

# **Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares**



Publicações Matemáticas

**Contornos, Conjuntos Convexos e  
Autômatos Celulares**

André Toom  
UFPE

**impa**



23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2001 by André Toom  
Direitos reservados, 2001 pela Associação Instituto  
Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA  
Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger

### **23<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática**

- Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos – André Nachbin
- Cálculo Variacional e Controle Ótimo – Antonio Leitão
- Computational Methods in the Local Theory of Curves – Abramo Hefez e Marcelo Escudeiro Hernandes
- **Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares – André Toom**
- Inteiros Quadráticos e o Grupo de Classes – Antonio J. Engler e Paulo Brumatti
- Introduction to Toric Varieties – Jean-Paul Brasselet
- Introdução aos Espaços de Escala (EDPs em Processamento de Imagens) – Ralph Teixeira
- Índices de Campos Holomorfos e Aplicações – Marcio G. Soares e Rogério S. Mol
- Notes on Morse Theory – Daniel V. Tausk, Francesco Mercuri e Paolo Piccione
- One Dimensional Dynamics: the Mathematical Tools – Edson de Faria e Wellington de Melo
- Partial Regularity of Solutions of the 3-D Incompressible Navier-Stokes Equations – Hermano Frid e Mikhail Perepelitsa
- Riemannian and Submanifold Geometry – Carlos Olmos
- Simulação Perfeita para Processos Espaciais – Nancy L. Garcia
- Tópicos em Combinatória Contemporânea – Carlos Gustavo Moreira e Yoshiharu Kohayakawa
- Uma Introdução Sucinta a Algoritmos de Aproximação – Cristina G. Fernandes et al

#### **Distribuição:**

IMPA  
Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ  
e-mail: [dic@impa.br](mailto:dic@impa.br)  
<http://www.impa.br>

ISBN: 85-244-0173-7

# Conteúdo

|  |    |
|--|----|
| Prefácio .....   | 2  |
| 1. Percolação: o primeiro exemplo da transição física .... | 4  |
| 2. Autômatos celulares são semelhantes a percolação ....   | 22 |
| 3. Erodors .....   | 41 |
| 4. O problema de ergodicidade não tem solução .....        | 62 |
| 5. Uma definição geral para autômatos celulares .....      | 74 |
| Principais conceitos e notações .....                      | 88 |
| Referências .....  | 91 |

## Prefácio

O mundo em que vivemos consiste em muitas partes, as quais são cheias de riscos. É natural que alguns modelos dele tenham muitos componentes aleatórios. Sistemas matemáticos com estas propriedades possuem denominações diversas, como sistemas de partículas interativas, processos de Markov com interação local, etc. O seu estudo começou aproximadamente trinta anos atrás e agora está em grande escala. Sistemas deste tipo sempre envolvem algum "espaço" onde os componentes são colocados, alguma variável chamada "tempo" e algum conjunto de valores de cada componente, os quais podem ser contínuo ou discreto. Sobre tudo isto, temos que escolher um modo de interação entre os componentes e podemos fazer esta escolha de várias maneiras. Assim, temos várias oportunidades e a frase colorida "matéria programável" [Tof+Mar] é muito apropriada: sempre que definimos um sistema, criamos um mundo, que têm algumas características do mundo real e podemos experimentar o quanto nos agrada.

A monografia de Liggett [Liggett] contribuiu muito para o estudo de sistemas de partículas interativas em tempo contínuo. Em nosso caso o tempo é discreto - como também o espaço e o conjunto de estados de todos os componentes. Em suma, as definições básicas são conceitualmente simples, o que nos permite evitar pesadas definições e segue diretamente para problemas não-triviais e relações entre diferentes áreas da Matemática. Este curso concentra-se no uso do método de contornos, conjuntos convexos e algoritmos para o estudo de autômatos celulares.

Apesar de sua simplicidade conceitual, autômatos celulares descrevem uma gama de fenômenos interessantes. Em um autômato celular com tempo discreto e probabilidades de transição positivas, qualquer evento local pode acontecer com uma probabilidade positiva (o que não é verdade para sistemas com tempo contínuo onde só uma mudança pode acontecer a cada vez). Se, apesar disto,

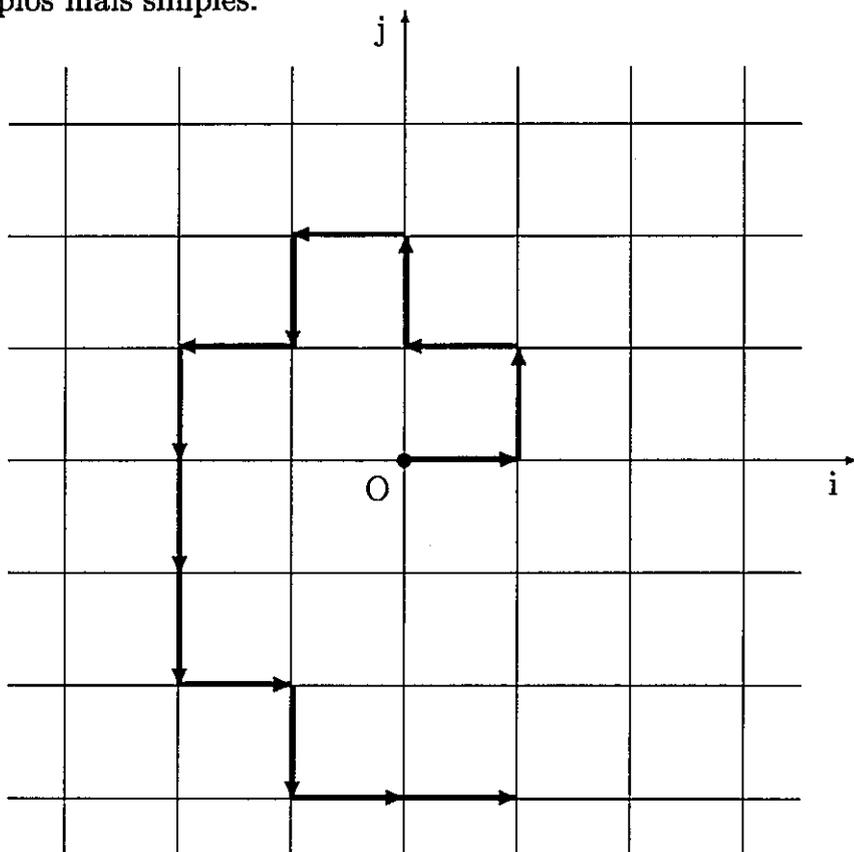
um autômato celular for não-ergódico (apresentaremos exemplos disto), é uma analogia convincente da transição fásica, as quais têm muitas formas no mundo real (congelamento, fusão, vaporização, condensação, etc.) e estão entre os fenômenos naturais mais importantes. Nós estamos especialmente interessados em valores críticos não-triviais (quer dizer, estritamente entre zero e um) de parâmetros, quando propriedades do processo em lados opostos de um valor crítico são qualitativamente diferentes, assim imitando uma transição fásica natural, onde a estrutura da substância muda qualitativamente quando a temperatura muda continuamente através do ponto de fusão ou condensação.

A intenção principal do autor é dar aos estudantes que ler este texto ou assistir ao curso, algum gosto pelo trabalho matemático rigoroso numa área conectada com várias aplicações. O presente texto consiste em 5 capítulos e todo capítulo contém pelo menos um teorema. Todos estes teoremas são provados, pelo menos para alguns casos especiais. Outras afirmações são chamados lemas ou proposições. Alguns deles também são provados, e outros, as provas são deixadas para o leitor. Para fazer o texto tão auto-suficiente quanto possível, provamos até mesmo uma afirmação clássica como o teorema de Helly, pelo menos para o caso especial que precisamos. Além de alguns teoremas clássicos, como indecisão de parada para máquinas de Turing, a maioria dos resultados aqui incluídos podem ser achados nas revisões [Discr] e [Cell], as quais nos referimos em vez de artigos originais, alguns deles difíceis achar ou ler. Nossa lista de referências é heterogênea e *ad hoc*, não tende para qualquer sistema.

Há vários problemas resolvidos e muito mais não resolvidos nesta área. Nós selecionamos alguns deles, que são mais íntimos a nossas noções, e os colocamos ao término de cada capítulo, como notas, junto com alguns exercícios para os estudantes que querem adquirir alguma experiência a mais, nesta área da Matemática.

## 1. Percolação: O primeiro exemplo da transição física

O propósito deste capítulo é introduzir as idéias da transição física, valor crítico e estimação com o método de contornos nos exemplos mais simples.



*Figura 1.1 mostra uma parte finita de um grafo infinito chamado “papel quadriculado”. As setas mostram um caminho finito que começa do  $O$ . Este caminho tem 14 passos e está auto-evitando porque nunca visita duas vezes um mesmo vértice. Geralmente, um caminho pode visitar qualquer vértice muitas vezes.*

A figura 1.1 representa um grafo infinito que nós chamamos de “papel quadriculado”. Em termos matemáticos é um grafo com



**Teorema 1.1.** Percolação de  $O$  até  $\infty$  no papel quadriculado tem um valor crítico  $\varepsilon^*$  estritamente entre zero e um, tal que :

- a) Se  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , a probabilidade da percolação é zero.<sup>1</sup>
- b) Se  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , a probabilidade de percolação é positiva.

Na realidade provaremos que

a') se  $\varepsilon$  for suficientemente pequeno, a probabilidade de percolação é zero e

b') se  $\varepsilon$  for suficientemente grande, a probabilidade de percolação é positiva.

Isto é suficiente para provar o nosso teorema. Realmente, podemos definir  $\varepsilon^*$  como sendo o supremo desses valores de  $\varepsilon$ , para o qual a probabilidade de percolação é zero. De acordo com o que será provado, concluimos que  $\varepsilon^*$  é estritamente entre zero e um. Também é fácil provar que a probabilidade de percolação é uma função não-decrescente de  $\varepsilon$ , de onde o valor crítico é único. Resta provar a') e b'). Em cada caso, nós temos que começar com algumas definições e lemas. Um caminho é chamado *auto-evitando*, se todos os vértices em sua seqüência, são diferentes. Para provar a'), nós precisamos do seguinte lema.

**Lema 1.1.** Percolação de  $O$  até  $\infty$  no papel quadriculado é equivalente a existência de um caminho aberto infinito auto-evitando, que começa da fonte  $O$ .

Em uma direção isto é evidente: se tal caminho existe, o conjunto de seus vértices é infinito e todos eles estão molhados, assim o conjunto de vértices molhados também é infinito.

Antes de discutir na direção oposta, vamos provar que para todo vértice molhado existe um caminho aberto auto-evitando de  $O$  até este vértice. Considerando que este vértice esteja molhado, então há algum caminho aberto de  $O$  até ele. Se não está auto-evitando, visita algum vértice duas vezes e dá uma volta entre estas visitas. Vamos eliminar esta volta (incluindo apenas uma destas visitas) do

---

<sup>1</sup>Se  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , a probabilidade de percolação é zero também, mas não provamos isto aqui.

nosso caminho, obtendo um caminho mais curto que aquele anterior que ainda será aberto e ainda conduzirá de  $O$  até o nosso vértice. Se ele ainda não estiver auto-evitando, nós eliminamos outra volta e repetimos este procedimento até adquirirmos um caminho sem voltas. Assim, obtemos um caminho aberto auto-evitando de  $O$  até o nosso vértice.

Agora vamos provar o lema 1.1 na direção oposta. Podemos codificar um caminho que começa do  $O$  pela seqüência de direções dos seus elos à medida que os percorremos. Por exemplo, o caminho apresentado na figura 1.1 pode ser codificado como uma seqüência de direções *leste, norte, oeste, norte, oeste, sul, oeste, sul, sul, sul, leste, sul, leste, leste*.

