Índices de Campos Holomorfos e Aplicações

Publicações Matemáticas

Índices de Campos Holomorfos e Aplicações

Marcio G. Soares
UFMG

Rogério S. Mol
UFMG

impa

23º Colóquio Brasileiro de Matemática

Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger

23º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos – André Nachbin
- Cálculo Variacional e Controle Ótimo – Antonio Leitão
- Computational Methods in the Local Theory of Curves – Abramo Hefez e Marcelo Escudeiro Hernandes
- Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares – André Toom
- Inteiros Quadráticos e o Grupo de Classes – Antonio J. Engler e Paulo Brumatti
- Introduction to Toric Varieties – Jean-Paul Brasselet
- Introdução aos Espaços de Escala (EDPs em Processamento de Imagens) – Ralph Teixeira
- **Índices de Campos Holomorfos e Aplicações – Marcio G. Soares e Rogério S. Mol**
- Notes on Morse Theory – Daniel V. Tausk, Francesco Mercuri e Paolo Piccione
- One Dimensional Dynamics: the Mathematical Tools – Edson de Faria e Welington de Melo
- Partial Regularity of Solutions of the 3-D Incompressible Navier-Stokes Equations – Hermano Frid e Mikhail Perepelitsa
- Perfect Simulation of Spatial Processes – Nancy L. Garcia
- Riemannian and Submanifold Geometry – Carlos Olmos
- Tópicos em Combinatória Contemporânea – Carlos Gustavo Moreira e Yoshiharu Kohayakawa
- Uma Introdução Sucinta a Algoritmos de Aproximação – Cristina G. Fernandes et al

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: dic@impa.br
http://www.impa.br

ISBN: 85-244-0177-X

Para

Cristina e Ana Paula

Sumário

Introdução

O objetivo central dessas notas é apresentar, da maneira mais elementar possível, alguns resultados básicos, de cunho geométrico, sobre folheações holomorfas singulares de dimensão 1. A razão para isso está na esperança de que esse texto possa motivar alunos recém-ingressos, ou em vias de ingressar num programa de doutorado, a se interessarem por esse tipo de assunto matemático que, diga-se de passagem, é muito bonito. Muito, porém, deixou de ser dito aqui e, por isso, recomendamos fortemente o livro de T. Suwa, [Su1], como leitura paralela e complementar. Entretanto, essas notas são o embrião de um texto mais abrangente que, esperamos, será completado em breve.

Na primeira parte do texto introduzimos alguns tópicos de geometria complexa, mais especificamente propriedades básicas de variedades complexas, fibrados vetoriais, classes de Chern e teoria de feixes. O material apresentado é necessário não apenas à compreensão dos resultados posteriores, como também é interessante em si por trazer informação matemática formativa em geral.

Na segunda parte apresentamos resultados básicos, alguns deles clássicos, outros mais recentes, sobre folheações holomorfas de dimensão 1. No capítulo 7, discorremos sobre as propriedades do número de Milnor. No capítulo 8, apresentamos resultados sobre a teoria de índices para folheações em ambientes de dimensão 2. Seguimos, aí, a apresentação de [Br2], [KS] e [CLS]. Aplicações relevantes, como os resultados de classificação obtidos por M. Brunella, [Br] e [Br1], não estão todavia presentes. Finalmente, no capítulo 9, apresentamos uma versão genérica, devida a S.S. Chern, do teorema de P. Baum e R. Bott, um resultado geométrico fundamental para a compreensão e o estudo das folheações holomorfas.

Fizemos o possível para, ao longo do texto, apresentar com clareza e detalhamento todos os cálculos envolvidos, esperando não ter deixado muitos argumentos obscuros. Consideramos ainda pré-requisito essencial para a leitura deste texto conhecimentos básicos da teoria de funções de várias variáveis complexas e de topologia algébrica. Recomendamos [Gun] como referência para o primeiro assunto e [Spa] para o segundo, além da parte introdutória de [GH] para ambos.

Expressamos nosso agradecimento a Gilcione Costa pela leitura de versões preliminares desse texto e a Ana Paula Paiva pelo criterioso trabalho de revisão.

Por fim, somos gratos a C. Camacho e a P. Sad pela sugestão de escrever esse trabalho, ao IMPA pela hospitalidade durante o verão de 2001, quando parte dessas notas foram escritas, e à organização do 23º Colóquio Brasileiro de Matemática pela oportunidade de publicá-lo.

Belo Horizonte, maio de 2001

Márcio G. Soares Rogério S. Mol

*Trabalho parcialmente financiado por PRPq-UFMG, CNPq (Projeto: Folheações, ...de grupos) e PRONEX-Sistemas Dinâmicos.

Parte I

Noções Geométricas

Capítulo 1

Variedades complexas

1.1 Definições

Iniciamos recordando alguns conceitos básicos.

Definição 1.1.1 Uma *variedade complexa* (C^k, C^∞, analítica real) de dimensão n é um espaço topológico M, de Hausdorff, conexo, com base enumerável, munido de uma estrutura analítica (C^k, C^∞, analítica real) definida da seguinte maneira: existe uma cobertura de M por abertos, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, e homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, onde $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ é aberto, tais que as funções de transição $\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1}$ são holomorfas (C^k, C^∞, analíticas reais) onde definidas. As cartas locais $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ constituem um *atlas* de M e dois atlas, $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{W_\beta, \psi_\beta\}_{\beta\in B}$, são ditos equivalentes se sua união formar um atlas (isto é, as $\varphi_\alpha \circ {\psi_\beta}^{-1}$ são holomorfas, C^k, C^∞, analíticas reais). Uma *estrutura analítica* (C^k, C^∞, analítica real) é a classe de equivalência de um atlas.

Definição 1.1.2 Se M é uma variedade complexa de dimensão n, um subconjunto conexo $N \subset M$ é uma *subvariedade* de dimensão m de M desde que, para cada $x \in N$, exista uma carta $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ do atlas de M, com $x \in U_\alpha$, tal que φ_α é um homeomorfismo entre $U_\alpha \cap N$ e um aberto de $\mathbb{C}^m \times \{0\} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \cong \mathbb{C}^n$.

Definição 1.1.3 Dadas duas variedades M e N, uma função $f : M \to N$ é *holomorfa*, respectivamente C^k, C^∞, analítica real, se as compostas $\psi_\beta \circ f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ (onde definidas) forem holomorfas, respectivamente C^k, C^∞, analíticas reais, onde φ_α e ψ_β são cartas locais em M e em N.

Definição 1.1.4 Seja X um subconjunto de uma variedade complexa M. X é um *subconjunto analítico* de M se, para cada $x \in M$, existem uma vizinhança aberta $U \subset M$ de x e uma função holomorfa $f : U \to \mathbb{C}^p$ tais que $X \cap U = f^{-1}(0)$ (p pode depender de x).

1.2 Espaço tangente

Uma variedade complexa de dimensão n é, naturalmente, uma variedade real de dimensão $2n$. Dado $p \in M$ tome, em torno de p, uma carta $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ do atlas analítico de M, com coordenadas reais

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(q) &= (x_1(q), y_1(q), \ldots, x_n(q), y_n(q)) \\ &= (x_1(q) + iy_1(q), \ldots, x_n(q) + iy_n(q)) = (z_1(q), \ldots, z_n(q)),\end{aligned}$$

$q \in U_\alpha$. O *espaço tangente real* a M em p, T_pM, é o espaço vetorial das funções $v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) v é $\mathbb{R}$-linear,

(ii) $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$.

Por definição, se $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}(\varphi_\alpha(p)) \quad \text{(analogamente para os } y_i\text{)}.$$

É imediato que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial y_i}(p) : \quad C^\infty(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \frac{\partial f}{\partial y_i}(p)\end{aligned}$$

são vetores tangentes a M em p. Além disso

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial y_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p), \frac{\partial}{\partial y_n}(p)\right\}$$

é uma base de T_pM.

Exercício 1 Se M^n é uma variedade real C^∞, então o espaço tangente a M em p, T_pM, é o espaço vetorial das funções $v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) v é $\mathbb{R}$-linear,

(ii) $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$.

Mostre que, se f, $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ coincidem em uma vizinhança de p, então $v(f) = v(g)$. Mostre que, se h é constante em uma vizinhança de p, então

$v(h) = 0$. Em seguida, tome uma carta φ_α em torno de p (podemos supor $\varphi_\alpha(p) = 0$). Se $g : U \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞, onde $0 \in U \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é aberto, mostre que g se escreve $g(x_1, \ldots, x_n) = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(x_1, \ldots, x_n)x_i$. Portanto, se $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, então, fazendo $g = f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ conclua que $f = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x_i$. Aplique $\partial/\partial x_i$ e obtenha uma expressão para as $f_i(p)$. Em seguida, aplique v e deduza que $v(f)$ é uma combinação linear dos $(\partial/\partial x_i)(p)$. Finalmente, mostre que $\{(\partial/\partial x_i)(p)\}_{i=1,\ldots,n}$ são linearmente independentes.

Se $T_pM^{\mathbb{C}}$ é o complexificado de T_pM, $T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM \otimes \mathbb{C}$, então $\dim_{\mathbb{C}} T_pM^{\mathbb{C}} = 2n$, e escolhemos para $T_pM^{\mathbb{C}}$, via φ_α, a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}(p), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}(p) \right\},$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z_k}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(p) - i\frac{\partial}{\partial y_k}(p) \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(p) + i\frac{\partial}{\partial y_k}(p) \right).$$

O fibrado tangente real a M, TM, é a união $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$. Agora, em termos de coordenadas locais, já que um vetor tangente a M em um ponto está identificado a um vetor de $\mathbb{R}^{2n}$,

$$TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pM = \{(p, v_\alpha) : p \in U_\alpha, v_\alpha \in \mathbb{R}^{2n}\},$$

de onde concluímos que TU_α tem a estrutura do produto $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$. Portanto,

$$TM = \bigcup_\alpha TU_\alpha = \bigcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n},$$

onde, para $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, (p, v_α) e (p, v_β) são o mesmo ponto de TM se, e somente se,

$$v_\alpha = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p))v_\beta. \qquad (\star)$$

Logo, TM é uma variedade analítica real obtida colando-se os $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$ através da identificação $(\star)$. As funções de transição para TM são dadas por

$$\Phi_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})).$$

Por outro lado, como as projeções $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\pi_\alpha} U_\alpha$ e $U_\beta \times \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\pi_\beta} U_\beta$ coincidem na interseção $U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n} \cap U_\beta \times \mathbb{R}^{2n}$, fica bem definida a projeção $\pi : TM \to M$ cuja expressão local é $(p, v_\alpha) \mapsto p$.

Vamos considerar ($\star$) mais detalhadamente. Colocando $\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ e escrevendo $\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$, temos que a derivada $D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta} = D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ é representada pela matriz

$$[D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(x_1, y_1)} & \cdots & \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(x_n, y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial(u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1)} & \cdots & \dfrac{\partial(u_n, v_n)}{\partial(x_n, y_n)} \end{pmatrix},$$

onde

$$\frac{\partial(u_j, v_j)}{\partial(x_k, y_k)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial u_j}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial v_j}{\partial y_k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Seja $TM^{\mathbb{C}}$ o complexificado de TM, isto é, $TM^{\mathbb{C}} = \bigcup_{p \in M} T_p M^{\mathbb{C}}$. Ponha $\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta} = (\widetilde{\Theta}_1, \ldots, \widetilde{\Theta}_n)$, onde $\widetilde{\Theta}_j = u_j + iv_j$. As funções de transição de $TM^{\mathbb{C}}$ são dadas por $(\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}, D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta})$, sendo que $D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}$ é considerada como uma transformação linear complexa. Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

a mudança da base $\{\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j\}$ para a base $\{\partial/\partial z_j, \partial/\partial \bar{z}_j\}$ é dada pela matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \text{ com } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Passando da base

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\} \text{ para } \left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right\},$$

a matriz que representa $D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}$ fica

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(x_1, y_1)} & \cdots & \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(x_n, y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial(u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1)} & \cdots & \dfrac{\partial(u_n, v_n)}{\partial(x_n, y_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_1} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_n} & 0 \\
0 & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_1}} & & 0 & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_n}} \\
& \vdots & \ddots & \vdots & \\
\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_1} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_n} & 0 \\
0 & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_1}} & & 0 & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_n}}
\end{pmatrix}.
$$

Ao fazermos a mudança da base

$$
\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right\} \quad \text{para} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right\},
$$

a matriz acima se transforma em

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_n} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_n} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_1}{\partial z_n}} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\dfrac{\partial\widetilde{\Theta}_n}{\partial z_n}}
\end{pmatrix},
$$

ou seja, é da forma

$$
[D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} \Theta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \overline{\Theta}_{\alpha\beta} \end{pmatrix},
$$

onde

$$
\Theta_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial\widetilde{\Theta}_i}{\partial z_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.
$$

Em particular,

$$
\det D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta} = \det\Theta_{\alpha\beta}\det\overline{\Theta}_{\alpha\beta} = \det\Theta_{\alpha\beta}\,\overline{\det\Theta_{\alpha\beta}} = |\det\Theta_{\alpha\beta}|^2 > 0,
$$

de onde concluímos que uma variedade complexa M é *orientável*. Além disso, da forma final da matriz $[D\widetilde{\Theta}_{\alpha\beta}]$ concluímos que, em cada ponto $p \in M$, os seguintes subespaços estão bem definidos e não dependem da carta local escolhida em torno de p:

$$T'_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p) \right\rangle_{\mathbf{C}} \subset T_pM^{\mathbf{C}}$$

chamado de *espaço tangente holomorfo* a M em p e

$$T''_pM = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}(p) \right\rangle_{\mathbf{C}} \subset T_pM^{\mathbf{C}}$$

chamado de *espaço tangente anti-holomorfo* a M em p. Observe que $T_pM^{\mathbf{C}} = T'_pM \oplus T''_pM$. Obtivemos assim uma decomposição

$$TM^{\mathbf{C}} = T'M \oplus T''M,$$

sendo que $T'M$ é o *fibrado tangente holomorfo* de M e $T''M$, o *fibrado tangente anti-holomorfo* de M. As funções de transição de $T'M$ são $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \Theta_{\alpha\beta})$ e as de $T''M$ são $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \overline{\Theta}_{\alpha\beta})$.

Se TM^* é o fibrado cotangente real e $TM^{\mathbf{C}*}, T'M^*, T''M^*$ são os cotangentes óbvios, suas funções de transição são dadas, respectivamente, por

$$\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \left((\Theta_{\alpha\beta} \oplus \overline{\Theta}_{\alpha\beta})^T\right)^{-1}\right), \quad \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, (\Theta_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right),$$

$$\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, (\overline{\Theta}_{\alpha\beta}^T)^{-1}\right).$$

Seja agora $f : M^n \to N^n$ uma aplicação holomorfa. A matriz de

$$Df(p) : T_pM^{\mathbf{C}} \to T_{f(p)}N^{\mathbf{C}},$$

relativa às bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}(p) \right\} \quad \text{de} \quad T_pM^{\mathbf{C}}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z'_1}(f(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial z'_n}(f(p)), \frac{\partial}{\partial \bar{z}'_1}(f(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}'_n}(f(p)) \right\} \quad \text{de} \quad T_{f(p)}N^{\mathbf{C}},$$

é dada por

$$[Df(p)] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) & 0 \\ 0 & \overline{\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}}(p) \end{pmatrix}.$$

Em particular, se $Df(p)$ é isomorfismo, então

$$\det Df(p) = \left|\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(p)\right)\right|^2 > 0,$$

ou seja, biholomorfismos preservam orientação.

1.3 Formas diferenciais

Uma p-forma C^∞ ω em uma variedade complexa M se escreve, em coordenadas locais, como uma soma de termos dos tipos $f_I dx_I$, $g_J dy_J$ e $h_K d(x,y)_K$, onde $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, $dy_J = dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_p}$, $d(x,y)_K$ é um produto de p formas dos tipos dx_m e dy_n, e f_I, g_J, h_K são funções complexas. Agora, $dx_i = (1/2)(dz_i + d\bar{z}_i)$ e $dy_i = (1/2i)(dz_i - d\bar{z}_i)$. Substituindo nos termos cuja soma é ω, concluímos que uma p-forma em M se escreve

$$\omega = \sum k_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_s},$$

o que abreviamos para $\omega = \sum k_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$. Dizemos que cada parcela dessa soma é uma p-forma do tipo (r,s), $r+s=p$. O fato de uma forma ser do tipo (r,s) não depende do sistema de coordenadas, uma vez que $TM^{\mathbb{C}} = T'M \oplus T''M$ (exercício). Além disso, uma p-forma ω se expressa de modo único como uma soma

$$\omega = \omega^{(p,0)} + \omega^{(p-1,1)} + \cdots + \omega^{(0,p)},$$

onde $\omega^{(r,s)}$ é do tipo (r,s). Sejam $\mathcal{A}^0(M)$ a $\mathbb{C}$-álgebra $C^\infty(M,\mathbb{C})$ e $\mathcal{A}^p(M)$ o $\mathcal{A}^0(M)$-módulo de p-formas complexas C^∞ sobre M. A decomposição acima fornece uma decomposição

$$\mathcal{A}^p(M) = \mathcal{A}^{(p,0)}(M) \oplus \mathcal{A}^{(p-1,1)}(M) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^{(0,p)}(M).$$

A derivada exterior d complexifica e fornece $d : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M)$, satisfazendo as propriedades habituais. Agora, dada $f \in \mathcal{A}^0(M)$, temos localmente

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i.$$

Definimos

$$\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \quad \text{e} \quad \bar{\partial} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i.$$

∂f e $\overline{\partial} f$ não dependem do sistema local de coordenadas. Para uma forma $\omega^{(r,s)} = \sum k_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_s}$, ponha

$$\partial\omega^{(r,s)} = \sum \partial k_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_s}$$

uma forma do tipo $(r+1, s)$ e

$$\overline{\partial}\omega^{(r,s)} = \sum \overline{\partial} k_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_s}$$

do tipo $(r, s+1)$. Ficamos com

$$d\omega^{(r,s)} = \partial\omega^{(r,s)} + \overline{\partial}\omega^{(r,s)}.$$

Como d não depende do sistema de coordenadas locais, o mesmo ocorre com ∂ e $\overline{\partial}$. Para uma p-forma arbitrária $\omega = \sum\limits_{r+s=p} \omega^{(r,s)}$, fazemos

$$\partial\omega = \sum_{r+s=p} \partial\omega^{(r,s)} \quad \text{e} \quad \overline{\partial}\omega = \sum_{r+s=p} \overline{\partial}\omega^{(r,s)}.$$

Temos $d = \partial + \overline{\partial}$ e valem

$$\partial(\omega^p \wedge \eta) = \partial\omega^p \wedge \eta + (-1)^p \omega^p \wedge \partial\eta,$$

$$\overline{\partial}(\omega^p \wedge \eta) = \overline{\partial}\omega^p \wedge \eta + (-1)^p \omega^p \wedge \overline{\partial}\eta.$$

Além disso,

$$\partial\partial\omega^{(r,s)} + \overline{\partial}\partial\omega^{(r,s)} + \partial\overline{\partial}\omega^{(r,s)} + \overline{\partial}\,\overline{\partial}\omega^{(r,s)} = dd\omega^{(r,s)} = 0.$$

Comparando os tipos de formas presentes na soma acima, concluímos que

$$\partial\partial = 0 \;,\; \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0 \;,\; \overline{\partial}\,\overline{\partial} = 0.$$

Uma $(p, 0)$-forma $\omega^{(p,0)} = \sum f_{i_1,\ldots,i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$ é *holomorfa* se os coeficientes $f_{i_1,\ldots,i_p}$ são funções holomorfas. Nesse caso,

$$\overline{\partial}\omega = \sum \overline{\partial} f_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} = 0.$$

Reciprocamente, $\overline{\partial}\omega^{(p,0)} = 0$ implica que os coeficientes de ω são holomorfos. Para formas holomorfas temos que $\partial\omega = d\omega$.

Finalmente, recordamos que a orientação de uma variedade complexa é determinada pelo elemento de volume. Localmente, isso se lê:

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n.$$

1.4 Sobre a dualidade de Poincaré

Recordamos brevemente alguns aspectos da chamada dualidade de Poincaré (veja [Spa], [DeRh], [BoTu]).

Se M é uma variedade complexa compacta de dimensão n denote, respectivamente, por $H_q^s(M,\mathbb{Z})$ e $H_s^q(M,\mathbb{Z})$ os q-ésimos grupos de *homologia singular* e de *cohomologia singular* de M, com coeficientes inteiros. O teorema de dualidade de Poincaré nos diz que

$$H_s^q(M,\mathbb{Z}) \cong H_{n-q}^s(M,\mathbb{Z}). \qquad (DP1)$$

Em geral essa dualidade falha quando M não é compacta. Nesse caso necessitamos trabalhar com a *cohomologia singular com suportes compactos*, definida da seguinte maneira: os subconjuntos compactos de M podem ser ordenados parcialmente por inclusão ($K \leq K'$ se, e somente se, $K \subseteq K'$). Os grupos $H_s^q(M, M \setminus K)$ formam então um sistema indutivo, indexado pelos subconjuntos compactos de M, com $H_s^q(M, M \setminus K) \longrightarrow H_s^q(M, M \setminus K')$ induzida pela inclusão. Ponha

$$H_{sc}^q(M,\mathbb{Z}) = \underset{K \text{ compacto}}{\varinjlim} H_s^q(M, M \setminus K),$$

onde tomamos o limite direto ([AM]). É claro que, se M é compacta, então $H_{sc}^q(M,\mathbb{Z}) = H_s^q(M,\mathbb{Z})$. Com essa construção recuperamos a dualidade, que agora se lê:

$$H_{sc}^q(M,\mathbb{Z}) \cong H_{n-q}^s(M,\mathbb{Z}). \qquad (DP2)$$

Tensorizando por $\mathbb{C}$ e invocando o teorema do Coeficiente Universal, obtemos

$$H_{sc}^q(M,\mathbb{C}) \cong H_{n-q}^s(M,\mathbb{C}). \qquad (DP3)$$

Por outro lado, temos duas cohomologias de De Rham, a de formas fechadas, $H_{DR}^*(M,\mathbb{C})$, e a de formas fechadas com suporte compacto, $H_{cDR}^*(M,\mathbb{C})$. Elas obviamente coincidem se M é compacta. Sob certas hipóteses em M (existência de uma *boa cobertura finita*, [BoTu]), e esse é o caso ao longo de todo esse texto, temos que essas duas cohomologias têm dimensão finita. Além disso, a dualidade de Poincaré assume a seguinte forma:

$$H_{DR}^q(M,\mathbb{C}) \cong \left(H_{cDR}^{n-q}(M,\mathbb{C})\right)^*. \qquad (DP4)$$

Esse resultado é obtido mostrando-se que a aplicação bilinear

$$\begin{aligned} H_{DR}^q(M,\mathbb{C}) \times H_{cDR}^{n-q}(M,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\omega,\eta) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

é não degenerada.

Por outro lado temos o *teorema de De Rham* ([DeRh]-théorème 17'):

$$H^{n-q}_{sc}(M,\mathbb{C}) \;\cong\; H^q_{DR}(M,\mathbb{C}),$$

do qual segue que, como o espaço vetorial $H^{n-q}_{cDR}(M,\mathbb{C})$ tem dimensão finita,

$$H^{n-q}_{sc}(M,\mathbb{C}) \;\cong\; H^{n-q}_{cDR}(M,\mathbb{C}), \tag{DP5}$$

sendo que esse isomorfismo não é natural, uma vez que escolhas de bases estão envolvidas. Por (DP3) obtemos

$$H^s_q(M,\mathbb{C}) \;\cong\; H^{n-q}_{cDR}(M,\mathbb{C}). \tag{DP6}$$

Para explicar (DP6) vamos considerar $i : V \hookrightarrow M$, uma subvariedade complexa, compacta, de dimensão q. O dual de Poincaré de $[V] \in H^s_q(M,\mathbb{C})$ é obtido da seguinte maneira: dada uma q-forma fechada ω em M, seu *pull-back* a V, $i^*\omega$, pode ser integrado sobre V uma vez que esta é compacta. Agora, existe uma $(n-q)$-forma fechada com suporte compacto, η_V, caracterizada por

$$\int\limits_V \omega = \int\limits_M \omega \wedge \eta_V \qquad \forall\,\omega.$$

Além disso, η_V determina univocamente uma classe de cohomologia $[\eta_V] \in H^{n-q}_{cDR}(M,\mathbb{C})$, chamada de *dual compacto de Poincaré* de $[V]$.

Seja agora $i : V \hookrightarrow M$ uma subvariedade complexa, fechada (como subespaço topológico de M), $\dim_{\mathbb{C}} V = q$. Associamos a V uma classe de cohomologia $[\eta'_V] \in H^{n-q}_{DR}(M,\mathbb{C})$, determinada de modo único, da seguinte maneira: se ω é uma q-forma fechada em M, com suporte compacto, então seu *pull-back* a V, $i^*\omega$, também tem suporte compacto (pois V é fechada) e, portanto, $\int_V i^*\omega$ tem sentido. Logo, temos um funcional linear

$$H^q_{cDR}(M,\mathbb{C}) \ni [\omega] \xmapsto{\quad \int_V \quad} \int_V i^*\omega$$

e, uma vez que $(H^q_{cDR}(M,\mathbb{C}))^* \cong H^{n-q}_{DR}(M,\mathbb{C})$ (por (DP4)), ao funcional $\int_V$ corresponde uma única classe $[\eta'_V] \in H^{n-q}_{DR}(M,\mathbb{C})$, chamada de *dual fechado de Poincaré* de V. Temos que η'_V é caracterizada por

$$\int_V i^*\omega \;=\; \int_M \omega \wedge \eta'_V \qquad \forall\,[\omega] \in H^q_{cDR}(M,\mathbb{C}).$$

Portanto, se V é compacta, o dual compacto de Poincaré de V, $[\eta_V]$, coincide com o dual fechado de Poincaré de V, $[\eta'_V]$, ou seja, a aplicação natural

$$H^{n-q}_{cDR}(M,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-q}_{DR}(M,\mathbb{C})$$

envia $[\eta_V]$ em $[\eta'_V]$. Em outras palavras, podemos sempre supor que o dual fechado de Poincaré de uma subvariedade compacta tem suporte compacto. Além disso, se $U \subset M$ é um aberto, contendo a subvariedade compacta V e, se $[\eta_{V,U}] \in H^{n-q}_{cDR}(U,\mathbb{C})$ é o dual compacto de Poincaré de V em U, então, estendendo $\eta_{V,U}$ como 0 a M, obtemos uma forma $\tilde{\eta}_V$ que é o dual compacto de Poincaré de V em M pois

$$\int_V i^*\omega = \int_U \omega \wedge \eta_{V,U} = \int_M \omega \wedge \tilde{\eta}_V,$$

e η_V é caracterizada por tal propriedade. Resumindo, o suporte do dual compacto de Poincaré de V pode ser concentrado numa vizinhança aberta arbitrária de V. Esse é um sintoma do chamado *princípio de localização.*

Capítulo 2

Fibrados vetoriais

2.1 Definições

No que segue, por espaço topológico entendemos um espaço de Hausdorff, com base enumerável e conexo.

Definição 2.1.1 Seja X um espaço topológico. Um *fibrado vetorial* real de *posto* n sobre X é um espaço topológico E juntamente com uma *projeção* contínua $E \xrightarrow{\pi} X$ satisfazendo:

(i) $\pi^{-1}(x) := E_x$ (a fibra de E sobre $x \in X$) tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão n, $\forall x \in X$.

(ii) existem uma cobertura de X por abertos, $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, e homeomorfismos

$$\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

tais que $\forall \alpha \in A$, se $x \in U_\alpha$, então

$$\Theta_{\alpha x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais reais.

E é chamado de *espaço total* do fibrado, X é chamado de *base* do fibrado e as Θ_α são chamadas de *trivializações locais* de E.

Definição 2.1.2 Uma *seção* de $E \xrightarrow{\pi} X$ é uma aplicação contínua $s : X \to E$ tal que $(\pi \circ s)(x) = x$ $\forall x \in X$, ou seja, $s(x) \in E_x$.

Exemplo 2.1.3 O fibrado trivial sobre X, denotado por $\underline{\mathbb{R}^n}$, é definido por

$$\begin{array}{c} \underline{\mathbb{R}^n} = X \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \pi \\ X \end{array} ,$$

onde $\pi(x,v) = x$. Se $f : X \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$, então seu gráfico $s(x) = (x, f(x))$ é uma seção de $\underline{\mathbb{R}^n}$. Reciprocamente, uma seção $s : X \to \underline{\mathbb{R}^n}$ define uma função $f : X \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.4 TM e TM^* são exemplos de fibrados vetoriais. Seções desses fibrados são campos de vetores e 1-formas diferenciais, respectivamente.

Se $s : X \to E$ é uma seção de E, então

$$\begin{array}{rcccl} \Theta_\alpha \circ s|_{U_\alpha} : & U_\alpha & \longrightarrow & U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \\ & x & \longmapsto & \Theta_\alpha(s(x)) & = (x, S_\alpha(x)) \end{array}$$

é o gráfico de $S_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Logo, seções são localmente funções a valores em $\mathbb{R}^n$.

Sejam $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado de posto n, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura trivializadora e $\{\Theta_\alpha\}$ trivializações locais de E. Dado $x \in U_\alpha$, $\Theta_{\alpha\,x} : E_x \to \mathbb{R}^n$ é a restrição de $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^n$ a E_x. Denotando $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, definimos

$$\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \text{ por } \Theta_{\alpha\beta}(x) = \Theta_{\alpha\,x}\Theta_{\beta\,x}^{-1}.$$

Diagramaticamente

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\Theta_\beta} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\Theta_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & & \longmapsto & & (x, \Theta_{\alpha\,\beta}(x)v). \end{array}$$

As $\Theta_{\alpha\,\beta}$ são contínuas e satisfazem a *condição de cociclo* (produto em $GL(n, \mathbb{R})$)

$$\Theta_{\alpha\,\beta}\Theta_{\beta\,\gamma}\Theta_{\gamma\,\alpha} = I \text{ em } U_{\alpha\,\beta\,\gamma} \text{ e } \Theta_{\alpha\,\beta} = \Theta_{\beta\,\alpha}^{-1}. \qquad (I)$$

As $\Theta_{\alpha\,\beta}$ são chamadas de *funções de transição* de E. Observe que, se s é uma seção de E, então

$$\Theta_{\alpha\,\beta} S_\beta = S_\alpha. \qquad (II)$$

Definição 2.1.5 Sejam E e F fibrados vetoriais sobre X. Um *morfismo* $\varphi : E \to F$ é uma aplicação contínua tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ X & \xrightarrow[Id]{} & X \end{array}$$

e $\varphi_{|E_x} : E_x \to F_x$ é linear $\forall x \in X$. Se φ é uma bijeção e φ^{-1} é um morfismo, então φ é chamada de *isomorfismo.*

Vamos examinar esse conceito mais detalhadamente. Suponha que E e F são fibrados sobre X e que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura trivializadora comum a E e a F. Sejam $\{\Theta_\alpha\}$ e $\{\eta_\alpha\}$ as trivializações de E e F, respectivamente. Se φ é um morfismo de E em F, então φ induz $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ dada por

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\Theta_\alpha} & \pi_E^{-1}(U_\alpha) \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \varphi \\ U_\alpha \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow[\eta_\alpha]{} & \pi_F^{-1}(U_\alpha) \end{array} \qquad \varphi_\alpha = \eta_\alpha \circ \varphi \circ \Theta_\alpha^{-1}.$$

Agora, φ_α se expressa na forma $\varphi_\alpha(x,v) = (x, a_\alpha(x)v)$. Daí vem que $a_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{C^0} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ satisfaz

$$\eta_{\alpha\beta} a_\beta = a_\alpha \Theta_{\alpha\beta} \qquad \forall\, \alpha, \beta. \tag{III}$$

De fato, considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\Theta_\beta} & \pi_E^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\Theta_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\ \varphi_\beta \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_\alpha \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow[\eta_\beta]{} & \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow[\eta_\alpha]{} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(x,v) &= \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \Theta_\alpha \circ \Theta_\beta^{-1}(x,v) \\ \Longrightarrow\ \eta_\alpha \circ \eta_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta(x,v) &= \varphi_\alpha \circ \Theta_\alpha \circ \Theta_\beta^{-1}(x,v) \\ \Longrightarrow\ (x, \eta_{\alpha\beta}(x) a_\beta(x) v) &= (x, a_\alpha(x) \Theta_{\alpha\beta}(x) v). \end{aligned}$$

Reciprocamente, uma família $a_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{C^0} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ determina um morfismo de E em F desde que

$$\eta_{\alpha\beta} a_\beta = a_\alpha \Theta_{\alpha\beta} \text{ em } U_{\alpha\beta}\ , \ \forall \alpha, \beta. \qquad (III)$$

Observe que E é isomorfo ao fibrado trivial $\underline{\mathbb{R}^n}$ se, e somente se, existem $a_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{C^0} GL(n, \mathbb{R})$ tais que $a_\beta = a_\alpha \Theta_{\alpha\beta}$ em $U_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta$.

Uma descrição alternativa (e útil) de fibrados vetoriais é a seguinte:

Exercício 1 Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Suponha dadas, em $U_{\alpha\beta}$, $\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(n, \mathbb{R})$ contínuas satisfazendo $\Theta_{\alpha\beta}\Theta_{\beta\gamma}\Theta_{\gamma\alpha} = I$ em $U_{\alpha\beta\gamma}$ e $\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\beta\alpha}^{-1}$ em $U_{\alpha\beta}$ (note que $\Theta_{\alpha\alpha} = I$). Seja $\mathcal{F} = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ (união disjunta com a topologia óbvia) e defina a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{F}$:

$$(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v) \iff x = y\,, \quad \Theta_{\alpha\beta}(x) v = u \quad \text{e } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset.$$

O quociente $\mathcal{F}/\sim$ tem a estrutura de um fibrado vetorial real de posto n sobre X, único a menos de isomorfismo, cujas funções de transição são as $\Theta_{\alpha\beta}$.

Freqüentemente, fibrados são construídos a partir de uma família de funções de transição.

Em tudo o que foi feito acima, se trocarmos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ obtemos a noção de fibrado vetorial complexo. Além disso, se X é uma variedade complexa e as trivializações forem de classe C^∞ ou holomorfas, teremos fibrados complexos C^∞ ou holomorfos.

2.2 Algumas construções envolvendo fibrados

2.2.1 O produto tensorial

Se E e E' são fibrados vetoriais sobre X, de postos n e m respectivamente, seu *produto tensorial* $E \otimes E'$ é o fibrado cuja fibra sobre $x \in X$ é $E_x \otimes E'_x$. As funções de transição de $E \otimes E'$ são

$$\Theta_{\alpha\beta}(x) \otimes \Theta'_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m.$$

Note que se E e E' têm posto 1, então esses cociclos de transição são simplesmente o produto $\Theta_{\alpha\beta}\Theta'_{\alpha\beta}$.

2.2.2 Subfibrados, quocientes e determinantes

Se $E \xrightarrow{\pi} X$ é um fibrado vetorial, um *subfibrado* consiste em um subconjunto $F \subset E$ tal que a projeção π e as trivializações locais de E dão a F uma estrutura de fibrado vetorial real. Dado um subfibrado F de E, as fibras F_x são subespaços de E_x e o *fibrado quociente* E/F é formado tomando por fibras E_x/F_x. Mais precisamente, seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura trivializadora de E. Temos um diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\Theta_\beta} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\Theta_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & \underset{\eta_\beta}{\longleftarrow} & \pi^{-1}_{|F}(U_{\alpha\beta}) & \underset{\eta_\alpha}{\longrightarrow} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m, \end{array}$$

onde as flechas verticais são inclusões. Assim sendo, temos que $(x,v) \mapsto (x, \Theta_{\alpha\beta}(x)v)$ e que $(x,v) \mapsto (x, \eta_{\alpha\beta}(x)v)$. Agora, $\forall\ v \in \mathbb{R}^m$ essas duas aplicações coincidem e, portanto, $\Theta_{\alpha\beta}(x)_{|\mathbb{R}^m} = \eta_{\alpha\beta}(x)$. Logo, $\Theta_{\alpha\beta}$ se expressa na forma

$$\Theta_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta}(x) & \rho_{\alpha\beta}(x) \\ 0 & \zeta_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix}.$$

Considere uma seqüência exata curta $0 \to \mathbb{R}^m \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m \to 0$ (T linear). Isso nos permite definir o fibrado quociente E/F da seguinte maneira: um vetor $w \in \mathbb{R}^n$ se escreve $w = v + u$, $v \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^{n-m}$. Então $\Theta_{\alpha\beta}(x)(v,u) = (\eta_{\alpha\beta}(x)v + \rho_{\alpha\beta}(x)u, \zeta_{\alpha\beta}(x)u)$ e, como $\eta_{\alpha\beta}(x)v + \rho_{\alpha\beta}(x)u \in \mathbb{R}^m$, a classe de $\Theta_{\alpha\beta}(x)(v,u)$ no quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^m$ coincide com a classe de $\zeta_{\alpha\beta}(x)u$. O fibrado E/F é definido pelos cociclos de transição $\zeta_{\alpha\beta}$. O *fibrado determinante* de E é o fibrado $\det E = \bigwedge^n E$, cuja fibra é $\bigwedge^n E_x$. Seus cociclos de transição são $\det \Theta_{\alpha\beta}$, de onde temos

$$\det \Theta_{\alpha\beta} = \det \eta_{\alpha\beta} \otimes \det \zeta_{\alpha\beta},$$

e concluímos que

$$\det E \cong \det F \otimes \det E/F.$$

Observe que obtivemos um isomorfismo, pois na argumentação acima está implícita a escolha de bases dos espaços vetoriais considerados.

Exercício 2 Se $0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata de fibrados vetoriais sobre X, isto é, $0 \longrightarrow F_x \longrightarrow E_x \longrightarrow G_x \longrightarrow 0$ é exata $\forall x \in X$, então f identifica F com um subfibrado de E e g induz um isomorfismo entre E/F e G.

2.2.3 Soma de Whitney

Se E e E' são fibrados vetoriais sobre X, de postos n e m respectivamente, a sua *soma direta* $E \oplus E'$ é o fibrado sobre X cuja fibra sobre cada $x \in X$ é $E_x \oplus E'_x$. Trivializações locais Θ_α e Θ'_α de E e E' (relativas à mesma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X) induzem trivializações locais de $E_x \oplus E'_x$ por

$$\Theta_\alpha \oplus \Theta'_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m.$$

Logo, os cociclos de transição de $E_x \oplus E'_x$ são dados por

$$(\Theta_{\alpha\beta} \oplus \Theta'_{\alpha\beta})(x) = \begin{pmatrix} \Theta_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & \Theta'_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m.$$

2.2.4 O fibrado dual

Recorde que uma aplicação linear $f : V \to W$ induz uma aplicação linear $f^T : W^* \to V^*$ definida por

$$\begin{array}{rcccccc} f^T : & W^* & \longrightarrow & V^* & & & \\ & \alpha & \longmapsto & f^T(\alpha) : & V & \to & \mathbb{R} \\ & & & & v & \mapsto & (\alpha \circ f)(v), \end{array}$$

cuja matriz é a transposta da matriz de f. Se $\Theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ é uma trivialização de E, então

$$(\Theta_\alpha^T)^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^*}$$

é, por definição, uma trivialização do *fibrado dual* E^*. Os cociclos de transição, relativamente aos de E, são

$$(\Theta_\alpha^T)^{-1}\Theta_\beta^T = \left((\Theta_\beta^T)^{-1}\Theta_\alpha^T\right)^{-1} = \left((\Theta_\alpha\Theta_\beta^{-1})^T\right)^{-1} = (\Theta_{\alpha\beta}^T)^{-1}.$$

Novamente, se o posto de E é 1, então os cociclos de transição de E^* são $\Theta_{\alpha\beta}^{-1}$.

2.2.5 CLB(X)

Suponha que E é um fibrado vetorial complexo de posto 1 sobre X. Seja $\{\Theta_\alpha\}$ a família de trivializações de E. Escolha funções contínuas $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ que não se anulam em ponto algum de U_α. Então as $\eta_\alpha = f_\alpha \Theta_\alpha$ constituem uma nova família de trivializações de E e os cociclos de transição estão relacionados por $\eta_{\alpha\beta} f_\beta = f_\alpha \Theta_{\alpha\beta}$ (veja (III)). Portanto, de 2.2.1 e 2.2.4, concluímos que as classes de isomorfismos de fibrados complexos de posto 1 sobre X formam um grupo abeliano, CLB(X), com a operação $(E, E') \mapsto E \otimes E'$, para a qual $E^{-1} = E^*$.

2.2.6 Imagem recíproca

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow\pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array},$$

onde f é contínua. f induz um fibrado sobre Y, $f^{-1}E$, chamado de *pull-back* ou *imagem recíproca* de E via f. Como conjunto, $f^{-1}E$ é o *produto fibrado* $Y \times_X E \subset Y \times E$ definido por

$$f^{-1}E = \{(y, e) : f(y) = \pi(e)\}.$$

Esse é o único subconjunto maximal de $Y \times E$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} Y \times E & \supset & f^{-1}E & \xrightarrow{p_2} & E \\ & & p_1\downarrow & & \downarrow\pi \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}.$$

Note que se E é trivial, $E = X \times \mathbb{C}^n$, então

$$f^{-1}E = \{(y, (x, v)) : x = f(y)\} \cong \{(y, v) : y \in Y\,,\ v \in \mathbb{C}^n\} = Y \times \mathbb{C}^n.$$

Logo, utilizando trivializações de E, concluímos que a fibra de $f^{-1}E$ sobre y é isomorfa a $E_{f(y)}$. Além disso, se tivermos uma composição $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, então $(f \circ g)^{-1}E \cong g^{-1}f^{-1}E$.

Exercício 3 Determine as funções de transição do fibrado $f^{-1}E$.

2.3 Alguns exemplos de fibrados holomorfos

2.3.1 $[V]$

Sejam M uma variedade complexa compacta e $V \subset M$ um conjunto analítico de codimensão 1. Cubra M por abertos U_i nos quais V é definido por $f_i{}^{-1}(0)$ ($f_i : U_i \to \mathbb{C}$, reduzida). Em U_{ij} temos a relação $f_i = \varphi_{ij} f_j$, onde φ_{ij} é holomorfa e não se anula em ponto algum. O fibrado de posto 1 $[V]$ é definido pelas funções de transição $\varphi_{ij} = f_i/f_j$. Observe que $[V]$ admite uma seção holomorfa s_V definida por V. De fato, sobre o aberto trivializador U_i temos

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\varphi_i} & [V]_{|U_i} \\ p_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & U_i & \end{array}$$

e a seção $s_V : U_i \to [V]_{|U_i}$ é dada pelo gráfico de f_i, $s_{V_{|U_i}}(z) = \varphi_i^{-1}(z, f_i(z))$. Além disso, os zeros de s_V definem V. Suponha agora V também definido por $g_i = 0$ em U_i. Então f_i/g_i não se anula em ponto algum de U_i e

$$\beta_{ij} = \frac{g_i}{g_j} = \frac{f_i}{f_j}\frac{\frac{f_j}{g_j}}{\frac{f_i}{g_i}} = \varphi_{ij}\frac{\frac{f_j}{g_j}}{\frac{f_i}{g_i}},$$

ou seja (veja (III)),

$$\frac{f_i}{g_i}\beta_{ij} = \varphi_{ij}\frac{f_j}{g_j}$$

e concluímos que o fibrado dado pelas φ_{ij} é isomorfo ao fibrado dado pelas β_{ij}. Assim sendo, a V fica associada a classe de isomorfismo do fibrado $[V]$.

2.3.2 O fibrado tautológico $\mathbb{L}^*$

Recorde que o *espaço projetivo complexo* de dimensão n, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, é o quociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ com respeito à relação de equivalência

$$z \sim w \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w.$$

A classe de z é denotada por $[z]$ ou $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ e a aplicação quociente $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é denotada por Q. Munimos $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ da topologia induzida por Q, o que o torna um espaço compacto. Além disso, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é uma variedade complexa para a qual adotamos o atlas $\{U_i, \varphi_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, $U_i = \{[z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : z_i \neq 0\}$, sendo as $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ definidas por

$$\varphi(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right),$$

onde " $\widehat{\ }$ " denota omissão. Para evitar notação excessivamente pesada, considere φ_0 e φ_j. Temos então

$$\begin{aligned}
\varphi_0(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) &= \left(\widehat{1}, \frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) = (x_1, \ldots, x_n),\\
\varphi_j(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) &= \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \widehat{1}, \frac{z_{j+1}}{z_j} \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right)\\
&= (y_1, \ldots, y_j, \widehat{1}, y_{j+1}, \ldots, y_n).
\end{aligned}$$

$U_{0j} \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_0{}^{-1}} U_{0j}$ tem a forma

$$\varphi_j \circ \varphi_0{}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right).$$

A derivada $D(\varphi_j \circ \varphi_0{}^{-1}) = \Theta_{j0}$ fornece um cociclo de transicão para o fibrado tangente holomorfo $T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $\Theta_{j0} : U_{0j} \to GL(n, \mathbb{C})$ e tem matriz

$$\Theta_{j0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{x_j^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{x_j} & 0 & \ldots & 0 & -\frac{x_1}{x_j^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_j} & \ldots & 0 & -\frac{x_2}{x_j^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{x_{n-1}}{x_j^2} & 0 & \ldots & \frac{1}{x_j} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{x_n}{x_j^2} & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{x_j} \end{pmatrix}.$$

Em particular, $\det \Theta_{j0} = (-1)^j (1/x_j)^{n+1} = (-1)^j (z_0/z_j)^{n+1}$. Mais geralmente, as funções de transição $D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = \Theta_{ij}$ satisfazem $\det \Theta_{ij} = (-1)^{i+j} (z_j/z_i)^{n+1}$.

Tome o fibrado trivial $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. O fibrado *tautológico* ou *universal* é o subfibrado de posto 1 de $\underline{\mathbb{C}^{n+1}}$ que consiste dos pares $([w], z) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{n+1}$ tais que z está na reta definida por $[w]$ (daí o nome):

$$\mathbb{L}^* = \{([w], z) : \exists t \in \mathbb{C} \text{ tal que } z = tw\}.$$

Nas coordenadas do aberto U_i, temos que

$$\mathbb{L}^*_{|U_i} = \{((z_0 : \ldots : z_n), t(z_0, \ldots, z_n)) \ ; \ t \in \mathbb{C}\}.$$

Os cociclos de transição são definidos por

$$\begin{array}{ccccc} U_{ij} \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\Theta_j} & \mathbb{L}^*_{|U_{ij}} & \xrightarrow{\Theta_i} & U_{ij} \times \mathbb{C} \\ ([z], t) & \longmapsto & & & (x, \Theta_{ij}([z])t). \end{array}$$

Agora, em U_{ij},

$$\left(\frac{z_0}{z_j},\ldots,\frac{z_i}{z_j},\ldots,1,\ldots,\frac{z_n}{z_j}\right) = \left(\frac{z_i}{z_j}\right)\left(\frac{z_0}{z_i},\ldots,1,\ldots,\frac{z_j}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i}\right)$$

e, portanto,

$$\Theta_{ij}([z]) = \frac{z_i}{z_j} \text{ em } U_{ij}.$$

2.3.3 O fibrado hiperplano $\mathbb{L}$

Seja H um hiperplano em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, isto é, $H = \{P(z) = 0\}$, onde $P : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ é um polinômio de grau 1, $P(0) = 0$. Por uma mudança linear de coordenadas, podemos supor $H = \{z_0 = 0\}$. Em U_i, $i \neq 0$, H é definido por $f_i = z_0/z_i = 0$. O fibrado $\mathbb{L}$, que representa a classe de isomorfismo dos fibrados da forma $[H]$, é definido pelas funções de transição

$$\varphi_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{\frac{z_0}{z_i}}{\frac{z_0}{z_j}} = \frac{z_j}{z_i} \text{ em } U_{ij}.$$

Exercício 4 Mostre que dois hiperplanos quaisquer definem fibrados isomorfos.

Observe que $\mathbb{L}$ é o dual de $\mathbb{L}^*$, pois $\varphi_{ij} = \Theta_{ij}^{-1}$. Agora, dado $d \in \mathbb{Z}$, o fibrado $\mathbb{L}(d)$ é definido por

$$\mathbb{L}(d) = \begin{cases} \mathbb{L}^{\otimes d} = \underbrace{\mathbb{L} \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}}_{d \text{ vezes}}, & \text{se d } \geq 0, \\ \mathbb{L}^{*\otimes -d} = \underbrace{\mathbb{L}^* \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^*}_{-d \text{ vezes}}, & \text{se d } \leq 0. \end{cases}$$

Seja agora $D = P^{-1}(0) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, onde $P : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ é um polinômio homogêneo de grau $d > 0$. Em U_i, D é dado por

$$P\left(\frac{z_0}{z_i},\ldots,1,\ldots,\frac{z_j}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i}\right) = \frac{1}{z_i^d}P(z_0,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_n) = 0$$

e, em U_j, através de

$$P\left(\frac{z_0}{z_j},\ldots,\frac{z_i}{z_j},\ldots,1,\ldots,\frac{z_n}{z_j}\right) = \frac{1}{z_j^d}P(z_0,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_n) = 0.$$

O fibrado $[D]$ é então dado pelos cociclos de transição

$$\psi_{ij} = \frac{\dfrac{P}{z_i^d}}{\dfrac{P}{z_j^d}} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^d.$$

Logo, $\psi_{ij} = (\varphi_{ij})^d$ e $[D] \cong \mathbb{L}(d)$. Segue de 2.3.1 que D é definido por uma seção de $[D]$.

2.3.4 O fibrado canônico K_M

Se M é uma variedade complexa, o *fibrado canônico* K_M de M é definido por $K_M = (\det T'M)^*$. Se $M = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, uma vez que os cociclos de transição de $\det T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ são

$$\det \Theta_{ij} = (-1)^{i+j} \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1},$$

temos que

$$(-1)^i \det \Theta_{ij} = \left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1} (-1)^j$$

e, por (III), $\det T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é isomorfo ao fibrado cujos cociclos de transição são $(z_j/z_i)^{n+1}$, ou seja, $\det T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{L}(n+1)$. Logo,

$$K_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \cong \mathbb{L}(n+1)^* \cong \mathbb{L}(-n-1).$$

2.3.5 O fibrado canônico K_V

Suponha que $V \hookrightarrow M$ é uma subvariedade da variedade complexa compacta M. O *fibrado normal* N_V de V em M é, por definição, o quociente

$$N_V = \frac{T'M_{|V}}{T'V}.$$

Logo, temos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow T'V \longrightarrow T'M_{|V} \longrightarrow N_V \longrightarrow 0$$

e, de 2.2.2, $(\det T'M)_{|V} \cong \det T'V \otimes \det N_V$. Como esses são fibrados de posto 1 concluímos

$$K_V \cong K_{M_{|V}} \otimes \det N_V.$$

Suponha agora que V tem codimensão 1. Então a fórmula anterior se lê $K_V \cong K_{M|V} \otimes N_V$. Tomando uma cobertura trivializadora suficientemente fina $\{U_i\}$, comum aos fibrados acima, temos que, em U_i, V é definida por $f_i = 0$ (pois é subvariedade de dimensão $n-1$) e $[V]$ é dado pelos cociclos de transição $\varphi_{ij} = f_i/f_j$. Agora, em U_{ij}, $f_i = \varphi_{ij} f_j$, o que acarreta $df_i = f_j\, d\varphi_{ij} + \varphi_{ij}\, df_j$ e, ao longo de V, $df_i = \varphi_{ij} df_j$. Por outro lado, em $U_i \cap V$, $T'V$ é definido pelo núcleo de df_i e, portanto, df_i define uma seção holomorfa do dual N_V^*, que não se anula em ponto algum pois V é subvariedade. Seja $\zeta_i : \pi^{-1}(U_i \cap V) \to U_i \cap V \times \mathbb{C}$ uma trivialização local de N_V^* e ponha $S_i = \zeta_i df_i$. Então, $\zeta_i^{-1} S_i = \varphi_{ij} \zeta_j^{-1} S_j$, ou seja, $S_i = \zeta_i \zeta_j^{-1} \varphi_{ij} S_j = \zeta_{ij} \varphi_{ij} S_j$, e por (I) concluímos que as df_i definem uma seção holomorfa global de $N_V^* \otimes [V]_{|V}$ que não se anula em ponto algum. Logo, $N_V^* \otimes [V]_{|V}$ é isomorfo ao fibrado trivial e, portanto, $N_V \cong [V]_{|V}$. Obtivemos a *fórmula de adjunção*

$$K_V \cong K_{M|V} \otimes [V]_{|V}.$$

Exercício 5 Suponha que E é um fibrado vetorial holomorfo de posto n sobre M. Se E admite n seções holomorfas linearmente independentes, então E é holomorficamente isomorfo ao fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}^n}$.

Capítulo 3

Classes de Chern

3.1 Conexões

Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial complexo C^∞ de posto n. Se $U \subset M$ é aberto, recorde que denotamos por $\mathcal{A}^0(U)$ a $\mathbb{C}$-álgebra $C^\infty(U, \mathbb{C})$, por $\mathcal{A}^p(U)$ o $\mathcal{A}^0(U)$-módulo de p-formas complexas C^∞ sobre U, por

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \mathcal{A}^p(U)$$

a álgebra graduada de formas diferenciais complexas C^∞ sobre U. Denote por $\mathcal{A}^p(U, E)$ o $\mathcal{A}^0(U)$-módulo $C^\infty(U, \bigwedge^p TM^{\mathbb{C}*} \otimes E)$. Note que $\mathcal{A}^0(U, E)$ é o módulo de seções C^∞ de E sobre U.

Definição 3.1.1 Uma *conexão* em E é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\nabla : \mathcal{A}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, E)$$

satisfazendo a *regra de Leibniz*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \quad \forall\, f \in \mathcal{A}^0(M), \quad s \in \mathcal{A}^0(M, E).$$

Antes de mais nada, observe que esse é um conceito local, ou seja, se uma seção s é identicamente nula num aberto U então $\nabla(s) = 0$. De fato, dado $x \in U$, tome uma função $\rho \in \mathcal{A}^0(U)$ com suporte compacto e que vale 1 numa vizinhança $V \subset U$ de x. Então, $d\rho \otimes s + \rho\nabla(s) = \nabla(\rho s) = 0$ nos diz que $\nabla(s)$ se anula em V. Esse caráter local de uma conexão nos possibilita restringi-la a abertos de M e, além disso, se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de M, então uma conexão ∇ em E fica completamente determinada por suas restrições $\nabla_{|U_\alpha}$. Também vale o

Lema 3.1.2 *Existem conexões.*

Demonstração: Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M, trivializadora de ambos $TM^{\mathbb{C}}$ e E. Para cada α, escolha $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ um referencial de $E_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, isto é, $s_i^\alpha \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ e, para cada $x \in U_\alpha$, $\{s_1^\alpha(x), \ldots, s_n^\alpha(x)\}$ é uma base de E_x. Seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Defina ∇^α em U_α por $\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = 0$, $\forall i$ (note que $\nabla^\alpha(fs_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha$) e estenda ∇^α a seções arbitrárias sobre U_α utilizando a definição de conexão. Então,

$$\nabla = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha$$

é uma conexão em E. Note que $\nabla(fs) = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha(fs) = \sum_\alpha \rho_\alpha\, df \otimes s$. $\square$

Exercício 1 Mostre que a derivada exterior $d : \mathcal{A}^0(M, \underline{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M, \underline{\mathbb{C}})$ é uma conexão sobre o fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}$.

Mantendo as notações de 3.1.2 temos que, no aberto U_α, ∇ se expressa através do referencial s^α por

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha,$$

onde as θ_{ij}^α são 1-formas C^∞ sobre U_α. A matriz de 1-formas $\theta^\alpha = [\theta_{ij}^\alpha]$ é, por definição, a matriz de ∇ em U_α. Se s^α e s^β são referenciais sobre U_α e U_β, respectivamente, então, em $U_{\alpha\beta}$, eles estão relacionados por uma matriz invertível $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ tal que $s_i^\alpha = \sum_j g_{ij} s_j^\beta$, com $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \xrightarrow{C^\infty} GL(n, \mathbb{C})$. Daí vem que, denotando $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\tilde{g}_{ij}]$,

$$\begin{aligned}
\sum_\ell \theta_{i\ell}^\alpha \otimes s_\ell^\alpha &= \nabla(s_i^\alpha) = \sum_j dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_j g_{ij} \nabla(s_j^\beta) \\
&= \sum_j dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_j g_{ij} \left(\sum_k \theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta \right) \\
&= \sum_j dg_{ij} \otimes \sum_\ell \tilde{g}_{j\ell} s_\ell^\alpha + \sum_j g_{ij} \sum_k \theta_{jk}^\beta \otimes \sum_\ell \tilde{g}_{k\ell} s_\ell^\alpha \\
&= \sum_\ell \left(\sum_j dg_{ij} \tilde{g}_{j\ell} \right) \otimes s_\ell^\alpha + \sum_\ell \left(\sum_{j,k} g_{ij} \theta_{jk}^\beta \tilde{g}_{k\ell} \right) \otimes s_\ell^\alpha
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}. \qquad (IV)$$

Uma vez dada uma conexão ∇ em E, estendemos tal noção definindo um operador de caráter local (também denotado por ∇)

$$\nabla : \mathcal{a}^1(M,E) \longrightarrow \mathcal{a}^2(M,E),$$

exigindo que

$$\nabla(\omega\otimes s) = d\omega\otimes s - \omega\wedge\nabla(s) \quad \text{(regra de Leibniz)},$$

onde $\omega \in \mathcal{a}^1(M)$ e $s \in \mathcal{a}^0(M,E)$ (o sinal menos é natural, uma vez que ω é uma 1-forma).

