Introdução à Teoria da Escolha

Publicações Matemáticas

Introdução à Teoria da Escolha

Luciano I. de Castro e José Heleno Faro
IMPA

impa

25º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

25º Colóquio Brasileiro de Matemática

- A Short Introduction to Numerical Analysis of Stochastic Differential Equations - Luis José Roman
- An Introduction to Gauge Theory and its Applications - Marcos Jardim
- Aplicações da Análise Combinatória à Mecânica Estatística - Domingos H. U. Marchetti
- Dynamics of Infinite-dimensional Groups and Ramsey-type Phenomena - Vladimir Pestov
- Elementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito - Alejandro C. Frery e Francisco Cribari-Neto
- Espaços de Hardy no Disco Unitário - Gustavo Hoepfner e Jorge Hounie
- Fotografia 3D - Paulo Cezar Carvalho, Luiz Velho, Anselmo Antunes Montenegro, Adelailson Peixoto, Asla Sá e Esdras Soares
- **Introdução à Teoria da Escolha - Luciano I. de Castro e José Heleno Faro**
- Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist - Clodoaldo G. Ragazzo, Mário J. Dias Carneiro e Salvador Addas Zanata
- Schubert Calculus: an Algebraic Introduction - Letterio Gatto
- Surface Subgroups and Subgroup Separability in 3-manifold Topology - Darren Long and Alan W. Reid
- Tópicos em Processos Estocásticos: Eventos Raros, Tempos Exponenciais e Metaestabilidade - Adilson Simonis e Cláudia Peixoto
- Topics in Inverse Problems - Johann Baumeister and Antonio Leitão
- Um Primeiro Curso sobre Teoria Ergódica com Aplicações - Krerley Oliveira
- Uma Introdução à Simetrização em Análise e Geometria - Renato H. L. Pedrosa

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
E-mail: ddic@impa.br - http://www.impa.br
ISBN: 85-244-0229-6

A minha família
L.I.C.F.

A minha mãe e avós *(in memoriam)*
J.H.F.

Sumário

Capítulo 1

Visão Geral

Esta monografia está dividida em quatro partes: escolha sob certeza, escolha sob risco e incerteza, escolha sob ambigüidade e escolha social.

Antes de descrever o que contém cada uma das partes, vamos esclarecer a distinção entre risco, incerteza e ambigüidade.

1.1 Incerteza, risco e ambigüidade

Entendemos por risco a situação na qual o tomador de decisões pode usar apenas uma probabilidade (objetivamente) definida para cada um dos resultados possíveis. Por exemplo, ao jogar um dado não-viesado, o indivíduo deve esperar o número 4 com probabilidade 1/6.

A situação de incerteza corresponde ao caso em que as probabilidades não são objetivamente definidas, isto é, o indivíduo atribui uma probabilidade subjetiva de que ocorra algum evento. Por exemplo, numa corrida de cavalos, o indivíduo acredita que um determinado cavalo ganhará com 30% de chances.

Ambigüidade ocorre num contexto de incerteza quando o indivíduo não é capaz de especificar uma probabilidade sobre os eventos, mas sim um conjunto delas (ou uma probabilidade não aditiva). Por exemplo: será retirada ao acaso uma bola de uma urna com 100 bolas pretas e brancas e o tomador de decisão tem de escolher entre apostar nas brancas ou nas pretas. Naturalmente ele quer saber qual é a probabilidade de tirar, por exemplo, a bola branca. A situação será de risco se ele sabe que esta probabilidade é, digamos, 30% (porque há 30 bolas brancas e 70 bolas pretas). Será de incerteza se ele não sabe a proporção das bolas na urna, mas atribui uma probabilidade específica para se retirar uma bola branca (50%, por exemplo). Será de ambigüidade se ele admite como possíveis várias probabilidades (por exemplo, entre 20 e 80%).

Não é preciso dizer que em vários momentos de nossa vida temos de fazer escolhas, tomar decisões, sob as mais diversas circunstâncias de incerteza ou de ambigüidade. Não apenas nós, mas várias decisões com impactos em nossas vidas são feitas nessas circunstâncias. Por exemplo, as decisões do governo, de empresas, de investidores, etc. Daí a relevância deste estudo.

Devemos fazer a ressalva, no entanto, que a terminologia apresentada acima não é uniformemente usada em todos os textos e mesmo não é claro quando o melhor modelo é um modelo com ambigüidade ou com incerteza. No entanto, o objetivo desta monografia é apenas introduzir um método de modelagem dessas situações. Na construção de nosso modelo, vamos procurar nos manter próximos à realidade, mas o leitor observará a necessidade de fazer simplificações e restrições para que o modelo se torne "tratável".

1.2 Discussão geral sobre modelos

É natural se perguntar o que significa "tratável" e por que queremos que o modelo tenha tal atributo. A resposta a estas questões está intimamente ligada ao próprio objetivo da modelagem: pretendemos dispor de um modelo matemático aproximado das decisões humanas que nos permita prever, dentro de limitações aceitáveis, quais serão tais decisões. Naturalmente, esse objetivo é factível apenas em parte, mas seu valor é tão elevado que mesmo um resultado parcial já vale a pena.

De fato, um governo precisa antecipar as decisões dos contribuintes frente às regras tributárias que estiver determinando - e isso terá impactos não apenas em suas receitas mas também no desenvolvimento do país. Um gerente precisa antecipar as decisões de compra de seus clientes em função dos preços que escolher. Todas essas antecipações seriam impossíveis sem uma teoria de como as decisões são tomadas.

Tal justificativa põe em destaque a importância do poder *descritivo* da teoria da escolha que vamos desenvolver. No entanto, nossa teoria ainda pode ir mais longe, dando indicações de quais decisões são melhores em comparação com outras. Assim, a teoria começa a adquirir um caráter *normativo*, isto é, indicador do que deve ser feito em cada situação. Ambos os aspectos são contemplados pela teoria que apresentaremos.

Usamos o método axiomático. Isto significa que começamos com axiomas que consideramos razoáveis ou aceitáveis. É claro que, como em qualquer teoria, os axiomas apelam para justificativas normativas. Por exemplo: quando supomos que um indivíduo é capaz de comparar quaisquer alternativas de escolha, estamos implicitamente afirmando que um comportamento razoável deveria apresentar tal propriedade.

Finalmente, fazemos a ressalva que nesta monografia usaremos escolha e decisão como sinônimos. Embora seja possível traçar alguma distinção entre ambos conceitos, não será útil para nossos propósitos fazê-lo.

Passemos agora à descrição detalhada do conteúdo a ser abordado.

1.3 Conteúdo

A primeira parte apresenta os fundamentos da teoria de decisão usualmente adotada em Economia. Sua aplicação é muito geral e, de fato, abrange muitos contextos diversos, servindo de base também para as escolhas sob risco e sob incerteza. Na verdade, chega quase a ser uma impropriedade chamar a teoria desenvolvida nesta primeira parte de escolhas sob certeza. Um título talvez mais preciso seria "decisões em situações abstratas", mas isso poderia obscurecer o fato de que é bem fácil dar exemplos concretos da construção que realizamos nesta parte.

A primeira parte consta de três capítulos. O capítulo 2 desenvolve os conceitos de conjuntos de escolha e de ordens. O capítulo 3 introduz o conceito de função de utilidade. O capítulo 4 enuncia e demonstra o Teorema de Debreu de representação de função utilidade. O capítulo 5 introduz a Teoria do Consumidor como uma aplicação da teoria desenvolvida nesta primeira parte.

Na segunda parte, tratamos sob as situações de risco. O capítulo 6 introduz o conceito de estados da Natureza. No capítulo 7, apresentamos a Teoria de Utilidade Esperada, de von Neumman e Morgenstern. No capítulo 8, apresentamos a teoria de probabilidades subjetivas de Savage, que contempla o que chamamos de situação de incerteza.

No capítulo 9, apresentamos as principais críticas à Teoria de Utilidade Esperada, através dos paradoxos de Allais e de Ellsberg.

A partir daí, tratamos da Escolha sob Ambiguidade, apresentando os modelos de Schmeidler e de Gilboa-Schmeidler no capítulo 10.

O capítulo 11 introduz regras de escolha social. Finalmente, o importante Teorema de Impossibilidade de Arrow é enunciado e provado no capítulo 12.

1.4 Pré-requisitos

Este curso tem pré-requisitos mínimos. Apenas assumimos que o leitor está familiarizado com as noções de continuidade de funções, seqüências, conjuntos abertos e fechados e integral de Riemman. Algumas noções de álgebra linear também são úteis. Não é necessário conhecer Teoria da Probabilidade, uma vez que sempre nos restringimos aos casos finitos. Quanto aos conceitos econômicos, procuramos defini-los explicitamente sempre que utilizados.

Finalmente, o capítulo 4 requer conhecimentos um pouco mais avançados de Topologia, mas incluímos os conceitos necessários na seção 4.1.

Parte I

Escolha sob Certeza

Capítulo 2

Conjuntos de Escolha e Ordens

2.1 Introdução

Considere a seguinte situação: Um consumidor precisa de uma geladeira nova. Vai a uma loja (ou pesquisa pela internet) e encontra várias opções, com mais ou menos capacidade, reservatório de água com saída externa, porta do congelador e da geladeira independentes, etc. Cada uma delas, dependendo das vantagens apresentadas e da marca, tem um custo diferente. Ele tem um orçamento dentro do qual pode gastar. A geladeira mais cara, por exemplo, está fora do que pode comprar. No entanto, há várias outras, mais ou menos caras, que em princípio poderia comprar. Como fará sua escolha?

A pergunta apresentada na situação acima é a mais simples e, talvez, uma das mais difícieis da Teoria da Escolha. Muita pesquisa ainda está sendo desenvolvida para compreender esse processo de escolha (que leva em conta muitos aspectos mentais). O que apresentaremos nesta monografia é apenas a abordagem (neo-)clássica da economia, em alguns aspectos pouco satisfatória, mas muito útil em certas aplicações.

Considere os exemplos seguintes.

Exemplo 1. Um apostador está considerando em que cavalo deve fazer sua aposta (de $1), sendo que cada um dá um pagamento diferente, conforme demonstrado abaixo:

atos / vencedor	cavalo 1	cavalo 2	cavalo 3
aposta no cavalo 1	3	-1	-1
aposta no cavalo 2	-1	1	-1
aposta no cavalo 3	-1	-1	5

O indivíduo, então, aposta no cavalo 1. Isso é razoável? O que implica em termos das crenças do apostador sobre a probabilidade do cavalo 1 ganhar?

Exemplo 2. O gerente de uma empresa está diante de duas oportunidades de investimento, A e B, mas pode escolher apenas uma delas. A alternativa A dá um lucro de $1000 com 80% de chance e de $100 com 20% de chance. A alternativa B dá um lucro certo (sem risco) de $800. O gerente escolhe a segunda. O que se pode inferir sobre suas preferências? Ele agiu de forma irracional?

Exemplo 3. Um investidor considera investir em ações ou aplicar em um fundo de renda fixa. Como se sabe, o retorno da ação é incerto (podendo ser alto ou até negativo), enquanto o da renda fixa é conhecido. Que informações ele deve considerar para fazer a decisão sobre qual deve ser sua alocação?

Exemplo 4. Um indivíduo tem as seguintes preferências: ele prefere uma determinada casa de campo a um automóvel; prefere o automóvel a um apartamento; mas prefere o apartamento à casa de campo.

Há algo de estranho com as preferências do indivíduo no último exemplo? Vamos supor que ao dizermos "prefere", estamos querendo dizer que o indivíduo está disposto a pagar uma quantia positiva para trocar um bem pelo outro. Nesse caso, esse indivíduo pode ficar pobre rapidamente: suponha que ele tenha a casa e paga (pelo menos um pouco) para trocá-la pelo apartamento; então paga novamente para trocar o apartamento pelo automóvel e finalmente paga para trocar o apartamento pela casa. Ao fim, continua com a casa e apenas perdeu dinheiro. Esse tipo de preferência, portanto, não é muito razoável e ela será eliminada no tipo de teoria que faremos para escolhas.

Quando a circunstância acima é proibida (e outras hipóteses razoáveis são assumidas), veremos que é possível definir uma função de utilidade para representar as escolhas do indivíduo. Isso será muito conveniente e útil no que faremos em seguida.

Com exceção do primeiro exemplo, as situações acima envolvem eventos incertos. Apesar disso e do título desta parte, a teoria que desenvolveremos aqui será capaz de abranger todos estes exemplos.

Naturalmente isso significará que precisaremos ser mais abstratos na modelagem das escolhas. No entanto, o tratamento dado aqui permitirá a especialização para o caso de risco e de incerteza, da segunda e terceira parte.

A teoria desenvolvida neste capítulo baseia-se em Mas-Colell et. al. (1995) e Sen (1970).

2.2 Conjuntos e Regras de Escolha

Seja X o conjunto de alternativas que um indivíduo têm a sua frente. Na situação apresentada no início da introdução, eram as geladeiras da loja; no exemplo 1, os cavalos em que poderia apostar, etc.

Na situação do consumidor comprando geladeiras, mencionamos que o indivíduo pode não ser capaz de escolher todos os elementos em X (por limitações orçamentárias, por exemplo). Para estudar as escolhas do indivíduo em X, seja $\mathcal{X}$ o conjunto das partes de X, isto é, $\mathcal{X} = \{A : A \subset X\}$ e seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de $\mathcal{X}$ que não contém o vazio. $\mathcal{B}$ representará a lista de conjuntos sob os quais o indivíduo faz suas escolhas (por exemplo, o conjunto de objetos disponível para compra pelo indivíduo, sob diversas situações orçamentárias).

Para cada $B \in \mathcal{B}$, o indivíduo poderá escolher um (ou mais) elemento(s) de B, através de uma função de escolha, definida da seguinte forma:

Definição 5. Uma função (ou regra) de escolha é uma função $C : \mathcal{B} \to \mathcal{X}$ tal que $C(B) \subset B$.

Observe que, apesar de $\varnothing \notin \mathcal{B}$, a definição permite que $\varnothing \in C(\mathcal{B})$, isto é, uma função de escolha pode assumir valores vazios. Permitimos isso por conveniência.[1] O sentido da função de escolha é de que $C(B)$ representa os elementos de B que o indivíduo considera melhores.

Definição 6. Uma estrutura de escolha é uma tripla $(X, \mathcal{B}, C)$, formada por um conjunto de alternativas X, uma lista de conjuntos de escolha $\mathcal{B} \subset \mathcal{X} \equiv \wp(X)$ e uma função de escolha $C : \mathcal{B} \to \mathcal{X}$.

Por exemplo, suponha que um economista experimental convida um grupo de m estudantes para participar de uma pesquisa de preferências. São utilizados n objetos, isto é, $X = \{x_1, ..., x_n\}$. O cientista apresenta para os estudantes todos os possíveis pares de objetos, entre os quais os estudantes devem escolher aqueles que preferem.

A experiência é modela da seguinte forma. Primeiro, a lista dos conjuntos de escolha é

$$\mathcal{B} = \cup_{i \neq j, i=1}^{n} \cup_{j=1}^{n} \{x_i, x_j\}.$$

Cada estudante $k = 1, ..., m$ tem uma regra de escolha $C_k : \mathcal{B} \to \mathcal{X}$, que atribui ao conjunto $\{x_i, x_j\}$, com $i \neq j$, a escolha $C_k(\{x_i, x_j\}) \subset \{x_i, x_j\}$.

Vamos ser mais concretos: suponha que $n = 3$ (há 3 objetos) e $m = 1$ (há um só indivíduo). Então uma possibilidade para a regra de escolha é

$$\begin{aligned} C_0(\{x_1, x_2\}) &= \{x_1\}; \\ C_0(\{x_1, x_3\}) &= \{x_3\}; \\ C_0(\{x_2, x_3\}) &= \{x_2, x_3\}. \end{aligned}$$

Se essas são as escolhas do estudante, então o cientista poderia achá-las um tanto estranhas: quando confrontado com as alternativas x_1 e x_3, ele escolhe apenas x_3 (o que nos levaria a dizer que x_3 é considerado melhor do que x_1) e quando é confrontado com x_1 e x_2, ele escolhe apenas x_1 (o que entenderíamos por significar que x_1 é melhor do que x_2. No entanto, x_2 também é escolhido quando x_2 e x_3 são ofertados. Logo, x_2 é tão bom quanto x_3. Para evitar esse

[1] A definição de Mas-Colell et. al. (1995) não permite isso.

problema de interpretações (e acomodar tal tipo de preferências), nós lemos a situação $x, y \in B$, $x \in C(B)$ como x é (revelado) ser pelo menos tão bom quanto y. Lendo dessa forma, a escolha acima parece um pouco menos estranha.

No entanto, suponhamos que num segundo experimento, tenhamos o seguinte: $X = \{x, y, z, w\}$,

$$\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z, w\}, \{x, y, w\}, \{x, y, w, z\}\}$$

e as seguintes funções de escolha:

$$\begin{aligned} C_1(\{x, y\}) &= \{x\}; \\ C_1(\{y, z, w\}) &= \{z\}; \\ C_1(\{x, y, w\}) &= \{w\}; \\ C_1(\{x, y, z, w\}) &= \{z\}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_2(\{x, y\}) &= \{x\}; \\ C_2(\{y, z, w\}) &= \{y\}; \\ C_2(\{x, y, w\}) &= \{w\}; \\ C_2(\{x, y, z, w\}) &= \{z\}. \end{aligned}$$

A regra de escolha 1 não parece ter problemas: o indivíduo prefere sempre z. Se este não está presente, prefere w e caso este não esteja presente, prefere x. A regra 2, no entanto, apesar de ter apenas um valor diferente (para o conjunto $\{y, z, w\}$), é muito estranha. Apesar de z ser escolhido frente ao conjunto $\{x, y, z, w\}$, esta alternativa não é escolhida frente a $\{y, z, w\}$. Uma teoria sobre indivíduos que escolhem dessa forma seria muito difícil e provavelmente não seria muito útil (ele pode escolher de maneiras muito inesperadas!). Por isso, gostaríamos de definir uma propriedade razoável que impeça esse tipo de escolha. Amartya Sen introduziu a seguinte propriedade:

Propriedade α de Sen: Dizemos que uma estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$ ou, abreviadamente, que a regra de escolha C satisfaz a

Propriedade α se ocorre o seguinte: para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, se $x \in B_1 \subset B_2$ e $x \in C(B_2)$, então $x \in C(B_1)$.

É interessante compreender em palavras o que pede a Propriedade α: se uma alternativa x é escolhida frente a um conjunto de alternativas e depois restringimos o conjunto de alternativas mantendo x, então x tem que continuar sendo escolhido.

É claro que a Propriedade α é bastante razoável. No entanto, não é difícil imaginar situações em que é violada. Considere por exemplo que, numa eleição entre três candidatos, um eleitor gosta muito do primeiro e mais ou menos do segundo, mas não suporta o terceiro. O eleitor votará no segundo se acredita que este tem mais chance de impedir que o terceiro se eleja. No entanto, modificaria sua escolha para o primeiro se a eleição não contasse com o terceiro candidato.

Observe que C_2 acima não cumpre a Propriedade α. De fato, $z \in \{y, z, w\} \subset \{x, y, z, w\}$ e $z \in C_2(\{x, y, z, w\}) = \{z\}$, mas $z \notin C_2(\{y, z, w\}) = \{y\}$.

Observe que o primeiro exemplo satisfaz a Propriedade α. Suponha, no entanto, que modificamos aquele exemplo para incluir na lista de conjuntos de escolha o conjunto $X = \{x_1,\, x_2,\, x_3\}$. Temos:

$$\begin{aligned} C_3(\{x_1, x_2\}) &= \{x_1\}; \\ C_3(\{x_1, x_3\}) &= \{x_3\}; \\ C_3(\{x_2, x_3\}) &= \{x_2, x_3\} \\ C_3(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \{x_1\} \end{aligned}$$

Esta regra não satisfaz a Propriedade α, porque $x_1 \in \{x_1, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$, e $x_1 \in C_3(\{x_1, x_2, x_3\})$, mas $x_1 \notin C_3(\{x_1, x_3\})$.

Além da propriedade α, Sen introduziu a:

Propriedade β de Sen: Dizemos que uma estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$ ou, abreviadamente, que a regra de escolha C satisfaz a Propriedade β se ocorre o seguinte: para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, se $x, y \in C(B_1), B_1 \subset B_2$, então $x \in C(B_2) \Leftrightarrow y \in C(B_2)$.

A Propriedade β exige que se duas alternativas são escolhidas numa situação de escolha restrita, então uma não se torna estritamente melhor que a outra se apenas acrescentamos novas alternativas. Mais uma vez, isto parece bastante razoável.

É útil reexaminar os exemplos anteriores e verificar se satisfazem ou não a Propriedade β. Temos que C_0 satisfaz trivialmente β porque se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $B_1 \subset B_2$ então $B_1 = B_2$. C_1 e C_2 também satisfazem trivialmente β porque se $a, b \in C(B_1)$, então $a = b$. C_3 satisfaz β porque se $B_1 \subset B_2$, $B_1 \neq B_2$, então $B_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$ e se $x \neq y$, $x, y \in C(B_1)$, então $B_1 = \{x_2, x_3\}$ e $x, y \notin C(B_2)$. (Daí concluímos que β não implica α.)

Vejamos agora um exemplo que não satisfaz a Propriedade β:

$$\begin{aligned}
C_4(\{x_1, x_2\}) &= \{x_1, x_2\}; \\
C_4(\{x_1, x_3\}) &= \{x_1\}; \\
C_4(\{x_2, x_3\}) &= \{x_2\}; \\
C_4(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \{x_1\}.
\end{aligned}$$

De fato, C_4 não satisfaz β porque $x_1, x_2 \in C_4(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ e $x_1 \in C_4(\{x_1, x_2, x_3\})$ mas $x_2 \notin C_4(\{x_1, x_2, x_3\})$. Observe, porém, que C_4 satisfaz a propriedade α, porque se $B_1 \subset B_2$, $B_1 \neq B_2$, então $B_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$. Se $x \in C_4(\{x_1, x_2, x_3\})$, então $x = x_1$ e $x_1 \in C(B_1)$ se $x_1 \in B_1$. Isto mostra que a Propriedade α não implica a Propriedade β.

Na verdade, as duas propriedades podem ser combinadas numa única, mais sintética (e também mais conhecida), que pode, no entanto, ser mais trabalhosa para verificar. Trata-se do Axioma Fraco das Preferências Reveladas:

Axioma Fraco das Preferências Reveladas (AFPR). Dizemos que uma estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$ cumpre o Axioma Fraco das Preferências Reveladas ou, abreviadamente, que a regra de escolha C cumpre o AFPR se ocorre o seguinte: quaisquer que sejam B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ e x, $y \in B_1 \cap B_2$, então

$$x \in C(B_1), y \in C(B_2) \Rightarrow y \in C(B_1).$$

Na verdade, é equivalente solicitar a implicação (aparentemente mais forte):

$$x \in C(B_1), y \in C(B_2) \Rightarrow y \in C(B_1), x \in C(B_2.)$$

Para ver essa equivalência, basta trocar os papéis de x e y e de B_1 e B_2 na primeira definição: $x, y \in B_1 \cap B_2$, $x \in C(B_1)$, $y \in C(B_2) \Rightarrow x \in C(B_2)$.

Pensamos que a última relação é útil por ser mais facilmente recordada.

Naturalmente estamos interessados em estudar as relações entre as propriedades α e β e o AFPR. O teorema abaixo estabelece de fato que as propriedades α e β são equivalentes ao AFPR se as regras de escolha são não vazias.

TEOREMA 7. As propriedades α e β implicam o AFPR. O AFPR implica a propriedade β. Se $C(B) \neq \varnothing$, $\forall B \in \mathcal{B}$, então o AFPR implica também a propriedade α.

PROVA. $\alpha, \beta \Rightarrow$AFPR.

Suponha que $C(.)$ satisfaz as propriedades α e β. Sejam $x, y \in B_1 \cap B_2$, $x \in C(B_1)$, $y \in C(B_2)$. Basta provar que $y \in C(B_1)$. Como $B_1 \cap B_2 \subset B_2$, a propriedade α implica que $y \in C(B_1 \cap B_2)$. Como $B_1 \cap B_2 \subset B_1$, a propriedade β implica que $x \in C(B_1) \Leftrightarrow y \in C(B_1)$. A conclusão segue.

AFPR $\Rightarrow \beta$.

Sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x, y \in C(B_1), B_1 \subset B_2$. O AFPR implica que se $x \in C(B_2)$ então $y \in C(B_2)$. Da mesma forma, $y \in C(B_2) \Rightarrow x \in C(B_2)$, isto é, $x \in C(B_2) \Leftrightarrow y \in C(B_2)$ e vale a propriedade β.

$C(\cdot) \neq \varnothing$ e AFPR $\Rightarrow \alpha$.

Sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \subset B_2$, $x \in C(B_2)$. Como $C(B_1) \neq \varnothing$, existe $y \in C(B_1) \subset B_1 \subset B_2$. Pelo AFPR, $x \in C(B_2)$ e $y \in C(B_1)$ implica $x \in C(B_1)$.■

Por enquanto, estas propriedades são suficientes para nosso propósito de estudar escolhas "razoáveis". Veremos, porém, que há estruturas matemáticas mais úteis, pela facilidade com que podem ser manipuladas. Estamos falando das ordens ou preferências, abordadas a seguir.

2.3 Preferências

Seja X um conjunto de escolhas. No exemplo 1 acima, $X =${aposta no cavalo 1, aposta no cavalo 2, aposta no cavalo 3}. No exemplo 2,

$X = \{A, B\}$. No exemplo 3, $X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, denotando as quantidades (não negativas) a serem aplicadas em ações e renda fixa.

Uma preferência $\succcurlyeq$ sobre X é simplesmente uma relação em X, isto é, $\succcurlyeq \subset X^2$. Então, para $x, y \in X$, podemos ter $(x, y) \in \succcurlyeq$. Nesse caso, escrevemos também $x \succcurlyeq y$ e lemos "x é pelo menos tão bom quanto y" ou "x é fracamente (debilmente) melhor que y".

A partir da relação de preferência $\succcurlyeq$ definimos duas novas relações, $\succ$ e $\sim$:

$$\begin{aligned} x &\succ y \equiv (x \succcurlyeq y) \wedge \sim (y \succcurlyeq x)\,; \\ x &\sim y \equiv (x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x)\,. \end{aligned}$$

Adotamos o seguinte: $x \succ y$ lê-se como "x é (estritamente) melhor do que y" ou "x é preferível a y", enquanto $x \sim y$ lê-se como "x é tão bom quanto y" ou "x é equivalente a y" ou ainda "o indivíduo é indiferente entre x e y".

Para estudar as propriedades dessas três relações, vamos nos recordar das seguintes propriedades gerais de uma relação $R \subset X^2$.

- R é transitiva se $\forall x, y, z \in X$, xRy e yRz implicam xRz.
- R é completa se $\forall x, y \in X$, xRy ou yRx.
- R é reflexiva se $\forall x \in X$, xRx.
- R é simétrica se $\forall x, y \in X$, $xRy \Rightarrow yRx$.
- R é assimétrica se $\forall x, y \in X$, $xRy \Rightarrow \sim (yRx)$.
- R é antisimétrica se $\forall x, y \in X$, xRy e $yRx \Rightarrow x = y$.
- R é negativamente transitiva se $\forall x, y, z \in X$, $xRz \Rightarrow (xRy) \vee (yRz)$.
- R é relação de equivalência se é simétrica, reflexiva e transitiva.
- R é racional se é completa e transitiva.

Ao final deste capítulo o leitor encontrará vários exercícios envolvendo os conceitos acima.

As preferências servirão para modelar as escolhas dos consumidores.

O exemplo 4 acima justifica a necessidade de que a preferência $\succcurlyeq$ seja transitiva. Também é natural pedir que ela seja completa. De fato, se $\succcurlyeq$ não for completa então existem duas alternativas x e y em X, tais que o indivíduo é incapaz de decidir entre x e y (ou de compará-las). Observe que isso não é o mesmo de dizer que o indíviduo é indiferente entre x e y, o que pode ser modelado como $x \sim y \Leftrightarrow (x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x)$. Então pediremos que as preferências dos indivíduos sejam sempre **transitivas** e **completas**. Quando uma preferência $\succcurlyeq$ é transitiva e completa, dizemos que ela é **racional**.

Preferências racionais são muito convenientes e importantes, em vista do fato de poderem ser representadas por função utilidade, conforme mostraremos no próximo capítulo. Por enquanto, vamos estudar a relação entre preferências e funções de escolha.

2.3.1 Observação sobre a definição

Há autores que ao invés de partir da relação $\succcurlyeq$ e definir $\succ$ e $\sim$, como fizemos, partem da ordem estrita que, para não confundir, denotaremos por $>$. Então definem:

$$
\begin{aligned}
x &\approx y \Leftrightarrow \sim (x > y) \wedge \sim (y > x) \\
x &\gtrsim y \Leftrightarrow (x > y) \vee (x \approx y)
\end{aligned}
$$

Observe que esta forma de definir não é em geral equivalente a que demos. No entanto, temos a seguinte:

Proposição 8. Suponha que $x \succ y \Leftrightarrow x > y$ e que $\succcurlyeq$ seja completa. Então:

$$
\begin{aligned}
x &\sim y \Leftrightarrow x \approx y \\
x &\succcurlyeq y \Leftrightarrow x \gtrsim y
\end{aligned}
$$

Demonstração. $x \sim y \Leftrightarrow (x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x) \Leftrightarrow \sim (x \succ y) \wedge \sim (y \succ x) \Leftrightarrow \sim (x > y) \wedge \sim (y > x) \Leftrightarrow x \approx y$, onde a segunda equivalência vale pela completude de $\succcurlyeq$.

Para o segundo resultado, veja que $x \gtrsim y \Leftrightarrow (x > y) \vee (x \approx y)$ $\Leftrightarrow (x \succ y) \vee (x \sim y)$ $\Leftrightarrow ((x \succcurlyeq y) \wedge \sim (y \succcurlyeq x)) \vee ((x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x))$ $\Leftrightarrow x \succcurlyeq y$.■

Proposição 9. Suponha que $x \succ y \Leftrightarrow x > y$. Então $\succcurlyeq$ é completa se é reflexiva e se $>$ cumpre a seguinte condição: $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, então $x > y$ ou $y > x$.

Demonstração. Como $\succcurlyeq$ é reflexiva, $x \succcurlyeq x$. Suponha que $x \neq y$ e $\sim (x \succcurlyeq y)$. Temos: $\sim (x \succcurlyeq y) \Rightarrow \sim (x \succcurlyeq y) \vee (y \succcurlyeq x) \Leftrightarrow \sim (x \succ y)$ $\Leftrightarrow \sim (x > y) \Rightarrow (y > x)$ (pela hipótese) $\Leftrightarrow (y \succ x) \Rightarrow (y \succcurlyeq x)$. Logo, estabelecemos que para todo x e y, $(x \succcurlyeq y) \vee (y \succcurlyeq x)$. ■

Observação Não vale a volta da proposição anterior, pois se $x \sim y$ e $x \neq y$, não se cumpre $(x \succ y) \vee (y \succ x)$.

2.4 Preferências e Estruturas de Escolha

Nosso objetivo será definir, a partir de estruturas de escolhas, uma preferência. A seguir, faremos a tarefa inversa: definir uma estrutura de escolha a partir de preferências. A seção concluirá com a relação entre ambas.

2.4.1 De Estruturas de Escolha a Preferências

Dada uma estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$, é possível definir a seguinte preferência associada à mesma:

$$x \succcurlyeq^{C} y \equiv \exists B \in \mathcal{B}, \text{ tal que } x, y \in B \text{ e } x \in C(B).$$

Observe que tal definição depende muito fortemente da existência de conjuntos de escolha na lista $\mathcal{B}$.

Esta, porém, não é a única definição possível. Poderíamos ter definido a seguinte preferência:

$$\begin{gathered} x \succcurlyeq^{M} y \equiv \forall B \in \mathcal{B}, \text{ tal que } x, y \in B \text{ então} \\ y \in C(B) \Rightarrow x \in C(B). \end{gathered}$$

Temos o seguinte resultado, porém:

Proposição 10. Suponha que $(X, \mathcal{B}, C)$ satisfaça o AFPR.Então

$$x \succcurlyeq^C y \Rightarrow x \succcurlyeq^M y.$$

Prova. Uma vez que $x \succcurlyeq^C y$, existe $B_1 \in \mathcal{B}$, tal que $x, y \in B_1$ e $x \in C(B_1)$. Suponha que $\sim \left(x \succcurlyeq^M y\right)$, isto é, existe um B_2 tal que $x, y \in B_2$, $y \in C(B_2)$ mas $x \notin C(B_2)$. Isso contraria o AFPR, uma vez que $x \in C(B_1)$, $y \in C(B_2) \Rightarrow x \in C(B_2)$, $y \in C(B_1)$.■

Proposição 11. Suponha que $(X, \mathcal{B}, C)$ seja tal que $C(\cdot) \neq \varnothing$ e que $\mathcal{B}$ contenha todos os conjuntos de dois elementos.Então

$$x \succcurlyeq^M y \Rightarrow x \succcurlyeq^C y.$$

Prova. Por hipótese, $\{x, y\} \in \mathcal{B}$. Como $C(\{x, y\}) \neq \varnothing$ então $x \in C(\{x, y\})$, ou $y \in C(\{x, y\})$. No segundo caso, $x \succcurlyeq^M y$ implica que $y \in C(\{x, y\}) \Rightarrow x \in C(\{x, y\})$. Assim, sempre se terá $x \in C(\{x, y\})$, o que significa que $x \succcurlyeq^C y$.■

Exercício. Encontre contra-exemplos para os dois resultados acima, quando suas hipóteses são relaxadas.

Os resultados acima indicam que não apenas o AFPR mas também a riqueza das listas de conjuntos de escolha são propriedades desejáveis para uma estrutura de escolha.

2.4.2 De Preferências a Estruturas de Escolha

A maneira mais natural de definir uma estrutura de escolha $C(\cdot, \succcurlyeq)$ a partir de uma preferência $\succcurlyeq$ é a seguinte:

$$C(B, \succcurlyeq) \equiv \{x \in B : x \succcurlyeq y, \forall y \in B\}.$$

O conjunto $C(B, \succcurlyeq)$ é chamado de conjunto de melhores elementos de B. Observe que a princípio podemos definir a função de escolha $C(B, \succcurlyeq)$ para qualquer conjunto $B \subset X$, isto é, a definição não impõe restrição aos conjuntos na lista de conjuntos de escolha.

Apesar de essa ser bastante natural, há uma outra forma de obter uma função de escolha a partir de uma preferência. Trata-se dos conjuntos de elementos maximais, definido por:

$$M(B, \succcurlyeq) \equiv \{x \in B : \nexists y \in B \text{ tal que } y \succ x\},$$

onde, como antes, $y \succ x \equiv y \succcurlyeq x \wedge \sim (x \succcurlyeq y)$.

Antes de prosseguir talvez o leitor julgue conveniente pensar em qual das duas relações é mais restritiva. De fato, propomos o seguinte:

Exercício. Crie um exemplo de preferência tal que $C(B, \succcurlyeq) \neq M(B, \succcurlyeq)$. Você é capaz de dar um exemplo com preferências transitivas?

Se não conseguir fazer esse exercício diretamente, as informações abaixo podem ajudar a verificar o que não pode ser feito. De fato, temos o seguinte:

Proposição 12. $C(B, \succcurlyeq) \subseteq M(B, \succcurlyeq)$.

Prova. Seja $x \in C(B, \succcurlyeq)$, isto é, $\forall\, y \in B, x \succcurlyeq y$. Por contradição, suponha que $x \notin M(B, \succcurlyeq)$, isto é, $\exists\, y \in B$, tal que $y \succ x \equiv (y \succcurlyeq x) \wedge \sim (x \succcurlyeq y)$. Isto contradiz $x \succcurlyeq y$, $\forall\, y \in B$.■

Proposição 13. Se $\succcurlyeq$ é completa, então: $M(\cdot, \succcurlyeq) = C(\cdot, \succcurlyeq)$.

