Tópicos em Processos Estocásticos: Eventos Raros, Tempos Exponenciais e Metaestabilidade

Publicações Matemáticas

Tópicos em Processos Estocásticos: Eventos Raros, Tempos Exponenciais e Metaestabilidade

Adilson Simonis e Cláudia Peixoto
USP

impa

25º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

25º Colóquio Brasileiro de Matemática

- A Short Introduction to Numerical Analysis of Stochastic Differential Equations - Luis José Roman
- An Introduction to Gauge Theory and its Applications - Marcos Jardim
- Aplicações da Análise Combinatória à Mecânica Estatística - Domingos H. U. Marchetti
- Dynamics of Infinite-dimensional Groups and Ramsey-type Phenomena - Vladimir Pestov
- Elementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito - Alejandro C. Frery e Francisco Cribari-Neto
- Espaços de Hardy no Disco Unitário - Gustavo Hoepfner e Jorge Hounie
- Fotografia 3D - Paulo Cezar Carvalho, Luiz Velho, Anselmo Antunes Montenegro, Adelailson Peixoto, Asla Sá e Esdras Soares
- Introdução à Teoria da Escolha - Luciano I. de Castro e José Heleno Faro
- Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist - Clodoaldo G. Ragazzo, Mário J. Dias Carneiro e Salvador Addas Zanata
- Schubert Calculus: an Algebraic Introduction - Letterio Gatto
- Surface Subgroups and Subgroup Separability in 3-manifold Topology - Darren Long and Alan W. Reid
- **Tópicos em Processos Estocásticos: Eventos Raros, Tempos Exponenciais e Metaestabilidade - Adilson Simonis e Cláudia Peixoto**
- Topics in Inverse Problems - Johann Baumeister and Antonio Leitão
- Um Primeiro Curso sobre Teoria Ergódica com Aplicações - Krerley Oliveira
- Uma Introdução à Simetrização em Análise e Geometria - Renato H. L. Pedrosa

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br - http://www.impa.br
ISBN: 85-244-0225-3

Tópicos em Processos Estocásticos

Eventos Raros, Tempos Exponenciais e Metaestabilidade

Adilson Simonis (IME / USP)
Cláudia Peixoto (IME / USP)

Sumário:

Os conceitos de *eventos raros, tempos exponenciais e metaestabilidade* desempenham um papel relevante na teoria de processos estocásticos espaciais.

Pretendemos introduzir, em um nível elementar, algumas aplicações já clássicas na literatura e para tanto, discutiremos alguns modelos que servem de laboratório para a construção de situações complexas.

Os modelos que trataremos com algum detalhe são: Passeio Aleatório no Hipercubo (Ehrenfest), Processo de Contato, Exclusão e Ising Ferromagnético.

Rio de Janeiro, julho de 2005.

PREFÁCIO

O ano de 1933 pode ser considerado um marco para a moderna Teoria da Probabilidade devido à publicação do *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, livro escrito por Andrei Kolmogorov. Vale lembrar que as idéias nele discutidas já eram entendidas e discutidas por profissionais em revistas especializadas.

Desde então houve um grande desenvolvimento desta teoria e surgiram novos problemas e desafios. Aqui temos como objetivo abrir uma fresta aos interessados do que já foi feito e quem sabe sucitar perguntas do que poderá ser estabelecido.

Os conceitos de Teoria da Medida e Integral de Lebesgue, obrigatórios aos estudantes da Probabilidade, não serão pré-requisitos para este curso. Queremos de uma certa maneira iniciar, desafiar e propor idéias, muitas já bem conhecidas, ao leitor que procura uma área de pesquisa. Acompanhar esse livro é uma proposta de turismo por alguns temas que vieram pós Kolmogorov.

Eventos Raros (probabilidades tendendo a zero) tem como marco os trabalhos de Grandes Desvios com relação à Lei dos Grandes Números realizados por Chernoff em 1952. Tempos Exponenciais (Distribuição de Probabilidade sem memória) tiveram muitas questões colocadas e respondidas nos trabalhos de Freidlin e Wentzell em 1970. Situações onde um equilíbrio instável sujeito a uma sucessão de eventos raros leva, após um tempo aproximadamente Exponencial, ao equilíbrio, conseqüência de um Grande Desvio, teve como modelos precursores os trabalhos de Lebowitz e Penrose em 1979. Entender este fenômeno via o comportamento típico das médias temporais das trajetórias abriu novas perspectivas e o trabalho de Cassandro, Galves, Olivieri e Vares, em 1984, trouxe um avanço considerável. Muitas dessas questões estão relacionadas e motivadas pela Mecânica Estatística.

Solicitamos especial atenção aos exercícios propostos para um melhor aproveitamento deste texto. Além de um primeiro curso em processos estocásticos, enfatizamos que nada mais será necessário para poder acompanhar esta leitura, que esperamos, seja agradável.

Esse livro existe devido ao convite de Claudio Landim e do apoio da Comissão Organizadora do 25º Colóquio Brasileiro de Matemática.

Adilson Simonis e Cláudia Peixoto
Rio de Janeiro, Julho de 2005.

Os autores dedicam este livro às nossas queridas filhas Gláucia e Laís.

ÍNDICE

Capítulo 1

Passeio Aleatório no Hipercubo

Neste Capítulo estudaremos tempos de parada para um passeio aleatório homogêneo em um hipercubo de dimensão N, obtendo resultados assintóticos.

A cada instante o processo assumirá uma configuração que será uma seqüência de N elementos pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$. Teremos 2^N configurações distintas possíveis que podem ser consideradas os vértices do hipercubo H_N.

A evolução do processo dar-se-á em tempo discreto e pode ser descrita da seguinte maneira: a cada passo com probabilidade $\frac{1}{2}$ o passeio permanecerá no mesmo lugar e com probabilidade $\frac{1}{2}$ modificará um de seus elementos escolhido de maneira uniforme.

Em nosso primeiro Teorema, exibimos a escala de tempo em que dois passeios aleatórios acoplados encontram-se quando N cresce.

O segundo Teorema trata do instante do primeiro retorno a uma posição já visitada pelo passeio. Neste Teorema caracterizamos, com probabilidade 1, como será o primeiro retorno quando N cresce.

O Teorema 3 trata do tempo de retorno a um conjunto fixado. Este tempo, devidamente normalizado, converge em lei a uma Exponencial de parâmetro 1 quando N diverge. O que foi feito neste Teorema generaliza um resultado de Bellman e Harris [3] , onde é tratado o tempo de retorno a uma única posição fixada. O artigo [3] estuda o modelo de Ehrenfest do qual o passeio aleatório no hipercubo é uma espécie de versão microscópica.

Nosso quarto resultado refere-se ao instante de chegada do passeio a um conjunto aleatório $M \subset H_N$. Cada ponto do hipercubo pertencerá a M com probabilidade $\frac{1}{N^\gamma}, \gamma > 0$, independentemente dos demais pontos e do passeio. Pontos em M serão chamados de pontos pretos.

Mostramos que o tempo necessário para o passeio alcançar M, normalizado pela densidade de pontos pretos, converge em lei a uma Exponencial de parâmetro 1 quando N diverge.

Na seqüência apresentamos a descrição do modelo e enunciamos os quatro principais resultados. Após essa seção seguirão as respectivas demonstrações.

1.1 Notação, definições e principais resultados

Denotaremos por $H_N = \{-1, +1\}^N$ o conjunto de configurações com N spins (giros) ± 1 (hipercubo).

Elementos de H_N serão representados por σ e ζ, ou seja, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ onde $\sigma_i \in \{+1, -1\}, \forall\, i \in \{1, \dots, N\}$.

Dado $j \in \{1, \ldots, N\}$ e $\sigma \in H_N$, a configuração obtida a partir de σ por uma troca de spin na posição j será dada por σ^j, isto é:

$$(\sigma^j)_i = \begin{cases} \sigma_i, & \text{se } i \neq j; \\ -(\sigma)_i, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Primeiramente definiremos o passeio aleatório homogêneo $\sigma(t)$ em H_N.

Tomaremos $\sigma(0) = \eta,\ \eta \in H_N$ e consideraremos a seguinte e-volução estocástica em H_N: dada a configuração $\sigma(t)$ no tempo t escolhemos um índice $i \in \{1, \ldots, N\}$ com probabilidade $\frac{1}{N}$ e tornaremos o spin σ_i igual a $+1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Uma realização desta evolução estocástica pode ser obtida da seguinte maneira: introduzimos duas seqüências independentes de variáveis aleatórias $I(t)$ e $U(t)$ onde $t = 1, 2, \ldots$. Estas seqüências estão definidas no espaço de probabilidade $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, I\!P_N)$.

As variáveis aleatórias $I(t)$ com valores em $\{1, \ldots, N\}$, são independentes e identicamente distribuídas e para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$, $I\!P_N\{I(t) = k\} = \frac{1}{N}$.

As variáveis aleatórias $U(t)$ são independentes, identicamente distribuídas com distribuição uniforme em $[0, 1]$, isto é, para todo $u \in [0, 1]$, $I\!P_N(U(t) < u) = u$.

Assim,

$$\sigma_i(t, \omega) = \begin{cases} \sigma_i(t-1, \omega) & \text{se } I(t, \omega) \neq i; \\ +1 & \text{se } I(t, \omega) = i; \quad U(t, \omega) < \frac{1}{2}; \\ -1 & \text{se } I(t, \omega) = i; \quad U(t, \omega) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

O passeio aleatório homogêneo pode ser construído a partir de um outro passeio aleatório $\xi(t)$. Tomamos $\xi(0) = \eta, \eta \in H_N$ e definimos $\xi(t), t \in I\!N$, como um passeio aleatório em H_N, definido no espaço de probabilidade $\big(\Omega_0, \mathcal{F}_0, I\!\!P_0\big)$ com probabilidade de transição dada por: $I\!\!P_0\big(\xi(k+1) = \eta^i \mid \xi(k) = \eta\big) = \frac{1}{N}$, para todo $k \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, N\}$ e $\eta \in H_N$.

Temos que $I\!\!P_0\big(\xi(k+1) = \eta \mid \xi(k) = \eta\big) = 0$.

Introduziremos agora um meio aleatório em nosso espaço de configurações.

Seja M um subconjunto aleatório de H_N, definido no espaço de probabilidade $\big(\overline{\Omega}_N, \overline{\mathcal{F}}_N, \overline{I\!\!P}_N\big)$. Cada ponto do hipercubo pertencerá a M com probabilidade $\frac{1}{N^\gamma}, \gamma > 0$, independentemente dos outros pontos, ou seja, terá distribuição de Bernoulli.

Assim para qualquer $F \subset H_N$, $\overline{I\!\!P}(M \cap F = \emptyset) = \big(1 - \frac{1}{N^\gamma}\big)^{|F|}$, onde $|F|$ é o cardinal de F.

A partir de agora, se nenhuma ambigüidade ocorrer, omitiremos os índices dos espaços de probabilidades.

Notação

ξ^- : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\xi^-(0) = (-1, \ldots, -1)$.

ξ^+ : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\xi^+(0) = (+1, \ldots, +1)$.

ξ^η : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\eta \in H_N$.

σ^- : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\sigma^-(0) = (-1, \ldots, -1)$.

σ^+ : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\sigma^+(0) = (+1, \ldots, +1)$.

σ^η : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\eta \in H_N$.

$t_N^- = \inf\big(t > 0 : \sigma^+(t) = \sigma^-(t)\big)$: Tempo de parada.

$t_N^{\eta,\zeta} = \inf\big(t > 0 : \sigma^\eta(t) = \sigma^\zeta(t)\big)$: Tempo de parada.

$V[0, N^\gamma] = \{\sigma^+(0), \ldots, \sigma^+(N^\gamma)\}$.

0BS: A diferença entre $\xi(t)$ e $\sigma(t)$ é que $\xi(t)$ salta a cada passo com probabilidade 1, enquanto que $\sigma(t)$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de não saltar.

Resultados

Considere dois passeios homogêneos $\sigma^+(t)$ e $\sigma^-(t)$ construídos simultaneamente com o auxílio das variáveis aleatórias $I(t)$ e $U(t)$.

O Teorema 1, a seguir, mostra que o número de passos necessários para os dois passeios acima se encontrarem é da ordem de $NlogN$ quando N diverge.

Teorema 1: Seja $t_N^- = \inf\big(t > 0 : \sigma^+(t) = \sigma^-(t)\big)$. Então,

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\Big|\frac{t_N^-}{NlogN} - 1\Big| > \epsilon\Big) = 0, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

O Teorema 2, a seguir, mostra que o primeiro retorno do passeio $\xi(t)$ a uma posição já visitada será, com probabilidade 1, do tipo $\xi(j) \neq \xi(i) \ \ \forall\, i, j \leq k+1$, e $\xi(k+2) = \xi(k)$, para algum k.

Teorema 2: Sejam $S_N = \inf\big(k > 0 : \xi(k) \in \{\xi(0), \ldots, \xi(k-1)\}\big)$ e $\Gamma_1 = \inf(k > 0 : I(k) = I(k-1))$. Então, $\lim_{N\to\infty} I\!P\big(S_N = \Gamma_1\big) = 1$.

O Teorema 3 trata do tempo que $\sigma^+(t)$ gasta para retornar a um conjunto fixado. Este tempo, convenientemente normalizado, tem lei Exponencial de parâmetro 1 quando N diverge.

Teorema 3: Sejam $R_N = \inf\big(k > 0 : \sigma^+(k) \in V[0, N^\gamma]\big)$ e $\beta_N = \min\big(n \in I\!N : I\!P\big(R_N \geq n\big) \leq e^{-1}\ \big)$. Então, para $0 < \gamma < 1$ temos:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N > \beta_N t\big) = e^{-t}$$

O próximo resultado refere-se ao tempo gasto, pelo passeio homogêneo $\xi(t)$, para alcançar um ponto do conjunto M.

Teorema 4: Seja $\Theta = \inf\big(t > 0 : \xi(t) \in M\big)$. Para $0 < \gamma < 1$ e $\delta > 0$ temos: $\lim\limits_{N\to\infty} \overline{I\!P}\Big(|I\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \delta\Big) = 0$.

A demonstração do último Teorema utilizará o fato de que as posições ocupadas pelo processo serão distintas a cada passo em um tempo da ordem de N^γ quando N diverge.

Os Teoremas 2 e 4 foram enunciados para o passeio $\xi(t)$, suas extensões para o passeio homogêneo $\sigma(t)$ são imediatas.

Por convenção $N^\gamma t = [N^\gamma t]$.

1.2 Demonstração do Teorema 1

Verificaremos que dois passeios homogêneos acoplados com configurações iniciais tais que sua distância seja máxima, encontrar-se-ão em um tempo de ordem $NlogN$ com probabilidade 1 quando N diverge.

Teorema 1: $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{t_N^-}{NlogN} = 1$ em probabilidade.

Dem : Como mencionamos, $\sigma^+(t)$ e $\sigma^-(t)$ serão construídos usando o mesmo ω, isto é, a mesma escolha de índices $I(t,\omega)$ e a mesma escolha de $U(t,\omega)$ da seguinte maneira: dados $\sigma^+(t)$, $\sigma^-(t)$ e $I(t+1) = i$,

se $U(t+1) < \frac{1}{2}$ então $\sigma^+(t+1) = +1,\ \sigma^-(t+1) = +1;$

se $U(t+1) > \frac{1}{2}$ então $\sigma^+(t+1) = -1,\ \sigma^-(t+1) = -1.$

Definimos $D_N(n) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} \mid \sigma_i^+(n) - \sigma_i^-(n) \mid$, como a distância no instante n entre os dois passeios.

Pela evolução de $\sigma(t)$ temos que $D_N(n)$ é uma Cadeia de Markov em $\{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, com probabilidade de transição dada por:

$$p_{xy} = \begin{cases} 1-x, & \text{se } y = x; \\ x, & \text{se } y = x - \frac{1}{N}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Primeiramente notamos que: $t_N^- = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k$, onde $\lambda_1 = 1$ e λ_k para $k = 2, \ldots, N$ são variáveis aleatórias independentes Geométricas de parâmetro $p_k = 1 - \frac{(k-1)}{N}$.

O tempo λ_k é exatamente o número de passos que o processo $D_N(n)$ gasta para ir de $1 - \frac{k-1}{N}$ a $1 - \frac{k}{N}$.

Temos que as esperanças e variâncias valem:

$$E(\lambda_k) = \frac{1}{p_k} = \frac{N}{N-k+1}, \qquad \mathrm{Var}(\lambda_k) = \frac{1-p_k}{{p_k}^2} = \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}.$$

Agora,

$$E\big(t_N^-\big) = \sum_{k=1}^{N} E\big(\lambda_k\big) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-k+1} = N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Como $\int_1^N \frac{1}{x}dx = logN$, temos:

$$Nlog\big(N-1\big) \leq E\big(t_N^-\big) \leq N\big(1 + logN\big).$$

Assim para qualquer $\epsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
I\!P\Big(|t_N^- - E(t_N^-)| > \epsilon\ E(t_N^-)\Big) &\leq \frac{\mathrm{Var}(t_N^-)}{\epsilon^2[E(t_N^-)]^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{N} \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}}{\epsilon^2[\sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-k+1}]^2} = \frac{N \sum_{k=1}^{N} \frac{(k-1)}{(N-k+1)^2}}{\epsilon^2\ N^2\big[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(N-k+1)}\big]^2} \\
&\leq \frac{N(N-1)\big[\frac{1}{(N-1)^2} + \cdots + 1\big]}{\epsilon^2\ N^2 log^2 N} = \frac{N(N-1) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2}}{\epsilon^2\ N^2 log^2 N} \\
&\leq \frac{N(N-1)\big[1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k^2-1)}\big]}{\epsilon^2\ N^2 log^2 N} = \frac{N(N-1)\big[1 + \frac{3}{4} - \frac{(2N+1)}{2N(N+1)}\big]}{\epsilon^2 N^2 log^2 N}.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite, temos:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(|\frac{t_N^-}{E(t_N^-)} - 1| > \epsilon\Big) = 0. \qquad \blacksquare$$

Corolário 1: Sejam σ^η e σ^ζ passeios homogêneos em H_N construídos simultaneamente, com configurações iniciais η, ζ. Suponha para $0 \leq f \leq 1$, que $D_N(0) = \frac{[Nf]}{N}$. Então, $\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\Big) = 0$, para qualquer $t(N)$ com $\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{NlogN} = \infty$.

Dem : Primeiro notamos que:

$$t_N^- = \inf\big(t > 0 : \{I(1), \ldots, I(t)\} = \{1, \ldots, N\}\big).$$

Assim,

$$I\!P\Big(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\Big) \leq I\!P(t_N^- > t(N)) \leq \frac{N(logN + 1)}{t(N)}.$$

Portanto por hipótese temos que:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\Big) = 0 \qquad \blacksquare$$

O próximo Corolário fornecerá um majorante para a velocidade de convergência ao equilíbrio.

Corolário 2: Seja $t(N)$ com $\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)}{NlogN} = \infty$. Então,

$$\lim_{N\to\infty} \left| I\!P\Big(\sigma^+(t(N)) = \zeta\Big) - \frac{1}{2^N} \right| = 0,$$

onde $\zeta \in H_N$.

Dem : Seja $\nu(\eta) = \frac{1}{2^N}$ a medida uniforme em H_N. Esta medida é invariante com respeito à evolução do passeio homogêneo, ou seja,

$$\nu(\zeta) = \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\Big(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta\Big).$$

Assim,

$$\big|I\!P\big(\sigma^+(t(N)) = \zeta\big) - \frac{1}{2^N}\big| =$$

$$\big|I\!P\big(\sigma^+(t(N)) = \zeta\big) - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\big(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta\big)\big| \leq$$

$$\sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \big|I\!P\big(\sigma^+(t(N)) = \zeta\big) - I\!P\big(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta\big)\big| \leq$$

$$\sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta I\!P\big(\sigma^+(t(N)) \neq \sigma^\eta(t(N))\big)$$

Passando ao limite em N e utilizando o Corolário 1 a expressão acima vai a zero e portanto temos o resultado.

OBS: O processo $\xi(t)$ é periódico, além disso, para qualquer acoplamento, dois processos com configurações iniciais que diferem em um número ímpar de posições nunca poderão se encontrar, sendo que a distância mínima entre eles será equivalente a uma posição diferente. Do Teorema 1, temos que a distância em um tempo da ordem $NlogN$ entre dois passeios acoplados $\xi^\eta(t)$ e $\xi^\zeta(t)$ será menor ou igual a $\frac{1}{N}$ quando N diverge.

1.3 Demonstração do Teorema 2

Considere os seguintes eventos:

$J_1 = \Big\{(i_1, i_2) \in \{1, \ldots, N\}^2 : i_1 = i_2\Big\}$

$J_l = \Big\{(i_1, \ldots, i_{2l}) \in \{1, \ldots, N\}^{2l} : \sum\limits_{k=1}^{2l} \mathbf{1}_{\{i=i_k\}} \in \{0, 2, \ldots, 2l\} \ \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$ e $\big(i_k, \ldots, i_{k+2m-1}\big) \notin J_m, \forall m \in \{1, \ldots, l-1\}$, $k \geq 1$ e $k+2m-1 \leq 2l$.

Lema 1: Para $l \geq 3$ temos: $I\!P\Big(\{I(1), \ldots, I(2l)\} \in J_l\Big) \leq \frac{8}{N^3}$.

Dem : $I\!P\Big(\{I(1), \ldots, I(2l)\} \in J_l\Big) = \frac{|J_l|}{N^{2l}}$.

Primeiramente notamos que $\big|J_l\big| \leq 2N^{2l-2}$ pois nas duas últimas posições os índices estão fixados a menos de uma permutação.

Agora dividiremos o conjunto J_l em dois conjuntos disjuntos: aqueles em que as três últimas posições são ocupadas por índices distintos entre si e aqueles em que nas três últimas posições aparecem apenas dois índices distintos entre si.

Denotaremos esses conjuntos por J_l' e J_l'' respectivamente.

Temos então que: $\big|J_l\big| = \big|J_l'\big| + \big|J_l''\big|$.

Note que:

a) $\big|J_l'\big| \leq 3! N^{2l-3}$, pois as três últimas posições devem estar fixadas, a menos de uma permutação, para que ocorra retorno.

b) $\big|J_l''\big| \leq N\big|J_{l-1}\big|$, pois eliminando o par que aparece nas três últimas posições temos exatamente um retorno do tipo J_{l-1}; além disso, o algarismo repetido pode assumir no máximo N valores.

Portanto,

$$\frac{\big|J_l\big|}{N^{2l}} \leq \frac{3!\ N^{2l-3}}{N^{2l}} + \frac{N\ |J_{l-1}|}{N^{2l}} \leq \frac{3!\ N^{2l-3}}{N^{2l}} + \frac{N\ 2N^{2l-4}}{N^{2l}} = \frac{8}{N^3}. \quad \blacksquare$$

Introduziremos agora as seguintes variáveis aleatórias:

$S_N = \inf(k \geq 2 : \xi(k) \in V[0, k-1])$, onde

$$V[0, k-1] = \{\xi(0), \ldots, \xi(k-1)\};$$

$\Gamma_1 = \inf(k \geq 2 : I(k) = I(k-1))$,
$\Gamma_l = \inf(k \geq 2l : (I(k-2l+1), \ldots, I(k)) \in J_l)$.

Lema 2: Para $l \geq 3$ temos: $I\!P(\Gamma_l \leq n) \ \leq \ n \ \frac{8}{N^3}$.

Dem :

$$\begin{aligned}
I\!P(\Gamma_l \leq n) &= \sum_{k=2l}^{n} I\!P(\Gamma_l = k) \\
&= \sum_{k=2l}^{n} I\!P\Big((I(j-2l+1), \ldots, I(j)) \notin J_l, j < k; \\
&\bigcap (I(k-2l+1), \ldots, I(k)) \in J_l\Big) \\
&\leq \sum_{k=2l}^{n} I\!P\Big((I(k-2l+1), \ldots, I(k)) \in J_l\Big) \\
&= (n-2l) I\!P\Big((I(1), \ldots, I(2l)) \in J_l\Big).
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando o resultado do Lema 1 temos:

$$I\!P\Big(\Gamma_l \leq n\Big) \leq \frac{8n}{N^3}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2: Para S_N e Γ_1 como definidos anteriormente temos,

$$\lim_{N \to \infty} I\!P\Big(S_N = \Gamma_1\Big) = 1.$$

Dem : Inicialmente observamos que $S_N = \min_{l \geq 1} \Gamma_l$.

Para provarmos este Teorema é suficiente mostrar que:

$$\lim_{N \to \infty} I\!P(\Gamma_1 < N^{1+\delta} < \min_{\frac{N^{1+\delta}}{2} \geq l \geq 2} \Gamma_l) = 1,$$

para algum $\delta > 0$.

Primeiro notamos que :

$$\lim_{N\to\infty} I\!P(\Gamma_1 < N^{1+\delta}) = \lim_{N\to\infty} 1 - I\!P(\Gamma_1 \geq N^{1+\delta})$$
$$= \lim_{N\to\infty} 1 - (1-\frac{1}{N})^{N^{1+\delta}} = 1.$$

Por outro lado,

$$I\!P(N^{1+\delta} < \min_{\frac{N^{1+\delta}}{2}\geq l\geq 2} \Gamma_l) \geq 1 - \frac{2N^{1+\delta}}{N^2} - \sum_{l\geq 3}^{\frac{N^{1+\delta}}{2}} \frac{8N^{1+\delta}}{N^3}.$$

Se tomarmos $0 < \delta < \frac{1}{2}$ a última expressão vai a 1 quando N diverge. Isto conclui a demonstração do Teorema. ■

Corolário 3: Para $0 < \gamma < 1$ temos:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(|\{\xi(0),\ldots,\xi(N^\gamma t)\}| = N^\gamma t + 1\Big) = 1.$$

Dem :

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(|\{\xi(0),\ldots,\xi(N^\gamma t)\}| = N^\gamma t + 1\Big)$$
$$= \lim_{N\to\infty} I\!P\Big(S_N > N^\gamma t\Big) = \lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\Gamma_1 > N^\gamma t\Big)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{N^\gamma t} = 1.$$

■

Corolário 4: A variável aleatória $N^{-1}S_N$ converge em lei para a distribuição Exponencial de parâmetro 1 .

Dem : Basta provarmos que para qualquer $t > 0$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P(S_N > tN) = e^{-t}.$$

Agora, $\left|I\!P\Big(S_N > tN\Big) - I\!P\Big(\Gamma_1 > tN\Big)\right| \leq I\!P\Big(\Gamma_1 \neq S_N\Big)$.

Pelo Teorema 3, $\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\Gamma_1 \neq S_N\Big) = 0$.

Por outro lado,

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(\Gamma_1 > tN\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{Nt} = e^{-t}.$$

Portanto, $\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(S_N > tN\Big) = e^{-t}$. ■

1.4 Demonstração do Teorema 3

Obteremos agora resultados sobre o tempo de retorno do processo $\sigma^+(t)$ ao conjunto $V[0,N^\gamma]$. A partir de agora $V[0,N^\gamma]$ será denotado por F . Considere
$R_N = \inf\Big(t > N^\gamma : \sigma^+(t) \in F\Big)$, e $R_N^\eta = \inf\Big(t > 0 : \sigma^\eta(t) \in F\Big)$.

Proposição 1: Para $0 < \gamma < 1$ e $0 < \delta < \frac{1}{2}$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(R_N > N^{1+\delta}\Big) = 1.$$

Dem : Do Teorema 2 temos que:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\big(\bigcup_{l\geq 2} \Gamma_l < N^{1+\delta}\big) = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N \leq N^{1+\delta}\big)\\
&= \lim_{N\to\infty} I\!P\big(\sigma^+(N^\gamma + 1) = \sigma^+(N^\gamma)\big)\\
&\leq \lim_{N\to\infty} \frac{N^\gamma}{N}.
\end{aligned}$$

Como por hipótese $0 < \gamma < 1$, o limite acima é zero.

Portanto, $\lim_{N\to\infty} I\!P\Big(R_N > N^{1+\delta}\Big) = 1.$ ■

Proposição 2: Seja F fixado de cardinal $N^\gamma, 0 < \gamma < 1$. Para δ tal que $\gamma + \delta < 1$, $\forall\, \eta \notin F$ temos: $\lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N^\eta > N^{1+\delta}\big) = 1$.

Dem : Sem perda de generalidade a demonstração será feita para o processo ξ^η. Primeiramente mostraremos que para uma configuração fixada em F, o processo ξ^η gastará um tempo maior que $N^{1+\delta}$ para encontrá-la quando N diverge.

Fixe $\zeta \in F$. Defina $d(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^\eta(n) - \zeta_i|$ a distância do passeio ξ^η a ζ no instante n. Por hipótese, $d(0) \geq 1$ pois $\eta \notin F$.

Observe que $d(n)$ evolue como o modelo de Ehrenfest; ou seja, uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, \ldots, N\}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{N-i}{N}, & \text{se } j = i+1; \\ \frac{i}{N}, & \text{se } j = i-1. \end{cases}$$

Sejam $n_1 = \inf(n > 1 : d(n) = 2)$, $n_2 = \inf(n > n_1 : d(n) = 2)$, e assim sucessivamente.

A cada retorno ao ponto "2", a probabilidade de em seguida visitar o ponto "0" antes de voltar ao "2" é $\frac{2}{N^2}$.

Seja $K = \inf(k \geq 1 : d(n_k + 2) = 0)$, então o tempo para ξ^η alcançar ζ é maior ou igual a K.

Mas,

$$\begin{aligned} I\!P\big(K > t\big) &= \sum_{j=1}^{\infty} I\!P\big(K = t + j\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} I\!P\big(d(n_1 + 2) \neq 0, \ldots, d(n_{t+j} + 2) = 0\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big(1 - \frac{2}{N^2}\big)^{t+j-1} \frac{2}{N^2} = \big(1 - \frac{2}{N^2}\big)^{t}. \end{aligned}$$

Note que para $t = N^{1+\delta}$ o limite acima vai a zero quando N diverge.

Agora terminaremos a demonstração observando que:

$$
\begin{aligned}
& I\!\!P\big(\xi^\eta(u) \in F, \text{para } u \leq N^{1+\delta}\big) \\
& \leq \sum_{\zeta \in F} I\!\!P\big(d(u) = 0, \text{para } u \leq N^{1+\delta} \mid d(0) = d(\zeta,\eta)\big) \\
& \leq N^\gamma I\!\!P\big(d(u) = 0, \text{para } u \leq N^{1+\delta} \mid d(0) = 1\big) \\
& \leq N^\gamma \Big(1 - \big(1 - \frac{2}{N^2}\big)^{N^{1+\delta}}\Big) \\
& = N^\gamma \Big(1 - \exp\{N^{1+\delta} log(1 - \frac{2}{N^2})\}\Big) \\
& = N^\gamma \Big(1 - \exp\{N^{1+\delta}[-(\frac{2}{N^2} + \frac{4}{2N^4} + \ldots)]\}\Big) \\
& = N^\gamma \Big(1 - \exp\{-2N^{\delta-1} - 2N^{\delta-3} - \frac{8}{3}N^{\delta-5} - \ldots\}\Big) \\
& = N^\gamma \Big(1 - [1 - 2N^{\delta-1} + 2N^{2\delta-2} - \frac{8}{6}N^{3\delta-3} + 4N^{4\delta-4} - \ldots]\Big) + o(N) \\
& = N^\gamma 2N^{\delta-1} + o(N).
\end{aligned}
$$

Portanto passando ao limite e utilizando a hipótese $\gamma + \delta < 1$ temos o resultado. ■

Proposição 3: Para $0 < \gamma < 1$ e qualquer $t(N)$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)N^\gamma}{2^N} = 0 \;\; \text{temos:} \;\; \lim_{N\to\infty} I\!\!P\Big(\; R_N > t(N) \;\Big) \;=\; 1.$$

Dem :

$$
\begin{aligned}
& I\!\!P\Big(R_N \leq t(N)\Big) = I\!\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } t \leq t(N)\Big) \\
& \leq I\!\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } t \leq N^{1+\delta}\Big) \\
& + I\!\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } \; N^{1+\delta} < t \leq t(N)\Big) \\
& = I\!\!P\Big(R_N < N^{1+\delta}\Big) + I\!\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \leq t(N)\Big).
\end{aligned}
$$

Como pela Proposição 1, $\lim\limits_{N\to\infty} I\!P\Big(R_N \le N^{1+\delta}\Big) = 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
& I\!P\Big(R_N \le t(N)\Big) \\
& \le o(N) + I\!P\Big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \le t(N)\Big) \\
& = o(N) + I\!P\big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t < t(N)\big) \\
& - I\!P\big(\sigma^\eta(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \le t(N)\big) \\
& + I\!P\big(\sigma^\eta(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \le t(N)\big) \\
& \le o(N) + \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta)\Big| I\!P\big(\sigma^+(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \le t(N)\big) \\
& - I\!P\big(\sigma^\eta(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \le t(N)\big)\Big| \\
& + \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) I\!P\big(\sigma^\eta(t) \in F, \text{para } N^{1+\delta} < t \le t(N)\big) \\
& \le o(N) + \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta I\!P\big(\sigma^+(N^{1+\delta}) \ne \sigma^\eta(N^{1+\delta})\big) \\
& + \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=N^{1+\delta}}^{t(N)} I\!P\big(\sigma^\eta(t) \in F\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \le o(N) + \sum_{\eta\in H_N} \nu(\eta) \sup_\eta I\!P\big(\sigma^+(N^{1+\delta}) \ne \sigma^\eta(N^{1+\delta})\big) \\
& + \frac{(N^\gamma + 1)t(N)}{2^N}.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite em N, utilizando o Teorema I e a hipótese, temos que a probabilidade acima vai a zero para algum $0 < \delta < 1$.

Portanto, $\lim\limits_{N\to\infty} I\!P\Big(R_N > t(N)\Big) = 1.$ ■

Proposição 4: Para $\delta, \epsilon > 0$ e qualquer $t(N)$ tal que

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{t(N)^{1-\epsilon}\nu(F)}{N(logN+1)} = \infty \text{ temos : } \quad \lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N \le t(N)\big) = 1.
$$

Dem : Considere eventos $A_s = \{\sigma(s) \in F\}$ e defina Z uma variável aleatória positiva da seguinte maneira: $Z = \sum_{s=0}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}}$. Note que $\{Z > 0\} = \{R_N^\eta \le t(N)\}$. Aplicando desigualdade de Cauchy-Schwarz ao produto $Z\mathbf{1}_{\{Z>0\}}$ temos que:

$$\mathbb{P}\big(Z > 0\big) \ge \frac{[E(Z)]^2}{E(Z^2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(Z > 0\big) = \mathbb{P}\big(R_N^\eta \le t(N)\big) &\ge \frac{[E(\sum_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}})]^2}{[E(\sum_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}})^2]} + o(N) \\
&= \frac{[\sum\limits_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbb{P}(A_s)\ ]^2}{E(\sum\limits_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbf{1}^2_{\{A_s\}} + \sum\limits_{u\neq s} \mathbf{1}_{\{A_u\}}\mathbf{1}_{\{A_s\}})} + o(N) \\
&= \frac{(t(N) - N^{1+\delta})^2 \nu(F)^2}{(t(N) - N^{1+\delta})\nu(F) + \sum\limits_{u\neq s} \mathbb{P}(A_u \cap A_s)} + o(N)
\end{aligned}$$

Agora observe que:

a) $\sum\limits_{|u-s|>N^{1+\delta}} \mathbb{P}\big(A_u \cap A_s\big)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1)\mathbb{P}\big(\sigma(k) \in F, \sigma(0) \in F\big) \\
&= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) \\
&\times \Big\{ \sum_{\eta\in F} \nu(\eta) \sum_{\xi\in H_N} \nu(\xi) \Big[\mathbb{P}\big(\sigma^\eta(k) \in F | \sigma(0) = \eta\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- I\!P\big(\sigma^{\xi}(k) \in F|\sigma(0)=\xi\big)\Big] \\
&+ \sum_{\eta\in F} \nu(\eta) \sum_{\xi\in H_N} \nu(\xi) I\!P\big(\sigma(k) \in F|\sigma(0)=\xi\big)\Big\} \\
&\leq \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N)-k+1) \\
&\times \Big[\sum_{\eta\in F} \nu(\eta) \sum_{\xi\in H_N} \nu(\xi) I\!P\big(\sigma^{\eta}(k) \neq \sigma^{\xi}(k)\big) + \nu(F)^2\Big]
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Markov e a majoração que aparece no Teorema 1 obtemos que:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|u-s|>N^{1+\delta}} I\!P\big(A_u \cap A_s\big) \leq \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} \big(t(N)-k+1\big) \\
&\times \big[\sum_{\eta\in F} \nu(\eta) \sum_{\xi\in H_N} \nu(\xi) \frac{N(logN+1)}{k} + \nu(F)^2\big] \\
&= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} \big(t(N)-k+1\big)\big[\nu(F)\frac{N(logN+1)}{k} + \nu(F)^2\big] \\
&\leq t(N)logt(N)\ N(logN+1)\ \nu(F) + t(N)^2\nu(F)^2 \\
&\leq t(N)^{1+\epsilon} N(logN+1)\nu(F) + t(N)^2\nu(F)^2.
\end{aligned}
$$

b) $\displaystyle\sum_{|u-s|<N^{1+\delta}} I\!P\big(A_u \cap A_s\big) \leq t(N)N^{1+\delta}\nu(F).$

Passando ao limite em N temos por hipótese que:

$$\lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N^{\eta} \leq t(N)\big) = 1.$$

Basta mostrarmos agora que :

$$\lim_{N\to\infty} \big|I\!P\big(R_N^{\eta} > t(N)\big) - I\!P\big(R_N > t(N)\big)\big| = 0.$$

Mas pelas Proposições 1 e 2 temos que:

$$\big|I\!P\big(R_N^{\eta} > t(N)\big) - I\!P\big(R_N > t(N)\big)\big| \leq$$

$$\sup_{\eta} I\!P\big(\sigma^{\eta}(N^{1+\delta}) \neq \sigma^{+}(N^{1+\delta})\big).$$

Pelo Teorema 1 segue que a probabilidade acima vai a 0 quando N diverge. ■

OBS: As Proposições 3 e 4 fornecem limitantes para $E(R_N)$ quando N diverge.