Exercício 2 Mostre que $\nabla(f(\omega\otimes s)) = df\wedge(\omega\otimes s) + f\nabla(\omega\wedge s)$, onde $f \in \mathcal{a}^0(M)$.

Definição 3.1.3 A *curvatura* da conexão ∇ é $K_\nabla = \nabla\circ\nabla$.

Observe que

$$\nabla(\nabla(fs)) = \nabla(df\otimes s + f\nabla(s)) = 0 - df\wedge\nabla(s) + df\wedge\nabla(s) + f\nabla(\nabla(s)).$$

Isso nos diz que $K_\nabla(fs) = fK_\nabla(s)$, ou seja, K_∇ é $\mathcal{a}^0(M)$-linear. Por outro lado, o valor de $K_\nabla(s)$ num ponto $x \in M$ depende apenas do valor da seção s em x, e não dos valores de s em pontos em qualquer vizinhança de x. De fato, se $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ é um referencial local de E sobre U_α, com $x \in U_\alpha$ e s, s' são duas seções tais que $s(x) = s'(x)$, então $s - s' = \sum_i f_i s_i^\alpha$ em U_α com $f_i(x) = 0$, e daí $K_\nabla(s-s') = K_\nabla(s) - K_\nabla(s') = K_\nabla\left(\sum_i f_i s_i^\alpha\right) = \sum_i f_i K_\nabla(s_i^\alpha)$ se anula em x. Portanto, K_∇ é um tensor, chamado de tensor de curvatura da conexão ∇. Ainda em termos de um referencial local temos

$$\begin{aligned}
K_\nabla(s_i^\alpha) &= \nabla(\nabla(s_i^\alpha)) = \nabla\left(\sum_j \theta_{ij}^\alpha\otimes s_j^\alpha\right)\\
&= \sum_j d\theta_{ij}^\alpha\otimes s_j^\alpha - \sum_j \theta_{ij}^\alpha\wedge\nabla(s_j^\alpha)\\
&= \sum_j d\theta_{ij}^\alpha\otimes s_j^\alpha - \sum_j \theta_{ij}^\alpha\wedge\sum_k \theta_{jk}^\alpha\otimes s_k^\alpha\\
&= \sum_k d\theta_{ik}^\alpha\otimes s_k^\alpha - \sum_k\left(\sum_j \theta_{ij}^\alpha\wedge\theta_{jk}^\alpha\right)\otimes s_k^\alpha.
\end{aligned}$$

Assim sendo, K_∇ é dada localmente pela matriz $n \times n$ de 2-formas C^∞

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha,$$

onde $\Theta^\alpha_{ij} = d\theta^\alpha_{ij} - \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}$.

As matrizes da curvatura gozam da seguinte propriedade: sejam s^α e s^β referenciais locais sobre U_α e U_β respectivamente, relacionados através de $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$, com $g^{-1}_{\alpha\beta} = [\tilde{g}_{ij}]$. Então, em $U_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} K_\nabla(s^\alpha_i) &= K_\nabla\left(\sum_j g_{ij} s^\beta_j\right) = \sum_j g_{ij} K_\nabla(s^\beta_j) \\ &= \sum_j g_{ij} \sum_k \Theta^\beta_{jk} \otimes s^\beta_k = \sum_{j,k} g_{ij} \Theta^\beta_{jk} \otimes s^\beta_k \\ &= \sum_{j,k} g_{ij} \Theta^\beta_{jk} \otimes \sum_\ell \tilde{g}_{k\ell} s^\alpha_\ell \\ &= \sum_{j,k,\ell} g_{ij} \Theta^\beta_{jk} \tilde{g}_{k\ell} \otimes s^\alpha_\ell, \end{aligned}$$

isto é,

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g^{-1}_{\alpha\beta}. \qquad (V)$$

3.2 Polinômios invariantes

Seja $M(n, \mathbb{C})$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Definição 3.2.1 Um *polinômio invariante* sobre $M(n, \mathbb{C})$ é uma função

$$P : M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é polinomial nas entradas de uma matriz e satisfaz

$$P(g^{-1} A g) = P(A), \quad \forall\, A \in M(n, \mathbb{C}),\ \forall\, g \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Exercício 3 Mostre que são equivalentes:

(i) $P(g^{-1} A\, g) = P(A)$, $\forall\, A \in M(n, \mathbb{C})$ e $\forall\, g \in GL(n, \mathbb{C})$.

(ii) $P(XY) = P(YX)$, $\forall\, X, Y \in M(n, \mathbb{C})$.

Os exemplos básicos de tais polinômios são as funções simétricas elementares dos autovalores, ou seja, os polinômios C_i definidos por

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}(A)t^i.$$

Mais precisamente, $C_{n-i}(A) = \mathrm{tr}(\bigwedge^{n-i} A)$. Em particular, $C_n(A) = \det A$ e $C_1(A) = \mathrm{tr} A$.

Denotando por $I(n,\mathbb{C})$ a álgebra de polinômios invariantes, temos que essa é isomorfa a $\mathbb{C}[C_1,\ldots,C_n]$ (para uma demonstração veja [BoCo]).

Exercício 4 Mostre que uma série de potências formal $f(z_1,\ldots,z_n)$ simétrica, isto é, $f(z_{\tau(1)},\ldots,z_{\tau(n)}) = f(z_1,\ldots,z_n)$, para toda permutação τ de $\{1,\ldots,n\}$, é uma série de potências nas funções simétricas elementares $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, onde

$$\sigma_k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} z_{i_1}\ldots z_{i_k}.$$

Exercício 5 Mostre que uma função holomorfa $f : M(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, invariante por conjugação, ou seja, $f(g^{-1}Ag) = f(A)\ \forall g \in GL(n,\mathbb{C})$, é dada por uma série de potências nos polinômios elementares C_i.

Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ como acima, ∇ uma conexão em E e K_∇ a curvatura de ∇. Num aberto trivializador U_α, K_∇ é dada por uma matriz $n \times n$ de 2-formas Θ^α e, como 2-formas comutam entre si, tem sentido considerar $P(\Theta^\alpha)$, onde P é um polinômio invariante, e, além disso, como as matrizes de K_∇ satisfazem a relação crucial $\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$ em $U_{\alpha\beta}$, concluímos que

$$P(\Theta^\alpha) = P(g_{\alpha\beta}\Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta)$$

para qualquer polinômio invariante P. Daí vem que, se P tem grau k, então, definindo

$$P(K_\nabla)_{|U_\alpha} = P(\Theta^\alpha),$$

temos que $P(K_\nabla)$ é uma $2k$-forma global em M, independente de quaisquer trivializações de E. O nosso próximo passo é mostrar que tais formas descem a $H^*_{DR}(M,\mathbb{C})$.

Lema 3.2.2 *Se P é um polinômio invariante então $dP(K_\nabla) = 0$.*

Demonstração: Existem várias demonstrações desse lema fundamental (veja, por exemplo, [GH] ou [BoCo] para demonstrações de caráter geométrico). A que apresentamos é devida a J.Milnor e J.Stasheff [MS], e prima pela elegância. É puramente formal e válida não somente para polinômios, mas também para séries de potências formais.

Dado P, escreva $P(A) = P([a_{ij}])$ e olhe para a matriz de derivadas $B = [\partial P/\partial a_{ij}]$. Observe que

$$dP([a_{ij}]) = \sum_{i,j} \frac{\partial P}{\partial a_{ij}} da_{ij}.$$

A primeira identidade formal é

$$dP(A) = \operatorname{tr}(B^T dA), \tag{$\star$}$$

onde B^T é a transposta de B. De fato, $(B^T dA)_{ij} = \sum_k B^T_{ik} da_{kj}$, e então

$$\operatorname{tr}(B^T dA) = \sum_{i,k} B^T_{ik} da_{ki} = \sum_{i,k} \frac{\partial P}{\partial a_{ki}} da_{ki} = dP(A).$$

A segunda identidade formal é

$$AB^T = B^T A. \tag{$\star\star$}$$

Para ver isso note que, como P é invariante, pelo exercício 3, $P(XY) = P(YX)$. Considere a matriz $E_{ji} = [e_{rs}]$ onde $e_{rs} = \delta_{jr}\delta_{is}$ (trata-se da matriz que tem entrada 1 na posição (j,i) e 0 nas demais). Temos que

$$(E_{ji}A)_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq j \\ a_{is}, & \text{se } r = j \end{cases} \quad \text{e} \quad (AE_{ji})_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{se } s \neq i \\ a_{rj}, & \text{se } s = i. \end{cases}$$

Olhe para a identidade $P((I + tE_{ji})A) = P(A(I + tE_{ji}))$. Derivando em relação a t e avaliando em $t = 0$, obtemos

$$\sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (E_{ji}A)_{rs} = \sum_{r,s} \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (AE_{ji})_{rs},$$

o que fornece $(\star\star)$

$$\sum_s a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}} = \sum_r \frac{\partial P}{\partial a_{ri}} a_{rj}.$$

Tome um aberto trivializador U_α de E e sejam θ^α e $\Theta^\alpha = [\Theta^\alpha_{ij}]$ as matrizes de ∇ e de K_∇ em relação a um referencial sobre U_α. Então, denotando

$B = [\partial P/\partial\Theta^\alpha_{ij}]$ (observe que B é uma matriz cujas entradas são formas de grau par) temos, por $(\star)$,

$$dP(\Theta^\alpha) \;=\; \operatorname{tr}\left(B^T \wedge d\Theta^\alpha\right). \qquad (\star\star\star)$$

Vamos estudar o termo $B^T \wedge d\Theta^\alpha$. Em primeiro lugar, temos $\Theta^\alpha_{ij} = d\theta^\alpha_{ij} - \sum\limits_k \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}$, e daí

$$\begin{aligned}
d\Theta^\alpha_{ij} &= d\left(d\theta^\alpha_{ij} - \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj}\right) = -\sum_k d\theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge d\theta^\alpha_{kj} \\
&= -\sum_k (d\theta^\alpha_{ik} - \theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{ik}) \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge (d\theta^\alpha_{kj} - \theta^\alpha_{kj} \wedge \theta^\alpha_{kj}) \\
&= -\sum_k \Theta^\alpha_{ik} \wedge \theta^\alpha_{kj} + \sum_k \theta^\alpha_{ik} \wedge \Theta^\alpha_{kj},
\end{aligned}$$

ou seja, obtivemos a *identidade de Bianchi*,

$$d\Theta^\alpha \;=\; \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha.$$

Substituindo em $(\star\star\star)$, ficamos com

$$dP(\Theta^\alpha) \;=\; \operatorname{tr}(B^T \wedge (\theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)) \;=\; \operatorname{tr}(B^T \wedge \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - B^T \wedge \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha),$$

que, por $(\star\star)$, equivale a

$$dP(\Theta^\alpha) \;=\; \operatorname{tr}((B^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha))$$

e, portanto,

$$dP(\Theta^\alpha) \;=\; \sum_{i,k} \left((B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik} \wedge \Theta^\alpha_{ki} - \Theta^\alpha_{ki} \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik}\right).$$

Agora, Θ^α_{ki} é uma 2-forma, logo comuta com qualquer outra forma, do que concluímos que $dP(\Theta^\alpha) = 0$. □

3.3 Classes características

Acabamos de ver que, se P é um polinômio invariante de grau k, então $P(K_\nabla)$ define uma classe em $H^{2k}_{DR}(M, \mathbb{C})$. Nosso objetivo agora é mostrar que tal classe depende apenas da classe de isomorfismo do fibrado E, ou seja, não depende da conexão ∇.

Para demonstrar isso utilizaremos uma operação muito útil na cohomologia de De Rham, chamada de *integração ao longo das fibras*, a qual passamos a descrever na situação que nos interessa.

Considere o fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{p} M$. Localmente, uma forma diferencial C^∞ ω sobre $M \times \mathbb{R}^q$ se escreve como uma combinação linear de formas dos seguintes tipos:

$$\begin{cases} \text{Tipo (I)}: & \omega = f(x^\alpha, t)dt_I \wedge dx^\alpha_J, \text{ com } |I| < q, \\ \text{Tipo (II)}: & \omega = f(x^\alpha, t)dt_{I_q} \wedge dx^\alpha_J = f(x^\alpha, t)dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge dx^\alpha_J, \end{cases}$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_q)$, $dt_I = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $|I| = r$, $dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q$ determina a orientação de $\mathbb{R}^q$ e x^α são coordenadas locais em M. Definimos um operador linear $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{a}^*(M \times \mathbb{R}^q) \to \mathcal{a}^{*-q}(M)$ por

$$\begin{cases} \wp_*^{\Delta^q}\omega = 0, & \text{se } \omega \text{ é do tipo (I)}, \\ \wp_*^{\Delta^q}\omega = \left(\int\limits_{\Delta^q} f(x^\alpha, t)dt_{I_q}\right) dx^\alpha_J, & \text{se } \omega \text{ é do tipo (II)}, \end{cases}$$

onde Δ^q é o q-simplexo *standard*. Note que $\wp_*^{\Delta^q}$ abaixa em q unidades o grau de uma forma. Seja $i : \partial(M \times \Delta^q) \to M \times \Delta^q$ a inclusão. Então temos a

Proposição 3.3.1 $\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*$.

Demonstração: Começamos trabalhando as formas ω de tipo (I). Suponha $\omega = f(x^\alpha, t)dt_I \wedge dx^\alpha_J$, com $|I| < q-1$. Nesse caso, $d(\wp_*^{\Delta^q}\omega) = 0$ e $\wp_*^{\Delta^q}(d\omega) = 0$. Por outro lado, $i^*\omega = 0$ e a proposicão segue. Se $\omega = f(x^\alpha, t)dt_I \wedge dx^\alpha_J$, com $|I| = q - 1$ e, digamos, $dt_I = dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_q$, então

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^\alpha_k} dx^\alpha_k \wedge dt_I \wedge dx^\alpha_J + \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \wedge dt_I \wedge dx^\alpha_J \\ &= (-1)^{q-1} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x^\alpha_k} \wedge dt_I \wedge dx^\alpha_k \wedge dx^\alpha_J + (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge dx^\alpha_J \end{aligned}$$

e $\wp_*^{\Delta^q}(d\omega) = (-1)^{i-1} \left(\int\limits_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q\right) dx^\alpha_J$. Invocamos agora a versão combinatória do teorema de Stokes (veja [St, p.109]). Temos que

$$(-1)^{i-1} \int\limits_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \int\limits_{\Delta^q(j)} f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \cdots \wedge dt_q,$$

onde $\Delta^q(j)$ é a j-ésima face de Δ^q. Mas

$$\wp_*^{\partial\Delta^q}(i^*\omega) = \left(\sum_{j=0}^{q}(-1)^j \int\limits_{\Delta^q(j)} f(x^\alpha,t)dt_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dt_j}\wedge\cdots\wedge dt_q\right)dx_J^\alpha,$$

o que demonstra a proposição nesse caso.

Quanto às formas de tipo (II), se $\omega = f(x^\alpha,t)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\wedge dx_J^\alpha$, então $i^*\omega=0$ e o lado direito da igualdade se anula. O cálculo do lado esquerdo é o seguinte:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}dx_k^\alpha\wedge dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\wedge dx_J^\alpha \\ &= (-1)^q\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\wedge dx_k^\alpha\wedge dx_J^\alpha \end{aligned}$$

e daí

$$\wp_*^{\Delta^q}(d\omega) = (-1)^q\sum_k\left(\int\limits_{\Delta^q}\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\right)\wedge dx_k^\alpha\wedge dx_J^\alpha.$$

Já $d(\wp_*^{\Delta^q}) = d\left(\int\limits_{\Delta^q} f(x^\alpha,t)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\right)dx_J^\alpha$, o que fornece

$$d(\wp_*^{\Delta^q}) = \sum_k\left(\int\limits_{\Delta^q}\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha}dt_1\wedge\cdots\wedge dt_q\right)\wedge dx_k^\alpha\wedge dx_J^\alpha.$$

Portanto, $\wp_*^{\Delta^q}(d\omega)+(-1)^{q+1}d(\wp_*^{\Delta^q}\omega)=0$ e a proposição está demonstrada. □

Seja agora $E\xrightarrow{\pi}M$ um fibrado vetorial complexo de posto n sobre a variedade complexa M. Então

$$E\times\mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi\times id} M\times\mathbb{R}^q$$

define um fibrado vetorial sobre $M\times\mathbb{R}^q$ cuja fibra tem a mesma dimensão que a fibra de E. Tomando uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$, comum a E e $TM^{\mathbb{C}}$, e um referencial local $s^\alpha=(s_1^\alpha,\ldots,s_n^\alpha)$, temos que seções de $(E\times\mathbb{R}^q)_{|U_\alpha}\cong U_\alpha\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{C}^n$ se expressam na forma $(x^\alpha,t)\mapsto\sum_i f(x^\alpha,t)s_i^\alpha$, onde $t=(t_1,\ldots,t_q)$.

Tome $q+1$ conexões $\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q$ sobre E e considere a soma convexa

$$\nabla^{0,1,\ldots,q} = (1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_q)\nabla^0 + t_1\nabla^1 + \cdots + t_q\nabla^q.$$

$\nabla^{0,1,\ldots,q}$ define uma conexão sobre $E \times \mathbb{R}^q$, cuja matriz sobre U_α é

$$\theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} = (1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_q)\theta^{0,\alpha} + t_1\theta^{1,\alpha} + \cdots + t_q\theta^{q,\alpha}.$$

A curvatura $K_{\nabla^{0,1,\ldots,q}}$ em U_α é então dada por

$$\Theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} = d\theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} - \theta^{0,1,\ldots,q,\alpha} \wedge \theta^{0,1,\ldots,q,\alpha}.$$

Recorde que $I(n,\mathbb{C})$ denota a álgebra de polinômios invariantes. Defina

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q) : I(n,\mathbb{C}) \to \mathcal{a}^*(M)$$

por

$$\mathcal{P}(\nabla^0)(P) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} P(K_{\nabla^0}),$$

onde grP denota o grau de P, se $q = 0$, e por

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \ldots, \nabla^q) = (-1)^{[q/2]} \wp_*^{\Delta^q} \left(\mathcal{P}(\nabla^{0,1,\ldots,q})\right),$$

onde $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{a}^*(M \times \mathbb{R}^q) \to \mathcal{a}^{*-q}(M)$ é a integração ao longo das fibras.

Vamos examinar $\mathcal{P}$ detalhadamente no caso $q = 1$. Tudo se reduz simplesmente a

$$\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P) = \wp_*^{\Delta^1} \left(\mathcal{P}(\nabla^{0,1})(P)\right) = \wp_*^{\Delta^1} \left(\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} P(K_{\nabla^{0,1}}) \right).$$

Invocando o lema fundamental 3.2.2, temos que $dP(K_{\nabla^{0,1}}) = 0$ e, aplicando a proposição 3.3.1,

$$d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} d\left(\wp_*^{\Delta^1} P(K_{\nabla^{0,1}})\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} \wp_*^{\partial\Delta^1} \left(i^* P(K_{\nabla^{0,1}})\right).$$

Agora, pela versão combinatória do teorema de Stokes,

$$\wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^* = \sum_{j=0}^{1} (-1)^j \wp_*^{\Delta^1(j)} = i_0^* - i_1^*,$$

onde $i_j : M \to M \times [0,1]$ é a inclusão $i_j(x) = (x, j)$. Logo,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} (i_0^* P(K_{\nabla^{0,1}}) - i_1^* P(K_{\nabla^{0,1}})) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{grP} (P(K_{\nabla^0}) - P(K_{\nabla^1})) \\ &= \mathcal{P}(\nabla^0)(P) - \mathcal{P}(\nabla^1)(P). \end{aligned}$$

Em particular, as formas fechadas $P(K_{\nabla^0})$ e $P(K_{\nabla^1})$ diferem, a menos da constante $(i/(2\pi))^{grP}$, pela forma exata $d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P))$. Acabamos de demonstrar a

Proposição 3.3.2 *A classe* $[P(K_\nabla)] \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C})$ *independe da conexão* ∇ *sobre* E.

A classe $[P(K_\nabla)] = [P(E)]$ depende apenas da classe de isomorfismo (C^∞) de E e é chamada de *classe característica* de E.

Antes porém de discorrermos mais sobre o tema de classes características, retornamos à aplicação $\mathcal{P}$. A versão combinatória do teorema de Stokes fornece

$$\wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^* = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \wp_*^{\Delta^q(j)}$$

que, substituída na igualdade da proposição 3.3.1, nos dá

$$\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \wp_*^{\Delta^q(j)}.$$

Essa igualdade e o lema 3.2.2, que nos diz que a forma $\mathcal{P}(\nabla^{0,\dots,q})(P)$ é fechada, possibilitam mostrar que

Exercício 6 $\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$ é alternada em $\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q$.

Exercício 7

$$d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)(P)) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \mathcal{P}(\nabla^0, \dots, \widehat{\nabla^i}, \dots, \nabla^q)(P).$$

Retornando às classes características podemos resumir o que foi feito acima da seguinte maneira: se $I(n, \mathbb{C})$ é a álgebra graduada de polinômios invariantes e $E \xrightarrow{\pi} M$ é um fibrado vetorial complexo de posto n, obtivemos um homomorfismo de álgebras, chamado de homomorfismo de Weil,

$$\begin{array}{rcl} I(n,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2*}_{DR}(M,\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & [P(K)] \end{array},$$

onde K é a curvatura de qualquer conexão em E.

Definição 3.3.3 Sejam C_i, $i = 1,\ldots,n$, os polinômios simétricos elementares dos autovalores de uma matriz $n \times n$. As *formas de Chern* de uma curvatura K_∇ associada a uma conexão ∇ sobre E são

$$c_i(K_\nabla) = C_i\left(\frac{i}{2\pi}K_\nabla\right)$$

e as *classes de Chern* de E são $c_0(E) = 1$,

$$c_i(E) = \left[C_i\left(\frac{i}{2\pi}K\right)\right] \in H^{2i}_{DR}(M,\mathbb{C}).$$

$c(E) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_n(E)$ é a *classe de Chern total* de E.

Isso é um pequeno abuso, pois na realidade as classes de Chern $c_i(E)$ são definidas em $H^{2i}(M,\mathbb{Z})$. Porém, a chamada *teoria de Chern-Weil* nos diz que estamos falando essencialmente dos mesmos objetos. Agora, se M é uma variedade complexa, $c_i(M)$ denota a i-ésima classe de Chern do fibrado tangente holomorfo de M.

3.3.1 Propriedades das classes de Chern

1) *Naturalidade.* Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow\pi \\ N & \xrightarrow{f \in C^\infty} & M. \end{array} \qquad \text{Então } c_i(f^{-1}E) = f^*c_i(E).$$

Para ver isso, suponha que ∇ é uma conexão em E. A conexão $f^*\nabla$, induzida por ∇ em $f^{-1}E$, é definida da seguinte maneira: sejam $g_{\alpha\beta}$ os cociclos de transição de E, relativamente à cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$. Colocando $V_{\alpha\beta} = f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta)$, temos que $f^*g_{\alpha\beta}$ são os cociclos de transição de

$f^{-1}E$. $f^*\nabla_{|V_\alpha}$ é definida pela matriz de 1-formas $f^*\theta^\alpha$, onde θ^α é a matriz de ∇ em U_α. Observe que isso fornece de fato uma conexão, pois vale (IV),

$$f^*\theta^\alpha = d(f^*g_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta}\circ f)^{-1} + (g_{\alpha\beta}\circ f)f^*\theta^\beta(g_{\alpha\beta}\circ f)^{-1}.$$

Portanto, as curvaturas estão relacionadas por $K_{f^*\nabla} = f^*K_\nabla$ e o resultado segue.

2) *Fórmula de Whitney do produto.* Se $E \xrightarrow{\pi} M$ e $F \xrightarrow{\mathrm{p}} M$ são dois fibrados munidos das conexões ∇_E e ∇_F, então a soma $E\oplus F$ admite uma conexão natural $\nabla_{E\oplus F} = \nabla_E \oplus \nabla_F$, cuja curvatura tem matriz expressa localmente por $\Theta^\alpha_{E\oplus F} = \Theta^\alpha_E \oplus \Theta^\alpha_F$. Agora,

$$\det(tI + \Theta^\alpha_{E\oplus F}) = \det(tI+\Theta^\alpha_E)\det(tI+\Theta^\alpha_F).$$

Comparando os coeficientes de t correspondentes encontramos que

$$c(E\oplus F) = c(E)c(F).$$

Em particular,

$$\begin{aligned} c_1(E\oplus F) &= c_1(E)+c_1(F),\\ c_2(E\oplus F) &= c_2(E)+c_1(E)c_1(F)+c_2(F), \text{ etc.,} \end{aligned}$$

onde o produto é o induzido pelo produto exterior de formas.

3) *Classes de Chern do dual.* Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E^* \xrightarrow{\check{\pi}} M$ seu dual. Se $g_{\alpha\beta}$ são os cociclos de transição de E, então $\left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}$ são os de E^*. Dada uma conexão ∇ sobre E, suas matrizes locais estão relacionadas por (IV)

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta}g^{-1}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g^{-1}_{\alpha\beta}.$$

Transpondo essa igualdade obtemos

$$(\theta^\alpha)^T = \left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}dg^T_{\alpha\beta} + \left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}\left(\theta^\beta\right)^T g^T_{\alpha\beta}. \qquad (\star)$$

Como $d\left(\left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}\right) = -\left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}dg^T_{\alpha\beta}\left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}$, substituindo em $(\star)$ chegamos a

$$(\theta^\alpha)^T = -d\left(\left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}\right)g^T_{\alpha\beta} + \left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}\left(\theta^\beta\right)^T g^T_{\alpha\beta}.$$

Multiplique por -1,

$$(-\theta^\alpha)^T = d\left(\left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}\right)g^T_{\alpha\beta} + \left(g^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}\left(-\theta^\beta\right)^T g^T_{\alpha\beta}.$$

Ora, isso é (IV) para E^*, ou seja, podemos definir uma conexão ∇^* sobre E^* cuja matriz no aberto trivializador U_α é $(-\theta^\alpha)^T$. A matriz da curvatura de ∇^* em U_α é (lembre-se que θ^α é uma matriz de 1-formas)

$$\Theta^{*\alpha} = d\left((-\theta^\alpha)^T\right) - (-\theta^\alpha)^T \wedge (-\theta^\alpha)^T = -(d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T = -\Theta^{\alpha T}.$$

Agora, a transposição $A \mapsto A^T$ é obtida através de conjugação em $GL(n,\mathbb{C})$ e, portanto, $P^i(-\Theta^{\alpha T}) = (-1)^i P_i(\Theta^\alpha)$, pois P^i é homogêneo de grau i. Logo,

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E).$$

4) *Produtos tensoriais.* As classes se Chern de um produto tensorial de fibrados vetoriais são obtidas através das *raízes de Chern.* Não falaremos sobre isso, enviando o leitor interessado a [Hir]. Entretanto, faremos o cálculo explícito de $c_1(E \otimes L)$, onde $E \xrightarrow{\pi} M$ tem posto n e $L \xrightarrow{p} M$ é um fibrado em retas. Sejam $g_{\alpha\beta}$ e $h_{\alpha\beta}$ os cociclos de transição de E e L respectivamente. Como $h_{\alpha\beta}$ é uma função escalar, as transições locais de $E \otimes L$ são dadas pelo produto $\nu_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Sejam ∇_E e ∇_L conexões em E e L, cujas matrizes em relação a uma cobertura trivializadora comum são θ_E^α e θ_L^α (θ_L^α é uma 1-forma). Ambas satisfazem (IV), ou seja,

$$\begin{aligned}
\theta_E^\alpha &= dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta_E^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \\
\theta_L^\alpha &= dh_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1} + h_{\alpha\beta}\theta_L^\beta h_{\alpha\beta}^{-1}
\end{aligned}$$

Considere a matriz $\theta_E^\alpha + \theta_L^\alpha I_n$, onde I_n é a identidade $n \times n$. Então

$$\begin{aligned}
\theta_E^\alpha + \theta_L^\alpha I_n &= dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta_E^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + dh_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1}I_n + h_{\alpha\beta}\theta_L^\beta h_{\alpha\beta}^{-1}I_n \\
&= (dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + dh_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1}I_n) + (g_{\alpha\beta}\theta_E^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + h_{\alpha\beta}\theta_L^\beta h_{\alpha\beta}^{-1}I_n) \\
&= (dg_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}dh_{\alpha\beta}I_n)h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}(\theta_E^\beta + \theta_L^\alpha I_n)h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= d(g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta})h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}(\theta_E^\beta + \theta_L^\alpha I_n)h_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= d\nu_{\alpha\beta}\nu_{\alpha\beta}^{-1} + \nu_{\alpha\beta}(\theta_E^\beta + \theta_L^\alpha I_n)\nu_{\alpha\beta}^{-1}.
\end{aligned}$$

Essa última expressão é (IV) para a matriz de 1-formas $\theta_E^\alpha + \theta_L^\alpha I_n$. Portanto, essas definem uma conexão em $E \otimes L$ cuja curvatura é $K_{\nabla_E} + K_{\nabla_L} I_n$. Daí concluímos que

$$c_1(E \otimes L) = \operatorname{tr}\left(\frac{i}{2\pi}(K_{\nabla_E} + K_{\nabla_L} I_n)\right) = c_1(E) + nc_1(L).$$

Exercício 8 Mostre que $c_i(E \otimes L) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n-j}{i-j} c_j(E) c_1(L)^{i-j}$, $2 \leq i \leq n$.

3.3.2 Fibrados holomorfos de posto 1

Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e $L \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado holomorfo de posto 1.

Definição 3.3.4 $H = \{H_z\}_{z \in M}$ é uma *métrica hermitiana* em L se

(i) H_z é um produto interno hermitiano em L_z.

(ii) dados $U \subset M$ aberto e $s : U \to L_{|U}$ uma seção holomorfa, a função

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & H_z(s(z), s(z)) \end{array} \quad \text{é } C^\infty.$$

Suponha que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura trivializadora de L e que $\{g_{\alpha\beta}\}$ são os cociclos de transição (holomorfos) correspondentes. Se s^α é um referencial sobre U_α então $s^\alpha = g_{\alpha\beta} s^\beta$ e, fazendo $H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z))$ (note que $H_\alpha(z) > 0$), temos que

$$H_\alpha(z) \;=\; H(s^\alpha(z), s^\alpha(z)) \;=\; g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta} H(s^\beta(z), s^\beta(z)) \;=\; |g_{\alpha\beta}|^2 H_\beta(z),$$

ou seja, $H_\alpha = g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta} H_\beta$. Reciprocamente:

Lema 3.3.5 *Seja $\{H_\alpha\}$ uma coleção de funções C^∞ definidas em $\{U_\alpha\}$ satisfazendo $H_\alpha(z) > 0$ e $H_\alpha = g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta} H_\beta$. Então existe uma única métrica hermitiana em L tal que $H_\alpha(z) = H(s^\alpha(z), s^\alpha(z))$.*

A demonstração fica como exercício.

Uma conseqüência do dito acima é a seguinte: suponha que $\{H_\alpha\}$ é induzida por uma métrica hermitiana em L. Então, dado $k \in \mathbb{Z}$, a coleção $\{H_\alpha^k\}$ satisfaz às condições do lema relativamente às funções $g_{\alpha\beta}^k$. Portanto, $\{H_\alpha^k\}$ determina uma métrica hermitiana no fibrado L^k.

Um fibrado holomorfo munido de uma métrica hermitiana é chamado de *fibrado hermitiano*. Definimos uma conexão ∇_H num fibrado hermitiano L, chamada de *conexão métrica*, através da família de 1-formas de tipo $(1,0)$

$$\theta^\alpha \;=\; \partial \log H_\alpha$$

em cada aberto trivializador U_α. Para ver que isso define de fato uma conexão, observe que $\log H_\alpha = \log(g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta}H_\beta)$, do que deduzimos que vale (IV):

$$\partial \log H_\alpha = \partial \log(g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta}H_\beta) = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}} + \frac{\partial H_\beta}{H_\beta} = dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(\partial \log H_\beta)g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

A curvatura K_{∇_H} associada à conexão métrica é então dada pela 2-forma de tipo $(1,1)$

$$\Theta^\alpha \;=\; d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha \;=\; d\theta^\alpha = d\partial \log H_\alpha \;=\; \bar{\partial}\partial \log H_\alpha,$$

portanto, $c_1(K_{\nabla_H}) = \frac{i}{2\pi}K_{\nabla_H}$ e daí

$$c_1(L) \;=\; \left[\frac{i}{2\pi}K_{\nabla_H}\right] \;=\; \left[\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log H\right] \;\in\; H^2_{DR}(M,\mathbb{C}).$$

Sejam agora M compacta e $D \subset M$ uma subvariedade analítica de codimensão 1. Se $\{f_\alpha, U_\alpha\}$ são os dados locais que definem D, como em 2.3.1, então o fibrado $[D]$ é dado pelas transições $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta$. Vamos supor que o fibrado $[D] \xrightarrow{\pi} M$ admite uma métrica hermitiana H e seja K a curvatura da conexão métrica induzida por H.

Teorema 3.3.6 *$c_1([D])$ é o dual de Poincaré do ciclo definido por D.*

Demonstração: Seja ψ uma $(2n-2)$-forma fechada C^∞ em M. Devemos mostrar que $\int_M \left(\frac{i}{2\pi}K\right) \wedge \psi = \int_D \psi$. Como integração em variedades é um procedimento local, tomando uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de $[D]$, basta mostrar que $\int_{U_\alpha} \left(\frac{i}{2\pi}K\right) \wedge \psi = \int_{D\cap U_\alpha} \psi$. Seja e^α um referencial de $[D]$ sobre U_α e considere a seção $s_\alpha(z) = f_\alpha(z)e^\alpha$. Em U_α, a matriz da curvatura induzida pela conexão métrica é

$$\begin{aligned}\Theta^\alpha \;&=\; d\partial \log H_\alpha \;=\; d\partial \log H(s_\alpha(z), s_\alpha(z))\\ &=\; d\partial \log(f_\alpha \bar{f}_\alpha H(e^\alpha, e^\alpha)) \;=\; d\partial \log(f_\alpha \bar{f}_\alpha h_\alpha),\end{aligned}$$

onde $h_\alpha > 0$. Como ψ é fechada,

$$d\Big(\partial \log H(s_\alpha(z), s_\alpha(z)) \wedge \psi\Big) \;=\; d\partial \log H(s_\alpha(z), s_\alpha(z)) \wedge \psi \;=\; \Theta^\alpha \wedge \psi.$$

Tome a vizinhança tubular de $D \cap U_\alpha$ em M definida por $T_\alpha(\epsilon) = \{|s_\alpha(z)| < \epsilon\} \subset U_\alpha$. Então

$$\int_{U_\alpha} \Theta^\alpha \wedge \psi \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} \int_{U_\alpha \setminus T_\alpha(\epsilon)} \Theta^\alpha \wedge \psi \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} \int_{U_\alpha \setminus T_\alpha(\epsilon)} d\Big(\partial \log H_\alpha \wedge \psi\Big)$$

e, levando em conta o fato de que $\partial \log(f_\alpha \bar{f}_\alpha h_\alpha) = df_\alpha/f_\alpha + \partial h_\alpha/h_\alpha$, a orientação e invocando Stokes,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{U_\alpha \setminus T_\alpha(\epsilon)} d\Big(\partial \log H_\alpha \wedge \psi\Big) = -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial T_\alpha(\epsilon)} \frac{df_\alpha}{f_\alpha} \wedge \psi - \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial T_\alpha(\epsilon)} \frac{\partial h_\alpha}{h_\alpha} \wedge \psi.$$

Agora, a forma $(\partial h_\alpha/h_\alpha) \wedge \psi$ tem coeficientes limitados em U_α e $\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{vol}(\partial T_\alpha(\epsilon)) = 0$. Logo, $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial T_\alpha(\epsilon)} (\partial h_\alpha/h_\alpha) \wedge \psi = 0$ e nos resta calcular $-\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial T_\alpha(\epsilon)} (df_\alpha/f_\alpha) \wedge \psi$. Para fazer isso, seja $z_0 \in D \cap U_\alpha$. Existem uma vizinhança $V_{z_0} \subset U_\alpha$, imagem de um polidisco, e um sistema de coordenadas $(w_1, \ldots, w_n)$ em torno de z_0, tais que nessas coordenadas $f_\alpha = w_1$, ou seja, $V_{z_0} \cap D = \{w_1 = 0\}$ e, além disso, reduzindo ϵ, se necessário, $\partial T_\alpha(\epsilon) \cap V_{z_0} = \{|w_1| = \epsilon\}$. Escreva as coordenadas $(w_1, \ldots, w_n)$ na forma (w_1, w') e a forma ψ como $\psi = \psi(w) dw' \wedge d\overline{w}' + \mu$, onde μ contém termos envolvendo dw_1 ou $d\overline{w}_1$. Denotando por $\Delta(w')$ o polidisco óbvio, ficamos com

$$-\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial T_\alpha(\epsilon)\cap V_{z_0}} \frac{df_\alpha}{f_\alpha} \wedge \psi = -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Delta(w')} \int_{|w_1|=\epsilon} \frac{dw_1}{w_1} \wedge \psi(w) dw' \wedge d\overline{w}',$$

pois a integral envolvendo μ se anula, e

$$\begin{aligned} -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Delta(w')} \int_{|w_1|=\epsilon} \frac{dw_1}{w_1} \wedge \psi(w) dw' \wedge d\overline{w}' &= -2\pi i \int_{\Delta(w')} \psi(0, w') dw' \wedge d\overline{w}' \\ &= -2\pi i \int_{D\cap V_{z_0}} \psi. \end{aligned}$$

Concluímos que $\int_M K \wedge \psi = -2\pi i \int_D \psi$ e o teorema está demonstrado. □

Exemplo 3.3.7 *A classe de Chern de* $\mathbb{L}^*$.

Começamos estudando a *forma de Fubini-Study*. Em $\mathbb{C}^{n+1}$ tome o produto hermitiano usual $\langle (Z_0, \ldots, Z_n), (W_0, \ldots, W_n) \rangle = \sum_i Z_i \overline{W}_i$ e considere a projeção canônica $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Dado um aberto $U \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $U \neq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, seja $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1}$ um levantamento de U, isto é, uma aplicação holomorfa tal que $\pi \circ Z = id_U$. Considere a $(1,1)$-forma C^∞

$$\omega = -\frac{i}{2\pi} \bar{\partial}\partial \log |Z|^2 = \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log |Z|^2.$$

Se $W : V \to \mathbb{C}^{n+1}$ é um levantamento de V e $p \in U \cap V$, então, escrevendo $Z = (f_0, \ldots, f_n)$, $W = (g_0, \ldots, g_n)$, temos que $\pi Z(p) = \pi W(p)$ e, portanto, $(f_0(p), \ldots, f_n(p))$ e $(g_0(p), \ldots, g_n(p))$ se projetam sobre o mesmo ponto $p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Logo, existe uma função holomorfa λ em $U \cap V$ tal que $W = \lambda Z$, e então

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\log|W|^2 &= \partial\bar{\partial}\log|\lambda Z|^2 = \partial\bar{\partial}\log(\lambda\bar{\lambda}|Z|^2)\\ &= \partial\bar{\partial}\log|Z|^2 + \partial\bar{\partial}(\log\lambda + \log\bar{\lambda}) = \partial\bar{\partial}\log|Z|^2,\end{aligned}$$

pois $\partial\bar{\partial}(\log\lambda + \log\bar{\lambda}) = \partial\bar{\partial}\log\lambda - \bar{\partial}\partial\log\bar{\lambda} = 0$, já que λ é holomorfa. Portanto, ω é uma $(1,1)$-forma fechada global em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, chamada de forma de Fubini-Study. Uma expressão manuseável de ω é obtida tomando o aberto $U_0 = \{Z_0 \neq 0\}$ e o levantamento $Z(z_1, \ldots, z_n) = (1, z_1, \ldots, z_n)$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log(1 + \sum z_i\bar{z}_i)\\ &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i}{1 + \sum z_i\bar{z}_i} - \frac{(\sum \bar{z}_i dz_i) \wedge (\sum z_i d\bar{z}_i)}{(1 + \sum z_i\bar{z}_i)^2}\right).\end{aligned}$$

A forma de Fubini-Study define um produto hermitiano em $T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (fibrado tangente holomorfo) e, escrevendo $\omega = \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j} h_{ij}(z)dz_i \wedge d\bar{z}_j$, a matriz hermitiana $[h_{ij}]$ é a matriz desse produto.

Exercício 9 Mostre que

$$\int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \omega^n = \int_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ vezes}} = 1.$$

Passamos agora a $\mathbb{L}^*$. No aberto trivializador $U_i = \{Z_i \neq 0\}$, com coordenadas $[z] = (z_1, \ldots, z_i, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n)$, definimos o produto hermitiano H_i nas fibras por $H_i(([z], u), ([z], v)) = \langle u, v\rangle$, onde $\langle\,,\rangle$ é o produto hermitiano usual em $\mathbb{C}^{n+1}$. Isso quer dizer que

$$H_i(t(z_1, \ldots, z_i, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n), s(z_1, \ldots, z_i, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n)) = t\bar{s}\sum_{i=1}^{n}(1 + z_i\bar{z}_i).$$

Logo, em termos do referencial $s^i([z]) = (z_1, \ldots, z_i, 1, z_{i+1}, \ldots, z_n)$, o produto fica definido por $H_i = \sum_{i=1}^n (1 + z_i\bar{z}_i)$. Como as transições de $\mathbb{L}^*$ são $g_{ij} = z_i/z_j$, é imediato que $H_i = g_{ij}\bar{g}_{ij}H_j$. A conexão métrica é dada, em U_i, por

$$\theta^i = \partial\log\left(\sum_{i=1}^{n}(1 + z_i\bar{z}_i)\right)$$

e a curvatura por

$$\Theta^i = \bar{\partial}\partial \log\left(\sum_{i=1}^{n}(1+z_i\bar{z}_i)\right).$$

Assim sendo,

$$c_1(\mathbb{L}^*) = \left[\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log\left(\sum_{i=1}^{n}(1+z_i\bar{z}_i)\right)\right] \in H^2_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}).$$

Agora, $\mathbb{L}$ é o dual de $\mathbb{L}^*$ e sabemos que $c_1(\mathbb{L}) = -c_1(\mathbb{L}^*)$. Daí vem que

$$c_1(\mathbb{L}) = \left[\frac{-i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log\left(\sum_{i=1}^{n}(1+z_i\bar{z}_i)\right)\right] = \left[\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial} \log\left(\sum_{i=1}^{n}(1+z_i\bar{z}_i)\right)\right].$$

Mas essa é a forma de Fubini-Study ω e concluímos que $\mathsf{h} = [\omega] = c_1(\mathbb{L})$ é o dual de Poincaré de um hiperplano. h é chamada de *classe hiperplana.*

Terminamos esse exemplo calculando as classes de Chern de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Tal cálculo é imediato a partir da chamada *seqüência de Euler*, que é a seqüência exata natural

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{L}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0,$$

onde $\underline{\mathbb{C}}$ é o fibrado trivial de posto 1 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{L}^{\oplus(n+1)} = \underbrace{\mathbb{L} \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}}_{n+1 \text{ vezes}}$ e $T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é o fibrado tangente holomorfo. Observe que, dualizando a seqüência acima, obtemos

$$0 \longrightarrow T'\mathbb{P}^{n*}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{L}^{*\oplus(n+1)} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow 0.$$

Vamos explicar a seqüência de Euler. Tome a aplicação quociente $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e o aberto $U_0 = \{Z_0 \neq 0\}$, $Z = (Z_0, \ldots, Z_n)$, com $z_i = Z_i/Z_0$, $i = 1, \ldots n$, as coordenadas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ nessa carta local. Temos imediatamente que

$$\pi^* dz_i = \frac{Z_0 dZ_i - Z_i dZ_0}{Z_0^2}$$

e que

$$
\begin{aligned}
\pi_*(Z)\frac{\partial}{\partial Z_i} &= D\pi(Z)\frac{\partial}{\partial Z_i} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{Z_1}{Z_0^2} & \frac{1}{Z_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{Z_n}{Z_0^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{Z_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{i-ésima posição} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{Z_0}\dfrac{\partial}{\partial z_i}, & \text{se } i \neq 0 \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{Z_0^2}\frac{\partial}{\partial z_i}, & \text{se } i = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Portanto, no ponto $z = \pi(Z)$, $T'_z\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é gerado por $\pi_*(Z)\partial/\partial Z_i$, $i = 0, \ldots, n$, submetidos à relação de Euler

$$\pi_*(Z)\left(\sum_{i=0}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial Z_i}\right) = 0.$$

Além disso, se $\lambda : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear, então o campo $v(Z) = \lambda(Z)\partial/\partial Z_i$ induz um campo holomorfo em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, pois $\pi_* v(Z) = \pi_* v(tZ)$ $\forall\, t \in \mathbb{C}^*$, $\forall\, Z \in \mathbb{C}^{n+1}$. Mais geralmente, um campo de vetores homogêneo de grau 1 em $\mathbb{C}^{n+1}$ desce a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Agora, a fibra de $\mathbb{L}^*$ sobre $z = \pi(Z)$ é o subespaço gerado pelo vetor Z. Por dualidade, $\mathbb{L}_z = \langle Z\rangle^*_{\mathbb{C}}$. Uma seção de $\mathbb{L}^{\oplus n+1}$ é então dada por $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde os λ_i são funcionais lineares. Defina um morfismo de fibrados $\zeta : \mathbb{L}^{\oplus n+1} \to T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ por

$$\zeta(s) = \pi_*\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial Z_i}\right).$$

ζ é sobrejetiva, pois $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, \partial/\partial Z_i$ define um campo holomorfo em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e os $\pi_*(\partial/\partial Z_i)$ geram $T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Já o núcleo de ζ é o fibrado trivial sobre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, gerado pela seção $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$, uma vez que vale a relação de Euler. Com a seqüência

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{L}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

em mãos, temos uma decomposição C^∞

$$\mathbb{L}^{\oplus(n+1)} \cong T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}}.$$

Pela fórmula de Whitney do produto $c(\mathbb{L}^{\oplus(n+1)}) = (1+\mathsf{h})^{n+1}$ e $c(\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} \oplus \underline{\mathbb{C}}) = c(\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}})$. Logo, $1 + c_1(\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) + \cdots + c_n(\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) = (1+\mathsf{h})^{n+1}$ e

$$c_i(\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) = \binom{n+1}{i}\mathsf{h}^i.$$

3.4 Resíduos

3.4.1 O núcleo de Bochner-Martinelli

Apresentaremos brevemente esse conceito, necessário em demonstrações futuras.

Em $\mathbb{R}^m$, considere as formas $\omega_i = (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m$, $i = 1, \ldots, m$. Observe que $d\omega_i = \omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$, $\forall\, i$ e ponha

$$\phi_m = k_m \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i}{|x|^m},$$

onde k_m é uma constante a ser determinada. ϕ_m é uma forma fechada C^∞ em $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. De fato,

$$\begin{aligned} d\phi_m &= k_m\, d|x|^{-m} \wedge \textstyle\sum_{i=1}^m \omega_i + k_m |x|^{-m} \sum_{i=1}^m d\omega_i \\ &= k_m\, d|x|^{-m} \wedge \textstyle\sum_{i=1}^m \omega_i + k_m m |x|^{-m} \omega \end{aligned}$$

e, como $d|x|^{-m} = -m|x|^{-m-2}(x_1 dx_1 + \cdots + x_m dx_m)$, temos que

$$d|x|^{-m} \wedge \sum_{i=1}^m \omega_i = -m|x|^{-m-2}|x|^2 \omega,$$

e então $d\phi_m = -k_m m |x|^{-m} \omega + k_m m |x|^{-m} \omega \equiv 0$.

Segue do teorema de Stokes que, se $S_r^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ é a esfera de centro 0 e raio r, então $\int_{S_r^{m-1}} \phi_m$ não depende de r. Podemos assim escolher k_m de tal modo que $\int_{S_r^{m-1}} \phi_m = 1$. Além disso, ϕ_m fornece um gerador de $H_{DR}^{m-1}(S_r^{m-1})$.

Exercício 10 Mostre que k_m é dado por

$$k_m = \begin{cases} \dfrac{(q-1)!}{2\pi^q}, & \text{se } m = 2q \\[2ex] \dfrac{(2q)!}{2^m \pi^q q!}, & \text{se } m = 2q+1. \end{cases}$$

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ temos $\phi_2 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Se identificarmos $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$, então ϕ_{2n} se escreve como uma soma

$$\phi_{2n} = \frac{B_n + \overline{B_n}}{2},$$

onde

$$B_n = \ell_n \frac{\sum_{i=1}^n \overline{\omega_i(z)} \wedge \omega(z)}{|z|^{2n}},$$

sendo

$$\begin{aligned} \omega(z) &= dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \\ \overline{\omega_i(z)} &= (-1)^{i-1} \bar{z}_i d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{z}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n, \\ \ell_n &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}. \end{aligned}$$

B_n é uma $(n, n-1)$-forma fechada C^∞ em $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ chamada de *núcleo de Bochner-Martinelli*. Observe que B_n é uma forma real quando restrita a S_r^{2n-1} e que

$$\int_{S_r^{2n-1}} B_n = 1 \qquad \forall r > 0.$$

Por exemplo, em $\mathbb{C}$ temos $B_1 = (1/2\pi i)dz/z$.

O núcleo de Bochner-Martinelli fornece uma generalização da fórmula integral de Cauchy, sob o ponto de vista de bolas euclidianas. Para precisar isso note que B_n é uma $(n, n-1)$-forma fechada e que, se f é uma função holomorfa definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$, então

$$d(f\,B_n) = df \wedge B_n + f\,dB_n = 0$$

pois B_n é fechada e a parcela $df \wedge B_n$ se anula já que f é holomorfa. Tome agora uma bola euclidiana $B_r(0)$ centrada em 0, cujo fecho está contido no domínio de f. Dado $0 < \epsilon < r$, seja $B_\epsilon(0)$ a bola euclidiana de raio ϵ. Segue do teorema de Stokes que

$$0 = \int_{\overline{B_r(0)} \setminus B_\epsilon(0)} d(f\,B_n) = \int_{\partial B_r(0)} f\,B_n - \int_{\partial B_\epsilon(0)} f\,B_n,$$

ou seja,

$$\int_{\partial B_r(0)} f\,B_n = \int_{\partial B_\epsilon(0)} f\,B_n.$$

Mas, como B_n normaliza o volume das esferas,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\epsilon(0)} f\, B_n \;=\; f(0)$$

obtemos

$$\int\limits_{\partial B_r(0)} f\, B_n \;=\; f(0).$$

Mais geralmente, o *núcleo de Bochner-Martinelli* em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ é definido por

$$\begin{aligned} \beta_n(z,w) &= \ell_n \frac{\sum_{i=1}^n \overline{\omega_i(z-w)} \wedge \omega(w)}{|z-w|^{2n}} \\ &= \ell_n \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\overline{(z_i - w_i)} \wedge_{j\neq i} (\overline{dz_j} - \overline{dw_j}) \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n}{|z-w|^{2n}}. \end{aligned}$$

3.4.2 Resíduos de Grothendieck

Falaremos agora sobre resíduos de Grothendieck, uma generalização pontual da noção de resíduo de Cauchy em uma variável. Sejam $f_i : V \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, n funções holomorfas definidas em um aberto $0 \in V \subset \mathbb{C}^n$, satisfazendo $f_i(0) = 0$ para todo i e $f^{-1}(0) = \{0\}$ onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Sejam U uma bola euclidiana de centro 0 contida em V e $D_i = \{f_i = 0\} \cap U$, $U_i = U \setminus D_i$ e $U^* = U \setminus \{0\}$. Note que os U_i formam uma cobertura aberta de U^*. Vamos considerar n-formas meromorfas

$$\omega \;=\; \frac{g(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)},$$

onde g é holomorfa em V.

Definição 3.4.1 Seja Γ o n-ciclo real definido por $\Gamma = \{|f_i(z)| = \epsilon\}$ e munido da orientação dada por $d(arg f_1) \wedge \cdots \wedge d(arg f_n) \geq 0$. O *resíduo* de ω em 0 é

$$\mathrm{Res}_0\omega \;=\; \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{\Gamma} \frac{g(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)}.$$

O primeiro fato a se notar é o seguinte: a n-forma ω é holomorfa em $U \setminus \cup_i D_i$ e, portanto, $d\omega = 0$ nesse aberto. Daí vem que $\mathrm{Res}_0\omega$ depende apenas, por Stokes-Herrera ([Bun] ou [Her]), das classes $\Gamma \in H_n(U \setminus \cup_i D_i, \mathbb{Z})$ e $[\omega] \in H^n_{DR}(U \setminus \cup_i D_i, \mathbb{C})$. Outra propriedade é que $\mathrm{Res}_0\omega$ é linear em g e é alternado em relação às f_i devido à orientação de Γ. Além disso, suponha que g está no ideal $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, gerado pelas f_i no anel dos germes de funções holomorfas em $0 \in \mathbb{C}^n$. Afirmamos que nesse caso $\mathrm{Res}_0 \omega = 0$. Para ver isso basta supor, devido à linearidade de Res em relação a g, que $g = hf_1$. Então ω assume a forma

$$\omega = \frac{h(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_2(z) \cdots f_n(z)}$$

e é holomorfa no aberto $U' = U \setminus D_2 \cup \ldots \cup D_n \supset U \setminus \cup_{i=1}^n D_i$. A cadeia $\Delta = \{|f_1(z)| \leq \epsilon;\ |f_j(z)| = \epsilon,\ j = 2, \ldots, n\} \subset U'$ é tal que $\partial\Delta = \pm\Gamma$ e, pelo teorema de Stokes, $\pm \int_\Gamma \omega = \int_\Delta d\omega = 0$.

Lema 3.4.2 *Se f é um biholomorfismo local em torno de 0, então vale*

$$\mathrm{Res}_0 \omega = \frac{g(0)}{\det Df(0)}.$$

Demonstração: Ponha $w = f(z)$. Então

$$\begin{aligned} f^*\left(\frac{(g \circ f^{-1})(w)}{\det Df(f^{-1}(w))} \frac{dw_1}{w_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dw_n}{w_n} \right) &= \frac{g(z)}{\det Df(z)} \frac{df_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n}{f_n} \\ &= \frac{g(z)}{\det Df(z)} \det Df(z) \frac{dz_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{f_n} \\ &= \frac{g(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)} = \omega. \end{aligned}$$

Pelo teorema de mudança de variáveis

$$\mathrm{Res}_0 \omega = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_\Gamma \omega = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_i| = \epsilon} \frac{(g \circ f^{-1})(w)}{\det Df(f^{-1}(w))} \frac{dw_1}{w_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dw_n}{w_n},$$

e pela fórmula integral de Cauchy

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_i| = \epsilon} \frac{(g \circ f^{-1})(w)}{\det Df(f^{-1}(w))} \frac{dw_1}{w_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dw_n}{w_n} = \frac{g(0)}{\det Df(0)}.$$

□

O lema acima é um caso particular da seguinte *Lei de Transformação:*

Teorema 3.4.3 *Sejam $f, g : V \to \mathbb{C}^n$ holomorfas com $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \{0\}$. Escreva $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ e suponha que tenhamos*

$g_i(z) = \sum_j a_{ij}(z) f_j(z)$, onde $A(z) = [a_{ij}(z)]$ é uma matriz com entradas holomorfas. Então

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{h dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}\right) = \mathrm{Res}_0\left(\frac{h \det A dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{g_1 \cdots g_n}\right).$$

Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em ([GH, p.658]).

De posse da Lei de Transformação é possível demonstrar os seguintes fatos sobre os resíduos pontuais: suponha que $\omega = (df_1/f_1) \wedge \cdots \wedge (df_n/f_n)$, onde $f_1, \ldots, f_n$ são como acima. Então

1) $\mathrm{Res}_0\omega = (D_1 \cdots D_n)_0$, o número de interseção em 0 das hipersuperfícies (divisores) definidas por $f_i = 0$.

2) $\mathrm{Res}_0\omega = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$. Em particular, se $f_i = \partial g/\partial z_i$ para alguma função holomorfa $g : V \to \mathbb{C}$, com $g(0) = 0$ e $0 \in \mathbb{C}^n$ um ponto crítico isolado, então $\mathrm{Res}_0\omega = \mu(g, 0)$, o número de Milnor de g em 0.

