_\alpha) \in \mathcal{SK}(3, j+1)$, $j = 2, 3$. Em ambos os casos, $\mathcal{F}(S, Y_\alpha)$ possui duas s.s.n. de tipo $[3 : 2 : 1]$. No caso $j = 3$ estas são as únicas singularidades simples. No caso $j = 2$, $\mathcal{F}(S, Y_\alpha)$ possui uma outra singularidade simples não nilpotente.

Prova. Vamos supor que $d \geq 2$, já que o caso $d = 1$ foi visto no corolário 4.2.2. Como $(p, q, r) = (3, 2, 1)$, temos $(p, q_1, r_1) = (3, p - r, p - q) = (3, 2, 1)$ e $\lambda_1 = 3(d - 1) - \lambda$. Colocando $P(t) = (t + 3)(t + 2)(t + 1)$ temos $m + m_1 = (P(\lambda) + P(\lambda_1))/6$ em (4.14) do teorema 4.2. Em particular, $m + m_1$ é função simétrica de (λ, λ_1) . Colocando $s = \lambda + 2$ e $s_1 = \lambda_1 + 2$, temos $P(\lambda) + P(\lambda_1) = P(s - 2) + P(s_1 - 2) = s^3 - s + s_1^3 - s_1 = (s + s_1)(s^2 - s.s_1 + s_1^2 - 1)$. Daí concluímos que $s + s_1 = \lambda + \lambda_1 + 4 = 3d + 1$ divide $P(\lambda) + P(\lambda_1)$. Por outro lado, pelo teorema 4.2, temos $m + m_1 = N(d)$ ou $m + m_1 = N(d) - 1$, onde $N(d) = d^3 + d^2 + d + 1$. Como $m + m_1 = (P(\lambda) + P(\lambda_1))/6$, concluímos que $3d + 1$ divide $6.N(d)$ ou divide $6(N(d) - 1)$. Consideremos cada um dos casos.

(I). $3d + 1$ divide $6.(N(d) - 1)$. Neste caso, $3d + 1$ divide $9 \times 6.(N(d) - 1) = 54d^3 + 54d^2 + 54d$. O resto da divisão deste polinômio por $3d + 1$ é -14 , logo $3d + 1$ divide 14 , $3d + 1 \in \{2, 7, 14\}$ e $d = 2$. Logo, $(s + s_1)(s^2 - s.s_1 + s_1^2) = 6.(N(d) - 1) = 84$, e como $s + s_1 = 3d + 1 = 7$, obtemos

$$s^2 - s(7 - s) + (7 - s)^2 - 1 = 84/7 = 12 \implies s \in \{3, 4\} \implies$$

$\lambda \in \{1, 2\}$. Portanto, $\lambda = 1$ e $\lambda_1 = 2$, ou vice-versa. Para obter as componentes de Y como em (4.17), utilizamos que $gr(Y_j) \leq 3$, $S(Y_1) = (\lambda + p)Y_1 = 4Y_1$, $S(Y_2) = 3Y_2$ e $S(Y_3) = 2Y_3$. A condição $b + d + 2f = 0$ vem do fato de que $div(Y) = 0$. Deixamos os detalhes para o leitor. Observamos ainda que neste caso, se $\mathcal{F}(S, Y) \in \mathcal{SK}(3, 3)$ então $\mathcal{F}(S, Y)$ possui três singularidades simples, já que $m + m_1 = N(d) - 1$.

(II). $3d + 1$ divide $6.N(d)$. Neste caso, $3d + 1$ divide $9 \times 6.N(d) = 54d^3 + 54d^2 + 54d + 54$. O resto da divisão deste polinômio por $3d + 1$ é 40 , logo $3d + 1$ divide 40 e $3d + 1 \in \{2, 4, 8, 10, 20, 40\}$. Daí obtemos $d \in \{1, 3\}$. Como $d \geq 2$, temos $d = 3$ e $s + s_1 = 10$. Portanto s é raiz de $s^2 - s(10 - s) + (10 - s)^2 - 1 = 6.N(3)/10 = 24$, ou seja, $s = 5$ e $\lambda = s - 2 = 3 = \lambda_1$. Para obter as componentes de Y como em (4.18), utilizamos que $gr(Y_j) \leq 4$, $S(Y_1) = (\lambda + p)Y_1 = 6Y_1$, $S(Y_2) = 5Y_2$ e $S(Y_3) = 4Y_3$. As condições $2a + d + g = b + 2f + 2i = 0$ e os termos $-3\alpha xz^3$, $-\alpha yz^3$ e αz^4 vêm do fato de que $div(Y) = 0$ e $gr(\mathcal{F}(S, Y)) = 4$. Deixamos os detalhes para o leitor. Observamos ainda que neste caso, se $\mathcal{F}(S, Y) \in \mathcal{SK}(3, 4)$ então $\mathcal{F}(S, Y)$ possui duas singularidades simples, já que $m + m_1 = N(d)$.

Vamos indicar a prova da existência dos conjuntos algébricos Γ_j , $j = 2, 3$. Faremos isto no caso (c), deixando o caso (d) para o leitor. Lembramos que as componentes irredutíveis de $\text{sing}(\mathcal{F}(S, Y_\alpha))$ são órbitas de S . Este campo possui quatro singularidades, sendo que todas as órbitas se acumulam em duas delas : os pontos onde os auto-valores têm o mesmo sinal, isto é, $p_0 = [0 : 0 : 0 : 1] \in E_4$ e $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0] \in E_1$. Por exemplo, na carta E_4 , calculamos a resultante das componentes de $Y_\alpha = \text{rot}(\omega_\alpha)$, que no caso de (4.17) é $f(acf + bde) = 0$, com a condição $b + d + 2f = 0$. Isto nos fornece um sub-conjunto algébrico próprio $\Gamma_{j4} \subset \Lambda_j$. Em seguida, fazendo a mudança de coordenadas $u = 1/x$, $v = z/x$, $w = y/x$, na qual o ponto $p_1 = (0, 0, 0)$, obtemos uma forma η_α que representa $\mathcal{F}(S, Y_\alpha)$ em E_1 . Calculamos $Z_\alpha := \text{rot}(\eta_\alpha)$, e calculamos a resultante das componentes de Z_α , obtendo um conjunto algébrico Γ_{j1} . O conjunto $\Gamma_j = \Gamma_{j1} \cup \Gamma_{j4}$ satisfaz às propriedades requeridas. No caso (c) prova-se que $\Gamma_{21} = a(4f + b)(3f + 2d)(4deb^2 + 4cfa^2 + 3bca^2)$. Deixamos os detalhes para o leitor. \square

Fixado $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$, onde $p, q, r \in \mathbb{N}$, $p > q > r$ e $\text{mdc}(p, q, r) = 1$, defina $\mathcal{P}(p, q, r) := \{(d, \lambda) \mid \text{existe um campo } X \text{ em } \mathbb{C}^3 \text{ tal que } [S, X] = \lambda X \text{ e } \mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d+1)\}$.

Corolário 4.2.5. *O conjunto $\mathcal{P}(p, q, r)$ é finito.*

Prova. Já vimos no corolário 4.2.2 o caso $d = 1$. Vimos também no corolário 4.2.1 que se $\lambda < 0$ (resp. $\lambda_1 < 0$) então $\lambda = -r = -1$ (resp. $\lambda_1 = -r_1 = -1$) e neste caso a folheação é do tipo Klein-Lie, sendo $q = d + 1$ e $p = d^2 + d + 1$ (resp. $q_1 = d + 1$). Vamos então supor que $d \geq 2$ e $\lambda, \lambda_1 \geq 0$. Como $\lambda_1 + \lambda = p(d - 1) \geq 3$, temos $\lambda > 0$ ou $\lambda_1 > 0$. Vamos supor que $\lambda \geq 0$ e $\lambda_1 > 0$.

A idéia da prova é a seguinte : do teorema 4.2, temos $m + m_1 \leq N(d)$, sendo $m = (\lambda + p)(\lambda + q)(\lambda + r)/pqr$, $m_1 = (\lambda_1 + p)(\lambda_1 + q_1)(\lambda_1 + r_1)$ e $N(d) = d^3 + d^2 + d + 1$. Como p, q, r são fixos, $q_1 = p - r$, $r_1 = p - q$ e $\lambda + \lambda_1 = p(d - 1)$, podemos escrever $m + m_1 = H(\lambda, \lambda_1)$, onde H é um polinômio de grau três, e $N(d) = \frac{1}{p^3}G(\lambda + \lambda_1)$, sendo $G(t) = t^3 + 4pt^2 + 6p^2t + 4p^3$ (verifique). Logo, o corolário será provado, se demonstrarmos que a desigualdade $p^3 \cdot H(\lambda, \lambda_1) \leq G(\lambda + \lambda_1)$ tem um número finito de soluções inteiras tais que $\lambda \geq 0$ e $\lambda_1 > 0$. A desigualdade é equivalente à seguinte : $K(\lambda, \lambda_1) := F(\lambda, \lambda_1) -$

$qq_1rr_1G(\lambda + \lambda_1) \leq 0$, onde

$$F(\lambda, \lambda_1) = p^2q_1r_1(\lambda+p)(\lambda+q)(\lambda+r) + p^2qr(\lambda_1+p)(\lambda_1+q_1)(\lambda_1+r_1).$$

Escrevendo explicitamente a parte homogênea de grau três, K_3 , de K , temos

$$K_3(\lambda, \lambda_1) = p^2q_1r_1\lambda^3 + p^2qr\lambda_1^3 - qq_1rr_1(\lambda + \lambda_1)^3.$$

Afirmamos que existe $C > 0$ tal que se $\lambda \geq 0$ e $\lambda_1 > 0$ então $K_3(\lambda, \lambda_1) > C.(\lambda + \lambda_1)^3$. Com efeito, colocando $s := \lambda/\lambda_1$, podemos escrever $K_3(\lambda, \lambda_1) = \lambda_1^3.K_3(s, 1) := \lambda_1^3.f(s)$, onde $f(s) = p^2q_1r_1s^3 + p^2qr - qq_1rr_1(s+1)^3$. Utilizando que $p > \max(q, q_1, r, r_1)$, não é difícil ver que $f(s)$ tem um ponto de mínimo global para $s > 0$ e que $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = +\infty$. Estes fatos implicam que existem $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $f(s) > \alpha.s^3 + \beta$. Portanto, $K_3(\lambda, \lambda_1) > \alpha.\lambda^3 + \beta.\lambda_1^3$. Como a função $(\alpha.\lambda^3 + \beta.\lambda_1^3)/(\lambda + \lambda_1)^3$ é limitada inferiormente em $A := (\lambda \geq 0, \lambda_1 > 0)$, obtemos a afirmação.

Como $L(\lambda + \lambda_1) := K(\lambda, \lambda_1) - K_3(\lambda, \lambda_1)$ é de grau dois, existe uma constante $D > 0$ tal que $L(\lambda + \lambda_1) \leq (\lambda + \lambda_1)^2$ em A . Logo $K(\lambda, \lambda_1) \geq C.(\lambda + \lambda_1)^3 - D(\lambda + \lambda_1)^2 = C.P^3(d-1)^3 - D.p^2(d-1)^2$, ou seja, $K(\lambda, \lambda_1) > 0$ se d é suficientemente grande. Isto prova o corolário. \square

Observação 4.2.2. Dados $S = px\partial/\partial x + qy\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$, $S \neq R$, $p, q, r \in \mathbb{N}$, $\text{mdc}(p, q, r) = 1$, e X tais que $[S, X] = \lambda X$ e $\mathcal{F}(S, X) \in \mathcal{SK}(3, d+1)$, vamos denotar por $\mathcal{Af}(3; p, q, r; d, \lambda)$ a componente irredutível de $\mathbb{Fol}(3, d+1)$ que contém $\mathcal{F}(S, X)$. O teorema 4.1 implica que $\mathcal{Af}(3; p, q, r; d, \lambda)$ é o fecho em $\mathbb{Fol}(3, d+1)$ do seguinte conjunto

$$\{\Phi^*(\mathcal{F}(S, Y)) \mid [S, Y] = \lambda Y, \mathcal{F}(S, Y) \in \mathcal{SK}(3, d+1) \text{ e } \Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^3)\}.$$

Por outro lado, os corolários do teorema 4.2, mostram que o existem várias componentes deste tipo : $\mathcal{Af}(3; d^2 + d + 1, d + 1, 1; d, -1)$ (Klein-Lie), $\mathcal{Af}(3; 3, 2, 1; 2, 1) = \mathcal{Af}(3; 3, 2, 1, 2)$ e $\mathcal{Af}(3; 3, 2, 1; 3, 3)$ (corolário 4.2.4).

Particularmente, a componente de Klein-Lie $\mathcal{Af}(3; 3, 2, 1; 1, -1) \subset \mathbb{Fol}(3, 2)$ será revisitada na seção 5.2.

4.2.2 Outras componentes provenientes de ações.

Nesta seção veremos algumas componentes de $\mathbb{F}ol(n, d)$ que provêm de ações em \mathbb{C}^n , $n \geq 4$. Começaremos com uma conseqüência do teorema 5. Seja \mathcal{I} uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$. Dado $m > n$ defina $\mathcal{P}BL(m, \mathcal{I}) = \{\Phi^*(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathcal{I} \text{ e } \Phi: \mathbb{P}^m - \rightarrow \mathbb{P}^n \text{ é racional de grau um}\}$. Note que $\mathcal{P}BL(m, \mathcal{I}) \subset \mathbb{F}ol(m, k)$.

Proposição 4.2.2. *Seja \mathcal{I} uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(n, k)$ como no teorema 5, isto é, tal que a folheação típica é definida em coordenadas homogêneas por $\Omega = i_{R^1} i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu_n$, onde $\nu_n = dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$ e $\text{cod}(\text{sing}(d\Omega)) \geq 3$. Para todo $m > n$, $\mathcal{P}BL(m, \mathcal{I})$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(m, k)$.*

Prova. Seja $\mathcal{I} \subset \mathbb{F}ol(n, k)$ uma componente irredutível como acima, isto é, tal que se \mathcal{F} é um ponto liso de \mathcal{I} então \mathcal{F} é definida em coordenadas homogêneas por $\Omega = i_{R_n} i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu_n$, sendo R_n o radial em \mathbb{C}^{n+1} e X_j campo homogêneo em \mathbb{C}^{n+1} de grau d_j , $1 \leq j \leq n-1$. No caso, $\text{gr}(\mathcal{F}) = k = d_1 + \dots + d_{n-1}$. Como vimos no lema 4.1.2 da seção 4.1.2, existem campos homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} , Y_1, \dots, Y_{n-1} tais que $d\Omega = i_{Y_1} \dots i_{Y_{n-1}} \nu_n$ e $\text{gr}(Y_j) = d_j$. Sejam $\Phi: \mathbb{P}^m - \rightarrow \mathbb{P}^n$ uma aplicação racional de grau um e posto n e $\phi: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\Pi_n \circ \phi = \Phi \circ \Pi_m$. A folheação $\Phi^*(\mathcal{F})$ é representada em coordenadas homogêneas pela forma $\Omega^* := \phi^*(\Omega)$. Coloquemos $\nu_m = dz_0 \wedge \dots \wedge dz_m$.

Lema 4.2.2. *Na situação acima, vale o seguinte :*

(a). $\text{cod}(\text{sing}(d\Omega^*)) \geq 3$.

(b). *Existem campos constantes v_1, \dots, v_{m-n} e campos homogêneos $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{n-1}$ em \mathbb{C}^{m+1} tais que $\text{gr}(\tilde{Y}_j) = d_j$, $1 \leq j \leq n-1$, e*

$$d\Omega^* = i_{v_1} \dots i_{v_{m-n}} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} \nu_m \quad (4.19)$$

Em particular, $(k+2)\Omega^ = i_{R_m} i_{v_1} \dots i_{v_{m-n}} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} \nu_m$, onde R_m é o radial em \mathbb{C}^{m+1} .*

Reciprocamente, suponhamos que Ω_1^ é uma 1-forma homogênea que representa uma folheação $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}ol(m, k)$ em coordenadas homogêneas*

e que $d\Omega_1^* = i_{w_1} \dots i_{w_{m-n}} i_{\tilde{Z}_1} \dots i_{\tilde{Z}_{n-1}} \nu_m$, onde w_1, \dots, w_{m-n} são campos constantes e $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{n-1}$ são homogêneos com $\text{gr}(\tilde{Z}_j) = d_j$, $1 \leq j \leq n-1$, e $\text{cod}(\text{sing}(d\Omega_1^*)) \geq 3$. Então existem campos homogêneos Z_1, \dots, Z_{n-1} em \mathbb{C}^{n+1} , com $\text{gr}(Z_j) = d_j$, $1 \leq j \leq n-1$, e $\psi: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $\Omega_1^* = \phi^*(\Omega_1)$, onde Ω_1 é integrável e $(k+2)\Omega_1 = i_{R_n} i_{Z_1} \dots i_{Z_{n-1}} \nu_n$.

Prova. Como Φ tem posto n , $\phi: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tem posto $n+1$. Logo existem coordenadas homogêneas $z = (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ e $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $\phi(z_0, \dots, z_m) = (z_0, \dots, z_n)$. Coloquemos $Y_\ell = \sum_{j=0}^n f_{\ell j}(x) dx_j$, onde $f_{\ell 0}, \dots, f_{\ell n}$ são homogêneos de grau d_ℓ , $1 \leq \ell \leq n-1$. Definamos campos homogêneos \tilde{Y}_ℓ de grau d_ℓ em \mathbb{C}^{m+1} por $\tilde{Y}_\ell(z) = \sum_{j=0}^n f_{\ell j}(z_0, \dots, z_n) dz_j$. Vemos então que $D\phi(z) \cdot \tilde{Y}_\ell(z) = Y_\ell(\phi(z))$, $1 \leq \ell \leq n-1$. Colocando $v_1 := \partial/\partial z_{n+1}, \dots, v_{m-n} := \partial/\partial z_m$, temos

$$i_{v_1} \dots i_{v_{m-n}} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} \nu_m = (-1)^{n^2-1} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} (dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n),$$

como o leitor pode verificar diretamente. Por outro lado, se $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^{m+1}$, temos

$$\begin{aligned} & i_{w_1} i_{w_2} i_{\tilde{Y}_1(z)} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}(z)} (dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n) = \\ & = i_{D\phi(w_1)} i_{D\phi(w_2)} i_{Y_1(\phi(z))} \dots i_{Y_{n-1}(\phi(z))} (dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n) = \\ & = d\Omega_{\phi(z)}(D\phi(w_2), D\phi(w_1)) = (\phi^*(d\Omega))_z(w_2, w_1). \end{aligned}$$

Logo, $\phi^*(d\Omega) = (-1)^{n^2-1} i_{v_1} \dots i_{v_{m-n}} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} \nu_m$. Isto implica (b). A prova de (a) é deixada para o leitor. Provemos a recíproca.

Suponhamos que $d\Omega_1^* = i_{w_1} \dots i_{w_{m-n}} \alpha_1$, onde $\alpha_1 = i_{\tilde{Z}_1} \dots i_{\tilde{Z}_{n-1}} \nu_m$. Como $(k+2)\Omega_1^* = i_{R_m} d\Omega_1^*$ e $\Omega_1^* \neq 0$, obtemos $d\Omega_1^* \neq 0$. Logo, w_1, \dots, w_{m-n} são linearmente independentes e, após uma mudança de coordenadas linear em \mathbb{C}^{m+1} , podemos supor que $w_1 = \partial/\partial z_{n+1}, \dots, w_{m-n} = \partial/\partial z_m$. Como $i_{w_j} d\Omega_1^* = 0$, da integrabilidade, obtemos que $i_{w_j} \Omega_1^* = 0$ e $L_{w_j}(\Omega_1^*) = 0$. Isto implica que Ω_1^* só depende das variáveis (z_0, \dots, z_n) , isto é, $\Omega_1^* = \sum_{j=0}^n f_j(z_0, \dots, z_n) dz_j$. Em particular, $d\Omega_1^*$ só depende de (z_0, \dots, z_n) . Tomando $\psi(z_0, \dots, z_m) = (z_0, \dots, z_n)$, temos $\Omega_1^* = \psi^*(\Omega_1)$, onde $\Omega_1 = \sum_{j=0}^n f_j(x) dx_j$. Coloquemos $\tilde{Z}_\ell = \sum_{j=0}^m g_{\ell j}(z) \partial/\partial z_j$ e definamos $\tilde{Z}_\ell := \sum_{j=0}^n g_{\ell j}(z) \partial/\partial z_j$,

$1 \leq \ell \leq n-1$. Como $w_j = \partial/\partial z_{n+j}$, $1 \leq j \leq m-n$, obtemos

$$d\Omega_1^* = i_{w_1} \dots i_{w_{m-n}} i_{\hat{Z}_1} \dots i_{\hat{Z}_{n-1}} \nu_m. \quad (4.20)$$

Como \hat{Z}_ℓ é polinomial homogêneo de grau d_ℓ , podemos escrever

$$\hat{Z}_\ell = W_\ell + z_{n+1} \cdot V_{1\ell} + \dots + z_m \cdot V_{m-n\ell}, \quad 1 \leq \ell \leq n-1,$$

onde os coeficientes de W_ℓ só dependem de (z_0, \dots, z_n) e $V_{1\ell}, \dots, V_{m-n\ell}$ são polinomiais. Por outro lado, como $d\Omega_1^*$ só depende de (z_0, \dots, z_n) , a relação (4.20) implica que $d\Omega_1^* = i_{w_1} \dots i_{w_{m-n}} i_{W_1} \dots i_{W_{n-1}} \nu_m$. Logo, como na prova de (b), existem campos homogêneos Z_1, \dots, Z_{n-1} em \mathbb{C}^{n+1} tais que $gr(Z_\ell) = d_\ell$, $D\psi \cdot W_\ell = Z_\ell \circ \psi$ e $d\Omega_1 = i_{Z_1} \dots i_{Z_{n-1}} \nu_n$. Deixamos os detalhes para o leitor. \square

Voltemos à demonstração da proposição 4.2.2. Pelo lema 4.2.2, existem campos constantes v_1, \dots, v_{m-n} e campos homogêneos $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{n-1}$ tais que $\phi^*(d\Omega) = d\Omega^* = i_{v_1} \dots i_{v_{m-n}} i_{\tilde{Y}_1} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1}} \nu_m$. Seja $(\Omega_t^*)_{t \in (\mathbb{C}, 0)}$ um germe de família holomorfa de 1-formas tal que $\Omega_0^* = \Omega^*$ e Ω_t^* representa em coordenadas homogêneas uma folheação $\mathcal{F}_t^* \in \mathbb{F}ol(m, k)$. Pelo teorema 5, existem germes de famílias holomorfas de campos homogêneos $v_{1t}, \dots, v_{m-nt}, \tilde{Y}_{1t}, \dots, \tilde{Y}_{n-1t}$, $t \in (\mathbb{C}, 0)$, tais que v_{jt} é campo constante em \mathbb{C}^{m+1} , $1 \leq j \leq m-n$, $gr(\tilde{Y}_{it}) = d_i$, $1 \leq i \leq n-1$, e $d\Omega_t^* = i_{v_{1t}} \dots i_{v_{m-nt}} i_{\tilde{Y}_{1t}} \dots i_{\tilde{Y}_{n-1t}} \nu_m$. Pela recíproca do lema 4.2.2, existem germes de famílias holomorfa de campos homogêneos, Y_{1t}, \dots, Y_{n-1t} , $t \in (\mathbb{C}, 0)$, em \mathbb{C}^{n+1} e um germe holomorfo de aplicação de grau um $\phi_t: \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $t \in (\mathbb{C}, 0)$, tais que $\Omega_t^* = \phi_t^*(\Omega_t)$, onde $d\Omega_t = i_{Y_{1t}} \dots i_{Y_{n-1t}} \nu_n$, ou seja $\Omega_t = \frac{1}{k+2} i_{R_n} d\Omega_t \in \mathcal{I}$. Isto prova que $\mathcal{PBL}(m, \mathcal{I})$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(m, k)$ \square

Definição 4.2.3. Dados $m > 3$, $p, q, r, d \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(p, q, r) = 1$, e $\lambda \in \mathbb{Z}$, tais que $\mathcal{A}f(3; p, q, r; d, \lambda) \neq \emptyset$, defina $\mathcal{A}f(m; p, q, r; d, \lambda) = \{\phi^*(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathcal{A}f(3; p, q, r; d, \lambda), \phi: \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n, gr(\phi) = 1\}$.

