Integrabilidade de Folheações Holomorfas

Publicações Matemáticas

Integrabilidade de Folheações Holomorfas

Jorge Vitório Pereira
IMPA

impa

24º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

24º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações - Fermin Viloche
- Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equations - Jaime Angulo Pava
- Geometria Diferencial das Curvas Planas - Walcy Santos, Hilário Alencar
- Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds - Bruno Scárdua e Carlos Morales
- **Integrabilidade de Folheações Holomorfas** - Jorge Vitório Pereira
- Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards - Nikolai Chernov e Roberto Markarian
- Some Recent Developments in the Theory of Minimal Surfaces in 3-Manifolds - Harold Rosenberg
- Spin Dynamics at Zero Temperature - Luiz Renato Fontes
- Statistical Analysis of Non-Uniformly Expanding Dynamical Systems - José Alves
- Tangents and Secants of Algebraic Varieties - Francesco Russo
- Tópicos em Algoritmos sobre Sequências - Alair Pereira do Lago e Imre Simon
- Symmetric Studies - An Introduction - Marlos Viana

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

ISBN: 85-244-0208-3

Prefácio

São dois os objetivos principais destas notas. O primeiro é desenvolver de forma elementar a teoria de integrabilidade Liouvilliana de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

onde P e Q são polinômios em duas variáveis complexas. Dizemos que a equação diferencial acima admite uma integral primeira Liouvilliana se existe uma função definível por métodos ao alcance de um bom aluno de um curso Cálculo Diferencial, eventualmente multi-valuada, tal que qualquer determinação é constante ao longo das soluções da equação diferencial.

O segundo objetivo é apresentar alguns aspectos recentes da teoria global de folheações holomorfas em superfícies projetivas tendo como fio condutor o seguinte problema, proposto por Poincaré em [**Po91**]: é possível decidir se uma equação diferencial como acima admite uma integral primeira racional?

Para tentar cumprir estes objetivos dividimos o texto em duas partes. Na primeira parte expomos de forma *elementar* alguns métodos clássicos de integração e baseados em resultados recentes discutimos a sua surpreendente eficácia.

No primeiro capítulo são expostas as noções básicas a serem utilizadas ao longo do texto. Além de apresentar os conceitos de integrais primeiras, fatores de integração e curvas algébricas invariantes, é posta em evidência a dualidade entre 1–formas diferenciais e campos de vetores no plano complexo.

No segundo capítulo apresentamos a estratégia utilizada por Darboux para obter integrais primeiras para 1–formas polinomiais em $\mathbb{C}^2$. Destaca-se nesse capítulo o critério de Darboux-Jouanolou que enuncia-se sucintamente como: uma 1–forma diferencial polinomial admite integral primeira racional se, e somente se, admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes.

No terceiro capítulo voltamos a nossa atenção para o paradigma introduzido por Lie para resolver equações diferenciais. Este baseia-se no uso de simetrias infinitesimais para obter integrais primeiras. Como resultado principal do capítulo mostramos que um campo de vetores polinomial admite um fator de integração racional se, e somente se, admite uma simetria infinitesimal. Após uma breve digressão para caracterizar as 1–formas racionais fechadas em $\mathbb{C}^2$ explicitamos a forma das integrais primeiras obtidas por este paradigma.

No quarto capítulo apresentamos o Teorema de M. Singer que caracteriza as equações diferenciais polinomiais em $\mathbb{C}^2$ que podem ser *integradas* utilizando os métodos do cálculo diferencial. Este capítulo pressupõe uma certa maturidade matemática do leitor ao assumir alguma familiaridade com aspectos básicos da teoria de extensão corpos. Isso deve-se ao fato de que o Teorema de Singer é um resultado do âmbito da álgebra diferencial e apesar de expormos os conceitos desta teoria que utilizamos, ela baseia-se na teoria clássica de corpos. Concluímos a primeira parte mostrando que, após uma pequena alteração, o método de integração de Darboux permite integrar qualquer equação diferencial polinomial em $\mathbb{C}^2$ que possa ser integrada por métodos do cálculo diferencial.

Esta primeira parte é baseada em notas de um curso mininistrado no IMCA(Peru) em Novembro de 2001.

A segunda parte exige muito mais do leitor. Supõe-se uma certa familiaridade com conceitos básicos de geometria algébrica/analítica incluindo a correspondência entre fibrados lineares e divisores, rudimentos de teoria de intersecção em superfícies e técnicas de resolução de singularidades de curvas em superfícies.

No quinto capítulo definimos folheações holomorfas singulares em superfícies, apresentamos alguns exemplos e concluímos com uma versão mais geral do critério de Darboux-Jouanolou válida para folheações holomorfas de codimensão um em variedades complexas compactas arbitrárias.

O sexto capítulo trata de fórmulas de intersecção que terão papel fundamental no restante do texto. Na primeira seção apresentamos estas fórmulas. Ao invés de demonstrá-las optamos por aplicá-las à alguns exemplos interessantes que serão utéis no capítulo seguinte. A segunda seção descreve como estas fórmulas comportam-se quando a folheação é submetida a transformações birracionais. Na terceira seção mostramos como as fórmulas de intersecção podem ser utilizadas para limitar o grau de curvas algébricas invariantes com singularidades *moderadas*. Concluímos o capítulo mostrando que folheações genéricas não admitem integral primeira Liouvilliana.

No sétimo capítulo apresentamos resultados clássicos de Poincaré e Painlevé sobre a existência de cotas para o grau integrais primeiras racionais. Simplificamos sensivelmente as demosntrações ao utilizar as fórmulas de intersecção do capítulo anterior. Este capítulo é quase que inteiramente baseado em um artigo de Poincaré publicado em 1891. Entre as poucas exceções estão um Teorema de Painlevé, apresentado em suas Lições de Estocolmo, e um esboço de demonstração de um Teorema de Halphen utilizado de forma essecial na argumentação de Poincaré.

No oitavo e último capítulo esboçamos uma abordagem as questões de integrabilidade baseada na classificação birracional de folheações em superfícies projetivas. Este capítulo descreve de forma abreviada alguns resultados parciais de um trabalho em andamento sobre os problemas de Painlevé e Poincaré.

Esperamos que estas notas motivem pesquisas sobre a questão de integrabilidade de equações diferenciais e mais geralmente sobre a teoria global das folheações holomrfas.

Concluo agradecendo a César Camacho e os colegas do IMCA pelo convite para ministrar uma primeira versão deste curso em Lima no mês de novembro de 2001. Agradeço também a L.G. Mendes e S.C. Coutinho pelo entusiasmo e leitura atencisosa de parte destas notas. Algumas de suas sugestões foram incorporadas no presente texto enriquecendo-o consideravelmente. Não poderia deixar de fora dos agradecimentos os organizadores do Colóquio Brasileiro de Matemática por permiterem que eu compartilhe o meu entusiasmo sobre o tema com os participantes do curso e os leitores destas notas. Finalmente, agradeço a École Normale Supérieure de Lyon pela hospitalidade e pelo excelente suporte computacional, permitindo-me fazer as últimas revisões nestas notas nas melhores condições possíveis.

Lyon, 28 de maio de 2003.
Jorge Vitório Pereira

Conteúdo

Prefácio 1

Parte 1. Equações Diferenciais 6

Capítulo 1. Noções Básicas 7
1. Integrais primeiras e fatores de integração 7
2. Soluções Algébricas 10
3. Campos de Vetores e Derivações 11

Capítulo 2. O método de integração de Darboux 13
1. Encontrando Integrais Primeiras 13
2. Critério de Darboux-Jouanolou 15
3. Encontrando Fatores de Integração 16

Capítulo 3. Integrabilidade na presença de simetrias 20
1. Colchete de Lie e simetrias infinitesimais 20
2. Simetrias e fatores de integração racionais 22
3. Formas racionais fechadas 23

Capítulo 4. Integrais primeiras liouvillianas 26
1. Rudimentos de Álgebra Diferencial 26
2. Critério de Singer 28
3. O método de Darboux revisitado 30

Parte 2. Folheações 33

Capítulo 5. Folheações em Superfícies 34
1. Definição 34
2. Exemplos de Folheações 36
3. O Teorema de Jouanolou 39

Capítulo 6. Fórmulas de Intersecção 42
1. Fórmulas de Intersecção 42
2. Singularidades e Transformações Birracionais 46
3. Cotas para o grau de curvas invariantes 49
4. Centros e integrabilidade 50

Capítulo 7. Alguns Resultados Clássicos 54

1. Valores Notáveis 54
2. Fibras múltiplas 58
3. Sobre o Problema de Painlevé 63
4. Singularidades Dicríticas 66

Capítulo 8. Dimensão de Kodaira e Integrabilidade 68
1. Dimensão de Kodaira 68
2. Integrabilidade de Folheações de Tipo Especial 71
3. Integrabilidade de Folheações de Tipo Geral 77
4. Problema de Painlevé 79

Bibliografia 81

Parte 1

Equações Diferenciais

CAPíTULO 1

Noções Básicas

Considere um sistema de equações diferenciais da forma

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y) \end{aligned}$$

onde P e Q são polinômios complexos em duas variáveis. Dizemos que uma função holomorfa $\phi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ é uma *solução* de (1) se para qualquer $t \in U$ vale que

$$\phi'(t) = (P \circ \phi(t), Q \circ \phi(t)) .$$

A existência de soluções para o sistema (1) é garantida pelo conhecido teorema de existência e unicidade. Para a comodidade do leitor o enunciamos abaixo.

Teorema 1 (Existência e unicidade). *Considere um sistema de equações diferenciais na forma (1). Então valem as seguintes afirmações:*

a. *Para qualquer $p \in \mathbb{C}^2$ existe um número real positivo r_p e uma função holomorfa $\phi_p : \mathbb{D}(0, r_p) \to \mathbb{C}^2$ tal que $\phi_p(0) = p$ e $\phi_p'(t) = (P \circ \phi_p(t), Q \circ \phi_p(t))$, ou seja, ϕ_p é uma solução de (1) passando por p.*
b. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto contendo a origem. Se $\psi : U \to \mathbb{C}^2$ é uma solução de (1) tal que $\psi(0) = p$ então $\psi_{|V} = \phi_{p|V}$ onde $V = U \cap \mathbb{D}(0, r_p)$.*

COMENTÁRIO 1. O Teorema acima vale sob hipóteses bem mais fracas. Por exemplo podemos supor que P e Q são apenas funções holomorfas definidas em algum aberto de $\mathbb{C}^2$.

1. Integrais primeiras e fatores de integração

Apesar do teorema 1 nos garantir a existência de soluções locais para o sistema (1) passando por qualquer ponto $p \in \mathbb{C}^2$, na maioria das vezes muito pouco de sabe sobre a natureza das soluções. Entretanto em algumas situações é possível encontrar integrais primeiras para (1) e estas, de certa forma, permitem entender o comportamento qualitativo das soluções da equação diferencial em questão.

Definição 1 (Integral primeira). Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Dizemos que F é uma integral primeira em U para o sistema de equações diferenciais (1) se F é constante ao longo das soluções de (1) contidas em U.

Exemplo 1 (Equação de Lotka-Volterra). Considere o sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra [1]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \tag{2}$$

onde a, b, c e d são números complexos. Afirmamos que em qualquer aberto simplesmente conexo U contido em $\mathbb{C}^2 \setminus \{x \cdot y = 0\}$ vale que qualquer determinação da função

$$F(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

é uma integral primeira para (2).

De fato se $\phi = (\phi_1, \phi_2) : V \to \mathbb{C}^2$ é uma solução do sistema (2) temos que

$$\phi'(t) = (a\phi_1(t) - b\phi_1(t)\phi_2(t), -c\phi_2(t) + d\phi_1(t)\phi_2(t))$$

e portanto $\frac{d}{dt}(F \circ \phi)(t) = dF(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ é igual a

$$\left(d - \frac{c}{\phi_1}\right)(a\phi_1 - b\phi_1\phi_2) + \left(b - \frac{a}{\phi_2}\right)(-c\phi_2 + d\phi_1\phi_2) = 0\,.$$

Conseqüentemente qualquer determinação de F é constante ao longo das soluções de (2), ou seja qualquer determinação de F é uma integral primeira do sistema (2).

De posse da integral primeira podemos efetuar de maneira relativamente simples o estudo qualitativo das soluções da equação diferencial em questão. Para exemplificar este fato vamos supor que a, b, c e d são reais positivos e interpretar (2) como uma equação diferencial real. As curvas de nível de F passando por qualquer ponto do conjunto $U = \{(x, y) | x > 0 \text{ e } y > 0\}$ são fechadas(exercício para o leitor). Com isso podemos concluir que toda solução com condição inicial pertencente ao aberto U é periódica. □

Podemos associar ao sistema (1) a 1-forma diferencial holomorfa

$$\omega = Pdy - Qdx\,.$$

Convidamos o leitor a verificar que F é uma integral primeira para o sistema (1) se, e somente se,

$$\omega \wedge dF = 0\,.$$

O simples fato de associar a 1-forma ω ao sistema (1) algumas vezes torna a obtenção de uma integral primeira uma tarefa trivial.

[1] Quando a, b, c e d são reais e positivos o sistema acima *modela* a competição entre espécies.

Exemplo 2 (Sistemas exatos). Suponha que o sistema de equações diferenciais (1) é tal que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Vê-se então que a 1-forma diferencial $\omega = Pdy - Qdx$ é fechada, i.e., $d\omega = 0$. Portanto a função

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega$$

obtida integrando ω ao longo de qualquer caminho ligando um ponto inicial arbitrário (x_0, y_0) ao ponto (x, y) está bem definida(pois ω é fechada e $\mathbb{C}^2$ simplesmente conexo) e é tal que $\omega = dF$. Portanto F é uma integral primeira para o sistema (1). □

Nos cursos básicos de equações diferenciais aprendemos que podemos utilizar integrais ao longo de caminhos para obter integrais primeiras para equações diferenciais que admitem fatores de integração.

Definição 2 (Fator de integração). Seja $U \subset \mathbb{C}^2$ um aberto e $\mu : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante. Dizemos que μ é um fator de integração para o sistema de equações diferenciais (1) se

$$\frac{\partial \mu P}{\partial x} = -\frac{\partial \mu Q}{\partial y}.$$

Equivalentemente μ é um fator de integração para (1) se a 1-forma diferencial $\mu \cdot \omega$ é fechada, i.e., $d(\mu\omega) = 0$.

Exemplo 3 (Equações diferenciais lineares). Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \ , \ a, b \in \mathbb{C}(x) \ .$$

Podemos associar a esta equação a 1-forma racional ω,

$$\omega = dy - (a(x)y + b(x))dx \, .$$

Ao tentar encontrar um fator de integração μ que dependa apenas da variável x vemos que μ deve satisfazer

$$0 = d(\mu \cdot \omega) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \cdot a(x) \right) dx \wedge dy \, .$$

Vê-se então que

$$\mu(x) = \exp\left(- \int a(x) dx \right) \ ,$$

é tal que $d(\mu\omega) = 0$ e portanto μ é um fator de integração para ω. □

2. Soluções Algébricas

Como veremos ao longo do texto as soluções algébricas de (1) terão um papel de destaque nas questões relacionadas a existência de integrais primeiras e de fatores de integração.

Definição 3 (Soluções algébricas). Seja $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ uma solução de (1). Dizemos que ϕ é uma solução algébrica se existe um polinômio não-nulo $f \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que $f(\phi(t)) = 0$ para qualquer $t \in V$.

Definição 4 (Curvas algébricas invariantes). Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$. Dizemos que $C = \{f = 0\}$ é uma curva algébrica invariante por (1) se para qualquer solução de (1), $\phi : \mathbb{D}(0,r) \to \mathbb{C}^2$, satisfazendo $f(\phi(0)) = 0$ temos que

$$f(\phi(t)) = 0$$

para todo $t \in V$.

Proposição 1. *Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$ um polinômio reduzido. A curva algébrica C descrita implicitamente por $\{f = 0\}$ é invariante por (1) se, e somente se, existe uma 2-forma polinomial Θ_f tal que*

$$\omega \wedge df = f \cdot \Theta_f\,.$$

demonstração: Suponha que existe Θ_f polinomial tal que

$$\omega \wedge df = f \cdot \Theta_f\,. \tag{3}$$

Seja $\phi : \mathbb{D}(0,r) \to \mathbb{C}^2$ uma solução de (1) tal que $f(\phi(0)) = 0$. Observando que

$$\omega(\phi(t)) \wedge df(\phi(t)) = -(f \circ \phi)'(t) dx \wedge dy\,,$$

segue de (24) que $(f \circ \phi)'(t) = 0$, para qualquer $t \in \mathbb{D}(0,r)$. Portanto ϕ é uma solução algébrica de (1) e C é uma curva algébrica invariante.

Reciprocamente se $C = \{f = 0\}$ é uma curva algébrica invariante temos que para qualquer solução $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ contida em C vale que

$$(\omega \wedge df)(\phi(t)) = 0$$

para todo $t \in V$. Portanto $(\omega \wedge df)_{|C} = 0$ e pelo teorema dos zeros de Hilbert [2] f divide $\omega \wedge df$. □

Pode-se interpretar geometricamente a proposição anterior da seguinte forma. O polinômio f, através de suas curvas de nível $\{f = c, c \in \mathbb{C}\}$, define uma decomposição de $\mathbb{C}^2$ em curvas algébricas. O espaço tangente da curva que passa pelo ponto $p \in \mathbb{C}^2$ coincidindo com o núcleo de $df(p)$. Vê-se então que o lugar de zeros de $\omega \wedge df$ coincide com as tangências entre as soluções de (1) e as curvas de nível de f. Nesses termos a proposição nos diz que a curva algébrica $C = \{f = 0\}$ é invariante por (1) se, e somente se, C está

[2] Utilizamos o teorema dos zeros de Hilbert apenas para garantir que se $h \in \mathbb{C}[x,y]$ é tal que $h_{|C} = 0$ então existe $g \in \mathbb{C}[x,y]$ tal que $h = fg$.

contida no lugar de tangências entre as soluções de (1) e a decomposição de $\mathbb{C}^2$ induzida por f.

Exercício 1. *Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$ um polinômio(não necessariamente reduzido) e ω uma 1-forma polinomial. Prove que:*

a. *Se a decomposição de f em polinômios irredutíveis é dada por $f = {f_1}^{n_1}{f_2}^{n_2}\cdots{f_k}^{n_k}$ então*

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\omega \wedge \frac{df_i}{f_i}\right).$$

b. *A curva algébrica definida implicitamente por $\{f = 0\}$ é invariante por ω se, e somente se, $\omega \wedge \frac{df}{f}$ é uma 2-forma polinomial.*

3. Campos de Vetores e Derivações

Podemos associar ao sistema de equações diferenciais (1) o campo de vetores

$$X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Se denotamos por $\mathbb{C}(x,y)$ o corpo das funções racionais em duas variáveis vemos que o campo X atua sobre $\mathbb{C}(x,y)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} X : \mathbb{C}(x,y) &\to \mathbb{C}(x,y) \\ f &\mapsto X(f) := P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

A aplicação $X : \mathbb{C}(x,y) \to \mathbb{C}(x,y)$ é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz a regra de Leibnitz, i.e.,

$$\begin{aligned} X(\lambda f + \mu g) &= \lambda X(f) + \mu X(g) \\ X(f\cdot g) &= fX(g) + gX(f), \end{aligned}$$

onde f e g são funções holomorfas e λ e μ números complexos.

Definição 5 (Derivações). *Uma derivação de $\mathbb{C}(x,y)$ é uma aplicação $D : \mathbb{C}(x,y) \to \mathbb{C}(x,y)$ $\mathbb{C}$-linear e que satisfaz a regra de Leibniz.*

Portanto qualquer campo polinomial X pode ser visto como uma derivação. Reciprocamente dada uma derivação $D : \mathbb{C}(x,y) \to \mathbb{C}(x,y)$ podemos interpretar D como um campo de vetores racional da forma

$$D(x)\frac{\partial}{\partial x} + D(y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Vê-se facilmente que o campo de vetores D é polinomial se, e somente se, $D(\mathbb{C}[x,y]) \subset \mathbb{C}[x,y]$.

Se $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ e $\omega = Pdy - Qdx$ então verifica-se facilmente que para qualquer função racional $f \in \mathbb{C}(x,y)$

$$\begin{aligned} \omega \wedge df &= -X(f)dx \wedge dy, \\ d\omega &= \operatorname{div}(X). \end{aligned}$$

Motivados pelas relações de dualidade acima dizemos que F é uma integral primeira para X se, e somente se, $X(F) = 0$. Dizemos também que μ é um fator de integração para X se, e somente se, $\operatorname{div}(\mu X) = 0$. Podemos ainda reformular a proposição 1 do seguinte modo.

Proposição 2. *Seja $f \in \mathbb{C}[x,y]$ um polinômio reduzido. A curva algébrica $C = \{f = 0\}$ é invariante por (1) se, e somente se, existe um polinômio L_f tal que*

$$X(f) = L_f \cdot f\,.$$

CAPíTULO 2

O método de integração de Darboux

Como vimos no capítulo anterior o problema de encontrar uma integral primeira para um sistema de equações diferenciais da forma

$$(4) \qquad \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} & = & Q(x,y) \end{array}$$

com $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$, é equivalente a encontrar uma função f tal que $\omega \wedge df = 0$, onde $\omega = Pdy - Qdx$. Neste capítulo faremos uma exposição da estratégia utilizada por Darboux em [?] para atacar este problema.

1. Encontrando Integrais Primeiras

Considere a 1-forma polinomial $\omega = Pdy - Qdx$. Se ω admite uma curva algébrica invariante, dada implicitamente por $\{f = 0\}$, vimos no capítulo anterior que

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \Theta_f$$

onde Θ_f é uma 2-forma polinomial.

Definição 6. Seja f uma curva algébrica invariante por ω. Diremos que a 2–forma polinomial Θ_f é um cofator de f.

Observe que se ω possui grau d então os cofatores associados a eventuais curvas algébricas invariantes possuem grau menor ou igual a $d - 1$.

Proposição 3. *Seja ω uma 1–forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se existem curvas invariantes por ω dadas implicitamente por $f_1, f_2, \ldots, f_n$ e números complexos(não todos nulos) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que*

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = 0\,,$$

então ω admite uma integral primeira F da forma

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,.$$

<u>demonstração:</u> Considere a 1-forma meromorfa η dada por

$$\eta = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + \ldots + \alpha_n \frac{df_n}{f_n}\,.$$

Claramente η é fechada($d\eta = 0$). Vale ainda que η satisfaz

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega \wedge \frac{df_i}{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0\,. \tag{5}$$

Portanto a função multivaluada

$$F = \int \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,,$$

é tal que $\omega \wedge dF = \omega \wedge \eta = 0$. Concluímos que F é uma integral primeira para ω. Mais precisamente, ao tomarmos um aberto simplesmente conexo U contido no complementar de $\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0\}$ obtemos que qualquer determinação de F em U é constante ao longo das soluções de ω contidas em U. □

Corolário 1. *Seja ω uma 1-forma polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite $\frac{d(d+1)}{2} + 1$ curvas algébricas invariantes irredutíveis então ω admite uma integral primeira F da forma*

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,.$$

demonstração: Suponha que existem $n = \frac{d(d+1)}{2} + 1$ curvas algébricas invariantes por ω, dadas implicitamente por polinômios irredutíveis f_1, f_2, ... , f_n.