3) $\mathrm{Res}_0\omega$ é o grau da aplicação $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Uma relação entre o resíduo de Grothendieck e o núcleo de Bochner-Martinelli pode ser obtida via cohomologia de Dolbeault (veja [GH]) da seguinte forma: considere a aplicação $F : U \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ definida por $F(z) = (z + f(z), z)$ e olhe para a forma $\eta_\omega = gF^*\beta_n$. Então

$$\mathrm{Res}_0\omega = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_\Gamma \frac{g(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)} = \int_{S^{2n-1}} \eta_\omega.$$

Capítulo 4

Feixes

4.1 Definições e exemplos

Definição 4.1.1 Um *feixe* de grupos abelianos sobre um espaço topológico X consiste de um espaço topológico $\mathcal{S}$ e de um homeomorfismo local $\pi : \mathcal{S} \to X$ satisfazendo:

(a) $\forall\, p \in X$ $\pi^{-1}(p)$ é grupo abeliano;

(b) As operações de grupo são contínuas na topologia de $\mathcal{S}$.

Dizemos que o espaço topológico X é a *base* do feixe. A aplicação π é chamada de *projeção*, enquanto cada grupo abeliano $\mathcal{S}_p = \pi^{-1}(p)$ é denominado *haste* sobre p. No item (b) da definição acima queremos dizer que a aplicação

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \longmapsto x_1 - x_2 \in \mathcal{S}$$

é contínua, onde $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}; \pi(x_1) = \pi(x_2)\}$, com a topologia induzida pela topologia produto de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Exemplo 4.1.2 Seja G um grupo abeliano com a topologia discreta. Consideramos $X \times G$ com a topologia produto, e a projeção $\pi : (p, g) \in X \times G \to p \in X$. O feixe assim produzido é chamado de *feixe constante* e é denotado ainda por G. Suas hastes são isomorfas ao grupo G. Exemplos relevantes para o decorrer dessas notas são os casos em que $G = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, com a estrutura aditiva, ou ainda $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, com a estrutura multiplicativa. No caso em que $G = \{0\}$, o feixe produzido é denominado *feixe nulo* e é denotado simplesmente por 0.

Dado um aberto $U \subset X$, uma *seção* de $\mathcal{S}$ sobre U é uma aplicação contínua $s : U \to \mathcal{S}$ tal que $\pi \circ s(p) = p \; \forall \; p \in U$. Observamos que, em virtude do fato de π ser homeomorfismo local, todo ponto $x \in \mathcal{S}$ está na imagem de alguma seção (sobre algum aberto convenientemente escolhido em torno de $p = \pi(x)$), e que imagens de seções formam base da topologia de $\mathcal{S}$ em x. Além do mais, duas seções coincidindo em um ponto coincidem em toda uma vizinhança deste ponto. O conjunto das seções de $\mathcal{S}$ sobre U é denotado por $\mathcal{S}(U)$. Este é sempre não vazio, pois sempre contém a *seção nula*: aquela que associa a cada $p \in U$ o elemento neutro do grupo abeliano $\mathcal{S}_p$. Dadas seções $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(U)$, definimos $s_1 + s_2 : U \to \mathcal{S}$ efetuando, em cada haste, a operação de grupo: $(s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p)$. Segue que $s_1 + s_2$ é contínua e, portanto, é uma seção. Isso provê a $\mathcal{S}(U)$ uma estrutura de grupo abeliano, onde o elemento neutro é a seção nula.

Exemplo 4.1.3 Seja G um feixe constante sobre X. Se $U \subset X$ é aberto, então uma seção $s \in G(U)$ é uma função localmente constante $s : U \to G$.

Nos parágrafos seguintes, apresentaremos uma construção alternativa de feixes, operacionalmente mais útil.

Definição 4.1.4 Seja X um espaço topológico. Um *pré-feixe* de grupos $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(U)\}$ sobre X consiste de uma correspondência que a cada aberto $U \subset X$ associa um grupo abeliano $\mathcal{P}(U)$, e a cada par de abertos $U \subset V \subset X$ associa um homomorfismo $\rho_U^V : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(U)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $\mathcal{P}(\emptyset)$ é o grupo trivial;

(b) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(U)}$, a identidade em $\mathcal{P}(U)$, para todo aberto $U \subset X$;

(c) $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$ para todos abertos $U \subset V \subset W \subset X$.

Os grupos $\mathcal{P}(U)$ são denominados *grupos de seções* e os homomorfismos ρ_U^V, *homomorfismos de restrição*. Essa terminologia decorre do seguinte: a um feixe $\mathcal{S}$ é associado canonicamente um pré-feixe $\mathcal{P} = P(\mathcal{S})$, fazendo corresponder a cada aberto U o grupo de seções $\mathcal{P}(U) = \mathcal{S}(U)$ e a cada par de abertos $U \subset V \subset X$ o homomorfismo de restrição $\rho_U^V : s \in \mathcal{S}(V) \mapsto s|_U \in \mathcal{S}(U)$.

Reciprocamente, há uma maneira canônica de associar a um pré-feixe $\mathcal{P}$ um feixe $\mathcal{S} = F(\mathcal{P})$. Dado $p \in X$, seja $\mathcal{U}_p = \{U \subset X;\; U \text{ aberto},\; p \in U\}$. Definimos a seguinte relação de equivalência entre seções sobre abertos de $\mathcal{U}_p$: $s_1 \in \mathcal{P}(U_1) \sim s_2 \in \mathcal{P}(U_2)$ se existe um aberto $U \in \mathcal{U}_p$, com $U \subset U_1$ e $U \subset U_2$, tal que $\rho_U^{U_1}(s_1) = \rho_U^{U_2}(s_2)$. Definimos

$$\mathcal{S}_p = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_p} \mathcal{P}(U) \,/ \sim,$$

o *grupo de germes de seções* de $\mathcal{P}$ em p. A aplicação de projeção associada a esse quociente induz homomorfismos $\rho_{U,p} : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{S}_p$ compatíveis com os homomorfismos de restrição: $\rho_{U,p} \circ \rho_U^V = \rho_{V,p}$, sempre que $U \subset V$. Fazemos $\mathcal{S} = \bigcup_{p \in X} \mathcal{S}_p$, com a aplicação de projeção $\pi : \mathcal{S} \to X$ tal que $\pi(\mathcal{S}_p) = p$. Para cada aberto $U \subset X$ e seção $s \in \mathcal{P}(U)$, tomamos $\rho(s) = \bigcup_{p \in U} \rho_{U,p}(s)$, a imagem da seção s em $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$, provido da aplicação π e da topologia gerada pelas imagens das seções, é um feixe cujas hastes são os grupos $\mathcal{S}_p$.

Exemplo 4.1.5 Considere sobre o espaço topológico X o pré-feixe $\mathcal{P}$ que associa a cada aberto $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, o grupo G, onde G é um grupo abeliano não trivial fixado, cujos homorfismos de restrição são identicamente nulos: $\rho_U^V : g \in G \mapsto 0 \in G$ sempre que $U \subset V$ e $U \neq V$. $F(\mathcal{P})$ é o feixe nulo, donde $P(F(\mathcal{P}))$ tem todos os grupos de seções nulos.

Para evitar a anomalia apresentada no exemplo acima, temos a

Definição 4.1.6 (Axioma de feixe) Um pré-feixe $\mathcal{P}$ sobre um espaço topológico X satisfaz o *axioma de feixe* se, e somente se, para todo aberto $U \subset X$, dadas uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de U e seções $s_\alpha \in \mathcal{P}(U_\alpha)$ satisfazendo $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta)$ sempre que $\alpha, \beta \in A$, então existe uma única seção $s \in \mathcal{P}(U)$ tal que $\rho_{U_\alpha}^U = s_\alpha \ \forall \alpha \in A$.

Em outras palavras, um pré-feixe satisfaz o axioma de feixe se, e somente se, seções locais compatíveis com as operações de restrição se colam de maneira única.

Exercício 1 Dado um feixe $\mathcal{S}$, prove que seu pré-feixe de seções $P(\mathcal{S})$ satisfaz o axioma de feixe.

Exercício 2 Prove que o pré-feixe $\mathcal{P}$ satisfaz o axioma de feixe se, e somente se, existem isomorfismos $\Phi_U : \mathcal{P}(U) \to P(F(\mathcal{P}))(U)$ associados aos abertos $U \subset X$, compatíveis com as operações de restrição.

Exemplo 4.1.7 Nos exemplos que seguem, apresentaremos alguns feixes a partir dos grupos de seções que os geram. As aplicações de restrição serão sempre a restrição dos objetos considerados (funções ou formas diferenciais).

$X = M$ variedade C^∞:

$C^\infty : C^\infty(U) = \{$funções C^∞ em $U\}$;

$\mathcal{Q}^p : \mathcal{Q}^p(U) = \{p$-formas C^∞ em $U\}$;

$\mathcal{Z}^p : \mathcal{Z}^p(U) = \{p$-formas fechadas C^∞ em $U\}$;

$X = M$ variedade complexa e $V \subset M$ subvariedade analítica:

$\mathcal{O}$: $\mathcal{O}(U) = \{$funções holomorfas em $U\}$;
$\mathcal{O}^*$: $\mathcal{O}^*(U) = \{$funções holomorfas nunca nulas em $U\}$;
$\mathcal{A}^{(p,q)}$: $\mathcal{A}^{(p,q)}(U) = \{(p,q)$-formas C^∞ em $U\}$;
$\mathcal{Z}^{(p,q)}$: $\mathcal{Z}^{(p,q)}(U) = \{(p,q)$-formas $\overline{\partial}$-fechadas C^∞ em $U\}$;
Ω^p : $\Omega^p(U) = \{p$-formas holomorfas em $U\}$;
$\mathcal{I}_V$: $\mathcal{I}_V(U) = \{$funções holomorfas em U nulas em $U \cap V\}$.
Observação: em $\mathcal{O}^*$ consideramos a aplicação de multiplicação.

Exemplo 4.1.8 Seja M variedade complexa. Dado um aberto conexo $U \subset M$, $\mathcal{O}$(U), o anel de funções holomorfas em U, é um domínio de integridade. Podemos, portanto, formar seu quociente

$$\mathcal{Q}(U) \;=\; \{(f,g) \in \mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U); g \neq 0\} \;/\; \sim,$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é definida por

$$(f,g) \sim (\tilde{f},\tilde{g}) \iff f\tilde{g} - \tilde{f}g = 0.$$

A operação $(f_1,g_1),(f_2,g_2) \mapsto (f_1f_2,g_1g_2)$ está bem definida e fornece a $\mathcal{Q}(U)$ a estrutura de anel comutativo com unidade. Denotamos a classe de (f,g) nesse anel por f/g. Essa classe corresponde à função holomorfa definida para $p \in U \setminus \{g=0\}$ por $r(p) = f(p)/g(p)$. O pré-feixe $\{\mathcal{Q}(U)\}$, com homomorfismos de restrição definidos pela restrição de funções, não satisfaz, em geral, o axioma de feixe. O feixe induzido por esse pré-feixe é denominado *feixe de germes de funções meromorfas* em M e é denotado por $\mathcal{M}$. Uma *função meromorfa* no aberto $U \subset M$ é definida como sendo uma seção de $\mathcal{M}$ sobre U. A inclusão $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{Q}(U)$ dada por $f \mapsto f/1$ define uma inclusão natural $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{M}$.

Exercício 3 Sejam M variedade complexa e $U \subset M$ um aberto. Verifique que uma função meromorfa $m \in \mathcal{M}(U)$ é fornecida pelo seguinte conjunto de dados: uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de U e funções holomorfas $f_\alpha, g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, com $g_\alpha \neq 0$ $\forall \alpha \in A$, tais que $f_\alpha g_{\beta|U_{\alpha\beta}} = f_\beta g_{\alpha|U_{\alpha\beta}}$ sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

Dado um feixe $\mathcal{S}$ sobre um espaço topológico X, um subfeixe de $\mathcal{S}$ é um aberto $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ tal que, para todo $p \in X$, $\mathcal{R}_p = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_p$ é subgrupo de $\mathcal{S}$.

$\mathcal{R}$ será, assim, um feixe, cuja projeção é a restrição a $\mathcal{R}$ da aplicação de projeção de $\mathcal{S}$. Dado um subfeixe $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$, podemos definir o feixe quociente $\mathcal{I} = \mathcal{S}/\mathcal{R}$, tomando como haste sobre $p \in X$ o grupo abeliano $\mathcal{I}_p = \mathcal{S}_p/\mathcal{R}_p$, e provendo $\mathcal{I} = \bigcup_{p\in X} \mathcal{I}_p$ da topologia quociente associada à projeção natural $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{I}$ ($U \subset \mathcal{I}$ é aberto se, e somente se, $\phi^{-1}(U) \subset \mathcal{S}$ é aberto).

Considere $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ feixes sobre X, π e σ as projeções correspondentes, ρ_U^V e τ_U^V os homomorfismos de restrição sempre que $U \subset V \subset X$ são abertos. Um *homomorfismo de feixes* $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é uma aplicação contínua que preserva as hastes, ou seja, $\Phi(\mathcal{S}_p) \subset \mathcal{T}_p$ $\forall$ $p \in X$, que, restrito a cada haste, é um homomorfismo de grupos. Φ induz, através da composição, homomorfismos $\Phi^* : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{T}(U)$, $U \subset X$ aberto, que comutam com as aplicações de restrição: $\Phi_U^* \circ \rho_U^V = \tau_U^V \circ \Phi_V^*$ sempre que tivermos abertos $U \subset V \subset X$.

Equivalentemente, um homomorfismo de feixes pode ser definido a partir dos pré-feixes de seções: para abertos $U \subset X$, são dados homomorfismos $\Phi_U^* : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{T}(U)$ compatíveis com os homomorfismos de restrição. Esses induzem um homomorfismo de feixes $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$.

Um homomorfismo de feixes $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é um *isomorfismo de feixes* se possuir uma aplicação inversa que também é um homomorfismo de feixes. Dizemos, neste caso, que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são isomorfos e denotamos $\mathcal{S} \cong \mathcal{T}$.

Dado um homomorfismo de feixes $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, o *núcleo* de Φ, denotado por $Nuc(\Phi)$, consiste da pré-imagem por Φ da seção nula de $\mathcal{T}$ sobre X. $Nuc(\Phi)$ é um subfeixe de $\mathcal{S}$. A imagem de Φ também é um subfeixe $Im(\Phi) \subset \mathcal{T}$. Segue que $Im(\Phi) \cong \mathcal{S}/Nuc(\Phi)$.

Exercício 4 Prove que um homomorfismo de feixes $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é injetivo se, e somente se, $Nuc(\Phi) = 0$, onde 0 denota o feixe nulo.

Φ é sobrejetiva quando $Im(\Phi) = \mathcal{T}$. Temos, neste caso, $\mathcal{T}/Im(\Phi) \cong 0$.

Proposição 4.1.9 *Considere $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ um homomorfismo de feixes e $\Phi_U^* : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{T}(U)$ os homomorfismos induzidos nos pré-feixes de seções. Então:*

(a) *Φ é injetiva se, e somente se, $\Phi_U^* : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{T}(U)$ é injetiva para todo aberto $U \subset X$ contendo p.*

(b) *Φ é sobrejetiva se, e somente se, para cada $x \in \mathcal{T}$ existe um aberto $U \subset X$ contendo $p = \sigma(x)$, e uma seção $s \in \mathcal{T}(U)$ passando por x tal que s está na imagem de $\Phi_U^* : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{T}(U)$.*

Exercício 5 Prove a proposição 4.1.9

Em outras palavras, a proposição acima diz que a injetividade de um homomorfismo de feixes é equivalente à injetividade das aplicações induzidas nas seções. A sobrejetividade, por sua vez, expressa o caráter local desta teoria: a pré-imagem de uma seção pode ser encontrada, porém reduzindo-se convenientemente o aberto sobre o qual ela está definida.

Exemplo 4.1.10 Consideremos $M = \mathbb{C}^*$ e a aplicação $exp : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^*$ que, dado um aberto $U \subset M$, associa

$$f(z) \in \mathcal{O}(U) \longmapsto \exp(2\pi i f(z)) \in \mathcal{O}^*(U).$$

exp é um homomorfismo sobrejetivo de feixes, uma vez que, localmente, sempre podemos produzir um ramo de logaritmo para uma função holomorfa que não se anula. Por outro lado, a aplicação $exp^* : \mathcal{O}_M(M) \to \mathcal{O}_M^*(M)$ não é sobrejetiva, uma vez que a seção dada por $z \mapsto z$ em $\mathcal{O}_M^*(M)$ não possui pré-imagem.

Exercício 6 Seja $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ um homomorfismo de feixes. Prove que Φ é isomorfismo se, e somente se, para todo aberto $U \subset X$, $\Phi_U^* : \mathcal{S}(U) \to \mathcal{T}(U)$ é isomorfismo.

Exercício 7 Prove que os feixes $\mathcal{S}$ e $F(P(\mathcal{S}))$ são isomorfos.

Dados homomorfismos de feixes $\Phi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ e $\Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, dizemos que a seqüência

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{T}$$

é *exata* se $Im(\Phi) = Nuc(\Psi)$. Uma *seqüência exata curta* de feixes é uma seqüência da forma

$$0 \to \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{T} \to 0,$$

exata em cada uma das três passagens intermediárias. Ou seja, Φ é injetiva, Ψ é sobrejetiva e $Im(\Phi) = Nuc(\Psi)$. Nesse caso, $\mathcal{R}$ pode ser identificado com o subfeixe $\Phi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}$ e vale $\mathcal{T} \cong \mathcal{S}/\Phi(\mathcal{R})$. Reciprocamente, se $\mathcal{R}$ é um subfeixe de $\mathcal{S}$, a inclusão $inc : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ dá origem a uma seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{R} \xrightarrow{inc} \mathcal{S} \xrightarrow{proj} \mathcal{S}/\mathcal{R} \to 0,$$

onde $proj : \mathcal{S} \to \mathcal{S}/\mathcal{R}$ denota a projeção natural.

Exemplo 4.1.11 Considere M variedade complexa e a aplicação $exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ definida no exemplo anterior. O núcleo desta aplicação é o feixe constante $\mathbb{Z}$, o que resulta na seqüência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \to 0.$$

4.2 Cohomologia de feixes

Seja $\mathcal{S}$ um feixe sobre um espaço topológico X e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura de X. Denotamos $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_q} = \bigcap_{k=1}^{q} U_{\alpha_k}, \alpha_0, \ldots, \alpha_q \in A$.

Definição 4.2.1 Uma *q-cocadeia* de $\mathcal{U}$ com coeficientes em $\mathcal{S}$ é uma função que a cada (q+1)-upla ordenada $(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in A^{q+1}$ associa uma seção $f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q} \in \mathcal{S}(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_q})$.

Usamos a notação $(f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q})$ para representar uma q-cocadeia. O conjunto das q-cocadeias de $\mathcal{U}$ com coeficientes em $\mathcal{S}$ é denotado por $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Como $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ é um produto de grupos de seções, também possui estrutura de grupo. Note que um elemento de $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ associa a cada aberto U da cobertura $\mathcal{U}$ uma seção de $\mathcal{S}(U)$. Um homomorfismo de feixes $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ induz uma aplicação $\Phi_q^* : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{T})$, levando $(f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q})$ em $(\Phi^*(f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q}))$, onde Φ^* denota as aplicações induzidas entre grupos de seções.

Definimos o *operador de cobordo* $d_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ da seguinte forma:

$$d_q((f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q})) = (g_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+1}}),$$

onde

$$g_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho_k (f_{\alpha_0 \ldots \widehat{\alpha}_k \ldots \alpha_{q+1}}),$$

$\widehat{\alpha}_k$ simbolizando a ausência do índice indicado e ρ_k referindo-se à aplicação de restrição $\rho_{U_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+1}}}^{U_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \alpha_{q+1}}}$. Se $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ é um homomorfismo de feixes, denotando por d_q os operadores de cobordo associados a ambos os feixes, temos $d_q \circ \Phi_q^* = \Phi_{q+1}^* \circ d_q$.

Lema 4.2.2 $d_{q+1} \circ d_q = 0$.

Demonstração: Tome uma cocadeia $(f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q}) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$. Temos

$$d_q((f_{\alpha_0 \ldots \alpha_q})) = (g_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+1}}) \in C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}),$$

onde

$$g_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \rho_k (f_{\alpha_0 \ldots \widehat{\alpha}_k \ldots \alpha_{q+1}}).$$

Por sua vez,

$$d_{q+1}((g_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+1}})) = (h_{\alpha_0 \ldots \alpha_{q+2}}) \in C^{q+2}(\mathcal{U}, \mathcal{S}),$$

onde

$$h_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+2}} = \sum_{l=0}^{q+2}(-1)^l\rho_l(g_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_l\ldots\alpha_{q+2}}).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} g_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_l\ldots\alpha_{q+2}} &= \sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\rho_k(f_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_k\ldots\widehat{\alpha}_l\ldots\alpha_{q+2}}) \\ &\qquad + \sum_{k=l+1}^{q+2}(-1)^{k+1}\rho_k(f_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_l\ldots\widehat{\alpha}_k\ldots\alpha_{q+2}}), \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} h_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+2}} &= \sum_{l=0}^{q+2}(-1)^l\rho_l\left(\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\rho_k(f_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_k\ldots\widehat{\alpha}_l\ldots\alpha_{q+2}})\right) \\ &\qquad + \sum_{l=0}^{q+2}(-1)^l\rho_l\left(\sum_{k=l+1}^{q+2}(-1)^{k+1}\rho_k(f_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_l\ldots\widehat{\alpha}_k\ldots\alpha_{q+2}})\right) = 0, \end{aligned}$$

pois a cada parcela da primeira soma corresponde uma parcela de sinal oposto na segunda soma. □

Definimos

$$Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \{f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}); d_q(f) = 0\},$$

ou seja, o núcleo do operador $d_q : C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S})$. Os elementos de $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ são chamados de *q-cociclos*. Definimos ainda, para $q \geq 1$,

$$B^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = \{f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S});\ \exists\ g \in C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \text{ tal que } f = d_{q-1}(g)\},$$

ou seja, a imagem do operador $d_{q-1} : C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$. Seus elementos são chamados de *q-cobordos*. No caso em que $q = 0$, convencionamos que $B^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) = 0$. Do lema 4.2.2 temos que $B^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \subset Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})\ \forall\ q \geq 0$. Podemos, portanto, definir

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Z^q(\mathcal{U},\mathcal{S})/B^q(\mathcal{U},\mathcal{S}),$$

o *q-ésimo grupo de cohomologia de $\mathcal{S}$ em relação a $\mathcal{U}$*. Uma vez que os homomorfismos $\Phi_q^* : C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ induzidos por um homomorfismo de feixes $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ comutam com os operadores de cobordo, eles induzem homomorfismos entre grupos de cohomologia: $\Phi_q^* : H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$.

É instrutivo entendermos o grupo $H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$. Um elemento $f = (f_{\alpha_0}) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ está em $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ se, e somente se, $d_0(f) = (g_{\alpha_0\alpha_1}) = 0$. Visto que

$$g_{\alpha_0\alpha_1} = \rho^{U_{\alpha_1}}_{U_{\alpha_0\alpha_1}}(f_{\alpha_1}) - \rho^{U_{\alpha_0}}_{U_{\alpha_0\alpha_1}}(f_{\alpha_0}),$$

temos que $d_0(f) = 0$ se, e somente se,

$$\rho^{U_{\alpha_1}}_{U_{\alpha_0\alpha_1}}(f_{\alpha_1}) = \rho^{U_{\alpha_0}}_{U_{\alpha_0\alpha_1}}(f_{\alpha_0}) \ \forall\ \alpha_0,\alpha_1 \in A.$$

Em outras palavras, $\forall\ \alpha_0,\alpha_1 \in A$, as seções $f_{\alpha_0} \in \mathcal{S}(U_{\alpha_0})$ e $f_{\alpha_1} \in \mathcal{S}(U_{\alpha_1})$ coincidem nas interseções $U_{\alpha_0\alpha_1}$, e, portanto, definem uma seção global. Resulta daí a identificação $H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) \cong \mathcal{S}(X)$.

Objetivamos construir uma teoria de cohomologia que seja intrínseca ao espaço topológico X. Os grupos de cohomologia até agora produzidos estão, no entanto, vinculados à escolha de uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Livramo-nos dessa dependência recorrendo ao conceito de limite direto (veja [AM]). Dadas duas coberturas $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ de X, diremos que $\mathcal{U}$ é um *refinamento* de $\mathcal{V}$ se existe uma aplicação, denominada aplicação de refinamento, $r : A \to B$ tal que $U_\alpha \subset V_{r(\alpha)}\ \forall\ \alpha \in A$. Denotamos, nesse caso, $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. "$\prec$" estabelece uma relação de ordem parcial na família das coberturas abertas de X. Dadas duas coberturas abertas $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ e $\mathcal{W} = \{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, é sempre possível encontrar uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \prec \mathcal{W}$. Por exemplo, podemos tomar $A = B \times \Gamma$, $U_{(\beta,\gamma)} = V_\beta \cap W_\gamma$, e aplicações de refinamento $r_1 : (\beta,\gamma) \mapsto \beta$, que realiza $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, e $r_2 : (\beta,\gamma) \mapsto \gamma$, que realiza $\mathcal{U} \prec \mathcal{W}$. Uma aplicação de refinamento $r : A \to B$ induz homomorfismos $r_q^* : C^q(\mathcal{V},\mathcal{S}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$, que fazem corresponder $(g_{\beta_0\ldots\beta_q}) \mapsto (f_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$, onde

$$f_{\alpha_0\ldots\alpha_q} = \rho^{V_{r(\alpha_0)\ldots r(\alpha_q)}}_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_q}}(g_{r(\alpha_0)\ldots r(\alpha_q)}).$$

Esses homomorfismos comutam com os operadores de cobordo. Induzem, portanto, homomorfismos nos grupos de cohomologia: $r_q^* : H^q(\mathcal{V},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$.

Mais de uma aplicação de refinamento pode, a princípio, estabelecer a relação $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. No entanto, passando à cohomologia, todas estas aplicações induzem o mesmo homomorfismo:

Lema 4.2.3 *Dadas coberturas $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ com $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, e aplicações de refinamento $r_1, r_2 : A \to B$, então os homomorfismos $r_1^*, r_2^* : H^q(\mathcal{V},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ são iguais.*

Demonstração: Identificando $H^0(\mathcal{V},\mathcal{S}) \cong H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) \cong \mathcal{S}(X)$, temos que $r_1^*, r_2^* : H^0(\mathcal{V},\mathcal{S}) \to H^0(\mathcal{U},\mathcal{S})$ coincidem com a aplicação identidade. Podemos então supor $q \geq 1$. Tome $g \in H^q(\mathcal{V},\mathcal{S})$, correspondendo à classe do cociclo

$(g_{\beta_0\ldots\beta_q})$. Consideremos $r_1^*(g)$ e $r_2^*(g) \in H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$, representados pelos cociclos $(f^1_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$ e $(f^2_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$, onde

$$\begin{aligned} f^1_{\alpha_0\ldots\alpha_q} &= \rho_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_q}}^{V_{r_1(\alpha_0),\ldots,r_1(\alpha_q)}}(g_{r_1(\alpha_0)\ldots r_1(\alpha_q)}), \\ f^2_{\alpha_0\ldots\alpha_q} &= \rho_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_q}}^{V_{r_2(\alpha_0)\ldots r_2(\alpha_q)}}(g_{r_2(\alpha_0)\ldots r_2(\alpha_q)}). \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $(f^2_{\alpha_0\ldots\alpha_q} - f^1_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$ representa a classe nula na cohomologia. De fato, uma verificação simples mostra que

$$(f^2_{\alpha_0\ldots\alpha_q} - f^1_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) = d_{q-1}((h_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}})),$$

onde

$$h_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}} = \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k \rho_k(g_{r_1(\alpha_0)\ldots r_1(\alpha_k)r_2(\alpha_k)\ldots r_2(\alpha_{q-1})})$$

e $\rho_k = \rho_{U_{\alpha_0\ldots\alpha_k\alpha_k\ldots\alpha_{q-1}}}^{V_{r_1(\alpha_0)\ldots r_1(\alpha_k)r_2(\alpha_k)\ldots r_2(\alpha_{q-1})}}$. □

Os grupos $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$, indexados pela família das coberturas abertas de X, com a relação de ordem parcial dada pela noção de refinamento e os homomorfismos $r_q^* : H^q(\mathcal{V},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ sempre que $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, constituem um sistema direto de grupos abelianos. Definimos o *q-ésimo grupo de homologia de X com coeficientes em $\mathcal{S}$* como sendo o limite direto deste sistema:

$$H^q(X,\mathcal{S}) = \varinjlim H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}).$$

4.3 Seqüência longa de cohomologia

Um feixe é definido pela colagem de objetos satisfazendo propriedades locais. A existência de objetos globais, ou seja, seções, é um problema essencial dentro desta teoria. Um instrumento para resolvê-lo é a seqüência longa de cohomologia, que apresentaremos a seguir.

Lema 4.3.1 *Seja $0 \to \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{T} \to 0$ uma seqüência exata curta de feixes sobre o espaço topológico X. Então, dado um aberto $U \subset X$, a seqüência*

$$0 \to \mathcal{R}(U) \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{S}(U) \xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{T}(U)$$

é exata.

Demonstração: A injetividade de Φ^* segue da proposição 4.1.9. Basta, então, mostrarmos que $Im(\Phi^*) = Nuc(\Psi^*)$. Uma vez que $Im(\Phi) = Nuc(\Psi)$, temos $Im(\Phi^*) \subset Nuc(\Psi^*)$. Considere então uma seção $g \in Nuc(\Psi^*)$. Temos que $g(p) \in Nuc(\Psi)\ \forall\ p \in U$. Tendo em vista o item (b) da proposição 4.1.9, visto que $\Phi : \mathcal{R} \to Im(\Phi) = Nuc(\Psi)$ é sobrejetiva, para cada $p \in U$ podemos encontrar um aberto $V_p \subset U$ contendo p e seção $f_{V_p} \in \mathcal{R}(V_p)$ tal que $\Phi^*(f_{V_p}) = \rho^U_{V_p}(g)$. Como Φ^* é injetiva em qualquer aberto, essas seções locais são unicamente determinadas. Portanto, elas se colam em uma seção $f \in \mathcal{R}(U)$ tal que $\Phi^*(f) = g$. □

Um espaço topológico é *paracompacto* se é Hausdorff e se toda cobertura aberta possui um refinamento localmente finito que também é cobertura (veja [Mun]). Variedades diferenciáveis são exemplos de espaços paracompactos. Temos o resultado central desta seção.

Teorema 4.3.2 *Seja* $0 \to \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{S} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{T} \to 0$ *uma seqüência exata curta de feixes sobre o espaço topológico paracompacto* X. *Então existem homomorfismos* $\delta_q : H^q(X,\mathcal{R}) \to H^{q+1}(X,\mathcal{R})$ *de forma que a seqüência*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathcal{R}(X) & \xrightarrow{\Phi_0^*} & \mathcal{S}(X) & \xrightarrow{\Psi_0^*} & \mathcal{T}(X) & \xrightarrow{\delta_0} \\
 & \xrightarrow{\delta_0} & H^1(X,\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Phi_1^*} & H^1(X,\mathcal{S}) & \xrightarrow{\Psi_1^*} & H^1(X,\mathcal{T}) & \xrightarrow{\delta_1} \\
 & \xrightarrow{\delta_1} & H^2(X,\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Phi_2^*} & \cdots & & & \\
 & & & & \cdots & \xrightarrow{\Psi_{q-1}^*} & H^{q-1}(X,\mathcal{T}) & \xrightarrow{\delta_{q-1}} \\
 & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & H^q(X,\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Phi_q^*} & H^q(X,\mathcal{S}) & \xrightarrow{\Psi_q^*} & H^q(X,\mathcal{T}) & \xrightarrow{\delta_q} \\
 & \xrightarrow{\delta_q} & H^{q+1}(X,\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Phi_{q+1}^*} & \cdots & & &
\end{array}$$

é exata.

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura localmente finita de X. Pelo lema 4.3.1, para todo aberto $U \subset X$, a seqüência

$$0 \to \mathcal{R}(U) \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{S}(U) \xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{T}(U)$$

é exata. Uma vez que cada grupo $C^q(\mathcal{U},\mathcal{R})$ é produto direto dos grupos $\mathcal{R}(U_\alpha)$, a seqüência

$$0 \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\Phi_q^*} C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\Psi_q^*} C^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$$

é exata $\forall\ q \geq 0$. Obtemos uma seqüência exata curta

$$0 \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) \xrightarrow{\Phi_q^*} C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \xrightarrow{\Psi_q^*} \overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \to 0$$

definindo $\overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) = \Psi_q^*(C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}))$. O diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & C^0(\mathcal{U},\mathcal{R}) & \stackrel{\Phi_0^*}{\rightarrow} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \stackrel{\Psi_0^*}{\rightarrow} & \overline{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{T}) & \rightarrow & 0 \\
 & & d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow & & d_0 \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^1(\mathcal{U},\mathcal{R}) & \stackrel{\Phi_1^*}{\rightarrow} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \stackrel{\Psi_1^*}{\rightarrow} & \overline{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{T}) & \rightarrow & 0 \\
 & & d_1 \downarrow & & d_1 \downarrow & & d_1 \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & d_{q-1} \downarrow & & d_{q-1} \downarrow & & d_{q-1} \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^q(\mathcal{U},\mathcal{R}) & \stackrel{\Phi_q^*}{\rightarrow} & C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \stackrel{\Psi_q^*}{\rightarrow} & \overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) & \rightarrow & 0 \\
 & & d_q \downarrow & & d_q \downarrow & & d_q \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) & \stackrel{\Phi_{q+1}^*}{\rightarrow} & C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \stackrel{\Psi_{q+1}^*}{\rightarrow} & \overline{C}^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{T}) & \rightarrow & 0 \\
 & & d_{q+1} \downarrow & & d_{q+1} \downarrow & & d_{q+1} \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

comuta, sendo que as linhas são seqüências exatas.

Definimos, inicialmente, $\delta_q : \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R})$, onde $\overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ é o grupo de cohomologia produzido a partir dos grupos de cocadeia $\overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$. Seja $h \in \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ uma classe representada pelo cociclo $(h_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \in \overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$. Da sobrejetividade de Ψ_q^* obtemos uma cocadeia $(g_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ tal que $\Psi_q^*((g_{\alpha_0\ldots\alpha_q})) = (h_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$. A comutatividade do diagrama nos fornece

$$\Psi_{q+1}^*(d_q((g_{\alpha_0\ldots\alpha_q}))) \;=\; d_q((h_{\alpha_0\ldots\alpha_q})) \;=\; 0.$$

Uma vez que cada seqüência horizontal é exata, é possível encontrar uma cocadeia $(f_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}}) \in C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R})$ tal que $\Phi_{q+1}^*((f_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}})) = d_q((g_{\alpha_0\ldots\alpha_q}))$. Uma vez que

$$\Phi_{q+2}^*(d_{q+1}((f_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}}))) = d_{q+1}(\Phi_{q+1}^*((f_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}}))) = d_{q+1}(d_q((g_{\alpha_0\ldots\alpha_q}))) = 0$$

e Φ_{q+2}^* é injetiva, $(f_{\alpha_0\ldots\alpha_{q+1}})$ é um cociclo. Corresponde, então, a uma classe em $H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R})$, que definimos como sendo $\delta_q(h)$. A verificação de que δ_q independe da escolha do representante de h em $\overline{C}^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$ e de que é um homomorfismo é deixada para o leitor. Deixamos ainda a verificação de que a seqüência

$$\begin{array}{cccccc}
 & \ldots & \stackrel{\Phi_q^*}{\rightarrow} & H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \stackrel{\Psi_q^*}{\rightarrow} & \overline{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{T}) \quad \stackrel{\delta_q^*}{\rightarrow} \\
\stackrel{\delta_q^*}{\rightarrow} & H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{R}) & \stackrel{\Phi_{q+1}^*}{\rightarrow} & H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{S}) & \stackrel{\Phi_{q+1}^*}{\rightarrow} & \ldots
\end{array}$$

é exata. Dadas coberturas $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$, com $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, e uma aplicação de refinamento $r : A \rightarrow B$, temos que, assim como Φ^* e Ψ^*, r_q^* comuta com os homorfismos δ_q definidos para cada cobertura. Passando ao limite direto, encontramos seqüências exatas de grupos de cohomologia

$$\begin{array}{cccccccc} & \cdots & \stackrel{\Phi_q^*}{\to} & H^q(X,\mathcal{S}) & \stackrel{\Psi_q^*}{\to} & \overline{H}^q(X,\mathcal{T}) & \stackrel{\delta_q^*}{\to} & \\ \stackrel{\delta_q^*}{\to} & H^{q+1}(X,\mathcal{R}) & \stackrel{\Phi_{q+1}^*}{\to} & H^{q+1}(X,\mathcal{S}) & \stackrel{\Phi_{q+1}^*}{\to} & \cdots & & \end{array}$$

Concluímos a prova observando que, em decorrência da regularidade assumida para X, $\overline{H}^q(X,\mathcal{T}) = H^q(X,\mathcal{T})$. A prova desse fato é um exercício de topologia, feito no lema a seguir.

Lema 4.3.3 *Na situação do teorema acima, temos* $\overline{H}^q(X,\mathcal{T}) = H^q(X,\mathcal{T})$.

Demonstração: Basta provar que, dada uma cocadeia $(h_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{T})$, existem um refinamento $\mathcal{W} = \{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \prec \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $r : \Gamma \to A$ a aplicação de refinamento, e uma cocadeia $(g_{\gamma_0\ldots\gamma_q}) \in C^q(\mathcal{W},\mathcal{T})$, tais que $r_q^*((h_{\alpha_0\ldots\alpha_q})) = \Psi_q^*((g_{\gamma_0\ldots\gamma_q}))$. Podemos supor que a cobertura $\mathcal{U}$ é localmente finita. Uma vez que X é paracompacto, é normal ([Mun]). Podemos encontrar uma cobertura $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ $\forall\, \alpha \in A$. Para cada $p \in X$, escolhemos uma vizinhança W_p de $p \in X$, satisfazendo:

(i) $W_p \subset V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$;

(ii) se $W_p \cap V_\alpha \neq \emptyset$, então $W_p \subset U_\alpha$;

(iii) se $p \in U_{\alpha_0\ldots\alpha_q}$, então $\rho_{W_p}^{U_{\alpha_0\ldots\alpha_q}}(h_{\alpha_0\ldots\alpha_q})$ é a imagem por Ψ^* de alguma seção de $\mathcal{S}(W_p)$.

Note que (iii) é possível pela sobrejetividade de Ψ. Para cada aberto W_p selecionamos $r(p) \in A$ tal que $W_p \subset V_{r(p)} \subset U_{r(p)}$. $r : X \to I$ é aplicação de refinamento que realiza $\{W_p\}_{p\in X} \prec \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Suponha $W_{p_0\ldots p_q} \neq \emptyset$. Uma vez que $W_{p_0\ldots p_q} \subset V_{r(p_0)\ldots r(p_q)}$, temos $W_{p_0} \cap V_{r(p_k)} \neq \emptyset$ $\forall\, k = 0,\ldots,q$. De (ii) decorre que $W_{p_0} \subset U_{r(p_k)}$ $\forall\, k = 0,\ldots,q$, donde $W_{p_0\ldots p_q} \subset W_{p_0} \subset U_{r(p_0)\ldots r(p_q)}$. Portanto, a cocadeia $r_q^*((h_{\alpha_0\ldots\alpha_q}))$ tem associada a $W_{p_0\ldots p_q}$ a seção

$$\rho_{W_{p_0\ldots p_q}}^{U_{r(p_0)\ldots r(p_q)}}(h_{r(p_0)\ldots r(p_q)}) = \rho_{W_{p_0\ldots p_q}}^{W_{p_0}} \circ \rho_{W_{p_0}}^{U_{r(p_0)\ldots r(p_q)}}(h_{r(p_0)\ldots r(p_q)}).$$

O resultado segue de (iii), uma vez que $\rho_{W_{p_0}}^{U_{r(p_0)\ldots r(p_q)}}(h_{r(p_0)\ldots r(p_q)})$ está na imagem de Ψ^*. □

4.4 Alguns cálculos cohomológicos

Seja $\mathcal{S}$ um feixe de grupos abelianos sobre um espaço topológico X que admite uma cobertura localmente finita $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Uma *partição da unidade* para $\mathcal{S}$ subordinada à cobertura $\mathcal{U}$ é uma família de homomorfismos de feixes $\{\xi_\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}\}_{\alpha\in A}$ satisfazendo:

(i) $\xi_\alpha(\mathcal{S}_p) = 0 \ \forall\, p \in X \setminus U_\alpha$;

(ii) $\sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha(x) = x \ \forall\, x \in \mathcal{S}$.

A soma em (ii) envolve apenas um número finito de parcelas não nulas, uma vez que a cobertura é localmente finita. Está, portanto, bem definida. Dizemos que um feixe é *fino* se admitir partição da unidade subordinada a toda cobertura localmente finita.

Lema 4.4.1 *Seja X um espaço topológico admitindo uma cobertura localmente finita $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Seja $\mathcal{S}$ um feixe sobre X admitindo uma partição da unidade $\{\xi_\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}\}_{\alpha\in A}$ subordinada a $\mathcal{U}$. Então $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = 0 \ \forall\, q > 0$.*

Demonstração: Dado um cociclo $f = (f_{\alpha_0\ldots\alpha_q}) \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ definimos, para cada $\alpha \in A$, $g_\alpha = (g_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}) \in C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{S})$ fazendo

$$g_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}} = \xi^*_\alpha(f_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}),$$

onde ξ^*_α é o homomorfismo induzido nos grupos de seções. Na definição estendemos $\xi^*_\alpha(f_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}) \in \mathcal{S}(U_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}})$ a uma seção sobre $U_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}$ fazendo-a identicamente nula em $U_{\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}} \setminus U_{\alpha\alpha_0\ldots\alpha_{q-1}}$. Deixamos para o leitor a verificação de que $d_{q-1}(g_\alpha) = \xi^*_\alpha(f)$, onde $\xi^*_\alpha : C^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{S})$ é a aplicação induzida entre grupos de cocadeia (nesta passagem utiliza-se o fato de que f é um cociclo). As propriedades da partição da unidade fornecem

$$d_{q-1}\left(\sum_{\alpha\in A} g_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in A} d_{q-1}(g_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} \xi^*_\alpha(f) = f,$$

o que conclui a demonstração. □

Como conseqüência do lema, temos o

Teorema 4.4.2 *Se $\mathcal{S}$ é feixe fino sobre um espaço topológico paracompacto X, então $H^q(X,\mathcal{S}) = 0 \ \forall\, q > 0$.*

Exemplo 4.4.3 Se M é uma variedade C^∞ e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura localmente finita, é sempre possível encontrar uma partição da unidade C^∞ subordinada a $\mathcal{U}$, isto é, uma família $\{\xi_\alpha : M \to [0,1]\}_{\alpha\in A}$ de funções C^∞ tais que $\overline{\{p \in M; \xi_\alpha(p) \neq 0\}} \subset U_\alpha \ \forall\, \alpha \in A$ e $\sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha(p) = 1 \ \forall\, p \in M$. Se $\mathcal{S}$ é um feixe de germes de funções ou formas diferenciais sobre M, como os feixes C^∞ e $\mathcal{A}^p$, ou ainda, no caso em que M é holomorfa, o feixe $\mathcal{A}^{(p,q)}$, uma partição da unidade C^∞ induz, através da multiplicação em cada haste, uma partição da unidade para S subordinada a $\mathcal{U}$. C^∞, $\mathcal{A}^p$ e $\mathcal{A}^{(p,q)}$ são, portanto, feixes finos. Do teorema, seus grupos de cohomologia de ordem positiva são nulos.

Seja M variedade C^∞. O lema de Poincaré ([BoTu]) nos diz que uma forma diferencial fechada é localmente exata. Temos a seqüência exata de feixes

$$0 \to \mathbb{C} \to C^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \to \cdots,$$

onde as funções e formas consideradas são complexas. Dela, extraímos as seqüências exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{C} & \to & C^\infty & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}^1 & \to & 0 \\ 0 & \to & \mathcal{Z}^1 & \to & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}^2 & \to & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{Z}^{k-1} & \to & \mathcal{A}^{k-1} & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}^k & \to & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Fixe $p > 0$. Uma vez que $H^q(M, C^\infty) = 0 \ \forall \ q > 0$, da seqüência longa de cohomologia associada à primeira dessas seqüências curtas obtemos

$$0 \to H^{p-1}(M, \mathcal{Z}^1) \to H^p(M, \mathbb{C}) \to 0.$$

Da segunda seqüência, visto que $H^q(M, \mathcal{A}^1) = 0 \ \forall \ q > 0$, provém

$$0 \to H^{p-2}(M, \mathcal{Z}^2) \to H^{p-1}(M, \mathcal{Z}^1) \to 0.$$

Prosseguindo, encontramos uma cadeia de isomofismos

$$\begin{array}{rcl} H^p(M, \mathbb{C}) & \cong & H^{p-1}(M, \mathcal{Z}^1) \\ & \cong & H^{p-2}(M, \mathcal{Z}^2) \\ & \vdots & \\ & \cong & H^1(M, \mathcal{Z}^{p-1}). \end{array}$$

Porém, nas duas primeiras linhas da seqüência longa de cohomologia associada a

$$0 \to \mathcal{Z}^{p-1} \to \mathcal{A}^{p-1} \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^p \to 0$$

encontramos

$$0 \to \mathcal{Z}^{p-1}(M) \to \mathcal{A}^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^p(M) \to H^1(M, \mathcal{Z}^{p-1}) \to 0.$$

Segue que

$$H^1(M, \mathcal{Z}^{p-1}) \cong \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{d(\mathcal{A}^{p-1}(M))} \cong H^p_{DR}(M, \mathbb{C}),$$

onde $H^p_{DR}(M, \mathbb{C})$ denota o p-ésimo grupo de cohomologia de De Rham. Uma vez que $H^0(M, \mathbb{C}) \cong H^0_{DR}(M, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, provamos o seguinte:

Teorema 4.4.4 (De Rham) *Se M é variedade C^∞, então $\forall\ p \geq 0$*

$$H^p(M, \mathbb{C}) \cong H^p_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

Consideremos, agora, M variedade complexa. O lema de Poincaré-$\overline{\partial}$ ([Gun, v.I]) diz que toda (p,q)-forma $\overline{\partial}$-fechada é localmente $\overline{\partial}$-exata. Resulta que é exata a seqüência de feixes

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^p \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{(p,1)} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{(p,2)} \to \cdots,$$

de onde obtemos seqüências exatas curtas

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Omega^p & \to & \mathcal{A}^{(p,0)} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \mathcal{Z}^{(p,1)} & \to & 0 \\
0 & \to & \mathcal{Z}^{(p,1)} & \to & \mathcal{A}^{(p,1)} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \mathcal{Z}^{(p,2)} & \to & 0 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
0 & \to & \mathcal{Z}^{(p,k)} & \to & \mathcal{A}^{(p,k)} & \xrightarrow{\overline{\partial}} & \mathcal{Z}^{(p,k+1)} & \to & 0 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Fixe $p \geq 0$ e $q \geq 1$. Uma vez que $H^k(M, \mathcal{A}^{(r,s)}) = 0\ \forall\ k > 0, r, s \geq 0$, computando as seqüências longas de cohomologia associadas a essas seqüências curtas, obtemos, como no teorema de De Rham, uma cadeia de isomorfismos

$$\begin{aligned}
H^q(M, \Omega^p) &\cong H^{q-1}(M, \mathcal{Z}^{(p,1)}) \\
&\cong H^{q-2}(M, \mathcal{Z}^{(p,2)}) \\
&\ \vdots \\
&\cong H^1(M, \mathcal{Z}^{(p,q-1)}).
\end{aligned}$$

Da seqüência

$$0 \to \mathcal{Z}^{(p,q-1)} \to \mathcal{A}^{(p,q-1)} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}^{(p,q)} \to 0,$$

produzimos

$$0 \to \mathcal{Z}^{(p,q-1)}(M) \to \mathcal{A}^{(p,q-1)}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}^{(p,q)}(M) \to H^1(M, \mathcal{Z}^{(p,q-1)}) \to 0,$$

de onde obtemos

$$H^1(M, \mathcal{Z}^{(p,q-1)}) \cong \frac{\mathcal{Z}^{(p,q)}(M)}{\overline{\partial}(\mathcal{A}^{(p,q-1)}(M))} \cong H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M),$$

o grupo de cohomologia de Dolbeault de ordem (p,q). Para $q = 0$, temos ainda $H^0(M, \Omega^p) \cong H^{p,0}_{\overline{\partial}}(M) \cong$ $\{p$-formas holomorfas em $M\}$. Vale, portanto, o

Teorema 4.4.5 (Dolbeault) *Se M é variedade complexa, então $\forall\ p, q \geq 0$*

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M).$$

4.5 Fibrados em retas e cohomologia de feixes

Seja M uma variedade complexa.

Definição 4.5.1 O grupo de classes de isomorfismos de fibrados em retas holomorfos sobre M é denominado *grupo de Picard* de M e denotado $Pic(M)$.

Se L é um fibrado em retas holomorfo sobre M determinado, em relação a uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, pelo cociclo $(g_{\alpha,\beta})$, onde $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$, temos que $(g_{\alpha\beta})$ define um elemento de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ que, por sua vez, define um elemento de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Essa correspondência, que independe da cobertura escolhida, atribui a mesma imagem a fibrados isomorfos. De fato, se L' é dado pelo cociclo $(g'_{\alpha\beta})$, e $L \cong L'$, existem $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ tais que $f_\alpha = (g'_{\alpha\beta}/g_{\alpha\beta})f_\beta$ em $U_{\alpha\beta}$. Porém, isso significa que

$$(g_{\alpha\beta}) - (g'_{\alpha\beta}) = d_0(f_\alpha)$$

e, portanto, $(g_{\alpha\beta})$ e $(g'_{\alpha\beta})$ definem o mesmo elemento de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Definimos, assim, um homomorfismo $Pic(M) \to H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

Exercício 8 Verifique que o homomorfismo acima é um isomorfismo.

Temos, portanto, a

Proposição 4.5.2

$$Pic(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}^*).$$

Continuamos com o fibrado em retas L. Tendo em vista o isomorfismo acima, podemos produzir sua imagem pela aplicação

$$\delta_1 : H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}),$$

induzida pela seqüência exata curta

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \overset{exp}{\to} \mathcal{O}^* \to 0.$$

Essa aplicação é construída seguindo o diagrama (veja a demonstração do teorema 4.3.2)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) & \overset{exp}{\to} & \overline{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) & \to & 0 \\ & & & & d_1 \downarrow & & & & \\ 0 & \to & C^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) & \to & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}) & & & & . \end{array}$$

Podemos tomar cada U_α simplemente conexo, de forma que, para cada par (α, β), podemos calcular $\log g_{\alpha\beta}$. Assim,

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \log g_{\alpha\beta} \right) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

é pré-imagem de $(g_{\alpha\beta})$ por exp e

$$\begin{aligned} \delta_1((g_{\alpha\beta})) &= d_1 \left(\left(\frac{1}{2\pi i} \log g_{\alpha\beta} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma} + \log g_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

A inclusão $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ induz uma aplicação $0 \to H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{C})$. Enxergamos, pois,

$$\frac{1}{2\pi i} (\log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma} + \log g_{\alpha\beta}) \in H^2(M, \mathbb{C}). \tag{4.1}$$

Pelo teorema de De Rham, $H^2(M, \mathbb{C}) \cong H_{DR}(M, \mathbb{C})$. Temos então o

Teorema 4.5.3 *A imagem de $\delta_1((g_{\alpha\beta}))$ em $H_{DR}(M, \mathbb{C})$ é $c_1(L)$.*

Demonstração: Tomamos uma conexão ∇ em L definida, em relação à cobertura $\{U_\alpha\}$, por 1-formas θ^α. Essas satisfazem

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= d \log g_{\alpha\beta} + \theta^\beta \end{aligned} \tag{4.2}$$

e a curvatura K_∇ é dada por uma 2-forma fechada $\Theta \in \mathcal{Z}^2(M)$, expressa em U_α por

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = d\theta^\alpha. \tag{4.3}$$

Por definição,

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right] \in H^2_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

Estudaremos a imagem de Θ pela seqüência de isomorfismos do teorema de De Rham. O primeiro deles,

$$\frac{\mathcal{Z}^2(M)}{d(\mathcal{A}^1(M))} \longrightarrow H^1(M, \mathcal{Z}^1),$$

provém da seqüência curta

$$0 \to \mathcal{Z}^1 \to \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^2 \to 0.$$

Seguimos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & \xrightarrow{d} & \overline{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^2) & \to & 0 \\ & & & & d_0 \downarrow & & & & \\ 0 & \to & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^1) & \to & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & & & & \end{array}$$

da direita para a esquerda, de cima para baixo. Temos, esquematicamente,

$$\begin{aligned} \Theta = (\Theta^\alpha) \in \overline{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^2) &\mapsto (\theta^\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) \ \text{(por (4.3))} \\ &\mapsto (\theta^\beta - \theta^\alpha) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^1). \end{aligned}$$

O segundo isomorfismo,

$$H^1(M, \mathcal{Z}^1) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{C}),$$

é induzido pela seqüência

$$0 \to \mathbb{C} \to C^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1 \to 0.$$

Seguindo o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C^1(\mathcal{U}, C^\infty) & \xrightarrow{d} & \overline{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^1) & \to & 0 \\ & & & & d_1 \downarrow & & & & \\ 0 & \to & C^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}) & \to & C^2(\mathcal{U}, C^\infty) & & & & \end{array},$$

temos

$$\begin{aligned}(\theta^\beta - \theta^\alpha) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^1) &\mapsto (-\log g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, C^\infty) \quad \text{(por (4.2))} \\ &\mapsto (-\log g_{\beta\gamma} + \log g_{\alpha\gamma} - \log g_{\alpha\beta}) \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}).\end{aligned}$$

Multiplicando a última expressão por $i/(2\pi)$, encontramos (4.1). Isso conclui a demonstração. □

Descrevemos a seguir um método de cálculo de $c_1(L)$. Sejam $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta localmente finita de M, trivializadora de ambos $TM^{\mathbb{C}}$ e L, e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Para cada $\alpha \in A$, seja s^α a seção de L sobre U_α tal que, na trivialização $U_\alpha \times \mathbb{C}$, $s_\alpha(p) = 1 \ \forall \ p \in U_\alpha$. Observe que, se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, $s^\alpha = g_{\beta\alpha} s^\beta$. Como no lema 3.1.2, defina, para cada $\alpha \in A$, uma conexão ∇^α em U_α tal que $\nabla^\alpha(s^\alpha) = 0$, e faça

$$\nabla = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha.$$

Por (IV) da seção 3.1, a matriz da conexão ∇^β em relação ao referencial s^α é $d\log g_{\beta\alpha}$. Portanto, a matriz da conexão ∇ em U_α é dada por

$$\theta^\alpha = \sum_\beta \rho_\beta d\log g_{\beta\alpha}.$$

Porém, se Θ_α é a matriz da curvatura em U_α, por (4.3) temos

$$\Theta^\alpha = \sum_\beta d(\rho_\beta d\log g_{\beta\alpha}).$$

Uma vez que

$$c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right],$$

concluímos a demonstração da

Proposição 4.5.4 *Nas condições acima,*

$$c_1(L)_{|U_\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \sum_\beta d(\rho_\beta d\log g_{\alpha\beta}) \in H^2_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

4.6 Feixes holomorfos

Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ feixes de grupos abelianos sobre o espaço topológico X. $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$, com a topologia produto, possui estrutura de feixe sobre $X\times X$. Seu grupo de seções sobre $U\times V\subset X\times X$, onde $U,V\subset X$ são abertos, é da forma $\mathcal{S}(U)\times\mathcal{T}(V)$. Definimos o *produto fibrado* entre os feixes $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ por

$$\mathcal{S}\times_\pi\mathcal{T} \;=\; \{(x,y)\in\mathcal{S}\times\mathcal{T};\ \pi(x)=\pi(y)\},$$

com a topologia induzida por $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$. Na definição, denotamos por π a projeção associada aos dois feixes. $\mathcal{S}\times_\pi\mathcal{T}$ é a restrição de $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ à diagonal $D=\{(p,p)\in X\times X\}$. Como conseqüência da definição,

$$(\mathcal{S}\times_\pi\mathcal{T})_p \;=\; \mathcal{S}_p\times\mathcal{T}_p\ \forall\, p\in X.$$

Sobre um aberto $U\subset X$, cada seção de $s\in(\mathcal{S}\times_\pi\mathcal{T})(U)$ é produzida restringindo uma seção $(f,g)\in(\mathcal{S}\times\mathcal{T})(U\times U)$, onde $f\in\mathcal{S}(U)$ e $g\in\mathcal{T}(U)$, à diagonal, ou seja, $s(p)=(f(p),g(p))\ \forall\, p\in U$.