Prova. Resta provar que $M(B, \succcurlyeq) \subseteq C(B, \succcurlyeq)$. Seja $x \in M(B, \succcurlyeq)$, isto é, $\nexists y \in B$ tal que $y \succ x$. Se $x \notin C(B, \succcurlyeq)$, então $\exists\, y \in B, \sim (x \succcurlyeq y)$, isto é, $y \succcurlyeq x$, porque $\succcurlyeq$ é completa. Logo, $y \succ x$, o que dá a contradição.■

Proposição 14. Se $\succcurlyeq$ for transitiva, $C(\cdot, \succcurlyeq) \neq \emptyset$, então $C(\cdot, \succcurlyeq) = M(\cdot, \succcurlyeq)$.

Prova. $\exists x_0 \in C(B, \succcurlyeq)$, isto é, $\forall y \in B$, $x_0 \succcurlyeq y$. Pela Proposição 12, $x_0 \in M(B, \succcurlyeq)$. Suponha que $\exists z \in M(B, \succcurlyeq)$ tal que $z \notin C(B, \succcurlyeq)$. Mas $x_0 \succcurlyeq z$ porque $x_0 \in C(B, \succcurlyeq)$. Como $z \in M(B, \succcurlyeq)$, não pode ser $x_0 \succ z$. Portanto, $z \succcurlyeq x_0$. Como $\forall y \in B$, $x_0 \succcurlyeq y$ e $\succcurlyeq$ é transitiva, então $\forall y \in B$, $z \succcurlyeq y$. Isto contradiz $z \notin C(B, \succcurlyeq)$.■

Desses resultados, vê-se claramente que as duas formas de definir a função de escolha são equivalentes se a preferência é racional. Um resultado importante é o seguinte:

Proposição 15. Se $\succcurlyeq$ é racional e B é finito não vazio, então $C(B, \succcurlyeq) \neq \varnothing$.

Prova. Vamos fazer a prova por indução no número n de elementos de B. O resultado é trivial se $n = 1$, pois $\succcurlyeq$ é reflexiva. Suponha válido para n, isto é, se B tem n elementos, $C(B, \succcurlyeq) \neq \varnothing$. Considere um conjunto B com $n + 1$ elementos. Tome-se um elemento $x \in B$. O conjunto $B \backslash \{x\}$ tem n elementos e, portanto, $\exists y \in C(B \backslash \{x\}, \succcurlyeq)$, isto é, $y \succcurlyeq z$, $\forall z \in B \backslash \{x\}$. Como $\succcurlyeq$ é completa, ou $x \succcurlyeq y$ ou $y \succcurlyeq x$. No primeiro caso, a transitividade implica que $x \succcurlyeq z$, $\forall z \in B$, isto é, $x \in C(B, \succcurlyeq)$. No segundo caso, $y \succcurlyeq z$, $\forall z \in B$, isto é, $y \in C(B, \succcurlyeq)$. Em qualquer caso, $C(B, \succcurlyeq) \neq \varnothing$.■

Observe que no caso de B infinito, a proposição acima não é mais válida. De fato, considere o seguinte:

Exemplo 16. Seja $B = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ e seja $\succcurlyeq$ definida como a ordem natural dos números reais: $\geq$. Então $C(B, \succcurlyeq) = \varnothing$.

2.4.3 Racionalização e Representação

Dizemos que uma preferência racional $\succcurlyeq$ racionaliza a estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$ se

$$C(B, \succcurlyeq) = C(B), \forall B \in \mathcal{B}.$$

Analogamente, dizemos que uma estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$ representa uma preferência $\succcurlyeq$ se

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq^C y.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 17. Suponha que $\succcurlyeq$ seja racional e que $(X, \mathcal{B}, C)$ satisfaça o AFPR, $\mathcal{B}$ contém todos os conjuntos de 1 e 2 elementos e que $C(\cdot)$ é não vazia. Então $\succcurlyeq$ racionaliza $(X, \mathcal{B}, C)$ se e somente se $(X, \mathcal{B}, C)$ representa $\succcurlyeq$.

Prova. Suponha que $\succcurlyeq$ racionaliza C. Devemos provar que $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq^C y$. Suponha que $x \succcurlyeq y$. Sabemos que $\{x, y\} \in \mathcal{B}$. Do fato que $\succcurlyeq$ racionaliza C, $x \in C(\{x,y\})$. Logo, por definição, $x \succcurlyeq^C y$. Suponha agora que $x \succcurlyeq^C y$. Existe, portanto, conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x, y \in B$ e $x \in C(B)$. Como C satisfaz a propriedade α então $x \in C(\{x,y\}) \subset \{x,y\} \subset B$. Como $\succcurlyeq$ racionaliza C, $x \in C(\{x,y\}, \succcurlyeq) = C(\{x,y\})$. Logo, $x \succcurlyeq y$.

Suponha agora que C representa $\succcurlyeq$, isto é, $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq^C y$. Devemos provar que $C(B, \succcurlyeq) = C(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$, finito. Seja $x \in C(B, \succcurlyeq)$. Queremos mostrar que $x \in C(B)$. Caso contrário, existe um outro elemento $y \in C(B) \subset B$. Como $x \in C(B, \succcurlyeq)$, $x \succcurlyeq y$ o que implica que $x \succcurlyeq^C y$. Por sua vez, isso implica que $\exists B' \in \mathcal{B}$ tal que $x, y \in B'$ e $x \in C(B')$. Pelo AFPR, $x \in C(B)$. Isso mostra que $C(B, \succcurlyeq) \subset C(B)$. Tome agora $x \in C(B)$. Se $x \notin C(B, \succcurlyeq)$, existe um $z \in B$ tal que $\sim (x \succcurlyeq z)$. Então $\sim \left(x \succcurlyeq^C z\right)$. Mas isso contradiz o fato que $x, z \in B$ e $x \in C(B)$. Isto completa a prova.$\blacksquare$

Observe que uma implicação da proposição acima é que, quando a lista de conjuntos de escolha têm todos os conjuntos com 1 ou 2 elementos, então $\succcurlyeq^C$ é a única preferência que pode racionalizar $C(\cdot)$.

A próxima seção tratará de alguns aspectos da racionalização e da representação de preferências e estruturas de escolha.

2.5 Racionalidade e o AFPR

2.5.1 Racionalidade e suas implicações sobre $C(\cdot, \succcurlyeq)$

Quando a preferência $\succcurlyeq$ é racional, devemos esperar que $C(\cdot, \succcurlyeq)$ cumpra o AFPR? Aliás, a racionalidade é necessária para que $C(\cdot, \succcurlyeq)$ cumpra o AFPR? O lema abaixo mostra que a propriedade α é sempre cumprida por $C(\cdot, \succcurlyeq)$. O lema seguinte mostra que a transitividade é suficiente para a propriedade β.

Lema 18. $C(\cdot, \succcurlyeq)$ cumpre a propriedade α.

Prova. Seja $x \in B_1 \subset B_2, x \in C(B_2, \succcurlyeq)$. Então $x \succcurlyeq y$, $\forall y \in B_2$. Ou seja, $x \succcurlyeq y$, $\forall y \in B_1$. Logo, $x \in C(B_2, \succcurlyeq)$.$\blacksquare$

Lema 19. Se $\succcurlyeq$ é transitiva, então $C(\cdot, \succcurlyeq)$ cumpre a propriedade β.

Prova. Sejam $x, y \in B_1 \subset B_2$, $x, y \in C(B_1, \succcurlyeq)$, o que requer $x \succcurlyeq y$ e $y \succcurlyeq x$. Queremos provar que $x \in C(B_2) \Leftrightarrow y \in C(B_2)$. Se $x \in C(B_2)$, então $x \succcurlyeq z$, $\forall z \in B_2$. Mas então o fato de que $y \succcurlyeq x$ e a transitividade implicam que $y \succcurlyeq z$, $\forall z \in B_2$. A implicação inversa é similar.■

Corolário 20. Se $\succcurlyeq$ é transitiva, então $C(\cdot, \succcurlyeq)$ cumpre o AFPR.

Exercício. Dê um contra-exemplo de uma $\succcurlyeq$ não-transitiva, tal que $C(\cdot, \succcurlyeq)$ não cumpre a propriedade β.

2.5.2 As implicações do AFPR

Considere a seguinte estrutura de escolha:

Exemplo 21. $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ e $C(\{a, b\}) = \{a\}$, $C(\{b, c\}) = \{b\}$, $C(\{a, c\}) = \{c\}$. Como $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$, as propriedades α e β são trivialmente satisfeitas, isto é, a estrutura de escolha satisfaz o AFPR. No entanto, temos que $a \succcurlyeq^C b$, $b \succcurlyeq^C c$, $c \succcurlyeq^C a$ mas não vale $b \succcurlyeq^C a$, $c \succcurlyeq^C b$, $a \succcurlyeq^C c$. Isso implica que $\succcurlyeq^C$ não é transitiva. Concluímos que C satisfaz o AFPR mas $\succcurlyeq^C$ não é racional.

O leitor pode perceber que a principal razão para termos conseguido produzir o exemplo acima foi o fato de a lista de conjuntos de escolha ser demasiadamente pobre. De fato, temos o seguinte resultado importante:

Teorema 22. Suponha que a estrutura de escolha $(X, \mathcal{B}, C)$ satisfaça o AFPR, cumpra $C(\cdot) \neq \varnothing$ e $\mathcal{B}$ contenha todos os conjuntos de 1, 2 e 3 elementos. Então $\succcurlyeq^C$é racional. Mais ainda, é a única preferência que racionaliza C.

Prova. (i) $\succcurlyeq^C$é completa. Dados $x, y \in X$, $\{x, y\} \in \mathcal{B}$ (mesmo que $x = y$). Como $C(\{x, y\}) \neq \varnothing$, então ou $x \in C(\{x, y\})$ ou $y \in C(\{x, y\})$. No primeiro caso, temos $x \succcurlyeq^C y$ e no segundo, $y \succcurlyeq^C x$.

(ii) $\succcurlyeq^C$é transitiva. Suponha que $x \succcurlyeq^C y$ e $y \succcurlyeq^C z$. Isso significa que existem B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $x, y \in B_1$, $y, z \in B_2$, $x \in C(B_1)$

e $y \in C(B_2)$. Queremos mostrar que $x \succcurlyeq^C z$. Para tanto, basta mostrar que $x \in C(\{x,y,z\})$. Como $C(\{x,y,z\}) \neq \varnothing$, ou temos nossa tese ou então $y \in C(\{x,y,z\})$ ou $z \in C(\{x,y,z\})$. No último caso, o AFPR permite escrever

$$z \in C(\{x,y,z\}), y \in C(B_2) \Rightarrow y \in C(\{x,y,z\}), z \in C(B_2).$$

De qualquer forma, portanto, temos que $y \in C(\{x,y,z\})$. Novamente o AFPR nos dá:

$$y \in C(\{x,y,z\}), x \in C(B_1) \Rightarrow x \in C(\{x,y,z\}), y \in C(B_1).$$

Portanto, $x \in C(\{x,y,z\})$ como queríamos.

(iii) A unicidade vem da última proposição da seção anterior.■

2.6 Exercícios

Prove as afirmações abaixo.

1. Se $\succcurlyeq$ é transitiva, então $\succ$ é transitiva.
2. Se $\succcurlyeq$ é transitiva, então $\sim$ é transitiva.
3. Se $\succcurlyeq$ é transitiva, e $x \succ y$, $y \succcurlyeq z$ então $x \succ z$.
4. Se $\succcurlyeq$ é transitiva, e $x \sim y$, $y \succ z$ então $x \succ z$.
5. Se $\succcurlyeq$ é completa, então é reflexiva.
6. $\sim$ é simétrica.
7. Existe $\succcurlyeq$ tal que $\sim$ não é reflexiva.
8. Existe $\succcurlyeq$ completa tal que $\succ$ não é completa.
9. Existe $\succcurlyeq$ completa tal que $\sim$ não é completa.
10. Se $\succcurlyeq$ é simétrica então $\succ$ é vazia.
11. $\succ$ não é simétrica.

12. $\succ$ é assimétrica.

13. Existe relação que não é simétrica e também não é assimétrica.

14. Se $\succcurlyeq$ é racional, então $\sim$ é relação de equivalência.

15. Se $\succcurlyeq$ é racional, então $\succ$ é negativamente transitiva.

Capítulo 3

Função utilidade

Como vimos nos capítulos anteriores, é possível representar escolhas das pessoas por estruturas de escolha ou por preferências. No entanto, estas formas ainda não são completamente satisfatórias porque são pouco práticas para aplicações. Em particular, não permitem utilizar as convenientes ferramentas do cálculo, que são possíveis com funções.

Nosso primeiro objetivo é estabelecer as implicações sobre as preferências para o fato de serem representáveis por funções de utilidade. Com isso, aprenderemos as condições necessárias para essa representabilidade.

Em seguida, estudaremos condições suficientes. Isso nos levará a analisar o caso de finitas alternativas e ir tomando conjuntos cada vez mais gerais. Por fim, seremos capazes de estabelecer a existência de representação por função utilidade em situações suficientemente gerais para serem úteis.

3.1 Preferências e sua representação

Definição 1. Dizemos que uma função utilidade $u : X \to \mathbb{R}$ representa uma preferência $\succcurlyeq$ quando para todos $x, y \in X$, $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geqslant u(y)$.

Trabalhar com funções utilidade é, em geral, muito mais conveniente que trabalhar com preferências, porque podemos usar as ferramentas de análise e cálculo para tirar conclusões sobre as preferências e os comportamentos dos indivíduos.

Temos o seguinte resultado que mostra a importância das preferências racionais:

Teorema 2. Se uma preferência $\succcurlyeq$ pode ser representada por função utilidade, então $\succcurlyeq$ é racional.

Prova: Suponha que $u : X \to \mathbb{R}$ representa a preferência $\succcurlyeq$. Vamos provar que $\succcurlyeq$ é completa. Dados $x, y \in X$, temos $u(x) \geqslant u(y)$ ou $u(y) \geqslant u(x)$. Logo, $x \succcurlyeq y$ ou $y \succcurlyeq x$, ou seja, $\succcurlyeq$ é completa.

Agora, se $x \succcurlyeq y$, $y \succcurlyeq z$, então $u(x) \geqslant u(y)$ e $u(y) \geqslant u(z)$. Logo, $u(x) \geqslant u(z)$ ou $x \succcurlyeq z$, o que mostra que $\succcurlyeq$ é transitiva.

Bom, uma vez que nós mostramos que ser racional é condição necessária para haver representação por função utilidade, nossa próxima pergunta é saber se seria também condição suficiente. No caso geral, a resposta é negativa, conforme mostra o seguinte contra-exemplo:

Os resultados positivos que obtivemos até aqui nos sugerem a pergunta: será que não vale a existência de função utilidade no caso geral? Infelizmente, a resposta é negativa, como mostra o seguinte:

Exemplo 3. Preferências Lexicográficas

Seja $X = \mathbb{R}^2$ e a preferência Lexicográfica $\succcurlyeq$ definida da seguinte forma:

$$(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1 \text{ ou } x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \geqslant y_2.$$

Deixamos para o leitor verificar que esta preferência é racional. No entanto, ela não tem representação por função utilidade. De fato, suponha que exista $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq$. Então definamos a função: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ da seguinte forma. Para cada $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $u(x, 1) < u(x, 2)$. Existe, então, um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $u(x, 1) < r < u(x, 2)$. Definamos $f(x) = r$. Observe que se $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$, então

$$f(x) < u(x, 2) < u(y, 1) < f(y).$$

Logo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Isso é um absurdo porque não pode haver função injetiva de um conjunto não-enumerável (no caso, $\mathbb{R}$) para um conjunto enumerável ($\mathbb{Q}$).■

O exemplo acima mostra que a racionalidade não é condição suficiente para a demonstração de existência de representação por função utilidade no caso geral. Vamos precisar considerar outras hipóteses.

3.2 Caso Finito

A situação mais simples onde se consegue estabelecer a representação por função utilidade ocorre quando X é finito.

Teorema 4. Seja X finito. Então uma preferência $\succcurlyeq$ sobre X pode ser representado por função utilidade se e somente se $\succcurlyeq$ for racional.

1^a Prova (Longa).

A necessidade já foi demonstrada no Teorema 1. Mostremos a suficiência por indução no número de elementos de X. Se X tem apenas 1 (ou nenhum) elemento, não há o que demonstrar. Por hipótese de indução, vamos supor que toda preferência racional sobre um conjunto com $k \geqslant 1$ elementos têm representação. Mostremos que também tem representação uma preferência racional $\succcurlyeq$ sobre um conjunto X com $k+1$ elementos. Fixe um elemento x_0 do conjunto X e seja $X' = X \backslash \{x_0\}$. Seja $\succcurlyeq'$ a restrição de $\succcurlyeq$ ao conjunto X'. É fácil ver que $\succcurlyeq'$ é racional. (Exercício: verifique isso.)

Então existe função $u' : X' \to \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq'$. Ordene os elementos de X' de forma que $u'(x_1) \geqslant u'(x_2) \geqslant ... \geqslant u'(x_k)$. Então $x_1 \succcurlyeq' x_2 \succcurlyeq' ... \succcurlyeq' x_k$, o que implica também $x_1 \succcurlyeq x_2 \succcurlyeq ... \succcurlyeq x_k$. Se $x_0 \succ x_1$, escolha $u(x_0) > u'(x_1)$ e se $x_k \succ x_0$, escolha $u(x_0) < u'(x_k)$. Caso contrário, existe n, $1 \leqslant n \leqslant k$, tal que $x_n \succcurlyeq x_0 \succcurlyeq x_{n+1}$, porque $\succcurlyeq$ é completa. Então defina:

$$u(x_0) = \begin{cases} u'(x_n), & \text{se } x_0 \sim x_n \\ \frac{u'(x_n)+u'(x_{n+1})}{2} & \text{se } x_n \succ x_0 \succ x_{n+1} \\ u'(x_{n+1}), & \text{se } x_0 \sim x_{n+1} \end{cases}$$

Em qualquer caso, para todo $1 \leqslant n \leqslant k$, ponha $u(x_n) = u'(x_n)$. A função assim definida representa $\succcurlyeq$. De fato, se $x, y \in X$, há três casos:

1o caso. Se $x, y \in X'$, como $u = u'$ em X', então $x \succcurlyeq y$ se e somente se $u(x) = u'(x) \geqslant u'(y) = u(y)$, porque u' representa $\succcurlyeq'$.

2o caso. Se apenas um, digamos y pertence a X', então $x = x_0$ e $x \succcurlyeq y$ se e somente se $u(x) = u(x_0) \geqslant u'(y) = u(y)$ (Complete o argumento chegando essa afirmação.)

3o caso. Se $x, y \in X \backslash X'$, $x = y = x_0$ e $u(x) = u(y) = u(x_0)$.

Assim, a u definida representa $\succcurlyeq$.

2A Prova. Defina

$$u(x) = \sharp \{y \in X : x \succcurlyeq y\}.$$

Se $x \succcurlyeq z$ então $\{y \in X : z \succcurlyeq y\} \subset \{y \in X : x \succcurlyeq y\}$. Logo, $u(z) \leq u(x)$. Reciprocamente, suponha que $u(z) \leq u(x)$ e que

$$\exists y \in \{y \in X : z \succcurlyeq y\} \text{ e } y \notin \{y \in X : x \succcurlyeq y\}.$$

Por completude, $y \succ x$ e, portanto, $z \succ x$, uma vez que $z \succcurlyeq y$. Mas então, por transitividade, $\{y \in X : z \succcurlyeq y\} \supsetneq \{y \in X : x \succcurlyeq y\}$, o que implica que $u(z) > u(x)$, uma contradição da hipótese original. Portanto, $u(z) \leq u(x)$ implica $\{y \in X : z \succcurlyeq y\} \subset \{y \in X : x \succcurlyeq y\}$ e obtemos $x \succcurlyeq z$.■

Observação: Na última demonstração, foi usada a finitude para que a função esteja bem definida.

3.3 Caso Enumerável

O Teorema 4 nos sugere o seguinte:

Teorema 5. Suponha que X seja enumerável. Então existe função de utilidade que representa $\succcurlyeq$ se e somente se $\succcurlyeq$ é racional.

Prova: Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ uma enumeração de X. Defina

$$u(x) = \sum_{j : x \succcurlyeq x_j} 2^{-j}$$

Essa função representa $\succcurlyeq$. De fato, se $x \succcurlyeq y$ então

$$\{j \in \mathbb{N} : y \succcurlyeq x_j\} \subset \{j \in \mathbb{N} : x \succcurlyeq x_j\},$$

por transitividade. Logo, $u(y) \leq u(x)$.

Reciprocamente, suponha que $u(y) \leq u(x)$ e que não vale $x \succcurlyeq y$. Por completude, $y \succ x$. Isso implica que $\{j \in \mathbb{N} : y \succcurlyeq x_j\} \supsetneq \{j \in \mathbb{N} : x \succcurlyeq x_j\}$ pois $y = x_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e esse n pertence a $\{j \in \mathbb{N} : y \succcurlyeq x_j\}$ mas não a $\{j \in \mathbb{N} : x \succcurlyeq x_j\}$. Isso implica que $u(y) > u(x)$, uma contradição.■

De fato, temos algo ainda mais forte. Para enunciá-lo, vamos precisar da seguinte definição.

Definição 6. Dizemos que $Y \subset X$ é $\succcurlyeq$-ordem denso em X se para quaisquer $x, y \in X \backslash Y$, $x \succ y$, existe um $z \in Y$ tal que $x \succ z$ e $z \succ y$.

Temos então:

Teorema 7. Suponha que o conjunto $Y \subset X$ é enumerável e $\succcurlyeq$-ordem denso em X. Então existe função de utilidade que representa $\succcurlyeq$ se e somente se $\succcurlyeq$ é racional.

Prova: Seja $Y = \{x_1, x_2, ...\}$ uma enumeração de Y. Defina

$$u(x) = \sum_{j : x \succcurlyeq x_j} 2^{-j}$$

A prova dada no teorema anterior pode então ser repetida com uma pequena adaptação no final. Se temos que $u(y) \leq u(x)$ e $y \succ x$, existe $x_n \in Y$ tal que esse n pertence a $\{j \in \mathbb{N} : y \succcurlyeq x_j\}$ mas não a $\{j \in \mathbb{N} : x \succcurlyeq x_j\}$. Isso implica que $u(y) > u(x)$, contradizendo $u(y) \leq u(x)$.■

3.4 Conjuntos Não-Enumeráveis

Ainda não estamos satisfeitos com os resultados obtidos até aqui, uma vez que não permitem tratar escolhas não-enumeráveis, como escolhas sobre quantidades reais. No entanto, os resultados anteriores são úteis para nos guiar em mais algumas generalizações.

Precisaremos de mais duas definições:

Definição 8. Dizemos que $\succcurlyeq$ é contínua quando os conjuntos

$$\{y \in X : y \succcurlyeq x\} \text{ e } \{y \in X : x \succcurlyeq y\}$$

são fechados para todo $x \in X$.

Na seção de exercícios, pedimos para provar que os conjuntos acima não são fechados para a preferência lexicográfica (Exemplo 3), isto é, ela não é contínua. No entanto, a preferência lexicográfica cumpre a condição seguinte, que é pouco restritiva.

Definição 9. Dizemos que $\succcurlyeq$ é localmente não-saciável se para todo $x \in X$ e toda vizinhança U de x, existe $y \in U$ tal que $y \succ x$.

Temos o seguinte:

Teorema 10. Suponha que X possua um subconjunto Y enumerável denso e que $\succcurlyeq$ seja racional, contínua e localmente não saciável. Então existe função de utilidade $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq$.

Prova. Os conjuntos $\{y \in X : x \succ y\} = X \backslash \{y \in X : y \succcurlyeq x\}$ e $\{y \in X : y \succ x\} = X \backslash \{y \in X : x \succcurlyeq y\}$ são abertos para todo $x \in X$, pois $\succcurlyeq$ é contínua. Suponha que $x \succ y$. Então $x \in \{z \in X : z \succ y\}$ e $y \in \{z \in X : x \succ z\}$. Seja U vizinhança de y contida em $\{z \in X : x \succ z\}$. Como a preferência é localmente não saciável, existe $z \in U$ tal que $z \succ y$. Como $U \subset \{z \in X : x \succ z\}$ então $z \succ y$ e $x \succ z$. Logo, $\{z \in X : z \succ y\} \cap \{z \in X : x \succ z\} = \{z \in X : x \succ z \succ y\}$ é um aberto não vazio. Seja V uma vizinhança de z contida em $\{z \in X : x \succ z \succ y\}$. Como Y é denso, existe $w \in Y \cap V$. Portanto, $x \succ w$ e $w \succ y$. Isso mostra que Y é $\succcurlyeq$-ordem denso em X. Como é enumerável, o resultado segue do teorema anterior.■

3.5 Preferências Monótonas

A demonstração anterior é um tanto quanto abstrata. Há uma outra demonstração que é mais construtiva e que pode ser, portanto, mais didática. Para ela, vamos restringir X a ser $\mathbb{R}_+^L$ e usar a seguinte condição, que é mais restritiva que a local não-saciedade.

Definição 11. Seja $X = \mathbb{R}_+^L$. Uma preferência $\succcurlyeq$ sobre X é monótona se para todo $x, y \in X$ temos que $x \geqslant y$, $x \neq y$ implica $x \succ y$, onde $x = (x_1, ..., x_L) \geqslant y = (y_1, ..., y_L)$ se e somente se $x_k \geqslant y_k$ para todo $k = 1, ..., L$.

Alertamos o leitor para o fato de que alguns autores chamam a propriedade acima de "fortemente monótona". Temos o seguinte:

Teorema 12. Sejam $X = \mathbb{R}_+^L$ e $\succcurlyeq$ uma preferência racional, contínua e monótona sobre X. Então existe função de utilidade $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq$.

Prova. Em primeiro lugar, observemos que se $x \neq 0 \in \mathbb{R}_+^L$, então $x \succ 0$, o que decorre imediatamente da monotonicidade. Seja $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}_+^L$ e $m(x) = \max_i x_i$. Se $m(x)\, e = (m(x), ..., m(x))$ $\neq x$, então $m(x)\, e \succ x$. Fixe $x \in X$. Definamos os seguintes conjuntos: $A_x^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha e \succcurlyeq x\}$ e $A_x^- = \{\alpha \in \mathbb{R} : x \succcurlyeq \alpha e\}$. Ambos são fechados, pelo fato de que os conjuntos $\{y \in X : y \succcurlyeq x\}$ e $\{y \in X : x \succcurlyeq y\}$ são fechados. (Verifique isso.) Pelas observações iniciais, temos que $0 \in A_x^-$ e $m(x) + 1 \in A_x^+$. Além do mais, por completeza, $\mathbb{R}_+ = A_x^+ \cup A_x^-$. Como $\mathbb{R}_+$ é conexo e A_x^+ e A_x^- são fechados não vazios, existe $\alpha(x) \in A_x^+ \cap A_x^-$ e é único. De fato, suponha que existam $\alpha, \beta \in A_x^+ \cap A_x^-$, $\beta > \alpha$, o que implica, por monotonicidade, que $\beta e \succ \alpha e$. Temos $\beta e \succcurlyeq x$, $x \succcurlyeq \beta e$, o que implica $\beta e \sim x$, o mesmo valendo para α, isto é, $\alpha e \sim x$. Por transitividade, $\beta e \sim \alpha e$, o que é uma contradição.

Defina a função $u : X \to \mathbb{R}_+$ associando a cada $x \in X$ o único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha e \sim x$, isto é, pondo $u(x) = \alpha$. Esta função representa a preferência. De fato, se $x \succcurlyeq y$ e $u(x) < u(y)$, temos $y \sim u(y)\, e \succ u(x)\, e \sim x$, o que contradiz $x \succcurlyeq y$. Por outro lado, se $u(x) \geqslant u(y)$ não pode ser $y \succ x$, pois neste caso teríamos $u(y)\, e \sim y \succ x \sim u(x)\, e$, o que implicaria $u(x) < u(y)$.■

Corolário 13. Sejam $X = \mathbb{R}_+^L$ e $\succcurlyeq$ uma preferência racional, contínua e monótona sobre X. Então existe função de utilidade **contínua** $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq$.

Demonstração. Basta demonstrar que a u obtida na demonstração acima é contínua. É suficiente mostrar que $u^{-1}((u(x)-\varepsilon, u(x)+\varepsilon))$ é aberto para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} & u^{-1}\left((u(x)-\varepsilon, u(x)+\varepsilon)\right) \\ = \; & \{y \in X : u(x)+\varepsilon > u(y) > u(x)-\varepsilon\} \\ = \; & \left\{y \in X : u^{-1}(u(x)+\varepsilon) \succ y \succ u^{-1}(u(x)-\varepsilon)\right\} \\ = \; & \left\{y \in X : u^{-1}(u(x)+\varepsilon) \succ y\right\} \cap \left\{y \in X : y \succ u^{-1}(u(x)-\varepsilon)\right\} \end{aligned}$$

que é a interseção de dois abertos e, portanto, aberto.[1] ■

Observação Lembre-se que nem toda representação precisa ser contínua. De fato, se u representa uma preferência $\succcurlyeq$ sobre X e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é qualquer função estritamente crescente, então $f \circ u : X \to \mathbb{R}$ representa $\succcurlyeq$.

3.6 Exercícios

1. Prove que a preferência lexicográfica (exemplo 3) não é contínua.

2. Prove que a preferência lexicográfica é localmente não saciável.

3. A preferência lexicográfica é monótona? Prove sua afirmação.

[1] Observe que na última linha estamos fazendo um abuso de notação, pois $u^{-1}(u(x)+\varepsilon)$ não é um elemento de X (e sim um subconjunto), mas todo $z \in u^{-1}(u(x)+\varepsilon)$ é tal que $z \sim [u(x)+\varepsilon]\, e$. Assim, é claro o sentido desse abuso de notação.

Capítulo 4

Teorema de Debreu

Apresentaremos neste capítulo um teorema de representação para uma ampla classe de conjuntos de escolhas, o Teorema de Debreu ou Teorema de Debreu-Eilenberg-Rader. A principal característica da representação que estudaremos é a continuidade, conceito este intimamente ligado à topologia do espaço de escolha. Assim, num primeiro momento, vamos apresentar algumas noções básicas de topologia geral para em seguida tratarmos o objetivo central, que dá título a este capítulo.

4.1 Noções Básicas de Topologia Geral.

Uma topologia τ em X é qualquer família de subcojuntos de X que cumprir:

(a) $\emptyset, X \in \tau$;

(b) $\{E_i\}_{i\in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} E_i \in \tau$, I arbitrário.

(c) $E_1, E_2 \in \tau \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \tau$

Chamamos o par (X, τ) de um espaço topológico e estando a topologia sobre X evidente, como de usual, vamos nos referir a X como um espaço topológico. Nos referimos aos elementos de uma topologias τ como sendo os abertos desta topologia. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado se F^c pertence à topologia τ.

Dadas duas topologias τ_1 e τ_2 sobre X, dizemos que a topologia τ_1 é mais fraca que τ_2 se $\tau_1 \subseteq \tau_2$, isto é, a topologia τ_1 conter menos abertos que τ_2.

Fixada uma topologia τ em X, uma vizinha de $x \in X$ é qualquer aberto V contendo x. Dado um subconjunto $A \subset X$, seu interior é definido como

$$A^\circ = \bigcup_{\{B \in \tau \colon B \subset A\}} B,$$

e o seu fecho como

$$\overline{A} = \bigcap_{\{C \in \tau \colon C \supset A\}} C.$$

Dizemos que x é ponto de acumulação de A se toda vizinhança de x conter algum elemento $y \in A$ tal que $y \neq x$; isto é, se para todo vizinhança V de x for verdadeiro que $V \cap (A \backslash (x\}) \neq \emptyset$.

Notemos que a interseção arbitrária de fechados é um conjunto fechado e a união finita de fechados é um conjunto fechado; ainda, $\emptyset$ e X são fechados.

Definição 1. Dado um espaço topológico (X, τ), uma base para a topologia τ é qualquer coleção $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que, para todo aberto $A \in \tau$

$$A = \bigcup_{\{B \in \mathcal{B} \colon B \subset A\}} B$$

equivalentemente, para todo $x \in A$ existe algum $B \in \mathcal{B}$ onde $x \in B \subset A$.

Definição 2. Dado um espaço topológico (X, τ), uma coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos é uma sub-base para a topologia τ se a coleção

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j \in J} C_j \, : \, C_j \in \mathcal{C}, \, j \in J \text{ em que } J \text{ é finito} \right\}$$

for uma base para a topologia τ.

Notemos que $\mathcal{B}$ é simplesmente a coleção de todas as interseções finitas de sub-conjuntos de $\mathcal{C}$. Logo se $B \in \mathcal{B}$ então existe $\{C_k\}_{k=1}^K$

onde $C_k \in \mathcal{C}$ para todo $k \in \{1, ..., K\}$ tal que

$$B = \bigcap_{k=1}^{K} C_k$$

e daí, dado um aberto $A \in \tau$, para todo $x \in A$ existe $\{C_k\}_{k=1}^{K} \subset \mathcal{C}$ em que

$$x \in \bigcap_{k=1}^{K} C_k \subset A$$

Proposição 3. Dada uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que $\emptyset, X \in \mathcal{C}$ então $\mathcal{C}$ é sub-base da topologia menos fina (i.e, com menos abertos) na qual os elementos de $\mathcal{C}$ são abertos.
Demonstração: Defina

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j \in J} C_j \,:\, C_j \in \mathcal{C},\, j \in J \text{ em que } J \text{ é finito} \right\}$$

logo se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ então $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Definimos a topologia τ como

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in A,\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq A$$

Logo τ é uma topologia. Ainda, $\mathcal{C}$ é uma sub-base por construção.

Seja τ_1 uma topologia qualquer em X tal que $\mathcal{C} \subset \tau_1$. Como interseção finita de abertos é um aberto, temos que $\mathcal{B} \subset \tau_1$. Agora, como união arbitrária de abertos é um aberto, temos que $\tau \subset \tau_1$. Logo τ é a topologia menos fina tal que $\mathcal{C} \subset \tau$. □

Um exemplo padrão, que ilustra os conceitos apresentados, é o da reta em que a topologia usual sobre $(-\infty, +\infty)$ apresenta como base todos os intervalos abertos (a, b), onde a e b são números reais arbitrários. Uma outra base para esta topologia é quando tomamos a e b números racionais arbitrários. Uma sub-base para esta topologia é dada por todos os intervalos infinitos $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$, onde a e b

são ambos reais (ou racionais). Definimos como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a reta extendida e tomamos como sub-base os intervalos da forma $[-\infty, a)$, $(b, +\infty]$, onde a e b são ambos reais (ou racionais).

Uma base $\mathcal{B}$ para um espaço topológico (X, τ) é dita uma base enumerável se puder se escrita da forma $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, $\mathcal{B}$ for uma coleção enumerável de elementos de τ. Naturalmente, chamamos um conjunto X, munido de uma topologia τ, que admita uma base enumerável $\mathcal{B}$ de um *espaço topológico com base enumerável.* Pelo que discutimos no parágrafo anterior, $\mathbb{R}$ é um exemplo.

Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) dois espaços topológicos, o conceito de continuidade para funções $f : X \to Y$ é dado por:

Definição 4. Um função $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ quando para todo $W \in \tau_2$ tal que $f(x) \in W$ existir algum $G \in \tau_1$ onde $a \in G$ e $f(G) := \{f(x) : x \in G\} \subset W$.

A proposição a seguir nos dá vários critérios equivalentes para a continuidade:

Proposição 5. Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) dois espaços topológicos e uma função $f : X \to Y$, são equivalentes:

(i) f é continua em cada ponto $x \in X$;

(ii) Para todo A aberto em Y, $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ é um aberto em X;

(iii) Para todo fechado F em Y, $f^{-1}(F)$ é um fechado em X;

(iv) Se $A \subset Y$ então $f^{-1}(\overline{A}) \supset \overline{f^{-1}(A)}$;

(v) Se $A \subset X$ então $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(vi) Para todo A pertencente a uma sub-base de (Y, τ_2), o conjunto $f^{-1}(A)$ é aberto em X.