Os cofatores associados a curvas algébricas invariantes são 2–formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$. Como o $\mathbb{C}$–espaço vetorial das 2-formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$ possui dimensão igual a $\frac{d(d+1)}{2}$ temos que os cofatores associados às curvas $f_i, i = 1 \ldots n$ são linearmente dependentes. Portanto existem números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = 0\,. \tag{6}$$

Pela proposição 3 temos o corolário. □

Exemplo 4. Suponha que $\omega = \alpha x dy + \beta y dx$, onde α e β são números complexos não nulos. Vê-se facilmente que as curvas algébricas descritas implicitamente por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são invariantes. Calculemos portanto os seus cofatores. O cofator associado a x é dado por

$$\Theta_x = \omega \wedge \frac{dx}{x} = -\alpha dx \wedge dy\ ,$$

enquanto o cofator associado a y é

$$\Theta_y = \omega \wedge \frac{dy}{y} = \beta dx \wedge dy\ .$$

Portanto

$$\beta \Theta_x + \alpha \Theta_y = 0\ .$$

Conseqüentemente $F = \beta \log x + \alpha \log y$ é uma integral primeira para ω.

2. Critério de Darboux-Jouanolou

Jouanolou, em **[Jou79]**, obteve como corolário das idéias de Darboux expostas no início desta seção o belo teorema [1] a seguir.

Teorema 2. *Seja ω uma 1-forma diferencial polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite $\frac{d(d+1)}{2}+2$ curvas algébricas invariantes então ω admite uma integral primeira racional.*

demonstração: Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k$ as $\frac{d(d+1)}{2}+2$ curvas algébricas invariantes por ω. Utilizando os cofatores associados a $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$ podemos construir uma 1-forma racional η_1 da forma

$$\eta_1 = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{df_{k-1}}{f_{k-1}},$$

tal que $\omega \wedge \eta_1 = 0$. De forma análoga podemos utilizar os cofatores associados a $f_2, f_3, \dots, f_k$ para construir uma 1-forma racional η_2 da forma

$$\eta_2 = \beta_2 \frac{df_2}{f_2} + \beta_3 \frac{df_3}{f_3} + \dots + \beta_k \frac{df_k}{f_k},$$

tal que $\omega \wedge \eta_2 = 0$ e $\beta_k \neq 0$.

Como estamos tomando $\beta_k \neq 0$ temos que o conjunto de pólos de η_1 e η_2 são distintos. Dessa forma temos que existe uma função racional não constante F tal que $\eta_1 = F\eta_2$. Tomando a diferencial exterior desta última expressão vemos que

$$d\eta_1 = F d\eta_2 + dF \wedge \eta_2 .$$

Como η_1 e η_2 são fechadas concluímos que $dF \wedge \eta_2 = 0$. Conseqüentemente sendo $\omega \wedge \eta_2 = 0$ temos que $\omega \wedge dF = 0$. Portanto F é uma integral primeira racional para ω. □

Corolário 2. *Seja ω uma 1-forma diferencial polinomial em $\mathbb{C}^2$. Existe uma integral primeira racional para ω se, e somente se, ω admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes.*

demonstração: Se ω admite uma integral primeira racional então existem $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$, tal que

$$\omega \wedge d\left(\frac{f}{g}\right) = 0,$$

e em particular

$$\omega \wedge (f dg - g df) = 0. \tag{7}$$

[1] De fato o resultado que aqui apresentamos é uma versão simplificada de um teorema de Jouanolou. O resultado original de Jouanolou é enunciado em um contexto bem mais geral: folheações holomorfas de codimensão um em espaços projetivos.

Façamos então $f_\lambda = f - \lambda g, \lambda \in \mathbb{C}$. Segue que

$$\omega \wedge df_\lambda = \omega \wedge df - \lambda\omega \wedge dg\,.$$

De (7) vemos que

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \omega \wedge \frac{dg}{g}\,.$$

Conseqüentemente

$$\omega \wedge df_\lambda = (f - \lambda g)\omega \wedge \frac{df}{f} = (f - \lambda g)\omega \wedge \frac{dg}{g}\,.$$

Logo $\omega \wedge \frac{df_\lambda}{f_\lambda}$ é uma 2-forma polinomial, ou seja, os fatores irredutíveis de f_λ são curvas algébricas invariantes. Como λ é uma número complexo arbitrário temos uma infinidade de curvas algébricas invariantes.

Reciprocamente, se ω admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes o teorema 2 nos garante que ω admite uma integral primeira racional. □

Corolário 3. *Seja ω uma 1-forma diferencial polinomial em $\mathbb{C}^2$. Então existe uma cota para o grau das curvas álgebricas irredutíveis invariantes por ω.*

demonstração: Se o número de curvas algébricas irredutíveis invariantes por ω é finito então a cota é igual ao máximo entre os graus destas. Caso contrário pelo teorema 2 temos a existência de uma integral primeira racional da forma f/g. Como toda curva algébrica invariante é fator de $f - \lambda g$ para algum λ temos que seu grau é menor ou igual igual ao máximo dos graus de f e g. □

3. Encontrando Fatores de Integração

Proposição 4. *Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite curvas algébricas invariantes $f_1, f_2, \dots, f_n$ e números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que*

$$\alpha_1\Theta_{f_1} + \alpha_2\Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n\Theta_{f_n} = d\omega$$

então ω admite um fator de integração da forma

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}\,.$$

demonstração: Caso existam números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1\Theta_{f_1} + \alpha_2\Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n\Theta_{f_n} = d\omega$$

então a 1–forma racional fechada η, dada por

$$\eta = \alpha_1\frac{df_1}{f_1} + \alpha_2\frac{df_2}{f_2} + \ldots + \alpha_n\frac{df_n}{f_n}\,,$$

é tal que $d\omega = (-\eta) \wedge \omega$.

Ao considerarmos a função multivaluada

$$F = \exp\left(\int \eta\right) = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n}$$

vemos que $dF = F\eta$ e portanto

$$d(F\omega) = dF \wedge \omega + F d\omega = 0\,.$$

Logo F é um fator de integração para ω. Mais precisamente se tomarmos um aberto simplesmente conexo U contido no complementar de $\{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n = 0\}$ temos que para qualquer determinação de F em U a 1–forma $F\omega$ é fechada. Sendo U simplesmente conexo segue que $F\omega$ é de fato exata em U e sua primitiva é uma integral primeira para $\omega_{|U}$. □

Corolário 4. *Seja ω uma 1–forma polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite $\frac{d(d+1)}{2}$ curvas algébricas invariantes irredutíveis então ω admite um fator de integração ou uma integral primeira da forma*

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}\,. \tag{8}$$

demonstração: Suponha que existem $n = \frac{d(d+1)}{2}$ curvas algébricas invariantes por ω, dadas implicitamente por polinômios irredutíveis f_1, f_2, $\ldots$, f_n.

Os cofatores associados a curvas algébricas invariantes são 2–formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$. Como o $\mathbb{C}$–espaço vetorial das 2-formas diferenciais de menor ou igual a grau $d-1$ possui dimensão igual a $\frac{d(d+1)}{2}$ temos que os cofatores associados às curvas $f_i, i = 1 \ldots n$ ou são linearmente dependentes ou formam uma base para o $\mathbb{C}$–espaço vetorial das 2–formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$. No primeiro caso existem números complexos(não todos nulos) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 \Theta_{f_1} + \alpha_2 \Theta_{f_2} + \ldots + \alpha_n \Theta_{f_n} = 0\,, \tag{9}$$

e pela proposição 3 vemos que

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\,,$$

é uma integral primeira para ω. Tomando a exponencial de F, que ainda é uma integral primeira, temos uma integral primeira como (8). Quando os cofatores geram o espaço das 2–formas polinomiais de grau menor ou igual a $d-1$ temos que $d\omega$, que é uma 2–forma polinomial de grau menor ou igual a $d-1$, pode ser escrita como uma combinação linear dos Θ_{f_i}. Assim, pela proposição 4 temos um fator de integração da forma (8). □

Exemplo 5 (Equação de Lotka-Volterra revisitada). Considere o sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & \alpha x - \beta x y \\ \frac{dy}{dt} & = & -\gamma y + \delta x y \end{array}, \tag{10}$$

onde α, β, γ e δ são números complexos. Discutir a existência de integrais primeiras para (10) é o mesmo que discutir a existência de integrais primeiras para a 1-forma diferencial

$$\omega = y(\gamma - \delta x)dx + x(\alpha - \beta y)dy\,.$$

Verifica-se facilmente que as curvas algébricas dadas implicitamente por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são invariantes, e seus cofatores são dados por

$$\begin{array}{rclcl} \Theta_x & = & \omega \wedge \frac{dx}{x} & = & (\beta y - \alpha)dx \wedge dy\,, \quad \text{e} \\ \Theta_y & = & \omega \wedge \frac{dy}{y} & = & (\gamma - \delta x)dx \wedge dy. \end{array}$$

Em geral estes cofatores são linearmente independentes. Entretanto ao considerarmos a diferencial de ω, vemos que

$$d\omega = (\alpha - \beta y) - (\gamma - \delta x)dx \wedge dy = -\Theta_x - \Theta_y\,,$$

e portanto

$$d\omega = \omega \wedge \left(-\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right)\,.$$

Logo vemos que $(xy)^{-1}$ é um fator de integração para ω e temos como integral primeira a função multivaluada F dada pela integral de $(xy)^{-1}\omega$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} F & = & \displaystyle\int \frac{\omega}{xy} \\ & = & \displaystyle\int (\gamma - \delta x)\frac{dx}{x} + (\alpha - \beta y)\frac{dy}{y} \\ & = & -\delta x - \beta y + \gamma \log x + \alpha \log y\,. \end{array}$$

Proposição 5. Seja ω uma 1–forma polinomial. Se existem duas formas racionais fechadas η_1 e η_2 tais que

$$d\omega = \eta_i \wedge \omega \qquad i \in \{1, 2\}$$

então ω admite um fator de integração racional. Em particular se ω admite dois fatores de integração da forma

$$\prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}$$

então ω admite um fator de integração racional.

demonstração: Considere a 1–forma $\eta_0 = \eta_1 - \eta_2$. Segue das hipóteses que $\omega \wedge \eta_0 = 0$. Portanto existe uma função racional h tal que $h \cdot \omega = \eta_0$. Como η_0 é fechada temos que h é um fator de integração racional para ω. □

Resumimos na tabela a seguir os tipos integrais primeiras obtidas ao longo do capítulo através de relações lineares entre os cofatores associados a curvas algébricas invariantes e a diferencial exterior da 1–forma a ser integrada.

RELAÇÕES	TIPO DE INTEGRAL PRIMEIRA
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = d\omega$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$	$\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k} \omega$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$	$\sum \alpha_i \log f_i$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$	F/G com $F, G \in \mathbb{C}[x, y]$

Tabela 1: Relações entre cofatores e integrais primeiras

CAPÍTULO 3

Integrabilidade na presença de simetrias

> The earliest researches in the subject of differential equations were devoted to the problem of integration in the crude sense, that is to say to finding devices by which particular equations or classes of equations could be forced to yeld up their solutions directly, or be reduced to a more tractable form.(...) Thus on the one hand, there exists a number of apparently disconnected methods of integration, each adapted only to one particular class of equations(...)
>
> This heterogeneous mass of knowledge was co-ordinated in a very striking way by means of the theory of continuous groups. The older methods of integration were shown to depend upon one general principle, which in its turn proved to be a powerful instrument for breaking newground.(...)
>
> E. L. Ince [Inc44]

Neste capítulo vamos investigar a correlação entre simetrias e integrabilidade. Buscamos uma abordagem elementar e baseada em propriedades básicas do colchete de Lie entre campos de vetores. Apesar das idéias terem forte apelo geométrico escolhemos uma abordagem que depende apenas de álgebra linear e de algumas das propriedades de campos de vetores e derivações expostas no capítulo 1.

Na última seção apresentamos a caracterização de 1–formas racionais fechadas em $\mathbb{C}^2$. Com isso podemos precisar explicitamente a forma das integrais primeiras de equações polinomiais que admitem simetrias infinitesimais. Esta caracterização também terá importância no próximo capítulo.

1. Colchete de Lie e simetrias infinitesimais

Definição 7. Sejam X e Y campos de vetores holomorfos em $\mathbb{C}^2$. O *colchete de Lie* de X e Y, denotado por $[X,Y]$, é o campo de vetor holomorfo dado pela expressão

$$(X(Y(x)) - Y(X(x)))\frac{\partial}{\partial x} + (X(Y(y)) - Y(X(y)))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Exemplo 6. Sejam X e Y são campos lineares em $\mathbb{C}^2$ dados por

$$\begin{aligned} X &= a\tfrac{\partial}{\partial x} + b\tfrac{\partial}{\partial y}, \\ Y &= cx\tfrac{\partial}{\partial x} + dy\tfrac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

com a, b, c e d números complexos, então o colchete entre X e Y é

$$[X,Y] = ac\frac{\partial}{\partial x} + bd\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Definição 8. Seja X um campo de vetores racional em $\mathbb{C}^2$. Dizemos que um campo de vetores racional Y é uma simetria infinitesimal de X se existe uma função racional $\mu \in \mathbb{C}(x,y)$ tal que $[X,Y] = \mu \cdot X$.

Exemplo 7. Considere X e Y como no exemplo 6 e suponha que $ac \neq 0$ e $bd \neq 0$. Neste caso, se existe $\lambda \in \mathbb{C}(x,y)$ tal que

$$[X,Y] = \lambda X\,,$$

verifica-se que λ é de fato um função racional constante, ou seja, $\lambda \in \mathbb{C}$. Explicitando a, b, c e d verifica-se que Y é uma simetria infinitesimal de X se, e somente se, Y é um múltiplo do campo radial, i.e.,

$$Y = \lambda\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\,.$$

Proposição 6. *Sejam X e Y campos de vetores racionais em $\mathbb{C}^2$ e $T = \det(X,Y)$*[1]*. Se $T \neq 0$ então*

$$[X,Y] = \left(\operatorname{div}(Y) - \frac{Y(T)}{T}\right)X + \left(\frac{X(T)}{T} - \operatorname{div}(X)\right)Y\,.$$

demonstração: Suponha que $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ e $Y = c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y}$. Portanto

$$T = \det(X,Y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc\,,$$

e

$$[X,Y] = (X(c) - Y(a))\frac{\partial}{\partial x} + (X(d) - Y(b))\frac{\partial}{\partial y},.$$

Decompondo $[X,Y]$ com respeito a X e Y temos que

$$[X,Y] = \frac{\det([X,Y],Y)}{T}X - \frac{\det([X,Y],X)}{T}Y\,.$$

Portanto a prova da proposição reduz-se a demonstrar que

$$\begin{aligned} \det([X,Y],X) &= -X(T) + T\cdot\operatorname{div}(X) \quad \text{e} \\ \det([X,Y],Y) &= -Y(T) + T\cdot\operatorname{div}(Y)\,. \end{aligned}$$

Mostremos então a validade da primeira igualdade.

Utilizando a multilinearidade do determinante vemos que

$$X(T) = \det\begin{pmatrix} X(a) & c \\ X(b) & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & X(c) \\ b & X(d) \end{pmatrix}\,, \tag{11}$$

[1] Aqui $\det(X,Y)$ denota o determinante da matriz cujas colunas são dadas por X e Y.

e que

$$\det([X,Y],X) = \det\begin{pmatrix} X(c) & a \\ X(d) & b \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} Y(a) & a \\ Y(b) & b \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Conseqüentemente, após somar (11) e (12),

$$X(T) + \det([X,Y],X) = \det\begin{pmatrix} X(a) & c \\ X(b) & d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} Y(a) & a \\ Y(b) & b \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo a expressão a esquerda verifica-se que

$$X(T) + \det([X,Y],X) = (ad-bc)\cdot \mathrm{div}X = T\cdot \mathrm{div}X\,,$$

e com isso concluímos que

$$\det([X,Y],X) = -X(T) + T\cdot \mathrm{div}(X)\,.$$

Cálculos completamente análogos mostram que

$$\det([X,Y],Y) = -Y(T) + T\cdot \mathrm{div}(Y)\,,$$

e temos a validade da proposição. □

2. Simetrias e fatores de integração racionais

Teorema 3. *Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Existe um fator de integração racional para X se, e somente se, X admite uma simetria infinitesimal.*

<u>demonstração:</u> Suponha que $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ admite uma simetria infinitesimal. Por definição existe um campo de vetores racional Y e uma função racional μ tal que

$$[X,Y] = \mu X\,.$$

Segue da proposição 6 que $T = \det(X,Y)$ é tal que

$$\frac{X(T)}{T} + \mathrm{div}(X) = 0\,.$$

Conseqüentemente temos que

$$\mathrm{div}(TX) = \frac{\partial(TP)}{\partial x} + \frac{\partial(TQ)}{\partial y} = T\left(\frac{X(T)}{T} + \mathrm{div}(X)\right) = 0\,.$$

Concluímos que T é uma fator de integração racional para X.

Se por outro lado X admite um fator de integração racional, o qual denotaremos por λ, temos que

$$Y = \frac{1}{\mathrm{div}X}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

é tal que

$$T = \det(X,Y) = -\frac{X(\lambda)}{\mathrm{div}X}\,.$$

Como λ é fator de integração para X vale que

$$0 = \mathrm{div}(\lambda X) = \lambda\mathrm{div}X + X(\lambda)\,,$$

logo $T = \lambda$. Pela proposição 6 temos que

$$[X, Y] = \left(\frac{Y(T)}{T} + \operatorname{div}(Y) \right) X \, .$$

Com isso vemos que Y é uma simetria infinitesimal para X e concluímos a prova do teorema. $\square$

3. Formas racionais fechadas

Uma consequência interessante do teorema que acabamos de demonstrar é que para obter uma descrição explícita das integrais primeiras que podem ser obtidas utilizando simetrias infinitesimais basta descrever os campos de vetores racionais de divergente nulo ou, equivalentemente, descrever as 1-formas racionais fechadas.

Teorema 4. *Seja η uma 1-forma racional fechada η em $\mathbb{C}^2$. Então η pode ser escrita na seguinte forma:*

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right) ,$$

onde $n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}^*, g, f_j \in \mathbb{C}[x,y]$ e os f_j são polinômios irredutíveis. As curvas álgebricas $f_j = 0$ são os pólos de η e os λ_j's são os resíduos de η em torno de $f_j = 0$:

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \eta$$

onde γ_j são pequenos círculos em torno de $f_j = 0$.

demonstração: Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_p$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ como no enunciado. Então a 1-forma meromorfa

$$\Omega = \eta - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

é fechada e satisfaz

$$\int_{\gamma_j} \Omega = 0 \, , \tag{13}$$

para qualquer $j = 1, \ldots, p$. De fato

$$\int_{\gamma_k} \Omega = \lambda_k \cdot 2\pi i - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \int_{\gamma_k} \frac{df_j}{f_j} \, .$$

Via a fórmula de mudança de variáveis vemos que

$$\int_{\gamma_k} \frac{df_j}{f_j} = \int_{f_j \circ \gamma_k} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k = j, \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

pois estamos supondo os f_j irredutíveis. Provamos assim (13).

Utilizaremos agora o fato não trivial de que o primeiro grupo de homologia de $\mathbb{C}^2 \setminus \{f_1 \cdot f_2 \cdots f_p = 0\}$ com coeficientes complexos é gerado pelos γ_j, ver [**CM82**] e referências lá citadas. Em termos mais concretos para toda 1-forma Ω definida no aberto $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{f_1 \cdot f_2 \cdots f_p = 0\}$ satisfazendo (13) temos que existe uma função holomorfa $H : U \to \mathbb{C}$ tal que

$$\Omega = dH\,. \tag{14}$$

Resta mostrar que a função holomorfa H definida no aberto U é de fato uma função racional, i.e., $H \in \mathbb{C}(x,y)$.

Para tanto iremos utilizar a seguinte propriedade das funções holomorfas definidas em abertos do plano complexo[2]: se para todos x_0 e y_0 fixados as funções $z \mapsto H(x_0, z)$ e $z \mapsto H(z, y_0)$ são racionais então H é uma função racional.

Suponha, sem perda de generalidade, que o conjunto de pólos de Ω não contém retas da forma $x - c = 0$ e $y - c = 0$, onde $c \in \mathbb{C}$. Considere então a função $f_c(z) = H(c,z)$, para algum $c \in \mathbb{C}$. Se $i_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ denota a aplicação de inclusão dada por $z \mapsto (c,z)$ então $f_c = i_c^* H$ e segue de (14) que

$$df_c = di_c^* H = i_c^* \Omega = \frac{p(z)}{q(z)} dz\,, \quad \text{com } p, q \in \mathbb{C}[z]\,.$$

Claramente podemos tomar $q \in \mathbb{C}[z]$ mônico e ao denotarmos por $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{C}$ as suas raízes podemos escrever

$$q(z) = (z - a_1)^{n_1} (z - a_2)^{n_2} \cdots (z - a_p)^{n_p}$$

onde n_i, $i = 1 \ldots r$, são inteiros positivos. Considere então a decomposição em frações parciais de $\frac{p(z)}{q(z)}$, i.e.,

$$\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - a_i)^j}\,, \text{ onde } r \in \mathbb{C}[z] \text{ e } \alpha_{ij} \in \mathbb{C}\,.$$

Pela definição de Ω pode-se verificar que $\alpha_{i1} = 0$ para qualquer $i = 1 \ldots p$. Com isso podemos garantir que a primitiva de $\frac{p(z)}{q(z)} dz$, e portanto f_c, é uma função racional para todo $c \in \mathbb{C}$. Argumentando da mesma forma podemos garantir que as funções $z \mapsto H(z, c)$ também são racionais para todo $c \in \mathbb{C}$. Concluímos que H é de fato uma função racional e temos assim a prova do teorema. □

O leitor pode encontrar uma versão do teorema 4 para 1–formas meromorfas fechadas em [**CM82**].

Exercício 2. *Seja X um campo de vetores polinomial em $\mathbb{C}^2$. Prove que X admite uma simetria infinitesimal se, e somente se, X admite uma*

---

[2] Veja exercício 10 na página 72 de [Cha90].

integral primeira da forma

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \log f_j + \left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right),$$

onde $n_i \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{C}^*, g, f_j \in \mathbb{C}[x,y]$ *e os* f_j *são polinômios irredutíveis.*

CAPÍTULO 4

Integrais primeiras liouvillianas

> During the period between 1833 and 1841, J. Liouville presented a theory of integration in finite terms. He determined the form which the integral of an algebraic function must have when the integral can be expressed with the operations of elementary analysis, carried out a finite number of times.
>
> J. F. RITT [Rit48]

Neste capítulo iremos caracterizar as equações diferenciais polinomiais no complexo que podem ser integradas via os métodos do cálculo diferencial. O primeiro passo para tanto é formalizar a vaga sentença acima, e o ambiente natural para fazê-lo é a teoria de corpos diferenciáveis, parte da álgebra diferencial. Não iremos nos aprofundar no assunto, e ainda falando vagamente, podemos dizer que o resultado que apresentaremos nesse capítulo está para a teoria de corpos diferenciáveis assim como a caracterização dos números construtíveis [1] está para a teoria de corpos.