Corolário 4.2.6. *Se $\mathcal{A}f(m; p, q, r; d, \lambda) \neq \emptyset$ então é uma componente irredutível de $\mathbb{F}ol(m, d+1)$.*

Em seguida veremos outras componentes que não são como no corolário 4.2.6. Estas componentes são geradas por ações de grupos de Lie em \mathbb{C}^{n+1} .

Exemplo 4.2.1. Seja \mathcal{G} uma sub-álgebra de Lie de $\mathcal{SL}(n+1, \mathbb{C})$. Suponha que \mathcal{G} é gerada por campos lineares X_1, \dots, X_{n-1} tais que o conjunto $ld(\mathcal{G}) := \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid X_1(p) \wedge \dots \wedge X_{n-1}(p) = 0\}$ tem codimensão ≥ 2 . Neste caso, existe uma folheação $\mathcal{F}(\mathcal{G}) \in \text{Fol}(n, n-1)$ definida em coordenadas homogêneas por $\Omega_{\mathcal{G}} := i_R i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu_n$. Considere a aplicação $Exp: \mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ dada por $Exp(X) = e^X = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$. O conjunto $G := Exp(\mathcal{G})$ é um sub-grupo imerso em $\text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, de dimensão $n-1$, em geral não fechado. Por um teorema clássico de grupos de Lie, existem um grupo de Lie simplesmente conexo H , de dimensão $n-1$, e um homomorfismo $\Phi: H \rightarrow G$, o qual é uma aplicação de recobrimento. Isto permite definir uma ação de $\Psi: H \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ por $\Psi(h, z) = \Phi(h).z$. Esta ação induz uma outra $\psi: H \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\psi(h, [z]) = [\Psi(h, z)]$, onde $[z]$ denota a reta complexa de \mathbb{C}^{n+1} que contém $z \neq 0$ e passa pela origem. Note que as órbitas de dimensão $n-1$ desta ação são as folhas de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.

Proposição 4.2.3. *Nas condições do exemplo 4.2.1, suponha que $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ satisfaz às hipóteses do teorema 5. Seja $\mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathcal{G}))$ a componente irredutível de $\text{Fol}(n, n-1)$ que contém $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Então para todo ponto liso $\mathcal{H}_o \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathcal{G}))$, existe uma sub-álgebra de Lie $\mathcal{G}(\mathcal{H}_o) \subset \mathcal{L}(n+1, \mathbb{C})$ de dimensão $n-1$ tal que $\mathcal{H}_o = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{H}_o))$.*

Prova. Seja Ω_o uma 1-forma homogênea que representa \mathcal{H}_o em coordenadas homogêneas. Pelo teorema 5, existem campos de grau um Z_1, \dots, Z_{n-1} tais que $d\Omega_o = i_{Z_1} \dots i_{Z_{n-1}} \nu_n$. O sistema Z_1, \dots, Z_{n-1} é involutivo, logo

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{r=1}^{n-1} a_{ijr} Z_r, \quad 1 \leq i < j \leq n-1.$$

Como os campos $Z_{j'}$ s são lineares, os coeficientes a_{ijr} são constantes, logo $\mathcal{G}(\mathcal{H}_o) := \langle Z_1, \dots, Z_{n-1} \rangle$ é uma álgebra de Lie. \square

Exemplo 4.2.2. Para $n \geq 3$, defina

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \sum_{i=0}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \sum_i \lambda_i = 0 \\ X_k &= \sum_{i=0}^{n-k} z_{i+k} \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad k = 1, \dots, n-2 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Não é difícil ver que $[X_i, X_j] = 0$ se $1 \leq i < j \leq n-2$ (verifique). Por outro lado, $[X_{n-1}, X_k] = \sum_{i=0}^{n-k} (\lambda_{i+k} - \lambda_i) z_{i+k} \partial / \partial z_i$. Logo, se escolhermos $\lambda_i = i + \lambda_0$, temos $\lambda_{i+k} - \lambda_i = k$ e $[X_{n-1}, X_k] = k X_k$, $1 \leq k \leq n-2$. Neste caso, $\mathcal{G} := \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ é uma álgebra de Lie e a condição $\sum_i \lambda_i = 0$ implica que $\lambda_0 = -n/2$. Logo, $\Omega := i_R i_{X_1} \dots i_{X_{n-1}} \nu$ define em coordenadas homogêneas uma folheação $\mathcal{F}(\mathcal{G}) \in \mathbb{F}ol(n, n-1)$. Podemos calcular $d\Omega$ utilizando a fórmula (4.3). Ela nos fornece $d\Omega = i_{X_1} \dots i_{X_{n-2}} i_Z \nu$, onde

$$Z = \frac{(n-1)(n-2)}{2} R + (-1)^{n+1} (n+1) X_{n-1},$$

como o leitor pode verificar. Note que $Z = \sum_{j=0}^n \mu_j z_j \partial / \partial z_j$, onde $\mu_j \neq 0$, $0 \leq j \leq n$. Segue de (4.21) que, se $(z_{n-2}, z_{n-1}, z_n) \neq (0, 0, 0)$ então os vetores $X_1(z), \dots, X_{n-1}(z), Z(z)$ são linearmente independentes. Logo $\text{sing}(d\Omega) \subset (x_{n-2} = x_{n-1} = x_n = 0)$ e Ω satisfaz às hipóteses do teorema 5.

Observação 4.2.3. Sejam \mathcal{G} a álgebra de Lie do exemplo 4.2.2 e $\mathcal{F}(\mathcal{G}) \in \mathbb{F}ol(n, n-1)$. É possível provar que \mathcal{I} é uma componente rígida (veja [C-P]). No caso $n = 3$ esta componente coincide com $\mathcal{A}f(3; 3, 2, 1; -1)$, ou seja a componente descrita em (b) do corolário 4.2.2. Gostaríamos de observar que as componentes obtidas por pull-back linear desta, ou seja, $\mathcal{A}f(m; 3, 2, 1; 1, -1)$, $m \geq 4$, são também rígidas. Isto é consequência do corolário 4.2.3 e da proposição 4.2.2.

Mais precisamente, em [C-V] prova-se o seguinte resultado :

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ a folheação de codimensão um induzida por uma sub-álgebra de Lie $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}\mathcal{L}(n+1, \mathbb{C})$. Suponha que $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ satisfaz à hipótese do teorema 5. Se $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{S}\mathcal{L}(n+1, \mathbb{C})/\mathcal{G}) = 0$ então $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ é rígida.*

4.3 Exercícios.

Ex. 4.1. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M de dimensão $n \geq 3$. Suponha que existem $n-1$ campos de vetores meromorfos em M , X_1, \dots, X_{n-1} , tangentes a \mathcal{F} , e $p \in M \setminus \cup_j (X_j)_\infty$ tal que $X_1(p) \wedge \dots \wedge X_{n-1}(p) \neq 0$. Prove que $\mathcal{T}\mathcal{F}$ é localmente livre.

Ex. 4.2. Prove que se $\mathcal{F} \in PBL(n, k)$, $n \geq 3$, $k \geq 0$, então existem $n - 1$ campos de vetores meromorfos em \mathbb{P}^n , tangentes a \mathcal{F} e linearmente independentes num sub-conjunto aberto e denso de \mathbb{P}^n .

Ex. 4.3. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em M , onde $\dim(M) \geq 4$. Suponha que $\text{sing}(\mathcal{F})$ tem uma componente irredutível S de codimensão ≥ 3 . Prove que se $p \in S$ é um ponto liso de S então \mathcal{TF} não é livre em p .

Ex. 4.4. Prove que se $p_1 + \dots + p_r > 3$ então $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r) \not\subset S(n, p_1 + \dots + p_r - 2)$.

Ex. 4.5. Prove por indução em $q \geq 1$ que se Z_1, \dots, Z_q são campos de vetores holomorfos em \mathbb{C}^m então

$$\begin{aligned} d(i_{Z_1} \dots i_{Z_q} \nu) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} i_{[Z-i, Z_j]} \widehat{i_{Z_1}} \dots \widehat{i_{Z_i}} \dots \widehat{i_{Z_j}} \dots i_{Z_q} \nu + \\ &+ \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} \text{div}(Z_j) i_{Z_1} \dots \widehat{i_{Z_j}} \dots i_{Z_q} \nu, \end{aligned}$$

onde $\nu = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$ e $\text{div}(Y)$ é definido por $d(i_Y \nu) = \text{div}(Y) \nu$.

Ex. 4.6. Seja $\theta = i_{Z_1} \dots i_{Z_m} \nu$, onde Z_1, \dots, Z_m são campos de vetores holomorfos em \mathbb{C}^{m+2} e $\nu = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{m+2}$. Prove que $\theta \wedge \theta = 0$.

Ex. 4.7. Sejam Z_1, \dots, Z_m campos holomorfos num poldisco $Q \subset \mathbb{C}^m$ tais que para todo $q \in Q$ o conjunto $\{Z_1(q), \dots, Z_m(q)\}$ é uma base de \mathbb{C}^m . Seja α uma 2-forma em Q que satisfaz $i_{Z_r} i_{Z_s} \alpha = 0$, para $1 \leq r < s \leq m - 2$. Prove que existe uma $(m - 2)$ -upla de campos holomorfos em Q , $W = (W_1, \dots, W_{m-2})$, tal que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m-2} i_{Z_1} \dots i_{Z_{j-1}} i_{W_j} i_{Z_{j+1}} \dots i_{Z_{m-2}} \nu, \quad \nu = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m.$$

Ex. 4.8. Sejam $f: (\mathbb{C}^m, a) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ um germe de aplicação holomorfa e $X = f^{-1}(0)$. Defina $T_a X := \ker(Df(a)) \subset T_a \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^m$. Prove que $\dim(X, a) \leq \dim(T_a X)$. Suponha que para todo $v \in T_a X$ existe um germe de curva holomorfa $\gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow X$ tal que $\gamma'(0) = v$. Prove que X é liso em a e $\dim(X, a) = \dim(T_a(X))$.

Ex. 4.9. Sejam $g: (\mathbb{C}^\ell, b) \rightarrow (\mathbb{C}^m, a)$ um germe de aplicação holomorfa e $Y = g(\mathbb{C}^\ell, b)$. Defina $T_a Y = \text{Im}(Dg(b)) \subset \mathbb{C}^m$. Prove que Y é irredutível e que $\dim(Y) \geq \dim(T_a Y)$.

Ex. 4.10. Seja \mathcal{P}_r^m o conjunto de polinômios homogêneos de grau r em \mathbb{C}^m . Considere a norma $\|\cdot\|$ em \mathcal{P}_r^m definida por $\|f\| := \sup\{|f(z)|; |z| \leq 1\}$. Dada $F = (F_1, \dots, F_k)$, onde $F_j \in \mathcal{P}_{d_j}^m$, $1 \leq j \leq k$, denote por $X(F)$ o conjunto algébrico ($F = 0$). Suponha que $\text{cod}_{\mathbb{C}^m}(X(F)) \geq \ell$, onde $1 \leq \ell \leq m$. Prove que existe $\epsilon > 0$ tal que se $G = (G_1, \dots, G_k)$ são tais que $G_j \in \mathcal{P}_{d_j}^m$ e $\|G_j - F_j\| < \epsilon$, $1 \leq j \leq k$, então $\text{cod}(X(G)) \geq \ell$.

Ex. 4.11. Considere \mathbb{C}^{n+1} com as coordenadas (z_1, \dots, z_{n+1}) . Seja $\Omega = z_1 \dots z_r \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{dz_j}{z_j}$, $r \leq n+1$. Prove que, se $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ então $\text{cod}(\text{sing}(d\Omega)) \geq 3$. Conclua daí que $\mathcal{L}(n; p_1, \dots, p_r) \subset \mathbb{F}_3(n, r-2)$, se $r \leq n+1$ e $p_j = 1$ para todo $j = 1, \dots, r$.

Ex. 4.12. Sejam $S = px\partial/\partial x + q\partial/\partial y + rz\partial/\partial z$ e X tais que $[S, X] = \lambda X$ e $\text{gr}(\mathcal{F}(S, X)) = \ell$. Prove que existe um polinômio g tal que $S(g) = \lambda.g$ e, se $Y = X + g.S$ então $\text{gr}(\mathcal{G}_Y) = \ell - 1$.

Ex. 4.13. Seja X um campo em \mathbb{C}^3 definido por

$$X(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial}{\partial y} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Prove que o fluxo de X é polinomial em (t, x, y, z) . Considere a equação diferencial $X(G) = F$ com condição de contorno $G(0, y, z) = h(y, z)$, onde h é um polinômio. Prove que esta EDP tem uma única solução, a qual é polinomial.

Ex. 4.14. Sejam $S = 3x\partial/\partial x + 2y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$, $X_\lambda = (ay^2 + bxz)\partial/\partial x + (cx + dyz)\partial/\partial y + (ey + fz^2)\partial/\partial z$, $\lambda \in \{[a : \dots : f] \in \mathbb{P}^6 \mid b + d + 2f = 0\} := \Lambda$. Coloque $\omega_\lambda = i_S i_{X_\lambda} \nu$. Seja $\mathcal{F}(\lambda)$ a folheação de \mathbb{P}^3 que é representada na carta afim $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3$ por ω_λ . Prove que existe um conjunto algébrico $B \subset \Lambda$ tal que se $\lambda \notin B$ então $\mathcal{F}(\lambda)$ possui três singularidades simples, duas nilpotentes do tipo $[1 : 2 : 3]$ e a outra semi-simples. As outras singularidades de $\mathcal{F}(\lambda)$ são de Kupka.

Capítulo 5

Folheações de graus um e dois.

Neste capítulo classificaremos as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, 1)$ e $\mathbb{F}ol(n, 2)$, $n \geq 3$. Veremos que para todo $n \geq 3$, $\mathbb{F}ol(n, 1)$ possui duas componentes irredutíveis e $\mathbb{F}ol(n, 2)$ seis.

5.1 Componentes de $\mathbb{F}ol(n, 1)$.

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado, cuja prova original foi dada por Jouanolou em [J].

Teorema 6. *Para todo $n \geq 3$, $\mathbb{F}ol(n, 1)$ possui duas componentes irredutíveis : $\mathcal{R}(n; 1, 2)$ e $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$.*

Prova. Nos teoremas 3 e 4 provamos que $\mathcal{R}(n; 1, 2)$ e $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$ são componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, 1)$. Para provar que $\mathbb{F}ol(n, 1) = \mathcal{R}(n; 2, 2) \cup \mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$, utilizaremos a proposição 1.4.3 da seção 1.4.3. Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, 1)$. Vamos supor que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Segundo a proposição 1.4.3, existe um mergulho linear $\Phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$ em posição geral com \mathcal{F} . Seja $\mathcal{G} := \Phi^*(\mathcal{F}) \in \mathbb{F}ol(2, 1)$.

Lema 5.1.1. *Qualquer folheação $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, 1)$ pode ser definida por uma 1-forma meromorfa fechada.*

Prova. Seja $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, 1)$. Em coordenadas homogêneas, podemos definir \mathcal{G} por uma forma $\Omega = i_{R_3} i_L (dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2)$, onde R_3 é o radial em \mathbb{C}^3 e L é um campo homogêneo de grau um. Após uma mudança linear de coordenadas em \mathbb{C}^3 , podemos supor que L está na forma canônica de Jordan. Temos três possibilidades :

- (i). $L = \lambda_0 z_0 \partial / \partial z_0 + \lambda_1 z_1 \partial / \partial z_1 + \lambda_2 z_2 \partial / \partial z_2$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e $\lambda_i \neq 0$ para algum $i = 0, 1, 2$.
- (ii). $L = \lambda_0 R_3 + z_1 \partial / \partial z_0 + z_2 \partial / \partial z_1$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.
- (iii). $L = \lambda_0 ((z_0 + z_1) \partial / \partial z_0 + z_1 \partial / \partial z_1) + \lambda_2 z_2 \partial / \partial z_2$, $\lambda_0, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda_0 \neq 0$.

No caso (i), obtemos $\Omega = \mu_0 z_1 \cdot z_2 dz_0 + \mu_1 z_0 \cdot z_3 dz_2 + \mu_2 z_0 \cdot z_1 dz_2$, onde $\mu_0 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\mu_1 = \lambda_2 - \lambda_0$ e $\mu_2 = \lambda_3 - \lambda_1$. Neste caso, a forma logarítmica $\eta := \sum_{j=0}^2 \mu_j \frac{dz_j}{z_j}$ satisfaz $i_{R_3} \eta = 0$, logo induz uma 1-forma meromorfa fechada logarítmica em \mathbb{P}^2 , a qual denotaremos também por η . A forma η define \mathcal{G} .

No caso (ii), temos $\Omega = z_2^2 dz_0 - z_1 \cdot z_2 dz_1 + (z_1^2 - z_0 \cdot z_2) dz_2$. Seja $F := (2 z_0 \cdot z_2 - z_1^2) / z_2^2$. Um cálculo direto mostra que $\Omega = z_2 (2 z_0 \cdot z_2 - z_1^2) \frac{dF}{F}$. Logo F é uma integral primeira de \mathcal{F} . Em particular, \mathcal{G} é definida pela forma fechada $\eta = \frac{dF}{F} = \frac{d(2z_0 \cdot z_2 - z_1^2)}{2z_0 \cdot z_2 - z_1^2} - 2 \frac{dz_2}{z_2}$.

No caso (iii), vem que $\Omega = \mu_1 z_2 (z_0 dz_1 - z_1 dz_0) + \lambda_0 z_1 (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)$, $\mu_1 = \lambda_0 - \lambda_2$. Colocando $\alpha = \mu_1 / \lambda_0$, temos

$$\eta := \frac{1}{\lambda_0 \cdot z_1^2 \cdot z_2} \Omega = \frac{dz_2}{z_2} - \frac{dz_1}{z_1} - \frac{\alpha}{z_1^2} (z_1 dz_0 - z_0 dz_1) =$$

$= \frac{dz_2}{z_2} - \frac{dz_1}{z_1} - d(\alpha \cdot z_0 / z_1)$. Como $i_{R_3} \eta = 0$, esta forma induz uma forma fechada em \mathbb{P}^2 que define \mathcal{G} em $\mathbb{P}^2 \setminus (\eta)_\infty$. \square

Seja $E := \Phi(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{P}^2$. Pelo lema 5.1.1, a folheação $\mathcal{G} = \mathcal{F}|_E$ pode ser definida por uma 1-forma fechada η . A proposição 3.1.1 da seção 3.1 implica que η pode ser estendida a uma 1-forma meromorfa fechada θ em \mathbb{P}^n , que define \mathcal{F} . Pela proposição 1.2.5 da seção 1.2 podemos escrever

$$\theta = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{r_1-1} \dots f_k^{r_k-1}}\right),$$

onde $r_1, \dots, r_k \geq 1$, $(\theta)_\infty = (f_1^{r_1} \dots f_k^{r_k} = 0)$, λ_j é o resíduo de θ em $(f_j = 0)$, $1 \leq j \leq k$, $\sum_j \lambda_j \cdot gr(f_j) = 0$ e $gr(g) = \sum_j (r_j - 1) gr(f_j)$. Colocando $g_j := f_j|_E$ e $h := g|_E$ temos

$$\eta = \theta|_E = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{dg_j}{g_j} + d\left(\frac{h}{g_1^{r_1-1} \dots g_k^{r_k-1}}\right).$$

Comparando com as expressões de η obtidas no lema 5.1.1, temos o seguinte, de acordo com o caso :

Caso (i). Neste caso, $\theta|_E = \eta = \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{dz_j}{z_j}$. Como os polos de η são de ordem um, temos $r_1 = \dots = r_k = 1$, ou seja, $g = 0$. Além disto, $2 \leq k \leq 3$. Se $k = 3$ então $gr(g_j) = 1$ e podemos supor que $g_j = z_j$, $1 \leq j \leq 3$. Em particular, $gr(f_j) = 1$, $1 \leq j \leq 3$. Comparando os resíduos, obtemos que $\lambda_j = \mu_j$, $1 \leq j \leq 3$. Logo, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$.