Lema 3: Considere $\beta_N = \min(n \in I\!N : I\!P\big(R_N \geq n\big) \leq e^{-1})$. Então, $\lim\limits_{N \to \infty} I\!P\big(R_N \geq \beta_N\big) = e^{-1}$.

Dem : Pela definição de β_N temos que:

$$I\!P\big(R_N \geq \beta_N\big) \leq e^{-1} < I\!P\big(R_N \geq \beta_N - 1\big).$$

Como,

$$0 \leq I\!P\big(R_N \geq \beta_N - 1\big) - I\!P\big(R_N \geq \beta_N\big) \leq I\!P\big(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N\big);$$

concluíremos a demonstração utilizando a propriedade de Markov.

$$\begin{aligned}
&I\!P\big(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N\big) \\
&= I\!P\big(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N \mid \sigma^{+}(\beta_N - 1) \notin F\big) \\
&\times I\!P\big(\sigma^{+}(\beta_N - 1) \notin F\big) \\
&= I\!P\big(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F\big) \times I\!P\big(\sigma^{+}(\beta_N - 1) \notin F\big) \\
&= I\!P\big(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F\big) \times \Big[I\!P\big(\sigma^{+}(\beta_N - 1) \notin F\big) \\
&- \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\big(\sigma^{\eta}(\beta_N - 1) \notin F\big) \; + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\big(\sigma^{\eta}(\beta_N - 1) \notin F\big)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I\!P\big(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F\big) \times \Big[I\!P\big(\sigma^{+}(\beta_N - 1) \notin F\big) \\
&- \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\big(\sigma^{\eta}(\beta_N - 1) \notin F\Big] \\
&+ \frac{2^N - |F|}{2^N} I\!P\big(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F\big) \\
&\leq I\!P\big(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F\big) \times \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \Big[I\!P\big(\sigma^{+}(\beta_N - 1) \notin F\big) \\
&- I\!P\big(\sigma^{\eta}(\beta_N - 1) \notin F\big)\Big] + \frac{2^N - |F|}{2^N} \frac{N^{\gamma}}{N} \\
&\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_{\eta} I\!P\big(\sigma^{+}(\beta_N - 1) \neq \sigma^{\eta}(\beta_N - 1)\big) + \frac{2^N - |F|}{2^N} \frac{N^{\gamma}}{N}.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite quando N diverge temos que o primeiro termo vai a zero pelo Teorema 1 e o segundo vai a zero pelo Corolário 3 e pela hipótese. Portanto, $\lim_{N \to \infty} I\!P\big(R_N \geq \beta_N\big) = e^{-1}$. ■

Notação: $\sigma(\beta_N) = \sigma([\beta_N])$.

Lema 4: Existe um número real α satisfazendo $e^{-1} \leq \alpha < 1$ tal que para N suficientemente grande e qualquer inteiro n temos:

$$I\!P\big(R_N \geq \beta_N n\big) \leq \alpha^n.$$

Dem : A verificação do resultado será feita por indução.

Para $n = 1$ o resultado é por definição. Temos que

$$\beta_N = \min\{n \in I\!N : I\!P\big(R_N \geq \beta_N\big) \leq e^{-1}\}.$$

Assumiremos que a desigualdade vale para algum inteiro n. Provaremos para $n+1$ usando a propriedade de Markov.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N(n+1)\big)\\
&= \sum_{\eta \notin F} \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N n, \sigma(\beta_N n) = \eta\big) \times \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta\big)\\
&\leq \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N n\big) \sup_{\eta \notin F} \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta\big)\\
&\leq \alpha^n \sup_{\eta \notin F} \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta\big).
\end{aligned}
$$

Agora pela Proposição 1 e 2 temos que:

$$
\begin{aligned}
&\big|\mathbb{P}\big(R_N^\eta \geq \beta_N\big) - \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N\big)\big|\\
&= \big|\mathbb{P}\big(R_N^\eta \geq \beta_N, \sigma^\eta(u) \notin F, u \leq N^{1+\delta}\big)\\
&- \mathbb{P}\big(R_N \geq \beta_N, \sigma^+(u) \notin F, u \leq N^{1+\delta}\big)\big|\\
&\leq \sup_\eta \mathbb{P}\big(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})\big).
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 1 temos que a probabilidade acima converge a zero quando N diverge. Assim, para N suficientemente grande temos:

$$\mathbb{P}\big(R_N > \beta_N(n+1)\big) \leq \alpha^n e^{-1} \leq \alpha^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3: Para $0 < \gamma < 1$ temos que: $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{R_N}{\beta_N} > t\Big) = e^{-t}$.

Dem : Para verificarmos que R_N normalizado por β_N tem lei Exponencial de parâmetro 1 quando N diverge basta provarmos que:

a) $\lim_{N\to\infty} \frac{E(R_N)}{\beta_N} = 1$.

b) $\lim_{N\to\infty} \Big|\mathbb{P}\Big(R_N > \beta_N(t+s)\Big) - \mathbb{P}\Big(R_N > \beta_N t\Big)\mathbb{P}\Big(R_N > \beta_N s\Big)\Big| = 0$, para qualquer s, t fixados.

OBS: O segundo item garante que se a lei de $\frac{R_N}{\beta_N}$ converge quando $N \to \infty$, o limite precisa ser uma lei Exponencial (talvez degenerada). Por outro lado, o Lema 3 juntamente com este item implicam que se t

é um número racional positivo, então $\lim_{N\to\infty} I\!P\big(R_N \geq \beta_N t\big)$ existe e é igual a $\exp\{-t\}$. Como a lei Exponencial é absolutamente contínua, isto é suficiente para provar a convergência para todo t real, o que conclui a prova.

prova de a) : $\frac{E(R_N)}{\beta_N} = \frac{1}{\beta_N}\int_0^\infty I\!P\big(R_N > t\big)dt = \int_0^\infty I\!P\big(\frac{R_N}{\beta_N} > t\big)dt.$

Passando ao limite em N e utilizando o Lema 4 podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtendo:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty I\!P\big(\frac{R_N}{\beta_N} > t\big)dt = 1.$$

prova de b) : Primeiramente vamos mostrar o resultado para uma configuração inicial escolhida uniformemente em H_N.

Observe os seguintes fatos:

Fato 1:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\eta\in H_N}\nu(\eta)I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N(t+s)\Big) \\
&-\sum_{\eta\in H_N}\nu(\eta)I\!P\Big(\sigma^\eta(u)\notin F,\ \forall u\in\{1,\dots,\beta_N t\} \\
&\bigcup\{\beta_N t + N^{1+\delta},\dots,\beta_N(t+s)\}\Big)\Big| \\
&\leq \sum_{\eta\in H_N}\nu(\eta)I\!P\Big(\sigma^\eta(u)\in F, \text{para } u\in\{\beta_N t+1,\dots,\beta_N t+N^{1+\delta}\}\Big) \\
&\leq \sum_{\eta\in H_N}\nu(\eta)\sum_{u=\beta_N t}^{\beta_N t+N^{1+\delta}}\sum_{\zeta\in F}I\!P\Big(\sigma^\eta(u)=\zeta\Big) \\
&\leq \frac{N^{1+\delta}\big(N^\gamma+1\big)}{2^N}.
\end{aligned}$$

Assim a probabilidade vai a zero quando N diverge.

Fato 2:

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N s\Big) - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \\
&\times I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\}\Big)\Big| \\
&\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \times I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \in F, \text{para } u \in \{1, \dots, N^{1+\delta}\}\Big) \\
&\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=1}^{N^{1+\delta}} \sum_{\zeta \in F} I\!P\Big(\sigma^\eta = \zeta\Big) \\
&\leq \frac{N^{1+\delta}(N^\gamma + 1)}{2^N}.
\end{aligned}$$

Novamente, quando N diverge a probabilidade vai a zero.

Fato 3: Considere a seguinte expressão:

$$\Big| \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N(t+s)\Big) -$$

$$\sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big) \times \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N s\Big)\Big|.$$

Agora utilizando a propriedade de Markov, e os fatos 1 e 2, temos que a expressão acima é limitada por:

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{\eta \in H_N} \sum_{\kappa \notin F} \nu(\eta) I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t, \sigma^\eta(\beta_N t) = \kappa\Big) \\
&\times \Big[I\!P\Big(\sigma^\kappa(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\}\Big) \\
&- I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\}\Big)\Big]\Big| \\
&\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{\kappa \notin F} \sup_{\kappa \in H_N} I\!P\Big(\sigma^\kappa(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})\Big).
\end{aligned}$$

Assim, passando ao limite quando N diverge e utilizando o Teorema 1 temos que a expressão acima vai a zero.

Resta-nos mostrar agora que:

$$\lim_{N\to\infty}\left|I\!P\Big(R_N > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big)\right| = 0.$$

Com efeito,

$$\left|I\!P\Big(R_N > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(\sigma^+(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big)\right| \leq$$

$$I\!P\Big(R_N < N^{1+\delta}\Big).$$

Da mesma forma,

$$\left|I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big)\right| \leq$$

$$I\!P\Big(R_N^\eta < N^{1+\delta}\Big).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\left|I\!P\Big(R_N > \beta_N t\Big) - I\!P\Big(R_N^\eta > \beta_N t\Big)\right| \\
&\leq \Big|I\!P\Big(\sigma^+(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big) \\
&- I\!P\Big(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}\Big)\Big| \\
&\leq \sup_{\eta \in H_N} I\!P\Big(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})\Big).
\end{aligned}$$

Passando ao limite e utilizando o Teorema 1 temos o resultado. ■

Lema 5: (Lema da Reflexão) Para u, s fixados temos:

$$I\!P\Big(V[0,s] \cap V[s+1, s+u] = \emptyset\Big) = I\!P\Big(V[0, u-1] \cap V[u, u+s] = \emptyset\Big).$$

Dem : Seja $\mathcal{C}$ a classe de conjuntos tal que: $\mathcal{C} = \Big\{(i_1, \dots, i_{2c});\ c = 1, 2, \cdots :\ \sum_{k=1}^{2c} \mathbf{1}_{\{i=i_k\}}$é par para todo $i \in \{1, \dots, N\}\Big\}$. Note que se $\sigma(k) = \eta^{i_1 \dots i_k} = \eta$ então $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{C}$.

Temos que:

$$
\begin{aligned}
&I\!\!P\Big(V[0,s] \cap V[s+1,s+u] = \emptyset\Big) \\
&= I\!\!P\Big(\eta \notin V[s+1,s+u], \ldots, \sigma(s) \notin V[s+1,s+u]\Big) \\
&= I\!\!P\Big((i_1, \ldots, i_{m_1}) \notin \mathcal{C}, \text{para } s+1 \leq m_1 \leq s+u, \\
&\ldots, (i_s, \ldots, i_{m_s}) \notin \mathcal{C}, \text{para } s+1 \leq m_s \leq s+u\Big).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&I\!\!P\Big(V[0,u-1] \cap V[u,u+s] = \emptyset\Big) \\
&= I\!\!P\Big(\sigma(u) \notin V[0,u-1], \ldots, \sigma(u+s) \notin V[0,u-1]\Big) \\
&= I\!\!P\Big((i_{m_1}, \ldots, i_u) \notin \mathcal{C}, \text{para} 1 \leq m_1 \leq u-1, \\
&\ldots, (i_{m_s}, \ldots, i_{u+s}) \notin \mathcal{C} \text{ para} 1 \leq m_s \leq u-1\Big).
\end{aligned}
$$

Portanto temos a igualdade das probabilidades. ■

Corolário 5: Temos que o

$$
\lim_{N \to \infty} I\!\!P\Big(V[0,N^a] \cap V[N^a+1, N^a+N^\gamma+1] \neq \emptyset\Big) = 0.
$$

Dem : Utilizando o Lema 4 temos que:

$$
I\!\!P\Big(V[0,N^a] \cap V[N^a+1, N^a+N^\gamma+1] = \emptyset\Big) =
$$

$$
I\!\!P\Big(V[0,N^\gamma] \cap V[N^\gamma+1, N^a+N^\gamma+1] = \emptyset\Big) =
$$

$$
I\!\!P\Big(R_N > N^a + N^\gamma + 1\Big).
$$

Passando ao limite, pela Proposição 4 temos o resultado. ■

1.5 Demonstração do Teorema 4

Seja $\Theta = \inf\Big(t > 0; \xi(t) \in M\Big)$; ou seja, o tempo que o processo $\xi(t)$ leva para alcançar o conjunto M.

Proposição 5: Para $0 < \gamma < 1$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \overline{E}\big(I\!P(\Theta > N^{\gamma}t\ )\big) = e^{-t}.$$

Dem : Notamos primeiro que para $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ fixado:

$$I\!P\Big(\Theta > N^{\gamma}t\Big) =$$

$$\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}} \frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1}\notin M\}} \cdots \frac{1}{N} \sum_{i_{N^{\gamma}t}=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^{\gamma}t}}\notin M\}}.$$

Denotaremos por
$F_1(N) = \{(i_1,\ldots,i_{N^{\gamma}t}) \in \{1,\ldots,N\}^{N^{\gamma}t}, \forall\ l = 1,\ldots,N^{\gamma}t, \eta^{i_1\ldots i_l} \notin \{\eta,\eta^{i_1},\ldots,\eta^{i_1\ldots i_{l-1}}\}\}$; e por $F_2(N) = \{1,\ldots,N\}^{N^{\gamma}t} \bigcap F_1^c(N)$.

Seja $i' = (i_1,\ldots,i_{N^{\gamma}t})$ então, $\overline{E}\Big(I\!P(\Theta > N^{\gamma}t)\Big) =$

$$\frac{1}{N^{N^{\gamma}t}} \sum_{i'\in F_1(N)} \overline{E}(\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}} \ldots \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^{\gamma}t}}\notin M\}})+$$

$$\frac{1}{N^{N^{\gamma}t}} \sum_{i'\in F_2(N)} \overline{E}(\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}} \ldots \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^{\gamma}t}}\notin M\}}) =$$

$$\frac{|F_1(N)|}{N^{N^{\gamma}t}}(1-\frac{1}{N^{\gamma}})^{N^{\gamma}t+1} + \frac{1}{N^{N^{\gamma}t}} \sum_{i'\in F_2(N)} \overline{E}(\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}} \ldots \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^{\gamma}t}}\notin M\}}).$$

Pelo Corolário 3,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|F_1(N)|}{N^{N^{\gamma}t}} = 1, \text{ e } \quad \lim_{N\to\infty} \frac{|F_2(N)|}{N^{N^{\gamma}t}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{N\to\infty} \overline{E}\Big(I\!\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{N^\gamma t}\Big)^{N^\gamma t+1} = e^{-t}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4: Para $0 < \gamma < 1$, e $\epsilon > 0$, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \overline{I\!\!P}\Big(|I\!\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \epsilon\Big) = 0.$$

Dem : Utilizando a desigualdade de Chebyshev temos:

$$\overline{I\!\!P}\Big(|I\!\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \epsilon\Big) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\overline{E}\Big[\Big(I\!\!P(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}\Big)^2\Big] =$$

$$\frac{1}{\epsilon^2}\Big[\overline{E}\Big[\Big(I\!\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big] - 2e^{-t}\overline{E}\Big(\ I\!\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big) + \overline{E}(e^{-t})^2\Big] =$$

$$\frac{1}{\epsilon^2}\Big[\overline{E}\Big[\Big(I\!\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big] - 2e^{-t}\overline{E}\Big(I\!\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big) + e^{-2t}\Big].$$

Resta-nos calcular $\overline{E}\Big[\Big(I\!\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big]$.

Para $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ fixado,

$$I\!\!P\big[\big(\Theta > N^\gamma t\big)^2\big] =$$

$$\Big\{\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}}\frac{1}{N}\sum_{i_1=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1}\notin M\}}\cdots\frac{1}{N}\sum_{i_{N^\gamma t}=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\notin M\}}\Big\}\times$$

$$\Big\{\mathbf{1}_{\{\eta\notin M\}}\frac{1}{N}\sum_{i_1^*=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1^*}\notin M\}}\cdots\frac{1}{N}\sum_{i_{N^\gamma t}^*=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\eta^{i_1^*\cdots i_{N^\gamma t}^*}\notin M\}}\Big\}.$$

Agora considere $G^* = \big\{\eta^{i_1^*}, \ldots, \eta^{i_1^*\cdots i_{N^\gamma t}^*}\big\}$. Pelo Corolário 3,

$$\lim_{N\to\infty} |G^*| - N^\gamma t = 0.$$

Por outro lado, fixado $\big(i_1^*, \ldots, i_{N^\gamma t}^*\big)$ temos pelo Teorema 3 que:

$$\lim_{N\to\infty} I\!\!P\Big(\{\eta, \ldots, \eta^{i_1\cdots i_{N^\gamma t}}\}\bigcap\{\eta^{i_1^*}, \ldots, \eta^{i_1^*\cdots i_{N^\gamma t}^*}\} \neq \emptyset\Big) = 0.$$

Assim,

$$\overline{E}\big[I\!P(\Theta > N^\gamma t)^2\big] = \big(1 - \frac{1}{N^\gamma}\big)\big(1 - \frac{1}{N^\gamma}\big)^{2|G^*|} + o(N).$$

Passando ao limite em N temos que :

$$\lim_{N\to\infty} \overline{E}\Big[\Big(I\!P(\Theta > N^\gamma t)\Big)^2\Big] = \exp\{-2t\}.$$

Portanto, com o resultado da Proposição 5:

$$\lim_{N\to\infty} \overline{I\!P}\big[|I\!P(\Theta > N^\gamma t) - \exp^{-t}| > \epsilon\big] = 0. \qquad \blacksquare$$

1.6 Bibliografia

[**1**] M. Cassandro, A. Galves, P. Picco, *Dynamical Phase Transition in Disordered Systems: the study of a random walk model*, Annales de L. Institut Henri Poincaré, **55-2**, 689, 1991.

[**2**] M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri, M. E. Vares, *Metastable behavior of stochastic dynamics: a pathwise approach*, J. Stat. Phys., **35**, 603, 1984.

[**3**] R. Bellman, T. H. Harris, Pac. J. Math., **1**, 179, 1951.

[**4**] F. Spitzer, *Principles of Random Walk*, Princeton, Van Nostrand, 1964.

[**5**] W. Feller, *An Introdution to Probability Theory and its Applications*, **1**, N. Y. John Wiley, 1950.

[**6**] C. Peixoto, *Tempos Exponenciais e Aproximação do Equilíbrio Para um Passeio Aleatório no Hipercubo*, Tese IME-USP, 1992.

Capítulo 2

Introdução aos Sistemas Markovianos de Partículas

Sistemas Markovianos de Partículas é um dos ramos da Probabilidade fortemente influenciado por questões propostas pela Física e Biologia. Tais modelos surgiram na década de 60 do século passado e até hoje despertam interesse por parte de especialistas.

Os primeiros resultados importantes foram obtidos por Frank Spitzer e por Roland Dobrushin, mas foi o livro de Thomas Liggett, *Interacting Particle Systems*, em 1985, que divulgou de maneira sólida os alicerces da Teoria.

Um sistema consiste de muitas partículas onde cada uma delas, na ausência de interação, evolue de acordo com um processo estocástico bem definido no espaço e no tempo, porém, é imposta a este mecanismo de evolução uma interação entre as partículas e como resultado desta pertubação o movimento das mesmas perde o caráter Markoviano apesar do sistema, como um todo, continuar satisfazendo a propriedade de Markov.

Considere E um conjunto enumerável representando as possíveis posições das partículas e Ω um conjunto finito de estados para as mesmas. Usualmente temos $E = \mathbb{Z}^d$, com $d \geq 1$ a dimensão do espaço e $\Omega = \{0, 1\}$ o espaço de estados da partícula. Denotamos por Ω^E o conjunto de configurações possíveis que será o espaço de estados do processo.

Representaremos por $\{\eta_t : t \geq 0\}$ o processo assumindo valores em Ω^E e sua evolução poderá ser descrita pelas taxas (intensidades) em que ocorre mudança de uma configuração para outra. No caso em que E é finito, descrever a transição de η para $\xi, \eta \to \xi$, com $\eta \neq \xi, \eta, \xi \in \Omega^E$, significa afirmar que

$$\mathbb{P}\big(\eta_t = \xi \ / \ \eta_0 = \eta\big) = c\ t + o(t) \ \text{ quando } t \to 0^+,$$

onde $c = c(\eta, \xi)$ é a taxa de transição de η para ξ, e $o(t)$ é alguma função $f(t)$ tal que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$.

A relação entre o processo e suas taxas de transição é dada pelo gerador infinitesimal Λ de $\{\eta_t : t \geq 0\}$, aplicado em funções cilíndricas, da forma

$$\Lambda f(\eta) = \sum_{\xi} c(\eta, \xi) \ \big[f(\xi) - f(\eta)\big];$$

onde f cilíndrica é uma função que depende de um número finito de coordenadas.

As escolhas das taxas satisfazem condições para que $\Lambda f(\eta) < \infty$ para toda f cilíndrica.

As distribuições estacionárias (ou invariantes) do processo são determinadas pelo gerador infinitesimal. Dizemos que μ é uma distribuição estacionária para $\{\eta_t : t \geq 0\}$ se e somente se $\int \Lambda f d\mu = 0$.

Em geral, as transições de uma configuração para outra são locais, isto é, somente uma ou duas posições se alteram e tais taxas dependem apenas de posições *próximas* de onde ocorre a modificação.

No caso em que a mudança ocorre em apenas uma posição do espaço, por exemplo, temos que a taxa $c(x,\eta)$ de alterar a posição x quando a configuração é $\eta \in \Omega^E$ é dada por

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{P}\big(\eta_{t+h}(x) \neq \eta(x) \quad / \ \eta_t = \eta\big) = c(x,\eta).$$

Muitos modelos nesta área tem descrições simples e sua evolução pode ser bem entendida. A questão de provar rigorosamente alguns resultados para um modelo tem-se mostrado muitas vezes difícil e elaborada, e talvez por isso tem atraído o interesse de muitos. Apenas para ilustrar, vamos considerar o modelo de um ímã. Seja $E = \mathbb{Z}^d$ os átomos do ferro e $\Omega = \{-1,+1\}$ os possíveis giros do átomo, (uma tradução livre de *spins of an atom*). Vamos definir T como a temperatura e seja $\beta = T^{-1} > 0$ a recíproca positiva da temperatura. Para uma configuração $\eta \in \{-1,+1\}^{\mathbb{Z}^d}$, o giro no átomo $x \in \mathbb{Z}^d$ muda de sinal com taxa:

$$c(x,\eta) = \exp\{-\beta \sum_{y:||y-x||=1} \eta(x)\eta(y)\}$$

Este exemplo é conhecido como *Modelo de Ising estocástico*. Note que a taxa é pequena se o valor de $\eta(x)$ concorda com a maioria de seus vizinhos (estão alinhados) e é grande se o valor de $\eta(x)$ difere da maioria de seus vizinhos. O propósito desta taxa é modelar a intenção dos átomos preferirem ficar alinhados, ou com mesmo sinal de giro, de seus vizinhos mais próximos.

Considere agora a situação em que o ferro é aproximado de um forte campo magnético positivo, tal que a maioria dos átomos prefere ter giro $+1$, e de repente afastamos o campo externo, e observamos a evolução temporal do processo $\{\eta_t : t \geq 0\}$ com taxa $c(x, \eta)$. Para simplificar, considere $\eta_0 \equiv +1$, isto é, $\eta_0(x) = +1$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, e considere a questão do que acontece com a distribuição do número de átomos que terão giro $+1$ após um tempo de espera grande. Em particular, considere a questão de quando

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\big(\eta_t(0) = +1\big) > \frac{1}{2}.$$

Se o limite existe e a resposta é sim, então nosso modelo apresentou uma situação em que o campo externo magnetizou o ferro. Observações físicas afirmam que a magnetização ocorre para temperaturas baixas mas não em temperaturas altas, o que é provado rigorosamente pelo modelo ($d \geq 2$), e referido como *transição de fase* do modelo de Ising estocástico.

O valor de β que divide a fase do regime, presença ou não de magnetização, é denotado por β_c, o valor crítico do modelo. Quando estudamos evoluções estocásticas muitas vezes estamos interessados em possíveis estados de equilíbrio, isto é, situações em que obtemos uma Lei de Probabilidade para as possíveis configurações que não depende de t. O modelo de Ising em equilíbrio é um antigo problema matemático, e a evolução estocástica tem recebido fortes contribuições nas últimas décadas. R. Schonmann (1994) estudou a situação em que a taxa do modelo de Ising estocástico é alterada para incluir um campo externo h, isto é:

$$c(x, \eta) = \exp\{-\beta\eta(x)\big[\sum_{||y-x||=1} \eta(y) + h\big]\}.$$

O campo externo provoca uma escolha do sinal do giro pelo átomo segundo o sinal de h. Foi mostrado que se $h \neq 0$ o processo $\{\eta_t : t \geq 0\}$ tem um única distribuição estacionária μ_h qualquer que seja $\beta > 0$.

A Lei de Probabilidade μ_h satisfaz:

$$\lim_{h \to 0^-} \mu_h = \mu_- \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^+} \mu_h = \mu_+.$$

É natural considerar o caso simétrico, $h = 0$, e imaginar então que existem duas configurações de equilíbrio. Vamos considerar o processo com configuração inicial $\eta_0 \equiv -1$ e um campo externo $h > 0$ pequeno. Durante a evolução do processo, possivelmente os átomos não percebam o campo externo e as configurações podem ser descritas aproximadamente pela Lei de Probabilidade μ_-. Após um tempo que pode ser longo, o efeito do campo externo $h > 0$ começa a aparecer e o processo tenta ir para a Lei μ_+, formando conglomerados de átomos com giro de sinal $+$ até se tornarem suficientemente grandes (o tamanho dependendo de h e t) para ser formado e começarem a influenciar a dinâmica o que mais cedo ou mais tarde leva para a Lei μ_+. O Teorema de Schonmann apresenta a correta magnitude de h e t e pode ser enunciado como segue:

Teorema: Para $d \geq 2$ e β suficientemente grande, existem duas constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tais que se $h \to 0^+$ e $t \to \infty$, então η_t converge em distribuição para μ_- se $\limsup h^{d-1} \ln t < c_1$, e converge em distribuição para μ_+ se $\liminf h^{d-1} \ln t > c_2$.

O fenômeno de aparentemente estar em uma situação de equilíbrio por um longuíssimo tempo e depois, conseqüência de uma sucessão de eventos raros, convergir para o verdadeiro equilíbrio é característica de sistemas que apresentam um comportamento metaestável.

Sistemas Markovianos que possuem mais do que uma distribuição de equilíbrio, por exemplo, passeios aleatórios com mais de um estado absorvente, são comuns. O interessante é que muitos modelos de partículas interagentes, dos mais simples possíveis, apresentam esta característica e muitos deles apresentam comportamento metaestável.

Um modelo clássico, com amplas aplicações em propagação de doenças contagiosas é o Processo de Contato.

O modelo em que uma partícula pode, em uma posição vizinha incluir uma nova partícula, ou desaparecer, modelando temporalmente a situação de contágio e desenvolvimento de uma doença, é conhecida na literatura como o Processo de Contato. Este sistema de partículas possui propriedades tais como aditividade, atratividade e a auto-dualidade, que serão apresentadas e discutidas na próxima seção, mas não é um processo de Markov reversível. Além de apresentar transição de fase segundo um parâmetro de contaminação, apresenta uma estrutura de medida de equilíbrio próxima em algum sentido daquela do Ising estocástico, onde para o parâmetro equivalente β pequeno haveria apenas uma única Lei de equilíbrio e para β grande a situação metaestável pode ocorrer.

Certamente é um dos modelos de Sistemas de Partículas mais bem estudados, mas ainda possue muitas perguntas sem respostas. Em particular, a medida de equilíbrio não trivial, que corresponde ao caso de existir pelo menos uma partícula no sistema, no caso supercrítico, isto é, o parâmetro de infecção supera um certo valor crítico, até hoje não é conhecida explicitamente e muito menos o valor exato do parâmetro crítico que determina a transição de fase. O modelo foi introduzido por Harris (1974) e hoje existem pelo menos uma centena de artigos em revistas renomadas além de diversas resenhas sobre o tema assim como livros dedicados ao assunto.

Assim como o Modelo de Ising pode ser referenciado na literatura como um estudo de estados de equilíbrio e na situação de evolução temporal, como o Ising estocástico, o Modelo de Contato pode ser visto como um caso de percolação orientada quando a evolução temporal não entra em consideração.

2.1 Processo de Contato

Considere $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ definido em $\{0,1\}^E$ e $\lambda > 0$ um parâmetro do processo. Vamos denotar por $i \sim j$ quando duas posições em E são vizinhas. Então para cada $i \in E$ temos que $\eta \to \eta^i$, ocorre com uma taxa definida por

$$c(\eta, \eta^i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta(i) = 1, \\ \lambda \times |\{j \sim i : \eta(j) = 1\}| & \text{se } \eta(i) = 0, \end{cases}$$

onde $|A|$ é o cardinal do conjunto A, e $\eta^i(j)$ é definido por $\eta(j)$ quando $i \neq j$ e por $1 - \eta(j)$ quando $i = j$,

A interpretação é que as posições com $\eta(i) = 1$ estão infectadas, enquanto aquelas com $\eta(i) = 0$ são saudáveis, para todo $i \in E$. Posições infectadas passam a ser saudáveis após um tempo aleatório com distribuição Exponencial de taxa 1, e posições saudáveis passam a ser infectadas com uma taxa λ proporcional ao número de posições vizinhas que estão infectadas. Se E é finito, existe um única distribuição de probabilidade estacionária para o processo, isto é, atingindo a configuração $\eta(i) \equiv 0$ nada mais acontece. Denotamos essa medida de probabilidade estacionária por $\delta_\emptyset$.

No caso em que $E = \mathbb{Z}^d$, para algum $d \geq 1$, existe um valor crítico para o parâmetro $\lambda_c(d) \in \left(\frac{1}{2d-1}, \frac{2}{d}\right)$, (mas o valor exato de $\lambda_c(d)$ ainda não é conhecido), tal que:

- Se $\lambda \leq \lambda_c(d)$ então a única distribuição estacionária do processo é $\delta_\emptyset$ e para qualquer condição inicial o processo $\{\eta_t : t \geq 0\}$ converge em distribuição para $\delta_\emptyset$. A igualdade para essa afirmativa, isto é, para $\lambda = \lambda_c(d)$ existe uma única medida estacionária, foi provada apenas nos anos 90 do século passado e foi considerado por muito tempo um dos problemas em aberto mais conhecido da área.

- Se $\lambda > \lambda_c(d)$ todas as medidas de probabilidade estacionárias do processo são combinações convexas de duas medidas, a saber, $\delta_\emptyset$ e ν, para alguma $\nu \neq \delta_\emptyset$. Nesse caso o Processo de Contato é dito supercrítico. Além disso, $\{\eta_t : t \geq 0\}$ converge em distribuição para ν sempre que a condição inicial tiver um número não finito de posições contaminadas.

Liggett (1985) mostrou, entre outras coisas, que o Processo de Contato $\{\eta_t : t \geq 0\}$ em dimensão $d = 1$, com $\lambda = \lambda_c(1)$ e configuração inicial $\eta_0 \equiv 1$, converge em distribuição para $\delta_\emptyset$, mas para todo $i \in E$, $\eta_t(i) = 1$ com probabilidade 1 para t suficientemente grande. No Apêndice pode ser encontrado outro exemplo de que convergência em distribuição não implica em convergência quase certa.

Vamos definir uma ordem parcial no conjunto das distribuições de probabilidade definidas em $\{0,1\}^E$ por $\mu \leq \nu$ se para toda função crescente limitada em $\{0,1\}^E$ tivermos que $\int f d\mu \leq \int f d\nu$. Foi demonstrado em Liggett (1985) que isto é equivalente a existência de uma distribuição de probabilidade γ definida em $\{0,1\}^E \times \{0,1\}^E$ com marginais μ e ν satisfazendo $\gamma\big(\{(\eta,\xi) : \eta \leq \xi\}\big) = 1$, onde $\eta \leq \xi$ significa que $\eta(i) \leq \xi(i)$ para todo $i \in E$.

Definição: (Acoplamento Básico) Realização conjunta $\{\big(\eta(t), \xi(t)\big) : t \geq 0\}$ de dois processos de Markov no mesmo espaço de probabilidade. O acoplamento básico consiste em realizar duas versões do processo com estados iniciais diferentes usando a mesma realização dos Processos de Poisson usados na construção gráfica.

Temos que $T := \inf\{t > 0 : \eta_t = \xi_t \ / \ \eta_0 = \eta \neq \xi = \xi_0\}$ é aleatório e pode ser $+\infty$, e por construção $\eta_t^\eta = \xi_t^\xi \ \forall \ t \geq T$, onde η_t^ζ é uma notação para o valor do processo no instante t com condição inicial $\zeta \in E$.

O Processo de Contato é *atrativo*, isto é, para quaiquer dois processos acoplados com condições iniciais η e ξ, com $\eta \leq \xi$, temos que $\eta_t \leq \xi_t$ para todo $t \geq 0$. Considere $\mu S(t)$ a distribuição de probabilidade do processo no instante t com distribuição inicial μ.

O semigrupo $S(t)$ do processo $\{\eta_t : t \geq 0\}$ é definido para funções f por $S(t)f(\eta) = \mathbb{E}^\eta f(\eta_t) = \mathbb{E}[f(\eta_t) \ / \ \eta_0 = \eta]$. Temos:

$$\mathbb{E}^\mu f(\eta_t) = \int \mathbb{E}^\eta f(\eta_t) d\mu = \int S(t) f d\mu = \int f d[\mu S(t)].$$

O Processo de Contato pode ser identificado como um conjunto $A = \{i \in \mathbb{Z}^d : \eta(i) = 1\} \subset \mathbb{Z}^d$ de posições infectadas. Isto define um processo de Markov $\{A_t : t \geq 0\}$ tal que $A \to A \cap \{i\}^c$, para $i \in A$, com taxa 1 e $A \to A \cup \{i\}$, para $i \notin A$, com taxa $\lambda \times |j \in A : ||j - i|| = 1|$.

Observe que o conjunto $\emptyset$ é um estado absorvente. O processo, ou as infecções sobrevivem se $\mathbb{P}\big(A_t \neq \emptyset, \ \forall \ t \geq 0 \ / \ A_0 = \{0\}\big) > 0$.

Uma das propriedades do Processo de Contato é sua *auto-dualidade* que pode ser expressa por:

$$\mathbb{P}\big(0 \in A_t \ / \ A_0 = \mathbb{Z}^d\big) = \mathbb{P}\big(A_t \neq \emptyset \ / \ A_0 = \{0\}\big).$$

Como $\mathbb{P}\big(A_t \cap \{ \text{ algum subconjunto de } \mathbb{Z}^d\} \neq \emptyset \ / \ A_0 = \mathbb{Z}^d\big)$ são estocasticamente decrescentes em t, segue que existe uma distribuição de probabilidade estacionária não trivial ($\neq \delta_\emptyset$) para o processo se e somente se o processo sobrevive. Essa distribuição de probabilidade é dita a medida invariante extremal não-trivial. É natural concordar que existe um valor $\lambda_c \in [0, \infty]$ tal que o processo sobrevive para $\lambda > \lambda_c$ e não sobrevive para $\lambda < \lambda_c$. Harris (1974) foi o primeiro a provar que o valor crítico é finito. Um pouco mais elaborado é o argumento de Bezuidenhout e Grimmet (1990) que mostraram que o processo se extingue quando $\lambda = \lambda_c$.