Sejam $\mathcal{S}$ um feixe de grupos abelianos e $\mathcal{A}$ um feixe de anéis (comutativos, com unidade) sobre X. Dizemos que $\mathcal{S}$ é um *feixe de módulos* sobre $\mathcal{A}$ (ou ainda, um *feixe de $\mathcal{A}$-módulos*) se existe um homomorfismo de feixes $\mathcal{A}\times_\pi\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ tal que, $\forall\, p\in X$, a aplicação induzida em cada haste $\mathcal{A}_p\times\mathcal{S}_p\to\mathcal{S}_p$ define em $\mathcal{S}_p$ a estrutura de $\mathcal{A}_p$-módulo. Note que, para cada aberto $U\subset X$, a aplicação induzida $(\mathcal{A}\times_\pi\mathcal{S})(U)\to\mathcal{S}(U)$ proporciona a $\mathcal{S}$(U) estrutura de $\mathcal{A}(U)$-módulo. Ou seja, temos um pré-feixe de módulos sobre um pré-feixe de anéis, sendo a estrutura de módulo compatível com os homomorfismos de restrição. Reciprocamente, dados um pré-feixe de grupos abelianos $\{\mathcal{S}(U)\}$ e um pré-feixe de anéis $\{\mathcal{A}(U)\}$, tais que $\mathcal{S}(U)$ tem a estrutura de $\mathcal{A}(U)$-módulo para todo aberto $U\subset X$, de forma que essa estrutura seja compatível com os homomorfismos de restrição, então os feixes induzidos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ são tais que $\mathcal{S}$ é um feixe de $\mathcal{A}$-módulos.

Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são feixes de $\mathcal{A}$-módulos, definimos $\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{T}$ como o feixe de $\mathcal{A}$-módulos induzido pelo pré-feixe $\mathcal{S}(U)\otimes_{\mathcal{A}(U)}\mathcal{T}(U)$. As hastes desse feixe são da forma $\mathcal{S}_p\otimes_{\mathcal{A}_p}\mathcal{T}_p$. Observe que $\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\cong\mathcal{S}$, pois $A\otimes_A X\cong X$ para todos A anel e X A-módulo.

O feixe $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},\mathcal{T})$ é produzido a partir do pré-feixe cujos espaços de seções sobre o aberto $U\subset X$ são os $\mathcal{A}(U)$-módulos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{|U}}(\mathcal{S}_{|U},\mathcal{T}_{|U})$. $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},\mathcal{A})$ é chamado de *feixe dual a $\mathcal{S}$*, e é denotado por $\mathcal{S}^*$.

Definição 4.6.1 Seja M uma variedade complexa. Um *feixe holomorfo* sobre M é um feixe de módulos sobre $\mathcal{O}$, o feixe de germes de funções holomorfas em M.

Exemplo 4.6.2 $\mathcal{O}$ é feixe holomorfo, assim como Ω^p. A estrutura de $\mathcal{O}$-módulo é induzida pela multiplicação de funções complexas, no primeiro caso, e pela multiplicação de função complexa por p-forma holomorfa, no segundo.

Exemplo 4.6.3 Na mesma linha do exemplo anterior, $\mathcal{I}_V$, o feixe de germes de funções holomorfas que se anulam sobre a subvariedade analítica V de M, é um feixe holomorfo. Uma vez que $\mathcal{I}_V$ é subfeixe de $\mathcal{O}$, cada haste $\mathcal{I}_{V,p}$ é um ideal do anel $\mathcal{O}_p$. Por essa razão, esse feixe é chamado de *feixe de ideais* de V.

Exemplo 4.6.4 A inclusão $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{M}$ e a multiplicação nas hastes fazem do feixe de germes de funções meromorfas um feixe holomorfo.

Exemplo 4.6.5 Dado $n > 0$, $\mathcal{O}^n$ é o feixe obtido restringindo o produto direto $\mathcal{O} \times \ldots \times \mathcal{O}$ (n vezes) a $D = \{(p_1, \ldots, p_n) \in M \times \ldots \times M;\ p_1 = \ldots = p_n\}$. A haste sobre $p \in M$ é $\mathcal{O}_p^n = \mathcal{O}_p \times \ldots \times \mathcal{O}_p$. A operação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_p \times \mathcal{O}_p^n & \longrightarrow & \mathcal{O}_p^n \\ (g, (f_1, \ldots, f_n)) & \longmapsto & (gf_1, \ldots, gf_n) \end{array}$$

induz em $\mathcal{O}^n$ estrutura de feixe de $\mathcal{O}$-módulos. Denominamos $\mathcal{O}^n$ de *feixe holomorfo livre* de posto n.

$\mathcal{O}^n$ possui n seções canônicas $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, n$, consistindo da função constante 1 na j-ésima entrada e da função nula nas demais.

Definição 4.6.6 Um feixe holomorfo $\mathcal{S}$ sobre uma variedade complexa M é *coerente* se, para cada $p \in M$, existe um aberto $U_p \subset M$ contendo p e uma seqüência exata de homomorfismos de feixes

$$\mathcal{O}^m|_{U_p} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}^n|_{U_p} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{S}|_{U_p} \to 0.$$

Algumas palavras a respeito da definição. Se $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{O}^n|_{U_p}$ são as seções canônicas de $\mathcal{O}^n_{|U_p}$, então as seções $s_1 = \Psi_p^*(e_1), \ldots, s_n = \Psi_p^*(e_n) \in \mathcal{S}(U_p)$ geram $\mathcal{S}_{|U_p}$ como $\mathcal{O}_{|U_p}$-módulo no seguinte sentido: $\forall\ q \in U_p$, $s_1(q), \ldots, s_n(q)$ geram $\mathcal{S}_q$ como $\mathcal{O}_q$-módulo. Além disso, $Nuc(\Psi) \subset \mathcal{O}^n_{|U_p}$ (o chamado feixe de relações entre $s_1, \ldots, s_n$) é também gerado como $\mathcal{O}_{|U_p}$-módulo por um número finito de seções.

Um feixe holomorfo livre é, de maneira trivial, coerente. Vale mencionar que o núcleo de um homomorfismo $\mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^n$ entre feixes holomorfos livres sobre uma variedade complexa M é localmente coerente (teorema de Oka). Se V é subvariedade analítica de uma variedade complexa M, então seu feixe de ideais

$\mathcal{I}_V$ é coerente (teorema de Cartan). Veja [Gun] para uma demonstração desses resultados.

Uma classe especial de feixes coerentes é a seguinte:

Definição 4.6.7 Um feixe holomorfo $\mathcal{S}$ sobre a variedade complexa M é *localmente livre* de *posto n* se, para cada ponto $p \in M$, existe aberto $U_p \subset M$ contendo p tal que $\mathcal{S}_{|U} \cong \mathcal{O}^n_{|U}$.

Um feixe localmente livre de posto 1 é chamado de *feixe invertível*.

Exercício 9 Demonstre que, se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são feixes holomorfos localmente livres sobre a variedade complexa M, então $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{S},\mathcal{T})_p = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\mathcal{S}_p,\mathcal{T}_p)$ para todo $p \in M$.

Exercício 10 Demonstre que, se $\mathcal{S}$ é feixe holomorfo localmente livre, então $\mathcal{S}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{S},\mathcal{O})$ é localmente livre de mesmo posto que $\mathcal{S}$.

Exercício 11 Demonstre que, se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são feixes holomorfos localmente livres, então

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{S},\mathcal{T}) \;\cong\; \mathcal{S}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{T}.$$

Exercício 12 Demonstre que, se $\mathcal{S}$ é feixe holomorfo invertível, então

$$\mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{S}^* \;\cong\; \mathcal{O}.$$

Exemplo 4.6.8 Seja E fibrado vetorial holomorfo de posto n sobre a variedade complexa M. Definimos $\mathcal{O}(E)$, o *feixe de seções* associado a E, tomando, para cada aberto $U \subset M$, $\mathcal{O}(E)(U)$ como o grupo de seções holomorfas de E sobre U. Afirmamos que $\mathcal{O}(E)$ é localmente livre de posto n. De fato, em cada aberto trivializador U_α de E, $E_{|U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ (como variedades complexas), de onde resulta um isomorfismo natural de feixes $\mathcal{O}(E)_{|U_\alpha} \cong \mathcal{O}^n_{|U_\alpha}$.

Reciprocamente, a um feixe localmente livre $\mathcal{S}$ de posto n podemos associar um fibrado vetorial holomorfo de posto n. Basta tomarmos uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M para a qual existem isomorfismos $\phi_\alpha : \mathcal{O}^n_{|U_\alpha} \to \mathcal{S}_{|U_\alpha}$ para todo $\alpha \in A$. Se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \mathcal{O}^n_{|U_{\alpha\beta}} \to \mathcal{O}^n_{|U_{\alpha\beta}}$ é isomorfismo de feixes, correspondendo, portanto, a uma função $\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(n,\mathbb{C})$ cujas entradas são holomorfas em $U_{\alpha\beta}$. O cociclo determinado por $\phi_{\alpha\beta}$ induz um fibrado vetorial holomorfo E sobre M, cujos abertos trivializadores são os U_α, $\alpha \in A$.

Exercício 13 Mostre que E e E' são fibrados vetoriais holomorfos isomorfos se, e somente se, os feixes $\mathcal{O}(E)$ e $\mathcal{O}(E')$ são isomorfos.

Temos, portanto, uma bijeção entre classes de isomorfismo de fibrados vetoriais holomorfos de posto n e classes de isomorfismo de feixes localmente livres de mesmo posto.

A correspondência definida acima é funtorial. Isto é, a cada homomorfismo de fibrados vetoriais holomorfos $\Phi : E_1 \to E_2$ é associado um homomorfismo de feixes $\mathcal{O}(\Phi) : \mathcal{O}(E_1) \to \mathcal{O}(E_2)$, satisfazendo (a menos de isomorfismo):

(a) se $\mathcal{O}(\Phi) : \mathcal{O}(E_1) \to \mathcal{O}(E_2)$ e $\mathcal{O}(\Psi) : \mathcal{O}(E_2) \to \mathcal{O}(E_3)$ são homomorfismos de fibrados vetoriais holomorfos, então $\mathcal{O}(\Psi \circ \Phi) = \mathcal{O}(\Psi) \circ \mathcal{O}(\Phi)$;

(b) se $\mathrm{id}_E : E \to E$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{O}(E)} : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E)$ denotam as aplicações identidade do fibrado vetorial e do feixe correspondente, então $\mathcal{O}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(E)}$.

Essa correspondência leva o fibrado trivial $M \times \mathbb{C}^n$ no feixe $\mathcal{O}^n$. Além disso, ela respeita o produto tensorial, ou seja, $\mathcal{O}(E_1 \otimes E_2) \cong \mathcal{O}(E_1) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(E_2)$, e preserva os duais, ou seja, $\mathcal{O}(E^*) \cong \mathcal{O}(E)^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(E), \mathcal{O})$.

O conjunto de classes de isomorfismos de feixes invertíveis tem estrutura de grupo abeliano induzida pelo produto tensorial. A identidade desse grupo é o feixe $\mathcal{O}$, enquanto $\mathcal{S}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{S}, \mathcal{O})$ é o elemento inverso de $\mathcal{S}$. Da discussão acima, temos um isomorfismo entre o grupo de Picard e o grupo de classes de isomorfismo de feixes invertíveis.

Exemplo 4.6.9 Seja E fibrado vetorial holomorfo de posto n sobre a variedade complexa M. Definimos o *feixe de seções meromorfas* de E, denotado por $\mathcal{M}(E)$, através do produto tensorial

$$\mathcal{M}(E) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(E).$$

Em um aberto $U \subset M$, trivializador de E, uma seção $s \in \mathcal{M}(E)$ é dada por

$$s = m_1 \otimes_{\mathcal{O}(U)} s_1 + \ldots + m_k \otimes_{\mathcal{O}(U)} s_k.$$

Reduzindo o aberto U, podemos supor $m_1 = f_1/g_1, \ldots, m_k = f_k/g_k$, onde $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{O}(U)$, com $g_1, \ldots, g_k \neq 0$. Tomando $g \in \mathcal{O}$ o mínimo múltiplo comum de $g_1, \ldots, g_k$, se $h_1 = gf_1/g_1, \ldots h_k = gf_k/g_k$, escrevemos

$$\begin{aligned} s &= \frac{h_1}{g} \otimes_{\mathcal{O}(U)} s_1 + \ldots + \frac{h_k}{g} \otimes_{\mathcal{O}(U)} s_k \\ &= \frac{1}{g} \otimes_{\mathcal{O}(U)} (h_1 s_1 + \ldots + h_k s_k) \\ &= \frac{1}{g} \otimes_{\mathcal{O}(U)} \tilde{s}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{s}$ é seção de $\mathcal{O}(E)(U)$. Da discussão acima, vemos que uma seção meromorfa de E é fornecida pelos seguintes dados: uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M

por abertos contidos em abertos trivializadores de E, funções holomorfas não nulas $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ e aplicações holomorfas $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ para todo $\alpha \in A$, tais que

$$\frac{1}{g_\alpha} s_\alpha = \Theta_{\alpha\beta} \frac{1}{g_\beta} s_\beta \text{ se } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset,$$

onde $\Theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(n, \mathbb{C})$ são as funções de transição em relação à cobertura dada.

Como vimos, o cálculo da cohomologia de um feixe depende da passagem por um processo de limite direto envolvendo coberturas abertas da variedade. No caso de feixes holomorfos coerentes, esse inconveniente pode ser evitado, como discutiremos a seguir. Temos o seguinte resultado (veja [Gun1, p.44]):

Teorema 4.6.10 *Seja $\mathcal{S}$ um feixe de grupos abelianos sobre o espaço Hausdorff paracompacto X. Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta localmente finita de X. Suponha que $H^q(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_k}, \mathcal{S}) = 0$ para todo $q > 0$ e para todos $k \geq 0$ e $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in A$. Então*

$$H^q(X, \mathcal{S}) \cong H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}).$$

Uma cobertura satisfazendo as condições do teorema é denominada *cobertura de Leray* em relação a $\mathcal{S}$. Temos a seguinte definição:

Definição 4.6.11 Uma variedade complexa S é de *Stein* se $H^q(S, \mathcal{S}) = 0$ para todo feixe holomorfo coerente $\mathcal{S}$ e para todo $q > 0$.

Exemplos de variedades de Stein são bolas complexas e polidiscos de $\mathbb{C}^n$ ([Gun]). Se dois abertos de uma mesma variedade complexa são variedades de Stein, então sua interseção é de Stein. Assim, uma cobertura localmente finita de uma variedade complexa M por abertos biholomorfos a bolas ou polidiscos é uma cobertura de Leray em relação a qualquer feixe holomorfo coerente $\mathcal{S}$. Resumindo essa discussão:

Teorema 4.6.12 *Sejam M variedade complexa e $\mathcal{S}$ feixe holomorfo coerente sobre M. Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta localmente finita de M tal que cada U_α é variedade de Stein, então*

$$H^q(M, \mathcal{S}) \cong H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}).$$

Capítulo 5

Outros tópicos

5.1 Divisores

Seja M uma variedade complexa compacta. Uma *hipersuperfície analítica* é um conjunto analítico $S \subset M$ localmente dado pelos zeros de uma função holomorfa. Ou seja, existe uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos e funções holomorfas $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ tais que $S_{|U_\alpha} : \{f_\alpha = 0\}$. Uma hipersuperfície S é dita irredutível se sempre que escrevermos $S = S_1 \cup S_2$, com S_1 e S_2 hipersuperfícies, então $S_1 = S$ e $S_2 = \emptyset$, ou $S_1 = \emptyset$ e $S_2 = S$. Observamos que toda hipersuperfície pode ser escrita, de maneira única, como união finita de hipersuperfícies irredutíveis. Com efeito, isso decorre do fato de que $\mathcal{O}_p$ é domínio de fatoração única para cada $p \in M$ ([Gun]), e da compacidade de M.

Definição 5.1.1 O *grupo de divisores* de M, denotado por $Div(M)$, é o grupo abeliano livre gerado pelas hipersuperfícies irredutíveis de M, ou seja,

$$Div(M) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}\, S_\lambda,$$

onde $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é a família de todas as hipersuperfícies irredutíveis de M.

Um elemento de $D \in Div(M)$ é chamado de *divisor*. Ou seja, um divisor é uma soma formal finita $n_1 S_1 + \cdots + n_k S_k$, onde cada S_j é uma hipersuperfície analítica irredutível, com coeficientes $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$. $D = n_1 S_1 + \cdots + n_k S_k$ é um divisor *efetivo* se $n_j \geq 0 \ \forall\ j = 1, \ldots, k$.

A uma função meromorfa global não nula $m \in \mathcal{M}(M)$ corresponde um divisor dado pela soma formal de suas componentes de zeros e de pólos, com coeficientes iguais às suas multiplicidades (com sinal negativo, no caso dos pólos).

O divisor associado a $m \in \mathcal{M}(M)$ é denotado por (m). Note que se duas funções meromorfas não nulas $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(M)$ são tais que $(m_1) = (m_2)$, então existe $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $m_2 = cm_1$.

Dados um divisor $D = n_1S_1 + \cdots + n_kS_k$ e um aberto $U_\alpha \subset M$ no qual $f_{j,\alpha} = 0$, $j = 1, \ldots k$, são equações reduzidas de S_j, associamos a função meromorfa $f_{1,\alpha}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha}^{n_k} \in \mathcal{M}(U_\alpha)$.

Recordamos da seção 2.3.1 que a uma hipersuperfície S, dada em cada aberto U_α pela equação $f_\alpha = 0$, é associado o fibrado em retas holomorfo $[S]$ definido pelo cociclo $(f_{\alpha\beta})$, onde $f_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta$ em $U_{\alpha\beta}$. Definimos um homomorfismo $[\,\cdot\,] : Div(M) \to Pic(M)$ fazendo corresponder

$$D = n_1S_1 + \cdots + n_kS_k \longmapsto [D] = [S_1]^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes [S_k]^{\otimes n_k}.$$

Essa aplicação não é, em geral, injetiva. Podemos, porém, caracterizar seu núcleo.

Proposição 5.1.2 *$[D] = 0$ se, e somente se, existe função meromorfa $m \in \mathcal{M}(M)$ tal que $D = (m)$.*

Demonstração: Suponha $D = (m) = n_1S_1 + \cdots + n_kS_k$. Tomamos cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M e equações locais reduzidas $f_{j,\alpha} = 0$ para $S_{j|U_\alpha}$, $j = 1, \ldots k$. Sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, temos funções $f_{j,\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tais que $f_{j,\alpha} = f_{j,\alpha\beta} f_{j,\beta}$. $[(m)]$ é induzido pelo cociclo $\varphi_{\alpha\beta} = f_{1,\alpha\beta}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha\beta}^{n_k} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$. O resultado segue, observando que $f_{1,\alpha}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha}^{n_k} / m_{|U_\alpha} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ induz, em $U_{\alpha\beta}$, o mesmo cociclo. Portanto, $[(m)]$ é o fibrado trivial.

Reciprocamente, se D é dado localmente por $f_{1,\alpha}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha}^{n_k} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, $[D]$ é induzido pelo cociclo $\varphi_{\alpha\beta} = f_{1,\alpha\beta}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha\beta}^{n_k} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$, onde $f_{j,\alpha} = f_{j,\alpha\beta} f_{j,\beta}$ sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Se $[D]$ é isomorfo ao fibrado trivial, existem funções $\varphi_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ tais que $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}\varphi_\beta$ em $U_{\alpha\beta}$, sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. As funções $f_{1,\alpha}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha}^{n_k} / \varphi_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ coincidem nas interseções $U_{\alpha\beta}$. Portanto, definem uma função meromorfa $m \in \mathcal{M}(M)$ tal que $(m) = D$. $\square$

Em outras palavras, dois divisores D_1 e D_2 induzem o mesmo fibrado se, e somente se, diferem um do outro pelo divisor de uma função meromorfa $m \in \mathcal{M}(U)$, ou seja, $D_1 = D_2 + (m)$. Dois divisores nessa situação são ditos *linearmente equivalentes*. A noção de equivalência linear define em $Div(M)$ uma relação de equivalência. Portanto, $[\,\cdot\,]$ induz um homomorfismo injetivo

$$\frac{Div(M)}{\text{equivalência linear}} \hookrightarrow Pic(M). \tag{5.1}$$

Uma seção holomorfa não nula de um fibrado induz um divisor tomando, localmente, o conjunto de seus zeros. Se s é uma tal seção, denotaremos o divisor associado por (s).

Proposição 5.1.3 *Seja L um fibrado em retas holomorfo e $s \in H^0(M, \mathcal{O}(L))$, $s \neq 0$. Então $[(s)]$ e L são isomorfos.*

Demonstração: Se s é definida em cada aberto trivializador U_α por $s_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, na interseção $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, temos $s_\alpha = s_{\alpha\beta}s_\beta$, onde $s_{\alpha\beta}$ é o cociclo que define L. Uma vez que $(s)_{|U_\alpha}$ tem equação $s_\alpha = 0$, concluímos que $[(s)] \cong L$. □

Uma seção holomorfa não trivial de um fibrado em retas induz um divisor efetivo, ao qual o fibrado original corresponde pela aplicação $[\,\cdot\,]$. Reciprocamente, se D é efetivo, $[D]$ possui ao menos uma seção holomorfa não nula: se $f_{1,\alpha}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha}^{n_k} = 0$ define $D_{|U_\alpha}$, $s_\alpha = f_{1,\alpha}^{n_1} \cdots f_{k,\alpha}^{n_k} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, por sua vez, define uma seção $s \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$. Por essa razão, um fibrado em retas que admite uma seção holomorfa não trivial é chamado de *efetivo*.

De modo mais geral, uma seção meromorfa s de um fibrado em retas L induz um divisor (s), tomando, localmente, conjuntos de zeros e pólos, com respectivas multiplicidades e sinais. Seguindo o procedimento acima, temos que $[(s)] \cong L$. Além disso, dado um divisor D, as funções que localmente fornecem suas equações se colam em uma seção meromorfa não nula de $[D]$.

Se D é um divisor tal que $H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ é não trivial, então, dada uma seção não nula $s \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$, existe uma função meromorfa $m \in \mathcal{M}(U)$ tal que $(s) = D + (m)$. Tal função é obtida, localmente, pelo quociente entre s e a seção meromorfa definida por D. Reciprocamente, se existe função meromorfa $m \in \mathcal{M}(M)$ tal que $D + (m)$ é efetivo, então $D + (m)$ define uma seção holomorfa $s \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$. Escrevendo $D = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda S_\lambda$ (apenas finitos n_λ não nulos), tal m deve possuir as seguintes propriedades:

(i) S_λ é divisor de zeros de m com multiplicidade maior ou igual a $-n_\lambda$, se $n_\lambda < 0$;

(ii) S_λ é divisor de pólos de m com multiplicidade no máximo n_λ, se $n_\lambda > 0$;

(iii) S_λ não é divisor de pólos de m, se $n_\lambda = 0$.

Visto que duas seções não nulas s_1 e s_2 definem o mesmo divisor se, e somente se, existe $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $s_2 = cs_1$, podemos identificar o conjunto dos divisores efetivos linearmente equivalentes a D e o espaço projetivo $\mathbb{P}_\mathbb{C}(H^0(M, \mathcal{O}([D])))$.

5.2 Variedades projetivas

Definição 5.2.1 Uma variedade complexa M é *projetiva* se existe um mergulho holomorfo $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}^n_\mathbb{C}$ para algum $n > 0$.

Como $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é mergulho, $i(M)$ é subvariedade analítica de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Reciprocamente, uma subvariedade analítica $M \subset \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ é uma variedade projetiva, tomando, na definição, a aplicação de inclusão $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Definição 5.2.2 Um *conjunto algébrico* em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é o conjunto de zeros de uma família $\{P_\lambda\}$ de polinômios homogêneos $P_\lambda(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ nas coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Podemos, na definição, tomar a família finita. De fato, se $\mathfrak{i}$ é o ideal gerado pelos P_λ, $\mathfrak{i}$ é finitamente gerado, uma vez que $\mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ é noetheriano. Cada gerador P de $\mathfrak{i}$ é tal que $P(\lambda z_0, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = 0 \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$, para cada $(z_0 : z_1 : \ldots z_n)$ no conjunto algébrico. Assim, P é polinômio homogêneo. O conjunto de zeros de um único polinômio é chamado de *hipersuperfície algébrica.*

Vimos que $\mathbb{L}^{\otimes d}$, onde $d > 0$, possui seções holomofas induzidas por polinômios homogêneos de grau d nas variáveis $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Afirmamos que essas são todas as seções de $\mathbb{L}^{\otimes d}$. De fato, suponha que s seja uma seção que não se anula sobre $\{z_0 = 0\}$. Então s/z_0^k induz uma função meromorfa $m \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\})$, constante sobre as retas passando pela origem, cujo conjunto de pólos é $\{z_0 = 0\}$ e tem multiplicidade d. Assim, $f = z_0^d m$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ e, pelo teorema de Hartogs, se estende a uma função holomorfa em $\mathbb{C}^{n+1}$, satisfazendo $f(\lambda z) = \lambda^d f(z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Concuímos que f é um polinômio homogêneo de grau d e, portanto, s é a seção induzida por esse polinômio.

Exercício 1 Calcule o número de monômios distintos de grau d nas variáveis $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Conclua que, se $d > 0$,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(d)) = \binom{d+n}{n},$$

onde $\mathcal{O}(d)$ denota $\mathcal{O}(\mathbb{L}(d))$.

Uma *função racional* em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é uma função meromorfa induzida pelo quociente de dois polinômios homogêneos de mesmo grau em $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Proposição 5.2.3 *Toda função meromorfa em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é racional.*

Demonstração: Seja $m \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ função meromorfa não nula. Considere D_1 seu divisor de zeros e D_2 seu divisor de pólos. Pelo que foi dito acima, existem polinômios homogêneos $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ tais que $D_1 = (P_1)$ e $D_2 = (P_2)$. Afirmamos que P_1 e P_2 têm o mesmo grau. De fato, se $d_1 = grau(P_1)$ e $d_2 = grau(P_2)$ fossem tais que $d_1 > d_2$, a função $mP_2 z_0^{d_1}/P_1 z_0^{d_2}$

seria holomorfa em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, nula sobre $\{z_0 = 0\}$ e, por isso, identicamente nula. Logo, mP_2/P_1 é uma função holomorfa em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que nunca se anula. É, portanto, idêntica a uma constante $c \in \mathbb{C}^*$, de onde resulta $m = cP_1/P_2$. □

Proposição 5.2.4 *Toda hipersuperfície analítica em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é uma hipersuperfície algébrica.*

Demonstração: Seja $V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ uma hipersuperfície analítica. Uma vez que o fibrado hiperplano $\mathbb{L}$ gera $Pic(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$, temos que $[V] = \mathbb{L}^{\otimes d}$ para algum $d \in \mathbb{Z}$. Visto que $[V]$ possui seção holomorfa não trivial, temos ainda $d > 0$. Porém, a seção induzida por V em $H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(d))$ corresponde ao divisor $P(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0$, onde P é polinômio homogêneo de grau d. Portanto, $V : \{P(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0\}$. □

De um modo mais geral, temos o ([GH, p.167])

Teorema 5.2.5 (Chow) *Todo conjunto analítico em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é algébrico.*

Citamos ainda o seguinte resultado [GH, p.161]:

Teorema 5.2.6 *Todo fibrado em retas holomorfo sobre uma variedade projetiva possui seção meromorfa não trivial.*

Segue o

Corolário 5.2.7 *Seja M variedade projetiva. Então* (5.1) *define um isomorfismo*

$$\frac{Div(M)}{\textit{equivalência linear}} \cong Pic(M).$$

5.3 Número de interseção em superfícies

Consideraremos, de maneira breve, o conceito de número de interseção em superfícies complexas. Sugerimos também [GH, p.60-65] para um tratamento mais completo sobre esse assunto.

Seja M uma superfície complexa. Se M é compacta e $S \subset M$ é uma curva complexa compacta,temos que $c_1([S]) \in H^2_{DR}(M, \mathbb{C})$ é o dual de Poincaré do ciclo determinado por S em $H^s_2(M, \mathbb{Z})$ (no caso em que S é não singular, veja

3.3.6; no caso geral, consulte [GH, p.141]). Se L é um fibrado em retas holomorfo, definimos o *número de interseção* entre S e L por

$$\begin{aligned} S \cdot L &= \int_M c_1([S]) \wedge c_1([L]) \\ &= \int_S c_1(L) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Estendemos tal conceito linearmente ao grupo de divisores de M, definindo, assim, uma forma bilinear

$$Div(M) \times Pic(M) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Dados divisores D_1, D_2, definimos seu *número de interseção* fazendo

$$D_1 \cdot D_2 = D_1 \cdot [D_2] = D_2 \cdot [D_1].$$

Temos, assim, uma forma bilinear simétrica

$$Div(M) \times Div(M) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Se S_1 e S_2 são germes de curvas analíticas no ponto $p \in M$, sem componentes em comum, definimos o número de interseção entre S_1 e S_2 em p como

$$(S_1 \cdot S_2)_p = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle f_1, f_2 \rangle},$$

onde $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_p$ fornecem equações reduzidas de S_1, S_2 e $\langle f_1, f_2 \rangle$ denota o ideal gerado por esses elementos. Um estudo de dimensões desse tipo será feito no capítulo 7. Na linguagem daquele capítulo, $(S_1, S_2)_p = \mu(v, p)$, onde v é o campo de vetores em torno de p de componentes (f_1, f_2).

Proposição 5.3.1 *Sejam S_1 e S_2 curvas analíticas compactas sem componentes em comum. Então*

$$S_1 \cdot S_2 = \sum_{p \in S_1 \cap S_2} (S_1 \cdot S_2)_p.$$

Demonstração: Tomamos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura localmente finita de M tal que S_2 tem equação reduzida $f_\alpha = 0$ em U_α. Seja $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Assim, $[S_2]$ é definido pelo cociclo $(f_{\alpha\beta})$, onde $f_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta$ se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Escrevemos $S_1 \cap S_2 = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Suponhamos ainda que, para cada $j = 1, \ldots, k$, exista um único aberto U_{α_j} tal que $p_j \in U_{\alpha_j}$, e, além disso, que $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} = \emptyset$ se $i \neq j$. Temos então

$$\begin{aligned} c_1(S_2)_{|U_{\alpha_j}} &= \sum_{\gamma \in A} d(\rho_\gamma d \log f_{\alpha_j \gamma}) \\ &= \sum_{\gamma \in A} d(\rho_\gamma d(\log f_{\alpha_j} - \log f_\gamma)) \\ &= -d(\rho_{\alpha_j} d \log f_{\alpha_j}) - \sum_{\gamma \neq \alpha_j} d(\rho_\gamma d \log f_\gamma). \end{aligned}$$

Seja

$$\omega = \sum_{\gamma \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}} \rho_\gamma d \log f_\gamma.$$

Observe que ω é nula em uma vizinhança de cada p_j. Temos

$$\begin{aligned} \int_{S_1 \cap U_{\alpha_j}} c_1(S_2)_{|U_{\alpha_j}} &= \int_{S_1 \cap U_{\alpha_j}} (-d(\rho_{\alpha_0} d \log f_{\alpha_0}) - d\omega_{|U_{\alpha_j}}) \\ &= \int_{\partial_j S_1} d \log f_{\alpha_j} - \int_{S_1 \cap U_{\alpha_j}} d\omega_{|U_{\alpha_j}}, \end{aligned}$$

onde $\partial_j S_1 = S_1 \cup S^3_\varepsilon$, orientada como a fronteira de $S \cap B^4_\varepsilon$, S^3_ε e B^4_ε denotando a esfera e a bola de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno com centro em p_j. Supondo S_1 irredutível em p_j e tomando $\alpha(T)$ uma parametrização de Puiseux de S_1 em torno de p_j (teorema 6.2.7), concluímos que a primeira das integrais acima é a multiplicidade de $f_{\alpha_j} \circ \alpha(T)$ em $T = 0$. Portanto, fazendo uso da proposição 7.3.1 adiante,

$$\int_{\partial_j S_1} d \log f_{\alpha_j} = (S_1 \cdot S_2)_{p_j}.$$

O resultado segue, observando que

$$-\int_{S_1} d\omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial_j S_1} \omega = 0.$$

□

Na situação da proposição acima, $S_1 \cdot S_2 \geq 0$ e a desigualdade estrita vale se, e somente se, S_1 e S_2 se interceptam. Segue que, se D_1 e D_2 são divisores efetivos tais que $D_1 \cdot D_2 < 0$, então D_1 e D_2 têm uma componente em comum.

5.4 Explosão em uma superfície

Consideramos duas cópias de $\mathbb{C}^2$, chamadas de U_1 e U_2, com coordenadas (x,t) e (u,y), respectivamente. Através do biholomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U_1 \setminus \{t=0\} & \longrightarrow & U_2 \setminus \{u=0\} \\ (x,t) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{t}, tx\right) \end{array} \tag{5.2}$$

identificamos os pontos de $U_1 \setminus \{t=0\}$ e $U_2 \setminus \{s=0\}$ e, assim, construímos uma superfície complexa $\tilde{\mathbb{C}}^2$.

Temos uma aplicação $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi(x,t) &= (x,tx) \text{ em } U_1, \\ \pi(u,y) &= (uy,y) \text{ em } U_2. \end{aligned}$$

Note que π está bem definida (respeita a identificação que dá origem a $\tilde{\mathbb{C}}^2$) e é holomorfa. Temos

$$\pi^{-1}((0,0)) = \{(0,t) \in U_1\} \cup \{(u,0) \in U_2\}.$$

Esse conjunto de pontos, submetido à identificação (5.2), é a reta projetiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e é denotado por P. Além disso,

$$\pi_{|\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus P} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

é um biholomorfismo. Tal aplicação $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ é chamada de *explosão* ou *blow up* em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

Proposição 5.4.1

$$P \cdot P = -1.$$

Demonstração: Note que, em U_1, P tem equação $x = 0$, enquanto em U_2 sua equação é $y = 0$. Assim, em $U_{12} = U_1 \cap U_2$, $[P]$ é dado pelo cociclo $g_{12} = x/y = 1/t$. Tomamos $\{\rho_1, \rho_2\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, U_2\}$. Temos

$$\begin{aligned} c_1([P])_{|U_1} &= \frac{1}{2\pi i} d\left(\rho_2 d \log\left(\frac{1}{t}\right)\right), \\ c_1([P])_{|U_2} &= \frac{1}{2\pi i} d\left(\rho_1 d \log\left(\frac{1}{s}\right)\right). \end{aligned}$$

$c_1(L) \in H^2_{DR}(M, \mathbb{C})$ é identicamente nula em uma vizinhança das origens de ambos os sistemas de coordenadas. Assim, tomando em $P \cap U_1$ um círculo γ_r de raio r suficientemente grande de forma que $\rho_2 \equiv 1$ fora de γ_r e aplicando Stokes, temos

$$\begin{aligned} P \cdot P = \int_P c_1(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} d \log \left(\frac{1}{t} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dt}{t} = -1. \end{aligned}$$

□

Para definir a explosão em um ponto p de uma superfície complexa M, adotamos o procedimento a seguir. Tomamos coordenadas locais holomorfas em uma vizinhança de p, digamos $\Phi : U \to \mathbb{C}^2$, tais que $\Phi(p) = (0,0)$. Sejam $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ a explosão em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ e $\tilde{U} = \pi^{-1}(\phi(U)) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$. Produzimos uma superfície complexa $\tilde{M}$ colando $M \setminus \{p\}$ e $\tilde{U}$ através da identificação

$$U \setminus \{p\} \subset M \longleftrightarrow \tilde{U} \setminus P \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$$

pelo biholomorfismo $\pi^{-1}_{|\Phi(U)\setminus\{(0,0)\}} \circ \Phi$. As aplicações

$$\begin{array}{ccc} M \setminus \{p\} & \longrightarrow & M \setminus \{p\} \\ q & \longmapsto & q \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & U \\ q & \longmapsto & \Phi^{-1} \circ \pi_{|\tilde{U}}(q) \end{array}$$

se identificam em uma aplicação holomorfa, que, abusando da notação, será denotada por $\pi : \tilde{M} \to M$. Ela satisfaz:

(i) $\pi^{-1}(p)$ é uma reta projetiva, ainda denotada por P, tal que $P \cdot P = -1$;

(ii) $\pi_{|\tilde{M}\setminus P} : \tilde{M} \setminus P \to M \setminus \{p\}$ é um biholomorfismo.

Proposição 5.4.2 *Se $\pi : \tilde{M} \to M$ é uma explosão em $p \in M$ e K_M, $K_{\tilde{M}}$ denotam os fibrados canônicos de M, $\tilde{M}$, então*

$$K_{\tilde{M}} = \pi^*[K_M] \otimes [P].$$

Demonstração: Basta observar que, se $\omega = a(x,y)\, dx \wedge dy$ é uma 2-forma holomorfa em vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, a explosão em $(0,0)$ produz

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(x,t) &= a(x,xt)\, x\, dx \wedge dt \quad \text{nas coordenadas } (x,t), \\ \pi^*\omega(x,t) &= a(uy,y)\, y\, du \wedge dy \quad \text{nas coordenadas } (u,y). \end{aligned}$$

Assim, uma seção local de K_M é levada por π em uma seção de $K_{\tilde{M}}$ que se anula identicamente sobre P com multiplicidade 1. □

Seja S um germe de curva analítica em $p = (0,0) \in \mathbb{C}^2$. Seja $f(x,y) = 0$ sua equação local reduzida. Escrevemos

$$f(x,y) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k(x,y),$$

seu desenvolvimento em série de Taylor, onde $f_m \not\equiv 0$.

Definição 5.4.3 O número m é chamado de *multiplicidade* de S em p e é denotado por $m_p(S)$.

Observe que S é lisa (ou seja, é uma variedade complexa) em p se, e somente se, $m_p(S) = 1$. De fato, $m_p(S) = 1$ equivale a $(\partial f/\partial x)(p) \neq 0$ ou a $(\partial f/\partial y)(p) \neq 0$.

Efetuemos uma explosão em p. $\pi^{-1}(S \setminus \{p\})$ é uma curva analítica fora de $P = \pi^{-1}(p)$ de equação

$$f(x,xt) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k(x,xt) = x^m \sum_{k=m}^{\infty} x^{k-m} f_k(1,t) \tag{5.3}$$

nas coordenadas (x,t) e

$$f(uy,y) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k(uy,y) = y^m \sum_{k=m}^{\infty} y^{k-m} f_k(u,1) \tag{5.4}$$

nas coordenadas (u,y). Assim,

$$\tilde{f}(x,t) = \frac{f(x,xt)}{x^m} = \sum_{k=m}^{\infty} x^{k-m} f_k(1,t)$$

e

$$\tilde{f}(u,y) = \frac{f(uy,y)}{y^m} = \sum_{k=m}^{\infty} y^{k-m} f_k(u,1)$$

definem equações para a curva analítica $\pi^*S = \overline{\pi^{-1}(S \setminus \{p\})}$. A curva π^*S é chamada de *transformado estrito* de S. Observe que os pontos de interseção entre π^*S e $P = \pi^{-1}(p)$ são dados pelas raízes de $f_m(1,t) = 0$ e, possivelmente, $(u,y) = (0,0)$ se $f_m(0,1) = 0$. Em particular, se $f_m(x,y)$ possui um termo em

y^m, então $(u, y) = (0, 0)$ não está em $\pi^* S \cap P$. Observe que, se S é lisa, $\pi^* S$ e P são transversais

Se $\tilde{S}$ é uma curva analítica passando por um ponto $q \in P$ distinta de P, então $\pi(\tilde{S})$ é uma curva analítica passando por p. De fato, uma vez que π é uma aplicação holomorfa própria, decorre que $\pi(S)$ é um conjunto analítico (Veja [Gun]).

Seja M uma superfície complexa e π uma explosão em $p \in M$. Se S é uma curva analítica compacta contendo p, então, por (5.3) e (5.4),

$$\pi^*[S] = [P]^{\otimes m} \otimes [\pi^* S],$$

onde $m = m_p(S)$. Uma vez que $\pi^*[S] \cdot P = 0$, temos

$$\pi^* S \cdot P = -mP \cdot P = m.$$

Sejam S_1 e S_2 curvas compactas em M tais que $p \in S_1 \cap S_2$, com $m_1 = m_p(S_1)$ e $m_2 = m_p(S_2)$. Temos

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= \pi^*[S_1] \cdot \pi^*[S_2] \\ &= (m_1 P + \pi^* S_1) \cdot (m_2 P + \pi^* S_2) \\ &= -m_1 m_2 + m_1 P \cdot \pi^* S_2 + m_2 P \cdot \pi^* S_1 + \pi^* S_1 \cdot \pi^* S_2, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\pi^* S_1 \cdot \pi^* S_2 = S_1 \cdot S_2 - m_1 m_2.$$

Em particular, fazendo $S_1 = S_2 = S$,

$$\pi^* S \cdot \pi^* S = S \cdot S - m^2$$

e, no caso em que S é lisa,

$$\pi^* S \cdot \pi^* S = S \cdot S - 1.$$

Dado um ponto p em uma superfície complexa M, dizemos que π é uma seqüência finita de explosões em p se $\pi = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1$, onde π_1 é explosão em p e π_k é explosão em algum ponto de $(\pi_{k-1} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$, $k = 2, \ldots, n$. Note que $\pi^{-1}(p)$ é uma união n de retas projetivas, cada uma delas associada a uma das explosões, com cruzamentos normais. Cada um desses cruzamentos é chamado de *esquina*. Se S é um germe de curva analítica passando por p, podemos iterar os transformados estritos associados a cada explosão e definir $\pi^* S = \pi_n^* \ldots \pi_1^* S$.

Uma demonstração para o seguinte teorema pode ser encontrada em [CS1] ou [BK]. Observamos que o teorema 6.2.2 adiante contém uma prova desse resultado.

Teorema 5.4.4 *Se S é um germe de curva analítica em $p \in M$, então existe uma seqüência finita de explosões em p, denotada por π, tal que $\pi^* S$ é lisa.*

Parte II

Índices de campos holomorfos

Capítulo 6

Folheações holomorfas

6.1 Definições

Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$.

Definição 6.1.1 Uma *folheação holomorfa não singular* de *dimensão* k (ou *codimensão* $n-k$) em M, onde $1 \leq k \leq n-1$, é dada pelo seguinte conjunto de informações:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, um biholomorfismo $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário na origem;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{rrcll} \Phi_{\alpha\beta}: & \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \longrightarrow & \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) & \\ & (z,w) & \longmapsto & \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z,w) & = \ (\varphi_1, \varphi_2) \end{array}$$

satisfaz $\Phi_{\alpha\beta}(z,w) = (\varphi_1(z,w), \varphi_2(w))$.

Cada aberto U_α é chamado de *aberto trivializador* da folheação. Por (b), U_α é decomposto em variedades de dimensão k da forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times w_0)$, onde $w_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, chamadas de *placas*. Por (c), as placas se sobrepõem nas interseções de abertos trivializadores da seguinte forma: se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$ são placas, ou $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$, ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Definimos a seguinte relação de equivalência em M: $p \sim q$ se existem placas $P_1, \ldots, P_n$, com $p \in P_1$ e $q \in P_n$ tais que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n-1$. A classe de equivalência de $p \in M$ por essa relação é chamada de *folha* por p. Cada folha, com a topologia gerada pelos abertos de suas placas, possui estrutura de variedade complexa de dimensão k imersa em M. Uma folheação proporciona, portanto, uma decomposição da variedade em subvariedades imersas de dimensão k, duas a duas disjuntas. O *espaço tangente* à folheação $\mathcal{F}$ em $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$, é definido como o espaço tangente, no ponto p, à folha passando por esse ponto. Tem, portanto, dimensão k. Dizemos que duas folheações são iguais se todas as suas folhas coincidem.

Exercício 1 Mostre que uma folheação pode ser dada pelo seguinte conjunto de informações:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, uma submersão holomorfa $\Psi : U_\alpha \to \mathbb{C}^{n-k}$;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, uma aplicação holomorfa

$$\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n-k, \mathbb{C})$$

que satisfaz $\Psi_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Exemplo 6.1.2 Se v é um campo de vetores holomorfo não singular em um aberto $U \subset M$, então o teorema do fluxo tubular holomorfo implica que U possui uma estrutura de folheação de dimensão 1. Observe que, se $\tilde{U} \subset M$ é aberto com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, admitindo um campo de vetores não singular $\tilde{v}$ que satisfaz $v_{|U\cap\tilde{U}} = f\tilde{v}_{|U\cap\tilde{U}}$ para alguma função $f : U \cap \tilde{U} \to \mathbb{C}^*$ holomorfa, então v e $\tilde{v}$ induzem a mesma folheação em $U \cap \tilde{U}$. Temos, assim, uma folheação definida em $U \cup \tilde{U}$. Reciprocamente, uma folheação de dimensão 1 é induzida localmente por campos de vetores não singulares. Basta tomar, em cada aberto trivializador U_α, o campo $v_\alpha = D(\Phi_\alpha^{-1})\partial/\partial z_1$, onde $(z_1, (z_2, \ldots, z_n))$ são coordenadas de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$. Observe que, se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, para cada $p \in U_{\alpha\beta}$, existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $v_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(p)v_\beta(p)$. A função $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ assim definida é holomorfa. Portanto, o seguinte conjunto de dados:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, um campo de vetores holomorfo não singular v_α em U_α;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função homomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ tal que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$

define uma folheação de dimensão 1 em M.

Definição 6.1.3 Uma *folheação holomorfa singular* de *dimensão* k (ou *codimensão* $n-k$), onde $1 \leq k \leq n-1$, em uma variedade complexa M é uma folheação não singular de dimensão k em $M \setminus S$, onde S é um conjunto analítico em M de codimensão maior ou igual a 2.

Exigiremos, ainda, que o conjunto S da definição acima seja minimal no seguinte sentido: não existe subconjunto analítico próprio $S' \subset S$ tal que a folheação regular em $M \backslash S$ se estenda a $M \backslash S'$. Nessas condições, S é chamado de *conjunto singular* da folheação. O conjunto singular da folheação $\mathcal{F}$ é denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Os elementos de $Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos singulares* ou *singularidades*, enquanto os elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos regulares*. As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da folheação regular $\mathcal{F}_{|M\backslash Sing(\mathcal{F})}$. Duas folheações singulares $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são iguais se:

(i) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$;

(ii) as folheações regulares $\mathcal{F}_{|M\backslash Sing(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'_{|M\backslash Sing(\mathcal{F}')}$ são iguais.

De agora em diante, usaremos o termo folheação para designar folheação holomorfa singular.

Proposição 6.1.4 *Toda folheação de dimensão* 1 *é induzida localmente por um campo de vetores holomorfo.*

Demonstração: Uma vez que o problema é local, podemos considerá-lo em um polidisco $P \subset \mathbb{C}^n$. Seja $\mathcal{F}$ folheação em P. $\mathcal{F}_{|P\backslash Sing(\mathcal{F})}$ é uma folheação holomorfa não singular e, de acordo com o exemplo acima, existem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $P \setminus Sing(\mathcal{F})$ e campos de vetores v_α em U_α induzindo $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$, satisfazendo $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$ sempre $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, onde $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ é holomorfa. Escrevemos cada um desses campos em coordenadas: $v_\alpha = (v_1^{(\alpha)}, \ldots, v_n^{(\alpha)})$. Uma vez que $P \setminus Sing(\mathcal{F})$ é conexo, podemos supor $v_n^{(\alpha)} \not\equiv 0$ para todo $\alpha \in A$. Para cada $\alpha \in A$,

$$g_1^{(\alpha)} = \frac{v_1^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}}, \ldots, g_{n-1}^{(\alpha)} = \frac{v_{n-1}^{(\alpha)}}{v_n^{(\alpha)}} \tag{6.1}$$

são funções meromorfas em U_α. Se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, visto que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta}v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$, temos

$$g_1^{(\alpha)} = g_1^{(\beta)}, \ldots, g_{n-1}^{(\alpha)} = g_{n-1}^{(\beta)}.$$

Assim, as definições locais de (6.1) são compatíveis e definem funções meromorfas $g_1, \ldots, g_{n-1}$ em $P \setminus Sing(\mathcal{F})$. Uma vez que $Sing(\mathcal{F})$ tem codimensão pelo menos 2, o teorema de extensão de Levi ([GH]) nos permite estender $g_1, \ldots, g_{n-1}$ a funções meromorfas em P, ainda denotadas por $g_1, \ldots, g_{n-1}$. Seja h o mínimo múltiplo comum dos seus denominadores (em um polidisco, uma função meromorfa é o quociente de funções holomorfas - veja [Gun]). O campo $v = (hg_1, \ldots, hg_{n-1}, h)$ é holomorfo em P, seu conjunto singular está contido em $Sing(\mathcal{F})$ e induz $\mathcal{F}$ em $M \setminus Sing(\mathcal{F})$. $\square$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 na variedade complexa M. Sejam U_α e $U_\beta \subset M$ abertos, com $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, nos quais $\mathcal{F}$ é induzida por campos holomorfos v_α e v_β, respectivamente. Sabemos que existe $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \setminus Sing(\mathcal{F}) \to \mathbb{C}^*$ holomorfa satisfazendo $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}\setminus Sing(\mathcal{F})} = f_{\alpha\beta} v_{\alpha|U_{\alpha\beta}\setminus Sing(\mathcal{F})}$. Pelo teorema de extensão de Hartogs, estendemos $f_{\alpha\beta}$ a uma função holomorfa em $U_{\alpha\beta}$, ainda denotada por $f_{\alpha\beta}$. Esta função não se anula. De fato, seu conjunto de zeros, se diferente de vazio, seria uma variedade analítica de codimensão 1 inteiramente contida em $Sing(\mathcal{F})$, conjunto analítico de codimensão pelo menos 2. Por fim, temos $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\alpha|U_{\alpha\beta}}$, uma vez que essa relação é satisfeita em $U_{\alpha\beta} \setminus Sing(\mathcal{F})$.

Resulta dessa discussão que uma folheação de dimensão 1 em uma variedade complexa M é definida pelo seguinte conjunto de dados:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, um campo de vetores holomorfo v_α em U_α cujo conjunto singular tem codimensão maior ou igual a 2;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função homomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ tal que $v_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} v_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Sejam M variedade complexa e $U \subset M$ aberto. Seja ω uma 1-forma diferencial holomorfa em U tal que $Sing(\omega) = \{p \in U; \omega(p) = 0\}$ tem codimensão maior ou igual a 2. Dizemos que ω é integrável se existe uma folheação $\mathcal{F}$ não singular de codimensão 1 em $U \setminus Sing(\omega)$ tal que $T_p\mathcal{F}$ coincide com o núcleo de $\omega(p)$ para todo $p \in U \setminus Sing(\omega)$. O teorema de Frobenius ([CL]) diz que uma 1-forma ω é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$ (observe que essa condição é trivialmente satisfeita se M tem dimensão 2). Reciprocamente, seguindo os mesmos passos do que fizemos para campos de vetores, mostra-se que toda folheação holomorfa de codimensão 1 é induzida localmente por uma 1-forma holomorfa integrável.

Sejam $U, \tilde{U} \subset M$ abertos com $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, ω e $\tilde{\omega}$ 1-formas holomorfas em U e $\tilde{U}$, respectivamente, ambas integráveis e com conjunto singular de codimensão pelo menos dois. Suponha existir uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1 em $U \cup \tilde{U}$ tal que $\mathcal{F}_{|U}$ e $\mathcal{F}_{|\tilde{U}}$ são induzidas por ω e $\tilde{\omega}$, respectivamente. Note que, se $p \in (U \cap \tilde{U}) \setminus (Sing(\omega) \cup Sing(\tilde{\omega}))$, então existe $g(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $\omega(p) = g(p)\tilde{\omega}(p)$. A função $g : (U \cap \tilde{U}) \setminus (Sing(\omega) \cup Sing(\tilde{\omega})) \to \mathbb{C}^*$ assim definida é holomorfa. Se estende, pelo teorema de Hartogs, a uma função holomorfa $g : U \cap \tilde{U} \to \mathbb{C}^*$ tal que $\omega = g\tilde{\omega}$ em $U \cap \tilde{U}$.

Resumindo essa discussão, uma folheação de codimensão 1 em uma variedade complexa M é definida pelo seguinte conjunto de dados:

(a) uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M por abertos;

(b) para cada $\alpha \in A$, uma 1-forma holomorfa integrável ω_α em U_α cujo conjunto singular tem codimensão maior ou igual a 2;

(c) sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, uma função homomorfa $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}^*$ tal que $\omega_{\alpha|U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\omega_{\beta|U_{\alpha\beta}}$.

Definição 6.1.5 Seja $\mathcal{F}$ folheação de dimensão 1 em uma variedade complexa M. Dado $p \in M$, a *multiplicidade algébrica* ou simplesmente *multiplicidade* de $\mathcal{F}$ em p, denotada por $m_p(\mathcal{F})$, é a multiplicidade em p de algum campo holomorfo que induz $\mathcal{F}$ em torno de p.

Note que a definição independe da escolha do campo de vetores. Além disso, $m_p(\mathcal{F}) \neq 0$ se, e somente se, $p \in Sing(\mathcal{F})$.

Definição 6.1.6 Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 1 em uma variedade complexa M. Dado $p \in Sing(\mathcal{F})$, uma *separatriz* em p é um germe de conjunto analítico V contendo p invariante por $\mathcal{F}$, ou seja, $V \setminus Sing(\mathcal{F})$ é, localmente, uma união de folhas de $\mathcal{F}$.

6.2 Folheações em superfícies

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação (de dimensão 1) em uma superfície complexa M (uma variedade complexa de dimensão 2). Uma vez que $\mathcal{F}$ tem, ao mesmo tempo, dimensão e codimensão 1, ela é localmente induzida tanto por um campo de vetores holomorfo quanto por uma 1-forma holomorfa. Assim, se $\mathcal{F}$ é definida em uma vizinhança de $p \in M$ por um campo v, escrito em relação a um sistema de coordenadas (x, y) no qual $p = (0, 0)$ na forma

$$v = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} = (v_1, v_2),$$

então $\mathcal{F}$ é também definida pela equação $\omega = 0$, onde ω é a forma dual de v,

$$\omega(x, y) = -v_2dx + v_1dy.$$

Seja $m = m_p(\mathcal{F})$. Desenvolvemos em séries de Taylor

$$v_1 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{1k}, \quad v_2 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{2k},$$

onde v_{1k} e v_{2k} denotam os termos de grau k de v_1 e v_2, respectivamente. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ uma explosão em p e $P = \pi^{-1}(p)$. Como $\pi_{|\tilde{M}\setminus P} : \tilde{M}\setminus P \to M\setminus\{p\}$ é biholomorfismo, $\mathcal{F}_{|M\setminus\{p\}}$ pode ser transportada a uma folheação em $\tilde{M}\setminus P$, que denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}$. Mostraremos a seguir que $\tilde{\mathcal{F}}$ estende-se de maneira natural a $\tilde{M}$. Denotaremos essa extensão por $\pi^*\mathcal{F}$ e a designaremos por *transformado estrito* de $\mathcal{F}$.

Nas coordenadas (x,t), a explosão se expressa na forma $\pi(x,t) = (x, xt)$, de onde obtemos

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(x,t) &= -v_2(x,xt)dx + v_1(x,xt)(xdt + tdx) \\ &= (-v_2(x,xt) + tv_1(x,xt))dx + xv_1(x,xt)dt. \qquad (6.2)\end{aligned}$$

Nas coordenadas (u,y), temos $\pi(u,y) = (uy,y)$ e

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(u,y) &= -v_2(uy,y)(udy + ydu) + v_1(uy,y)dy \\ &= (-uv_2(uy,y) + v_1(uy,y))dy + yv_2(uy,y)du. \qquad (6.3)\end{aligned}$$

Observe que as 1-formas acimas induzem, fora de P, a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $-xv_{2m} + yv_{1m} \not\equiv 0$.

Nesse caso, p é dita singularidade *não dicrítica*. Fatoramos x^m em (6.2) e obtemos

$$\pi^*\omega(x,t) = x^m((-v_{2m}(1,t)+tv_{1m}(1,t)+xf_1(x,t))dx+x(v_{1m}(1,t)+xg_1(x,t))dt),$$

onde f_1 e g_1 são holomorfas. Multiplicando por $1/x^m$, obtemos a forma holomorfa

$$\tilde{\omega}_1(x,t) = (-v_{2m}(1,t) + tv_{1m}(1,t) + xf_1(x,t))dx + x(v_{1m}(1,t) + xg_1(x,t))dt.$$

Em (6.3), fatoramos y^m. Multiplicando por $1/y^m$, encontramos

$$\tilde{\omega}_2(u,y) = (-uv_{2m}(u,1)+v_{1m}(u,1)+yf_2(u,y))dy+y(-v_{2m}(u,1)+yg_2(u,y))du.$$

Observe que, na interseção dos abertos coordenados (x,t) e (u,y)

$$\tilde{\omega}_1 = t^m\tilde{\omega}_2,$$

onde f_2 e g_2 são holomorfas. Uma vez que $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ têm singularidades isoladas, definem uma folheação $\pi^*\mathcal{F}$ em $\tilde{M}$ que estende $\tilde{\mathcal{F}}$. Ela possui as seguintes propriedades:

(i) P é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.

(ii) As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre P são em número finito, correspondendo às raízes de $-v_{2m}(1,t) + tv_{1m}(1,t)$ e, possivelmente, a uma outra singularidade na origem do sistema de coordenadas (u, y). Se $v_{1m}(0,1) \neq 0$, todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre P se encontram no aberto coordenado (x,t). Essa situação é equivalente a v_{1m} possuir um termo em y^n, o que é sempre possível por meio de uma mudança de coordenadas.

Caso 2: $-xv_{2m} + yv_{1m} \equiv 0$.