1. Rudimentos de Álgebra Diferencial

Estamos interessados em descrever as 1-formas polinomiais que possam ser integradas através de uma sequência finita de operações familiares a um aluno de cálculo diferencial. De forma imprecisa, uma função é dita liouvilliana se pode ser escrita a partir das funções racionais utilizando uma sequência finita das seguintes operações:

1. soma e produto;
2. diferenciação;
3. integração de 1-formas fechadas;
4. exponenciação ;
5. solução de equações algébricas.

Para definir o conceito de função liouvilliana de modo mais preciso utilizaremos alguns conceitos básicos de álgebra diferencial.

Definição 9 (corpo diferencial). Seja K um corpo e Δ um conjunto finito de derivações de K. Dizemos que o par (K, Δ) é um *corpo diferencial* se para quaisquer $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ e $f \in K$ temos que $\delta_2(\delta_1(f)) = \delta_1(\delta_2(f))$.

[1] Aqueles que podem ser *construídos* a partir dos inteiros utilizando régua e compasso.

Exemplo 8. Segue do lema de Schwarz que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

para qualquer $f \in \mathbb{C}(x, y)$. Portanto o par $\left(\mathbb{C}(x,y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\right)$ é um corpo diferencial.

No que segue iremos trabalhar apenas com o corpo diferencial $\left(\mathbb{C}(x,y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\right)$ e extensões liouvillianas deste.

Definição 10 (extensão liouvilliana). Uma *extensão liouvilliana* (K, Δ) de $\left(\mathbb{C}(x,y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\right)$ é um corpo diferencial obtido da seguinte maneira. Existe uma torre de corpos diferenciais (K_i, Δ_i), $i = 1, \dots, n$, tal que:

1. $(K_0, \Delta_0) = \left(\mathbb{C}(x,y), \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}\right)$ e $(K_n, \Delta_n) = (K, \Delta)$;
2. $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$;
3. $\Delta_i|_{K_{i-1}} = \Delta_{i-1}$ e denotamos $\Delta_i = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$.
4. O corpo de constantes de K_i coincide com $\mathbb{C}$, isto é
$$\left\{ f \in K_i \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \right\} = \mathbb{C}\,.$$
5. $K_i = K_{i-1}(t_i)$ onde t_i é de um dos 3 tipos abaixo:
   6.a. t_i é algébrico sobre K_{i-1},
   6.b. $\dfrac{\partial t_i}{\partial x}, \dfrac{\partial t_i}{\partial y} \in K_{i-1}$.
   6.c. $\dfrac{1}{t_i}\dfrac{\partial t_i}{\partial x}, \dfrac{1}{t_i}\dfrac{\partial t_i}{\partial y} \in K_{i-1}$.

Comentário 2. Se f é um elemento de K, por construção f pode ser visto como uma função analítica em um certo aberto U_f de $\mathbf{C}^2$.

A condição 4.b nos permite adicionar a primitiva de uma forma diferencial fechada com coeficientes em K_{i-1}; e 4.c permite que adicionemos a exponencial de um elemento de K_{i-1}.

Se K é uma extensão liouvilliana de $\mathbb{C}(x, y)$ então para todo elemento $f \in K$ podemos considerar a sua diferencial exterior como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,,$$

e portanto df é uma 1-forma com coeficientes em K. Denotaremos o K-módulo de 1-formas com coeficientes em K por Ω^1_K, i.e., α pertence a Ω^1_K se, e somente se, α se escreve como $\alpha = adx + bdy$, onde $a, b \in K$.

Utilizando as formas diferenciais podemos reformular as condições 4.b e 4.c na definição de extensão liouvilliana como

4.b. $dt_i \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

4.c. $\frac{dt_i}{t_i} \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

Definição 11. *Seja ω uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^2$. Dizemos que ω possui uma integral primeira liouvilliana se existe uma extensão liouvilliana $(K, (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}))$ de $\mathbb{C}(x,y)$ e um elemento $f \in K$ tal que $df \neq 0$ e*

$$\omega \wedge df = 0 .$$

2. Critério de Singer

O próximo resultado, devido a Singer, ver [**Sin92**], caracteriza as 1-formas racionais $\mathbb{C}^2$ que admitem integral primeira liouvilliana.

Teorema 5. *Se ω é uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^2$ então ω admite uma integral primeira liouvilliana se, e somente se, existe uma 1-forma racional fechada η tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$.*

Como veremos a seguir a essência da prova do teorema está no seguinte lema.

Lema 1. *Seja K um extensão de $(\mathbb{C}(x,y), (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}))$ e $K(t)$ uma extensão de K tal que ou (a) t é algébrico, ou (b) $\frac{dt}{t} \in \Omega^1_K$ ou (c) $dt \in \Omega^1_K$. Se $\omega \in \Omega^1_K$ então*

$$\begin{aligned} d\omega &= \eta \wedge \omega \\ d\eta &= 0 \end{aligned}$$

admite solução em Ω^1_K se, e somente se, admite solução em $\Omega^1_{K(t)}$.

prova: É claro que qualquer solução em Ω^1_K também é solução em $\Omega^1_{K(t)}$. Suponha então que temos um solução η em $\Omega^1_{K(t)}$. Vamos analisar cada possibilidade para t separadamente.

(a) t é algébrico. Seja σ uma automorfismo de Galois da extensão $K(t) : K$. Se η é fechada então $\sigma^*\eta$ também é , e portanto

$$dw = \left(\frac{1}{[K(t) : K]} \sum_{\sigma \in Gal(K(t):K)} \sigma^* \eta \right) \wedge \omega .$$

Temos portanto uma solução em Ω^1_K.

(b) $\frac{dt}{t} \in \Omega^1_K$. Uma solução $\eta \in \Omega^1_{K(t)}$ pode ser escrita como

$$\eta = a(t)dx + b(t)dy \ ,$$

onde $a, b \in K(t)$. Considerando a série de Laurent de a e b podemos escrever η na forma

$$\eta = \sum_{i=-k}^{\infty} t^i \eta_i \ \text{ com } \eta_i \in \Omega^1_K.$$

Como t é transcendente vemos que $d\omega = \eta \wedge \omega$ implica que

$$\eta_i \wedge \omega = \begin{cases} d\omega & \text{para } i = 0, \\ 0 & \text{para } i \neq 0. \end{cases}$$

Sendo η fechada temos que

$$0 = \sum_{i=-k}^{\infty} t^i \left(d\eta_i + i\frac{dt}{t} \wedge \eta_i \right) . \tag{15}$$

Observando que para todo inteiro i maior ou igual a $-k$

$$d\eta_i + i\frac{dt}{t} \wedge \eta_i \in \Omega^1_K$$

segue de (15) que $d\eta_0 = 0$. Conseqüentemente $\eta_0 \in \Omega^1_K$ é uma solução.

(c) $dt \in \Omega^1_K$. Escreva η como

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i}{p(t)}$$

onde $\eta_i \in \Omega^1_K$ e $p(t)$ é um polinômio mônico em $K[t]$ de grau l. Diferenciando obtemos

$$0 = p(t) \left(\sum_{i=0}^{k} t^i d\eta_i + it^{i-1} dt \wedge \eta_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i \right) \wedge dp(t) .$$

Lembrando que $p(t)$ é mônico, vê-se que o coeficiente de t^{l+k} na expressão acima é $d\eta_k$, e portanto $d\eta_k = 0$. Como $d\omega = \eta \wedge \omega$ temos que

$$p(t) d\omega = \left(\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i \right) \wedge \omega ,$$

e portanto k é maior ou igual a l. Se $k = l$ então $d\omega = \eta_k \wedge \omega$ e temos uma solução em Ω^1_K. Caso $k > l$ então $\eta_k \wedge \omega = 0$ e conseqüentemente existe $h \in K$ tal que $\eta_k = h\omega$. Logo temos uma solução em Ω^1_K dada por

$$d\omega = -\frac{dh}{h} \wedge \omega .$$

□

Prova do teorema 5: Suponha que exista η fechada tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$. Então existe uma extensão liouvilliana K de $\mathbb{C}(x, y)$ onde podemos definir $F = \exp\left(\int \eta\right)$. Claramente, F satisfaz $dF = F \cdot \eta$. Assim

$$d\left(\frac{\omega}{F}\right) = \frac{F d\omega - dF \wedge \omega}{F^2} = 0 .$$

Ao adjuntar a primitiva de $\frac{\omega}{F}$ à K obtemos uma extensão liouvilliana de K, e consequentemente de $\mathbb{C}[x, y]$, onde ω admite uma integral primeira.

Reciprocamente se ω admite uma integral primeira F na extensão liouvilliana K então existe $h \in K$ tal que $dF = h\omega$. Como anteriormente

$$dw = -\frac{dh}{h} \wedge \omega .$$

Aplicando repetidas vezes o lema 1 vemos que existe uma 1-forma racional η em $\mathbb{C}^2$ tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$. □

Corolário 5. *Seja ω uma 1-forma racional em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite uma integral primeira liouvilliana então ω admite uma integral primeira liouvilliana da forma*

$$\int f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k} e^{\frac{g}{f_1^{n_1} \ldots f_k^{n_k}}} \omega ,$$

onde $g, f_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e $n_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \ldots, k$.

prova: Pelo teorema 5 se ω possui integral primeira liouvilliana então existe una 1-forma racional fechada η cuja exponencial da integral é uma fator integrante de ω, i.e., ω admite uma integral primeira liouvilliana da forma

$$\int e^{\int \eta} \omega .$$

Integrando η obtemos o resultado. □

3. O método de Darboux revisitado

Assumindo que somos capazes de determinar todas as curvas algébricas invariantes por uma 1-forma polinomial ω em $\mathbb{C}^2$, o método de integração de Darboux, como apresentado no capítulo 2, não está muito longe de determinar se ω admite una integral primeira liouvilliana. De fato o método de Darboux baseia-se na busca 1-formas diferenciais da forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

tais que

$$d\omega = \eta \wedge \omega .$$

Por outro lado, o teorema 4 nos diz que 1–forma racional fechada em $\mathbb{C}^2$ é da forma

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}}\right) .$$

Resta portanto alterar o método de Darboux para que este passe a levar em conta a contribuição dada pelo termo

$$d\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}}\right)$$

na expressão de η acima.

Definição 12. Seja ω uma 1–forma diferencial polinomial de grau d e $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ polinômios sem fatores comuns. Dizemos que $h = \exp(g/f)$ é um *fator exponencial* da 1–forma polinomial ω, se

$$\omega \wedge \frac{dh}{h}$$

é uma 2–forma polinomial de grau menor ou igual a $d-1$. Esta 2–forma é chamada de *cofator* do fator exponencial h. Denotaremos o cofator de h por Θ_h.

Proposição 7. *Seja ω uma 1–forma polinomial de grau d e $h = \exp(g/f)$ um fator exponencial para ω. Então valem as seguintes afirmações*

1. *A curva algébrica $\{f = 0\}$ é invariante por ω;*
2. *O polinômio $g \in \mathbb{C}[x, y]$ satisfaz a seguinte equação*

$$\omega \wedge dg = g\Theta_f + f\Theta_h \,.$$

demonstração: Deixamos a prova da proposição como exercício para o leitor. □

Utilizando argumentos análogos aos utilizados ao longo do capítulo 2 e a caracterização das formas racionais fechadas o leitor poderá facilmente provar a seguinte proposição.

Proposição 8. *Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Se ω admite p curvas algébricas invariantes distintas f_i, for $i = 1, \ldots, p$, e q fatores exponenciais independentes e_j, for $j = 1, \ldots, q$, então valem as seguintes afirmações .*

(a) *Se existem $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{C}$ não todos zero tais que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Theta_{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \rho_j \Theta_{e_j} = d\omega \,,$$

então a função (multi-valuada)

$$\int f_1^{\lambda_1} \cdots f_k^{\lambda_k} e_1^{\rho_1} \cdots e_q^{\rho_q} \omega$$

é uma integral primeira para ω.

(b) *Se existem $\lambda_i, \rho_j \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Theta_{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \rho_j \Theta_{e_j} = 0 \,,$$

então a função(multivaluada)

$$F = \sum \lambda_i \log f_i + \sum \rho_j \log e_j$$

é uma integral primeira de ω. Quando todos os λ_i são inteiros ω admite uma integral primeira monovaluada dada por

$$\exp(F) = {f_1}^{\lambda_1} \cdots {f_p}^{\lambda_k} {e_1}^{\rho_1} \cdots {e_q}^{\rho_q} \,.$$

(c) *Se existem $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$\sum \lambda_i \Theta_{f_i} = d\omega$$

então existem $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tais que a função

$$f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdots f_p^{\alpha_p} \exp\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}} \right)$$

é uma integral primeira para ω.

Resumimos na tabela a seguir os tipos integrais primeiras obtidas ao longo do texto. Segue do Teorema de Singer que qualquer 1–forma polinomial que possua integral primeira liouvilliana enquadra-se em ao menos um dos casos da tabela.

RELAÇÕES	TIPO DE INTEGRAL PRIMEIRA
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum \beta_j \Theta_{e_j} = d\omega$	$\int f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k} e_1^{\beta_1} \cdots e_l^{\beta_l} \omega$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum \beta_j \Theta_{e_j} = 0$	$\sum \alpha_i \log f_i + \sum \beta_j \log e_j$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = d\omega$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$	$f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdots f_k^{\lambda_k} \exp\left(\frac{g}{f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}}\right)$
$\sum \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$	$\frac{F}{G}$ com $F, G \in \mathbb{C}[x, y]$

Tabela 2: Relações entre cofatores e integrais primeiras

Para que todo o processo de integração via o método de Darboux possa ser considerado um algoritmo para decidir se uma equação diferencial admite, ou não, uma integral primeira liouvilliana basta que possamos resolver algoritmicamente dois problemas.

1. Dada uma 1–forma polinomial ω limitar o grau das curvas algébricas invariantes.
2. Dada uma 1–forma polinomial ω e uma curva algébrica invariante $\{f = 0\}$ limitar o grau dos polinômios $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $\exp(g/f^k), k \in \mathbb{N}$, é um fator exponencial para ω.

De fato se resolvemos (1) e (2) podemos, em princípio, determinar todas as curvas invariantes e todos os fatores exponenciais que ω admite. De posse dessa informação o método de Darboux(revisitado) reduz o problema de integração a um simples problema de álgebra linear.

Parte 2

Folheações

CAPÍTULO 5

Folheações em Superfícies

Na primeira parte desta monografia investigamos a existência de integrais primeiras para campos de vetores e formas diferenciais polinomiais no plano complexo. Na abordagem exposta as parametrizações das órbitas não possuem relevância. O essencial é a decomposição do espaço induzida pelas órbitas. Faz-se então natural a introdução do conceito de folheação holomorfa singular.

O capítulo começa com a definição de folheação holomorfa singular em superfíces complexas incluindo as definições dos fibrados (co)tangente e (co)normal das folheações. Após uma breve análise de alguns exemplos de folheações que terão relevância em nosso estudo estabelecemos o análogo do critério de Darboux-Jouanolou no contexto de folheações holomorfas em variedades complexas compactas.

1. Definição

Uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ de uma superfície complexa S é determinada pelos seguintes dados:

i. uma cobertura por abertos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de S;

ii. para cada aberto U_λ um campo de vetores holomorfo $X_\lambda \in \mathcal{X}(U_\lambda)$;

sujeitos às seguintes condições

iii. se $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ então existe $g_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}^*(U_\lambda \cap U_\mu)$ tal que

$$X_\lambda = g_{\lambda\mu} \cdot X_\mu;$$

iv. se $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\alpha \neq \emptyset$ então

$$g_{\lambda\mu} \cdot g_{\mu\alpha} \cdot g_{\alpha\lambda} = 1\,.$$

A coleção $\{g_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$, por satisfazer iii. e iv., determina um elemento de $H^1(S,\mathcal{O}^*)$, ou equivalentemente, determina um fibrado em retas sobre S.[1] Denominaremos o fibrado associado a coleção $\{g_{\lambda\mu}\}$ por fibrado cotangente de $\mathcal{F}$ e o denotaremos por $T\mathcal{F}^*$.

[1]Explicitamente dada a coleção $\{g_{\lambda\mu}\}$ podemos definir um fibrado em retas complexas sobre S através da colagem de abertos da forma $U_\lambda\times\mathbb{C}$ via a identificação $(x_\lambda, v) \sim (x_\mu, w)$ se $x_\lambda = x_\mu$ e $v = g_{\lambda\mu}w$. Reciprocamente, um fibrado em retas sobre S determina um elemento de $H^1(S,\mathcal{O}^*)$, para maiores detalhes remetemos o leitor à [GH94].

Uma maneira equivalente de definir uma folheação em uma superfície complexa S é através de uma coleção de 1–formas holomorfas, mais precisamente uma folheação $\mathcal{F}$ de uma superfície complexa S é determinada pelos seguintes dados

i'. uma cobertura por abertos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de S;
ii'. para cada aberto U_λ uma 1–forma holomorfa $\omega_\lambda \in \Omega^\infty(U_\lambda)$;

sujeitos às seguintes condições

iii'. se $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ então existe $h_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}^*(U_\lambda \cap U_\mu)$ tal que

$$\omega_\lambda = h_{\lambda\mu} \cdot \omega_\mu;$$

iv'. se $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\alpha \neq \emptyset$ então

$$h_{\lambda\mu} \cdot h_{\mu\alpha} \cdot h_{\alpha\lambda} = 1 .$$

Denominaremos o fibrado associado a coleção $\{h_{\lambda\mu}\}$ por fibrado normal de $\mathcal{F}$ e o denotaremos por $N\mathcal{F}$.

COMENTÁRIO 3. Quando $S = \mathbb{C}^2$ temos que $H^1(S, \mathcal{O}^*) = 0$ e portanto todo fibrado definido sobre $\mathbb{C}^2$ é analiticamente equivalente ao fibrado trivial. Sendo assim temos que folheação holomorfa singular em $\mathbb{C}^2$ pode ser dada por um campo holomorfo global ou uma 1-forma holomorfa global.

COMENTÁRIO 4. Vamos sempre assumir, salvo menção em contrário, que as folheações tratadas possuem conjunto singular de codimensão maior ou igual a 2. Observe que não perdemos generalidade ao fazer tais hipóteses sob o conjunto singular. De fato se D é a componente de codimensão 1 do conjunto singular da folheação então podemos dividir as equações locais da folheação pelas equações locais de D obtendo uma folheação com conjunto singular de codimensão ao menos 2.

Ao longo do texto daremos ênfase a folheações em superfícies projetivas. Neste contexto uma folheação pode ser dada tanto por uma 1-forma meromorfa global quanto por um campo meromorfo global como mostra a seguinte proposição.

Proposição 9. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma superfície projetiva S. Então existe X, um campo meromorfo global, e ω, uma 1-forma meromorfa global, induzindo $\mathcal{F}$ que satisfazem as seguintes igualdades no grupo de Picard de S*

$$\begin{aligned} T\mathcal{F}^* &= (X)_\infty - (X)_0 , \\ N\mathcal{F} &= (\omega)_\infty - (\omega)_0 . \end{aligned}$$

<u>demonstração:</u> Seja $\{X_\alpha\}$ uma coleção de campos de vetores que define $\mathcal{F}$. Como $X_\alpha = g_{\alpha\beta} X_\beta$ e $\{g_{\alpha\beta}\}$ é um cociclo em $H^1(S, \mathcal{O}^*)$ associado à $T\mathcal{F}^*$ podemos interpretar a coleção $\{X_\alpha\}$ como uma seção do fibrado vetorial de posto 2 $TS \otimes T\mathcal{F}^*$.

Sendo S projetiva temos que qualquer fibrado vetorial sobre S possui muitas seções meromorfas.[2] Se σ é uma seção meromorfa de $T\mathcal{F}$ temos que as restrições de σ aos abertos U_α, que denotaremos por σ_α, satisfazem as relações $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot \sigma_\beta$. Sendo assim em $U_\alpha \cap U_\beta$ vale que $\frac{X_\alpha}{\sigma_\alpha} = \frac{X_\beta}{\sigma_\beta}$. Logo a coleção $\{\frac{X_\alpha}{\sigma_\alpha}\}$ define uma seção meromorfa X do fibrado $TS \otimes T\mathcal{F}^* \otimes T\mathcal{F} = TS$, i.e., X é um campo meromorfo global definindo $\mathcal{F}$.

Como estamos supondo que $\mathcal{F}$ possui conjunto singular de codimensão 2 temos que divisor associado a X é exatamente o divisor de pólos menos o divisor de zeros de σ mais o divisor de zeros de $\{X_\alpha\}$. Consequentemente temos que a igualdade

$$T\mathcal{F}^* = (X)_\infty - (X)_0 ,$$

vale a nível de divisores módulo equivalência linear.

As afirmações a respeito da 1-forma ω provam-se de forma completamente análoga. □

Corolário 6 (Fórmula de adjunção). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma superfície projetiva S. Então*

$$K_S = T\mathcal{F}^* \otimes N\mathcal{F}^* ,$$

onde K_S denota o fibrado canônico de S, i.e., o fibrado de 2-formas holomorfas.

demonstração: Seja Ω uma seção meromorfa de K_S, i.e., Ω é uma 2-forma meromorfa global. Se X é um campo meromorfo global induzindo $\mathcal{F}$ temos a contração de Ω por X define uma 1-forma meromorfa global definindo $\mathcal{F}$. Segue portanto da proposição anterior que

$$N\mathcal{F} = (i_X\Omega)_\infty - (i_X\Omega)_0 ,$$

o que conclui a prova do corolário. □

2. Exemplos de Folheações

2.1. Fibrações. Seja $\pi : S \to C$ uma fibração, i.e, uma aplicação holomorfa sobrejetiva de uma superfície projetiva S para uma curva algébrica C. Claramente π, através de suas curvas de nível, induz uma folheação sobre S. Se C' é uma outra curva algébrica e $\alpha : C \to C'$ é uma aplicação holomorfa então a composição

$$\pi' = \pi \circ \alpha : S \to C' ,$$

induz a mesma folheação que π. Ou seja a uma mesma folheação está associada a várias fibrações. Entretanto existe sempre uma fibração com fibras conexas que é única a menos de isomorfismos. Este é o conteúdo do Teorema de fatoração de Stein que enunciamos a seguir. Para uma demonstração o leitor pode consultar [**Fi76**].

[2] Pode-se deduzir este fato do teorema de anulamento de Serre, ver [**Har77**].

Teorema 6 (Teorema de Fatoração de Stein). *Se $\pi : S \to C$ é uma fibração então existem uma curva holomorfa C' e aplicações holomorfas $\alpha : C' \to C$ e $p : S \to C'$ tais que*

1. *p possui fibra genérica conexa e $\pi = p \circ \alpha$;*
2. *se existe $q : S \to C''$ e $\alpha' : C'' \to C$ tais que q possui fibra genérica conexa e $\pi = q \circ \alpha'$ então existe um automorfismo $\beta : C' \to C''$ tal que $\alpha = \alpha' \circ \beta$ e $q = \beta \circ p$.*

Estando interessados em folheações induzidas por fibrações podemos sempre assumir que as fibras genéricas das fibrações consideradas são conexas.

Cabe salientar que ao estudarmos folheações de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ vemos que fibrações não aparecem diretamente. Isto deve-se à inexistência fibrações $\pi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to C$ qualquer que seja a curva algébrica C. De fato, se π é uma tal fibração e p e q são pontos distintos de C então $F_p = \pi^{-1}(p)$ e $F_q = \pi^{-1}(q)$ são curvas algébricas disjuntas. Logo $F_p \cdot F_q = 0$ contradizendo o Teorema de Bézout.