Iremos estabelecer no próximo Capítulo o comportamento metaestável do processo de contato $d-$dimensional para qualquer parâmetro de infecção que seja superior ao valor crítico.

2.2 Processo de Exclusão

Considere o espaço de estados do processo definido por $\{0,1\}^E$, onde E é um conjunto enumerável. Defina p_{ij}, para $i, j \in E$, como

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_j p_{ij} = 1.$$

Partículas movem-se em E de acordo com a seguinte regra:

a) Existe no máximo uma partícula em cada posição de E.
b) A partícula em i espera um tempo com Lei de Probabilidade Exponencial de parâmetro 1 e então escolhe j com probabilidade p_{ij}. Se j não está ocupado no instante do salto, a partícula em i salta para a posição j.

Definimos o processo $\{\eta_t(i) : t \geq 0\}$ por:

$\eta_t(i) = 1$ se i está ocupado no instante t e $\eta_t(i) = 0$ se i está vazio.

Para $\eta \in \{0,1\}^E, i, j \in E$, defina $\eta^{ij} \in \{0,1\}^E$ por:

$$\eta^{ij}(k) = \begin{cases} \eta(j) \text{ se } k = i, \\ \eta(i) \text{ se } k = j, \\ \eta(k) \text{ se } k \neq i, j. \end{cases}$$

Para f cilíndrica seja $\Lambda f(\eta) = \sum\limits_{i,j:\eta(i)=1-\eta(j)=1} p_{ij}\left[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)\right]$.

Definindo para cada par $i, j \in E$, Exponenciais independentes de parâmetro λ_{ij}, observe que $p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum\limits_j \lambda_{ij}}$. De fato, temos que a distribuição de probabilidade do mínimo de Exponenciais independentes é também uma Exponencial com parâmetro dado pela soma dos parâmetros, e a probabilidade de que o mínimo ocorra na $j-$ésima variável é dada pelo seu parâmetro, λ_{ij}, dividido pela soma dos parâmetros das Exponenciais envolvidas $\sum\limits_j \lambda_{ij}$.

Uma condição para que tudo esteja bem definido é dada por: $\sup\limits_j \sum\limits_i p_{ij} < \infty$, o que ocorre em pelo menos duas situações importantes, a saber: $p_{ij} = p_{ji}$ (simétrica) e $p_{ij} = p_{0,j-i}$ (homogênea).

(Simétrico) $\sum\limits_i p_{ij} = \sum\limits_i p_{ji} = 1$. Portanto $\sup\limits_j \sum\limits_i p_{ij} = 1$.
(Homogêneo) $\sum\limits_i p_{ij} = \sum\limits_i p_{0j-i} = \sum\limits_k p_{0k} = 1$. Portanto $\sup\limits_j \sum\limits_i p_{ij} = 1$.

No Processo de Exclusão quando a partícula move-se de i para j, tanto $\eta(i)$ quanto $\eta(j)$ mudam de valor. Como o número de partículas não se altera (sistema conservativo) temos diferenças qualitativas em relação aos Processos de Ising Estocástico e de Contato. Para ilustrar algumas idéias vamos descrever o Processo de Exclusão Simples (interação com o vizinho mais próximo) em dimensão 1 seguindo os passos descritos por Liggett (1997), com o intuito de facilitar a leitura do que segue.

A partícula em $i \in \mathbb{Z}$ espera um tempo Exponencial de taxa 1 e então tenta mover-se para $i+1$ com probabilidade p e para $i-1$ com probabilidade $1-p$, onde $0 \leq p \leq 1$. Quando a posição de destino da partícula está ocupada nada acontece (isto é, a interação de exclusão é sobreposta).

A Lei de probabilidade produto $\nu_\rho = \rho^{|A|}$ quando existem partículas em $A \subset E$ com densidade ρ é invariante para o processo qualquer que seja $0 \leq \rho \leq 1$. Spitzer (1974) mostrou que as medidas produto são as únicas extremais quando $p = \frac{1}{2}$. Quando $p \neq \frac{1}{2}$ existem outras invariantes extremais, mostrado por Liggett (1976) usando técnicas de acoplamento, medidas estas com suporte em

$$\{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \sum_x \eta(x)\ [1-\eta(x+1)] < \infty\},$$

quando η é constante fora de um conjunto finito.

O processo acoplado (η_t, ξ_t) é definido por: A mesma construção dada pelo Processo de Poisson é usado em ambas evoluções dos Processos de Exclusão assim como a mesma probabilidade p de escolha do vizinho a ser a nova possível posição da partícula.

Defina uma discrepância em $i \in E$ no instante $t \geq 0$, quando $\eta_t(i) \neq \xi_t(i)$. Observe que uma discrepância pode mover-se ou desaparecer, mas não pode ser criada. Temos então que a densidade de posições onde $\eta_t(i) \neq \xi_t(i)$, não cresce como uma função de t. Quando o processo acoplado $\{(\eta_t, \xi_t) : t \geq 0\}$ estiver em equilíbrio, a densidade (estamos considerando aqui apenas leis invariantes por translações) tem que permanecer constante em t.

Agora siga os seguintes passos (apresentados em Liggett (1997)): Ache as leis invariantes por translação extremais para o processo acoplado e chame suas marginais de μ e ν_ρ. Verifique que a lei conjunta dos dois processos tem probabilidade 1 quando $\eta \leq \xi$ ou quando $\xi \leq \eta$. Mostre que para todo $\rho \in [0,1]$, vale que $\mu \leq \nu_\rho$ ou $\mu \geq \nu_\rho$. Conclua que $\mu = \nu_\rho$ para algum $\rho \in [0,1]$.

Liggett também relacionou a lei produto μ_t do Processo de Exclusão como uma aproximação discreta da equação diferencial parcial de Burger, isto é, uma aproximação discreta para a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1-2p)\frac{\partial}{\partial x}\big[u(1-u)\big] = 0,$$

pode ser dada pela função $u(x,t) = \mu_t\{\eta : \eta(x) = 1\}$.

Este tipo de conexão hoje é conhecido como lei hidrodinâmica do processo e uma excelente referência para essa área de estudo, que inclui outras equações diferenciais relacionadas com outros processos de partículas, é o livro *Scaling Limits of Interacting Particle Systems* escrito por C. Kipnis e C. Landim (1999).

2.3 Ising Estocástico

Seja $S = \{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ o espaço de estados do processo. Para $\eta \in S$ considere $\eta(i)$ o giro na posição $i \in \mathbb{Z}^d$. As taxas (ou intensidades) do processo podem ser descritas por uma função real definida nos subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$, dita o *potencial* J_{ij} de interação para os pares $i,j \in \mathbb{Z}^d$.

Se $J_{ij} = J_{(i+k)\ (j+k)}$ para todo i,j e $k \in \mathbb{Z}^d$, o processo é dito invariante por translação. Quando $J_{ij} = 0$ se $||i-j|| > L$ para algum $L \in \mathbb{R}_+$ o processo é dito de amplitude finita, onde definimos $||x|| = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, d\}$.

A relação entre as taxas e o potencial é dada por:

$$c(x,\eta) = \exp\{-\sum_{i,j} J_{ij}\eta(i)\eta(j)\}.$$

Quando $J_{ij} > 0$ (caso atrativo) a taxa é menor quando $\eta(i)$ e $\eta(j)$ tem o mesmo sinal. Se $J_{ij} < 0$ a taxa é menor quando $\eta(i)$ e $\eta(j)$ são de sinais diferentes.

Considere $\mathcal{F}_A \equiv$ a menor $\sigma-$álgebra gerada por $\{\eta(i) : i \in A\}$. Dizemos que uma probabilidade condicional μ em $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d}$ é um *estado de Gibbs* com campo externo $h = 0$ se

$$\mu(\eta\ /\ \mathcal{F}_{A^c})(\eta) = \mu_A(\eta\ /\ \sigma), \quad \text{para todo } \sigma \in S$$

e todo conjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$, onde

$$\mu_A(\eta \ / \ \sigma) \propto \exp\{-\big(\sum_{\{ij\}\subset A} J_{ij}\eta(i)\eta(j) + \sum_{i\in A}\sum_{j\in A^c} J_{ij}\eta(i)\eta(j)\big)\}.$$

O símbolo $\propto$ denota proporcional e o valor que torna uma probabilidade é denotado por $Z(A)$. O conjunto dos estados de Gibbs associados aos J_{ij} é denotado por $\mathcal{G}$. O Modelo de Ising Estocástico é um Processo de Markov, com evolução local e com espaço de estados S tais que as medidas de probabilidade em $\mathcal{G}$ são invariantes.

A taxas (ou intensidades) do processo satisfazem:

$$\mathbb{P}\big(\eta_{t+h}(k) = -\eta_t(k) \ / \ \eta_t\big) = c(k,\eta) \ h + o(h).$$

Para $\eta \in S$ e $k \in \mathbb{Z}^d$ defina

$$\eta^k(j) = \begin{cases} \eta(j) & \text{se } j \neq k, \\ -\eta(k) & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Se o processo é reversível, ou seja, $\mu(\eta)c(k,\eta) = \mu(\eta^k)c(k,\eta^k)$, dizemos que possui uma dinâmica de *Glauber*. O gerador infinitesimal do processo para funções cilíndricas é dado por

$$\Lambda f(\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c(k,\eta) \ \big[f(\eta^k) - f(\eta)\big].$$

A dinâmica de Glauber superposta ao Processo de Exclusão será discutida no Capítulo 4.

2.4 Bibliografia

[**1**] T. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer, Berlin, 1985.

[**2**] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Third Edition, Wiley, 1995.

[**3**] W. Feller, *An Introdution to Probability Theory and its Applications*, Vol I and II, Second Edition, 1971.

[**4**] R. Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, Wordworth and Brooks/Cole, Advances Books and Software. Pacific Grove. California, 1988.

[**5**] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge, 1991.

[**6**] M. Bramson, T. Liggett, T. Mountford, *Characterization of stationary measures for one dimensional exclusion processes*, Ann. Probab., 2002.

[**7**] P. Ferrari, J. Lebowitz and E. Speer, *Blocking measures for asymmetric exclusion processes via coupling*, Bernoulli, 2001.

[**8**] T. Liggett, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*, Springer, Berlin, 1999.

[**9**] T. E. Harris, *Contact interactions on a lattice* Ann. Probab., **2**, 969–988, 1974.

[**10**] C. Bezuidenhout and G. Grimmett, *The Critical Contact Process Dies Out* Ann. Probab., **18**, No. 4, 1462-1482, 1990.

[**11**] R. Holley and T. M. Liggett, *The Survival of Contact Process* Ann. Probab., **6**, 198-206, 1978.

[**12**] J. Lebowitz and R. Schonmann, *Pseudo free energies and large deviations for nongibbsian FKG measures* Prob. Theory Rel. Fields, **77**, 49-64, 1988.

[**13**] A. Galves, F. Martinelli and E. Olivieri, *Large-Density Fluctuations for the One-Dimensional Supercritical Contact Process* Journal of Statistical Physics, **55**, 639–648, 1989.

[**14**] R. Durrett and D. Griffeath, *Contact Process in Several Dimensions* Z. Wahrsch. verw. Gebiete, **59**, 535-552, 1982.

[**15**] A. Simonis, *Grandes Flutuações de Densidade e Metaestabilidade no Processo de Contato Supercrítico Multidimensional*, Tese IME-USP, 1995.

[**16**] M. Vares, *Grandes Desvios em Processos Markovianos*, 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1985.

[**17**] P. Ferrari e A. Galves, *Acoplamento e Processos Estocásticos*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1997.

[**18**] S. Barros, A. Pereira, C. Possani and A. Simonis, *Spatially Periodic Equilibria For a Non Local Evolution Equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **9**, N. 4, 937-948, 2003.

[**19**] C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*, Springer, Volume 320, 1999.

[**20**] T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1992.

Capítulo 3

Processo de Contato

3.1 INTRODUÇÃO

O Processo de Contato básico foi introduzido por Harris [1] (1974), e é um dos mais simples sistemas markovianos de partículas não-trivial a tempo contínuo. É simples pois a intensidade da interação com os vizinhos mais próximos é linear e não-trivial pois apresenta *transição de fase*.

Técnicas apresentadas por Bezuidenhout e Grimmett [2] permitem discutir a teoria do processo em dimensão arbitrária. Neste contexto, obteremos resultados para flutuações de densidade e para o fenômeno da metaestabilidade.

Para processos atrativos e invariantes por translação, iniciando de alguma medida invariante, resultados sobre flutuações de densidade foram obtidos nos trabalhos de Lebowitz e Schonmann [3]. Para o Processo de Contato supercrítico unidimensional, seus resultados são válidos para densidades menores que ρ, onde ρ é a densidade do processo em equilíbrio. Desenvolvendo uma técnica baseada na rápida perda de memória, Galves, Martinelli e Olivieri [4] estudaram densidades maiores que ρ no Processo de Contato supercrítico unidimensional, desta maneira complementando os resultados de [3]. Estendendo a técnica de [4] obteremos resultados para flutuações de densidade maiores que ρ em dimensão arbitrária. Além disso, adaptando para o Processo de Contato $d-$dimensional uma técnica desenvolvida por Ferrari, Galves e Liggett [5] em sistemas de partículas conservativos, encontraremos as velocidades de convergência para a distribuição Exponencial das flutuações de Grande Densidade, quando o processo inicia da medida invariante não-trivial.

O enfoque trajetória por trajetória proposto por Cassandro, Galves, Olivieri e Vares [6], aliado aos resultados de Mountford [7], nos permitirá estender os Teoremas básicos para o fenômeno da metaestabilidade no modelo de Contato supercrítico multidimensional.

Neste capítulo apresentaremos a construção gráfica de Harris, resultados sobre a perda de memória e sobre flutuações de densidade do Processo de Contato supercrítico multidimensional. Na última seção estudaremos o comportamento Metaestável do Processo evoluindo em volume finito.

O Processo de Contato em dimensão $d \geq 1$ com parâmetro de infecção $\lambda \geq 0$ é um processo de Markov a tempo contínuo com espaço de estados $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$. A construção do processo pode ser feita através da *representação gráfica* de Harris, exposta a seguir. Identificamos $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ com $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ da maneira usual.

Para $x \in \mathbb{Z}^d$, sejam $\{\mathcal{U}_k^x : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência de um processo de Poisson com taxa 1. Para cada $y \in \mathbb{Z}^d$ tal que $||x-y|| = 1$, onde $||z|| = |z_1| + \cdots + |z_d|$ para $z \in \mathbb{Z}^d$, sejam $\{\mathcal{U}_k^{x,y} : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência de um processo de Poisson de taxa $\lambda \geq 0$. Defina também $\mathcal{U}_0^x = \mathcal{U}_0^{x,y} = 0$.

Supondo que em $x \in \mathbb{Z}^d$ todos os $2d+1$ processos são mutuamente independentes e que os processos envolvidos para diferentes valores de $x \in \mathbb{Z}^d$ são também mutuamente independentes, escrevemos no espaço-tempo $\mathbb{Z}^d \times [0,\infty)$ os símbolos $\dagger$ nos pontos $(x, \mathcal{U}_k^x)$ e os símbolos $\rightarrow$ de $(x, \mathcal{U}_k^{x,y})$ para $(y, \mathcal{U}_k^{x,y})$. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\lambda)$ o espaço de probabilidade onde todos os processos de Poisson acima estão definidos.

Definição 3.1: Dados $0 \leq s \leq t,\ x, y \in \mathbb{Z}^d$ e $\omega \in \Omega$, dizemos que existe um $\omega-$*caminho* de (x,s) para (y,t) se existir uma seqüência de instantes $s = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n+1} = t$ e uma seqüência de posições $x = x^0, x^1, \ldots, x^n = y$, com $||x^i - x^{i+1}|| = 1$ para $i = 0, \ldots, n-1$, tal que
i) para $i = 1, 2, \ldots, n$ existe um $\rightarrow$ de (x^{i-1}, s_i) para (x^i, s_i),
ii) para $i = 0, 1, \ldots, n$ os segmentos verticais $\{x^i\} \times [s_i, s_{i+1}]$ não contém o símbolo $\dagger$.

Para $0 \leq s \leq t$ e $\omega \in \Omega$, definimos $\xi_t^{(x,s)}(\omega) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, por

$$\left\{y \in \mathbb{Z}^d : \text{ existe um } \omega-\textit{caminho} \text{ de } (x,s) \text{ para } (y,t),\ x \in \mathbb{Z}^d\right\},$$

e construímos para qualquer $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ o processo

$$\xi_t^{(\eta,s)}(\omega) = \bigcup_{x \in \eta} \{\xi_t^{(x,s)}(\omega)\}.$$

O processo de Markov $\{\xi_t^{(\eta,s)}(\omega) : 0 \leq s \leq t\}$ é dito o Processo de Contato com $\xi_s^{(\eta,s)}(\omega) = \eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Denotamos por ξ_t^η quando $s = 0$.

Para o espaço de probabilidade $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{G}, \mu)$ onde as configurações são escolhidas segundo a lei μ, com $\mathcal{G}$ a $\sigma-$álgebra gerada pelos cilíndros em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, podemos considerar o Processo de Contato com medida inicial μ, isto é, o processo $\{\xi_t^\mu : t \geq 0\}$, no sentido de escolhermos aleatoriamente, segundo a distribuição de μ, a configuração inicial. O processo $\{\xi_t^\mu : t \geq 0\}$ está portanto definido no espaço de probabilidade produto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\lambda) \otimes (\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{G}, \mu)$.

Desta forma o processo $\{\xi_t^x : t \geq 0\}$ representa o caso em que $\mu = \delta_{\{x\}}$, a medida de Dirac concentrada na configuração $\{x\} \subset \mathbb{Z}^d$. Seja $\mathbb{P}$ dada por $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\lambda \otimes \mu$.

Dizemos que o Processo de Contato é supercrítico quando o evento $\Omega_\infty = \left\{\xi_t^0 \neq \emptyset\,,\ \forall\, t \geq 0\right\}$ tem probabilidade $\mathbb{P}$ estritamente positiva, e definimos o parâmetro crítico do processo por

$$\lambda_c(d) \;=\; \inf\left\{\lambda > 0 : \mathbb{P}(\Omega_\infty) > 0\right\}.$$

Liggett em [8] (1985) e Holley e Liggett em [9] (1978) mostraram que $\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_c(d) \leq \frac{2}{d}$. Harris nos artigos [1] e [10] (1978) mostrou que o processo com $\lambda > \lambda_c(d)$ tem duas medidas de probabilidade invariantes extremais, ν e $\delta_\emptyset$. O suporte de ν está contido no conjunto de todas configurações tendo densidade $\rho := \mathbb{P}\{0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}\}$. Quando $\lambda \leq \lambda_c(d)$ o processo tem $\delta_\emptyset$ como única medida invariante.

O processo de contato é *atrativo*, ou seja, dadas configurações iniciais $\zeta_1, \zeta_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ tais que $\zeta_1(x) \leq \zeta_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, podemos construir versões dos processos $\{\xi_t^{\zeta_1} : t \geq 0\}$ e $\{\xi_t^{\zeta_2} : t \geq 0\}$ no mesmo espaço de probabilidade de modo que $\xi_t^{\zeta_1}(x) \leq \xi_t^{\zeta_2}(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ e todo $t \geq 0$. Isso é satisfeito, por exemplo, se usarmos os mesmos símbolos $\to$ e $\dagger$ para construir tais processos. Dizemos que os processos estão construídos no mesmo espaço de probabilidade, quando estivermos utilizando essa particular versão conjunta.

A técnica desenvolvida em [4] no estudo das flutuações de densidade baseia-se no seguinte resultado para o Processo de Contato supercrítico unidimensional: dois processos com configurações iniciais diferentes, porém com um número suficiente de partículas, quando evoluem em um mesmo espaço de probabilidade tornam-se idênticos rapidamente em alguma região fixada do espaço e permanecem assim para sempre. *Rapidamente* significa um tempo muito menor que o necessário para ocorrer uma visita ao evento anômalo (raro) partindo da medida invariante. A demonstração deste resultado decorre de propriedades da posição aleatória da partícula mais à esquerda e mais à direita do processo unidimensional no instante t.

Podemos estender para todo $d \geq 1$ a técnica acima descrita, e para tanto utilizaremos uma aplicação do Teorema da Forma que iremos enunciar a seguir.

Para $x \in \mathbb{Z}^d$ considere $t(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in \xi_t^0\}$, o tempo da primeira infecção de x quando a condição inicial é dada pela configuração com apenas a posição $0 \in \mathbb{Z}^d$ infectada.

Definimos o conjunto dos sítios infectados pelo menos uma vez até o instante t por $H_t = \bigcup_{s=0}^{t} \xi_s^0$ e o conjunto dos sítios acoplados até o instante t por $K_t = \xi_t^0 \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c$. Observe que $\xi_t^0(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)$ para todo $x \in K_t$ quando os processos estão construídos no mesmo espaço de probabilidade.

O Teorema da Forma afirma que, para $\lambda > \lambda_c(d)$, existe um conjunto convexo $D \subset \mathbb{Z}^d$, tal que, se $\omega \in \Omega_\infty = \{\xi_t^0 \neq \emptyset\ ,\ \ \forall\ t \geq 0\}$ e $\epsilon > 0$, então

$$(1-\epsilon)tD \subset \overline{H}_t \subset (1+\epsilon)tD, \text{ para } \quad t \geq t_0(\epsilon,\omega), \quad \text{e}$$

$$(1-\epsilon)tD \subset (\overline{H}_t \cap \overline{K}_t) \subset (1+\epsilon)tD, \text{ para } \quad t \geq t_1(\epsilon,\omega), \qquad (3.2)$$

onde

$$\overline{H}_t = \bigcup_{x \in H_t} (x + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d) \quad \text{e} \quad \overline{K}_t = \bigcup_{x \in K_t} (x + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d).$$

Este Teorema é conseqüência das seguintes hipóteses apresentadas em Durrett e Griffeath [11] (1982) e que são válidas a partir dos resultados obtidos por [2] para o Processo de Contato supercrítico em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Definindo o instante de primeira visita ao estado absorvente para o processo que iniciou com apenas a posição $0 \in \mathbb{Z}^d$ por $\tau^0 = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^0 = \emptyset\}$, temos que existem constantes a, b e $C \in (0,\infty)$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t < \tau^0 < \infty) &\leq Ce^{-bt} \quad \text{para} \;\; t \geq 0, \\ \mathbb{P}(t(x) > t, \tau^0 = \infty) &\leq Ce^{-bt} \quad \text{para} \;\; \|x\| < at. \end{aligned}$$

Se além disso,

$$\mathbb{P}(x \notin K_t, \tau^0 = \infty) \leq Ce^{-bt} \quad \text{para} \;\; \|x\| < at,$$

então temos (3.2).

A construção gráfica de Harris apresentada, além de permitir estudar o processo com diferentes configurações iniciais, também permite reverter a direção do eixo dos tempos.

Para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $0 \leq s \leq t$ e $\omega \in \Omega$ dizemos que existe um $\omega-$*caminho dual* entre (y,t) e $(x, t-s)$ (abreviado por (y,t) $\omega-cd$ $(x, t-s)$) se a posição $(x, t-s)$ puder ser alcançada de (y,t) através de um $\omega-$*caminho* com os símbolos $\rightarrow$ substituídos por $\leftarrow$.

Para $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, definimos para $0 \leq s \leq t$ a configuração $\hat{\xi}_s^{(\eta,t)}(\omega) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ por

$$\hat{\xi}_s^{(\eta,t)}(\omega) = \big\{x \in \mathbb{Z}^d : \text{ existe um } (y,t)\ \omega - cd\ (x, t-s),\ y \in \eta\big\}.$$

O processo $\{\hat{\xi}_s^{(\eta,t)}(\omega) : 0 \leq s \leq t\}$ é dito o dual do Processo de Contato com $\hat{\xi}_0^{(\eta,t)}(\omega) = \eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Por simplificação iremos omitir o argumento $\omega \in \Omega$. Temos que

$$\{\hat{\xi}_s^{(\eta,t)} : 0 \leq s \leq t\} \overset{\mathcal{D}}{=} \{\xi_s^{\eta} : 0 \leq s \leq t\} \quad \text{e}$$

$$\{\xi_t^\zeta \cap \eta \neq \emptyset\} \;=\; \{\zeta \cap \hat{\xi}_t^{(\eta,t)} \neq \emptyset\},$$

para η e $\zeta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, tal que $\mathbb{P}\big(\xi_t^\zeta \cap \eta \neq \emptyset\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\zeta \cap \xi_t^\eta \neq \emptyset\big)$.

A primeira igualdade é em distribuição e a última é a propriedade de autodualidade do Processo de Contato. Colocando $\zeta = \{0\}$ e $\eta = \mathbb{Z}^d$, temos que $\mathbb{P}\big(\xi_t^0 \neq \emptyset\big) = \mathbb{P}\big(0 \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}\big)$. Fazendo $t \longrightarrow \infty$, segue que $\mathbb{P}\big(\xi_t^0 \neq \emptyset, \forall\, t \geq 0\big) = \mathbb{P}\big(0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}\big) = \rho$.

Observe que as hipóteses para estabelecer o Teorema da Forma apresentado acima, a atratividade e a autodualidade do Processo de Contato implicam que

$$|\ \mathbb{P}(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}(0) = 1)\ -\ \rho\ | = \mathbb{P}\{0 \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}\}\ -\ \mathbb{P}\{0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}\} =$$

$$\mathbb{P}\{\xi_t^0 \neq \emptyset\}\ -\ \mathbb{P}\{\xi_\infty^0 \neq \emptyset\} =$$

$$\mathbb{P}\{\tau^0 > t\}\ -\ \mathbb{P}\{\tau^0 = \infty\} = \mathbb{P}\{t < \tau^0 < \infty\}\ \leq\ Ce^{-bt}$$

isto é, $\xi_t^{\mathbb{Z}^d}$ converge para o equilíbrio em um tempo exponencialmente rápido. Esta velocidade de convergência aliada ao Lema Básico, que apresentaremos a seguir, permitirá obter nossos resultados para densidades anômalas maiores que ρ em dimensão $d \geq 1$.

A propriedade de *rápida* perda de memória do processo seguirá do Lema (3.5) (Básico), e de uma estimativa inferior *a priori* do tempo de ocorrência de um evento raro, que é feita na Proposição (3.13).

Definimos por $\tau^\eta = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^\eta = \emptyset\}$ o instante da primeira (e última) visita ao estado absorvente para o processo que iniciou com a configuração $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

Seja $\Gamma_N = \{-N, \ldots, N\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ e defina, para $0 \leq q \leq 1$ fixado, o conjunto $A(\Gamma_N, q) = \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : \sum_{x \in \Gamma_N} \eta(x) \geq q\ |\Gamma_N|\}$ onde $|\Gamma_N| = (2N+1)^d$ é o cardinal de Γ_N.

LEMA 3.3: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$, existem $L \in I\!N$ e $c = c(d, \lambda, L) \in (0,1)$, tais que para todo $N \geq L$ e toda $\eta \in A(\Gamma_N, q)$, $I\!P\{\tau^{\eta \cap \Gamma_N} = \infty\} \geq 1 - \exp\{-cq(2N+1)^{d-1}\}$.

Dem : O caso $d = 1$ segue do Teorema (3.29), pág. 303 de [8]. Suponha $d > 1$ e para $r \in I\!N \backslash \{0\}$ fixado, seja

$$D_r \ = \ \{ \ z \in Z\!\!Z^d : |z_i| \leq r, i = 1, \ldots, d \ \}$$

o disco de raio r em $Z\!\!Z^d$.

O resultado de [2] afirma que existe um disco finito $D_r = D$ e um inteiro positivo $L > r$ tal que para todo $\lambda > \lambda_c(d)$,

$$I\!P\{\xi^D \text{ sobrevive em} [-L, L]^{d-1} \times Z\!\!Z \times [0, \infty)\} = \gamma > 0.$$

Este fato permitirá demonstrar nosso Lema.

Para $N \geq L$ e $\eta \in A(\Gamma_N, q)$ fixados, podemos escolher $\emptyset \neq \zeta \subset \eta \cap \Gamma_N$ com

$$|\zeta| \ \geq \ \max\{ \ [\![\frac{|\Gamma_N| q}{(4L)^{d-1}(2N+1)}]\!] \ , \ 1 \ \},$$

onde $|\zeta|$ é o cardinal da configuração ζ e $[\![x]\!]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x, tais que os conjuntos $x + (-L, L)^{d-1} \times Z\!\!Z$, com $x \in \zeta$, podem ser escolhidos como conjuntos disjuntos.

Seja x^l para $l \ = \ 0, 1, \ldots, |\zeta| - 1$, uma ordenação das posições infectadas de ζ, isto é, $\zeta \ = \ \{ \ x^l \in \eta : \ l = 0, \ldots, |\zeta| - 1 \ \}$.

O primeiro passo em nossa demonstração é determinar uma cota inferior positiva para a probabilidade de obtermos no instante $h > 0$ fixado, uma cópia do disco D_r para o processo $\{ \ \xi_t^{x^l} : t \geq 0 \ \}$, $x^l \in \zeta$, isto é, do processo com condição inicial x^l que usa os símbolos de nascimentos e mortes que são dadas na construção do processo $\{\xi_t^\eta : t \geq 0\}$.

Vamos definir um particular evento no processo $\{\xi_t^{x^l} : t \in [0,h]\}$, dado por uma seqüência escolhida de contaminações de vizinhos mais próximos, em intervalos de tempo

$$\Big(\frac{kh}{n(r,d)} \, , \, \frac{(k+1)h}{n(r,d)} \Big], \quad k = 0,1,\ldots,n(r,d)-1,$$

onde $n(r,d) = 2r + (d-1)2r(2r+1)^{d-1}$ e tal que no espaço-tempo $x^l + \{-r,\ldots,r\}^d \times [0,h] \subset \mathbb{Z}^d \times [0,\infty)$ não ocorra nenhuma realização do Processo Pontual associado a mortes.

A seqüência de nascimentos é definida pela seguinte ordenação das contaminações:

No intervalo $(0, \frac{h}{n(r,d)}]$, a posição $x^l = (x_1^l,\ldots,x_d^l)$ contamina seu vizinho mais próximo na direção da coordenada x_1^l à direita $(x_1^l+1, x_2^l,\ldots,x_d^l)$, e as $(r-1)$ próximas contaminações são feitas nesta direção até contaminar $(x_1^l+r, x_2^l,\ldots,x_d^l)$ no intervalo de tempo $(\frac{(r-1)h}{n(r,d)} \, , \, \frac{rh}{n(r,d)}]$.

A seguir, $x^l = (x_1^l,\ldots,x_d^l)$ infecta na direção x_1^l à esquerda seu vizinho mais próximo $(x_1^l-1, x_2^l,\ldots,x_d^l)$, no intervalo de tempo $(\frac{rh}{n(r,d)} \, , \, \frac{(r+1)h}{n(r,d)}]$, e este contamina seu vizinho mais próximo nesta direção até que no instante $\frac{(2r)h}{n(r,d)}$ teremos que as $(2r+1)$ posições $(x_1^l+j, x_2^l,\ldots,x_d^l)$, $j=-r,\ldots,-r$, estarão contaminadas.

A partir daí, continuamos a escolher a seqüência de nascimentos nos vizinhos mais próximos, primeiro as $2r$ posições

$$(x_1^l+r, x_2^l+j, x_3^l,\ldots,x_d^l), \; j=-r,\ldots,-1,1,\ldots,r,$$

e depois as $2r$ posições $(x_1^l+r-1, x_2^l+j, x_3^l,\ldots,x_d^l)$, até infectar todos as $2r$ posições

$$(x_1^l-r, x_2^l+j,\ldots,x_d^l), \quad j=-r,\ldots,-1,1,\ldots,r,$$

e assim por diante para $x^l_3, \ldots, x^l_d$, e teremos no instante h que $\xi_h^{x^l}(y) = 1$ para todo $y \in \mathbb{Z}^d$ tal que $|y_i| \leq r + x^l_i,\ i = 1, 2, \ldots, d$.

Definindo esta particular seqüência de eventos de $\xi_t^{x^l}$ no intervalo $[0, h]$, por $D(h, r, d, \lambda)$, teremos que a probabilidade de obtermos uma cópia do disco D_r no instante $h > 0$, que denotaremos por $p(h, r, d, \lambda)$, é limitada inferiormente por:

$$\mathbb{P}\big(\ D(h, r, d, \lambda)\ \big) \ = \Big[\ \frac{\lambda h}{n(r,d)}\ \Big]^{n(r,d)}\ e^{-\lambda h}.$$

Nosso próximo passo é determinar uma cota inferior para a probabilidade do evento $\{\ \xi_t^\zeta \neq \emptyset\ ,\ \ \forall\ t > 0\ \}$, o que implicará no resultado que queremos.

Definindo o processo de contato *restrito* a um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ pela eliminação dos Processos Pontuais de Poisson definidos em Γ^c, construímos o processo $\overline{\xi}_t^{x^l}$, para $x^l \in \zeta$ por:

$$\overline{\xi}_0^{x^l} \ = \ x^l \qquad \text{e} \qquad \overline{\xi}_t^{x^l} \ = \ \xi_t^{x^l} \quad \text{ restrito ao conjunto}$$

$$x^l + (-L, L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0, \infty) = x^l + R(L, d).$$

Isto implicará que os processos $\overline{\xi}_t^{x^l}$ e $\overline{\xi}_t^{x^m}, l \neq m,\ x^l$ e $x^m \in \zeta$, que são versões restritas do processo com condição inicial η, construídos no mesmo espaço de probabilidade e determinados por Processos Pontuais de Poisson definidos em conjuntos disjuntos, todos com mesma taxa $\lambda > 0$, terão evoluções independentes.

Temos então para cada $x^l \in \zeta$ que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\overline{\xi}^{x^l} \text{ sobrevive em } x^l + R(L,d)\} \\
&= \mathbb{P}\{\overline{\xi}^0 \text{ sobrevive em } R(L,d)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{\overline{\xi}^0 \text{ sobrevive em } R(L,d),\ \overline{\xi}_h^0 = D_r\} \\
&= \gamma p(h, r, d, \lambda)\ >\ \gamma\ \mathbb{P}\{D(h, r, d, \lambda)\}\ > 0,
\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue da propriedade de invariância por translações do Processo de Contato e a segunda da propriedade de Markov. Observando que o evento

$$\{\overline{\xi}_t^{x^l} \text{ sobrevive em } x^l + (-L,L)^{d-1} \times \mathbb{Z} \times [0,\infty)\},$$

para algum $x^l \in \zeta$, implica na ocorrência do evento

$$\{\xi^{\eta\cap\Gamma_N} \;\; \text{sobrevive em} \;\; \mathbb{Z}^d \times [0,\infty)\},$$

pela construção dos processos $\{\overline{\xi}_t^{x^l} : t \geq 0\}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\tau^{\eta\cap\Gamma_N} = \infty\} = \mathbb{P}\{ \bigcup_{x\in\eta\cap\Gamma_N} \{ \xi_t^x \neq \emptyset \,, \;\; \forall\, t > 0\} \} \\
&\geq \mathbb{P}\{ \xi_t^\zeta \neq \emptyset \,, \;\; \forall\, t > 0 \} \; = \mathbb{P}\{ \bigcup_{l\leq|\zeta|-1} \{ \xi_t^{x^l} \neq \emptyset \,, \;\; \forall\, t > 0 \} \} \\
&\geq \mathbb{P}\{ \bigcup_{l\leq|\zeta|-1} \{ \overline{\xi}_t^{x^l} \neq \emptyset \,, \;\; \forall\, t > 0 \} \} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{ \bigcap_{l=0}^{|\zeta|-1} \{\overline{\xi}_t^{x^l} = \emptyset, \text{ para algum } t > 0\}\} \\
&= 1 - \prod_{l\leq|\zeta|-1} \mathbb{P}\{\overline{\xi}_t^{x^l} = \emptyset, \text{ para algum } t > 0\} \\
&\geq 1 - \prod_{l\leq|\zeta|-1} \big(1 - \gamma\, \mathbb{P}\{D(h,r,d,\lambda)\}\big) \\
&\geq 1 - \exp\{-\gamma \mathbb{P}\{D(h,r,d,\lambda)\}|\zeta|\} \\
&\geq 1 - \exp\{-c\, q\, \frac{|\Gamma_N|}{2N+1}\} = 1 - \exp\{-cq(2N+1)^{d-1}\}.
\end{aligned}$$

■

COROLÁRIO 3.4: Sejam $d > 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < \epsilon < 1$, $0 < q \leq 1$, existem $L \in \mathbb{N}$ e $C = C(d,\lambda,L) \in (0,\infty)$, tais que para todo $N \geq \max\{ L,\; C\big(\frac{-\log\epsilon}{q}\big)^{\frac{1}{d-1}} \}$ e toda $\eta \in A(\Gamma_N, q)$,

$$\mathbb{P}\{\tau^{\Gamma_N} = \infty\} \;\geq\; \mathbb{P}\{ \tau^{\eta\cap\Gamma_N} = \infty \} \;\geq\; 1 - \epsilon.$$

Dem : A primeira desigualdade, que vale para todo $N \geq 1$, segue da atratividade do processo.