Se $k = 2$ então $\theta = \lambda_1 \frac{df_1}{f_1} + \lambda_2 \frac{df_2}{f_2}$, sendo $\lambda_1 gr(f_1) + \lambda_2 gr(f_2) = 0$. Em particular, obtemos $\lambda_1 \frac{dg_1}{g_1} + \lambda_2 \frac{dg_2}{g_2} = \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{dz_j}{z_j}$. Isto implica que $g_1 \cdot g_2 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$, ou seja, $gr(g_1) = 2$ e $gr(g_2) = 1$, ou vice-versa. Supondo que $gr(g_1) = 2$ e $gr(g_2) = 1$, temos $gr(f_1) = 2$ e $gr(f_2) = 2$, logo $\lambda_2/\lambda_1 = -2$. Portanto, f_1/f_2^2 é integral primeira de \mathcal{F} e $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 1, 2)$.

Caso (ii). Neste caso, η tem polos de ordem um e dois resíduos distintos. Isto implica que o mesmo é verdade para θ . Logo $k = 2$, $r_0 = r_1 = 1$, e podemos supor que $g_1 = 2z_0z_2 - z_1^2$, $g_2 = z_2$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = -2$. Logo $gr(f_1) = 2$, $gr(f_2) = 1$ e f_1/f_2^2 é integral primeira de \mathcal{F} . Portanto, $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 2, 1)$.

Caso (iii). Neste caso, $\eta = \frac{dz_2}{z_2} - \frac{dz_1}{z_1} - d(\alpha \cdot z_0/z_1)$, logo $g|_E = a \cdot z_0$ e podemos supor que $g_1 = z_2$ e $g_2 = z_1$, o que acarreta $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $gr(f_1) = gr(f_2) = 1$. Finalmente, vimos na observação 3.3.1 da seção 3.3, que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; gr(f_1), gr(f_2), p)$, onde $p = (r_1 - 1)gr(f_1) + (r_2 - 1)gr(f_2) = 1$, ou seja, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$. \square

Observação 5.1.1. É relativamente fácil calcular as dimensões de $\mathcal{R}(n; 1, 2)$ e $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1)$, já que temos parametrizações específicas destas componentes. Por exemplo, $dim(\mathcal{R}(n; 1, 2)) = n^2 + n - 2$ e $dim(\mathcal{L}(n; 1, 1, 1)) = 3n + 2$. Deixamos estes cálculos como exercício para o leitor (veja o Ex. 5.1). No entanto, um problema bem mais difícil, e que até o momento está em aberto, é calcular o grau destas componentes.

5.2 Componentes de $\mathbb{F}ol(n, 2)$.

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte resultado, cuja prova original foi dada em [Ce-LN 1] :

Teorema 7. *Para todo $n \geq 3$, $\mathbb{F}ol(n, 2)$ possui seis componentes irreduzíveis : $\mathcal{R}(n; 2, 2)$, $\mathcal{R}(n; 1, 3)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$, $PBL(n, 2)$ e $\mathcal{A}f(n; 1, 2, 3, 1, -1)$ (componente excepcional).*

Prova. Já vimos nos capítulos anteriores que $\mathcal{R}(n; 2, 2)$, $\mathcal{R}(n; 1, 3)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$, $PBL(n, 2)$ e $\mathcal{A}f(n; 1, 2, 3, 1, -1)$ são componentes irreduzíveis de $\mathbb{F}ol(n, 2)$. Vamos provar que $\mathbb{F}ol(n, 2)$ é a união destas componentes.

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, 2)$. Vamos supor que $cod(sing(\mathcal{F})) \geq 2$. Como na prova do teorema 6, a idéia é considerar um 2-plano E em posição geral com \mathcal{F} . Dado $p \in \mathbb{P}^n \setminus sing(\mathcal{F})$, por abuso de linguagem, vamos denotar por $T_p\mathcal{F}$ o $(n-1)$ -plano de \mathbb{P}^n que passa por p e é tangente a \mathcal{F} em p . A dificuldade aqui é que, diferentemente do caso de grau um, nem toda folheação de grau dois em \mathbb{P}^2 pode ser definida por uma forma meromorfa fechada. Temos duas possibilidades :

- (I). Existe $p \in \mathbb{P}^n \setminus sing(\mathcal{F})$ tal que $T_p\mathcal{F}$ contém um plano $E \simeq \mathbb{P}^2$, com $p \in E$, o qual tem uma tangência não degenerada (de Morse) com a folha L_p de \mathcal{F} em p .
- (II). Para todo $p \in \mathbb{P}^n \setminus sing(\mathcal{F})$ e todo plano $E \subset T_p\mathcal{F}$, com $p \in E$, a tangência de L_p com E é degenerada. Uma folheação que satisfaz esta propriedade será chamada de *folheação de Monge-Ampère*.

Caso (I). Fixemos uma carta afim $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ tal que $p = 0 \in \mathbb{C}^n$, $T_p\mathcal{F} \cap \mathbb{C}^n = (x_n = 0)$ e $E \cap \mathbb{C}^n = (x_3 = \dots = x_n = 0)$. Neste caso, podemos parametrizar uma vizinhança U de $p = 0$ em L_p por $z := (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (z, \phi(z))$, onde $\phi: V \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, V vizinhança de $0 \in T_p\mathcal{F}$, $\phi(0) = 0$ e $D\phi(0) = 0$. O jato de ordem dois de ϕ em 0 é da forma $j^2(\phi, 0)(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij} x_i \cdot x_j$. Dizer que E tem tangência não degenerada com L_p em p é equivalente a que a forma quadrática $Q(x_1, x_2) := \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} x_i \cdot x_j$ seja não degenerada. Por outro lado, como $p \notin sing(\mathcal{F})$, \mathcal{F} tem uma integral primeira holomorfa local, digamos $f: W \rightarrow \mathbb{C}$, $0 \in W$, tal que $df(0) \neq 0$ e $(f =$

$0) \cap W \subset L_p$. Como a vizinhança $U \subset L_p$ é dada por $(x_n - \phi(z) = 0)$ e $f|_{U \cap W} = 0$, pelo teorema da divisão de Weierstrass, o germe f_0 de f em 0 pode ser escrito como $f_0(z, x_n) = (x_n - \phi(z)) \cdot u(z)$, onde $u(0) \neq 0$. Portanto, $f_0|_{E \cap W}(x_1, x_2) = -\phi(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \cdot u(x_1, x_2, 0, \dots, 0) := g(x_1, x_2)$. Logo, $j_0^2(f_0|_{E \cap W}) = u(0) \cdot Q(x_1, x_2)$, ou seja, é não degenerado. Em particular, $\mathcal{F}|_E$ tem uma singularidade em $p = 0 \in E$ e uma integral primeira local com uma singularidade de Morse em 0.

Definição 5.2.1. Dizemos que uma folheação \mathcal{G} em \mathbb{P}^2 possui um *centro* em $q \in \mathbb{P}^2$, se $q \in \text{sing}(\mathcal{G})$ e \mathcal{G} possui uma integral primeira g numa vizinhança de q tal que q é uma singularidade de Morse de g .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que o 2-plano E está em posição geral com respeito a \mathcal{F} . De fato, como o conjunto de 2-planos em posição geral com \mathcal{F} é denso, para todo $\epsilon > 0$, existe um mergulho linear $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$, da forma $\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, h(x_1, x_2)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$ tal que $\|h\| < \epsilon$ e $E_h := \psi(\mathbb{C}^2)$ está em posição geral com \mathcal{F} . Neste caso, se ϵ é suficientemente pequeno, a função $f|_{E_h \cap W}$ é uma integral primeira local de $\mathcal{F}|_{E_h}$ e possui uma singularidade de Morse num ponto $q \in E_h \cap W$ (verifique).

Portanto, existe um 2-plano $E \subset \mathbb{P}^n$, em posição geral com \mathcal{F} , tal que $\mathcal{G} := \mathcal{F}|_E$ possui um centro $q \in E$. Como E está em posição geral com \mathcal{F} , temos $\mathcal{G} \in \text{Fol}(2, 2)$ ($E \simeq \mathbb{P}^2$). Vamos agora utilizar dois resultados. O primeiro, devido a Dulac, classifica as folheações $\mathcal{G} \in \text{Fol}(2, 2)$ que possuem um centro $q \in \mathbb{P}^2$ e uma reta ℓ invariante tal que $q \notin \ell$. O segundo, prova que, se $\mathcal{G} \in \text{Fol}(2, 2)$ possui um centro q então existe uma reta ℓ invariante tal que $q \notin \ell$. Não demonstraremos estes resultados, uma vez que as provas são puramente formais, envolvendo cálculos simbólicos que serão indicados no próximo capítulo. A demonstração do teorema 5.1 pode ser encontrada em [Du] e a do teorema 5.2 em [Ce-LN 1].

Teorema 5.1. *Seja $\mathcal{G} \in \text{Fol}(2, 2)$ tal que \mathcal{G} possui um centro $q \in \mathbb{P}^2$ e uma reta ℓ invariante tal que $q \notin \ell$. Então \mathcal{G} pode ser definida por uma 1-forma meromorfa fechada. Além disto, se $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ é uma carta afim, tal que ℓ é a reta do infinito de \mathbb{C}^2 , então a forma fechada η que representa \mathcal{G} pode ser escrita de uma das maneiras abaixo :*

(a). $\eta = dh$, onde $gr(h) = 3$.

(b). $\eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ e $gr(f_j) = 1$, $1 \leq j \leq 3$.

(c). $\eta = \lambda_1 \frac{df}{f} + \lambda_2 \frac{dg}{g}$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, $gr(f) = 1$ e $gr(g) = 2$.

(d). $\eta = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + dg$, onde $gr(g) = 1$, $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ e $gr(f_j) = 1$, $1 \leq j \leq 2$.

(e). $\eta = \sum_{j=1}^2 \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d(g/f_1)$, onde $\lambda_1, \lambda_2, f_1, f_2, g$ são como em (d).

(f). $\eta = \frac{df}{f} + d(g/f^2)$, onde $gr(f) = 1$ e $gr(g) = 2$.

(g). $\eta = \frac{df}{f} + d(g/f)$, onde $gr(f) = 1$ e $gr(g) = 2$.

(h). $\eta = \frac{df}{f} + dg$, onde $gr(f) = 1$ e $gr(g) = 2$.

(i). $\eta = \frac{dg}{g} + df$, onde $gr(f) = 1$ e $gr(g) = 2$.

(j). $\eta = 3 \frac{dg}{g} - 2 \frac{dh}{h}$, onde $gr(h) = 3$ e $gr(g) = 2$.

Teorema 5.2. *Seja $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$ tal que \mathcal{G} possui um centro $q \in \mathbb{P}^2$. Então \mathcal{G} possui uma reta invariante ℓ tal que $q \notin \ell$.*

Em particular, os teoremas 5.2 e 5.1 implicam que \mathcal{G} é definida por uma 1-forma meromorfa fechada η . Escrevendo η em coordenadas homogêneas, obtemos o seguinte :

Corolário 5.2.1. *Se $\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, 2)$ possui um centro então \mathcal{G} pode ser definida em coordenadas homogêneas por uma forma fechada η de um dos seguintes tipos :*

(A). $\eta = d(H/F^3)$, onde $gr(H) = 3$ e $gr(F) = 1$.

(B). $\eta = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$, $gr(F_j) = 1$, $1 \leq j \leq 4$, e $\sum_j \lambda_j = 0$.

(C). $\eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j}$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$, $1 \leq j \leq 3$, $gr(F_1) = gr(F_2) = 1$, $gr(F_3) = 2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$.

(D). $\eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + d(G/F_3)$, onde $gr(G) = 1$, $gr(F_j) = 1$, $1 \leq j \leq 3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ e $\sum_j \lambda_j = 0$.

$$(E). \eta = \frac{dF_1}{F_1} - \frac{dF_2}{F_2} + d(G/F_1^2), \text{ onde } gr(F_1) = gr(F_2) = 1 \text{ e } gr(G) = 2.$$

$$(F). \eta = \frac{dF_1}{F_1} - \frac{dF_2}{F_2} + d(G/F_1.F_2), \text{ onde } gr(F_1) = gr(F_2) = 1 \text{ e } gr(G) = 2.$$

$$(G). \eta = \frac{dG}{G} - 2\frac{dF}{F} + d(F_1/F), \text{ onde } gr(F) = gr(F_1) = 1 \text{ e } gr(G) = 2.$$

$$(H). \eta = 3\frac{dG}{G} - 2\frac{dH}{H}, \text{ onde } gr(H) = 3 \text{ e } gr(G) = 2.$$

A prova consiste em homogeneizar os polinômios que aparecem nos diversos casos do teorema 5.1, isto é, substituir (x, y) por $(x/z, y/z)$ nestes epolinômios. Os detalhes são deixados para o leitor. Gostaríamos apenas de destacar a correspondência entre os casos no teorema e no corolário : (a) \iff (A), (b) \iff (B), (c) \iff (C), (d) e (e) \iff (D), (f) e (h) \iff (E), (g) \iff (F), (i) \iff (G) e (j) \iff (H).

A idéia agora é utilizar a mesma técnica da prova do teorema 6. Pela proposição 3.1.1, η pode ser estendida a uma 1-forma meromorfa fechada θ que define \mathcal{F} em \mathbb{P}^n . Podemos escrever

$$\theta = \sum_{j=1}^r \mu_j \frac{df_j}{f_j} + d(g/f_1^{s_1-1} \dots f_{s_r-1}), \quad (5.1)$$

onde, $r \geq 1$, $\sum_{j=1}^r \mu_j \cdot gr(f_j) = 0$, $s_j \geq 1$ e $gr(g) = \sum_j (s_j - 1)gr(f_j)$. Comparando os resíduos e os divisores de polos de θ e de $\eta = \theta|_E$, de acordo com o caso no corolário 5.2.1, obtemos o seguinte :

Caso (A). $r = 1$ e $\theta = d(g/f_1^3)$, onde $g|_E = H$, $f_1|_E = F$, $gr(g) = 3$ e $gr(f_1) = 1$. Neste caso, g/f_1^3 é integral primeira de \mathcal{F} e $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 1, 3)$.

Caso (B). Neste caso $2 \leq r \leq 4$. Se $r = 4$, podemos supor que $f_j|_E = F_j$, $1 \leq j \leq 4$, o que acarreta $\mu_j = \lambda_j$, $1 \leq j \leq 4$, e $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$. Se $r < 3$ uma ou mais das curvas $f_j|_E$ é redutível, podendo ter grau dois ou três. Conforme o caso, temos : $r = 3$ e podemos supor que $f_j|_E = F_j$, $j = 1, 2$, e que $f_3|_E = F_3.F_4$. Isto acarreta $\mu_j = \lambda_j$, $j = 1, 2$, e $\mu_3 = \lambda_3 = \lambda_4$. Obtemos que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$. Se $r = 2$, temos duas possibilidades : 1^a. f_1 tem grau um e f_2 grau três, sendo $f_1|_E = F_1$ e $f_2|_E = F_2.F_3.F_4$ (por exemplo). Isto implica que $\mu_1 = \lambda_1$ e $\mu_2 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -\lambda_1/3$. Obtemos $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 1, 3)$. 2^a. $f_1|_E = F_1.F_2$, $f_2|_E = F_3.F_4$, $\mu_1 = \lambda_1 = \lambda_2$ e $\mu_2 = \lambda_2 = \lambda_3$, o que acarreta $\theta = \mu_1(\frac{df_1}{f_1} - \frac{df_2}{f_2})$ e $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 2, 2)$.

Caso (C). Neste caso, $r \in \{2, 3\}$. Se $r = 3$ temos $\theta = \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{df_j}{f_j}$, onde podemos supor que $f_j|_E = F_j$, $1 \leq j \leq 3$, o que acarreta $\mu_j = \lambda_j$, $j = 1, 2, 3$, e $gr(f_1) = gr(f_2) = 1$, $gr(f_3) = 2$. Obtemos que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; \cdot, 1, 1, 2)$. Se $r = 2$, uma das curvas $f_j|_E$ é redutível. Com um argumento análogo ao do caso anterior obtemos que $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 2, 2)$ ou $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 1, 3)$. Deixamos os detalhes para o leitor.

Caso (D). Neste caso, $r \in \{2, 3\}$. Se $r = 3$ temos $\theta = \sum_{j=1}^3 \mu_j \frac{df_j}{f_j} + d(g/f_3)$, onde $g|_E = G$ e podemos supor que $f_j|_E = F_j$, $j = 1, 2, 3$. Isto acarreta $\mu_j = \lambda_j$ e $gr(f_j) = 1$, $j = 1, 2, 3$. Como $s_1 = s_2 = 1$ e $s_3 = 2$, obtemos da observação 3.3.1 da seção 3.3 que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; gr(gr(f_1), gr(f_2), gr(f_3), p))$, com $p = \sum_j (s_j - 1)gr(f_j) = 1$. Logo, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$. Se $r = 2$, uma das curvas $f_j|_E$ é redutível. Como $\eta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \frac{dF_j}{F_j} + d(G/F_3)$, a curva $(F_3 = 0)$ é um polo de ordem dois e grau um de η , logo, podemos supor $f_1|_E = F_3$ e que $(\theta)_\infty = f_1^2$. Obtemos $f_2|_E = F_2 \cdot F_3$ e $gr(f_2) = 2$. Neste caso $\theta = 2\frac{df_1}{f_1} - \frac{df_2}{f_2} + d(g/f_1)$. A observação 3.3.1 da seção 3.3 implica que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$, como o leitor pode verificar.

Caso (E). Como os resíduos de η são distintos, o mesmo é verdade para θ , logo $r = 2$. Podemos supor que $f_j|_E = F_j$, $j = 1, 2$. Logo, $gr(f_j) = 1$, $j = 1, 2$. Levando em conta o divisor de polos $(\eta)_\infty$, obtemos $s_1 = 3$, $s_2 = 1$ e $\theta = \frac{df_1}{f_1} - \frac{df_2}{f_2} + d(g/f_1^2)$, onde $g|_E = G$. Logo $gr(g) = 2$ e $gr(f_1) = gr(f_2) = 1$. Obtemos da observação 3.3.1 da seção 3.3 que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$.

Caso (F). Como no caso anterior, $r = 2$ e podemos supor que $f_j|_E = F_j$, $j = 1, 2$. Logo, $gr(f_1) = gr(f_2) = 1$. Comparando os divisores de polos, obtemos $s_1 = s_2 = 2$ e $\theta = \frac{df_1}{f_1} - \frac{df_2}{f_2} + d(g/f_1 \cdot f_2)$, onde $g|_E = G$ e $gr(g) = 2$. A observação 3.3.1 da seção 3.3 implica que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$.

Caso (G). $r = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 1$ e $\theta = \frac{df_1}{f_1} - 2\frac{df_2}{f_2} + d(g/f_1)$, onde $f_1|_E = G$, $f_2|_E = F$ e $g|_E = F_1$. Logo, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$.

Caso (H). Comparando $\theta|_E$ com θ obtemos $r = 2$ e $\theta = 3\frac{df_1}{f_1} - 2\frac{df_2}{f_2}$, onde $f_1|_E = G$ e $f_2|_E = H$. Neste caso, $gr(f_1) = 2$, $gr(f_2) = 3$ e $\Phi = f_1^3/f_2^2$ é uma integral primeira de \mathcal{F} . Veremos em seguida quais as possíveis expressões para f_1 e f_2 , módulo automorfismo de \mathbb{P}^n .

Seja Ω uma 1-forma em \mathbb{C}^{n+1} que representa \mathcal{F} em coordenadas homogêneas e coloquemos $\omega = f_1 \cdot f_2 \cdot \theta = 3 f_2 df_1 - 2 f_1 df_2$. Como

$\omega \wedge \Omega = 0$, devemos ter $\omega = \ell \cdot \Omega$, onde ℓ é linear, já que os coeficientes de Ω têm grau três e os de ω grau quatro. Como $\theta = \frac{\ell}{f_1 \cdot f_2} \Omega$ é fechada, o hiperplano ($\ell = 0$) é invariante por \mathcal{F} (veja o Ex. 5.5). Em particular, ($\ell = 0$) está contido em algum nível de Φ , digamos $\Phi = c$, que corresponde a $\Phi_c := f_1^3 - c \cdot f_2^2$, se $c \neq \infty$, e $\Phi_\infty = f_2^2$ se $c = \infty$. Na verdade $\ell^2 \mid \Phi_c$, pela proposição 1.2.4 da seção 1.2 (Darboux). Consideremos um sistema de coordenadas homogêneo $(z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\ell = z_4$. Temos três sub-casos a considerar :

Caso (H.1). $c = 0$. Neste caso, $z_4^2 \mid f_1^3$, logo $z_4 \mid f_1$. Como $z_4 \mid 3 f_2 df_1 - 2 f_1 df_2$, obtemos que $z_4 \mid f_2 df_1$. Portanto, $z_4 \mid f_2$, ou $z_4 \mid df_1$.

Se $z_4 \mid f_2$, temos $f_1 = z_4 \cdot \phi$ e $f_2 = z_4 \cdot \psi$, onde $gr(\phi) = 1$, $gr(\psi) = 2$, e $\Phi = \frac{z_4 \cdot \phi^3}{\psi^2}$. Em particular, $\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{dz_4}{z_4} + 3 \frac{d\phi}{\phi} - 2 \frac{d\psi}{\psi}$ que é logarítmica. Obtemos que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$.

Se $z_4 \mid df_1$ então $f_1 = a \cdot z_4^2$, onde $a \neq 0$. Logo, $a^{-3} \cdot \Phi = (\frac{z_4^3}{f_2})^2$. Portanto, $\Psi = \frac{f_2}{z_4^3}$ é integral primeira de \mathcal{F} e obtemos $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 1, 3)$.

Caso (H.2). $c = \infty$. Neste caso, $z_4 \mid f_2$. Vamos supor que z_4 não divide f_1 , já que este caso foi estudado no ítem anterior. Como $z_4 \mid 3 f_2 df_1 - 2 f_1 df_2$, vem que $z_4 \mid df_2$, logo $f_2 = z_4^2 \cdot \phi$, onde $gr(\phi) = 1$. Logo, $\frac{d\Phi}{\Phi} = 3 \frac{df_1}{f_1} - 4 \frac{dz_4}{z_4} - 2 \frac{d\phi}{\phi}$ e $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$.