Entretanto as fibrações aparecem de forma natural como a resolução(ver capítulo 6) de folheações que admitem integrais primeiras racionais.

2.2. Folheações associadas a equações diferenciais lineares. Seja $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ o disco unitário e

$$\frac{dY}{dz} = A(z) \cdot Y \, , z \in \mathbb{D} \tag{16}$$

uma equação diferencial meromorfa linear de posto 2, i.e., $A(z)$ é uma matriz 2×2 cujas entradas são funções meromorfas.

As soluções de (16) definem uma folheação de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$. Explicitamente se $A = (a_{ij})$ e $Y = (y_1, y_2)^T$ então esta folheação é definida pelo sistema de 1–formas

$$\begin{aligned} dy_1 - (a_{11}(z)y_1 + a_{12}(z)y_2)dz &= 0 \\ dy_2 - (a_{21}(z)y_1 + a_{22}(z)y_2)dz &= 0 \, . \end{aligned}$$

Claramente o grupo de homotetias $H = \{(z, Y) \mapsto (z, \lambda \cdot Y)\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ deixa invariante a folheação induzida por (16) e portanto temos uma folheação definida no quociente de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^2$ por H,i.e., $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Se $(z, w) = (z, y_1/y_2)$ são coordenadas de $\mathbb{D} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{D} \times \overline{\mathbb{C}}$ então a folheação quociente é dada pela 1-forma meromorfa

$$dw - \big(a_{12}(z) + (a_{11}(z) - a_{22}(z))w - a_{21}(z)w^2\big)\, dz = 0.$$

Evidentemente, procedimento similar pode ser aplicado a equações diferenciais lineares de segunda ordem, i.e., equações da forma

$$\frac{d^2y}{dz} + a(z)\frac{dy}{dz} + b(z) = 0 \, ,$$

onde a e b são funções meromorfas.

Exemplo 9. A equação hipergeométrica de Gauss

$$z(1-z)w'' + (c-(a+b+1)z)\, w' - abw = 0\,, \tag{17}$$

sempre que $c \notin \mathbb{Z}_-$, admite como solução geral em uma vizinhança da origem a função (veja [**Hil97**])

$$\phi(z) = C_1 F(a,b,c;z) + C_2 z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)\,, \tag{18}$$

onde C_1, C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais e

$$F(a,b,c;z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n} z^n\,.$$

Aqui, $(p)_n$ denota $p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)$.

A clássica mudança de variáveis $y(z) = -d \log w(z)$, veja [**Hil97**] p. 104, associa uma folheação de Riccati a qualquer equação diferencial linear de segunda ordem. Nesse novo sistema de coordenadas a folheação induzida pela equação hipergeométrica de Gauss pode ser escrita como

$$\omega = z(1-z)\, dy - \big(z(1-z)y^2 + (c-(a+b+1)z)\, y + ab\big)\, dz\,. \tag{19}$$

Se $c \notin \mathbb{Q}$, $a = 1-k$, $k \in \mathbb{N}$, e b é arbitrário então a folheação induzida por (19) não admite uma integral primeira racional e possui uma curva racional invariante de grau $k+1$ definida pelo polinômio

$$y \cdot F(1-k, b, c; x) - F'(1-k, b, c; x)\,.$$

Muito foi feito no estudo de equações diferenciais lineares no século XVIII e XIX. Matemáticos como Gauss, Schwarz, Jordan e Klein investigaram equações diferenciais lineares sobre a reta projectiva. Em particular abordaram o problema de determinar as soluções algébricas de uma dada equação diferencial linear. Vários aspectos da teoria neste período são apresentados no belo livro [**Gra00**].

Mencionamos aqui as investigações sobre equações diferenciais lineares dado que estas e as equações de Riccati estão intimamente relacionas e a teoria clássica será uma bem vinda fonte de exemplos para as questões que pretendemos discutir.

2.3. Folheações Transversais a Fibrações. Diremos que uma folheação $\mathcal{F}$ de S é transversal a uma fibração $\pi : S \dashrightarrow C$ se a fibra genérica de π é completamente transversal a $\mathcal{F}$. Observe que a definição não exclui a invariância por $\mathcal{F}$ de fibras de π.

Entre as folheações transversais a fibrações as folheações de Riccati caracterizam-se por serem folheações transversais a fibrações racionais, i.e., o gênero da fibra genérica de π é zero.

Quando a fibra genérica de π é hiperbólica, i.e. possui gênero maior ou igual a 2, folheações transversais a π possuem integral primeira meromorfa.

Quando a fibra genérica de π possui gênero um existem exemplos de folheações sem integral primeira meromorfa desde que π seja uma fibração isotrivial.

Exemplo 10. Seja $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ a família de folheações holomorfas de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por

$$X_\alpha = (x^3-1)(x-\alpha y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3-1)(y-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Estas folheações, construídas por Lins Neto em [**LN02b**], são folheações de grau 4 em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Verifica-se facilmente que as nove retas definidas pelo anulamento de

$$(x^3-1)\cdot(y^3-1)\cdot(x^3-y^3)$$

são invariantes por todas as folheações $\mathcal{F}_\alpha$. Após explodir os doze pontos de intersecção tripla destas retas obtemos uma família linear de folheações de uma superfície racional S tal que todo elemento é transversal a uma fibração elíptica. Em [**LN02b**] encontramos uma demonstração de que o conjunto de parâmetros $\alpha \in \mathbb{C}$ para os quais as folheações associadas possuem integral primeira racional é um subconjunto denso e enumerável de $\mathbb{C}$.

Veremos mais adiante que todas as folheações na família descrita acima possuem integral primeira Liouvilliana, o mesmo valendo mais geralmente para folheações transversais a fibra genérica de uma fibração por curvas elípticas.

2.4. Os exemplos de Jouanolou. Os primeiros exemplos de folheações algébricas de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sem curvas algébricas invariantes datam da década de 1970 e foram obtidos por Jouanolou. Em [**Jou79**] pode-se encontrar a demonstração de que para qualquer inteiro d maior ou igual a 2 as folheações induzidas pelos campos sobre $\mathbb{C}^2$

$$X = (1-xy^d)\frac{\partial}{\partial x} + (x^d - y^{d+1})\frac{\partial}{\partial y},$$

não possuem nenhuma curva algébrica invariante em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Em particular são exemplos explícitos de não integrabilidade Liouvilliana.

3. O Teorema de Jouanolou

Em [**Jou78**] Jouanolou generaliza o critério de Darboux-Jounolou, apresentado no capítulo 2 deste texto, para folheações holomorfas de codimensão 1 em variedades complexas compactas sujeitas a certas hipóteses. A primeira hipótese é que toda 1–forma holomorfa é fechada e a segunda esta relacionada com a sequência espectral de Hodge da variedade em questão. Apresentaremos um refinamento de de tal resultado, devido a E. Ghys v. [**Ghy00**], onde as hipóteses de Jouanolou sobre a variedade complexa compacta são eliminadas. Apesar de todo o texto concentrar-se em folheações em superfícies fazemos aqui uma exceção dado que a generalidade não complica a prova.

Teorema 7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular holomorfa de uma variedade complexa compacta M. Se $\mathcal{F}$ admite uma infinidade de hipersuperfícies analíticas invariantes então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira meromorfa.*

demonstração: Denote por $\mathrm{Div}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Div}(M)$ o grupo abeliano gerado pela hipersurfícies irredutíveis invariantes por $\mathcal{F}$ e por Ω^1_f o $\mathbb{C}$-feixe das 1-formas holomorfas fechadas sobre M. Observe que apesar de Ω^1_f não ser um $\mathcal{O}_M$-feixe temos que $H^i(M, \Omega^1_f)$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita para todo inteiro positivo i. Para tanto basta escrever a sequência longa em cohomologia associada a sequência exata curta de feixes

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}_M \to \Omega^1_f \to 0\,,$$

e usar que $H^i(M, \mathcal{O})$ e $H^i(M.\mathbb{C})$ possuem dimensão finita para todo inteiro positivo i.

A derivada logarítmica $g \mapsto \frac{dg}{g}$ induz um homomorfismo de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ para $H^1(M, \Omega^1_f)$. Compondo o homomorfismo canônico $\mathrm{Div}(M) \to Pic(M)$ com a derivada logarítmica obtemos um homomorfismo

$$\mathrm{Div}(\mathcal{F}) \to H^1(M, \Omega^1_f)\,.$$

Seja $\mathrm{Div}_0(\mathcal{F})$ o núcleo da aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\mathrm{Div}(\mathcal{F}) \otimes \mathbb{C} \to H^1(M, \Omega^1_f)\,.$$

Se $H = \sum_{l=1}^k \alpha^{(l)} \cdot H^{(l)}$ é um elemento de $\mathrm{Div}_0(\mathcal{F})$ então existe um recobrimento $\{U_i\}$ de M, funções $g_{ij}^{(l)} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ e formas fechadas $\eta_i \in \Omega^1(U_i)$ tais que

- a restrição de $H^{(l)}$ ao aberto U_i é definido por uma função holomorfa $H_i^{(l)} : U_i \to \mathbb{C}$;
- se $U_i \cap U_j \neq 0$ então $H_i^{(l)} = g_{ij}^{(l)} H_j^{(l)}$;
- $\sum_{l=1}^k \alpha^{(l)} \frac{dg_{ij}^{(l)}}{g_{ij}^{(l)}} = \eta_j - \eta_i\,.$

Podemos então associar a $H \in \mathrm{Div}_0(\mathcal{F})$ a 1-forma meromorfa fechada Θ_H definida em U_i por

$$\eta_i + \sum_{l=1}^k \alpha^{(l)} \frac{dg_{ij}^{(l)}}{g_{ij}^{(l)}}\,.$$

Observe que Θ_H está bem definida a menos da adição de uma 1-forma global holomorfa. Portanto o produto exterior de Θ_H com $\omega \in H^0(M, \Omega^1 \otimes N_{\mathcal{F}})$, onde ω induz a folheação $\mathcal{F}$, induz um homomorfismo

$$u : \mathrm{Div}_0(\mathcal{F}) \to \frac{H^0(M, \Omega^2 \otimes N_{\mathcal{F}})}{\omega \wedge H^0(M, \Omega^1_f)}\,.$$

Suponha agora que $\mathcal{F}$ possui ao menos

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \Omega^1_f) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{H^0(M, \Omega^2 \otimes N_{\mathcal{F}})}{\omega \wedge H^0(M, \Omega^1_f)} + 2$$

hipersurfícies invariantes. Temos portanto que a dimensão do núcleo de u é ao menos 2.

Se H pertence ao núcleo de u verifica-se facilmente que podemos escolher as 1-formas $\eta_i \in \Omega^1(U_i)$ de modo que a 2-forma $\omega \wedge \Theta_H$ seja identicamente nula e que os pólos de Θ_H estejam contidos no suporte de H.

Tomando dois elementos linearmente independentes do núcleo u podemos construir formas meromorfas de fechadas Θ_1 e Θ_2 com conjunto de pólos distintos e tais que $\omega \wedge \Theta_1 = \omega \wedge \Theta_2 = 0$. Logo existe uma função meromorfa não constante f tal que $\Theta_1 = f\Theta_2$. Diferenciando esta última expressão concluímos que f é uma integral primeira para $\mathcal{F}$. □

Brunella em [**Bru00**] fornece uma prova alternativa do resultado acima utilizando o formalismo de formas logarítmicas. Dado as limitações de tempo para a preparação deste texto não pudemos tratar das formas logarítmicas na presente versão. Observamos apenas que as formas logarítmicas são utilizadas de forma essencial por Brunella e Mendes, em [**BGM00**], para abordar o problema da limitação do grau de hipersuperfícies invariantes por um sistema de Pfaff e que Esteves, em [**Est02**], utiliza os resultados de [**BGM00**] para controlar a regularidade de Castelnuovo-Mumford de conjuntos algébricos invariantes por folheações em espaços projetivos.

CAPíTULO 6

Fórmulas de Intersecção

J'ai demontré quelques proprietés des équations intégrables algébriquement. De pareils résultats n'ont pas pour le moment grand valeur; mais ils pourraient en acquérir le jour où l'on pourra reconnaître si ces propriétes s'étendent aux équations non intégrables, ou si elles ne sont pas toujours vraies pour ces équations; dans le premier cas, en effet, on aurait un théorème général applicable à toutes les équations différentieles, et dans le second cas on posséderait un critérium permettant de démontrer que les équations de certaines catégories ne sont pas intégrables.

HENRI POINCARÉ

Entre as ferramentas introduzidas por Poincaré nas suas investigações sobre a integrabilidade de equações diferenciais estão versões de algumas das fórmulas de interseção apresentadas neste capítulo para o caso particular de folheações de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com integral primeira racional.

As duas primeiras seções deste capítulo são dedicadas a tais fórmulas de intersecção que serão fundamentais no estudo que segue. A exposição é fortemente influenciada pelo livro [**Bru00**] e convidamos o leitor a consulta-lo para as provas aqui omitidas. Um outro motivo que nos levou a omitar deliberadamente estas provas é que temos um excelente texto em português, notas de um curso do colóquio anterior por Márcio Soares e Rogério Mol(ver [**MS01**]), onde o leitor também poderá encontrar as demonstrações aqui omitidas.

Como aplicação das fórmulas de intersecção apresentamos alguns resultados conhecidos sobre cotas para o grau de curvas algébricas invariantes além de explicitar uma classe genérica de equações diferenciais cujos elementos não admitem integral primeira liouvilliana.

1. Fórmulas de Intersecção

1.1. Ordem de tangência. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície projetiva S e $C \subset S$ uma curva algébrica reduzida tal que cada componente de C não é invariante por $\mathcal{F}$. A *ordem de tangência* entre $\mathcal{F}$ e C é dada por

$$\operatorname{tang}(\mathcal{F}, \mathrm{C}) = \sum_{p \in C} \operatorname{tang}(\mathcal{F}, \mathrm{C}, \mathrm{p}) = \sum_{p \in \mathbf{C}} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{< f_p, X_p(f_p) >}$$

onde X_p é um campo de vetores holomorfo definido em uma vizinhança de p e induzindo $\mathcal{F}$, f_p é uma equação local para C em $\mathcal{O}_p$ e $X_p(\cdot)$ é a ação de X_p como derivação no anel local $\mathcal{O}_p$.

Proposição 10. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície projetiva S e $C \subset S$ uma curva algébrica reduzida tal que cada componente de C não é invariante por $\mathcal{F}$. Então valem as seguintes igualdades:*[1]

$$\begin{aligned} N\mathcal{F} \cdot C &= \chi(C) + \operatorname{tang}(\mathcal{F}, C) \\ T\mathcal{F} \cdot C &= C \cdot C - \operatorname{tang}(\mathcal{F}, C) . \end{aligned}$$

Exemplo 11 (Folheações no plano projetivo). Quando tratamos de folheações do plano projetivo um dos invariantes mais básicos que podem ser definidos é o grau.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação do plano projetivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se L é uma reta de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ não invariante por $\mathcal{F}$ então o *grau* de $\mathcal{F}$ é definido como a ordem de tangência entre L e $\mathcal{F}$. Observe que a boa definição do grau de uma folheação segue da proposição 10.

Seja $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ uma 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$. Vê-se facilmente que esta 1–forma induz uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. De fato $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ pode ser coberto por três abertos U_0, U_1 e U_2 isomorfos a $\mathbb{C}^2$ com coordenadas, respectivamente, (x,y), (u,v) e (r,s) que relacionam-se como abaixo

$$x = \frac{v}{u} = \frac{1}{s}$$
$$y = \frac{1}{u} = \frac{r}{s}.$$

Escreva $a(x,y) = \sum_{i=1}^{d} a_i(x,y)$ e $b(x,y) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x,y)$ onde a_i e b_i são polinômios homogêneos de grau i e ou a_d ou b_d são não nulos.

Nas coordenadas $x = \frac{v}{u}$ e $y = \frac{1}{u}$, ω escreve-se como

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{a_i(v,1)(vdu - udv)}{u^{i+2}} - \frac{b_i(v,1)du}{u^{i+2}} \right) .$$

Se $x \cdot a_d + y \cdot b_d$ é identicamente zero vemos que a forma acima possui conjunto de pólos de ordem $d+1$ e caso contrário a forma acima possui conjunto de pólos de ordem $d+2$. Concluímos por portanto que se $x \cdot a_d + y \cdot b_d = 0$ então $N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(n+1)$ e caso contrário $N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(d+2)$.

---

[1] Aqui o símbolo $\chi(C)$ denota a característica de Euler aritmética de C, ou seja,

$$\chi(C) = -K_S \cdot C - C \cdot C ,$$

e $C \cdot C$ denota a auto–intersecção de C, i.e.,

$$C \cdot C = \operatorname{grau} \mathcal{O}_S(C)_{|C} .$$

Contas similares com a 2–forma $dx \wedge dy$ nos mostram que $K_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(-3)$ e via a fórmula de adjunção deduzimos que

$$T\mathcal{F}^* = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(d-2) & \text{se } x \cdot a_d + y \cdot b_d = 0 \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(d-1) & \text{se } x \cdot a_d + y \cdot b_d \neq 0 . \end{cases}$$

Segue da proposição 10 que

$$\operatorname{tang}(\mathcal{F}, L) = \begin{cases} d-1 & \text{se } x \cdot a_d + y \cdot b_d = 0 \\ d & \text{se } x \cdot a_d + y \cdot b_d \neq 0 \end{cases}$$

e portanto concluímos que no caso em que $x \cdot a_d + y \cdot b_d = 0$ o grau da folheação é $d-1$. Já quando $x \cdot a_d + y \cdot b_d \neq 0$ o grau da folheação é d. □

1.2. Ordem de anulamento. Sejam C uma curva reduzida invariante por $\mathcal{F}$, f uma função holomorfa reduzida representando C em torno de um ponto $p \in C$ e ω uma 1–forma gerando $\mathcal{F}$ em torno de p. Sendo C invariante por $\mathcal{F}$, podemos escrever ω como

$$g\omega = hdf + f\eta , \tag{20}$$

onde η é uma 1–forma holomorfa, g e h são funções holomorfas relativamente primas, veja em [**MS01**]. Pode-se verificar que a ordem de anulamento de $\frac{h}{g}_{|C}$ não depende da fatoração escolhida, e portanto podemos definir

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = \text{ordem de anulamento de } \frac{h}{g}|_C \, \text{em}\, p .$$

Exemplo 12. Seja $\mathcal{F}$ a folheação de $\mathbb{C}^2$ induzida pela 1–forma

$$\omega = pydx - qxdy .$$

A curva C definida por $\{x^p - y^q = 0\}$ é invariante por $\mathcal{F}$. Calculemos $Z(\mathcal{F}, C, 0)$.

Seja $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ a parametrização de Puiseaux de C, i.e., $\phi(t) = (t^q, t^p)$. Se g e h são como em (20) então que a ordem de anulamento de $(h/g)_{|C}$ em $0 \in \mathbb{C}^2$ é dada pela ordem de anulamento $\phi^*(h/g)$. Fazendo o pull-back de ambos os membros de (20) obtemos a igualdade:

$$\phi^* g(pqt^{p+q}dt) = \phi^* h(pqt^{pq}dt) .$$

Concluímos que

$$Z(\mathcal{F}, C, 0) = p + q - pq .$$

□

Definiremos a ordem de anulamento de $\mathcal{F}$ ao longo de C, que denotaremos por $Z(\mathcal{F}, C)$, como sendo a soma das ordens locais de anulamento nos pontos de C, i.e.,

$$Z(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in C} Z(\mathcal{F}, C, p) .$$

A prova da próxima proposição, pode ser encontrada em [**Bru00**].

Proposição 11. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa S e C uma curva reduzida invariante por $\mathcal{F}$. Então*

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} \cdot C &= C \cdot C + Z(\mathcal{F}, C) \\ T_{\mathcal{F}} \cdot C &= \chi(C) - Z(\mathcal{F}, C). \end{aligned}$$

Quando C é uma curva lisa irredutível temos que a ordem de anulamento de $\mathcal{F}$ em um ponto p de C coincide com o índice de Poincaré-Hopf de um campo X, local, que gera $\mathcal{F}$ em torno de p. Se z é um parâmetro local de C temos que o campo X quando restrito a C escreve-se como $u(z) \cdot z^k \frac{\partial}{\partial z}$, onde u é uma unidade de $\mathcal{O}_{C,p}$, nesse caso temos que a ordem de anulamento em p é precisamente k.

Postergaremos o cálculo da ordem de anulamento ao longo de curvas singulares para a seção 2. Entretanto o fato da ordem de anulamento ser positiva em curvas lisas juntamento com a proposição 11 nos permite deduzir como corolário um caso particular de um resultado provado originalmente por Cerveau e Lins Neto em [**CLN91**].

Corolário 7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se C é uma curva lisa invariante por $\mathcal{F}$ então*

$$\operatorname{grau}(C) \leq \operatorname{grau}(\mathcal{F}) + 2 .$$

<u>demonstração:</u> Como $N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(d+2)$, ver exemplo 11, a proposição 11 implica que

$$(d + 2 - c) \cdot c = Z(\mathcal{F}, C),$$

onde c denota o grau de C. O resultado segue da positividade de $Z(\mathcal{F}, C)$. □

1.3. Índice de Camacho-Sad. Seja C um germe de curva invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ de uma vizinhança da origem de um ponto $p \in \mathbb{C}^2$. Suponha que $\mathcal{F}$ é induzida por uma 1-forma holomorfa ω, e η, k como em (20). Definimos o índice de Camacho-Sad como

$$CS(\mathcal{F}, C, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{1}{k} \eta .$$

O índice acima foi primeiramente definido no caso de curvas lisas em [**CS87**] para provar o Teorema do Ídice que enunciamos a seguir. A generalização aqui apresentada para o caso de curvas reduzidas com singularidades arbitrárias é devida a Suwa, ver [**Su98**].

Teorema 8. *Se $C \subset S$ é uma curva algébrica invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ de uma superfície projetiva S então*

$$C^2 = \sum_{p \in C \cap \operatorname{sing}(\mathcal{F})} CS(\mathcal{F}, C, p) .$$

2. Singularidades e Transformações Birracionais

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície S. Na vizinhança de um ponto regular p a folheação $\mathcal{F}$ é localmente trivial. Mais precisamente existe um aberto U contendo p e uma submersão $f : U \to \mathbb{C}$ tal que as folhas de $\mathcal{F}_{|U}$ coincidem com as curvas de nível de f.

Já na vizinhança de pontos singulares a situação é bem distinta: a folheação tanto do ponto de vista topológico, quanto do ponto de vista analítico, pode apresentar comportamento bastante complicado.

A teoria local encontra-se bastante desenvolvida e estes avanços são mais evidentes na classe das singularidades reduzidas.

Definição 13. *Seja $p \in S$ uma singularidade de $\mathcal{F}$. Seja X um campo holomorfo com singularidades isoladas que gera $\mathcal{F}$ em uma vizinhança de p e denotemos por λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear de X em p. Dizemos que p é reduzida se vale uma das seguintes alternativas:*

a. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ *e* $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$;
b. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ *e* $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

Quando p é uma singularidade reduzida com parte linear invertível, item a. da definição acima, distinguimos dois casos.
a.1. $\underline{\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}}$: Neste caso sempre existe uma equivalência local entre a folheação em questão e a folheaçao induzida pela parte linear de um campo que a induz como nos garante o Teorema de Linearização de Poincaré.
a.2. $\underline{\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^+}$: Neste caso não temos em geral a equivalência, nem mesmo formal, com a parte linear. Interveêm na linearização ressonâncias e condições diofantinas no quociente de autovalores, ver [**CS87**] e referências lá contidas.