Nesse caso, dizemos que p é singularidade *dicrítica*. Fatoramos x^{m+1} em (6.2) e obtemos

$$\begin{aligned}\pi^*\omega(x,t) &= x^{m+1}((-v_{2,m+1}(1,t) + tv_{1,m+1}(1,t) + xf_1(x,t))dx \\ &+ (v_{1m}(1,t) + xg_1(x,t))dt),\end{aligned}$$

onde f_1 e g_1 são holomorfas. Multiplicando por $1/x^{m+1}$, encontramos

$$\tilde{\omega}_1(x,t) = (-v_{2,m+1}(1,t)+tv_{1,m+1}(1,t)+xf_1(x,t))dx+(v_{1m}(1,t)+xg_1(x,t))dt.$$

O mesmo procedimento nas coordenadas (u, y) resulta em

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2(u,y) &= (-uv_{2,m+1}(u,1) + v_{1m+1}(u,1) + yf_2(u,y))dy \\ &+ (-v_{2m}(u,1) + yg_2(u,y))du.\end{aligned}$$

Uma vez que, na interseção dos abertos coordenados,

$$\tilde{\omega}_1 = t^{m+1}\tilde{\omega}_2,$$

as duas formas definem uma folheação $\pi^*\mathcal{F}$ em $\tilde{M}$ que estende $\tilde{\mathcal{F}}$. Nesse caso, $\pi^*\mathcal{F}$ tem as seguintes propriedades:

(i) P não é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.

(ii) As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre P correspondem, nas coordenadas (x,t), às soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} -v_{2,m+1}(1,t) + tv_{1,m+1}(1,t) = 0 \\ v_{1m}(1,t) = 0, \end{cases}$$

e, possivelmente, a mais uma singularidade na origem do sistema (u, y). Logo, se $v_{2m}(0,1) \neq 0$, o que corresponde a v_{2m} possuir um termo em y^n, todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ estão no sistema (x,t). Tal situação pode ser obtida por uma mudança de coordenadas.

(iii) As folhas de $\pi^*\mathcal{F}$ são transversais a P, com exceção das que passam pelos pontos correspondentes às raízes de $v_{1m}(1,t) = 0$ e, possivelmente, daquela que passa por $(u,y) = (0,0)$. Se $v_{2m}(0,1) \neq 0$, então a folha por $(u,y) = (0,0)$ é também transversal a P.

Uma separatriz de $\mathcal{F}$ em $p \in Sing(\mathcal{F})$ é um germe de curva analítica. Um germe de curva analítica S contendo p de equação local $f = 0$ é separatriz por p se, e somente se, $v(f) = 0$ sobre S. Em particular, se S é irredutível e $f = 0$ é equação reduzida, S é separatriz se, e somente se, $v(f) = fg$ para alguma função holomorfa g. Se ω é a forma dual a v, isso equivale a $\omega \wedge df = f\eta$, para alguma 2-forma holomorfa η. Note que, se S é uma separatriz em p, π^*S dá origem a separatrizes de $\pi^*\mathcal{F}$ nos pontos de $P \cap \pi^*S$. Reciprocamente, se $\tilde{S}$ é uma separatriz de $\pi^*\mathcal{F}$ em $q \in P$, então $\pi(\tilde{S})$ é uma separatriz em p. De fato, $\pi(\tilde{S})$ é um germe de curva analítica, pelo teorema da aplicação própria ([GH]). Da discussão acima, segue que uma singularidade dicrítica admite um número infinito de separatrizes, correspondendo às folhas por pontos regulares de $P = \pi^{-1}(p)$ e às separatrizes por singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre P.

Seja $p \in Sing(\mathcal{F})$ tal que $m_p(\mathcal{F}) = 1$. Fixemos um campo holomorfo v que induz $\mathcal{F}$ em torno de p. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear de v.

Definição 6.2.1 Dizemos que p é singularidade *reduzida* de $\mathcal{F}$ se alguma das duas situações seguintes ocorre:

(i) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$;

(ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

Uma singularidade do tipo (i) é chamada de *simples*, enquanto uma singularidade do tipo (ii) é chamada de *sela-nó*.

Dada uma seqüência finita de explosões em p, ou seja, $\pi = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1$, onde π_1 é explosão em p e π_k, explosão em algum ponto de $(\pi_{k-1} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$ para $k = 2, \ldots, n$, podemos definir $\pi^*\mathcal{F}$ iterando os transformados estritos associados a cada explosão. O seguinte teorema, devido a Seidenberg [Sei], será demonstrado no final do próximo capítulo.

Teorema 6.2.2 *Sejam $\mathcal{F}$ folheação em uma superfície e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Então existe uma seqüência finita de explosões π em p tal que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ são reduzidas.*

Na situação do teorema acima, dizemos que π é uma *resolução* de $\mathcal{F}$ em p e que as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ estão *resolvidas*.

Informações a respeito do comportamento da folheação em torno de singularidades reduzidas podem ser obtidas a partir das formas normais apresentadas nas proposições de 6.2.3 a 6.2.6. Demonstrações para esses resultados podem ser obtidas nos capítulos 3 e 4 de [CS1]. Fixemos $p \in Sing(\mathcal{F})$ com $m_p(\mathcal{F}) = 1$, um campo v que induz $\mathcal{F}$ em torno de p e ω sua 1-forma dual. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear de v.

Proposição 6.2.3 (Forma normal de Poincaré) *Se* $\lambda_1 \neq 0$ *e* $\lambda_2 \neq 0$ *satisfazem*

(i) $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ *e*

(ii) $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^+$ *ou* $\lambda_1 = \lambda_2$ *e a parte linear de* v *é diagonalizável,*

então existe um biholomorfismo local Φ *entre uma vizinhança de* p *e uma vizinhança de* $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ *tal que* $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, *onde*

$$\tilde{\omega} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

O conjunto dos pares $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}^-$ é chamado de *domínio de Poincaré.*

Proposição 6.2.4 (Forma normal de Siegel) *Se* $\lambda_1 \neq 0$ *e* $\lambda_2 \neq 0$ *satisfazem* $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$, *então existe um biholomorfismo local* Φ *entre uma vizinhança de* p *e uma vizinhança de* $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ *tal que* $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, *onde*

$$\tilde{\omega} = (\lambda_1 x + xyf(x,y))dy - (\lambda_2 y + xyg(x,y))dx,$$

$f(x,y)$ *e* $g(x,y)$ *são funções holomorfas.*

No caso de uma sela-nó, temos a seguinte forma normal:

Proposição 6.2.5 (Forma normal de Dulac) *Se* p *é sela-nó, então existe uma mudança de coordenadas holomorfa* Φ *tal que* $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, *onde*

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + (y(1+\lambda x^p) + f(x,y))dx,$$

$f(x,y)$ *é holomorfa e tem multiplicidade* $p+2$.

Para a sela-nó, temos ainda a seguinte forma normal formal:

Proposição 6.2.6 *Se* p *é uma sela-nó, então existe uma mudança de coordenadas formal* Φ *tal que* $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$, *onde*

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + y(1+\lambda x^p)dx.$$

Dos resultados acima, temos que

(i) Nas formas normais de Poicaré e de Siegel, os eixos coordenados $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ são separatrizes.

(ii) Na forma normal de Dulac, temos que o eixo $\{x=0\}$ é uma separatriz, a chamada *separatriz forte* da sela-nó. Eventualmente, pode haver uma segunda separatriz, correspondendo a $\{y=0\}$ na forma normal formal. Essa será chamada de *separatriz fraca.*

Enunciamos o seguinte resultado (veja [CS1] ou [BK]):

Teorema 6.2.7 (Parametrização de Puiseux) Se S é um germe de curva analítica irredutível em $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, distinta dos eixos coordenados, com equação local reduzida $f = 0$, então existe um germe de aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} \alpha : \quad \mathbb{C}, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^2, (0,0) \\ T &\longmapsto (T^m, T^n u(T)) \,, \end{aligned}$$

onde u é holomorfa com $u(0) \neq 0$ e $m_p(f) = \min\{m, n\}$, cuja imagem coincide com a curva S.

Exercício 2 Verifique, utilizando a parametrização de Puiseux e as formas normais acima, que, se p é uma singularidade reduzida, então todas as separatrizes em p são aquelas descritas em (i) e (ii).

Segue do exercício acima e do teorema 6.2.2 que uma singularidade admite um número infinito de separatrizes se, e somente se, no processo de resolução ocorrer alguma singularidade dicrítica.

6.3 Fibrados associados a uma folheação

Sejam M uma variedade complexa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão 1 em M. Tomamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura de M por abertos tais que, para cada $\alpha \in A$, $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$ é induzida por um campo holomorfo v_α. Sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tal que $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$. O cociclo $(f_{\alpha\beta})$ induz, portanto, um fibrado em retas holomorfo em M, o *fibrado cotangente* a $\mathcal{F}$, denotado por $T^*_{\mathcal{F}}$. Seu dual $T_{\mathcal{F}} = (T^*_{\mathcal{F}})^*$ é chamado de *fibrado tangente* a $\mathcal{F}$.

Exercício 3 Seja $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ outra cobertura de M, de forma que, para cada $\beta \in B$, $\mathcal{F}_{|V_\beta}$ é induzida por um campo holomorfo v_β em V_β. Verifique que o fibrado $\tilde{T}_{\mathcal{F}}$ definido a partir de $\mathcal{V}$ e $\{v_\beta\}_{\beta \in B}$ é isomorfo a $T_{\mathcal{F}}$.

Proposição 6.3.1 *Existe uma aplicação de fibrados $f : T_{\mathcal{F}} \to TM$ tal que:*

(a) $\forall\, p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$, *$f_{|(T_{\mathcal{F}})_p}$ é injetiva e $f((T_{\mathcal{F}})_p)$ é a reta tangente à folheação $\mathcal{F}$ em p;*

(b) *$p \in Sing(\mathcal{F})$ se, e somente se, $f_{|(T_{\mathcal{F}})_p} \equiv 0$.*

Além do mais, se $\tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \to TM$ é uma outra aplicação de fibrados satisfazendo (a), *então existe $h \in \mathcal{O}^*(M)$ tal que $\tilde{f} = hf$. Em particular, $\tilde{f}$ também satisfaz* (b).

Demonstração: Tomamos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M tal que $\forall\ \alpha \in A$ existe um campo holomorfo v_α induzindo $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$. Seja $A_0 \subset A$ o conjunto de todos os índices $\alpha_0 \in A$ tais que $U_{\alpha_0} \cap Sing(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Definimos $V_{\alpha_0} = U_{\alpha_0} \setminus Sing(\mathcal{F})$ para $\alpha_0 \in A_0$ e $V_\alpha = U_\alpha$ para $\alpha \in A \setminus A_0$. $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$.

Para cada $\alpha \in A$, tomamos uma trivialização local

$$T_{\mathcal{F}|V_\alpha} \cong V_\alpha \times \mathbb{C}.$$

Dado $x \in T_{\mathcal{F}|V_\alpha}$, $x \sim (p, t)$ na trivialização local acima, definimos

$$f_\alpha(p) = t v_\alpha(p).$$

A definição local acima se compatibiliza através do cociclo $(1/f_{\alpha\beta})$, onde $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta$ sempre que $V_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, em uma aplicação de fibrados $f : T_{\mathcal{F}|M \setminus Sing(\mathcal{F})} \to TM$. O teorema de extensão de Hartogs permite estender essa aplicação a $f : T_{\mathcal{F}} \to TM$. Uma vez que $p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$, temos $v_\alpha(p) \neq 0$, e a condição (a) é satisfeita. Nas vizinhanças do tipo $U_{\alpha_0} \setminus Sing(\mathcal{F})$, $\alpha_0 \in A_0$, f é construída levando cada fibra sobre $p \in U_{\alpha_0} \setminus Sing(\mathcal{F})$ na direção de TM definida por $v_{\alpha_0}(p)$. Uma vez que v_{α_0} se anula sobre $U_{\alpha_0} \cap Sing(\mathcal{F})$, a extensão de f a esse conjunto é necessariamente nula. Portanto, a condição (b) também é satisfeita.

Considere $\tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \to TM$ outra aplicação de fibrados satisfazendo (a). Uma vez que f e $\tilde{f}$ são lineares nas fibras, existe uma função holomorfa h definida em $M \setminus Sing(\mathcal{F})$, que nunca se anula, tal que, $\forall\ p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$,

$$\tilde{f}_{|(T_{\mathcal{F}})_p} \equiv h(p) f_{|(T_{\mathcal{F}})_p}.$$

Pelo teorema de Hartogs, h se estende a uma função holomorfa que nunca se anula em M (pois o conjunto de zeros de uma função holomorfa tem codimensão 1), de modo que a relação acima é válida em todos os pontos de M. □

Corolário 6.3.2 *$\mathcal{F}$ é folheação não singular ($Sing(\mathcal{F}) = \emptyset$) se, e somente se, $T_{\mathcal{F}}$ é subfibrado de TM.*

Observe que, se M é uma variedade compacta, segue da proposição 6.3.1 que duas aplicações de fibrados $f, \tilde{f} : T_{\mathcal{F}} \to TM$, satisfazendo (a) e (b), diferem uma da outra pela multiplicação por uma constante não nula.

Seja $f : T_{\mathcal{F}} \to TM$ aplicação de fibrados como na proposição. Se $U \subset M$ é um aberto e s é uma seção holomorfa de $T_{\mathcal{F}}$ em U, então $f \circ s$ é um campo holomorfo que induz $\mathcal{F}$ em U. Analogamente, a imagem por f de uma seção meromorfa resulta em um campo meromorfo tangente a $\mathcal{F}$.

De modo similar à construção de $T_{\mathcal{F}}$, podemos produzir fibrados a partir das 1-formas holomorfas que geram localmente uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1. Tomamos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura de M por abertos tais que, para cada $\alpha \in A$, uma 1-forma holomorfa ω_α induz $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$. Se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, existe $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tal que $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$. O cociclo $(g_{\alpha\beta})$ induz em M um fibrado em retas holomorfo $N_{\mathcal{F}}$ sobre M. Este é denominado *fibrado normal* a $\mathcal{F}$. Definimos o *fibrado conormal* a $\mathcal{F}$ por $N^*_{\mathcal{F}} = (N_{\mathcal{F}})^*$.

Exercício 4 Prove o análogo ao exercício 3 para $N^*_{\mathcal{F}}$.

Como no caso do fibrado tangente, temos:

Proposição 6.3.3 *Existe uma aplicação de fibrados $g : N^*_{\mathcal{F}} \to T^*M$ tal que:*

(a) $\forall\ p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$, $g_{|(N^*_{\mathcal{F}})_p}$ é injetiva e o espaço tangente a $\mathcal{F}$ em p coincide com o núcleo de cada elemento não nulo de $g((N^*_{\mathcal{F}})_p)$;

(b) $p \in Sing(\mathcal{F})$ se, e somente se, $g_{|N^*_{\mathcal{F}_p}} \equiv 0$.

Além disso, se $\tilde{g} : N^*_{\mathcal{F}} \to T^*M$ é uma outra aplicação de fibrados satisfazendo (a)*, então existe $h \in \mathcal{O}^*(M)$ tal que $\tilde{g} = hg$. Em particular, $\tilde{g}$ também satisfaz* (b).

Exercício 5 Prove a proposição 6.3.3.

Corolário 6.3.4 *$\mathcal{F}$ é folheação não singular se, e somente se, $N^*_{\mathcal{F}}$ é subfibrado de T^*M.*

A imagem de uma seção local holomorfa (ou meromorfa) de $N^*_{\mathcal{F}}$ pela aplicação $g : N^*_{\mathcal{F}} \to T^*M$ é uma 1-forma holomorfa (ou meromorfa) que induz $\mathcal{F}$.

No restante desta seção, M denotará uma superfície complexa. Portanto, se $\mathcal{F}$ é uma folheação em M, tanto $T_{\mathcal{F}}$ quanto $N^*_{\mathcal{F}}$ estão definidos. Temos, nesse caso, uma dualidade entre os dois fibrados, expressa pelo seguinte resultado:

Lema 6.3.5

$$K_M = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}},$$

onde K_M é o fibrado canônico de M.

Demonstração: Uma seção holomorfa local não nula de K_M, ou seja, uma 2-forma holomorfa não singular, estabelece, por contração, um isomorfismo entre campos holomorfos e 1-formas holomorfas que definem $\mathcal{F}$. Assim

$$\mathcal{O}(K_M) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}), \mathcal{O}(N^*_{\mathcal{F}})).$$

Porém, pelo exercício 11 da página 77, temos

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}),\mathcal{O}(N_{\mathcal{F}}^*)) \cong \mathcal{O}(T_{\mathcal{F}}^*)\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}(N_{\mathcal{F}}^*))$$

e o resultado segue. □

Corolário 6.3.6

$$c_1(M) = c_1(T_{\mathcal{F}})+c_1(N_{\mathcal{F}}).$$

Demonstração: Temos, por um lado,

$$c_1(K_M) = -c_1(M).$$

Por outro,

$$\begin{aligned} c_1(T_{\mathcal{F}}^*\otimes N_{\mathcal{F}}^*) &= c_1(T_{\mathcal{F}}^*)+c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \\ &= -c_1(T_{\mathcal{F}})-c_1(N_{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$

□

Sejam $\pi:\tilde{M}\to M$ uma explosão em $p\in Sing(\mathcal{F})$ e $P=\pi^{-1}(p)$. Definimos

$$m = \begin{cases} m_p(\mathcal{F}), & \text{se } p \text{ é não dicrítica,} \\ m_p(\mathcal{F})+1, & \text{se } p \text{ é dicrítica.} \end{cases}$$

Temos

Proposição 6.3.7

$$N_{\pi^*\mathcal{F}}^* = \pi^*(N_{\mathcal{F}}^*)\otimes[P]^{\otimes m}.$$

Demonstração: Seja $U\subset M$ uma vizinhança de p. Uma seção holomorfa s de $N_{\mathcal{F}}^*$ em U corresponde a uma 1-forma holomorfa que induz $\mathcal{F}$ em U. $\pi^*(s)$ é uma 1-forma homomorfa que induz $\pi^*\mathcal{F}$ em $\pi^{-1}(U)\setminus P$, se anulando com multiplicidade igual ou superior a m sobre P. O resultado segue, considerando que as seções holomorfas de $[P]^{\otimes m}$ são funções meromorfas com pólo em P com multiplicidade máxima m. □

Da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} c_1(N_{\pi^*\mathcal{F}}^*) &= c_1(\pi^*(N_{\mathcal{F}}^*))+c_1([P]^{\otimes m}) \\ &= \pi^*(c_1(N_{\mathcal{F}}^*))+mc_1(P). \end{aligned}$$

Aplicando essa igualdade a P, e considerando que $\pi^*(c_1(N_{\mathcal{F}}^*))\equiv 0$ em P, encontramos

Corolário 6.3.8

$$m = -c_1(N^*_{\pi^*\mathcal{F}}) \cdot P = c_1(N_{\pi^*\mathcal{F}}) \cdot P.$$

Analogamente à proposição 6.3.7, temos para o fibrado tangente:

Proposição 6.3.9

$$T_{\pi^*\mathcal{F}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes [P]^{\otimes m-1}.$$

Demonstração: De 6.3.5 e 5.4.2, temos

$$\begin{aligned} T^*_{\pi^*\mathcal{F}} \otimes N^*_{\pi^*\mathcal{F}} &= \pi^*(T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}) \otimes [P] \\ &= \pi^*(T^*_{\mathcal{F}}) \otimes \pi^*(N^*_{\mathcal{F}}) \otimes [P]. \end{aligned}$$

Da proposição 6.3.7 resulta

$$T^*_{\pi^*\mathcal{F}} \otimes \pi^*(N^*_{\mathcal{F}}) \otimes [P]^{\otimes m} = \pi^*(T^*_{\mathcal{F}}) \otimes \pi^*(N^*_{\mathcal{F}}) \otimes [P].$$

Tensorizando com $(\pi^*(N^*_{\mathcal{F}}))^* \otimes [P]^{\otimes(-m)}$ e tomando o dual, encontramos o resultado desejado. □

Exercício 6 Com a notação da proposição 6.3.7, prove que

(a) $c_1^2(N_{\pi^*\mathcal{F}}) = c_1^2(N_{\mathcal{F}}) - m^2$;

(b) $c_1(N_{\pi^*\mathcal{F}})c_1(\tilde{M}) = c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(M) - m$.

6.4 Folheações em espaços projetivos

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de dimensão 1. Então, $T_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}(k)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Feita a escolha de coordenadas homogêneas $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, tomamos a seção meromorfa s de $\mathcal{O}(k)$ induzida por z_0^k. A imagem de s pela aplicação $f : T_{\mathcal{F}} \to T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é um campo de vetores meromorfo v em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. v é holomorfo no aberto afim $U_0 : \{z_0 \neq 0\}$, onde induz a folheação $\mathcal{F}$, e $\{z_0 = 0\}$ é divisor de zeros com multiplicidade k, se $k > 0$, ou de pólos com multiplicidade $-k$, se $k < 0$. Escrevemos

$$v_{|U_0} = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

onde $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{O}(U_0)$. Mudando coordenadas para $U_j : \{z_j \neq 0\}$, $j \neq 0$, encontramos, em U_{0j},

$$v_{|U_j} = \left(-\frac{1}{x_j^2} P_j\right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(\frac{1}{x_j} P_1 - \frac{x_1}{x_j^2} P_j\right) \frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
& +\left(\frac{1}{x_j}P_{j-1}-\frac{x_{j-1}}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_j}+\left(\frac{1}{x_j}P_{j+1}-\frac{x_{j+1}}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_{j+1}} \\
& +\cdots+\left(\frac{1}{x_j}P_n-\frac{x_n}{x_j^2}P_j\right)\frac{\partial}{\partial y_n} \\
= \; & y_1^2P_j\frac{\partial}{\partial y_1}+(y_1P_1-y_1y_2P_j)\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+(y_1P_{j-1}-y_1y_jP_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \\
& +(y_1P_{j+1}-y_1y_{j+1}P_j)\frac{\partial}{\partial y_{j+1}}+\cdots+(y_1P_n-y_1y_nP_j)\frac{\partial}{\partial y_n}.
\end{aligned}
$$

Considerando a primeira componente de $v_{|U_j}$, vemos que $(1/x_j^2)P_j$ se estende a uma função meromorfa em U_j. Levando em conta as demais componentes, obtemos que cada P_i, $i=1,\ldots,n$, também se estende. Repetindo o argumento para cada um dos abertos coordenados, concluímos que, para $i=1,\ldots,n$, P_i se estende a uma função meromorfa em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, ou seja, a uma função racional. Visto que P_i é holomorfa em U_0, P_i é um polinômio.

Suponha j escolhido de forma que P_j seja o polinômio de maior grau dentre $P_1,\ldots,P_n$. O divisor $\{z_0=0\}$ corresponde, em U_j, a $\{y_1=0\}$. Para analisar sua multiplicidade, basta considerarmos os termos homogêneos de maior grau. Para esse fim, tomamos $\tilde{P}_1,\ldots,\tilde{P}_n$ as partes homogêneas de $P_1,\ldots,P_n$, respectivamente, de mesmo grau que P_j (eventualmente, alguns desses termos são nulos). Duas situações se colocam:

(i) As equações

$$
\begin{cases}
\tilde{P}_1-y_2\tilde{P}_j=0 \\
\quad\cdots \\
\tilde{P}_{j-1}-y_j\tilde{P}_j=0 \\
\tilde{P}_{j+1}-y_{j+1}\tilde{P}_j=0 \\
\quad\cdots \\
\tilde{P}_n-y_n\tilde{P}_j=0
\end{cases}
$$

são satisfeitas Nesse caso, a multiplicidade de $\{z_0=0\}$ pode ser lida no coeficiente de $\partial/\partial y_1$,

$$
y_1^2P_j\left(\frac{y_2}{y_1},\ldots,\frac{1}{y_1}\cdots\frac{y_n}{y_1}\right),
$$

de onde vemos que $\text{grau}(P_j)=2-k$. Agrupando os termos homogêneos de maior grau de $v_{|U_0}$, obtemos

$$
\frac{\tilde{P}_j}{x_j}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = G\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right),
$$

onde $G = \tilde{P}_j/x_j$ é polinômio homogêneo de grau $1-k$ e, portanto, $k \leq 1$. Note que, nesse caso, o hiperplano $\{z_0 = 0\}$ é invariante pela folheação.

(ii) Pelo menos uma das igualdades do item (i) não é satisfeita. Nesse caso, a multiplicidade de $\{z_0 = 0\}$ pode ser lida no coeficiente correspondente, de onde vemos que $\text{grau}(P_j) = 1 - k$ e, portanto, $k \leq 1$. Nesse caso, o hiperplano $\{z_0 = 0\}$ não é invariante pela folheação.

Resumimos essa discussão no seguinte resultado:

Teorema 6.4.1 *Seja $\mathcal{F}$ folheação em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ com $T_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}(k)$. Então $k \leq 1$ e $\mathcal{F}$ é induzida em um aberto afim por um campo de vetores holomorfo com coeficientes polinomiais que pode ser escrito na forma*

$$G\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right) + Q_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + Q_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

onde

(a) *G é homogêneo de grau $1-k$ ou $G = 0$;*

(b) *$Q_1, \ldots, Q_n$ são polinômios de grau no máximo $1-k$ (ou nulos). Se $G = 0$, então ao menos um desses polinômios tem grau $1-k$;*

(c) *O hiperplano no infinito em relação a esse aberto afim é $\mathcal{F}$-invariante se, e somente se, $G = 0$.*

O número $1-k$ do teorema acima é chamado de *grau* da folheação $\mathcal{F}$ e é denotado por $\text{grau}(\mathcal{F})$.

Seja agora $\mathcal{F}$ folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $N^*_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}(k)$. Escolhemos a seção meromorfa de $\mathcal{O}(k)$ induzida por z_0^k. Sua imagem pela aplicação $N^*_{\mathcal{F}} \to T^*\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é uma 1-forma meromorfa ω em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, holomorfa em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ se $k \geq 0$, ou, se $k < 0$, holomorfa no aberto afim U_0 com divisor de pólos com multiplicidade $-k$ em $\{z_0 = 0\}$. Escrevemos

$$\omega_{|U_0} = P_1 dx_1 + \cdots + P_n dx_n.$$

As coordenadas $y_1, \ldots, y_n$ em U_j são tais que

$$x_1 = \frac{y_2}{y_1}, \ldots, \; x_{j-1} = \frac{y_j}{y_1}, \; x_j = \frac{1}{y_1}, \; x_{j+1} = \frac{y_{j+1}}{y_1}, \ldots, \; x_n = \frac{y_n}{y_1}.$$

Portanto, em U_{0j} devemos ter

$$\omega_{|U_j} = P_1 d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \cdots + P_{j-1} d\left(\frac{y_j}{y_1}\right) + P_j d\left(\frac{1}{y_1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+ P_{j+1} d\left(\frac{y_{j+1}}{y_1}\right) + \cdots + P_n d\left(\frac{y_n}{y_1}\right) \\
= \; & P_1\left(\frac{1}{y_1}dy_2 - \frac{y_2}{y_1^2}dy_1\right) + \cdots + P_{j-1}\left(\frac{1}{y_1}dy_j - \frac{y_j}{y_1^2}dy_1\right) + P_j\left(-\frac{1}{y_1^2}dy_1\right) \\
&+ P_{j+1}\left(\frac{1}{y_1}dy_{j+1} - \frac{y_{j+1}}{y_1^2}dy_1\right) + \cdots + P_n\left(\frac{1}{y_1}dy_n - \frac{y_n}{y_1^2}dy_1\right) \\
= \; & -\frac{1}{y_1^2}(y_2P_1 + \cdots + y_jP_{j-1} + P_j + y_{j+1}P_{j+1} + \ldots + y_nP_n)dy_1 \\
&+ \frac{P_1}{y_1}dy_2 + \cdots + \frac{P_{j-1}}{y_1}dy_j + \frac{P_{j+1}}{y_1}dy_{j+1} + \cdots + \frac{P_n}{y_1}dy_n.
\end{aligned}
$$

Suponha j escolhido de forma que P_j tenha maior grau dentre $P_1, \ldots, P_n$. Sejam $\tilde{P}_1 \ldots \tilde{P}_n$ as partes homogêneas de mesmo grau que P_j de $P_1, \ldots, P_n$ (eventualmente, alguns desses são nulos). Temos duas situações:

(i)

$$y_2\tilde{P}_1 + \cdots + y_j\tilde{P}_{j-1} + \tilde{P}_j + y_{j+1}\tilde{P}_{j+1} + \cdots + y_n\tilde{P}_n = 0,$$

o que corresponde à igualdade

$$x_1\tilde{P}_1 + \cdots + x_n\tilde{P}_n = 0.$$

Nesse caso, existe $i \neq j$ tal que $\mathrm{grau}(P_i) = \mathrm{grau}(P_j)$. A multiplicidade de $\{z_0 = 0\}$, que corresponde no aberto afim U_j a $\{y_1 = 0\}$, pode ser lida em

$$\frac{1}{y_1}P_i\left(\frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{1}{y_1}, \ldots \frac{y_n}{y_1}\right),$$

de onde vemos que $k = -(\mathrm{grau}(P_j) + 1)$. Uma vez que, nessa situação, $\mathrm{grau}(P_j) \geq 1$, temos que $k \leq -2$. Note que o hiperplano $\{z_0 = 0\}$ não é $\mathcal{F}$- invariante.

(ii)

$$y_2\tilde{P}_1 + \cdots + y_j\tilde{P}_{j-1} + \tilde{P}_j + y_{j+1}\tilde{P}_{j+1} + \cdots + y_n\tilde{P}_n \neq 0,$$

o que corresponde a

$$x_1\tilde{P}_1 + \cdots + x_n\tilde{P}_n \neq 0.$$

Nesse caso, a multiplicidade de $\{z_0 = 0\}$ é lida no coeficiente de dy_1, mais especificamente em

$$\frac{1}{y_1^2}P_j\left(\frac{y_2}{y_1}, \ldots, \frac{1}{y_1}, \ldots, \frac{y_n}{y_1}\right),$$

de onde vemos que $k = -(\mathrm{grau}(P_j) + 2)$ e, portanto, $k \leq -2$. Note que, nesse caso, o hiperplano $\{z_0 = 0\}$ é $\mathcal{F}$-invariante.

Resumindo essa discussão:

Teorema 6.4.2 *Seja $\mathcal{F}$ folheação em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ com $N^*_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}(k)$. Então, $k \leq -2$ e $\mathcal{F}$ é induzida em um aberto afim por uma 1-forma holomorfa integrável com coeficientes polinomiais do tipo*

$$P_1 dx_1 + \cdots + P_n dx_n.$$

Se d é o maior dentre os graus de $P_1, \ldots, P_n$, e $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ são suas partes homogêneas de grau d (algumas dessas nulas, eventualmente), então

(a) *se $x_1\tilde{P}_1 + \cdots + x_n\tilde{P}_n = 0$, então $d = -1 - k$ e o hiperplano no infinito em relação a esse sistema de coordenadas não é invariante por $\mathcal{F}$;*

(b) *se $x_1\tilde{P}_1 + \cdots + x_n\tilde{P}_n \neq 0$, então $d = -2 - k$ e o hiperplano no infinito é invariante por $\mathcal{F}$.*

O número $-2 - k$ é chamado de *grau* da folheação $\mathcal{F}$.

Capítulo 7

Número de Milnor

7.1 Definições

Seja v um germe de campo de vetores holomorfo em $p \in \mathbb{C}^n$, expresso em coordenadas por $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

Definição 7.1.1 A dimensão do espaço vetorial

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1, \ldots, v_n \rangle},$$

denotada por $\mu(v,p)$, é chamada de *número de Milnor* do campo v em p.

Na definição, $\mathcal{O}_p$ é o anel de germes de funções holomorfas em p e $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ denota o ideal de $\mathcal{O}_p$ gerado por $v_1, \ldots, v_n$.

Proposição 7.1.2 *$\mu(v,p) = 0$ se, e somente se, p não é ponto singular de v.*

Demonstração: O número de Milnor é nulo se, e somente se,

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \ = \ \mathcal{O}_p,$$

o que ocorre se, e somente se, existem funções holomorfas $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_n$ tais que

$$1 \ = \ g_1 v_1 + \ldots + g_n v_n.$$

Tal fato, por sua vez, é equivalente à existência de alguma componente de v que não se anula em p. $\square$

Proposição 7.1.3 $0 < \mu(v,p) < \infty$ *se, e somente se, p é singularidade isolada de v.*

Demonstração: Se p é singularidade isolada de v, temos $V(\langle v_1,\dots,v_n\rangle) = \{p\}$. Logo, $I(V(\langle v_1,\dots,v_n\rangle)) = \mathfrak{m}_p$, onde $\mathfrak{m}_p$ é o ideal maximal das funções de $\mathcal{O}_p$ que se anulam em p. Pelo teorema dos zeros de Hilbert (Nullstellensatz), temos $I(V(\langle v_1,\dots,v_n\rangle)) = \mathrm{Rad}\langle v_1,\dots,v_n\rangle$, onde

$$\mathrm{Rad}\langle v_1,\dots,v_n\rangle \;=\; \{f \in \mathcal{O}_p; f^k \in \langle v_1,\dots,v_n\rangle \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathrm{Rad}\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ é finitamente gerado (pois $\mathcal{O}_p$ é noetheriano), logo existe $r > 0$ tal que $\mathfrak{m}_p^r = (\mathrm{Rad}\langle v_1,\dots,v_n\rangle)^k \subset \langle v_1,\dots,v_n\rangle$. Segue que

$$\mu(v,p) \;=\; \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1,\dots,v_n\rangle} \;\le\; \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\mathfrak{m}_p^r}.$$

Visto que $\mathfrak{m}_p^r$ é gerado por monômios de grau r nas variáveis $z_1,\dots,z_n$, $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^r$ é gerado sobre $\mathbb{C}$ pelos monômios de grau inferior a r. Logo, $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^r < \infty$ e, portanto, $\mu(v,p) < \infty$.

Reciprocamente, suponha $\mu(v,p) < \infty$. Temos a cadeia de ideais

$$\begin{aligned}\langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p \;\supset\; \dots \;\supset\; & \langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p^k \\ \dots \;\supset\; & \langle v_1,\dots,v_n\rangle,\end{aligned}$$

de onde resultam as desigualdades

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p} \;\le\; \dots \;\le\; & \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p^k} \\ \dots \;\le\; & \dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1,\dots,v_n\rangle} \;=\; \mu(v,p) \;<\; \infty.\end{aligned}$$

Logo, é possível escolher $r \in \mathbb{N}$ tal que $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^r = \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p^{r+1}$, o que implica

$$\langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p^r \;=\; \langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p^{r+1}$$

e, em particular,

$$\mathfrak{m}_p^r \;\subset\; \langle v_1,\dots,v_n\rangle + \mathfrak{m}_p^{r+1}.$$

Segue do lema de Nakayama ([Eis]) que

$$\mathfrak{m}_p^r \;\subset\; \langle v_1,\dots,v_n\rangle.$$

Tomando variedades dos dois lados, encontramos

$$\{0\} \;=\; V(\mathfrak{m}_p^r) \;\supset\; V(\langle v_1,\dots,v_n\rangle),$$

o que conclui a demonstração. □

7.2 Índice topológico

Suponha o campo holomorfo v definido numa vizinhaça aberta U de $p \in \mathbb{C}^n$, com p singularidade isolada de v. Definimos o *índice topológico* de v em p, denotado por $ind_p v$, da seguinte forma: identificamos $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e passamos a enxergar v como um campo de vetores real. Escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de forma que $v : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tenha apenas p como singularidade em $\overline{B}_\epsilon(p) \subset U$, a bola fechada de raio ϵ centrada em p, e fazemos

$$ind_p Z = \text{grau}\frac{v}{\|v\|},$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{v}{\|v\|} : S_\epsilon^{2n-1}(p) & \longrightarrow & S_1^{2n-1} \\ z & \longmapsto & \dfrac{v(z)}{\|v(z)\|} \end{array},$$

$S_\epsilon^{2n-1}(p)$ denotando a $(2n-1)$-esfera de raio ϵ centrada em p e S_1^{2n-1} a $(2n-1)$-esfera de raio 1 centrada na origem (veja [GP]).

Temos o seguinte resultado:

Teorema 7.2.1 $\mu(v,p) = ind_p v$.

Antes de provarmos o teorema, faremos alguns resultados preliminares.

Lema 7.2.2 *Seja $B_\epsilon(p) \subset \mathbb{C}^n$ a bola de raio ϵ centrada em p, com ϵ suficientemente pequeno de forma que p seja a única singularidade de v em $\overline{B}_\epsilon$. Então, a equação $v(z) - w_0 = 0$ possui exatamente $ind_p v$ soluções em B_ϵ para quase todo $w_0 \in \mathbb{C}^n$ numa vizinhança de 0.*

Demonstração: Tomamos δ satisfazendo $0 < \delta < \min_{z \in S_\epsilon^{2n-1}(p)} \|v(z)\|$. Pelo teorema de Sard, o conjunto dos valores críticos da aplicação $v : B_\epsilon(p) \to \mathbb{C}^n$ tem medida de Lebesgue nula. Escolhemos, então, $w_0 \in \mathbb{C}^n$, valor regular contido na imagem de v. $v^{-1}(w_0)$ é uma subvariedade mergulhada em $B_\epsilon(p)$ de dimensão zero, ou seja, é um conjunto discreto. Pela escolha de δ, seus pontos não se acumulam em $\partial B_\epsilon(p) = S_\epsilon^{2n-1}(p)$. Logo, $v^{-1}(w_0)$ tem cardinalidade finita. Uma vez que funções holomorfas preservam orientação, essa cardinalidade será igual ao grau da aplicação

$$g_1 : z \in S_\epsilon^{2n-1}(p) \longmapsto \frac{v(z) - w_0}{\|v(z) - w_0\|}.$$

Se

$$g_2 : z \in S_\epsilon^{2n-1}(p) \longmapsto \frac{v(z)}{\|v(z)\|},$$

então

$$\begin{array}{rcl} G : [0,1] \times S_\epsilon^{2n-1}(p) & \longrightarrow & S_1^{2n-1} \\ (t,z) & \longmapsto & \dfrac{v(z) - tw_0}{\|v(z) - tw_0\|} \end{array}$$

é uma homotopia entre g_1 e g_2. Portanto,

$$\begin{aligned} \#v^{-1}(w_0) &= \operatorname{grau}(g_1) \\ &= \operatorname{grau}(g_2) = ind_0 v. \end{aligned}$$

□

Denotaremos $\mathcal{O}_p$ ainda por $\mathcal{O}_z$ ou $\mathcal{O}_{z_1,\dots,z_n}$ para fazer referência ao sistema de coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ em torno de $p \in \mathbb{C}^n$. Fixemos, então, sistemas de coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ em torno de $p \in \mathbb{C}^n$ e da origem de $\mathbb{C}^n$, respectivamente. Consideramos o campo v como uma aplicação holomorfa $v : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. O homomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} v^* : & \mathcal{O}_w & \longrightarrow & \mathcal{O}_z \\ & f(w) & \longmapsto & f \circ v(z) \end{array}$$

induz, de maneira natural, uma estrutura de $\mathcal{O}_w$-módulo em $\mathcal{O}_z$.

Lema 7.2.3 *$\mathcal{O}_p$ é um $v^*(\mathcal{O}_w)$-módulo gerado por $\mu(v,p)$ elementos.*

Demonstração: Consideramos o germe de variedade analítica

$$V = \{(z, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{2n}_{(p,0)}; w_i = v_i(z), i = 1, \dots, n\}.$$

Seja $\mathfrak{i} = I(V) \subset \mathcal{O}_{z,w}$, onde $\mathcal{O}_{z,w}$ é o anel de germes de funções holomorfas em $(p,0)$ nas variáveis $(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$. $\mathfrak{i}$ é ideal primo (pois V é irredutível) gerado por $w_i - v_i(z)$ para $i = 1, \dots, n$, igual ao núcleo do homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & \mathcal{O}_{z,w} & \longrightarrow & \mathcal{O}_z \\ & h(z,w) & \longmapsto & h(z, v(z)) \end{array}.$$

Logo,

$$\frac{\mathcal{O}_{z,w}}{\mathfrak{i}} \cong \mathcal{O}_z. \tag{7.1}$$

Seja $p_1 = z_1^k + a_{k-1}z_1^{k-1} + \ldots + a_0$, onde $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}$, um polinômio de Weierstrass na variável z_1 pertencente ao ideal $\mathfrak{i}$. Dado $g \in \mathcal{O}_{z,w}$, pelo teorema da divisão de Weierstrass, obtemos $r, q \in \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1]$, com $r = 0$ ou $\text{grau}(r) < k$, tais que $g = qp_1 + r$. Uma vez que r é unicamente determinado, podemos definir o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Psi_* : & \mathcal{O}_{z,w} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1] \\ & g & \longmapsto & r \end{array},$$

que, composto com a projeção

$$\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1] \hookrightarrow \frac{\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1]}{\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1]} \cong \frac{\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}}{\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}}[\tilde{z}_1],$$

onde $\tilde{z}_1$ é a classe de z_1 em $\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1]/(\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}[z_1])$, resulta no homomorfismo

$$\Psi : \mathcal{O}_{z,w} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}}{\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}}[\tilde{z}_1].$$

Afirmamos que Ψ é sobrejetivo. Em primeiro lugar, observe que o polinômio $\tilde{p}_1 = x^k + \tilde{a}_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \tilde{a}_0 \in (\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}/(\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}))[x]$, onde $\tilde{a}_j$ denota a classe de a_j em $\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}/(\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w})$, possui $\tilde{z}_1$ como raiz. Assim, qualquer elemento de $(\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}/(\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}))[\tilde{z}_1]$ se escreve como um polinômio em z_1 com grau inferior a r. Se $\tilde{f} = \tilde{b}_{r-1}z_1^{r-1} + \ldots \tilde{b}_0 \in (\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}/(\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}))[\tilde{z}_1]$, então $f = b_{r-1}z_1^{r-1} + \ldots + b_0 \in \mathcal{O}_{z,w}$, onde b_j é um representante de $\tilde{b}_j$ em $\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}$, é tal que $\Psi(f) = \tilde{f}$. Uma vez que $\text{Nuc}(\Psi) = \mathfrak{i}$, obtemos o isomorfismo

$$\frac{\mathcal{O}_{z,w}}{\mathfrak{i}} \cong \frac{\mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}}{\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_{z_2,\ldots,z_n,w}}[\tilde{z}_1].$$

Repetindo o procedimento acima, em n etapas obtemos

$$\frac{\mathcal{O}_{z,w}}{\mathfrak{i}} \cong \frac{\mathcal{O}_w}{\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_w}[\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n],$$

onde $\tilde{z}_2, \ldots, z_n$ são definidos de maneira análoga a $\tilde{z}_1$. Porém, $\mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_w = \{0\}$. De fato, se $f \in \mathfrak{i} \cap \mathcal{O}_w$, então f é identicamente nula sobre a imagem de v, o que resulta em $f = 0$. Temos, portanto,

$$\frac{\mathcal{O}_{z,w}}{\mathfrak{i}} \cong \mathcal{O}_w[\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n],$$

que, em conjunto com a relação (7.1), nos fornece

$$\mathcal{O}_z \cong \mathcal{O}_w[\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n].$$

Segue da construção do isomorfismo acima que a imagem de $\mathcal{O}_w$ em $\mathcal{O}_z$ é $v^*(\mathcal{O}_w)$. Com essa identificação, temos que $\mathcal{O}_z$ é uma extensão inteira de $v^*(\mathcal{O}_w)$ gerada por $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$. Portanto, $\mathcal{O}_z$ é um $v^*(\mathcal{O}_w)$-módulo finitamente gerado.

Tomemos $g_1, \ldots, g_\mu \in \mathcal{O}_z$, onde $\mu = \mu(v, p)$, representantes de uma base de $\mathcal{O}_z / \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sobre $\mathbb{C}$. Seja N o submódulo de $\mathcal{O}_z$ gerado por esses elementos. É claro que $\mathcal{O}_z = N + \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Temos ainda $\mathcal{O}_z = N + \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \mathcal{O}_z$, pois $1 \in \mathcal{O}_z$. Uma vez que N é finitamente gerado e $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subset \mathfrak{m}_p$, concluímos do lema de Nakayama ([Eis]) que $\mathcal{O}_z = N$. □

Uma vez que $g_1, \ldots, g_\mu$ é um sistema de parâmetros, é possível provar que $\mathcal{O}_z$ é um $v^*(\mathcal{O}_w)$-módulo livre gerado por $g_1, \ldots, g_\mu$ (veja [Eis], [Na]).

Demonstração: (Teorema 7.2.1) Sejam K_z e K_w os corpos quociente de $\mathcal{O}_z$ e $v^*(\mathcal{O}_w)$, respectivamente. Como cada $\tilde{z}_j$ é inteiro sobre $v^*(\mathcal{O}_w)$, temos $K_z = K_w[\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n]$ e, além do mais, esta extensão é algébrica.

<u>Afirmação:</u> A extensão K_z/K_w tem grau $\mu = \mu(v, p)$.

Demonstração: Visto que $g_1, \ldots, g_\mu$ geram $\mathcal{O}_z$ como $v^*(\mathcal{O}_w)$-módulo livre, segue que $g_1, \ldots, g_\mu$ são linearmente independentes sobre K_w. Seja $h \in K_z$. Escrevemos h como polinômio em $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ da forma

$$h = \sum (c_{i_1 \ldots i_n} / d_{i_1 \ldots i_n}) \tilde{z}_1^{i_1} \ldots \tilde{z}_n^{i_n},$$

onde $c_{i_1 \ldots i_n}, d_{i_1 \ldots i_n} \in v^*(\mathcal{O}_w)$. Seja α o produto dos denominadores. Temos

$$\alpha h = \sum e_{i_1 \ldots i_n} \tilde{z}_1^{i_1} \ldots \tilde{z}_n^{i_n},$$

onde $e_{i_1 \ldots i_n} = \alpha c_{i_1 \ldots i_n} / d_{i_1 \ldots i_n} \in v^*(\mathcal{O}_w)$. Cada monômio do tipo $\tilde{z}_j^{i_j}$ pode ser escrito como combinação linear de $g_1, \ldots, g_n$ com coeficientes em $v^*(\mathcal{O}_w)$. Logo, é possível escrever

$$\alpha h = f_1 g_1 + \ldots + f_\mu g_\mu,$$

onde $f_1, \ldots, f_\mu \in v^*(\mathcal{O}_w)$. Portanto,

$$h = (f_1/\alpha) g_1 + \ldots + (f_\mu/\alpha) g_\mu,$$

de onde concluímos que $g_1, \ldots, g_\mu$ formam uma base de K_z/K_w e a dimensão desta extensão é μ. □

Pelo teorema do elemento primitivo (veja [H]) existe uma combinação linear $\xi = c_1\tilde{z}_1 + \ldots + c_n\tilde{z}_n$ com coeficientes em K_w tal que $K_z = K_w[\xi]$. Obtemos novas coordenadas, ainda denotadas $(z_1, \ldots, z_n)$, efetuando a mudança de variáveis $z_1 = \xi$. Assim, $K_z = K_w[z_1]$. Seja P o polinômio mínimo de z_1 sobre K_w (P mônico e irredutível). Temos grau$(P) = [K_z : K_w] = \mu$. Como z_1 é inteiro sobre $v^*(\mathcal{O}_w)$, concluímos que cada coeficiente de P é raiz de um polinômio com coeficientes em $v^*(\mathcal{O}_w)$ ([Eis,p.125]). No entanto, como $\mathcal{O}_z$ é domínio de fatoração única ([Gun, v.II]), é também integralmente fechado. Portanto, cada coeficiente de P está em $v^*(\mathcal{O}_w)$. Escrevemos

$$P(x) = x^\mu + \sum_{j=0}^{\mu-1} A_j(v_1, \ldots, v_n)x^j,$$

onde $A_j(w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{O}_w$ para $j = 1, \ldots, \mu - 1$. Além disso, para $j = 2, \ldots, n$, escrevemos

$$z_j = \sum_{k=1}^{m(j)} b_{jk}(v_1, \ldots, v_n)z_1^k, \; j = 2, \ldots, n, \tag{7.2}$$

onde $b_{jk}(w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{O}_w$ para $k = 1, \ldots, m(j)$. De (7.2) temos que, se $p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{C}^n$ são pontos distintos tais que $v(p) = v(q)$ então $p_1 \neq q_1$. Pelo lema 7.2.2, para $\|w_0\|$ suficientemente pequeno fora de um conjunto de medida nula, a equação $v(z) - w_0$ possui exatamente $ind_0 v$ soluções. Cada uma dessas soluções, pela observação anterior, dá origem a uma raiz distinta do polinômio $x^\mu + \sum_{j=0}^{\mu-1} A_j(w_0)x^j$. Portanto, $\mu \geq ind_0 Z$.

Por outro lado, escolhendo w_0 tal que o polinômio

$$P(x) = x^\mu + \sum_{j=0}^{\mu-1} A_j(w_0)x^j$$

possua μ raízes distintas, construímos, a partir de (7.2), μ pontos na pré-imagem de w_0 por v. Portanto, $\mu = ind_0 Z$. □

Exercício 1 Mostre que o número de Milnor é aditivo em cada componente. Ou seja, se $v = (v_1, \ldots, v_n)$ é um germe de campo de vetores holomorfo com singularidade isolada em $p \in \mathbb{C}^n$ tal que $v_1 = v_1^{(1)} v_1^{(2)}$, definindo $v^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2, \ldots, v_n)$ e $v^{(2)} = (v_1^{(2)}, v_2, \ldots, v_n)$, então

$$\mu(v, p) = \mu(v^{(1)}, p) + \mu(v^{(2)}, p).$$

Exercício 2 Seja $v = (v_1, \ldots, v_n)$ um germe de campo de vetores holomorfo com singularidade isolada em $p \in \mathbb{C}^n$ e $\tilde{v} = (v_1 + \sum_{k=2}^n f_k v_k, v_2, \ldots, v_n)$, onde $f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_p$. Mostre que $\mu(v, p) = \mu(\tilde{v}, p)$.

Proposição 7.2.4 *Seja $v = (v_1, \ldots, v_n)$ um germe de campo de vetores holomorfo com singularidade isolada em $p \in \mathbb{C}^n$. $\mu(v,p) = 1$ se, e somente se, a matriz*

$$L = \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

é não singular.

Demonstração: Suponha L não singular. Para z em uma vizinhança de p temos $v(z) = L(z-p) + r(z-p)$, onde $r(z-p)$ corresponde aos termos de ordem superior a 1. Uma vez que L é não singular, existe $\epsilon > 0$ tal que $\|r(z-p)\| < \|L(z-p)\|$ para todo $z \in S_\epsilon^{2n-1}(p)$. Deixamos para o leitor a verificação desse fato. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} G: & [0,1] \times S_\epsilon^{2n-1}(p) & \longrightarrow & S^{2n-1} \\ & (t,z) & \longmapsto & \dfrac{L(z) + tr(z)}{\|L(z) + tr(z)\|} \end{array}$$

é uma homotopia entre $v/\|v\|$ e $L/\|L\|$. Logo, $\mathrm{grau}(v/\|v\|) = \mathrm{grau}(L/\|L\|)$. O resultado segue, observando que $\mathrm{grau}(L/\|L\|) = 1$.

Reciprocamente, suponha $\mu(v,p) = 1$. Seja $g \in \mathcal{O}_n$ cuja classe gera $\mathcal{O}_p$ sobre $\mathbb{C}$. Para cada $f \in \mathcal{O}_n$, existem $\alpha_f \in \mathbb{C}$ e germes $h_1^f, \ldots h_n^f \in \mathcal{O}_p$ tais que

$$f = \alpha_{(f)} g + h_1^f v_1 + \ldots + h_n^f v_n.$$

Em particular, para $f = 1$, escrevemos

$$1 = \alpha_1 g + h_1^1 v_1 + \ldots + h_n^1 v_n.$$

Da expressão acima, obtemos que $g(p) \neq 0$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, escrevemos

$$z_i - p_i = \alpha_{z_i} g + h_1^{z_i} v_1 + \ldots + h_n^{z_i} v_n,$$

onde $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Calculando em p, encontramos $\alpha_{z_i} = 0$, donde

$$z_i - p_i = h_1^{z_i} v_1 + \ldots + h_n^{z_i} v_n.$$

Derivando em relação a z_i, obtemos

$$h_1^{z_i}(p)\frac{\partial v_1}{\partial z_i}(p) + \ldots + h_n^{z_i}(p)\frac{\partial v_n}{\partial z_i}(p) = 1. \tag{7.3}$$

Por sua vez, derivando em relação a z_j para $j \neq i$, encontramos

$$h_1^{z_i}(p)\frac{\partial v_1}{\partial z_j}(p) + \ldots + h_n^{z_i}(p)\frac{\partial v_n}{\partial z_j}(p) = 0. \tag{7.4}$$

De (7.3) e (7.4) concluímos que L é não singular. □

7.3 Campos em superfícies

Seja v campo de vetores holomorfo em uma superfície complexa M com singularidade isolada no ponto p. Tomamos coordenadas $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ nas quais $p = (0,0)$ e $v = (v_1, v_2)$. Seja $\alpha(T) = (T^m, T^n u(T))$, onde $u(p) \neq 0$ e $m_p(v) = \min\{m,n\}$, uma parametrização de Puiseux para $v_1^{-1}(0)$. Como v_1 e v_2 não possuem componentes comuns, $v_2 \circ \alpha(T)$ não é identicamente nula. Temos:

Proposição 7.3.1 *Seja $v = (v_1, v_2)$ como acima. Então $\mu(v,p)$ é a multiplicidade de $v_2 \circ \alpha(T)$ em $T = 0$.*

Demonstração: Basta notar que os pontos da forma $(0,c) \in \mathbb{C}^2$, com $c \neq 0$ e $|c|$ suficientemente pequeno, são valores regulares de v. Deixamos essa verificação para o leitor. Tomando um valor regular para v da forma $w_0 = (0,c)$ suficientemente próximo da origem, o número de soluções da equação $v(z) = w_0$ numa bola de raio suficientement pequeno é, por um lado, $\mu(v,p)$ e, por outro, a multiplicidade de $v_2 \circ \alpha(T)$ em $T = 0$. □

Sejam v_1 e v_2 funções holomorfas numa vizinhança de $p = (0,0) \in \mathbb{C}^2$, que se anulam simultaneamente somente neste ponto, com multiplicidades m_1 e m_2, respectivamente. Fazemos

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x,t) &= \frac{v_1(x,xt)}{x^{m_1}}, \\ \tilde{v}_2(x,t) &= \frac{v_2(x,xt)}{x^{m_2}}. \end{aligned}$$

As raízes em comum de $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ sobre $\{x = 0\}$ ocorrem em número finito. Estabelecendo a notação $\mu((v_1,v_2),p)$ para fazer referência ao campo de componentes (v_1,v_2), temos o seguinte

Lema 7.3.2

$$\mu((v_1,v_2),p) = m_1 m_2 + \sum_{q \in \{x=0\}} \mu((\tilde{v}_1,\tilde{v}_2),q).$$

Demonstração: Vamos supor, inicialmente, v_1 irredutível e $v_1^{-1}(0)$ distinto dos eixos coordenados (nesse caso as contas são ainda mais simples). Seja $\alpha(T) = (T^m, T^n u(T))$, onde $u(0) \neq 0$ e $m_1 = \min\{m,n\}$, uma parametrização de Puiseux para $v_1^{-1}(0)$. Suponha $m_1 = m \leq n$ (se não for esse o caso, invertemos os papéis de x e y). A curva $\tilde{\alpha}(T) = (T^m, T^{n-m}u(T))$ é uma parametrizacão de Puiseux para $\tilde{v}_1^{-1}(0)$. Além do mais, $\tilde{v}_1$ é irredutível, uma vez que v_1 o é. Se $q = \tilde{\alpha}(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\mu((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2), q) &= m_q(\tilde{v}_2 \circ \tilde{\alpha}(T)) \\
&= m_q\left(\frac{v_2 \circ \alpha(T)}{(T^m u(T))^{m_2}}\right) \\
&= \mu((v_1, v_2), p) - mm_2 = \mu((v_1, v_2), p) - m_1 m_2,
\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado para v_1 irredutível. Se v_1 é redutível, o resultado segue do fato de que a multiplicidade e o número de Milnor (em cada componente) são aditivos. □

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação em uma superfície complexa e $p \in Sing(\mathcal{F})$, então, escolhendo um campo de vetores v que induz $\mathcal{F}$ em torno de p, podemos definir o número de Milnor da folheação em p por $\mu(\mathcal{F}, p) = \mu(v, p)$. É imediato que a definição independe da escolha do campo v.