Caso (H.3). $c \neq 0, \infty$. Após compor Φ à esquerda com uma transformação de Moëbius, podemos supor que $c = -9/8$. Neste caso, $z_4^2 \mid 8f_1^3 + 9f_2^2$. Em particular, z_4 divide $8f_1^3 + 9f_2^2$ e $(8f_1^3 + 9f_2^2)_{z_4} = 6(4f_1^2 \cdot f_{1z_4} + 3f_2 f_{2z_4})$. Coloquemos $g_j := f_j|_{(z_4=0)}$, $j = 1, 2$. Como $z_4 \mid 8f_1^3 + 9f_2^2$, temos $8g_1^3 = -9g_2^2$. Isto implica que existe um polinômio linear $m = m(z_1, z_2, z_3, z_5, \dots, z_{n+1})$ tal que $g_1 = -m^2/2$ e $g_2 = m^3/3$ (verifique). Se $m = 0$ então z_4 divide f_1 e f_2 , caso que já foi considerado anteriormente. Logo, podemos supor que $m \neq 0$. Após uma mudança linear no plano ($z_4 = 0$), podemos supor que $m = z_3$. Portanto existem polinômios homogêneos g e h , com $gr(g) = 1$ e $gr(h) = 2$, tais que

$$f_1 = -\frac{z_3^2}{2} + z_4 \cdot g \text{ e } f_2 = \frac{z_3^3}{3} + z_4 \cdot h. \quad (5.2)$$

Como $z_4 \mid 4f_1^2 \cdot f_{1z_4} + 3f_2 f_{2z_4}$, obtemos de (5.2) que $z_4 \mid z_3 \cdot g + h$ (verifique). Logo, podemos escrever $h = -z_3 \cdot g + z_4 \cdot k$, onde $gr(k) = 1$.

Em particular,

$$f_1 = -\frac{z_3^2}{2} + z_4 \cdot g \text{ e } f_2 = \frac{z_3^3}{3} - z_3 z_4 \cdot g + z_4^2 \cdot k. \quad (5.3)$$

Temos duas possibilidades : $1^a - dz_3 \wedge dz_4 \wedge dg = 0$. $2^a - dz_3 \wedge dz_4 \wedge dg \neq 0$.

Suponhamos $dz_3 \wedge dz_4 \wedge dg = 0$. Neste caso, $g = a \cdot z_3 + b \cdot z_4$, $a, b \in \mathbb{C}$. Isto implica que $f_1 = -\frac{z_3^2}{2} + a \cdot z_3 z_4 + b \cdot z_4^2 := \phi(z_3, z_4)$ e $f_2 = \frac{z_3^3}{3} - a \cdot z_3^2 z_4 - b \cdot z_3 z_4^2 + z_4^2 \cdot k := \psi(z_3, z_4) + z_4^2 \cdot k$. Se $dz_3 \wedge dz_4 \wedge dk = 0$, então Φ só depende de z_3 e z_4 , logo $\Phi = P(z_3/z_4)$ e z_3/z_4 é integral primeira de \mathcal{F} . Isto implicaria que $gr(\mathcal{F}) = 0$, já que estamos supondo $cod(sing(\mathcal{F})) \geq 2$. Logo, $dz_3 \wedge dz_4 \wedge dk \neq 0$. Após uma mudança de coordenadas linear, podemos supor que $k = z_2$ e Φ só depende das variáveis (z_2, z_3, z_4) . Isto implica que $\mathcal{F} \in PBL(n, 2)$.

Por outro lado, se $dz_3 \wedge dz_4 \wedge dg \neq 0$ então, após uma mudança linear de coordenadas, podemos supor que $g = z_2$, o que implica $f_1 = -\frac{z_3^2}{2} + z_2 \cdot z_4$ e $f_2 = \frac{z_3^3}{3} - z_2 z_3 z_4 + z_4^2 \cdot k$. Se $dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge dk = 0$, obtemos novamente que Φ só depende de (z_2, z_3, z_4) e $\mathcal{F} \in PBL(n, 2)$. Se $dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge dk \neq 0$, após uma mudança linear de coordenadas, podemos supor que $k = z_1$. Neste caso, temos

$$\Phi = \frac{(z_2 z_4 - z_3^2/2)^3}{(z_1 z_4^2 - z_2 z_3 z_4 + z_3^2/3)^2}. \quad (5.4)$$

Como o leitor pode verificar, neste caso, Φ coincide com a integral primeira de (b) do corolário 4.2.2 da seção 4.2.1. Logo $\mathcal{F} \in \mathcal{A}f(n; 1, 2, 3; 1, -1)$. Isto termina a prova do caso (I).

Caso (II). \mathcal{F} é de Monge-Ampère. Por motivos técnicos, vamos dividir a prova em dois casos : $n = 3$ e $n > 3$.

Caso $n = 3$. Precisamos de dois lemas. A fim de não interromper a demonstração do teorema, daremos a prova do primeiro lema no final. O resultado a seguir é essencialmente devido a Gauss.

Lema 5.2.1. *Se \mathcal{F} é uma folheação de Monge-Ampère em \mathbb{P}^3 então todas as suas folhas são superfícies regradas. Além disto, se L é uma folha de \mathcal{F} então temos tres possibilidades :*

- (a). \bar{L} é um plano de \mathbb{P}^3 . Neste caso, diremos que L é uma folha planar.
- (b). L é um cone (não planar) sobre um ponto $q \in \mathbb{P}^3$, isto é, todas as retas da regragem, contidas em L , passam por q . Neste caso, diremos que L é uma folha cônica com vértice em q .
- (c). Existe uma curva algébrica $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$, não planar, tal que \bar{L} é a superfície regrada gerada pelas retas tangentes a Γ . Neste caso, $\Gamma \subset \text{sing}(\mathcal{F})$ e \bar{L} é algébrica. Diremos que L é gerada pelas tangentes à curva Γ .

Lema 5.2.2. *Seja $\mathcal{F} \in \text{Fol}(3, k)$, $k > 0$, uma folheação de Monge-Ampère. Então, ou bem, $\mathcal{F} \in \text{PBL}(3, k)$, ou bem \mathcal{F} tem uma integral primeira racional Φ , a qual em algum sistema de coordenadas homogêneo pode ser escrita como*

$$\Phi(x, y, z, w) = \frac{zP(x, y) + Q(x, y)}{wP(x, y) + R(x, y)}, \quad (5.5)$$

onde P, Q, R são polinômios homogêneos com $\text{gr}(P) + 1 = \text{gr}(Q) = \text{gr}(R) := \ell$.

Prova. Temos duas possibilidades :

- (i). \mathcal{F} possui uma folha L não algébrica.
- (ii). Todas as folhas de \mathcal{F} são algébricas.

Caso (i). Neste caso a folha L só pode ser como em (b) do lema 5.2.1, ou seja, cônica com vértice num ponto $q \in \mathbb{P}^3$. Consideremos um sistema de coordenadas afins $(x, y, z) \simeq [x : y : z : 1] \in \mathbb{C}^3$ tal que $q = [0 : 0 : 1 : 0]$. Neste sistema de coordenadas as retas da regragem de L são todas verticais, isto é, da forma $t \mapsto (x_0, y_0, t)$. Em particular, $L \cap \mathbb{C}^3$ é um cilindro com base numa curva não algébrica $\gamma \subset \mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Seja $\omega = A dx + B dy + C dz$ uma 1-forma polinomial que define \mathcal{F} nesta carta afim. Dado um ponto $(p, 0) \in \gamma$, a reta $t \mapsto (p, t)$ está contida em L , logo $\omega(p, t) \cdot \partial/\partial z = C(p, t) = 0$, ou seja, o polinômio C se anula identicamente sobre L . Como L não é algébrica, obtemos $C \equiv 0$, logo $\omega = A dx + B dy$. A condição de integrabilidade de ω nos fornece então que $i_{\partial/\partial z} d\omega = 0$. Como

$i_{\partial/\partial z}d\omega = A_z dx + B_z dy$, obtemos que $A_z \equiv B_z \equiv 0$. Logo $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ e $\mathcal{F} \in PBL(3, k)$.

Caso (ii). Vamos supor que $\mathcal{F} \notin PBL(3, k)$. Se todas as folhas de \mathcal{F} são algébricas, então \mathcal{F} possui uma integral primeira racional Φ , pelo teorema de Darboux (Teorema 1.3). Escrevamos $\Phi = F/G$, num sistema de coordenadas homogêneo. O fecho das folhas de F são as componentes irredutíveis das superfícies $\Phi_c := (F - c.G = 0)$. Vimos no lema 5.2.1 que estas folhas são planares, cônicas, ou superfícies geradas pelas retas tangentes a uma curva algébrica. Afirmamos que, exceto por um número finito de folhas, todas as outras são cones.

De fato, no caso das superfícies geradas pelas retas tangentes a uma curva algébrica γ , vimos que $\gamma \subset \text{sing}(\mathcal{F})$. Logo só pode haver um número finito destas. Por outro lado, se \mathcal{F} possui uma infinidade de folhas planares, devemos ter $gr(F) = gr(G) = 1$, ou seja, $gr(\mathcal{F}) = 0$, já que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$ (veja o Ex. 5.2). Logo Φ possui uma infinidade de níveis cônicos. Como estamos supondo que $\mathcal{F} \notin PBL(3, k)$, devemos ter uma infinidade de vértices para estes cones (veja o Ex. 5.3). Seja X o fecho do conjunto $\{q \in \mathbb{P}^3 \mid q \text{ é vértice de algum nível } \Phi_c, \text{ cônico e irredutível}\}$. Afirmamos que X é uma reta de \mathbb{P}^3 .

Com efeito, suponhamos o contrário. Neste caso, existem três níveis irredutíveis, correspondentes a folhas L_1, L_2, L_3 , com respectivos vértices q_1, q_2, q_3 não alinhados. Após uma compor Φ à direita com uma transformação de Moëbius e à esquerda com um automorfismo de \mathbb{P}^3 , podemos supor que $q_1 = [0 : 0 : 1 : 0]$, $q_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$, $q_3 = [1 : 0 : 0 : 0]$, $\bar{L}_1 = (F = 0)$, $\bar{L}_2 = (G = 0)$ e $\bar{L}_3 = (F - G = 0)$. Na carta afim $(x, y, z) \simeq [x : y : z : 1]$, estas folhas são cilindros, sendo que as geratrizes de \bar{L}_1 são paralelas ao eixo z , as de \bar{L}_2 são paralelas ao eixo y e as de \bar{L}_3 são paralelas ao eixo x . Daí deduzimos que $F = F(x, y)$ (não depende de z), $G = G(x, z)$ (não depende de y) e $F - G = H(y, z)$ (não depende de x). Como as folhas são irredutíveis, temos também $\ell := gr(F) = gr(G) = gr(F - G) = gr(\Phi)$. Note que $\ell \geq 2$, pois estamos supondo que $gr(\mathcal{F}) > 0$. Expandindo estes polinômios em monômios e utilizando a relação $F(x, y) - G(x, z) = H(x, y)$, obtemos que $F(x, y) = f(x) + g(y)$, $G(x, z) = f(x) + h(z)$ e $H(x, y) = g(y) - h(z)$, onde $f, g, h \in \mathbb{C}[t]$. Deixamos esta verificação para o leitor. Seja agora L_4 uma quarta folha correspondente a um nível cônico e irredutível Φ_c , com vértice em q_4 , onde $c \notin \{0, 1, \infty\}$.

Temos duas possibilidades : $q_4 \in \mathbb{C}^3$ e $q_4 \notin \mathbb{C}^3$. Se $q_4 \in \mathbb{C}^3$, após uma translação em \mathbb{C}^3 , podemos supor que $q_4 = 0 \in \mathbb{C}^3$. Isto significa que o nível $(F - c.G = 0)$ é homogêneo, ou seja o polinômio $(1 - c)f(x) + g(y) - c.h(z)$ é homogêneo. Porém, isto implica que f, g, h são polinômios homogêneos do mesmo grau $\ell \geq 2$. Neste caso, o polinômio $F = f(x) + g(y)$ é decomponível, contra a hipótese. No outro caso, temos $q_4 = [\alpha : \beta : \gamma : 0]$, e as retas da regragem são paralelas ao vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Em particular, o campo constante $V := \alpha.\partial/\partial x + \beta.\partial/\partial y + \gamma.\partial/\partial z$ é tangente a L_4 . Isto implica que $V(F - c.G) = \phi.(F - c.G)$, onde ϕ é um polinômio, ou seja, $(1 - c)f(x) + g(y) - c.h(z)$ divide $\alpha(1 - c)f'(x) + \beta.g'(y) - \gamma.c.h'(z)$. Isto só é possível se $\phi \equiv 0$ e neste caso, $f' \equiv 0$, ou $g' \equiv 0$, ou $h' \equiv 0$, ou seja, um dos polinômios, f, g ou h , é constante. Se $f = c$ é constante, por exemplo, então $F(x, y) = c + g(y)$ e $G(y, z) = c + h(z)$ têm grau um, pois caso contrário seriam decomponíveis. Neste caso, todas as folhas seriam planares, contradição. Portanto, X é uma reta de \mathbb{P}^3 .

Podemos supor que $X = \{[0 : 0 : s : t] \mid [s : t] \in \mathbb{P}^1\}$ e que os níveis $F = 0$ e $G = 0$ são irredutíveis e têm vértices em $q_1 = [0 : 0 : 0 : 1]$ e $q_2 = [0 : 0 : 1 : 0]$, respectivamente. Neste caso, $G = G(x, y)$, $F(x, y, z)$ é homogênea e $gr(F) = gr(G) = \ell$. Além disto, $F_z \neq 0$, já que F é irredutível. Seja L_3 uma outra folha cônica com vértice $q_3 = [0 : 0 : \alpha : 1]$, $\alpha \neq 0$, correspondendo a um nível irredutível $(F - c.G = 0)$, onde $c \neq 0$. Neste caso, $F - c.G = H(x, y, z - \alpha)$, onde H é um polinômio homogêneo de grau ℓ (verifique). Em particular, $V = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + (z - \alpha)\partial/\partial z$ é tangente à folha L_3 e satisfaz $V(F - c.G) = \ell.(F - c.G)$. Note que $V = R_3 - \alpha.\partial/\partial z$, onde R_3 é o radial. Como F é homogênea e $G = G(x, y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \ell.(F - c.G) &= V(F - c.G) = R_3(F) - \alpha.F_z - c(xG_x + yG_y) = \\ &= \ell.F - \alpha.F_z - c(xG_x + yG_y) \implies F_{zz} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

As relações em (5.6) implicam que $F(x, y, z) = z.P(x, y) + Q(x, y)$ e $xG_x + yG_y - \ell.G = \beta.P$, onde $\beta = -\alpha/c \neq 0$ e P e Q são homogêneos com $gr(P) = \ell - 1$ e $gr(Q) = \ell$. Escrevendo $G = \sum_{j=0}^{\ell} G_j$, onde G_j é homogêneo de grau j , obtemos da última relação que $G_j = 0$ se $j < \ell - 1$ e $-G_{\ell-1} = \beta.P$. Logo, $G(x, y) = -\beta.P(x, y) + G_{\ell}(x, y)$. Colocando $R(x, y) := -\beta^{-1}.G_{\ell}(x, y)$, obtemos a integral primeira

$\Psi := (z.P(x, y) + Q(x, y)) / (P(x, y) + R(x, y))$, a qual em coordenadas homogêneas se escreve como em (5.5). \square

Corolário 5.2.2. *Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(3, 2)$ uma folheação de Monge-Ampère. Valem as seguintes propriedades :*

- (a). *Se \mathcal{F} possui uma folha não algébrica então $\mathcal{F} \in PBL(3, 2)$.*
- (b). *Se todas as folhas de \mathcal{F} são algébricas e $\mathcal{F} \notin PBL(3, 2)$ então $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(3; 2, 2)$.*

Prova. Suponhamos que $\mathcal{F} \notin PBL(3, 2)$. Neste caso, pelo lema 5.2.2, \mathcal{F} tem uma integral primeira do tipo $\Phi = F/G$, onde $F = z.P(x, y) + Q(x, y)$, $G = w.P(x, y) + R(x, y)$ são irreduzíveis e P, Q, R são polinômios homogêneos com $gr(P) = \ell - 1$ e $gr(Q) = gr(R) = \ell$. Seja Ω uma forma integrável com coeficientes homogêneos de grau 3 que define \mathcal{F} em coordenadas homogêneas. Podemos escrever $F dG - G dF = H.\Omega$, onde H é homogêneo de grau $2\ell - 4$. Afirmamos que H é uma constante e que $\ell = 2$.

Com efeito, caso contrário, escrevamos a decomposição de H em fatores irreduzíveis como $\prod_{i=1}^r h_i^{s_i-1}$, $s_i \geq 2$, $1 \leq i \leq r$. Pela proposição 1.2.4 da seção 1.2, dado $i \in \{1, \dots, r\}$, existe uma fibra $(F - c_i.G = 0)$ tal que $h_i^{s_i}$ divide $F - c_i.G$. Como F e G são irreduzíveis, $c_i \neq 0, \infty$. Logo, $h_i^{s_i} \mid (z - c_i.w)P(x, y) + Q(x, y) - c_i.R(x, y)$. Como $F - c_i.G$ tem grau um com respeito a $t := z - c_i.w$, qualquer fator não trivial de $F - c_i.G$ necessariamente divide $P(x, y)$ e $Q(x, y) - c_i.R(x, y)$ (verifique). Como P e $Q - c_i.R$ são homogêneos, concluímos que $h_i = h_i(x, y) = \alpha.x + \beta.y$, isto é, é linear. Como $h_i^{s_i} \mid P$, $1 \leq i \leq r$, obtemos $\sum_i s_i \leq \ell - 1$. Por outro lado,

$$2\ell - 4 = gr(H) = \sum_i (s_i - 1) = \sum_i s_i - r \leq \ell - 1 - r \implies$$

$\implies r + \ell \leq 3$. Como $\ell \geq 2$ e $r \geq 1$, vem que $r = 1$ e $\ell = 2$. Porém, neste caso, temos $s_1 - 1 = s_1 - r = 2\ell - 4 = 0$, logo $s_1 = 1$, uma contradição. Logo, H é constante e $2\ell - 4 = 0$, ou seja, $\ell = 2$. Portanto, $\phi = F/G$, onde $gr(F) = gr(G) = 2$. Isto implica que $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(3; 2, 2)$. \square

Com isto terminamos a prova do teorema no caso $n = 3$.

Caso $n > 3$. Seja $\mathcal{F} \in \text{Fol}(n, 2)$ uma folheação de Monge-Ampère. Temos duas possibilidades : 1ª. Existe um 3-plano $E \subset \mathbb{P}^n$, em posição geral com \mathcal{F} , tal que $\mathcal{F}|_E$ tem uma integral primeira $\Phi = F/G$ como em (5.5), onde $gr(F) = gr(G) = 2$. Neste caso, pela proposição 3.1.1, Φ pode ser estendida a uma integral primeira $\Psi = f/g$ de \mathcal{F} , onde $gr(f) = gr(g) = 2$ e obtemos que $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(n; 2, 2)$.

2ª. Para todo 3-plano $E \subset \mathbb{P}^n$, em posição geral com \mathcal{F} , a folheação $\mathcal{G}_E = \mathcal{F}|_E$ é um pull-back linear de uma folheação em \mathbb{P}^2 . Neste caso, todas as folhas de \mathcal{G}_E são cônicas com vértice num único ponto $p(E) \in E$. Gostaríamos de observar que esta condição é válida para qualquer 3-plano E transversal a $\text{sing}(\mathcal{F})$, já que se $p \in \text{sing}(\mathcal{F}|_E) \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$ então $\mathcal{F}|_E$ não pode ter integral primeira local com singularidade de Morse em p . Em particular, o conjunto $\{E \in Gr(n, 3) \mid E \text{ está em posição geral com } \mathcal{F}\}$ é aberto e denso em $Gr(n, 3)$.

Lema 5.2.3. *Seja $\mathcal{F} \in \text{Fol}(n, k)$, $k > 0$, uma folheação de Monge-Ampère. Suponha que para todo 3-plano $E \subset \mathbb{P}^n$, em posição geral com \mathcal{F} , a folheação $\mathcal{F}|_E$ é um pull-back linear de uma folheação em \mathbb{P}^2 . Então $\mathcal{F} \in PBL(n, k)$.*

Prova. Provemos o lema para $n = 4$. Fixemos dois hiperplanos distintos de $E, F \subset \mathbb{P}^4$ em posição geral com \mathcal{F} , tais que $p(E) \notin F$. Em coordenadas homogêneas E e F são definidos por $(L = 0)$ e $(M = 0)$, onde L e M são lineares. Coloquemos $E_\lambda := (L + \lambda.M = 0)$ e $E_\infty = F$. Fixemos coordenadas homogêneas $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ tais que $L = x_4$ e $L_1 = x_0$. Na carta afim $\mathbb{C}^4 := (x_0 = 1)$, F é o hiperplano do infinito, $E_\lambda = (x_4 = \lambda)$ e $E_0 = E$. Seja $X := \{\lambda \in \mathbb{P}^1 \mid E_\lambda \text{ está em posição geral com } \mathcal{F}\}$. Pelo que vimos acima, X é aberto e denso em \mathbb{C} . Seja $f: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ definida por $f(\lambda) = p(E_\lambda) \in E_\lambda$. Afirmamos que f é holomorfa em X e se estende a uma função meromorfa em \mathbb{P}^1 .