Quando a parte linear de p não é invertível nem nilpotente dizemos que p é uma selá-nó. A estrutura analítica é bastante rica como o leitor pode conferir consultando [**MR82**].

Para uma exposição bastante agradável sobre a teoria local de folheações holomorfas aconselhamos o leitor a consultar [**Lo02**].

As singularidades reduzidas estão longe de exaurir todas as possibilidades para as singularidades das folheações em superfícies. Entretanto o uso de transformações birracionais permite *dessingularizar* a folheação obtendo uma nova folheação onde todas as singularidades são reduzidas.

Exemplo 13. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{C}^2$ induzida pela 1–forma $\omega = pxdy - qydx$, onde p e q e que são inteiros positivos primos entre si. Vemos que a parte linear do campo associado possui uma singularidade na origem com autovalores p e q e portanto o (único) ponto singular de $\mathcal{F}$ não é reduzido.

Seja $S_0 = \mathbb{C}^2$ e $\pi_1 : S_1 \to S_0$ o blow-up da origem de $\mathbb{C}^2$. Mais precisamente a superfície S_1 é obtida via a colagem de duas cópias de $\mathbb{C}^2$ com coordenadas (x,t) e (y,u) através da identificação $(y,u) = (xt, 1/t)$. O aplicação π é definida como $\pi(x,t) = (x, tx)$ nas coordenadas (x,t) e como $\pi(y,u) = (uy, y)$ nas coordenadas (y,u).

Fazendo pull-back de ω por π obtemos

$$\pi^*\omega = \begin{cases} x \cdot ((p-q)tdx + pxdt)\,, \text{ nas coordenadas } (x,t) \\ y \cdot ((p-q)udy - qydu)\,, \text{ nas coordenadas } (y,u) \end{cases}$$

Observe que $\pi^*\omega$ não possui singularidades isoladas, de fato $\pi^{-1}(0)$ é isomorfo a $\overline{\mathbb{C}}$ e coincide com o conjunto singular de $\pi^*\omega$. Após dividir as expressões acima pela equação do divisor excepcional vemos que a folheação em $\tilde{S}$ apresenta exatamente duas singularidades quando $p \neq q$. Uma na origem das coordenadas (x,t) com quociente de autovalores $\frac{q-p}{p}$ e a outra na origem das coordenadas (y,u) com quociente de autovalores $\frac{p-q}{q}$. Se $p > q$ vemos que a singularidade na carta (x,t) é reduzida(quociente de autovalores negativo) enquanto a singularidade na carta (y,u) não é reduzida. Quando $p < q$ temos uma situação análoga só que com o papel das singularidades trocado. O caso $p = q$ é distinto e vemos que nesse caso o divisor excepcional não é invariante e a folheação obtida é regular, i.e., livre de singularidades.

Iterando o processo acima, sempre fazendo blow-ups nas singularidades não-reduzidas, verifica-se facilmente que após um número finito de blow-ups obtemos uma folheação com todas as singularidades reduzidas. Observe que o número de blow-ups necessários para a resolução está relacionado com o número de passos do algoritmo de Euclides para calcular o máximo divisor comum entre p e q.

Como já observamos podemos sempre, através de blow-ups, resolver uma folheação holomorfa de uma superfície complexa. Este é o conteúdo do Teorema de Seidenberg.

Teorema 9 (Seidenberg). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície S. Existe uma superfície $\tilde{S}$ e uma aplicação holomorfa $\pi : \tilde{S} \to S$ tais que π é uma composição de blow-ups e todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ são reduzidas.*

No restante desta seção analisaremos o comportamento dos fibrados associados às folheações e dos índices previamente definidos quando submetidos à blow-ups.

Terão papel de destaque na discussão que segue dois índices associados às singularidades isoladas de folheações em superfícies. O primeiro é a chamada *multiplicidade algébrica* da singularidade; se p é uma singularidade de uma folheação $\mathcal{F}$ definimos a multiplicidade algébrica de p como sendo a ordem do primeiro jato não-nulo de uma 1-forma que gera $\mathcal{F}$ em torno de p. Mais precisamente se $\omega = \sum_i \omega_i$, onde ω_i são formas polinomiais homogêneas de grau i em coordenadas locais ao redor de p temos que a multlicidade algébrica de p é o menor k tal que $\omega_k \neq 0$. Denotaremos por $a(p)$ a multiplicidade algébrica de p.

O segundo índice associado a uma singularidade p será denotado por $l(p)$ e definido da seguinte forma. Seja U uma vizinhança de p onde $\mathcal{F}$ seja gerada por uma 1-forma holomorfa ω e com singularidade isolada em p. Se denotarmos por $\pi : \tilde{U} \to U$ o blow-up de U em p vemos que $\pi^*\omega$ é uma 1-forma holomorfa em $\tilde{U}$ que se anula ao longo do divisor excepcional E. Seja k o maior inteiro tal que $\pi^*\omega$ seja divisível pela k-ésima potência da equação local do divisor excepcional. Definiremos $l(p)$ como sendo igual a k.

A multiplicidade algébrica e o índice $l(p)$ relacionam-se da seguinte forma:

Proposição 12. *Seja ω uma 1-forma holomorfa defininida em uma vizinhança da origem de $\mathbb{C}^2$ e com singularidade na origem. Então*

$$l(p) = \begin{cases} a(p) & se\ E\ for\ invariante\ por\ \pi^*\mathcal{F} \\ a(p)+1 & caso\ contrario \end{cases}$$

demonstração: Exercício para o leitor. □

2.1. Fibrados. Vejamos como os fibrados associados à folheação comportam-se com respeito a blow-ups.

Proposição 13. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície projetiva S. Se $\pi : \tilde{S} \to S$ é a explosão de um ponto p de S e $\tilde{\mathcal{F}}$ é a folheação pull-back de $\mathcal{F}$ então valem as seguintes igualdades no grupo de Picard de $\tilde{S}$:*

1. $K_{\tilde{S}} = \pi^*(K_S) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)$;
2. $T\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*(T\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}((l(p)-1)E)$;
3. $N\tilde{\mathcal{F}}^* = \pi^*(N\mathcal{F}^*) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(l(p)E)$;

demonstração: Seja Ω uma 2–forma meromorfa em S regular em p. Temos portanto que $\pi^*\Omega$ é uma 2–forma meromorfa em $\tilde{S}$. Se (x,y) são coordenadas locais em uma vizinhança de p então Ω escreve-se nesta vizinhança como $u(x,y)dx \wedge dy$, onde u é uma unidade. Fazendo $t = y/x$ vemos que nas coordenadas (t,x) de $\tilde{S}$ vale que $\pi^*\Omega = u(x,tx)\cdot xdx \wedge dt$ e consequentemente

$$K_{\tilde{S}} = \pi^*(K_S) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)\,,$$

provando o item (1).

Para mostrar o item (3) raciocinamos de forma análoga. Se ω é uma 1–forma meromorfa gerando $\mathcal{F}$ temos que $N\mathcal{F} = \mathcal{O}_S((\omega)_\infty - (\omega)_0)$. Como $N\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_S((\pi^*(\omega))_\infty - (\pi^*(\omega))_0)$ temos que

$$N\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*(N\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-l(p)E)\,,$$

o que é suficiente para provar o item (3).

O item (2) segue dos itens (1) e (3) quando combinados com a fórmula de adjunção. □

2.2. Ordem de anulamento. Terá também interesse o comportamento da ordem de anulamento com respeito a blow-ups.

Proposição 14. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em um superfície projetiva complexa e seja C uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$. Se $p \in C$ é uma singularidade de $\mathcal{F}$ então*

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = (E \cdot \overline{C})(l(p) - E \cdot \overline{C}) + \sum_{q \to p} Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q),$$

onde $\overline{C}$ é o transformado estrito de C, E o divisor excepcional obtido ao explodir p e $q \to p$ são todos os pontos de $\overline{C}$ que estão sobre p.

demonstração: Seja $\pi : \overline{S} \to S$ o blow-up de p. Se E é o divisor excepcional , i.e., $E = \pi^{-1}(p)$, então

$$\pi^* N_{\mathcal{F}} = N_{\overline{\mathcal{F}}} + l(p)E,$$

e

$$\pi^* C = \overline{C} + (E \cdot \overline{C})E.$$

Como $\pi^* N_{\mathcal{F}} \cdot \pi^* C = N_{\mathcal{F}} \cdot C$ obtemos que

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} \cdot C &= (N_{\overline{\mathcal{F}}} + l(p)E) \cdot (\overline{C} + (E \cdot \overline{C})E) \\ &= N_{\overline{\mathcal{F}}} \cdot \overline{C} + (E \cdot \overline{C})(N_{\overline{\mathcal{F}}} \cdot E) \\ &= N_{\overline{\mathcal{F}}} \cdot \overline{C} + l(p) \cdot (E \cdot \overline{C}). \end{aligned}$$

Comparando esta igualdade com a proposição 11 podemos deduzir que

$$C \cdot C + Z(\mathcal{F}, C) = \overline{C} \cdot \overline{C} + Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}) + l(p) \cdot (E \cdot \overline{C}).$$

Finalmente de

$$\overline{C} \cdot \overline{C} = C \cdot C - (E \cdot \overline{C})^2,$$

obtemos a proposição. □

3. Cotas para o grau de curvas invariantes

Após a longa digressão sobre os conceitos básicos da teoria de folheações em superfícies veremos como podemos utilizar esta tecnologia para auxiliar-nos na questão de integrabilidade. Como já observamos no final da Parte 1 do presente texto é suficiente para tanto controlar-mos o grau de curvas algébricas invariantes.

A parte do caso de curvas a cruzamentos normais um dos primeiros resultados sobre a limitaçã do grau de curvas algébricas invariantes é devido a Carnicer e pode ser enunciado como se segue:

Teorema 10 (Carnicer). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ livre de singularidades dicríticas. Se C é uma curva algébrica reduzida invariante por $\mathcal{F}$ então*

$$\text{grau}(C) \leq \text{grau}(\mathcal{F}) + 2.$$

Brunella, em [**Bru97**], nos mostra que o resultado acima pode ser deduzido da proposição 11 e do teorema abaixo:

Teorema 11 (Brunella). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa S e $p \in S$ uma singularidade não-dicrítica de $\mathcal{F}$. Se C é uma germe de curva invariante passando por p então*

$$Z(\mathcal{F}, C, p) \geq 0 \ ,$$

e a igualdade só vale quando C é a união de todas as separatrizes passando por p.

Exemplo 14. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície algébrica S e $p \in S$ uma singularidade radial de $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante C passando por p. Pela proposição 14 temos que $Z(\mathcal{F}, C, p) = r(2-r)$, onde r é o número de ramos de C passando por p. □

Exemplo 15. Seja C uma curva algébrica na superfície algébrica S. Suponha que C possui uma singularidade p da forma $y^k - x^{k+1}$ + h.o.t. e que todas as outras singularidades de C, caso existam, sejam na pior das hipóteses nós órdinarios. Suponha que $\mathcal{F}$ é qualquer folheação holomorfa deixando C invariante. Então pela proposição 14 obtemos

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = k(l(p) - k) + Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q) \geq k(1-k) + 1,$$

observando que $Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q) \geq 0$, por que q é um ponto liso de $\overline{C}$, e que $Z(\overline{\mathcal{F}}, \overline{C}, q) = 0$ implica que E é genericamente transversal a $\overline{\mathcal{F}}$ e consequentemente $l(p) \geq 2$. Como a contribuição de nós órdinários para $Z(\mathcal{F}, C)$ é sempre não negativa,

$$Z(\mathcal{F}, C) \geq Z(\mathcal{F}, C, p) \geq -k^2 + k + 1 \, .$$

Em particular

$$\deg(C) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2 + \frac{k^2 - k - 1}{\deg(C)} \leq \deg(\mathcal{F}) + 2 + \frac{k^2 - k - 1}{k+1} \, .$$

□

COMENTÁRIO 5. Os exemplos anteriores nos mostram que para controlar o índice $Z(\mathcal{F}, C, p)$ basta conhecer a resolução da singularidade e o número de ramos da curva C passando por p. Utilizaremos este fato sem demonstrá-lo no último capítulo destas notas.

4. Centros e integrabilidade

Seja C uma curva algébrica reduzida em uma superfície projetiva S e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de S deixando C invariante. Suponha que todas as singularidade de $\mathcal{F}$ sobre C são reduzidas e que nenhuma dessas singularidades é sela–nó. Podemos então decompor $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$ como

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C = S_{\mathrm{I}} \cup S_{\mathrm{II}} \cup S_{\mathrm{III}} \, , \tag{21}$$

onde S_{I} são as singularidades de $\mathcal{F}$ localizadas na intersecção de componentes irredutíveis distintas de C, S_{II} são as singularidades de $\mathcal{F}$ localizadas nos nós de componentes irredutíveis de C e S_{III} são as singularidades de $\mathcal{F}$ em pontos lisos de C.

Antes de enunciar a próxima proposição lembramos que o número de Milnor de uma singularidade p de uma folheação $\mathcal{F}$ é definido como o número máximo de singularidades que aparecem em uma vizinhança arbitrariamente pequena de p quando $\mathcal{F}$ é submetida a uma pequena perturbação local. Denotaremos o número de Milnor de p, a folheação estando subentendida, por $\mu(p)$. Para uma definição mais formal do número de Milnor e uma prova do Teorema de Darboux que utilizaremos a seguir o leitor deve consultar [MS01].

Proposição 15. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se C é uma curva reduzida invariante de grau c tal que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ sobre C são reduzidas e tal que nenhuma dessas singularidades é uma sela-nó então*

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{c}\right)^2 + 2\sum_i g(C_i) = 2 \sum_{p\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}),\ p\notin C} \mu(p)\,,$$

onde C_i, $1 \le i \le k$, são as componentes irredutíveis de C, $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$ *é decomposto como em (21) e s_{III} denota a cardinalidade de S_{III}.*

demonstração: Decomponha $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$ como em (21) e denote por s_i a cardinalidade de S_i. Para todo nó p de C temos que $\mathbb{Z}(\mathcal{F}, C, p) = 0$, logo

$$s_{\mathrm{III}} = Z(\mathcal{F}, C)\,.$$

Segue portanto da proposição 11 que

$$\deg(\mathcal{F}) + 2 = \deg(C) + \frac{s_{\mathrm{III}}}{\deg(C)}$$

e consequentemente, após elevar ao quadrado,

$$(\deg(\mathcal{F}) + 2)^2 = \deg(C)^2 + 2s_{\mathrm{III}} + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{\deg(C)}\right)^2. \tag{22}$$

Se escrevemos $C = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, onde C_i são as componentes irredutíveis de C, então

$$\deg(C)^2 = \sum_i \deg(C_i)^2 + 2\left(\sum_{1\le i<j\le k} \deg(C_i)\cdot\deg(C_j)\right).$$

Podemos então verificar que

$$\deg(C)^2 = \sum_i \deg(C_i)^2 + 2s_{\mathrm{I}}\,, \tag{23}$$

já que

$$s_{\mathrm{I}} = \sum_{1\le i<j\le k} \deg(C_i)\cdot\deg(C_j)\,.$$

O *número* de singularidades de $\mathcal{F}$ é dado pelo Teorema de Darboux que nos diz que

$$\#\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})^2 + \deg(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F})} \mu(p)\,,$$

e portanto

$$\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F}),\ p\notin C} \mu(p) = \deg(\mathcal{F})^2 + \deg(\mathcal{F}) + 1 - s_{\mathrm{I}} - s_{\mathrm{II}} - s_{\mathrm{III}}\,. \tag{24}$$

Combinando (22), (23) e (24) obtemos

(25)

$$\sum_i \deg(C_i)^2 + \deg(\mathcal{F})^2 - 2(\deg(\mathcal{F}) + 1 + s_{\mathrm{II}}) + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{\deg(C)}\right)^2 = 2\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F}),\ p\notin C} \mu(p)\,.$$

Se $n(C_i)$ denota o número de nós de C_i então pela fórmula do gênero

$$2g(C_i) = (\deg(C_i) - 1)(\deg(C_i) - 2) - 2n(C_i)$$

e após somar sobre i

$$2s_{\mathrm{II}} = -2\sum_i g(C_i) + \sum_i \deg(C_i)^2 - 3\deg(C) + 2k\,.$$

Finalmente, substituindo esta última equação em (25), temos

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c + \left(\frac{s_{\mathrm{III}}}{c}\right)^2 + 2\sum_i g(C_i) = 2\sum_{p\in\mathrm{Sing}(\mathcal{F}),\ p\notin C} \mu(p)\,,$$

provando a proposição. □

4.1. Não-integrabilidade de folheações. Via a proposição 15 mostraremos como garantir a não-integrabilidade genérica para folheações no plano projetivo de grau d, $d \geq 2$.

O primeiro passo é entender a relação entre os fatores de integração e as singularidades de $\mathcal{F}$. Trabalharemos apenas com singularidades com a parte linear não degenerada. Nesse contexto o lema abaixo mostra que o traço da parte linear do campo definindo $\mathcal{F}$ na singularidade sempre que não nulo força a passagem do conjunto de zeros e pólos do fator de integração pela singularidade.

Lema 2. *Seja X um campo de vetor holomorfo em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$ e $\omega = i_X dx \wedge dy$ a 1-forma dual a X. Suponha que 0 é uma singularidade de X Caso exista uma 1-forma η tal que $dw = \eta \wedge w$ então o traço de $DX(0)$ é nulo.*

demonstração: Se $\omega = i_X dx \wedge dy$ então $d\omega = \mathrm{div}X dx \wedge dy = (\mathrm{Tr}(DX(0)) + h.o.t.)dx \wedge dy$. Como 0 é uma singularidade de X então

$$(\eta \wedge \omega)(0) = 0 = (\mathrm{Tr}(DX(0))dx \wedge dy\,.$$

□

Teorema 12. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d \geq 3$. Suponha que $\mathcal{F}$ é reduzida e livre de selas-nós. Se o número de centros de $\mathcal{F}$ é menor que $\frac{d(d-2)}{2}$ então $\mathcal{F}$ não admite integral primeira liouvilliana.*

demonstração: Seja $N = \sum_{p \notin C} \mu(p)$ o número de centros de $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana. Então pela proposição 15 e pelo lema 2 temos que

$$d(d-2) - 2(k+1) + 3c \leq 2N\,.$$

Se $N < \frac{d(d-2)}{2}$ então $3c - 2k < 2$. Como k denota o número de componentes de uma curva de grau c segue que $c = 1$, um absurdo. $\square$

Corolário 8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d \geq 3$. Se $\mathcal{F}$ é reduzida e livre de selas-nós e de centros então $\mathcal{F}$ não admite integral primeira liouvilliana.*

demonstração: Segue imediatamente do Teorema 12. $\square$

CAPÍTULO 7

Alguns Resultados Clássicos

La question de l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré n'a pas attiré l'attention des géomètres autant qu'elle méritait. La voie a été ouverte, il y a vingt ans, par un admirable travail de M. Darboux; mais les analystes ont été fort longtemps sans s'y engager, et ce n'est que tout récemment que le problème a été repris par MM. Painlevé et Autonne, dans deux Mémoires que l'Académie vient de récompenser. L'importance du sujet me décide à publier quelques résultats qui s'y raportent, bien qu'ils soient fort incomplets.

HENRI POINCARÉ

Com as palavras acima Poincaré inicia a sua nota publicada no Comptes rendus d l'Académie des Sciences em 1891 sobre o hoje denominado problema de Poincaré. Nela são anunciados alguns resultados sobre a limitação do grau de integrais primeiras racionais para folheações holomorfas do plano projetivo. As provas dos resultados aparecem logo em seguida, ainda em 1891, em um artigo publicado no Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo. É neste artigo que a maior parte deste capítulo é baseado. Buscamos fornecer demonstrações modernas, ainda que fiéis as provas originais, dos resultados lá contidos. Apresentamos ainda resultados de Darboux e Halphen utilizados de forma fundamental na argumentação de Poincaré.

Observamos que alguns dos resultados apresentados neste capítulo também aparecem em [**GZ97**] e em [**Men98**].

1. Valores Notáveis

Seja S uma superfície projetiva, C uma curva algébrica e $f : S \dashrightarrow C$ uma aplicação racional sobrejetiva. Observamos que a aplicação f induz uma folheação em S. Pelo Teorema de fatoração de Stein podemos assumir sem perda de generalidade que f possui fibra genérica irredutível. Seja D uma componente irredutível de uma fibra de f. Associamos a D o inteiro n_D que por definição é a ordem de ramificação de f ao longo de D. Mais precisamente se p é um ponto regular da folheação induzida por f sobre D podemos tomar coordenadas locais (x, y) onde $D = \{x = 0\}$ e a folheação é dada por $\{x = \text{constante}\}$. Nestas coordenadas a aplicação racional escreve-se como $f(x, y) = x^k$ para algum inteiro positivo k. Tomamos $n_D = k$.

Proposição 16. *Seja S uma superfície projetiva, C uma curva algébrica e $f : S \dashrightarrow C$ uma aplicação racional sobrejetiva com fibra genérica* *irredutível. O fibrado conormal da folheação induzida por f é dado por*

$$N^*\mathcal{F} = f^*(\Omega_C) \otimes \mathcal{O}_S\left(\sum (n_D - 1)D\right),$$

onde o somatório estende-se a todas as componentes irredutíveis de todas as fibras de f.

demonstração: Seja ω uma 1–forma racional sobre C. Por definição temos que $f^*(\omega)$ é uma seção não identicamente nula de $f^*(\Omega_C)$. Observamos também que o conjunto de zeros de $f^*(\omega)$ é igual ao pullback por f dos zeros de ω união com

$$\sum (n_D - 1)D,$$

onde o somatório estende-se a todas as componentes irredutíveis de todas as fibras de f. Logo para qualquer seção meromorfa ω de Ω_C temos que $f^*\omega$ é uma seção meromorfa de $N^*\mathcal{F}$ anulando-se em D com ordem $n_D - 1$. A proposição segue destas observações. □

No restante do capítulo nos restringiremos ao plano projetivo. Para começar reformulemos, em termos mais concretos, a proposição acima.

Seja $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ uma função racional com fibra genérica irredutível. Se escrevemos F como $\frac{G}{H}$, onde G e H são polinômios homogêneos de mesmo grau pertencentes à $\mathbb{C}[x, y, z]$ então à 1-forma

$$\Omega = HdG - GdH,$$

induz uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Entretanto a 1-forma Ω não possui, em geral, singularidades isoladas. Para $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ escrevemos

$$G - \lambda H = f_{\lambda,1}^{n_1} \cdot f_{\lambda,2}^{n_2} \cdots f_{\lambda,k}^{n_k}, \tag{26}$$

onde $G - \infty H = H$, $k = k(\lambda)$ e $n_i = n_i(\lambda)$ são inteiros positivos e $f_{\lambda,i}$ são polinômios homogêneos irredutíveis para $i = 1 \dots k$.

O corolário da proposição 16 que apresentamos a seguir é originalmente um resultado de Darboux.