Para $L \in \mathbb{N}$ e $c = c(d, \lambda, L) \in (0, 1)$, dados no Lema (3.3), escolha $N(\epsilon)$ tal que $\exp\{-cq(2N+1)^{d-1}\} \;\leq\; \epsilon$, isto é ,

$$N(\epsilon) \;\geq\; C\big[\frac{-\log \epsilon}{q}\big]^{\frac{1}{d-1}}, \text{ onde } C \;=\; \big[\frac{1}{2^{d-1}c}\big]^{\frac{1}{d-1}}.$$

Portanto, para todo $N \geq \max\{L, N(\epsilon)\}$ o resultado segue. ■

LEMA 3.5: (Básico) Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$, $N \geq 1$, η e $\zeta \in A(\Gamma_N, q)$, existem $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$, $c = c(d, \lambda, q) \in (0, \infty)$ e $C = C(d, \lambda) \in [1, \infty)$, tais que para todo $t > \alpha N$, $\mathbb{P}\{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \forall x \in \Gamma_N,\} \geq\; 1 - C|\Gamma_N| \exp\{-ct\}$.

Dem : Sem perda de generalidade $\zeta = \mathbb{Z}^d$.

Dado $t \geq 1$, segue do Lema (3.3) que existem constantes positivas L e c', independentes de N, tais que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\exists \;\; y \in [-Lt, Lt]^d,\; \eta(y) = 1, \;\; \text{e} \;\; \tau^y = \infty\big)\\
&= \mathbb{P}\big(\tau^{\eta \cap [-Lt, Lt]^d} \;=\; \infty\big)\\
&\geq 1 - \exp\{-c' q(2Lt+1)^{d-1}\}.
\end{aligned}$$

Como $(2Lt+1)^{d-1} \geq 1 + (d-1)Lt$ temos que existe $c_1 = c_1(d, \lambda, L)$ tal que

$$\begin{aligned}
&1 - \exp\{-c' q(2Lt+1)^{d-1}\}\\
&\geq 1 - \exp\{-c' q\big(1 + (d-1)Lt\big)\}\\
&= 1 - \exp\{-c' q\} \exp\{-c' q(d-1)Lt\}\\
&\geq 1 - \exp\{-c_1 q t\}.
\end{aligned}$$

Observe que no caso $d = 1$, estamos usando o Teorema (3.29) pág. 303 de [8] para obter a constante positiva c_1.

Definindo para $t \geq 0$ a região $K_t^y = \xi_t^y \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c$ temos para todo $t \geq 1$ fixado que

$$\big\{\exists\ y \in [-Lt, Lt]^d,\ \eta(y) = 1 \ \text{ e } \ \tau^y = \infty\big\} \subset$$
$$\bigcup_{y\in\eta} \big\{\xi_t^y(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\, \forall x \in K_t^y, \tau^y = \infty\big\} \subset$$
$$\big\{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N\big\} \bigcup \big\{\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty\big\}.$$

Portanto

$$\mathbb{P}\big(\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\ ,\ \ \forall\ x \in \Gamma_N\big) \geq$$
$$1 - \exp\{-c_1 qt\} - \mathbb{P}\big(\Gamma_N \not\subset K_t^y, \tau^y = \infty\big).$$

Além disso,

$$\mathbb{P}\big(\Gamma_N \not\subset K_t^y,\ \tau^y = \infty\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x\in\Gamma_N} \{x \notin K_t^y,\ \tau^y = \infty\}\Big),$$

e segue pela invariância por translações do Processo de Contato que

$$\mathbb{P}\big(\Gamma_N \not\subset K_t^y,\ \tau^y = \infty\big) \ = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x\in\Gamma_N+y} \{x \notin K_t,\ \tau^0 = \infty\}\Big) \leq$$
$$|\Gamma_N|\mathbb{P}\big(x \notin K_t,\ \tau^0 = \infty\big).$$

Usando as hipóteses do Teorema da Forma e observando que $||x|| \leq Nd$ para todo $x \in \Gamma_N$, temos que existem constantes positivas a, $\overline{c}$ e $\overline{C}$, independentes de N, tais que

$$\mathbb{P}\big(\Gamma_N \not\subset K_t^y,\ \tau^y = \infty\big) \ \leq \ |\Gamma_N|\overline{C}\exp\{-\overline{c}t\},$$

para todo $t > \frac{Nd}{a}$.

Segue que existem constantes $a,\ c,\ C$ tais que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\ ,\ \ \forall\ x \in \Gamma_N\big)\\
&\geq 1 \ - \ \exp\{-c_1 qt\} \ - \ |\Gamma_N|\overline{C}\exp\{-\overline{c}t\}\\
&\geq 1 \ - \ |\Gamma_N|C\exp\{-ct\}, \ \ \text{para todo } t > \frac{Nd}{a}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $C = \max\{\overline{C}, 1\}$ e $\alpha = \max\{\frac{d}{a}, 1\}$, concluimos a demonstração. ∎

COROLÁRIO 3.6: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1,\ N \geq 1$, existem $\alpha = \alpha(d,\lambda) \in [1,\infty),\ c = c(d,\lambda,q) \in (0,\infty)$ e $C = C(d,\lambda) \in [2,\infty)$, tais que para todo $r,\ s \in I\!R_+$, com $|r-s| > \alpha N$,

$$\left|\text{Cov}\ [\mathbf{1}_{A(\Gamma_N,q)}(\xi_r^\nu)\ .\ \mathbf{1}_{A(\Gamma_N,q)}(\xi_s^\nu)]\right| \leq$$

$$C\nu\big(A(\Gamma_N,q)\big)\left[\exp\{-c|r-s|\} + \nu\big(A(\Gamma_N,q)\big)\right].$$

Dem : Sem perda de generalidade assuma $r > s$ e seja $u = r - s$. Definindo $A = A(\Gamma_N, q)$, temos pela estacionaridade do processo

$$I\!E[\ \mathbf{1}_A(\xi_r^\nu)\ .\ \mathbf{1}_A(\xi_s^\nu)\ ]\ = \int_A \nu(d\eta) I\!E[\mathbf{1}_A(\xi_u^\eta)] =$$

$$\int_A \nu(d\eta) \int \nu(d\zeta) I\!E\big[\mathbf{1}_A(\xi_u^\eta) - \mathbf{1}_A(\xi_u^\zeta)\big] + [\nu\big(A\big)]^2 \leq$$

$$\int_A \nu(d\eta) \int \nu(d\zeta) I\!P\big[\xi_u^\eta(x) \neq \xi_u^\zeta(x), x \in \Gamma_N\big] +\ [\nu(A)]^2\ .$$

Aplicando o Lema Básico temos que existem $\alpha',\ c$ e C', independentes de N, tais que para todo $u > \alpha' N$, a expressão acima é limitada por

$$\int_A \nu(d\eta) \int \nu(d\zeta) C'\ |\Gamma_N| \exp\{-cu\}\ +\ [\nu\big(A\big)]^2$$

$$\leq C'\ |\Gamma_N| \nu\big(A\big) \exp\{-cu\}\ +\ [\nu\big(A\big)]^2.$$

Para todo $N \geq 1$, escolhemos $\alpha > \alpha'$ tal que

$$C'|\Gamma_N| \exp\{-c\alpha N\} \leq C' \exp\{-c\alpha' N\},$$

isto é, $\alpha > \frac{\log|\Gamma_N|}{cN} + \alpha'$, e portanto para todo $u > \alpha N$, temos

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\xi_r^\nu).\mathbf{1}_A(\xi_s^\nu)] \leq C'\nu(A)\exp\{-cu\} + \big[\nu(A)\big]^2.$$

Observando que

$$|\ \mathrm{Cov}\ [\ \mathbf{1}_A(\xi_r^\nu)\ .\mathbf{1}_A(\xi_s^\nu)\ ]| \leq \mathbb{E}\big[\ \mathbf{1}_A(\xi_r^\nu).\mathbf{1}_A(\xi_s^\nu)\ \big]\ +\ [\nu(A)]^2$$

e definindo $C = \max\{2, C'\}$, o resultado segue. ■

LEMA 3.7: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $0 < q \leq 1$ existem $L \in \mathbb{N}$, $\alpha = \alpha(d,\lambda) \in [1,\infty)$ e $c = c(d,\lambda,L) \in (0,1)$, tais que para todo $N \geq L$ e todas $\eta, \zeta \in A(\Gamma_N, q)$,

$$\mathbb{P}\{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x),\ \forall\ x \in \Gamma_N,\ \forall\ t > \alpha N\} \geq$$

$$1 - \exp\{-cq(2N+1)^{d-1}\}.$$

Dem : Fixe $N \geq L$, onde L é a constante dada no Lema (3.3). Seja $R_N^{\eta,\zeta}$ o tempo aleatório definido por

$$R_N^{\eta,\zeta} = \sup\{t \geq 0 : \xi_t^\eta(x) \neq \xi_t^\zeta(x) \text{ para algum } x \in \Gamma_N\}.$$

Pelo Lema (3.3) existe $c \in (0,1)$, independente de N, tal que

$$\mathbb{P}\{\exists\ x \in \Gamma_N,\ \eta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty\ \} =$$

$$\mathbb{P}\{\tau^{\eta\cap\Gamma_N} = \infty\} \geq 1 - \exp\{^{-cq(2N+1)^{d-1}}\}.$$

Iremos mostrar que a ocorrência do evento $R_N^{\eta,\zeta} \leq \alpha N$, para alguma constante $\alpha \geq 1$, independente de N, segue da ocorrência de

$$\{\exists x \in \Gamma_N, \eta(x) = 1 \text{e } \tau^x = +\infty\} \bigcap \{\exists x \in \Gamma_N, \zeta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty\}.$$

Observe que $\mathbb{P}(\tau^{\eta\cap\Gamma_N} = \infty) \longrightarrow 1$, quando $N \longrightarrow \infty$, para todo $0 < q \leq 1$.

Primeiro note que existe $t_1 = t_1(\epsilon, \omega) > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\{\ \exists\ x \in \Gamma_N,\ \eta(x) = 1 \text{ e } \tau^x = +\infty\ \} \leq$$

$$\mathbb{P}\{\xi_t^\eta(x)\ =\ \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\ , \forall\ x \in \Gamma_N,\ \forall\ t > t_1\}.$$

Seja y alguma posição infectada com menor norma L^∞ em η tal que $\tau^y = +\infty$.

O Teorema da Forma implica que existe um conjunto convexo D tal que se $\omega \in \Omega_\infty$ e $\epsilon > 0$, então

$$(1-\epsilon)t(D+y)\ \subset\ \bigcup_{x \in K_t^y} \big(x + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d\big),$$

para todo $t \geq t_1'(\epsilon, \omega)$.

Portanto $\xi_t^y \cap (1-\epsilon)(D+y) \subset t^{-1}\overline{K}_t^y$ e $\tau^y = \infty$ implicam que $\xi_t^y(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\ \forall\ x \in (1-\epsilon)(D+y)t,\ \forall\ t \geq t_1'$, e tomando $t_1 > t_1'$ tal que $\Gamma_N \subset (1-\epsilon)\ (D+y)\ t_1$, o resultado segue.

De maneira análoga, seja z alguma posição com menor norma L^∞ em ζ tal que $\tau^z = +\infty$. O Teorema da Forma implica que existe t_2' tal que $\Gamma_N \subset (1-\epsilon)\ (D+z)\ t_2\ \subset \overline{K}_t^z$ para todo $t_2 > t_2'$.

Tomando $\hat{t} > \max\{t_1, t_2\}$ e escrevendo $K_t^\zeta\ =\ \bigcup_{y \in \zeta} K_t^y$ temos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\ , \forall\ x \in \Gamma_N,\ \forall\ t > t_1\ \} \\
&\leq \mathbb{P}\{\ \xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\ , \forall\ x \in \Gamma_N,\ \forall\ t > \hat{t}\ \} \\
&= \mathbb{P}\{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x), \forall x \in \Gamma_N \cap \overline{K}_t^\zeta, \forall t > \hat{t}\} \\
&= \mathbb{P}\{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \forall x \in \Gamma_N \cap \overline{K}_t^\zeta, \forall t > \hat{t}\} \\
&= \mathbb{P}\{\xi_t^\eta(x) = \xi_t^\zeta(x), \forall x \in \Gamma_N, \forall t > \hat{t}\}.
\end{aligned}$$

Se garantirmos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\alpha = \alpha(d, \lambda) \in [1, \infty)$, tal que $\mathbb{P}\big(\hat{t}(\epsilon, \omega) \leq \alpha N\big) = 1$ para todo $N \geq L$, o Lema estará provado.

Para tal, vamos mostrar que para α dado no Lema Básico e $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\limsup \hat{t}(\epsilon,\omega) > n\alpha N\big) = 0$.

Seja w tal que $||w|| = \min\{||y||, ||z||\}$. Segue para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(\hat{t}(\epsilon,\omega) > n\alpha N\big) \leq \mathbb{P}\big(\Gamma_N \not\subset K^w_{n\alpha N}\ ,\ \tau^w = \infty\big).$$

Pela invariância por translações do Processo de Contato, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\Gamma_N \not\subset K^w_{n\alpha N}\ ,\ \tau^w = \infty\big)\\
&= \mathbb{P}\big(\Gamma_N + w \not\subset K_{n\alpha N}\ ,\ \tau^0 = \infty\big)\\
&= \mathbb{P}\big(\bigcup_{x \in \Gamma_N + w} \{x \notin K_{n\alpha N}\ ,\ \tau^0 = \infty\}\big)\\
&\leq |\Gamma_N| \mathbb{P}\big(x \notin K_{n\alpha N}\ ,\ \tau^0 = \infty\big).
\end{aligned}$$

Observando que $||x|| \leq Nd + ||w||$, e aplicando as hipóteses do Teorema da Forma temos que existem constantes positivas a, c_1 e C_1, independentes de N, tais que para $n > \frac{||w||+Nd}{a\alpha N}$,

$$\mathbb{P}\big(x \notin K_{n\alpha N}, \tau^0 = \infty\big) \leq C_1 |\Gamma_N| \exp\{-c_1 n\alpha N\}.$$

Escolhendo $\alpha = \max\{\frac{d}{a}, 1\}$, como no Lema Básico, temos para

$$n^\star = \max\{[\![1 + \frac{||w||}{Nd}]\!]\ ,\ [\![\frac{Nd + ||w||}{aN}]\!]\},$$

que

$$\sum_{n=n^\star}^{\infty} \mathbb{P}\big(\hat{t}(\epsilon,\omega) > n\alpha N\big) \leq \sum_{n=n^\star}^{\infty} C_1 |\Gamma_N| \exp\{-c_1 n\alpha N\} =$$

$$C_1 |\Gamma_N| \frac{\exp\{-c_1 \alpha N n^\star\}}{1 - \exp\{-c_1 \alpha N\}}\ <\ \infty.$$

Aplicando o Lema de Borel-Cantelli o resultado segue. ■

3.2 Flutuação de Densidade

Em Lebowitz e Schonmann [13] (1988), entre outros resultados de Grandes Desvios para sistemas de partículas atrativos e invariantes por translação em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d \geq 1$, foi provado que para $\rho \leq q \leq 1$ existe o limite

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \nu\big(A(\Gamma_N, q)\big) \;=\; -\phi_+(q) \tag{3.8}$$

e a função ϕ_+ é convexa e crescente, com $\phi_+(\rho) = 0$ e $\phi_+(1) \leq -\log \rho < \infty$, e que para $0 \leq q \leq \rho$ existe o limite

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \nu\big(A_-(\Gamma_N, q)\big) \;=\; -\phi_-(q), \tag{3.9}$$

onde $A_-(\Gamma_N, q) = \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : \sum_{x\in\Gamma_N} \eta(x) \leq q|\Gamma_N|\}$, e a função ϕ_- é convexa e decrescente, com $\phi_-(\rho) = 0$ e $\phi_-(0) \leq -\log(1-\rho) < \infty$.

Além disso, definindo para $0 \leq a \leq b \leq 1$ o conjunto

$$B(\Gamma_N, a, b) = \{\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} : \; a\;|\Gamma_N| \leq \sum_{x\in\Gamma_N} \eta(x) \leq b\;|\Gamma_N|\},$$

e para $0 \leq q \leq 1$ a função $\phi(q) \;=\; \max\big(\phi_-(q), \phi_+(q)\big)$, então existe o limite

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{|\Gamma_N|} \log \nu\big(B(\Gamma_N, a, b)\big) \;=\; -\inf_{a\leq q\leq b} \phi(q) \tag{3.10}$$

e a função ϕ é convexa, com $\phi(\rho) = 0$ se e somente se $\rho = q$.

A medida invariante extremal ν possui a propriedade FKG (abreviaturas de Fortuin, Kasteleyn e Ginibre) a qual afirma que para quaisquer funções crescentes e contínuas $f, g : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_\nu\big(f(\eta)g(\eta)\big) \;\geq\; \mathbb{E}_\nu\big(f(\eta)\big)\mathbb{E}_\nu\big(g(\eta)\big)\;,$$

onde $I\!\!E_\nu$ é a esperança com respeito a lei ν. Esta propriedade de ν aliada à sua invariância por translações, permitiram naquele trabalho mostrar que

$$\nu\big(A(\Gamma_N,q)\big) \ \geq \nu\big(A(\Gamma_N\cap\Delta_1,q)\big)\nu\big(A(\Gamma_N\cap\Delta_2,q)\big),$$

onde $\Delta_i,\ i=1,2$, são retângulos de lados $n_{i_1},n_{i_2},\ldots,n_{i_d}$ tais que $\Gamma_N=\Delta_1\cup\Delta_2$, e

$$A(\Gamma_N\cap\Delta_i,q) \ = \ \{\eta\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}: \sum_{x\in\Gamma_N\cap\Delta_i}\eta(x)\geq q|\Gamma_N\cap\Delta_i|\}$$

$i=1,2$ para $q\geq\rho$, o que é suficiente, para mostrar a existência dos limites (3.8), (3.9) e (3.10).

Definimos o primeiro instante em que o processo ξ_t^η alcança o conjunto $A(\Gamma_N,q)$ por $T_N^\eta(q)$, isto é,

$$T_N^\eta(q)=\inf\{t\geq 0:\xi_t^\eta\in A(\Gamma_N,q)\},$$

e quando a configuração inicial é escolhida segundo a distribuição ν denotamos o instante da primeira visita ao conjunto $A(\Gamma_N,q)$ por $T_N^\nu(q)$.

Também considerando sistemas de partículas atrativos e invariantes por translação em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $d\geq 1$, que inclui o Processo de Contato multidimensional, foi apresentado em [3] resultados de flutuações de densidade. Os resultados obtidos são provados a partir de hipóteses sobre a velocidade de convergência para o equilíbrio. Suas demonstrações usam as propriedades de monotonicidade do processo devido à atratividade. Se o processo começar com a configuração em que todas as posições estão infectadas, então, durante a evolução, sua distribuição decresce para a medida de probabilidade invariante extremal ν. Esta monotonicidade pode ser usada para estudar o tempo que o processo leva para alcançar uma densidade menor que ρ, mas não funciona para densidades q maiores que ρ. Com hipóteses suplementares sobre a velocidade de convergência para o equilíbrio e definindo $\beta_N(q)$ por $I\!\!P(T_N^\nu(q) > \beta_N(q)) = \exp\{-1\}$, em [3] foi mostrado, quando $q < \rho$, que :

a) $\frac{1}{|\Gamma_N|} \log \beta_N(q) \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi(q)$ quando $N \longrightarrow \infty$

b) $\frac{1}{|\Gamma_N|} \log I\!\!E T_N^\nu(q) \longrightarrow \phi(q)$ quando $N \longrightarrow \infty$

c) $\frac{T_N^\nu(q)}{\beta_N(q)} \xrightarrow{\mathcal{D}}$ Exp (1) quando $N \longrightarrow \infty$

d) $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} \frac{I\!\!E T_N^\nu(q)}{\beta_N(q)} = 1.$

Vamos estudar o instante da primeira visita ao evento $A(\Gamma_N, q)$, no caso $q > \rho$.

Para $y \in Z\!\!\!Z^d$, sejam $\{\mathcal{V}_k^{x \to y} : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência da superposição de todos os Processos Pontuais de Poisson de taxa λ definidos em $x \in Z\!\!\!Z^d$, com $||x - y|| = 1$.

Sejam $\{\theta_k^N : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência da superposição de todos os Processos Pontuais de Poisson definidos em $\Gamma_N \cup B(\Gamma_N)$, onde $B(\Gamma_N) = \{x \in Z\!\!\!Z^d \cap \Gamma_N^c : ||x - y|| = 1, \; y \in \Gamma_N\}$, e com $\theta_0^N = 0$, defina para $\eta \in \{0,1\}^{Z\!\!\!Z^d}$ e $0 \leq s \leq t$ o processo

$$X^\eta[s,t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{s \leq \theta_k^N < t, \; \xi^\eta_{\theta_k^N} \in A(\Gamma_N, q)\}}.$$

Por questão de clareza vamos utilizar, para todo $d \geq 1, \; \lambda > \lambda_c(d), \; N \geq 1$ e $0 < q \leq 1$ fixados, a notação

$$\begin{aligned} A(\Gamma_N, q) &\quad \text{por} \quad A, \\ A(\Gamma_N, q - |\Gamma_N|^{-1}) &\quad \text{por} \quad A^-, \\ \lambda^\star(N) &\quad \text{por} \quad (2\lambda d + 1)|\Gamma_N|. \end{aligned}$$

LEMA 3.11: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1,\ N \geq 1$ e $t \geq 0$, $\mathbb{E}\big[X^\nu[0,t)\big] \ \leq \ \nu(A) + \nu(A^-)\lambda^\star(N)\ t$.

Dem : Para $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e $t \geq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
X^\eta[0,t) &= \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0<\theta_k^N<t,\ \xi^\eta_{\theta_k^N} \in A\}} \\
&= \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \to y \\ y \in \Gamma_N}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0<\mathcal{V}_k^{x\to y}<t,\ \xi^\eta_{\mathcal{V}_k^{x\to y}} \in A\}} \\
&\quad + \sum_{y \in \Gamma_N} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0<\mathcal{U}_k^{y}<t,\ \xi^\eta_{\mathcal{U}_k^{y}} \in A\}}.
\end{aligned}
$$

Considere para cada $y \in \mathbb{Z}^d$, e cada $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $||x-y|| = 1$, os processos de contagem definidos para $s > 0$ por

$$
\mathcal{N}^{x\to y}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0<\mathcal{V}_k^{x\to y}<s\}},
$$

$$
\mathcal{N}^{y}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{0<\mathcal{U}_k^{y}<s\}}
$$

e as funções $f_{x\to y}, g_y : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow \{0,1\}$ definidas por

$$
f_{x\to y}(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\zeta(x)=1:\ \sum_{z\in\Gamma_N\setminus y} \zeta(z) \geq\ |\Gamma_N|q-1\}} \qquad \text{e}
$$

$$
g_y(\zeta) = \mathbf{1}_{\{\sum_{z\in\Gamma_N\setminus y} \zeta(z) \geq\ |\Gamma_N|q\}}.
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
X^\eta[0,t) =& \mathbf{1}_{\{\eta \in A\}} + \sum_{\substack{x \to y \\ y \in \Gamma_N}} \int_0^t f_{x\to y}(\xi^\eta_{s-}) d\mathcal{N}^{x\to y}(s) \\
&+ \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t g_y(\xi^\eta_{s-}) d\mathcal{N}^{y}(s),
\end{aligned}
$$

onde $\xi^\eta_{s-} = \lim_{r\uparrow s} \xi^\eta_r$.

Portanto,

$$X^\nu[0,t) = \int \nu(d\eta)\mathbf{1}_{\{\eta\in A\}} + \sum_{\substack{x\to y\\ y\in\Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x\to y}(\xi^\eta_{s-}) d\mathcal{N}^{x\to y}(s)$$
$$+ \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi^\eta_{s-}) d\mathcal{N}^y(s).$$

Definindo para todo $y \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que que $||x-y|| = 1$, e todo $s > 0$,

$$M^{x\to y}(s) = \mathcal{N}^{x\to y}(s) - \lambda s \quad \text{e}$$
$$M^y(s) = \mathcal{N}^y(s) - s,$$

segue que

$$X^\nu[0,t) = \int \nu(d\eta)\mathbf{1}_{\{\eta\in A\}}$$
$$+ \sum_{\substack{x\to y\\ y\in\Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x\to y}(\xi^\eta_{s-}) dM^{x\to y}(s)$$
$$+ \sum_{\substack{x\to y\\ y\in\Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x\to y}(\xi^\eta_{s-}) \lambda ds$$
$$+ \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi^\eta_{s-}) dM^y(s)$$
$$+ \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi^\eta_{s-}) ds.$$

Como $f_{x\to y}(\xi^\eta_{s-})$ e $g_y(\xi^\eta_{s-})$ para cada $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, cada $y \in \mathbb{Z}^d$ e $x \in \mathbb{Z}^d$ com $||x-y|| = 1$, são $\mathcal{F}\big[(-\infty, s-)\big]$ mensuráveis e $M^{x\to y}$, M^y

são martingais de média zero, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\nu[0,t)] = \int \nu(d\eta)\mathbf{1}_{\{\eta\in A\}} \\
&+ \sum_{\substack{x\to y\\ y\in\Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\eta) f_{x\to y}(\xi^\eta_{s-})\lambda ds \\
&+ \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\eta) g_y(\xi^\eta_{s-}) ds.
\end{aligned}$$

Pela estacionaridade do processo temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\nu[0,t)] = \int \nu(d\eta)\mathbf{1}_{\{\eta\in A\}} \\
&+ \sum_{\substack{x\to y\\ y\in\Gamma_N}} \int_0^t \int \nu(d\zeta) f_{x\to y}(\zeta)\lambda ds \\
&+ \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t \int \nu(d\zeta) g_y(\zeta) ds.
\end{aligned}$$

Pela inclusão dos conjuntos $A(\Gamma_N, q)$ para $\rho < q \leq 1$, isto é, $A(\Gamma_N, q_1) \subset A(\Gamma_N, q_2)$ quando $q_1 \geq q_2$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^\nu[0,t)] &\leq \nu(A) + \sum_{\substack{x\to y\\ y\in\Gamma_N}} \int_0^t \nu(A^-)\lambda ds \; + \sum_{y\in\Gamma_N} \int_0^t \nu(A) ds \\
&= \nu(A) + |\Gamma_N| 2d\lambda\nu(A^-)t + |\Gamma_N|\nu(A)t \\
&\leq \nu(A) + \nu(A^-)|\Gamma_N|(2\lambda d + 1)t.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

PROPOSIÇÃO 3.12: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $t \geq 0$, $\mathbb{P}\big(\nu(A^-)T^\nu_N(q) > t\big) \geq 1 - \nu\big(A\big) - \lambda^\star(N)t$.

Dem : Pelo Lema (3.11),

$$\begin{aligned} I\!\!P\big(\nu(A^-)T_N^\nu(q) \le t\big) &\le I\!\!P\big(X^\nu[0, t\big(\nu(A^-)\big)^{-1}) \ge 1\big) \\ &\le I\!\!E\big[X^\nu[0, t\big(\nu(A^-)\big)^{-1})\big] \\ &\le \nu(A) + \lambda^\star(N)t. \end{aligned}$$

■

PROPOSIÇÃO 3.13: Sejam $d \ge 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \le 1$ e $0 < \delta < 1$, existem $L = L(\delta) \in I\!\!N$ e $c' = c'(q,\delta) \in (0, \frac{1-\log(1-\rho)}{2})$ tais que para todo $N \ge L$,

$$I\!\!P\{\ T_N^\nu(q) \le |\Gamma_N|^{-1}\ \exp\{c'|\Gamma_N|\}\ \}\ \le\ (2\lambda d + 2)\exp\{-c'|\Gamma_N|\}.$$

Dem : Do resultado (3.8) segue que para $\rho < q \le 1$ e todo $0 < \delta < 1$ fixado, existe $\overline{N}(\delta)$ tal que

$$\nu(A^-)\ \le\ \exp\{-[\phi_+(q) + \delta]|\Gamma_N|\} \quad \text{para todo} \quad N \ge \overline{N}(\delta),$$

pois $\phi_+(q)$ é contínua para todo $\rho < q < 1$.

Tomando $c' = \frac{\phi_+(q)+\delta}{2}$ e aplicando a Proposição (3.12) temos que

$$\begin{aligned} &I\!\!P\big(T_N^\nu(q) \le |\Gamma_N|^{-1}\exp\{c'|\Gamma_N|\}\big) \\ &\le \nu(A) + \frac{\lambda^\star(N)\nu(A^-)}{|\Gamma_N|}\exp\{c'|\Gamma_N|\} \\ &\le \nu(A^-)\big[1 + \frac{\lambda^\star(N)\exp\{c'|\Gamma_N|\}}{|\Gamma_N|}\big] \\ &\le \exp\{-(\phi_+(q)+\delta)|\Gamma_N|\}\big[1 + \frac{\lambda^\star(N)\exp\{c'|\Gamma_N|\}}{|\Gamma_N|}\big] \\ &= \exp\{-(\phi_+(q)+\delta)|\Gamma_N|\} \\ &+ \lambda^\star(N)|\Gamma_N|^{-1}\exp\{-\frac{1}{2}(\phi_+(q)+\delta)|\Gamma_N|\} \\ &\le \exp\{-\frac{1}{2}(\phi_+(q)+\delta)|\Gamma_N|\}\big[2 + 2\lambda d\big] \\ &= 2(\lambda d + 1)\exp\{-c'|\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$

Tomando $L = \overline{N}(\delta)$, o resultado segue. ∎

LEMA 3.14: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s \in I\!R_+$, existe $\overline{C} = \overline{C}(d,\lambda) \in (0,\infty)$ tal que

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0}\Big| & I\!P\big(\nu(A^-)\, T_N^\nu(q) > (s+t)\big) \\ & - I\!P\big(\nu(A^-)\, T_N^\nu(q) > s\big) I\!P\big(\nu(A^-)\, T_N^\nu(q) > t\big)\ \Big| \\ & \leq\ \overline{C}\big(\nu(A^-)\big)^{\frac{1}{2}}\big[1 + \lambda^\star(N)N + \lambda^\star(N)s^{\frac{1}{2}} + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}}\big].\end{aligned}$$

Dem : Sejam $\kappa_N = \big(\nu(A^-)\big)^{-1}$ e $\alpha = \alpha(d,\lambda) \in [1,\infty)$ dada no Lema Básico.

Para todo $s > 0$ fixado, escolha $\Delta(N)$ tal que $\Delta(N) < \kappa_N s + \alpha N$. ($\Delta(N)$ irá ser fixado a seguir).

Temos pela Proposição (3.12) que

$$\begin{aligned}&\sup_s \big| I\!P\big(T_N^\nu(q) > \kappa_N s\big) - I\!P\big(\xi_u^\nu \notin A, u \in [\Delta(N), \kappa_N s]\big)\big| \\ &= \sup_s\big\{I\!P\big(\{\xi_u^\nu \notin A, u \in [\Delta(N), \kappa_N s]\} \bigcap \{T_N^\nu(q) \leq \kappa_N s\}\big)\big\} \\ &\leq I\!P\big(T_N^\nu(q) \leq \Delta(N)\big)\ \leq\ \nu(A)\ +\ \nu(A^-)\lambda^\star(N)\Delta(N).\end{aligned}$$

Além disso, usando a estacionaridade do processo, e a Proposição (3.12),

$$\begin{aligned}&\sup_{s,t} \big| I\!P\big(T_N^\nu(q) > \kappa_N(s+t)\big) \\ &- I\!P\big(\{\xi_u^\nu \notin A, u \in [0,\kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(s+t)]\}\big)\big| \\ &= \sup_{s,t} I\!P\big(\{\xi_u^\nu \notin A, u \in [0,\kappa_N t]\ \bigcup\ [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(s+t)]\} \\ &\bigcap\ \{T_N^\nu(q) \leq \kappa_N(s+t)\}\big) \leq I\!P\big(T_N^\nu(q) \leq \Delta(N)\big) \\ &\leq \nu(A)\ +\ \nu(A^-)\lambda^\star(N)\Delta(N).\end{aligned}$$

Segue para todo $t \geq 0$ que

$$\begin{aligned}
&\left|I\!P\big(T_N^\nu(q) > \kappa_N(s+t)\big) - I\!P\big(T_N^\nu(q) > \kappa_N s\big) I\!P\big(T_N^\nu(q) > \kappa_N t\big)\right| \\
&\leq 2\big[\nu(A) \ + \ \nu(A^-)\lambda^\star(N)\Delta(N)\big] \\
&+ \Big|I\!P\big(\xi_u^\nu \notin A, u \in [0, \kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(t+s)]\big) \\
&- I\!P\big(T_N^\nu(q) > \kappa_N t\big) I\!P\big(\xi_u^\nu \notin A, u \in [\Delta(N), \kappa_N s]\big)\Big|. \quad (3.15).
\end{aligned}$$

Pela autodualidade e estacionaridade do processo temos

$$\begin{aligned}
&I\!P\big(\xi_u^\nu \notin A, u \in [0, \kappa_N t] \cup [\kappa_N t + \Delta(N), \kappa_N(s+t)]\big) \\
&= \int \nu(d\zeta) I\!P\big(X^\zeta[0, \kappa_N t] = 0\big) I\!P\big(X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\big).
\end{aligned}$$

Portanto (3.15) é limitada superiormente por

$$\begin{aligned}
&2\big[\nu(A) \ + \ \nu(A^-)\lambda^\star(N)\Delta(N)\big] \\
&+ \ \int \nu(d\zeta) \int \nu(d\eta) I\!P\big(X^\eta[0, \kappa_N t] = 0\big) \\
&\times \left|I\!P\big(X^\eta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\big) - I\!P\big(X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\big)\right|.
\end{aligned}$$

Como os processos $\{\xi_u^\eta : u \geq 0\}$ e $\{\xi_u^\zeta : u \geq 0\}$ estão definidos no mesmo espaço de probabilidade,

$$\begin{aligned}
&\left|I\!P\big(X^\eta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\big) - I\!P\big(X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\big)\right| \\
&\leq \left|I\!E\big[\ \mathbf{1}_{\{X^\eta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\}} - \mathbf{1}_{\{X^\zeta[\Delta(N), \kappa_N s] = 0\}}\big]\right| \\
&\leq I\!P\big(\xi_u^\eta(x) \neq \xi_u^\zeta(x) \quad \text{algum} \ \ x \in \Gamma_N, \quad \text{algum} \ \ u \in [\Delta(N), \kappa_N s]\big).
\end{aligned}$$

Seja y alguma posição com menor norma L^∞ em η tal que $\tau^y = \infty$.