Com efeito, seja Ω uma forma em \mathbb{C}^5 com coeficientes homogêneos de grau $k+1$ que define \mathcal{F} em coordenadas homogêneas. Se $f(\lambda) \in \mathbb{C}^4$, no ponto $f(\lambda) \in E_\lambda \cap \mathbb{C}^4 = (x_4 = \lambda)$ a forma $\Omega|_{(x_0=1, x_4=\lambda)}$ tem o k -ésimo jato nulo e o $k+1$ -ésimo jato não nulo. Este é o único ponto em $(x_4 = \lambda)$ com esta propriedade. Estamos usando aqui que todas as folhas de $\mathcal{F}|_{E_\lambda}$ são cones com vértice em $f(\lambda)$. Logo, $f(\lambda)$ é definido por $j^k(\Omega_{(x_0=1, x_4=\lambda)}, p) = 0$. Em particular, f é uma

função é algébrica, logo meromorfa em \mathbb{P}^1 . Como $f(0) = p(E) \notin F$ e $f(\infty) = p(F) \in F$, f não é constante. Em particular, o conjunto $Y = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{P}^1\}$ é uma curva algébrica contida em $\text{sing}(\mathcal{F})$. Como Y corta E_λ num único ponto, para todo $\lambda \in X$, obtemos que $gr(Y) = 1$, logo Y é uma reta não contida em F e na carta afim ($x_0 = 1$) temos $f(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), \lambda)$, onde $gr(f_1) = gr(f_2) = gr(f_3) = 1$. Após a mudança de coordenadas afim $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 - f_1(x_4), x_2 - f_2(x_4), x_3 - f_3(x_4), x_4)$, podemos supor que Y é o eixo ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$). Isto implica que $j^k(\Omega|_{(x_0=1, x_4=\lambda)}, (0, 0, 0, \lambda)) = 0$. Por outro lado, podemos escrever $\Omega|_{(x_0=1)} = \omega + x_4 \cdot \alpha + h \cdot dx_4$, onde

$$\omega = \sum_{j=1}^3 \omega_j(x_1, x_2, x_3) dx_j = \Omega|_{(x_0=1, x_4=0)}, \quad \alpha = \sum_{j=1}^3 \alpha_j dx_j, \quad (5.7)$$

$gr(\alpha_j) \leq k$, $1 \leq j \leq 3$, e $gr(h) \leq k+1$. Como $j^k(\Omega|_{(x_0=1, x_4=\lambda)}, f(\lambda)) = \omega + \lambda \cdot \alpha|_{(x_4=\lambda)} = 0$, obtemos que ω é homogênea de grau $k+1$ e $\alpha \equiv 0$, já que $gr(\alpha_j) \leq k$, $1 \leq j \leq 3$. Além disto, $i_R(\omega) = 0$, $i_R(d\omega) = (k+2)\omega$, onde R é o radial em \mathbb{C}^4 , já que ω representa em $\mathbb{C}^3 \simeq E$ uma folheação de \mathbb{P}^2 . Em particular, $\Omega|_{(x_0=1)} = \omega + h \cdot dx_4$. Utilizando a integrabilidade de ω e de $\omega + h \cdot dx_4$, obtemos $(h \cdot d\omega - dh \wedge \omega) \wedge dx_4 = 0$ (verifique). Operando com $i_{\partial/\partial x_4}$ e depois com i_R nesta relação, obtemos

$$h \cdot d\omega - dh \wedge \omega = h_{x_4} \omega \wedge dx_4 \implies ((k+2)h - R(h))\omega = -x_4 \cdot h_{x_4} \cdot \omega \implies$$

$R(h) - x_4 \cdot h_{x_4} = (k+2) \cdot h$. Esta relação implica que h é homogênea de grau $k+2$, como função de (x_1, x_2, x_3) , logo $h = \phi(x_4)$, onde $\phi \in \mathbb{C}[t]$, já que $gr(h) \leq k+1$. Logo, $dh \wedge \omega \wedge dx_4 = 0$, o que implica $h \cdot d\omega \wedge dx_4 = 0$. Como $d\omega \wedge dx_4 \not\equiv 0$, vem que $h \equiv 0$ e $\Omega|_{(x_0=1)} = \omega$, o que prova o lema para $n = 4$.

A idéia da demonstração para $n > 4$ é semelhante. Deixamos esta prova como exercício para o leitor (veja o Ex. 5.7). \square

Concluimos então que :

- (I). Se \mathcal{F} não é de Monge-Ampère então \mathcal{F} está numa das seguintes componentes irredutíveis de $\mathbb{F}ol(n, 2)$: $\mathcal{R}(n; 1, 3)$, $\mathcal{R}(n; 2, 2)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 2)$, $\mathcal{A}f(n; 1, 2, 3; 1, -1)$, $PBL(n, 2)$.

(II). Se \mathcal{F} é de Monge-Ampère então $\mathcal{F} \in PBL(n, 2) \cup \mathcal{R}(n; 2, 2)$.

Isto termina a prova do teorema. \square

Prova do lema 5.2.1. Fixemos uma folha L de \mathcal{F} e $p \in L$. Vamos supor que \bar{L} não é um plano linearmente mergulhado. Seja $(E, (x, y, z) \in \mathbb{C}^3)$ um sistema de coordenadas afins em \mathbb{P}^3 tal que $p = 0 \in \mathbb{C}^3$ e $T_p\mathcal{F} \cap E = (z = 0)$. Neste caso, podemos parametrizar uma vizinhança de $0 = p$ em L como $\psi(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$, onde $\phi(0, 0) = 0$ e $D\phi(0, 0) = 0$. Como L é não planar, temos $\phi \neq 0$ e $D^2\phi \neq 0$. Vamos supor $\phi: B \rightarrow \mathbb{C}$, onde B é uma bola com centro em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Dado $w_o = (x_o, y_o) \in B$, defina a seguinte forma quadrática :

$$Q(w_o)(h, k) := \phi_{xx}(w_o).h^2 + 2\phi_{xy}(w_o).h.k + \phi_{yy}(w_o).k^2. \quad (5.8)$$

Como $T_{q_o}\mathcal{F} \cap E$, $q_o = \psi(w_o)$, é parametrizado por $(h, k) \mapsto q_o + \phi_x(w_o).h + \phi_y(w_o).k$, a condição de que a tangência entre L e $T_{q_o}\mathcal{F}$ seja degenerada em q_o é equivalente a que a forma quadrática em (5.8) seja degenerada, já que $\phi(x_o + h, y_o + h) - (\phi(w_o) + \phi_x(w_o).h + \phi_y(w_o).k) = \frac{1}{2}Q(w_o)(h, k) + O(|(h, k)|^3)$. Portanto, $\phi_{xx}(w_o).\phi_{yy}(w_o) - \phi_{xy}(w_o)^2 = 0$, para todo $w_o \in B$. Em particular ϕ satisfaz à equação de Monge-Ampère, $\phi_{xx}.\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 0$. Como L não é planar, alguma das segundas derivadas parciais de ϕ é não identicamente nula.

Caso (i). $\phi_{xy} \equiv 0$. Neste caso, como $\phi_{xx}.\phi_{yy} = \phi_{xy}^2 \equiv 0$, devemos ter $\phi_{xx} \equiv 0$ ou $\phi_{yy} \equiv 0$. Suponhamos, por exemplo, que $\phi_{yy} \equiv 0$ e $\phi_{xx} \neq 0$. Obtemos então que $\phi(x, y) = a(x) + b.y$, $a \in \mathcal{O}(B)$, $b \in \mathbb{C}$. Portanto, dado $(x_o, y_o, \phi(x_o, y_o)) \in L$, a reta $\gamma_{w_o}(t) := (x_o, y_o + t, a(x_o) + b(y_o + t))$ está contida em L . Logo L é uma superfície regrada. Além disto, as retas da regragem são paralelas neste sistema de coordenadas e se encontram no ponto $q = [0 : 1 : b : 0]$ do plano do infinito. Logo, \bar{L} é um cone sobre q e satisfaz (b) do lema.

Caso (ii). $\phi_{xy} \neq 0$. Neste caso, $\phi_{xx}, \phi_{yy} \neq 0$. Em particular, se $\phi_{xx}(w) \neq 0$ (resp. $\phi_{yy}(w) \neq 0$) então $Q(w)(h, k) = \frac{1}{\phi_{xx}(w)}(\phi_{xx}(w).h + \phi_{xy}(w).k)^2$ (resp. $Q(w)(h, k) = \frac{1}{\phi_{yy}(w)}(\phi_{xy}(w).h + \phi_{yy}(w).k)^2$), como o leitor pode verificar diretamente.

Consideremos a folheação \mathcal{G} de B definida por $d\phi_x = \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy = 0$. Note que \mathcal{G} coincide com a folheação definida por $d\phi_y = \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy = 0$, já que $d\phi_x \wedge d\phi_y \equiv 0$. Em particular, ϕ_x e

ϕ_y são integrais primeiras de \mathcal{G} . Afirmamos que as folhas de \mathcal{G} são segmentos de reta contidos em B .

Com efeito, fixemos um ponto $w_o = (x_o, y_o) \in B$ tal que $\phi_{xy}(w_o) \neq 0$. Neste caso, ou bem $\phi_{xx}(w_o) \neq 0$, ou bem $\phi_{yy}(w_o) \neq 0$. Suponhamos, por exemplo, que $\phi_{yy}(w_o) \neq 0$. A folheação \mathcal{G} é definida numa vizinhança de w_o por $\phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy = 0$, logo a folha de \mathcal{G} que passa por w_o pode ser parametrizada numa vizinhança de w_o por $t \mapsto (t, Y(t))$, onde $Y'(t) = -H(t, Y(t))$, sendo $H = \phi_{xx}/\phi_{xy} = \phi_{xx}/\phi_{yy}$, numa vizinhança de w_o . Daí obtemos

$$Y''(t) = -H_x(t, Y(t)) - H_y(t, Y(t)) \cdot Y'(t) = [-H_x + H_y \cdot H]_{(t, Y(t))} .$$

Por outro lado, com $H = \phi_{xx}/\phi_{yy}$, temos

$$\frac{H_x}{H} = \frac{\phi_{xxy}}{\phi_{xy}} - \frac{\phi_{xyy}}{\phi_{yy}} = \frac{\phi_{xxy}}{\phi_{xy}} - \frac{\phi_{xx} \cdot \phi_{xyy}}{\phi_{xy}^2} = \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \right)_y = H_y . \quad (5.9)$$

Logo, $Y''(t) \equiv 0$, o que implica que a folha de \mathcal{G} por $w_o = (x_o, y_o)$ é um segmento de reta e é parametrizada por $t \mapsto (x_o + t, y_o + a.t)$, $a = -\phi_{xx}(w_o)/\phi_{xy}(w_o)$. Como ϕ_x e ϕ_y são integrais primeiras de \mathcal{G} , as funções $t \mapsto \phi_x(x_o + t, y_o + a.t)$ e $t \mapsto \phi_y(x_o + t, y_o + a.t)$ são constantes, logo

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi(x_o + t, y_o + a.t) = \frac{d}{dt} (\phi_x(x_o + t, y_o + a.t) + a \cdot \phi_y(x_o + t, y_o + a.t)) = 0 .$$

Em particular, $\phi(x_o + t, y_o + a.t) = \phi(x_o, y_o) + b.t$, onde $b \in \mathbb{C}$. Logo a reta $t \mapsto (x_o + t, y_o + a.t, \phi(x_o, y_o) + b.t)$ está inteiramente contida em \bar{L} . Isto prova que L é regradada.

Provemos que se \bar{L} não é o plano $T_p\mathcal{F}$ então satisfaz (b) ou (c). Fixemos um ponto $w_o = (x_o, y_o) \in B$ tal que a folha de \mathcal{G} por w_o corta transversalmente o eixo ($x = x_o$), por exemplo. Neste caso, a folha de \mathcal{G} que passa por (x_o, y) é a reta parametrizada $\gamma_y(t) = (x_o + t, y - H(x_o, y) \cdot t)$, onde $H = \phi_{xx}/\phi_{xy} = \phi_{xy}/\phi_{yy}$. Vamos considerar dois sub-casos :

Caso (ii.1). Todas as retas $\gamma_y \subset T_p\mathcal{F}$, se encontram num mesmo ponto $q \in T_p\mathcal{F}$. Vamos analisar o caso em que $q = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ e deixar para o leitor o caso em que q está na reta do infinito de $T_p\mathcal{F}$. Como as retas γ_y , se encontram no ponto (a, b) , para y fixo, existe

$t \in \mathbb{C}$ tal que $x_o + t = a$ e $y - H(x_o, y).t = b$. Eliminando t , obtemos $H(x_o, y) = -(y - b)/(x_o - a)$, ou seja $H(x, y) \equiv -(y - b)/(x - a)$. Afirmamos que a função $h: B \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(x, y) = \phi(x, y) - (x - a).\phi_x(x, y) - (y - b).\phi_y(x, y)$$

é constante. Com efeito,

$$h_x(x, y) = -(x - a).\phi_{xx}(x, y) - (y - b).\phi_{xy}(x, y) = 0 ,$$

já que $H = \phi_{xx}/\phi_{xy} = -(y - b)/(x - a)$. Analogamente, $h_y(x, y) \equiv 0$. Logo h é constante. Coloquemos $h(x, y) := c \in \mathbb{C}$. Ora, no lema 5.2.1, obtivemos a seguinte reta contida na folha $L : \delta_w(s) = (x + s, y - H(w).s, \phi(w) + \phi_x(w).s - H(w).\phi_y(w).s)$. Fazendo $s = a - x$ obtemos $\delta_w(a - x) = (a, b, c)$, como o leitor pode verificar. Logo \bar{L} é um cone sobre $q = (a, b, c)$.

Caso (ii.2). As retas γ_y não se encontram num mesmo ponto de $T_p\mathcal{F}$. Neste caso, duas retas distintas γ_y e γ_{y_1} se encontram em $\gamma_y(t(y, y_1))$, onde $t(y, y_1) = (y_1 - y)/(H(x_o, y_1) - H(x_o, y))$. Tomando o limite $\lim_{y_1 \rightarrow y} t(y, y_1) = 1/H_y(x_o, y) := \tau(y)$, obtemos o ponto

$$W(y) := \gamma_y(\tau(y)) = (x_o + \tau(y), y - H(x_o, y).\tau(y)) := (X(y), Y(y)) .$$

Este ponto está bem definido para todo y tal que $H_y(x_o, y) \neq 0$. Afirmamos que $H_y \neq 0$.

De fato, se $H_y \equiv 0$ temos $H(x, y) = h(x)$. Por outro lado, (5.9) implica que $h'(x)/h(x) = H_y = 0$, logo $H = a$ é uma constante e $\gamma_y(t) = (x_o + t, y - a.t)$, logo todas as retas γ_y se encontram num ponto na reta do infinito de T_pL , o que foi excluído.

A curva $s \mapsto W(s)$ é uma parametrização local da envoltória da família de retas integrais da folheação \mathcal{G} . Coloquemos

$$Z(s) = \phi(x_o, s) + \phi_x(x_o, s).\tau(s) - H(x_o, s).\phi_y(x_o, s).\tau(s) .$$

Levando em conta que a reta $\delta_w(t) = (x + t, y - H(w).t, \phi(w) + \phi_x(w).t - H(w).\phi_y(w).t)$ está contida em \bar{L} , obtemos a curva parametrizada $\Gamma(s) := (X(s), Y(s), Z(s))$ contida em \bar{L} . Consideremos a superfície parametrizada $S(s, t) := \Gamma(s) + \Gamma'(s).t$. Esta é a superfície regrada de retas tangentes a Γ . Afirmamos que $S \subset \bar{L}$.

Para provar este fato, é suficiente demonstrar que, para s fixo, as retas $\delta_{(x_o, s)}$ e $\mu_s(t) = \Gamma(s) + \Gamma'(s).t$ coincidem. Como ambas as retas passam pelo ponto $\Gamma(s)$, é suficiente provar que as suas direções coincidem. A direção de $\delta_{(x_o, s)}$ é a do vetor $v(s) = (1, -H(x_o, s), \phi_x(x_o, s) - H(x_o, s).\phi_y(x_o, s))$. Por outro lado, a direção de μ_s é dada por $\Gamma'(s)$. Calculando explicitamente, obtemos $\Gamma'(s) = -\frac{H_{yy}}{H_y}.v|_{(x_o, s)}$, o que implica a afirmação. Deixamos este último cálculo como exercício para o leitor.

Em seguida provaremos que $\Gamma \subset \text{sing}(\mathcal{F})$. Isto implicará que Γ é algébrica. A curva Γ não é planar, pois caso contrário S estaria contida num plano e \bar{L} seria este plano. Isto implica que $V(s) := \Gamma'(s) \wedge \Gamma''(s) \wedge \Gamma'''(s) \neq 0$ (veja o Ex. 5.8). Fixemos s_o tal que $V(s_o) \neq 0$ e coloquemos $q_o = S(s_o, 0) = \Gamma(s_o)$. Se $t \neq 0$ e $V(s) \neq 0$ então $S_s(s, t) = \Gamma'(s) + t.\Gamma''(s)$ e $S_t(s, t) = \Gamma'(s)$, logo $T_{S(s, t)}L = \langle \Gamma'(s), \Gamma''(s) \rangle$.

Sejam $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, um sistema de coordenadas afim, tal que $z(q_o) = 0$, e $\omega = \sum_{j=1}^3 A(z) dz_j$ uma 1-forma holomorfa que representa \mathcal{F} numa vizinhança de $q_o = 0$. Como $T_{S(s, t)}L$ é gerado por $\Gamma'(s)$ e $\Gamma''(s)$, temos

$$\begin{cases} \omega(S(s, t)).\Gamma'(s) \equiv 0 \implies \omega(q_o).\Gamma'(s_o) = 0 \\ \omega(S(s, t)).\Gamma''(s) \equiv 0 \implies \omega(q_o).\Gamma''(s_o) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Vamos provar que $\omega(q_o).\Gamma'''(s_o) = 0$. Como $V(s_o) \neq 0$, os vetores $\Gamma'(s_o)$, $\Gamma''(s_o)$ e $\Gamma'''(s_o)$ são linearmente independentes, o que implicará $\omega(q_o) = 0$, ou seja, $q_o \in \text{sing}(\mathcal{F})$.

Derivando a segunda relação em (5.10) com respeito a t e a s em $s = s_o$, $t = 0$, temos respectivamente,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 (DA_j(q_o).\Gamma'_j(s_o)).\Gamma''_j(s_o) = 0 \\ \omega(q_o).\Gamma'''(s_o) + \sum_{j=1}^3 (DA_j(q_o).\Gamma'_j(s_o)).\Gamma''_j(s_o) = 0 \end{cases}$$

Logo, $\omega(q_o).\Gamma'''(s_o) = 0$, como queríamos. Portanto $\Gamma \subset \text{sing}(\mathcal{F})$. Como Γ é algébrica, a superfície gerada por suas tangentes também é algébrica, o que prova o lema. \square

5.3 Exercícios.

Ex. 5.1. Prove que $\dim(\mathcal{R}(n; 1, 2)) = n^2 + n - 2$ e que $\dim(\mathcal{L}(n; 1, 1, 1)) = 3n + 2$.

Ex. 5.2. Prove que uma folheação de codimensão um de \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, que possui uma infinidade de folhas de grau um, possui uma integral primeira meromorfa do tipo P/Q , onde $gr(P) = gr(Q) = 1$.

Ex. 5.3. Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(3, k)$ uma folheação que possui uma infinidade de folhas regradas que são cones sobre um mesmo ponto $q \in \mathbb{P}^3$. Prove que $\mathcal{F} \in PBL(3, k)$.

Ex. 5.4. Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(3, 2)$ uma folheação de Monge-Ampère. Prove que \mathcal{F} tem uma integral primeira meromorfa Φ , a qual pode ser escrita em algum sistema de coordenadas homogêneo como

$$\Phi(x, y, z, w) = \frac{yz}{wy - x^2}.$$

Conclua que $\mathcal{F} \in \mathcal{R}(3; 2, 2) \cap \mathcal{L}(3; 1, 1, 2)$.

Ex. 5.5. Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M^n . Suponha que existe uma 1-forma meromorfa fechada ω que define \mathcal{F} fora de $|\omega|_\infty \cup |\omega|_0$. Prove que as componentes irredutíveis de $(\omega)_0$ e de $(\omega)_\infty$ são invariantes por \mathcal{F} .

Ex. 5.6. Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, 2)$, $n > 3$. Suponha que existe um 2-plano $E \subset \mathbb{P}^n$, em posição geral com \mathcal{F} , tal que $\mathcal{F}|_E$ tem um centro num ponto $p \in E \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$. Prove que \mathcal{F} , está em alguma das componentes $PBL(n, 2)$, $\mathcal{R}(n; 1, 3)$, $\mathcal{R}(n; 2, 2)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{L}(n; 1, 1, 1, 2)$, $\mathcal{A}f(n; 1, 2, 3; 1, -1)$.

Ex. 5.7. Demonstre o lema 5.2.3 no caso $n > 4$.

Ex. 5.8. Seja $\Gamma: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^3$ um germe de curva holomorfa não constante. Prove que :

- (a). Se $\Gamma' \wedge \Gamma'' \equiv 0$ então Γ está contida numa reta de \mathbb{C}^3 .
- (b). Prove que se $\Gamma' \wedge \Gamma'' \wedge \Gamma''' \equiv 0$ então Γ está contida num plano de \mathbb{C}^3 .

Capítulo 6

Problemas e conjecturas.

O objetivo deste capítulo é apresentar outros aspectos do problema da classificação das componentes irredutíveis dos espaços de folheações de codimensão um. Na seção 6.1 estabeleceremos uma relação com o problema do centro, apresentando alguns aspectos deste último. Na seção 6.2, introduziremos as seqüências de Godbillon-Vey associadas a uma folheação e veremos uma caracterização no caso em que a folheação admite uma seqüência finita. Aproveitaremos para enunciar alguns problemas e conjecturas motivadas pelos resultados. Gostaria de agradecer a Hossein Movasati por ter contribuído de maneira essencial na elaboração da seção 6.1.

6.1 O problema do centro.

Num espaço projetivo de dimensão maior ou igual a três, a condição de integrabilidade implica que o espaço das folheações de codimensão um possui várias componentes irredutíveis. Em dimensão dois, tal condição é sempre satisfeita, e como conseqüência o espaço das folheações de codimensão um de um determinado grau, é irredutível. Mesmo assim, nesse caso, um problema similar, o qual foi provavelmente enunciado por Poincaré, é o problema do centro. Nesta seção pre-

tendemos apresentar este problema e enunciar alguns resultados conhecidos.

6.1.1 A variedade das folheações com um centro.

Diremos que uma folheação singular \mathcal{F} em \mathbb{RP}^2 é algébrica, se ela é definida em cartas afins por um campo polinomial. Diremos que \mathcal{F} tem um centro em $p \in \mathbb{RP}^2$, se $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ e numa carta afim $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$, tal que $p = 0 \in \mathbb{R}^2$, ela é representada por um campo de vetores polinomial X , cujas trajetórias numa vizinhança de p , são homeomorfas a círculos que contêm p em seu interior. Diremos que o centro é de Morse, se p é uma singularidade não degenerada de X e X possui uma integral primeira analítica local com uma singularidade de Morse em p . No caso de folheações complexas, a definição de centro de Morse é similar.