Corolário 9. *Seja $\mathcal{F}$ a folheação induzida por $F : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ então vale a igualdade*

$$\mathrm{grau}(\mathcal{F}) = 2 \cdot \mathrm{grau}(G) - 2 - \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}} \sum_{i=1}^{k(\lambda)} (n_i - 1) \cdot \mathrm{grau}(f_{\lambda,i}).$$

demonstração: Lembrando que para uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ temos o isomorfismo

$$N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2),$$

o corolário segue imediatamente da proposição 16. Apresentamos a seguir o esboço de uma argumento mais próximo da prova original.

Seja ω uma forma homogênea em $\mathbb{C}^3$ com conjunto singular de codimensão 2 induzindo $\mathcal{F}$. Como F é uma integral primeira temos que $\omega \wedge d\frac{G}{H} = 0$ e portanto

$$GdH - HdG = \Delta \cdot \omega \,, \tag{27}$$

onde Δ é um polinômio homogêneo. Se $G_1 = aG + bH$ e $H_1 = cG + dH$ são outros geradores do pencil $G + \lambda H$ então as 1-formas $GdH - HdG$ e $G_1 dH_1 - H_1 dG_1$ diferem pela multiplicação de uma constante complexa não nula. Portanto tomando $G_1 = G - \lambda H$ onde λ é um valor notável vemos que $f_{\lambda,i}^{n_i - 1}$ divide Δ mas $f_{\lambda,i}^{n_i}$ não divide Δ para todo i entre 1 e k.

Deixamos como exercício para o leitor verificar que se f é um fator irredutível de Δ então existe λ e i tais que $f = f_{\lambda,i}$, ver [?, pg. 111]. Com isso temos que o polinômio homogêneo Δ é, módulo multplicação por uma constante complexa não nula, dado por

$$\prod_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}} \prod_{i=1}^{k(\lambda)} f_{\lambda,i}^{n_i - 1} \,.$$

O resultado segue comparando os graus de ambos os lados da equação (27).

$\square$

Corolário 10. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau ímpar. Se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional F então F possui ao menos uma fibra não reduzida.*

Seguindo a nomenclatura clássica os valores λ para os quais $G - \lambda H$ não é irredutível serão chamados de *valores notáveis* de F. De acordo com a decomposição em fatores primos (26) Poincaré classifica os valores notáveis em cinco espécies:

- primeira espécie: todos os expoentes n_i são iguais a um, ou seja, $G\lambda H$ é uma curva reduzida mas não irredutível;
- segunda espécie: o máximo divisor comum dos expoentes n_i é igual a um e ao menos um n_i é diferente de um;
- terceira espécie: o máximo divisor comum dos expoentes n_i é maior que um sem que todos os expoentes n_i sejam iguais entre si;
- quarta espécie: todos os expoentes n_i são iguais entre si sem serem iguais a um, ou seja $G - \lambda H$ é uma potência perfeita de uma curva reduzida mas não irredutível;
- quinta espécie: $G - \lambda H$ é uma potência perfeita de uma curva irredutível.

Os valores notáveis das quatro últimas espécies serão denominados *valores críticos*. Observe que somente os valores críticos interveêm na fórmula apresentada no corolário 9. Segue deste fato que quando temos no máximo dois valores críticos podemos sempre resolver o problema de Poincaré como mostra o próximo resultado.

COMENTÁRIO 6. Atenção para o fato de que definição de valor crítico que apresentamos acima coincide com a definição usual de valor crítico para a restrição de F ao complementar do conjunto singular de $\mathcal{F}$.

Proposição 17. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional com no máximo dois valores críticos então $\mathcal{F}$ é dada por uma 1-forma fechada racional em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com pólos simples e de grau igual ao grau de $\mathcal{F}$ mais dois.*

demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que os valores críticos estão contidos no conjunto $\{0,\infty\}$. Podemos então escrever $G = g_1^{n_1} \cdot g_2^{n_2} \cdots g_k^{n_k}$ e $H = h_1^{m_1} \cdot h_2^{m_2} \cdots h_l^{m_l}$ onde g_i e h_i são polinômios homogêneos irredutíveis e m_i e n_i são inteiros positivos. Segue do corolário 9 que

$$\begin{aligned} \mathrm{grau}(\mathcal{F})+2 &= 2\cdot \mathrm{grau}(G) - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\cdot \mathrm{grau}(g_i) - \sum_{i=1}^{l}(m_i-1)\cdot \mathrm{grau}(h_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\mathrm{grau}(g_i) + \sum_{i=1}^{l}\mathrm{grau}(h_i) \end{aligned}$$

Temos portanto que a folheação é induzida pela 1–forma racional fechada

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \frac{dg_i}{g_i} - \sum_{i=1}^{l} m_i \frac{dh_i}{h_i}\,.$$

Obviamente ω possui pólos simples e conjunto polar de grau igual a $\mathrm{grau}(\mathcal{F})+2$. □

Proposição 18. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todas as singularidades possuem parte linear não-degenerada. Seja $F = \frac{G}{H}$ uma integral primeira para $\mathcal{F}$ cuja fibra genérica é irredutível. Se $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ é um valor notável de F e*

$$G - \lambda H = u_1 \cdot u_2$$

é uma decomposição de $G-\lambda H$ onde u_1 e u_2 não apresentam fatores comuns então existe uma singularidade reduzida em $\{u_1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\}$.

demonstração: Seja $\pi : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma resolução de F, i.e., π é uma composição de blow-ups tal que $(F\circ\pi) : S \to \overline{\mathbb{C}}$ seja uma fibração. Como a fibra genérica de F é irredutível vemos que a fibra genérica de $F\circ\pi$ também o é. Consequentemente, por argumentos simples de topologia, temos que toda fibra de $F\circ\pi$ é conexa.

Se C_1, respectivamente C_2, denota o transformado estrito de $\{u_1 = 0\}$, resp. $\{u_2 = 0\}$, a fibra sobre λ de $(F\circ\pi)$ é a união de C_1 e C_2 com cadeias de curvas racionais que são contraídas por π.

Sob as nossas hipóteses verifica-se facilmente que cada cadeia conexa de curvas racionais contraída por π intersecta $C_1 \cup C_2$ em apenas um ponto. Logo a inexistência de singularidades reduzidas em $\{u1 = 0\} \cap \{u_2 = 0\}$

implica que a fibra de $(F \circ \pi)$ sobre λ é desconexa. Esta contradição conclui a prova da proposição. $\square$

Corolário 11. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todas as singularidades possuem parte linear não-degenerada. Seja $F = \frac{G}{H}$ uma integral primeira para $\mathcal{F}$ cuja fibra genérica é irredutível. Valem as seguintes afirmações:*

1. *O número de valores notáveis das quatro primeiras espécies é menor ou igual ao número de singularidades reduzidas de $\mathcal{F}$.*
2. *Se todas as singularidades reduzidas possuem quociente de autovalores igual a -1 então os valores notáveis pertencem a primeira, quarta ou quinta espécies.*

demonstração: O item (1) segue imediatamente da proposição já que para as quatro primeiras espécies de valores podemos sempre decompor $G - \lambda H$ em ao menos dois fatores u_1 e u_2 primos entre si.

Para provar o item (2) se

$$G - \lambda H = f_1^{n_1} \cdot f_2^{n_2} \cdots f_k^{n_k} ,$$

é a decomposição de $G - \lambda H$ em fatores primos então basta mostrar que todos os expoentes n_i são iguais.

Se os expoentes n_i não são todos iguais, podemos supor que existe $1 \leq j < k$ tal que $n_i = n_1$ para $i \leq j$ e $n_i \neq n_1$ para $i > j$.

Tomando $u_1 = f_1^{n_1} \cdots f_j^{n_1}$ e $u_2 = f_{j+1}^{n_{j+1}} \cdots f_k^{n_k}$ segue da proposição 18 que alguma das curvas $\{f_i = 0\}$, $i = 1 \dots j$ intersecta alguma das curvas $\{f_i = 0\}$, $i = j+1 \dots k$, em uma singularidade reduzida. Módulo eventual reordenação podemos supor que $\{f_1 = 0\}$ intersecta $\{f_k = 0\}$ em uma singularidade reduzida p e portanto $f_i(p) \neq 0$ para $i = 2 \dots k-1$.

Vemos então que em coordenadas locais em torno de p, dadas por $(x, y) = (f_1, f_k)$, a folheação é induzida pela 1-forma

$$\omega = \frac{1}{x^{n_1 - 1} y^{n_k - 1}} d(x^{n_1} \cdot y^{n_k} \cdot u) = n_1 y(1 + \tilde{u})dx + n_k x(1 + \tilde{u})dy + xydu$$

onde $u = 1 + \tilde{u}$ é uma função holomorfa não nula em uma vizinhança de p. Como, por hipótese, o quociente dos autovalores em p é igual a -1 temos que $n_1 = n_k$. Um absurdo que mostra que todos os expoentes n_i são iguais entre si.

$\square$

2. Fibras múltiplas

Diremos que $F^{-1}(\lambda)$ é uma fibra múltipla se λ é um valor notável de F pertencente a uma das duas últimas espécies. A análise das fibras múltiplas de uma folheação que admite integral primeira racional é baseada no seguinte Teorema de Halphen.

Teorema 13. *Sejam F, G, H três polinômios homogêneos em $\mathbb{C}^3$ primos entre si. Se p, q, r são inteiros positivos tais que $p \geq q \geq r \geq 2$ e $F^p + G^q + H^r$ é um polinômio identicamente nulo então valem as seguintes afirmações.*

1.
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1\,;$$

2. *Existem polinômios homogêneos f, g, h em $\mathbb{C}^2$ e uma aplicação homogênea $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ tais que $f = F \circ \phi$, $g = G \circ \phi$ e $h = H \circ \phi$.*

esboço da demonstração: Diferenciando a relação $F^p + G^q + H^r = 0$ e tomando o produto exterior ora por dF, ora por dG e ora por dH deduzimos que

$$\frac{dF \wedge dG}{rH^{r-1}} = \frac{dG \wedge dH}{pF^{p-1}} = \frac{dH \wedge dF}{qG^{q-1}}\,.$$

Logo, como F, G e H são primos entre si, vale que

$$\begin{aligned} \mathrm{grau}(F) + \mathrm{grau}(G) - 2 &\geq (r-1)\mathrm{grau}(H) \\ \mathrm{grau}(G) + \mathrm{grau}(H) - 2 &\geq (p-1)\mathrm{grau}(F) \\ \mathrm{grau}(H) + \mathrm{grau}(F) - 2 &\geq (q-1)\mathrm{grau}(G). \end{aligned}$$

Se $k = p \cdot \mathrm{grau}(F) = q \cdot \mathrm{grau}(G) = r \cdot \mathrm{grau}(H)$ então somando as três desilgualdades anteriores temos

$$\frac{2k}{p} + \frac{2k}{q} + \frac{2k}{r} - 6 \geq 3k - \left(\frac{k}{p} + \frac{k}{q} + \frac{k}{r}\right)$$

e portanto

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1 + \frac{2}{k}\,,$$

concluindo assim a prova do item (1).

Para provar o item (2) primeiramente verifica-se que as únicas possibilidades para (p, q, r) são $(2, 2, m), (2, 3, 3), (2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$, onde $m \geq 2$ é um inteiro positivo arbitrário. Então para cada terno (p, q, r) constroi-se polinômios homogêneos em duas variáveis P, Q, R do menor grau possível tais que $P^p + Q^q + R^r = 0$. Por exemplo para soluções da forma $(2, 2, m)$ fazemos

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{2}(x^m + y^m) \\ Q(x,y) &= \frac{1}{2}(x^m - y^m) \\ R(x,y) &= xy\,. \end{aligned}$$

Se M é a hipersuperficie de $\mathbb{C}^3$ definida por $x^p + y^q + z^r = 0$ pode-se demonstrar que os polinômios P, Q e R como acima definem uma aplicação

$$\phi = (P, Q, R) : \mathbb{C}^2 \to M$$

que de fato, quando restrita a $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, é o recobrimento universal de $M \setminus \{(0,0,0)\}$. O resultado segue levantando-se a aplicação $(F,G,H) : \mathbb{C}^3 \to M$ para uma aplicação em $\mathbb{C}^2$. □

COMENTÁRIO 7. Uma abordagem alternativa provar o próximo corolário pode ser encontrada em [**GZ97**], ver proposição 3.1. O leitor atenciososo verificará que esta abordagem também fornece-se uma prova do Teorema de Halphen cuja prova acabamos de esboçar.

Corolário 12. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todas as singularidades possuem parte linear não-degenerada. Seja $F = \frac{G}{H}$ uma integral primeira para $\mathcal{F}$ cuja fibra genérica é irredutível. Valem as seguintes afirmações:*

1. *O número de valores notáveis das três últimas espécies é menor ou igual a dois.*
2. *O número de valores notáveis é menor ou igual ao número de singularidades reduzidas de $\mathcal{F}$ mais dois.*
3. *Se todas as singularidades reduzidas possuem quociente de autovalores igual a -1 então temos no máximo dois valores críticos.*

demonstração: Os itens (2) e (3) seguem facilmente do item (1) combinado com o corolário 11. Vamos portanto estabelecer o item (1).

Suponha que temos ao menos três valores notáveis das três últimas espécies. Compondo F com um automorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ podemos supor que estes valores notáveis são $0, 1$ e ∞. Logo existem polinômios homgêneos A, B e C tais que $G = A^p$, $H = -B^q$ e $G - H = -C^r$. Portanto $A^p + B^q + C^r = 0$ e pelo Teorema de Halphen existem polinômios homogêneos g e h em $\mathbb{C}^2$ e uma aplicação homogênea $\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ tais que $G = g \circ \phi$ e $H = h \circ \phi$. Como os graus de g e de h são distintos de um concluímos que $\{G - \lambda H = 0\}$, para λ fixado, é uma união de curvas pertencentes a família dada por

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = cte.$$

Em particular a fibra gen'erica de F não é irredutível. O corolário segue desta contradição. □

Teorema 14. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todas as singularidades possuem parte linear não-degenerada e que todas as singularidades reduzidas possuem quociente de autovalores igual a -1. Se $F = \frac{G}{H}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$ com fibra genérica irredutível então existem inteiros positivos relativamente primos p e q tais que*

$$pq(\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2) = \mathrm{grau}(G)(p+q)\,.$$

Em particular existe uma cota para o grau de G em função do grau de $\mathcal{F}$.

demonstração: Pelo item (2) do corolário 11 todos os valores notáveis pertencem a primeira, quarta ou quinta espécie e pelo item (3) do corolário

12 temos no máximo dois valores críticos. Podemos supor sem perda de generalidade que estes valores notáveis são 0 e ∞. Podemos então escrever $G = g^n$ e $H = h^m$ onde g e h são polinômios homogêneos reduzidos e m e n são inteiros positivos. Observe que como estamos supondo que a fibra genérica de F é irredutível verifica-se facilmente que m e n são primos entre si. O corolário 9 pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} \operatorname{grau}(\mathcal{F}) + 2 &= 2 \cdot \operatorname{grau}(G) - (n-1) \cdot \operatorname{grau}(g) - (m-1) \cdot \operatorname{grau}(h) \\ &= \left(2 - \frac{(n-1)}{n} - \frac{(m-1)}{m}\right) \cdot \operatorname{grau}(G) \end{aligned}$$

e portanto

$$\operatorname{grau}(\mathcal{F}) + 2 = \frac{n+m}{nm} \operatorname{grau}(G).$$

Tomando $p = n$ e $q = m$ temos o resultado. □

Corolário 13. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todas as singularidades possuem parte linear não-degenerada, todas as singularidades reduzidas possuem quociente de autovalores igual a -1 e existe ao menos uma singularidade radial. Se $F = \frac{G}{H}$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$ com fibra genérica irredutível então F não possui valores críticos. Em particular*

$$\operatorname{grau}(G) = \frac{(\operatorname{grau}(\mathcal{F}) + 2)}{2}.$$

demonstração: Seja p uma singularidade radial de $\mathcal{F}$ e $\pi : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o blow-up de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ em p. Se E denota o divisor excepcional de π então a restrição de $f = F \circ \pi$ à E é uma aplicação racional de $\overline{\mathbb{C}}$ em $\overline{\mathbb{C}}$. Pelo Teorema 14 temos que f possui no máximo dois valores críticos. Observe ainda que o grau de f é igual a $r_p(C)$, o número de ramos da folha genérica C que passam por p.

Escrevendo $F = \frac{g^n}{h^m}$ como na prova do Teorema 14 temos que $f = \frac{(g \circ \pi)^n}{(h \circ \pi)^m}$. A fórmula de Riemman-Hurwitz implica que

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot r_p(C) - \operatorname{grau}(g \circ \pi) \cdot (n-1) - \operatorname{grau}(h \circ \pi) \cdot (m-1) \\ &= 2 \cdot r_p(C) - 2 \cdot r_p(C) + \operatorname{grau}(g \circ \pi) + \operatorname{grau}(h \circ \pi). \end{aligned}$$

Consequentemente temos que $\operatorname{grau}(g \circ \pi) = \operatorname{grau}(h \circ \pi) = 1$. Como n e m são primos entre si concluímos que $n = m = 1$ e portanto F não possui valores críticos.

□

Baseado ainda no Teorema de Halphen, Painlevé em suas Lições de Estocolmo [**Pa73**] mostra que o problema de Poincaré possui solução em uma outra situação. A cada singularidade reduzida p de uma folheação $\mathcal{F}$ podemos escrever o quociente de autovalores como $-\frac{\mu(p)}{\nu(p)}$ onde $\mu(p)$ e $\nu(p)$ são inteiros positivos primos entre si. Utilizando esta notação o resultado de Painlevé enuncia-se da seguinte forma.

Teorema 15. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que todas as singularidades possuem parte linear não-degenerada e tal que toda singularidade reduzida com quociente de autovalor diferente de -1 satisfaz $\mu(p) > 5$ e $\nu(p) > 5$. Se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional então $\mathcal{F}$ é definida por uma forma racional fechada com pólos simples e conjunto polar de grau igual a* $\mathrm{grau}(\mathcal{F})+2$. *Em particular podemos decidir se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional.*

demonstração: Se $\mathcal{F}$ possui no máximo dois valores críticos a existência da forma racional fechada segue da proposição 17.

Suponha então que F possui ao menos três valores críticos. Pelo Teorema 14 existe uma singularidade reduzida p tal que $\mu(p) > 5$ e $\nu(p) > 5$. Seja $F = \frac{G}{H}$ uma integral primeira com fibra genérica irredutível e λ o valor crítico cuja fibra contém p. Argumentos similares ao utilizados na prova do corolário 11 mostram que a fatoração de $G-\lambda H$ é tal que toda fator aparece com multiplicidade ao menos seis.

Segue do corolário 9 que

$$\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2 \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{6} - 1\right) \mathrm{grau}(G).$$

onde $n \geq 2$ e $m \geq 3$. Temos claramente um absurdo que implica que F possui no máximo dois valores críticos.

Concluímos que dada uma folheação $\mathcal{F}$ satisfazendo as hipóteses do Teorema decidir se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional reduz-se a decidir se existe uma forma racional fechada com conjunto polar de grau igual a $\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2$ e resíduos inteiros. Claramente isso implica que é possível decidir se $\mathcal{F}$ admite integral primeira racional. $\square$

Em geral as técnicas apresentadas não são suficientes para limitar o grau das integrais primeiras como o exemplo a seguir nos mostra.

Exemplo 16 (Bis do exemplo 10). Seja $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ a família de folheações holomorfas de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por

$$X_\alpha = (x^3-1)(x-\alpha y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3-1)(y-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Em [**LN02a**] Lins Neto mostra que $\mathcal{F}_\alpha$ admite integral primeira racional se, e somente se, α pertence ao conjunto $\mathbb{Q}+\tau\cdot\mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$, onde $\tau = \exp(2\pi i/3)$.

Para os valores que possuem integral primeira temos exatamente três valores críticos e cada fibra é a união de três retas com uma curva racional com multiplicidade três, confira em [**LN02b**]. O grau destas curvas racionais não é limitado uniformemente para toda a família.

Seja $\mathcal{F}_\alpha$ uma folheação da família acima que admite integral primeira racional, C uma folha genérica desta folheação parâmetro e $F_i = r_{i_1}r_{i_2}r_{i_3}e_i^3$, $i = 1,2,3$, a fatoração das fibras sobre os valores críticos de uma integral primeira com fibra genérica irredutível então temos que

$$\mathrm{grau}(e_i) = \frac{\mathrm{grau}(C)-3}{3}$$

e portanto o corolário 9 lê-se como

$$\begin{aligned}
\mathrm{grau}(\mathcal{F}_\alpha) + 2 &= 2 \cdot \mathrm{grau}(C) - 3 \cdot 2 \cdot \mathrm{grau}(e_i) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

3. Sobre o Problema de Painlevé

Ainda no mesmo artigo de 1891 Poincaré investiga o problema de Painlevé: Reconhecer se folha genérica de uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ é uma curva algébrica de gênero geométrico dado.[1]

As considerações feitas por Poincaré sobre este problema são baseadas no Teorema que apresentaremos a seguir. A nossa demonstração utiliza as fórmulas de índice apresentadas no capítulo 6.

Antes de enunciar o resultado vamos estalecer alguma notação. Dada uma singularidade p de uma folheação $\mathcal{F}$ que seja dicrítica e com parte linear invertível denotaremos o quociente de autovalores em p por $\frac{\mu(p)}{\nu(p)}$ onde $\mu(p)$ e $\nu(p)$ são inteiros positivos primos entre si. Se C é uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$ denotaremos por $r_p(C)$ o número de ramos de C passando por p. Podemos agora enunciar o resultado de Poincaré.

Teorema 16. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau d de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com integral primeira racional. Suponha que todas as singularidades dicríticas possuem parte linear invertível. Se C é uma folha genérica de $\mathcal{F}$ então valem as seguintes igualdades*

1. $C^2 = \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C)^2 \mu(p)\nu(p)$
2. $N\mathcal{F} \cdot C = \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C)(\mu(p) + \nu(p))$
3. $g(C) = 1 + \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} \frac{r_p(C)}{2} \left[(\mu(p) + \nu(p)) \frac{d-1}{d+2} - 1 \right].$

<u>demonstração:</u> Se C_1 e C_2 são folhas genéricas de $\mathcal{F}$ as únicas singularidades de $\mathcal{F}$ sobre C_1 e C_2 são as singularidades dicríticas. Logo vale que

$$C_1^2 = C_1 \cdot C_2 = \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} (C_1 \cdot C_2)_p .$$

[1] O leitor que consultar os artigos originais de Poincaré encontrará a seguinte passagem na sua nota do Comptes Rendu de 1891:

> M. Painlevé a posé le problème suivant: Reconnaître si l'intégrale gènérale de l'equation différentille est une courbe algèbrique de genre donné, et il a énoncé un certain nombre de remarquables propositions qui peuvent aider à trouver la solution, au moins dans certains cas particuliers.