Suponha que o conjunto de vértices molhados seja infinito. Vamos chamar de  $S$ , o conjunto de caminhos finitos abertos auto-evitando que partem do  $O$ . Como, para qualquer vértice molhado existe um caminho que conduz até ele,  $S$  é infinito. Vamos classificar  $S$  em quatro subconjuntos dependendo da direção do primeiro elo no caminho:

$$S = S_{leste} \cup S_{norte} \cup S_{oeste} \cup S_{sul}.$$

Como a união destes quatro conjuntos é infinita, pelo menos um deles também é infinito. Seja  $S_{leste}$  (os outros casos são análogos). Então nós classificamos  $S_{leste}$  em três classes de acordo com a direção do segundo elo:

$$S_{leste} = S_{leste, leste} \cup S_{leste, norte} \cup S_{leste, sul}.$$

Mais uma vez, pelo menos um destes subconjuntos deve ser infinito. Seja, digamos,  $S_{leste, norte}$ , nós, novamente, o classificamos:

$$S_{leste, norte} = S_{leste, norte, leste} \cup S_{leste, norte, norte} \cup S_{leste, norte, oeste}$$

e novamente pelo menos um destes subconjuntos deve ser infinito. Podemos continuar indutivamente. No  $n$ -ésimo passo de nosso

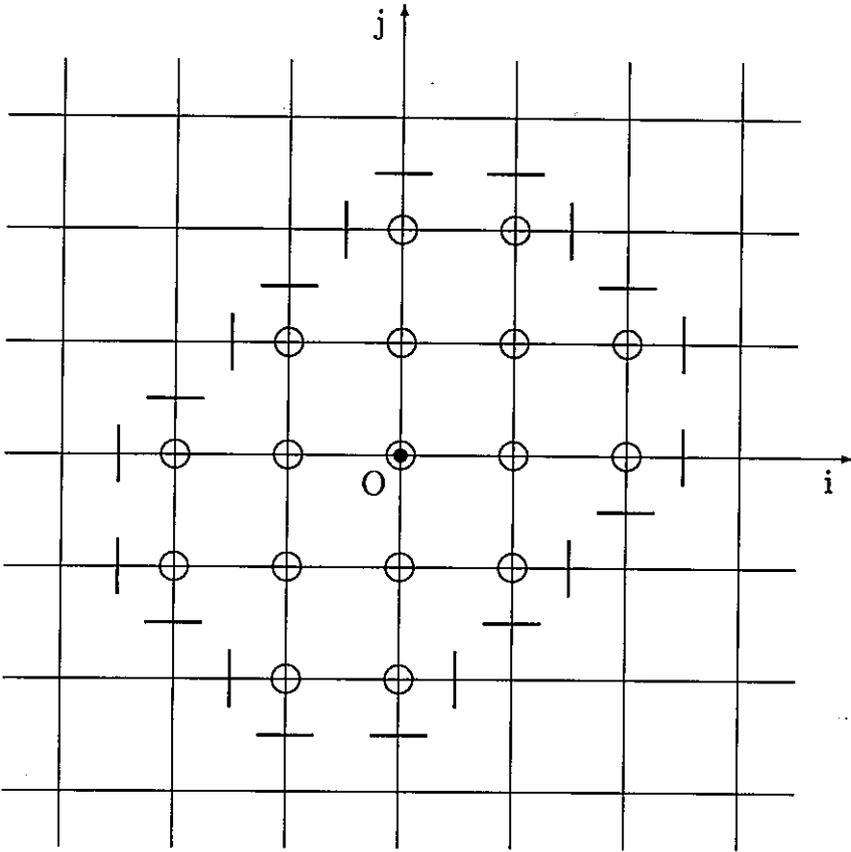
argumento indutivo, nós já temos uma seqüência de  $n$  direções tal que o conjunto de caminhos finitos abertos auto-evitando que começam com estas direções é infinito. Como podemos continuar com este argumento indefinidamente, esta seqüência cresce infinitamente, assim definindo um caminho infinito aberto, auto-evitando partindo do  $O$ . *O lema 1.1 está provado.*

Agora, vamos provar a afirmação a'). Se existe percolação, isto é, existe um caminho infinito aberto auto-evitando partindo do zero, então, pela realização dos seus  $n$  primeiros passos, nós obtemos um caminho finito aberto auto-evitando partindo do  $O$ , cujo comprimento é  $n$ . Vamos estimar a probabilidade de sua existência. Para qualquer caminho auto-evitando de comprimento  $n$  a probabilidade de estar aberto é  $\varepsilon^n$ . O número de caminhos auto-evitando de comprimento  $n$  partindo do  $O$  não excede  $4 \cdot 3^{n-1}$ . Assim, o evento "*existe um caminho aberto auto-evitando de comprimento  $n$  partindo do  $O$* " é uma união de no máximo  $4 \cdot 3^{n-1}$  eventos, sendo a probabilidade de cada um  $\varepsilon^n$ . Logo, a probabilidade deste evento não excede a soma de suas probabilidades, que é

$$4 \cdot 3^{n-1} \cdot \varepsilon^n = \frac{4}{3} \cdot (3\varepsilon)^n.$$

Se  $\varepsilon < 1/3$ , esta quantidade tende para zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas a probabilidade de percolação não é maior que esta quantidade. Então a probabilidade de percolação é zero para todo  $\varepsilon < 1/3$ .

A prova de b') é mais difícil. Quais conjuntos de elos fechados fazem percolação impossível? Chamemos tais conjuntos de *obstáculos*. É melhor falar sobre obstáculos mínimos, isto é obstáculos, onde seus subconjuntos próprios não são obstáculos. Um obstáculo mínimo é apresentado na figura 1.2. Os elos fechados são cruzados e os vértices molhados são circulados.



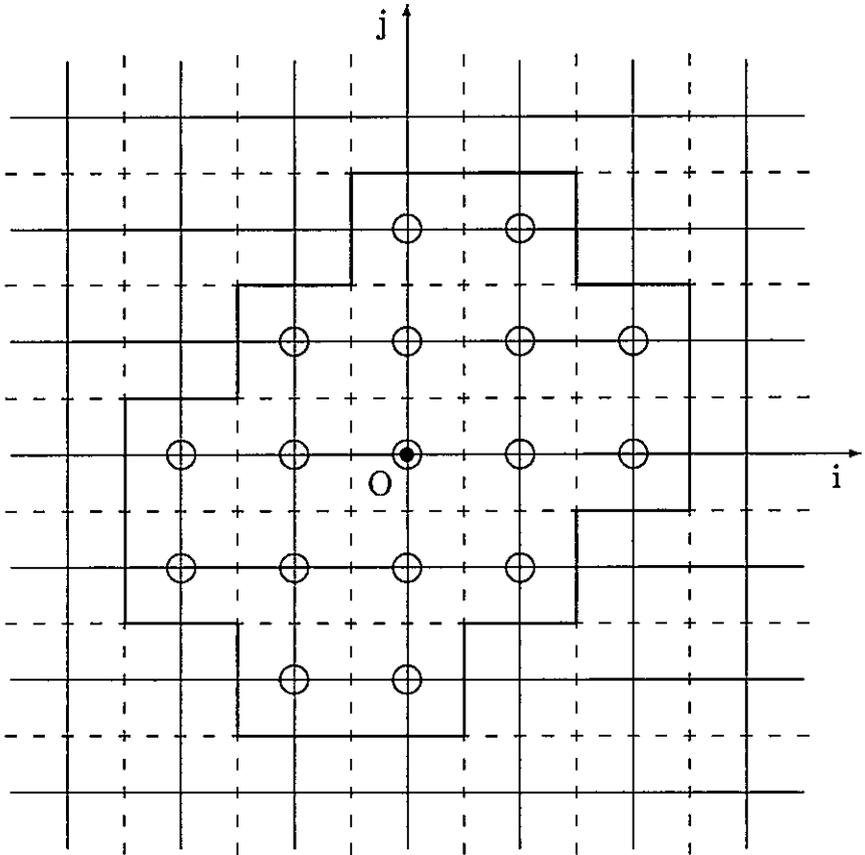
*Figura 1.2. Um obstáculo mínimo, isto é um conjunto mínimo de elos fechados que tornam a percolação impossível. Os elos fechados são cruzados, e os vértices molhados são circulados.*

Você pode ver que elos fechados na figura 1.2 formam um tipo de cerca ao redor da origem. Isto se torna ainda mais claro, quando nós fazemos as barras de cruzamento mais longas, de forma que elas formem um contorno contínuo ao redor de  $O$  como é apresentado na figura 1.3.

Esta observação pode ser transformada em uma afirmação rigorosa, mas nós temos que começar com algumas definições. Vamos delinear no mesmo plano, outro grafo que chamaremos de grafo

*dual*. Na figura 1.3 isto é apresentado através de linhas pontilhadas. Existe uma correspondência, um-à-um, entre os elos dos dois grafos, isto é todo elo do grafo dual cruza exatamente um elo do grafo original e vice-versa, com a seguinte relação entre eles:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Todo elo do grafo dual está aberto se e somente se o elo} \\ \text{correspondente do grafo original está fechado.} \end{array} \right\} \quad (1)$$



*Figura 1.3. Os cruzamentos dos elos fechados formam um contorno em torno da origem. Os vértices molhados são circulado.*

Chamamos *contorno*, um caminho auto-evitando no grafo dual, no qual os pontos inicial e final coincidem. Todo contorno divide

o plano em duas partes - uma finita e outra infinita. Dizemos que um contorno cerca um ponto, se este ponto estiver na parte finita. Dizemos que um contorno está aberto se todos os seus elos estiverem abertos.

**Lema 1.2.** Se a regra (1) for aplicada, não haverá percolação no papel quadriculado de  $O$  até  $\infty$ , se e somente se, no grafo dual há um contorno aberto cercando  $O$ .

Deixamos a prova do lema 1.2 para o leitor.

Agora, vamos provar a afirmação b'). De acordo com o lema 1.2, a probabilidade que não exista percolação no papel quadriculado é igual a probabilidade da existência de um contorno aberto cercando  $O$  no grafo dual. Esta probabilidade não excede a soma sobre todos os contornos cercando  $O$  da probabilidade que um contorno esteja aberto. Vamos estimar esta soma. Todos os contornos têm um número par de passos e então este número pode ser denotado por  $2n$ , onde  $n \geq 2$ , porque o contorno mínimo tem comprimento 4. Um contorno que tem  $2n$  passos está aberto com uma probabilidade  $(1 - \varepsilon)^{2n}$ . Assim a probabilidade de que não exista percolação não excede

$$\text{Prob}(\text{não há percolação}) \leq \sum_{n=2}^{\infty} C_n (1 - \varepsilon)^{2n},$$

onde  $C_n$  é o número de diferentes contornos tendo  $2n$  passos e cercando  $O$ . Resta estimar  $C_n$ . Para determinar um contorno que cerque  $O$  e tenha  $2n$  passos, é suficiente:

i) Especificar a coordenada  $i$  do ponto mais à esquerda da interseção do nosso contorno com a metade positiva do eixo  $i$ . Esta coordenada é igual a  $k + 1/2$ , onde  $k$  é um número inteiro entre zero e  $n - 2$ . (Por exemplo,  $k = 2$  nas figuras 1.2 e 1.3.) Assim aqui temos  $n - 1$  casos.

ii) Especificar as direções dos  $2n$  elos, a partir do que atingimos no item i) e indo no sentido anti-horário junto do contorno. A direção do primeiro elo é *norte*, a direção de qualquer outro elo

tem, no máximo, três possíveis valores, a direção do último elo é predeterminada porque o contorno tem que voltar a seu ponto inicial, assim o número de casos aqui não excede  $3^{2n-2}$ .

Então  $C_n \leq (n-1) \cdot 3^{2n-2}$  e a probabilidade de que não exista percolação não excede

$$\text{Prob}(\text{ não haver percolação } ) \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot 3^{2n-2} (1-\varepsilon)^{2n}.$$

Para  $(1-\varepsilon)$  suficientemente pequeno, esta soma é menor que um, e isto é o que nós precisamos. De fato, esta soma é igual a

$$\left( \frac{x}{3(1-x)} \right)^2 \quad \text{onde } x = (3(1-\varepsilon))^2.$$

É menor que um se

$$\varepsilon > 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.71.$$

Logo a probabilidade de percolação no papel quadriculado é zero se  $\varepsilon$  for suficientemente pequeno, e positivo se  $\varepsilon$  for suficientemente grande. Definimos o *valor crítico*  $\varepsilon^*$  como sendo o supremo desses valores de  $\varepsilon$ , para o qual a probabilidade de percolação é zero. Então

$$0 < \frac{1}{3} \leq \varepsilon^* \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1.$$

Observamos uma propriedade importante da percolação: a monotonicidade. É evidente que abrir um elo, só pode favorecer percolação, mas não impedi-la. Então a probabilidade de percolação é uma função não-decrescente de  $\varepsilon$  em todos os casos considerados neste capítulo. Conseqüentemente em cada caso só existe um valor crítico  $\varepsilon^*$ , tal que a probabilidade da percolação é zero para  $\varepsilon < \varepsilon^*$  e positiva para  $\varepsilon > \varepsilon^*$ . Se o valor crítico  $\varepsilon^*$  for igual a 0 ou 1, nós

o chamamos de trivial; se está entre  $(0, 1)$ , nós chamamos de não-trivial. Assim, provamos nossa afirmação principal: a existência de um valor crítico não-trivial.

Claro que nossa estimação do valor crítico é muito rudimentar e pode ser melhorada. De fato, no presente caso o valor crítico exato é conhecido: igual a  $1/2$ .<sup>2</sup> Porém, esta é uma exceção conectada com o fato de que com isto, o grafo dual do papel quadriculado é isomorfo com o grafo original. Grafos duais podem ser usados em vários casos, mas geralmente eles não são isomorficos com os grafos originais e os valores críticos exatos não são conhecidos; nós só podemos estimá-los.