Deixamos como exercício para o leitor provar a proposição anterior.

Um resultado importante que vamos utilizar é o **Teorema do gap** de Bowen-Debreu. Para podemos enunciá-lo necessitamos da:

Definição 6. Sejam $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a reta extendida e $S \subset \overline{\mathbb{R}}$. Uma gap de S é um intervalo maximal, não-degenerado e disjunto de S que apresente seu supremo e seu ínfimo em S.

Por exemplo, se $S = [a, b]$ então S não possui nenhum gap. Se $S = [2, 3] \cup [5, 7]$ então seu único gap é dado por $(3, 5)$. Se $S = [2, 3] \cup (5, 7]$ então seu único gap é dado por $(3, 5]$. Tomando $S = (1, 2) \cup (2, 4] \cup [6, 7] \cup (9, 10]$ então S apresenta somente dois gaps dados por $(4, 6)$ e $(7, 9]$

O Teorema do gap de Bowen-Debreu diz:

Teorema 7. Se S é um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ então existe uma função crescente $g : S \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que todo gap de $g(S)$ é aberto.

A demonstração pode ser encontrada em Bowen(1968).

4.2 Teorema de Representação

Dado um conjunto X e uma relação binária $\succsim \subset X \times X$ recordemos que uma função $u : X \to \mathbb{R}$ representa $\succsim$ quando:

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

e se u representa $\succsim$ então $v = fou$ também representa $\succsim$ sempre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for estritamente crescente.

Dada uma relação binária $\succeq$ sobre o espaço topológico X, esta é dita:

(i) preferência racional se (a) para todo $x, y \in X : x \succeq y$ ou $y \succeq x$. (b) para todo $x, y, z \in X$: se $x \succeq y$ e $y \succeq z$ então $x \succeq z$;

(ii) contínua quando $\forall x \in X$ $\{z \in X : z \succeq x\}$ e $\{z \in X : x \succeq z\}$ são fechados em X.

Teorema 8. (Debreu-Eilenberg-Rader) Seja $\succsim$ uma preferência racional e contínua sobre um espaço topológico com base enumerável

X. Então existe uma função (utilidade) contínua $u : X \to \mathbb{R}$ que representa $\succsim$.

Demonstração: Existência: Seja $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável para a topologia τ em X. Para todo $x \in X$ vamos considerar o conjunto:

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} : x \succ z \text{ para todo } z \in B_n\}$$

e então definimos para $x \in X$, onde $N(x) \neq \emptyset$:

$$v(x) = \sum_{k\in N(x)} 2^{-k}$$

quando $N(x) = \emptyset$, colocamos $v(x) = 0$.

Dados $y \succsim x$ temos que se $x \succ z$ então $y \succ z$ e daí se $k \in N(x)$ então $k \in N(y)$, logo $v(y) \geq v(x)$. Por outro lado, tomando $y \succ x$ temos que $x \in \{z \in X : y \succ z\}$ mas $y \notin \{z \in X : x \succ z\}$, ou seja

$$\{z \in X : x \succ z\} \subsetneqq \{z \in X : y \succ z\}$$

agora, pela continuidade os dois conjuntos são abertos. Como ambos podem ser escritos como uma união de subconjuntos escolhidos em $\mathcal{B}$, existe $B_k \in \mathcal{B}$ tal que $B_k \subset \{z \in X : y \succ z\}$ mas $B_k \not\subset \{z \in X : y \succ z\}$ e então $k \in N(y)\backslash N(x)$, por isso $N(x) \subsetneqq N(y)$ e $v(y) > v(x)$. Ou seja, se $v(x) \geq v(y)$ então $x \succsim y$. Logo v representa $\succsim$.

Continuidade: fazendo $S = v(X)$, o teorema do gap de Debreu nos garante que existe uma função crescente $g : v(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que todo gap de $g(v(X))$ é aberto.

Definindo u sobre X, fazendo para todo $x \in X$, $u(x) = g(v(x))$, temos que u representa $\succsim$ pelo teorema de Debreu, todo gap de $u(X)$ é aberto.

Para a continuidade de u é suficiente provar que para todo $t \in \overline{\mathbb{R}}$ os conjuntos

$$u^{-1}([-\infty, t]) \text{ e } u^{-1}([t, +\infty])$$

são fechados[1]:

[1] Isso segue do item (vi) da Proposição 5 e do fato, já discutido, de que a reta extendida tem como sub-base todos os conjuntos da forma $[-\infty, a]$ e $[b, +\infty]$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Se $t \in u(X)$: logo existe $y \in X$ tal que $u(y) = t$ e daí $u^{-1}([t, +\infty]) = \{z \in X : z \succsim y\}$ e $u^{-1}([-\infty, t]) = \{x \in X : y \succsim z\}$ que são fechados pela hipótese de continuidade de $\succsim$.

(b) Se $t \notin u(X)$ e t não pertence a algum gap de $u(X)$ então:

$$\begin{aligned} (i)\, t &\leq inf\, u(X), \text{ ou} \\ (ii)\, t &\geq sup\, u(X), \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii)\, [t, +\infty] &= \bigcap_{\substack{\alpha < t \\ \alpha \in u(X)}} [\alpha, +\infty] \text{ e} \\ [-\infty, t] &= \bigcap_{\substack{\alpha > t \\ \alpha \in u(X)}} [-\infty, \alpha] \end{aligned}$$

(i) implica que $u^{-1}([t, +\infty]) = X$ e $u^{-1}([-\infty, t]) = \emptyset$;
(ii) implica que $u^{-1}([t, +\infty]) = \emptyset$ e $u^{-1}([-\infty, t]) = X$;
(iii) implica que

$$u^{-1}([t, +\infty]) = \bigcap_{\substack{\alpha < t \\ \alpha \in u(X)}} u^{-1}([\alpha, +\infty])$$

e

$$u^{-1}([-\infty, t]) = \bigcap_{\substack{\alpha > t \\ \alpha \in u(X)}} u^{-1}([-\infty, \alpha]),$$

que são fechados como interseção de fechados;

(c)Se $t \notin u(X)$ e t pertence a algum gap de $u(X)$, que é um aberto pelo teorema de Bowen-Debreu, temos que $t \in (a, b)$ e então

$$u^{-1}([t, +\infty]) = u^{-1}([b, +\infty])$$

e

$$u^{-1}([-\infty, t]) = u^{-1}([-\infty, a])$$

que são fechados. □

Este teorema de representação não é o caso mais geral conhecido. Monteiro (1987) estabelece condições mais gerais para a existência de um *funcional de utilidade*. Por exemplo, o espaço $X = l^\infty(\mathbb{R})$ das sequências limitadas na reta, com a topologia da norma $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, não é um espaço topológico com base enumerável. Mas uma preferência racional e contínua, definida sobre $l^\infty(\mathbb{R})$, tem uma representação garantida pelo teorema de representação de Monteiro.

4.3 Exercicios

1. Prove a Proposição 5.

2. Dada uma preferência $\succsim$ sobre $\mathbb{R}^l_+$ que apresente uma representação u, prove que $\succsim$ é convexa (i. e, $\{x \in \mathbb{R}^l_+ : x \succsim z\}$ é convexo $\forall z \in \mathbb{R}^l_+$) se, e só se, u é quase-côncava[2].

3. Dada $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ definida como:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2, \ se \ x_1x_2 < 4 \ ou \ x_1x_2 > 8 \\ 4, \ se \ 4 \leq x_1x_2 \leq 8 \end{cases},$$

   prove que a preferência induzida a partir de u é convexa. Existe alguma representação $v : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ côncava para a preferência induzida a partir de u?

4. Seja $P = [1/3, 2/3]$ e definimos a seguinte preferência sobre $\mathbb{R}^2_+$:

$$x \succsim y \Leftrightarrow \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \ \forall \alpha \in P.$$

   Encontre o conjunto de cestas tão boas quanto a cesta $(2, 2)$ e o ilustre graficamente. Esta preferência é contínua? Existe função de utilidade que represente $\succsim$?

5. Seja $\succsim$ uma preferência racional e contínua sobre $\mathbb{R}^l_+$. Prove que dado qualquer subconjunto compacto C de $\mathbb{R}^l_+$, existe um melhor elemento $x' \in C$ (i.e, $x' \succsim x$ para todo $x \in C$); chamamos x' de um elemento maximal.

[2] Uma função $u : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ é quase-côncava quando dados $x, y \in \mathbb{R}^l_+$ e $\alpha \in [0, 1]$:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min\{u(x), u(y)\}.$$

Dica: Existem duas formas de ser provar isso:

Em uma delas podemos utilizar, pelo teorema de Debreu-Eilenberg-Rader, a existência de uma função contínua $u : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ que represente a preferência $\succsim$.

A outra maneira de realizarmos a prova, bem mais elegante, dispensa a existência de uma função de utilidade; basta lembrarmos que pela propriedade da interseção finita temos que *a interseção de qualquer coleção de subconjuntos fechados de um conjunto compacto C é não-vazio se a interseção de qualquer sub-coleção finita de fechados em C for não-vazia.* Daí podemos proceder definindo $C_z = \{x \in C : x \geq z\}$, que é um fechado pela hipótese de continuidade. Agora, notemos que podemos definir o conjunto de melhores elementos da seguinte maneira:

$$C_{\succsim} = \bigcap_{z \in C} C_z,$$

lembrando que a interseção arbitrária de fechados é um fechado, temos que $C_{\succsim}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^l_+$. Para vermos que $C_{\succsim}$ é não-vazio basta utilizarmos a propriedade da interseção finita.

6. (*Avançado*) Considere um subconjunto não-vazio, compacto e convexo $C \subset \mathbb{R}^l_+$. Seja $\succsim$ uma preferência sobre $\mathbb{R}^l_+$ convexa e contínua mas que não seja transitiva. Prove que existe uma elemento maximal x' para $\succsim$ em C.

   Dica: Definindo a correspondência

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & : & C \rightsquigarrow C \\ x & \mapsto & \Gamma(x) = \{y \in \mathbb{R}^l_+ : y \succ x\} \end{array}$$

   o problema se reduz a provar que existe $x' \in C$ tal que $\Gamma(x') = \emptyset$.

   Vamos supor que $\Gamma(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in C$. Notemos que $\Gamma(x)$ é a valores convexos para todo $x \in C$ e possui gráfico aberto (i.e, $\{(x, y) \in C \times C : y \succ x\}$ é aberto). Pelo teorema de Seleção de Michael existe uma seleção contínua para a correspondência Γ, ou seja, existe uma função contínua $f : C \to C$ tal que $f(x) \in$

$\Gamma(x)$, $\forall x \in C$. Agora, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, temos que existe $\widetilde{x} \in C$ tal que $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$, uma contradição.

Capítulo 5

Introdução à Teoria do Consumidor

Embora não seja o objetivo principal deste curso, é interessante indicar como a teoria que desenvolvemos até agora pode ser usada para modelar o comportamento de consumidores numa economia.

Supomos que os indivíduos têm um conjunto de bens a disposição para comprar: comida (arroz, feijão, carne, etc.), transporte (trem, ônibus, taxi, etc.), roupas, etc. Nossa teoria será fixa no tempo, isto é, vamos considerar uma escolha estática, realizada num ponto bem definido do tempo. Antes de prosseguir, o leitor já é capaz de imaginar qual deveria ser o conjunto de escolha X? Lembre-se que a quantidade de cada produto é também um número a ser decidido pelo consumidor.

5.1 Conceitos Básicos

Assumiremos que existem L bens na economia, para serem adquiridos e consumidos pelos indivíduos. Cada indivíduo compra uma cesta de bens, isto é, uma determinada quantidade de cada um dos bens. Representaremos sua escolha por um vetor $x = (x_1, x_2, ..., x_L)$, onde x_k é a quantidade não negativa de bens que o indivíduo resolve comprar/consumir. Assim, o conjunto de escolha é o conjunto de cestas, isto é, $X = \mathbb{R}_+^L$.

Falta ainda uma peça para definir nossa teoria. Em geral as preferências são monotônicas — quanto mais unidades são consumidas mais os consumidores ficam satisfeitos. Então, como ele pode escolher uma cesta se tiver à disposição todas as cestas da economia? A solução para isso vem de nossa própria intuição diária. Ele consome até o que pode gastar. Em suma, supomos que existe um orçamento w que representa a riqueza do indivíduo e que ele não pode gastar mais do que isso e existem preços p_1, ..., p_L para cada um dos bens. Logo, o problema do consumidor será escolher uma cesta no *conjunto de restrição orçamentária*:

$$B(p,w) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x = \sum_{k=1}^{L} p_k x_k \leqslant w \right\}.$$

Para evitar que tenhamos conjuntos de restrição orçamentária absurdos, vamos nos restringir sempre a situações em que os preços são não-negativos e não nulos, isto é, $p \geq 0$, $p \neq 0$.

Se podemos especificar as preferências de um indíviduo por meio de uma função utilidade então temos um meio muito adequado para escrever qual é o problema do consumidor:

$$\max_{x \in B(p,w)} u(x) \qquad \text{(Problema do Consumidor)}$$

Temos o seguinte:

Teorema 1. (Existência de Solução para o Problema do Consumidor) Suponha que $p \gg 0$, $w > 0$ e u seja contínua. Então existe solução para o Problema do Consumidor.

Demonstração. Provemos que $B(p,w)$ é compacto não vazio. Ora, claramente $0 \in B(p,w)$. Uma vez que $p_k > 0$ para todo $k = 1$, ..., L, temos que se $x \in B(p,w)$ então

$$p_k x_k \leqslant p \cdot x \leqslant w \Rightarrow x_k \leqslant \frac{w}{p_k}.$$

Ou seja, $B(p,w)$ é limitado. Ele é fechado porque se $x^n \in B(p,w)$, $x^n \to x$, então $p \cdot x^n \leqslant w$ o que implica que $p \cdot x \leqslant w$, ou seja, $x \in B(p,w)$.

Como uma função contínua assume máximo num conjunto compacto, então o problema do consumidor tem solução.■

5.2 Demanda Walrasiana

Um conceito importante na Teoria do consumidor é o de demanda Walrasiana. Ela é simplesmente o conjunto de todas as cestas que maximizam a utilidade do consumidor entre as que ele pode comprar, isto é, dentro do conjunto das cestas na sua restrição orçamentária. Formalmente,

$$x(p,w) = \arg \max_{x \in B(p,w)} u(x).$$

Como definimos, a demanda Walrasiana é um conjunto para cada p e w fixos. Tecnicamente, portanto, a demanda Walrasiana é uma correspondência, isto é, uma função que associa um vetor a um conjunto. Não estamos interessados em descrever o tópico mais avançado da teoria de correspondências. Assim, é interessante investigar quando o conjunto acima é unitário, de forma que a demanda Walrasiana possa ser considerada simplesmente uma função. Este é o objetivo do próximo Lema. Antes, precisamos da seguinte definição:

Definição 2. Uma função $u : X \to \mathbb{R}$ é estritamente quase-côncava se, dados $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, então para qualquer $\alpha \in (0,1)$,

$$u\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)\, x^2\right) > \min\left\{u\left(x^1\right), u\left(x^2\right)\right\}.$$

Temos o seguinte:

Lema 3. Se a função $u : X \to \mathbb{R}$ é estritamente quase-côncava então a demanda Walrasiana é univaluada.

Demonstração. Suponha que existam $x^1, x^2 \in x(p,w)$, $x^1 \neq x^2$. Então $u\left(x^1\right) = u\left(x^2\right) = \max_{x \in B(p,w)} u(x)$. No entanto, a cesta $x^m = \left(x^1 + x^2\right)/2$ cumpre $p \cdot x^m = (p \cdot x^1 + p \cdot x^2)/2 \leq (w + w)/2 = w$ e portanto $x^m \in B(p,w)$. No entanto, a estrita quase-concavidade implica que

$$u\left(x^m\right) > \min\left\{u\left(x^1\right), u\left(x^2\right)\right\} = \max_{x \in B(p,w)} u(x),$$

o que é um absurdo.■

Um outro conceito importante e que será útil no que se segue é o que chamamos a Lei de Walras. Essa "Lei" estabelece que o consumidor gasta todo seu capital na maximização de sua utilidade. Para enunciar a lei de forma mais formal, precisamos de outra definição.

Definição 4. Uma função utilidade é localmente não-saciável se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in X$, existe um $x^{\varepsilon} \in \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}$ tal que $u(x^{\varepsilon}) > u(x)$.

A intuição para essa propriedade é que o indivíduo nunca fica totalmente saciado com nenhum bem. Se oferecermos um pouco mais para ele, ele ficará estritamente mais feliz. Essa propriedade permite provar a Lei de Walras.

Lema 5. (Lei de Walras) Se u é localmente não-saciável, então se $x \in x(p, w)$, tem-se $p \cdot x = w$.

Demonstração. Suponha que $x \in x(p, w)$, tem-se $p \cdot x < w$. Seja

$$\varepsilon = \frac{w - p \cdot x}{2 \sum_{l=1}^{L} p_l} > 0.$$

Existe um $x^{\varepsilon} \in \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}$ tal que $u(x^{\varepsilon}) > u(x)$. No entanto,

$$p \cdot x^{\varepsilon} \leq \sum_{l=1}^{L} p_l (x + \varepsilon) = p \cdot x + \sum_{l=1}^{L} p_l \varepsilon < w.$$

Logo, $x^{\varepsilon} \in B(p, w)$, contradizendo $x \in x(p, w)$.■

Os dois últimos lemas nos permitem concluir que se u é estritamente quase-côncava e localmente não-saciável então $(p, w) \mapsto x(p, w)$ é uma função e que $p \cdot x(p, w) = w$. Se acrescentarmos agora a propriedade que u é contínua podemos provar que $(p, w) \mapsto x(p, w)$ também é contínua. Esta é a afirmação do próximo teorema.

Teorema 6. Suponha que $u(\cdot)$ seja uma utilidade contínua, estritamente quase-côncava e localmente não-saciável. Então a demanda Walrasiana é contínua.

Demonstração. Seja (p^n, w^n) uma sequência convergente com limite (p, w). Pela Lei de Walras temos que $p^n x(p^n, w^n) = w^n$, para todo $n \geq 1$. Seja $x'_l = sup\{w^n/p_l^n : n \geq 1\}$ e escrevemos $x' = (x'_1, ..., x'_L) \in \mathbb{R}_+^L$ Notemos que em cada bem $l \in \{1, ..., L\}$ vale que $0 \leq x_l(p^n, w^n) \leq w^n/p_l^n$ para todo $n \geq 1$. Logo

$$\|x(p^n, w^n)\|^2 = \sum_{l=1}^{L} x_l(p^n, w^n)^2 \leq \sum_{l=1}^{L} (x'_l)^2 = \|x'\|^2,$$

ou seja, a sequência $\{x(p^n, w^n)\}_{n\geq 1}$ é limitada em $\mathbb{R}_+^L$. Agora suponha que exista alguma subsequência $\{(p^{n_k}, w^{n_k})\}_{k\geq 1}$ de modo que $\lim\limits_{k\to\infty} x(p^{n_k}, w^{n_k}) = z \neq x(p, w)$.

Neste caso $\lim\limits_{k\to\infty} p^{n_k} x(p^{n_k}, w^{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} w^{n_k} \Rightarrow pz = w$. Assim $z \in B(p, w)$ e como $z \neq x(p, w)$ temos que $u(x(p, w)) > u(z)$. Pela continuidade de u, dado $\varepsilon > 0$ existe algum $y \in B(p, w)$ com $\|y - x(p, w)\| < \varepsilon$ e $u(y) > u(z)$. Como $(p^n, w^n) \to (p, w)$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ tenhamos $p^n y < w^n$ e assim

$$u(x(p^n, w^n)) \geq u(y), \ \forall n \geq n_0,$$

Agora, pela continuidade de u temos que $u(z) \geq u(y)$, o que nos leva a um absurdo. Assim podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} x(p^n, w^n) = x(p, w). \blacksquare$$

Parte II

Escolha sob Risco e Incerteza

Capítulo 6

Estados da Natureza e do mundo

O objetivo deste capítulo é oferecer uma introdução ao conceito de estados da Natureza (e estados do mundo), de forma a permitir uma melhor compreensão dos capítulos subseqüentes. Leitores suficientemente maduros podem omitir sua leitura sem perda de conteúdo.

Até este momento, investigamos as escolhas de indivíduos — na verdade, as preferências — na situação em que estes sabem exatamente o que irão obter depois que tomam suas ações. Por exemplo, ao comprar um quilograma de arroz, o consumidor sabe exatamente o que estará levando para a casa. Não há nenhuma "incerteza"associada ao consumo do arroz — e usamos aspas apenas para frisar que ainda não discutimos esse conceito. De fato, apesar de termos chamado a primeira parte desta monografia de escolha sob certeza, a teoria desenvolvida se abstrai de modelar "incerteza"e, portanto, é suficiente geral para contemplar todos os casos.

Há situações específicas, porém, em que gostaríamos de ter uma modelagem mais explícita de "incerteza". Em geral, ao tomarmos uma decisão econômica, não sabemos ao certo qual vai ser a conseqüência ou o resultado de tal decisão. Por exemplo, suponha que a decisão é comprar um carro usado. Ao tomarmos a decisão não sabemos se o carro poderá ser longamente usado sem apresentar defeitos ou se irá dar defeito pouco tempo depois. Ao preço que o carro é oferecido, ficaremos satisfeitos na primeira situação, mas não se tivermos de gastar com manutenção. O problema é que a decisão tem de ser feita sem o conhecimento do que vai acontecer depois.

Um exemplo mais claro é o da operação em bolsa. Digamos que um investidor decida comprar uma ação X hoje ao preço de 1 (uma) unidade monetária e que ele vai querer vendê-la no ano seguinte, digamos, ao valor de x (em valor presente). Naturalmente o investidor valoriza o resultado $x-1$ da operação, onde x representa o preço da ação no momento da venda. Quando ele está decidindo se compra ou não a ação, ele não sabe qual é o valor de x.

Nesta parte do curso, iremos tentar modelar tais situações.

6.1 Modelagem de incerteza

Sabemos já trabalhar com preferências sobre cestas sobre as quais temos total conhecimento. Vamos aproveitar, portanto, tal teoria. Vamos especificar um conjunto de *estados da natureza* N sobre os quais o indíviduo não tem nenhuma dúvida em relação a suas preferências. No exemplo do investidor acima, isso corresponderia a uma situação em que o preço de venda da ação X é o número x. É claro que é estritamente melhor comprar a ação X se e somente se $x > 1$.

Podemos montar, então, a seguinte tabela:

Estados da Natureza	Decisão do Investidor	Resultado Final
$x > 1$	Compra	$x - 1 > 0$
$x \leqslant 1$	Compra	$x - 1 \leqslant 0$
$x > 1$	Não Compra	0
$x \leqslant 1$	Não Compra	0

Tabela 1

A Tabela 1 sugere um problema em colocar as preferências do investidor sobre os estados da natureza. De fato, para um mesmo estado da natureza, por exemplo $x > 1$, e duas ações diferentes (comprar e não comprar) os resultados finais são diferentes. O que o consumidor pode dizer com certeza é que, se $x > 1$, comprar é melhor que não comprar e se $x \leqslant 1$, não comprar é pelo menos tão bom quanto (e pode ser melhor que) comprar. Então, o que aprendemos é que as preferências estão na verdade sobre os resultados finais, que chamaremos de *estados do mundo*, sendo o conjunto de estados do mundo denotado por M. Estados do mundo incluem, portanto, as escolhas dos indivíduos, ao contrário dos estados da natureza.[1]

A definição apropriada de quais são os estados do mundo e da natureza pode ser, em geral controvertida. Como regra geral, pensamos ser sempre melhor optar pelos conjuntos mais simples possíveis.[2]

Um outro exemplo será útil. Suponha que uma pessoa tenha de decidir se apaga ou não um e-mail de um desconhecido, sem abri-lo.

Estados da Natureza	Decisões	Resultado Final
Conteúdo relevante	Abre	Conteúdo captado
Conteúdo relevante	Apaga	Perde
Conteúdo irrelevante	Abre	Perde tempo.
Conteúdo irrelevante	Apaga	Nada ocorre
Conteúdo danoso (vírus)	Abre	Computador infectado
Conteúdo danoso (vírus)	Apaga	Nada ocorre

Tabela 2

Observe que a última e a antepenúltima linha são descritas pela mesma expressão "nada ocorre". No entanto, será que elas são realmente equivalentes? Podem ou não ser equivalentes, mas nossa modelagem as trata como diferentes, isto é, não identificamos esses dois estados.

Isso é feito da seguinte forma. Temos um indivíduo que toma ações a num conjunto de ações A. Sob um estado da natureza $n \in N$, ele tem um resultado final m que é um estado do mundo, isto é, $m \in M$. Identificaremos os estados do mundo m com os estados da natureza e as ações, isto é, $m = (n, a)$ e, portanto, $M = N \times A$. Nossas hipóteses nos levam a assumir que o indivíduo tem uma preferência bem definida sobre $M = N \times A$ e esta é governada pela teoria que

[1] A terminologia estados do mundo e estados da natureza é algumas vezes usada indistintamente, umas vezes para significar um ou outro conceito. Pensamos que essa diferenciação é mais apropriada.

[2] Há uma razão mais profunda para isso do que somente a simplicidade. Discutiremos esse assunto mais à frente.

desenvolvemos anteriormente. Assumiremos que esta preferência, denotada por $\geqslant$, é racional.

Podemos definir uma ordem sobre as ações da seguinte forma:

Definição 1. $a' \succcurlyeq^1 a \equiv (n, a') \geqslant (n, a)$, para todos $n \in N$.

Exercício 1. Prove que $\succcurlyeq^1$ é transitiva mas não completa.

O problema com essa definição é, como apontado pelo exercício acima, ela é transitiva, mas não é completa, portanto não é racional como gostaríamos.

É claro que há muitas soluções matemáticas para esse problema. Por exemplo, considere a seguinte:

Definição 2. $a' \succcurlyeq^2 a \equiv (n, a') \geqslant (n, a)$, para algum $n \in N$.
Você é capaz de dizer qual é o problema dessa definição?

Exercício 2. Prove que $\succcurlyeq^2$ é transitiva e completa.

Exercício 3. Prove que $a \succ^2 b \Longrightarrow a \succ^1 b$.

Exercício 4. Suponha que para todo par de elementos $a, b \in A$, temos que um dos dois fatos ocorre $a \succ^2 b$ ou $b \succ^2 a$. Mostre que $\succcurlyeq^2$ é equivalente a $\succcurlyeq^1$.

Vemos que as tentativas anteriores não são aceitáveis. A solução mais razoável é a que leva em conta probabilidades. Consideremos o caso em que N é finito (para não entrarmos em questões mais sofisticadas de teoria de probabilidade). Seja $N = \{1, ..., n\}$. Assumimos que o indivíduo tem uma crença dada por uma probabilidade de ocorrência de cada um dos estados da natureza e são expressos pelos números $p_1, ..., p_n$. Ou seja, assumimos que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

e

$$p_i \geqslant 0, \text{ para todos } i = 1, ..., n.$$

Vamos assumir que a preferência $\geqslant$ sobre M seja representada pela função de utilidade $u : M \to \mathbb{R}$. Então podemos definir a seguinte ordem de preferência sobre as ações:

Definição 3. $a' \succcurlyeq a \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i u(i, a') \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i u(i, a)$.

Quando definimos a preferência sobre as ações dessa forma, temos a preferência dada pela utilidade esperada.

Há algumas relações que podemos estabelecer:

6.2 Exercícios

5. Mostre que $\succcurlyeq$ é racional.

6. Suponha que o espaço de ações é convexo. Mostre que se $u(i, \cdot) : A \to \mathbb{R}$ for quase-côncava, então a preferência $\succcurlyeq$ definida é convexa.[3]

7. Mostre que $a \succcurlyeq^1 b \Rightarrow a \succcurlyeq b$ e que $a \succcurlyeq b \Rightarrow a \succcurlyeq^2 b$.

6.3 Roletas e corridas de cavalos

A modelagem com estados da Natureza, conforme apresentada acima não é, ainda, suficientemente explícita para o que precisamos nos próximos capítulos. Será necessário distinguir o que entendemos por situações objetivas e subjetivas.

Essa distinção vem de uma longa discussão travada no âmbito da estatística. Não apresentaremos nem sequer uma introdução a essa discussão, mas vamos apenas mencionar seu tema. De um lado, estavam os "objetivistas" que viam todas as probabilidades como quantidades objetivamente determinadas. Por exemplo, a probabilidade de dar o número 2 ao jogar um dado (não-viesado) é 1/6, independente de qualquer julgamento subjetivo. Por outro lado, os "subjetivistas" acreditavam que não existem probabilidades objetivamente determinadas: tudo é subjetivo.

[3] Ver definição de função quase-côncava no exercício 2 do capítulo 4.

Naturalmente, tal discussão teórico-filosófica influenciou as aplicações da Probabilidade em Economia. A teoria de von Neumann-Morgenstern que apresentaremos no próximo capítulo pertence a uma certa visão objetivista de mundo. Como veremos, a incerteza está determinada completamente por probabilidades bem definidas, embora esta possa ser considerada apenas uma forma de interpretar a teoria. De fato, Savage, um grande estatístico subjetivista, usou a teoria de von Neumann-Morgenstern para basear a teoria de probabilidade subjetiva! Nesse sentido, o título de seu livro é muito sugestivo: The Foundations of Statistics. A teoria de Savage é apresentada no capítulo 7.

Desde então, a literatura econômica de decisão sob incerteza começou a tratar dois tipos diferentes de eventos incertos, chamando-os de roletas e corridas de cavalos. Considere por exemplo uma roleta: ela tem as casas 1, 2, 3, ... , 36 e a casa 0, que não recebe apostas. São, portanto, 37 casas. A probabilidade (objetiva) de sair qualquer número é, portanto, 1/37. Assim, pode-se calcular a probabilidade de qualquer aposta ser vencedora. Por exemplo, o evento de sair um número par tem, portanto, uma probabilidade de 18/37 (lembrando-se que o 0 não conta). A menos que a roleta não seja honesta, essas são as probabilidades que qualquer um esperaria. Quando nos referirmos às loterias de von Neumann - Morgenstern, estaremos nos referindo a coisas que têm uma probabilidade objetiva, como as roletas.

Considere, porém, que o evento incerto é o resultado de uma corrida de cavalos. Qual é a probabilidade de ganhar o cavalo 2? Não há nenhuma maneira de definir ou estipular objetivamente tal probabilidade. Em outras palavras, cada indivíduo estabelecerá (ou não) sua própria crença sobre a probabilidade de vitória do tal cavalo 2. Nessa situação, todas as probabilidades sobre o evento incerto são subjetivas.

Embora isso não seja usual na literatura, podemos então especificar melhor o conjunto de estados da Natureza, N, como sendo composto de dois tipos de eventos: os resultados de corridas de cavalos (subjetivos) e os resultados de roletas (objetivos). Isto é, escrevemos $N = S \times O$ onde S representa o conjunto de estados associados a corridas de cavalos (aos quais cada agente atribuirá sua probabilidade subjetiva) e O representará os estados da Natureza associados a roletas (para os quais a probabilidade de ocorrência é objetivamente determinada). Não usaremos a terminologia de estados subjetivos e objetivos, pois ela é controversa e pode confundir mais do que clarificar.

Assim, podemos dizer que o capítulo 6 aborda situações que em S é trivial (unitário), de forma que os estados da Natureza podem ser identificados com os estados associados a roletas $N = O$. No capítulo 7, descrevemos a situação oposta, em que há apenas estados associados a corridas de cavalo, isto é, $N = S$.

Naturalmente, o leitor não deve ficar impressionado com a insistência na terminologia "corridas de cavalo" e "roletas". Fazemos isso apenas porque está consagrada na literatura, a partir do trabalho de Anscombe-Aumann (1963). Se o leitor entendeu o conceito, porém, deve ser capaz de classificar qualquer situação envolvendo probabilidades como uma das duas classes: corridas de cavalo ou roletas. O exemplo da próxima seção talvez ajude a clarificar isso.

Uma outra forma de ver a distinção das duas classes é a seguinte. Uma corrida de cavalo ocorre uma única vez (ou poucas vezes) e não há como repeti-la de forma consistente. (Mesmo que tomemos os mesmos cavalos e façamos com que corram várias vezes, não podemos assegurar que o resultado virá sempre de uma mesma medida de probabilidade.) Por outro lado, roletas e dados permitem repetições sem problemas conceituais. Repetindo-se o evento suficiente vezes, sua freqüência de ocorrência se aproximará das probabilidade objetiva tanto quanto queiramos.

A vantagem de fazer essa distinção é permitir entender os conceitos de atos, conjuntos de conseqüências e conjuntos de resultados que serão empregados nos próximos capítulos, como apresentamos a seguir.

6.4 Atos, conseqüências e resultados

No início deste capítulo, discutimos o conceito de estados do mundo, como sendo formados pelos estados da natureza e as ações do(s) indivíduos. Após a discussão da última seção podemos dizer que o estado do mundo $m \in M$ é descrito por uma tripla (s, o, a) onde $s \in S$ representa a realização do estado da corrida de cavalo, $o \in O$ representa a realização do estado da roleta e a representa a ação tomada pelo indivíduo.

Um estado do mundo representa tudo que é necessário para descrever o que acontece de relevante para o indívíduo. Suponha que existe uma função v que leve o estado do mundo num *resultado* para o indivíduo. A idéia da função v é que diferentes estados do mundo podem ser indistinguíveis para o indivíduo e, portanto, representarão o mesmo resultado. O conjunto de resultados, Z, é simplesmente a imagem da função v por M, isto é, $Z \equiv v(M)$. Então podemos escrever a função v de $M = S \times O \times A$ em Z como sendo $v : S \times O \times A \to Z$.

Muitas vezes, não estamos interessados em descrever a parte objetiva do conjunto de estados da Natureza. Por exemplo, ao jogar uma roleta (ou como se costuma dizer, participar de uma loteria de von Neumann-Morgenstern), há um momento em que (ainda) não estamos interessados na resolução da incerteza objetiva e queremos mantê-la presente. Assim, definimos o conjunto de conseqüências X como sendo o conjunto de funções $\phi : O \to Z$ tais que $p(o) = v(s, o, a)$ para algum s e a. Podemos ainda denotar um elemento de X como sendo $v(s, \cdot, a)$. Embora tudo isso ainda pareça muito abstrato, o exemplo dado abaixo irá clarificar as coisas.

É claro que se o conjunto O é trivial, como na abordagem subjetivista de Savage, então podemos identificar o conjunto de conseqüências X e o conjunto de resultados Z. Por outro lado, se S é trivial, então X será o conjunto de funções $\phi : O \to Z$. (Uma função assim é chamada de variável aleatória.) No entanto, nesse caso (von Neumann-Morgenstern), em geral não se explicita o conjunto O. Como a probabilidade sobre O é objetiva pode-se simplesmente identificar o conjunto de conseqüências com o conjunto das medidas de probabilidades sobre Z.

Mais precisamente: seja O finito com n elementos (será sempre esse o caso estudado neste livro), isto é, $O = \{o_1, ..., o_n\}$. Defina o conjunto:

$$\tilde{X} = \{x : Z \to [0,1] : \text{ existem resultados } z_1, ..., z_n \text{ tais que}$$
$$x(z) = 0 \text{ se } z \neq z_i, \forall i \text{ e } \sum_{i=1}^{n} x(z_i) = 1\}.$$

Formalmente, o conjunto $\tilde{X}$ é o conjunto de medidas de probabilidade sobre Z que têm suporte finito com no máximo n elementos.