Se $p \in Dic(\mathcal{F})$ é uma tal singularidade então existem $2k = 2r_p(C)$ números complexos distintos $\alpha_{\delta,i}$, $\delta = 1,2$ e $i = 1 \ldots k$, tais que C_δ é localmente equivalente a

$$\prod_{i=1}^{k}(x^{\mu(p)} - \alpha_{\delta,i}y^{\nu(p)}) = 0\,. \tag{28}$$

Se $r_p(C) = 1$ então

$$(C_1 \cdot C_2)_p = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{< x^{\mu} - \alpha_{1,1}y^{\nu}, x^{\mu} - \alpha_{2,1}y^{\nu} >} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{< x^{\mu}, y^{\nu} >}$$

e portanto $(C_1 \cdot C_2)_p = \mu\nu$. Em geral pela bilinearidade do produto de intersecção temos que $(C_1 \cdot C_2)_p = r_p(C)^2\mu(p) \cdot \nu(p)$, o que é suficiente para mostrar o item (1).

Passemos então a prova do item (2). Calculemos inicialmente $Z(\mathcal{F}, C_1, p)$. Como a forma local de $C = C_1$ em torno de p é dada por (28) temos que $Z(\mathcal{F}, C, p)$ é igual a

$$r_p(C) \cdot Z(\mathcal{F}, \{x^{\mu(p)} - \alpha_{1,1}y^{\nu(p)=0}\}, p) - (r_p(C)^2 - r_p(C)) \cdot \mu(p) \cdot \nu(p)$$

Pelo exemplo 12 temos que

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = r_p(C)(\mu(p) + \nu(p) - \mu(p) \cdot \nu(p)) - (r_p(C)^2 - r_p(C)) \cdot \mu(p) \cdot \nu(p)\,,$$

ou seja

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = r_p(C)(\mu(p) + \nu(p)) - r_p(C)^2 \cdot \mu(p) \cdot \nu(p)\,.$$

O item (2) segue diretamente da fórmula $N\mathcal{F} \cdot C = C \cdot C + Z(\mathcal{F}, C)$, ver proposição 11.

Passemos então a prova do item (3). Pela fórmula do gênero temos que

$$g(C) = \frac{(c-1)(c-2)}{2} - \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} \left(\frac{r_p^2\mu(p) \cdot \nu(p)}{2} - \frac{r_p(1 - \mu(p) - \nu(p))}{2} \right),$$

e pelos itens (1) e (2) deduzimos que

$$g(C) = \frac{(c-1)(c-2)}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{(d+2)c}{2} - \frac{1}{2} \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p\,,$$

e portanto

$$g(C) = 1 + \frac{(d-1)c}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p\,. \tag{29}$$

Pelo item (2) temos que

$$c = \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p \cdot \frac{\mu(p) + \nu(p)}{d+2}$$

e ao substituir em (29) concluímos que

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p \left((\mu(p) + \nu(p)) \frac{d-1}{d+2} - 1 \right),$$

provando assim o Teorema. □

Vejamos o que o Teorema acima nos diz a respeito do problema de Painlevé. Analisemos primeiramente o caso em que todas as singularidades dicríticas são radiais.

O item (1) do Teorema escreve-se como

$$(\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2) \cdot \mathrm{grau}(C) = \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} 2r_p(C),$$

e o item (3) como

$$g(C) = 1 + \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C) \left[\frac{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) - 1}{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2} - \frac{1}{2} \right].$$

Portanto

$$g(C) = 1 + \mathrm{grau}(C) \frac{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) - 4}{4}.$$

Conclui-se então que:

- ou os graus de $\mathcal{F}$ e C são números pares ou algum dos dois graus é divisível por 4;
- se o grau da folheação for 4 então o gênero de C é 1;
- se o grau da folheação menor que 4 então o gênero de C é zero e o grau de C é igual a 2 para folheações de grau 2 e igual a 4 para folheações de grau 3;
- se o grau da folheação for maior do que 4 então o gênero de C é maior do que 1 e uma vez fixado o gênero de C o grau está determinado.

Analisemos agora o caso em que todas as singularidades possuem parte linear invertível. Seja então $\mathcal{F}$ uma folheação com todas as singularidades com parte linear invertível. Associemos a $\mathcal{F}$ os números racionais $m(\mathcal{F}), M(\mathcal{F}), k(\mathcal{F}), K(\mathcal{F})$ definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
m(\mathcal{F}) &= \min_{p \in \mathrm{Dic}(\mathcal{F})} \left((\mu(p) + \nu(p)) \frac{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) - 1}{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2} - 1 \right) \\
M(\mathcal{F}) &= \max_{p \in \mathrm{Dic}(\mathcal{F})} \left((\mu(p) + \nu(p)) \frac{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) - 1}{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2} - 1 \right) \\
k(\mathcal{F}) &= \min_{p \in \mathrm{Dic}(\mathcal{F})} \left(\frac{\mu(p) + \nu(p)}{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2} \right) \\
K(\mathcal{F}) &= \max_{p \in \mathrm{Dic}(\mathcal{F})} \left(\frac{\mu(p) + \nu(p)}{\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2} \right)
\end{aligned}$$

Corolário 14. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com integral primeira racional tal que todas as singularidades dicríticas possuem parte linear inversível. Se $m(\mathcal{F}) > 0$ e C é uma folha genérica de $\mathcal{F}$ então*

$$\frac{k(\mathcal{F})}{M(\mathcal{F})} \leq \frac{\mathrm{grau}(C)}{2g(C)-2} \leq \frac{K(\mathcal{F})}{m(\mathcal{F})} .$$

demonstração: Pelo item (3) do Teorema 16 temos que

$$g(C) = 1 + \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} \frac{r_p(C)}{2}\left[(\mu(p)+\nu(p))\frac{\mathrm{grau}(\mathcal{F})-1}{\mathrm{grau}(\mathcal{F})+2} - 1\right]$$

e portanto

$$m(\mathcal{F}) \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C) \leq 2g(C) - 2 \leq M(\mathcal{F}) \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C) .$$

Segue do item (2) do Teorema 16 que

$$(\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2) \cdot \mathrm{grau}(C) = \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C)(\mu(p) + \nu(p))$$

e consequentemente, já que $k(\mathcal{F}) > 0$, valem as seguintes desigualdades:

$$k(\mathcal{F}) \cdot \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C) \leq \mathrm{grau}(C) \leq K(\mathcal{F}) \cdot \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C) .$$

Se $m(\mathcal{F}) > 0$ podemos combinar as desigualdades acima provando assim o corolário. □

Observe que se o grau de $\mathcal{F}$ for estritamente maior do que quatro então automaticamente temos que $m(\mathcal{F}) > 0$.

Comentário 8. L.G. Mendes em um apêndice de sua tese de doutorado, ver [**Men98**], obtendo uma generalização do Teorema 16 sem impor restrições nas singularidades. Como corolário ele mostra que se

$$\max l(p) < \frac{\deg(\mathcal{F}) + 2}{3} ,$$

onde o máximo é tomado entre as singularidades dicríticas do pencil, então o gênero geométrico da folha genérica C é maior do que um e é possível limitar o grau de C em função do gênero de C.

4. Singularidades Dicríticas

Teorema 17. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação com integral primeira racional tal que todas as singularidades possuem parte linear invertível. Denotando por $r(\mathcal{F})$ o número de singularidades radiais de $\mathcal{F}$, valem as seguintes afirmações.*

1. *Se todas as singularidades dicríticas são radiais então*

$$r(\mathcal{F}) \geq \frac{(\mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2)^2}{4} ;$$

2. *Se todas as as singularidades dicríticas são radiais e todas singularidades reduzidas são centros então vale a igualdade*
$$r(\mathcal{F}) = \frac{\text{grau}(\mathcal{F})^2}{4};$$

demonstração: Se todas as singularidades dicríticas são radias os itens (1) e (2) do Teorema 16 lêem-se como

$$\begin{aligned} \text{grau}(C)^2 &= \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C)^2 \\ (\text{grau}(\mathcal{F}) + 2) \cdot \text{grau}(C) &= 2 \sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} r_p(C) . \end{aligned}$$

Logo se t é uma variável arbitrária vale que

$$\sum_{p \in Dic(\mathcal{F})} (r_p(C)t - 1)^2 = \text{grau}(C)^2 \cdot t^2 - (\text{grau}(\mathcal{F}) + 2) \cdot \text{grau}(C) \cdot t + \# Dic(\mathcal{F}) ,$$

onde $\sharp Dic(\mathcal{F})$ denota a cardinalidade de $Dic(\mathcal{F})$. Como o lado direito da expressão acima é não negativo para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos que

$$r(\mathcal{F}) = \sharp Dic(\mathcal{F}) \geq \frac{(\text{grau}(\mathcal{F}) + 2)^2}{4} ,$$

o que prova o item (1). Observe ainda que vale a igualdade se, e somente se, $r_p(C) = r_q(C)$ para quaisquer p e q em $Dic(\mathcal{F})$.

Passemos agora a prova do item (2). Pelo corolário temos que a integral primeira irredutível de $\mathcal{F}$ não possui valores críticos e como todas as singularidades dicríticas são radias temos que o número de singularidades radiais é exatamente o número de auto-intersecção de uma folha genérica. Logo

$$r(\mathcal{F}) = \frac{(\text{grau}(\mathcal{F}) + 2)^2}{4} ,$$

como queríamos demonstrar. □

CAPÍTULO 8

Dimensão de Kodaira e Integrabilidade

Neste último capítulo vamos relacionar a recente classificação birracional de folheações holomorfas em superfícies projetivas com a integrabilidade de folheações holomorfas. Na primeira seção vemos a definição de dimensão de Kodaira e descrevemos a classificação birracional de folheações em superfícies projetivas em função da dimensão de Kodaira. A segunda seção é dedicada a investigar a integrabilidade de folheações de tipo especial, ou seja, aquelas folheações cuja dimensão de Kodaira não é maximal. A integrabilidade de folheações com dimensão de Kodaira maximal, i.e., folheações de tipo geral é assunto da terceira seção. Finalmente na quarta seção propomos uma solução algorítmica para o problema de Painlevé baseada na classificação birracional de folheações.

1. Dimensão de Kodaira

A dimensão de Kodaira no contexto de folheações holomorfas foi introduzida independentemente por McQuillan e Mendes em [**McQ01**] e [**Men00**]. Para definir a dimensão de Kodaira de uma folheação reduzida[1] $\mathcal{F}$ consideramos o seu fibrado cotangente, que denotamos por $T^*\mathcal{F}$, e consideramos o seguinte limite

$$\operatorname{kod}(\mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(S, T^*\mathcal{F}^{\otimes n})}{\log n}.$$

Pode-se demonstrar que o limite superior acima sempre existe e pode assumir um dos seguintes valores: $-\infty, 0, 1$ ou 2. [2] Diremos que a sequência de números inteiros

$$P_m(\mathcal{F}) = h^0(S, T^*\mathcal{F}^{\otimes m}), \quad \text{para } m \in \mathbb{N}^+,$$

é o *plurigênero* de $\mathcal{F}$. Nesses termos a dimensão de Kodaira mede o crescimento do plurigênero da folheação.

[1] Reduzida no sentido de Seidenberg, ver apêndice

[2] De fato para qualquer fibrado em retas $\mathcal{L}$ e qualquer variedade projetiva M o limite superior

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(M, \mathcal{L}^{\otimes n})}{\log n},$$

existe e é igual a dimensão de Iitaka do fibrado em retas $\mathcal{L}$. Esta dimensão pode assumir e um dos seguintes valores: $-\infty, 0, 1, 2, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} M$.

Quando estamos em uma variedade algébrica M consideramos o *canônico* de M como sendo o fibrado linear das formas diferenciais holomorfas de posto máximo. Vejamos como a dimensão de Kodaira comporta-se no caso de curvas algébricas.

Exemplo 17. Quando a variedade algébrica em questão é uma curva C, o fibrado em questão é o fibrado linear das 1–formas holomorfas. Portanto

$$\mathrm{kod}(C) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n})}{\log n}.$$

No caso em que C é a esfera de Riemman temos que qualquer 1-forma diferencial meromorfa temos sempre dois pólos a mais do que zeros(contando com multiplicidade). Ou seja $\Omega^1_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(-2)$. Portanto temos que $h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n}) = 0$, para qualquer n, e conseqüentemente $\mathrm{kod}(C) = -\infty$.

Quando C é um toro temos que C é um grupo de Lie e portanto tem fibrado tangente e cotangente triviais. Logo $h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n}) = 1$ e vemos que C é tal que $\mathrm{kod}(C) = 0$

Finalmente, quando C tem gênero maior ou igual a dois o Teorema de Riemman–Roch nos diz que

$$h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n}) = \begin{cases} g & \text{se } n = 1 \\ n(2g-2)+1-g & \text{se } n > 1 \end{cases},$$

e portanto temos que $\mathrm{kod}(C) = 1$. □

Um das propriedades essenciais do canônico de uma variedade algébrica é que ele comporta-se bem com respeito a aplicações birracionais. O bom comportamento aqui é no sentido de que o plurigênero fica invariante, ou seja, se M e N são variedades algébricas, ambas de dimensão m, birracionalmente equivalentes então

$$h^0(M, {\Omega^m_M}^{\otimes n}) = h^0(N, \Omega^{m \otimes n}_N),$$

para qualquer inteiro positivo n. Já no caso das folheações o canônico não possui tão boas propriedades.

Lema 3. *Se $\pi : \tilde{S} \to S$ é o blow-up de um ponto $p \in S$, $\mathcal{F}$ é uma folheação em S e $\tilde{F} = \pi^*\mathcal{F}$ é a transformada estrita de $\mathcal{F}$ então valem as seguintes afirmações.*

1. *Existe uma aplicação natural*
$$\pi_* : H^0(\tilde{S}, T^*\tilde{\mathcal{F}}) \to H^0(S, T^*\mathcal{F})$$
que é injetiva.
2. *Se $l(p) \leq 1$ então π_* é um isomorfismo.*
3. *Uma seção $\sigma \in H^0(S, T^*\mathcal{F})$ pertence a imagem de π_* se, e somente se, $l(p) \leq 1$ ou $\sigma \in H^0(S, T^*\mathcal{F} \otimes {m_p}^{l(p)-1})$.*

<u>demonstração:</u> Seja E o divisor excepcional de π. A restrição de π a $U = \tilde{S} \setminus E$ induz um biholomorfismo entre U e $S^* = S \setminus \{p\}$. Podemos identificar

via este isomorfismo a restrição de $T^*\tilde{\mathcal{F}}$ à U com a restrição de $T^*\mathcal{F}$ a S^*. Logo se $s \in H^0(\tilde{S}, T^*\tilde{\mathcal{F}})$ é uma seção não-nula então a restrição de $\pi_*(s)$ a S^* é uma seção não-nula de $T^*\mathcal{F}_{|S^*}$. Temos portanto provado o item (1).

Reciprocamente se $\sigma \in H^0(S, T^*\mathcal{F})$ é uma seção de $T^*\mathcal{F}$ então $\pi^*\sigma$ é uma seção de $\pi^*T^*\mathcal{F}$. Pela proposição 13 temos que

$$T^*\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*(T^*\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{S}}((1 - l(p))E),$$

logo para que $\pi^*\sigma$ seja uma seção de $T^*\tilde{\mathcal{F}}$ é necessário e suificiente que σ possua multiplicidade algébrica $l(p) - 1$ em p. Os itens (2) e (3) seguem facilmente desta afirmação. □

Duas folheações birracionalmente equivalentes podem possuir plurigêneros distintos. Entretanto o Teorema de fatoração de aplicações birracionais e o lema anterior implicam que, quando restritos a folheações reduzidas, o plurigênero torna-se um invariante por transformações birracionais como enunciado abaixo.

Proposição 19. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação reduzida na superfície algébrica S_1 e $\mathcal{G}$ uma folheação reduzida na superfície algébrica S_2. Se existe uma aplicação birracional $S_1 \to S_2$ mandando $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, então $P_m(\mathcal{F}) = P_m(\mathcal{G})$, para qualquer inteiro positivo m. Em particular* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = \mathrm{kod}(\mathcal{G})$.

Com este resultado em mente define-se então a dimensão de Kodaira de uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ em uma superfície complexa compacta S como sendo a dimensão de Kodaira de qualquer folheação reduzida birracionalmente equivalente $\mathcal{F}$. Observe que toda folheação holomorfa em uma superfície complexa é birracionalmente equivalente a uma folheação reduzida pelo Teorema de Seidenberg.

Definição 14. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície compacta S, e $\mathcal{G}$ qualquer folheação reduzida bimeromorficamente equivalente a $\mathcal{F}$. A *dimensão de Kodaira* de $\mathcal{F}$ é dada por

$$\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log h^0(S, T^*\mathcal{G}^{\otimes n})}{\log n}.$$

Em [**McQ01**] McQuillan classifica, em função da dimensão de Kodaira, as folheações em superfícies projetivas. Esta classificação, como no caso de curvas e de superfícies, não encerra a teoria de folheações. Apenas divide as folheações em quatro classes onde os problemas poderão ser atacados com métodos específicos para cada classe. Sumarizamos a classificação na tabela a seguir e aconselhamos o leitor interessado a consultar [**Bru00**] e [**Bru03**] para a prova da classificação.

kod($\mathcal{F}$)	**Descrição**
$-\infty$	fibração racional
	folheações modulares
0	a menos de recobrimentos ramificados e aplicações birracionais $\mathcal{F}$ é gerado por um campo holomorfo global.
1	folheação de Riccati
	folheação turbulenta
	fibração elíptica não isotrivial
	fibração isotrivial de gênero ≥ 2
2	tipo geral

Tabela 1: *Classificação de folheações holomorfas em superfícies algébricas*

Lembramos que uma folheação $\mathcal{F}$ em uma superfície S é de *Riccati* (resp. *turbulenta*), se existe uma fibração racional (resp. elíptica) em S, cuja fibra genérica é completamente transversal a $\mathcal{F}$.

É importante entender que a tabela não está dizendo que toda folheação de Riccati tem dimensão de Kodaira 1, por exemplo. Existem folheações de Riccati que também são fibrações racionais, e portanto tem dimensão de Kodaira negativa. Um outro exemplo são folheações turbulentas que são geradas por campos holomorfos globais e tem dimensão de Kodaira 0.

2. Integrabilidade de Folheações de Tipo Especial

Analisaremos separadamente a integrabilidade para cada classe de folheações com dimensão de Kodaira estritamente menor do que 2.

2.1. Dimensão de Kodaira negativa. As folheações com dimensão de Kodaira negativa foram as últimas a serem classificadas, ver [**Bru03**] e referências lá contidas. Temos apenas duas possibilidades. A primeira é que a folheação é uma fibração racional, i.e. a fibra genérica é isomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$. A segunda possibilidade é que a folheação é uma folheação *modular*. Ao invés de uma definição geral mostramos a seguir um exemplo destas folheações. Para uma definição precisa e informação sobre como obter o exemplo que segue o leitor deve consultar [**MP02**].

Exemplo 18. Denote por $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ o produto de dois semi-planos superiores $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} z > 0\}$. Existem subgrupos Γ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tais que [3] $\mathbb{H}^2/\Gamma$ são variedades quasi-projetivas. Exemplos clássicos destas variedades são as chamadas superfícies modulares de Hilbert.

[3] Consideramos aqui a ação de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{aligned} \Theta : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 &\to \mathbb{H}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, z_1, z_2 \right) &\mapsto \left(\frac{a_1 \cdot z_1 + b_1}{c_1 \cdot z_1 + d_1}, \frac{a_2 \cdot z_2 + b_2}{c_2 \cdot z_2 + d_2} \right). \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{G}$ a folheação de $\mathbb{H}^2$ induzida por uma das duas projeções naturais $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$. Claramente $\mathcal{G}$ é invariante pela ação de Γ e portanto induz uma folheação em $\mathbb{H}^2/\Gamma$.

Existem grupos Γ como acima tais que o quociente é uma superfície racional, i.e., birracionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Em [**MP02**] são construídos alguns modelos explícitos para estas folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Em particular quando

$$\Gamma = \mathrm{PSL}\left(2, \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right),$$

temos que as folheações induzidas pelos campos em $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} x' &= y + 32x - 36x^2 \\ y' &= 80y - 60xy - 80x^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x' &= -y + \frac{3}{4}xy + x^2 \\ y' &= -\frac{5}{4}y^2 + 20xy - 60x^3. \end{aligned}$$

correspondem as folheações de $\mathbb{H}^2/\Gamma$ induzidas pelas fibraçõs $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$.

Como corolário da classificação de folheações de dimensão de Kodaira negativa em superfícies projetivas temos a seguinte proposição.

Proposição 20. *Se $\mathcal{F}$ uma folheação reduzida de uma superfície racional então $\mathcal{F}$ é uma fibração racional se, e somente se,* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = -\infty$ *e todas as singularidades de $\mathcal{F}$ possuem quociente de auto-valores racionais.*

2.2. Dimensão de Kodaira zero. As folheações em superfícies complexas compactas com dimensão de Kodaira zero foram caracterizadas por McQuillan, em [**McQ01**], com o seguinte teorema.

Teorema 18. *Seja $\mathcal{F}$ é uma folheação relativamente minimal em uma superfície projetiva X. Se* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 0$ *então existe um recobrimento ramificado $\pi : Y \to X$ e um morfismo birracional $p : Y \to Z$ tal que $p_*(\pi^*(\mathcal{F}))$ é uma folheação gerada por um campo de vetores holomorfo global com zeros isolados.*

Segue facilmente deste resultado que se $\mathcal{F}$ possui dimensão de Kodaira zero então o gênero geométrico de toda curva irredutível invariante por $\mathcal{F}$ é menor ou igual a um.

As folheações geradas por campo de vetores globais também já estão classificadas. A classificação descrita nas páginas 84 a 88 de [**Bru00**] pode ser resumida da seguinte forma. Quando a superfície tem dimensão de Kodaira não negativa a folheação é uma fibração de Seifert com fibras elípticas ou é uma folheação linear em um toro. Quando a dimensão de Kodaira da superfície é negativa a classificação pode ser resumida na seguinte tabela.

$h^{1,1}(X)$	**Descrição**
≥ 2	fibração racional
1	fibração racional
	suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(Alb(X)) \to Aut(\mathbb{C}P(1))$
0	birracionalmente equivalente a um campo de vetores em $\mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$ da forma $v_1 \oplus v_2$.

Tabela 2: *Classificação de campos de vetores globais em superfícies algébricas de dimensão de Kodaira negativa*

Segue da classificação acima que uma folheação gerada por um campo holomorfo global sempre pode ser descrita por uma forma meromorfa fechada. A seguir fornecemos uma prova deste fato que independe da classificação dos campos holomorfos em superfícies projetivas.

Proposição 21. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em uma superfície algébrica S gerada por um campo holomorfo global então $\mathcal{F}$ é gerada por uma forma meromorfa fechada.*

proof: Seja X um campo holomorfo global gerando $\mathcal{F}$, ω uma 1-forma meromorfa tangente a $\mathcal{F}$, $H \subset \mathrm{Aut}(S)$ o subgrupo a um parâmetro gerado por X e G o fecho de H.

Primeiro considere o caso em que para todo $Y \in \mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ denota a álgebra de Lie de G, temos que $\omega(Y) = 0$. Nesse caso as órbitas de G são tangentes a $\mathcal{F}$. Como G é fechado e a ação é algébrica então as órbitas são variedades quasi-projetivas. Consequentemente toda folha de $\mathcal{F}$ é algébrica. O cirtério de Darboux-Jounaolou implica que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional $f : M \to \mathbb{C}P(1)$. Portanto a 1-forma fechada df induz $\mathcal{F}$.