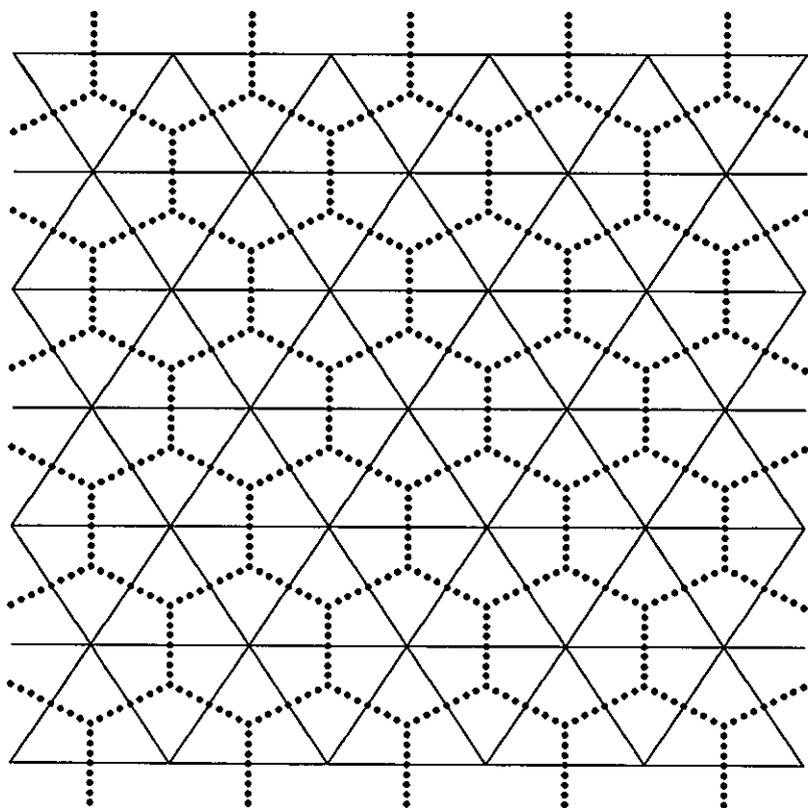
Nós formulamos o lema 1.2 apenas para o papel quadriculado, mas na realidade ele pode ser formulado em condições gerais, para qualquer *grafo planar*, isso é um grafo delineado em um plano de forma que seus elos não se cruzam. (Para o papel quadriculado os elos são segmentos diretos, mas geralmente eles podem ser encurvados.) Para todo grafo planar há um grafo dual definido como segue. Chamamos de *países* as partes em que o grafo original corta o plano. (Para o papel quadriculado os países são quadrados.) Escolhemos um ponto em cada país e chamamos de sua capital. Estas capitais são os vértices do grafo dual. (Na figura 1.3 as capitais são os centros dos quadrados.) Se dois países têm uma borda, que é um elo em comum, o elo correspondente do grafo dual conecta as capitais destes países e cruza sua borda em comum. (Na figura 1.3 estes elos são diretos, mas geralmente eles podem ser encurvados.) Chamamos de  $O$  um vértice do grafo original e assumimos que ele é a única fonte de líquido. Como antes, um vértice está molhado se o líquido puder alcançá-lo e percolação significa que o conjunto de vértices molhados é infinito.

---

<sup>2</sup>Isto foi provado por Kesten [Kesten] e a prova é bem mais difícil. O livro mais recente compreensivo sobre percolação é [Grimmett]. Um bom livro em português é [Fontes].

**Lema 1.3.** (Uma versão geral de Lema 1.2.) Se a regra (1) for aplicada, não há percolação de  $O$  até  $\infty$  em um grafo planar se e somente se em seu grafo dual há um contorno aberto cercando  $O$ .

Nós deixamos sua prova ao leitor. Um dos grafos onde esta afirmação pode provar a existência de um valor crítico não trivial é apresentado na figura 1.4.



*Figura 1.4. Linhas contínuas mostram um reticulado triangular e linhas pontilhadas mostram o grafo dual. Neste caso o grafo dual é um reticulado hexagonal.*

Outro tipo de percolação que é ainda mais importante neste curso, é a percolação orientada. Neste caso os elos são orientados e



Como antes, nós chamamos um caminho de aberto se todos seus elos estiverem abertos - na direção que os usamos - e um vértice está molhado se há um caminho aberto de  $O$  até este vértice. Percolação significa, como antes, que o conjunto de vértices molhados é infinito ou que é equivalente, que existe um caminho aberto infinito partindo do  $O$ .

**Teorema 1.2.** Percolação de  $O$  até  $\infty$  no papel quadriculado orientado tem um valor crítico  $\varepsilon^*$  estritamente entre zero e um, tal que :

- a) Se  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , a probabilidade de percolação é zero.
- b) Se  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , a probabilidade de percolação é positiva.

Como antes, é suficiente provar que a') a probabilidade de percolação é zero para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e b') a probabilidade de percolação é positiva para  $\varepsilon$  suficientemente grande.

É fácil provar a afirmação de a'). Porém, ao provar a afirmação de b') nós encontramos uma nova dificuldade: os obstáculos mínimos são mais complicados. A figura 1.6 mostra um obstáculo mínimo neste caso. Lembre-se que a nossa prova de ii) para o teorema 1.1 era baseada em dualidade. Há dualidade aqui?

Revela-se que a idéia de dualidade também funciona aqui, mas é mais complicada. Em primeiro lugar vamos formular como os estados dos elos do grafo dual dependem dos estados dos elos do grafo original. Vamos escolher alguma orientação no plano, isto é, no sentido anti-horário. Então para cada direção de um elo do grafo original existe uma direção correspondente ao elo correspondente no grafo dual: a direção da direita para a esquerda.

*Todo elo do grafo dual está aberto em uma certa direção se e somente se o elo correspondente do grafo original está fechado na direção correspondente.* } (2)

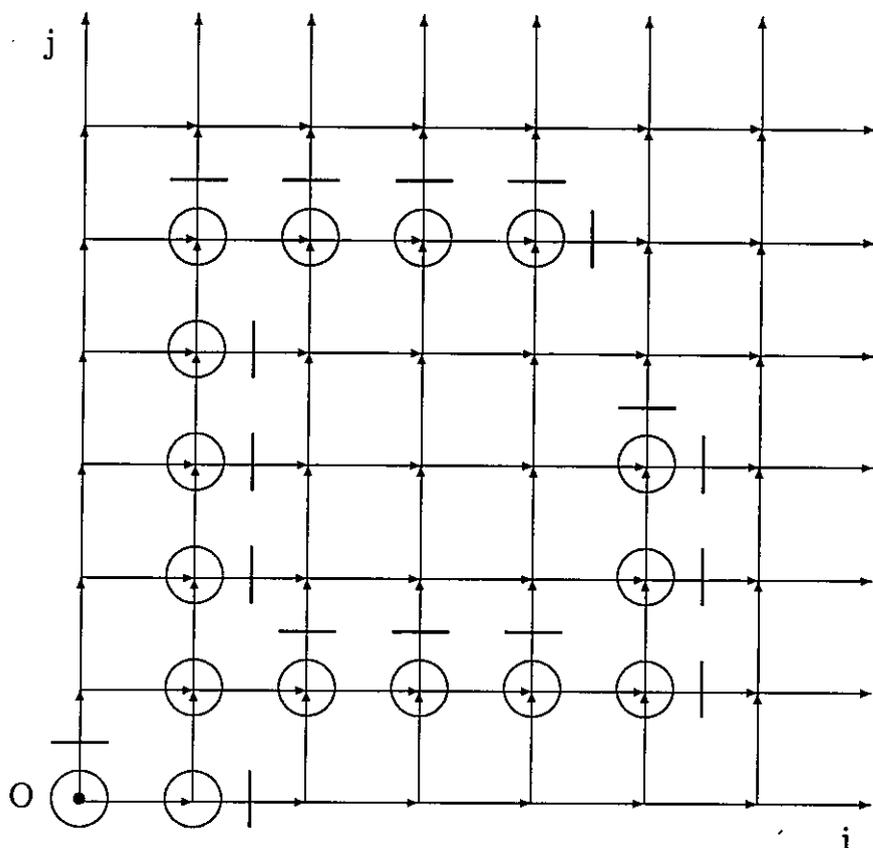


Figura 1.6. Um obstáculo mínimo no papel quadriculado orientado. Vértices molhados são circulados. Este obstáculo também pode ser apresentado como um contorno cercando  $O$ . Veja a próxima figura.

**Lema 1.4.** Se a regra (2) for aplicada, não há percolação em um grafo planar orientado de  $O$  até  $\infty$  se e somente se no grafo dual existe um contorno aberto ao redor da fonte  $O$  na direção positiva, ou seja, no sentido anti-horário.

Nós deixamos a prova do lema 1.4 ao leitor, que é ilustrado pela figura 1.7 onde um contorno é apresentado.



mínimo corresponde a um contorno no grafo dual - como é apresentado na figura 1.7. O grafo original corta o plano em muitos quadrados e um país ilimitado. Cada contorno no grafo dual começa e termina em um mesmo país, isto é no ilimitado. Denotemos  $i$  como a coordenada horizontal de seu começo e  $j$  como a coordenada vertical de seu fim. Para o contorno apresentado na figura 1.7  $i = 2$  e  $j = 1$  e geralmente  $i$  e  $j$  tomam qualquer valor inteiro positivo. Também denotemos  $l, n, o, s$  os valores de *leste, norte, oeste, sul* elos em um contorno. Note que  $o = i + l$  e  $n = j + s$ . O número de elos no obstáculo correspondente é  $n + o = i + j + l + s$ . O número total de elos no contorno é  $l + n + o + s = i + j + 2l + 2s$ . As direções do primeiro e último elos são determinadas e as direções de todos os outros são escolhidos entre no máximo três opções, assim o número de contornos com determinados  $l, n, o, s$  não excede

$$3^{l+n+o+s-2} = 3^{i+j+2l+2s-2}$$

A tabela abaixo mostra as probabilidades dos elos originais estarem abertos em todas as direções e as probabilidades dos elos duais resultando da regra (2).

| <i>Grafo original</i>                      | <i>Grafo dual</i>                              |
|--|--|
| <i>Leste</i> : aberto com prob. $\epsilon$ | <i>Norte</i> : aberto com prob. $1 - \epsilon$ |
| <i>Norte</i> : aberto com prob. $\epsilon$ | <i>Oeste</i> : aberto com prob. $1 - \epsilon$ |
| <i>Oeste</i> : sempre fechado              | <i>Sul</i> : sempre aberto                     |
| <i>Sul</i> : sempre fechado                | <i>Leste</i> : sempre aberto                   |

Denotamos  $\alpha = 1 - \epsilon$ . Então a probabilidade de um obstáculo é  $\alpha^{n+o} = \alpha^{i+j+l+s}$ , logo (3) não excede

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 3^{i+j+2l+2s-2} \alpha^{i+j+l+s} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (3\alpha)^i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (3\alpha)^j \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (9\alpha)^l \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (9\alpha)^s = \\ & \frac{1}{9} \cdot \frac{3\alpha}{1-3\alpha} \cdot \frac{3\alpha}{1-3\alpha} \cdot \frac{1}{1-9\alpha} \cdot \frac{1}{1-9\alpha} = \\ & \left( \frac{\alpha}{(1-3\alpha)(1-9\alpha)} \right)^2. \end{aligned}$$

Se  $\alpha$  for suficientemente pequeno, por exemplo menor que 0.09, esta expressão é menor que 1. Então, a probabilidade de percolação é positiva se  $\varepsilon > 1 - 0.09 = 0.91$ . Esta é só uma estimacão. O valor crítico é menor que isto; seu valor exato é desconhecido.

Há outros tipos de percolaco. Um deles é especialmente importante para nós: percolaco de um vértice para outro em um grafo planar finito orientado. O grafo dual está definido como antes com a mesma regra (2), definindo a clareza de seus elos dependente da clareza dos elos do grafo original.

**Lema 1.5.** Se a regra (2) for aplicada, não há percolaco de um vértice  $A$  para outro vértice  $B$  em um grafo planar orientado se e somente se, no grafo dual há um contorno aberto que separa  $A$  de  $B$  e passando ao redor de  $B$  na direco positiva.

Este lema será usado no próximo capítulo. Nós deixamos sua prova ao leitor.

### Notas.

1.1. *Exercício.* Prove que a probabilidade de percolaco é uma funo não-decrescente de  $\varepsilon$  para todos o casos mencionados neste capítulo.

1.2. *Exercício.* Prove a existência de valor crítico não trivial para a grade triangular apresentada na figura 1.4.

1.3. *Exercício.* Consideremos percolaco uni-dimensional onde o conjunto de vértices é  $\mathbb{Z}$  e dois vértices  $x$  e  $y$  estão conectados com um elo se  $|x - y| \leq 100$ . Como antes, suponha que 0 é a única fonte de líquido, todo elo está aberto com probabilidade

$\varepsilon$  independentemente de outros elos e percolação significa que o conjunto de vértices molhados é infinito. Prove que neste caso a probabilidade de percolação é zero para todo  $\varepsilon < 1$ . Como antes, nós podemos definir o valor crítico  $\varepsilon^*$  como sendo o supremo desses valores de  $\varepsilon$  para o qual a probabilidade de percolação é zero, mas agora é trivial:  $\varepsilon^* = 1$ . Isto sugere que haja diferença qualitativa entre casos uni-dimensionais e multi-dimensionais na percolação.

1.4. *Exercício.* O que nós descrevemos neste capítulo foi percolação de *elo* porque só elos têm condições variáveis. Outro tipo de percolação é *percolação de vértice* quando vértices podem estar abertos ou fechados. Consideremos apenas um caso que está próximo de nossos interesses: *percolação de vértice* no papel quadriculado orientado apresentado na figura 1.5. Como antes, a origem  $O$  é a única fonte de líquido, mas agora os elos estão sempre abertos nas direções das setas e sempre fechados nas direções opostas. Cada vértice está aberto com probabilidade  $\varepsilon$  e fechado com probabilidade  $1 - \varepsilon$  independentemente de outros vértices. Um caminho está definido como antes, mas agora ele está aberto se todos seus vértices estiverem abertos e todos seus elos estiverem abertos na direção usada. Como antes, um vértice é chamado molhado se houver um caminho aberto de  $O$  para este vértice e percolação significa que o conjunto dos vértices molhados é infinito. Também neste caso há um valor crítico  $\varepsilon^*$  estritamente entre zero e um, tal que :

- a) Se  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , a probabilidade de percolação é zero.
- b) Se  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , a probabilidade de percolação é positiva.