Há uma relação de um para um entre o conjunto de conseqüências X e o conjunto de medidas de probabilidades sobre resultados, $\tilde{X}$. De fato, dado $x \in \tilde{X}$, tome $O = \{o_1, ..., o_n\}$ e defina $\phi : O \to Z$ como $\phi(o_i) \equiv z_i$. Nesse caso, a probabilidade objetiva é $p(o_i) = x(z_i)$. Por outro lado, uma probabilidade objetiva p e uma variável aleatória $\phi : O \to Z$, definimos $x \in \tilde{X}$ da seguinte forma $z_i \equiv \phi(o_i)$ e $x(z_i) = p(o_i)$.

Assim, no capítulo 6, falamos do espaço de conseqüências como sendo $\tilde{X}$, isto é, identificamos $X = \tilde{X}$ e usamos apenas a notação X.

É útil ainda denotar o conjunto das conseqüências como sendo o conjunto das funções $o \mapsto v(s, o, a)$ para cada (s, a) fixo. Em particular, uma conseqüência poderá ser denotada por $v(s, \cdot, a)$.

Um ato será uma função $f : S \to X$, isto é, que associa cada estado da Natureza a uma conseqüência. Naturalmente, que dada uma função $v : S \times O \times A \to Z$, podemos definir os atos a partir das ações: para cada ação a, defina o ato $f_a : S \to X$ que associa a cada $s \in S$ a conseqüência

$$f_a(s) \equiv v(s, \cdot, a).$$

Reciprocamente, dado um ato $f : S \to X$, podemos definir a ação a_f como sendo a ação tal que $f(s) = v(s, \cdot, a_f)$, se esta ação existir.

As preferências que discutimos acima sobre o conjunto de estados do mundo podem ser estudadas sob o conjunto de conseqüências X. Em geral, é isto que é usualmente feito e será a abordagem que adotaremos nos próximos capítulos.

Para esclarecer todos esses conceitos, considere o seguinte exemplo, que é uma adaptação de um exemplo originalmente dado por Savage (1954), p. 13-15.

Exemplo do Bolo com Ovos

Um pequeno comerciante vai receber a visita de um dos representantes do seu maior cliente. Esse representante tem o poder de decisão das compras do cliente e, portanto, o comerciante quer agradá-lo. Para isso, ele descobre que o cliente tem 6 representantes e todos eles gostam de bolo. No entanto, um deles é vegetariano e só come bolo que seja feito sem ovo. Os outros cinco também gostam de bolo sem ovo, mas muito menos.

O cliente decide qual representante vai mandar usando um dado e o comerciante só vai saber qual representante foi escolhido quando este chegar para a visita.

A visita vai chegar em duas horas, de forma que o comerciante só tem tempo e material para fazer um tipo de bolo (com ou sem ovo). Para fazer o bolo sem ovo, basta acrescentar um pouco mais de manteiga ao resto dos ingredientes. Como o ovo estava guardado em seu estoque, ele não sabe se ele ainda está bom ou se está podre. Ele tem uma tigela onde pode quebrar o ovo antes de misturar aos outros ingredientes que já estão na panela, mas se fizer isso não terá tempo de lavar a tigela, e isso também pode causar mal impressão ao representante. Por outro lado, se o ovo estiver podre e ele quebrá-lo diretamente na panela, perderá todos os ingredientes e não poderá fazer nenhum bolo. Nesse caso, além de ficar com a panela suja, não poderá oferecer nenhum bolo ao representante.

Assim, ele tem de decidir se não faz o bolo, se faz bolo com ou sem ovo e se for com ovo, se vai quebrar o ovo antes na tigela ou não.

Modelagem do exemplo

No exemplo acima, temos uma "roleta", ou melhor, um dado, decidindo sobre a realização de $O = \{o_1, o_2\}$, onde o_1 significa que foi enviado o representante vegetariano, e o_2 significa que foi enviado um representante não-vegetariano. o_1 ocorre com probabilidade $1/6$ e o_2, $5/6$.

Antes de ser resolvida a "roleta", porém, há uma "corrida de cavalos": $S = \{s_1, s_2\}$ onde s_1 representa ovo bom e s_2 representa ovo podre. O comerciante tem de atribuir uma probabilidade subjetiva para cada um desses eventos.

O conjunto de ações do comerciante é $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, onde a_1 representa fazer bolo com ovo e quebrar ovo diretamente na panela; a_2 representa fazer bolo com ovo e quebrar ovo na tigela e, se esse estive podre, fazer bolo sem ovo; a_3 representa fazer bolo sem ovo e a_4 representa não fazer bolo.

O conjunto de resultados estados do mundo é $M = S \times O \times A$. Para cada estado do mundo, o indivíduo atribui um resultado. Na maioria dos exemplos, os resultados são valores monetários, mas nem sempre. Para simplificar, vamos descrever o resultado e atribuir um valor monetário a ele, como mostrado pela tabela abaixo.

Estado do mundo	Descrição	Resultado
$m_1 = (s_1, o_1, a_1)$	um ovo bom é quebrado na panela, é enviado o representante vegetariano	representante neutro (mas comerciante cansado)
$m_2 = (s_1, o_2, a_1)$	um ovo bom é quebrado na panela, é enviado o representante não-vegetariano	representante muito satisfeito
$m_3 = (s_2, o_1, a_1)$	um ovo podre é quebrado na panela, é enviado o representante vegetariano	representante neutro (mas comerciante um pouco cansado)
$m_4 = (s_2, o_2, a_1)$	um ovo podre é quebrado na panela, é enviado o representante não-vegetariano	representante neutro (mas comerciante um pouco cansado)
$m_5 = (s_1, o_1, a_2)$	um ovo bom é quebrado na tigela, é enviado o representante vegetariano	representante insatisfeito: não gosta da sujeira
$m_6 = (s_1, o_2, a_2)$	um ovo bom é quebrado na tigela, é enviado o representante não-vegetariano	representante satisfeito (não gosta da sujeira)
$m_7 = (s_2, o_1, a_2)$	um ovo podre é quebrado na tigela, é enviado o representante vegetariano	representante satisfeito (não gosta da sujeira)

Tabela 1. Estados do mundo.

Estado do mundo	Descrição	Resultado
$m_8 = (s_2, o_2, a_2)$	um ovo podre é quebrado na tigela, é enviado o representante não-vegetariano	representante muito insatisfeito (não gosta do bolo nem da sujeira)
$m_9 = (s_1, o_1, a_3)$	faz bolo sem ovo, é enviado o representante vegetariano	representante muito satisfeito
$m_{10} = (s_1, o_2, a_3)$	faz bolo sem ovo, é enviado o representante não-vegetariano	representante pouco satisfeito (não é seu bolo preferido)
$m_{11} = (s_2, o_1, a_3)$	faz bolo sem ovo, é enviado o representante vegetariano	representante muito satisfeito
$m_{12} = (s_2, o_2, a_3)$	faz bolo sem ovo, é enviado o representante não-vegetariano	representante pouco satisfeito (não é seu bolo preferido)
$m_{13} = (s_1, o_1, a_4)$	não faz bolo, é enviado o representante vegetariano	representante neutro
$m_{14} = (s_1, o_2, a_4)$	não faz bolo, é enviado o representante não-vegetariano	representante neutro
$m_{15} = (s_2, o_1, a_4)$	não faz bolo, é enviado o representante vegetariano	representante neutro
$m_{16} = (s_2, o_2, a_4)$	não faz bolo, é enviado o representante não-vegetariano	representante neutro

Tabela 1 (cont.) Estados do mundo.

O conjunto de conseqüências X é o conjunto de funções $o \mapsto v(s, o, a)$ ou, abreviadamente, $v(s, \cdot, a)$, e é descrito na Tabela 2.

Conseqüência	Ação	Descrição da conseqüência
$x_1 = v(s_1, \cdot, a_1)$	um ovo bom é quebrado na panela	bolo com ovo, tigela limpa

Tabela 2. Conseqüências.

Conseqüência	Ação	Descrição da conseqüência
$x_2 = v(s_2, \cdot, a_1)$	um ovo podre é quebrado na panela	não há bolo, tigela limpa
$x_3 = v(s_1, \cdot, a_2)$	um ovo bom é quebrado na tigela	bolo com ovo, tigela suja
$x_4 = v(s_2, \cdot, a_2)$	um ovo podre é quebrado na tigela	bolo sem ovo, tigela suja
$x_5 = v(s_1, \cdot, a_3)$	faz bolo sem ovo	bolo sem ovo, tigela limpa
$x_6 = v(s_2, \cdot, a_3)$	faz bolo sem ovo	bolo sem ovo, tigela limpa
$x_7 = v(s_1, \cdot, a_4)$	não faz bolo	não há bolo, tigela limpa
$x_8 = v(s_2, \cdot, a_4)$	não faz bolo	não há bolo, tigela limpa

Tabela 2 (cont.) Conseqüências.

Por definição, o conjunto dos atos é formado por todas as funções $f : S \to X$, onde $S = \{s_1, s_2\}$ e $X = \{x_1, ..., x_8\}$. Logo, existem $8^2 = 64$ atos. No entanto, muitos atos não fazem sentido. Por exemplo, o ato f definido por $f(s_1) = x_2 = v(s_2, \cdot, a_1)$ e $f(s_2) = x_3 = v(s_1, \cdot, a_2)$ não faz o menor sentido. Os atos que fazem sentido são os que correspondem a ações, conforme mostrado na Tabela 3.

Ação	Descrição	Ato
a_1	quebra o ovo na panela	$f_1(s_1) = x_1$; $f_1(s_2) = x_2$
a_2	um ovo bom é quebrado na tigela	$f_2(s_1) = x_3$; $f_2(s_2) = x_4$
a_3	faz bolo sem ovo	$f_3(s_1) = x_5$; $f_3(s_2) = x_6$
a_4	não faz bolo	$f_4(s_1) = x_7$; $f_4(s_2) = x_8$

Tabela 3. Atos e ações.

6.5 Observação final

A representação baseada em estados da Natureza tem uma importante desvantagem: ela pressupõe que os indivíduos sejam capazes de listar todas as situações que podem ocorrer (todos os estados da Natureza). Nos exemplos simples que apresentamos acima, isso pode ser feito, mas em muitas situações da vida real, essa é uma tarefa impossível. Considere por exemplo, a situação de um presidente que deve decidir entre declarar ou não uma guerra contra outro país. Será impossível descrever e até imaginar todas as contingências possíveis.

Gilboa e Schmeidler (1995) apresentaram uma alternativa para situações desse tipo, que eles chamaram de teoria de decisão baseada em casos. Este artigo originou toda uma literatura, que têm se tornado bastante profícua nos últimos anos. Não vamos, porém, descrever essa teoria. O leitor interessado pode consultar o artigo mencionado ou Gilboa e Schmeidler (2002).

Capítulo 7

Utilidade Esperada de von Neumann-Morgenstern

Na Parte I, tratamos escolhas em ambientes onde os resultados das decisões são perfeitamente conhecidos. Entretanto, em várias circunstâncias é natural imaginarmos que os resultados não sejam antecipados de forma precisa. A teoria econômica apresenta um grande número de exemplos em que isso é evidente: teoria dos mercados incompletos, jogos com informação incompleta, modelos estocásticos de crescimento econômico, dentre outras áreas. Em geral, as escolhas que tratam a ciência econômica envolvem consequências incertas no momento da tomada de decisão. A teoria moderna da escolha sob incerteza apresenta duas bases primordiais: a teoria da utilidade esperada com risco de von Neumann-Morgenstern (1944) e a teoria da utilidade esperada com incerteza de Savage(1954).

Nosso ponto de partida é a teoria de von Neumann-Morgenstern originalmente proposta na obra **Theory of Games and Economic Behavior**. Sua estrutura toma como primitivos um espaço de consequências, dado por loterias sobre um conjunto de resultados (prêmios), e uma relação de preferência sobre as consequências. Notemos que os objetos de escolhas são dados por distribuições de probabilidades objetivas (i.e., passíveis de comprovação empírica) sobre os prêmios e é o fato de termos as probabilidades dadas de maneira exógena que caracteriza uma situação de escolha sob risco.

Quando os prêmios são quantias monetárias podemos dizer algo mais sobre a natureza da função de utilidade que representa as preferências. Mais precisamente, podemos tratar os comportamentos de aversão, neutralidade e propensão ao risco. Sobre este tópico daremos apenas uma breve apresentação, o leitor poderá consultar Araújo (1983) para uma abordagem mais completa.

7.1 O conjunto de alternativas arriscadas

Vamos denotar por Z o conjunto de resultados ou prêmios: este conjunto, por exemplo, pode denotar o conjunto de cestas de consumo ou de quantias monetárias. Nesta exposição vamos tomar Z como sendo um conjunto finito de resultados ou prêmios. O espaço de escolhas é dado pelo conjunto de loterias sobre $Z = \{z_1, ..., z_n\}$, ou seja, o espaço de distribuições de probabilidade denotado por

$$X = \{x : Z \to [0,1] : \sum_{i=1}^{n} x(z_i) = 1\}$$

onde $x(z_i)$ denota a probabilidade de a loteria x entregar o prêmio z_i.

Exemplo: Seja $Z = \{z_1, z_2\}$, neste caso o conjunto X é dado pelo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por $\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 : x_2 = 1 - x_1\}$, em que x_i é a probabilidade de se obter o resultado z_i, $i = 1, 2$. Por exemplo, o lançamento de uma moeda honesta, onde se ocorrer cara se ganha z_1 e se ocorrer coroa se ganha z_2, é modelada simplesmente pelo elemento $(1/2, 1/2)$. □

Notemos que ao tratarmos o caso em que Z tem n elementos podemos indentificar o conjunto de loterias X com o simplex n-dimensional

$$\Delta^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

onde $p_i = x(z_i)$.

Podemos definir uma importante operação de composição de loterias

Definição 1. Sejam $\{x_k\}_{k=1}^K \subset X$ um conjunto com K loterias e um elemento $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)$ pertencente ao simplex K-dimensional Δ^{K-1}. Definimos a mistura das K loterias $\{x^k\}_{k=1}^K$ a partir de α como sendo a loteria

$$y \in X \text{ tal que } y(z_i) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x(z_i) \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}$$

Notemos que esta operação esta bem definida porque o simplex n-dimensional é um conjunto convexo.

Exemplo: Dado $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, sejam as loterias

$$x_1 = (1/2, 1/4, 1/4), x_2 = (0, 1/2, 1/2) \text{ e } x_3 = (1/4, 3/4, 0)$$

e o peso $\alpha = (1/2, 1/4, 1/4)$. Temos assim a mistura destas três loterias para o peso α dado pela loteria y igual a:

$$\begin{aligned} & 0.5(1/2, 1/4, 1/4) + 0.25(0, 1/2, 1/2) + 0.25(1/4, 3/4, 0) \\ = \; & (5/16, 7/16, 4/16) \end{aligned}$$

Neste caso a mistura ou loteria composta y nos entrega z_1 com probabilidade $5/16$, z_2 com probabilidade $7/16$ e z_3 com probabilidade $4/16$. $\square$

Observação: Um notação usualmente empregada para uma loteria x é dada por

$$x \equiv (z_1, x(z_1); ...; z_n, x(z_n)),$$

no exemplo anterior poderíamos escrever a loteria obtida y como

$$(z_1, 5/16;\ z_2, 7/16;\ z_3, 4/16)$$

7.2 Preferências sobre loterias

Agora vamos imaginar um tomador de decisões diante do espaço de escolha de loterias X. Como de costume, vamos tomar como primitivo uma relação binária $\succsim$ sobre X denotanto a preferência ou critério de escolha do consumidor. Notemos que quando tratamos do caso determinístico obtinhamos, sob determinadas condições, uma representação contínua sem uma forma específica *a priori*. A teoria de von Neumann-Morgenstern obtém uma forma particular para o funcional que representa a preferência: tal funcional calcula o valor esperado das utilidades dos prêmio, isto é, realiza uma soma das utilidades dos prêmios ponderada pelas probabilidades de cada um deles.

Os axiomas da teoria de von Neumann-Morgenstern são dados por:

(vN-M1) $\succsim$ é *completa* e *transitiva*;

(vN-M2) $\succsim$ satisfaz a seguinte condição de *continuidade*: Para todo $x, y, z \in X$

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \succsim z\}$$

$$\{\alpha \in [0,1] : z \succsim \alpha x + (1-\alpha)y\}$$

são subconjunto fechados de $[0,1]$.

(vN-M3) $\succsim$ satisfaz a *independência*: Dados $x, y, z \in X$ e $\alpha \in (0,1)$

$$x \succsim y \Leftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)z \succsim \alpha y + (1-\alpha)z$$

Notemos que os axiomas (vN-M1) e (vN-M2) implicam, pelo que já vimos em capítulos anteriores, na existência de uma representação contínua para a preferência. No contexto de loterias, a continuidade nos diz que *pequenas alterações* nas probabilidades não alteram a natureza da ordem entre duas loterias.

O axioma que impõe, como veremos, uma importante estrutura à representação de von Neumann-Morgenstern é o axioma de independência (vN-M3). Este nos diz que se nós misturarmos as loterias x e y com uma terceira z então a preferência entre estas duas misturas ($\alpha x + (1-\alpha)z$ e $\alpha y + (1-\alpha)z$) é totalmente determinada pela preferência dada entre x e y, independentemente do peso α e da terceira loteria z adotada.

Em um dos exercícios ao fim deste capítulo pedimos que o leitor mostre que:

Proposição 2. Se uma preferência $\succsim$ sobre X satisfaz o axioma de independência então para cada $\alpha \in (0,1)$ e

$x, y, z, w \in X$ vale que[1]:

(a) $x \succ y$ se, e só se, $\alpha x + (1-\alpha)z \succ \alpha y + (1-\alpha)z$;

(b) $x \sim y$ se, e só se, $\alpha x + (1-\alpha)z \sim \alpha y + (1-\alpha)z$;

(c) Se $x \succ y$ e $z \succ w$ então $\alpha x + (1-\alpha)z \succ \alpha y + (1-\alpha)w$.

Vamos denotar por $\delta_{\{z\}} \in X$ a loteria que entrega o prêmio $z \in Z$ com probabidade 1.

A principal característica da representação de von Neumann - Morgenstern é a *linearidade nas probabilidades.* Esta propriedade diz que a utilidade de uma loteria obtida a partir de uma combinação convexa de K loterias (i.e., um loteria composta) é igual a combinação convexa, com mesmos pesos, das utilidades de cada loteria utilizada na mistura.

Definição 3. Uma funcional de utilidade $U : X \to \mathbb{R}$ apresenta a forma de **utilidade esperada** se existe um indíce de utilidade sobre os prêmios $u : Z \to \mathbb{R}$ tal que para toda loteria $x \in X$:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} u(z_i)x(z_i)$$

Este tipo de funcional de utilidade é chamado de **função de utilidade de von Neumann-Morgenstern (v.N-M)**. Notemos que para um funcional U de vN-M, para todo $z \in Z$:

$$U(\delta_{\{z\}}) = u(z)$$

ou seja, U é uma extensão de u.

Proposição 4. Uma funcional de utilidade $U : X \to \mathbb{R}$ apresenta a forma de **utilidade esperada** se, e só se,

[1] Lembrando que os componentes simétricos e assimétricos de $\succsim$ são denotados por $\sim$ e $\succ$:

$$\begin{aligned} \sim \;&:= \{(x, y) \in \succsim :\ (y, x) \in \succsim\} \\ \succ \;&:= \{(x, y) \in \succsim :\ (y, x) \notin \succsim\} \end{aligned}$$

for linear nas probabilidades, ou seja, dados $\{x_k\}_{k=1}^{K} \subset X$ e $\alpha \in \Delta^{K-1}$:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(x_k)$$

Demonstração: Necessidade: Seja $x \in X$ e escrevendo $x = (z_1, \alpha_1; ...; z_n, \alpha_n)$ temos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\{z_i\}}$$

ou seja, toda loteria pode ser escrita como uma combinação convexa das loterias degeneradas com pesos dados pelas probabilidades atribuídas por x.

Logo,

$$U(x) = U\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\{z_i\}}\right) = \sum_{i=1}^{n} u(z_i)\alpha_i$$

Suficiência: dados $\{x_k\}_{k=1}^{K} \subset X$ e $\alpha \in \Delta^{K-1}$ seja $x' = \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k x_k$, assim $x'(z_i) = \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k x_k(z_i)$ para todo $i \in (1, ...n\}$:

$$U(x') = U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k\right) = \sum_{i=1}^{n} u(z_i)\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k(z_i)\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{n} u(z_i) x_k(z_i)\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U\left(x_k\right)$$

$\square$

Dada um funcional de utilidade U sobre X a valores reais, uma tranformação afim positiva de U é quaquer funcional $V : X \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in X$

$$V(x) = aU(x) + b, \text{ onde } a > 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Notemos que partindo de um funcional $U : X \to \mathbb{R}$ de vN-M, se definirmos uma preferência $\succsim_U$ sobre X dada por:

$$x \succsim_U y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$$

então $\succsim_U$ é uma preferência racional (completa e transitiva) cumprindo os axiomas de continuidade e independência[2]. Em particular, destacamos que o axioma de independência é uma *condição necessária* para a representação de vN-M sobre X.

Vamos agora tratar do teorema clássico de von Neumann Morgenstern:

Teorema 5. Seja $\succsim$ uma relação binária sobre X, são equivalentes:

(i) A relação binária $\succsim$ cumpre os axiomas (vN-M1), (vN-M2) e (vN-M3);

(ii) A relação binária $\succsim$ admite uma representação de vN-M $U : X \to \mathbb{R}$, ou seja, existe um indíce de utilidade $u : Z \to \mathbb{R}$ tal que para todo par $x, y \in X$:

$$x \succsim y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u(z_i)x(z_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u(z_i)y(z_i)$$

Demonstração: $(ii) \Rightarrow (i)$: como já mencionado, deixamos como exercício.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Inicialmente notemos que como o conjunto de resultados Z é finito, os axiomas (vN-M1) e (vN-M3) garatem a existência de um pior e uma melhor loteria para a preferência $\succsim$: isto é, existem $\overline{x}$ e $\underline{x} \in X$ tais que $\overline{x} \succsim x \succsim \underline{x}$, para todo $x \in X$[3].

Procedemos então em 4 passos:

(passo 1): Se $x \succ y$ então para todo $\lambda \in (0, 1)$: $x \succ \lambda x + (1 - \lambda)y$ e $\lambda x + (1 - \lambda)y \succ y$.

[2] Deixamos como exercício para o leitor a prova deste fato.

[3] Por este dois axiomas, procedendo por indução sobre o número de elementos em Z, existem $b, w \in Z$ tais que $\delta_{\{b\}} = \overline{x}$ e $\delta_{\{w\}} = \underline{x}$. De outra forma, a existência de $\overline{x}$ e $\underline{x}$ pode ser derivada dos axiomas (vN-M1) e (vN-M2).

Supondo que exista $\lambda \in (0,1)$ onde $\lambda x + (1-\lambda)y \succsim x$. Denotando por $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, vamos considerar os conjuntos

$$A = \{\alpha \in [0,1] : \alpha z + (1-\alpha)y \succsim x\}$$

e

$$B = \{\alpha \in [0,1] : x \succsim \alpha z + (1-\alpha)y\}$$

que, pela continuidade(vN-M2), são fechados. Como $1 \in A$, $0 \in B$ e a completude garante que $A \cup B = [0,1]$, sendo $[0,1]$ um conexo temos que $A \cap B \neq \emptyset$; ou seja, existe $\mu \in [0,1]$ em que $\mu z + (1-\mu)y \sim x$, ou seja:

$$(\mu\lambda)x + [1-(\mu\lambda)]y \sim x$$

seja o compacto não-vazio $C = \{\mu' \in [0,1] : x \sim (\mu'\lambda)x + [1-(\mu'\lambda)]y\}$, logo temos $\mu_0 = min\{\mu' : \mu' \in C\} > 0$ e $x \sim (\mu_0\lambda)x + [1-(\mu_0\lambda)]y$. Pelo axioma de independência (vN-M3):

$$\lambda x + (1-\lambda)y \sim \lambda\left[\mu_0\lambda x + (1-\mu_0\lambda)y\right] + (1-\lambda)y$$

ou seja,

$$z \sim \mu_0\lambda^2 x + (1-\mu_0\lambda^2)y$$

como $\mu z + (1-\mu)y \sim x$:

$$x \sim \mu\left(\mu_0\lambda^2 x + (1-\mu_0\lambda^2)y\right) + (1-\mu)y$$

portanto,

$$x \sim \mu\mu_0\lambda^2 x + (1-\mu\mu_0\lambda^2)y$$

e assim $\mu\mu_0\lambda \in C$ e então $0 < \mu_0 \leq \mu\mu_0\lambda \Rightarrow 1 < (1/\lambda) < \mu$; uma contradição. A outra parte segue por raciocínio análogo.

(passo 2): Se $x \succ y$ então

$$1 \geq \lambda > \mu \geq 0 \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succ \mu x + (1-\mu)y$$

Pelo passo 1, $\lambda x + (1-\lambda)y \succ y$ e como $(\mu/\lambda) < 1$, novamente pelo passo 1

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succ (\mu/\lambda)(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\mu/\lambda)y = \mu x + (1-\mu)y$$

Para a recíproca, se $\lambda \leq \mu$ no caso em que $\lambda = \mu$ teríamos que $\lambda x + (1-\lambda)y \sim \mu x + (1-\mu)y$, uma contradição. Sendo $\lambda < \mu$, pelo argumento feito para a primeira parte do passo 2, teríamos que $\mu x + (1-\mu)y \succ \lambda x + (1-\lambda)y$, onde obtemos novamente uma contradição.

(passo 3) Para todo $x \in X$ existe um único $\lambda_x \in [0,1]$ tal que

$$x \sim \lambda_x \overline{x} + (1-\lambda_x)\underline{x}.$$

Vamos considerar os conjuntos

$$A = \{\alpha \in [0,1] : \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x} \succsim x\}$$

e

$$B = \{\alpha \in [0,1] : x \succsim \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x}\}$$

que, pela continuidade(vN-M2), são fechados. Como $1 \in A$, $0 \in B$ e a completude garante que $A \cup B = [0,1]$, sendo $[0,1]$ um conexo temos que $A \cap B \neq \emptyset$; ou seja, existe $\lambda^* \in [0,1]$ em que $\lambda^*\overline{x} + (1-\lambda^*)\underline{x} \sim x$.

Para a unicidade: supondo que exista $\lambda' \in [0,1]$ onde, sem perda de generalidade, $\lambda' < \lambda^*$ e $\lambda'\overline{x} + (1-\lambda')\underline{x} \sim x$. Usando o passo 2 chegamos a seguinte contradição:

$$x \sim \lambda^*\overline{x} + (1-\lambda^*)\underline{x} \succ \lambda'\overline{x} + (1-\lambda')\underline{x} \sim x$$

(passo 4)Definindo $U : X \to \mathbb{R}$ fazendo para todo $x \in X$

$$U(x) = \lambda_x$$

temos que U é uma utilidade esperada para $\succsim$.

Inicialmente, mostremos que U representa a preferência $\succsim$: De fato, sejam $x, y \in X$ tais que $x \succ y \Leftrightarrow \lambda_x\overline{x} + (1-\lambda_x)\underline{x} \succ \lambda_y\overline{x} + (1-\lambda_y)\underline{x} \Leftrightarrow U(x) = \lambda_x > \lambda_y = U(y)$, onde esta última passagem segue do passo 2.

Agora mostremos que U cumpre a propriedade de utilidade esperada: Seja $x = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \delta_{\{z_k\}}$, onde $\alpha_k = x(z_k)$. Notemos que dadas duas loterias $x, y \in X$ e $\alpha \in [0,1]$ temos pelo axioma de independência (vN-M3):

$$\alpha x + (1-\alpha)y \sim \alpha[\lambda_x\overline{x} + (1-\lambda_x)\underline{x}] + (1-\alpha)[\lambda_y\overline{x} + (1-\lambda_y)\underline{x}] \equiv$$

$$\equiv (\alpha\lambda_x + (1-\alpha)\lambda_y)\overline{x} + (1-(\alpha\lambda_x + (1-\alpha)\lambda_y)\underline{x}$$

logo $\lambda_{\alpha x+(1-\alpha)y} = \alpha\lambda_x + (1-\alpha)\lambda_y$, ou seja,

$U(\alpha x+(1-\alpha)y) = \alpha\lambda_x+(1-\alpha)\lambda_y = U(\alpha x+(1-\alpha)y) = \alpha U(x)+(1-\alpha)U(y)$

finalmente, por indução sobre k, podemos mostrar que

$$U(x) = U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\delta_{\{z_k\}}\right) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k U(\delta_{\{z_k\}}) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k\lambda_{\delta_{\{z_k\}}}$$

e assim temos o indíce $u : Z \to \mathbb{R}$ dado por $u(z) = \lambda_{\delta_{\{z\}}}$. E então escrevemos

$$U(x) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k u(z_k)$$

$\square$

Corolário 6. Sob as hipóteses do teorema de vN-M, se U e V são representações de vN-M para $\succsim$ então V é uma transformação afim positiva de U.

Demonstração: Seja $x \in X$ de tal modo que $x \sim \lambda_x\overline{x} + (1-\lambda_x)\underline{x}$, logo $U(x) = \lambda_x U(\overline{x}) + (1-\lambda_x)U(\underline{x})$ e portanto

$$\lambda_x = \frac{U(x) - U(\underline{x})}{U(\overline{x}) - U(\underline{x})}$$

no caso em que $U(\overline{x}) - U(\underline{x}) > 0$. Quando $U(\overline{x}) = U(\underline{x})$, temos que U é constante e o resultado é trivial.

Agora, como $V(x) = V(\lambda_x\overline{x} + (1-\lambda_x)\underline{x}) = \lambda_x V(\overline{x}) + (1-\lambda_x)V(\underline{x}) = \lambda_x\left(V(\overline{x}) - V(\underline{x})\right) + V(\underline{x})$, substituindo λ_x a partir da expressão acima:

$$V(x) = \left(\frac{U(x) - U(\underline{x})}{U(\overline{x}) - U(\underline{x})}\right)\left(V(\overline{x}) - V(\underline{x})\right) + V(\underline{x})$$

e então

$$V(x) = \left(\frac{V(\overline{x}) - V(\underline{x})}{U(\overline{x}) - U(\underline{x})}\right)U(x) - U(\underline{x})\left(\frac{V(\overline{x}) - V(\underline{x})}{U(\overline{x}) - U(\underline{x})}\right) + V(\underline{x})$$

e temos então $a = \left(\frac{V(\overline{x})-V(\underline{x})}{U(\overline{x})-U(\underline{x})}\right) > 0$ e $b = V(\underline{x}) - U(\underline{x})\left(\frac{V(\overline{x})-V(\underline{x})}{U(\overline{x})-U(\underline{x})}\right) \in \mathbb{R}$. $\square$

7.3 Atitudes frente ao risco.

Vamos tomar agora o conjunto de prêmios Z como sendo o conjunto dos números reais positivos. A escolha deste conjunto serve para denotar quantias monetárias prometidas pelas loterias. Daí é natural não tomarmos um conjunto finito de prêmios como fizemos na seção anterior. Para podermos evitar algumas complicações que implicariam no uso de certos intrumentais que não são pré-requisitos para esta leitura, vamos tomar como espaço de escolhas o conjunto de loterias (monetárias) simples, como definiremos a seguir.

Dada $x : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ definimos o suporte de x como

$$supp[x] = fecho\{z \in \mathbb{R}_+ : x(z) \neq 0\},$$

notemos que se $supp[x]$ é finito então $supp[x] = \{z \in \mathbb{R}_+ : x(z) \neq 0\}$.

O conjunto de loterias simples é dado por:

$$X = \{x : \mathbb{R}_+ \to [0,1] / \, supp[x] \text{ é finito e } \sum_{z \in supp[x]} x(z) = 1\}$$

ou seja, o conjunto de escolhas é dado pela coleção de probabilidades que dão com probabilidade positiva um número finito de prêmios monetários.

Neste caso o teorema de von Neumann-Morgensten também é válido nos fornecendo uma utilidade esperada da forma

$$U(x) = \sum_{z \in supp[x]} u(z)x(z)$$

Seguindo notação usual na literatura, chamamos um loteria monetária simples de um *jogo simples.*

Um caso que em princípio descartamos, mas que não implica em muitas complicações, é quando $supp[x]$ é enumerável. Neste caso temos $supp[x] = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e o funcional de utilidade esperada toma a forma:

$$U(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(z_n)x(z_n)$$

Antes de introduzirmos a noção de aversão ao risco, vejamos um exemplo conhecido por Paradoxo de São Petersburgo. Um jogo propõe a seguinte aposta: joga-se uma moeda até que se obtenha a face cara, em que a chance de se obter cara é igual a $p \in (0,1)$ em cada lançamento. Se a face cara sair no j-ésimo lançamento o jogo paga 2^j unidades monetárias. Logo o valor esperado do jogo, $VEJ_{(p)}$, é igual a:

$$VEJ_{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j p(1-p)^{j-1}$$

por exemplo, se a moeda for honesta (i.e, $p = 1/2$), temos $VEJ_{(1/2)} = \infty$. Assim, se um indivíduo olha simplesmente para o valor esperado do jogo[4], este prefere participar deste jogo a qualquer quantia oferecida, o que é um contrasenso. Notemos, contudo, que se seu comportamento for descrito por uma utilidade esperada com índice dado por $u(z) = ln(z)$, a utilidade esperada do jogo de São Petersburgo (denotado por x_{sp}) é dada por[5]:

$$\begin{aligned} U(x_{sp}) &= \sum_{j=1}^{\infty} ln(2^j)p(1-p)^{j-1} = \\ pln(2)\sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^{j-1} &= ln(2)/p \end{aligned}$$

Neste caso temos que o indivíduo é indiferente entre uma loteria que entregue $2^{1/p}$, com probabilidade um, e o jogo de São Petersburgo já que $u(2^{1/p}) = ln(2^{1/p}) = U(x_{sp})$. Este resultado ilustra a aversão ao risco, conceito que captura uma tendência comportamental de se evitar apostas com valores muito díspares.

Para caracterizarmos a atitude frente ao risco, vamos tomar utilidades esperadas caracterizadas por índices $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que sejam duas vezes diferenciáveis com sua primeira derivada satisfazendo $u' > 0$.

---

[4] Isso é o mesmo que dizer que o indivíduo tem seu comportamento caracterizado por uma utilidade esperada com índice de utilidade dado pela função identidade. Veremos que isso caracteriza neutralidade ao risco.

[5] A útima passagem segue ao observamos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^{j-1} = \frac{d(\sum(1-p)^j)}{d(1-p)}$$

Dado um jogo $x \in X$, vamos usar a notação

$$U(x) = E_x[u(z)]$$

para denotar a utilidade esperada do jogo x para um indivíduo com índice u.

Um jogo $x \in X$ é dito justo se $E_x \equiv E_x[I_d(z)] = 0$, onde I_d denota a função identidade.

Notemos que caso em que $supp[x] = \{a, b\}$, podemos escrever $x = [a,\, p;\, b\,, 1-p]$ com $pa + (1-p)b = 0$[6].

Definição 7. Seja $\succsim$ a preferência de um indivíduo representável por uma utilidade esperada com índice u. Dizemos que o indivíduo é:

(a) avesso ao risco se preferir não participar de jogos justos;

(b) neutro ao risco se for indiferente entre participar ou não de jogos justos;

(c) propenso ao risco se preferir participar de jogos justos

Suponha que $\omega \in \mathbb{R}_+$ seja a riqueza inicial do indivíduo, da definição anterior temos que um indivíduo é avesso ao risco se, dado um jogo justo x com $supp[x] = \{a, b\}$:

$$\delta_\omega \succsim \omega \oplus x$$

onde, $\omega \oplus x \equiv [\omega + a,\, p;\, \omega + b, (1-p)]$. Logo

$$u(\omega) \geq E_{(\omega \oplus x)}[u(z)] = pu(\omega + a) + (1-p)u(\omega + b)$$

como $pa + (1-p)b = 0$ e $p\omega + (1-p)\omega = \omega$, temos que

$$u(p(\omega + a) + (1-p)(\omega + b)) \geq pu(\omega + a) + (1-p)u(\omega + b)$$

ou seja, u é côncava.