Pela definição do conjunto K_t^y, temos que a expressão acima é limitada por

$$\begin{aligned}
&I\!P\big(x \notin K_u^y \ \text{algum} \ x \in \Gamma_N + y, \text{algum} \ u \in [\Delta(N), \kappa_N s], \tau^y = \infty\big) \\
&\leq |\Gamma_N| I\!P\big(x \notin K_u^y \quad \text{para algum} \quad u \in [\Delta(N), \kappa_N s], \tau^y = \infty\big).
\end{aligned}$$

Definindo $k^\star = [\![\frac{\kappa_N s}{\Delta(N)}]\!]$ temos que a expressão acima é limitada por

$$|\Gamma_N| \sum_{k=1}^{k^\star} I\!P\big(x \notin K_u^y \text{ para algum } u \in [k\Delta(N),(k+1)\Delta(N)], \tau^y = \infty\big).$$

Pelas hipóteses do Teorema da Forma e com uma escolha conveniente de $\Delta(N)$, temos que existem constantes positivas b e C, independentes de N, tais que para $\Delta(N) > \alpha N$ a expressão acima é limitada por

$$\begin{aligned}
&\leq |\Gamma_N| \sum_{k=1}^{k^\star} C \exp\{-bk\Delta(N)\} \\
&\leq C|\Gamma_N| \frac{\exp\{-b\Delta(N)\}}{1-\exp\{-b\Delta(N)\}}.
\end{aligned}$$

Como $\log z \leq z-1$ temos

$$\frac{C|\Gamma_N|}{\exp\{b\Delta(N)\}-1} \;\leq\; \frac{C|\Gamma_N|}{b\Delta(N)}.$$

Escolhendo $\Delta(N) = \alpha N + \sqrt{\kappa_N s}$, temos

$$\frac{C|\Gamma_N|}{b\Delta(N)} \;\leq\; \frac{C|\Gamma_N|}{b(\kappa_N s)^{\frac{1}{2}}} \;=\; \frac{C|\Gamma_N|\sqrt{\nu(A^-)}}{b\sqrt{s}}.$$

Portanto (3.15) é limitada por

$$\begin{aligned}
&\leq 2\nu(A) + 2\nu(A^-)\lambda^\star(N)\Big(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\nu(A^-)}} + \alpha N\Big) \\
&+ \frac{C|\Gamma_N|\sqrt{\nu(A^-)}}{b\sqrt{s}} \\
&\leq 2\nu(A^-) + 2\lambda^\star(N)\sqrt{s\nu(A^-)} + 2\nu(A^-)\lambda^\star(N)\alpha N \\
&+ \frac{C|\Gamma_N|\sqrt{\nu(A^-)}}{b\sqrt{s}} \\
&\leq \overline{C}\sqrt{\nu(A^-)}\big[1 + \lambda^\star(N)s^{\frac{1}{2}} + \lambda^\star(N)N + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}}\big],
\end{aligned}$$

onde $\overline{C} = \max\{2, \alpha, \frac{C}{b}\}$, o que conclui a demonstração. ■

COROLÁRIO 3.16: Sejam $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$. Para todo $\rho < q \leq 1$, $N \geq 1$ e $s \in [1, \infty)$, existem $c' = c'(q) \in \big(0, \frac{1-\log(1-\rho)}{4}\big)$ e $C_1 = C_1(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} &\sup_{t \geq 0} \Big| I\!P\big(\nu(A^-)\ T_N^\nu(q) > (s+t)\big) \\ &- I\!P\big(\nu(A^-)\ T_N^\nu(q) > s\big) I\!P\big(\nu(A^-)\ T_N^\nu(q) > t\big) \Big| \\ &\leq\ C_1\ s\ N\ |\Gamma_N|\ \exp\{-c'|\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$

Dem : Para $s \geq 1$, segue do resultado (3.8) que existe $c' = c'(q) \in \big(0, \frac{1-\log(1-\rho)}{4}\big)$ tal que

$$\begin{aligned} &\overline{C}\big(\nu(A^-)\big)^{\frac{1}{2}} \big[1 + \lambda^\star(N)N + \lambda^\star(N)s^{\frac{1}{2}} + \frac{|\Gamma_N|}{s^{\frac{1}{2}}}\big] \\ &\leq \overline{C} s \exp\{-c'|\Gamma_N|\} \big[1 + \lambda^\star(N)N + \lambda^\star(N) + |\Gamma_N|\big]. \end{aligned}$$

Portanto existem $c' = c'(q) \in \big(0, \frac{1-\log(1-\rho)}{4}\big)$ e $C_1 = C_1(d, \lambda) \in (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} &\overline{C} s \exp\{-c'|\Gamma_N|\}\ \big[1 + \lambda^\star(N)N + \lambda^\star(N) + |\Gamma_N|\big] \\ &\leq C_1\ s\ N\ |\Gamma_N|\ \exp\{-c'|\Gamma_N|\}. \end{aligned}$$

■

3.3 Comportamento Metaestável

Dizemos que um sistema está em uma situação metaestável se ele permanece um tempo macroscopicamente longo em um estado aparentemente estacionário, e em particular, se suas estatísticas ao longo de suas trajetórias se estabilizam em torno deste estado, e se além disso, a cabo de um tempo imprevisível, isto é, assintoticamente Exponencial, as estatísticas do processo tem uma quebra de coerência e o processo se estabiliza em torno de sua verdadeira medida de equilíbrio. O comportamento metaestável se caracteriza portanto pela existência de um equilíbrio aparente dado por uma medida que não a estacionária, e que após um tempo muito longo ocorre de fato a transição para o verdadeiro equilíbrio como conseqüência da ocorrência de uma *grande flutuação* devida a uma sucessão de eventos raros, sendo esta feita de modo abrupto e imprevisível. Esta abordagem de metaestabilidade foi introduzida em [6].

O comportamento metaestável é demonstrado para um modelo de Campo Médio e para o Processo de Contato unidimensional com valores de λ muito grande em [6]. R. Schonmann [15], entre outras coisas, demonstrou que esse comportamento ocorria para qualquer $\lambda > \lambda_c(1)$, onde $\lambda_c(1)$ é o parâmetro crítico do Processo de Contato unidimensional. Estes resultados usam argumentos do tipo *interseção de caminhos* que se aplicam para o caso em que as partículas estão em $\mathbb{Z}$, mas não é possível estendê-lo para dimensões maiores.

O projeto de estudar a metaestabilidade do Processo de Contato multidimensional passa por duas etapas. Primeiramente a caracterização da falta de memória do instante de transição e em seguida a determinação da estabilidade das médias temporais.

Técnicas desenvolvidas em [2] permitem enunciar os Teoremas da Forma e da Convergência Completa para o Processo de Contato em todas dimensões. A estratégia básica é uma adaptação dos argumentos de Barsky, Grimmett e Newman [16] (1989), que apesar de não publicada é explicitada naquele artigo, isto é, sob a hipótese que o processo sobreviva com probabilidade positiva a partir de uma única posição inicial, eles demonstram a existência de uma grande região limitada de espaço-tempo que contém com alta probabilidade muitas cadeias de infecção com certas características, e através de um posicionamento conveniente de cópias destas regiões, eles constroem cadeias não limitadas. Este tipo de argumento, que pode ser chamado de técnica dinâmica de bloco, tem como vantagem em relação as outras até então usadas, a possibilidade de obter resultados para todas as dimensões.

Com estas técnicas [7] demonstrou que o tempo de morte do Processo de Contato supercrítico multidimensional em volume finito, devidamente reescalonado converge em lei para a distribuição Exponencial, realizando a primeira etapa do projeto acima descrito.

Para enunciar o resultado que as médias temporais se mantêm praticamente constantes sobre quase todas trajetórias até que uma grande flutuação ocorra, considere $\{\ \overline{\xi}^{\eta}_{\Gamma}(t) : t \geq 0\ \}$ o Processo de Contato com condição inicial $\eta \in \{0,1\}^{\Gamma}$, restrito ao conjunto $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$, isto é, tal que os Processos Pontuais de Poisson em Γ^c não são considerados na evolução do processo.

Seja $\overline{T}^{\eta}_{\Gamma_N} = \inf\{t \geq 0 : \overline{\xi}^{\eta}_{\Gamma_N}(t) = \emptyset\}$ o tempo da primeira (e última) visita do processo $\overline{\xi}^{\eta}_{\Gamma_N}$ ao estado absorvente, isto é, do processo restrito a $\Gamma_N = \{-N, \ldots, N\}^d$ tal que $\overline{\xi}^{\eta}_{\Gamma_N}(0) = \eta$.

Uma função $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ é dita cilíndrica se houver um conjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tal que $f(\eta) = f(\eta \cap \Lambda)$ para toda configuração $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. O menor conjunto de $\mathbb{Z}^d$ com esta propriedade é dito o suporte de f e será denotado por $\Lambda(f)$.

Dado um número real $b > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e f cilíndrica, as médias temporais sobre trajetórias de f com respeito ao processo $\{\overline{\xi}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}(t) : t \geq 0\}$ serão representadas pelo processo a valor medida $\{A^N_b(s, f) :$

$s \geq 0\}$ dado por :

$$A_b^N(s,f) \;=\; \frac{1}{b}\int\limits_s^{s+b} f(\;\overline{\xi}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}(t)\;)\;dt.$$

Iremos mostrar que :

TEOREMA: Para todo $d \geq 1,\ \lambda > \lambda_c(d)$ e f cilíndrica, existe uma seqüência crescente de números reais positivos $\{\ b(N,d), N \geq 1\ \}$ tal que o processo $\{\ A^N_{b(N,d)}(s\mathbb{E}[\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}], f) : s \geq 0\ \}$ converge em lei, quando $N \longrightarrow \infty$, para um processo Markoviano de salto $\{\ A(s) : s \geq 0\ \}$ definido por:

$$A(s) = \begin{cases} \nu & \text{se} \;\; s < T \\ \delta_{\emptyset} & \text{se} \;\; s > T, \end{cases}$$

onde T é um tempo aleatório cuja distribuição é Exponencial de média um, e ν a medida invariante extremal não-trivial do Processo de Contato $d-$dimensional.

Mountford (1993) demonstrou que:

TEOREMA: Para todo $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$,

$$\frac{\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}}{\mathbb{E}[\;\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}\;]} \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exponencial (1)} \qquad \text{quando} \;\; N \longrightarrow \infty.$$

Este Teorema foi obtido a partir de resultados de percolação orientada que podem ser encontrados em R. Durrett [18].

Para cada $y \in \mathbb{Z}^d$, τ_y será um operador de translação sobre funções cilíndricas: $\big(\tau_y f\big)(\eta) = f\big(\eta^{(y)}\big)$, $\eta^{(y)}(x) = \eta(x-y)$.

Dados f cilíndrica e $N,\ L \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_{\Lambda(f),N}(L) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \Lambda(\tau_y f) \subset [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d\},$$

e seja $\mathbb{E}_\nu(f) = \int f \, d\nu$ a esperança de f com respeito a ν.

LEMA 3.17: Para todo $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$, $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} \frac{(2N+1)^{2d}}{\mathbb{E}[\ \overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}\ ]} = 0$.

Dem : A Proposição (2.1) de [6], isto é, que para N suficientemente grande existe uma constante $a \in (0,1)$, independente de N, tal que

$$\mathbb{P}\big(\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N} \leq \exp\{aN\}\big) \ \leq \ \exp\{-aN\},$$

permite concluir que

$$\begin{aligned} &\lim_{N \longrightarrow \infty} \mathbb{P}\big(\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N} \leq (2N+1)^{2d}\big) \\ &\leq \lim_{N \longrightarrow \infty} \mathbb{P}\big(\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N} \leq \exp\{aN\}\big) \\ &\leq \lim_{N \longrightarrow \infty} \exp\{-aN\} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Teorema anterior (Mountford), o resultado segue. ∎

TEOREMA 3.18: Para todo $d \geq 1$ e $\lambda > \lambda_c(d)$, existe uma seqûência crescente de números positivos $\{b(N,d), N \geq 1\}$ tal que:

i) $\frac{b(N,d)}{\mathbb{E}[\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}]} \longrightarrow 0 \quad$ quando $\ N \longrightarrow \infty$

ii) Para todo $\epsilon > 0$ e f cilíndrica, existe $L = L(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{l \in \mathbb{Z}, 0 \leq l < F_N - 1} \quad \max_{y \in I_{\Lambda(f),N}(L)} \ |\ A^N_{b(N,d)} \ \big(l\ b(N,d), \tau_y f\big) \ - \ \mathbb{E}_\nu(f)\ | \ > \ \epsilon$$

tem probabilidade $\longrightarrow 0$ quando $N \longrightarrow \infty$, onde

$$F_N = \max\{l \in \mathbb{N} : l\ b(N,d) \leq \overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}\}.$$

Dem : Como $\overline{T}^{\Gamma_N}_{\Gamma_N}$ é quase certamente finita, para todo real positivo $b(N,d)$, F_N é uma variável aleatória bem definida e quase certamente finita com valores em $\mathbb{N}$.

Se $b(N,d)$ verificar a condição (i) acima, segue do Teorema da convergência em distribuição para a Exponencial (Mountford), que $I\!P[\ F_N = 0\ ] \longrightarrow 0$ quando $N \longrightarrow \infty$.

Seja, então $\big(b(N,d), N \geq 1\big)$ uma seqüência satisfazendo (i). Dado $\epsilon > 0$, f cilíndrica, para $k \in I\!N$ e $y \in \mathbb{Z}^d$, sejam os eventos

$$B^N_{k,y} = \big[|\ A^N_{b(N,d)}(k\ b(N,d), \tau_y f) - I\!E_\nu(f)| > \epsilon\big].$$

Então, para todo $m \geq 1,\ L \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&I\!P\Big[\ F_N \geq 1, \bigcap_{1\leq k<F_N}\ \bigcap_{y\in I_{\Lambda(f),N}(L)} \big(\ B^N_{k,y}\ \big)^c\ \Big]\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\Big[I\!P[F_N = j] - I\!P\Big[\bigcup_{k=1}^{j-1}\ \bigcup_{y\in I_{\Lambda(f),N}(L)} B^N_{k,y}, F_N = j\Big]\Big]\\
&\geq I\!P[\ 1 \leq F_N \leq m\ ]\\
&- \sum_{j=1}^{m} I\!P\Big[\bigcup_{k=1}^{j-1}\ \bigcup_{y\in I_{\Lambda(f),N}(L)} B^N_{k,y}, F_N = j\Big]\\
&\geq I\!P[1 \leq F_N \leq m]\\
&- \sum_{j=1}^{m} j(2N+1)^d \max_{1\leq k<j}\ \max_{y\in I_{\Lambda(f),N}(L)} I\!P\big[B^N_{k,y}, F_N = j\big]\\
&\geq I\!P[1 \leq F_N \leq m]\\
&- m^2(2N+1)^d \max_{j\geq 1}\ \max_{1\leq k<j}\ \max_{y\in I_{\Lambda(f),N}(L)} I\!P\big[B^N_{k,y}, F_N = j\big].
\end{aligned}$$

Para $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, seja K^η_t o conjunto dos sítios acoplados até o instante t, definido por $K^\eta_t = \bigcup_{x\in\eta}\{\xi^x_t \cup (\xi^{\mathbb{Z}^d}_t)^c\} = \xi^\eta_t \cup (\xi^{\mathbb{Z}^d}_t)^c$.

Temos que para $y \in I_{\Lambda(f),N}(L)$ o evento

$$\big[K^z_t \supset \big[-N+L, N-L\big]^d \cap \mathbb{Z}^d\big]$$

para algum $z \in [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, implica (está contido em) $\left[\tau_y f\left(\overline{\xi}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}(t)\right) = \tau_y f\left(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}\right)\right]$.

Escolhendo $L = L(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\exists\, z \in [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d$ com $\mathbb{P}\{\tau^z = \infty\} \geq 1-\epsilon$, temos para $t < \overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}$, $k < j, y \in I_{\Lambda(f),N}(L)$ e $N > L$ que $\mathbb{P}\left[B_{k,y}^N,\ F_N = j\right] =$

$$\mathbb{P}\left[|A_{b(N,d)}^N(k\ b(N,d), \tau_y f) - \mathbb{E}_\nu(f)| > \epsilon, F_N = j\right] \leq$$

$$\mathbb{P}\Big[|\ A_{b(N,d)}^N(k\ b(N,d), \tau_y f) - \frac{1}{b(N,d)} \int\limits_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt| > \frac{\epsilon}{2} \text{ ou}$$

$$|\frac{1}{b(N,d)} \int\limits_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt - \mathbb{E}_\nu(f)| > \frac{\epsilon}{2}, F_N = j\Big].$$

Temos, trajetória por trajetória, em $[k_N = j]$, se $k < j,\ y \in I_{\Lambda(f),N}(L)$ e $N > L$,

$$|A_{b(N,d)}^N(k\ b(N,d), \tau_y f) - \frac{1}{b(N,d)} \int\limits_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt|$$

$$\leq \frac{2\ ||f||}{b(N,d)} \int\limits_0^{b(N,d)} \mathbf{1}_{\{\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z\}}\ dt\ , \quad \text{onde} \quad ||f|| = \sup_{\eta \subset \mathbb{Z}^d} f(\eta).$$

Definindo os eventos

$C_{k,y}^N$ por $\left[|\frac{1}{b(N,d)} \int\limits_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \tau_y f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}) dt - \mathbb{E}_\nu(f)| > \frac{\epsilon}{2}\right]$ e $D_k^{N,L}$ por $\left[\frac{||f||}{b(N,d)} \int\limits_0^{b(N,d)} \mathbf{1}_{\{\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z\}}\ dt > \frac{\epsilon}{4}\right]$ e finalmente $C_k^N = C_{k,0}^N$, notando que $\mathbb{P}[C_{k,y}^N]$ independe de y, temos

$$\mathbb{P}[\ B_{k,y}^N, F_N = j\ ]\ \leq\ \mathbb{P}[C_k^N]\ +\ \mathbb{P}[D_k^{N,L}].$$

A desigualdade nos assegura que a parte (ii) estará provada se a parte (i) estiver e pudermos encontrar $\{m(N,d),\ N \geq 1\}$, uma seqüência tal que:

$$I\!\!P\big[\ 1 \leq F_N \leq m(N,d)\ \big] \longrightarrow 1 \quad \text{e}$$

$$m^2(N,d)\ (2N+1)^d\big(\max_{k\geq 1} I\!\!P[C_k^N] + \max_{k\geq 1} I\!\!P[D_k^{N,L}]\big) \longrightarrow 0$$

quando $N \longrightarrow \infty$. A condição (a) pode, ainda, ser escrita como

$$I\!\!P\big[\ \overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N} \ \leq\ m(N,d)\ b(N,d)\ \big] \longrightarrow 1$$

quando $N \longrightarrow \infty$ e, em vista do Teorema de Mountford, como

$$\frac{m(N,d)\ b(N,d)}{I\!\!E[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \ \ N \longrightarrow \infty.$$

Usando a notação

$$\psi_L\big(b(N,d)\big) \ = \ \max_{k\geq 1} I\!\!P[C_k^N] \ + \ \max_{k\geq 1} I\!\!P[D_k^{N,L}]$$

e incluindo a parte (i) do Teorema, o nosso problema se resume em encontrar $L \in I\!\!N$ e duas seqüências que satisfaçam simultaneamente, quando $N \longrightarrow \infty$:

a) $\frac{m(N,d)\ b(N,d)}{I\!\!E[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \longrightarrow \infty$

b) $m^2(N,d)\ (2N+1)^d\ \psi_L(b(N,d) \ \longrightarrow 0$

c) $\frac{b(N,d)}{I\!\!E[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]} \longrightarrow 0$.

Se mostrarmos que $\psi_L\big(b(N,d)\big) \ \leq \ \frac{\overline{C}|\Gamma_N|}{b(N,d)}$ onde $\overline{C} = \overline{C}(\epsilon, f)$ é uma constante positiva, teremos pelo Lema (3.17) que

$$m(N,d) \ = \ \Big[\ \frac{I\!\!E[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]}{(2N+1)^{2d}}\ \Big]^{\frac{1}{5}}$$

$$b(N,d) \ = \ \big(\ I\!\!E[\overline{T}_{\Gamma_N}^{\Gamma_N}]\ \big)^{\frac{9}{10}}\ (2N+1)^{\frac{d}{5}}$$

são soluções do nosso problema. A próxima proposição, conclui nossa demonstração. ■

PROPOSIÇÃO 3.19: Para todo $d \geq 1$, $\lambda > \lambda_c(d)$, $\epsilon > 0$, e f cilíndrica, existem $L = L(\epsilon, f) > 0$, $\overline{N} = \overline{N}(\epsilon, f) > L$ e $\overline{C} = \overline{C}(\epsilon, f)$, tais que $\psi_L\big(b(N,d)\big) \leq \frac{\overline{C}|\Gamma_N|}{b(N,d)}$, para todo $N \geq \overline{N}$.

Dem : Inicialmente vamos mostrar que existe uma constante positiva $C_1 = C_1(\epsilon, f)$ tal que $\max\limits_{k\geq 1} I\!\!P\big(C_k^N\big) \leq \frac{C_1 \ |\Gamma_N|}{b(N,d)}$.

Para $k \in I\!\!N$, seja $X_k^b = \Big|\frac{1}{b} \int\limits_{kb}^{(k+1)b} f(\xi_t^{\mathbb{Z}^d})dt - I\!\!E_\nu(f)\Big|$.

Temos para todo $k \geq 1$ e $b(N,d) > \alpha N$, onde $\alpha = \alpha(d,\lambda) \in [1,\infty)$ é dada no Lema (3.5) (Básico) que

$$I\!\!E[X_k^{b(N,d)}] \leq \frac{2||f||}{b(N,d)} \int\limits_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} I\!\!P\big(\xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x) \neq \xi_t^\nu(x), x \in \Lambda(f)\big)dt.$$

Aplicando o Lema anterior, segue que existem $\overline{c} = \overline{c}(d,\lambda) \in (0,\infty)$ e $\overline{C} = \overline{C}(d,\lambda) \in [1,\infty)$ tais que

$$I\!\!E[X_k^{b(N,d)}] \leq \frac{2||f||}{b(N,d)} \int\limits_{kb(N,d)}^{(k+1)b(N,d)} \overline{C}|\Gamma_N| \exp\{-\overline{c}t\}\ dt \leq$$

$$\frac{2||f||\overline{C}|\Gamma_N|}{b(N,d)\overline{c}} \exp\{-k\ \overline{c}\ b(N,d)\} \leq \frac{2\overline{C}'\ ||f||\ |\Gamma_N|}{b(N,d)},$$

para todo $k \geq 1$, onde $\overline{C}' = \frac{\overline{C}}{\overline{c}}$.

Portanto, pela desigualdade de Markov,

$$\begin{aligned}
\max_{k\geq 1} \mathbb{P}\big(C_k^N\big) &= \max_{k\geq 1} \mathbb{P}\big(X_k^{b(N,d)} > \frac{\epsilon}{2}\big) \\
&\leq \max_{k\geq 1} \frac{2\mathbb{E}[X_k^{b(N,d)}]}{\epsilon} \leq \frac{4\ \overline{C}'\ ||f||\ |\Gamma_N|}{\epsilon\ b(N,d)} \\
&= \frac{C_1(\epsilon,f)\ |\Gamma_N|}{b(N,d)},
\end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(\epsilon, f) = \frac{4\ \overline{C}'\ ||f||}{\epsilon}$.

Analogamente, para controlarmos $D_k^{N,L}$, escolha L suficientemente grande tal que existe $z \in [-N+L, N-L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, com $\tau^z = \infty$.

Para $k \in \mathbb{N}$ seja $Y_k^{b,L} = \frac{1}{b}\int_0^b \mathbf{1}_{\{\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z\ ,\ \tau^z=\infty\}}\ dt$.

Segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] &= \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbb{P}\big(\Gamma_{N-L} \not\subset K_t^z\ ,\ \tau^z = \infty\big)dt \\
&= \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbb{P}\big(\bigcup_{x\in\Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^z, \tau^z = \infty\}\big)dt.
\end{aligned}$$

Pela invariância por translações do Processo de Contato,

$$\mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] = \frac{1}{b(N,d)} \int_0^{b(N,d)} \mathbb{P}\big(\bigcup_{x\in z+\Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^0, \tau^0 = \infty\}\big)dt.$$

Temos para alguma $a \in (0,\infty)$ constante fixada que

$$\mathbb{E}[Y_k^{b(N,d),L}] =$$

$$\frac{1}{b(N,d)} \int_0^{\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}} \mathbb{P}\big(\bigcup_{x\in z+\Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^0, \tau^0 = \infty\}\big)\ dt +$$

$$\frac{1}{b(N,d)} \int_{\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}}^{b(N,d)} I\!P\Big(\bigcup_{x \in z + \Gamma_{N-L}} \{x \notin K_t^0, \tau^0 = \infty\}\Big) dt.$$

Segue que existem $a, \overline{c}$ e $\overline{C}$, todas em $(0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned}
& I\!E[Y_k^{b(N,d),L}] \\
& \leq \frac{|\Gamma_{N-L}|}{a\ b(N,d)} + \frac{|\Gamma_{N-L}|}{b(N,d)} \int_{\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}}^{b(N,d)} \overline{C}\ \exp\{-\overline{c}\ t\}\ dt \\
& \leq \frac{|\Gamma_{N-L}|}{a\ b(N,d)} + \frac{\overline{C}\ |\Gamma_N|}{\overline{c}\ b(N,d)} \exp\{-\frac{|\Gamma_{N-L}|}{a}\} \\
& \leq \frac{|\Gamma_N|}{a\ b(N,d)} + \frac{\overline{C}\ |\Gamma_N|}{\overline{c}\ b(N,d)} = \frac{\overline{C}_2\ |\Gamma_N|}{b(N,d)},
\end{aligned}$$

onde $\overline{C}_2 = \max\{\frac{1}{a}, \frac{\overline{C}}{\overline{c}}\}$.

Segue que

$$\max_{k \geq 1} I\!P\big(D_k^{N,L}\big) = \max_{k \geq 1} I\!P\big(||f||\ Y_k^{b(N,d),L} > \frac{\epsilon}{4}\big) \leq$$

$$\max_{k \geq 1} \frac{I\!E[Y_k^{b(N,d),L}]\ 4\ ||f||}{\epsilon} \leq \frac{C_2(\epsilon, f)\ |\Gamma_N|}{b(N,d)},$$

onde $C_2(\epsilon, f) = \frac{\overline{C}_2\ 4\ ||f||}{\epsilon}$.

Tomando $\overline{C} = \max\{C_1, C_2\}$, o resultado segue. ■

3.4 Bibliografia

[**1**] Harris, *Contact Interaction on a Lattice*, Ann. Prob., vol **2**, 969-988, 1974.

[**2**] C. Bezuidenhout and G. Grimmett, *The Critical Contact Process Dies Out*, The Annals of Probability, vol **18**, N$\underline{\text{o}}$4, 1462-1482, 1990.

[**3**] J. L. Lebowitz and R. H. Schonmann, *On the Asymptotics of Occurrence Times of Rare Events for Stochastic Spin Systems*, Journal of Stat. Physics, vol **48**, N$\underline{\text{os}}$ 3/4, 727-751, 1987.

[**4**] A. Galves, F. Martinelli and E. Olivieri, *Large-Density Fluctuations for the One-Dimensional Supercritical Contact Process*, Journal of Stat. Physics, vol **55**, N$\underline{\text{os}}$ 3/4, 639-648, 1989.

[**5**] P. Ferrari, A. Galves and T. Liggett, *Exponential Waiting time for filling a large interval in the symmetric simple exclusion process.* Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistiques, **31**, (1), 155-175, 1995.

[**6**] M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri and M. E. Vares, *Metastable Behavior of Stochastic Dynamics : A Pathwise Approach*, Journal of Stat. Phys., vol **35**, 603-634, 1984.

[**7**] T. S. Mountford, *A Metastable Result for the Finite Multidimensional Contact Process*, Canad. Math. Bull., Vol **36**, 216-226, 1993.

[**8**] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag New York Inc., 1985.

[**9**] R. Holley and T. M. Liggett, *The Survival of Contact Processes*, Ann. Prob., vol **6**, 198-206, 1978.

[**10**] Harris, *Additive Set-Valued Markov Processes and Graphical Methods*, Ann. Prob., vol **6**, 355-378, 1978.

[**11**] R. Durrett and D. Griffeath, *Contact Process in Several Dimensions*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, vol **59**, 535-552, 1982.

[**12**] R. Durrett, *The Contact Process, 1974-1989*, Lectures in Applied Mathematics, vol **27**, 1-29, 1991.

[**13**] J. L. Lebowitz and R. H. Schonmann, *Pseudo-Free Energies and Large Deviations for Non Gibbsian FKG Measures*, Probab. Th. Rel. Fields, vol **77**, 49-64, 1988.

[**14**] M. Kac, *On the Notion of Recurrence in Discrete Stochastic Processes*, Bull. Amer. Math. Soc., vol **53**, 1002-1010, 1947.

[**15**] R. H. Schonmann, *Metaestabilidade para o Processo de Contato : Extensão dos Teoremas Básicos e Estudo das Flutuações*, Tese - IME-USP, 1984.

[**16**] D. J. Barsky, G. R. Grimmett and C. M. Newman, *Percolation in Half-Spaces : Equality of Critical Probabilities and Continuity of Percolation Probability*, Unpublished, 1989.

[**17**] R. Durrett and R. Schonmann, *The Contact Process on a finite set II*, The Annals of Probability, vol **16**, 1570 - 1583, 1988.

[**18**] R. Durrett, *Oriented percolation in two dimensions*, The Annals of Probability, vol **12**, 999 - 1040, 1984.

[**19**] A. Simonis, *Filling the Hipercube in the Supercritical Contact Process in Equilibrium*, Markov Processes and Related Fields, **4**, N. 1, 113-130, 1998.

[**20**] A. Simonis, *Metastability of the $d-$dimensional Contact Process*, J. Stat. Phys., **83**, (5/6), 1225-1239, 1996.

[**21**] E. Olivieri and M.E. Vares, *Large deviations and metastability*, Cambridge University Press, 2004.

Capítulo 4

Superposição da Dinâmica de Exclusão ao Modelo de Ising

Como pode ser esperado, o comportamento de um sistema de partículas interagentes depende da natureza da interação. Aqui trataremos a superposição de uma dinâmica de Exclusão simples simétrica a um modelo de Ising Estocástico (Glauber).

Nossa motivação é verificar, no limite quando a temperatura vai a zero, para um volume finito fixado e de dimensão 2, se este modelo ainda apresenta as características essenciais associadas à metaestabilidade. O modelo torna-se interessante quando escolhemos a taxa associada ao Processo de Exclusão constante e competindo com a taxa de erosão de cantos.

De fato, se o campo externo h, é pequeno e positivo $(0 < h < 1)$, o sistema, quando a configuração inicial é $-\underline{1}$, ou seja, todos os sítios assumem o valor -1, comporta-se como se estivesse em um estado estável por um tempo muito longo até a formação de uma gota de spins positivos. Então, em um tempo relativamente curto, evolui para a configuração $+\underline{1}$. No primeiro caso que estudaremos, o tamanho da gota não depende de h como em [10] o que pode ser verificado no Teorema 1.

Vale observar ainda que o modelo tratado aqui não é reversível e sua medida invariante não é conhecida explicitamente.

A caracterização do comportamento metaestável aqui adotada é aquela que considera a evolução ao longo das trajetórias, o chamado *pathwise approach* ou abordagem trajetória por trajetória, introduzido por Cassandro, Galves, Olivieri e Vares [1].

E. Scoppola [13] apresentou um procedimento de renormalização para cadeias de Markov com espaço de estados finito e probabilidades de transição exponencialmente pequenas em um parâmetro $\overline{\beta}$ com o qual os principais resultados de [10] foram obtidos novamente.

Como em nosso modelo o procedimento de renormalização apresenta classes de equivalência não triviais, não poderemos utilizar o resultado de [13] para provar que o tempo necessário para alcançar $+\underline{1}$, quando o processo tem como configuração inicial $-\underline{1}$, normalizado por sua média tem distribuição assintótica Exponencial de média 1. Desta maneira, apresentaremos outra demonstração para este resultado.

O Teorema 4 fornece o caminho típico que o processo segue para escapar do estado metaestável e alcançar o estável. A ferramenta básica para demonstrar este tipo de resultado é a reversibilidade, mas neste caso, como o caminho é curto, com a estimativa do tempo total é possível selecionar o caminho mais provável de escape.

4.1 Modelo e Resultados

Consideraremos neste capítulo um modelo de Ising ferromagnético bidimensional com interação a vizinhos mais próximos em um toro finito Λ_N, com uma perturbação aleatória dada por um Processo de Exclusão simples simétrico.

O processo assume valores em $\overline{X}_N = \{-1, +1\}^{\Lambda_N}$ onde $\Lambda_N = \{1, \ldots, N\}^2$ e seu gerador age sobre funções f cilíndricas da seguinte maneira:

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in \Lambda_N} c(x,\eta)\big[f(\eta^x) - f(\eta)\big] + \sum_{x,y \in \Lambda_N} c(x,y,\eta)\big[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\big],$$

onde $c(x,\eta)$ e $c(x,y,\eta)$ são as taxas associadas a dinâmica de Glauber e de exclusão respectivamente, e que serão descritas a seguir. Aqui consideramos dinâmicas de Glauber nas quais o conteúdo do sítio x, quando a configuração é $\eta \in \overline{X}_N$, troca de sinal com taxa dada por

$$c(x,\eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta_x H(\eta) \leq 0; \\ \exp\{-\beta \Delta_x H(\eta)\}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde $H(\eta)$, o Hamiltoniano da configuração η, é dado por:

$$H(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda_N \\ ||x-y||=1}} \eta(x)\eta(y) \;-\frac{h}{2} \sum_{x \in \Lambda_N} \eta(x);$$

com $||x - y|| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

O primeiro termo, no Hamiltoniano, representa a soma sobre os pares de vizinhos próximos de Λ_N, contando cada par somente uma vez, e

$$\Delta_x H(\eta) = \; H(\eta^x) - H(\eta) \text{ com}$$

$$\eta^x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } x \neq y, \\ -\eta(y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consideraremos $\beta > 0$ o inverso da temperatura e $h > 0$ o campo magnético externo.

Para a dinâmica de Exclusão tomaremos a seguinte taxa de salto:

$$c(x,y,\eta) = \begin{cases} \exp\{-\beta h\}, & \text{se } ||x-y|| = 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{se } z \neq x, z \neq y, \\ \eta(x) & \text{se } z = y, \\ \eta(y) & \text{se } z = x. \end{cases}$$

Para cada configuração inicial $\eta \in \overline{X}_N$, as taxas acima definem um processo Markoviano a tempo contínuo $\{\sigma_t^\eta; t \geq 0\}$, tal que em $t = 0$, $\sigma_t^\eta = \eta$ com probabilidade 1. Para $\xi \neq \zeta$ e $\forall\ \epsilon > 0$

$$I\!P(\sigma_{t+\epsilon}^\eta = \xi \ / \ \sigma_t^\eta = \zeta)$$

$$= \begin{cases} c(x,\zeta)\epsilon + o(\epsilon) & \text{se } \xi = \zeta^x \text{ para algum } x \in \Lambda_N, \\ c(x,y,\zeta)\epsilon + o(\epsilon) & \text{se } \xi = \zeta^{x,y}, ||x-y|| = 1, \\ o(\epsilon) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $\eta \in \overline{X}_N$ e $A \subset \overline{X}_N$, definimos o instante de entrada em A por $T^\eta(A) = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^\eta \in A\}$.

O objetivo é descrever o comportamento do sistema quando este parte da configuração $-\underline{1}$ até alcançar $+\underline{1}$ para N e h fixados e β tendendo a infinito (baixas temperaturas).

Algumas taxas associadas a dinâmica de Glauber

1) Criação do primeiro spin positivo $(e^{-\beta(4-h)})$

$$
\begin{array}{ccc}
- - - - - - - - & \qquad & - - - - - - - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - - \\
- - - - - - - - & & - - - + - - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - -
\end{array}
$$

2) Criação de spin positivo com um vizinho positivo ($e^{-\beta(2-h)}$)

$$
\begin{array}{ccc}
- - - - - - - - & \qquad & - - - - - - - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - - \\
- - - + - - - & & - - - + - - - \\
- - - - - - - - & & - - - + - - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - -
\end{array}
$$

3) Erosão de Canto ($e^{-\beta h}$)

$$
\begin{array}{ccc}
- - - - - - - - & \qquad & - - - - - - - - \\
- - + + + - - & & - - + + - - - \\
- - + + + - - & & - - + + + - - \\
- - + + + - - & & - - + + + - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - -
\end{array}
$$

4) Erosão de Meio ($e^{-\beta(2+h)}$)

$$
\begin{array}{ccc}
- - - - - - - - & \qquad & - - - - - - - - \\
- - + + + - - & & - - + - + - - \\
- - + + + - - & & - - + + + - - \\
- - + + + - - & & - - + + + - - \\
- - - - - - - - & & - - - - - - - -
\end{array}
$$

Com as taxas acima é fácil verificar que se $h > 4$ qualquer spin negativo torna-se positivo com taxa 1 mesmo que seus vizinhos sejam negativos, por outro lado, qualquer spin positivo troca de sinal com taxa que tende a zero quando β tende a infinito. Neste caso a ação do Processo de Exclusão não é percebida antes de $T^{-\underline{1}}(+\underline{1})$ pois

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(T^{-\underline{1}}(+\underline{1}) > \exp\{\beta(h-\delta)\}) = 0, \qquad \forall\ 0 < \delta < h.$$

De fato $T^{-\underline{1}}(+\underline{1})$, neste caso, é de ordem polinomial em N e independe de β.