Proposição 7.3.3 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma explosão em p e $P = \pi^{-1}(p)$. Suponha p não dicrítica. Então*

$$\mu(\mathcal{F}, p) = (m_p(\mathcal{F}))^2 - (m_p(\mathcal{F}) + 1) + \sum_{q \in P} \mu(\pi^* \mathcal{F}, q).$$

Demonstração: Tomamos coordenadas (x, y) nas quais $p = (0,0)$ e $\mathcal{F}$ é induzida pelo campo $v = (v_1, v_2)$. Mudando coordenadas, se necessário, podemos supor que v_1 e v_2 têm, ambos, ordem m, onde $m = m_p(\mathcal{F})$, e que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ estão no sistema de coordenadas (x, t) de $\tilde{M}$ (o que equivale a v_1 possuir um termo em y^m). Nesse sistema, $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida por

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(x, t) &= \frac{1}{x^m}(xv_1(x, xt), v_2(x, xt) - tv_1(x, xt)) \\
&= (x\tilde{v}_1(x, t), \tilde{v}_2(x, t) - t\tilde{v}_1(x, t)).
\end{aligned}$$

Temos então

$$\mu(\tilde{v}, q) = \mu((x, \tilde{v}_2 - t\tilde{v}_1), q) + \mu((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 - t\tilde{v}_1), q).$$

Da proposição 7.3.1, se $q = (0, t_0) \in P$, temos que $\mu((x, \tilde{v}_2 - t\tilde{v}_1), q)$ é a multiplicidade de $\tilde{v}_2(0, t) - t\tilde{v}_1(0, t)$ em t_0, que, por sua vez, coincide com a multiplicidade de t_0 como raiz do polinômio $v_{2m}(1,t) - tv_{1m}(1,t)$, onde v_{1m} e v_{2m} denotam os termos de grau m de v_1 e v_2, respectivamente. Logo,

$$\sum_{q\in P} \mu((x, \tilde{v}_2 - t\tilde{v}_1), q) = \text{grau}(v_{2m}(1,t) - tv_{1m}(1,t)) = m+1,$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F}, q) &= (m+1) + \sum_{q\in P} \mu((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 - t\tilde{v}_1), q) \\ &= (m+1) + \sum_{q\in P} \mu((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2), q). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Do lema 7.3.2,

$$\sum_{q\in P} \mu((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2), q) + m^2 = \mu((v_1, v_2), p) = \mu(\mathcal{F}, p). \tag{7.6}$$

(7.5) e (7.6) provam a proposição. □

Proposição 7.3.4 *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma explosão em p e $P = \pi^{-1}(p)$. Suponha p dicrítica. Então*

$$\mu(\mathcal{F}, p) = (m_p(\mathcal{F}))^2 + m_p(\mathcal{F}) - 1 + \sum_{q\in P} \mu(\pi^*\mathcal{F}, q).$$

Demonstração: Fixamos coordenadas (x, y) nas quais $\mathcal{F}$ é induzida numa vizinhança de $p = (0,0)$ pelo campo $v = (v_1, v_2)$. Podemos supor que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ estão no sistema de coordenadas (x,t) da explosão em p. Isso significa que v_1 possui um termo em y^{m+1}, onde $m = m_p(\mathcal{F})$. Visto que $xv_{2m} - yv_{1m} = 0$, os termos de grau m de v_1 são múltiplos de x e, além disso, $xv_2 - yv_1$ tem multiplicidade $m+2$. Temos, por um lado,

$$\begin{aligned} \mu((v_1, xv_2 - yv_1), p) &= \mu((v_1, xv_2), p) \\ &= \mu((v_1, x)), p) + \mu((v_1, v_2), p) \\ &= (m+1) + \mu(v, p). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Por outro lado, se

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x,t) &= \frac{1}{x^m} v_1(x, xt), \\ \tilde{f}(x,t) &= \frac{1}{x^{m+2}} (xv_2(x,xt) - xtv_1(x,xt)), \end{aligned}$$

decorre do lema 7.3.2 que

$$\mu((v_1, xv_2 - yv_1), p) = m(m+2) + \sum_{q \in P} \mu((\tilde{v}_1, \tilde{f}), q). \tag{7.8}$$

O resultado segue de (7.7) e (7.8), observando que $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida nas coordenadas (x, t) pelo campo $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{f})$. □

7.4 Resolução de singularidades

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície complexa M e $p \in Sing(\mathcal{F})$ tal que $m_p(\mathcal{F}) = 1$. Tomamos um campo v que induz $\mathcal{F}$ em torno de p e um sistema de coordenadas holomorfo (x, y) no qual $p = (0, 0)$ e $v = (v_1, v_2) = v_1\partial/\partial x + v_2\partial/\partial y$. Uma vez que $m_p(\mathcal{F}) = 1$, v tem parte linear não nula. Pela forma canônica de Jordan, podemos supor que a parte linear de v tem uma das seguintes formas:

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}^*; \qquad (2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*;$$

$$(3) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}^*; \qquad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Descreveremos, nos próximos resultados, o comportamento de cada um dos tipos acima em relação a explosões. Seja, então, π uma explosão em p, $P = \pi^{-1}(p)$ a reta projetiva associada e $\pi^*\mathcal{F}$ a folheação induzida.

Proposição 7.4.1 *Se p é singularidade do tipo (2) com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então $\pi^*\mathcal{F}$ não possui singularidades sobre P.*

Proposição 7.4.2 *Se p é uma singularidade do tipo (2) com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\pi^*\mathcal{F}$ possui duas singularidades sobre P, ambas do tipo (2), com autovalores $\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1$, respectivamente.*

Exercício 3 Demonstre as proposições 7.4.1 e 7.4.2.

Proposição 7.4.3 *Se p é singularidade do tipo (3), então $\pi^*\mathcal{F}$ possui uma única singularidade, do tipo (1), sobre P.*

Demonstração: Suponhamos $\mathcal{F}$ induzida em torno de $p = (0,0)$ pela 1-forma

$$\omega(x,y) = (\lambda x + y + f)dy - (\lambda y + g)dx,$$

onde f e g têm ordem 2. Nas coordenadas (x,t), $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida pela 1-forma

$$\tilde{\omega}(x,t) = (t^2 + t\tilde{f} - \tilde{g})dx + (\lambda x + tx + x\tilde{f})dt,$$

onde $\tilde{f}(x,t) = f(x,xt)/x$ e $\tilde{g}(x,t) = g(x,xt)/x$ têm ordem pelo menos 1 na variável x. Segue que $q = (0,0)$ é a única singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $x = 0$. Se o coeficiente de dx em $\tilde{\omega}$ tem ordem pelo menos 2, temos de imediato que q é do tipo (1). Isso não será o caso apenas quando $g(x,y) = x^2 + \cdots$, o que resulta em $\tilde{g}(x,t) = x + \cdots$. Nesse caso, q é ainda do tipo (1), pois os autovalores da parte linear são λ e 0.

Deixamos para o leitor a verificação de que a origem do sistema de coordenadas (u,y) não é singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$. □

Uma singularidade do tipo (4) é chamada de *nilpotente.*

Proposição 7.4.4 *Se p é uma singularidade nilpotente, então $\pi^*\mathcal{F}$ possui sobre P uma única singularidade q tal que $m_q(\pi^*\mathcal{F}) = 1$ ou $m_q(\pi^*\mathcal{F}) = 2$. No primeiro caso, q é nilpotente, e uma explosão em q origina uma singularidede de multiplicidade 2. Em ambas as situações, uma explosão na singularidade de multiplicidade 2 produz duas (uma de multiplicidade 1 e outra multiplicidade 2) ou três singularidades (todas de multiplicidade 1), sendo que nenhuma das singularidades de multiplicidade 1 é nilpotente.*

Demonstração: Suponhamos $\mathcal{F}$ induzida por

$$\omega(x,y) = (y + f)dy + gdx,$$

onde f e g têm ordem pelo menos 2 em $p = (0,0)$. Nas coordenadas (x,t), $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida por

$$\tilde{\omega}(x,t) = (t^2 + t\tilde{f} + \tilde{g})dx + (tx + x\tilde{f})dt,$$

onde $\tilde{f}(x,t) = f(x,xt)/x$ e $\tilde{g} = g(x,xt)/x$ têm multiplicidade pelo menos 1 na variável x. Vemos, por essa expressão, que $q = (0,0)$ é a única singularidade sobre P nas coordenadas (x,t). Deixamos para o leitor a verificação de que a origem do sistema de coordenadas (u,y) da explosão não é singularidade. Note que $m_q(\pi^*\mathcal{F})$ será diferente de 2 apenas no caso em que g é da forma $g(x,y) = x^2 + \cdots$, o que implica em $\tilde{g}(x,t) = x + \cdots$, donde q é nilpotente.

Porém, uma vez que o coeficiente de dt em $\tilde{\omega}$ não é da forma $t^2 + \cdots$, uma nova explosão em q dá origem a uma singularidade de multiplicidade 2.

Deixamos como exercício a verificação de que uma explosão na singularidade de multiplicidade 2 obtida no parágrafo anterior dá origem a 2 ou 3 singularidades conforme descrito no enunciado. □

Exercício 4 Complete a demonstração da proposição 7.4.4

Podemos, então, demonstrar o teorema 6.2.2:

Demonstração (Teorema 6.2.2): Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície e $p \in Sing(\mathcal{F})$. Em primeiro lugar, analisemos os casos em que $m_p(\mathcal{F}) = 1$ e p é de um dos tipos (1), (2) ou (3).

Tipo (1): p já é uma singularidade reduzida;

Tipo (2): se $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$, p é singularidade reduzida. Se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^+$, pela proposição 7.4.2, uma seqüência de explosões origina singularidades do tipo (2) com $\lambda_1 = \lambda_2$, que, por sua vez, não produzem mais singularidades com mais uma explosão (pela proposição 7.4.1), ou singularidades do tipo (2) com $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^-$;

Tipo (3): pela proposição 7.4.3, uma explosão dá origem a uma singularidade do tipo (1), que é reduzida.

Observe que, se $\mu(p) = 1$, então p é singularidade de um dos tipos (2) ou (3), e p pode ser resolvida. Basta, então, mostrarmos que, efetuando explosões, as singularidades obtidas são dos tipos (1),(2) ou (3), já tratados, ou têm números de Milnor estritamente menores que a singularidade original. Das proposições 7.3.3 e 7.3.4, uma explosão em p origina singularidades com números de Milnor estritamente menores, com exceção do caso em que p é não dicrítica e $m_p(\mathcal{F}) = 1$ (nesse caso, a soma dos números de Milnor das novas singularidades é maior em uma unidade). Se tal singularidade é de um dos tipos (1), (2) ou (3), sabemos que é possível resolvê-la. Resta, portanto, analisar o caso em que p é singularidade do tipo (4).

Tipo (4): levaremos em conta o que foi descrito na proposição 7.4.4. Se uma explosão em p resulta em uma singularidade de multiplicidade 2, então uma nova explosão nessa singularidade origina singularidades com números de Milnor estritamente menores que $\mu(p) = \mu(\mathcal{F}, p)$. No caso em que uma explosão em p resulta em uma singularidade nilpotente, uma explosão nessa singularidade produz uma singularidade de multiplicidade 2 com número de Milnor $\mu(p) + 2$. Uma nova explosão nessa singularidade resulta em singularidades de multiplicidade 1 não nilpotentes, que já consideramos, ou, possivelmente, em uma singularidade $\tilde{q}$ de multiplicidade 2 tal que $\mu(\tilde{q}) \leq \mu(p)$. Uma nova explosão em $\tilde{q}$ produz singularidades com números de Milnor estritamente menores que $\mu(p)$. Isso conclui a demonstração. □

Capítulo 8

Índices em superfícies

Ao longo deste capítulo, M denotará uma superfície complexa (não singular) provida de uma folheação singular $\mathcal{F}$.

8.1 Índice CS

Sejam $p \in Sing(\mathcal{F})$ e S separatriz em p. Tomamos uma 1-forma holomorfa ω que induz $\mathcal{F}$ em torno de p e uma função holomorfa f tal que $f = 0$ é equação local reduzida de S.

Lema 8.1.1 ([LN]) *Nas condições acima, existem germes de funções holomorfas g e h, relativamente primos e não identicamente nulos sobre S, e germe de 1-forma holomorfa η, tais que*

$$g\omega = hdf + f\eta. \tag{8.1}$$

Demonstração: Consideramos o problema em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Escrevemos $\omega = pdx + qdy$. Mudando coordenadas, se necessário, podemos supor que $\{x = 0\}$ não é invariante por $\mathcal{F}$, o que nos dá $q \not\equiv 0$ e $f_y \not\equiv 0$. Uma vez que S é invariante por $\mathcal{F}$, temos

$$df \wedge \omega = fkdx \wedge dy$$

para alguma função holomorfa k, ou seja,

$$f_x q - f_y p = fk.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} f_y\omega &= f_y(pdx + qdy) \\ &= (f_x q - fk)dx + f_y q dy \\ &= q(f_x dx + f_y dy) - fkdx, \end{aligned}$$

uma decomposição como em (8.1), onde $g = f_y$, $h = q$ e $\eta = -kdx$. □

Reciprocamente, a existência da decomposição (8.1) implica que a curva S de equação $f = 0$ é invariante pela folheação induzida por $\omega = 0$. De fato, temos $\omega \wedge df = f\eta \wedge df$, ou seja, $\omega \wedge df \equiv 0$ sobre S.

Denotaremos por ∂S a curva $S \cap S_\varepsilon^3$, onde S_ε^3 é uma esfera de raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno com centro em p, orientada como a fronteira de $S \cap B_\varepsilon^4$. Considerando a decomposição acima, temos a

Definição 8.1.2 ([CS],[LN]) O *índice Camacho-Sad* de $\mathcal{F}$ com respeito a S em p é definido por

$$CS(\mathcal{F}, S, p) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S} \frac{\eta}{h}.$$

Se $p \in M$ é ponto regular de $\mathcal{F}$, a definição acima pode ser estendida fazendo $CS(\mathcal{F}, S, p) = 0$.

Proposição 8.1.3 *$CS(\mathcal{F}, S, p)$ independe das escolhas feitas na definição.*

Demonstração: Devemos provar a independência da definição em relação: (i) à equação local de $\mathcal{F}$; (ii) à equação local de S; (iii) à decomposição; (iv) à escolha de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

(i) Suponha $\tilde{\omega}$ uma outra 1-forma holomorfa induzindo $\mathcal{F}$ numa vizinhança de p. Nessa vizinhança, existe uma função holomorfa φ nunca nula satisfazendo $\tilde{\omega} = \varphi\omega$. Da decomposição (8.1), produzimos

$$g\tilde{\omega} = \varphi h df + \varphi f \eta,$$

decomposição associada a $\tilde{\omega}$. O resultado segue.

(ii) Uma outra equação local $\tilde{f} = 0$ para S satisfaz $f = \psi\tilde{f}$, onde ψ é holomorfa e nunca nula em uma vizinhança de p. Substituindo em (8.1), obtemos a decomposição

$$g\omega = h\psi d\tilde{f} + \tilde{f}(hd\psi + \psi\eta).$$

Segue que

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{hd\psi+\psi\eta}{h\psi} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{d\psi}{\psi}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{\eta}{h}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{\eta}{h}.$$

(iii) Considere duas decomposições associadas a ω e a f:

$$g\omega = hdf + f\eta,$$
$$\tilde{g}\omega = \tilde{h}df + f\tilde{\eta}.$$

Temos

$$0 = g\omega\wedge\tilde{g}\omega = hfdf\wedge\tilde{\eta} + f\tilde{h}\eta\wedge df + f^2\eta\wedge\tilde{\eta},$$

donde

$$(\tilde{h}\eta - h\tilde{\eta})\wedge df + f\eta\wedge\tilde{\eta} = 0.$$

Concluímos que, sobre S, $\tilde{h}\eta - h\tilde{\eta}\equiv 0$. Segue que

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{\eta}{h} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{h}}.$$

(iv) η/h é uma 1-forma holomorfa sobre uma curva. Portanto, é fechada. O resultado segue do teorema de Stokes. □

Proposição 8.1.4 *Sejam S_1, S_2 separatrizes de $\mathcal{F}$ em p, sem componentes em comum, e $S = S_1\cup S_2$. Então*

$$CS(\mathcal{F},S,p) = CS(\mathcal{F},S_1,p) + CS(\mathcal{F},S_2,p) + 2(S_1\cdot S_2)_p.$$

Demonstração: Sejam $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ equações locais reduzidas para S_1 e S_2, respectivamente. Obtemos decomposições

$$g_1\omega = h_1df_1 + f_1\eta_1,$$
$$g_2\omega = h_2df_2 + f_2\eta_2.$$

Multiplicando a primeira das equações por f_2h_2, a segunda por f_1h_1, e somando, obtemos

$$(f_2h_2g_1 + f_1h_1g_2)\omega = h_1h_2(f_2df_1 + f_1df_2) + f_1f_2(h_2\eta_1 + h_1\eta_2)$$
$$= h_1h_2df + f(h_2\eta_1 + h_1\eta_2),$$

onde $f = f_1 f_2$. Trata-se, pois, de uma decomposição para S. Calculamos, a partir desta,

$$\begin{aligned} CS(\mathcal{F}, S, p) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\left(\frac{\eta_1}{h_1}+\frac{\eta_2}{h_2}\right) \\ &= CS(\mathcal{F}, S_1, p) + CS(\mathcal{F}, S_2, p) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_2}\frac{\eta_1}{h_1} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\frac{\eta_2}{h_2}, \end{aligned}$$

pois $\partial S = \partial S_1 \cup \partial S_2$. Por outro lado, uma vez que

$$\frac{\eta_1}{h_1} = \frac{g_1}{h_1 f_1}\omega - \frac{df_1}{f_1},$$

temos

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_2}\frac{\eta_1}{h_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_2}\frac{df_1}{f_1} = (S_1 \cdot S_2)_p.$$

Analogamente,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\frac{\eta_2}{h_2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\frac{df_2}{f_2} = (S_1 \cdot S_2)_p,$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 8.1.5 Considere a folheação induzida em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega(x,y) = x(\lambda_1 + yf(x,y))dy - y(\lambda_2 + xg(x,y))dx,$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, onde $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são holomorfas. Temos separatrizes $S_1 : \{y = 0\}$ e $S_2 : \{x = 0\}$.

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_1}\left(-\frac{\lambda_2 + xg(x,y)}{x(\lambda_1 + yf(x,y))}\right)dx = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

De forma análoga, $CS(\mathcal{F}, S_2, 0) = \lambda_1/\lambda_2$.

Exemplo 8.1.6 Se $S : \{x = 0\}$ é a separatriz forte da sela-nó dada pela forma normal de Dulac

$$\omega = x^{p+1}dy + (y(1 + \lambda x^p) + f(x,y))dx,$$

onde $p \geq 1$ e $f(x,y)$ é holomorfa com multiplicidade pelo menos $p+2$, então

$$CS(\mathcal{F}, S, 0) \;=\; -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S} \frac{x^p}{y(1+\lambda x^p)+f(x,y)}\,dy \;=\; 0.$$

Seja $S \subset M$ uma curva compacta, invariante pela folheação $\mathcal{F}$. O número de singularidades de $\mathcal{F}$ sobre S é finito, de forma que faz sentido definir

$$CS(\mathcal{F}, S) \;=\; \sum_{p\in S} CS(\mathcal{F}, S, p).$$

Teorema 8.1.7 ([CS],[KS]) *Nas condições acima,*

$$CS(\mathcal{F}, S) \;=\; S\cdot S.$$

Demonstração: Temos

$$S\cdot S \;=\; c_1([S])\cdot S \;=\; \int_S c_1([S]).$$

Passemos ao cálculo da última integral.

Escrevemos $Sing(\mathcal{F}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Produzimos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, cobertura localmente finita de M, tal que, para cada $\alpha \in A$, $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$ tem equação local $\omega_\alpha = 0$, ω_α 1-forma holomorfa e $S_{|U_\alpha}$ é dada pelos zeros da função holomorfa f_α. Supomos que, para cada $k = 1, \ldots, n$, existe um único aberto U_{α_k} contendo p_k, e que $U_{\alpha_k} \cap U_{\alpha_j} = \emptyset$, se $k \neq j$. Tomamos decomposições

$$g_\alpha\omega_\alpha \;=\; h_\alpha df_\alpha + f_\alpha\eta_\alpha. \tag{8.2}$$

Sempre que $\alpha \in A\setminus\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, escolhemos ω_α e f_α de forma que $\eta_\alpha = 0$ na decomposição associada.

Se $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existem $\varphi_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tais que, em $U_{\alpha\beta}$, $\omega_\beta = \varphi_{\alpha\beta}\omega_\alpha$ e $f_\alpha = f_{\alpha\beta}f_\beta$. Os cociclos $(\varphi_{\alpha\beta})$ e $(f_{\alpha\beta})$ definem $N^*_{\mathcal{F}}$ e $[S]$, respectivamente. Tomamos, por fim, $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$, partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$. Da proposição 4.5.4, temos

$$c_1([S])_{|U_\alpha} \;=\; -\frac{1}{2\pi i}\sum_\gamma d(\rho_\gamma d(\log f_{\gamma\alpha})).$$

De (8.2), temos

$$\begin{aligned} dg_\alpha \wedge \omega_\alpha + g_\alpha d\omega_\alpha \;&=\; dh_\alpha \wedge df_\alpha + df_\alpha \wedge \eta_\alpha + f_\alpha d\eta_\alpha \\ &=\; (dh_\alpha - \eta_\alpha)\wedge df_\alpha + f_\alpha d\eta_\alpha, \end{aligned}$$

resultando, em $U_\alpha \cap S$ (uma vez que $g_\alpha \omega_\alpha = h_\alpha df_\alpha$),

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= \left(\frac{dh_\alpha}{h_\alpha} - \frac{dg_\alpha}{g_\alpha} - \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha}\right) \wedge \omega_\alpha \\ &= \left(d\left(\log \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right) - \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha}\right) \wedge \omega_\alpha. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Em $U_{\alpha\beta} \cap S$, temos

$$\begin{aligned} g_\alpha \omega_\alpha &= h_\alpha df_\alpha \\ &= h_\alpha \frac{df_\beta}{f_{\beta\alpha}} \\ &= \frac{h_\alpha}{f_{\beta\alpha}} \frac{g_\beta \omega_\beta}{h_\beta} = \frac{h_\alpha g_\beta}{f_{\beta\alpha} h_\beta} \varphi_{\alpha\beta} \omega_\alpha, \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\frac{h_\beta}{g_\beta} = \frac{h_\alpha}{g_\alpha} f_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}. \tag{8.4}$$

Ainda em $U_{\alpha\beta} \cap S$,

$$\begin{aligned} d\omega_\beta &= d\varphi_{\alpha\beta} \wedge \omega_\alpha + \varphi_{\alpha\beta} d\omega_\alpha \\ &= \left(d\varphi_{\alpha\beta} \wedge \omega_\alpha + \varphi_{\alpha\beta}\left(d\left(\log \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right) - \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha}\right)\right) \wedge \omega_\alpha \\ &= \left(d(\log \varphi_{\alpha\beta}) + d\left(\log \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right) - \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha}\right) \wedge \omega_\beta. \end{aligned}$$

Uma vez que, em $U_\beta \cap S$,

$$d\omega_\beta = \left(d\left(\log \frac{h_\beta}{g_\beta}\right) - \frac{\eta_\beta}{h_\beta}\right) \wedge \omega_\beta,$$

temos, em $U_{\alpha\beta} \cap S$,

$$d(\log \varphi_{\alpha\beta}) = \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha} - \frac{\eta_\beta}{h_\beta} + d\left(\log \frac{h_\beta}{g_\beta}\right) - d\left(\log \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right). \tag{8.5}$$

Por outro lado, tomando logaritmos e diferenciais na relação (8.4), obtemos

$$\begin{aligned} d(\log f_{\alpha\beta}) &= -d(\log \varphi_{\alpha\beta}) + d\left(\log \frac{h_\beta}{g_\beta}\right) - d\left(\log \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right) \\ &= \frac{\eta_\beta}{h_\beta} - \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Para $k = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned} c_1([S])_{|U_{\alpha_k}\cap S} &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_\beta d(\rho_\beta d(\log f_{\beta\alpha_k})) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_\beta d\rho_\beta \wedge d(\log f_{\beta\alpha_k}) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_\beta d\rho_\beta \wedge \left(\frac{\eta_{\alpha_k}}{h_{\alpha_k}} - \frac{\eta_\beta}{h_\beta}\right). \end{aligned}$$

Considerando que $\eta_\beta = 0$ se $U_{\alpha_k\beta} \neq \emptyset$ e $\beta \neq \alpha_k$, e $\sum_{\alpha\in A}\rho_\alpha \equiv 1$, obtemos

$$c_1([S])_{|U_{\alpha_k}\cap S} = \frac{1}{2\pi i} d\rho_{\alpha_k} \wedge \frac{\eta_{\alpha_k}}{h_{\alpha_k}}.$$

Temos

$$\int_S c_1([S]) = \sum_{k=1}^n \int_{U_{\alpha_k}\cap S} c_1([S]).$$

Escolhemos, em torno de p_k, uma bola B_k suficientemente pequena de forma que $\rho_{\alpha_k|B_k} \equiv 1$. Temos

$$\begin{aligned} \int_{U_{\alpha_k}\cap S} c_1([S]) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{U_{\alpha_k}\cap S} d\rho_{\alpha_k} \wedge \frac{\eta_{\alpha_k}}{h_{\alpha_k}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(U_{\alpha_k}\setminus B_k)\cap S} d\rho_{\alpha_k} \wedge \frac{\eta_{\alpha_k}}{h_{\alpha_k}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(U_{\alpha_k}\setminus B_k)\cap S} d\left(\rho_{\alpha_k}\frac{\eta_{\alpha_k}}{h_{\alpha_k}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(B_k\cap S)} \rho_{\alpha_k}\frac{\eta_{\alpha_k}}{h_{\alpha_k}} = CS(\mathcal{F}, S, p_k). \end{aligned}$$

□

8.2 Teorema da separatriz

Sejam M uma superfície complexa e $D = S_1 \cup \ldots \cup S_n$ uma união de curvas analíticas compactas em M. $M_D = (m_{ij}) \in M(n, \mathbb{Z})$, onde $m_{ij} = S_i \cdot S_j$, é denominada *matriz de interseção* de D.

Lema 8.2.1 *Sejam π uma seqüência finita de explosões em $p \in M$ e $\pi^{-1}(p) = D = P_1 \cup \ldots \cup P_n$, onde cada P_j é uma reta projetiva. Então, M_D é negativa definida.*

Demonstração: Observamos, em primeiro lugar, que se $M \in M(n,\mathbb{R})$ e $Q \in GL(n,\mathbb{R})$, então M é negativa definida se, se somente se, Q^tMQ o é. De fato, identificando $\mathbb{R}^n \cong M(n \times 1, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} v^tMv < 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n &\iff (Qv)^tM(Qv) < 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \\ &\iff v^t(Q^tMQ)v < 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Como conseqüência, qualquer renumeração das retas projetivas P_j preserva o fato de M ser negativa definida.

Provaremos o lema por indução no número n de explosões que compõem π. Se $n = 1$, o resultado é imediato. Suponha que a matriz de interseção de $D = P_1 \cup \ldots \cup P_n$, divisor associado a uma seqüência de n explosões, seja negativa definida. Seja π_{n+1} uma explosão em um ponto $q \in D$. Escrevemos $\tilde{D} = \pi_{n+1}^* D \cup \pi_{n+1}^{-1}(q)$, $\tilde{D} = \tilde{P}_1 \cup \ldots \cup \tilde{P}_{n+1}$, onde cada $\tilde{P}_j$ é uma reta projetiva. Temos dois casos:

<u>Caso 1</u>: q não é uma esquina.

Renumeramos as retas projetivas de D e $\tilde{D}$ de forma que

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_{n+1} = \pi_{n+1}^{-1}(q), \\ &\tilde{P}_n \cap \tilde{P}_{n+1} \neq \emptyset, \\ &\tilde{P}_j = \pi_{n+1}^* P_j \ \text{ para } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Escrevemos

$$M_D = \begin{pmatrix} M_1 & E \\ E^t & -n_1 \end{pmatrix},$$

onde $M \in M(n-1,\mathbb{R})$, $E \in M((n-1) \times 1, \mathbb{R})$ e $n_1 \in \mathbb{Z}_+$. Então

$$M_{\tilde{D}} = \begin{pmatrix} M_1 & E & 0 \\ E^t & -n_1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $v = (v_1, u, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (com a identificação $\mathbb{R}^n \cong M(n \times 1, \mathbb{R})$), onde $v_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u, t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} v^tM_{\tilde{D}}v &= v_1^tM_1v_1 + v_1^tEu + uE^tv_1 + (-n_1 - 1)u^2 + 2ut - t^2 \\ &= v_0^tM_Dv_0 - (u - t)^2, \end{aligned}$$

onde $v_0 = (v_1, u) \in \mathbb{R}^n$. Suponha $v \neq 0$. Se $v_0 = 0$, então $t \neq 0$ e a expressão acima é negativa. Se $v_0 \neq 0$, então, uma vez que M_D é negativa definida,

$$v^t M_{\tilde{D}} v \ < \ -(u-t)^2 \ \leq \ 0.$$

Portanto, $M_{\tilde{D}}$ é negativa definida.

Caso 2: q é uma esquina.

Nesse caso, renumeramos as retas projetivas de D e $\tilde{D}$ de forma que

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_k = \pi_{n+1}^{-1}(q),\\
&\tilde{P}_{k-1} \cap \tilde{P}_k \neq \emptyset \ \text{ e } \ \tilde{P}_k \cap \tilde{P}_{k+1} \neq \emptyset,\\
&\tilde{P}_1 \cup \ldots \cup \tilde{P}_{k-1} \ \text{ e } \ \tilde{P}_{k+1} \cup \ldots \cup \tilde{P}_{n+1} \ \text{ são conexos},\\
&\tilde{P}_j = \pi_{n+1}^* P_j \ \text{ para } \ j = 1, \ldots, k-1,\\
&\tilde{P}_{j+1} = \pi_{n+1}^* P_j \ \text{ para } \ j = k, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Suponha

$$M_D \ = \ \begin{pmatrix} M_1 & E_1 & \ldots & 0 \\ E_1^t & -n_1 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & -n_2 & E_2^t \\ 0 & \ldots & E_2 & M_2 \end{pmatrix},$$

onde $M_1 \in M(k-1, \mathbb{R})$, $M_2 \in M(n-k+1, \mathbb{R})$, $E_1 \in M((k-1) \times 1, \mathbb{R})$, $E_2 \in M((n-k+1) \times 1, \mathbb{R})$ e $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$. Então

$$M_{\tilde{D}} \ = \ \begin{pmatrix} M_1 & E_1 & & \ldots & 0 \\ E_1^t & -n_1-1 & 1 & & \vdots \\ & 1 & -1 & 1 & \\ \vdots & & 1 & -n_2-1 & E_2^t \\ 0 & \ldots & & E_2 & M_2 \end{pmatrix}.$$

Dado $v = (v_1, u, t, s, v_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$, onde $v_1 \in \mathbb{R}^{k-2}$, $v_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$, $u, t, s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
v^t M_{\tilde{D}} v \ &= \ v_1^t M_1 v_1 + v_1^t E_1 u + u E_1^t v_1 + (-n_1 - 1)u^2 + 2ut + t^2 + 2ts \\
&\quad + (-n_2 - 1)s^2 + s E_2^t v_2 + v_2^t E_2 s + v_2^t M_2 v_2 \\
&= \ v_0^t M_D v_0 - (-u + t + s)^2,
\end{aligned}$$

onde $v_0 = (v_1, u, s, v_2) \in \mathbb{R}^n$. Suponha $v \neq 0$. Se $v_0 = 0$, então $t \neq 0$ e $v^t M_{\tilde{D}} v < 0$. Se $v_0 \neq 0$, uma vez que M_D é negativa definida,

$$v^t M_{\tilde{D}} v \ < \ -(-u+t+s)^2 \ \leq \ 0.$$

Portanto, $M_{\tilde{D}}$ é negativa definida. □

O teorema seguinte foi originalmente demonstrado por C. Camacho e P. Sad ([CS]). A demonstração que aqui apresentamos é devida a M. Sebastiani ([Seb]).

Teorema 8.2.2 (da separatriz) *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em uma superfície complexa M. Se $p \in Sing(\mathcal{F})$, então $\mathcal{F}$ admite separatriz em p.*

Demonstração: Por contradição, suponha o resultado falso. Dos itens (i) e (ii) da página 103, p não é reduzida. Seja π uma seqüência finita de explosões que resolve $\mathcal{F}$ em p. Escrevemos $\pi^{-1}(p) = P_1 \cup \ldots \cup P_n$, onde $P_1, \ldots, P_n$ são retas projetivas. Seja V o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ cuja base é $P_1, \ldots, P_n$. V tem dimensão n e admite uma forma quadrática Ψ definida por

$$\Psi(P_i, P_j) \ = \ P_i \cdot P_j.$$

Ψ é negativa definida pelo lema 8.2.1.

Seja $\mathcal{E}$ o conjunto das $n-1$ esquinas de $P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Definimos $\mathcal{E}_j = \mathcal{E} \cap P_j$. Seja W o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ cuja base são os pares da forma (p, j) tais que $p \in \mathcal{E}_j$, $j = 1, \ldots, n$. W tem dimensão $2n-2$. Em W definimos a forma quadrática Φ da seguinte maneira:

$$\Phi((p,j),(q,k)) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } \ p \neq q, \\ 1 \ \text{ se } \ p = q \ \text{ e } \ j \neq k, \\ \mathrm{Re}(CS(\pi^*\mathcal{F}, P_j, p)) \ \text{ se } \ p = q \ \text{ e } \ j = k. \end{cases}$$

Note que (W, Φ) é a soma direta ortogonal

$$\bigoplus_{p \in \mathcal{E}} (W_p, \Phi_p),$$

onde W_p é o espaço de dimensão 2 gerado por (p, j) e (p, k), onde $p \in P_j \cap P_k$, e $\Phi_p = \Phi_{|W_p}$.

Dado $p \in \mathcal{E}$, $p \in P_j \cap P_k$, Φ_p corresponde à matriz

$$M_{\Phi_p} = \begin{pmatrix} \alpha_j & 1 \\ 1 & \alpha_k \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_j = \mathrm{Re}(CS(\pi^*\mathcal{F}, P_j, p))$ e $\alpha_k = \mathrm{Re}(CS(\pi^*\mathcal{F}, P_k, p))$. Uma vez que p é reduzida, segue dos exemplos 8.1.5 e 8.1.6 que:

(i) se p é simples, $CS(\pi^*\mathcal{F}, P_j, p)\, CS(\pi^*\mathcal{F}, P_k, p) = 1$, o que implica em $\alpha_j\alpha_k \leq 1$;

(ii) se p é sela-nó, $CS(\pi^*\mathcal{F}, P_j, p) = 0$ ou $CS(\pi^*\mathcal{F}, P_k, p) = 0$, o que resulta em $\alpha_j\alpha_k = 0$.

Em ambos os casos, $\det\left(M_{\Phi_p}\right) \leq 0$. Portanto, Φ_p não é negativa definida. Concluímos, daí, que o número de autovalores negativos de Φ é menor ou igual a $n-1$.

Por outro lado, definimos uma aplicação linear $f : V \to W$ por

$$f(P_j) = \sum_{p \in \mathcal{E}_j} (p, j).$$

Temos

$$\Phi(f(P_j), f(P_k)) = 1 = P_j \cdot P_k = \Psi(P_j, P_k) \text{ se } j \neq k.$$

Observe que cada P_j é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$, pois, caso contrário, p admitiria um número infinito de separatrizes. Além disso, se $q \in P_j \setminus \mathcal{E}_j$ é singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$, então, uma vez que q é reduzida e sua única separatriz está contida em P_j, q é uma sela-nó com separatriz forte contida em P_j. Assim, $CS(\pi^*, P_j, q) = 0$. Temos então

$$\begin{aligned}
\Phi(f(P_j), f(P_j)) &= \sum_{q \in \mathcal{E}_j} \mathrm{Re}(CS(\pi^*\mathcal{F}, P_j, q)) \\
&= \sum_{q \in P_j} \mathrm{Re}(CS(\pi^*\mathcal{F}, P_j, q)) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{p \in P_j} CS(\pi^*, P_j, p)\right) \\
&= \mathrm{Re}(P_j \cdot P_j) \quad \text{(por 8.1.7)} \\
&= P_j \cdot P_j = \Psi(P_j, P_j).
\end{aligned}$$

Uma vez que f é injetiva e Ψ é negativa definida, concluímos que Φ possui pelo menos n autovalores negativos, o que nos dá uma contradição. $\square$

8.3 Índice de variação

Sejam $p \in Sing(\mathcal{F})$ e uma 1-forma holomorfa ω que induz $\mathcal{F}$ em um vizinhança U de p. Dado um ponto regular $q \in U$, existe, em uma vizinhaça de q, uma

1-forma holomorfa ν tal que

$$dw = \nu \wedge \omega. \tag{8.7}$$

Se ν' é outra 1-forma satisfazendo (8.7), temos

$$(\nu - \nu') \wedge \omega = 0,$$

implicando que ν e ν' coincidem sobre as folhas de $\mathcal{F}$. Podemos, assim, definir uma 1-forma multivaluada ν em $U \setminus Sing(\mathcal{F})$, univaluada quando restrita a cada folha de $\mathcal{F}$, satisfazendo a relação (8.7). Tal 1-forma é chamada de *exponencial* de ω.

Exercício 1 Demonstre que existe a 1-forma ν descrita acima.

Seja S uma separatriz em $p \in Sing(\mathcal{F})$. Como na seção anterior, seja $\partial S = S \cap S^3_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Definição 8.3.1 ([KS]) O *índice de variação* de $\mathcal{F}$ com respeito a S em p é dado por

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \nu.$$

Se $p \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$, estendemos a definição acima fazendo $Var(\mathcal{F}, S, p) = 0$.

Proposição 8.3.2 *$Var(\mathcal{F}, S, p)$ independe das escolhas feitas.*

Demonstração: Suponha $\tilde{\omega}$ outra equação local para $\mathcal{F}$ em p. Numa vizinhança de p, existe φ, função holomorfa que nunca se anula, tal que $\tilde{\omega} = \varphi\omega$. Então

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= d\varphi \wedge \omega + \varphi d\omega \\ &= d\varphi \wedge \omega + \varphi\nu \wedge \omega \\ &= \left(\frac{d\varphi}{\varphi} + \nu\right) \wedge \tilde{\omega}, \end{aligned}$$

logo $\tilde{\nu} = d\varphi/\varphi + \nu$ define, em vizinhança de p, a forma exponencial de $\tilde{\omega}$. Uma vez que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{d\varphi}{\varphi} + \nu\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \nu,$$

o resultado segue.

Por fim, $Var(\mathcal{F}, S, p)$ independe da escolha de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, visto que a forma holomorfa α é fechada quando restrita a S. ◻

O resultado que segue é imediato a partir da definição 8.3.1.

Proposição 8.3.3 *Se S_1 e S_2 são separatrizes em p, sem componentes em comum, e $S = S_1 \cup S_2$, então*

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = Var(\mathcal{F}, S_1, p) + Var(\mathcal{F}, S_2, p).$$

Para $S \subset M$ uma curva compacta $\mathcal{F}$-invariante, definimos

$$Var(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in S} Var(\mathcal{F}, S, p).$$

Teorema 8.3.4 ([KS]) *Nas condições acima, temos*

$$Var(\mathcal{F}, S) = -c_1(N^*_{\mathcal{F}}) \cdot S.$$

Demonstração: Tomamos, como na prova do teorema 8.1.7, cobertura localmente finita $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, partição da unidade $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ subordinada a $\mathcal{U}$ e, para cada $\alpha \in A$, 1-forma holomorfa ω_α induzindo $\mathcal{F}$ e função holomorfa f_α definindo S em U_α. Sejam $(\varphi_{\alpha\beta})$ e $(f_{\alpha\beta})$ cociclos tais que $\omega_\beta = \varphi_{\alpha\beta}\omega_\alpha$ e $f_\alpha = f_{\alpha\beta} f_\beta$ sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Consideremos $Sing(\mathcal{F}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, U_{α_k} o único aberto de $\mathcal{U}$ que contém p_k, sendo que $U_{\alpha_k} \cap U_{\alpha_j} = \emptyset$ sempre que $k \neq j$. Fazendo as escolhas apropriadas, podemos supor que $d\omega_\alpha = 0$ sempre que $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Considere, para cada $\alpha \in A$, ν_α a forma exponencial de ω_α. Note que, se $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\nu_\alpha = 0$. Da equação (8.3), deduzimos que, sobre $U_\alpha \cap S$,

$$\nu_\alpha = d\left(\log \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right) - \frac{\eta_\alpha}{h_\alpha}.$$

Além do mais, em $U_\alpha \cap U_\beta \cap S$, (8.5) nos fornece

$$d(\log \varphi_{\alpha\beta}) = \nu_\beta - \nu_\alpha.$$

Temos, para $k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} c_1(N^*_{\mathcal{F}})_{|U_{\alpha_k} \cap S} &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_\gamma d(\rho_\gamma d(\log \varphi_{\gamma\alpha_k})) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_\gamma d\rho_\gamma \wedge (\nu_{\alpha_k} - \nu_\gamma) \\ &= \frac{1}{2\pi i} d\rho_{\alpha_k} \wedge \nu_{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Tomando B_k bola centrada em p_k, suficientemente pequena de forma que $\rho_{\alpha_k|B_k} \equiv 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{U_{\alpha_k}\cap S} c_1(N^*_{\mathcal{F}}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{U_{\alpha_k}\cap S} d\rho_{\alpha_k}\wedge\nu_{\alpha_k} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{U_{\alpha_k}\cap S} d(\rho_{\alpha_k}\wedge\nu_{\alpha_k}) \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(B_k\cap S)} \nu_{\alpha_k} = -Var(\mathcal{F},S,p_k).
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração, pois

$$\int_S c_1(N^*_{\mathcal{F}}) = \sum_{k=1}^{n}\int_{U_{\alpha_k}\cap S} c_1(N^*_{\mathcal{F}}).$$

□

8.4 Índice GSV

Sejam $p \in Sing(\mathcal{F})$ e S uma separatriz de $\mathcal{F}$ em p. Tomamos $f = 0$ uma equação local reduzida de S, $\omega = 0$ uma equação local de $\mathcal{F}$, e associamos a decomposição $g\omega = hdf + f\eta$. Seja, como antes, $\partial S = S \cap S^3_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Definição 8.4.1 ([GSV]) O *índice Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* de $\mathcal{F}$ com respeito a S em p é definido por

$$GSV(\mathcal{F},S,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\frac{d(h/g)}{h/g}.$$

Se $p \notin Sing(\mathcal{F})$, convencionamos que $GSV(\mathcal{F},S,p) = 0$. O índice GSV depende apenas da folheação $\mathcal{F}$ e da curva S.

Exercício 2 Mostre que $GSV(\mathcal{F},S,p)$ independe das equações locais de $\mathcal{F}$ e S, da decomposição escolhida e de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (na definição de ∂S).

Suponha S lisa em p. Tomando coordenadas locais nas quais S tem equação $y = 0$, $\mathcal{F}$ é induzida por uma forma do tipo $\omega = ypdx + qdy$, onde p e q

são holomorfas, o que nos dá uma decomposição com $g = 1$ e $h = q$. Do princípio do argumento para funções de uma variável complexa, temos, nesse caso, $GSV(\mathcal{F}, S, p) \geq 0$. Além disso, $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$ se, e somente se, $p \notin Sing(\mathcal{F})$. Esse índice, no entanto, pode assumir valores negativos.

Seja Φ um isomorfismo entre 1-formas e campos holomorfos em uma vizinhança de p, induzido por uma 2-forma holomorfa não singular. Se ω induz a folheação $\mathcal{F}$, então $v = \Phi(\omega)$ também induz $\mathcal{F}$. Considerando a decomposição (8.1), temos

$$v = \Phi(\omega) = \frac{h}{g}\Phi(df) + \frac{f}{g}\Phi(\eta) = v_1 + v_2,$$

onde v_1 e v_2 são campos meromorfos. Note que $v_{|S} = v_1$ e que v_1 é tangente às curvas de nível de f. Se tomamos $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno de forma que $S_\delta : f = \delta$ seja lisa, teremos, pelo princípio do argumento (Z e P denotam os números de zeros e de pólos, respectivamente),

$$\begin{aligned} Z(v_{1|S_\delta \cap B}) - P(v_{1|S_\delta \cap B}) &= Z((h/g)_{|S_\delta \cap B}) - P((h/g)_{|S_\delta \cap B}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_\delta} \frac{d(h/g)}{h/g}, \end{aligned}$$

onde $\partial S_\delta = \partial(S_\delta \cap B)$. Por outro lado, se δ é suficientemente pequeno, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_\delta} \frac{d(h/g)}{h/g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} = GSV(\mathcal{F}, S, p).$$

Exemplo 8.4.2 Seja $\mathcal{F}$ a folheação induzida numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega(x,y) = x(\lambda_1 + yf(x,y))dy - y(\lambda_2 + xg(x,y))dx,$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ e $f(x,y), g(x,y)$ são holomorfas. $S_1 : \{y = 0\}$ e $S_2 : \{x = 0\}$ são separatrizes. Temos

$$GSV(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_1} \frac{d(x(\lambda_1 + yf(x,y)))}{x(\lambda_1 + yf(x,y))} = 1.$$

De forma análoga, temos $GSV(\mathcal{F}, S_2, 0) = 1$.

Proposição 8.4.3

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = GSV(\mathcal{F}, S, p) + CS(\mathcal{F}, S, p).$$

Demonstração: Da decomposição

$$g\omega = hdf + f\eta,$$

temos

$$\omega = \frac{h}{g}df + \frac{f}{g}\eta.$$

Diferenciando essa expressão e considerando que, sobre S, $g\omega = hdf$, encontramos

$$d\omega = \left(\frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{\eta}{h}\right) \wedge \omega.$$

Aplicando as definições,

$$\begin{aligned} Var(\mathcal{F}, S, p) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\left(\frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{\eta}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{d(h/g)}{h/g} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial S}\frac{\eta}{h} \\ &= GSV(\mathcal{F}, S, p) + CS(\mathcal{F}, S, p). \end{aligned}$$

□

Se $S \subset M$ é uma curva compacta $\mathcal{F}$-invariante, definimos

$$GSV(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in S} GSV(\mathcal{F}, S, p).$$

Corolário 8.4.4

$$GSV(\mathcal{F}, S) = -c_1(N^*_{\mathcal{F}}) \cdot S - S \cdot S.$$

Demonstração: Aplicando os teoremas 8.1.7 e 8.3.4,

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}, S) &= Var(\mathcal{F}, S) - CS(\mathcal{F}, S) \\ &= -c_1(N^*_{\mathcal{F}}) \cdot S - S \cdot S. \end{aligned}$$

□

Proposição 8.4.5 *Sejam S_1, S_2 separatrizes de $\mathcal{F}$ em p, sem componentes em comum, e $S = S_1 \cup S_2$. Então*

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = GSV(\mathcal{F}, S_1, p) + GSV(\mathcal{F}, S_2, p) - 2(S_1 \cdot S_2)_p.$$

Demonstração: O resultado segue das proposições 8.1.4, 8.3.3 e 8.4.3. □

8.5 Índice de tangência

Seja $S \subset M$ uma curva analítica cujas componentes são todas não invariantes por $\mathcal{F}$. Dado $p \in S$, tomamos $f = 0$ uma equação local reduzida de S e v um campo holomorfo que induz $\mathcal{F}$ em p. f e $v(f)$ geram o ideal $\langle f, v(f)\rangle$ de $\mathcal{O}_p$. Uma vez que S não é invariante por $\mathcal{F}$, $V(\langle f, v(f)\rangle) = \{0\}$. Portanto, a dimensão

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle f, v(f)\rangle}$$

é finita.

Definição 8.5.1 O *índice de tangência* de $\mathcal{F}$ em relação a S em p é dado por

$$Tang(\mathcal{F}, S, p) \;=\; \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle f, v(f)\rangle}.$$

Como $Tang(\mathcal{F}, S, p)$ é dimensão de um espaço vetorial, esse número é sempre inteiro não negativo. O índice acima está bem definido, como mostra a

Proposição 8.5.2 *$Tang(\mathcal{F}, S, p)$ independe da escolha das equações locais de S e de $\mathcal{F}$.*

Demonstração: Seja $\tilde{v}$ outro campo local que induz $\mathcal{F}$. Temos $\tilde{v} = \psi v$ para algum germe de função holomorfa ψ tal que $\psi(p) \neq 0$. Como ψ é unidade em $\mathcal{O}_p$, temos

$$\langle f, \tilde{v}(f)\rangle \;=\; \langle f, \psi v(f)\rangle \;=\; \langle f, v(f)\rangle$$

e o resultado segue.

Seja $\tilde{f} = 0$ uma outra equação local reduzida de S em p. Existe um germe de função holomorfa φ em p, com $\varphi(p) \neq 0$, tal que $\tilde{f} = \varphi f$. Temos $v(\tilde{f}) = v(\varphi f) = v(\varphi) f + \varphi v(f)$. Portanto,

$$\langle \tilde{f}, v(\tilde{f})\rangle \;=\; \langle \varphi f, v(\varphi) f + \varphi v(f)\rangle \;=\; \langle f, v(f)\rangle,$$

o que conclui a demonstração. □

Exercício 3 Se S é lisa e ω é uma 1-forma holomorfa que induz a $\mathcal{F}$ em torno de p, então $Tang(\mathcal{F}, S, p)$ é a ordem do zero de $\omega_{|S}$ em p.

O índice de tangência é nulo se, e somente se, a folheação e a curva são transversais.

Proposição 8.5.3 *$Tang(\mathcal{F}, S, p) = 0$ se, e somente se, existem coordenadas locais (x, y) em $p = (0,0)$, nas quais S tem equação local $y = 0$ e $\mathcal{F}$ é a folheação induzida pelo campo $\partial/\partial y$. Em particular, se $Tang(\mathcal{F}, S, p) = 0$, então S é lisa.*

Demonstração: Se tais coordenadas existem, segue da definição que $Tang(\mathcal{F}, S, p) = 0$. Reciprocamente, se $Tang(\mathcal{F}, S, p) = 0$, temos $\mathcal{O}_p = \langle f, v(f)\rangle$, ou seja, existem $g, h \in \mathcal{O}_p$ tais que $1 = gf + hv(f)$. Visto que $f(p) = 0$, temos $1 = h(p)v(f)(p)$. Logo, $v(f)(p) \neq 0$, de onde concluímos que $p \notin Sing(\mathcal{F})$. Obtemos, então, coordenadas locais (z, w) para as quais $p = (0,0)$ e a folheação é induzida por $v = \partial/\partial w$. Se $f = 0$ é a equação local de S nessas coordenadas, encontramos $(\partial f/\partial w)(p) \neq 0$. Portanto, localmente S é o gráfico de uma função $z \mapsto h(z)$. As coordenadas $(x, y) = (z, w - h(z))$ satisfazem as condições do enunciado. □

Se $S \subset M$ é curva compacta cujas componentes não são invariantes por $\mathcal{F}$, definimos

$$Tang(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in S} Tang(\mathcal{F}, S, p).$$

Note que a soma envolve apenas um número finito de termos não nulos.

Teorema 8.5.4

$$Tang(\mathcal{F}, S) = S \cdot S - c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot S.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura localmente finita de M tal que, para cada $\alpha \in A$, existem $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ que define $S_{|U_\alpha}$ e campo holomorfo v_α que induz $\mathcal{F}_{|U_\alpha}$. Se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, existem $\psi_{\alpha\beta}, f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tais que $v_\alpha = \psi_{\alpha\beta} v_\beta$ e $f_\alpha = f_{\alpha\beta} f_\beta$. Temos

$$\begin{aligned} v_\alpha(f_\alpha) &= \psi_{\alpha\beta} v_\beta(f_{\alpha\beta} f_\beta) \\ &= \psi_{\alpha\beta} v_\beta(f_{\alpha\beta}) f_\beta + \psi_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} v_\beta(f_\beta). \end{aligned}$$

Logo, em $S \cap U_{\alpha\beta}$,

$$v_\alpha(f_\alpha) = \psi_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} v_\beta(f_\beta).$$

Portanto, $v_\alpha(f_\alpha)_{|S} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap S))$ se colam em uma seção de $T^*_{\mathcal{F}|S} \otimes [S]_{|S}$. A demonstração é concluída observando que, para cada $p \in S$,

$$(v_\alpha(f_\alpha) \cdot S)_p = Tang(\mathcal{F}, S, p).$$

□

Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ folheações em uma superfície compacta M. Tomamos uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que para cada $\alpha \in A$ existe um campo holomorfo v_α e uma 1-forma holomorfa ω_α em U_α, que induzem $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente. Se $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, existem $f_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ tais que $v_\alpha = f_{\alpha\beta}v_\beta$ e $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$. Os cociclos $(f_{\alpha\beta})$ e $(g_{\alpha\beta})$ induzem $T^*_\mathcal{F}$ e $N_\mathcal{G}$, respectivamente. Definimos $d_\alpha = i_{v_\alpha}\omega_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, a contração de ω_α por v_α. O *divisor de tangências* entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, denotado por $D_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, é o divisor de M definido em U_α por $d_\alpha = 0$. Note que, sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, $d_\alpha = f_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}d_\beta$. Concluímos, então, a

Proposição 8.5.5

$$[D_{\mathcal{F},\mathcal{G}}] \;=\; T^*_\mathcal{F} \otimes N_\mathcal{G}.$$

8.6 Multiplicidade ao longo de uma separatriz

Seja S separatriz lisa em $p \in Sing(\mathcal{F})$. Em coordenadas locais (x, y) para as quais $p = (0,0)$ e $S : \{y = 0\}$, $\mathcal{F}$ é induzida por uma 1-forma holomorfa

$$\omega(x,y) \;=\; yf(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

onde $g(0,0) = 0$ e $g(x,0) \not\equiv 0$. Seja m_0 a multiplicidade de $g(x,0)$ em $x = 0$. Tal m_0 é chamado de *multiplicidade* de $\mathcal{F}$ em p *ao longo* de S e é denotado por $m_p(\mathcal{F}, S)$.

Exercício 4 Mostre que $m_p(\mathcal{F}, S)$ independe da escolha das coordenadas locais.

Se π é uma explosão em p, então π^*S é também lisa. Se $q = \pi^*S \cap P$, onde $P = \pi^{-1}(p)$, temos a

Proposição 8.6.1

$$m_q(\pi^*\mathcal{F}, \pi^*S) \;=\; \begin{cases} m_p(\mathcal{F}, S) - (m_p(\mathcal{F}) - 1) & \textit{se } p \textit{ é não dicrítica,} \\ m_p(\mathcal{F}, S) - m_p(\mathcal{F}) & \textit{se } p \textit{ é dicrítica.} \end{cases}$$

Demonstração: $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida nas coordenadas (x, t) por

$$\omega_1(x,t) \;=\; \frac{1}{x^m}((txf(x,tx) + tg(x,tx))dx + xg(x,tx)dt),$$

onde $m = m_p(\mathcal{F}) + 1$, no caso dicrítico, ou $m = m_p(\mathcal{F})$, no caso não dicrítico. Temos $\pi^*S : \{t = 0\}$. Assim, $m_q(\pi_1^*\mathcal{F}, \pi^*S)$ é a multiplicidade de $(1/x^m)xg(x,0)$ em $x = 0$. Mas esta é $m_p(\mathcal{F}, S) + 1 - m$, o que prova o resultado. □

Lema 8.6.2 *Se $p \in Sing(\mathcal{F})$ é não dicrítica, então*

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{q \in Sing(\pi^*\mathcal{F})} m_q(\pi^*\mathcal{F}, P).$$

Demonstração: Seja

$$\omega(x,y) = \sum_{k \geq m} (f_k(x,y)dx + g_k(x,y)dy)$$

uma 1-forma que induz $\mathcal{F}$ em p, onde $m = m_p(\mathcal{F})$. Nas coordenadas (x,t), $\pi^*\mathcal{F}$ é induzida por

$$\omega_1(x,t) = (f_m(1,t) + tg_m(1,t))dx + g_m(1,t)dt + x\rho(x,t),$$

onde ρ é uma 1-forma correspondente aos termos de ordem superior a m. Mudando coordenadas, podemos supor que $g_m(0,1) \neq 0$, de forma que $\text{grau}(f_m(1,t) + tg_m(1,t)) = m+1$. Mas, se $q = (0,t_0) \in Sing(\pi^*\mathcal{F}) \cap P$, $m_q(\pi^*\mathcal{F}, P)$ é a multiplicidade de t_0 como raiz de $f_m(1,t) + tg_m(1,t)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{q \in Sing(\pi^*\mathcal{F})} m_q(\pi^*\mathcal{F}, P) &= \text{grau}(f_m(1,t) + tg_m(1,t)) \\ &= m + 1 = m_p(\mathcal{F}) + 1. \end{aligned}$$

□

A proposição 8.6.3, apresentada a seguir, generaliza o lema anterior para uma seqüência finita de explosões. Estabeleceremos antes a notação necessária.

Seja π uma seqüência finita de explosões em $p \in Sing(\mathcal{F})$. $\pi_1 : M_1 \to M$ é a primeira explosão dessa seqüência e denotamos $P_1^{(1)} = \pi_1^{-1}(p)$, $D_1 = P_1^{(1)}$ e $\mathcal{F}_1 = \pi_1^*\mathcal{F}$. Indutivamente, dada a explosão $\pi_n : M_n \to M_{n-1}$ em $p_{n-1} \in D_{n-1} \subset M_{n-1}$, definimos

$$\begin{cases} P_n^{(n)} = \pi_n^{-1}(p_{n-1}), \\ P_k^{(n)} = \pi_n^* P_k^{(n-1)} \qquad \text{se } k = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

onde convencionamos que $p_0 = p$ e $M_0 = M$, e fazemos $D_n = P_1^{(n)} \cup \ldots \cup P_n^{(n)}$, $\mathcal{F}_n = \pi_n^*\mathcal{F}_{n-1}$.