De fato, a proposição a seguir nos dá uma caracterização completa da atitude frente ao risco a partir do índice de utilidade u:

[6] Obviamente, neste caso, $a > 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Proposição 8. Um indivíduo é:

(a) avesso ao risco se, e só se, u é côncava;

(b) neutro ao risco se, e só se, u é linear (portanto, spg, u é a identidade);

(c) propenso ao risco se, e só se, u é convexa.

Demonstração: (a) Já vimos que se o indivíduo é avesso ao risco então seu índice de utilidade é côncavo. Para a recíproca, dado um nível de riqueza $\omega > 0$ e um jogo justo $x = [a, p; b, 1-p]$ tal que, spg, $\omega + a > \omega > \omega + b$. Daí, pela concavidade:

$$\begin{aligned} u(\omega) &= u(p(\omega+a)+(1-p)(\omega+b)) \geq pu(\omega+a)+(1-p)u(\omega+b) \\ &= E_{(\omega \oplus x)}[u(z)] \end{aligned}$$

ou seja, $\delta_\omega \succsim \omega \oplus x$.

Os demais itens seguem por argumentos análogos. □

Dados dois indivíduos caracterizados por utilidades esperadas, uma maneira de compararmos que indivíduo é mais avesso ao risco que outro é dado pelo seguinte critério:

Definição 9. O coeficiente de aversão ao risco de Arrow-Pratt em $z > 0$ é dado por

$$r(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)}$$

Definição 10. Dizemos que um indivíduo com utilidade sobre os prêmios u_1 é tão avesso ao risco quanto um indivíduo com utilidade sobre os prêmios u_2 quando $r_1 \geq r_2$.

Pela caracterização que vimos da atitude frente ao risco a partir do índice de utilidade, e lembrando que u duas vezes diferenciável é côncava se, e só se, $u'' \leq 0$, temos que um índivíduo é avesso ao risco se, e só se, $r \geq 0$. Da mesma maneira, podemos ver que neutralidade ao risco é equivalente a r ser identicamente nula e propensão ao risco equivale a $r \leq 0$.

Dada uma loteria $x \in X$, seu equivalente certo é um prêmio $z \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\delta_z \sim x$$

ou seja, $u(z) = E_x[u(z)]$. No exemplo do Paradoxo de São Petersburg, quando tomamos o índice de utilidade dado por $ln(z)$, obtivemos que o equivalente certo do jogo era dado por $2^{1/p}$. Vamos denotar o equivalente certo de uma loteria $x \in X$ por c_x.

Notemos que pelas hipóteses aqui adotadas, temos que $c_x = u^{-1}(E_x[u(z)])$. Mais ainda, a existência de um equivalente certo é garantida simplesmente pela continuidade de $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, já que o teorema do valor intermediário garante a existência de algum z^* tal que $u(z^*) = E_x[u(z)] \in \left[\min_{z \in supp[x]} u(z), \max_{z \in supp[x]} u(z)\right]$.

Notemos que um indívíduo avesso ao risco pode ser caracterizado por

$$\delta_{E_x} \succsim x$$

já que, pela desiguadade de Jensen para funções côncavas (veja James (1996), página 116)

$$E_x[u(z)] \leq u(E_x),$$

lembrando que E_x é o valor esperado do jogo, i.e, $E_x = \sum_{z \in supp[x]} zx(z)$. Como $u' > 0$ implica que $(u^{-1})' > 0$ temos que $c_x = u^{-1}(E_x[u(z)]) \leq E_x$. A diferença $E_x - c_x$ representa um prêmio ao risco.

De outra forma, dado ω um nível de riqueza inicial e um jogo justo $x \in X$, o prêmio ao risco da loteria x dada uma riqueza ω, denotado por $\pi(\omega, x)$, é definido implicitamente como:

$$u(\omega - \pi(\omega, x)) = E[u(x \oplus \omega)]$$

Sendo u crescente e estritamente côncava temos que $\pi(\omega, x) = \omega - u^{-1}(E[u(x \oplus \omega)]) > 0$, e então $\pi(\omega, x)$ pode ser interpretado como o prêmio que o indivíduo esta disposto a pagar para ficar com o mesmo nível de utilidade gerado pelo jogo representado por $x \oplus \omega$.

Exemplo: Vejamos um exemplo em que aplicamos as noções desenvolvidas pela teoria de vN-M.Imaginemos um indivíduo que tem a posse de um bem cuja as estatísticas indiquem uma probabilidade p de que este bem no futuro tenha um valor igual a z e uma probabilidade igual a $1 - p$ de que seu valor no futuro seja igual a z', com $z > z'$. Existe uma companhia de seguros que oferece uma proteção contra a contingência ruim: se o consumidor paga um prêmio igual a λ, a companhia de seguros irá pagar uma quantia igual a Δ se a contingência ruim ocorrer. O consumidor pode pagar um cobertura $a\lambda$ e obter $a\Delta$ se ocorrer a contingência ruim. Vamos supor que este indivíduo satisfaz os pressusposto de vN-M, mais ainda, que seu comportamento possa ser descrito por um índice de utilidade que satisfaça as hipóteses de diferenciabilidade dados no início desta seção, com $u^{''} < 0$. Assim o problema deste indivíduo é dado por:

$$\underset{a \in \mathbb{R}}{max}\{pu(z - a\lambda) + (1-p)u(z' + a\Delta - a\lambda)\}$$

não é difícil ver que a condição de primeira ordem para este problema é dado por

$$p\lambda u'(z - a\lambda) = (1-p)(\Delta - \lambda)u'(z - (1-a)\Delta - a\lambda)$$

Como u é estritamente côncava, a condição de primeira ordem é necessária e suficiente para se obter a solução.O contrato de seguro é dito *atuariamente equitativo* se o valor esperado da indenização $(1-p)\Delta$ for igual ao prêmio λ. Ou seja, $p\lambda = (1-p)(\Delta - \lambda)$ e assim se o contrato for *atuariamente equitativo* temos que

$$u'(z - a\lambda) = u'(z - (1-a)\Delta - a\lambda)$$

o que implica que $a = 1$, ou seja, uma cobertura total.O contrato é *atuariamente não-equitativo* se a indenização esperada for menor que o prêmio. Seja $\mu = p\lambda/(1-p)(\Delta - \lambda)$ e assim o contrato é *atuariamente não-equitativo* se $\mu > 1$. Logo, nesta condição

$$\mu u'(z - a\lambda) = u'(z - (1-a)\Delta - a\lambda)$$

e assim qualquer solução deverá respeita o fato de que

$$u'(z - a\lambda) < u'(z - (1-a)\Delta - a\lambda)$$

e como u' é decrescente, a solução deverá respeita a seguinte desigualdade:

$$z - a\lambda > z - (1-a)\Delta - a\lambda$$

ou seja, na solução deveremos ter $a < 1$, ou seja, uma cobertura parcial. $\square$

7.4 Exercícios

1. Dado os axiomas de vN-M e supondo que o conjunto de prêmios é finito, mostre que existe uma pior e uma melhor loteria de duas maneiras distintas.

2. Adapte a prova de existência de utilidade esperada para o contexto em que as loterias associem probabilidade positiva apenas para um número finito de prêmios, ou seja, o conjunto Z é arbitrário mas

$$\begin{aligned} X &= \{x : Z \to [0,1] / \text{ para cada } x \text{ existe} \\ \widetilde{Z}_x &\subset Z \text{ finito onde} \sum_{z \in \widetilde{Z}_x} x(z) = 1\} \end{aligned}$$

3. Generalize o resultado anterior para o caso em que

$$\begin{aligned} X &= \{x : Z \to [0,1] / \text{ para cada } x \\ \text{existe } \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ onde} \sum_{n=1}^{\infty} x(z_n) &= 1\} \end{aligned}$$

4. Considere $Z = \{z_1, z_2\}$. Logo cada loteria em $X = \Delta_+^{2-1}$ pode ser escrita como uma soma ponderada de loterias degeneradas:

$$x = \alpha\delta_{z_1} + (1-\alpha)\delta_{z_2}$$

(a) Se $U(x) = \alpha^2$, U é uma utilidade esperada? Tomando $\succsim_U$ sobre o espaço de loterias X, esta preferência cumpre os axiomas de vN-M? Obtenha uma representação de vN-M em caso positivo.

(b) Seja V uma função sobre X definida como

$$V(x) = [\alpha - (1/2)]^2 ,$$

Existe utilidade esperada para a preferência induzida $\succsim_V$?

5. Considere duas loterias dadas por

$$x = (10, 2/3;\ 20, 1/3) e y = (5, 1/3;\ 15, 5/9;\ 30, 1/9).$$

Mostre que qualquer indivíduo avesso ao risco considera a loteria x tão boa quanto a loteria y.

6. Supondo $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ e fixando uma preferência $\succsim$ sobre o conjunto de loterias X que cumpre os axiomas de vN-M; sabendo que $\delta_{z_1} \succ \delta_{z_2} \succ \delta_{z_3}$, como é possível saber a ordenação entre todas a loterias a partir das loterias degeneradas? Esboce como ficam as curvas de indiferenças neste caso e destaque a direção de aumento de satisfação.

7. Considere dois agentes que apresentem comportamentos consistentes com os axiomas de vN-M e apresentem utilidades sobre o espaço de prêmios $\mathbb{R}_+$ que sejam duas vezes diferenciáveis com $u' > 0$. Sendo I um intervalo aberto em $\mathbb{R}_+$, mostre que são equivalentes:

(a) Para todo $z \in I$, $r_1(z) \geq r_2(z)$

(b) Para todo $\omega \in I$ e para todo jogo justo $x \in X$ tal que[7] $supp[x \oplus z] \in I$

$$\pi_1(\omega, x) \geq \pi_1(\omega, x)$$

Dica: para mostrar que $(a) \Rightarrow (b)$, prove inicialmente que a hipótese implica que a composição $u_1 o\, u_2^{-1} : u_2(I) \rightarrow \mathbb{R}$ define uma função côncava, sendo que para isso é necessário utilizar o Teorema da Função Inversa em u_2 e o fato de $ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ser uma função estritamente crescente. Em seguida aplique a deseguidade de Jensen já utilizada no texto.

[7] Notemos que dado um prêmios $\widetilde{z} \in \mathbb{R}_+$ e loteria $x \in X$, a loteria $x \oplus z$ satisfaz:

$$supp[x \oplus \widetilde{z}] = \{z + \widetilde{z} : z \in supp[x]\}$$

e $x(z + \widetilde{z}) = x(z)$.

Capítulo 8

Teoria de Savage

A teoria de von Neumann-Morgenstern apresenta como maior alvo de críticas em seus fundamentos a noção de probabilidades objetivas. A existência de mecanismos randômicos passíveis de comprovação empírica não são naturais em virtude da natureza singular dos fenômenos econômicos, ou seja, as escolhas em geral não estão sujeitas a aleatoriedades conhecidas pelo tomador de decisões como ocorre, por exemplo, quando se joga uma moeda ou se roda uma roleta.

Neste sentido, em geral, os problemas econômicos envolvem tomadas de decisões sobre incerteza ao invés de risco, isto é, situações onde não temos probabilidades dadas de maneira exógena. A abordagem realizada por Savage (1954), sobre o problema da escolha num contexto puramente subjetivo, apresenta um importantíssimo resultado para a teoria econômica ao fundamentar axiomaticamente uma representação de preferências a partir da existência de um índice de utilidade, que capta os gostos do tomador de decisões, e de uma probabilidade subjetiva, que capta as crenças do tomador de decisões.

O contexto tratado por Savage envolve um conjunto de *estados da natureza* S, um conjunto de *consequências* X e um conjunto de *atos* $\mathcal{F}$ consistinto de todas as funções de S em X. A interpretação é que, quando o verdadeiro estado da natureza $s \in S$ não é conhecido, a preferência do tomador de decisões sobre os atos dependem tanto das consequências que este ato pode implicar em cada estado quanto da crença deste sobre que estado da natureza deverá ocorrer. Savage mostrou que, dado um conjunto de axiomas com respeito a racionalidade da preferência de um indivíduo, existe uma única medida de probabilidade μ (finitamente aditiva) sobre a família de subconjuntos de S e um único (a menos de uma transformação afim positiva) índice de utilidade u sobre as consequências tal que um ato f é fracamente preferível ao ato g se, e somente se, o valor esperado de uof para μ é maior ou igual ao valor esperadode uog para μ. Um requerimento para o resultado original de Savage é que o conjunto S seja infinito e daí temos a utilização do instrumental da teoria da medida (finitamente aditiva). Em nossa exposição vamos considerar um tramento alternativo em que tenhamos o conjunto de estados da natureza S sendo finito. Vamos apresentar a abordagem realizada por Gul (1992) para se obter o teorema de representação de Savage com um número finito de estados. Um ponto importante desta abordagem é apresentar um conjunto de axiomas que dispensem a necessidade de um espaço de estados infinito.

8.1 Elementos básicos e axiomas comportamentais.

Seja S um conjunto finito denotando os estados da natureza, em que cada $s \in S$ representa uma descrição da resolução final de qualquer incerteza (relevante). Por exemplo, se imaginamos uma corrida de cavalos, cada s representa uma descrição da ordem de chegada dos cavalos e S é o conjunto de todas as ordem de chegada possíveis. Para completar este exemplo de maneira *um pouco exagerada*, desconsideramos a possibilidade de uma guerra se iniciar durante a corrida e afetar a competição, ou seja, consideramos esta incerteza irrelevante. A família de eventos é dada pela coleção de todos os subconjuntos de S denotada por 2^S.

Definição 1. Uma probabilidade[1] sobre S é qualquer aplicação:

$$\mu : 2^S \to [0,1]$$

tal que

[1] O termo medida de probabilidade também é usualmente adotado na literatura. No caso geral, a abordagem de Savage exige apenas aditividade sobre uniões finitas de eventos disjuntos.

(i) $\mu(S) = 1$;
(ii) (Aditividade) Se $E \cap F = \emptyset$ então $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Tomamos o conjunto de consequências X ,como sendo um subconjunto da reta dado pelo intervalo fechado e não-degenerado $[m, M]$, e $\mathcal{F}$ a família de todas as funções de S em X, isto é:

$$\mathcal{F} = X^S$$

Dado um evento $E \subset S$, escrevemos $f\mid_E = g\mid_E$ para denotar que $f(s) = g(s)$ para todo $s \in E$.

Seja $\succsim$ uma relação binária sobre $\mathcal{F}$, o primeiro axioma é dado pelo clássico:

(S-G 1): $\succsim$ é completa e transitiva;

Fixada nossa preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{F}$, podemos definir para a família de subconjunto 2^S:

Definição 2. Um evento E é dito $\succsim$**-nulo** quando: dados $f, g \in \mathcal{F}$, se $f\mid_{E^c} = g\mid_{E^c}$ então $f \sim g$. Um estado da natureza s é dito $\succsim$**-nulo** se o conjunto unitário $\{s\}$ for $\succsim$**-nulo**.

Notemos que pelo axioma (S-G 1), um evento E é $\succsim$-nulo se, e somente se, todo estado $s \in E$ for $\succsim$-nulo.

Agora, dados $f, g \in \mathcal{F}$ e $E \subset S$ definimos o ato $fEg \in \mathcal{F}$ como sendo

$$fEg(s) = \begin{cases} f(s)\, se\, s \in E \\ g(s)\, se\, s \in E^c \end{cases}$$

Podemos identificar cada $x \in X$ com o ato constante (ou totalmente seguro) que em cada estado $s \in S$ entrega o próprio x; e, por abuso de notação, vamos denotá-lo por x.

A hipótese a seguir é central para a representação que vamos obter e para elucidar a apresentação vamos supor, por um momento, que exista um mecanismo randômico exógeno. Tomando um caso em que para algum trio $x, y, z \in [m, M]$ a consequência x é indiferente ao ato que entrega $(y, p;\ z, 1-p)$. Para um agente maximizador de utilidade esperada, isso é equivalente a

$$u(x) = pu(y) + (1-p)u(z),$$

embora não tenhamos mecanismo randômicos exógenos como primitivos, podemos pensar que se $x \sim yEz$ então, sendo $prob(A)$ a probabilidade da ocorrência do evento A :

$$u(x) = prob(E)u(y) + prob(E^c)u(z)$$

segue então o seguinte axioma:

(S-G 2): Se para todo $s \in S$ e algum E não $\succsim$-nulo

$$f'(s) \sim f(s)Eg(s) \text{ e } g'(s) \sim g(s)Ef(s)$$

então

$$f \succ g \Leftrightarrow f' \succ g'$$

O axioma (S-G 2) é análogo ao axioma de independência tratado no contexto de von Neumann-Morgenstern. Tomando atos arbitrários f, g e algum evento E não $\succsim$-nulo e considerando, se possível, um ato f' construído a partir de f, g e E tendo como requerimento que o resultado de f' em qualquer estado s é indiferente (como um ato constante) ao ato que entrega $f(s)$ se ocorrer E e entrega $g(s)$ se ocorrer E^c, temos que ao proceder analogamente na construção, se possível, de um ato g', então f é estritamente preferível a g se, e só se, f' for estritamente preferível a g. Notemos que este axioma não impõe que f' e g' sempre possam ser construídos, somente diz que se pudermos contruí-los então temos a propriedade descrita acima.

O terceiro axioma segue como:

(S-G 3): Se $x > y$ então $x \succ y$. Ainda, existe um evento $E^* \subset S$ não $\succsim$-nulo tal que para todo par $x, y \in X$:

$$xE^*y \sim yE^*x$$

A primeira parte impõe monotonicidade sobre os atos constantes. A segunda parte nos diz que é possível particionar S em dois eventos *igualmente prováveis*. Um exemplo, no contexo de probabilidades objetivas, é o lançamento de uma moeda honesta, pensando em $x = 1$ e $y = -1$.

Notemos que, como X é um subconjunto da reta, podemos ver $\mathcal{F}$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^N$, onde N é a cardinalidade de S. Daí, dizemos que um subconjunto $G \subset \mathcal{F}$ é fechado se for um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^N$. Neste sentido apresentamos um axioma de continuidade *à la* Debreu:

(S-G 4): Para todo $f \in F$, os conjuntos

$$B(f) = \{g \in F : g \succsim f\}$$

e

$$W(f) = \{g \in F : f \succsim g\}$$

são fechados.

8.2 Teorema de Representação

O teorema de representação de Savage no caso finito obtido por Gul é dado por:

Teorema 3. Se $\succsim$ satisfaz os axiomas (S-G i), $i = 1, 2, 3, 4$, então existe uma probabilidade μ sobre S e uma função $u : X \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $f \succsim g$ se, e somente se[2],

$$\sum_{s \in S} u(f(s))\mu(s) \geq \sum_{s \in S} u(g(s))\mu(s);$$

(b) u é contínua e estritamente crescente;

(c) Se o item (a) continua verdadeiro quando trocamos a probabilidade μ por μ' e trocamos a função u por $u' : X \to \mathbb{R}$, então

$$\mu = \mu' \text{ e } u' = au + b \text{ para algum } a > 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Para a demonstração, necessitamos de vários lemas.

Lema 4. Se $x > y$ então

(i) $x \succ xE^*y \succ y$

(ii) $xE^*z \succ yE^*z'$ sempre que $z \geq z'$.

[2] Por abuso de notação escrevemos $\mu(\{s\}) = \mu(s)$.

Demonstração: (i) Assumindo que $xE^*y \succsim x$ então pela continuidade (S-G 4) temos que existe $\overline{x} \in (x, y)$ tal que $\overline{x}E^*y \sim x$. Por (S-G 3), $\overline{x} \succ y$; usando (S-G 2), $\overline{x} \succ x$ o que contraria (S-G 3). De maneira similar temos $xE^*y \succ y$.

(ii) Pelo item (i) e (S-G 4), existe $\overline{y}, \overline{x}$ tais que $\overline{y} \sim yE^*z$ e $\overline{x} \sim xE^*z$. Por (S-G 3) e (S-G 2) temos que $\overline{y} < \overline{x}$ e assim $xE^*z \succ yE^*z$, repetir o argumento para yE^*z e yE^*z' encerra a prova. □

Assim temos que, pelo Lema 4 e por (S-G 4), que para todo xE^*y existe um único $c_{xE^*y} \in X$ tal que $c_{xE^*y} \sim xE^*y$.

Lema 5. (i) Existe uma função contínua $u : X \to \mathbb{R}$, única a menos de uma tranformação afim positiva, tal que $xE^*y \succsim wE^*z$ se, e só se, $u(x) + u(y) \geq u(w) + u(z)$.

(ii) u é estritamente crescente e pode ser tomada de modo que $u(X) = [0, 1]$.

Demonstração: Escrevemos a seguinte condição

$$\begin{aligned} (*)\, x_2E^*y_1 &\succsim x_3E^*y_2 \text{ e } x_3E^*y_2 \succsim x_2E^*y_3 \\ \text{implica que } x_1E^*y_3 &\succsim y_3E^*x_1 \end{aligned}$$

mostremos inicialmente que $(*)$ é válida: Pelo Lema 4 e por (S-G 3) temos $ME^*y_2 \succsim x_2E^*m$ e pela premissa em $(*)$, (S-G 4) e Lema 4 existe $y_1' \leq y_1$, $x_1' \geq x_1$ e $t \in X$ tal que $x_2E^*y_1' \sim x_1'E^*y_2 \sim t$. Similarmente, temos $y_3' \geq y_3$, $x_3' \leq x_3$ e $t' \in X$ tal que $x_3'E^*y_2 \sim x_2E^*y_3' \sim t'$.

Sejam $f = y_1'E^*x_3'$, $g = y_3'E^*x_1'$, $h = x_2E^*y_2$ e $E = E^*$. Assim, (S-G 2) e (S-G 3) nos permitem escrever $f \sim g$ se $tE^*t' \sim t'E^*t$. Por (S-G 3) vemos que $x_1'E^*y_3' \succsim y_3'E^*x_1'$. Como exercício ao fim do capítulo deixamos para o leitor a prova de que se $\succsim$ satisfaz a condição $(*)$ e (S-G 4) então (i) é satisfeito.

(ii) Segue de (i) e da monotonicidade em (S-G 3). □

Lema 6.(i) Para todo $y_0 \in X$ defina para algum $x \in X$: $y_1 = y_0E^*x$, ..., $y_k \sim y_{k-1}E^*x$. A sequência $\{y_k\}_{k\geq 1}$ converge para x.

(ii) Seja $H = \{x_1, ..., x_n\}$, dizemos que y_0 alcança x através de H quando

$$y_k \sim y_{k-1}E^*x_i \text{ para todo } k = 1, ..., n, \text{ e } y_n = x.$$

Para cada $y_0 \in X$ e $x \in (m, M)$ existe um subconjunto finito H de X tal que y_0 alcança x através de H.

Demonstração: (i) Se $x = y_0$, não temos nada para se provar; supondo, spg, que $x > y_0$ e usando o Lema 4 e o axioma (S-G 3) temos que a sequência $\{y_k\}$ é estritamente crescente com $y_k < x$ para todo $k \geq 1$. Seja $lim\, y_k = y' < x$; tomando $y'' \sim y'E^*x$, novamente pelo Lema 4 e (S-G 3) vale que $y' < y'' < x$. Logo, $(1/2)(y' + y'') > y' > y_{k+1} \sim y_kE^*x$. Usando (S-G 3) mais uma vez, obtemos que $(1/2)(y' + y'') \succsim y_kE^*x$, mas $lim\ (y_kE^*x) = y'E^*x \sim y'' > (1/2)(y' + y'')$, contrariando (S-G 4).

(ii) Novamente, spg, supondo que $x > y_0$, definindo $y_k \sim y_{k-1}E^*M$. Por (i), temos que a sequência $\{y_k\}$ converge para M. Seja $\eta = inf\{k : y_k > x\} - 1$, que esta bem definido já que $lim\, y_k = M$. Daí, $y_{\eta-1} \leq x < y_\eta \sim y_{\eta-1}E^*M$. Por (S-G 4), (S-G 3) e Lema 4, existe algum z tal que $x \sim y_{\eta-1}E^*z$. Assim, fazendo $x_k = M$ para $k = 1, ..., \eta - 1$ e $x_\eta = z$ construímos o conjunto finito H que desejávamos. □

Lema 7. Seja $G = \{f_1, ..., f_n\}$, dizemos que g_0 alcança f através de G se para todo $s \in S$

$$g_k(s) \sim g_{k-1}(s)E^*f_k(s) \text{ para cada } k \in \{1, ..., n\}, \text{ e } g_n = f.$$

(i) Se $g_0 \in \mathcal{F}$ e $f(s) \in (m, M)$ para cada $s \in S$ então existe um conjunto G tal que g_0 alcança f através de G.

(ii) Se g_0 alcança f através de G e g'_0 alcança f' através de G então $g_0 \succ g'_0$ se, e somente se, $f \succ f'$ e para todo $s \in S$

$$g_0(s) > g'_0(s) \Leftrightarrow f(s) > f'(s)$$

Demonstração: (i) Segue diretamente ao aplicarmos repetidamente o Lema 6.

(ii) A primeira afirmação segue ao aplicaramos repetidamente o axioma (S-G 2). A segunda parte segue do Lema 4 e do axioma (S-G 3). □

O terceiro postulado original de Savage diz essencialmente que:

Lema 8. Se $f(s) \geq g(s)$ para todo $s \in S$ e existe algum estado s^* não $\succsim$ -nulo tal que $f(s^*) > g(s^*)$, então $f \succ g$.

Demonstração: Vamos fazer a prova para um par de funções em que $f\mid_{\{s^*\}^c} = g\mid_{\{s^*\}^c}$, já que este fato conjuntamente com a transitividade nos permite chegar à afirmação desejada. Pelo Lema 7(i), para cada $x \in X$, existe $\overline{H}$ tal que f alcança x através de $\overline{H}$. Agora, pelo Lema 7(ii), tomando $g'\mid_{\{s^*\}^c} = x$ e $g'(s^*) = y < x$, temos que g' alcança g através de $\overline{H}$. Mais ainda, pelo Lema 6(ii), podemos tomar y arbitrariamente perto de x de modo que $M \succ g \succ m$; e assim, pelo axioma (S-G 4), existe $x' \in X$ tal que $x' \sim g'$. Por (S-G 2) obtemos que $x \succ x' \sim g'$. E por fim o Lema 7(ii) nos permite concluir que $f \succ g$. □

Dado um evento E não $\succsim$-nulo definimos $CE(E, f)$ como sendo o elemento $x \in X$ tal que se $g\mid_E = x$ e $g\mid_{E^c} = f\mid_{E^c}$ então $f \sim g$. Ainda, denotamos por $CE(f) = CE(S, f)$.

O segundo postulado de Savage, conhecido como o princípio da coisa segura, é dado por:

Lema 9. Se $f = f'Eg$, $g = g'Ef$ e $f' = fEg'$ então[3]

$$f \succ g \Rightarrow f' \succ g'$$

Demonstração: Sendo $g'(S) \subset (m, M)$, sabemos pelo Lema 7(i) que existe uma sequência finita H tal que, fazendo $\overline{f} = xEg'$ com $x \in (m, M)$, f alcança $\overline{f}$ através de H. Assim, pelo Lema 7(ii), g alcança alguma $\overline{g}$ através de H, onde $\overline{g}\mid_{E^c} = g'\mid_{E^c}$. Agora para cada $h_i \in H$ definimos $h_i' = h_iEg'$ e chamamos o conjunto obtido de H'. Pelo Lema 7(ii) vale que $f \succ g$ se, e só se, $f' \succ g'$. Se existe

[3] Assim $g' = gEf'$.

$s \in E^c$ tal que $g(s) \in (m, M)$ definimos f_1, g_1, f_1', g_1' como: Para cada $s \in S$ e para algum $x \in (m, M)$

$$\begin{aligned} f_1(s) &\sim f(s)E^*x,\ g_1(s) \sim g(s)E^*x,\ f_1'(s) \\ &\sim f'(s)E^*x,\ g_1'(s) \sim g'(s)E^*x \end{aligned}$$

Pelo Lema 4, $g_1'(s) \in (m, M)$ para todo $s \in S$. Daí, aplicando o argumento feito no início desta demonstração, temos $f_1 \succ g_1$ se, e só se, $f_1' \succ g_1'$. Mas pelo axioma (S-G 2) $f \succ g$ se, e só se, $f_1 \succ g_1$ e $f' \succ g'$ se, e só se, $f_1' \succ g_1'$, o que encerra a prova. □

Definindo sobre 2^S a aplicação a partir de $p(E) = u(CE(MEm))$, obtemos:

Lema 10. Se $p(E)u(x)+(1-p(E))u(y) = u(z)$ e $|u(x) - u(y)| = (1/2^n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ então

$$xEy \sim z$$

Demonstração: Se E ou E^c é $\succsim$**-nulo** o resultado é imediato. Em caso contrário, a prova segue por indução sobre n. Se $n = 0$ temos $|u(x) - u(y)| = 1$, o que nos duas opções: ou $x = M$ e $y = m$, ou $y = M$ e $x = m$. Para o primeiro caso, $u(z) = p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) = p(E)$. Por nossa definição, $MEm \sim z'$ para algum z' tal que $u(z') = p(E)$; mas como u é injetora, temos que $z' = z$, e assim $xEy \sim z$. Para o caso mEM, notemos que pelo Axioma (S-G3), $ME^*m \sim mE^*M$. Daí pelo Axioma (S-G2)

$$[CE(MEm)]\, E^*\, [CE(mEM)] \sim [CE(mEm)]\, E^*\, [CE(MEM)]\,,$$

logo, $\overline{z}E^*\widehat{z} \sim mE^*M$ para cada $\overline{z}$, $\widehat{z}$ tal que $u(\overline{z}) = p(E)$ e $\widehat{z} = CE(mEM)$. Mas pelo Lema 5, temos que $u(\overline{z}) + u(\widehat{z}) = 1$ e daí $u(\widehat{z}) = 1 - p(E)$. Assim, $mEM \sim \widehat{z} \equiv \widehat{z}E\widehat{z}$ para $\widehat{z}$ tal que

$$u(\widehat{z}) = 1-p(E) = p(E)u(m)+(1-p(E))u(M) = p(E)u(x)+(1-p(E)).$$

O fato de u ser injetora nos permite alcançar o resultado desejado para $n = 0$.

Assumindo que o Lema vale para n e que $p(E)u(x)+(1-p(E))u(y) = u(z)$ com

$$|u(x) - u(y)| = (1/2^{n+1}).$$

Sejam x', y' tais que $|u(x') - u(y')| = (1/2^n)$ em que, ou $x' \geq x > y \geq y'$, ou $y' \geq y > x \geq x'$. Notemos que esta escolha é possível já que u é contínua. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $x' \geq x > y \geq y'$. Agora vamos usar novamente a continuidade e o fato de termos $u(X) = [0, 1]$: Seja u^* de modo que $\frac{1}{2}(u(x) + u^*) = u(x)$ e escolhemos w tal que $u(w) = u^*$. Notemos que $u^* = 2u(x) - u(x') \leq u(x) \leq 1$ e $2u(x) = 2\left[u(y) + \left(1/2^{n+1}\right)\right] = 2(y) - u(y') \geq u(y) \geq 0$. Deste modo, $u^* \in [0, 1]$ e w esta bem definido. Pelo hipótese de indução $x'Ey' \sim \widetilde{z}$ para algum $\widetilde{z}$ tal que

$$u(\widetilde{z}) = p(E)u(x') + (1 - p(E))u(y').$$

Pelo Axioma (S-G2)

$$[CE(x'E^*w)]\, E\, [CE(y'E^*w)] \sim [CE(\widetilde{z}E^*w)]\, E\, [CE(x'E^*M)],$$

e notemos que $u(y') + u(w) = u(y') + 2u(y) - u(y') = 2u(y)$ e, similarmente, $u(x') + u(w) = 2u(x)$. Logo, pelo Lema 5,

$$xEy \sim [CE(\widetilde{z}E^*w)]\, E\, [CE(\widetilde{z}E^*M)],$$

novamente pelo Lema 5, $CE(\widetilde{z}E^*M) = z'$ tal que

$$\begin{aligned}
u(z') &= \frac{1}{2}\left[u(\widetilde{z}) + u(w)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[p(E)u(x') + (1 - p(E))u(y') + 2u(x) - u(x')\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2u(x) + (1 - p(E))(u(y') - u(x'))\right] \\
&= p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y).
\end{aligned}$$

Assim, $xEy \sim z'$ onde $u(z') = p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y)$. Mas isso implica $z' = z$, o que conclui a prova. □

Lema 11. Se $p(E)u(x)+(1-p(E))u(y) = u(z)$ e $|u(x) - u(y)| = (h/2^n)$ para algum h, $n \in \mathbb{N}$ onde $h \leq 2^n$ então

$$xEy \sim z$$

Demonstração: Exercício. □

Lema 12. $xEy \succsim wEz \Leftrightarrow p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) \geq p(E)u(w) + (1 - p(E))u(z)$.

Demonstração: Basta mostrarmos que

$$xEy \sim t \Leftrightarrow p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) = t.$$

Pelo Lema 11, temos que $p(E) = 1 - p(E^c)$ e, ainda, o resultado é trivial se E ou E^c for $\succsim$**-nulo**, ou ainda se $x, y \notin (m, M)$. Assim, spg, vamos assumir que E e E^c não são $\succsim$**-nulo**s e que $x, y \in (m, M)$.

Para provarmos a suficiência, seja $t = CE(xEy)$ e $\{x_i\}$ uma sequência que converge para x por cima e satisfaça

$$|u(x_i) - u(y)| = (k_i/2^{n_i})$$

para inteiros $\{k_i, n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como o conjunto $\{(k/2^n) : k, n \in \mathbb{N}$, e $k \leq 2^n\}$ é denso em $[0, 1]$ e u é estritamente crescente com $u(X) = [0, 1]$, a existência da sequência tomada esta garantida. Seja t_n tal que $t_n = u(t_n) = p(E)u(x_n) + (1 - p(E))u(y)$. Daí, pelo Lema 10, $t_n \sim x_nEy$ e então pelo Lema 8, $t_n \sim x_nEy \succ xEy \sim t$. Assim, $u(t_n) > u(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é compacto, temos que a sequência $\{t_n\}$ admite alguma subsequência que convergente, e, spg, vamos assumir que $\{t_n\}$ converge para t'. Pela continuidade de u

$$\begin{aligned} & \lim_n \left[p(E)u(x_n) + (1 - P(E)u(y)\right] \\ = \; & p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) \geq u(t') \geq u(t). \end{aligned}$$

Para a desigualdade contrária, basta fazer um argumento simétrico.

A necessidade segue ao observarmos que, dado o Axioma (S-G4), se $x_nEy \succ t$ então $xEy \succsim t$, e novamente por argumento simétrico a prova esta completa. □

Lema 13. Sejam $E, F \subset S$ tais que $E \cap F = \emptyset$ e tenhamos $f\mid_E = x\mid_E$, $f\mid_F = y\mid_F$, $g\mid_{E\cup F} = z\mid_E$ e $g\mid_{(E\cup F)^c} = f\mid_{(E\cup F)^c}$, então

$$p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) = p(E \cup F)u(z) \Rightarrow f \sim g.$$

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$. Quando E é $\succsim$-nulo temos que $CE(MEm) = m$ e daí $p(E) = u(CE(MEm)) = 0$. Ainda, se E e F são $\succsim$-nulos é óbvio que $E \cup F$ também é $\succsim$-nulo e daí

$$p(E \cup F) = 0 = p(E) + P(F).$$

Caso apenas um deles seja $\succsim$-nulo, digamos E, notemos que

$$CE(MFm) = CE(M\,[E \cup F]\,m)$$

o que nos permite escrever

$$p(E \cup F) = p(F) = p(F) + p(E).$$

Caso nenhum deles seja $\succsim$-nulo, definindo $\overline{z} = CE(E \cup F,\, MEm)$ obtemos que

$$MEm \sim CE(MEm) \sim \overline{z}\,[E \cup F]\,m,$$

e pelo Lema 12,

$$p(E) = p(E \cup F)u(\overline{z}),\ (Eq1)$$

Agora, pelo Lema 9, $mFM \sim \overline{z}\,[E \cup F]\,M$. Seja $t = CE(mFM)$, então pelo Lema 12

$$p(F^c) = 1 - p(F) = u(t) = p(E \cup F)u(\overline{z}) + 1 - p(E \cup F),\ (Eq2)$$

Agora por $Eq1$ e $Eq2$ temos a aditividade de $p : 2^S \to [0, 1]$.