Se $2 < h < 4$ e $N \geq 3$ o sistema após alcançar uma configuração com um spin positivo terá quatro alternativas, a saber: com taxa 1 o sistema retorna a $-\underline{1}$, com taxa 4 ele cria um spin positivo vizinho ao já existente, com taxa $(N^2-5)\exp\{-\beta(4-h)\}$ cria um segundo spin positivo não vizinho ao já existente e com taxa $5\exp\{-\beta h\}$ o Processo de Exclusão atua e basicamente nada se modifica. Como as duas últimas taxas anulam-se no limite quando β tende a infinito apenas as duas primeiras possibilidades são importantes. Se o sistema retornar a $-\underline{1}$ tudo recomeça mas se ele alcançar uma configuração com dois spins positivos unidos então ambos terão taxas $\exp\{-\beta(h-2)\}$ de retornarem a -1 enquanto seus vizinhos negativos tornam-se positivos com taxa 1. Assim, um par de vizinhos positivos formam a gota crítica para este caso.

Se $1 < h < 2$ o sistema após criar um par de vizinhos positivos ele poderá retornar a $-\underline{1}$ com dois saltos de taxa 1 ou alcançar uma gota de dimensões 2×2 com um salto de taxa $\exp\{-\beta(2-h)\}$ seguido de saltos de taxa 1. Após a formação desta gota a taxa de criação de protuberância ($\exp\{-\beta(2-h)\}$) é exponencialmente maior, em β, que a taxa de erosão de cantos ($\exp\{-\beta h\}$), desta forma, partindo de uma gota 2×2 o processo visitará $+\underline{1}$ antes de $-\underline{1}$ com probabilidade tendendo a 1 quando β tende a infinito.

Aqui investigaremos como se dá a passagem de $-\underline{1}$ a $+\underline{1}$ para pequenos campos magnéticos, isto é, $0 < h < 1$.

Em [10] foi estudado o comportamento do processo dado por $\Lambda = \Lambda_G$, onde Λ_G é o gerador associado à dinâmica de Glauber definida acima. A questão aqui é: *O que acontece a este comportamento quando adicionamos uma perturbação dada por um Processo de Exclusão?* No caso em que a taxa de exclusão for $\exp\{-\beta h\}$ veremos que o tamanho da gota crítica não depende de h.

Antes de apresentar o Teorema 1 considere a seguinte definição:

Definição 1: Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de configurações com todos os spins negativos exceto por aqueles em um retângulo $l_1 \times l_2$ que são positivos, com l_1 e l_2 menores do que $N-1$. Para $\eta \in \mathcal{R}$ denotaremos por $l(\eta) = \min(l_1, l_2)$.

Teorema 1: Suponha que $\eta \in \mathcal{R}$ e $0 < h < 1$.

a) Se $l(\eta) > 3$ então $\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})\big) = 1$.

b) Se $l(\eta) = 1$ então $\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})\big) = 1$.

c) Se $l(\eta) = 2$ ou $l(\eta) = 3$ então

$$\liminf_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})\big) > 0;$$
$$\liminf_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})\big) > 0.$$

O Teorema 1 tem como conseqüência a possibilidade de dividir o conjunto de configurações em três subconjuntos não vazios $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de tal modo que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são, respectivamente, as bases de atração de $-\underline{1}$ e $+\underline{1}$, enquanto que o sistema partindo de qualquer configuração de $\mathcal{B}$ pode ir para $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{C}$, com probabilidades comparáveis quando β cresce.

Proposição 1: Suponha $0 < h < 1$. O conjunto de configurações pode ser particionado em três conjuntos não vazios $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tal que

$a)$ $Se\ \eta \in \mathcal{A}\ e\ \ \epsilon > 0$ então

$$\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1}), T^\eta(-\underline{1}) < e^{\beta\epsilon}\big) = 1.$$

$b)$ $Se\ \eta \in \mathcal{C}\ e\ \epsilon > 0$ então

$$\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1}), T^\eta(+\underline{1}) < e^{\beta(h+\epsilon)}\big) = 1.$$

$c)$ $Se\ \eta \in \mathcal{B}$ então

$$\liminf_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})\big) > 0,$$

$$\liminf_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})\big) > 0,$$

e para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T^\eta(\{-\underline{1}, +\underline{1}\}) < e^{\beta(h+\epsilon)}\big) = 1.$$

O próximo Teorema caracteriza o tempo que o processo gasta para atingir $+1$ partindo da -1.

Teorema 2: Considere $T = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^{-1} = +\underline{1}\}$; então

$$\frac{T}{E(T)} \longrightarrow \tau \ \text{ em distribuição quando } \beta \to \infty,$$

onde τ é uma variável aleatória Exponencial de média 1.

Antes de continuarmos considere a seguinte notação:

- $T^\eta = T^\eta(+\underline{1})$.
- $\tilde{T} = \inf_{\eta\in\mathcal{C}}\{t > T^\eta : \sigma_t^\eta = -\underline{1}\}$.
- $\mathcal{M}_1$ denota o espaço de probabilidade em $\overline{X}_N$.
- $C_b(\overline{X}_N)$ denota o espaço das funções reais em $\overline{X}_N$.

Teorema 3:

a) $\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log T^{-\underline{1}}(+\underline{1}) = 6 - h$ em probabilidade.

b) $\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log E(T^{-\underline{1}}(+\underline{1})) = 6 - h$.

Para $\eta \in \{-1,+1\}^{\Lambda_N}$ definimos $T_+\eta$ como a configuração obtida de η trocando o sinal de todos os spins -1 com pelo menos dois vizinhos opostos; e $T_-\eta$ como a configuração obtida de η trocando o sinal de todos os spins $+1$ com pelo menos três vizinhos opostos. Aplicando iterativamente T_+ (respectivamente T_-) em η obtemos uma seqüência crescente (decrescente) de configurações que torna-se constante após um número finito de operações. Denote por $\overline{\eta}$ (resp. $\underline{\eta}$) esta configuração final.

Para $0 < h < 1$, T_+ e T_- ocorrem com taxa 1 para a dinâmica de Glauber. Temos assim o seguinte lema,

Lema 1: Se $0 < h < 1$ *e* $0 < \delta < h$ então

$$\inf_{\beta\geq 0} \inf_{\eta\in\overline{X}_N} \mathbb{P}(A) := \alpha_+ > 0,$$
$$\inf_{\beta\geq 0} \inf_{\eta\in\overline{X}_N} \mathbb{P}(B) := \alpha_- > 0,$$

onde A e B são os seguintes eventos:

$$A := \left\{\sigma_s^\eta = \overline{\eta} \text{ para algum } s \in [0, e^{\beta\delta}]; \sigma^\eta_{e^{\beta\delta}} = \underline{(\overline{\eta})}\right\},$$
$$B := \left\{\sigma_s^\eta = \underline{\eta} \text{ para algum } s \in [0, e^{\beta\delta}]; \sigma^\eta_{e^{\beta\delta}} = \overline{(\underline{\eta})}\right\}.$$

Dem : Facilmente vemos que α_+ é a probabilidade de todas as trocas tais que $\eta \to \underline{(\overline{\eta})}$, onde cada passo ocorre com taxa 1. ■

Pelo Lema 1, em um tempo de ordem $e^{\beta\delta}$, para qualquer $0 < \delta < h$, o sistema partindo de $\eta \in \{-1,+1\}^{\Lambda_N}$ pode ir com probabilidade não nula para $\overline{\eta}$, mas não para uma configuração maior quando β tende a infinito. Desta maneira, $\mathcal{A}$ precisa ser o conjunto de configurações η tal que partindo de $\overline{\eta}$ o processo visitará com probabilidade 1 quando β tende a infinito a configuração $-\underline{1}$ antes da

$+\underline{1}$. Assim, definimos $\mathcal{A}$ como o conjunto de configurações η tal que $\underline{(\overline{\eta})}$ é igual a configuração $-\underline{1}$.

Novamente pelo Lema 1, o sistema partindo de $\eta \in \overline{X}_N$ pode ir com probabilidade não nula em um tempo de ordem $\exp\{\beta\delta\}$, para qualquer $0 < \delta < h$, para $\underline{\eta}$, mas não para uma configuração menor quando β tende a infinito. Desta maneira definimos $\mathcal{C}$ como o conjunto de configurações η tal que pelo menos uma das gotas de $+1$ em $\overline{(\underline{\eta})}$ é um retângulo com lados maiores do que 3 ou um anel de largura maior do que 1 ao redor do toro.

Finalmente, $\mathcal{B}$ é o conjunto de configurações que não pertencem a $\mathcal{A}$ nem a $\mathcal{C}$. Partindo de $\eta \in \mathcal{B}$ o sistema tanto pode alcançar $-\underline{1}$ quanto $+\underline{1}$ com probabilidades comparáveis, ou seja,

$$\liminf_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(T^\eta(\mathcal{A}) < T^\eta(\mathcal{C})) > 0, \ \forall\, \eta \in \mathcal{B}$$

e

$$\liminf_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(T^\eta(\mathcal{A}) \geq T^\eta(\mathcal{C})) > 0, \ \forall\, \eta \in \mathcal{B}.$$

4.2 Demonstração do Teorema 1

Se $\eta \in \mathcal{R}$ podemos supor sem perda de generalidade que temos l_1 e l_2 com $l(\eta) = l = l_1 \leq l_2$ tal que todos os spins em η são -1 exceto aqueles dentro de um retângulo $R = \{1, \ldots, l_1\} \times \{1, \ldots, l_2\}$.

Definiremos as faixas de R da seguinte maneira:

$$H_j = \{1, \ldots, l_1\} \times \{j\}, \ \ j \in \{1, \ldots, l_2\},$$

$$V_i = \{i\} \times \{1, \ldots, l_2\}, \ \ i \in \{1, \ldots, l_1\}.$$

Primeiramente, note que $Y_t = \#\{x \in H_1 : \sigma_t(x) = -1\}$ não é um processo de Markov pois seus saltos dependem da configuração que o processo assume no momento. Ainda, um salto seguido da ação de T_- pode destruir no máximo três spins positivos quando estes formam um bloco isolado.

Exemplo:

$$
\begin{array}{cccccc}
- & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & - & - & - & - & -
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
- & - & - & - & - & - \\
- & - & + & - & - & - \\
- & + & - & + & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & + & + & + & - & - \\
- & - & - & - & - & -
\end{array}
$$

Desta maneira

$$Y_t \leq \tilde{Y}_t := \#\{x \in H_1 : (T_-\sigma_t)(x) = -1 \ \text{ ou } \ \sigma_t(x) = -1\}.$$

Para provar a parte (a) do Teorema 1, necessitamos comparar o número de spins negativos em H_1 com o processo $\{X_t;\ t \geq 0\}$, onde $X_0 = 0$ e suas taxas de salto são

$$
\begin{aligned}
c_X(n, n+3) &= 3le^{-\beta h} + (l-2)e^{-\beta(2+h)}, \\
c_X(n, n-1) &= 1.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
c_X(n, n+3) \geq {} & \max_\eta c_{\tilde{Y}}(n, n+1, \eta) \\
& + \max_\eta c_{\tilde{Y}}(n, n+2, \eta) \\
& + \max_\eta c_{\tilde{Y}}(n, n+3, \eta)
\end{aligned}
$$

e $\qquad (4.1)$

$$c_X(n, n-1) \leq \min_\eta c_{\tilde{Y}}(n, n-1, \eta).$$

Agora, defina

$$
\begin{aligned}
\Theta_Y &= \inf\{t \geq 0 : |Y_t| = l-1\} \text{ e} \\
\Theta_X &= \inf\{t \geq 0 : X_t \geq l-1\}.
\end{aligned}
$$

Como conseqüência de (4.1) temos que

$$\mathbb{P}(\Theta_Y > t) \geq \mathbb{P}(\Theta_X > t).$$

Para estimar $\lim\limits_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(\Theta_X > t)$ considere $T_1, T_2, \ldots,$ os instantes em que alguma modificação ocorreu em X_t. Sabemos que $T_1, T_k - T_{k-1}, k = 2, 3, \ldots$ são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Exponencial de taxa $(1 + c_X(n, n+3))$;

$$P(X_{T_k} = X_{T_{k-1}} - 1) = \frac{1}{1 + c_X(n, n+3)} = q,$$

$$P(X_{T_k} = X_{T_{k-1}} + 3) = \frac{c_X(n, n+3)}{1 + c_X(n, n+3)} = p.$$

Agora, para qualquer $M > \lceil \frac{l}{3} \rceil$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\Theta_X < t) = \sum_N \mathbb{P}(\Theta_X < t, T_N \leq t < T_{N+1}) \\
&= \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil} \mathbb{P}(\Theta_X < t \mid T_N \leq t < T_{N+1})\ \mathbb{P}(T_N \leq t < T_{N+1}) \\
&\leq \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil}^{M} \mathbb{P}(\Theta_X < t \mid T_N \leq t < T_{N+1}) + \sum_{N>M} \mathbb{P}(T_N \leq t < T_{N+1}) \\
&\leq \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil}^{M} \mathbb{P}(X_{T_i} \geq l-1 \text{ para algum } i \in \{\lceil \frac{l}{3} \rceil, \ldots, N\}) \\
&+ \sum_{N>M} \mathbb{P}(T_N \leq t < T_{N+1}) \\
&\leq p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + M\ p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + 2M\ p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil + 3}^{M} N p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} p^{\lceil \frac{N - \lceil \frac{l}{3} \rceil}{3} \rceil} \\
&+ \sum_{N>M} \mathbb{P}(T_N \leq t < T_{N+1}) \\
&\leq 3M\ p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + M\ p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} \sum_{N=1}^{M} 3p^N + \sum_{N>M} \mathbb{P}(T_N \leq t < T_{N+1}),
\end{aligned}$$

onde $\lceil k \rceil$ = menor inteiro maior ou igual a k.

Tomando $t = \exp\{\beta(h(\lceil \frac{l}{3} \rceil) - \epsilon)\}$ e $M = \lceil (1 + c_X(n, n+3) + \delta)t \rceil$ temos que este majorante tende a zero quando β tende a infinito, para qualquer $\delta > 0$.

Ainda, dado $\delta_1 > 0$, uma protuberância aparece em um tempo de ordem $l \exp\{\beta(h + \delta_1)\}$, com probabilidade muito próxima de um quando β tende a infinito o que implica que uma nova faixa será criada antes de $t = \exp\{\beta(h(\lceil \frac{l}{3} \rceil) - \epsilon)\}$.

Desta maneira o processo atinge uma configuração com uma gota retangular ainda maior e pela Propriedade Forte de Markov o processo recomeça desta nova configuração.

Para provar a parte (b) do Teorema 1 é suficiente verificar que se $l(\eta) = 1$ uma erosão ocorre em um tempo de ordem $\exp\{\beta\delta\}, 0 < \delta < h$, isto é, um tempo menor do que $e^{\beta h}$ com probabilidade próxima de um quando β tende a infinito e, desde que as taxas de salto e criação de spins positivos são menores do que $\exp\{-\beta\delta\}, 0 < \delta < h$, temos o resultado.

Para a parte (c) é suficiente verificar que um salto seguido da ação de T_- pode destruir uma faixa de tamanho 3 e um salto seguido da ação de T_+ pode criar uma nova faixa. O resultado segue do Lema 1. ■

4.3 Demonstração da Proposição 1

a) Usando o Teorema 1 e o fato de que $\underline{\eta}$ é alcançado em um tempo de ordem polinomial em N temos o resultado.

b) Usando o Teorema 1 e o fato de que uma nova faixa é criada em um tempo de ordem $\exp\{\beta(h + \delta)\}$, $\forall\ \delta > 0$, temos o resultado.

Antes de provarmos a parte (c) da Proposição 1 introduziremos a seguinte definição.

Definição 2 : Uma configuração η é dita *estável* se qualquer spin $+1$ possuir pelo menos dois vizinhos positivos e qualquer spin -1 possuir pelo menos três vizinhos negativos. Deste modo, uma configuração η é estável se $\eta = \bigcup_i R^i, i \in I$ onde R^i são retângulos no reticulado de lados $l_1^i \leq l_2^i$ com $l_1^i > 1$ para qualquer $i \in I$, e dist $(R^i, R^j) > 2$ se $i \neq j$, onde dist $(R^i, R^j) = \min\limits_{\substack{x \in R^i \\ y \in R^j}} ||x - y||$. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{R}^\star$.

Para $\eta \in \mathcal{B}$, então $\underline{(\overline{\eta})}$ e $\overline{(\underline{\eta})}$ são estáveis com $2 \leq l_1^k \leq 3, \ \forall\ k$.

Agora, defina o tempo de parada

$$T_{\mathcal{S}} = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^\eta \in \mathcal{S}\} \ , \forall\ \eta \in \overline{X}_N .$$

Mostraremos que $\lim\limits_{\beta \to \infty} I\!\!P(T_{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}} < e^{\beta(h+\epsilon)}) = 1.$

Como qualquer configuração em $\mathcal{B}$, pelo Lema 1, alcança uma configuração estável em $\mathcal{B}$ em um tempo de ordem 1, iremos comparar nosso processo com uma Cadeia de Markov cujo espaço de estados é o conjunto de configurações estáveis em $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, a qual descreveremos abaixo.

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{A} & \eta_{2\times 2} & \eta_{2\times 3} & \cdots & \eta_{2\times(N-2)} & \mathcal{C} \\ & \eta_{3\times 3} & \eta_{3\times 4} & \cdots & \eta_{3\times(N-2)} & \end{array}$$

Espaço de Estados

onde $\eta_{ij} \in \mathcal{R}$ com $l_1(\eta) = i$ e $l_2(\eta) = j$.

De fato, considere $t_1 = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^{-1}$ é estável$\}$,

$$t_k = \inf\{t \geq t_{k-1} : \sigma_t^{-1} \text{ é estável}\}, \text{ para } k = 2, \ldots,$$

então $\{\sigma_{t_i}^{-1}\}_{i\geq 1}$ é a Cadeia de Markov que queremos descrever (até sua primeira saída de $\mathcal{B}$).

Considere

• $\mathcal{E} = \{\mathcal{A}, \mathcal{C}, \eta_{2\times 2}, \eta_{2\times 3}, \ldots, \eta_{2\times(N-2)}, \eta_{3\times 3}, \eta_{3\times 4}, \ldots, \eta_{3\times(N-2)}\}$ o espaço de estados.

• $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são estados absorventes.

• $p(\eta, \zeta) > 0$ se η difere de ζ por apenas uma faixa (horizontal ou vertical) na gota de spins positivos ou $\eta = \zeta$.

Na Cadeia de Markov descrita acima cada passo espera um tempo Exponencial com média da ordem de $\exp\{\beta h\}$.

Defina $N(t)$ o número de passos no intervalo $[0, t]; N(t)$ pode ser superestimado por um Processo de Poisson com taxa λt, onde λ é da ordem de $\exp\{-\beta h\}$.

Como o número de passos em $[0, \exp^{\beta(h+\epsilon)}]$, $\forall\, \epsilon > 0$ vai a infinito ($\approx e^{\beta\epsilon}$) e $\mathcal{B}$ é composto por estados transitórios, então neste intervalo de tempo o processo sai de $\mathcal{B}$ com probabilidade próxima de 1 quando β tende a infinito.

Para provar $\liminf\limits_{\beta\to\infty} I\!P(T_{\mathcal{A}} < T_{\mathcal{C}}) > 0$, e $\liminf\limits_{\beta\to\infty} I\!P(T_{\mathcal{C}} < T_{\mathcal{A}}) > 0$, é suficiente mostrar que cada seqüência finita $s = (s_1, \ldots, s_k)$ onde $s_1 = \eta, \eta \in \mathcal{B}, s_k \in \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ e $p(s_i, s_{i+1}) > 0$, tem probabilidade positiva.

Mas $I\!P(s) \geq (\frac{1}{N^2})^k$, $\forall\, k \in I\!N$, de modo que temos o resultado. ■

4.4 Demonstração do Teorema 2

Notação: Por simplicidade $T^{-1}(+\underline{1}) = T$. Considere $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e defina $S = T - T(\mathcal{C})$

Provaremos que

$$\frac{T(\mathcal{C})}{\gamma_\beta} \longrightarrow \tau \quad \text{em distribuição},$$

onde τ é uma variável aleatória Exponencial de média 1 e γ_β está definido por

$$I\!P\big(T(\mathcal{C}) > \gamma_\beta\big) = \exp\{-1\}.$$

Então provaremos que

$$\frac{S}{\gamma_\beta} \longrightarrow 0 \quad \text{em probabilidade quando} \quad \beta \to \infty$$

a partir da qual segue que

$$\frac{T}{\gamma_\beta} \longrightarrow \tau \quad \text{em distribuição quando} \quad \beta \to \infty \tag{4.5}$$

Após fazer isto necessitamos somente trocar γ_β por ET, e isto será feito utilizando argumentos padrões.

Para provar (4.2) introduziremos uma dinâmica restrita ao conjunto $\mathcal{D}$. Apresentaremos a idéia de maneira geral.

Uma técnica muito utilizada no estudo de alguns sistemas de partículas é a de acoplar o processo original com o processo restrito a uma certa região conexa. Diremos que um conjunto φ de configurações está conectado se para qualquer par de configurações $\eta_1, \eta_2 \in \varphi$ é possível ir de η_1 a η_2 por uma cadeia de transformações, em que uma única dinâmica ocorre em cada passo, sem sair de φ.

Nossa dinâmica restrita a φ é definida pelas taxas

$$\tilde{c}(x,\eta) = \begin{cases} c(x,\eta) & \text{se } \eta, \eta^x \in \varphi, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\tilde{c}(x,y,\eta) = \begin{cases} c(x,y,\eta) & \text{se } \eta, \eta^{x,y} \in \varphi, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Utilizaremos dois tipos de acoplamento como em [10]:

Acoplamento A: Para $\eta \in \varphi, \{\tilde{\sigma}_t^\eta\}$ e $\{\sigma_t^\eta\}$ saltam juntos até que o último saia de φ, neste instante o processo restrito fica parado e ambos começam a evoluir independentemente.

Acoplamento B: Para $\eta \in \varphi, \{\tilde{\sigma}_t^\eta\}$ e $\{\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}\}$ evoluem independentemente até o instante em que se encontram; após isso passam a evoluir juntos.

Em nosso caso, $\varphi = \mathcal{D}$. Considere $\tilde{\mu}(.)$ a medida invariante para a dinâmica restrita.

Lema 2: Considere $T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} = \inf\{t \geq 0 : \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} \in \mathcal{A}\}$, então

$$\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < \exp^{\beta(h+\delta)}\big) = 1,\ \forall\ \delta > 0.$$

Dem :

$$\begin{aligned}
&I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < \exp^{\beta(h+\delta)}\big)\\
&= I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < \exp^{\beta(h+\delta)},\ \eta_0 \in \mathcal{A}\big) + I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < \exp^{\beta(h+\delta)},\ \eta_0 \in \mathcal{B}\big)\\
&= \tilde{\mu}(\mathcal{A}) + \sum_{\sigma\in\mathcal{B}} I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\sigma} < \exp^{\beta(h+\delta)}\big)\ I\!P\big(\eta_0 = \sigma\big).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1 e o Lema 1,

$$\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\sigma} < \exp^{\beta(h+\delta)}\big) = 1, \quad \text{se } \sigma \in \mathcal{B}.$$

Então, $\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < \exp^{\beta(h+\delta)}\big) = \lim_{\beta\to\infty} \big[\tilde{\mu}(\mathcal{A}) + \tilde{\mu}(\mathcal{B})\big] = 1.$ ■

Para o próximo Lema utilizaremos o Acoplamento B.

Lema 3: $\lim_{\beta\to\infty} \tilde{\mu}(-\underline{1}) = 1.$

Dem : Considere $\Theta = \inf\{t \geq 0 : \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} = -\underline{1}\}$. Pelo Lema 2 e Proposição 1 sabemos que $\lim_{\beta\to\infty} I\!P(\Theta < \exp^{\beta(h+\delta_1)}) = 1,\ \forall\ \delta_1 > 0.$

Por outro lado,

$$\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} \neq -\underline{1}, \text{para } t \in [0, \exp^{\beta(4-h-\delta_2)}]\big) = 0. \qquad (4.6)$$

Desta maneira, $\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} = \tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}}, \text{para } t < \exp^{\beta(h+\delta_1)}\big) = 1.$

Para $t \in [\exp^{\beta(h+\delta_1)}, \exp^{\beta(4-h-\delta_2)}]$ e pelo acoplamento B temos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} \neq -\underline{1}\big)\\
&= \lim_{\beta\to\infty}\Big\{\, I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} \neq 1, \tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} = \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}\big) + I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} \neq -\underline{1}, \tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} \neq \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}\big)\Big\}\\
&\geq \lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} \neq -\underline{1}, \tilde{\sigma}_t^{-\underline{1}} = \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}\big)\\
&= \lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} \neq -\underline{1}\big) = \tilde{\mu}(\mathcal{D}\backslash\{-\underline{1}\}) \geq 0.
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Por (4.6) e (4.7) temos $\lim_{\beta\to\infty} \tilde{\mu}(-\underline{1}) = 1.$ ■

Agora provaremos (4.2) mostrando a correspondente perda de memória assintótica. Isto consiste em verificar que

$$\lim_{\beta\to\infty} \big|\Delta_\beta(s,t)\big| = 0,$$

onde definimos $\Delta_\beta(s,t)$ por:

$$I\!P\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > (s+t)\gamma_\beta\big) - I\!P\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta\big) I\!P\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big).$$

Usando a Propriedade de Markov temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > (s+t)\gamma_\beta\big)\\
&= \sum_{\eta\in\mathcal{D}} \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} = \eta\big)\mathbb{P}\big(T^{\eta}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big)\\
&= \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} = -\underline{1}\big)\mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big)\\
&+ \sum_{\eta\in\mathcal{D}\setminus\{-\underline{1}\}} \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} = \eta\big)\mathbb{P}\big(T^{\eta}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big)\\
&\le \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta\big)\ \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big)\\
&+ \sum_{\eta\in\mathcal{D}/\{-\underline{1}\}} \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} = \eta\big)\ \mathbb{P}\big(T^{\eta}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big).
\end{aligned}$$

Desse modo

$$\Delta_\beta(s,t) \le \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} \neq -\underline{1}\big) \le \mathbb{P}\big(\tilde{\sigma}^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} \neq -\underline{1}\big).$$

Por outro lado, $\mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > (s+t)\gamma_\beta\big)$

$$\begin{aligned}
&\ge \mathbb{P}\big(\sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} = -\underline{1}, \sigma_0^{-\underline{1}} = \sigma_0^{\tilde{\mu}} /\ T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta\big)\\
&\times \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta\big)\mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big)\\
&+ \mathbb{P}\big(\sigma^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} = -\underline{1}, \sigma_0^{-\underline{1}} \neq \sigma_0^{\tilde{\mu}} /\ T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta\big)\\
&\times \mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta\big)\mathbb{P}\big(T^{-\underline{1}}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta\big).
\end{aligned}$$

Agora, pelo acoplamento B, $\mathbb{P}\big(\tilde{\sigma}^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} \neq -\underline{1}\big)$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\big(\tilde{\sigma}^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} \neq -\underline{1}, \tilde{\sigma}_0^{-\underline{1}} = \tilde{\sigma}_0^{\tilde{\mu}}\big) + \mathbb{P}\big(\tilde{\sigma}^{-\underline{1}}_{s\gamma_\beta} \neq -\underline{1}, \tilde{\sigma}_0^{-\underline{1}} \neq \tilde{\sigma}_0^{\tilde{\mu}}\big)\\
&\le \mathbb{P}\big(\tilde{\sigma}^{\tilde{\mu}}_{s\gamma_\beta} \neq -\underline{1}\big) + \mathbb{P}\big(\tilde{\sigma}_0^{-\underline{1}} \neq \tilde{\sigma}_0^{\tilde{\mu}}\big) = \tilde{\mu}\big(\mathcal{D}/\{-\underline{1}\}\big) + \tilde{\mu}\big(\mathcal{D}/\{-\underline{1}\}\big).
\end{aligned}$$

A probabilidade acima vai a zero quando β vai a infinito pelo Lema 3 o que finaliza a prova. ■

Para provar (4.4) observamos que T é maior do que o tempo necessário para a criação do primeiro spin positivo partindo de $-\underline{1}$, assim temos $\gamma_\beta \ge \exp\{\beta(4-h)\}$.

O resultado (4.4) segue agora utilizando a parte (b) da Proposição 1. Para trocar γ_β por ET, observe que, por monotonicidade

$$I\!P\big(T > \gamma_\beta u\big) \leq [I\!P\big(T > \gamma_\beta\big)]^u.$$

Usando (4.5) segue que $I\!P\big(T > \gamma_\beta\big) < 1$ se β é grande, tal que podemos usar o Teorema da Convergência Dominada como segue:

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{ET}{\gamma_\beta} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\int_0^\infty I\!P(T > t)dt}{\gamma_\beta} = \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\infty I\!P\big(\frac{T}{\gamma_\beta} > u\big)du = 1. \quad \blacksquare$$

4.5 Demonstração do Teorema 3

Vamos tratar agora o tempo $T^{-\underline{1}}(+\underline{1})$. Como mencionado, para obtermos a estabilidade das médias temporais necessitamos primeiro um minorante para o tempo de *tunnelling* $T^{-\underline{1}}(+\underline{1})$. Utilizando um resultado de [13] obtemos o seguinte Teorema

Teorema 3:

a) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log T^{-\underline{1}}(+\underline{1}) = 6 - h$ em probabilidade.

b) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log E(T^{-\underline{1}}(+\underline{1})) = 6 - h.$

Dem : A prova segue do esquema de renormalização desenvolvido em [13].

$\mathcal{S}^{(0)} = \{-1,+1\}^{\Lambda_N}, \quad M^{(0)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}\},$

$\mathcal{S}^{(1)} = M^{(0)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}\}, \quad M^{(1)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}\},$

$\mathcal{S}^{(2)} = M^{(1)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}\}, \quad M^{(2)} = \{+\underline{1}\}.$

Considere $\phi : I\!\!N \to \overline{X}_N$.

$$V_1 = \inf_{\substack{\eta\in M,\\ \zeta\in\mathcal{S}}} V(\eta,\zeta) = \inf_{\substack{\eta\in M,\\ \zeta\in\mathcal{S}}} \inf_{\substack{\phi,t\\ \phi_0=\eta\\ \phi_t=\zeta}} I_{[0,t]}(\phi)$$

$$= \inf_{\substack{\eta\in M,\\ \zeta\in\mathcal{S}}} \inf_{\substack{\phi,t\\ \phi_0=\eta\\ \phi_t=\zeta}} \sum_{i=0}^{t-1} \Delta(\phi_i,\phi_{i+1}) = h.$$

$$V_2 = \inf_{\substack{\eta\in M^{(1)},\\ \zeta\in\mathcal{S}^{(1)}}} V^{(1)}(\eta,\zeta) = \inf_{\substack{\eta\in M^{(1)},\\ \zeta\in\mathcal{S}^{(1)}}} \inf_{\substack{\phi,t,\\ \phi_0=\eta,\\ \phi_t=\zeta}} I^{(1)}(\phi)$$

$$= \inf_{\substack{\eta\in M^{1},\\ \zeta\in\mathcal{S}^{1}}} \inf_{\substack{\phi,t\\ \phi_0=\eta,\\ \phi_t=\zeta}} \sum_{i=0}^{t-1} \overline{\Delta}^{(1)}(\phi_i,\phi_{i+1})$$

$$= \inf_{\substack{\eta\in M^{(1)},\\ \zeta\in\mathcal{S}^{(1)}}} \inf_{\substack{\phi,t,\\ \phi_0=\eta,\\ \phi_t=\zeta}} \sum_{i=0}^{t-1} \overline{\Delta}^{(0)}(\phi_i,\phi_{i+1}) - V_1 \;\; \phi_i,\phi_{i+1} \in \mathcal{S}^{(1)}$$
$$= 6 - 2h.$$

Então do Teorema 2.1 em [13] temos a prova do Teorema 3. ■

4.6 A Saída Padrão

A estimativa de $T^{-\underline{1}}(+\underline{1})$ sugere a maneira pela qual o processo sai de $-\underline{1}$. Primeiramente note que uma configuração em $\mathcal{B}$ possui, pelo menos, dois spins positivos e a configuração

$$\begin{array}{cccccccc}
- & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & + & - & - & - \\
- & - & - & + & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}$$

$$\eta^*$$

pertence a $\mathcal{B}$.

De fato, qualquer rotação ou translação de η^* pertence a $\mathcal{B}$. Denotemos esta classe por $\mathcal{M}^*$.

Agora, considere $\overline{\mathcal{M}}^2$ a classe de configurações com dois spins positivos e $\mathcal{M}^2$ a classe de configurações com dois spins positivos vizinhos ($\mathcal{M}^2 \subset \overline{\mathcal{M}}^2$). Temos que

Teorema 4: $\lim_{\beta\to\infty} I\!P\big(\sigma^{-\underline{1}}_{T^{-\underline{1}}(\overline{\mathcal{M}}^2)} \in \mathcal{M}^2 \; ; \; \sigma^{-\underline{1}}_{T^{-\underline{1}}(\mathcal{B})} \in \mathcal{M}^*\big) = 1.$

Dem: A prova deste resultado torna-se imediata a partir do Teorema 4. Suponha que $\sigma^{-\underline{1}}_{T^{-\underline{1}}(\overline{\mathcal{M}}^2)} \notin \mathcal{M}^2$. Até $T^{-\underline{1}}(\overline{\mathcal{M}}^2)$ o Processo de Exclusão apenas translada as configurações com um spin positivo, desta forma utilizando os resultados para a dinâmica de Glauber [10] temos que o tempo necessário para a criação de dois spins positivos não vizinhos é maior do que $\exp(\beta(8 - 2h - \epsilon))$ com probabilidade próxima de um, para qualquer $\epsilon > 0$ quando β tende a infinito.

Agora, suponha que $\sigma^{-\underline{1}}_{T^{-\underline{1}}(\mathcal{B})} \notin \mathcal{M}^*$. Desta maneira, esta configuração tem, pelo menos, três spins positivos. Mas a criação destes três spins, sem passar por $\mathcal{M}^*$, (isto é, o Processo de Exclusão não ocorre na configuração com dois spins positivos vizinhos), necessita de um tempo maior do que $\exp(\beta(8-3h-\delta))$, com probabilidade tendendo a um, para qualquer delta positivo, quando β tende a infinito, pois somente a dinâmica de Glauber será responsável pela criação de spins positivos.

Como $8 - 2h > 6 - h$ e $8 - 3h > 6 - h$ para qualquer $h < 1$ temos o resultado. ■

Note que o Teorema 5 implica que a saída de $-\underline{1}$ a $\mathcal{B}$, não segue o caminho reverso, contrastando com a dinâmica de Glauber.

4.7 Bibliografia

[**1**] M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri and M. E. Vares, *Metastable behavior of stochastic dynamics: A pathwise approach*, Journal Statistical Physics, **35**:603, 1984.

[**2**] P. Clifford and A. Sudbury, A model for spatial conflict. *Biometrika,* **60**:581, 1973.

[**3**] A. Galves, E. Olivieri and M. E. Vares, *Metastability for a class of dynamical systems subject to small random perturbations.* Ann. Probab. **15**:1288, 1987.

[**4**] R. L. Dobrushin, *Markov processes with a large number of locally interacting components: existence of a limit process and its ergodicity,* Problems Inform. Transmission, **7**:149, 1971.

[**5**] R. L. Dobrushin, *Markov processes with many locally interacting components - the reversible case and some generalizations.* Problems Inform. Transmission,**7**:235, 1971.

[**6**] R. Kotecky and E. Olivieri, *Droplet dynamics for asymmetric Ising model,* Journal Statistical Physics,**70**:1121, 1993.

[**7**] R. Kotecky and E. Olivieri, *Shapes of growing droplets - A model of escape from a metastable phase,* Journal Statistical Physics, **75**:409, 1994.

[**8**] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1985.

[**9**] E. Neves, *Resultados sobre Metaestabilidade num Modelo de Ising Estocástico,* Tese de Doutorado - IME-USP, 1990.

[**10**] E. Neves and R. H. Schonmann, *Critical droplets and metastability for a Glauber dynamics at very low temperatures,* Prob. T. Related Fields, **91**:331, 1992.

[**11**] E. Neves and R. H. Schonmann, *Behavior of droplets for a class of Glauber dynamics at very low temperatures,* Commun. Math. Phys, **137**: 209, 1991.

[**12**] R. H. Schonmanm, *The pattern of escape from metastability of a stochastic Ising model,* Comm. Math. Phys.,**147**:231, 1992.

[**13**] E. Scoppola, *Renormalization group for Markov chains and application to metastability,* Journal Statistical Physics, **73**:83, 1993.