Prove isto e mostre que qualquer obstáculo mínimo pode ser representado como um contorno em algum grafo dual. Este valor crítico exato não é conhecido; podemos apenas estimá-lo.

1.5. *Problema resolvido.* Probabilidade de percolação é uma função contínua de  $\varepsilon$  em todos os casos considerados aqui [Grimmett]. É especialmente difícil provar o ponto crítico.

1.6. *Problema não resolvido.* Como definir dualidade para di-

mensões maiores que dois?

## 2. Autômatos celulares são semelhantes a percolação

Definiremos agora uma classe de autômato celular sobre a qual falaremos neste capítulo. O espaço onde estão os componentes é:  $U = \mathbb{Z}^d$ , o espaço inteiro  $d$ -dimensional. Os elementos de  $U$  são chamados pontos. Nós imaginamos que todo ponto  $i \in U$  pode ou estar vazio, ou conter uma partícula. Todas as partículas são indistinguíveis e um ponto não pode conter mais de uma partícula. Assim cada ponto só têm dois estados possíveis, os quais denotamos por 0 e 1, onde 0 significa um ponto vazio e 1 significa que existe uma partícula neste ponto. O espaço de configuração é  $\Omega = \{0, 1\}^U$ . Qualquer configuração  $x \in \Omega$  é determinada por suas componentes  $x_v \in \{0, 1\}$ ,  $v \in U$ . Para qualquer configuração  $x$  nós denotamos  $I_0(x)$  o conjunto de pontos  $v$  onde  $x_v = 0$  e  $I_1(x)$  o conjunto de pontos  $v$  onde  $x_v = 1$ . Para qualquer lista finita  $i_1, \dots, i_n \in U$  e qualquer  $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in \{0, 1\}$  existe um subconjunto de  $\Omega$  da forma

$$\{x \in \Omega : x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}\}. \quad (4)$$

Chamamos tais conjuntos de *cilindros finos*.<sup>3</sup> O conjunto  $\{i_1, \dots, i_n\}$  é chamado *suporte* deste cilindro fino. Vamos usar as seguintes operações: complementar e tomar interseção ou união (finita ou enumerável). Todos os subconjuntos de  $\Omega$  que resultam de várias aplicações destas operações para cilindros finos formam uma  $\sigma$ -álgebra (ou campo de Borel) de subconjuntos de  $\Omega$ . Chamamos estes subconjuntos de *mensuráveis* e denotamos por  $\mathcal{M}$  o conjunto das distribuições de probabilidade, i.e. medidas normalizadas nesta  $\sigma$ -álgebra. Em seguida, nós as chamamos de medidas

---

<sup>3</sup>A palavra "cilindros" é mantida para uniões finitas de cilindros finos.

em  $\Omega$  e denotamos por  $\mu$  e outras letras gregas. A palavra “normalizada” significa que  $\mu(\Omega) = 1$ ; freqüentemente isto será omitido, porque nós consideramos só medidas normalizadas. Valores de uma medida em cilindros finos devem ser consistentes no seguinte sentido: para quaisquer  $i_0, i_1, \dots, i_n$

$$\sum_{a_{i_0}} \mu(x_{i_0} = a_{i_0}, x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}) = \mu(x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}). \quad (5)$$

Preste atenção a nossa notação simplificada. Por exemplo, (5) deveria ser, formalmente falando, escrito como

$$\mu \left( \{x \in \Omega : x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}\} \right),$$

mas nós nos permitimos abreviar sempre que não causar confusão. Se uma medida for zero em pelo menos um cilindro fino, nós chamamos de *degenerada*, caso contrário será não-degenerada. Se uma medida está concentrada em uma configuração  $x$ , nós chamamos de um  $\delta$ -medida e denotamos por  $\delta(x)$ . Nós também usamos abreviações especiais

$$\delta_0 = \delta(\text{todos zeros}) \quad \text{e} \quad \delta_1 = \delta(\text{todos uns}).$$

Dizemos que uma seqüência de medidas normalizadas em  $\Omega$  converge se convergir em todos os cilindros finos.

**Lema 2.1.** Se uma seqüência de medidas normalizadas em  $\Omega$  é convergente, então ela converge para uma medida normalizada.

**Prova.** Nós só precisamos conferir que (5) é satisfeito no limite. Isto é evidente desde que a adição seja finita.

Em geral, se duas medidas coincidem em todos cilindros finos cujo suporte consiste em um elemento, estes ainda podem ser diferentes. Porém, se uma destas medidas é uma  $\delta$ -medida, as medidas, têm que coincidir. O seguinte lema diz isto e mais.

**Lema 2.2.** Dada uma configuração  $a = (a_v) \in \Omega$ .

a) Se  $\mu(x_v = a_v) = 1$  para todo  $v \in U$ , então a medida  $\mu$  é uma  $\delta$ -medida  $\delta(a)$  concentrada na configuração  $a = (a_v)$ .

b) Se há uma seqüência de medidas  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x_v = a_v) = 1 \quad \text{para todo } v \in U$$

então  $\mu_n$  tende para  $\delta(a)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

A prova é deixada ao leitor.

Agora falaremos sobre autômato celular. Todos eles são operadores lineares que atua em  $\mathcal{M}$ , assim vamos usar com freqüência a palavra “operador” em vez de uma frase mais longa “autômato celular”. A palavra “processo” significa uma seqüência de medidas  $\mu, P\mu, P^2\mu, \dots$  sendo o resultado da aplicação iterativa de um operador  $P$  para alguma medida inicial  $\mu$ . Uma medida  $\mu$  é chamada *invariante* para  $P$  se  $P\mu = \mu$ . Chamamos um operador  $P: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  *ergódico* se o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t\mu$  existe e é o mesmo para todo  $\mu$ .<sup>4</sup> Geralmente, é importante estudar ergodicidade e conjuntos de medidas invariantes de autômato celular. No último capítulo, provaremos que todo autômato celular de uma classe grande tem pelo menos uma medida invariante. Se  $P$  é ergódico, tem só uma medida invariante, mas a volta não está provada.

Operadores ergódicos correspondem a sistemas reais, os quais “esquecem” as suas condições iniciais - isto é o que nós normalmente queremos alcançar quando misturarmos uma bebida. Operadores não-ergódicos correspondem a sistemas reais que lembram parcialmente suas condições iniciais - isto é o que nós queremos alcançar quando mantivermos informações na memória do computador. A meta central deste curso é apresentar alguns exemplos de autômatos celulares ergódicos e alguns exemplos de não-ergódicos.

Vamos apresentar nossos primeiros exemplos de autômato celular. Assumimos que nossas partículas têm duas funções básicas dos

---

<sup>4</sup>Nossa definição de ergodicidade é diferente de qual é usada na teoria das sistemas dinâmicas.

seres vivos: reprodução e morte e os deixe reproduzir deterministicamente e morrer aleatoriamente. Assim nosso operador é uma superposição  $P = R_\alpha D$  que significa, que a ação de  $P$  consiste em dois passos: primeiro reprodução determinística de  $D$ , depois morte aleatória de  $R_\alpha$ , onde  $\alpha \in [0, 1]$ .

O operador  $D$  é determinístico. Isto significa que ele age em configurações:  $D : \Omega \rightarrow \Omega$ . Para definir  $D$ , nós precisamos escolher uma lista finita não-vazia de vetores  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$ , a qual nós chamamos *vetores vizinhos*. Os pontos  $v + v_1, \dots, v + v_n$  são chamado os vizinhos de  $v$ . Após a ação de  $D$  toda partícula que está em algum ponto  $v$ , gera partículas em todos os pontos  $v - v_1, \dots, v - v_n$  a menos que estes pontos estejam ocupados. Em outras palavras, haverá uma partícula no ponto  $v$  depois da aplicação de  $D$  se e somente se houver uma partícula em pelo menos um dos pontos  $v + v_1, \dots, v + v_n$  antes da sua aplicação. Em termos matemáticos,  $D$  transforma qualquer configuração  $x$  em uma configuração  $Dx$ , cuja a  $v_i$ -ésima coordenada é

$$(Dx)_v = \max(x_{v+v_1}, \dots, x_{v+v_n}) \text{ para todo } v \in \mathbb{Z}^d. \quad (6)$$

Agora definiremos  $R_\alpha$ , morte aleatória. Após a sua ação toda partícula morre (1 torna-se 0) com probabilidade  $\alpha$  independentemente do que acontece com outras partículas. Assim  $\alpha \in [0, 1]$ , chamado *taxa de mortalidade*, é o único parâmetro e mostraremos que há um valor crítico não-trivial  $\alpha^*$ . Chamamos as superposições  $P = R_\alpha D$  de “operadores de percolação”, você verá por que. Operadores de percolação são os exemplos mais simples de autômato celular apresentando o fenômeno interessante e importante da transição fásica.

Para cada  $v \in \mathbb{Z}^d$  definimos translação de espaço  $\tau_v : \Omega \rightarrow \Omega$  assim:  $(\tau_v x)_i \equiv x_{i-v}$  que induz translação de medidas também. Note que nossos operadores comutam com translações do espaço. Chamaremos tais operadores de *uniformes*. *Medidas uniformes* são invariantes após as translações de espaço. Lidando com uma me-

dida uniforme, nós podemos falar de densidade de uns ou densidade de zeros. Se um operador uniforme  $P$  for aplicado a uma medida inicial uniforme, as medidas resultantes também serão uniformes. Também, se um operador determinístico for uniforme, é suficiente especificar como o  $O$ -ésimo componente se transforma; isto determina como se transformam todos os outros. Ao longo dos capítulos 2,3,4 operadores e medidas serão uniformes.

Agora vamos observar o que acontece se  $D$  ou  $R_\alpha$  atua isoladamente, sem o outro. Nestes casos, a situação é fácil de se examinar. Se  $D$  iteragio sozinho e existiam algumas partículas espalhadas aleatoriamente no início, elas se reproduzem livremente (contanto que  $n \geq 2$ ) e como tempo (número de repetições) tende para  $\infty$ , elas enchem todo o espaço. Porém, se inicialmente não existir nenhuma partícula, isto é, se a condição inicial for "todos zeros", o processo sempre permanecerá assim. Se  $R_\alpha$  iteragio sozinho, então, qualquer que seja a condição inicial, as partículas morrem e a sua densidade tende a zero quando o tempo tende para  $\infty$ . Agora consideremos sua superposição  $P = R_\alpha D$ , que significa que a cada passo de tempo, primeiro  $D$  atua, depois  $R_\alpha$  atua. O que acontecerá com a densidade das partículas quando o tempo for para infinito?

**Teorema 2.1.** Todo operador de percolação  $P = R_\alpha D$  com  $n \geq 2$  tem um valor crítico não-trivial  $\alpha^* \in (0, 1)$  tal que quando aplicamos  $P^t$  para uma condição inicial:

- a) se  $\alpha > \alpha^*$ , as partículas morrem para qualquer condição inicial, i.e. a densidade delas tende para zero quando  $t \rightarrow \infty$ .
- b) se  $\alpha < \alpha^*$  e inicialmente todo o espaço está cheio de partículas, as partículas sobrevivem para sempre, i.e. a densidade delas não tende para zero.
- c)  $1/54 \leq \alpha^* \leq 1 - 1/n$ .

No caso a)  $P$  é ergódico, porque o processo converge para a distribuição concentrada na configuração "todos zeros" de qualquer condição inicial. No caso b)  $P$  não é ergódico porque se o processo

começa de “todos zeros”, permanece sempre nele, mas se começa de “todos uns”, não tende para “todos zeros”.

Provaremos o teorema 2.1 em uma direção: se  $\alpha$  for suficientemente grande, as partículas morrem. Note que qualquer processo de percolação pode ser representado usando a percolação orientada (isto por que os chamamos desta maneira). Consideremos o *grafo de percolação* com vértices denotados  $(v, t)$ , onde  $v \in \mathbb{Z}^d$  e  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Os elos de todo vértice  $(v, t)$  vão para os vértices  $(v - v_1, t + 1), \dots, (v - v_n, t + 1)$ . Todo elo está aberto na direção de sua orientação e fechado na direção oposta. Também assumiremos que todo vértice pode estar aberto ou fechado. Todos os vértices iniciais  $(v, 0)$  estão abertos (isto significa que a condição inicial é “todos uns”), todos os outros vértices estão fechados com probabilidade  $\alpha$  e abertos com probabilidade  $1 - \alpha$  independentemente uns dos outros. Um caminho é definido como no capítulo 1 e está aberto se todos os seus vértices estão abertos e todos os seus elos estão abertos na direção usada.

**Lema 2.3.** Em um processo de percolação iniciado em “todos uns” há uma partícula em um ponto  $v$  no tempo  $t$  se e somente se, há um caminho aberto de algum vértice inicial para o vértice  $(v, t)$  no grafo de percolação.