Suponha agora que existe $Y \in \mathcal{G}$ tal que $\omega(Y) \neq 0$. Como Y está na álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ vale que $L_Y(\omega) \wedge \omega = 0$, onde $L_Y := di_X + i_X d$ é a *derivada de Lie* com respeito a Y. Logo

$$d(\omega(Y)) \wedge \omega + \iota_Y(d\omega) \wedge \omega = 0\,.$$

Vemos então que $\frac{\omega}{\omega(Y)}$ é tal que

$$d\left(\frac{\omega}{\omega(Y)}\right) = \frac{\omega \wedge d(\omega(Y)) - \omega(Y)d\omega}{\omega(Y)^2} = 0\,.$$

e portanto a 1-forma $\frac{\omega}{\omega(Y)}$ é fechada e a proposição está demonstrada. □

Exemplo 19. Seja $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ a família de folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definidas por

$$X_\alpha = (x^3-1)(x-\alpha y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y^3-1)(y-\alpha x^2)\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Essas folheações , construídas por Lins Neto em **[LN02b]**, são folheações de grau 4 em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com singularidades de tipo analítico local fixo e com integrais primeiras de grau arbitrariamente alto. McQuillan, veja [**Bru00**], mostrou que o exemplo de Lins Neto a menos de um recobrimento ramificado de três folhas e transformações birracionais é equivalente a campos de vetores globais em um toro complexo de dimensão 2 e, em particular, que a dimensão de Kodaira de cada exemplo específico é zero. □

Teorema 19. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma superfície racional S. Se* $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 0$ *então $\mathcal{F}$ admite integral primeira liouvilliana.*

demonstração: Módulo aplicações birracionais podemos supor que $\mathcal{F}$ é relativamente minimal. Pelo Teorema 18 existe uma variedade projetiva Y e um recobrimento ramificado $\pi : Y \to S$ tal que $\pi^*\mathcal{F}$ é bimeromorficamente equivalente a uma folheação gerada por um campo holomorfo global. Portanto, pela proposição 21, $\pi^*\mathcal{F}$ é gerada por uma forma meromorfa fechada.

Denote por $k(Y)$, o corpo de funções racionais de Y. A aplicação π induz a inclusão

$$\begin{aligned} \pi^* : K(S) &\to k(Y) \\ f &\mapsto f \circ \pi , \end{aligned}$$

de corpos diferenciais. Como π é um recobrimento finito então existem $t_1, \dots, t_d \in k(Y)$ tais que

$$k(Y) = k(X)(t_1, \dots, t_d) = k(x,y)(t_1, \dots, t_d) .$$

Ou seja o corpo $k(Y)$ é uma extensão finita de $k(S) \cong k(x,y)$, obtida pela adjunção dos elementos $t_1, \dots, t_d$.

As derivações $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ de $k(x,y)$ estendem-se de maneira única a derivações de $k(Y)$. Dessa forma podemos ver $k(Y)$ como um corpo diferencial que estende $k(x,y)$ munido das derivações $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$. Como os elementos $t_1, \dots, t_d$ são todos algébricos sobre $k(x,y)$ então $k(Y)$ é uma extensão liouvilliana de $k(S)$.

Como em Y a folheação é dada por uma forma meromorfa fechada, via uma extensão liouvilliana de $k(Y)$ podemos adicionar uma primitiva para a forma fechada definindo $\pi^*\mathcal{F}$. Consequentemente existe uma extensão liouvilliana de $k(x,y)$ onde $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira. □

2.3. Dimensão de Kodaira um. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação reduzida de uma superfície projetiva S com $\mathrm{kod}(\mathcal{F}) = 1$ então por definição existe um inteiro positivo n_0 tal que $H^0(S, T^*\mathcal{F}^{\otimes n_0})$ admite duas seções algebricamente independentes, digamos s_1 e s_2. O quociente destas seções define uma aplicação racional

$$\frac{s_1}{s_2} : S \dashrightarrow \mathbb{C} ,$$

a qual por sua vez define uma folheação holomorfa $\mathcal{G}$ em S. Segue que $\mathcal{G}$ é uma folheação por curvas *algébricas* e livre de singularidades dicríticas, ver [**Bru00**] página 118.

De acordo com o gênero geométrico da folha genérica de $\mathcal{G}$ temos as seguintes possibilidades:

1. **Gênero maior ou igual a 2:** $\mathcal{F}$ é uma fibração isotrivial de gênero maior ou igual a 2;
2. **Gênero um:** $\mathcal{F}$ coincide com $\mathcal{G}$ e é uma fibração elíptica não-isotrivial ou $\mathcal{F}$ é uma folheação turbulenta;
3. **Gênero zero:** $\mathcal{F}$ é uma folheação de Riccati.

Salvo nos casos em que $\mathcal{F}$ é uma folheação turbulenta ou $\mathcal{F}$ é uma folheação de Riccati temos que $\mathcal{F}$ possui integral primeira racional. Analisemos portanto estes dois casos separadamente.

2.3.1. *Integrabilidade de Folheações Turbulentas.* Trataremos primeiramente do caso em que $\mathcal{F}$ é uma folheação turbulenta.

Proposição 22. *Seja S uma superfície algébrica e $\pi : S \to C$ uma fibração elíptica de S. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação transversal a fibra genérica de π então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira Liouvilliana.*

demonstração: Segue de [**Bru00**, prop. 6, página 69] a existência de um recobrimento $p : Y \to S$, ramificado ao longo de um número finito de fibras de π, e de uma aplicação bimeromorfo $q : Z \dashrightarrow Y$ tal que $\pi \circ p \circ q : Z \to C$ é um *fibrado elíptico*, i.e. uma fibração elíptica sem fibras múltiplas e sem fibras singulares, tal que $(\pi \circ p \circ q)^*(\mathcal{F})$ é uma folheação turbulenta não-singular com respeito a $\pi \circ p \circ q$. Estando interessados na integrabilidade Liouvilliana, conceito que é invariante por recobrimentos finitos ramificados e aplicações birracionais, ver prova do Teorema 19, podemos supor sem perda de generalidade que $\mathcal{F}$ é transversal a fibra genérica de um fibrado elíptico.

Seja então $\{U_i\}$ uma cobertura de C tal que $V_i = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times E$, onde E é uma curva elíptica. Se (x, y) são coordenadas para $U_i \times E$ temos que $\mathcal{F}$ restrita à V_i é dada por uma forma meromorfa ω_i, onde

$$\omega_i = \begin{cases} dy & \text{quando não há fibras invariantes em } V_i \\ \frac{dx}{A(x)} + dy & \text{quando há fibras invariantes em } V_i \end{cases}$$

Acima $A(x)$ denota uma função holomorfa que anula-se precisamente sobre as fibras de $\pi_{|U_i}$ invariantes por $\mathcal{F}$. Observe ainda que as 1-formas meromorfas ω_i como definidadas acima são fechadas.

Se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ temos que existem $g_{ij} \in \mathcal{O}^*_{V_i \cap V_j}$ tais que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$.

Afirmamos que as funções g_{ij} são constantes. De fato como as formas ω_i são fechadas temos que $dg_{ij} \wedge \omega_i = 0$ e consequentemente as funções g_{ij} são constantes ao longo das folhas de $\mathcal{F}_{|V_i \cap V_j}$. Por outro lado como $V_i = U_i \times E$ temos que as funções g_{ij} são constantes ao longo das fibras de π e a afirmação segue.

Segue da existência de seções meromorfas para o fibrados lineares sobre variedades projetivas a existência de funções meromorfas $g_i : V_i \dashrightarrow \mathbb{C}$ tais que $g_{ij} = \frac{g_i}{g_j}$. Logo podemos definir as formas meromorfas globais $\Omega = \frac{\omega_i}{g_i}$ e $\eta = \frac{dg_i}{g_i}$. Vemos ainda que η é fechada e que

$$d\Omega = \eta \wedge \Omega .$$

Logo $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira Liouvilliana. □

2.3.2. *Integrabilidade de Folheações de Riccati.* Seja S uma superfície projetiva e $\pi : S \to B$ uma fibração com fibra genérica irredutível e racional. Uma folheação $\mathcal{F}$ de S é uma folheação de Riccati se é completamente transversal à fibra genérica de π.

A análise da integrabilidade de equações de Riccati que apresentaremos a seguir é baseada no seguinte Teorema de Liouville, ver [**Lo01**].

Teorema 20. *Uma equação diferencial de Riccati da forma*

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)\,,$$

com coeficientes $a, b, c \in \mathbb{C}(x)$ admite uma integral primeira liouvilliana se, e somente se, a folheação induzida em $\mathbb{C}^2$ admite uma curva algébrica invariante com grau em y positivo.

Seja $B^* \subset B$ o aberto maximal de B tal que $\mathcal{F}$ é completamente transversal a $\pi^{-1}(p)$ para todo $p \in B^*$. Observe que retrição de π à $\pi^{-1}(B^*)$ é uma fibração com fibras lisas. O levantamento de caminhos de B^* ao longo de folhas de $\mathcal{F}$ induz uma representação $H : \pi_1(C^*, p) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}P(1))$.

Quando $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante C tal que a projeção $\pi_{|C} : C \to B$ é sobrejetiva vemos que o a imagem de H possui ao menos uma órbita finita. Verifica-se facilmente que o fecho de Zariski da imagem de H é, módulo conjugação, um dos seguintes grupos:

1. G é finito;
2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \lambda, \beta \in \mathbb{C}^* \right\}$;
3. G é triangular, i.e., G é um grupo afim.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e $\rho : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a resolução minimal de $\mathcal{F}$. Se $\rho^*\mathcal{F}$ é uma folheação de Riccati de S com respeito a fibração $\pi : S \to \mathbb{C}P(1)$ diremos que $\mathcal{F}$ é uma folheação de Riccati de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com respeito a aplicação racional $\pi \circ \rho^{-1} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{C}P(1)$.

Lema 4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de Riccati de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com respeito a aplicação racional $\pi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{C}P(1)$. Suponha que C é uma curva irredutível invariante por $\mathcal{F}$ que não esteja contida em nenhuma fibra de π. Então existe uma cota para o grau de C e, função do grau de $\mathcal{F}$, do grau de $\pi_{|C}$ e do tipo de singularidades de $\mathcal{F}$.*

<u>esboço da demonstração:</u> Uma vez que o grau de $\pi_{|C}$ está limitado temos que existe uma cota inferior para o índice $Z(\mathcal{F}, C, p)$ para toda singularidade p de $\mathcal{F}$. □

Para controlar o grau de $\pi_{|C}$, utilizaremos a classificação dos subgrupos finitos de $SL(2, \mathbb{C})$.

Teorema 21. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de Riccati em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ com respeito a aplicação racional $\pi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P(1)$ então*

grupo	ordem do grupo	ordem da menor órbita
cíclico C_q	q	1
dihedral D_q	$2q$	2
tetrahedral	12	4
octahedral	24	6
icosahedral	60	12

TABELA 1. Subgrupos finitos de $PSL(2,\mathbb{C})$

1. *É possível decidir se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira Liouvilliana.*
2. *É possível decidir se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional.*

esboço da demonstração: Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira Liouvilliana. Segue do teorema de Liouville que $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante C tal que $\pi_{|C} : C \to \overline{\mathbb{C}}$ é sobrejetiva e que o fecho de Zariski da monodromia é virtualmente solúvel. Pela classificação dos grupos virtualmente solúveis de $SL(2,\mathbb{C})$ vemos que existe uma curva algébrica invariante C por $\mathcal{F}$ tal que o grau de $\pi_{|C}$ é menor do que 12. Segue do lema 4 que podemos obter uma cota explícita para o grau de C e portanto podemos decidir se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira liouvilliana.

Para provar o item (2) observamos que salvo nos casos me que o grupo é cíclico ou dihedral temos um controle sobre o grau de $\pi_{|C}$ para qualquer curva algébrica irredutível C invariante por $\mathcal{F}$. Quando o grupo é cíclico podemos mostrar que a folheação é dada por uma forma racional fechada com pólos ao longo das fibras de π invarinates por $\mathcal{F}$ e de duas curvas algébricas invariantes transversais a π e invariantes por $\mathcal{F}$ tais que o grau da restrição de π a qualquer uma destas duas curvas é um. O caso dihedral é mais delicado e um tratamento detalhado aparecerá em [**Pe03**].

Observamos ainda que o esboço de prova que apresentamos acima é baseado no *Algoritmo de Kovacic's* e o leitor poderá obter mais detalhes sobre o caso dihedral consultando [**Ko86**]. □

3. Integrabilidade de Folheações de Tipo Geral

Vamos mostrar a seguir que para folheações de tipo geral com grau e invariantes bimeromorfos fixados é possível limitar o grau de curvas algébricas invariantes de gênero g. Esta seção é inteiramente baseada no artigo [**Pe02**].

3.1. Cotas para o grau de integrais primeiras. Ao contrário do que é feito em [**Pe02**] vamos tratar apenas do caso mais simples onde supomos que a nossa folheação possui integral primeira racional. A diferença essencial com o caso geral é que, após resolução, podemos trabalhar com um curva invariante sem singularidades.

Teorema 22. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Suponha que $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional. Então existe uma cota para o grau* *da integral primeira dependendo apenas do grau e do plurigênero de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico da folha genérica.*

demonstração: Seja $\sigma : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a resolução minimal de $\mathcal{F}$. Denote por $\mathcal{G}$ a folheação reduzida $\sigma^*(\mathcal{F})$. Como $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira meromorfa e $\mathcal{G}$ é livre de singularidades dicríticas vemos que $\mathcal{G}$ é uma fibração.

Seja C a fibra genérica de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ é de tipo geral podemos supor que o gênero de C é ao menos 2. O teorema de Riemman-Roch nos diz que

$$h^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes k}) = k(2g-2) - g + 1\,,$$

se k é pelo menos 2. Seja n_0 o menor inteiro não-negativo tal que $P_{n_0}(\mathcal{G}) > n_0(2g-2) - g + 1$. Pela escolha de n_0, a aplicação de restrição

$$\phi : H^0(S, {K_{\mathcal{G}}}^{\otimes n_0}) \to H^0(C, {\Omega^1_C}^{\otimes n_0})\,,$$

possui núcleo não -trivial. Em outras palavras existe uma seção holomorfa global s_0 de ${K_{\mathcal{F}}}^{\otimes n_0}$ que se anula identicamente em C.

Como σ é um morfismo, para qualquer seção holomorfa s de ${K_{\mathcal{G}}}^{\otimes i}$ temos que $\sigma_* s$ é uma seção holomorfa de $T\mathcal{F}^{*\otimes i}$. Observando que

$$\sigma_*(H^0(S, K_{\mathcal{G}}^{\otimes i})) \subset H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, T\mathcal{F}^{*\otimes i}) \cong H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(i \cdot \mathrm{d}(\mathcal{F}) - i))\,,$$

podemos identificar $\sigma_* s_0$ com um polinômio homogêneo de grau $n_0 \cdot (\mathrm{d}(\mathcal{F}) - 1)$ em três variáveis. Portanto a folha genérica de $\mathcal{F}$ possui grau menor ou igual a $n_0 \cdot (\mathrm{d}(\mathcal{F}) - 1)$. □

A cota obtida no Teorema acima parece depender em uma infinidade de invariantes de $\mathcal{F}$, $P_m(\mathcal{F})$ para todo inteiro positivo m. Podemos entretanto utilizar a *altura* de $\mathcal{F}$ para substituir o plurigênero como parâmetro para a cota.

Lema 5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de tipo geral. Se a altura de $\mathcal{F}$ é h então*

$$P_{h \cdot n}(\mathcal{F}) \geq \binom{n+2}{2}\,.$$

demonstração: Seja $V \subset H^0(S, K_F^{\otimes h})$ o espaço vetorial gerado pelas três seções algebricamente independentes de $K_F^{\otimes h}$. Se denotarmos essas seções por s_0, s_1 e s_2 e considerarmos o morfismo $\phi : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,

$$\phi(p) = (s_0(p) : s_1(p) : s_2(p))\,,$$

obtemos que $V = \phi^*(H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1)))$. Portanto

$$\phi^*(H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(n))) \subset H^0(S, K_F^{\otimes h \cdot n})\,,$$

e o lema esá demonstrado. □

Corolário 15. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de tipo geral em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional então existe uma cota para o grau da integral primeira dependendo apenas do grau e da altura de $\mathcal{F}$ e do gênero geométrico da fibra genérica.*

demonstração: Segue facilmente do lema 5 e a prova do teorema 22. □

4. Problema de Painlevé

Os resultados apresentados nas seções anteriores sugerem o seguinte *algoritmo* para decidir se $\mathcal{F}$, uma folheação de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, admite uma integral primeira racional de gênero g.

Seja $\pi : S \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a resolução minimal de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G} = \pi^*\mathcal{F}$ e g um inteiro não-negativo.

Passo 1. Se todos os quocientes de autovalores de $\mathcal{G}$ são racionais faça $n = 1$ e passemos ao passo 2, caso contrário conclua que $\mathcal{F}$ não possui integral primeira racional.

Passo 2. Se $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional de grau menor ou igual a n concluímos que $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira racional.

Passo 3. Se $h^0(S, T^*\mathcal{G}^{\otimes n}) = 0$ faça $n = n + 1$ e retorne ao passo 2 senão passemos ao passo 4.

Passo 4. Se $\mathrm{kod}(\mathcal{G}) = 0$ conclua que $\mathcal{F}$ possui integral primeira Liouvilliana senão passemos ao passo 5.

Passo 5. Se $\mathrm{kod}(\mathcal{G}) = 1$ determine a fibração canônica e utilize os resultados da seção 2 para decidir se $\mathcal{F}$ admite integral primeira racional senão passemos ao passo 6.

Passo 6. Conclua que $\mathcal{G}$ é de tipo geral, calcule a altura de $\mathcal{G}$ e utilize os resultados da seção 3 para decidir se $\mathcal{F}$ admite integral primeira racional com folha genérica de gênero g.

Acreditamos que a conclusão do passo 5 possa ser refinada. De fato para termos uma resposta afirmativa, ainda que algorítmica, para o problema de Painlevé resta saber se podemos decidir se uma folheação de dimensão de Kodaira zero é uma fibração elíptica isotrivial. Os resultados de [**LN02a**] sugerem que de fato este é o caso.

Salientamos ainda que todos os passos do algoritmo descrito acima podem ser efetivamente implementados. Uma abordagem detalhada de tal implementação pode ser encontrada em [**Pe03**]. É bom deixar que não afirmamos que tal algoritmo poderá ser implementado de forma eficiente.

Observamos ainda que este algoritmo, apesar de considerar que o gênero da integral primeira esta fixado, enquadra-se no espírito da abordagem proposta por Painlevé em suas Lições de Estocolmo, ver [**Pa73**], para resolver o problema de Poincaré.

> J'ajoute qu'on ne peut espérer résoudre d'un coup qui consiste á limiter n.[4] L'énoncé vers lequel il faut tendre doit avoir la forme suivante: "On sait reconnaître si l'intégrale d'une équation $F(y', y, x) = 0$ donneé est algébrique ou ramener l'equation aux quadratures." Dans ce dernier cas, la question reviendrait à reconnaître si une certainé intégrale abélienne(de premiére ou de troisiéme especè) n'a que deux ou une périodes.

[4] n denota o grau da integral primeira

Bibliografia

[BGM00] Marco Brunella e Luís Gustavo Mendes. Bounding the degree of solutions to Pfaff equations. *Publ. Mat.*, 44(2):593–604, 2000.

[Bru97] Marco Brunella. Some remarks on indices of holomorphic vector fields. *Publ. Mat.*, 41(2):527–544, 1997.

[Bru00] Marco Brunella. *Birational geometry of foliations.* Monografías de Matemática. IMPA, 2000. Disponível eletronicamente em http://www.impa.br/Publicacoes/Monografias/Abstracts/brunella.ps.

[Bru03] Marco Brunella. Subharmonic variation of the leafwise poincaré metric. *Inv. Math.*, 152(1):119–148, 2003.

[Cha90] B. Chabat. *Introduction à l'analyse complexe. Tome 2.* "Mir", Moscow, 1990.

[CLN91] Dominique Cerveau e Alcides Lins Neto. Holomorphic foliations in CP(2) having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 41(4):883–903, 1991.

[CM82] Dominique Cerveau e Jean-François Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982.

[CS87] César Camacho e Paulo Sad. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas.* 16° Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.

[Est02] Eduardo Esteves. The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space. *Math. Res. Lett.*, 9(1):1–15, 2002.

[Fi76] Gerd Fischer. *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Mathematix 538, Springer-Verlag, 1976.

[GH94] Phillip Griffiths e Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

[Ghy00] Étienne Ghys. À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 49(1):175–180, 2000.

[Gra00] Jeremy J. Gray. *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2000.

[GZ97] Alexis García Zamora. Foliations in algebraic surfaces having a rational first integral. *Publ. Mat.*, 41(2):357–373, 1997.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Hil97] Einar Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1997.

[Inc44] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, New York, 1944.

[Jou78] J. P. Jouanolou. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. *Math. Ann.*, 232(3):239–245, 1978.

[Jou79] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1979.

[Ko86] J. Kovacic. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symbolic Computation*, 2:3–43, 1986.

[LN02a] Alcides Lins Neto. Exceptional families of foliations and the poincare' problem. *www.preprint.impa.br*, 2002.

[LN02b] Alcides Lins Neto. Some examples for the Poincaré and Painlevé problems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(2):231–266, 2002.

[Lo02] Frank Loray. 5 leçons sur la structure transverse d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension 2 complexe. *Monographies Red TMR Europea Sing. Ec. Dif. Fol.*, 35(2):231–266, 2002.

[Lo01] Frank Loray. Towards the Galois groupoid of the first order rational ODE. *Differential Equations and the Stokes Phenomenon (Proceedings, Groningen, 2001)*, B.L.J. Braaksma, G.K. Immink, M. van der Put and J. Top (Ed.), World Scientific(à aparecer).

[MR82] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 55:63–164, 1982.

[McQ01] Michael McQuillan. Noncommutative mori theory. *Preprint IHES M/01/42*, 2001.

[Men00] Luís Gustavo Mendes. Kodaira dimension of holomorphic singular foliations. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 31(2):127–143, 2000.

[Men98] Luís Gustavo Mendes e Jorge Vitório Pereira.. Bimeromorphic invariants of Holomorphic Foliations. *Tese de Doutorado, IMPA*, 1998.

[MP02] Luís Gustavo Mendes e Hilbert modular foliations on the projective plane. *www.preprint.impa.br*, 2002.

[MS01] Rogério Mol e Márcio Soares. *Índices de campos holomorfos e aplicações.* 23° Colóquio Brasileiro de Matemática., IMPA, 2001.

[Pa73] Paul Painlevé. *Oeuvres de Paul Painlevé. Tome I.* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1973.

[Pe02] Jorge Vitório Pereira. On the Poincaré problem for foliations of general type. *Math. Ann.*, 323(2):217–226, 2002.

[Pe03] Jorge Vitório Pereira.. On the integrability of holomorphic foliations. *Em preparação*, 2003.

[Po91] Henri Poincaré. Sur l'integration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré i. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 5(11):161–169, 1891.

[Rit48] Joseph Fels Ritt. *Integration in Finite Terms. Liouville's Theory of Elementary Methods.* Columbia University Press, New York, N. Y., 1948.

[Sin92] Michael F. Singer. Liouvillian first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2):673–688, 1992.

[Su98] Tatsuo Suwa. *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations* Hermann, Paris, 1998.