Se E ou F for $\succsim$-nulo é claro que $f \sim g$. Agora, se ambos não são $\succsim$-nulos, então vamos definir $z' = CE(E \cup F, f)$. Pelo Lema 9, $xEy \sim z'\,[E \cup F]\,y$. Seja $t' = CE(xEy)$. Pelo Lema 12,

$$p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) = u(t') = p(E \cup F)u(z') + (1 - p(E \cup F))u(y),$$

a aditividade de p nos permite escreve

$$p(E \cup F)u(z') = p(E)u(x) + (1 - p(E))u(y) = p(E \cup F)u(z),$$

e daí $z = z'$, o que encerra a demonstração. $\square$

Demonstração: (Representação de Savage)

Seja
$$U(f) = \sum_{s \in S} u(f(s))p(s)$$
já vimos pelo último lema que p é aditiva. Mostremos que $f \succsim g$ se, e somente se, $U(f) \geq U(g)$:

Seja $S^* = \{s_1, ..., s_K\}$ o conjunto de estados não $\succsim$-nulos. Para cada $f \in F$ vamos definir a sequência finita $f_1, ..., f_k$ da seguinte forma: $z_1 = f(s_1)$, $f_1 = f$. Para $n \geq 2$, fazendo $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{s_i\}$, escrevemos $f_n \mid_{E_n} = z_n \mid_{E_n}$ e $f_n \mid_{E_n^c} = f_{n-1} \mid_{E_n^c}$ onde z_n é tal que $p(E_n)u(z_n) = p(E_n)u(f(s_n)) + p(E_{n-1})u(z_{n-1})$. Por construção, $U(f_n) = U(f_{n+1})$ e pelo Lema 12, $f_n \sim f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Ainda, $f_K \mid_{S^*} = z_k \mid_{S^*}$. Logo, $f \sim z$ e $U(f) = U(f_{K-1}) = u(z)$, onde a última igualdade segue do fato de termos $p(S) = 1$, p é aditiva e $p(s) = 0$ para todo $s \in S \backslash S^*$. Repetindo o mesmo argumento para g, obtemos z' tal que $U(g) = u(z')$ e $g \sim z'$. Assim, se $f \succsim g$, pelo Lema 4, $z \geq z'$ e daí, já que u é crescente, $U(f) = u(z) \geq u(z') = U(g)$. De modo análogo, se $U(f) \geq U(g)$ então $u(z) \geq u(z')$ o que nos dá $f \sim z \succsim z' \sim g$.

A unicidade (a menos de uma transformação monótona) de u segue do Lema 5. A unicidade de p decorre da unicidade de u: Como $MEm \sim x$ implica que $p(E)u(M) + (1 - P(E))u(m) = u(x)$, temos que
$$p(E) = \frac{u(x) - u(m)}{u(M) - u(m)}$$
o que é invariante sobre transformações afins positivas de u. $\square$

8.3 Exercícios

1. Dada a condição

$$\begin{aligned}(*)\, x_2E^*y_1 &\succsim x_3E^*y_2 \text{ e } x_3E^*y_2 \succsim x_2E^*y_3 \\ \text{implica que } x_1E^*y_3 &\succsim y_3E^*x_1\end{aligned}$$

Prove que se $\succsim$ satisfaz a condição $(*)$ e o axioma de continuidade (S-G 4) então existe uma função contínua $u : X \to \mathbb{R}$ (única a menos de uma tranformação afim positiva) tal que $xE^*y \succsim wE^*z$ se, e só se, $u(x) + u(y) \geq u(w) + u(z)$.

2. Prove as afirmações feitas na demonstração do Lema 7.

3. Prove o Lema 11.

   Dica: Seja $L^1(n)$ este lema para um n fixado. Temos que $L^1(0)$ e $L^1(1)$ seguem do Lema 10. Para provar que $L^1(n)$ implica em $L^1(n+1)$, assuma que $|u(x) - u(y)| = (h/2^{n+1})$. Agora use indução sobre h: Seja $L^2(l)$ a proposição quando $h = l$ notando que $n + 1$ esta fixado. Temos que $L^2(0)$ é trivial e $L^2(1)$ segue do Lema 10. Assim resta provar que $L^2(l)$ implica $L^2(l + 1)$ para $l \geq 1$.

4. Seja $S = \{s_1, s_2\}$ o conjunto de estados da natureza e considere uma função $f : S \to \mathbb{R}$ tal que $f(s_1) > f(s_2)$. Podemos pensar f como sendo um ativo financeiro que entrega $f(s_i)$ unidades monetárias no próximo período caso ocorra o estado da natureza s_i. Suponha que um índivíduo apresente um probabilidade subjetiva $p : 2^S \to [0, 1]$ e uma utilidade sobre as consequências dada por $u = I_d$;

   (a) Se o indivíduo é indiferente entre f e um ativo livre de risco que entregue uma únidade monetária em cada estado da natureza, qual é a probabilidade subjetiva do indivíduo?

   (b) Supondo agora que $f(s_1) = 6$ e $f(s_2) = 2$ e $p = (1/4, 3/4)$. Para que valores prometidos pelo ativo livre de risco o indivíduo prefere estritamente adquirir f?

Capítulo 9

Paradoxos da Utilidade Esperada.

Vimos dois tratamentos clássicos em teoria da escolha em que o conceito de probabilidade é fundamental. No primeiro, vimos que uma preferência no contexto de loterias, respeitando o conjunto de axiomas de vN-M, apresenta um representação linear nas probabilidades. No segundo caso, uma preferência sobre atos satisfazendo o conjunto de axiomas comportamentais de Savage-Gul é representada por um índice de utilidade sobre as consequências e uma probabilidade subjetiva sobre os estados. Ambas as abordagens podem parecer satisfatórias do ponto de vista normativo, entretanto, como uma teoria descritiva apresentam dificuldades que apresentamos abaixo.

9.1 O paradoxo de Allais.

O exemplo a seguir foi originalmente apresentado por Maurice Allais (1953) e constitui a mais antiga e famosa crítica descritiva à teoria da utilidade esperada de vN-M. Imaginemos o seguinte experimento: existem três possíveis prêmios em euros, descritos pelo conjunto

$$Z = \{2.500.000,\ 500.000,\ 0\}$$

Um indivíduo é submetido a dois conjunto de escolhas. No primeiro, este pode escolher entre duas loterias, a saber:

$$x_1 = (0,1,0) \text{ e } x_2 = (0.10,\ 0.89,\ 0.01)$$

e no segundo temos:

$$y_1 = (0,\ 0.11,\ 0.89) \text{ e } y_2 = (0.10,\ 0,\ 0.90)$$

Em geral os indivíduos apresentam a seguinte ordenação de preferências:

$$x_1 \succ x_2 \text{ e } y_2 \succ y_1$$

Na primeira escolha, o indivíduo prefere receber com a certeza 500.000 euros a participar de uma loteria que entrega o mesmo valor com 89% de chances, entrega cinco vezes este valor com 10% de chances, mas implica num risco de 1% de não se receber nada. No segundo caso, a preferência pela segunda loteria capta o fato de que a chance de receber nada é alta e muito próxima em ambas loterias, mas a segunda loteria entrega 2.500.000 euros com uma probabilidade muito próxima da probabilidade que a primeria loteria promete entregar 500.000.

Entretanto, esse comportamento não é consistente com uma representação de vN-M. De fato, supondo que existisse um representação do tipo vN-M, sejam $u_1 > u_2 > u_3$ as utilidades nos prêmios, onde obviamente u_1 representa a utilidade de obter o maior valor e u_3 é a utilidade de receber o menor prêmio. Logo

$$x_1 \succ x_2 \Rightarrow u_2 > 0.10u_1 + 0.89u_2 + 0.01u_3$$

e

$$y_2 \succ y_1 \Rightarrow 0.10u_1 + 0.90u_3 > 0.11u_2 + 0.89u_1$$

e daí a contradição:

$$0.10u_1 + 0.01u_3 > 0.11u_2 > 0.10u_1 + 0.01u_3$$

Como exercício proposto ao fim deste capítulo, pedimos ao leitor que chegue ao absurdo a partir do axioma de independência.

Para mais "paradoxos" do comportamento usual dos indivíduos, o leitor é convidado a ler o interessante e famoso artigo "Prospect

Theory: An analysis of decisions under risk", escrito por Kahneman e Tverski (1979). Para apresentar sua crítica à teoria de utilidade esperada, eles realizaram vários experimentos de escolhas feitas por alunos. Eles também propuseram uma teoria alternativa, a "Prospect Theory". Ultimamente toda uma linha de investigação aborda os desvios da teoria de vN-M em várias direções.

9.2 Paradoxo de Ellsberg

Muito embora as fundamentações da teoria da probabilidade subjetiva sejam usualmente associadas ao *paradigma Bayesiano*[1] e este seja dominante no pensamento econômico contemporâneo, muitas críticas descritivas e desenvolvimentos teóricos importantes foram realizados a partir de idéias tratadas por Frank Knight (1921) que tentam evitar o uso de probabilidades clássicas como forma de modelar as crenças dos indivíduos. A mais importante objeção à abordagem da probabilidade subjetiva foi feita por Ellsberg (1961) e é comumente conhecida como o *Paradoxo de Ellsberg*: Temos duas urnas A and B, cada uma delas contendo cem bolas. Cada bola pode ser preta ou branca. Na urna A existem 50 bolas de cada cor e não temos nenhuma informação sobre a urna B. Uma bola é retirada de cada urna. Existem quatro estados da natureza denotados por $S = \{(p,p),(p,b),(b,p),(b,b)\}$, onde (p,p) denota o estado em que a bola retirada da urna A é preta e a bola retirada da urna B é preta, etc. Podemos construir quatro apostas (atos), denotadas por A^p, A^b, B^p, B^b, em que a aposta A^p entrega \$100 se o estado (p,p) ou (p,b) acontencer e *zero* em caso contrário, *i.e.*, A^p é apostar que a bola preta será escolhida na urna A. Os resultados obtidos por Ellsberg confirmam que os indivíduos, em geral, são indiferentes entre apostar que a bola preta sairá na urna $A(B)$ ou apostar que a bola branca sairá na urna $A(B)$. Entretanto, existe uma proporção não negligenciável de indivíduos que preferem sempre tomar apostas referentes à urna A (preta ou branca) do que tomar apostas referentes à urna B (preta ou branca). Assim, temos

[1] Para uma apresentação dos traçoes fundamentais e uma crítica ao Bayesianismo como forma de se representar a racionalidade, consulte Gilboa-Postlewaite-Schmeidler (2004).

a seguinte ordenação sobre as quatro possíveis apostas:

$$A^p \sim A^b \succ B^p \sim B^b$$

Agora, se um indivíduo submetido a esta escolha apresenta tal ordenação de preferências e se tem seu comportamento como descrito no conjunto de axiomas de Savage-Gul, este deve apresentar uma representação de suas preferências, onde:

$U(A^p) = \sum_{s \in S} u(A^p(s))p(s) = (u(0) + u(100))/2 = U(A^b)$

e supomos $u(0) < u(100)$.

Ainda, se $p((b,b)$ ou $(p,b)) = \alpha = 1 - p((b,p)$ ou $(p,p))$:

$$U(B^b) = \alpha u(100) + (1-\alpha)u(0)$$

e pela ordenação encontrada por Ellsberg:

$$\alpha u(100) + (1-\alpha)u(0) < (u(0) + u(100))/2$$

e portanto:

$$(\alpha - 1/2)(u(100) - u(0)) < 0$$

Novamente, pela ordenação acima:

$$U(B^p) = (1-\alpha)u(100) + \alpha u(0) \text{ e}$$
$$(1-\alpha)u(100) + \alpha u(0) < (u(100) + u(0))/2$$

e então:

$$(1/2 - \alpha)(u(100) - u(0)) < 0$$

o que leva a uma contradição. Assim a ordenação acima não é consistente com teoria da probabilidade subjetiva.

9.3 Exercício

1) Mostre que sem apelar para a representação de vN-M podemos chegar a um absurdo no exemplo dado por Allais a partir do axioma de independência.

Parte III

Escolha sob Ambiguidade

Capítulo 10

Escolhas com ambiguidade.

Vimos que a abordagem de Savage (1954) consegue preservar a noção de probabilidades frente às críticas da existência de probabilidades objetivas. Isto é feito ao derivar um índice de utilidade sobre as consequências e uma probabilidade sobre os estados a partir de axiomas comportamentais. Mas como vimos, o paradoxo de Ellsberg mostra que em termos descritivos esta teoria é problemática.

Por **ambiguidade** entendemos a incapacidade, frente ao conjunto de informação que dispõe o tomador de decisões, de especificar uma distribuição de probabilidades sobre os estados da natureza.

O Paradoxo de Ellsberg deixa em evidência a idéia de que os indivíduos tendem a preferir situações onde sejam capazes de especificar probabilidades àquelas situações em que isso não seja possível. Isso pode ser visto como uma atitude de *aversão à ambiguidade* e tal comportamento é de extrema importância, uma vez que, em grande parte dos fenômenos econômicos os indivíduos não são capazes de especificar uma avaliação probabilística precisa.

Uma importante e mais simples abordagem da teoria da probabilidade subjetiva foi feita por Anscombe-Aumann (1964). Como vamos desenvolver o modelo de escolhas sob ambiguidade destro desta abordagem, vamos apresentar rapidamente os elementos básicos desta construção.

10.1 Modelo de Anscombe-Aumann

Anscombe-Aumann chegam ao resultado de existência de probabilidades subjetivas tomando como espaço de consequências o conjunto de escolhas dado na teoria de von Neumann-Morgenstern, ou seja:

$$X = \{x : Z \to [0,1] : \sum_{i=1}^{n} x(z_i) = 1\}$$

em que Z é o conjunto finito de resultados ou prêmios.

Neste caso, um ato $f : S \to X$ associa a cada estado da natureza uma resultado aleatório com distribuição dada exogenamente, isto é, uma consequência é uma loteria do tipo von Neumann-Morgenstern. Anscombe-Aumann chamam os elementos de X de *loterias de roleta* e os atos de *loterias de cavalo*. A distinção deixa clara a diferença entre apostas que envolvem mecanismos randômicos bem específicos, como o caso de uma roleta, e apostas que envolvem situações onde não seja possível especificar uma lei probabilística objetiva, como é o caso de uma corrida de cavalo ou uma partida de futebol.

O espaço de atos no contexto de Anscombe-Aumann é dado por:

$$\mathcal{F} = X^S$$

Como de costume, vamos enxergar x tanto como um elemento de X como um ato constante (que entrega x em cada estado) em $\mathcal{F}$. Dados dois elementos $f, g \in \mathcal{F}$, definimos a mistura $\alpha f + (1-\alpha)g$ fazendo, para todo $s \in S$:

$$(\alpha f + (1-\alpha)g)(s) = \alpha f(s) + (1-\alpha)g(s)$$

esta propriedade é fundamental para a descrição dos axiomas a seguir e caracteriza o conjunto $\mathcal{F}$ como sendo um *espaço de misturas*.

Definimos então uma relação de preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{F}$, satisfazendo o seguinte conjunto de axiomas:

(**Axioma 1**) A preferência é racional e não-degenerada: Se $f, g, h \in \mathcal{F}$:

(completa) $f \succsim g$ ou $g \succsim f$

(transitiva) $f \succsim g$ e $g \succsim h$ implicam que $f \succsim h$

Existe $(f, g) \in \mathcal{F}^2$ tal que $f \succ g$

(**Axioma 2**) Continuidade. para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$ os conjuntos: $\{\alpha \in [0,1] : \alpha f + (1-\alpha) g \succsim h\}$, $\{\alpha \in [0,1] : h \succsim \alpha f + (1-\alpha) g\}$ são fechados.

(**Axioma 3**) Monotonicidade. para todo $f, g \in \mathcal{F}$:

$$\text{se } f(s) \succsim g(s) \text{ para todo } s \in S \text{ então } f \succsim g.$$

(**Axioma 4**) Independência: para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$ e $\alpha \in (0,1)$:

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha) h \sim \alpha g + (1-\alpha) h$$

A representação no contexto de Anscombe-Aumann é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1. Suponha que uma preferência sobre $\mathcal{F}$ satisfaça os axiomas 1,2,3 e 4. Então existe uma única probabilidade p sobre 2^S e uma função u sobre X de vN-M, tal que, para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$:

$$f \succsim g \Leftrightarrow \sum_{s \in S} u(f(s)) p(s) \geq \sum_{s \in S} u(g(s)) p(s)$$

Ainda, se existem p e u como acima então a relação de preferência induzida satisfaz os axiomas 1,2,3 e 4. Finalmente, a função é única a menos de uma transformação do tipo $u \mapsto au + b$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Veremos resultados à frente onde o teorema de Anscombe-Aumann ocorre como caso particular.

Assim, temos fundamentado no contexto de Anscombe-Aumann a noção de probabilidade subjetiva: um tomador de decisões que apresente um comportamento consistente com o conjunto de axiomas dados acima tem suas escolhas determinadas por uma função de utilidade de von Neumann-Morgenstern e uma probabilidade subjetiva. Já vimos que o paradoxo de Ellsberg mostra um problema descritivo desta teoria e, em termos axiomáticos, o problema esta exatamente no axioma de independência.

No contexto proposto por Anscombe-Aumann é que ocorreu o pioneirismo de algumas generalizações importantes da teoria da utilidade esperada, com destaque para os resultados obtidos por Schmeidler (1989) e por Gilboa-Schmeildler (1989). Estes resultados também são obtidos no contexto puramente subjetivo; uma maneira de se alcançar tal resultado mantendo a simplicidade da abordagem de Anscombe-Aumann pode ser encontrada em Ghirardato et. al. (2003)[1].

10.2 Ambiguidade a partir de capacidades

Um importante resultado que fundamenta a noção de ambiguidade é dado por Schmeidler (1989). Sua representação utiliza a noção de *probabilidade não-aditiva* ou *capacidade*:

Definição 2. Dado um conjunto finito e não-vazio $S = \{1, ...K\}$ e considerando a família de subconjuntos 2^S de S, uma *capacidade* é uma aplicação $v : 2^S \to [0, 1]$ que cumpre:

(a) $v(\emptyset) = 0$, $v(S) = 1$

(b)(Monótona) para todo $E, F \in 2^S$: $E \subset F \Rightarrow v(E) \leq v(F)$.

Obviamente, toda probabilidade é uma capacidade mas a recíproca é falsa.

Definição 3. Dada uma função $a : S \to \mathbb{R}$, o funcional de Choquet de a com respeito à capacidade v é dado por[2]:

$$I_v(a) = \sum_{s=1}^{K-1} [v(\{s, ..., K\}) - v(\{s + 1, ..., K\}]a_s + v(\{K\})a_K$$

onde $a_s = a(s)$ e tomamos $a_1 \leq ... \leq a_K$.

Observação: Se v for aditiva o funcional de Choquet é igual à expressão usual do valor esperado. De fato, $v(\{s, ..., K\}) - v(\{s + 1, ..., K\} = v(\{s\})$ e assim $I_v(a) = \sum_{s=1}^{K} v(\{s\})a_i$.

[1] Tais autores utilizam a noção de *misturas subjetivas*, o que perminte uma descrição dos axiomas de maneira similar ao feito por Anscombe-Aumann.

[2] Como $S = \{1, ..., K\}$, o conjunto de todas as funções de S em $\mathbb{R}$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^K$.

Notemos que se, por exemplo, temos $S = \{1, 2, 3\}$, uma capacidade $v : 2^{\{1,2,3\}} \to [0, 1]$ e uma função $b = (2, 3, 1)$, para calcular o funcional de Choquet de b temos que tomar uma permutação $n : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ de modo que $n(1) = n_1 = 3$, $n_2 = 1$ e $n_3 = 2$ e assim $b_{n_1} \leq b_{n_2} \leq b_{n_3}$, o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} I_v(b) &= [v(\{n_1, n_2, n_3\}) - v(\{n_2, n_3\})] \times 1 \\ &\quad + [v(\{n_2, n_3\}) - v(\{n_3\})] \times 2 + v(\{n_3\}) \times 3 \end{aligned}$$

De modo geral, dada $b : S \to \mathbb{R}$, sempre podemos tomar uma permutação $n : S \to S$ em que $b_{n_1} \leq ... \leq b_{n_K}$ de modo que:

$$\sum_{k=1}^{K-1} [v(\{n_k, ..., n_K\}) - v(\{n_{k+1}, ..., n_K\}]b_{n_k} + v(\{n_K\})b_{n_K}$$

Em geral, o funcional de Choquet não é aditivo. Por exemplo, tomando $S = \{1, 2\}$, e uma capacidade $v : 2^S \to [0, 1]$ de modo que $v(1) = v(2) = 0.3$. Dadas $a, b \in \mathbb{R}^2$ tais que $a_1 = 2, a_2 = 3$ e $b_1 = 3$ e $b_2 = 1$ temos que $c = a + b = (5, 4)$ e

$$\begin{aligned} I_v(a) &= (0.7) \times 2 + (0.3) \times 3 = 2.5 \\ I_v(b) &= (0.7) \times 1 + (0.3) \times 3 = 1.6 \end{aligned}$$

e daí $I_v(a) + I_v(b) = 4.1$, mas

$$I_v(c) = (0.7) \times 4 + (0.3) \times 5 = 4.3$$

ou seja, $I_v(a + b) > I_v(a) + I_v(b)$.

Entretanto, para uma certa classe de funções a aditividade é válida e para isso precisamos da seguinte definição:

Definição 4. Duas funções $a, b \in \mathbb{R}^K$ são comonotônicas quando

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \forall i, j \in S.$$

Ou equivalentemente, não existem $i, j \in S$

$$(a_i - a_j) > 0 \text{ e } (b_i - b_j) < 0$$

Segue então o importante:

Teorema 5. Se $a, b \in \mathbb{R}^K$ são comonotônicas então

$$I_v(a+b) = I_v(a) + I_v(b)$$

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{R}^K$ comonotônicas onde $a_1 \leq ... \leq a_K$. Notemos que para todo $s \in \{1, ..., K\}$ tal que que $a_{s+1} > a_s$ devemos que ter que $b_{s+1} \geq b_s$; em caso contrário vale $(a_{s+1} - a_s)(b_{s+1} - b_s) < 0$ e então a e b não seriam comonotônicas.

Assim se $a_{s+1} > a_s$ então $a_s + b_s < a_{s+1} + b_{s+1}$. Daí, quando $a_1 < ... < a_K$ temos que

$$\begin{aligned}
I_v(a+b) &= \\
&= \sum_{s=1}^{K-1} [v(\{s, ..., K\}) - v(\{s+1, ..., K\}](a_s + b_s) \\
&\quad + v(\{K\})(a_K + b_K) \\
&= \sum_{s=1}^{K-1} [v(\{s, ..., K\}) - v(\{s+1, ..., K\}]a_s + v(\{K\})a_K + \\
&= \sum_{s=1}^{K-1} [v(\{s, ..., K\}) - v(\{s+1, ..., K\}]b_s + v(\{K\})b_K = \\
&= I_v(a) + I_v(b).
\end{aligned}$$

Para o caso geral vamos usar uma caracterização alternativa do funcional de Choquet. Seja $a \in \mathbb{R}^K$ de modo que a imagem de a seja dada por $Im[a] = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$, de modo que $\alpha_1 > ... > \alpha_N$. É claro que $N \leq K$ e $N = K$ se, e só se, a for injetora[3]. Definindo $E_i = a^{-1}(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq N$; temos que $E_i \cap E_j = \emptyset$ quando $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = S$, ou seja, $\{E_i\}_{i=1}^{N}$ é uma partição de S. Fixando $\alpha_{N+1} = 0$, o funcional de Choquet pode ser reescrito como

$$I_v(a) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right)$$

[3] Isto, em nosso caso, implica $\alpha_k > \alpha_{k+1}$ para todo k.

notemos que se $N = K$, $E_i = \{s_i\}$ para algum $s_i \in S$ e o funcional fica

$$I_v(a) = \sum_{i=1}^{N}(a_i - a_{i+1})v\left(\{s_1, ..., s_i\}\right)$$

Como exercício ao fim do capítulo, deixamos para o leitor a tarefa de conferir que a definição dada inicialmente coincide com a expressão que obtemos.

Assim, dados $a, b \in \mathbb{R}^K$ de modo que $Im[a] = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ e $Im[b] = \{\beta_1, ..., \beta_M\}$ com $\alpha_1 > ... > \alpha_N$ e $\beta_1 > ... > \beta_M$. Seja

$$\chi_E(s) = \begin{cases} 1, \ s \in E \\ 0, \ s \in E^c \end{cases}$$

sendo $E_i = a^{-1}(\alpha_i)$ e $F_i = b^{-1}(\beta_i)$, podemos reescrever

$$a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i} \text{ e } b = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{F_j}$$

Notemos que, pelo fato de a e b serem comonotônicas, existe uma partição $\{G_p\}_{p=1}^{P}$ de S e dois conjuntos $\{\eta_1, ..., \eta_P\}$, $\{\kappa_1, ..., \kappa_P\}$ de modo que

$$a = \sum_{p=1}^{P} \eta_p \chi_{G_p} \text{ e } b = \sum_{p=1}^{P} \kappa_p \chi_{G_p}$$

onde $\eta_1 \geq ... \geq \eta_P$ e $\kappa_1 \geq ... \geq \kappa_P$. Ainda, a expressão para o funcional de Choquet para a (e vale o análogo para b) é o mesmo que vimos acima, i.e,

$$I_v(a) = \sum_{p=1}^{P}(\eta_p - \eta_{p+1})v\left(\bigcup_{j=1}^{p} G_j\right)$$

Deste modo,

$$a + b = \sum_{p=1}^{P}(\eta_p + \kappa_p)\chi_{G_p}$$

e temos

$$
\begin{aligned}
I_v(a+b) &= \sum_{p=1}^{P}[\eta_p + \kappa_p - (\eta_{p+1} + \kappa_{p+1})]v\left(\bigcup_{j=1}^{p} G_j\right) \\
&= I_v(a) + I_v(b)
\end{aligned}
$$

□

Vamos em muitos casos utilizar a forma do funcional de Choquet obtida na proposição anterior:

$$I_v(a) = \sum_{i=1}^{N}(\alpha_i - \alpha_{i+1})v\left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j\right)$$

onde $Im[a] = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$, $\alpha_1 > ... > \alpha_N$ e $E_i = a^{-1}(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq N$ é uma partição de S. Mais ainda, dado $a \in \mathbb{R}^K$ e escrevendo $\{a \geq \alpha\} = \{s \in S : a(s) \geq \alpha\}$, definimos a distribuição de a com respeito à capacidade v como sendo:

$$a^*(\alpha) = \begin{cases} v(\{a \geq \alpha\}),\ \alpha \geq 0 \\ v(\{a \geq \alpha\}) - 1,\ \alpha < 0 \end{cases}$$

O funcional de Choquet é então dado pela integral de Riemann de a^*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^*(\alpha)d\alpha = \sum_{i=1}^{N}(\alpha_i - \alpha_{i+1})v\left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j\right) = I_v(a)$$

Isso pode ser facilmente provado por indução no número de valores distintos de zero que a função a assume. Notemos que se $a \geq 0$ então

$$I_v(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} a^*(\alpha)d\alpha = \int_{0}^{+\infty} v(\{a \geq \alpha\})d\alpha$$

Proposição 6. O funcional de Choquet I_v sobre $\mathbb{R}^K_+$ apresenta as seguintes propriedades:

(a) I_v é normalizado: $I_v(\chi_S) = 1$;

(b) I_v é monótono:

$$a \geq b \text{ } (ou\ seja, a_k \geq b_k\ \forall k \in S) \Rightarrow I_v(a) \geq I_v(b);$$

(c) I_v é positivamente homogêneo: $\forall \lambda > 0$, $I_v(\lambda a) = \lambda I_v(a)$;

(d) Dado $\beta > 0$,

$$I_v(a + \beta\chi_S) = I_v(a) + \beta$$

(e) I_v é contínuo.

Demonstração: (a) Como $\chi_S(s) = 1$ para todo $s \in S$

$$I_v(\chi_S) = v(S) = 1$$

(b) Tomando $a, b \in \mathbb{R}^K$ onde $a \geq b$ obtemos que $\{a \geq \alpha\} \supset \{b \geq \alpha\}$ e daí $a^* \geq b^*$ pela monotonicidade da capacidade. Assim,

$$I_v(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} a^*(\alpha)d\alpha \geq \int_{-\infty}^{+\infty} b^*(\alpha)d\alpha = I_v(b)$$

(c) $I_v(\lambda a) = \int_0^{+\infty} v(\{\lambda a \geq \alpha\})d\alpha = \int_0^{+\infty} v(\{a \geq \alpha/\lambda\})d\alpha$, fazendo $\beta = \alpha/\lambda$ obtemos:

$$I_v(\lambda a) = \lambda \int_0^{+\infty} v(\{a \geq \beta\})d\beta = \lambda I_v(a).$$

(d) Já vimos que o funcional de Choquet é aditivo sobre funções comonôtonicas. É fácil ver que a e $\beta\chi_S$ são funções comonotônicas para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Em particular, pelo itens (a) e (c), quando $\beta > 0$ temos que:

$$I_v(a + \beta\chi_S) = I_v(a) + \beta$$

(e) Notemos que $a(s) \leq b(s) + a(s) - b(s)$ para todo $s \in S$ e daí

$$\begin{aligned} a &\leq b + \max_{s \in S} |a(s) - b(s)| \, \chi_S \\ b &\leq a + \max_{s \in S} |a(s) - b(s)| \, \chi_S \end{aligned}$$

por (b) e (d):

$$\begin{aligned} I_v(a) &\leq I_v(b) + \max_{s \in S} |a(s) - b(s)| \\ I_v(b) &\leq I_v(a) + \max_{s \in S} |a(s) - b(s)| \end{aligned}$$

ou seja

$$|I_v(a) - I_v(b)| \leq \max_{s \in S} |a(s) - b(s)|$$

Assim, se $a^k \to a$ então $\left|I_v(a^k) - I_v(a)\right| \leq \max_{s \in S} \left|a^k(s) - a(s)\right| \to 0$, pois a convergência dada na hipótese implica que $\left|a^k(s) - a(s)\right| \to 0$ para cada $s \in S$. $\square$

Vimos que se $a \in \mathbb{R}_+^K$ então $I_v(a) = \int\limits_0^{+\infty} v(\{a \geq \alpha\}) d\alpha$. Para $a \in \mathbb{R}^K$, definindo

$$\Theta_a = \min_{s \in S} a(s) \text{ e } \Lambda^a = \max_{s \in S} a(s)$$

então $a_1 = a - \Theta_a \chi_S \in \mathbb{R}_+^K$ e

$$\begin{aligned}
I_v(a_1) &= \int_0^{\Lambda^a - \Theta_a} v(\{[a - \Theta_a \chi_S] \geq \alpha\}) d\alpha \\
&= \int_0^{\Lambda^a - \Theta_a} v(\{a \geq \alpha + \Theta_a\}) d\alpha \\
[\beta = \alpha + \Theta_a] \quad &= \int_0^{\Lambda^a} v(\{a \geq \beta\}) d\beta + \int_{\Theta_a}^{0} v(\{a \geq \beta\}) d\beta \\
&= \int_0^{\Lambda^a} v(\{a \geq \beta\}) d\beta + \int_{\Theta_a}^{0} [v(\{a \geq \beta\}) - 1] d\beta + \int_{\Theta_a}^{0} d\beta \\
&= \int_{\Theta_a}^{\Lambda^a} a^*(\beta) d\beta - \Theta_a
\end{aligned}$$

Logo também valem as propriedades enumeradas na Proposição 6 para o funcional de Choquet em todo $\mathbb{R}^K$.

Uma pergunta respondida em Schmeidler (1986), de maneira positiva, é se a recíproca do que vimos até aqui é verdade:

Teorema 7. Seja $J : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ um funcional normalizado, $J(\chi_S) = 1$, satisfazendo:

(i) J é aditivo sobre funções comonotônicas;

(ii) J é monótono;

Então a seguinte relação define uma capacidade

$$\begin{aligned}
v \quad &: \quad 2^S \to [0, 1] \\
E \quad &\to \quad v(E) = J(\chi_E)
\end{aligned}$$

e para todo $a \in \mathbb{R}^K$:

$$I(a) = \int_{\Theta_a}^{\Lambda^a} a^*(\beta) d\beta = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right)$$

Demonstração: Inicialmente vamos nos restringir às funções em $\mathbb{R}^K_+$;

(passo 1): J é positivamente homogêneo;

(1.a) $J(na) = nJ(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por indução, $n = 1$ é trivial. Supondo válido para $n = k \geq 2$,

$$J((k+1)a) = J(ka+a) \overset{(ii)}{=} J(ka)+J(a) \overset{hi}{=} kJ(a)+J(a) = (k+1)J(a)$$

(1.b) $J(ra) = rJ(a)$ para todo $r \in \mathbb{Q}_{++}$;

$$J(a) = J\left((1/n)n\, a\right) \overset{(1.a)}{=} nJ\left((1/n)a\right),$$

ou seja, $(1/n)J(a) = J\left((1/n)a\right)$. Daí, escrevendo $r = (p/q)$ com $p, q \in \mathbb{N}$, (1.a) e a primeira parte deste item nos dá a igualdade procurada.

Notemos que J é contínuo: De fato, Dado $r \in \mathbb{Q}_{++}$ arbitrário se $a^m \to a$ então existe m_0 tal que para todo $m \geq m_0$ e para todo $s \in S$:

$$\begin{aligned} a^m(s) - a(s) &\leq r, \text{ e} \\ a^m(s) - a(s) &\leq r \end{aligned}$$

Pela monotonicidade e por (1.b) temos que

$$|J(a^m) - J(a)| \leq r$$

(1.c) Para todo $\lambda > 0$, $J(\lambda\chi_E) = \lambda$;

Com efeito, dado $\lambda > 0$ podemos tomar sequências $\{r_n\}$ e $\{r'_n\}$ em $\mathbb{Q}_{++}$ de modo que $r_n \uparrow \lambda$ e $r'_n \downarrow \lambda$. Pela monotonicidade de J

$$J(r_n\chi_S) \leq J(\lambda\chi_S) \leq J(r'_n\chi_S), \forall n \geq 1$$

Como J é normalizado e por (1.b) :

$$r_n \leq J(\lambda\chi_S) \leq r'_n, \forall n \geq 1$$

E assim, $J(\lambda\chi_E) = \lambda$.

Seja $\lambda > 0$, logo existe alguma sequência $\{r_n\}$ em $\mathbb{Q}_{++}$ de modo que $r_n \to \lambda$, logo para toda $a \in \mathbb{R}^K_+$

$$r_n a \to \lambda a$$

Como J é contínuo

$$\lim_{n\to\infty} J(r_n a) = J(\lambda a)$$

Mas $J(r_n a) = r_n J(a)$ e $r_n J(a) \to \lambda J(a)$ e portanto

$$\lambda J(a) = J(\lambda a), \text{ para todo } \lambda > 0.$$

(passo 2) Para todo $a \in \mathbb{R}^K_+$ com $a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ e $\alpha_1 > ... > \alpha_N$:

$$J(a) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right) = I_v(a).$$

Notemos que pelas propriedades de J ao definirmos a aplicação v sobre 2^S a partir da regra dada no enunciado, $v(E) = J(\chi_E)$, temos que v é claramente uma capacidade. Por indução, sobre o número de diferentes valores assumidos distintos de zero, vamos realizar a prova utilizando os fatos vistos anteriormente e as propriedade de J:

Para $k = 1$, $a = \alpha_1 \chi_S$ e assim $J(a) = J(\alpha_1 \chi_S) \overset{passo\,1}{=} \alpha_1 J(\chi_S) = \alpha_1 v(S) = I_v(a)$. Agora supondo que $J(a) = I_v(a)$ para o caso em que a assume $k-1$ valores distintos de zero, temos:

$$\begin{aligned} J(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}) &= J(\sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_i - \alpha_N) \chi_{E_i} + \alpha_N \chi_S) \\ &\overset{(ii)}{=} J(\sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_i - \alpha_N) \chi_{E_i}) + J(\alpha_N \chi_S) \end{aligned}$$

Daí, pelo passo 1, o fato de J ser normalizado e a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} J(a) &= \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right) + \alpha_N \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right) = I_v(a) \end{aligned}$$

e assim temos o teorema para o caso de funções não-negativas.