Deixaremos a prova do lema 2.3 ao leitor. Vamos usar isto para provar que se  $\alpha > 1 - 1/n$ , as partículas morrem. Notamos que para qualquer caminho de qualquer vértice inicial para um vértice  $(v, t)$  a probabilidade que esteja aberto é  $(1 - \alpha)^t$  e existem  $n^t$ , tais caminhos. Então a probabilidade que exista uma partícula em um certo ponto, no tempo  $t$  não excede

$$(1 - \alpha)^t \cdot n^t = ((1 - \alpha)n)^t.$$

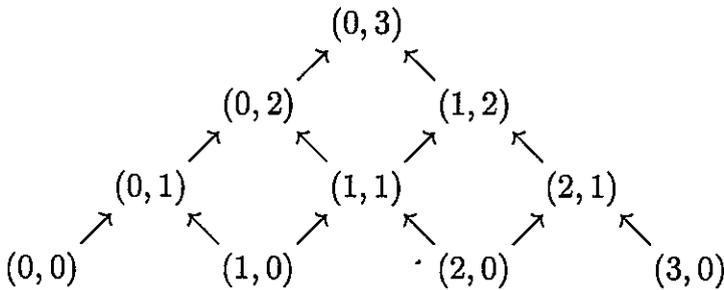
Se  $\alpha > 1 - 1/n$ , esta quantidade tende a zerar quando  $t \rightarrow \infty$ , por isso as partículas morrem. Isto prova o teorema 2.1 em uma direção. Definiremos  $\alpha^*$  como o ínfimo desses  $\alpha$ , para o qual as partículas morrem, qualquer que seja a condição inicial. Provamos

o item c):  $\alpha^* \leq 1 - 1/n$ .

Agora vamos provar o teorema 2.1 na direção oposta: se  $\alpha$  é suficientemente pequeno e inicialmente todos os pontos estavam com partículas, elas não morrem. Neste capítulo provaremos isto somente para o *operador de Stavskaya*,<sup>5</sup> que é o operador de percolação mais simples: aqui  $d = 1$  e existem só dois vetores vizinhos:  $0, 1 \in \mathbb{Z}$ . Note que a presença de uma partícula no ponto  $i$  no tempo  $t$  depende unicamente do que acontece no triângulo

$$\{(j, s) : i \leq j \leq i + t - s\}.$$

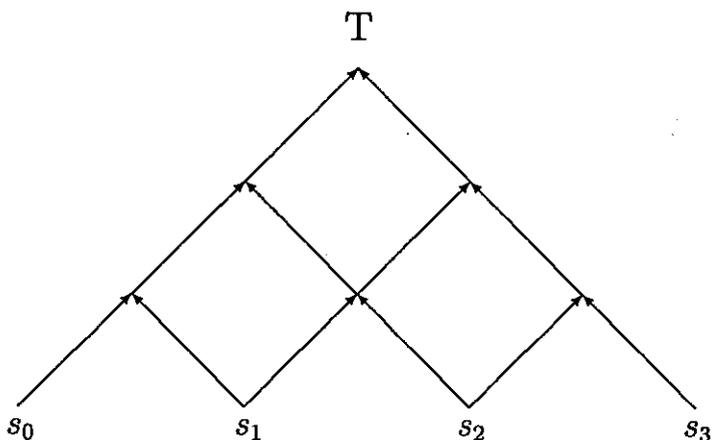
A figura 2.1 mostra este triângulo para  $i = 0$  e  $t = 3$ . (O eixo do tempo se inclina para fazer o esquema simétrico.)



*Figura 2.1. O triângulo no qual o estado do ponto 0 no tempo 3 depende do processo de Stavskaya.*

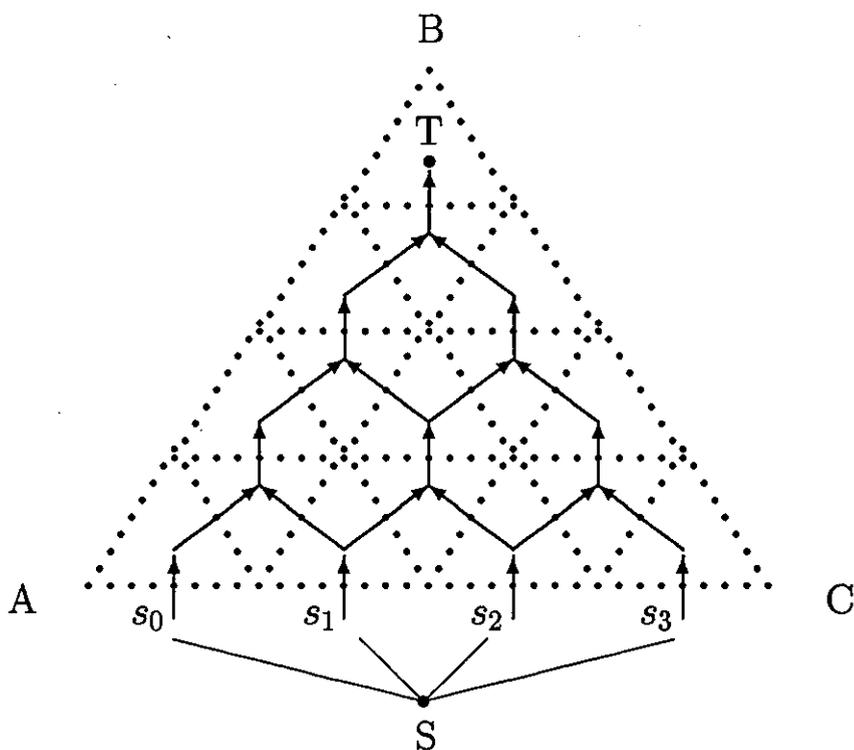
A figura 2.2 mostra parte do grafo de percolação para o processo de Stavskaya, relativo ao estado de ponto 0 no tempo 3.

<sup>5</sup>O que nós denotamos de 0 foi denotado por 1 e vice-versa em [Sta+Pia] e [Discr], porque inicialmente o operador de Stavskaya foi apresentado como um modelo de neurônios formais espontaneamente-ativos.



*Figura 2.2. Parte do grafo de percolação para o processo de Stavskaya. Os elos estão sempre abertos para cima e fechados para baixo. Os vértices  $s_0, s_1, s_2, s_3$  estão sempre abertos. Os outros vértices estão abertos com probabilidade  $1 - \alpha$  e fechados com probabilidade  $\alpha$  independentemente uns dos outros. Existe uma partícula no ponto 0 no tempo 3 se e somente se existir um caminho aberto neste grafo, de algumas das fontes  $s_i$  para o objetivo  $T$ .*

Porém, é melhor alongar cada vértice, transformando assim, percolação de vértice em percolação de elo como mostra a figura 2.3. Imaginemos que os quatro vértices denotados por  $s_0, s_1, s_2, s_3$  na figura 2.3 são fontes de líquido e que as setas são tubos orientados que podem conduzir este líquido para cima, mas não atrás. As setas inclinadas sempre estão abertas, mas as setas verticais podem estar abertas ou fechadas, porque elas imitam nosso operador aleatório: cada uma delas está fechada com probabilidade  $\alpha$  e aberta com probabilidade  $1 - \alpha$ . Então a probabilidade de que exista uma partícula no ponto 0 no tempo 3 em nosso processo é igual a probabilidade de que exista um caminho aberto de pelo menos uma das fontes  $s_0, s_1, s_2, s_3$  para o objetivo  $T$ . Assim nós reduzimos um problema sobre nosso processo aleatório para um problema sobre percolação.

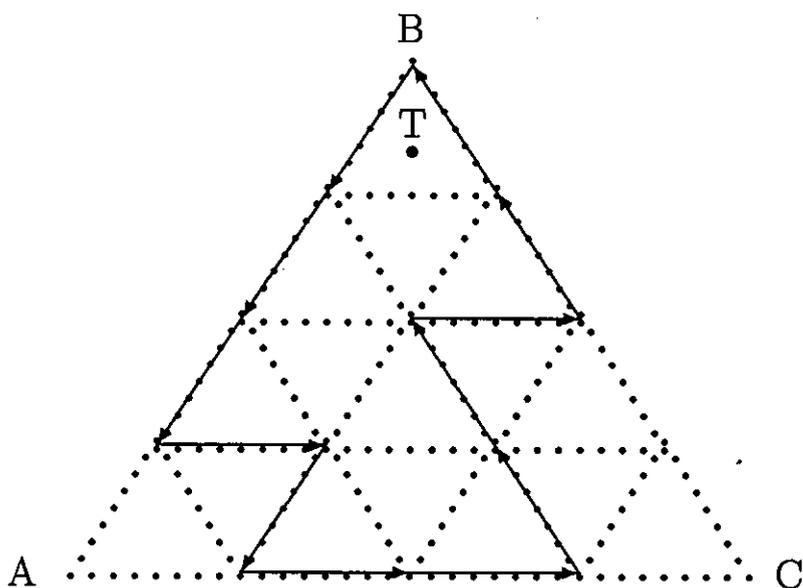


*Figura 2.3. Processo de Stavskayá como percolação de elo. A presença de uma partícula no ponto  $(0,3)$  equivale a percolação no grafo apresentado por linhas contínuas da fonte  $S$  para o objetivo  $T$ . Linhas pontilhadas mostram o grafo dual. Os lados  $AB$  e  $BC$  correspondem a um país.*

Porém, é melhor ter somente uma fonte. Por esta razão nós introduziremos um vértice especial  $S$ , conectado por elos com  $s_0, s_1, s_2, s_3$ . É conveniente assumir que estes elos sempre estão abertos em ambas as direções - então os elos duais sempre serão fechados em ambas as direções e nós nem mesmo precisaremos desenhá-las. Pela mesma razão é conveniente assumir que os elos verticais do grafo original sempre estão abertos para baixo; isto não

cria nenhuma oportunidade indesejada de percolação porque os elos inclinados sempre estão fechados para baixo. Então, de acordo com a regra (2), os elos do grafo dual (apresentado por linhas pontilhadas) estão abertos como segue: os elos direcionados  $\swarrow$  e  $\nwarrow$  estão sempre abertos nestas direções e sempre estão fechados nas direções opostas; os elos direcionados  $\rightarrow$  estão abertos nesta direção com probabilidade  $\alpha$  e sempre estão fechados na direção oposta.

Concentramos nossa atenção no grafo dual apresentado na figura 2.4.



*Figura 2.4. O grafo dual do processo de Stavskaya. Setas contínuas mostram um contorno cercando  $T$ . A existência de um contorno aberto cercando  $T$  na direção positiva equivale à ausência de partícula no ponto  $\theta$ , no tempo  $3$ , dentro do processo.*

De acordo com o lema 1.4, não há percolação no grafo original se há um contorno aberto dentro deste grafo cercando  $T$  e indo na

direção positiva (no sentido anti-horário). Nós podemos assumir que todo contorno começa e termina no ponto mais alto  $B$ . A probabilidade de que exista tal contorno não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \alpha^k, \quad (7)$$

onde  $C_k$  é o número de tais contornos correspondendo a obstáculos com  $k$  elementos, que estão tendo  $k$  passos horizontais. Todo contorno tem números de passos iguais em todas as três direções, dessa forma tem  $3k$  passos. Como cada passo de um contorno tem somente três possíveis direções,  $C_k \leq 3^{3k}$  e então a probabilidade de que exista uma partícula no local 0 num tempo qualquer não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{3k} \cdot \alpha^k = \frac{27\alpha}{1 - 27\alpha}, \quad (8)$$

que é menor que um, assim que  $\alpha < 1/54$ . Dessa forma, sempre que  $\alpha < 1/54$ , as partículas não morrem porque as suas densidades não tendem a zerar. Nós provamos que  $1/54 \leq \alpha^* \leq 1/2$  para o operador de Stavskaya.

Contudo, não provamos o teorema 2.1 para todos os operadores de percolação. Se  $n = 2$ , isto é fácil por causa do seguinte lema:

**Lema 2.4.** A densidade das partículas a qualquer hora  $t$  é a mesma para todos os operadores de percolação com  $n = 2$  se a condição inicial for "todos uns".

Prova é deixada ao leitor. A parte restante da prova do teorema 2.1 está no último capítulo.

Um jeito não rigoroso, mas frutífero, para estudar autômatos celulares, é modelagem, o qual pode apontar novas perguntas. Suponha que queremos modelar o processo de Stavskaya em um computador. O método mais habitual para se fazer isto é o de Monte Carlo, i.e. uma imitação deste processo. O seguinte pseudocódigo mostra como fazer isto:

```

1 para todo  $i \in \mathbb{Z}_m$  faça
2    $x_{i,0} \leftarrow 1$ 
3 para  $t = 1$  até  $t_{max}$  faça
4   para todo  $i \in \mathbb{Z}_m$  faça
5      $x_{i,t} \leftarrow \max(x_{i,t-1}, x_{i+1,t-1})$ 
6     se  $rnd < \alpha$  então  $x_{i,t} \leftarrow 0$ 

```

As linhas são enumeradas para propósito de referência. O espaço é o conjunto  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  de resíduos modulo  $m$ .<sup>6</sup> O sinal  $\leftarrow$  na linha 2 é o operador de atribuição;  $x \leftarrow a$  significa que a variável  $x$  é atribuído o valor  $a$ . Assim, as linhas 1-2 designam a configuração inicial “todos uns”. As linhas 4-6 executam um passo de tempo, a saber a linha 5 corresponde ao operador determinístico e a linha 6 corresponde ao operador aleatório. Ela usa um número aleatório  $rnd$  que é distribuído uniformemente entre 0 e 1, recém gerado toda vez que é chamado e é independente de todos os números aleatórios prévios.