Observação 6.1.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica que possui uma singularidade de Morse em $p \in U$. É conhecido que, neste caso, existe um sistema de coordenadas analítico $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, numa vizinhança de p , tal que $x(p) = y(p) = 0$ e $f(x, y) = f(p) + x^2 \pm y^2$. Em particular, a folheação dada por $df = 0$, tem um centro de Morse se, e somente se, $f(x, y) = f(p) + x^2 + y^2$. No caso em que o centro p de uma folheação \mathcal{F} não é de Morse, em geral \mathcal{F} não possui integral primeira analítica numa vizinhança de p (veja [Ce-LN-Be]).

O problema do centro, para folheações algébricas em \mathbb{RP}^2 , pode ser enunciado da seguinte forma :

Problema 1. *Classificar os centros das folheações algébricas de \mathbb{RP}^2 .*

Este problema nos parece muito difícil. No entanto, se restringirmos aos centros de Morse, temos uma simplificação. Como a folheação é algébrica, podemos considerar a sua extensão analítica de \mathbb{RP}^2 a \mathbb{P}^2 , que consiste simplesmente em considerar as equações polinomiais em cartas afins \mathbb{R}^2 , como equações em \mathbb{C}^2 . Esta extensão, define uma folheação em $\text{Fol}(2, k)$, para algum $k \geq 1$. Um centro de Morse em \mathbb{RP}^2 vai originar um centro de Morse em \mathbb{P}^2 , como foi definido no capítulo anterior. Denotemos por $\mathbb{F}_c(2, k)$ o fecho do conjunto das folheações em $\text{Fol}(2, k)$ que possuem um centro de Morse.

Exemplo 6.1.1. Uma folheação $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, 1)$ possui um centro de Morse se, e somente se, possui uma integral primeira meromorfa Φ , a qual em algum sistema de coordenadas afim, pode ser escrita como $\Phi(x, y) = x.y$. Deixamos a prova como exercício para o leitor (veja o Ex. 6.1).

Como vimos no capítulo anterior, $\mathbb{F}_c(2, 2)$ foi estudada, num caso particular, por Dulac em [D]. A simplificação que mencionamos, é a seguinte :

Teorema 8. *Para todo $k \geq 1$, $\mathbb{F}_c(2, k)$ é um sub-conjunto algébrico de $\mathbb{F}ol(2, k)$.*

Prova. Notamos primeiramente, que $\mathbb{F}_c(2, k)$ é invariante por $Aut(\mathbb{P}^2)$, isto é, se $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_c(2, k)$ e $\phi \in Aut(\mathbb{P}^2)$ então $\phi^*(\mathcal{F}) \in \mathbb{F}_c(2, k)$. Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_c(2, k)$ que possui um centro de Morse $p \in \mathbb{P}^2$. Seja $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ uma carta afim tal que $p = 0 \in \mathbb{C}^2$. Podemos representar \mathcal{F} nesta carta por um campo de vetores polinomial $X = X_1 + \dots + X_k + X_{k+1}$, onde X_j é homogêneo de grau j , $1 \leq j \leq k$, e $X_{k+1} = g.R$, sendo g um polinômio homogêneo de grau k e R o radial. A idéia é demonstrar que a condição de que X possui um centro de Morse em 0 implica que os seus coeficientes satisfazem um sistema de equações algébricas. Seja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma integral primeira holomorfa de X , onde $0 \in U \subset \mathbb{C}^2$ é um aberto e 0 é singularidade de Morse de f . A série de Taylor de f em 0 é da forma $f = \sum_{j=2}^{\infty} f_j$, onde f_j é homogêneo de grau j , $j \geq 2$, e $f_2(x, y)$ é uma forma quadrática não degenerada. Após uma mudança linear de coordenadas, podemos supor que $f_2(x, y) = x.y$. Como f é integral primeira de X temos $X(f) = 0$. Expandindo esta relação em série de Taylor, temos

$$0 = X(f) = \sum_{i \geq 1, j \geq 2} X_i(f_j) = \sum_{r=3}^{\infty} \left(\sum_{i+j=r} X_i(f_j) \right)$$

Na expansão acima, levamos em conta que $X_i(f_j)$ é um polinômio homogêneo de grau $i + j - 1$ (verifique). Ela implica que

$$\sum_{i+j=r} X_i(f_j) = 0, \quad \forall r \geq 3. \quad (6.1)$$

Para $r = 3$ obtemos $X_1(x.y) = 0$. Como 0 é singularidade não degenerada de X , obtemos $X_1 = a(x\partial/\partial x - y\partial/\partial y)$, $a \neq 0$ (verifique). Dividindo X por a , podemos supor que $X_1 = x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$. Denotemos por $\mathbb{F}_o(2, k)$ o conjunto dos campos polinomiais $X = X_1 + \dots + X_k + g.R$ tais que $X_1 = x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$ e por $\tilde{\mathbb{F}}_c(2, k) = \{X \in \mathbb{F}_o(2, k) \mid X \text{ possui um centro de Morse em } 0\}$. Vamos provar que $\tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$ é uma sub-variedade algébrica de $\mathbb{F}_o(2, k)$. Isto implicará que $\mathbb{F}_c(2, k)$ é algébrico.

Podemos reescrever (6.1) como

$$X_1(f_r) = - \sum_{i+j=r+1} X_i(f_j), \quad \forall r \geq 2. \quad (6.2)$$

Estas relações sugerem que podemos determinar indutivamente f_r , se conhecemos f_2, \dots, f_{r-1} . Denotemos por \mathcal{P}_n o conjunto de polinômios homogêneos de grau n em duas variáveis. O campo linear X_1 induz um operador linear em $L_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ dada pela derivação $g \in \mathcal{P}_n \mapsto L_n(g) := X_1(g) \in \mathcal{P}_n$.

Lema 6.1.1. *Se n é ímpar então $L_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ é um isomorfismo. Se $n = 2m$, é par, então $\ker(L_n) = \mathbb{C}.(x.y)^m$. Além disto, $\text{Im}(L_{2m}) = \langle x^i.y^j \mid i, j \neq m \rangle$.*

Prova. Note $X_1(x^i.y^j) = (i-j)x^i.y^j$. Logo, o conjunto de monômios $\mathcal{M}_n = \{x^i.y^j \mid i+j = n\}$ é uma base de auto-vetores para L_n . Se n é ímpar então $i-j \neq 0$ para todo i, j com $i+j = n$. Por outro lado, se $n = 2m$ e $i+j = 2m$ então $i-j = 0$ se, e somente se, $i = j = m$. Isto prova o lema. \square

Voltando ao sistema (6.2), podemos determinar f_r conhecendo f_2, \dots, f_{r-1} , sempre que r seja ímpar. Em particular, podemos determinar f_3 por $X_1(f_3) = -X_2(x.y)$, obtendo $f_3(x, y) = L_3^{-1}(-X_2(x.y)) := F_3(x, y, X_2)$. Nesta notação estamos indicando que f_3 é um polinômio em (x, y) , cujos coeficientes são polinômios dos coeficientes de X_2 . Ao tentarmos determinar f_4 , obtemos

$$L_4(f_4) = X_1(f_4) = -X_2(F_3(x, y, X_2)) - X_3(x.y) := F_4(x, y, X_2, X_3),$$

onde $F_4(x, y, X_2, X_3) = \sum_{i+j=4} P_{ij}(X_2, X_3)x^i.y^j$, sendo $P_{ij}(X_2, X_3)$ um polinômio nos coeficientes de X_2 e X_3 . Se f é integral primeira de X então a equação linear acima tem solução, o que acarreta

$P_{22}(X_2, X_3) = 0$, pelo lema 6.1.1. Esta é a primeira equação que define a variedade $\tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$. Em seguida, pelo lema 6.1.1, podemos determinar $f_5(x, y) = F_5(x, y, X_2, X_3, X_4) = L_5^{-1}(-X_2(F_4) - X_3(F_3) - X_4(x.y))$. Ao escrevermos a sexta equação, de maneira análoga, obtemos $L_6(f_6) = X_1(f_6) = \sum_{i+j=6} P_{ij}(X_2, X_3, X_4, X_5)x^i.y^j$, a qual tem solução se, e somente se, $P_{33}(X_2, \dots, X_5) = 0$. Esta é a segunda equação da variedade $\tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$. Prosseguindo indutivamente com este processo, para todo $n = 2m$, par, obtemos um polinômio $P_{mm}(X_2, \dots, X_{2m-1})$ tal que a equação em (6.2) tem solução se, e somente se, $P_{mm}(X_2, \dots, X_{2m-1}) = 0$. Obtemos então a m -ésima equação algébrica de $\tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$. Levando em conta que $X_j = 0$ para $j > k + 2$, vemos que se $X \in \tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$ então os coeficientes de $X_2, \dots, g.R$ satisfazem a todas as equações $P_{mm}(X_2, \dots, g.R) = 0$, $m \geq 2$. Seja \mathcal{I}_c o ideal de $\mathbb{F}_o(2, k)$ gerado pelos polinômios P_{mm} , $m \geq 2$. Como o anel de polinômios é Noetheriano, este ideal é finitamente gerado, logo $\mathcal{V}(\mathcal{I}_c) = \{X \mid P_{mm}(X) = 0, m \geq 2\}$ é um subconjunto algébrico de $\mathbb{F}_o(2, k)$. Isto prova que $\mathcal{V}(\mathcal{I}_c) \supset \tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$. Para provar a igualdade, é necessário provar que todo $X \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_c)$ possui uma integral primeira local em $0 \in \mathbb{C}^2$.

Seja $X \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_c)$. Neste caso, podemos resolver todas as equações em (6.1) e obtemos uma série formal $f = x.y + \sum_{j \geq 3} f_j$ tal que $X(f) = 0$. Em geral, esta série não converge. No entanto, podemos utilizar o seguinte resultado devido a J. F. Mattei e R. Moussu :

Teorema 6.1. *Seja $X = \sum_{j \geq \ell} X_j$ um germe de campo de vetores holomorfo em $0 \in \mathbb{C}^2$ com singularidade isolada em 0. Se existe uma série formal $f = \sum_{j \geq r} f_j$ tal que $X(f) = 0$ então X possui uma integral primeira holomorfa não constante $g = \sum_{j \geq r} g_j$ numa vizinhança de 0 tal que $g_r = f_r$.*

Não provaremos o resultado acima. Para o leitor curioso indicamos a referência [Ma-Mo]. Este resultado implica que se $X \in \mathcal{V}(\mathcal{I}_c)$ então $X \in \tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$. Logo $\mathcal{V}(\mathcal{I}_c) = \tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$, o que prova o teorema 8. \square

Em seguida enunciaremos, sem provar, alguns resultados conhecidos sobre as componentes irredutíveis de $\tilde{\mathbb{F}}_c(2, k)$. Assim como no caso das folheações de codimensão um em dimensão maior que três, temos componentes do tipo racional e logarítmico. Como no caso de dimensão maior, definimos $\mathcal{R}(2; p, q)$ como o fecho do conjunto

das folheações de \mathbb{P}^2 que possuem uma integral primeira do tipo F^p/G^q , onde $gr(F) = q$ e $gr(G) = q$. Análogamente, definimos $\mathcal{L}(2; p_1, \dots, p_r)$, $r \geq 3$, como o fecho das folheações em \mathbb{P}^2 que podem ser representadas por uma forma logarítmica do tipo $\sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$, $gr(f_j) = p_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$, $1 \leq j \leq r$, e $\sum_j \lambda_j \cdot gr(f_j) = 0$.

Teorema 6.2. *Para todo $p, q \in \mathbb{N}$ com $d = p + q - 2$ e $(p, q) \neq (2, 2)$, o conjunto $\mathcal{R}(2, p, q)$ é uma componente de $\mathbb{F}_c(2, d)$.*

No caso $\mathcal{R}(2, 1, d + 1)$ podemos assumir que $G = 0$ é a linha no infinito de uma carta afim $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$. Nesta carta afim a integral primeira é o polinômio $f := F|_{G=1}$ que tem grau $d + 1$. Esse caso foi provado por Ilyashenko em [II]. Generalizando o argumento de Ilyashenko, a demonstração do caso geral, $\mathcal{R}(2; p, q)$, foi feita nas referências [Mo] e [Mo1].

Teorema 6.3. *Para todo $r \geq 2$ e toda r -upla $(1, p_2, \dots, p_r)$, onde $p_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$ e $d := \sum_{j=2}^r p_j - 1 \geq 2$, $\mathcal{L}(2; 1, p_2, \dots, p_r)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}_c(2, d)$.*

A prova do resultado acima pode ser encontrada em [Mo2]. Gostaria de mencionar que o autor, em conversa privada, me disse que possivelmente, com técnicas semelhantes, mas com algumas dificuldades técnicas, pode ser provado que $\mathcal{L}(2; p_1, \dots, p_r)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}_c(2, d)$, $d = \sum_j p_j - 2$.

Outro resultado, que já foi mencionado no capítulo anterior, é o teorema de Dulac (teorema 5.1), o qual, juntamente com o teorema 5.2, dá uma classificação das componentes irredutíveis de $\mathbb{F}_c(2, 2)$. Motivados pelo método da prova do teorema 7, veremos um método de produzir centros de Morse à partir de folheações de codimensão um em dimensão maior que dois. Seja $\mathcal{F} \in \text{Fol}(n, d)$, $n \geq 3$, $d \geq 2$. Suponhamos que \mathcal{F} não é de Monge-Ampère. Neste caso, para todo mergulho linear $\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$, em posição geral com \mathcal{F} , o 2-plano $\phi(\mathbb{P}^2)$ possui uma tangência de Morse com \mathcal{F} , num certo ponto $p \in \phi(\mathbb{P}^2)$. Em particular, a folheação $\phi^*(\mathcal{F})$ possui um centro em $q = \phi^{-1}(p)$, logo $\phi^*(\mathcal{F}) \in \mathbb{F}_c(2, d)$. Seja \mathcal{I} a componente irredutível de $\text{Fol}(n, d)$ que contém \mathcal{F} . Seja $\mathcal{I}_c(2, \mathcal{I})$ o fecho em $\text{Fol}(2, d)$ do conjunto das folheações da forma $\phi^*(\mathcal{G})$, onde $\mathcal{G} \in \mathcal{I}$ e $\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$ é um mergulho linear. Claramente $\mathcal{I}_c(2, \mathcal{I})$ é um sub-conjunto algébrico de $\mathbb{F}_c(2, d)$.

Conjectura 1. *Para toda componente \mathcal{I} de $\mathbb{F}ol(n, d)$, $\mathcal{I}_c(2, \mathcal{I})$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}_c(2, d)$.*

A conjectura 1 é verdadeira nos seguintes casos : componentes racionais, logarítmicas, $d = 1$ e $d = 2$. Neste último caso ela decorre da classificação de Dulac. Para as componentes do tipo pull-back, este problema só se coloca no caso dos pull-back não lineares, uma vez que os lineares são Monge-Ampère. Neste caso, no entanto, o problema pode ser reformulado da seguinte maneira : se $\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$ é um mergulho linear e $\Phi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma aplicação racional de grau $k \geq 2$ então $\Phi \circ \phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma aplicação racional de grau k . Se \mathcal{I} é a componente do tipo pull-back não linear, podemos identificar $\mathcal{I}_c(2, \mathcal{I})$ com o fecho do conjunto $\{\mathcal{G} \in \mathbb{F}ol(2, d) \mid \mathcal{G} = \psi^*(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(2, r) \text{ e } \psi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \text{ é racional de grau } k\}$.

Outro problema que se coloca, uma espécie de recíproca da conjectura 1, é o seguinte :

Problema 2. *Dada $\mathcal{G} \in \mathbb{F}_c(2, d)$, existe uma folheação $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(n, d)$ com $n \geq 3$, não Monge-Ampère, tal que $\mathcal{G} = \phi^*(\mathcal{F})$ para algum mergulho linear $\phi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$?*

Novamente, a resposta é positiva para as folheações do tipo racional e logarítmico. Para encerrar esta seção, enunciaremos uma conjectura sugerida por H. Movasati.

Conjectura 2. *Qualquer componente de $\mathbb{F}ol(n, d)$, ou de $\mathbb{F}_c(2, d)$, possui um elemento \mathcal{F} tal que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$ e \mathcal{F} possui uma integral primeira meromorfa não constante.*

Para todas as componentes conhecidas, em ambos os casos, a conjectura 2 é verdadeira.

6.2 Seqüências de Godbillon-Vey.

Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade algébrica M de dimensão $n \geq 2$, $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Neste caso, existe uma 1-forma meromorfa $\omega \neq 0$, tangente a \mathcal{F} (veja o Ex. 6.2). A forma ω é integrável. Além disto, se ω_1 é uma outra 1-forma meromorfa tangente a \mathcal{F} então $\omega_1 = f\omega$, onde f é meromorfa em M . Vamos

denotar por $\mathcal{M}(M)$ o conjunto de funções meromorfas de M e por $\mathcal{M}^*(M)$ as meromorfas não identicamente nulas.

Definição 6.2.1. Diremos que uma seqüência $(\omega_j)_{j \geq 0}$ de formas meromorfas em M é uma *seqüência de Godbillon-Vey* associada a ω , se $\omega_0 = \omega$ e a 1-forma Ω , definida pela série formal em $M \times \mathbb{C}$,

$$\Omega := dz + \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \omega_k \quad (6.3)$$

é integrável, isto é, $\Omega \wedge d\Omega = 0$. O comprimento da seqüência é o menor $N \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ tal que $\omega_k = 0$ para todo $k \geq N + 1$.

Observe que $\Omega|_{z=0} = \omega$. Em particular, se a série Ω converge então ela define uma folheação \mathcal{G} em $M \times \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{G}|_{(z=0)} = \mathcal{F}$. Diremos também que $(\omega_k)_{k \geq 0}$ é uma *seqüência de G.V associada* à folheação \mathcal{F} .

A condição de integrabilidade de Ω é equivalente à seguinte :

$$d\omega_k = \omega_0 \wedge \omega_{k+1} + \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} \omega_\ell \wedge \omega_{k+1-\ell}, \quad k \geq 0. \quad (6.4)$$

As relações em (6.4) podem ser obtidas efetuando o produto exterior formal das séries em z de Ω e $d\Omega$. Deixamos este cálculo como exercício para o leitor (veja o Ex. 6.3).

Observação 6.2.1. Seja N o comprimento da seqüência de G.V (6.3). Segue de (6.4) que :

- (a). Se $N = 0$ então a forma ω é fechada.
- (b). Se $N = 1$ então $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1$ e $d\omega_1 = 0$. Em particular, \mathcal{F} tem uma estrutura transversal afim com polos num sub-conjunto analítico de codimensão um de M (veja a proposição 1.5.2 do capítulo 1).
- (c). Se $N = 2$ então $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1$, $d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2$ e $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$, como o leitor pode verificar. Em particular, pelo teorema 1.15 do capítulo 1, \mathcal{F} tem uma estrutura transversal projetiva com polos num conjunto analítico de codimensão um.

Observação 6.2.2. Seja ω uma 1-forma meromorfa integrável em M com folheação associada \mathcal{F} e uma seqüência de G.V $(\omega_k)_{k \geq 0}$. Se $f \in \mathcal{M}^*(M)$ podemos definir $\Phi: M \times \mathbb{C}^- \rightarrow M \times \mathbb{C}$ por $\Phi(p, z) = (p, f(p).z)$. Neste caso,

$$\frac{1}{f}\Phi^*(\Omega) = dz + \frac{1}{f}\omega_0 + z\left(\omega_1 + \frac{df}{f}\right) + \sum_{k \geq 2} \frac{z^k}{k!}(f^{k-1}.\omega_k).$$

Em particular, obtivemos outra seqüência de G.V associada a \mathcal{F} , $(\tilde{\omega}_k)_{k \geq 0}$, onde $\tilde{\omega}_0 = f^{-1}.\omega_0$, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + \frac{df}{f}$ e $\tilde{\omega}_k = f^{k-1}.\omega_k$, se $k \geq 2$.

Mais geralmente, podemos obter outras seqüências de G.V associadas a \mathcal{F} , operando com transformações definidas por séries formais do tipo $\Phi(p, z) = (p, \sum_{j=1}^{\infty} f_j(p).z^j)$, onde $f_1 \in \mathcal{M}^*(M)$ (veja o Ex. 6.4). É possível provar que duas seqüências associadas à mesma folheação diferem por uma transformação formal deste tipo.

Proposição 6.2.1. *Seja M é uma variedade algébrica com $\dim(M) = n \geq 2$. Se $\omega \neq 0$ é uma 1-forma meromorfa integrável em M então existe uma seqüência de Godbillon-Vey para ω .*

Prova. Como M é algébrica, ela é pseudo-paralelizável, isto é, existem n campos de vetores meromorfos em M , digamos Y_1, \dots, Y_n , tais que o conjunto $U = \{p \in M \setminus \cup_j |Y_j|_{\infty} \mid Y_1(p) \wedge \dots \wedge Y_n(p) \neq 0\}$ é aberto e denso em M . Este é um fato bem conhecido, cuja prova deixamos como exercício para o leitor (veja o Ex. 6.5). Em particular, como $\dim(M) \geq 2$ e $\omega \neq 0$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f := i_{Y_j}(\omega) \neq 0$. Em particular, a função f é meromorfa em M e se $Y := \frac{1}{f}Y_j$, então $i_Y(\omega) = 1$. O campo Y é meromorfo em M , logo podemos definir uma seqüência de 1-formas meromorfas indutivamente por $\omega_0 := \omega$ e $\omega_{k+1} := L_Y(\omega_k)$, $k \geq 0$. Como $\omega = \omega_0$ é integrável, temos

$$0 = i_Y(\omega_0 \wedge d\omega_0) = d\omega_0 - \omega_0 \wedge i_Y(d\omega_0) \implies d\omega_0 = \omega_0 \wedge i_Y(d\omega_0).$$

Por outro lado, $\omega_1 = L_Y(\omega_0) = i_Y(d\omega_0) + d(i_Y(\omega_0)) = i_Y(d\omega_0)$, logo $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1$. Suponhamos que a relação (6.4) seja verdadeira para $k \geq 0$ e provemos que ela é verdadeira para $k+1$. Lembrando que $L_Y \circ d = d \circ L_Y$, temos: $d\omega_{k+1} = d(L_Y(\omega_k)) = L_Y(d\omega_k) =$

$$= L_Y[\omega_0 \wedge \omega_{k+1} + \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} \omega_{\ell} \wedge \omega_{k+1-\ell}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_1 \wedge \omega_{k+1} + \omega_0 \wedge \omega_{k+2} + \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (\omega_{\ell+1} \wedge \omega_{k+1-\ell} + \omega_{\ell} \wedge \omega_{k+2-\ell}) = \\
&= \omega_0 \wedge \omega_{k+2} + \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \omega_{\ell} \wedge \omega_{k+2-\ell},
\end{aligned}$$

como o leitor pode verificar, utilizando que $\binom{k}{\ell-1} + \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell}$. \square

Estudaremos a seguir o caso de uma folheação holomorfa de codimensão um que admite uma seqüência de Godbillon-Vey finita.