[**14**] F. Spitzer, *Randon processes defined through the interaction of an infinite particle system,* Springer Lecture Notes in Mathematics, **89**: 201, 1969.

[**15**] C. Peixoto, *Metastable behavior of low temperature Glauber dynamics with stirring*, J. Stat. Phys, **80**, (5/6), 1165-1184, 1995.

Apêndice A

Conceitos de Probabilidade e Processos Estocásticos

Existem experimentos onde mesmo que tentemos fixar todas as condições, o resultado elementar e indivisível não pode ser pré-determinado. Estas situações são ditas aleatórias. O conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é dito o espaço amostral e iremos denotá-lo por Ω.

Combinações de possíveis resultados elementares formam a família $\mathcal{F}$ dos eventos. Formalmente, queremos que os eventos sejam subconjuntos de Ω tais que:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

2) Se $A \in \mathcal{F}$ então seu complementar $A^c \in \mathcal{F}$.

3) Se $A_n \in \mathcal{F}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Dado qualquer conjunto $\Omega \neq \emptyset$, o conjunto formado por todos os seus subconjuntos, denotado por $\mathcal{P}(\Omega)$, sempre define uma família de eventos do experimento aleatório. A família $\mathcal{F}_A = \{\Omega, A, A^c, \emptyset\}$ para qualquer $A \subset \Omega$, ou mesmo a família trivial $\mathcal{F}_\emptyset = \{\Omega, \emptyset\}$ satisfazem (1), (2) e (3). Observe que $\mathcal{F}_\emptyset \subset \mathcal{F}_A \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

A família $\mathcal{F}$ formada por subconjuntos de Ω que satisfazem (1), (2) e (3) é dita a $\sigma-$álgebra de eventos de Ω. Temos que a intersecção de duas $\sigma-$álgebras quaisquer é uma nova $\sigma-$álgebra, *menor* que qualquer uma das duas. É possível encontrar duas $\sigma-$álgebras tal que sua união não seja uma $\sigma-$álgebra.

Os pares $(\Omega, \mathcal{F})$ são ditos espaços mensuráveis e construir um espaço de probabilidade é associar alguma função $I\!\!P$, escolhida com domínio em $\mathcal{F}$ e imagem em $[0,1]$, formando a trinca $(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$, tal que:

4) $I\!\!P(\Omega) = 1$.

5) Se A_i para $i = 1, 2, 3, \cdots \in \mathcal{F}$ e para todo $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$, então $I\!\!P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} I\!\!P(A_i)$.

Uma dificuldade é que nem sempre, dado um espaço mensurável qualquer, conseguimos encontrar uma função $I\!\!P$ satisfazendo (4) e (5). Em particular, quando $\Omega = I\!\!R$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(I\!\!R)$ esta dificuldade existe. Apenas para ilustrar a idéia, no caso em que $\Omega = [0,1] \subset I\!\!R$, e tomamos a menor família de eventos que contenha todos os intervalos fechados contidos em Ω, podemos definar $I\!\!P([a,b]) = b - a$, para quaisquer $0 \leq a \leq b \leq 1$, mas não somos capazes de definir esta $I\!\!P$ em $\mathcal{P}([0,1])$.

A menor $\sigma-$álgebra que contém todos os intervalos da reta real é dita a $\sigma-$álgebra de Borel, denotada por β. A menor $\sigma-$álgebra que contém todos subconjuntos da reta real que podemos definir *área* (e que portanto contém β) é dita a família $\mathcal{L}$ de Lebesgue, e nestes casos podemos construir um espaço de probabilidade através de escolhas convenientes de $I\!\!P$.

Fixado $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ qualquer, satisfazendo (1), (2), (3), (4) e (5), temos o modelo de Kolmogorov, isto é, o modelo matemático para um experimento aleatório.

A escolha de um espaço de probabilidade conveniente para um determinado experimento aleatório pode ser determinante para o valor da *incerteza* associada a um evento. O exemplo a seguir ilustra esta idéia:

Paradoxo de Bertrand: Escolha ao acaso uma corda $\overline{C, D}$ em um círculo de raio unitário. Qual é a probabilidade de que o seu comprimento exceda $\sqrt{3}$?

Modelo Probabilístico (1): Seja $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{F}$ os subconjuntos de Ω mensuráveis Lebesgue, isto é, aqueles que tem área, e defina para $A \in \mathcal{F}$ a função $I\!P(A) \equiv \frac{\text{área de } A}{\pi}$. Identificando de maneira única a corda escolhida ao acaso por $\omega \in \Omega$ e chamando de $(0,0) \in \Omega$ a origem do círculo, temos que se o segmento $\overline{(0,0), w}$ perpendicular a $\overline{CD}$ tiver um comprimento menor ou igual a $\frac{1}{2}$, o evento A ocorre. Segue que $I\!P(A) = \frac{1}{4}$.

Modelo Probabilístico (2): Seja $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathcal{F}$ os subconjuntos de Ω mensuráveis Lebesgue, e defina para $A \in \mathcal{F}$ a função $I\!P(A) \equiv \frac{\text{área de } A}{2\ \pi}$. Identificando de maneira única a corda escolhida ao acaso por $\omega \in \Omega$ e fixando $C \in \Omega$, temos que se o segmento $\overline{C, w} \in [C + \frac{2\pi}{3}, C + \frac{4\pi}{3}]$, o evento A ocorre. Segue que $I\!P(A) = \frac{1}{3}$.

Modelo Probabilístico (3): Seja $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ os subconjuntos de Ω mensuráveis Lebesgue, e defina para $A \in \mathcal{F}$ a função $I\!P(A) \equiv$ área de A. Identificando de maneira única a corda escolhida ao acaso por $\omega \in \Omega$ e $\overline{C, D}$ pelos segmentos perpendiculares a $\overline{0, \omega}$, temos que se $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$ o evento A ocorre. Segue que $I\!P(A) = \frac{1}{2}$. $\blacksquare$.

Escolhendo uma função $X : \Omega \to \overline{I\!R} := I\!R \cup \{\pm\infty\}$ com algumas restrições, podemos levar nosso modelo probabilístico para $(\overline{I\!R}, \mathcal{L}, I\!P_X)$, onde $I\!P_X$ é a probabilidade induzida pela *variável aleatória* X, e a nova trinca forma um conveniente espaço de probabilidade. A restrição para X é que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{F}$, o que é bastante razoável do ponto de vista de modelagem matemática.

A probabilidade $I\!P_X$, induzida pela variável aleatória (v.a.) X é usualmente denotada por $F_X(x) = I\!P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$, para $x \in I\!R$, e é dita a função de distribuição da v.a. X. A F_X também é conhecida na literatura como função de distribuição acumulada de X.

É fácil ver que F_X é uma função não-decrescente, contínua à direita com

$$\lim_{x_n \to -\infty} F_X(x_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x_n \to +\infty} F_X(x_n) = 1.$$

Na Teoria da Probabilidade a trinca $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$, em geral, não precisa ser explicitada, pois apesar de decisiva na construção do modelo, as propriedades das variáveis aleatórias são determinadas por suas distribuições, independentemente do domínio onde as funções X foram definidas.

Ao ampliar a trinca $(I\!R, \beta, F_X)$ incluindo na família dos eventos β, que são obtidas por combinações enumeráveis de operações do tipo $\cup, \cap$ e complementação de intervalos, subconjuntos de $I\!R$ que tem *área*, temos um modelo probabilístico de Lebesgue. Incluindo subconjuntos de um conjunto da família de Lebesgue de área zero, temos um espaço de probabilidade de Lebesgue completo.

OBS: Existe um subconjunto $A \in \mathcal{P}\big([0,1]\big)$ tal que A não é de Borel, isto é, não pertence a menor $\sigma-$álgebra gerada por todos os intervalos contidos em $[0,1]$.

Esta construção, devida a Vitali, considera a adição *módulo 1*. Para $x, y \in [0,1]$ defina $x * y$ por $x + y$ ou por $x + y - 1$, dependendo se $x + y$ tem imagem em $[0,1]$ ou não, respectivamente.

Defina para qualquer $A \subset [0,1]$ o conjunto $A * x = \{a * x : a \in A\}$. Denote por $\mathcal{C}$ os subconjuntos da família de eventos de Borel tais que $A * x$ é um Boreliano e se tentarmos definir $\lambda(B) =$ área de B, para este $A \in \mathcal{C}$ vale que $\lambda(A * x) = \lambda(A)$.

Observe que a família $\mathcal{C}$ é fechada para intersecções, isto é, se A e $B \in \mathcal{C}$ então $A \cap B \in \mathcal{C}$. Para A e $B \in \mathcal{C}$ temos, trivialmente, que $A \cap B$ é de Borel e observe que $\lambda(\{A \cap B\} * x) = \lambda(\{A\} * x) + \lambda(\{B\} * x) - \lambda(\{A \cup B\} * x) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(\{A \cup B\} * x)$, e como $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$ é um Boreliano tal que $\lambda(\{A \cup B\} * x) = \lambda(\{(A \cap B^c)\} * x) + \lambda(B) = \lambda(A \cup B) - \lambda(B) + \lambda(B)$, segue que $\lambda(\{A \cap B\} * x) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(\{A \cup B\}) = \lambda(A \cap B)$.

A família $\mathcal{C}$ contém os intervalos de $[0,1]$, pois para qualquer intervalo $I \subset [0,1]$ temos que $\lambda(I * x) = \lambda(I)$. De fato, a família $\mathcal{C}$ é um $\lambda-$sistema, isto é, contém Ω e é fechada pela formação de complementação e de uniões disjuntas enumeráveis.

Um $\lambda-$sistema, que é fechado para intersecções, é uma $\sigma-$álgebra. Temos que $\Omega \in \lambda-$sistema. Se $A \in \lambda-$sistema, então $A^c \in \lambda-$sistema pois a classe é fechada por complementação. Se $\{A_n : n \geq 1\} \in \lambda-$sistema então $B_n = \{A_n \cap \big(\bigcap_{1=1}^{n-1} A_i^c\big)\} \in \lambda-$sistema pois é fechado por intersecções, e notando que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, o resultado segue.

Como β é a *menor* $\sigma-$álgebra que contém os intervalos de $[0,1]$ temos que $\beta \subset \mathcal{C}$.

Segue que se $A \in \beta$ então $A * x \in \beta$ e $\lambda(A * x) = \lambda(A)$. Temos então que λ é invariante por translação. Dizemos que x e y são equivalentes

$(x \sim y)$ se $x * r = y$ para algum $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais. Pelo *axioma da escolha* podemos construir um conjunto onde cada elemento representa todos os seus equivalentes. Seja $H \subset [0,1]$ o conjunto formado por exatamente um representante de cada uma das possíveis equivalências.

O axioma da escolha afirma que se existir uma partição de subconjuntos não-vazios de Ω, (a união é Ω e são disjuntos dois a dois) digamos $\{A_\theta : \theta \in \Theta\}$, então existe um conjunto (pelo menos um) C que contém exatamente um elemento de cada A_θ, isto é, $C \cap A_\theta$ é unitário para cada $\theta \in \Theta$.

Considere agora enumeráveis conjuntos disjuntos $H*r$, com $r \in \mathbb{Q}$, pois dois números racionais distintos não podem ser equivalentes. Para cada $x \in (0,1]$, $x \in H * r$ para algum $r \in \mathbb{Q}$. Segue que $(0,1] = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} (H * r)$.

Temos então que $\lambda(H)$ deve satisfazer a igualdade $\sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(H * r) = \lambda(0,1]$, o que é impossível pois $\lambda(H * r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Se $\lambda(H * r) = a > 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, então teríamos uma série infinita de valores constante positivos igual a a o que também não é possível. Segue que $H \notin \beta$, isto é, $H \subset (0,1]$ não é um conjunto Boreliano de $(0,1]$. $\blacksquare$.

Um dos conceitos importantes na Teoria é o da probabilidade condicional. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathcal{F}$ e $\mathbb{P}(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado B é definida por

$$\mathbb{P}\big(A \ / \ B\big) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{para todo} \ \ A \in \mathcal{F}.$$

Se uma seqüência de eventos $\{A_i : i \geq 1\}$ forma uma partição enumerável de Ω, então para qualquer $B \in \mathcal{F}$ temos que $\mathbb{P}(B) =$

$\sum_{i\geq 1} I\!P(A_i)I\!P(B \;/\; A_i)$. Segue deste resultado a *fórmula de Bayes*: Para todo $i \geq 1$:

$$I\!P(A_i \;/\; B) = \frac{I\!P(A_i)I\!P(B \;/\; A_i)}{\sum_{j\geq 1} I\!P(A_j)I\!P(B \;/\; A_j)}.$$

Quando a imagem da variável aleatória X está contida em algum subconjunto de $I\!R$ que é enumerável, temos um modelo de probabilidade discreto, caso contrário, quando a imagem de X é não-enumerável, temos o modelo contínuo. No caso discreto, a função $I\!P(X = x)$, para $x \in I\!R$, permite caracterizar a distribuição da variável aleatória X. No caso contínuo, quando existe $f_X : I\!R \to I\!R_+$ tal que $I\!P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$ para todo $A \in \mathcal{L}$ dizemos que a variável aleatória X é absolutamente contínua.

Temos portanto no caso discreto que $F_X(x) = \sum_{y\leq x} I\!P(X = y)$ e no caso absolutamente contínuo $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$.

O conceito de variáveis aleatórias independentes desempenha um papel crucial na Teoria da Probabilidade. Duas variáveis aleatórias X e Y definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ são ditas *independentes* se e somente se para todo x e $y \in I\!R$,

$$I\!P(X \leq x, Y \leq y) = I\!P(X \leq x)I\!P(Y \leq y).$$

O evento $\{X \leq x, Y \leq y\}$ é uma abreviação para $\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} \in \mathcal{F}$.

Quando a v.a. X é discreta, isto é, sua imagem está contida em um conjunto enumerável $E \subset I\!R$, e g uma função de $E \to I\!R$, definimos o valor esperado de $g(X)$ por $I\!E\big(g(X)\big) = \sum_{x\in E} g(x)I\!P(X = x)$.

Para o caso absolutamente contínuo, $\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$. Dizemos que a v.a. X é integrável se $\mathbb{E}\big(|X|\big) < \infty$.

Para um evento B, com $\mathbb{P}(B) > 0$, definimos a função distribuição condicional da v. a. X dado B por

$$F_X(x \;/\; B) = \frac{\mathbb{P}(X \leq x, B)}{\mathbb{P}(B)}, \; x \in \mathbb{R},$$

e a esperança condicional de X dado B por $\mathbb{E}(X \;/\; B) = \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_B)}{\mathbb{P}(B)}$, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_B(\omega) = 1 & \;\text{ se } \omega \in B, \\ 0 & \;\text{ se } \omega \notin B. \end{aligned}$$

Exemplo: Considere a v. a. $X(\omega) = \omega$ definida em $\Omega = (0, 1]$, com $\mathbb{P}\big((a, b]\big) = b - a$, $(a, b] \subset (0, 1]$. A v. a. X tem distribuição Uniforme em $(0, 1]$. A média de X é dada por $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$.

Defina os eventos $\{A_i : i = 1, \ldots, n\}$ por $A_i = \big(\frac{(i-1)}{n}, \frac{i}{n}\big]$ e assuma que um deles ocorreu. Então

$$\mathbb{E}(X \;/\; A_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int\limits_{A_i} x \; f_X(x) \; dx = \frac{1}{2} \frac{2i - 1}{n}. \qquad \blacksquare$$

Considere uma v. a. discreta Y definida em Ω assumindo valores distintos y_i nos eventos A_i, isto é, $A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Os conjuntos $\{A_i : i \geq 1\}$ formam uma partição de Ω e para a v. a. X integrável com $\mathbb{P}(A_i) > 0$ definimos a v. a. discreta

$$\mathbb{E}\big(X \;/\; Y\big)(\omega) = \mathbb{E}\big(X \;/\; Y = y_i\big) \quad \text{para } \; \omega \in A_i.$$

É fácil ver que $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \;/\; Y)\big) = \mathbb{E}(X)$.

Definimos a variância de uma v.a. por $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^2$ e o desvio padrão por $DP(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

A desigualdade de Markov é clássica na literatura. Para $f(X)$ integrável e $\delta > 0$ temos para todo $t > 0$ que $\mathbb{P}\big(|f(X)| > \delta\big) \leq \frac{1}{\delta^t}\mathbb{E}[\ |f(X)|^t\ ]$. Esta desigualdade permite afirmar dentre outras coisas que $\mathbb{P}(\ |X| > \mathbb{E}(X) + tDP(X)\ ) \leq \frac{1}{t^2}$, e portanto a v.a. pertence ao conjunto $\big(\mathbb{E}(X) - 3DP(X)\ ,\ \mathbb{E}(X) + 3DP(X)\big)$ com probabilidade maior ou igual a $\frac{8}{9}$. Em particular,

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta\big) \leq \frac{\text{Var}\ (\ X\ )}{\delta^2}$$

é conhecida como desigualdade de *Chebyshev*.

A desigualdade de Chebyshev é suficiente para estabelecer a *Lei fraca dos Grandes Números*: Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma seqüência de v.as. independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ e $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$, isto é, formam uma *amostra* na linguagem estatística, defina as v.as. $\{\frac{S_n}{n} : n \geq 1\}$ como a média *empírica*, isto é, $\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Temos que $\mathbb{P}\big(|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \delta\big) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2} \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $\delta > 0$.

Muitas vezes $\mathbb{E}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$, e o *Teorema da Convergência Dominada* apresenta uma condição suficiente para a igualdade: Sejam $Y, X, \{X_n : n \geq 1\}$ v.as. em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tais que Y é integrável, $|X_n| \leq Y\ \forall\ n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$. Então X e X_n são integráveis e $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Considere $\{X_n : n \geq 1\}$ v.as. definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dizemos que X_n converge em probabilidade para X se para todo $\delta > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - X| > \delta\big) = 0$. Definimos convergência *quase certa* quando $\mathbb{P}\big(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\big) = 1$. É fácil ver que convergência quase certa é mais *forte* pois implica na convergência em probabilidade.

A Lei Forte de Kolmogorov afirma que para uma amostra de v.as. integráveis $\{X_n : n \geq 1\}$, a média empírica converge quase certamente para $\mathbb{E}(X_1)$.

Dizemos que uma seqüência de eventos $\{A_n : n \geq 1\}$, por exemplo aqueles definidos pela imagem inversa de uma seqüência de v.as., tem limite quando

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k =: \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Para ilustrar este conceito vamos considerar um jogador que toda semana, de hoje até o final dos tempos, aposta na *Megasena.* Para a $n-$ésima semana definimos a v.a. $X_n = 1$ se o apostador ganha e zero caso contrário (o mais provável). O evento $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ corresponde a ocorrência de um número infinito de semanas onde o valor da v.a. é 1 e o evento $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ corresponde a ocorrência de ganhar a Megasena em *todas* as semanas a partir de uma certa data, que pode demorar muitos anos para acontecer, mas após um número finito de vitórias, bastando ter paciência, o jogador vai ganhar sempre.

O Lema de Borel-Cantelli afirma que se $\{A_n : n \geq 1\}$ são eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tais que:

a) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ então $\mathbb{P}\big(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\big) = 0$.

b) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, e os $\{A_n : n \geq 1\}$ são independentes, então $\mathbb{P}\big(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\big) = 1$.

Como a probabilidade de ganhar na Megasena apostando 6 dezenas é uma em 50.063.860 (um evento mais difícil do que arremessar 25 moedas honestas e todas apresentarem a mesma face, tanto faz se cara ou coroa. Basta uma moeda ser diferente que você perde), e como os eventos $\{X_n : n \geq 1\}$ são independentes segue pela parte (b) do Lema de Borel-Cantelli que a probabilidade de ganhar infinitas vezes na Megasena é 1.

Vamos definir convergência em distribuição, ou em Lei, quando consideramos a probabilidade $\mathbb{P}_X$ induzida pela v.a. X. Sejam $\{X_n : n \geq 1\}$ e X v.as. com funções de distribuição $\{F_{X_n} : n \geq 1\}$ e F_X, respectivamente. $\{X_n : n \geq 1\}$ converge em Lei, para X se $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(X_n \leq x\big) = \mathbb{P}\big(X \leq x\} =: F_X(x)$, para os x tais que $\mathbb{P}\big(X = x\big) = 0$.

OBS: É fácil construir um exemplo de seqüências de v. as. que convergem em distribuição mas não em probabilidade. Por exemplo, sejam X e $\{X_i : i \geq 1\}$ v. as. independentes com distribuição comum $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Então $\{X_i : i \geq 1\}$ converge em distribuição para X. Temos para todo $i \geq 1$ que $X_i - X \sim \mathcal{N}(0,1)$, e $\mathbb{P}\big(|X_i - X| \geq \epsilon\big) = 2 - 2F_X(\epsilon)$. Segue que para todo $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_i - X| \geq \epsilon\big) \neq 0$, e portanto não converge em probabilidade. ■

Um dos resultados mais importantes da matemática, e tanto quanto o da convergência forte, forma os alicerces da moderna Teoria da Probabilidade, é o Teorema Central do Limite que pode ser enunciado da seguinte maneira: Seja $\{X_n : n \geq 1\}$ uma amostra com $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ e $0 < \operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Então $\{(\frac{S_n}{n} - \mu)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} : n \geq 1\}$ converge em Lei para a distribuição Normal Padrão, isto é,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{(\frac{S_n}{n} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq x\Big) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{y^2}{2}\}dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ quando $n \to \infty$.

Uma aplicação imediata deste resultado é a construção de intervalos de confiança no contexto da inferência estatística. Suponha que você tenha interesse em estimar a probabilidade de uma v.a. assumir o valor 1, quando $\Omega = \{0, 1\}$. Para tanto, você realiza uma amostra, isto é, observa n valores independentes desta v.a.. Um possível estimador (bom!) é dado pela média empírica definida por $\overline{X}_n := \frac{S_n}{n} = \frac{X_1+\ldots,X_n}{n}$. O valor esperado da v.a. X_1 é $\mathbb{E}(X_1) = p \times 1 + 0 \times (1-p) = p$ para algum $0 \le p \le 1$, onde $p = \mathbb{P}(X=1)$. Portanto, $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = \frac{1}{n}\ \mathbb{E}\big(\sum_{i=1}^{n} X_i\big) = \frac{n\ p}{n} = p$. A variância de X_1 é dada por $\mathrm{Var}(X_1) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$. Pela independência dos $\{X_n : n \ge 1\}$, temos que $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n} \le \frac{1}{4n}$.

Sabemos que uma v.a. Z que tem distribuição Normal Padrão satisfaz a seguinte igualdade: $\mathbb{P}\big(-1,64 \le Z \le 1,64\big) = 0,9$. Podemos escrever, devido o Teorema Central do Limite, que para n suficientemente grande, a $\mathbb{P}\big(-1,64 \le \frac{(\overline{X}_n - p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}) \le 1,64\big)$ é aproximadamente 0,9. Segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(-\frac{1,64}{4} \le (\overline{X}_n - p)\sqrt{n}\big) \le \frac{1,64}{4}\big) &\ge 0,9, \\ \text{isto é,}\ \ \mathbb{P}\big(-\frac{1,64}{4\sqrt{n}} \le (\overline{X}_n - p)\big) \le \frac{1,64}{4\sqrt{n}}\big) &\ge 0,9, \\ \text{portanto}\ \ \mathbb{P}\big(\overline{X}_n - \frac{1,64}{4\sqrt{n}} \le \ \ p \ \ \le \frac{\overline{X}_n + 1,64}{4\sqrt{n}}\big) &\ge 0,9, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que existe um intervalo aleatório dado por $\overline{X}_n \pm \frac{1,64}{4\sqrt{n}}$, que pode ser tão pequeno quanto maior o valor de n, tal que a probabilidade do intervalo conter o valor *desconhecido* de p supera o valor de 90 %, ou mesmo arbitrariamente grande quando escolhermos outro valor maior que 1,64. Em particular, escolhendo o valor 3 como fizemos na desigualdade de Markov, obteremos uma probabilidade em torno de 0,9973 quando a v.a. segue uma Lei Normal.

Uma versão mais geral do Teorema Central do Limite é dada pela condição de Lindeberg: Seja $\{X_n : n \ge 1\}$ uma seqüência de v.as.

independentes tais que $\mathbb{E}(X_n) = \mu_n$ e $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$, e pelo menos um $\sigma_n^2 > 0$. Então uma condição suficiente para a seqüência

$$\{\frac{\big(S_n - \mathbb{E}(S_n)\big)}{\sqrt{\text{Var} S_n}} : n \geq 1\}$$

convergir em Lei para a distribuição Normal Padrão é que para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\text{Var} S_n}} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\mu_k| > \epsilon \sqrt{\text{Var} S_n}} \big(x - \mu_k\big)^2 \, dF_{X_k}(x) \; = \; 0.$$

Existem ainda algumas condições suficientes para a convergência em Lei em que a independência é suprimida. Muitas delas consideram o conceito de covariância ou de alguma outra medida de dependência entre as v.as. A covariância entre X e Y é definida por

$$\text{Cov}(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Quando X e Y são independentes temos que $\text{Cov}(XY) = 0$, quando $\text{Cov}(XY) = 0$, dizemos que as v.as. são não-correlacionadas.

A.1 GRANDES DESVIOS

Considere $\{X_i : i \geq 1\}$ uma amostra aleatória definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Seja $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ para qualquer $n \geq 1$. Como X_1 é integrável sabemos que $\overline{X}_n$ converge quase certamente para μ quando $n \to \infty$.

Cramèr (1937) e Chernoff (1952) estudaram o comportamento assintótico, quando $n \to \infty$, de $\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\big(\overline{X}_n \in A\big)$ para $A \in \beta$. Quando $\mu \notin A$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{X}_n \in A) = 0.$$

Nessas condições os eventos $\{\overline{X}_n \in A\}$ representam uma situação de grande desvio em relação à lei dos grandes números.

Para uma ampla classe de eventos tais que $\mu \notin A$ tem-se que $\mathbb{P}(\overline{X}_n \in A) \approx \exp\{-nI(A)\}$ sendo $I(A) \in (0,\infty)$. O símbolo $\approx$ representa equivalência logarítmica, isto é, $\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}(\overline{X}_n \in A) \to -I(A)$ quando $n \to \infty$, com $-I(A)$ dita a *entropia* em A.

Observe, aplicando a desigualdade de Markov, que para $a > \mu$ e todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n > a) = \mathbb{P}(nt\overline{X}_n > nta) = \mathbb{P}\big(\exp\{nt\overline{X}_n\} > \exp\{nta\}\big)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}(\exp\{nt\overline{X}_n\})}{\exp\{nta\}} = \frac{\mathbb{E}(\exp\{t\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\})}{\exp\{nta\}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp\{tX_1\})}{\exp\{nta\}}$$

$$= \Big[\ \frac{\mathbb{E}(\exp\{tX_1\})}{\exp\{ta\}}\ \Big]^n = \exp\{n[\ln \mathbb{E}(\exp\{tX_1\} - ta]\}.$$

Portanto $\mathbb{P}(\overline{X}_n > a) \leq \exp\{-n[ta - \ln \mathbb{E}[tX_1)]\}$.

O Teorema de Cramèr-Chernoff pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema: Considere $X_1, X_2, \ldots$ v. a. i. i. d. com $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ e defina $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Então $\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}(\overline{X}_n \in A) \to -I(A)$ quando $n \to \infty$, para todo A do tipo $(-\infty, a]$ ou $[a, +\infty)$, com $\mu \notin A$, sendo $I(A)$ caracterizado por $I(A) = \inf\limits_{a \in A} \lambda(A)$ onde

$$\lambda(A) = \sup_{t \in \mathbb{R}}\big(at - \ln \mathbb{E}(\exp\{tX_1\}\big).$$

Exemplo: Considere $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Temos que

$$\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}(\overline{X}_n \in A) \to -\inf_{a \in A} \lambda(A),$$

onde $\lambda(A) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}}\big(ta - \ln \mathbb{E}(\exp\{tX_1\})\big)$.

É fácil calcular $I\!E(\exp\{tX_1\}) = \exp\{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$, e como

$$\lambda(A) = \sup_{t\in I\!R}\big(at - t\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\big),$$

segue que

$$\begin{aligned}\lambda(A) =& \big(\frac{a-\mu}{\sigma^2}\big)a - \big(\frac{a-\mu}{\sigma^2}\big)\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\big(\frac{a-\mu}{\sigma^2}\big)^2\\ =& \big(\frac{a-\mu}{\sigma}\big)^2 - \frac{1}{2}\big(\frac{a-\mu}{\sigma}\big)^2 = \frac{1}{2}\big(\frac{a-\mu}{\sigma}\big)^2.\end{aligned}$$

Portanto $I\!P(\overline{X}_n \in A) \approx \exp\{-n \inf_{a\in A} \lambda(A)\}$. ■

O problema considerado por Cramèr e Chernoff tem aplicações e fortes desenvolvimentos quando consideramos famílias de processos estocásticos. Freidlin e Wentzell estudaram perturbações aleatórias de sistemas dinâmicos e uma excelente discussão desses tópicos pode ser encontrado no recente livro *Large deviations and metastability* escrito por E. Olivieri e M. E. Vares (2004).

A.2 PASSEIO ALEATÓRIO

Considere uma seqüência de v. as. definidas em algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$. Neste caso as v. as. $X_1, \ldots, X_n$ terão uma distribuição de probabilidade conjunta para todo $n \geq 1$. Dizemos que as v. as. são mutuamente independentes se e somente se

$$I\!P\big(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n\big) = \prod_{i=1}^{n} I\!P\big(X_i \in B_i\big)$$

para todo $B_i \in \beta,\ i = 1, \ldots, n$.

Para $\{X_i : i \geq 1\}$ v. as. independentes e identicamente distribuídas vamos definir para $n = 1, 2, \ldots$

$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

$\{S_n : n \geq 1\}$ é dito um Passeio Aleatório.

No caso especial em que a distribuição de probabilidade comum dos $X_1, X_2, \ldots$ é dada por

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p, \ \forall \ k \geq 1,$$

para algum $0 \leq p \leq 1$, temos o *Passeio Aleatório Simples* em $\mathbb{Z}$. No caso em que $p = \frac{1}{2}$, temos o Passeio Aleatório Simples *Simétrico* em $\mathbb{Z}$.

Exemplo: (Ruína do Jogador) Considere um Passeio Aleatório Simples, com $0 < p < 1$, para modelar um jogo quando seu capital inicial é $a \in \{0, 1, \ldots, N\}$, para $N \geq 1$. Denote por S_n o capital após n jogadas. O jogo termina quando S_n visitar 0 ou N.

Temos que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = x + 1 \ / \ S_n = x) = p = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1} = x - 1 \ / \ S_n = x),$$

para todo $x \in \{1, \ldots, N-1\}$, e $\mathbb{P}(S_{n+1} = x \ / \ S_n = x) = 1$, quando $x = 0$ ou N.

Vamos definir a probabilidade do evento *ruína do jogador* iniciando com capital a por:

$$\mathbb{P}\big(S_n = 0 \ \text{ para algum } n \geq 0, \ S_n \neq N \ \text{ para todo } n \geq 0 \ / \ S_0 = a\big).$$

Denotando, por simplicidade, essa probabilidade condicional por $f(a)$, temos que $f(0) = 1$ e $f(N) = 0$. Para $a \in \{1, \ldots, N-1\}$ temos dois casos:

$r := \frac{p}{1-p} = 1$ (caso simétrico) então: $f(a) = \frac{N-a}{N}$.
$r \neq 1$ (caso assimétrico) então: $f(a) = \frac{1-r^{N-a}}{1-r^N}$.

Vale notar que quando $N = 40$ e $p = 0,52$, $f(20)$ é menor do que 0,05. ∎

A.3 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Vamos definir um processo de Markov homogêneo $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ com valores em S enumerável, pelas seguintes duas condições nas probabilidades de transição $p_{ij}(t) := I\!P[\xi(t) = j \ / \ \xi(0) = i]$:

(I) $p_{ij}(t-s) = I\!P[\xi(t) = j \ / \ \xi(s) = i]$ para todo $t > s$.
(II) $p_{ij}(t-s) = I\!P[\xi(t) = j \ / \ \xi(s_1) = i_1, \ldots, \xi(s_m) = i_m, \xi(s) = i]$ para todo $t > s$ e $s_1 < \cdots < s_m < s$.

A distribuição de probabilidade para o estado inicial $\xi(0)$ é dada por: $I\!P[\xi(0) = i] = p_i^0, \ i \in S$. Desta forma a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$ para $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ é dada por:

$$I\!P[\xi(t_1) = j_1, \ldots, \xi(t_n) = j_n] = \sum_{i=0}^{\infty} p_{j_{n-1}j_n}(t_n - t_{n-1}) \ldots p_{ij_1}(t_1) p_i^0.$$

A probabilidade do processo estar em j no instante $t > 0$ é obtida por: $p_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}(t) p_i^0, \ j \in S$. Observe que

$$p_j(s+t) = \sum_k p_k(s) p_{kj}(t), \quad \text{para } s < t.$$

Tomando $\xi(0) = i$, temos $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \ s, t \geq 0$, conhecidas como equações de Chapman-Kolmogorov.

Seja $\mathcal{P}(t) := \{p_{ij}(t) : t \geq 0\}$, e τ o tempo de permanência mínimo em qualquer estado com a restrição que $I\!P[\tau > 0] = 1$. Então as $p_{ij}(t)$ são contínuas em $t = 0$, isto é, $\lim_{h \to 0} \mathcal{P}(h) = \mathcal{P}(0) = I$, onde I é a matriz identidade. Além disso, para todo $i \neq j$ em S, existe o

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} := \lambda_{ij}.$$

Os λ_{ij} para $i, j \in S$ são ditas as *taxas ou intensidades* do processo.

As probabilidade de transição satisfazem

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t)$$

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj}$$

com $i \neq j \in S$.

Para $S_0 \subset S$, com $i \notin S_0$, temos que

$$\sum_{j \in S_0} p_{ij}(h) + p_{ii}(h) \leq 1 \quad \text{e portanto}$$

$$\frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \geq \frac{\sum\limits_{j \in S_0} p_{ij}(h)}{h}.$$

Segue que $\lambda_{ii} \geq \sum\limits_{j \in S_0} \lambda_{ij}$, o que implica que $\lambda_{ii} \geq \sum\limits_{j \neq i} \lambda_{ij}$, quando $h \to 0^+$.

Se $\lambda_{ii} = \sum\limits_{j \neq i} \lambda_{ij}$ e $\lambda_{ii} < \infty$ o estado $i \in S$ é dito *estável ou regular.* O estado é dito *instantâneo* se $\lambda_{ii} = \infty$ e *absorvente* se $\lambda_{ii} = 0$.

Quando todos os estados são estáveis, o processo é estável, e neste caso temos que $p_{ij}(t)$ são diferenciáveis para todo $t \geq 0$ e todo $i, j \in S$. Além disso: $\frac{d}{dt}p_{ij}(t) = \sum\limits_{k \neq i}^{\infty} \lambda_{ik} p_{kj}(t) - \lambda_{ii} p_{ij}(t)$.

A matriz $\Lambda := \{\lambda_{ij} : i, j \in S\}$ é dito o *gerador infinitesimal* do processo $\{\xi(t) : t \geq 0\}$.

OBS: Considere o caso em que S é *não enumerável* e $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Markov homogêneo assumindo valores em S. Definimos as probabilidades de transição por

$$\mathbb{P}(x, t, B) = \mathbb{P}[\xi(s + t) \in B \ / \ \xi(s) = x].$$

Assuma que $I\!P(x,t,B)$ é contínua em zero, onde B é o conjunto das funções reais limitadas mensuráveis (isto é v.as. reais limitadas) definidas em Ω. Queremos caracterizar o comportamento do processo $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ a partir da $\frac{\partial I\!P(x,t,B)}{\partial t}|_{t=0}$.

Para $X \in B$, defina $||X|| := \sup\limits_{x \in I\!R} |X(x)|$. A transformação $T : B \to B$ é dita um *operador linear* se para quaisquer $X_1, X_2 \in B, \alpha_1, \alpha_2 \in I\!R$ fixos, $T\big(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2\big) = \alpha_1 T(X_1) + \alpha_2 T(X_2)$.

T é limitado se existir uma constante positiva $M < \infty$ tal que $||TX|| \leq M||X||$, para todo $X \in B$.

O menor M tal que a desigualdade acima acontece é dito a norma do operador T, denotado por $||T||$. Portanto, $||T|| = \sup\limits_{X \neq 0, X \in B} \frac{||TX||}{||X||}$. Segue que $||TX|| \leq ||T||\ ||X||$. Se $||T|| \leq 1$, o operador é dito ser *contração.*

Definição: Uma família $\{S(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados definidos em B é dito um *semigrupo* de contração se:
a) $||S(t)X|| \leq ||X|| \quad \forall\ X \in B$.
b) $S(t+s) = S(t)S(s) = S(s)S(t) \quad$ para todo $\ s,t \geq 0$.