Associamos a cada reta projetiva um peso ρ, fazendo $\rho(P_1^{(1)}) = 1$ e, se $n > 1$,

$$\begin{cases} \rho(P_j^{(n)}) = \rho(P_j^{(n-1)}) \quad \text{se } 1 \leq j < n, \\ \rho(P_n^{(n)}) = \displaystyle\sum_{p_{n-1} \in P_k^{(n-1)}} \rho(P_k^{(n-1)}). \end{cases}$$

Em outras palavras: o peso 1 é atribuído à reta projetiva proveniente da explosão em $p \in M$; uma vez introduzida, a reta projetiva preserva seu peso nas explosões subseqüentes; e cada nova reta projetiva tem como peso a soma dos pesos das retas projetivas que contêm o ponto que lhe deu origem.

Suponha que p admita apenas um número finito de separatrizes. Isso significa que todas as singularidades que surgem no processo de resolução de p são não dicríticas. Ou ainda, todas as retas projetivas são invariantes. Se $q \in P_j^{(n)}$ é singularidade de $\mathcal{F}_n$, definimos uma *multiplicidade relativa alterada* da seguinte forma:

$$m_q^*(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) = \begin{cases} m_q(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) - 1 & \text{se } q \text{ é esquina;} \\ m_q(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) & \text{se } q \text{ não é esquina.} \end{cases}$$

Proposição 8.6.3 *Se $p \in Sing(\mathcal{F})$ admite apenas um número finito de separatrizes, então*

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{q \in Sing(\mathcal{F}_n)} \rho(P_j^{(n)}) m_q^*(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}).$$

Demonstração: Provaremos por indução em n. O caso $n = 1$ foi provado no lema 8.6.2. Suponha a fórmula verdadeira para n explosões. Efetuamos a explosão π_{n+1} em $p_n \in D_n$. Temos dois casos a analisar:

Caso 1: p_n não é esquina.

Se $p_n \in P_k^{(n)}$, a única parcela alterada por uma explosão em p_n é

$$\rho(P_k^{(n)}) m_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, P_k^{(n)}) = \rho(P_k^{(n)}) m_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_k^{(n)}).$$

Se $q = P_k^{(n+1)} \cap P_{n+1}^{(n+1)}$, então, da proposição 8.6.1,

$$m_q(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{(n+1)}) = m_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_k^{(n)}) - (m_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho(P_k^{(n)}) m_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_k^{(n)}) &= \rho(P_k^{(n+1)})(m_q(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{(n+1)}) - 1) \\ &\quad + \rho(P_k^{(n+1)}) m_{p_n}(\mathcal{F}_n). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Uma vez que q é uma esquina,

$$m_q^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{(n+1)}) = m_q(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{(n+1)}) - 1. \tag{8.9}$$

Analisemos, então, o termo $\rho(P_k^{(n+1)})m_{p_n}(\mathcal{F}_n)$. Como $P_k^{(n+1)}$ é a única reta projetiva de $D^{(n+1)}$ que intercepta $P_{n+1}^{(n+1)}$, temos

$$\rho(P_{n+1}^{(n+1)}) = \rho(P_k^{(n+1)}). \tag{8.10}$$

Por outro lado, do lema 8.6.2,

$$m_{p_n}(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)}} m_r(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}). \tag{8.11}$$

Substituindo (8.9), (8.10) e (8.11) em (8.8),

$$\begin{aligned}
&\rho(P_k^{(n)})m_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, P_k^{(n)}) \\
&= \rho(P_k^{(n+1)})m_q^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{(n+1)}) + \rho(P_{n+1}^{(n+1)})(m_q(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) - 1) \\
&\quad + \rho(P_{n+1}^{(n+1)}) \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)} \setminus \{q\}} m_r(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) \\
&= \rho(P_k^{(n+1)})m_q^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_k^{(n+1)}) + \rho(P_{n+1}^{(n+1)})m_q^*(\mathcal{F}_n, P_{n+1}^{(n+1)}) \\
&\quad + \rho(P_{n+1}^{(n+1)}) \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)} \setminus \{q\}} m_r^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}).
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração nesse caso.

<u>Caso 2</u>: p_n é esquina.

Se $p_n \in P_{k_1}^{(n)} \cap P_{k_2}^{(n)}$, então a explosão em p_n altera as parcelas

$$\rho(P_{k_1}^{(n)})m_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{(n)}) \text{ e } \rho(P_{k_2}^{(n)})m_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{(n)}).$$

Sejam $q_1 = P_{k_1}^{(n+1)} \cap P_{n+1}^{(n+1)}$ e $q_2 = P_{k_2}^{(n+1)} \cap P_{n+1}^{(n+1)}$. Temos

$$\begin{aligned}
\rho(P_{k_1}^{(n)})m_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{(n)}) &+ \rho(P_{k_2}^{(n)})m_{p_n}^*(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{(n)}) \\
&= \rho(P_{k_1}^{(n)})(m_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{(n)}) - 1) + \rho(P_{k_2}^{(n)})(m_{p_n}(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{(n)}) - 1) \\
&= \rho(P_{k_1}^{(n)})((m_{q_1}(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{(n+1)}) + m_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) - 1) \\
&\quad + \rho(P_{k_2}^{(n)})((m_{q_2}(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{(n+1)}) + m_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) - 1) \\
&= \rho(P_{k_1}^{(n)})(m_{q_1}(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{(n+1)}) - 1) + \rho(P_{k_2}^{(n)})(m_{q_2}(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{(n+1)}) - 1) \\
&\quad + (\rho(P_{k_1}^{(n+1)}) + \rho(P_{k_2}^{(n+1)}))(m_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1) \\
&= \rho(P_{k_1}^{(n+1)})m_{q_1}^*(\mathcal{F}_n, P_{k_1}^{(n+1)}) + \rho(P_{k_2}^{(n+1)})m_{q_2}^*(\mathcal{F}_n, P_{k_2}^{(n+1)}) \\
&\quad + \rho(P_{n+1}^{(n+1)})(m_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1).
\end{aligned}$$

Resta ver que o último termo acima corresponde às parcelas devidas às singularidades de $P_{n+1}^{(n+1)}$. Do lema 8.6.2,

$$m_{p_n}(\mathcal{F}_n) + 1 = \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)}} m_r(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&m_{p_n}(\mathcal{F}_n) - 1 \\
&\quad = \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)}} m_r(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) - 2 \\
&\quad = \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)} \setminus \{q_1, q_2\}} m_r(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) \\
&\qquad + (m_{q_1}(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) - 1) + (m_{q_2}(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) - 1) \\
&\quad = \sum_{r \in P_{n+1}^{(n+1)} \setminus \{q_1, q_2\}} m_r^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) \\
&\qquad + m_{q_1}^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}) + m_{q_2}^*(\mathcal{F}_{n+1}, P_{n+1}^{(n+1)}).
\end{aligned}$$

Completa-se, assim, a demonstração da proposição. $\square$

8.7 Curva generalizada

Definição 8.7.1 Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma *curva generalizada* em $p \in Sing(\mathcal{F})$ se não existem selas-nós em sua resolução.

Lema 8.7.2 *Suponha que $p \in Sing(\mathcal{F})$ admita apenas duas separatrizes lisas transversais. Se $\mathcal{F}$ é curva generalizada em p, então p é reduzida.*

Demonstração: Provaremos, em primeiro lugar, que $m_p(\mathcal{F}) = 1$. Se esse não for o caso, efetuamos uma seqüência finita de explosões π de forma a resolver $\mathcal{F}$ em p. Uma vez que há apenas duas separatrizes em p, $\pi^{-1}(p)$ é $\pi^*\mathcal{F}$-invariante. Sejam S_1 e S_2 as duas separatrizes lisas transversais em p, $D = \pi^{-1}(p)$, P_1 e P_2 as retas projetivas de D que interceptam π^*S_1 e π^*S_2 nos pontos $q_1 \in P_1$ e $q_2 \in P_2$, respectivamente. Observe que as únicas singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ fora das esquinas de D são q_1 e q_2. De fato, uma singularidade fora das esquinas de D seria uma sela-nó, por admitir uma única separatriz, e essa situação está descartada por hipótese. Além disso, $\rho(P_1) = \rho(P_2) = 1$. Temos pela proposição 8.6.3

$$m_p(\mathcal{F}) \;=\; \rho(P_1)\, m_{q_1}(\pi^*\mathcal{F}, P_1) + \rho(P_2)\, m_{q_2}(\pi^*\mathcal{F}, P_2) \;=\; 2$$

e, portanto, $m_p(\mathcal{F}) = 1$, como queríamos.

Uma vez que $m_p(\mathcal{F}) = 1$, p se enquadra em um dos tipos (1),(2),(3) ou (4) da página 124. Examinemos cada um desses. O tipo (1), uma sela-nó, é descartado, pois p é curva generalizada. O tipo (3) origina uma sela-nó por uma explosão e também é descartado. Consideremos o tipo (4). Por um lado, uma explosão π_1 em p origina uma única singularidade sobre a reta projetiva $P = \pi_1^{-1}(p)$. Por outro lado, os transformados estritos das duas separatrizes lisas transversais em p interceptam P em dois pontos distintos, que são singularidades. Assim, descartamos o tipo (4). Resta o tipo (2). Nesse caso, $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$, pois, caso contrário, teríamos, pelo lema 8.7.3 a seguir, um número infinito de separatrizes em p. □

Lema 8.7.3 *Se $p \in Sing(\mathcal{F})$ tem parte linear não nula, diagonalizável, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^+$, então existe um número infinito de separatrizes em p.*

Demonstração: Se $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ ou $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, pela proposição 6.2.3, podemos supor $\mathcal{F}$ definida pela 1-forma

$$\omega \;=\; \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

Suponha $\lambda_2/\lambda_1 = p/q$, onde $p, q \in \mathbb{Z}^+$ são primos entre si. A função meromorfa $\Phi(x, y) = x^p/y^q$ é tal que

$$d(\Phi(x, y)) \wedge \omega \;=\; 0.$$

Portanto, as curvas de nível $\Phi(x, y) = c$, $c \in \mathbb{C}$, (ou seja, as curvas de equação $x^p - cy^q = 0$) são separatrizes de $\mathcal{F}$ em p.

Se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ ou $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, pela proposição 7.4.2, uma seqüência finita de explosões em p produz uma singularidade com parte linear diagonalizável, cujos autovalores tem razão 1. Essa singularidade é dicrítica. Suas separatrizes se projetam em um número infinito de separatrizes em p. □

Lema 8.7.4 *Suponha $\mathcal{F}$ curva generalizada admitindo uma separatriz lisa em $p \in Sing(\mathcal{F})$. Então existe uma outra separatriz em p.*

Demonstração: Provaremos por indução no número mínimo de explosões que resolvem $\mathcal{F}$ em p. Se p é reduzida, então não há nada a provar, pois p é simples e admite duas separatrizes lisas transversais.

Suponha que $n \geq 1$ é o número mínimo de explosões necessário para a resolução de $\mathcal{F}$ em p. Suponha ainda o resultado verdadeiro para singularidades que se resolvem com menos de n explosões. Seja S separatriz lisa em p. Efetuamos uma primeira explosão π_1 em p. Seja $P = \pi_1^{-1}(p)$ e $p_0 = \pi_1^* S \cap P$. Se houver outra singularidade em P distinta de p_0, a hipótese de indução se aplica e encontramos, por ela, uma separatriz não contida em P que se projeta em uma separatriz em p distinta de S. Basta, então, considerar o caso em que p_0 é a única singularidade de $\pi_1^*\mathcal{F}$ em P. Se $\pi^* S$ e P são as únicas separatrizes em p_0, então, pelo lema anterior, p_0 é reduzida. Temos

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 \;=\; m_{p_0}(\pi^*\mathcal{F}, P) \;=\; 1,$$

o que resulta em $m_p(\mathcal{F}) = 0$, contradizendo o fato de p ser singularidade. □

Definição 8.7.5 Seja $p \in Sing(\mathcal{F})$. Uma *dessingularização* para o conjunto de separatrizes de $\mathcal{F}$ em p é uma seqüência de explosões π em p tal que:

(i) as separatrizes de $\pi^*\mathcal{F}$ por $D = \pi^{-1}(p)$ são todas lisas e disjuntas;

(ii) nenhuma dessas separatrizes passa por uma esquina de D;

(iii) todas as separatrizes são transversais a D.

Se, além disso, todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ são reduzidas e estão sobre retas projetivas invariantes de D, dizemos que π é uma *dessingularização* para $\mathcal{F}$ em p.

Observamos que é sempre possível dessingularizar uma folheação no sentido da definição acima. Se $p \in Sing(\mathcal{F})$ admite apenas um número finito de separatrizes, então a seqüência de explosões que resolve $\mathcal{F}$ em p é uma dessingularização para $\mathcal{F}$. No caso em que p admite um número infinito de separatrizes, em primeiro lugar resolvemos $\mathcal{F}$ em p e, em seguida, atendemos aos demais itens da definição levando em conta o seguinte (sugerimos ao leitor que complete os detalhes da demonstração):

Exercício 5 Sejam S_1 e S_2 curvas analíticas lisas que se interceptam em $p \in M$. Tome coordenadas locais (x, y) nas quais $p = (0,0)$, $S_1 : \{y = 0\}$ e S_2 tem equação local reduzida $f(x, y) = 0$. Defina a *ordem de tangência* entre S_1 e S_2 em p, denotada por $m_p(S_1, S_2)$, como a multiplicidade em $x = 0$ de $f(x, 0)$. Observe que $m_p(S_1, S_2) = 1$ se, e somente se, S_1 e S_2 são tranversais. Seja π uma explosão em p. Mostre que, se $m_p(S_1, S_2) = 1$, então π^*S_1 e π^*S_2 não se interceptam sobre $P = \pi^{-1}(p)$. Mostre ainda que, se $m_p(S_1, S_2) > 1$ e $q = \pi^*S_1 \cap \pi^*S_2$, então

$$m_q(\pi^*S_1, \pi^*S_2) = m_p(S_1, S_2) - 1.$$

Teorema 8.7.6 ([CLS]) *Suponha $\mathcal{F}$ curva generalizada em $p \in Sing(\mathcal{F})$. Então $\mathcal{F}$ e seu conjunto de separatrizes são dessingularizados pela mesma seqüência de explosões.*

Demonstração: Por definição, a dessingularização de $\mathcal{F}$ implica a dessingularização de seu conjunto de separatrizes. Reciprocamente, seja π uma seqüência de explosões que dessingulariza o conjunto de separatrizes de $\mathcal{F}$ em p. Basta mostrarmos que todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ são reduzidas. As singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ que se situam em alguma esquina de $D = \pi^{-1}(p)$ ou na interseção da parte lisa de D com o transformado estrito de alguma separatriz admitem apenas duas separtarizes lisas. São, portanto, reduzidas.

Essas são todas as singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$, pois uma singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$ que não se enquadrasse em nenhum desses dois tipos admitiria uma única separatriz contida em D, contradizendo o lema 8.7.4. □

8.8 Curva generalizada $\Rightarrow GSV = 0$

Definição 8.8.1 Uma separatriz S em $p \in Sing(\mathcal{F})$ é *não dicrítica* se existe uma seqüência de explosões π em p tal que

(a) $\pi^{-1}(S)$ tem cruzamentos normais;

(b) $\pi^{-1}(p)$ é invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.

Note que, se p admite apenas um número finito de separatrizes, essas são não dicríticas, bastando tomar, na definição, a seqüência de explosões que resolve $\mathcal{F}$. Por outro lado, uma separatriz lisa ou uma separatriz com cruzamento normal em p são sempre não dicríticas.

Proposição 8.8.2 *Se S é uma separatriz não dicrítica, então*

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) \geq 0.$$

Demonstração: Provaremos o seguinte: se S' é uma união de componentes irredutíveis de S e S'' é a união das componentes de S que não estão em S', então

$$GSV(\mathcal{F}, S', p) \geq (S' \cdot S'')_p.$$

Seja $f = 0$ uma equação local para S (não necessariamente reduzida). Sejam $S_1, \ldots, S_k$ as componentes irredutíveis de S com equações locais reduzidas $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$. Existem inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$ tais que $f = f_1^{n_1} \ldots f_k^{n_k}$. Seja $\mathcal{G}_f$ a folheação definida numa vizinhança de p pelas curvas de nível de f. $\mathcal{G}_f$ é induzida pela 1-forma $\omega_f = f \sum_{j=1}^{k} n_j df_j / f_j$.

Lema 8.8.3 *Se S é lisa, então $\mathcal{G}_f$ é não singular em p. Se S tem cruzamento normal em p, então $\mathcal{G}$ é linearizável em p.*

Demonstração: Suponha S lisa em p. Nesse caso, existem coordenadas locais (x, y) nas quais $p = (0, 0)$, $S : \{y = 0\}$ e $f = y^{n_1}$, de forma que $\mathcal{G}_f$ é induzida por dy e é, portanto, não singular. Se S tem cruzamento normal em p, coordenadas locais são obtidas de forma que $S_1 : \{x = 0\}$, $S_2 : \{y = 0\}$ e $f = x^{n_1} y^{n_2}$. Nesse caso, $\mathcal{G}_f$ é induzida por $n_1 y dx + n_2 x dy$. □

Lema 8.8.4 *Com a notação acima, temos*

(a) $m_p(\mathcal{F}) \geq m_p(\mathcal{G}_f)$

(b) $GSV(\mathcal{F}, S', p) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S', p)$.

Demonstração: Provaremos por indução em n, o número mínimo de explosões que torna S curva com cruzamentos normais.

Se $n = 0$, então temos duas possibilidades:

(i) S é lisa em p. Nesse caso, p não é singularidade de $\mathcal{G}_f$ e, portanto, $GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = 0$ e $m_p(\mathcal{G}_f) = 0$. Ambas as desigualdades são satisfeitas, pois $GSV(\mathcal{F}, S, p) \geq 0$, visto que S é lisa, e $m_p(\mathcal{F}) \geq 0$ sempre.

(ii) S tem cruzamentos normais. Nesse caso, $\mathcal{G}_f$ é linearizável. Temos $m_p(\mathcal{G}_f) = 1$ e, como $p \in Sing(\mathcal{F})$, necessariamente $m_p(\mathcal{F}) \geq 1$. Quanto à segunda desigualdade, $GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = 1$, se S' consiste de uma única separatriz, e $GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = 0$, no caso em que $S' = S$. Uma vez que $GSV(\mathcal{F}, S_1, p) \geq 1$ e $GSV(\mathcal{F}, S_2, p) \geq 1$, onde S_1 e S_2 são as componentes irredutíveis de S, a desigualdade (b) é também satisfeita.

Suponha $n > 0$ e que (a) e (b) sejam válidas sempre que um número menor que n explosões transformar S em uma curva com cruzamentos normais. Seja π uma explosão em p, $P = \pi^{-1}(p)$, $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{G}}_f = \pi^*\mathcal{G}_f$ e $\tilde{S}_j = \pi^* S_j$, onde $S_1, \ldots, S_k$ são as componentes irredutíveis de S em p. P é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$ (pois S é não dicrítica) e por $\tilde{\mathcal{G}}_f$. Cada singularidade de $\tilde{\mathcal{G}}_f$ em P é também singularidade de $\tilde{\mathcal{F}}$. Em torno de uma tal singularidade, $\tilde{\mathcal{G}}_f$ é dada pelas curvas de nível de $f \circ \pi$. Aplicando a hipótese de indução

$$GSV(\tilde{\mathcal{F}}, P, q) \geq GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, P, q)$$

sempre que $q \in P \cap Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f)$. Se $q \in P$ não é singularidade de $\tilde{\mathcal{G}}_f$ mas é singularidade de $\tilde{\mathcal{F}}$, então a desigualdade é trivialmente satisfeita.

Do corolário 6.3.8, temos $c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot P = m_q(\mathcal{F})$. Aplicando o corolário 8.4.4,

$$\begin{aligned} m_p(\mathcal{F}) &= -1 + \sum_{q \in P \cap Sing(\tilde{\mathcal{F}})} GSV(\tilde{\mathcal{F}}, P, q), \\ m_p(\mathcal{G}_f) &= -1 + \sum_{q \in P \cap Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f)} GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, P, q). \end{aligned}$$

Comparando as duas igualdades, encontramos $m_p(\mathcal{F}) \geq m_p(\mathcal{G}_f)$.

Seja m_j a multiplicidade de S_j em p. Então $\tilde{f}_j = f_j \circ \pi$ se anula em P com multiplicidade m_j. Se $\overline{m} = m_p(\mathcal{F})$ e ω é uma 1-forma holomorfa que induz $\mathcal{F}$ em p, então $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ se anula em P com multiplicidade $\overline{m}$. Se q_j é a interseção entre $\tilde{S}_j$ e P, e t é uma coordenada local para P, podemos escrever, numa vizinhança de q_j,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= t^{\overline{m}} \omega_0, \\ \tilde{f}_j &= t^{m_j} f_0, \end{aligned}$$

onde ω_0 é uma 1-forma com zero isolado em q_j e f_0 é uma equação reduzida para $\tilde{S}_j$. Da decomposição

$$g\omega = h df_j + f_j \eta$$

obtemos

$$\tilde{g} t^{\overline{m}} \omega_0 = \tilde{h} t^{m_j} df_0 + f_0 (m_j t^{m_j - 1} \tilde{h} dt + t^{m_j} \tilde{\eta}),$$

onde $\tilde{g} = g \circ \pi$, $\tilde{h} = h \circ \pi$ e $\tilde{\eta} = \pi^*\eta$. Temos

$$GSV(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}_j, q_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{S}_j} \frac{\tilde{g} t^{\overline{m}}}{\tilde{h} t^{m_j}} d\left(\frac{\tilde{h} t^{m_j}}{\tilde{g} t^{\overline{m}}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\tilde{S}_j} \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}} d\left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{g}}\right) + (m_j - \overline{m})\frac{dt}{t}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S_j} \frac{g}{h} d\left(\frac{h}{g}\right) + m_j(m_j - \overline{m}) \\
&= GSV(\mathcal{F}, S_j, p) + m_j(m_j - \overline{m}).
\end{aligned}
$$

De maneira análoga, se $\overline{m}_f = m_p(\mathcal{G}_f)$, então

$$
GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, \tilde{S}_j, q_j) = GSV(\mathcal{G}_f, S_j, p) + m_j(m_j - \overline{m}_f).
$$

Pela hipótese de indução, $GSV(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}_j, q_j) \geq GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, \tilde{S}_j, q_j)$. Uma vez que $\overline{m} \geq \overline{m}_f$, encontramos

$$
GSV(\mathcal{F}, S_j, p) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S_j, p).
$$

Levando em conta a proposição 8.4.5, conclui-se a prova de (b). □

A demonstração da proposição segue, por fim, do

Lema 8.8.5

$$
GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = (S' \cdot S'')_p.
$$

Demonstração: Tomamos $f = f_1 \dots f_k$ uma equação reduzida para S. $\mathcal{G}_f$ é induzida em torno de p por $\omega = df$. Suponha $S' = S_1 \cup \dots \cup S_{k_0}$. Temos

$$
\begin{aligned}
df &= d(f_1 \dots f_{k_0} f_{k_0+1} \dots f_k) \\
&= d(f_1 \dots f_{k_0}) f_{k_0+1} \dots f_k + f_1 \dots f_{k_0} d(f_{k_0+1} \dots f_k).
\end{aligned}
$$

A partir desta decomposição, encontramos

$$
\begin{aligned}
GSV(\mathcal{G}_f, S', p) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S'} \frac{1}{f_{k_0+1} \dots f_k} d(f_{k_0+1} \dots f_k) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S'} \left(\frac{df_{k_0+1}}{f_{k_0+1}} + \dots + \frac{df_k}{f_k}\right) \\
&= (S' \cdot S_{k_0+1})_p + \dots + (S' \cdot S_k)_p \\
&= (S' \cdot S'')_p.
\end{aligned}
$$

Teorema 8.8.6 ([Br2]) *Seja $\mathcal{F}$ uma curva generalizada admitindo apenas um número finito de separatrizes em p. Se S é a união das separatrizes de $\mathcal{F}$ em p, então*

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0.$$

Demonstração: Observando a demonstração da proposição 8.8.2, vemos que a desigualdade estrita vale apenas quando $\tilde{\mathcal{F}}$ possui em P um número maior de singularidades que $\tilde{\mathcal{G}}_f$. Tal fato, porém, não ocorre pelo teorema 8.7.6. Portanto, $GSV(\mathcal{F}, S', p) = (S', S'')_p$. Tomando $S' = S$, temos $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$. □

Capítulo 9

O teorema de Baum-Bott e aplicações

Nesse capítulo exibimos um teorema devido a P. Baum e R. Bott ([BB1]), e exploramos algumas de suas conseqüências. A cronologia por trás desse resultado é a seguinte: inicialmente Bott, em [Bo], demonstrou o teorema para campos holomorfos globais numa variedade compacta M - a chamada *fórmula de Bott*. Como tais campos são raros e muitas vezes inexistentes, Baum e Bott generalizaram esse resultado em [BB1] a campos meromorfos, que são abundantes (esses geram folheações holomorfas singulares de dimensão 1 em M). Mais tarde, em [BB2], Baum e Bott fizeram uma generalização brutal de [BB1], obtendo resultados globais sobre folheações holomorfas singulares de dimensão qualquer numa variedade compacta.

Apresentamos aqui uma *versão genérica* do teorema de [BB1], devida a S.S.Chern ([Ch]). Escolhemos fazer isso por duas razões: a primeira delas é que a demonstração dada por Chern é puramente geométrica, introduz o leitor a técnicas muito úteis no âmbito da geometria diferencial e não faz uso de instrumental muito sofisticado. A segunda razão é que o resultado de [BB1] é um dos resultados de [BB2]. Este faz uso de técnicas outras e mais sofisticadas que demandariam um longo texto explicativo. Infelizmente, porém, devido à limitação de tempo para a feitura dessas notas, não nos seria possível apresentar de modo claro e bem fundamentado o conteúdo de [BB2]. Deixamos, desse modo, tal tarefa para um futuro texto.

Cabe dizer que A. Lins Neto e B. Scárdua deram uma demonstração direta do resultado de [BB1], no caso bidimensional, em ([LSc]). Também relacionado ao conteúdo desse capítulo é o trabalho de A. Araújo e I. Vainsencher [AV].

9.1 Fibrados virtuais

Seja M uma variedade complexa. Denotamos por $Vec(M)$ o conjunto das classes de isomorfismos de fibrados vetoriais complexos C^∞ sobre M, $E \xrightarrow{\pi} M$. $Vec(M)$ é um semigrupo comutativo em relação à operação $\oplus$, cujo elemento 0 é o fibrado de posto zero sobre M. Se denotarmos por $Vec_n(M)$ o subconjunto de $Vec(M)$ formado pelas classes de isomorfismos de fibrados de posto n, então $Vec_n(M)$ possui um elemento distinguido natural, a classe do fibrado trivial de posto n, $\underline{\mathbb{C}^n}$.

Ao semigrupo $Vec(M)$ associamos um grupo abeliano $K(M)$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: existe um homomorfismo de semigrupos $\Upsilon : Vec(M) \to K(M)$ tal que, para qualquer grupo G e $\Gamma : Vec(M) \to G$ homomorfismo de semigrupos, existe um único homomorfismo $\aleph : K(M) \to G$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} Vec(M) \arrow[d, "\Upsilon"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\ K(M) \arrow[r, "\aleph"'] & G \end{tikzcd} \qquad \Gamma = \aleph \circ \Upsilon.$$

$K(M)$ é construído da seguinte maneira: considere o homomorfismo diagonal de semigrupos

$$\begin{aligned} \Delta : \quad Vec(M) &\longrightarrow Vec(M) \times Vec(M) \\ E &\longmapsto (E, E) \end{aligned}$$

e ponha $K(M) = Vec(M) \times Vec(M)/\Delta(Vec(M))$, ou seja, $[(F,G)] = [(F',G')]$ se, e somente se, $F = F' \oplus E$, $G = G' \oplus E$. $K(M)$ é um semigrupo pois definindo a soma " + " por $[(F_1, G_1)] + [(F_2, G_2)] = [(F_1 \oplus F_2, G_1 \oplus G_2)]$, temos que essa é bem definida, uma vez que

$$\begin{cases} F_1 = F_1' \oplus E,\ G_1 = G_1' \oplus E \\ F_2 = F_2' \oplus E',\ G_2 = G_2' \oplus E' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_1 \oplus F_2 = (F_1' \oplus F_2') \oplus (E \oplus E') \\ G_1 \oplus G_2 = (G_1' \oplus G_2') \oplus (E \oplus E')\,. \end{cases}$$

Agora, a permutação

$$\begin{aligned} \sigma : \quad Vec(M) \times Vec(M) &\longrightarrow Vec(M) \times Vec(M) \\ (F, G) &\longmapsto (G, F) \end{aligned}$$

induz um elemento simétrico, pois $[(F,G)] + [(G,F)] = [(F \oplus G, F \oplus G)]$ e $(F \oplus G, F \oplus G) \in \Delta(Vec(M))$. Portanto, $K(M)$ é um grupo abeliano, o chamado *grupo de Grothendieck* de M.

Defina $\Upsilon : Vec(M) \to K(M)$ por $\Upsilon = q \circ i$, onde esses são os homomorfismos de semigrupos

$$\begin{array}{ccccc} Vec(M) & \xrightarrow{i} & Vec(M) \times Vec(M) & \xrightarrow{q} & K(M) \\ E & \longmapsto & (E,0) & \longmapsto & [(E,0)]. \end{array}$$

Exercício 1 Mostre que, se $\Gamma : Vec(M) \to G$ é um homomorfismo de semigrupos, então temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Vec(M) & \xrightarrow{\Upsilon} & K(M) \\ \Gamma\downarrow & & \downarrow K(\Gamma) \\ G & \xrightarrow{\Upsilon_G} & K(G). \end{array}$$

Além disso, se G é um grupo, então Υ_G é um isomorfismo. Conclua daí a propriedade universal satisfeita por $K(M)$.

Como $Vec(M)$ é um semi-anel com o produto $(E,F) \mapsto E \otimes F$, $K(M)$ tem, na realidade, uma estrutura de anel.

Denotando por $[E]$ a classe $[(E,0)]$ em $K(M)$, temos que

$$[(F,G)] = [(F,0)] + [(0,G)] = [(F,0)] - [(G,0)] = [F] - [G],$$

ou seja, os elementos de $K(M)$ são da forma $[F] - [G]$.

A fim de obtermos uma caracterização mais operacional dos elementos de $K(M)$, precisamos do

Lema 9.1.1 *Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial complexo C^∞, onde M é compacta. Então, existe um fibrado vetorial complexo C^∞, $F \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$, tal que $E \oplus F$ é trivial.*

Demonstração: Seja $\Gamma(E)$ o espaço vetorial das secões C^∞ de E. Um subespaço $V \subset \Gamma(E)$ é *amplo* se a aplicação $\varphi : M \times V \to E$, $\varphi(x,s) = s(x)$, é sobrejetiva. O fato interessante é o seguinte: $\Gamma(E)$ contém um subespaço amplo de dimensão finita. De fato, seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura finita de M, trivializadora de E, e seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Como $E_{|U_\alpha}$ é trivial, escolha um subespaço amplo de dimensão finita $V_\alpha \subset \Gamma(E_{|U_\alpha})$.

Defina $\eta_\alpha : V_\alpha \to \Gamma(E)$ por

$$\eta_\alpha(s_\alpha)(x) = \begin{cases} \rho_\alpha(x)s_\alpha(x), & \text{se } x \in U_\alpha \\ 0, & \text{se } x \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Agora, dado $x \in M$, existe α tal que $\rho_\alpha(x) > 0$. Logo, $\eta_{\alpha x} : V_\alpha \to E_x$ é sobrejetiva, onde $\eta_{\alpha x} = \eta_\alpha(s_\alpha)(x)$. Concluímos que a coleção $\{\eta_\alpha\}$ define um homomorfismo $\eta : \prod_\alpha V_\alpha \to \Gamma(E)$ cuja imagem é um subespaço amplo de dimensão finita de $\Gamma(E)$.

Com isso em mãos, é imediato que existe um inteiro n tal que o homomorfismo de fibrados $\psi : M \times \mathbb{C}^n \to E$ é sobrejetivo. Mas então temos a seqüência exata curta

$$0 \to \mathrm{Nuc}\,\psi \to \underline{\mathbb{C}^n} \to E \to 0,$$

e daí $E \oplus \mathrm{Nuc}\,\psi \cong \underline{\mathbb{C}^n}$. □

Supondo M compacta, seja G um fibrado tal que, para algum n, $F \oplus G$ é isomorfo ao fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}^n}$ sobre M. Então

$$[E] - [F] = [E] + [G] - ([F] + [G]) = [E \oplus G] - [\underline{\mathbb{C}^n}]$$

e concluímos que todo elemento de $K(M)$ é da forma $[H] - [\underline{\mathbb{C}^n}]$. Por outro lado, se E e F são tais que $[E] = [F]$, então existe um fibrado G tal que $E \oplus G \cong F \oplus G$. Tomando um fibrado H tal que, para algum n, $G \oplus H \cong \underline{\mathbb{C}^n}$, concluímos que $E \oplus G \oplus H \cong F \oplus G \oplus H$, o que implica $E \oplus \underline{\mathbb{C}^n} \cong F \oplus \underline{\mathbb{C}^n}$. Acabamos de mostrar que $[E] = [F]$ se, e somente se, E e F são isomorfos se somarmos a ambos um fibrado trivial de posto suficientemente grande (esse conceito é conhecido como *equivalência estável* de fibrados).

Os elementos de $K(M)$ são chamados de *fibrados virtuais* e escreveremos E, em vez de $[E]$, para denotar tais objetos, desde que não haja possibilidade de confusão.

Sejam $E_0, \ldots, E_k$ $k+1$ fibrados complexos C^∞ sobre M e considere o fibrado virtual $E = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i E_i \in K(M)$.

Definição 9.1.2 A *classe de Chern total* de E, $c(E)$, é o elemento

$$c(E) = \prod_{i=0}^{k} c(E_i)^{(-1)^i} \in H^*_{DR}(M, \mathbb{C}).$$

A componente de $c(E)$ em $H^{2j}_{DR}(M, \mathbb{C})$ é a *j-ésima classe de Chern*, $c_j(E)$, de E.

Exemplo 9.1.3 Ilustramos a definição acima em um caso que nos será útil mais adiante. Suponha que E seja um fibrado de posto m e L um fibrado em retas. Então,

$$\begin{aligned} c(E-L) &= c(E)\,c(L)^{-1} = \frac{c(E)}{c(L)} \\ &= \frac{1+c_1(E)+\cdots+c_m(E)}{1+c_1(L)} \\ &= 1+c_1(E)+\cdots+c_m(E)][1-c_1(L)+\cdots+(-1)^i c_1(L)^i+\cdots] \\ &= [1+c_1(E)+\cdots+c_m(E)][1+c_1(L^*)+\cdots+c_1(L^*)^i+\cdots] \\ &= 1+[c_1(E)+c_1(L^*)]+[c_2(E)+c_1(E)c_1(L^*)+c_1(L^*)^2]+\cdots, \end{aligned}$$

ou seja, expandimos formalmente $1/(1+c_1(L))$, multiplicamos por $c(E)$ e tomamos os termos de grau j. Assim sendo,

$$\begin{aligned} c_1(E-L) &= c_1(E)+c_1(L^*), \\ c_2(E-L) &= c_2(E)+c_1(E)c_1(L^*)+c_1(L^*)^2 \end{aligned}$$

e, mais geralmente,

$$c_j(E-L) = c_j(E)+c_{j-1}(E)c_1(L^*)+\cdots+c_1(L^*)^j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Observe que $c_m(E-L) = c_m(E\otimes L^*)$ (veja exercício 8 do capítulo 3).

A definição acima é natural. Para ver isso, relembramos a construção de classes características no contexto da K-teoria.

Seja $P \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ um polinômio simétrico, homogêneo, de grau $l \leq n = \dim_{\mathbb{C}} M$. P é um polinômio nas funções simétricas elementares, $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, das variáveis $X_1,\ldots,X_n$. Como P tem grau l, podemos escrevê-lo sob a forma $P = \hat{P}(\sigma_1,\ldots,\sigma_l)$, onde $\hat{P}$ é um polinômio. Definimos $P(E)$ por

$$P(E) = \hat{P}(c_1(E),\ldots,c_l(E)) \in H^{2l}_{DR}(M,\mathbb{C}).$$

Da definição de $c(E)$ temos que $c_j(E)$ é um polinômio nas classes de Chern de $E_k,\ldots,E_0$ e concluímos que

$$P(E) = \sum_i P_i^0(E_0)\cdots P_i^k(E_k),$$

onde $P_i^j(E_j)$ é um polinômio nas classes de Chern de E_j. Tome $\nabla^k,\ldots,\nabla^0$ conexões sobre $E_k,\ldots,E_0$, respectivamente. Escreva $\nabla^* = (\nabla^k,\ldots,\nabla^0)$. Seja

K^j a curvatura associada a ∇^j, $j = 0, \ldots, k$ e ponha $K^\star = (K^k, \ldots, K^0)$. A $2l$-forma

$$P\left(\frac{i}{2\pi}K^\star\right) = \sum_i P_i^0\left(\frac{i}{2\pi}K^0\right) \wedge \cdots \wedge P_i^k\left(\frac{i}{2\pi}K^k\right)$$

é fechada uma vez que, pelo lema 3.2.2, $dP_i^j\left((i/2\pi)K^j\right) = 0$. Portanto, $P(E)$ está bem definida.

Para ver que $P(E)$ não depende da escolha das conexões $\nabla^k, \ldots, \nabla^0$, vamos repetir o que fizemos em 3.3. Defina um operador $\mathcal{P}$ por

$$\mathcal{P}(\nabla^\star) = P\left(\frac{i}{2\pi}K^\star\right). \tag{$\sharp$}$$

Se tivermos duas famílias de conexões $\nabla_0^\star = (\nabla_0^k, \ldots, \nabla_0^0)$ e $\nabla_1^\star = (\nabla_1^k, \ldots, \nabla_1^0)$, formamos as somas convexas

$$\widetilde{\nabla}^j = (1-t)\nabla_0^j + t\nabla_1^j, \quad j = 0, \ldots, k,$$

que definem conexões sobre os fibrados $E^j \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$, e tomamos as curvaturas correspondentes, $\widetilde{K}^j$. Ponha $K_0^\star = (K_0^k, \ldots, K_0^0)$, $K_1^\star = (K_1^k, \ldots, K_1^0)$, $\widetilde{\nabla}^\star = (\widetilde{\nabla}^k, \ldots, \widetilde{\nabla}^0)$ e $\widetilde{K}^\star = (\widetilde{K}^k, \ldots, \widetilde{K}^0)$. Defina $\mathcal{P}$ por

$$\mathcal{P}(\nabla_0^\star, \nabla_1^\star) = \wp_*^{\Delta^1}(\mathcal{P}(\widetilde{\nabla}^\star)) = \wp_*^{\Delta^1}\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right),$$

onde $\wp_*$ é a integração ao longo das fibras. A proposição 3.3.1 nos diz que $\wp_*^{\Delta^1} \circ d + d \circ \wp_*^{\Delta^1} = \wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*$, o que equivale a $\wp_*^{\Delta^1} \circ d + d \circ \wp_*^{\Delta^1} = i_0^* - i_1^*$, onde $i_\lambda : M \to M \times [0,1]$ é a inclusão $i_\lambda(x) = (x, \lambda)$. Daí vem que

$$d\mathcal{P}(\nabla_0^\star, \nabla_1^\star) = d \circ \wp_*^{\Delta^1}\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right) = i_0^*\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right) - i_1^*\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right),$$

pois, pelo lema 3.2.2, $\wp_*^{\Delta^1} \circ d\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right) = 0$. Mas

$$i_0^*\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right) - i_1^*\left(P\left(\frac{i}{2\pi}\widetilde{K}^\star\right)\right) = P\left(\frac{i}{2\pi}K_0^\star\right) - P\left(\frac{i}{2\pi}K_1^\star\right)$$

e então

$$d\mathcal{P}(\nabla_0^\star, \nabla_1^\star) = P\left(\frac{i}{2\pi}K_0^\star\right) - P\left(\frac{i}{2\pi}K_1^\star\right),$$

ou seja, $P(E)$ não depende da escolha da família de conexões. Além disso, como

$$P\left(\frac{i}{2\pi}K_0^\star\right) - P\left(\frac{i}{2\pi}K_1^\star\right) = \mathcal{P}(\nabla_0^\star) - \mathcal{P}(\nabla_1^\star),$$

obtivemos

$$d\mathcal{P}(\nabla_0^\star, \nabla_1^\star) = \mathcal{P}(\nabla_0^\star) - \mathcal{P}(\nabla_1^\star).$$

Se tivermos agora $q+1$ famílias de conexões $\nabla_\ell^\star = (\nabla_\ell^k, \ldots, \nabla_\ell^0)$, $0 \leq \ell \leq q$, formamos suas somas convexas

$$\widetilde{\nabla}^j = (1 - t_1 - \cdots - t_q)\nabla_0^j + t_1\nabla_1^j + \cdots + t_q\nabla_q^j, \quad 0 \leq j \leq k,$$

que definem conexões sobre os fibrados $E^j \times \mathbb{R}^q \longrightarrow M \times \mathbb{R}^q$, e tomamos as curvaturas correspondentes, $\widetilde{K}^j$. Ponha $\widetilde{\nabla}^\star = (\widetilde{\nabla}^k, \ldots, \widetilde{\nabla}^0)$ e $\widetilde{K}^\star = (\widetilde{K}^k, \ldots, \widetilde{K}^0)$. Usando ($\sharp$), defina $\mathcal{P}$ por

$$\mathcal{P}(\nabla_0^\star, \ldots, \nabla_q^\star) = \wp_*^{\Delta^q}(\mathcal{P}(\widetilde{\nabla}^\star)).$$

Lembrando que, por 3.3.1,

$$\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*,$$

onde $i : \partial(M \times \Delta^q) \to M \times \Delta^q$ é a inclusão, obtemos

$$d\mathcal{P}(\nabla_0^\star, \ldots, \nabla_q^\star) = (-1)^{q+1} \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^\ell \mathcal{P}(\nabla_0^\star, \ldots, \widehat{\nabla_\ell^\star}, \ldots, \nabla_q^\star).$$

Aqui há uma diferença de sinal, caso q seja par, em relação ao obtido no exercício 7 de 3.3. Isso se deve a que omitimos o fator $(-1)^{[q/2]}$ em ($\sharp$).

Definição 9.1.4 Considere uma seqüência exata de fibrados vetoriais complexos C^∞ sobre M,

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0,$$

e sejam $\nabla^k, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1}$ conexões em $E_k, \ldots, E_0, E_{-1}$, respectivamente. Então, $\nabla^\star = (\nabla^k, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$ é *compatível com a seqüência exata* se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}^0(M, E_i) & \xrightarrow{\nabla^i} & \mathcal{A}^1(M, E_i) \\
\eta_i \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \eta_i \\
\mathcal{A}^0(M, E_{i-1}) & \xrightarrow{\nabla^{i-1}} & \mathcal{A}^1(M, E_{i-1}).
\end{array}$$

A aparência um pouco obscura dessa definição será elucidada pelo

Lema 9.1.5 *Seja*

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata de fibrados vetoriais complexos C^∞ *sobre* M. *Dada uma conexão* ∇^{-1} *sobre* E_{-1}, *existem conexões* $\nabla^k, \ldots, \nabla^0$ *sobre* $E_k, \ldots, E_0$ *tais que* $\nabla^* = (\nabla^k, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$ *é compatível com a seqüência exata.*

Demonstração: Usamos indução em k. Se $k = 0$, temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0.$$

Então E_0 é isomorfo a E_{-1}, e podemos definir uma conexão ∇^0 em E_0 por $\nabla^0(s) = \nabla^{-1}(\eta_0(s))$. $\nabla^* = (\nabla^0, \nabla^{-1})$ é compatível com a seqüência exata acima. Observe que ∇^0 é determinada de modo único por ∇^{-1} e por η_0.

Suponha agora que o lema é verdadeiro para $k-1$ e considere uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0.$$

Seja F um subfibrado vetorial de E_{k-1} tal que

$$E_{k-1} = F \oplus \eta_k(E_k),$$

onde $\eta_k(E_k)$ é a imagem de $\eta_k : E_k \to E_{k-1}$. Isso nos fornece a seqüência exata

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E_{k-2} \xrightarrow{\eta_{k-2}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0.$$

Pela hipótese de indução aplicada a essa seqüência, temos que existe $\nabla^* = (\nabla^{k-1}, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$ compatível com ela. Munimos $\eta_k(E_k)$ de uma conexão ∇ e consideramos ∇^k a conexão em E_k tal que (∇^k, ∇) é compatível com a seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_k \longrightarrow \eta_k(E_k) \longrightarrow 0.$$

∇^k existe pelo argumento do caso $k = 0$. Em $E_{k-1} = F \oplus \eta_k(E_k)$, tome a conexão $\nabla^{k-1} \oplus \nabla$. Então

$$\nabla^* = (\nabla^k, \nabla^{k-1} \oplus \nabla, \nabla^{k-2}, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$$

é compatível com a seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0$$

e o lema está demonstrado. □

Lema 9.1.6 *Sejam*

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata de fibrados vetoriais complexos C^∞ sobre M, $\nabla^k, \ldots, \nabla^0$, ∇^{-1} conexões sobre os E_i tais que $\nabla^* = (\nabla^k, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$ é compatível com essa seqüência e $K^* = (K^k, \ldots, K^0, K^{-1})$ as curvaturas correspondentes. Denote por ζ o fibrado virtual $\zeta = \sum_{i=0}^k (-1)^i E_i$. Se P é um polinômio simétrico, homogêneo, de grau $l \leq n = \dim_{\mathbb{C}} M$, então $P(E_{-1}) = P(\zeta)$.

Demonstração: Se E é um fibrado virtual, já sabemos que

$$P(E) = \hat{P}(c_1(E), \ldots, c_l(E)),$$

onde $\hat{P}$ é um polinômio. Em particular, $P(E_{-1}) = \hat{P}(c_1(E_{-1}), \ldots, c_l(E_{-1}))$ e $P(\zeta) = \hat{P}(c_1(\zeta), \ldots, c_l(\zeta))$. As classes de Chern totais de E_{-1} e de ζ são, respectivamente

$$\begin{aligned} c(E_{-1}) &= 1 + c_1(E_{-1}) + \cdots + c_n(E_{-1}), \\ c(\zeta) &= 1 + c_1(\zeta) + \cdots + c_n(\zeta), \end{aligned}$$

onde algumas dessas podem se anular, dependendo dos postos dos fibrados envolvidos. Se mostrarmos que $c(E_{-1}) = c(\zeta)$, então o lema estará demonstrado, já que teremos $c_j(E_{-1}) = c_j(\zeta)$ e, portanto, $P(E_{-1}) = P(\zeta)$. Agora,

$$c(E_{-1}) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi} K^{-1}\right)$$

e, notando $\epsilon(i) = (-1)^i$, temos que

$$c(\zeta) = \prod_{i=0}^{k} \left(\det\left(I + \frac{i}{2\pi} K^i\right)\right)^{\epsilon(i)}.$$

Logo, nos resta mostrar que

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi} K^{-1}\right) = \prod_{i=0}^{k} \left(\det\left(I + \frac{i}{2\pi} K^i\right)\right)^{\epsilon(i)}. \qquad (\natural)$$

Isso é feito por indução em k. Se $k = 0$, a seqüência exata se reduz a

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0$$

e, como nesse caso E_0 e E_{-1} são isomorfos, é imediato que $c(E_0) = c(E_{-1})$. Suponha que ($\natural$) é verdadeira para $k-1$ e considere a seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0.$$

Como no lema anterior, escolha um subfibrado vetorial F de E_{k-1} tal que

$$E_{k-1} \;=\; F \oplus \eta_k(E_k).$$

Seja $\mathfrak{p} : E_{k-1} \to F$ a projeção no primeiro fator associada a essa decomposição. Como $1 \otimes \mathfrak{p} : \mathcal{A}^1(M, E_{k-1}) \to \mathcal{A}^1(M, F)$, usamos

$$\mathcal{A}^0(M,F) \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0(M,E_{k-1}) \xrightarrow{\nabla^{k-1}} \mathcal{A}^1(M,E_{k-1}) \xrightarrow{1 \otimes \mathfrak{p}} \mathcal{A}^1(M,F)$$

para definir uma conexão ∇ em F por

$$\nabla \;=\; (1 \otimes \mathfrak{p})\nabla^{k-1}.$$

Se K_∇ é a curvatura associada a essa conexão, então, como $E_k \cong \eta_k(E_k)$, invocando a fórmula de Whitney obtemos

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K^{k-1}\right) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}K^{k}\right)\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K_\nabla\right). \qquad (\P)$$

Além do mais, $\nabla^\bullet = (\nabla, \nabla^{k-2}, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$ é compatível com a seqüência exata

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} E_{-1} \longrightarrow 0.$$

Com isso temos, pela hipótese de indução, que

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K^{-1}\right) \;=\; \left(\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K_\nabla\right)\right)^{\epsilon(k-1)} \prod_{i=0}^{k-2}\left(\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K^{i}\right)\right)^{\epsilon(i)}.$$

Eliminando $\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K_\nabla\right)$ em ($\P$) e substituindo na igualdade acima, encontramos

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K^{-1}\right) \;=\; \prod_{i=0}^{k}\left(\det\left(I + \frac{i}{2\pi}K^{i}\right)\right)^{\epsilon(i)}$$

e o lema está demonstrado. □

Uma conseqüência interessante do lema 9.1.6 é a seguinte: suponha que tenhamos uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \longrightarrow 0$$

e seja $\zeta = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i E_i$. Acrescente um zero ($= E_{-1}$) a essa seqüência

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \xrightarrow{\eta_0} 0 \longrightarrow 0.$$

Se $\nabla^\star = (\nabla^k, \ldots, \nabla^0, \nabla^{-1})$ é compatível com essa última seqüência, então $c(\zeta) = 1$, ou seja, se temos um fibrado virtual ζ cujos componentes estão ligados através de uma seqüência exata, então $c_j(\zeta) = 0$ para $j > 0$. Segue daí a seguinte

Proposição 9.1.7 *Seja*

$$0 \longrightarrow E_k \xrightarrow{\eta_k} E_{k-1} \xrightarrow{\eta_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\eta_1} E_0 \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata de fibrados vetoriais complexos C^∞ sobre M. Se ξ denota o fibrado virtual $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} E_i$, então $c_j(\xi) = c_j(E_0)$.

Demonstração: Seja $\zeta = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i E_i$. Pela observação que antecede a proposição temos que $c(\zeta) = 1$. Agora $\zeta = E_0 - \xi$ e então

$$1 = c(\zeta) = c(E_0 - \xi) = c(E_0)/c(\xi),$$

o que fornece $c(\xi) = c(E_0)$. □

9.2 Conexões parciais

Sejam E um fibrado vetorial complexo, C^∞, sobre a variedade complexa M e H um subfibrado vetorial complexo, C^∞, de $TM^{\mathbb{C}}$. O dual de H, H^*, é um subfibrado quociente de $TM^{\mathbb{C}^*}$ (exercício). Denote por $\mathfrak{p} : TM^{\mathbb{C}^*} \to H^*$ a projeção.

Definição 9.2.1 Uma *conexão parcial* em E é um par (H, δ), onde H é um subfibrado vetorial de $TM^{\mathbb{C}^*}$ e δ é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\delta : \mathcal{Q}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{Q}^1(M, H^* \otimes E),$$

satisfazendo

$$\delta(fs) \;=\; \mathfrak{p}(df) \otimes s + f\delta(s), \quad \forall f \in \mathcal{A}^0(M).$$

Observe que as conexões parciais, da mesma forma que as conexões, têm caráter local pois, se $s \in \mathcal{A}^0(M,E)$ é identicamente nula no aberto U, então $\delta(s) \equiv 0$ em U. Segue daí que podemos tomar a restrição de (H,δ) a U e obtermos uma conexão parcial

$$\delta : \mathcal{A}^0(U,E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(U, H^* \otimes E).$$

Definição 9.2.2 Seja $\nabla : \mathcal{A}^0(M,E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M,E)$ uma conexão em E. ∇ é uma *extensão* de (H,δ) se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^0(M,E) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[dr, "\delta"'] & \mathcal{A}^1(M,E) \arrow[d, "\mathfrak{p}\otimes 1"] \\ & \mathcal{A}^1(M, H^* \otimes E). \end{tikzcd}$$

Lema 9.2.3 *Toda conexão parcial (H,δ) admite uma extensão ∇.*

Demonstração: Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M, trivializadora de E, de H^* e de $TM^{\mathbb{C}*}$. Seja $e^\alpha = (e_1^\alpha, \ldots, e_n^\alpha)$ um referencial de E sobre U_α. Então

$$\delta(e_i^\alpha) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^\alpha \otimes e_j^\alpha.$$

Usando $\mathfrak{p}$, podemos encontrar 1-formas θ_{ij}^α tais que $\mathfrak{p}(\theta_{ij}^\alpha) = \gamma_{ij}^\alpha$. Assim, definimos uma conexão ∇_α, sobre $E_{|U_\alpha}$, através da matriz de 1-formas $[\theta_{ij}^\alpha]$:

$$\nabla_\alpha(e_i^\alpha) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^\alpha \otimes e_j^\alpha.$$

Sobre U_α, temos que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^0(U_\alpha, E_{|U_\alpha}) \arrow[r, "\nabla_\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & \mathcal{A}^1(U_\alpha, E_{|U_\alpha}) \arrow[d, "\mathfrak{p}\otimes 1"] \\ & \mathcal{A}^1(U_\alpha, H^* \otimes E_{|U_\alpha}) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Tomando uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$, subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$, temos que $\nabla = \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla_\alpha$ define uma conexão em E que estende (H,δ). $\square$

Lema 9.2.4 *Sejam* (H,δ) *uma conexão parcial e* $s \in \mathcal{A}^0(M,E)$ *uma seção satisfazendo:* $s(x) \neq 0$, $\forall x \in M$ *e* $\delta(s) \equiv 0$. *Então existe uma conexão* ∇ *sobre* E, *que é uma extensão de* (H,δ), *tal que* $\nabla(s) \equiv 0$.

Demonstração: Tomamos $\{U_\alpha\}$ como em 9.2.3. Já que $s(x)$ não se anula em ponto algum, completamos a sua restrição $s_\alpha = s_{|U_\alpha}$ a um referencial de $E_{|U_\alpha}$, $e^\alpha = (s_\alpha, e_2^\alpha, \ldots, e_n^\alpha)$. Usando a mesma notação do lema anterior temos que $\gamma_{1j}^\alpha = 0$ e, escolhendo $\theta_{1j}^\alpha = 0$, procedemos *verbatim* como em 9.2.3. □

Temos uma aplicação natural

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^0(M,H) \times \mathcal{A}^0(M,H^*) & \longrightarrow & \mathcal{A}^0(M) \\ (u,\omega) & \longmapsto & \omega(u). \end{array}$$

Assim sendo, $u \in \mathcal{A}^0(M,H)$ determina uma aplicação

$$i(u) : \mathcal{A}^0(M,H^*) \longrightarrow \mathcal{A}^0(M).$$

Generalizando, $u \in \mathcal{A}^0(M,H)$ determina uma aplicação (também notada $i(u)$)

$$i(u) : \mathcal{A}^0(M,H^* \otimes E) \longrightarrow \mathcal{A}^0(M,E).$$

Observe que, se $f \in \mathcal{A}^0(M)$, então $u(f) = i(u)\,\mathfrak{p}(df)$. Se (H,δ) é uma conexão parcial em E, valem as seguintes igualdades imediatas:

$$\begin{aligned} i(u_1+u_2)\,\delta(s) &= i(u_1)\,\delta(s) + i(u_2)\,\delta(s) \\ i(fu)\,\delta(s) &= fi(u)\,\delta(s) \\ i(u)(\delta(s_1+s_2)) &= i(u)\,\delta(s_1) + i(u)\,\delta(s_2) \\ i(u)\,\delta(fs) &= u(f)s + fi(u)\,\delta(s). \end{aligned}$$

Exemplo 9.2.5 Um exemplo interessante de conexão parcial é obtido da seguinte maneira: recorde do capítulo 1 que temos decomposições em somas diretas

$$\begin{aligned} TM^{\mathbb{C}} &= T'M \oplus T''M, \\ TM^{\mathbb{C}*} &= T'M^* \oplus T''M^*, \end{aligned}$$

onde $T'M$ é o fibrado tangente holomorfo, $T''M$ o tangente anti-holomorfo, $T'M^*$ o cotangente holomorfo e $T''M^*$ o cotangente anti-holomorfo. Se U é um aberto trivializador desses fibrados, então $\{\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_m\}$ é um referencial de $T'M$ sobre U e $\{dz_1, \ldots, dz_m\}$ é um referencial de $T'M^*$ sobre U.