Claro que, em simulação de computador o espaço tem que ser finito e o tempo cresce só até um valor  $t_{max}$  quando o cálculo para. Porém, em nossa imaginação o espaço e o intervalo de tempo podem ser infinitos:

```

1 para todo  $i \in \mathbb{Z}$  faça
2    $x_{i,0} \leftarrow 1$ 
3 para  $t = 1$  até  $\infty$  faça
4   para todo  $i \in \mathbb{Z}$  faça
5      $x_{i,t} \leftarrow \max(x_{i,t-1}, x_{i+1,t-1})$ 
6     se  $rnd < \alpha$  então  $x_{i,t} \leftarrow 0$ 

```

Este pseudo-código é semelhante ao anterior, só que o espaço é  $\mathbb{Z}$  e o intervalo de tempo vai de 1 até  $\infty$ . Ele não pode ser usado

---

<sup>6</sup>Operações com resíduos módulo  $m$  resulta em resíduos modulo  $m$ , em particular  $(m-1) + 1 = 0$ .

para programação prática, porque a memória do computador e o tempo sempre são finitos, mas nós usaremos pseudo-códigos deste tipo para definir alguns processos.

Em termos matemáticos, o processo de Stavskaya é *induzido* através de variáveis aleatórias independentes  $r(i, t)$ , cada uma delas igual a 0 com probabilidade  $\alpha$  e a 1 com probabilidade  $1 - \alpha$ , pela aplicação definida no seguinte modo indutivo:

*Base de indução* :  $x(i, 0) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

*Passo de indução* :

$$x(i, t) = r(i, t) \cdot \max \left( x(i, t-1), x(i+1, t-1) \right).$$

O processo de Stavskaya foi modelado em computador várias vezes e os resultados observados sempre concordam com a teoria: se  $\alpha$  fosse pequeno, as partículas sobreviviam, se  $\alpha$  fosse grande, elas morriam. Mas parece haver uma contradição aqui, porque é fácil provar que para qualquer processo finito, as partículas desaparecem totalmente em tempo médio finito para qualquer  $\alpha > 0$ . Provar isto é fácil, é suficiente notar que todas as partículas podem morrer imediatamente com uma probabilidade  $\alpha^m$  ou até maior. Conseqüentemente a expectativa de tempo quando todas as partículas morrem não é maior que  $\alpha^{-m}$ . Pôr que isto não foi observado em experimentos computacionais? Pois o número  $\alpha^{-m}$  é enorme até mesmo para valores bem moderados de  $\alpha$  e  $m$ , muito maior do que o tempo que nós podemos dispor no experimento. O que observamos no experimento não é distinção entre ergodicidade e não-ergodicidade que acontecem em processos infinitos, mas distinção entre convergência rápida e lenta que acontece em processos finitos. Esta distinção pode ser formulada como segue.

**Teorema 2.2.** No processo finito de Stavskaya com espaço  $\mathbb{Z}_m$  e condição inicial "todos uns":

a) Se  $\alpha$  é suficientemente pequeno, a esperança matemática de tempo, quando todas as partículas morrem, cresce como uma exponencial de  $m$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

b) Se  $\alpha$  é suficientemente grande, a esperança matemática de tempo, quando todas as partículas morrem, cresce como um logaritmo de  $m$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

Este teorema pode ser provado usando as mesmas idéias do teorema 2.1. Assim para processos finitos também há algum tipo da transição fásica. Veja abaixo um problema não resolvido nesta conexão.

O próximo teorema nos proporciona um rico suplemento de operadores ergódicos. Desta vez usaremos uma classe mais geral de operadores determinísticos. Para definir um operador determinístico  $D$ , nós tomamos uma lista não-vazia finita de vetores  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$  e uma função de Boole  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ . Então  $D$  está definido como segue:

$$(Dx)_v = f(x_{v+v_1}, \dots, x_{v+v_n}) \text{ para todo } v \in \mathbb{Z}^d. \quad (9)$$

Nós também usaremos um operador aleatório  $R_\alpha^\beta$ , o qual torna todo 1 em 0 com probabilidade  $\alpha$  e torna todo 0 em 1 com probabilidade  $\beta$  e faz todas estas mudanças independentemente um do outro. Claro que  $R_\alpha = R_\alpha^0$ , assim este operador é uma generalização de  $R_\alpha$ .

**Teorema 2.3.** Seja  $D$  definido por (9) e

$$1 - \frac{1}{n} < \alpha + \beta \leq 1.$$

Então o operador  $R_\alpha^\beta D$  é ergódico.

A principal noção que usamos para provar este teorema é o *acoplamento* de vários processos, que é um processo em um espaço que é um produto dos seus espaços, cuja as marginais são processos dados.<sup>7</sup> No presente caso nós usamos uma junção de três processos: dois processos gerados por nosso operador  $R_\alpha^\beta D$  com diferentes condições iniciais e um processo de percolação. Este acoplamento

---

<sup>7</sup>Veja mais sobre acoplamento em [Fer+Gal].

está definido pelo seguinte pseudo-código, onde  $x(v, t)$ ,  $y(v, t)$  e  $m(v, t)$  significam componentes de três marginais no ponto  $v$  no tempo  $t$ :

```

1 para todo  $v \in \mathbb{Z}^d$  faça
2    $x(v, 0) \leftarrow x_{inicial}(v, 0)$ 
3    $y(v, 0) \leftarrow y_{inicial}(v, 0)$ 
4    $m(v, 0) \leftarrow 1$ 
5 para  $t = 1$  até  $\infty$  faça
6   para todo  $v \in \mathbb{Z}^d$  faça
7      $x(v, t) \leftarrow f(x(v + v_1, t - 1), \dots, x(v + v_n, t - 1))$ 
8      $y(v, t) \leftarrow f(y(v + v_1, t - 1), \dots, y(v + v_n, t - 1))$ 
9      $m(v, t) \leftarrow \max(m(v + v_1, t - 1), \dots, m(v + v_n, t - 1))$ 
10     $r \leftarrow rnd$ 
11    se  $r < \alpha$  então
12       $x(v, t) \leftarrow 0$ 
13       $y(v, t) \leftarrow 0$ 
14       $m(v, t) \leftarrow 0$ 
15    se  $r > 1 - \beta$  então
16       $x(v, t) \leftarrow 1$ 
17       $y(v, t) \leftarrow 1$ 
18       $m(v, t) \leftarrow 0$ 

```

Inicialmente vamos ignorar todas as linhas deste pseudo-código que lide com os valores  $m(v, t)$  e concentrar nossa atenção nas transações com  $x(v, t)$  e  $y(v, t)$ . Eles descrevem dois processos com o mesmo operador  $R_\alpha^\beta D$  e condições iniciais arbitrárias diferentes fixadas nas linhas 1-3. Estes processos funcionam simultaneamente, usando uma fonte comum de ruído aleatório. Em ambos os processos cada componente faz o seguinte a cada vez: primeiro, devido as linhas 7 e 8, assume um valor, que depende dos estados dos seus vizinhos um passo de tempo anterior, imitando  $D$ , e segundo, devido as linhas 10-17 faz uma mudança aleatória, tornando-se 0 com probabilidade  $\alpha$  e tornando-se 1 com probabilidade  $\beta$ , imi-

tando  $R_\alpha^\beta$ . Chamemos um ponto  $(v, t)$  um *ponto de diferença* se  $x(v, t) \neq y(v, t)$ .

**Lema 2.5.** Suponha que pontos de diferença num acoplamento definido por este pseudo-código morrem uniformemente em  $v$  e condição inicial. Noutras palavras, suponha que exista uma seqüência  $p_t$ , que tende para 0 quando  $t \rightarrow \infty$ , tal que para qualquer  $v$  e qualquer condição inicial a probabilidade de que  $x(v, t) \neq y(v, t)$  não excede  $p_t$ . Então o operador  $P = R_\alpha^\beta D$  é ergódico.

Provaremos este lema no último capítulo. Agora vamos checar que pontos de diferença realmente morrem uniformemente. Para monitorar o que acontece com os pontos de diferença, nós temos *marcas* especiais  $m(v, t)$  que podem ser iguais a 0 ou 1. Chamemos um ponto  $(v, t)$  *marcado* se  $m(v, t) = 1$  e sem marca caso contrário. A interação é organizada de tal modo que  $m(v, t) = 1$  em cada ponto de diferença:

$$\forall v, t : x(v, t) \neq y(v, t) \Rightarrow m(v, t) = 1.$$

(A implicação oposta pode ser falsa, pois  $m(v, t)$  pode igual a 1 em outros pontos também.) Inicialmente todos os pontos são marcados (isto é seguro, porque inicialmente todos os pontos podem ser pontos de diferença) e só ficam sem marcas quando as linhas 12-13 ou 16-17 especificam valores iguais para  $x(v, t)$  e  $y(v, t)$ . Note que o processo de marca é um processo de percolação com taxa de mortalidade  $\alpha + \beta$ . Então, do item c) do teorema 2.1, os pontos marcados morrem sempre que

$$1 - \frac{1}{n} < \alpha + \beta \leq 1.$$

O Teorema 2.3 está provado, menos o lema 2.5.

### Notas.

2.1. *Exercício.* Prove que todos os operadores de percolação com o número de vizinhos  $n = 1$  é ergódico para todo  $\alpha$  positivo.

2.2. *Exercício.* Prove que a densidade das partículas em qualquer tempo  $t$  no processo de Stavskaya é uma função não-crescente de  $\alpha$ .

2.3. *Exercício.* Vamos tomar um operador de percolação  $P$ , aplicar  $t$  tempos para a configuração inicial que contém somente uma partícula e denotar  $p_{extinto}(t)$  a probabilidade de que depois de  $t$  passos não exista mais nenhuma partícula. Também vamos aplicar  $P$  para a condição inicial “todo o espaço está cheio de partículas” e denotar  $p_{vazio}(t)$  como sendo a probabilidade de que o 0-ésimo ponto esteja vazio depois de  $t$  passos. Prove que  $p_{extinto}(t) = p_{vazio}(t)$ .

2.4. *Exercício.* Prove que se a série (7) converge, o operador de Stavskaya é não-ergódico e use isto para provar que  $\alpha^* \geq 1/27$ .

2.5. *Problema resolvido.* Note que um operador linear que age em  $\mathcal{M}$  não pode ter exatamente duas medidas invariantes: assim que duas medidas diferentes  $\mu$  e  $\nu$  forem invariantes, todas as suas combinações lineares  $k\mu + (1-k)\nu$  para  $0 < k < 1$  também serão. Assim, quando nós estudamos o conjunto de medidas invariantes de um operador, deveríamos nos perguntar, quantas medidas invariantes linearmente independente existem. Em particular, é provado que o operador de Stavskaya  $P$  tem no máximo duas medidas invariantes linearmente independentes: uma é  $\delta_1$ , a outra é o limite de  $P^t \delta_0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Estas duas medidas coincidem se  $\alpha \geq \alpha^*$  e são diferentes se  $\alpha < \alpha^*$ .

2.6. *Problema resolvido.* Vamos mudar a lei de reprodução no processo de Stavskaya como segue: toda partícula, além de si mesmo, ou produz ao acaso uma partícula nova em seu lado esquerdo ou em seu lado direito (sempre que este lugar estiver vazio). Foi provado que o teorema 2.1 também é verdadeiro neste caso. (Segue da teoria de operadores de passeios aleatórios [Discr].)

2.7. *Problema resolvido.* Vamos renomear zeros em uns e vice-versa no processo de Stavskaya e mudar nossa interpretação do oposto: agora o operador determinístico é a morte de uma partícula

e o operador aleatório é o nascimento de uma partícula e suponhamos possível um ponto conter muitas partículas.

A configuração inicial é “todos zeros” e a cada unidade de tempo dois operadores agem: primeiro o determinístico  $D$ , depois o aleatório  $R_\alpha$ . Sob a ação de  $D$  todo componente vai ao estado que é o mínimo entre seu estado e o estado de seu vizinho direito.

Sob a ação de  $R_\alpha$ , todo componente aumenta seu estado de um com probabilidade  $\alpha$  e mantém no mesmo estado com probabilidade  $1 - \alpha$  independentemente do que acontece com outros componentes. Também neste caso há um valor crítico  $\alpha_{\text{crescimento}}^*$  tal que :

a) se  $\alpha < \alpha_{\text{crescimento}}^*$ , a esperança matemática do estado de um componente tende a um limite finito quando  $t \rightarrow \infty$ .

b) se  $\alpha > \alpha_{\text{crescimento}}^*$ , a esperança matemática do estado de componente tende a  $\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Este é um caso especial de um teorema mais geral provado em [T-94]. Entretanto, você pode prová-lo sem consultá-lo, fazendo uso das idéias do nosso capítulo 2.

*Problema não resolvido:* Os valores críticos do operador de Stavskaya e do operador de crescimento de Stavskaya são iguais?

2.8. *Problema não resolvido.* Defina dois valores críticos para os operadores finitos de Stavskaya:  $\alpha_{\text{exp}}^*$  o supremo de  $\alpha$  como o item a) do teorema 2.2 e  $\alpha_{\text{log}}^*$  o ínfimo desses  $\alpha$  como o item b) do teorema 2.2. É evidente que  $\alpha_{\text{exp}}^* \leq \alpha_{\text{log}}^*$  e está provado que  $\alpha^* \leq \alpha_{\text{log}}^*$ , mas não se sabe se estas três quantidades são iguais. Veja melhor em [Discr], pág. 83 e [Cell], pág. 140.