Usando um processo análogo ao que fizemos nos comentários anteriores ao enunciando deste teorema, temos que se $T : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ é um funcional que estende $I_v \mid_{\mathbb{R}^K_+}$, positivamente homogêneo e aditivo sobre funções comonotônicas então para toda $a \in \mathbb{R}^K$:

$$T(a) = \int_{\Theta_a}^{\Lambda^a} a^*(\beta) d\beta$$

o que encerra a demonstração. □

Naturalmente, para $K \subset \mathbb{R}$ denotamos por K^S o conjunto de funções de S em $\mathbb{R}$ que apresente seus valores em K. Vamos supor que $[-1, 1] \subset K$ e que K é convexo. Um importante resultado que utililizaremos à frente é dado por:

Corolário 8. Seja $J : K^S \to \mathbb{R}$ satisfazendo

(i) Para todo $\lambda \in K$, $I(\lambda\chi_S) = \lambda$;

(ii) Se a, b e c em K^S são dois a dois comonotônicas com $J(a) > J(b)$ então para todo $\alpha \in (0, 1)$

$$J(\alpha a + (1 - \alpha)c) > J(\alpha b + (1 - \alpha)c);$$

(iii) Se $a \geq b$ então $J(a) \geq J(b)$.

Então definindo $v(E) = J(\chi_E)$ sobre 2^S então para toda $a \in K^S$

$$J(a) = I_v(a).$$

Demonstração: A idéia da prova é estender o funcional J para todo $\mathbb{R}^S$ e mostrar que as condições do Teorema anterior são satisfeitas. Pela propriedade (i) o funcional J é homogêneo sobre K^S e daí admite uma única extensão para todo $\mathbb{R}^S$.Vamos chamar a extensão de J por conveniência. Por homogeneidade e pela propriedade (iii) o funcional J sobre $\mathbb{R}^S$ também cumpre a monotonicidade. A aditividade comonotônica segue do Lema a seguir e da homogeneidade. □

Lema 9. Dadas as condições do Corolário 8, sejam $a, b \in K^S$ como-notônicas com valores em $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$ e seja $0 < \lambda < 1$. Então

$$J(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda J(a) + (1-\lambda)J(b).$$

Demonstração: Vamos denotar por $J(a) = \alpha$ e $J(B) = \beta$. Pela condição do Lema e por (i) e (iii) do Corolário 8, $\alpha\chi_S, \beta\chi_S \in K^S$ com $J(\alpha\chi_S) = \alpha$ e $J(\beta\chi_S) = \beta$. Assim, queremos provar que $J(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$. Por absurdo, vamos supor que $J(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$, para o outro caso o tratamento é análogo.

Seja $0 < \delta < \varepsilon$, logo por (i), $J(a) < J((\alpha+\delta)\chi_S)$ e $J(b) < J((\beta+\delta)\chi_S)$. Notemos que

$$\begin{aligned} &\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta + \delta \overset{(i)}{=} J(\lambda(\alpha+\delta)\chi_S + (1-\lambda)(\beta+\delta)\chi_S) \\ &\overset{(ii)}{>} J(\lambda a + (1-\lambda)(\beta+\delta)\chi_S) \overset{(ii)}{>} J(\lambda a + (1-\lambda)b) \end{aligned}$$

Como a desigualdade obtida vale para qualquer $\delta \in (0, \varepsilon)$, obtemos uma contradição. $\square$

Em sua representação, Schmeidler (1989) utiliza o mesmo contexto desenvolvido por Anscombe-Aumann (1964) e enfraquece o axioma de independência. Para isso Schmeidler introduz a noção de comonotonicidade no contexto de preferências:

Dois atos $f, g \in \mathcal{F}$ são *comonotônicos* se não exitem $s_1, s_2 \in S$ tais que

$$f(s_1) \succ f(s_2) \text{ e } g(s_2) \succ g(s_1)$$

Para ilustramos essa idéia, notemos que se ao invés de valores em X os atos tomassem valores em $\mathbb{R}$ com a ordem usual, então teríamos a noção de comonotonicidade como anteriormente vimos. Ainda, notemos que no paradoxo de Ellsberg os atos B^p e B^b não são comonotônicos:

$$[B^p((p,p)) - B^p((p,b))][B^b((p,p)) - B^b((p,b))] = -100^2 < 0$$

O axioma introduzido por Schmeidler é dado por:

(**Axioma 5**) Independência comonotônica: para todo $f, g, h \in \mathcal{F}$, dois a dois comonotônicos, e $\alpha \in (0,1)$:

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)h \sim \alpha g + (1-\alpha)h$$

Substituindo o axioma 4 por sua forma mais fraca dado no axioma 5, obtemos:

> **Teorema 10.** (Schmeidler, 1989) Suponha que uma preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{F}$ satisfaça os axiomas 1,2,3 e 5. Então existe uma única capacidade v sobre 2^S e uma função de vN-M u sobre X tal que, para todo par de atos f e g em $\mathcal{F}$:
>
> $$f \succsim g \Leftrightarrow I_v(uof) \geq I_v(uog)$$
>
> Ainda, se existem v e u como acima então a relação de preferência induzida satisfaz os axiomas 1,2,3 e 5. Finalmente, a função é única a menos de uma transformação do tipo $u \mapsto au + b$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Como todos os atos constantes são dois a dois comonotônicos a preferência induzida $\succsim|_{X\times X}$ satisfaz os axiomas de vN-M. Logo temos uma utilidade esperada u sobre X que represente $\succsim|_{X\times X}$. Como, por hipótese, $\succsim$ é não degenerada existe $f^*, f_* \in \mathcal{F}$ com $f^* \succ f_*$. Pela monotonicidade podemos escolher um estado da natureza $s \in S$ de modo que $f^*(s) \equiv x^* \succ x_* \equiv f_*(s)$. Como u é única a menos de uma transformação afim positiva, podemos fixar $u(x^*) = 1$ e $u(x_*) = -1$. Escrevemos $K = u(X)$, que então é um subconjunto convexo da reta que inclue o intervalo $[-1, 1]$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$ definimos

$$M_f = \{\alpha f + (1-\alpha)x : x \in X \text{ e } \alpha \in [0,1]\}$$

Obviamente qualquer M_f inclue o conjunto de atos constantes $\mathcal{F}_c \equiv X$. Ainda, temos que dados quaisquer dois atos $g, h \in M_f$, g e h são comonotônicos: Com efeito, tomando dois elementos em M_f dados por $\alpha f + (1-\alpha)x_1$ e $\alpha f + (1-\alpha)x_2$, se existisse algum par de estados s_1, s_2 tal que

$$\begin{aligned} \alpha f(s_1) + (1-\alpha)x_1 &\succ \alpha f(s_1) + (1-\alpha)x_2, \text{ e} \\ \alpha f(s_2) + (1-\alpha)x_1 &\prec \alpha f(s_2) + (1-\alpha)x_2 \end{aligned}$$

podemos aplicar u e obter

$$\begin{array}{rcl}\alpha u(f(s_1)) + (1-\alpha)u(x_1) & > & \alpha u(f(s_1)) + (1-\alpha)u(x_2), \text{ e} \\ \alpha u(f(s_2)) + (1-\alpha)u(x_1) & < & \alpha u(f(s_2)) + (1-\alpha)u(x_2)\end{array}$$

e daí $u(x_1) > u(x_2)$ e $u(x_1) < u(x_2)$, um absurdo.

Por uma forma mais geral do teorema de vN-M temos que existe uma função T_f sobre M_f a valores reais e afim[4] que representa a preferência induzida $\succsim|_{M_f \times M_f}$. Ainda, podemos fazer $T_f(x^*) = 1$ e $T_f(x_*) = -1$ e obtemos que $T_f(x) = u(x)$ para todo $x \in X$. Temos também que se $h \in M_f \cap M_g$ então $T_f(h) = T_g(h)$; daí podemos definir $T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ como $T(f) = T_f(f)$. Notemos que T representa a preferência $\succsim$ sobre $\mathcal{F}$ e para todo $x \in X$ vale que $T(x) = u(x)$.

Seja K^S o conjunto de funções de S em K. Definimos

$$\begin{array}{rcl}U & : & \mathcal{F} \to K^S \\ f & \mapsto & U(f)\end{array}$$

a partir da seguinte regra:

$$U(f)(s) = u(f(s)), \forall s \in S$$

Notemos que U é uma sobrejeção. Ainda, se $U(f) = U(g)$ temos que $f \sim g$.

Agora podemos definir $J : K^S \to \mathbb{R}$ fazendo

$$J(a) = T(f) \text{ onde } U(f) = a$$

Esta aplicação esta bem definida pois T é constante sobre $U^{-1}(a)$.

Ainda é fácil verificar que a aplicação $J : K^S \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(i) Para todo $\lambda \in K$, $I(\lambda\chi_S) = \lambda$;

(ii) Se a, b e c em K^S são dois a dois comonotônicas com $J(a) > J(b)$ então para todo $\alpha \in (0,1)$

$$J(\alpha a + (1-\alpha)c) > J(\alpha b + (1-\alpha)c);$$

[4] A função J_f ser afim quer dizer que para todo $\beta \in [0,1]$ e para todo $g, h \in M_f$:

$$J_f(\beta g + (1-\beta)h) = \beta J_f(g) + (1-\beta)J_f(h)$$

(iii) Se $a \geq b$ então $J(a) \geq J(b)$.

Logo podemos aplicar o Corolário 8 e, ao escrever $v(E) = J(\chi_E)$ sobre 2^S, obter que dados $a, b \in K^S$

$$J(a) \geq J(b) \Leftrightarrow I_v(a) \geq I_v(b)$$

e daí para todo $f, g \in \mathcal{F}$

$$f \succsim g \Leftrightarrow I_v(u(f)) \geq I_v(u(g))$$

o que completa a prova da existência de um representação via funcional de Choquet.

Para a reciproca, basta utilizar os resultados para o funcional de Choquet já discutidos notando que $K^S = \{\ uof : f \in \mathcal{F}\}$.

Para a unicidade, suponha que exista um par (u', v') que represente a mesma preferência. Tomando a restrição da representação sobre X pelo Teorema de vN-M temos que u' é uma transformação afim positiva de u. Daí para provamos que $v' = v$, spg, podemos supor $u' = u$. Dado $E \subset S$ seja $f \in \mathcal{F}$ tal que $U(f) = \chi_E$, por exemplo, $f(s) = x^*$ sobre E e $f(s) = \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x_*$ sobre E^c, o que implica $I_v(U(f)) = v(E)$ e $I_{v'}(U(g)) = v'(E)$. Seja $x \in X$ tal que $u(x) = v(E)$, por exemplo, $x = v(E)x^* + (1 - v(E))(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x_*)$. Daí $f \sim x$ e assim, usando que (u', v') também representa a preferência, temos:

$$u(x) = u'(x) = I_{v'}(u'ox) = v'(E)$$

e portanto $v(E) = v'(E)$ para todo $E \subset S$. □

Exemplo: No experimento de Ellsberg, se o tomador de decisões apresentar uma capacidade v, em que:

$$v((b,b) \text{ ou } (b,p)) = v((p,b) \text{ ou } (p,p)) = 1/2$$

$$v((b,b) \text{ ou } (p,b)) = v((b,p) \text{ ou } (p,p)) = \alpha$$

com $2\alpha < 1$, então

$$\begin{aligned} I(B^b) &= (u(100) - u(0))v((b,b) \text{ ou } (p,b)) + u(0) \\ &= \alpha u(100) + (1-\alpha)u(0) \end{aligned}$$

ainda,

$$I(B^p) = I(B^b) < (1/2)u(100) + (1/2)u(0) = I(A^p) = I(A^b)$$

Notemos que esta ordenação é consistente com aquela obtida por Ellsberg. $\square$

O Paradoxo de Ellsberg serve como uma evidência de que os indivíduos tendem a preferir situações em que estes tenham uma *melhor informação* sobre as possibilidades de perda e ganho. A ambiguidade reflete exatamente esta impossibilidade de conhecer ou estimar a chances de cada contingência numa situação de incerteza. Assim, numa situação de incerteza em que um indivíduo tenha uma comportamento consistente com a teoria da probabilidade subjetiva, este apresenta neutralidade à ambiguidade, como é o caso de um indivíduo que associe uma probabilidade $50\% - 50\%$ diante da urna B. Assim é comum dizer que a teoria de Savage reduz uma situação de incerteza a uma situação de escolha sob risco.

A *aversão à ambiguidade* de uma preferência $\succsim$ é expressa pela seguinte propriedade: dados f, g pertencentes a $\mathcal{F}$ e α pertencente ao intervalo $[0, 1]$:

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1 - \alpha)g \succsim f$$

Comentaremos mais sobre esta propriedade quando tratarmos da representação de Gilboa-Schmeidler (1989). No contexto dado no teorema de Schmeidler, a aversão a ambiguidade pode ser expressa pela convexidade da capacidade v :

Definição 11. Uma capacidade $v : 2^S \to [0, 1]$ é *convexa* ou *super-aditiva* se para todo $E, F \in 2^S$:

$$v(E \cup F) \geq v(E) + v(F) - v(E \cap F)$$

Em particular pode existir algum evento $A \in 2^S$ tal que

$$v(A) + v(A^c) < 1$$

A caracterização obtidade por Schmeidler (1986, 1989) é dada na seguinte:

Proposição 12. Dada uma preferência nas condições do teorema de Schmeidler, são equivalentes:

(a) $\succsim$ revela aversão à ambiguidade;

(b) A capacidade v obtida na representação é convexa;

(c) Para todo $f \in \mathcal{F}$:

$$I(f) = \min_{p \in core(v)} \sum_{s \in S} u(f(s))p(s)$$

onde,

$$core(v) = \{p : 2^S \to [0,1] : \\ p \,\text{é uma probabilidade t.q. } p \geq v \; em \; 2^S\}$$

(d) Para todo $f, g \in \mathcal{F}$:

$$I(f+g) \geq I(f) + I(g)$$

Neste proposição[5] o fato mais importante a ser mencionado é a caracterização dada no item (c): um tomador de decisões, que respeite as propriedade comportamentais descritas nos axiomas de Schmeidler e que seja avesso à ambiguidade, tem sua escolha determinada por um conjunto de distribuições de probabilidade: A utilidade *ex ante* proporcionada por um ato f é dada pelo mínimo dentre todos os valores esperados calculados a partir das probabilidades dadas no $core(v)$.

10.3 Ambiguidade e Conjuntos de Probabilidades.

A última caracterização dada na seção anterior abriu caminho para uma nova maneira de se pensar a ambiguidade: uma escolha é ambígua quando o tomador de decisões apresentar mais que uma probabilidade como possível descrição das chances de cada contingência.

[5] A prova desta proposição requer conhecimentos que vão além daqueles pressupostos para esta leitura, e pode ser encontrada para o caso geral em Schmeidler(1986)

Essa caracterização é obtida por Gilboa-Schmeidler (1989), também no contexto de Anscombe-Aumann, ao enfraquer o axioma de *independência comonotônica*:

(**Axioma 6**) C-Independência : para todo $f, g \in \mathcal{F}$, $x \in X$ e $\alpha \in (0,1)$:

$$f \sim g \Rightarrow \alpha f + (1-\alpha)x \sim \alpha g + (1-\alpha)x$$

Notemos que este axioma enfraquece o Axioma 5, uma vez que, dados $f \in \mathcal{F}$ e $x \in X$ temos que f e x são comonotônicos.

Ainda, fixamos como axioma 7:

(**Axioma 7**) A preferência revela *aversão à ambiguidade.*

Temos então dadas as condições para enunciar o teorema de Gilboa-Schmeidler (1989):

Teorema 13 (Gilboa-Schmeidler) Seja $\succsim$ uma relação binária sobre $\mathcal{F}$, são equivalentes:

(a) A relação $\succsim$ satisfaz os axiomas 1, 2, 3, 6 e 7;

(b) Existe uma função de vN-M $u : X \to R$ e um único conjunto C não-vazio, convexo e fechado de probabilidades sobre 2^S tal que, para todo $f, g \in \mathcal{F}$:

$$f \succsim g \Leftrightarrow \min_{p \in C} \sum_{s \in S} u(f(s))p(s) \geq \min_{p \in C} \sum_{s \in S} u(f(s))p(s)$$

Ainda, a função é única a menos de uma transformação do tipo $u \mapsto au + b$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Para a demonstração vamos proceder a partir de uma série de lemas:

Lema 14. Existe uma utilidade esperada $u : X \to \mathbb{R}$ que não é constante, tal que para todo $x, y \in X : x \succsim y$ se, e só se, $u(x) \geq u(y)$. Ainda u é única a menos de uma transformação afim positiva.

Demonstração: Obviamente os axiomas (1,2 e 6) implicam as condições dadas no Teorema de vN-M. $\square$

Lema 15. Para toda $f \in \mathcal{F}$ existe um equivalente certo $c_f \in \mathcal{F}_c \equiv X$, isto é, existe algum $c_f \in X$ tal que $c_f \sim f$.

Demonstração: Para cada $f \in \mathcal{F}$ sejam $x, y \in X$ de modo que

$$x \succsim f(s) \succsim y \, \text{para todo } s \in S$$

e assim $x \succsim f \succsim y$. Agora pela hipótese de continuidade os conjuntos

$$A = \{\alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \succsim f\} \text{ e}$$

$$B = \{\alpha \in [0,1] : f \succsim \alpha x + (1-\alpha)y\}$$

são fechados com $1 \in A$ e $0 \in B$ de modo que $A \cup B = [0,1]$ é um conexo. Assim, existe $\beta \in [0,1]$ tal que $\beta x + (1-\beta)y \sim f$. □

Notemos que poderíamos tomar a existência de um equivalente certo na prova da representação de Schmeidler, e proceder de maneira um pouco mais fácil do que tomando os conjuntos M_f, $f \in \mathcal{F}$.

Lema 16. Dada a função $u : X \to \mathbb{R}$ obtida no Lema 15 existe um único funcional $J : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ such that

(i) $f \succeq g$ se, e só se, $J(f) \geq J(g)$ para todo $f, g \in F$.

(ii) Se $f = x\chi_S \in \mathcal{F}_c$ então $J(f) = u(x)$.

Demonstração: Sobre $\mathcal{F}_c$ o funcional J é unicamente determinado por (ii). Como para toda $f \in \mathcal{F}$ existe um equivalente certo $c_f \in \mathcal{F}_c$, podemos fazer $J(f) = u(c_f)$ e por construção J satisfaz (i), daí também é único. □

Como de costume denotamos por K^S o conjunto de funções de S em $K \subset \mathbb{R}$. Ainda, notemos que podemos tomar a função de vN-M de modo que existem $x_1, x_2 \in X$ onde $u(x_1) < -1$ e $u(x_2) > 1$ e escolhemos $K = u(X)$, que então é um conjunto fechado e convexo convexo da reta.

Lema 17. Existe um funcional

$$I : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$$

tal que :

(i) I é super-aditivo, i.e., para cada $a, b \in \mathbb{R}^S : I(a+b) \geq I(a) + I(b)$;

(ii) I é positivamente homogêneo,i.e., para cada $a, b \in \mathbb{R}^S, \lambda \geq 0 : I(\lambda a) = \lambda I(a)$;

(iii) I é monótono, i.e., para cada $a, b \in \mathbb{R}^S : a \geq b \Rightarrow I(a) \geq I(b)$;

(iv) I é normalizado, i.e., $I(\mathbf{1}_S) = 1$;

(v) I é C-independente, i.e., para cada $a \in \mathbb{R}^S$ e $k \in \mathbb{R}$, $I(a + k\chi_S) = I(a) + I(k\chi_S)$.

Demonstração: Vamos iniciar a prova com domínio K^S e então vamos extender para todo $\mathbb{R}^S$. Se $f \in \mathcal{F}$ então $u(f) \in K^S$. Agora, se $a \in K^S$ temos que existe uma partição $\{E_i\}_{i=1}^n \subset 2^S$ de S e $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ tal que

$$a := \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\mathbf{1}_{E_i}$$

daí, basta escolhermos $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(s) = x_i$ quando $s \in E_i$ e então concluímos que $a = u(f)$.

Deste modo podemos escrever $K^S = \{u(f) : f \in \mathcal{F}\}$; ainda, $u(f) = u(g) \Leftrightarrow u(f(s) = u(g(s)), \forall s \in S \Leftrightarrow f(s) \sim g(s), \forall s \in S$; e pela monotonicidade $f \sim g$, i.e., $u(f) = u(g) \Leftrightarrow J(f) = J(g)$.

Defina $I(a) = J(f)$ quando $a = u(f)$; desse modo temos que I esta bem definida sobre K^S.

Agora, se $a = u(f)$ e $b = u(f) \in K^S$ e $a \geq b$ então $u(f(s)) \geq u(g(s))$ para todo $s \in S$. Novamente pela monotonicidade temos que $f \succsim g$, i.e., $J(f) \geq J(g)$ e $I(a) = I(u(f)) = J(f) \geq J(g) = I(u(g)) = I(b)$; o que prova que I é monótono.

Seja $k \in u(X)$ então existe algum $x \in X$ tal que $k = u(x)$ e $I(k\mathbf{1}_S) = I(u(x)\mathbf{1}_S) = J(x) = u(x) = k$. Em particular, como $1 \in u(X)$, $I(\mathbf{1}_S) = 1$.

Agora mostremos que I é homogêneo; tomando $a = \alpha b$ onde $a, b \in K^S$ e $0 < \alpha \leq 1$. Seja $g \in \mathcal{F}$ satisfazendo $u(g) = b$ e defina $f = \alpha g + (1-\alpha)z$, com $z \in X$ e $u(z) = 0$. Daí $u(f) = \alpha u(g) +$

$(1-\alpha)u(z) = \alpha b = a$, e então $I(a) = J(f)$. Pela C-independência, $\alpha c_g + (1-\alpha)z \sim \alpha g + (1-\alpha)z = f$, logo,

$$J(f) = J(\alpha c_g + (1-\alpha)x_*) = \alpha J(c_g) + (1-\alpha)J(x_*) = \alpha J(c_g)$$

e podemos escrever

$$I(\alpha b) = I(a) = J(f) = \alpha J(c_g) = \alpha I(b).$$

Mais ainda, temos igualdade para $\alpha > 1$:

$$a = \alpha b \Rightarrow b = \alpha^{-1} a \Rightarrow I(b) = \alpha^{-1} I(a) \Rightarrow I(a) = \alpha I(b).$$

Agora, por homogeneidade podemos extender I para todo $\mathbb{R}^S$ e também vamos chamar a extenção de I.

Agora vamos provar a propriedade *(v)*; fixamos $a \in \mathbb{R}^S$ and $\xi \in \mathbb{R}$. Por homogeneidade podemos assumir , spg, que $2a$ e $2\xi\chi_S \in K^S$. Definindo $\beta = I(2a) = 2I(a)$. Seja $f \in \mathcal{F}$ de modo que $u(f) = 2a$ e tomamos $y, z \in X$ satisfazendo $u(y) = \beta\chi_S$ e $u(z) = 2\xi\chi_S$. Como $f \sim y$ a C-independência da preferência implica que

$$\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}z \sim \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$$

Daí,

$$I(a + \xi\chi_S) = I(\beta\chi_S + \xi\chi_S) = \frac{1}{2}\beta + \xi = I(a) + \xi,$$

e assim I é C-independênte.

Nos resta mostrar que I é super-aditivo: Sejam, spg, $a, b \in K^S$ e notemos que é suficiente mostrarmos que

$$I\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \geq \frac{1}{2}I(a) + \frac{1}{2}I(b)$$

Sejam $f, g \in \mathcal{F}$ tais que $u(f) = a$ e $u(g) = b$. Se $I(a) = I(b)$ então pela aversão à ambiguidade $\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \succsim f$, e desse modo temos que

$$I\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \geq I(a) = \frac{1}{2}I(a) + \frac{1}{2}I(b).$$

Agora, caso $I(a) > I(b)$ fixamos $\xi = I(a) - I(b)$. Definindo $c = b + \xi\chi_S$, pela C-independência de I, o que já provamos, temos $I(c) = I(b) + \xi = I(a)$. Usando a C-independência de I novamente por duas vezes e a super-aditividade de I para o caso já provado, obtemos:

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + \frac{1}{2}\xi &= I\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) \\ &\geq \frac{1}{2}I(a) + \frac{1}{2}I(c) = \frac{1}{2}I(a) + \frac{1}{2}I(b) + \frac{1}{2}\xi. \end{aligned}$$

O que encerra a demonstração deste lema. □

Denotamos por $\Delta(S)$ o conjunto de probabilidades sobre S, o qual pode ser identificado com o simplex em $\mathbb{R}^S$, segue o importante e fundamental lema para a representação de Gilboa-Schmeidler[6]:

> **Lema 18.** Seja $I : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ um funcional cumprindo as propriedades $\{i, ii, iii, iv, v\}$ do Lema anterior. Então existe um subconjunto não-vazio, convexo e fechado $P \subset \Delta(S)$ tal que:
>
> $$I(a) = \min_{p \in P} \sum_{s \in S} a(s)p(s)$$

Demonstração: A prova deste lema pode ser encontrada em Huber (1981), p. 256, e utiliza o teorema de separação de convexos. □

Combinando os resultados obtidos nos lemas anteriores, obtemos a representação de Gilboa-Schmeidler a partir dos axiomas 1, 2, 3, 6 e 7. A recíproca segue da linearidade do somatório e da super-aditividade do operador inf: lembre que um resultado básico de análise diz que dadas duas funções $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos que $inf(\delta_1 + \delta_2) \geq inf(\delta_1) + inf(\delta_2)$. Ainda, é fácil provar que $inf(\delta + c) = inf(\delta) + c$, $\forall\, \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\forall c \in \mathbb{R}$.

[6] Para o caso geral explorado em Gilboa-Schmeidler(1989) a prova deste lema fundamental pode ser encontrada no próprio artigo. No caso geral, mas com X dado pelo conjunto de payoffs monetários $\mathbb{R}_+$, a prova é dada por Chateauneuf (1991).

O conjunto de probabilidades C, obtido na representação, é interpretado como a ambiguidade percebida pelo tomador de decisões e o operador *min* captura a atitude de aversão à ambiguidade.

A propriedade de aversão à ambiguidade pode ser interpretada como uma *propensão ao heding*. Esta característica comportamental não é suportada na teoria da probabilidade subjetiva. Por exemplo, um tomador de decisões pode ser indiferente entre dois ativos do tipo:

$$f(s_1) = 2,\ f(s_2) = 6 \ \text{ e } g(s_1) = 8,\ g(s_2) = 0$$

e preferir estritamente um ativo que entregue 4 com certeza ao comparar com f ou g, para isso tome:

$$C = \{(\alpha, 1-\alpha) : \alpha \in [0.4, 0.6]\} \text{ e } u \text{ igual à identidade.}$$

Notemos ainda que, no caso do Paradoxo de Ellsberg, se o tomador de decisões considera todas as crenças possíveis, seu comportamento será consistente com aquele descrito na ordenação incompatível com a abordagem de probabilidades subjetivas, uma vez que as duas apostas possíveis na urna B nos dão um payoff ex-ante igual a zero.

Uma importante aplicação desta teoria foi dada por Dow-Werlang (1992) à escolha de *portfolio*, ilutramos este resultado com o seguinte exemplo: Existem dois possíveis estados da natureza, sendo β a probabilidade do estado 1, e considere um investidor que apresente neutro ao risco (i.e., u é igual a identidade) um comportamento consiste com o seguinte funcional de utilidade:

$$U(f) = \min_{\{\beta : 0.5 \leq \beta \leq 0.6\}} \{\beta f(s_1) + (1-\beta) f(s_2)\}$$

Se g é tal que $g(s_1) = 8$ e $g(s_2) = 2$, para qual intervalo de preços este investidor tomar uma posição de compra(venda)?

Na teoria da utilidade esperada temos que existe um preço π^* onde o investidor fica indiferente entre tomar uma ou outra posição, acima deste preço o investidor vende o ativo (*short sale*) e abaixo do mesmo o investidor compra o ativo (*buying*). Neste nosso exemplo as coisas são diferentes:

$$U(g) = \min_{\{\beta : 0.5 \leq \beta \leq 0.6\}} \{8\beta + 2(1-\beta)\} = 5.0$$

$$\begin{aligned} U(-g) &= \min_{\{\beta:0.5\leq\beta\leq0.6\}}\{-8\beta + -2(1-\beta)\} \\ &= \min_{\{\beta:0.5\leq\beta\leq0.6\}}\{-6\beta - 2\} = -5.6 \end{aligned}$$

Ou seja, na compra o investidor tem um *payoff ex ante* de 5.0 e na venda seu *payoff ex ante* é de -5.6, ou seja, ele *antecipa* pagar 5.6. Logo se o preço do ativo for $\pi < 5.0$ o investidor toma uma posição de compra, quando o preço do ativo for $\pi > 5.6$ ele toma uma posição de venda. Daí, temos um intervalo de inércia onde o investidor não negocia o ativo. Ainda, a ambiguidade esta positivamente relacionada ao tamanho do intervalo de ausência de trocas.

10.4 Comentários Finais

Neste capítulo tratamos da abordagem em que obtemos uma probabilidade não-aditiva (capacidade) ou um conjunto de probabilidades como forma de se representar a avaliação subjetiva da informação disponível por parte de um tomador de decisões. Tal caracterisca é interpretada como a ambiguidade percebida pelo tomador de decisões. Concentramos nossa apresentação para as generalizações da teoria de Anscombe-Aumann[7] que enfraquecem o axioma de independência.

Existe uma outra maneira de obter uma representação do julgamento subjetivo, a partir de um conjunto de probabilidades, ao enfraquecer o axioma da completude da relação de preferência. Tal abordagem foi realizada por Bewley (1986) no contexto de Ancombe-Aumann[8], e seu teorema principal diz que uma preferência cumpre os axioma de Anscombe-Aumann com exceção da completude, se e somente se, existe uma utilidade u de vN-M sobre as consequências (loterias) e um conjunto C não-vazio, convexo e fechado[9] de probabilidades sobre os estados da natureza tal que:

$$f \succsim g \Leftrightarrow \sum_{s\in S} u(f(s))p(s) \geq \sum_{s\in S} u(g(s))p(s), \text{ para todo } p \in C.$$

[7] A obra de Fishburn (1970) é uma referência clássica ao contexto proposto por Anscombe-Aumann por elaborar uma reformulação mais geral desta teoria.

[8] Para o caso puramente subjetivo de Savage consulte Ghirardato et. al. (2003)

[9] Como temos um número finito de estados da natureza, C é subconjunto de algum simplex finito dimensional.

Uma justificativa interessante para a incompletude da preferência reside no fato de o conjunto de atos abranger muitas decisões contra-factuais. Neste sentido é natural pensar que os indivíduos não são capazes de ordenar todos os atos.

Para um survey recente sobre as aplicações, em diversos campos da teoria econômica, da noção de ambiguidade proposta por Schmeidler (1989) e Gilboa-Schmeidler (1989) consulte Mukerji e Tallon (2003). Relativamente, temos um número menor de aplicações do modelo proposto por Bewley (1986). Um bom exemplo da aplicação da noção de múltiplas crenças via preferências incompletas, ao contexto de equilíbrio geral com mercados financeiros, é dado por Rigotti e Shannon (2005).

10.5 Exercícios

1. Mostre que o axioma de independência dado por Anscombe - Aumann não é consistente com comportamento observado no Paradoxo de Ellsberg.

2. Seja $a \in \mathbb{R}^K$ de modo que a imagem de a seja dada por $Im[a] = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$, de modo que $\alpha_1 > ... > \alpha_N$. Definindo $E_i = a^{-1}(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq N$; temos que $E_i \cap E_j = \emptyset$ quando $i \neq j$ e $\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i = S$, ou seja, $\{E_i\}_{i=1}^N$ é uma partição de S. Fixando $\alpha_{N+1} = 0$, mostre que o funcional de Choquet, como definido no texto, pode ser reescrito como

$$I_v(a) = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right)$$

3. Dada a distribuição de a com respeito a uma capacidade v, denotada por a^*, mostre que o funcional de Choquet é dado pela integral de Riemann de a^*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^*(\alpha) d\alpha = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) v \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j \right) = I_v(a)$$

4. Dê exemplo de alguma situação em que a propriedade de aversão à ambiguidade possa ser interpretada como uma *propensão ao heding*, como feito no texto.

5. Dada uma capacidade convexa $v : 2^S \to [0, 1]$, defina o índice de incerteza do evento $E \subset S$ como sendo

$$C_v(E) = 1 - v(E) - v(E^c)$$

6. Suponha $S = \{s_1, s_2\}$ e dois indivíduos neutros ao risco com capacidades convexas v_1 e v_2 de modo que $C_{v_1}(E) > C_{v_2}(E)$ em todo evento $E \neq S$. Dado um ato (ou ativo financeiro) $f : S \to \mathbb{R}$ com $f(s_1) > f(s_2)$, calcule os intervalos de inércia para cada indivíduo. Qual é maior?

Parte IV

Escolha Social

Capítulo 11

Introdução a escolhas sociais

Vamos agora estudar as escolhas sociais. É evidente que há situações em que decisões que precisam ser tomadas em grupo afetam o bem-estar de cada indivíduo. Em primeiro lugar, devemos observar que dependendo da forma de escolha que se adote, um indivíduo pode ser beneficiado. Para ilustrar isso, recordemos o Paradoxo de Condorcet:

Suponha que a Câmara de Deputados é formada por três partidos, 1, 2, 3, de mesmo peso político (mesmo número de votos) e há três projetos (A, B, C) em consideração sendo que apenas um deles deve ser escolhido. A preferência dos partidos é a seguinte:

$$A \succ_1 B \succ_1 C$$
$$B \succ_2 C \succ_2 A$$
$$C \succ_3 A \succ_3 B$$

Digamos que o presidente da Câmara estabeleça o seguinte sistema de escolha dos projetos: dois projetos são votados. O que obtiver maior número de votos disputará com o terceiro. O vencedor da segunda votação será o projeto escolhido. A ordem com que os projetos serão votados será determinada "aleatoriamente" pelo presidente da Câmara.

Essa regra parece bastante razoável, pelo menos à primeira vista. No entanto, ela simplesmente determina que o presidente escolherá, sozinho, o projeto. De fato, é possível ver que, qualquer que seja o projeto deixado para o segundo round, este será o projeto vencedor. De fato:

- Segundo round com A - Neste caso o projeto B recebe os votos dos partidos 1 e 2 e vence a primeira rodada. Depois, o projeto A recebe os votos dos partidos 1 e 3.

- Segundo round com B - O projeto C recebe os votos dos partidos 2 e 3. Depois é derrotado para o projeto B, que recebe os votos de 2 e 1.

- Segundo round com C - O projeto A ganha a primeira rodada com os votos de 1 e 3 e depois perde para C pelos votos de 2 e 3.

O exemplo acima mostra, então, que escolhas sociais podem ser manipuladas. Na verdade, conforme veremos mais à frente, não existirá nenhuma maneira de estabelecer regras de escolha social totalmente satisfatórias no caso geral. Isso nos obriga, então, a estudar cada uma delas e o que apresentam de bom e ruim. Começaremos com o caso em que há apenas duas escolhas possíveis.

Este capítulo está fortemente baseado no livro de Taylor (1995).