Suponha agora que E é um fibrado vetorial holomorfo sobre M. O operador $\overline{\partial}$ induz

$$\overline{\partial} : \mathcal{a}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{a}^1(M, T''M^* \otimes E)$$

por $\overline{\partial}(fs) = \overline{\partial}f \otimes s + f\,\overline{\partial}s$. O par $(H, \delta) = (T''M, \overline{\partial})$ é uma conexão parcial em E. Note que, se $U \subset M$ é aberto e $\Gamma(E_{|U})$ denota o espaço de seções holomorfas de $E_{|U}$, então

$$\Gamma(E_{|U}) \;=\; \mathrm{Nuc}\left\{\overline{\partial} : \mathcal{a}^0(U, E_{|U}) \to \mathcal{a}^1(U, (T''M^* \otimes E)_{|U})\right\}.$$

Assim sendo, se $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ é um referencial *holomorfo* de E sobre o aberto trivializador U_α, então $\overline{\partial}(s_i^\alpha) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Daí vem que, se ∇ é uma conexão em E que estende $\overline{\partial}$, então, em relação a um referencial holomorfo de E, a matriz $[\theta_{ij}^\alpha]$ de ∇ é constituída de formas do tipo $(1,0)$. De fato, em relação a uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de E, como fibrado holomorfo, temos que $\nabla(s_i^\alpha) = \sum_j \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha$. Agora, a projeção

$$\mathfrak{p} : TM^{\mathbb{C}*} \longrightarrow T''M^*$$

é dada por

$$\mathfrak{p}(\theta_{ij}^\alpha) \;=\; \mathfrak{p}\left(\theta_{ij}^{(1,0),\alpha} + \theta_{ij}^{(0,1),\alpha}\right) \;=\; \theta_{ij}^{(0,1),\alpha}.$$

Logo, se ∇ estende $\overline{\partial}$, então

$$\overline{\partial}(s_i^\alpha) \;=\; \sum_j \theta_{ij}^{(0,1),\alpha} \otimes s_j^\alpha \;=\; 0,$$

o que nos diz que $\theta_{ij}^{(0,1),\alpha} = 0$. Essas conexões são chamadas *de tipo* $(1,0)$ ou também de *compatíveis com a estrutura complexa* de M.

9.3 Mais sobre conexões métricas

No capítulo 3 introduzimos o conceito de métrica hermitiana em fibrados holomorfos de posto 1. Passamos agora a considerar fibrados de posto arbitrário.

Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial complexo sobre M.

Definição 9.3.1 $h = \{h_z\}_{z \in M}$ é uma *métrica hermitiana* em E se:

(i) h_z é um produto interno hermitiano em E_z;

(ii) se U_α é um aberto trivializador de E e $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ é um referencial de E sobre U_α, então as funções

$$\begin{array}{rccl} h_{ij}^\alpha : & U_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & h_z(s_i^\alpha(z), s_j^\alpha(z)) \end{array}, \quad 1 \leq i,j \leq k, \quad \text{são de classe } C^\infty.$$

Um fibrado vetorial holomorfo munido de uma métrica hermitiana é chamado de *fibrado hermitiano.*

Um referencial local de E, $s = (s_1, \ldots, s_k)$, é *unitário* se $\{s_1(z), \ldots, s_k(z)\}$ é uma base ortonormal de E_z. Observe que existem referenciais locais ortonormais, pois, se U_α é um aberto trivializador, podemos aplicar o processo de Gram-Schmidt a um referencial de $E_{|U_\alpha}$.

Exercício 2 Mostre que, se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de M que trivializa E, h_α é uma métrica hermitiana em $E_{|U_\alpha}$ e $\{\rho_\alpha\}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$, então $h = \sum_\alpha \rho_\alpha h_\alpha$ é uma métrica hermitiana em E.

Se u e s são seções de E, denotamos por $\langle u, s\rangle$ o produto interno dessas seções, isto é, $\langle u(z), s(z)\rangle = h_z(u(z), s(z))$. Seja agora ∇ uma conexão num fibrado hermitiano E. ∇ é *compatível com a métrica* se

$$d\langle u, s\rangle = \langle \nabla(u), s\rangle + \langle u, \nabla(s)\rangle.$$

Lema 9.3.2 *Se E é um fibrado hermitiano, existe uma única conexão ∇ em E que é compatível com a estrutura complexa e com a métrica.*

Demonstração: Pelo exemplo 9.2.5, $(T''M, \overline{\partial})$ é uma conexão parcial em E que, pelo lema 9.2.3, admite uma extensão ∇ compatível com a estrutura complexa, pois é do tipo $(1,0)$. Seja $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_k^\alpha)$ um referencial local de E sobre U_α. Escreva a matriz de ∇, relativamente a U_α, como $\theta^\alpha = [\theta_{ij}^\alpha]$. Impondo a condição de compatibilidade com a métrica, obtemos, uma vez que θ_{ij}^α é uma $(1,0)$-forma,

$$dh_{ij}^\alpha = d\langle s_i^\alpha, s_j^\alpha\rangle = \sum_m \theta_{im}^\alpha h_{mj}^\alpha + \sum_m \overline{\theta_{jm}^\alpha} h_{im}^\alpha.$$

Por outro lado, $dh_{ij}^\alpha = \partial h_{ij}^\alpha + \overline{\partial} h_{ij}^\alpha$ e, comparando tipos,

$$\partial h_{ij}^\alpha = \sum_m \theta_{im}^\alpha h_{mj}^\alpha \implies \partial h^\alpha = \theta^\alpha h^\alpha$$

$$\overline{\partial} h_{ij}^\alpha = \sum_m \overline{\theta_{jm}^\alpha} h_{im}^\alpha \implies \overline{\partial} h^\alpha = (h^\alpha)^T \overline{\theta^\alpha}.$$

Agora, $\theta^\alpha = \partial h^\alpha (h^\alpha)^{-1}$ é a única solução de ambas as equações acima. $\square$

A conexão obtida acima é chamada de *conexão métrica*. Observe que, se s^α é um referencial unitário, então $\theta^\alpha_{ij} + \overline{\theta^\alpha_{ji}} = 0$.

Sejam agora E e F dois fibrados hermitianos. Em $E \otimes F$ temos uma métrica hermitiana definida por

$$\langle s \otimes u, s' \otimes u' \rangle \;=\; \langle s, s' \rangle \langle u, u' \rangle.$$

Lema 9.3.3 *Sejam E e F fibrados hermitianos sobre M e ∇_{h_E}, ∇_{h_F} as conexões métricas em E e F. Defina conexões em $E \otimes F$ por*

$$(\nabla_{h_E} \otimes 1)(s \otimes u) \;=\; \nabla_{h_E}(s) \otimes u \quad e \quad (1 \otimes \nabla_{h_F})(s \otimes u) \;=\; s \otimes \nabla_{h_F}(u).$$

Então, $\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F}$ é a conexão métrica em $E \otimes F$.

Demonstração: É imediato que $\mathfrak{p}(\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F}) = \overline{\partial}$ e então essa conexão é compatível com a estrutura complexa. Quanto à compatibilidade com a métrica, temos

$$\begin{aligned} d\langle s \otimes u, s' \otimes u' \rangle &= \langle u, u' \rangle (\langle \nabla_{h_E}(s), s' \rangle + \langle s, \nabla_{h_E}(s') \rangle) \\ &\quad + \langle s, s' \rangle (\langle \nabla_{h_F}(u), u' \rangle + \langle u, \nabla_{h_F}(u') \rangle) \\ &= \langle (\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F})(s \otimes u), s' \otimes u' \rangle \\ &\quad + \langle s \otimes u, (\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F})(s' \otimes u') \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

O lema 9.3.2 nos diz que a matriz da conexão métrica em E é dada por:

$$\theta^\alpha \;=\; \partial h^\alpha (h^\alpha)^{-1}. \tag{1}$$

Daí vem que $\partial h^\alpha \;=\; \theta^\alpha h^\alpha$ e então $0 = \partial\partial h^\alpha = \partial\theta^\alpha h^\alpha - \theta^\alpha \wedge \partial h^\alpha$, ou seja, $\partial\theta^\alpha h^\alpha = \theta^\alpha \wedge \partial h^\alpha$, o que fornece

$$\partial\theta^\alpha \;=\; \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha. \tag{2}$$

Assim sendo, a curvatura K_{∇_h} da conexão métrica tem matriz local

$$\Theta^\alpha \;=\; d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha \;=\; \partial\theta^\alpha + \overline{\partial}\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha \;=\; \overline{\partial}\theta^\alpha \tag{3}$$

e portanto

$$\overline{\partial}\Theta^\alpha \;=\; 0. \tag{4}$$

Suponhamos agora que $E = T'M$, o fibrado tangente holomorfo de M. Munimos $T'M$ de uma métrica hermitiana e tomamos a conexão métrica ∇_h correspondente.

Se $(z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ são coordenadas locais em M, a *torção* $\tau^\alpha = (\tau_1^\alpha, \ldots, \tau_n^\alpha)$ é o vetor definido pelas $(2,0)$-formas

$$\tau_i^\alpha = \sum_{j=1}^{n} dz_j^\alpha \wedge \theta_{ji}^\alpha \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{5}$$

A título de curiosidade, lembramos que uma variedade M é chamada de *Kähler* se $T'M$ pode ser munido de uma métrica hermitiana cuja torção é nula.

Aplicando $\overline{\partial}$ a ambos os lados de (5) e utilizando (3), obtemos imediatamente

$$\overline{\partial}\tau_i^\alpha \;=\; -\sum_{j=1}^{n} dz_j^\alpha \wedge \Theta_{ji}^\alpha \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{6}$$

Retornamos agora à situação em que L é um fibrado holomorfo de posto 1 sobre M. Recorde do capítulo 3 que, se H_α é a métrica hermitiana em L, então, se $g_{\alpha\beta}$ são as transições (holomorfas) de L, temos

$$H_\alpha \;=\; g_{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha\beta}H_\beta, \tag{7}$$

e que a conexão métrica ∇_H é dada pelas matrizes

$$\phi^\alpha \;=\; \partial \log H_\alpha \tag{8}$$

no aberto trivializador U_α. Já a curvatura K_{∇_H} é dada pelas 2-formas de tipo $(1,1)$

$$\Phi^\alpha \;=\; \overline{\partial}\partial \log H_\alpha. \tag{9}$$

Em coordenadas locais (8) se escreve $\phi_\alpha = \sum_i (\partial \log H_\alpha/\partial z_i^\alpha)\, dz_i^\alpha$ e então (9) assume a forma

$$\Phi^\alpha \;=\; \sum_i \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha}\right) \wedge dz_i^\alpha \;=\; \sum_i \psi_i^\alpha \wedge dz_i^\alpha, \tag{10}$$

onde $\psi_i^\alpha = \overline{\partial}(\partial \log H_\alpha/\partial z_i^\alpha)$, $1 \leq i \leq n$. Note que $\overline{\partial}\psi_i^\alpha = 0$.

Considere a matriz $\Omega^\alpha = [\Omega_{ij}^\alpha]$ definida em U_α por

$$\Omega_{ij}^\alpha \;=\; \Theta_{ij}^\alpha - dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha \qquad 1 \leq i,j \leq n. \tag{11}$$

Lema 9.3.4 *Sejam $\{U_\alpha\}$ uma cobertura trivializadora comum a $T'M$ e L e Ξ^α a matriz de $(1,1)$-formas em U_α definida por $\Xi^\alpha_{ij} = -dz^\alpha_j \wedge \psi^\alpha_i$, $1 \leq i, j \leq n$. Se $B_{\alpha\beta}$ são as transições de $T'M$, então*

$$\Xi^\alpha = B_{\alpha\beta}\, \Xi^\beta B^{-1}_{\alpha\beta}.$$

Demonstração: Suponha as transições de $T'M^*$ e de $T'M$ dadas por

$$dz^\alpha_i = \sum_j A^{ij}_{\alpha\beta}\, dz^\beta_j,$$

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha_i} = \sum_j B^{ij}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z^\beta_j},$$

onde $A_{\alpha\beta} = \left(B^T_{\alpha\beta}\right)^{-1}$. Notando $B^{-1}_{\alpha\beta} = \left[C^{ij}_{\alpha\beta}\right]$, temos que $A_{\alpha\beta} = \left[C^{ji}_{\alpha\beta}\right]$. Um cálculo rápido mostra que

$$\overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z^\alpha_i}\right) = \sum_j B^{ij}_{\alpha\beta}\, \overline{\partial}\left(\frac{\partial \log H_\beta}{\partial z^\beta_j}\right),$$

ou seja, $\psi^\alpha_i = \sum_j B^{ij}_{\alpha\beta}\, \psi^\beta_j$. Portanto

$$\Xi^\alpha_{ij} = -dz^\alpha_j \wedge \psi^\alpha_i = -\sum_\ell A^{j\ell}_{\alpha\beta}\, dz^\beta_\ell \wedge \sum_u B^{iu}_{\alpha\beta}\, \psi^\beta_u = \sum_{\ell,u} C^{\ell j}_{\alpha\beta}\, B^{iu}_{\alpha\beta}\, \Xi^\beta_{u\ell}.$$

Por outro lado, a entrada ij da matriz $B_{\alpha\beta}\, \Xi^\beta B^{-1}_{\alpha\beta}$ é

$$\left(B_{\alpha\beta}\, \Xi^\beta B^{-1}_{\alpha\beta}\right)_{ij} = \sum_{\ell,u} B^{iu}_{\alpha\beta}\, C^{\ell j}_{\alpha\beta}\, \Xi^\beta_{u\ell}.$$

Comparando as duas igualdades acima obtemos $\Xi^\alpha_{ij} = \left(B_{\alpha\beta}\, \Xi^\beta B^{-1}_{\alpha\beta}\right)_{ij}$ e o lema está demonstrado. □

Resumimos o feito acima da seguinte maneira: considere o fibrado $T'M \otimes L$, cujas transições são $B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$, uma vez que L tem posto 1. Então, as matrizes definidas por (11)

$$\Omega^\alpha = \Theta^\alpha + \Xi^\alpha, \tag{12}$$

onde Θ^α é a matriz de curvatura da conexão métrica em M, satisfazem

$$\Omega^\alpha = (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})\, \Omega^\beta (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})^{-1}. \tag{13}$$

9.4 Mais sobre polinômios invariantes

Recorde do capítulo 3 que um polinômio $P : M(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é invariante se

$$P(gAg^{-1}) = P(A) \qquad \forall A \in M(n,\mathbb{C}), \forall g \in GL(n,\mathbb{C}).$$

Os polinômios C_i definidos por

$$\det(tI + A) = t^n + C_1(A)t^{n-1} + \cdots + C_n(A)$$

são tais que qualquer polinômio invariante P se escreve como um polinômio nos C_i, $P(A) = \hat{P}(C_1(A), \ldots, C_n(A))$. Em particular, qualquer polinômio invariante de grau n é uma combinação linear dos seguintes:

$$P^{\nu}(A) = C_1^{\nu_1}(A) \cdots C_n^{\nu_n}(A), \tag{14}$$

onde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, $\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = n$.

Explicitamente, temos que, se $A = [a_{ij}]$, $J_r = (j_1, \ldots, j_r) \subset \{1, \ldots, n\}$ é um multiíndice de ordem r, $I_r = (i_1, \ldots, i_r)$ é uma permutação de J_r e $\delta_{J_r}^{I_r}$ é o sinal da permutação,

$$C_r(A) = \frac{1}{r!} \sum_{I_r} \delta_{J_r}^{I_r} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_r j_r}, \tag{14 bis}$$

onde a soma é sobre todas essas permutações.

Considere agora uma aplicação k-linear

$$\tilde{P} : \underbrace{M(n,\mathbb{C}) \times \cdots \times M(n,\mathbb{C})}_{k \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

simétrica, isto é, $\tilde{P}(A_1, \ldots, A_k) = \tilde{P}(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(k)})$, onde σ é uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$. $\tilde{P}$ é *invariante* se

$$\tilde{P}(A_1, \ldots, A_k) = \tilde{P}(gA_1g^{-1}, \ldots, gA_kg^{-1}) \qquad \forall g \in GL(n,\mathbb{C}).$$

Uma tal $\tilde{P}$ determina um polinômio invariante P, de grau k, por

$$P(A) = \tilde{P}(A, \ldots, A).$$

A recíproca desse fato é verdadeira, ou seja, qualquer polinômio invariante P é a restrição à diagonal de uma aplicação k-linear simétrica, invariante, $\tilde{P}$. Essa aplicação $\tilde{P}$ é determinada por P de modo único e é chamada de *polarização completa* de P.

Por exemplo, a polarização dos C_r é a seguinte: dadas uma matriz A, $n \times n$, e multiíndices $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, denote por $A_{I,J}$ o menor $[a_{ij}]_{i \in I, j \in J}$. Se $(A_1, \ldots, A_r) \in \big(M(n, \mathbb{C})\big)^r$, σ é uma permutação de r elementos e $I \subset \{1, \ldots, n\}$ é um multiíndice de ordem r, seja A_I^σ a matriz $r \times r$ cuja i-ésima coluna é a i-ésima coluna da matriz $A_{I,I}^{\sigma(i)}$. Então

$$\tilde{C}_r(A_1, \ldots, A_r) = \frac{1}{r!} \sum_\sigma \sum_{|I|=r} \det A_I^\sigma,$$

onde a soma é sobre todas as permutações de r elementos.

9.5 Localização de classes características

Considere uma seção holomorfa ξ do fibrado $T'M \otimes L$. Se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura trivializadora de ambos $T'M$ e L, tomamos, sobre cada U_α, coordenadas locais $z^\alpha = (z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ e o referencial holomorfo $\{\partial/\partial z_1^\alpha, \ldots, \partial/\partial z_n^\alpha\}$ de $T'M$. Nessas coordenadas temos que $\xi_{|U_\alpha}$ se escreve

$$\xi^\alpha = \sum_i \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}, \tag{15}$$

onde ξ_i^α é uma seção holomorfa de L, $1 \leq i \leq n$. Seja $p \in M$ um zero de ξ. Tome coordenadas em torno de p tais que $z^\alpha(p) = 0$. Expandindo ξ_i^α em série de potências, temos $\xi_i^\alpha = \sum_j a_{ij} z_j^\alpha + S_i^\alpha(z^\alpha)$, onde os termos de S_i^α têm grau ≥ 2. A parte linear de ξ^α em p é então

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} z_j^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}, \tag{16}$$

onde $a_{ij} = \dfrac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Se $p \in U_\beta$ com $z^\beta(p) = 0$ e $\alpha \neq \beta$, então ξ^β tem parte linear em p

$$\sum_i \left(\sum_j a'_{ij} z_j^\beta \right) \frac{\partial}{\partial z_i^\beta}, \tag{17}$$

onde $a'_{ij} = \dfrac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Passando das coordenadas z^β para as coordenadas z^α teremos, com as notações usadas no lema 9.3.4,

(i) $z_i^\alpha = \varphi^i_{\alpha\beta}(z_1^\beta, \ldots, z_n^\beta)$. Expandindo em série de potências temos

$$z_i^\alpha = \sum_j C^{ji}_{\alpha\beta}(p) z_j^\beta + R_i^\beta,$$

onde os termos de R_i^β têm grau ≥ 2, $B^{-1}_{\alpha\beta} = \left[C^{ij}_{\alpha\beta}\right]$ e $B_{\alpha\beta}$ são as transições de $T'M$.

(ii)
$$\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} = \sum_j B^{ij}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta}.$$

A parte linear de ξ^α se transforma em

$$\sum_i \left[\left(\sum_j \sum_\ell a_{ij} C^{\ell j}_{\alpha\beta}(p) z_\ell^\beta \right) \left(\sum_k B^{ik}_{\alpha\beta}(p) \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} \right) \right]$$
$$= \sum_{i,j,k,\ell} \left(C^{\ell j}_{\alpha\beta}(p) a_{ij} B^{ik}_{\alpha\beta}(p) \right) \frac{\partial}{\partial z_k^\beta}.$$

Portanto,

$$a'_{k\ell} = \sum_{i,j} B^{ik}_{\alpha\beta}(p) a_{ij} C^{\ell j}_{\alpha\beta}(p).$$

Mas $C^{\ell j}_{\alpha\beta} = \left(\left(B^T_{\alpha\beta} \right)^{-1} \right)_{j\ell}$ e $B^{ik}_{\alpha\beta} = \left(B^T_{\alpha\beta} \right)_{ki}$. Daí vem que

$$a'_{k\ell} = \sum_{i,j} \left(B^T_{\alpha\beta}(p) \right)_{ki} a_{ij} \left(\left(B^T_{\alpha\beta}(p) \right)^{-1} \right)_{j\ell},$$

o que acarreta

$$\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p) \right] = \left(B^T_{\alpha\beta}(p) \otimes g^T_{\alpha\beta}(p) \right) \left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p) \right] \left(B^T_{\alpha\beta}(p) \otimes g^T_{\alpha\beta}(p) \right)^{-1}.$$

Sumarizando, temos o

Lema 9.5.1 *Seja P um polinômio invariante. Então*

$$P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p)\right]\right),$$

isto é, o número $P(J\xi(p)) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) \in \mathbb{C}$ não depende das trivializações de $T'M \otimes L$, qualquer que seja $p \in M$ tal que $\xi(p) = 0$.

Vamos agora considerar as derivadas covariantes da seção ξ. A conexão métrica em $T'M \otimes L$ é dada por $\nabla = (\nabla_h \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_H)$, onde ∇_h e ∇_H são as conexões métricas de $T'M$ e de L, respectivamente. Escrevendo a matriz da conexão ∇_h na forma

$$\theta_{ij}^\alpha = \sum_k \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k^\alpha,$$

temos então

$$\begin{aligned}
&[(\nabla_h \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_H)]\left(\xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) \\
&= \nabla_H(\xi_i^\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \xi_i^\alpha \otimes \nabla_h\left(\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) \\
&= (d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \sum_j \xi_i^\alpha \theta_{ij}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \\
&= (d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \left(\sum_{j,k} \xi_i^\alpha \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k^\alpha\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla(\xi^\alpha) &= \nabla\left(\sum_i \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\right) \\
&= \sum_i \left(d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha + \sum_{j,k} \xi_j^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha i} dz_k^\alpha\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}.
\end{aligned}$$

Defina $E_k^{\alpha i}$ por

$$E_k^{\alpha i} = -\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} \xi_j^\alpha. \tag{18}$$

Exercício 3 Mostre que a coleção $\tilde{E} = \{\tilde{E}^\alpha\}$, onde

$$\tilde{E}^\alpha = -\sum_{i,k}\left(\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} + \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} + \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i}\xi_j^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \otimes dz_k^\alpha$$

define uma seção (global) de $T'M \otimes T'M^* \otimes L$.

Temos que

$$\begin{aligned} \overline{\partial} E_k^{\alpha i} &= -\xi_i^\alpha \overline{\partial}\, \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \xi_j^\alpha \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i} \\ &= -\xi_i^\alpha \psi_k^\alpha - \sum_j \xi_j^\alpha \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i}. \end{aligned} \tag{19}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Omega_{ki}^\alpha &= \Theta_{ki}^\alpha - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\ &= \overline{\partial}\theta_{ki}^\alpha - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\ &= \overline{\partial}\Big(\sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} dz_j^\alpha\Big) - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\ &= -\Big(\sum_j dz_j^\alpha \wedge \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i}\Big) - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} i(\xi^\alpha)\Omega_{ki}^\alpha &= -i(\xi^\alpha)\Big(\sum_j dz_j^\alpha \wedge \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i}\Big) - i(\xi^\alpha)(dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha) \\ &= -\sum_j \xi_j^\alpha \overline{\partial}\Gamma_{kj}^{\alpha i} - \xi_i^\alpha \psi_k^\alpha, \end{aligned} \tag{20}$$

já que $i(\xi^\alpha)d\bar{z}_\ell^\alpha = 0$, pois ξ^α é holomorfa. Comparando com (19), obtemos

$$\overline{\partial} E_k^{\alpha i} = i(\xi^\alpha)\Omega_{ki}^\alpha. \tag{21}$$

Seja P um polinômio invariante de grau $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Por (13) temos que $P(\Omega^\alpha) = P(\Omega^\beta)$. Assim sendo, a coleção $\{P(\Omega^\alpha)\}$ define uma (n,n)-forma global em M, denotada por $P(\Omega)$. Seja $\tilde{P}$ a polarização completa de P e faça

$$P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) = \binom{n}{r}\tilde{P}(\underbrace{E^\alpha,\ldots,E^\alpha}_{n-r}, \underbrace{\Omega^\alpha,\ldots,\Omega^\alpha}_{r}) \qquad 0 \le r \le n. \tag{22}$$

$P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha)$ é uma (r,r)-forma com coeficientes em $L^{n-r}_{|U_\alpha}$. Agora, (4) e (10) nos dizem que $\overline{\partial}\,\Omega^\alpha = 0$ e (21) nos dá $\overline{\partial}E^\alpha = i(\xi^\alpha)\Omega^\alpha$. Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\, P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) &= \binom{n}{r}\sum_{i=1}^{n-r} \tilde{P}(E^\alpha, \ldots, i(\xi^\alpha)\Omega^\alpha, \ldots, E^\alpha, \Omega^\alpha, \ldots, \Omega^\alpha) \\
&= i(\xi^\alpha) P_{r+1}(\Omega^\alpha, E^\alpha).
\end{aligned} \tag{23}$$

Seja ω a $(1,0)$-forma dual da seção ξ, isto é,

$$\omega^\alpha = \frac{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\bar{\xi}^\alpha_k dz^\alpha_i}{\sum_{i,k} h^\alpha_{i,k}\bar{\xi}^\alpha_k \xi^\alpha_i},$$

definida fora dos zeros de ξ. É claro que $i(\xi^\alpha)\omega^\alpha = 1$. Além disso, um cálculo simples mostra que

$$i(\xi^\alpha)\,\overline{\partial}\,\omega^\alpha = 0.$$

Faça

$$\Pi^\alpha_r = \omega^\alpha \wedge \left(\overline{\partial}\,\omega^\alpha\right)^{n-r-1} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) \qquad 1 \le r \le n-1. \tag{24}$$

Então

$$\begin{aligned}
& i(\xi^\alpha)\,\overline{\partial}\,\Pi^\alpha_r \\
&\quad = i(\xi^\alpha)\left[\left(\overline{\partial}\,\omega^\alpha\right)^{n-r} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) - \omega \wedge \left(\overline{\partial}\,\omega^\alpha\right)^{n-r-1} \wedge \overline{\partial}\, P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha)\right] \\
&\quad = \left(\overline{\partial}\,\omega^\alpha\right)^{n-r} \wedge i(\xi^\alpha) P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) - \left(\overline{\partial}\,\omega^\alpha\right)^{n-r-1} \wedge i(\xi^\alpha) P_{r+1}(\Omega^\alpha, E^\alpha).
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$i(\xi^\alpha)\left\{\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1} \Pi^\alpha_r\right] + P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha)\right\} = 0. \tag{25}$$

Note que $P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha) = P(\Omega)_{|U_\alpha}$. Agora, $\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1} \Pi^\alpha_r\right] + P(\Omega)_{|U_\alpha}$ é uma (n,n)-forma em $U_\alpha \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$ e (25) nos diz então que

$$\overline{\partial}\left[\sum_{r=0}^{n-1} \Pi^\alpha_r\right] + P(\Omega)_{|U_\alpha} = 0.$$

Por outro lado,

$$\Upsilon^\alpha = -\sum_{r=0}^{n-1} \Pi^\alpha_r \tag{26}$$

é uma $(n, n-1)$-forma e, portanto, $\overline{\partial}\Upsilon^\alpha = d\Upsilon^\alpha$. Logo, $d\Upsilon^\alpha = P(\Omega)_{|U_\alpha}$ em $U_\alpha \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$. Como, pelo exercício acima, a coleção $\{\Upsilon^\alpha\}$ define uma $(n, n-1)$-forma global Υ em $M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$, concluímos que

$$P(\Omega) = d\Upsilon \quad \text{em} \quad M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}. \tag{27}$$

Essa igualdade crucial nos diz que a (n,n)-forma $P(\Omega)$ é exata fora dos zeros de ξ e portanto

$$\left[P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right)\right] = 0 \in H^{2n}_{DR}(M \setminus \{p : \xi(p) = 0\}, \mathbb{C}).$$

Agora, Ω é dada localmente pelas matrizes $\Omega^\alpha = \Theta^\alpha + \Xi^\alpha$, invariantes por conjugação, onde Θ^α é a matriz de curvatura da conexão métrica em $T'M$ e Ξ^α é produzida a partir da matriz de curvatura da conexão métrica Φ^α em L. Assim sendo, Ω carrega informação sobre as classes de Chern de $T'M$ e de L. Vamos explorar isso. Por (14 bis) temos

$$C_r(\Omega^\alpha) = \frac{1}{r!}\sum_{I_r} \delta^{I_r}_{J_r} \Omega^\alpha_{i_1 j_1} \ldots \Omega^\alpha_{i_r j_r}.$$

Reescrevendo com o auxílio de (11) ficamos com

$$C_r(\Omega^\alpha) = \frac{1}{r!}\sum_{0\le s\le r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s}\Big\{\sum \delta^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r}\,\Theta^\alpha_{i_1 j_1}\wedge\ldots\wedge\Theta^\alpha_{i_s j_s}$$
$$\wedge\, dz^\alpha_{j_{s+1}}\wedge\psi^\alpha_{i_{s+1}}\wedge\ldots\wedge dz^\alpha_{j_r}\wedge\psi^\alpha_{i_r}\Big\},$$

onde, na segunda soma, $j_1, \ldots, j_r$ é uma permutação de $i_1, \ldots, i_r$ e a soma é sobre todos os $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Dentre essas permutações temos duas possibilidades: ou bem $j_1, \ldots, j_s$ é uma permutação de $i_1, \ldots, i_s$ e, nesse caso, $j_{s+1}, \ldots, j_r$ é uma permutação de $i_{s+1}, \ldots, i_r$, ou bem o bloco $i_1, \ldots, i_s$ não é preservado pela permutação. Nessa última situação, cada parcela da soma contém um fator da forma $\sum_{i=1}^n \Theta^\alpha_{ij}\wedge dz^\alpha_i = -\overline{\partial}\tau^\alpha_j$ (por (6)). Também temos que $\overline{\partial}\,\Theta^\alpha_{ij} = \overline{\partial}\,\psi^\alpha_i = 0$ e concluímos que, se o bloco $i_1, \ldots, i_s$ não é preservado, então todas as parcelas correspondentes estão na imagem de $\overline{\partial}$. A soma acima assume então a forma

$$C_r(\Omega^\alpha) = \frac{1}{r!}\sum_{0\le s\le r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s}\Big\{\sum \delta^{i_1,\ldots,i_s}_{j_1,\ldots,j_s}\,\Theta^\alpha_{i_1 j_1}\wedge\ldots\wedge\Theta^\alpha_{i_s j_s}$$
$$\wedge \sum \delta^{i_{s+1},\ldots,i_r}_{j_{s+1},\ldots,j_r}\, dz^\alpha_{j_{s+1}}\wedge\psi^\alpha_{i_{s+1}}\wedge\ldots\wedge dz^\alpha_{j_r}\wedge\psi^\alpha_{i_r}\Big\} + \overline{\partial}\,\Lambda^\alpha_r.$$

Por outro lado, segue de (14 bis) que

$$(\Phi^\alpha)^{r-s} = \frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!}\sum \delta^{i_{s+1},\ldots,i_r}_{j_{s+1},\ldots,j_r}\, dz^\alpha_{j_{s+1}} \wedge \psi^\alpha_{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge dz^\alpha_{j_r} \wedge \psi^\alpha_{i_r}$$

e ficamos com

$$C_r(\Omega^\alpha) = \sum_{0\le s\le r} C_s(\Theta^\alpha)\wedge(\Phi^\alpha)^{r-s} + \overline{\partial}\Lambda^\alpha_r. \tag{28}$$

Observe que, como as Λ^α_r são obtidas das formas de torção, a coleção $\{\Lambda^\alpha_r\}$ define uma forma global, Λ_r, em M.

Seja agora

$$C_r(\Theta^\alpha,\Phi^\alpha) = \sum_{0\le s\le r} C_s(\Theta^\alpha)\wedge(\Phi^\alpha)^{r-s} \qquad 1\le r\le n.$$

$C_r(\Theta^\alpha,\Phi^\alpha)$ é claramente invariante por conjugação em relação às transições de $T'M\otimes L$ e portanto, denotando por K_h e K_H as curvaturas de $T'M$ e de L, respectivamente, temos uma (r,r)-forma global em M

$$C_r(K_h,K_H) = \sum_{0\le s\le r} C_s(K_h)\wedge K_H^{r-s} \qquad 1\le r\le n.$$

Fazendo

$$C^\nu(K_h,K_H) = C_1^{\nu_1}(K_h,K_H)\wedge\ldots\wedge C_n^{\nu_n}(K_h,K_H),$$

do exemplo 9.1.3 temos que

$$\begin{aligned} H^{2|\nu|}_{DR}(M,\mathbb{C}) \ni \left[\left(\tfrac{i}{2\pi}\right)^{|\nu|} C^\nu(K_h,K_H)\right] &= c^\nu(T'M\otimes L) \\ &= c^\nu(T'M-L^*), \end{aligned} \tag{29}$$

onde denotamos $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$, $|\nu| = \nu_1+2\nu_2+\cdots+n\nu_n$, e $c^\nu(T'M-L^*)$ é o seguinte polinômio nas classes de Chern de $T'M-L^*$:

$$c^\nu(T'M-L^*) = c_1^{\nu_1}(T'M-L^*)\ldots c_n^{\nu_n}(T'M-L^*). \tag{30}$$

Invocando (28), concluímos que

$$C^\nu(\Omega) = C^\nu(K_h,K_H) + \overline{\partial}\Psi_\nu. \tag{31}$$

Portanto, se $|\nu|=n$, então Ψ_ν é uma $(n,n-1)$-forma e $\overline{\partial}\Psi_\nu = d\Psi_\nu$. Segue que

$$H^{2n}_{DR}(M,\mathbb{C}) \ni \left[\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n C^\nu(\Omega)\right] = c^\nu(T'M-L^*). \tag{32}$$

Agora, se P é um polinômio invariante de grau n, então $P(\Omega)$ é uma combinação linear dos $C^\nu(\Omega)$ e representamos isso por $P(\Omega) = S(C^\nu(\Omega))$. Logo,

$$\left[\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n P(\Omega)\right] = S(c^\nu(T'M - L^*)). \tag{33}$$

A igualdade acima elucida as terminologias *localização* e *anulação* pois, por (27), $P(\Omega)$ é exata fora dos zeros de ξ. Assim sendo, as classes características $c^\nu(T'M - L^*)$, $|\nu| = n$, se "anulam" fora dos zeros de ξ e portanto estão "localizadas" em vizinhanças desses pontos. Além do mais, segue de (31) e do teorema de Stokes que, para $|\nu| = n$,

$$\int_M C^\nu(\Omega) = \int_M (C^\nu(K_h, K_H) + d\Psi_\nu) = \int_M C^\nu(K_h, K_H). \tag{34}$$

Note que a última dessas integrais é independente das métricas hermitianas escolhidas, pois é a integral de uma classe característica de $T'M \otimes L$. Portanto, se P é um polinômio invariante de grau n, então $\int_M P(\Omega)$ independe das métricas hermitianas escolhidas.

9.6 O teorema de Baum-Bott

Seja ξ uma seção holomorfa de $T'M \otimes L$ cujos zeros são isolados. Se $p \in M$ é um tal zero, recorde do lema 9.5.1 que a matriz $J\xi(p)$ está definida, a menos de conjugação, pelas transições de $T'M \otimes L$. p é dito *não degenerado* se $\det J\xi(p) \neq 0$. Temos então o

Teorema 9.6.1 *Sejam M uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, L um fibrado holomorfo de posto 1 sobre M e ξ uma seção holomorfa de $T'M \otimes L$, cujos zeros são isolados e não degenerados. Considere as classes de Chern do fibrado virtual $T'M - L^*$:*

$$c^\nu(T'M - L^*) = c_1^{\nu_1}(T'M - L^*) \dots c_n^{\nu_n}(T'M - L^*)$$

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n), \qquad n = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n.$$

Então

$$\int_M c^\nu(T'M - L^*) = \sum_{\{p:\xi(p)=0\}} \frac{C^\nu(J\xi(p))}{\det J\xi(p)}.$$

Demonstração: Sejam $p_1, \dots, p_k$ os zeros de ξ. Escolha vizinhanças coordenadas disjuntas $B_{2\epsilon}(p_i)$ de cada um desses pontos e, em cada uma dessas vizinhanças, tome o referencial holomorfo $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$, onde $(z_1, \ldots, z_n)$ são as coordenadas locais. Seja h_i a métrica hermitiana em $B_{2\epsilon}(p_i)$ definida por

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right\rangle = \begin{cases} 1 & , \text{se } j = \ell \\ 0 & , \text{se } j \neq \ell \,. \end{cases}$$

Tome uma métrica hermitiana h_0 qualquer em $M \setminus \cup\{p_i\}$ e seja $\{\rho_0, \rho_i\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $M \setminus \cup B_\epsilon(p_i), B_{2\epsilon}(p_i)$. Defina uma métrica hermitiana em M por $h = \rho_0 h_0 + \sum \rho_i h_i$. É imediato que, para cada i, a curvatura métrica $K_h \equiv 0$ em $B_\epsilon(p_i)$. Faça o mesmo com o fibrado L, escolhendo a métrica dada por $H_i = 1$ em $B_{2\epsilon}(p_i)$ e H_0 qualquer em $M \setminus \cup\{p_i\}$. Obviamente, $K_H \equiv 0$ em $B_\epsilon(p_i)$.

Seja P um polinômio invariante de grau n. Usando (27) e Stokes

$$\int\limits_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \int\limits_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Upsilon = \sum_i \int\limits_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Upsilon. \quad (35)$$

Vamos estudar $\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -(i/2\pi)^n \Upsilon$. Em $B_\epsilon(p_i)$ temos, invocando (18) e usando $K_h = K_H = 0$, que $E^i_j = -\partial\xi_i/\partial z_j$ e que $\Theta_{ij} = 0$. Logo, $P_r(\Omega, E) = 0$ para $1 \leq r \leq n$ e

$$P_0(\Omega, E) = P(E) = (-1)^n P(J\xi) \quad \text{onde} \quad J\xi = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial z_j}\right].$$

Por (24) e (26)

$$\Upsilon = -\sum_{r=0}^{n} \Pi_r = -\Pi_0 = (-1)^{n+1} P(J\xi)\, \omega \wedge (\overline{\partial}\omega)^{n-1}. \quad (37)$$

Mas nessas coordenadas

$$\omega = \frac{\sum_i \bar{\xi}_i\, dz_i}{\sum_i \bar{\xi}_i\, \xi_i} = \frac{\langle dz, \xi\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle}$$

e então

$$\overline{\partial}\omega = -\frac{\langle dz, d\xi\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle} - \frac{\langle dz, \xi\rangle \langle \xi, d\xi\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle^2}.$$

Portanto

$$\omega \wedge (\overline{\partial}\omega)^{n-1} = \frac{\langle dz, \xi\rangle}{\langle \xi, \xi\rangle} \wedge (-1)^{n-1} \frac{\langle dz, d\xi\rangle^{n-1}}{\langle \xi, \xi\rangle^{n-1}}.$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\omega \wedge (\overline{\partial}\omega)^{n-1} &= \langle \xi, \xi \rangle^{-(n-1)} \Big\{ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \\ &\quad \wedge \sum_i (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i\, d\bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_n \Big\}. \end{aligned} \tag{38}$$

A hipótese $\det(J\xi(p_i)) \neq 0$ nos diz que

$$dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = \frac{1}{\det(J\xi)} d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n$$

e (38) se transforma em

$$\begin{aligned}\omega \wedge (\overline{\partial}\omega)^{n-1} &= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{\det(J\xi)\langle \xi, \xi \rangle^{(n-1)}} \sum_i (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i \\ &\quad d\bar{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \cdots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n. \end{aligned} \tag{39}$$

Recorde, da seção 3.4.1, o núcleo de Bochner-Martinelli B_n. O lado direito de (39) é precisamente

$$\frac{(2\pi i)^n}{\det(J\xi)} B_n.$$

(37) fica então

$$\Upsilon = (-1)^{n+1} (2\pi i)^n \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n$$

e

$$-\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Upsilon = \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n.$$

Mas então

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \Upsilon = \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n = \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}$$

e (35) assume a forma

$$\int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_i \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}.$$

Portanto,

$$\int_M P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{M\setminus\cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_i \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}. \qquad (40)$$

Segue imediatamente de (30), (33), (34) e (40) que, se $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ e $n = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n$, então

$$\int_M c^\nu(T'M - L^*) = \sum_i \frac{C^\nu(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}$$

e o teorema está demonstrado. □

9.6.1 Comentários sobre o teorema de Baum-Bott

O teorema acima apareceu inicialmente em [BB1]. Vamos discorrer um pouco sobre esse resultado. Observe que (40) nos dá

$$\int_{M\setminus\cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}.$$

Recordando sobre resíduos de Grothendieck, temos que o lema 3.4.2 fornece

$$\frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))} = \operatorname{Res}_{p_i}\left(\frac{P(J\xi)\, d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n}{\xi_1\ldots\xi_n}\right).$$

Na demonstração acima, fizemos uso essencial da *hipótese genérica* de que $\det(J\xi(p_i)) \neq 0$ para obter (39), o núcleo de Bochner-Martinelli. O resultado de [BB1] retira essa hipótese e é o seguinte:

Teorema 9.6.2 *Sejam M uma variedade complexa, compacta, de dimensão n, L um fibrado holomorfo de posto 1 sobre M e ξ uma seção holomorfa de $T'M \otimes L$, cujos zeros são isolados. Considere as classes de Chern do fibrado virtual $T'M - L^*$:*

$$c^\nu(T'M - L^*) = c_1^{\nu_1}(T'M - L^*)\ldots c_n^{\nu_n}(T'M - L^*)$$

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \qquad n = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n.$$

Então

$$\int_M c^\nu(T'M - L^*) = \sum_{\{p:\xi(p)=0\}} \operatorname{Res}_{p_i}\left(\frac{C^\nu(J\xi)\, d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n}{\xi_1\ldots\xi_n}\right).$$

Observe que ambos os teoremas, 9.6.1 e 9.6.2, são realmente resultados sobre folheações holomorfas singulares de dimensão 1. De fato, um teorema devido a J. Carrell e D. Liebermann ([CrLb]) nos diz que existem "poucos" campos holomorfos globais numa variedade compacta de Kähler. Já campos meromorfos são abundantes. Agora, um campo meromorfo é da forma $X = \xi/\zeta$, onde ξ é uma seção holomorfa de $T'M \otimes L$ e ζ, uma seção holomorfa de L. Portanto, se os zeros de ξ não interceptam os zeros de ζ, o princípio de localização nos diz que as classes de Chern de $T'M - L^*$ são calculadas em termos de X numa vizinhança de cada um dos zeros de ξ.

Por exemplo, em $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ existem muito poucos campos holomorfos globais. Sejam $\mathbb{C}^m$ um aberto afim de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ e X um campo polinomial em $\mathbb{C}^m$. X induz um campo meromorfo em $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ e, conseqüentemente, uma folheação singular de dimensão 1. Tensorizando $T'\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ com uma potência suficientemente alta $\mathbb{L}^N$, onde $\mathbb{L}$ é o fibrado hiperplano, temos que X define uma seção holomorfa global de $T'M \otimes \mathbb{L}^N$, pois cancelamos os pólos de X ao longo do hiperplano no infinito. O mesmo se aplica a $M^n \subset \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$, uma variedade projetiva lisa. O espaço de seções holomorfas de $T'M \otimes \mathbb{L}^k_{|M}$, $\Gamma(T'M \otimes \mathbb{L}^k_{|M})$, tem dimensão crescente com k. Além disso, se k é suficientemente grande, uma seção genérica $\xi \in \Gamma(T'M \otimes \mathbb{L}^k_{|M})$ tem seus zeros isolados e não degenerados.

9.7 Aplicações a folheações em espaços projetivos

Recorde do capítulo 6 a definição de folheação de dimensão 1 em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Dada uma tal folheação $\mathcal{F}$, de grau $d \geq 2$, vamos notá-la $\mathcal{F}^d$. Seu fibrado tangente é $T_{\mathcal{F}} \cong \mathbb{L}(1-d)$. Suponha que o conjunto singular de $\mathcal{F}^d$, $Sing(\mathcal{F}^d)$, seja um conjunto finito de pontos. Escolha um hiperplano em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que não é invariante por $\mathcal{F}^d$ e não contém pontos de $Sing(\mathcal{F}^d)$ e chame-o de H_∞. Em $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \backslash H_\infty$, $\mathcal{F}^d$ é dada por um campo polinomial da forma

$$X = G\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n\frac{\partial}{\partial z_n}\right) + Q_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + Q_n\frac{\partial}{\partial z_n},$$

onde $G \not\equiv 0$ é homogêneo de grau d e os Q_i são polinômios de grau $\leq d$. Suponha que $\mathcal{F}^d$ é não degenerada, ou seja, nos zeros p de X, a derivada $DX(p)$ satisfaz $\det DX(p) \neq 0$.

A primeira (e simples) conseqüência do teorema de Baum-Bott é a

Proposição 9.7.1 *O número de singularidades de $\mathcal{F}^d$ (ou o número de zeros de X) é $d^n + d^{n-1} + \cdots + d + 1$.*

Demonstração: O campo X tem um pólo de ordem $d-1$ ao longo de H_∞ e portanto induz uma seção holomorfa de $T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} \otimes \mathbb{L}(d-1)$, cujos zeros são isolados e não degenerados. O polinômio C_n, avaliado em $DX(p)$, nada mais é que

$$C_n(DX(p)) \;=\; \det DX(p).$$

Portanto

$$\#\{p : X(p)=0\} \;=\; \sum_{\{p:X(p)=0\}} \frac{C_n(DX(p))}{\det DX(p)} \;=\; \int_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}} c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} - \mathbb{L}(1-d)).$$

Agora, por 3.3.7 e por 8

$$\begin{aligned}
&c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} - \mathbb{L}(1-d)) \\
&= c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) + c_{n-1}(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}})\, c_1(\mathbb{L}(d-1)) + \cdots + c_1(\mathbb{L}(d-1))^n \\
&= c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) + (d-1)c_{n-1}(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}})\, c_1(\mathbb{L}(1)) + \cdots + (d-1)^n c_1(\mathbb{L}(1))^n \\
&= c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) + (d-1)c_{n-1}(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}})\, \mathsf{h} + \cdots + (d-1)^n \mathsf{h}^n,
\end{aligned}$$

onde h é a classe hiperplana. Por outro lado,

$$c_i(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}) \;=\; \binom{n+1}{i}\mathsf{h}^i \qquad 0 \le i \le n$$

e obtemos

$$c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} - \mathbb{L}(1-d)) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j}(d-1)^j \mathsf{h}^n.$$

Lembrando que $\int_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}} \mathsf{h}^n = 1$, ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}} c_n(T'\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}} - \mathbb{L}(1-d)) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j}(d-1)^j \int_{\mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}} \mathsf{h}^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{n-j}(d-1)^j \\
&= d^n + d^{n-1} + \cdots + d + 1.
\end{aligned}$$

□

A segunda aplicação que vamos apresentar é uma generalização da anterior.

Seja $V \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ uma hipersuperfície projetiva lisa, de grau d_o. Suponha que tenhamos uma folheação de dimensão 1 $\mathcal{F}^d$, de grau $d \geq 2$, tal que V seja invariante por $\mathcal{F}^d$, isto é, dado $p \in V$, a folha de $\mathcal{F}^d$ passando por p está inteiramente contida em V. Um fato que não demonstraremos aqui é que $Sing(\mathcal{F}^d) \cap V \neq \emptyset$ (veja [So]). Suponha que $Sing(\mathcal{F}^d) \cap V$ seja um conjunto finito de pontos $\{p_1, \ldots, p_k\}$ e considere a restrição de $\mathcal{F}^d$ a V, $i^*\mathcal{F}^d$. Essa é dada, numa vizinhança de cada ponto $p_i \in Sing(\mathcal{F}^d) \cap V$, por um campo holomorfo X_i tangente a V, com $X_i(p_i) = 0$. Exigimos então que esse campo tenha parte linear não degenerada em p_i, ou seja, $\det DX_i(p_i) \neq 0$. Com isso temos o

Teorema 9.7.2 *O número de singularidades de $\mathcal{F}^d$ em V é*

$$\#(Sing(\mathcal{F}^d) \cap V) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \left[1 + (-1)^i (d_o - 1)^{i+1}\right] d^{n-1-i}.$$

Demonstração: Escolha um hiperplano em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que seja transversal a V e não intercepte $Sing(\mathcal{F}^d) \cap V$ e chame-o de H_∞. Em $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus H_\infty$, $\mathcal{F}^d$ é dada por um campo polinomial X, cuja restrição a $V \setminus H_\infty$ induz $i^*\mathcal{F}^d_{|V \setminus H_\infty}$. O fibrado tangente de $\mathcal{F}^d$ é $\mathbb{L}(1-d)$ e portanto o fibrado tangente a $i^*\mathcal{F}^d$ é a imagem recíproca $i^*\mathbb{L}(1-d)$. Como o campo X tem um pólo de ordem $d-1$ ao longo de H_∞, a restrição de X a V induz uma seção holomorfa de $T'V \otimes \mathbb{L}(d-1)$, cujos zeros são isolados e não degenerados. Por 9.6.1 temos então

$$\#(Sing(\mathcal{F}^d) \cap V) \;=\; \sum_{\{p: X_{|V}(p)=0\}} \frac{C_{n-1}(DX_{|V}(p))}{\det DX_{|V}(p)} \;=\; \int_V c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d))$$

e nos resta calcular $\int_V c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d))$.

Por 2.3.5, o fibrado normal a V é $N_V = [V]_{|V}$ e da seqüência exata

$$0 \longrightarrow T'V \longrightarrow i^*T'\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow [V]_{|V} \longrightarrow 0$$

concluímos, usando a fórmula de Whitney (seção 3.3.1), que

$$c(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \;=\; c(V)\, c([V]_{|V}),$$

o que nos dá

$$c_i(V) = c_i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) - c_{i-1}(V)\, c_1([V]_{|V}) \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

Por 2.3.3 e 3.3.7

$$c_i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \;=\; \binom{n+1}{i} \mathsf{h}^i \quad \text{e} \quad c_1([V]_{|V}) \;=\; d_o \mathsf{h}.$$

Isso nos permite calcular indutivamente os $c_i(V)$ e obtemos

$$c_i(V) = \left[\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_o^k\right] \mathsf{h}^i \qquad 0 \leq i \leq n-1.$$

Como

$$\begin{aligned} & c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d)) \\ &\quad = c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)\, c_1(\mathbb{L}(d-1)) + \cdots + c_1(\mathbb{L}(d-1))^{n-1} \\ &\quad = c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)\, \mathsf{h}\,(d-1) + \cdots + \mathsf{h}^{n-1}(d-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

deduzimos que

$$c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d)) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_o^k\right) \mathsf{h}^{n-1}\right] (d-1)^{n-1-i}.$$

Agora, h é o dual de Poincaré de um hiperplano em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e portanto h^{n-1} é o dual de Poincaré de uma interseção de $n-1$ hiperplanos genéricos em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, ou seja, de uma reta. Como V tem codimensão 1, $\int_V \mathsf{h}^{n-1}$ conta as interseções de V com uma reta genérica em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Mas isso é precisamente d_o, o grau de V. Logo

$$\begin{aligned} & \int_V c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d)) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_o^k\right) \int_V \mathsf{h}^{n-1}\right] (d-1)^{n-1-i} \\ &\quad = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_o^{k+1}\right] (d-1)^{n-1-i} \\ &\quad = \sum_{i=0}^{n-1} \left[1 + (-1)^i (d_o - 1)^{i+1}\right] d^{n-1-i}. \end{aligned}$$

□

Observe que, tomando $d_o = 1$ no teorema 9.7.2, obtemos que uma folheação de dimensão 1 em $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, de grau d e não degenerada, possui exatamente $d^{n-1} + d^{n-2} + \cdots + d + 1$ singularidades, o que nos dá o resultado de 9.7.1.

Bibliografia

[AM] M. ATIYAH & I. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, London, 1969.

[AV] A. ARAÚJO E I. VAINSENCHER, Teoria da interseção equivariante e a fórmula de resíduos de Bott, *XVI Escola de Álgebra*, UnB, Brasília, 2000.

[BB1] P. BAUM & R. BOTT, On the zeros of meromorphic vector fields, *Essays on Topology and Related Topics*, Springer-Verlag, New York, 1970, 29-47.

[BB2] P. BAUM & R. BOTT, Singularities of holomorphic folations, *J. Diff. Geom.* **7**(1972), 279-342.

[Bo] R. BOTT, Vector fields and characteristic numbers , *Mich. Math. J.* **14** (1967), 231-244.

[BoCo] R. BOTT (notas de L. CONLON), Lectures on characteristic classes and foliations, *Lecture Notes in Mathematics* **279**, Springer-Verlag, New York (1972), 1-94.

[BoTu] R. BOTT & L. TU, *Differential forms in algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Br] M. BRUNELLA, *Birrational geometry of foliations*, First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[Br1] M. BRUNELLA, Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **30**(1997), 559-594.

[Br2] M. BRUNELLA, Some remarks on indices of holomorphic vector fields, *Publicacions Matemàtiques* **41**(1997), 527-544.

[BK] E. BRIESKORN & H. KNÖRRER, *Plane algebraic curves*, Birkhauser, Basel, 1986.

[Bun] L. BUNGART, Integration on real analytic varieties II, Stokes formula, *J. of Math. and Mech.* **15**(6) (1966), 1047-1054.

[CrLb] J. CARRELL & D. LIEBERMANN, Holomorphic vector fields and Kähler manifolds, *Inv. Math.* **21**(1973), 303-309.

[CaSo] M. D. CARNEIRO & M. G. SOARES, *Introdução à topologia de singularidades complexas*, 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

[Ch] S. S. CHERN, Meromorphic vector fields and characteristic numbers, *Selected Papers*, Springer-Verlag, New York, 1978, 435-443.

[CL] C. CAMACHO & A. LINS NETO, *Teoria geométrica das folheações*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[CLS] C. CAMACHO, A. LINS NETO & P. SAD, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, *J. Differential Geometry* **20**(1984), 143-174.

[CS] C. CAMACHO & P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Ann. of Math.* **115**(1982), 579-595.

[CS1] C. CAMACHO & P. SAD, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.

[DeRh] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, 3.ed., Hermann, Paris, 1973.

[Eis] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[GH] P. GRIFFITHS & J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[GP] V. GUILLEMIM & A. POLLACK, *Differential topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

[GSV] X. GOMEZ-MONT, J. SEADE & A. VERJOVSKY, The index of a holomorphic flow with an isolated singularity, *Math. Ann.* **291**(1991), 737-751.

[Gun] R. GUNNING, *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Wadsworth & Brooks/Cole, Belmont, 1990.

[Gun1] R. GUNNING, *Lectures on Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, 1966.

[H] I. HERSTEIN, *Topics in algebra*, John Wiley & Sons, New York, 1975.

[Her] M. E. HERRERA, Integration on a semianalytic set, *Bull. Soc. Math. France*, **94**(1966), 141-180.

[Hir] F. HIRZEBRUCH, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[KS] B. KHANEDANI & T. SUWA, First variations of holomorphic forms and some applications, *Hokkaido Mathematical Journal*, **26**(1997), 323-335.

[La] H. B. LAUFER, *Normal two-dimensional singularities*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[LN] A. LINS NETO. Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two, *Lecture Notes in Mathematics* **1345**, Springer-Verlag, New York (1988), 192-232.

[LN1] A. LINS NETO, Complex codimension one foliations leaving a compact submanifold invariant, *Pitman Research Notes in Mathematics Series* **160**; Longman Scientific and Technical, New York (1987), 295-317.

[LSc] A. LINS NETO & B. AZEVEDO SCÁRDUA, *Folheações algébricas complexas*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[MM] J. F. MATTEI & R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **13**(1980), 469-523.

[MS] J. MILNOR E J. STASHEFF, Characteristic classes, *Annals of Mathematics Studies* **76**, Princeton Univ. Press, Princeton, (1974).

[Mun] J. MUNKRES, *Topology - a first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.

[Na] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience, New York, 1962.

[Or] P. ORLIK, *The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point*, Nordic Summer School, Oslo, 1976.

[Seb] M. SEBASTIANI, Sur l'existence de sparatrices locales des feuilletages de surfaces, *An. Acad. Bras. Ci.* **69**(1997), 159-162.

[Sei] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differential equation Ady = Bdx, *Amer. J. Math.* **90**(1968), 248-269.

[Spa] E. SPANIER, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[So] M. G. SOARES, The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations, *Inv. Math.* **128**(1997), 495-500.

[St] S. STERNBERG, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[Su] T. SUWA, Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **123**(1995), 2989-2997.

[Su1] T. SUWA, *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*, Hermann, Paris, 1998.

Índice remissivo

Impresso na Gráfica do

impa

pelo Sistema Xerox / 5390