2.9. *Problema não resolvido.* Operador de Vasilyev é semelhante ao operador de Stavskaya, mas não é monótono (monotonicidade será introduzida no último capítulo), o que dificulta muito o estudo. Sua propriedade mais interessante é a existência de um valor crítico, não está provada, embora seja fortemente sugerida por simulação de computador. Este operador também é uma superposição de dois operadores: um determinístico e outro aleatório. Operador

*determinístico*  $D$  está definido por  $(Dx)_i = x_i \oplus x_{i+1}$ , onde a operação binária  $\oplus$  é soma modulo 2, definido como segue:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

O operador aleatório  $R_\alpha$  é igual ao Stavskaya: transforma 1 em 0 com probabilidade  $\alpha$  independentemente de quaisquer eventos passados ou presentes. É claro que, se começamos à configuração em “todos zeros”, o processo permanece assim e se começamos com “todos uns”, vai imediatamente para “todos zeros”. Porém, simulações de computador sugerem que se  $\alpha$  é suficientemente pequeno e nós começamos com uma configuração caótica onde densidades de zeros e de uns são iguais, o processo permanece caótico, o que sugere que o operador tem uma distribuição caótica invariante que tende ao caos completo quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Por “caos completo” nos referimos a uma medida produto que é uma distribuição na qual todos os componentes são independentes e iguais a zero ou um com probabilidades iguais. Se  $\alpha = 0$ , o “caos completo” realmente é invariante para este operador.

2.10. *Problema não resolvido.* Para qualquer número  $2k + 1$  de argumentos podemos definir uma função *maioria*( $\cdot$ ) de  $2k + 1$  argumentos, como segue: igual a 1 se pelo menos  $k + 1$  de seus argumentos são uns e zero caso contrário. Considere o operador unidimensional  $R_\alpha^\beta D_{\text{maioria}}$  com  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$ , onde  $D_{\text{maioria}}$  é definida por

$$(D_{\text{maioria}} x)_i = \text{maioria}(x_{i-k}, \dots, x_{i+k}).$$

Segue do teorema 2.3 que este operador é ergódico assim que

$$1 - \frac{1}{2k + 1} < \alpha + \beta \leq 1.$$

Simulações de computador e outras considerações sugerem que este operador seja ergódico sempre que  $0 < \alpha, \beta < 1$ , contudo isto

não está provado nem mesmo para  $k = 1$ . O único resultado rigoroso nesta direção é a prova de uma afirmação análoga no tempo contínuo só para  $k = 1$  [Gray].

### 3. Eroders

O Teorema 2.3 nos proporciona vários autômatos celulares ergódicos. Grosseiramente falando, um autômato celular é ergódico se as interações entre suas componentes são bastante fracas. O que sabemos sobre autômatos celulares não-ergódicos? Temos alguns exemplos deles, a saber operadores de percolação com baixo índice de mortalidade, mas todos eles são degenerados. A meta deste capítulo é apresentar exemplos de autômatos celulares não-ergódicos e não-degenerados no mesmo tempo.

A configuração  $x$  é dita *invariante* para um operador determinístico  $D$  se  $Dx = x$ . Chamamos uma configuração  $y$  um *desvio finito* da configuração  $x$  se o conjunto de pontos  $v$  onde  $x_v \neq y_v$  é finito. Vamos chamar  $D$  um  $x$ -eroder se  $x$  é invariante para  $D$  e para qualquer desvio finito  $y$  de  $x$  existe  $t$  tal que  $D^t y = x$ . Noutras palavras,  $D$  é um  $x$ -eroder se ele “eroda” qualquer desvio finito de  $x$  num tempo finito. Esta noção está conectada com a idéia de estabilidade. Se  $D$  é um  $x$ -eroder,  $x$  é semelhante a um equilíbrio estável que observamos em sistemas naturais. Também, há outra razão para estudar eroders: eles são conectados com transições fásicas como mostra o próximo teorema.

Infelizmente, o problema geral de discernir eroders e não eroders é algoritmicamente insolúvel, assim, se queremos obter resultados positivos sobre eles, temos que reduzir nossas pretensões. Vamos nos restringir ao caso  $\Omega = \{0, 1\}^U$ , onde  $U = \mathbb{Z}^d$ , e reduzir nosso interesse a  $x$ -eroders em apenas dois casos:  $x =$  “todos zeros” e  $x =$  “todos uns”; chamamos de 0-eroders e 1-eroders respectivamente. Mais ainda, vamos considerar apenas operadores uniformes. Isto significa que escolhemos uma lista finita de vetores

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^d$  e uma função de Boole  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  e definimos  $D$  como na fórmula (9) da página 35.

Porém, até mesmo depois destas restrições o problema de eroders permanece insolúvel, até mesmo para o caso  $d = 1$ . Dessa forma precisamos de uma suposição adicional. Suponha que  $D$  é *monótono*, o que indica que a função  $f(\cdot)$  é monotóna, isto é

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n \implies f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n).$$

Para este caso podemos apresentar um critério de eroders e existência de pontos críticos, até mesmo em dimensão arbitrária. Por conveniência assumimos que a função  $f(\cdot)$  não é constante. Pois  $f(\cdot)$  é monotóna, exclui apenas dois casos fáceis:  $f(\cdot) \equiv 0$  e  $f(\cdot) \equiv 1$ . Vamos denotar por  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  o conjunto de vetores vizinhos. Chamamos um subconjunto  $S$  de  $V$  um *zero-conjunto* se

$$(\forall i \in S : x_i = 0) \implies f(x_V) = 0,$$

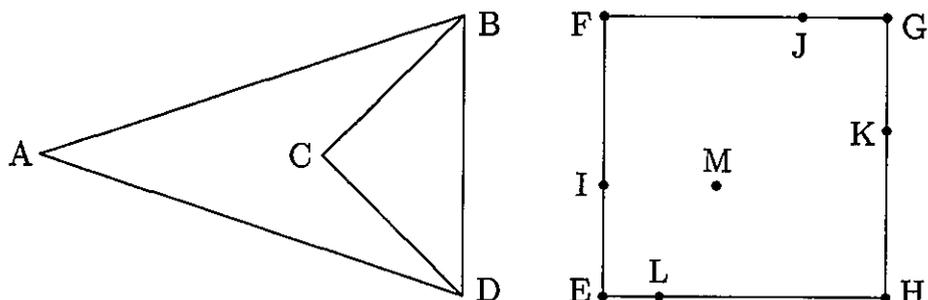
onde  $x_V$  significa  $x_{v_1}, \dots, x_{v_n}$ . Chamamos um zero-conjunto mínimo se todos seus subconjuntos próprios não são zero-conjuntos. Se  $V$  for finito, o conjunto de seus subconjuntos também é finito, de onde o conjunto de zero-conjuntos mínimos também é finito e podemos denotá-los por  $z_1, \dots, z_n$ . Como  $f(\cdot)$  é monotóna e não constante, pode ser representada por

$$f(x_V) = \min_{i=1, \dots, n} \max (x_v, v \in z_i).$$

Chamaremos isto de representação min-max. Note que  $f(x_V) = 0$  se e só se  $x_V$  tem zeros em todos os pontos de pelo menos um zero-conjunto mínimo.

Embora o espaço de nossos operadores seja discreto, precisamos falar sobre espaço contínuo. Um conjunto num espaço linear é dito *convexo* se para quaisquer dois pontos neste conjunto o segmento com extremos nestes pontos está completamente contido neste conjunto. Dado um conjunto  $S$  num plano, seu *envelope convexo*

$\text{conv}(S)$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém  $S$ . A figura a seguir mostra dois exemplos.



*Figura 3.1 Exemplos de conjuntos e seus envelopes convexos.  $ABCD$  é um quadrângulo não-convexo. O triângulo  $ABD$  é seu envelope convexo. O quadrado  $EFGH$  é o envelope convexo do conjunto finito  $\{E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$ .*

Estamos principalmente interessados em envelopes convexos de conjuntos finitos no plano. Por exemplo, envelope convexo de um ponto é o mesmo ponto; envelope convexo de dois pontos é o segmento com os extremos nestes pontos; envelope convexo de três pontos ou é o triângulo com estes pontos como vértices ou o segmento com dois destes pontos como extremos e o terceiro ponto entre eles; envelope convexo de vários pontos ou é um segmento (se todos os pontos pertencem a uma reta) ou um polígono convexo com alguns destes pontos como seus vértices e outros pontos em seu interior ou nos lados. Se você puser pregos numa tábua em vários pontos e laçar uma corda ao redor deles, assumirá a forma dos limites do envelope convexo destes pontos.

Isto é a nossa definição principal: denotaremos por  $\sigma_0$  a interseção dos envelopes convexos de todos os zero-conjuntos mínimos para nosso operador  $D$ .

Analogamente podemos fazer o mesmo para uns no lugar de zeros: chame  $S \subseteq V$  um *um-conjunto* se

$$(\forall i \in S : x_i = 1) \implies f(x_V) = 1$$

e denote  $\sigma_1$  a interseção dos envelopes convexos de todos os um-conjuntos mínimos. Neste caso faz sentido usar a representação max-min :

$$f(x_V) = \max_{i=1, \dots, m} \min(x_v, v \in u_i),$$

onde  $u_1, \dots, u_m$  é a lista de um-conjuntos mínimos. Considerando que os dois casos são semelhantes, formularemos nosso teorema apenas para o caso zero. Vamos denotar  $R^\beta = R_0^\beta$  o operador que transforma qualquer 0 em 1 com probabilidade  $\beta$  independentemente, mas não transforma uns em zeros.

**Teorema 3.1** [T-80].

a) Se  $\sigma_0$  é vazio, então  $D$  é um 0-eroder e existe um valor crítico  $\beta^*$  estritamente entre 0 e 1 tal que o operador  $R^\beta D$  é ergódico para  $\beta > \beta^*$  e não-ergódico para  $\beta < \beta^*$ .

b) Se  $\sigma_0$  não é vazio, então  $D$  não é um 0-eroder e  $R^\beta D$  é ergódico para todo  $\beta$  positivo.

Antes de provar este teorema, vamos considerar alguns exemplos. Os primeiros exemplos que citamos são os operadores de percolação definidos por (6). Todos eles são 1-eroders sempre que  $n \geq 2$ . Mas, por razões, que ficarão claras abaixo, estamos especialmente interessados em operadores que são 0-eroders e 1-eroders ao mesmo tempo. Aqui estão dois exemplos.

*Exemplo 1.* O operador  $D_{NLC}$ , onde NLC representa Norte-Leste-Centro. Este operador determinístico transforma qualquer  $x \in \Omega$  em  $D_{NLC} x$  como segue:

$$(D_{NLC} x)_{i,j} = \text{maioria}(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}, x_{i,j}) \text{ para todo } i, j,$$

onde a função *maioria*( $\cdot$ ) de três argumentos é igual a 1 se a maio-

ria deles for um e zero se a maioria deles for zero. Noutras palavras,

$$maioria(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{se a maioria de } a, b, c \text{ for um,} \\ 0 & \text{se a maioria de } a, b, c \text{ for zero.} \end{cases}$$

Note que a função  $maioria(\cdot)$  é monótona. Pode ser escrita na forma min-max como segue:

$$f(x_V) = \min \left( \max(x_{0,1}, x_{1,0}), \max(x_{0,1}, x_{0,0}), \max(x_{1,0}, x_{0,0}) \right).$$

Para  $D_{NLC}$  existem três zero-conjuntos mínimos:

$$\{(0, 1), (1, 0)\}, \quad \{(0, 1), (0, 0)\}, \quad \{(1, 0), (0, 0)\}.$$

Seus envelopes convexos são os segmentos:

$$[(0, 1), (1, 0)], \quad [(0, 1), (0, 0)], \quad [(0, 0), (1, 0)].$$

A interseção destes três segmentos é vazia. Assim o conjunto  $\sigma_0$  para  $D_{NLC}$  é vazio e o operador deve ser um 0-eroder. Você pode provar isto observando a figura 3.5. Na realidade, também é um 1-eroder. Para provar isto é suficiente notar que a função  $f(\cdot)$  neste caso é 0-1 simétrica, o que significa que se os três argumentos mudam seus valores, a função também muda seu valor.

*Exemplo 2.* Operador  $D_{flat}$  chamado *achatador*, para qual

$$(D_{flat} x)_{i,j} = \min \left( \max(x_{i,j}, x_{i,j+1}), \max(x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1}) \right). \quad (10)$$

Esta fórmula já está na forma min-max. Seu  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  também são vazios (confira!), assim  $D_{flat}$  também é um 0-eroder e um 1-eroder. Você pode mostrar isto observando as figuras 3.3 e 3.4.

Apresentar exemplos de não-eroders é ainda mais fácil; o operador identidade (que não muda nada) nem é 0-eroder nem 1-eroder. Um exemplo mais interessante de um não 0-eroder (mas 1-eroder) é apresentado pela fórmula (11) na página 60.