Um semigrupo é dito fortemente contínuo se

$$S(0) = I \quad \text{e} \quad ||S(t) - I|| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to 0^+.$$

Para cada $X \in B$ e $t \geq 0$ defina

$$\big(S(t)X\big)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(y) I\!P(x,t,dy) = I\!E_x\big[X\big(\xi(t)\big)\big].$$

É fácil ver que é uma contração:

$$||S(t)|| = \sup_{X \in B, X \neq 0} \frac{||S(t)X||}{||X||} = \sup_{X \in B, X \neq 0} \frac{\sup\limits_{x \in I\!R} |S(t)X(x)|}{\sup\limits_{x \in I\!R} |X(x)|} \leq$$

$$\sup_{X \in B, X \neq 0} \frac{\sup_{x \in I\!R} |X(x)|}{\sup_{x \in I\!R} |X(x)|} = 1.$$

Usando Chapman-Kolmogorov temos:

$$\big(S(t+s)X\big)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(y) I\!P(x,t,dy) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(y) \int_{-\infty}^{+\infty} I\!P(x,t,dz) I\!P(z,s,dy) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I\!P(x,t,dz)\big(S(s)X\big)(z) = \big(S(t)S(s)X\big)(x).$$

Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em B. Se a seqüência $\{X_n : n \geq 1\}$ em B é tal que $||X_n - X|| \to 0$ quando $n \to \infty$, dizemos que converge fortemente para X e escrevemos $X = (\star) \lim_{n\to\infty} X_n$.

Definição: O gerador infinitesimal Λ do semigrupo é definido por

$$\Lambda X = (\star) \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)X - X}{t}$$

para aquelas $X \in B$ tais que o limite existe.

Seja $D_\Lambda \subset B$ o conjunto dos elementos em B tais que o limite acima existe. Se $X_1, X_2 \subset D_\Lambda$ então $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in D_\Lambda$, isto é, Λ é um operador linear em D_Λ. ■

Exemplo: Considere $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ com valores em S finito. Temos que $\{\mathcal{P}(t) : t \geq 0\}$, onde $\mathcal{P}(t) = \{p_{ij}(t)\}$, $\mathcal{P}(0) = I$, é um semigrupo.

Definimos para todo $s_i \in S$ e $X \in B$, com B o conjunto das funções reais mensuráveis limitadas definidas em Ω,

$$\big(\mathcal{P}(t)X\big)(s_i) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(t) X(s_j),$$

onde $N = |S| \equiv$ é o cardinal de S. Temos que $\{\mathcal{P}(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de contração. Isto é,

$$\mathcal{P}(t)X(i) = \sum_j p_{ij}(t)X(j) = I\!\!E\big[X(\xi(t) \;/\; \xi(0) = i\big] =$$

$$I\!\!E_i X\big((\xi(t)\big) = I\!\!E X\big(\xi^i(t)\big).$$

Além disso:

$$\Lambda X(i) = \sum_j \lambda_{ij} X(y) = \lambda_{ii} X(i) + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} X(j) =$$

$$-\sum_{j\neq i} \lambda_{ij} X(i) + \sum_{j\neq i} \lambda_{ij} X(j) = \sum_{j\neq i} \lambda_{ij} \big[X(y) - X(x)\big].$$

■

Uma questão importante é o estudo da existência de alguma Lei de Probabilidade para o processo quando $t \to \infty$. Dizemos que a distribuição de probabilidade ν é invariante para o processo se $\nu\mathcal{P}(t) = \nu$ para todo $t \geq 0$. Note que $\nu\mathcal{P}(t)$ é a distribuição de $\xi(t)$ quando a Lei de $\xi(0)$ é ν.

Proposição: ν é invariante se e somente se $\nu\Lambda = 0$.

Dem: Temos que $\nu\Lambda = \nu\mathcal{P}(t)\Lambda = \nu\frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\nu\mathcal{P}(t) = \frac{d}{dt}\nu = 0$.

Por outro lado, $\nu\Lambda = 0$ implica que $\nu\mathcal{P}(t)\Lambda = 0$. Como $\nu\mathcal{P}(t)\Lambda = \nu\Lambda$ segue que $\nu\mathcal{P}(t) = \nu$. ■

Definição: ν é reversível se para todo $i, j \in S$,

$$\nu(i)p_{ij} = \nu(j)p_{ji}.$$

Proposição: Se ν é reversível, então é invariante.

Dem: Se ν é reversível temos que

$$\sum_i \nu(i)p_{ij} = \sum_i \nu(j)p_{ji} = \nu(j)\sum_i p_{ji} = \nu(j).$$ ■

A.4 PROCESSOS DE POISSON

Definição A: Uma seqüência não enumerável de v. as. $\{N(t) : t \geq 0\}$, onde $N(t) \equiv$ número de ocorrências de um determinado evento em $(0, t]$, é dita *Processo de Poisson* de taxa, $\lambda > 0$ se:

I) $\{N(t_k) - N(t_{k-1}),\ 1 \leq k \leq n\}$ são variáveis aleatórias independentes para todo $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ e todo n.
II) $N(0) = 0$ e $N(t) - N(s)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda(t-s),\ 0 \leq s \leq t$.

Essa definição é equivalente a seguinte:

Definição B: Um Processo de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um processo com valores em $\mathbb{N}$ tal que $N(0) = 0$ e:

I) Incrementos independentes,
II) $\mathbb{P}\big($ exatamente 1 ocorrência em $(t, t+h]\,\big) = \lambda h + o(h)$ para algum $\lambda > 0$ e
III) $\mathbb{P}\big($ pelo menos duas ocorrências durante $(t, t+h]\big) = o(h)$.

Nas condições (I) e (II), $o(h)$ denota funções $f(h)$ com a propriedade de que $\frac{f(h)}{h} \to 0$ quando $h \to 0$.

Vamos argumentar que as duas definições são equivalentes.

A implica em B:

$$\mathbb{P}\big(\text{ exatamente 1 ocorrência em } (t, t+h]\,\big) = \lambda h \exp\{-\lambda h\}$$

$$= \lambda h - \lambda h(1 - \exp\{-\lambda h\}) = \lambda h + o(h).$$

Para $0 < x < \frac{1}{2}$, temos $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{2} \sum\limits_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x} \leq x^2$. Portanto,

$$\mathbb{P}\big(\text{ pelo menos duas ocorrência em } (t, t+h]\big) =$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^k \exp\{-\lambda h\}}{k!} \leq (\lambda h)^2 = o(h) \quad \text{quando } h \to 0.$$

B implica em A: Seja $s = 0$ e para $n = 0, 1, 2, \ldots$ defina $E_n \equiv \{\text{exatamente } n \text{ ocorrências em } (t, t+h]\}$ e $I\!P_n(t) = I\!P[N(t) = n]$.

Para $n = 0$ temos

$$\begin{aligned} I\!P_0(t+h) &= I\!P_0(t) I\!P[N(t+h) = 0 \;/\; N(t) = 0] \\ &= I\!P_0(t) I\!P[E_0] \\ &= I\!P_0(t)\big[1 - \lambda h - o(h)\big] \end{aligned}$$

quando $h \to 0$.

Segue que $I\!P_0(t+h) - I\!P_0(t) = -\lambda h I\!P_0(t) + o(h)$. Dividindo por h e tomando o limite $h \to 0$, temos $\frac{dI\!P_0(t)}{dt} = -\lambda I\!P_0(t)$.

Para $n \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} I\!P_n(t+h) = \;& I\!P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \{N(t) = k, N(t+h) = n\}\Big) \\ = \;& I\!P_n(t) I\!P\big(N(t+h) = n \;/\; N(t) = n\big) \\ + \;& I\!P_{n-1}(t) I\!P\big(N(t+h) = n \;/\; N(t) = n-1\big) \\ + \;& I\!P\Big(\bigcup_{k=0}^{n-2} \{N(t) = k, N(t+h) = n\}\Big) \\ = \;& I\!P_n(t) I\!P(E_0) + I\!P_{n-1}(t) I\!P(E_1) \\ + \;& I\!P\Big(\bigcup_{k=0}^{n-2} \{N(t) = k, E_{n-k}\}\Big) \\ = \;& I\!P_n(t)[1 - \lambda h - o(h)] + I\!P_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + o(h). \end{aligned}$$

Segue que $N(0) = 0$ e $\frac{dI\!P_0(t)}{dt} = -\lambda I\!P_0(t)$, implicam que

$$\frac{d}{dt}\big(\exp\{\lambda t\} I\!P_0(t)\big) = \lambda \exp\{\lambda t\} I\!P_0(t) + \exp\{\lambda t\} \frac{d}{dt} I\!P_0(t) = 0.$$

Temos, $\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_0(t) = c$ (constante) e então $\mathbb{P}_0(t) = c\exp\{-\lambda t\}$. Como $\mathbb{P}_0(0) = 1$ temos que $\mathbb{P}_0(t) = \exp\{-\lambda t\}$. Agora,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{P}_1(t)}{dt} &= -\lambda\mathbb{P}_1(t) + \lambda\mathbb{P}_0(t)\\ &= -\lambda\mathbb{P}_1(t) + \lambda\exp\{-\lambda t\}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}&\frac{d[\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_1(t)]}{dt} = \exp\{\lambda t\}\frac{d\mathbb{P}_1(t)}{dt} + \lambda\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_1(t)\\ &= \exp\{\lambda t\}\big(-\lambda\mathbb{P}_1(t) + \lambda\exp\{-\lambda t\}\big) + \lambda\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_1(t)\\ &= \lambda,\end{aligned}$$

temos que $\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_1(t) - \mathbb{P}_1(0) = \lambda t$ e portanto

$$\mathbb{P}_1(t) = \lambda t\exp\{-\lambda t\} + \mathbb{P}_1(0)\exp\{-\lambda t\}.$$

Como $\mathbb{P}_n(0) = 0$ para $n \geq 1$ pois $\mathbb{P}_0(0) = 1$, segue que

$$\mathbb{P}_1(t) = \lambda t\exp\{-\lambda t\}.$$

Pela hipótese de indução, $\mathbb{P}_k(t) = \frac{\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^k}{k!}$, segue que

$$\frac{d\mathbb{P}_{k+1}(t)}{dt} = -\lambda\mathbb{P}_{k+1}(t) + \lambda\mathbb{P}_k(t)$$

e portanto

$$\frac{d\mathbb{P}_{k+1}(t)}{dt} + \lambda\mathbb{P}_{k+1}(t) = \frac{\lambda\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^k}{k!},$$

isto é, $\frac{d[\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_{k+1}(t)]}{dt} = \frac{\lambda^{k+1}t^k}{k!}$.

Para concluir observe que

$$\exp\{\lambda t\}\mathbb{P}_{k+1}(t) = \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\int_0^t s^k ds + \mathbb{P}_{k+1}(0) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Portanto, $I\!\!P_{k+1}(t) = \frac{\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$.

Para $s > 0$, colocamos $M(t) = N(t+s) - N(s),\ t \geq 0$, e note que $M(0) = 0$. ■

Defina $\tau_i \equiv$ instante da i-ésima ocorrência, e $T_i = \tau_i - \tau_{i-1} \equiv$ o intervalo de tempo entre ocorrências. Então $I\!\!P(T_i > t) = I\!\!P(N(t) = 0) = \exp\{-\lambda t\}$, para $t \geq 0$, isto é, os $\{T_i : i \geq 1\}$ são v. as. exponenciais independentes.

Observe que as v. as. T_i não tem memória, isto é,

$$I\!\!P\big(T_i > t+s \ / \ T_i > t\big) = I\!\!P\big(T_i > s\big) \quad \text{para todo } s, t > 0.$$

A.5 CONSTRUÇÃO GRÁFICA

Considere $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ um processo de Markov. Se $\xi(t) = i$, a taxa de salto ao estado j é λ_{ij} e o tempo de espera para ocorrer este salto segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ_{ij}.

Para cada par $i, j \in S$, defina processos de Poisson $N^{ij}(t)$ com taxa λ_{ij}. Considere $\{\tau_k^{ij} : k \geq 1\}$ os instantes de ocorrência do processo $\{N^{ij}(t) : t \geq 0\}$. Defina $\overline{\tau}_k^i = \min_j \tau_k^{ij}$. Quando o processo está no estado i no instante t, escolhe saltar para a posição que corresponde ao primeiro evento dos processos de Poisson associados, isto é, o primeiro instante dos processos $\{\overline{\tau}_k^i : k \geq 1\}$ que são as ocorrências da superposição de todos os processos de Poisson indexados pelo estado i. Tome $\xi(0) = i$ e temos que

$$\xi(t) = i \quad \text{para todo } \ t \in [0 \ , \ \overline{\tau}_1^i] \ \text{ e}$$
$$\xi(t) = j \quad \text{para todo } \ t \in (\overline{\tau}_1^i \ , \ \overline{\tau}_2^i] \ \text{ se}$$

$\tau^{ij} \leq \tau^{il}$ para todo $l \neq j$. Segue que

$$I\!P\big(\xi(t+h) = j \ / \ \xi(t) = i\big) = I\!P\big(N^{ij}(t+h) - N^{ij}(t) = 1\big) = \lambda_{ij} + o(h).$$

Vamos definir o conjunto $M \equiv \{$não existem duas marcas dos processos de Poisson no mesmo instante $t\}$. É fácil ver que $I\!P(M) = 1$. Observe que $M^c = \{\omega : \exists \ i, j, k, l, m, n$ tais que $\tau_m^{ij} = \tau_n^{kl}\}$. Temos que

$$\begin{aligned} I\!P\big(\tau_1^{ij} < \tau_1^{kl}\big) &= \int_0^\infty \int_0^s \lambda_{ij} \exp\{-\lambda_{ij} t\} \lambda_{kl} \exp\{-\lambda_{kl} s\} dt \ ds \\ &= \lambda_{kl} \int_0^\infty \exp\{-\lambda_{kl} s\}[1 - \exp\{-\lambda_{ij} s\}] \ ds \\ &= 1 - \frac{\lambda_{kl}}{\lambda_{kl} + \lambda_{ij}} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{kl} + \lambda_{ij}}. \end{aligned}$$

Segue que

$$I\!P\big(\tau_1^{ij} = \tau_1^{kl}\big) = 1 - \Big[\ \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{kl}}{\lambda_{kl} + \lambda_{ij}} \ \Big] = 0.$$

De maneira análoga, vale que para todo m, n.

Observando que $I\!P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} I\!P(A_i)$, o resultado segue.

■

A.6 Bibliografia

[1] A. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933.

[2] P. Brémaud, *An Introduction to Probabilistic Modeling*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1980.

[**3**] R. Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer Texts in Statistics, 1999.

[**4**] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Third Edition, 1995.

[**5**] B. James, *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*, Projeto Euclides, IMPA, 1981.

[**6**] J. V. Plato, *Creating Modern Probability*, Cambridge Studies in Probability, Induction and Decision Theory, 1994.

A.7 EXERCÍCIOS

1- Apresente um exemplo em que a união de $\sigma-$álgebras não seja uma $\sigma-$álgebra.

2- Considere $\Omega = [\ 0,1\ ]$, $\mathcal{F} \equiv \sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω que contém todos os intervalos de Ω, e $I\!P(A) \equiv$ comprimento de A, $A \in \mathcal{F}$.

Seja $A_0 = \Omega$, $A_1 = A_0 \cap (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^c = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ (isto é, retiramos a $3^{\underline{a}}$ parte central de cada um dos intervalos de A_1)

Prosseguindo deste modo obteremos $\{A_n; n \geq 1\}$, sucessão monótona não-crescente ($A_n \supset A_{n+1}$), onde A_n é a união de 2^n intervalos fechados.

O conjunto $\mathbf{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é dito o *conjunto de Cantor* .

Mostre que $I\!P(\ \mathbf{C}\ ) = 0$. (Este é um exemplo de um conjunto não-enumerável de probabilidade (comprimento) zero).

3- Dê um exemplo de duas variáveis aleatórias identicamente distribuídas tal que $I\!P\{\ X \neq Y\ \} = 1$.

4- Considere a seqüência de v. as. independentes $\{(X_i, Y_i)\}_{1\leq i\leq n}$ com lei conjunta dada por :

$$\mathbb{P}[(X_i, Y_i) = (j,k)] = \begin{cases} 1 - p_i \text{ se } (j,k) = (0,0) \\ \dfrac{\exp\{-p_i\}p_i^k}{k!} \text{ se } j = 1 \text{ e } k \geq 1 \\ \exp\{-p_i\} - (1-p_i) \text{ se } (j,k) = (1,0) \end{cases}$$

onde $0 \leq p_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$. Qual a lei de X_i e de Y_i ?

5- Três prisioneiros são informados pelo carcereiro, que nunca mente, que um deles foi escolhido ao acaso para ser executado ao amanhecer, e os outros dois irão ser libertados. O prisioneiro A pede ao carcereiro que lhe diga confidencialmente o nome de um dos que vai ser solto entre os outros dois, já que isto não lhe traz informação alguma, visto que pelo menos um dos outros dois vai ser solto. O carcereiro recusa, argumentando que se A souber isto, a probabilidade dele ser executado que era $\frac{1}{3}$ passa a ser $\frac{1}{2}$. Quem tem razão ?

6- Para a variável aleatória X com distribuição Geométrica de parâmetro $0 \leq p \leq 1$, demonstre que (Falta de memória)

$$\mathbb{P}[X > m+n \;/\; X > m] = \mathbb{P}[X > n], \quad \text{para } m, n = 0, 1, \ldots.$$

7- Sejam X e Y variáveis aleatórias assumindo os valores x_1, x_2 e y_1, y_2 respoectivamente. Prove que $\mathrm{COV}(X,Y) = 0$, implica que X e Y são independentes.

8- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias tais que

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad , \quad \mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Mostre que $\mathbb{E}(X_n^m) \not\to \mathbb{E}(X^m)$ quando $n \longrightarrow \infty$, para todo $m = 1, 2, \ldots$, onde $X = \lim_{n\longrightarrow\infty} X_n$.

9- Considere N lançamentos de um dado equílibrado com duas faces azuis, duas verdes e duas amarelas. Qual a probabilidade de que no máximo duas cores ocorram nos primeiros $k \leq N$ lançamentos ?

10- Um rato está preso em um labirinto. Inicialmente, ele escolhe uma de duas direções (direita ou esquerda) com probabilidade $\frac{1}{2}$. Se ele for para a direita caminhará pelo labirinto durante 3 minutos, retornando a sua posição inicial. Caso ele vá para a esquerda, com probabilidade $\frac{1}{3}$ ele caminhará durante 2 minutos e sairá do labirinto, e com probabilidade $\frac{2}{3}$ ele caminhará durante 5 minutos, retornando a posição inicial. Qual o tempo médio de permanência do rato no labirinto ?

11- Considere $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes definidas por:

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) \;=\; \mathbb{P}(X_1 = -1) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Para $k \geq 2$ e algum $c > 0,\ 0 < c < 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k = \pm 1) &= \frac{1}{2}(1-c), \\
\mathbb{P}(X_k = \pm k) &= \frac{1}{2k^2}c, \\
\mathbb{P}(X_k = 0) &= \big(1 - \frac{1}{k^2}\big)c.
\end{aligned}$$

a) Verifique se a condição de Lindeberg é satisfeita.

b) Esta seqüência satisfaz o Teorema Central do Limite?

12- Para o passeio aleatório simples simétrico, iniciando na origem, determine a probabilidade de retorno à origem quando a dimensão é $d \geq 1$. Mostre que o tempo médio de retorno não é finito para $d = 1$ e $d = 2$, e é finito para $d > 2$.

13- Para $N(t)$ um processo de Poisson de parâmetro λ, calcule :

a) $\mathbb{P}(N(t) = \text{ ímpar})$

b) $\mathbb{E}(N(0,t)N(0,t+s))$

14- Considere o espaço de estados $\Omega = \{1,2\}$, e defina $\lambda_{1,2} = \lambda$ e $\lambda_{2,1} = \mu$. Determine $p_t(1,1)$ e $p_t(2,1)$.

15- (Processo de Yule) Considere um modelo de crescimento populacional (de bactérias por exemplo), em que não existem mortes e que cada partícula se divide em duas com taxa β, tal que $\lambda_{i,i+1} = \beta\ i$, e $\lambda_{i,j} = 0$ para $j \neq i+1$. Mostre que iniciando com i partículas a probabilidade de transição do processo de Yule é uma distribuição Binomial Negativa, isto é:

$$p_t(i,j) \;=\; \binom{j-1}{i-1} \left(\exp\{-\beta t\}\right)^i \left(1-\exp\{-\beta t\}\right)^{j-i}$$

16- Seja $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ um processo de Markov e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Apresente um exemplo tal que $\{f\big(\xi(t)\big) : t \geq 0\}$ não é um processo de Markov.

17- Seja $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ um processo de Markov homogêneo com espaço de estados $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Supondo todos os estados estáveis, mostre que o gerador infinitesimal é um operador limitado no conjunto das funções reais limitadas definidas em Ω.

18- Uma medida de probabilidade ν é dita reversível para o processo com semigrupo $S(t)$ se

$$\int fS(t)g d\nu \;=\; \int gS(t)f d\nu$$

para toda f e g funções contínuas definidas em Ω.

a) Mostre que se ν é reversível então ν é invariante.

b) (Exemplo de uma cadeia de Markov irredutível que tem medida reversível e medida invariante não-reversível): Considere o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ com probabilidade de transição dada por

$$p_{x,y} = \begin{cases} p & \text{se } y = x+1 \\ 1-p & \text{se } y = x-1 \\ 0 & \text{se } |x-y| \geq 2. \end{cases}$$

onde $\frac{1}{2} < p < 1$. Determine uma condição necessária e suficiente para a medida invariante ser reversível.

19- (Simulação) Considere o exemplo da *ruína do jogador* com apenas a posição N absorvente, isto é, para todo $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big(S_{n+1} = 1 \ / \ S_n = 0\big) = p > 0.$$

Simule para valores de $p < \frac{1}{2}$ pequeno e N grande o tempo estimado para o jogo terminar.

20- Uma v. a. X tal que $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p$, é dita de Bernoulli com parâmetro p. Construa uma distribuição conjunta de duas v. as. de Bernoulli, X e Y com parâmetros $p \leq q$ respectivamente, tal que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$.

21- Seja $\{S_n\}_{n\geq 0}$ o Passeio Aleatório Simples em $\mathbb{Z}$ com probabilidade p para a direita e $1-p$ para esquerda.

a) Determine a média e variância de S_n quando $S_0 = 0$.

b) Calcule para todo $k \in \mathbb{Z}$ a $\mathbb{P}(S_n = n + k \ / \ S_0 = k)$.

c) Calcule $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 1 \ / \ S_0 = 0)$.

22- Duas partículas realizam simultaneamente dois Passeio Aleatórios Simples Simétrico em $\mathbb{Z}$, iniciando da origem, de maneira independente. Determine a probabilidade de estarem na mesma posição no instante n.

23- Considere a seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine a medida de probabilidade invariante desta cadeia.

24- Uma partícula move-se de acordo a uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, \ldots, c + d\}$, onde c e d são números inteiros positivos arbitrários. Iniciando em qualquer um dos primeiros c estados, a partícula salta em um passo para um estado escolhido uniformemente entre os outros d estados. Iniciando em qualquer um dos d estados, a partícula salta em um passo para um estado escolhido uniformemente entre os outros c estados. Ache a medida de probabilidade invariante desta cadeia.

25- Considere o espaço de estados $E = \{-1, 1\}^N$. Em cada instante uma posição é escolhida com probabilidade $\frac{1}{N}$ e troca de sinal com probabilidade $\frac{1}{2}$. Descreva um possivel acoplamento para determinar o tempo de encontro de dois processos partindo das condições iniciais $(-1, \ldots, -1)$ e $(+1, \ldots, +1)$.

26- Seja $Y_1, Y_2, \ldots$ uma seqüência de ensaios de Bernoulli de parâmetro $0 \leq p \leq 1$ e defina para $n \geq 2$:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{n-1}, Y_n = SS \\ 2 & \text{se } Y_{n-1}, Y_n = SF \\ 3 & \text{se } Y_{n-1}, Y_n = FS \\ 4 & \text{se } Y_{n-1}, Y_n = FF \end{cases}$$

Escreva a matriz de transição associada.

27- Considere um passeio aleatório simples com $0 < p < 1$ em $\{-N, -N+1, ..., N-1, N\}$, iniciando em $\{0\}$ e posições $\{N\}$ e $\{-N\}$ absorventes, $N > 1$. Qual a probabilidade do processo ser absorvido antes de retornar a origem ?

28- Apresente um exemplo de uma cadeia que tem uma probabilidade invariante que não satisfaz a condição de reversibilidade.

29- $\{Y(n) : n \geq 1\}$ seqüência de variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli de parâmetro $0 < p < 1$. Defina a seqüência $\{X(n) : n \geq 1\}$ por:

$$X(n) \;=\; Y(n) \;+\; Y(n+1)$$

Mostre que $\{X(n) : n \geq 1\}$ *não* é uma Cadeia de Markov.

30- (Modelo de propagação do boato) Considere n pessoas, $n \geq 2$. Um sinal, que pode ser 0 ou 1, é inicialmente conhecido pela pessoa 1, e digamos que vale S. Este sinal será transmitido para a segunda pessoa de maneira correta com probabilidade p ou transmitido como $1 - S$ com probabilidade $1 - p$, $0 \leq p \leq 1$. A seguir a segunda pessoa transmite para a terceira o que recebeu com probabilidade p ou transmite com valor alterado com probabilidade $1 - p$. E assim por diante até chegar na $n-$ésima pessoa. Se cada indivíviduo toma a decisão de maneira independente, qual a probabilidade da $n-$ésima pessoa receber o sinal com valor S ?

31- (Modelo de Ehrenfest) Considere M bolas numeradas distribuídas ao acaso em duas urnas A e B. A cada unidade de tempo, digamos $n = 0, 1, 2, \ldots$, escolhemos uma bola dentre as M e trocamos a sorteada de urna. Seja $X(n) = (x_1(n), \ldots, x_M(n))$, onde

$$x_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } i-\text{ésima bola estiver na urna A no instante } n, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Mostre que $\{X(n); n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma Cadeia de Markov em $\Omega = \{0, 1\}^M$.

b) Defina para todo $n \geq 0$ a Cadeia (de Markov) $Y(n) = \sum_{i=1}^{M} x_i(n)$. Qual a matriz de transição ?

c) Defina o valor da diferença entre o número de bolas nas duas urnas após o $n-$ésimo sorteio por $\Delta_n = 2Y(n) - M$. Determine $\mathbb{E}(\Delta_n)$ e o valor do $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Delta_n)$ quando a condição inicial é j bolas na urna A, $j = 0, 1, \ldots, M$.

32- Considere N bolas numeradas em uma urna. Retire uma bola com reposição e anote o número obtido. Seja T_k o número de retiradas até obter k bolas distintas. $(T_1 = 1)$. Qual a lei de $T_{k+1} - T_k$ para $k \geq 1$? Determine, mesmo que aproximadamente, o valor de $\mathbb{E}(T_N)$.

33- Considere $N \in \mathbb{N}$. No cubo $\{0, 1\}^N$ assuma que em cada um dos $N2^{N-1}$ elos é marcada uma direção aleatória via o lançamento de uma moeda honesta e seja $W = W(k, n)$ o número de vértices em que *exatamente* k dos N elos apontam na direção do vértice. Seja I o conjunto de todos os 2^n vertices e X_α o indicador que o vértice α tem exatamente k de seus vértices apontados para ele. Definindo $B_\alpha = \{\beta : |\alpha - \beta| \leq 1\}$, calcule

a) $\mathbb{E}(W)$

b) $b_1 = \sum_{\alpha\in I} \sum_{\beta\in B_\alpha} \mathbb{E}(X_\alpha)\mathbb{E}(X_\beta)$

c) $b_2 = \sum_{\alpha\in I} \sum_{\alpha\neq\beta\in B_\alpha} \mathbb{E}(X_\alpha X_\beta)$.

34- (Problema dos aniversários) Suponha que n bolas são distribuídas ao acaso em d urnas e que desejamos estimar a probabilidade de que pelo menos uma urna receba k ou mais bolas, $k = 2, 3, \ldots$.

Seja $I = \{\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n\} : |\alpha| = k\}$. Seja X_α o indicador do evento tal que as bolas indexadas por α fiquem na mesma urna, e defina $W = \sum_{\alpha\in I} X_\alpha$. Para $B_\alpha = \{\beta \in I : \alpha\cap\beta \neq \emptyset\}$, determine $\mathbb{E}(W)$

e $\sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in B_\alpha} \mathbb{E}(X_\alpha)\mathbb{E}(X_\beta)$. Descreva em palavras o evento $\{W=0\}$ e como poderia ser determinada uma aproximação para $\mathbb{P}(W=0)$.

35- O Processo de Contato pode ser identificado como um conjunto $A=\{i\in \mathbb{Z}^d : \eta(i)=1\}\subset \mathbb{Z}^d$ de posições infectadas. Mostre que $\mathbb{P}\big(A_t\cap\{\text{ algum subconjunto de } \mathbb{Z}^d\}\neq\emptyset \;/\; A_0=\mathbb{Z}^d\big)$ são estocasticamente decrescentes em t,

36- Considere $\overline{T}^{\Gamma_N}=\inf\{t\geq 0 : \overline{\xi}_t^{\Gamma_N}=\emptyset\}$, onde $\{\overline{\xi}_t : t\geq 0\}$ é o Processo de Contato restrito ao hipercubo Γ_N, ou seja o processo definido por:

$$c_N(x,\eta)=c(x,\eta)\mathbf{1}_{\{x\,\in\,\Gamma_N\}}.$$

Seja $\overline{\mathbb{P}}$ a lei deste processo. Mostre que

$$\overline{\mathbb{P}}\big(\,\overline{T}^{\Gamma_N}>t\,\big)\quad \text{decai exponencialmente em } t\geq 0.$$

37- No modelo de Ising com potencial de Kac, mostre que a taxa dado abaixo satisfaz a condição de *balanceamento detalhado* :

$$c_\gamma(x,\sigma) \;=\; \frac{\exp\{-\beta\sigma(x)h_\gamma(x)\}}{\exp\{-\beta h_\gamma(x)\}+\exp\{\beta h_\gamma(x)\}}$$

$$\Big(=\;\frac{1}{2}\big[\,1-\sigma(x)\tanh\beta h_\gamma(x)\,\big]\,\Big)$$

onde $h_\gamma(x)=h+(J_\gamma\star\sigma)(x)$ e $(J_\gamma\star\sigma)(x)=\sum_{y\neq x}J_\gamma(x,y)\sigma(y)$.

38- Para algum potencial arbitrário J defina a taxa

$$c(x,\eta)=\exp\{-\sum_{A\ni x}J(A)\eta(A)\},$$

onde

$$\eta(A)=\prod_{y\in A}\eta(y).$$

Sejam $\Gamma_N = \{x : ||x|| \leq N\}$ e $\Gamma_N^c = \mathbb{Z}^d - \Gamma_N$. Defina o processo restrito a Γ_N por $c_N(x,\eta) = c(x,\eta)\mathbf{1}_{\{||x|| \leq N\}}$.

Para $\xi \in \{-1,1\}^{\Gamma_N}$ e $\zeta \in \{-1,1\}^{\Gamma_N^c}$ considere η definida por

$$\eta(y) = \begin{cases} \xi(y), & y \in \Gamma_N \\ \zeta(y), & y \notin \Gamma_N \end{cases}$$

a) Mostre que

$$\frac{c_N(x,\eta^x)}{c_N(x,\eta)} = \frac{b_{N,\zeta}(\xi)}{b_{N,\zeta}(\xi^x)}$$

onde definimos $b_{N,\zeta}(\xi) = \exp\{ \sum_{A \cap \Gamma_N \neq \emptyset} J(A)\eta(A) \}$.

b) Defina $\Lambda^N_{\xi,\xi'}$ em $\{-1,1\}^{\Gamma_N}$ por

$$\Lambda^N_{\xi,\xi'} = \begin{cases} c_N(x,\eta) & \text{se } \xi' = \xi^x,\ x \in \Gamma_N, \\ -\sum_{x \in \Gamma_N} c_N(x,\eta) & \text{se } \xi' = \xi \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que

$$\sum_{\xi'} b_{N,\zeta}(\xi')\Lambda^N_{\xi',\xi} = 0.$$

OBS: O resultado acima mostra que $b_{N,\zeta}$ é uma medida estacionária para o processo de Ising em $\{-1,1\}^{\Gamma_N}$ com condição de fronteira ζ.

39- Considere $\{\xi_t : t \geq 0\}$ o processo de contato com $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

a) Mostre que o processo é atrativo.

b) Para para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $0 \leq s \leq t$ e $\omega \in \Omega$ dizemos que existe um $\omega-$*caminho dual* entre (y,t) e $(x,t-s)$ (abreviado por $(y,t)\ \omega-cd$ $(x,t-s)$) se a posição $(x,t-s)$ puder ser alcançada de (y,t) através de um $\omega-$*caminho* com os símbolos $\rightarrow$ substituídos por $\leftarrow$. Para $\eta \in \Omega$, definimos para $0 \leq s \leq t$ a configuração $\hat{\xi}_s^{(\eta,t)}(\omega) \in \Omega$ por $\hat{\xi}_s^{(\eta,t)}(\omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{ para algum } y \in \eta, \text{ existe um } (y,t)\ \omega - cd\ (x,t-s)\}$.

Mostre que $\{\hat{\xi}_s^{(\eta,t)} : 0 \leq s \leq t\} = \{\xi_s^{(\eta,t)} : 0 \leq s \leq t\}$ em distribuição.

c) Para η e $\zeta \in \Omega$, mostre a autodualidade do processo, isto é, $\{\xi_t^{\zeta} \cap \eta \neq \emptyset\} = \{\zeta \cap \hat{\xi}_t^{(\eta,t)} \neq \emptyset\}$

d) Mostre que $I\!P(\xi_t^0 \neq \emptyset,\ \forall\, t \geq 0) \;=\; I\!P(0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d})$.

40- Considere $\overline{T}^{\Gamma_N} = \inf\{t \geq 0 :\ \overline{\xi}_t^{\Gamma_N} = \emptyset\}$, onde $\{\overline{\xi}_t : t \geq 0\}$ é o processo de contato restrito ao hipercubo Γ_N. Seja $\overline{I\!P}$ a lei deste processo. Mostre que para cada s e $t \in (0,\infty)$;

$$\overline{I\!P}(\overline{T}^{\Gamma_N} > s)\overline{I\!P}(\overline{T}^{\Gamma_N} > t) \geq \overline{I\!P}(\overline{T}^{\Gamma_N} > s+t)$$

41- Para S um conjunto enumerável e p_{ij} as probabilidades de transição da Cadeia de Markov definida em S, com

$$p_{ij} \geq 0 \ \text{ e } \sum_j p_{ij} = 1,$$

considere as taxas de transição dadas por:

$$\eta \to \eta^i \ \text{ com taxa } \sum_{j:\eta(i)\neq\eta(j)} p_{ij},$$

onde

$$\eta^i(k) = \begin{cases} \eta(k) & \text{se } k \neq i, \\ 1-\eta(k) & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Este modelo é conhecido como modelo do Votante Linear.

Uma possível interpretação é que as posições denotam indivíduos que podem ter uma de duas opiniões (digamos 0 ou 1) sobre determinado assunto. Em um tempo Exponencial de parâmetro 1, o $i-$ésimo indivíduo escolhe um $j-$ésimo indivíduo com probabilidade p_{ij} e adota a sua opinião.

É imediato que as coinfigurações $\eta(i) = 0$ para todo $i \in S$, ou $\eta(i) = 1$ para todo $i \in S$, são estados absorventes do processo.

Mostre para o modelo do Votante que

$$\nu_\rho S(t)[\eta(0)\eta(1)] - \big(\nu_\rho S(t)\eta(0)\big)\ \big(\nu_\rho S(t)\eta(1)\big) \ >\ 0,$$

onde a medida inicial ν_ρ é a medida produto de densidade ρ, isto é, para A finito $\nu_\rho\{\eta : \eta(x) = 1,\ x \in A\} = \rho^{|A|}$.

42- Faça a construção gráfica do Modelo do Votante.

43- No processo de Exclusão, apresente uma medida invariante tal que

$$\nu(\eta(x)\eta(y)) > \nu(\eta(x))\ \nu(\eta(y))$$

Adilson Simonis e Cláudia Peixoto