Exemplo 6.2.1. Sejam S uma superfície de Riemann compacta e $\alpha_0, \dots, \alpha_N, \alpha_N \neq 0$, 1-formas meromorfas em S . A 1-forma ω em $S \times \mathbb{C}$ dada por $\omega = dz + \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \alpha_k$ é integrável e define uma folheação de codimensão um em $S \times \mathbb{C}$. Note que ω se estende meromorficamente a $S \times \mathbb{P}^1$. Com efeito, fazendo a mudança de coordenadas $z = 1/u$ em, temos $\omega = -\frac{du}{u^2} + \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!u^k} \alpha_k$, a qual é meromorfa numa vizinhança de $(u = 0)$. Logo, ω define uma folheação \mathcal{F} em $S \times \mathbb{P}^1$. A forma ω admite uma seqüência de G.V finita de comprimento N . De fato, como $i_{\partial/\partial z} \omega = 1$, definindo $\omega_k := L_{\partial/\partial z}^{(k)}(\omega)$, obtemos esta seqüência. Um cálculo direto mostra que $\omega_k = \sum_{j=0}^{N-k} \frac{z^j}{j!} \alpha_{j+k}$, se $k \leq N$, e $\omega_k = 0$ se $k \geq N+1$ (verifique). Neste caso, temos também

$$\Omega = dt + \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} \omega_k = d(t+z) + \sum_{k=0}^N \frac{(t+z)^k}{k!} \alpha_k.$$

O teorema seguinte é uma generalização de um resultado devido a C. Camacho e B. Scárdua (veja [Ca-Sc]). A prova original do mesmo foi dada em [Ce-LN-Lo-Pe-Tou].

Teorema 9. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa compacta M de dimensão $n \geq 2$. Suponha que \mathcal{F} admite uma seqüência de G.V de comprimento finito. Seja ℓ o mínimo dos comprimentos possíveis para uma seqüência de G.V de \mathcal{F} . Então temos as seguintes possibilidades :*

- (a). $\ell \geq 3$. Neste caso, \mathcal{F} é o pull-back de uma folheação \mathcal{G} como no exemplo 6.2.1 por uma aplicação meromorfa $\Phi: M \rightarrow S \times \mathbb{P}^1$.

(b). $\ell \leq 2$. Neste caso, \mathcal{F} possui uma estrutura transversal projetiva, afim ou por translações, com polos num sub-conjunto analítico de codimensão um de M .

Prova. Seja $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N)$ uma seqüência de G.V finita para \mathcal{F} , com $\omega_N \neq 0$. Suponhamos que \mathcal{F} não possui estrutura transversal projetiva, afim, ou por translações. Neste caso, $N \geq 3$ pela observação 6.2.1. Afirmamos que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ não são identicamente nulas.

De fato, as três primeiras relações em (6.4) se escrevem :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega_0 = \omega_0 \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2 \\ d\omega_2 = \omega_0 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_2 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Se $\omega_1 = 0$, a primeira relação em (6.5) implica que ω_0 é fechada, logo \mathcal{F} possui estrutura transversal por translações. Se $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_2 = 0$, as duas primeiras implicam que \mathcal{F} possui estrutura transversal afim. Finalmente, se $\omega_3 = 0$, as três relações implicam que \mathcal{F} tem estrutura transversal projetiva. Logo, $\omega_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$.

Dadas duas 1-formas meromorfas em M , α e β tais que $\beta \wedge \alpha = 0$, vamos usar a notação $\beta//\alpha$. Notamos que, se $\beta//\alpha$ e $\alpha \neq 0$ então existe $f \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\beta = f.\alpha$. Deixamos a verificação deste fato para o leitor. Precisamos de um lema.

Lema 6.2.1. *Seja $(\omega_0, \dots, \omega_N)$ como acima. Se $k, \ell \geq 2$ então $\omega_k \wedge \omega_\ell = 0$. Em particular,*

$$d\omega_k = \omega_0 \wedge \omega_{k+1} + (k-1)\omega_1 \wedge \omega_k, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (6.6)$$

prova. A relação de ordem $2N-2$ em (6.4) pode ser escrita como

$$d\omega_{2N-2} - \omega_0 \wedge \omega_{2N-1} = \sum_{\ell=1}^{2N-2} \binom{2N-2}{\ell} \omega_\ell \wedge \omega_{2N-1-\ell}.$$

Como $N \geq 3$, temos $2N-2 > N$, logo $\omega_{2N-2} = \omega_{2N-1} = 0$ e o membro da esquerda se anula. Por outro lado, no somatório do lado direito, se $\ell > N$ ou $\ell < N-1$, então $\omega_\ell \wedge \omega_{2N-1-\ell} = 0$, logo a

relação acima se escreve como $0 = \left[\binom{2N-2}{N-1} - \binom{2N-2}{N} \right] \omega_{N-1} \wedge \omega_N = \binom{2N-2}{N-1} \omega_{N-1} \wedge \omega_N$. Portanto, $\omega_{N-1} // \omega_N$.

Suponhamos que a primeira afirmação seja válida para $k, \ell \geq m$, onde $2 < m \leq N-1$, e provemos que ela é válida para $k, \ell \geq m-1$. A relação de ordem $N+m-2$ em (6.4) pode ser escrita como :

$$d\omega_{N+m-2} - \omega_0 \wedge \omega_{N+m-1} = \sum_{\ell=1}^{N+m-2} \binom{N+m-2}{\ell} \omega_\ell \wedge \omega_{N+m-1-\ell}$$

Como $m > 2$, o lado direito da relação acima é nulo. No somatório do lado esquerdo, todos os termos se anulam para $\ell < m-1$ ou $\ell > N$, já que $\omega_j = 0$ se $j > N$. A hipótese de indução implica que os termos em que $m \leq \ell \leq N-1$ também se anulam. Restam apenas no somatório os termos de ordem $\ell = m-1$ e $\ell = N$. Os termos restantes nos fornecem $a \cdot \omega_{m-1} \wedge \omega_N = 0$, onde $a = \binom{N+m-2}{m-1} - \binom{N+m-2}{N} \neq 0$. Logo $\omega_{m-1} // \omega_N$. Em particular, $\omega_\ell // \omega_N$ para todo $\ell \geq m-1$, logo existe $g_\ell \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\omega_\ell = g_\ell \cdot \omega_N$, $m-1 \leq \ell \leq N$. Isto implica que $\omega_k \wedge \omega_\ell = 0$, se $k, \ell \geq m-1$, como queríamos. A relação (6.6) é obtida da relação de ordem k em (6.4) notando que $\omega_\ell \wedge \omega_{k+1-\ell} = 0$ se $\ell \neq 1, k$. Deixamos os detalhes para o leitor. \square

Afirmamos que $\omega_{N-1} \neq 0$. Com efeito, suponhamos o contrário. A relação (6.6) para $k = N-1$ implica que $0 = d\omega_{N-1} = \omega_0 \wedge \omega_N + (N-1)\omega_1 \wedge \omega_{N-1} = \omega_0 \wedge \omega_N$, logo $\omega_0 // \omega_N$. Logo a relação de ordem um em (6.6) se escreve como $d\omega_1 = \omega_0 \wedge \omega_2$ e como $\omega_0 // \omega_N$ e $\omega_2 // \omega_N$, obtemos $d\omega_1 = 0$. Logo, \mathcal{F} possui uma estrutura transversal afim, contra a suposição inicial. Portanto, $\omega_{N-1} = 0$. Em particular, podemos escrever $\omega_{N-1} = f_{N-1} \cdot \omega_N$, onde $f_{N-1} \in \mathcal{M}^*(M)$.

Na observação 6.2.2 vimos que a mudança de variáveis $z = f \cdot t$, onde $f \in \mathcal{M}^*(M)$, produz outra seqüência de G.V associada a \mathcal{F} , $(\hat{\omega}_k)_{k \geq 0}$, onde $\hat{\omega}_{N-1} = f^{N-2} \cdot \omega_{N-1}$ e $\hat{\omega}_N = f^{N-1} \cdot \omega_N$. Fazendo $f := f_{N-1}$ e $\tilde{\omega}_N = \frac{f_{N-1}^{N-1}}{N!} \omega_N$, os dois últimos termos do somatório se escrevem como $N \cdot z^{N-1} \tilde{\omega}_N + z^N \cdot \tilde{\omega}_N$. Como $\hat{\omega}_k // \tilde{\omega}_N$, $2 \leq k \leq N-2$, existe $f_k \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\hat{\omega}_k = k! \cdot f_k \cdot \tilde{\omega}_N$. Em particular, chamando $\tilde{\omega}_N$ de ω_N , a nova forma Ω pode ser escrita como

$$\Omega = dz + \omega_0 + z \cdot \omega_1 + F(p, z) \cdot \omega_N, \quad F(p, z) = \sum_{j=2}^{N-2} f_j \cdot z^j + N \cdot z^{N-1} + z^N.$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = u - 1$ em Ω , obtemos uma outra 1-forma meromorfa integrável $\tilde{\Omega}$ em $M \times \mathbb{C}$ do tipo :

$$\tilde{\Omega} = du + \tilde{\omega}_0 + u.\tilde{\omega}_1 + G(p, u).\omega_N ,$$

onde $G(p, u) = \sum_{j=2}^N g_j(p).u^j$, sendo $g_N = 1$, $g_{N-1} = 0$ e $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \omega_1 + \dots + (-1)^N.\omega_N$. A forma $\tilde{\omega}_0$ é integrável, mas a folheação associada a ela em M não coincide necessariamente com \mathcal{F} . Produzimos uma seqüência de G.V auxiliar $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_{N-2}, 0, \omega_N)$, a qual satisfaz o lema 6.2.1. Como Ω é obtida de $\tilde{\Omega}$ pela mudança de variáveis $u = z + 1$, obtemos

$$\omega = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_{N-2} + \omega_N , \quad \tilde{\omega}_j = g_j.\omega_N , \quad j \geq 2. \quad (6.7)$$

Como já vimos anteriormente $\tilde{\omega}_0 \wedge \omega_N = 0$, já que $\tilde{\omega}_{N-1} = 0$. Logo, $\tilde{\omega}_0 = g_0.\omega_N$ e $d\tilde{\omega}_1 = 0$. As outras relações em (6.6) se escrevem como

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{\omega}_k = (k-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_k , \quad k \in \{0, 2, \dots, N-2\} \\ d\omega_N = (N-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_N \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Lema 6.2.2. *Se \mathcal{F} não possui estrutura transversal afim com polos então existem $h, f \in \mathcal{M}^*(M)$ tais que $\omega_N = h.df$.*

Prova. Substituindo $\tilde{\omega}_k = g_k.\omega_N$ em (6.8) obtemos,

$$dg_k \wedge \omega_N + g_k.d\omega_N = (dg_k + (N-1)g_k \tilde{\omega}_1) \wedge \omega_N = (k-1)g_k \tilde{\omega}_1 \wedge \omega_N \implies$$

$$(dg_k + (N-k)g_k \tilde{\omega}_1) \wedge \omega_N = 0 , \quad k \in \{0, 2, \dots, N-2\} . \quad (6.9)$$

Suponhamos que existem $k \neq \ell \in \{0, 2, \dots, N-2\}$ tais que $g_k, g_\ell \neq 0$. Neste caso, obtemos de (6.9) que

$$\left((N-k) \frac{dg_\ell}{g_\ell} - (N-\ell) \frac{dg_k}{g_k} \right) \wedge \omega_N = 0 .$$

Se além disto, $\alpha_{k\ell} := (N-k) \frac{dg_\ell}{g_\ell} - (N-\ell) \frac{dg_k}{g_k} \neq 0$, podemos concluir que $df \wedge \omega_N = 0$, onde $f := g_\ell^{N-k} / g_k^{N-\ell}$, já que $\alpha_{k\ell} = df/f$. Neste caso, existe $h \in \mathcal{M}^*(M)$ tal que $\omega_N = h.df$ e estamos feitos. Suponhamos que $\alpha_{k\ell} = 0$ para todo $k \neq \ell$. Vamos dividir o resto da prova em vários casos.

Caso I. Suponha que $g_k = 0$ para todo $k \in \{0, 2, \dots, N-2\}$. Neste caso, temos

$$\omega_0 = \tilde{\omega}_1 + \omega_N$$

e como $d\tilde{\omega}_1 = 0$, temos

$$d\omega_0 = d\omega_N = (N-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_N = (N-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_0 ,$$

logo \mathcal{F} tem uma estrutura transversal afim com polos.

Caso II. Suponha que $g_k \neq 0$ para ao menos um índice $k \in \{0, 2, \dots, N-2\}$, mas $\alpha_{k\ell} = 0$ para todo $k \neq \ell$. Seja $I = \{k \mid g_k \neq 0\}$. Neste caso, temos $\frac{1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k} = \frac{1}{N-\ell} \frac{dg_\ell}{g_\ell}$ para quaisquer $k, \ell \in I$. Logo, a 1-forma meromorfa fechada

$$\beta := \tilde{\omega}_1 + \frac{1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k}$$

independe de $k \in I$. Note que (6.9) implica $\beta \wedge \omega_N = 0$.

Sub-caso II.1. $\beta = 0$. Escrevamos

$$\omega_0 = \tilde{\omega}_1 + g.\omega_N , \quad g = g_0 + g_2 + \dots + g_{N-2} + 1 .$$

Como $\tilde{\omega}_1 = -\frac{1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k}$, $k \in I$, obtemos $dg_k \wedge \tilde{\omega}_1 = 0$, logo $dg \wedge \tilde{\omega}_1 = 0$. Se $g = 0$, então $\omega_0 = \tilde{\omega}_1$ é fechada e \mathcal{F} possui estrutura transversal por tranlações. Se $g \neq 0$ temos

$$d\left(\frac{\omega_0}{g}\right) = d\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{g}\right) + d\omega_N = d\omega_N = (N-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_N = (N-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \frac{\omega_0}{g} .$$

Em particular, como $\frac{1}{g}.\omega_0$ é meromorfa, também define \mathcal{F} e $d\tilde{\omega}_1 = 0$, \mathcal{F} possui uma estrutura afim com polos.

Sub-caso II.2. $\beta \neq 0$. Como $\beta \wedge \omega_N = 0$, existe $h \in \mathcal{M}^*(M)$ tal que $\omega_N = h.\beta$, o que acarreta

$$d\omega_N = \frac{dh}{h} \wedge \omega_N .$$

Das relações (6.8) e $\beta \wedge \omega_N = 0$ obtemos,

$$d\omega_N = (N-1)\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_N = -\frac{N-1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k} \wedge \omega_N .$$

Comparando as duas últimas relações obtemos

$$\left(\frac{dh}{h} + \frac{N-1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k} \right) \wedge \omega_N = 0 .$$

Sub-caso II.2.1. $\frac{dh}{h} + \frac{N-1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k} = 0$ para todo $k \in I$. Neste caso, temos $dh \wedge dg_k = 0$ para todo $k \in \{0, 2, \dots, N-2\}$. Logo, $dh \wedge dg = 0$. Obtemos

$$\omega_0 = \tilde{\omega}_1 + g.\omega_N = \tilde{\omega}_1 + g.h.\beta .$$

Por outro lado, $\beta = \tilde{\omega}_1 + \frac{1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k} = \tilde{\omega}_1 - \frac{1}{N-1} \frac{dh}{h}$, o que acarreta

$$\omega_0 = (1 + g.h)\tilde{\omega}_1 - \frac{g}{N-1} dh .$$

Se $1 + g.h = 0$, ω_0 é fechada, já que $dg \wedge dh = 0$. Se $1 + g.h \neq 0$ então

$$\frac{\omega_0}{1 + g.h} = \tilde{\omega}_1 + \frac{1}{N-1} \frac{g}{1 + g.h} dh$$

é fechada. Em qualquer caso, \mathcal{F} é definida por uma 1-forma meromorfa fechada.

Sub-caso II.2.2. Existe $k \in I$ tal que $\mu := \frac{dh}{h} + \frac{N-1}{N-k} \frac{dg_k}{g_k} \neq 0$. Neste caso, fazendo $f := h^{N-k} . g_k^{N-1}$ temos $\frac{df}{f} = (N-k)\mu \neq 0$ e $df \wedge \omega_N = 0$, o que acarreta $\omega_N = k.df$, onde $k, f \in \mathcal{M}^*(M)$. \square

O lema 6.2.2 implica que $\omega_N = k.df$, onde $k, f \in \mathcal{M}^*(M)$. A função meromorfa $f: M \rightarrow \mathbb{P}^1$ não é constante, logo as componentes irredutíveis dos seus níveis definem uma folheação de codimensão um \mathcal{G} em M com $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{G})) \geq 2$. No aberto $U := M \setminus \text{sing}(\mathcal{G})$, as folhas de \mathcal{G} são subconjuntos fechados disjuntos e o espaço quociente M/\mathcal{G} , da relação de equivalência em U que identifica dois pontos na mesma folha, se identifica naturalmente com uma superfície de Riemann, digamos S . O fato de que M é compacta implica que M/\mathcal{G} é de Hausdorff. Este resultado é conhecido como teorema de fatoração de Stein (veja [H]). A aplicação quociente $\phi: U \rightarrow S$, $\phi(p) = \text{folha de } \mathcal{G} \text{ passando por } p$, é holomorfa e se estende a uma aplicação meromorfa de M em S , que denotaremos pelo mesmo símbolo, ϕ . As superfícies de nível $\phi^{-1}(q)$, $q \in S$, são conexas e coincidem com as componentes irredutíveis dos níveis $f^{-1}(p)$, $p \in \mathbb{P}^1$. Em particular, se $q \in S$ então $f(\phi^{-1}(q))$ é conexo e discreto, logo contém um único ponto em

\mathbb{P}^1 . Podemos então definir uma aplicação holomorfa $F: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ por $F(q) = f(\phi^{-1}(q))$ que fatora f , no sentido que $f = F \circ \phi$. Seja $\alpha \neq 0$ uma 1-forma meromorfa em S e coloquemos $\mu := \phi^*(\alpha) \neq 0$. Note que $d\mu = 0$, já que $d\alpha = 0$.

Como $\omega_N \wedge \mu = 0$, existe $h_N \in \mathcal{M}^*(M)$ tal que $\omega_N = h_N \cdot \mu$. Análogamente, para todo $k \in \{0, 2, \dots, N-2\}$ existe $h_k \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\tilde{\omega}_k = h_k \cdot \mu$, já que $\omega_k \wedge \mu = 0$. Logo, podemos escrever

$$\omega_0 = \tilde{\omega}_1 + (h_0 + h_2 + \dots + h_{N-2} + h_N) \mu$$

Substituindo $\tilde{\omega}_k = h_k \cdot \mu$ na relação (6.8) obtemos

$$\begin{cases} \text{ou, } h_k = 0 \\ \text{ou, } (\tilde{\omega}_1 - \frac{1}{k-1} \frac{dh_k}{h_k}) \wedge \mu = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Seja $J = \{k \neq 1 \mid h_k \neq 0\}$. Dados $k \neq \ell \in J$, obtemos de (6.10) que

$$\left((\ell-1) \frac{dh_k}{h_k} - (k-1) \frac{dh_\ell}{h_\ell} \right) \wedge \mu = 0. \quad (6.11)$$

Em particular, $h_k^{N-\ell}/h_\ell^{N-k}$ é integral primeira da folheação \mathcal{G} . Seja $r = \text{mdc}\{k-1 \mid k \in J\}$ e consideremos inteiros n_j , $j \in J$, tais que $\sum_{j \in J} n_j(j-1) = r$. Coloquemos $h := \prod_{j \in J} h_j^{n_j}$. Note que $\frac{dh}{h} = \sum_{j \in J} n_j \frac{dh_j}{h_j}$. Somando as relações em (6.11) com k fixo, obtemos

$$0 = \sum_{\ell \in J} \frac{n_\ell}{r} \left((\ell-1) \frac{dh_k}{h_k} - (k-1) \frac{dh_\ell}{h_\ell} \right) \wedge \mu = \left(\frac{dh_k}{h_k} - \frac{k-1}{r} \frac{dh}{h} \right) \wedge \mu$$

Logo, $h_k/h^{\frac{k-1}{r}}$ é integral primeira de \mathcal{G} , para todo $k \in J$. Pelo teorema de fatoração de Stein, existe $H_k: S \rightarrow \mathbb{P}^1$, holomorfa, tal que $h_k/h^{\frac{k-1}{r}} = H_k \circ \phi$, ou seja $h_k = h^{\frac{k-1}{r}} \cdot H_k \circ \phi$, $k \in J$. Colocando $H_k = 0$ para $k \notin J$, podemos escrever

$$\omega_0 = \tilde{\omega}_1 + \left(\sum_{k \neq 1} h^{\frac{k-1}{r}} \cdot H_k \circ \phi \right) \mu. \quad (6.12)$$

Por outro lado, as relações em (6.10) e $\frac{dh_k}{h_k} \wedge \mu = \frac{k-1}{r} \frac{dh}{h} \wedge \mu = 0$ implicam

$$\tilde{\omega}_1 \wedge \mu = \frac{1}{k-1} \frac{dh_k}{h_k} \wedge \mu = \frac{1}{r} \frac{dh}{h} \wedge \mu \implies \left(\tilde{\omega}_1 - \frac{1}{r} \frac{dh}{h} \right) \wedge \mu = 0 \quad (6.13)$$

Em particular, existe $k \in \mathcal{M}(M)$ tal que $\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{r} \frac{dh}{h} + k \cdot \mu$. Como $\tilde{\omega}_1$, μ e dh/h são fechadas, obtemos por derivação que $dk \wedge \mu = 0$. Pelo teorema de fatoração de Stein, existe uma função holomorfa $K: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $k = K \circ \phi$. Substituindo em (6.12) obtemos

$$\omega_0 = \frac{1}{r} \frac{dh}{h} + K \circ \phi \cdot \mu + \left(\sum_{k \neq 1} h^{\frac{k-1}{r}} \cdot H_k \circ \phi \right) \mu \quad (6.14)$$

Finalmente, colocando $\Phi := (\phi, h): M \rightarrow S \times \mathbb{P}^1$, obtemos

$$r \cdot h \cdot \omega_0 = \Phi^* \left(dz + r(K \cdot z + \sum_{k \neq 1} H_k \cdot z^{\frac{k-1}{r} + 1}) \alpha \right),$$

o que prova o teorema. \square

O lema 6.2.2 e o final da prova do teorema 9, implicam o seguinte resultado :

Corolário 6.2.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa compacta M , de dimensão $n \geq 2$. Suponha que \mathcal{F} admite uma seqüência de $G.V$ finita de comprimento $N \geq 3$. Então, ou bem \mathcal{F} é o pull-back de uma folheação numa superfície $S \times \mathbb{P}^1$, como no exemplo 6.2.1, ou bem \mathcal{F} possui uma estrutura transversal afim ou por translações, com polos num sub-conjunto analítico de codimensão um de M .*

No caso em que $M = \mathbb{P}^n$, temos o seguinte resultado :

Corolário 6.2.2. *Se uma folheação \mathcal{F} de codimensão um em \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, admite uma seqüência de $G.V$ finita então, ou bem \mathcal{F} é o pull-back de uma folheação de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, como no exemplo 6.2.1, ou bem \mathcal{F} possui uma estrutura transversal projetiva, afim ou por translações, com polos num sub-conjunto analítico de codimensão um de M .*

Prova. Suponha que \mathcal{F} não admite estrutura transversal projetiva, afim ou por translações. Neste caso, \mathcal{F} é definida por uma 1-forma meromorfa ω do tipo

$$\omega = \Phi^* \left(dz + \sum_{j=0}^N z^j \alpha_j \right),$$

onde $\Phi = (\phi_1, \phi_2): \mathbb{P}^n \rightarrow S \times \mathbb{P}^1$ e α_j é 1-forma meromorfa em S , $0 \leq j \leq N$. Queremos provar que $S = \mathbb{P}^1$. Temos duas possibilidades: 1^a. ϕ_1 é constante. Neste caso, $\phi_1^*(\alpha_j) = 0$ para todo $j = 0, \dots, N$. Logo $\omega = \phi_2^*(dz)$, ou seja, ω é fechada, contra a suposição. 2^a. ϕ_1 não é constante. Logo, existe uma reta projetiva $L \simeq \mathbb{P}^1$, linearmente mergulhada em \mathbb{P}^n tal que $\phi_1|_L$ não é constante. Como L tem dimensão um, a aplicação $\phi_1|_L := f$ é de fato holomorfa. Em particular, existe uma aplicação holomorfa não constante $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow S$. Logo $S \simeq \mathbb{P}^1$, por um resultado bem conhecido da teoria de superfícies de Riemann. \square

No caso de folheações de grau dois em \mathbb{P}^n , temos o seguinte resultado:

Proposição 6.2.2. *Toda folheação de grau dois em \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, admite uma seqüência de $G.V$ de comprimento três.*

Prova. Seja $\mathcal{F} \in \text{Fol}(n, 2)$, $n \geq 2$. Vamos supor que $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$.