11.1 Sistemas de Escolha Sim-Não

Suponha que o conjunto de decisão tem apenas duas alternativas, isto é, $X = \{1, 0\}$, onde 1 significa sim, isto é, uma proposta é aprovada e 0, não (o projeto é rejeitado e sua alternativa é adotada).[1] Seja $I = \{1, ..., n\}$ o conjunto de indivíduos na sociedade, cada um deles com uma preferência bem definida, isto é, a cada indivíduo é atribuído

[1] Observe que estamos impedindo a possibilidade de empate ou indiferença. Isso é bastante realístico em muitas situações. Posteriormente relaxaremos essa hipótese.

um elemento de X. O conjunto X^n denota, portanto, o conjunto de todas as configurações de preferências da sociedade. Temos a seguinte:

Definição 1. Uma regra de escolha social ou simplesmente regra de escolha é uma função $F : X^n \to X$.

Damos a seguir alguns exemplos de regras de escolha social:

Exemplo 2. Plebiscitos

Cada eleitor dá um voto (sim ou não) e a proposta é aprovada se a maioria dos votos é sim, isto é, $F(x) = 1$ se $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n/2$ e 0 caso contrário.

Para os exemplos abaixo, procure definir a regra de escolha social.

Exemplo 3. Comitê de Política Monetária (COPOM)

É formado por oito membros da Diretoria do Banco Central com direito a voto, sendo que o Presidente do Banco Central tem o voto qualificado (isto é, em caso de empate prevalece seu voto).[2]

Exemplo 4. Comunidade Européia (configuração do Trata-do de Roma de 1958)

Era formada por seis países - França, Alemanha, Itália, Bélgica, Holanda, Luxemburgo. Os três primeiros países tinha direito a quatro votos cada, Bélgica e Holanda tinham dois votos cada, e Luxemburgo tinha direito a apenas um voto. Uma proposta seria aceita se tivesse um total de doze votos.

Exemplo 5. Conselho de Segurança da ONU

Há quinze países, sendo cinco com assento permanente (China, Inglaterra, França, Rússia e Estados Unidos) e que tem o poder de veto. Uma proposta é aprovada se tem pelo menos 9 votos favoráveis.

Exemplo 6. Emendas à Constituição Brasileira

---

[2] Naturalmente o COPOM decide entre mais do que uma alternativa. Podemos simplificar as coisas, porém, sem fugir muito à realidade, se assumirmos que a decisão é apenas aprovar ou não a recomendação do Diretor de Política Monetária.

Para que uma emenda seja aprovada, é necessário que seja aprovada por 3/5 dos membros da Câmara dos Deputados e por 3/5 dos membros do Senado.[3]

Exemplo 7. Emendas à Constituição do Canadá

O Canadá tem um sistema diferente para aprovação de emendas à Constituição: ela tem de ser aprovada por pelo menos sete das dez províncias canadenses, sujeita à condição de que as províncias que aprovam a emenda tenham pelo menos metade da população canadense. Para efeito do exemplo, vamos tomar a população dada pelo censo de 1961:

Ilha Príncipe Edward - 1%
Newfoundland - 3%
New Brunswick - 3%
Nova Scotia - 4%
Manitoba - 5%
Saskatchewan - 5%
Alberta - 7%
British Columbia - 9%
Quebec - 29%
Ontário - 34%

A definição de regra de escolha social não impõe nenhuma estrutura sobre a função F. É fácil ver, porém, que algumas propriedades básicas são desejáveis. Por exemplo, é bastante razoável pedir que, se todos os indivíduos da sociedade aceitam o projeto ($x = (1, ..., 1)$) então o projeto será adotado, isto é, $F(x) = 1$. De fato, esta propriedade básica tem um nome:

Axioma da Unanimidade - Dizemos que uma regra de escolha social satisfaz o Axioma da Unanimidade ou respeita unanimidade (ou ainda que é Paretiana) se $F(1, ..., 1) = 1$ e $F(0, ..., 0) = 0$.

Observe que respeitar a unanimidade é uma condição bastante fraca. Em outras palavras, se um regra não satisfaz o Axioma da

[3] É requerido votação em dois turnos. Se supusermos que não há mudança de opinião (e de conteúdo), isso se torna irrelevante.

Unanimidade, então ela certamente não é uma regra de escolha social razoável. Uma condição mais interessante é a seguinte:

Definição 8. Uma regra de escolha social $F : X^n \to X$ é um sistema por pesos se existem pesos α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, não todos identicamente nulos e uma quota $q \in \mathbb{R}_{++}$ tais que F pode ser descrita da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqslant q \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{11.1}$$

Observe que um sistema por pesos é bastante conveniente, porque especifica de uma forma clara qual é o peso que cada participante tem. Temos o seguinte resultado bastante natural:

Proposição 9. Um sistema por pesos satisfaz o Axioma da Unanimidade.

Demonstração: Exercício.

É óbvio que o exemplo 2 é um sistema por peso. Também é bastante evidente que o exemplo 4 também é um sistema por pesos. De fato, sua descrição já atribui os pesos α_i de cada país e, ainda, a quota mínima $q = 12$ para que uma proposta seja aprovada. Os outros exemplos são menos óbvios.

Exemplo 3 (cont.) - O sistema de decisão do COPOM é um sistema por pesos

Este sistema especifica que o voto do presidente tem o poder de desempatar. É natural, portanto, que atribuamos um peso um pouco maior para seu voto, mas isso tem de ser feito sem que alteremos o resultado da decisão em casos em que não há empate. Verifique que $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = ... = \alpha_8 = 1$ e uma quota $q = 4.2$ são suficientes para descrever F.

Exemplo 5 (cont.) - Talvez surpreendentemente, o sistema de votação do Conselho de Segurança da ONU é também um sistema por pesos. Para mostrar isso, precisamos encontrar os pesos e a quota. Vamos começar atribuindo peso 1 para os membros não permanentes e seja x o peso dos membros permanentes. Sabemos que mesmo que os 10 membros não permanentes e mais quatro permanentes aceitem uma proposta, ela será rejeitada (uma vez que um membro permanente é contrário).[4] Ou seja, temos

$$4x + 10 < q,$$

e nove membros, ou seja, os cinco membros permanentes mais quatro não permanentes são suficientes para a aprovação, isto é, $5x + 4 \geqslant q$. Para que ambas desigualdades possam ser satisfeitas, é necessário $x > 6$. Seja $x = 7$. Então, precisamos $38 < q \leqslant 39$. Portanto, nosso candidato é um sistema por pesos em que a quota é 39 e o peso dos membros permanentes é 7 em comparação com o peso de 1 dos membros não permanentes.[5] O leitor é convidado a verificar que o sistema por pesos proposto representa a regra analisada.

Agora vamos introduzir alguns conceitos que usaremos posteriormente.

Definição 10. a) Uma coalizão é qualquer conjunto $C \subset I$ de indivíduos.

b) Dada uma regra F, uma coalizão C é vencedora se, no caso em que todos os indivíduos na coalizão têm a mesma preferência, isto é, se $x_i = k$, $\forall i \in C$, então a escolha social é a mesma da coalizão, isto é, $F(x) = k$, para $k = 1$ ou 0.[6]

c) Uma regra F é monótona se para toda coalizão vencedora C, todo coalizão $D \supset C$ é também vencedora.

Proposição 11. Se uma regra é monótona e tem pelo menos uma coalizão vencedora, então a regra satisfaz o Axioma da Unanimidade.

Demonstração - Exercício.

Observe que pode haver regras que não têm coalizões vencedoras. Considere o seguinte

---

[4] Lembre-se que não estamos considerando abstenções.

[5] Observe que não há unicidade na escolha. Poderíamos ter arbitrado $x = 8$ e q poderia ser 43 ou 44, apenas para falar em números inteiros.

[6] Em outras palavras, uma coalizão é vencedora se consegue determinar o resultado da escolha social não importando a opinião dos membros de fora da coalizão.

Exemplo 12. Seja $I = \{1,2\}$ e $F(0,0) = 1$, $F(0,1) = 0$, $F(1,0) = 0$, $F(1,1) = 1$. Esta regra não satisfaz o Axioma da Unanimidade. Observe que F não tem coalizões vencedoras e, portanto, é monótona.

Reciprocamente, temos a seguinte:

Proposição 13. Se F satisfaz o Axioma da Unanimidade então existem coalizões vencedoras.

Demonstração. Nesse caso, trivialmente a coalizão formada por todos os indivíduos, I, é vencedora.

Naturalmente, o fato de uma regra satisfazer o Axioma da Unanimidade não implica que a regra seja monótona. Por outro lado, temos o seguinte resultado interessante:

Proposição 14. Todo sistema por pesos é monótono e tem coalizões vencedoras.

Demonstração - Exercício.

Bom, depois dessa digressão, vamos retomar nossa análise de se todos as regras (ou quais regras) são, na verdade, sistemas por peso. Em certo sentido, o exemplo 3 foi surpreendente porque ele colocava poder de veto que pôde ser representado por pesos. Podemos agora verificar que o exemplo 4 não será sistema por pesos.

Definição 15. Uma regra de escolha social é robusta a trocas se, para quaisquer duas coalizões vencedoras C e C', e indivíduos i, i' tais que $i \in C$ e $i' \in C'$, pelo menos uma das duas coalizões $C \cup \{i'\} \setminus \{i\}$ ou $C' \cup \{i\} \setminus \{i'\}$ ainda é vencedora.

Em palavras, uma regra é robusta a trocas se podemos trocar dois indivíduos em coalizões vencedoras e ainda assim obtemos pelo menos uma coalizão vencedora.

Proposição 16. Um sistema por pesos é robusto a trocas.

Demonstração: Seja S a soma de todos os pesos, isto é, $S = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ e seja $P(C) = \sum_{j \in C} \alpha_j$. É fácil ver que uma coalizão C é vencedora se e somente se

$$P(C) = \sum_{j \in C} \alpha_j \geqslant q > \sum_{j \notin C} \alpha_j = S - P(C)$$

Sejam C e C' coalizões vencedoras e indivíduos i, i' tais que $i \in C$ e $i' \in C'$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha_i \geqslant \alpha_{i'}$. Então

$$P(C' \cup \{i\} \setminus \{i'\}) \geqslant P(C') \geqslant q > S - P(C') \geqslant S - P(C' \cup \{i\} \setminus \{i'\}),$$

o que significa que a coalizão $C' \cup \{i\} \setminus \{i'\}$ é vencedora.■

Agora, podemos verificar que o Exemplo 6 não é um sistema por votos!

Exemplo 6 (cont.). Dividamos a Câmara de Deputados em dois conjuntos não idênticos, D e D' cada um dos quais tem o menor número (inteiro) de deputados não inferior a 3/5 do total de deputados e, com definições similares, tomemos os conjuntos S e S' de membros do Senado. Considere as seguintes coalizões vencedoras: $C = D \cup S$ e $C' = D' \cup S'$. Agora tome um senador $i \in S$ e um deputado $i' \in D$. Então nenhuma das duas coalizões $C \cup \{i'\} \setminus \{i\}$ ou $C' \cup \{i\} \setminus \{i'\}$ é vencedora. A primeira tem um senador a menos que o necessário para a aprovação no Senado; a segunda tem um deputado a menos. Logo, o processo de emenda da Constituição Brasileira não é um sistema por pesos.■

O processo de emenda à Constituição do Canadá, porém, é robusto a trocas, como mostramos abaixo.

Exemplo 7 (cont.). Uma coalizão é vencedora nessa regra se e somente se contém pelo menos sete províncias e se sua população total for de pelo menos 50%. Dadas duas coalizões C e C' e duas províncias distintas $i \in C$ e $i' \in C'$, ambas as coalizões $C \cup \{i'\} \setminus \{i\}$ e $C' \cup \{i\} \setminus \{i'\}$ têm pelo menos sete províncias. Também é verdade que pelo menos uma das duas tem pelo menos 50% da população.

Logo, uma das duas é vencedora, o que mostra que o processo é robusto a trocas.■

Apesar de o sistema descrito no Exemplo 7 ser robusto a trocas, ele não é um sistema por pesos, como mostraremos a baixo. Para demonstrar isso, precisamos de uma nova definição. Seja $\{C_j\}_{j=1}^{l}$ uma coleção de coalizões. Denotaremos por $i\left(\{C_j\}_{j=1}^{l}\right)$ o número de conjuntos na coleção $\{C_j\}_{j=1}^{l}$ que contêm o indivíduo i.

Definição 17. Uma regra é robusta a intercâmbios se para toda coleção $\{C_j\}_{j=1}^{l}$ de coalizões vencedoras e toda outra coleção $\left\{C'_j\right\}_{j=1}^{l}$ tal que $i\left(\{C_j\}_{j=1}^{l}\right) = i\left(\left\{C'_j\right\}_{j=1}^{l}\right)$, para todo $i = 1, ..., n$, então existe um k tal que C'_k é vencedora.

Em termos simples, a robustez a intercâmbios significa que podemos rearranjar da maneira que quisermos os indivíduos nas coalizões, contanto que não eliminemos a participação de ninguém. Temos o seguinte resultado:

Proposição 18. Um sistema por pesos é robusto a intercâmbios.
Demonstração: Como a coleção $\{C_j\}_{j=1}^{l}$ é formada por coalizões vencedoras, então para todo k,

$$P(C_j) \geqslant q > S - P(C_j).$$

Observe também que $\sum_{j=1}^{l} P(C_j) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\{C_j\}_{j=1}^{l}\right)\alpha_i$. Como o número $i\left(\{C_j\}_{j=1}^{l}\right)$ não pode ser alterado por intercâmbios, isto é, $i\left(\{C_j\}_{j=1}^{l}\right) = i\left(\left\{C'_j\right\}_{j=1}^{l}\right)$, então $\sum_{j=1}^{l} P\left(C'_j\right) = \sum_{j=1}^{l} P(C_j)$. Seja k tal que $P(C'_k)$ é máximo entre os $\left\{C'_j\right\}_{j=1}^{l}$. Temos:

$$\begin{aligned} lP(C'_k) &\geqslant \sum_{j=1}^{l} P\left(C'_j\right) = \sum_{j=1}^{l} P(C_j) \geqslant lq > lS - \sum_{j=1}^{l} P\left(C'_j\right) \\ &\geqslant lS - lP(C'_k) \end{aligned}$$

o que implica, dividindo por l,

$$P(C'_k) \geqslant q > S - P(C'_k),$$

ou seja, C'_k é uma coalizão vencedora.■

Exemplo 7 (cont.) - O processo de emenda da constituição do Canadá não é robusto a intercâmbios. Considere as seguintes coalizões vencedoras:

C_1	C_2
Ilha Príncipe Edward (1%)	New Brunswick (3%)
Newfoundland (3%)	Nova Scotia (4%)
Manitoba (5%)	Manitoba (5%)
Saskatchewan (5%)	Saskatchewan (5%)
Alberta (7%)	Alberta (7%)
British Columbia (9%)	British Columbia (9%)
Quebec (29%)	Ontario (34%)
Número de províncias: 7	Número de províncias: 7
Percentual da População: 59%	Percentual da População: 67%

Agora se intercambiarmos Ontario com Ilha Príncipe Edward e Newfoundland, obtemos as seguintes coalizões:

C'_1	C'_2
	New Brunswick (3%)
Ontario (34%)	Nova Scotia (4%)
Manitoba (5%)	Manitoba (5%)
Saskatchewan (5%)	Saskatchewan (5%)
Alberta (7%)	Alberta (7%)
British Columbia (9%)	British Columbia (9%)
Quebec (29%)	Ilha Príncipe Edward (1%)
	Newfoundland (3%)
Número de províncias: 6	Número de províncias: 8
Percentual da População: 79%	Percentual da População: 37%

C'_1 não é vencedora porque tem um número insuficiente de províncias e C'_2 não tem população suficiente. Concluímos, portanto, que o processo de emenda do Canadá não é robusto a intercâmbios e, portanto, não pode ser um sistema por pesos.■

11.2 Exercícios

1) Suponha que uma determinada regra de escolha social, F, é um sistema por pesos. Suponha que modificamos F para F' estabelecendo que no caso de empate, o indivíduo 1 tem o voto qualificado. Será que F' é ainda um sistema por pesos?

2) Suponha que $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e que uma regra F especifique que uma coalizão é vencedora se ela tiver pelo menos três números consecutivos. Essa regra é um sistema por pesos?

3) Assuma $I = \{1, 2, ..., 8\}$, sendo que os indivíduos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ são brancos e $\{6, 7, 8\}$ são negros. Considere a seguinte regra da minoria: uma proposta é aprovada se recebe pelo menos cinco votos favoráveis, sendo que pelo menos dois votos dos negros. Prove que esse sistema é robusto a trocas, mas não é robusto a intercâmbios.

4) Prove a Proposição 9.

5) Prove a Proposição 11.

6) Prove a Proposição 14.

Capítulo 12

Teorema de Arrow

Neste capítulo apresentaremos o famoso Teorema de Impossibilidade de Arrow (Arrow (1950)). Este surpreendente resultado basicamente diz que não se pode desenvolver uma regra de escolha social racional que respeite a unanimidade, que não dê todo o poder a um único indivíduo e que não considere alternativas irrelevantes para a decisão. Tais conceitos ficarão claros na discussão abaixo.

12.1 Regras de escolha social

Seja A um conjunto arbitrário de alternativas (finito ou infinito). Seja P o conjunto das preferências sobre A, isto é, $P = \wp(A \times A)$. Seja $R \subset P$ o conjunto das preferências racionais sobre A e seja $I = \{1, ..., n\}$ o conjunto de indivíduos na sociedade. Seja X um subconjunto qualquer de P^n, isto é, X representa uma coleção de preferências dos n indivíduos da sociedade. Representaremos um elemento de X por $x = (\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n)$.

Definição 1. Fixado um conjunto X de preferências dos indivíduos na sociedade, uma regra de escolha social (RES) é uma função $F : X \to P$.

Definição 2. Fixado um conjunto X de preferências dos indivíduos na sociedade, uma função de bem-estar social (FBS) é uma função $F : X \to R$.

Assim, para que uma regra de escolha social (RES) seja também uma função de bem-estar social (FBS) é necessário que ela defina apenas preferências racionais, isto é, transitivas e completas.[1]

Quando não houver perigo de confusão, denotaremos por $\succcurlyeq$ a preferência social $F(\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n)$.

Exemplo 3. Consenso

Consideremos a RES usada em algumas circunstâncias que requer que todos os indivíduos concordem com determinada escolha para que seja implementada pela sociedade. Há duas formas de modelá-la:

a) Seja $X = P^n$ (ou $X = R^n$) e seja $F : X \to P$ definida por, para quais $a, b \in A$, $(a, b) \in F(\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n)$ ou $a \succcurlyeq b$ se e somente se $a \succcurlyeq_i b$ para todo $i \in I$. Definindo-se o consenso dessa forma, isto é, para todas as preferências possíveis, vê-se facilmente que F não é completa e, portanto, não racional. Logo, o consenso seria apenas uma RES, mas não uma FBS.

b) Podemos, porém, restringir o domínio de definição de nossa regra: $X = \{(\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n) \in R^n : a \succcurlyeq_i b$ para algum $i \in I$ se e somente se $a \succcurlyeq_j b$ para todo $j \in I\}$. Isso restringe bastante as preferências que podemos considerar. No entanto, se o consenso é definido apenas para preferências nesse X, vemos que se torna uma função de bem-estar social.■

O exemplo 3 sugere que podemos passar de uma regra de escolha social para uma função de bem-estar social apenas com a restrição das preferências consideradas. De fato, por mais esdrúxula que seja uma regra de escolha social, se ela define uma preferência racional pelo menos para um valor $(\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n) \in P^n$, então ela pode ser tornada

[1] Aqui e nas definições abaixo, seguiremos a terminologia usada por Amartya Sen.

uma FBS fazendo $X = \{(\succcurlyeq_1, ..., \succcurlyeq_n)\}$. Assim, torna-se natural pedir a seguinte condição:

(U) Domínio Irrestrito. Uma RES $F : X \to P$ satisfaz ter domínio irrestrito se quando $X = R^n$, então ela é uma FBS. Em outras palavras, F tem domínio irrestrito se $F(R^n) \subset R$, isto é, se ela especifica preferências racionais sempre que as preferências dos indivíduos forem racionais.

Outras hipóteses razoáveis são as seguintes:

(P) Condição de Pareto ou Axioma da Unanimidade. Uma RES satisfaz a condição de Pareto se $a \succcurlyeq_i b$ para todo $i \in I$, então $a \succcurlyeq b$.

(D) Não Ditatura. Uma RES F não tem ditador (ou não é uma ditadura) se não existe indivíduo $d \in I$ tal que, qualquer que seja $(\succcurlyeq_1,\ ...,\ \succcurlyeq_n) \in X$, $a \succ_d b \Rightarrow a \succ b$, onde $a \succ b \Leftrightarrow (a \succcurlyeq b) \wedge \sim (b \succcurlyeq a)$ e $\succcurlyeq$ representa $F(\succcurlyeq_1,\ ...,\ \succcurlyeq_n)$. Em outras palavras, não existe indivíduo que determine, sozinho, a escolha social.

Uma hipótese um pouco mais forte é a seguinte:

(I) Independência das Alternativas Irrelevantes. Uma RES satisfaz a condição de independência das alternativas irrelevantes se a preferência de a sobre b não depende de como os indivíduos consideram as outras alternativas. Formalmente: suponha que duas listas de preferências $(\succcurlyeq_1,\ ...,\ \succcurlyeq_n)$ e $(\succcurlyeq_1',\ ...,\ \succcurlyeq_n')$ coincidam no que concerne as alternativas a e b, isto é, $a \succcurlyeq_i b$ se e somente se $a \succcurlyeq_i' b$ e $b \succcurlyeq_i a$ se e somente se $b \succcurlyeq_i' a$ para todo $i \in I$. Então as preferências sociais $\succcurlyeq\, = F(\succcurlyeq_1,\ ...,\ \succcurlyeq_n)$ e $\succcurlyeq' = F(\succcurlyeq_1',\ ...,\ \succcurlyeq_n')$ satisfazem: $a \succcurlyeq b$ se e somente se $a \succcurlyeq' b$ e $b \succcurlyeq a$ se e somente se $b \succcurlyeq' a$.

Uma questão importante é: existe alguma FBS que satisfaça U, P, D e I? A resposta é afirmativa se o conjunto de alternativas tem apenas dois elementos (veja exercício ao final deste capítulo).

Isto não contradiz, porém, o Teorema de Impossibilidade de Arrow porque este se refere a situações onde há pelo menos 3 alternativas.

De fato, apenas com 3 alternativas a hipótese I (independência das alternativas irrelevantes) passa a jogar um papel. Esse é o objeto da próxima seção.

12.2 Teorema de Impossibilidade

Teorema 4 (Teorema de Impossibilidade de Arrow). Não existe FBS que satisfaça U, P, D e I se o conjunto de alternativas A tiver pelo menos 3 elementos.

Prova

Primeiro observamos que um ditador forma uma coalizão unitária de indivíduos que é completamente decisiva. Dizemos que uma coalizão de indivíduos $S \subset I$ é *completamente decisiva* se para quaisquer alternativas a, $b \in A$,

$$a \succ_i b \text{ para todo } i \in S \Rightarrow a \succ b.$$

Então o Teorema estará demonstrado se provarmos que existe uma coalizão unitária *completamente decisiva*. Para chegar a isso, vamos fazer a demonstração de três fatos. Para enunciá-los, precisamos de uma definição a mais:

Definição 5. Uma coalizão de indivíduos $S \subset I$ é decisiva para a sobre b se

$$a \succ_i b \text{ para todo } i \in S \text{ e } b \succ_j a \text{ para todo } j \in I \backslash S \text{ então } a \succ b.$$

Vamos denotar o fato de que a coalizão S é decisiva para a sobre b por $S\,(a, b)$.

Observe que para testar se uma coalizão $S \subset I$ é decisiva para a sobre b, temos de testar apenas o caso em que ele determina a escolha sempre que há oposição por parte de todos os outros indivíduos que não estão no coalizão S.

Os três fatos abaixo implicam que existe uma coalizão unitária completametne decisiva e, portanto, demonstram o Teorema de Arrow.

Fato 1) Existe uma coalizão unitária $S = \{i\}$ e um par de alternativas a, b tal que $S\,(a, b)$.

Fato 2) Toda coalizão S tal que $S(a,b)$ (para algum par de alternativas a e b) então $S(u,v)$ para quaisquer alternativas u e v.

Fato 3) Se uma coalizão S é tal que $S(u,v)$ para quaisquer alternativas u e v, então S é uma coalizão completamente decisiva.

Prova do Fato 1

Observemos inicialmente que existe pelo menos uma coalizão decisiva para um par de alternativas. De fato, a condição (P) implica que I é decisiva para a sobre b, quaisquer que sejam as alternativas a e b.

Seja S a coalizão decisiva para um par qualquer de alternativas com o menor número possível de indivíduos. Isto é, existe um par de alternativas a, b tal que $S(a,b)$ e não existe nenhum outra coalizão S' com menos indivíduos do que S nem outro par de alternativas, u, v tal que $S'(u,v)$.

Tudo que temos de mostrar é que S é unitário. Suponha que não seja assim. Então podemos segmentar S em dois conjuntos disjuntos e não vazios S_1 e S_2, isto é, $S = S_1 \cup S_2$. Observe que S_1 e S_2 não podem ser decisivos para nenhum par de alternativas uma vez que S é, por definição, a coalizão decisiva com o menor número de indivíduos.

Pelo fato de que A tem pelo menos 3 elementos, podemos tomar um $c \neq a$ e $c \neq b$. Por U, podemos tomar quaisquer preferências racionais para os indivíduos. Considere preferências racionais que satisfaçam o seguinte:

$$\begin{aligned} a &\succ {}_i b \succ_i c, \forall i \in S_1 \\ c &\succ {}_i a \succ_i b, \forall i \in S_2 \\ b &\succ {}_i c \succ_i a, \forall i \in I \backslash S \end{aligned}$$

É possível que $I \backslash S$ seja vazio. O que faremos na seqüência continua válido mesmo se esse for o caso. Observe que para todo $i \in S = S_1 \cup S_2$, $a \succ_i b$ e para todo $i \in I \backslash S$, $b \succ_i a$. Então $S(a,b) \Rightarrow a \succ b$. Vamos mostrar agora que $b \succcurlyeq c$, o que implica que $a \succ c$ e vamos chegar a um absurdo desse fato.

Prova de que $b \succcurlyeq c$

Como a preferência $\succcurlyeq$ é completa, basta chegarmos a um absurdo se $c \succ b$. Suponhamos isso e consideremos preferências $\succ_i'$ tais que

$$\begin{aligned} b &\succ'_i c,\ \forall i \in S_1; \\ c &\succ'_i b,\ \forall i \in S_2; \\ b &\succ'_i c,\ \forall i \in I \backslash S. \end{aligned}$$

Observe que a preferência dos indivíduos entre b e c é a mesma $\succ_i$ e $\succ'_i$. Então, por (I), $c \succ' b$. Mas observe que isso vale para toda preferência tal que $c \succ'_i b$, $\forall i \in S_2$ e .$b \succ'_i c$, $\forall i \in I \backslash S_2$. Isso significa $S_2 (c, b)$, o que é um absurdo. Logo, não pode ser $c \succ b$.

Absurdo a partir de $a \succ c$.

Considere agora preferências $\succ'_i$ tais que

$$\begin{aligned} a &\succ'_i c,\ \forall i \in S_1; \\ c &\succ'_i a,\ \forall i \in S_2; \\ c &\succ'_i a,\ \forall i \in I \backslash S. \end{aligned}$$

De novo por (I), $a \succ' c$, mas isso significa que $S_1 (a, c)$, o que novamente é um absurdo. Isso estabelece o Fato 1.

Prova do Fato 2

Vamos provar inicialmente que $S (a, b) \Rightarrow S (u, v)$ para quaisquer $u, v \in A$. De fato, seja $c \in A$, $c \neq a$ e $c \neq b$ e fixe preferências tais que

$$\begin{aligned} a &\succ_i b \succ_i c, \forall i \in S \\ b &\succ_i c \succ_i a, \forall i \in I \backslash S \end{aligned}$$

Então, $S (a, b) \Rightarrow a \succ b$. Observe também que $b \succ_i c, \forall i \in I$. Então (P) implica que $b \succ c$. Portanto, $a \succ c$. Considere preferências $\succ'_i$ tais que

$$\begin{aligned} a &\succ'_i c,\ \forall i \in S; \\ c &\succ'_i a,\ \forall i \in I \backslash S \end{aligned}$$

Então, por (I), $a \succ' c$, o que implica $S (a, c)$.

Agora se tomarmos preferências tais que

$$
\begin{aligned}
c &\succ {}_i a \succ_i b, \forall i \in S \\
b &\succ {}_i c \succ_i a, \forall i \in I \backslash S
\end{aligned}
$$

Então, $S(a,b) \Rightarrow a \succ b$ e (P)$\Rightarrow c \succ a$, o que implica $c \succ b$ Considere preferências $\succ_i'$ tais que

$$
\begin{aligned}
c &\succ {}_i' b,\ \forall i \in S; \\
b &\succ {}_i' c,\ \forall i \in I \backslash S
\end{aligned}
$$

Por (I), $c \succ' b$. Logo, $S(c,b)$.

Fixemos três alternativas distintas, a, b e c. Então para qualquer $u \in A$, $u \neq c$, $S(a,b) \Rightarrow S(c,u)$ e $S(u,c)$. De fato, $S(a,b) \Rightarrow S(a,c)$ e $S(c,b)$. Se u é diferente de a, então $S(a,u)$ e $S(u,c)$. Se u é diferente de b, então $S(c,u)$ e $S(u,b)$. Em qualquer caso (mesmo que u seja a ou b), temos $S(u,c)$ e $S(c,u)$.

Agora, podemos concluir a demonstração do Fato 2 da seguinte forma. Tome u e v alternativas quaisquer e fixe três alternativas distintas, a, b e c. Primeiro observe que se $u = v$, então $S(u,v)$, uma vez que nenhum indivíduo com preferência racional pode colocar $u \succ_i v$. Se $u = c$ e $v \neq c$, então $S(a,b) \Rightarrow S(c,v)$ e $S(v,c)$, ou seja, vale $S(u,v)$. O mesmo vale para $u \neq c$ e $v = c$, Se agora $u \neq c$ e $v \neq c$, então $S(a,b) \Rightarrow S(c,u)$ e $u \neq v \Rightarrow S(u,v)$. Isso conclui a demonstração do fato 2.

Prova do Fato 3

Seja S coalizão tal que $S(u,v)$ para todo par de alternativas u, v. Queremos provar que para quaisquer duas alternativas a e b, $a \succ_i b$, $\forall i \in S \Rightarrow a \succ b$ (não importando a opinião dos demais). Fixe a e b, tome uma alternativa distinta c e considere preferências para as quais vale

$$
\begin{aligned}
a &\succ {}_i c \succ_i b, \forall i \in S \\
c &\succ {}_i a \text{ e } c \succ_i b, \forall i \in I \backslash S
\end{aligned}
$$

Observe que não especificamos as preferências dos indivíduos $i \in I \backslash S$ entre a e b. $S(a,c) \Rightarrow a \succ c$ e (P)$\Rightarrow c \succ b$. Logo, $a \succ b$. Por (I), o fato de que $a \succ b$ não depende de como os indivíduos consideram

c. Logo, $a \succ b$ sempre que $a \succ_i b, \forall i \in S$, que era o que queríamos mostrar.

Isso conclui a demonstração do teorema.■

12.3 Exercício

1) Prove que o Voto Majoritário é uma FBS que satisfaz U, P, D e I se o conjunto de alternativas A tem apenas dois elementos.

.

Referências Bibliográficas

[1] Allais, M. (1953): *Le Comportment de l'homme rationnel devaint le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americane*, **Econometrica**, 21, 503-546.

[2] Anscombe, F.J. and R.J. Aumann.(1963): *A definition of subjective probability*, **Annals of Mathematical Statistics**, 34, 199-205.

[3] Araújo, A.(1983): **Introdução à Economia Matemática**. 14^0 Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA.

[4] Arrow, K. (1950): *A difficult in the concept of social welfare*, **Journal of Political Economy**, 58, 328-346.

[5] Bewley, T. (2002): *Knightian Decision Theory: Part I.*, **Decision in Economics and Finance**, 25, 79–110. Cowles Foundations working paper 807, 1986

[6] Bowen, R.(1968): *A new proof of a theorem in utility theory.* **International Economic Review**, 9 (3), 374.

[7] Chateauneuf, A.(1991): *On the use of capacities in modeling uncertainty aversion and risk aversion.* **Journal of Mathematical Economics**, 20, 343-369.

[8] Debreu. G.(1954): *Representation of a preference ordering by a numerical functions.* in **Decision Processes**, R. Thrall, C. Coombs and R. Davis(eds.), Nova York; John Wiley and Sons.

[9] Dow, J. and S. R. C. Werlang.(1992): *Uncertainty aversion, risk aversion, and the optimal choice of portifolio.* **Econometrica**, 60 (1), 197-204.

[10] Ellsberg, D.(1961):*Risk, ambiguity and the Savage axioms.* **Quartely Journal of Economics**, 75, 643-669.

[11] Fishburn, P. C.,(1970): **Utility Theory for Decision Making**. Wiley, New York.

[12] Ghirardato, P., F. Maccheroni, M. Marinacci, and M. Siniscalchi.(2003): *A subjective spin on roulette wheels*, **Econometrica**, 71 (6), 1897-1908.

[13] Gilboa, I., A. Postlewaite, D. Schmeidler(2004): *Rationality of belief. Or: why Bayesianism is neither necessary nor sufficient for racionality.* RUD 2004 Conference, Northwestern University.

[14] Gilboa, I. and D. Schmeidler.(1989): *Maxmin expected utility with a non-unique prior.* **Journal of Mathematical Economics**, 18, 141-153.

[15] Gilboa, I. and D. Schmeidler.(1995): *Case-Based Decision Theory.* **Quartely Journal of Economics**, 110, 605-639.

[16] Gilboa, I. and D. Schmeidler.(2002): *Utility in Case-Based Decision Theory.* **Journal of Economic Theory**, 105, 483-502.

[17] Gul, F.(1992): *Savage's theorem with a finite number of states.* **Journal of Economic Theory**, 57, 99-110.

[18] Huber, P. J. (1981): **Robust Statistics**. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, 308 pp.

[19] James. B. (1996): **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 2ª ed. IMPA, Projeto Euclides, 304 pp.

[20] Kahneman, D. e Tversky, A. (1979): *Prospect Theory: An analysis of decisions under risk.* **Econometrica**, 47, 263-291.

[21] Knight, F. H.(1921): **Risks, Uncertainty and Profit**. Boston: Houghton-Mifflin.

[22] Mas-Colell, A., Whinston, M. D. and Green, J. R. (1995): **Microeconomic Theory**. Oxford University Press, New York.

[23] Monteiro, P. K.(1987): *Some results on the existence of utility functions on path connected spaces.* **Journal of Mathematical Economics**, 18, 147-156.

[24] Mukerji, S. and J.-M. Tallon (2003): *An overview of economic applications of David Schmeidler's models of decision making under uncertainty.* **mimeo.**

[25] Rigotti, L e C. Shannon (2005): *Uncertainty and Risk in Financial Markets.* **Econometrica**, 73, 203-243.

[26] Savage, L. J.(1954): **The Foundations of Statistics**. Wiley, New York.

[27] Sen, A. K. (1970): **Collective choice and social welfare**. Advanced textbooks in economics. v. 11. Elsevier Science, New York.

[28] Schmeidler, D.(1986): *Integral representation without additivity.* **Proceedings of the American Mathematical Society**. 97 (2), 255-261.

[29] Schmeidler, D.(1989): *Subjective probability and expected utility theory without additivity*, **Econometrica**, 57, 571-587.

[30] Taylor, A. D. (1995): **Mathematics and Politics — strategy, voting, power and proof**. Springer-Verlag, New York.

[31] von Neumann, J. and O. Morgenstern.(1944): **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press, Princenton.