Lema 6.2.3. *Existe uma aplicação birracional $\Psi: \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que, se $\mathcal{G} = \Psi^*(\mathcal{F})$ e Δ é o conjunto de tangências de \mathcal{G} com as fibras da fibração vertical, dada por $\pi_1: \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, então temos duas possibilidades:*

- (a). $\Delta = N \times \mathbb{P}^1$, onde $N \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é um sub-conjunto algébrico de codimensão um.
- (b). $\Delta = N \times \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^{n-1} \times \{q\}$, onde N é como acima e $q \in \mathbb{P}^1$.

Prova. Em primeiro lugar, $\text{sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ pelo teorema 1.13 da seção 1.4.3. Fixemos um ponto $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ e uma carta afim $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $x(p) = 0$. Nesta carta afim, \mathcal{F} é representada por uma 1-forma integrável polinomial ω , tal que $\omega(0) = 0$, já que

$p = 0 \in \text{sing}(\mathcal{F})$. Além disto, $\text{cod}(\text{sing}(\omega)) \geq 2$. Como \mathcal{F} tem grau dois, podemos escrever

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 ,$$

onde ω_j tem coeficientes homogêneos de grau j , $1 \leq j \leq 3$, e $i_R(\omega_3) = 0$, sendo R o radial. Se $\omega_3 = 0$ então $i_R(\omega_2) \neq 0$, já que $\text{gr}(\mathcal{F}) = 2$. Seja $\text{Tang}(\mathcal{F}, R)$ o divisor de tangências entre \mathcal{F} e o campo radial. No sistema afim acima, temos $\text{Tang}(\mathcal{F}, R) = i_R(\omega_1) + i_R(\omega_2) := F_2 + F_3$, onde $F_2 = i_R(\omega_1)$ e $F_3 = i_R(\omega_2)$. Note que, se $F_j \neq 0$ então $\text{gr}(F_j) = j$, $j = 2, 3$. Veremos mais adiante que é possível escolher o ponto $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ de forma que $F_1 + F_2 \neq 0$. Por enquanto, vamos supor este fato.

Seja $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ a variedade obtida de \mathbb{C}^n por uma explosão em $p = 0$. Na sistema de coordenadas afim em questão, a expressão de π numa das cartas de M é da forma

$$(x_1, \dots, x_n) = \pi(t_1, \dots, t_{n-1}, z) = (z.t_1, \dots, z.t_{n-1}, z) := (z.t, z) .$$

Escrevendo $\omega_j = \sum_{i=1}^n A_{ji}(x).dx_i$, $1 \leq j \leq 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega_j) &= \sum_{i=1}^{n-1} A_{ji}(z.t, z)(z dt_i + t_i dz) + A_{jn}(z.t, z)dz = \\ &:= z^j (z.\tilde{\omega}_j + P_j(t) dz) , \end{aligned}$$

onde $\tilde{\omega}_j = \sum_{i=1}^{n-1} A_{ji}(t, 1)dt_i$ e $P_j(t) = i_R(\omega_j)(t, 1)$. Em particular, obtemos

$$\pi^*(\omega) = z ((F_2(t, 1) + z.F_3(t, 1))dz + z.\tilde{\omega}_1 + z^2.\tilde{\omega}_2 + z^3.\tilde{\omega}_3) \quad (6.15)$$

A folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ é definida nesta carta por $\Omega = z^{-k}.\pi^*(\omega)$, onde $k \geq 1$ é escolhido de tal forma que $\text{cod}(\text{sing}(\Omega)) \geq 2$. O divisor de tangências de $\pi^*(\omega)$ com o campo vertical $\partial/\partial z$ é dado por $F_2(t, 1) + zF_3(t, 1) = 0$, se $k = 1$. Se $F_2(t, 1) \equiv 0$, então $k = 2$ e o divisor de tangências é $F_3(t, 1) = 0$.

Consideremos $(t, z) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$. A explosão $\pi: \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ se estende a uma aplicação birracional $\Psi_1: \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$. Seja $\mathcal{G}_1 := \Psi_1^*(\mathcal{F})$. O divisor de tangências Δ_1 de \mathcal{G}_1 com as fibras da fibração vertical $\{q\} \times \mathbb{P}^1$, é dado na carta anterior por :

- (i). $\Delta_1 = F_3(t, 1)$, se $F_2 \equiv 0$ e $F_3 \not\equiv 0$.
- (ii). $\Delta_1 = F_2(t, 1)$, $F_3 \equiv 0$ e $F_2 \not\equiv 0$.
- (iii). $\Delta_1 = F_2(t, 1) + z.F_3(t, 1)$, se $F_2, F_3 \not\equiv 0$.

No casos (i) e (ii), o divisor Δ_1 satisfaz (a) do lema 6.2.3 e colocamos $\Psi = \Psi_1$ e $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$. No caso (iii), se $Q(t) = \text{mdc}(F_2(t, 1), F_3(t, 1))$ podemos escrever $F_2(t, 1) = Q(t).f_2(t)$ e $F_3(t, 1) = Q(t).f_3(t)$, onde $\text{mdc}(f_2, f_3) = 1$. Em particular, $\Delta_1 = Q(t)(f_2(t) + z.f_3(t))$ e o conjunto de tangências é dado por $(Q(t) = 0) \cup (z = -f_2(t)/f_3(t))$. Neste caso, para obter o lema, precisamos fazer mais uma modificação birracional. Definimos $\psi: \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$ por $\psi(t, z) = \left(t, \frac{z}{z - f_2(t)/f_3(t)} \right)$. Esta transformação envia a hipersuperfície $(z = -f_2(t)/f_3(t))$ no hiperplano do infinito de $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$. Consideramos $\psi \circ \pi$ e estendemos a uma aplicação birracional de $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$ em \mathbb{P}^n . Esta aplicação satisfaz às propriedades requeridas no lema. Obtemos o caso (b) do lema 6.2.3, como o leitor pode verificar.

Resta provar que podemos escolher o ponto $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ de tal forma que $F_2 + F_3 \not\equiv 0$. Suponhamos que $F_2 + F_3 \equiv 0$. Neste caso, temos necessariamente $\omega_3 \not\equiv 0$, pois caso contrário teríamos $gr(\mathcal{F}) < 2$. Além disto, $F_2 = F_3 = 0$, pois F_2 e F_3 são homogêneos. Em particular, temos $i_R(\omega) = 0$. Note que $n \geq 3$, pois para $n = 2$, a relação implica que $\omega = f(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$, logo $\text{sing}(\omega) = (f = 0)$ tem codimensão um. De (6.15) obtemos $\Omega := z^{-2}.\pi^*(\omega) = \tilde{\omega}_1 + z.\tilde{\omega}_2 + z^2.\tilde{\omega}_3$, onde $\tilde{\omega}_3 \neq 0$. A idéia é provar que $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = 0$. Suponhamos por absurdo que $\tilde{\omega}_1 \neq 0$. Grupando na relação $\Omega \wedge d\Omega = 0$ os termos da forma $z^j.dz \wedge \dots$, $j = 0, 1, 2$, e levando em conta que $\tilde{\omega}_i$ só depende de t e não contém termos em dz , obtemos respectivamente $\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_2 \wedge \tilde{\omega}_3 = 0$. Isto implica que $\Omega = f.\tilde{\omega}_3$, onde f é um polinômio, como o leitor pode verificar. Se f não é constante então $\text{sing}(\Omega) \supset (f = 0)$ tem codimensão um, contradição. Logo, $\tilde{\omega}_1 = 0$. Deixamos o caso restante para o leitor. Obtemos assim que $\omega = \omega_3$. Em particular, \mathcal{F} é o pull-back de uma folheação em \mathbb{P}^{n-1} por uma aplicação linear. Logo, existe $q \neq 0$ tal que $\omega_3(q) = 0$. Considerando a translação $T(u) = u + q$, obtemos $T^*(\omega_3)$ da forma que queremos (verifique). \square

Se o divisor Δ é como no lema 6.2.3, utilizando (6.15), então $\Phi^*(\mathcal{F})$ é representada em algum sistema de coordenadas afins por uma 1-forma meromorfa Ω do tipo

$$\Omega = F.dz + \sum_{j=1}^3 z^j \eta_j ,$$

onde F não depende de z e η_j não depende de z e de dz , $1 \leq j \leq 3$. Tomando a seqüência de G.V como na prova da proposição 6.2.1 com $Y = \partial/\partial z$, obtemos uma seqüência de comprimento três. Isto prova o teorema. \square

O seguinte corolário decorre imediatamente dos resultados anteriores :

Corolário 6.2.3. *Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{Fol}(n, 2)$, $n \geq 3$. Então, ou bem \mathcal{F} é um pull-back de uma folheação em \mathbb{P}^2 por uma aplicação racional, ou bem \mathcal{F} possui uma estrutura transversal afim, ou por translações, com polos num subconjunto algébrico de codimensão um.*

O corolário 6.2.3 motiva o seguinte problema :

Problema 3. *É possível demonstrar o teorema 7 do capítulo anterior utilizando o corolário 6.2.3 ?*

Gostaríamos de observar que não são conhecidos exemplos de folheações de codimensão um em espaços projetivos que não admitem seqüências de G.V de comprimento finito. Este fato motiva a seguinte conjectura :

Conjectura 3. *Existe um sub-conjunto U , aberto e denso em $\mathbb{Fol}(2, 3)$, tal que toda folheação $\mathcal{F} \in U$ não admite seqüência de G.V finita.*

A seguinte conjectura é motivada pelo teorema 9 :

Conjectura 4. *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade algébrica de dimensão $n \geq 3$. Então, ou bem \mathcal{F} possui uma estrutura transversal projetiva, afim, ou por translações, com polos num sub-conjunto algébrico de codimensão um, ou bem \mathcal{F} é um pull-back de uma folheação \mathcal{G} numa superfície algébrica por uma aplicação meromorfa.*

6.3 Exercícios.

Ex. 6.1. Seja $\mathcal{F} \in \text{Fol}(2, 1)$ uma folheação que possui um centro de Morse. Prove que \mathcal{F} possui uma integral primeira racional, a qual, em algum sistema de coordenadas afim $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ pode ser escrita com $\Phi(x, y) = x.y$.

Ex. 6.2. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão um numa variedade algébrica M com $\dim(M) \geq 2$. Prove que existe uma 1-forma meromorfa $\omega \neq 0$ tangente a \mathcal{F} . Prove também que, se ω_1 é outra 1-forma meromorfa tangente a \mathcal{F} então $\omega_1 = f.\omega$, onde f é meromorfa.

Ex. 6.3. Sejam M uma variedade complexa e $(\omega_k)_{k \geq 0}$ uma seqüência de 1-formas meromorfas em M . Defina a série formal $\Omega = dz + \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \omega_k$ em $M \times \mathbb{C}$. Prove $\Omega \wedge d\Omega = 0$ se, e somente se as relações em (6.4) são satisfeitas.

Ex. 6.4. Sejam \mathcal{F} uma folheação de codimensão um numa variedade complexa M e $\Omega = dz + \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \omega_k$ uma seqüência de G.V associada a \mathcal{F} . Considere uma série formal $z(p, w) = \sum_{j \geq 1} f_j(p).w^j$, onde $f_1 \in \mathcal{M}^*(M)$ e $f_j \in \mathcal{M}(M)$ para $j \geq 2$. Colocando $\Phi(p, w) = (p, z(p, w))$, calcule a série formal $\Phi^*(\Omega)$. Prove que a série formal

$$\tilde{\Omega} := \frac{f_1^{-1}}{1 + \sum_{j \geq 2} f_1^{-1} \cdot f_j \cdot w^{j-1}} \Phi^*(\Omega)$$

pode ser escrita com $\tilde{\Omega} = dw + \sum_{k \geq 0} \frac{w^k}{k!} \tilde{\omega}_k$, onde $\tilde{\omega}_0 = f_1^{-1}.\omega_0$, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + \frac{df_1}{f_1}$ e $\tilde{\omega}_k$ é meromorfa em M , para todo $k \geq 2$.

Ex. 6.5. Prove que toda variedade algébrica é pseudo-paralelizável.

Referências

- [Ar] V. Arnold : "Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires" ; Edições MIR, 1980.
- [B-B] P.Baum, R.Bott : "On the zeroes of meromorphic vector fields" ; Essais en l'honneur de De Rham (1970), 29-47.
- [Br] M. Brunella : "Birational geometry of foliations" ; text book for a course in the First Latin American Congress of Mathematics, IMPA (2000).
- [Ca] F. Catanese : "Moduli of Algebraic Surfaces" ; Lect. Notes in Math. 1337 (1985), 1-83.
- [CA 1] Calvo Andrade: "Persistência de folheações definidas por formas logarítmicas"; Tese, IMPA, 1990.
- [CA 2] Calvo Andrade: "Irreducible components of the space of holomorphic foliations"; Math. Annalen, no. 299, pp.751-767 (1994).
- [CA 3] Calvo-Andrade : "Foliations with a Kupka component on algebraic manifolds"; Bol. Soc. Brasil. Mat. 30 (1999), no. 2, 183-197.
- [Ca-Sc] C. Camacho, B. Scárdua : "Beyond Lyouvillian transcendence"; Math. Res. Lett. 6 (1999), n^o 1, 31-41.
- [CA-So] Calvo Andrade & M. G. Soares : "Chern numbers of a Kupka component"; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 (1994), no. 4, 1219-1236.
- [C-LN] C. Camacho e A. Lins Neto : "Teoria Geométrica das Folheações"; Projeto Euclides, vol. 12 (1979).
- [C-LN 1] C. Camacho and A. Lins Neto: "The Topology of Integrable Differential Forms Near a Singularity"; Publ. Math. I.H.E.S., 55 (1982), 5-35.
- [C-S 1] C. Camacho, P. Sad : "Pontos singulares de equações diferenciais analíticas"; 16^o Colóquio Brasileiro de Matematica, IMPA, 1987.

- [Ce-LN] D. Cerveau, A. Lins Neto: "Codimension-one foliations in $CP(n)$ $n \geq 3$ with Kupka components"; Astérisque 222 (1994) pg. 93-132.
- [Ce-LN 1] D. Cerveau, A. Lins Neto: "Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $CP(n)$, $n \geq 3$ "; Ann. of Math. (1996) pg. 577-612 .
- [Ce-LN-2] D. Cerveau, A. Lins Neto: "Formes tangentes a des actions commutatives"; Ann. Facultés des sciences de Toulouse, vol. VI, 1984, pg. 51-85.
- [Ce-LN-CA-G] D. Cerveau, A. Lins Neto, J. O. Calvo Andrade, L. Giraldo : "Irreducible components of the space of foliations associated to the affine Lie algebra"; Ergodic Theory and Dynamical Systems 24 (2004) n° 4, 987-1014.
- LN-Lo-Pe-Tou] D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J. V. Pereira, F. Touzet : "Complex codimension one foliations and Godbillon-Vey sequences"; Aceito para publicação no "Moscow Math. Journal.
- [Ce-LN-Ed] D. Cerveau, A. Lins Neto and S. J. Edixhoven : "Pull-back components of the space of holomorphic foliations on $CP(n)$, $n \geq 3$ "; Journal of algebraic geometry, 19 (2001) 695-711.
- [Ce-LN-Be] D. Cerveau, A. Lins Neto, M. Berthier : "Sur les feuilletages analytiques réels et le problème du centre"; Journal of Differential Equations 131, No 2, (1996) pg. 244-266.
- [C-P] F. Cukierman, J. Vitório Pereira; "Stability of Holomorphic Foliations with Split Tangent Sheaf", http://www.arxiv.org/abs/math.CV/0511060*.
- [D] H. Dulac, "Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre"; Bull. des Sc. Math. 32 (1908).
- [EL] E.L. Lima: "Grupo Fundamental e espaços de recobrimento"; Projeto Euclides, 1993.
- [G-H] Griffiths-Harris : "Principles of Algebraic Geometry"; John-Wiley and Sons, 1994.

- [Go] C. Godbillon: Feuilletages : Études géométriques. With a preface by G. Reeb. Progress in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [GM-LN] X. Gomes-Mont, A. Lins: "Structural stability of foliations with a meromorphic first integral"; Topology 30 (1991), pg. 315-334.
- [G-R] H. Grauert and R. Remmert : "Theory of Stein Spaces" ; Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 236, Springer Verlag, 1979.
- [H] R. Hartshorne: "Algebraic Geometry"; Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, 1977.
- [Hi] M. Hirsh : "Differential topology"; Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Il] Y. Iliashenko: "The appearance of limit cycles under a perturbation of the equation $dw/dz = -R_z/R_w$, where $R(z, w)$ is a polynomial."; Mat. Sb. (N.S.) 78 (120) 1969 360–373.
- [J] J.P. Jouanolou : "Équations de Pfaff algébriques"; Lecture Notes in Math. 708, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [K] I. Kupka: "The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms"; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52 (1964), pg. 1431-1432.
- [LN] A. Lins Neto: "Construction of singular holomorphic vector fields e foliations in dimension two"; Journal of Diff. Geometry 26 (1987), pg. 1-31.
- [LN 1] A. Lins Neto : "Finite determinacy of germs of integrable 1-forms in dimension 3 (a special case)"; Geometric Dynamics, Lect. Notes in Math. n° 1007 (1981), pp 480-497.
- [LN 2] A. Lins Neto: "Algebraic solutions of polynomial differential equations e foliations in dimension two"; Lect. Notes em Math. n° 1345, pg. 192-231.
- [M] B. Malgrange : "Frobenius avec singularités I. Codimension un." Publ. Math. IHES, 46 (1976), pp. 163-173.

- [Ma] J. Martinet : "Normalisations des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.-D. Brjuno); Séminaire Bourbaki, vol. 1980/81, pp. 55-70. Lect. Notes in Math. 901, S.V.
- [Ma-Mo] J.F. Mattei e R. Moussu: "Holonomie et intégrales premières"; Ann. Ec. Norm. Sup. 13 (1980), pg. 469-523.
- [Ma-Ra 1] J. Martinet et J-P. Ramis : "Problème de modules pour des équations différentielles non lineaires du premier ordre"; Publ. Math. Inst. Hautes Études Scientifiques, 55 (1982), pg. 63-124.
- [Ma-Ra 2] J. Martinet et J-P. Ramis : "Classification analytique des équations différentielles non lineaires resonnants du premier ordre"; Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 16,1983, pg. 571-621.
- [Mo] H. Movasati : "On the topology of foliations with a first integral". Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 31 (2000), no. 3, 305-336.
- [Mo1] H. Movasati : "On deformation of foliations with a center in the projective space."; An. Acad. Brasil. Ciencias 73 (2001), n° 2, 191-196.
- [Mo2] H. Movasati : "Center conditions: rigidity of logarithmic differential equations."; J. Differential Equations 197 (2004), no. 1, 197-217.
- [S] M. Sebastiani : "Introdução à geometria analítica complexa". Projeto Euclides, IMPA, 2004.
- [Sc] Scárdua, B. Azevedo : "Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations"; Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30 (1997), no. 2, 169-204.
- [Sc-LN] A. Lins Neto & B. A. Scárdua : "Folheações Algébricas Complexas", 21° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1997).
- [Si] Y. Siu: "Techniques of Extension of Analytic Objects"; Marcel Dekker, N.Y., 1974.
- [Su] T. Suwa : "Indices of vector fields and residues of holomorphic singular foliations"; Hermann (1998).