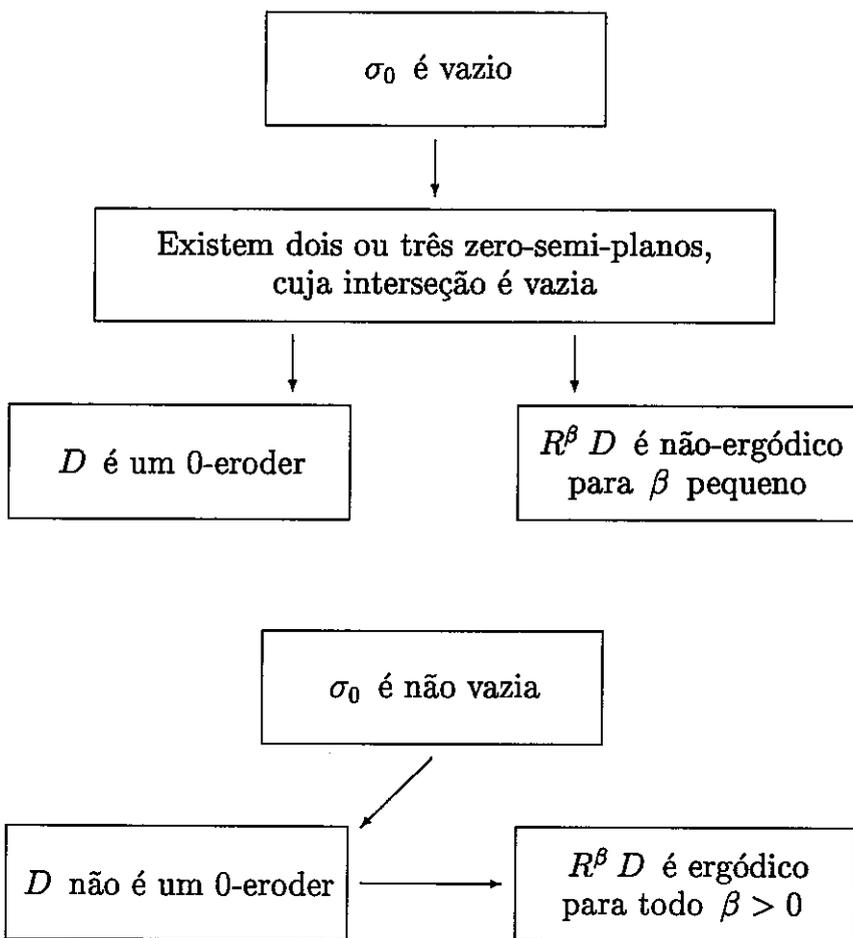


Figura 3.2. Esquema da prova do teorema 3.1.

**Prova do teorema 3.1.** O esquema na figura 3.2 mostra as partes nas quais consiste nossa prova. Por semi-plano fechado nos referimos a uma das duas partes resultantes da divisão de um plano por uma reta, incluindo-a. Um zero-semi-plano indica um semi-plano fechado, que contém um zero-conjunto. Toda seta neste esquema representa um argumento. Chamaremos estes argumentos de proposições. Mas em primeiro lugar precisamos do seguinte teorema.

**Teorema 3.2.** (Uma versão do teorema de Helly.) Se existe uma família finita de conjuntos convexos em  $\mathbb{R}^d$  tal que cada  $d + 1$  deles tem um ponto em comum, então todos os conjuntos na família têm um ponto comum.

Nós não precisamos deste teorema na sua forma geral, é suficiente prová-lo para o caso quando  $d = 2$  e todos estes conjuntos convexos são semi-planos fechados. Deixamos para o leitor provar o caso especial do teorema de Helly quando  $d = 1$ : se existe várias semi-retas fechadas numa reta e cada duas delas tem uma interseção não-vazia então todas elas têm uma interseção não-vazia. (Por semi-reta fechada entendemos por uma das duas partes resultantes de uma reta cortada por um ponto, incluindo este ponto.) Também precisamos da seguinte afirmação: se existe dois conjuntos convexos fechados num plano que não se interceptam, então existe uma reta neste plano que os separa, de forma que estes conjuntos estão em lados distintos desta reta e não têm pontos comum com ela. No nosso caso, quando todos os conjuntos em questão são interseções de vários semi-planos fechados, esta afirmação é evidente e também deixamos sua prova para o leitor.

Agora vamos provar por contradição que se existe uma família finita de semi-planos fechados num plano tal que cada três deles têm um ponto em comum, então todos estes semi-planos fechados têm um ponto em comum. Seja  $n$  o menor número de semi-planos fechados num contra-exemplo, e considere  $C_1, \dots, C_n$  semi-planos fechado num plano cuja interseção é vazia embora cada três deles tenham uma interseção não-vazia. Como  $n$  é o menor valor com esta propriedade, a interseção,  $I = C_1 \cap \dots \cap C_{n-1}$  é não-vazia. Como  $I$  não tem nenhum ponto comum com  $C_n$ , existe uma reta  $x$  no plano que os separam, de forma que  $I$  e  $C_n$  estão em lados diferentes. Para todo  $i = 1, \dots, n - 1$  denotamos  $D_i$  a interseção de  $C_i$  com esta reta  $x$ . Provemos que cada dois destes conjuntos  $D_1, \dots, D_{n-1}$  tem um ponto comum. Considere conjuntos  $C_i$  e  $C_j$ . Sabemos que  $C_i, C_j$  e  $C_n$  tem um ponto comum. Então a

interseção  $C_i \cap C_j$  tem um ponto de um lado de  $x$  (onde  $I$  está) e outro ponto de outro lado (onde  $C_n$  está). Conseqüentemente, como  $C_i \cap C_j$  é convexo, tem um ponto comum com  $x$  e este ponto pertence a  $D_i \cap D_j$ . Agora podemos aplicar o teorema de Helly para o caso de uma dimensão para os conjuntos  $D_1, \dots, D_{n-1}$  pois todos eles são semi-retas fechadas (a menos que eles sejam vazios ou coincida com esta reta que são de fácil controle). Considerando que já provamos que a cada dois deles existe um ponto em comum, todos eles têm que ter um ponto comum. Chame este ponto  $y$ . Mas todo  $D_i$  é um subconjunto de  $C_i$ , de onde  $y$  pertence a todos os  $C_1, \dots, C_{n-1}$ , daí pertence à sua interseção  $I$ . Assim a reta  $x$  tem um ponto comum  $y$  com  $I$ , o que contradiz nossa escolha da reta  $x$ . Esta contradição prova o teorema de Helly no caso em que precisamos.

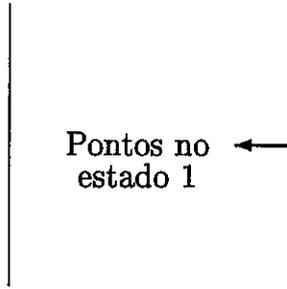
Iniciamos agora a prova do teorema 3.1.

**Proposição 3.1.** Se  $\sigma_0$  é vazia, então existe no máximo três zero-semi-planos cuja interseção é vazia.

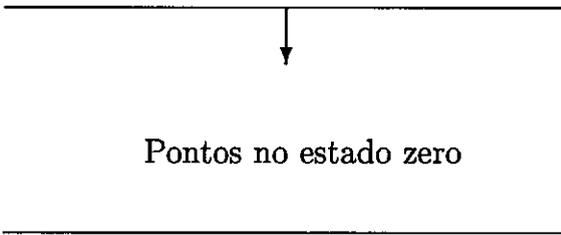
**Prova.** Como todo zero-conjunto é finito, todo envelope convexo de um zero-conjunto pode ser representado por uma interseção de vários semi-planos fechados. Todos eles são zero-semi-planos. Então,  $\sigma_0$  pode ser representado como uma interseção de vários zero-semi-planos. Desde que seja vazio, pelo teorema de Helly no máximo três deles tem interseção vazia. *A Proposição 3.1 está provada.*

**Proposição 3.2.** Se existem no máximo três zero-semi-planos cuja interseção é vazia, então  $D$  é um 0-eroder.

O que importa aqui é o menor número de zero-semi-planos cuja interseção é vazia. No plano este número ou é 2 ou 3 e estes casos devem ser considerados separadamente. Em cada caso examinamos a idéia em nossos dois exemplos:  $D_{flat}$  para o caso anterior e  $D_{NLC}$  para o caso posterior.



*Figura 3.3. Como achatador  $D_{flat}$  é um 0-eroder. O conjunto de pontos no estado 1 está entre estas linhas até desaparecer. A linha esquerda não se move. A linha direita move-se na direção da seta com o passar do tempo.*



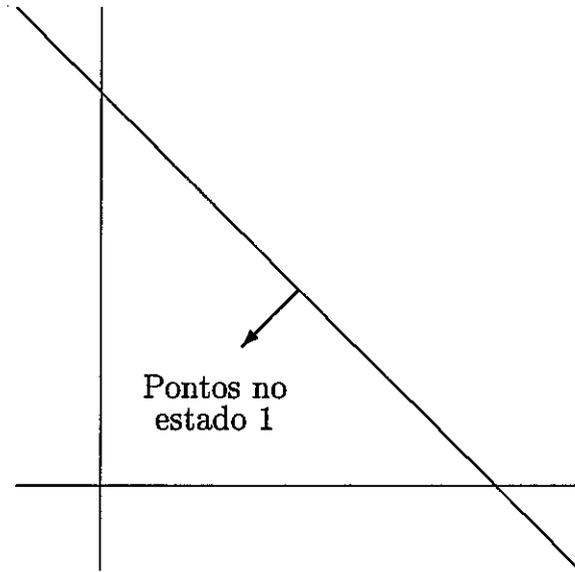
*Figura 3.4. Devido achatador ser um 1-eroder. O conjunto de pontos no estado 0 está entre estas linhas até desaparecer. A linha mais baixa não se move. A linha superior move-se conforme a direção da seta com o tempo.*

Para o achatador  $D_{flat}$  existem dois zero-semi-planos cuja interseção é vazia:

$$\{(i, j) : i \leq 0\} \quad \text{e} \quad \{(i, j) : i \geq 1\}.$$

Com base nisto, mostraremos que o achatador é um 0-eroder. Dada uma configuração  $x$  com  $I_1(x)$  finito, trace duas retas verticais

de tal forma que este conjunto esteja entre elas. Então  $I_1(D^t x)$  também está entre estas duas retas verticais: uma destas retas permanece no mesmo lugar e a outra movimenta-se para ela quando  $t$  cresce. Assim a cada passo a distância entre elas diminui e a configuração se torna “todos zeros” após um tempo igual a distância inicial entre as retas.



*Figura 3.5. Como  $D_{NLC}$  é um 0-eroder. O conjunto de pontos no estado 1 está no triângulo formado por estas três retas. As retas horizontal e vertical não se movem. A reta inclinada move-se na direção da seta com o passar do tempo. Devido a sua simetria 0-1,  $D_{NLC}$  é um 1-eroder pela mesma razão.*

Para  $D_{NLC}$  existem três zero-semi-planos, cuja interseção é vazia:

$$\{(i, j) : i \leq 0\}, \quad \{(i, j) : j \leq 0\} \quad \text{e} \quad \{(i, j) : i + j \geq 1\}.$$

Baseado nisto, mostraremos que  $D_{NLC}$  é um 0-eroder. Para qualquer configuração  $x$  com um conjunto finito  $I_1(x)$  nós desenhamos

três retas formando um triângulo cercado este conjunto. Uma reta horizontal, uma vertical e outra com inclinação  $-1$ . Depois de cada aplicação de  $D_{NLC}$  o conjunto  $I_1(D_{NLC}^t x)$  restante entre as retas horizontal e vertical que permanecem as mesmas, mas a reta com inclinação  $-1$  move-se para sua interseção. Assim o conjunto  $I_1(D_{NLC}^t x)$  encolhe-se para um conjunto vazio e a configuração torna-se “todos zeros” em um tempo proporcional ao seu tamanho inicial. Usando estas idéias você pode provar a proposição 3.2.

**Proposição 3.3.** Se existe dois ou três zero-semi-planos cuja interseção é vazia, então,  $R^\beta D$  é não-ergódico para  $\beta > 0$  pequeno suficientemente.

Uma prova geral necessita de técnicas sofisticadas: ou ramificados análogos de contornos [T-80], ou renormalização [Bra+Gra]. [Leb+Mae+Spe] contém uma boa explicação do método de contornos ramificados para  $D_{NLC}$ . Provaremos a proposição 3.3 apenas para um caso particular:  $P = R^\beta D_{flat}$ , onde  $D_{flat}$  é o achataador definido por (10). Note que  $\delta_1$  é invariante para  $P$ , assim é suficiente provar que  $P^t \delta_0$  não tende para  $\delta_1$  quando  $t \rightarrow \infty$  se  $\beta$  é suficientemente pequeno. Na realidade vamos obter estimativa da densidade de ums na medida  $P^t \delta_0$  que não depende de  $t$ .

Usaremos a tripla  $(i, j, t)$  quando nos referirmos ao ponto  $(i, j)$  no tempo  $t$ . Imaginaremos esta tripla como um ponto do espaço inteiro tridimensional onde os eixos  $i, j$  são horizontais e o eixo  $t$  sobe. Também podemos denotar um ponto  $(i, j, t)$  por uma letra, por exemplo  $A$ , e neste caso escrevemos

$$i = i(A), \quad j = j(A), \quad t = t(A).$$

Faça  $x(i, j, t)$  igual 1 se existe uma partícula em  $(i, j, t)$  e igual a 0 caso contrário. Também usaremos variáveis aleatórias independentes  $r(i, j, t)$ , as quais são iguais a 1 se o operador aleatório se transforma em um neste momento, e iguais a 0 caso contrário. Todo  $r(i, j, t)$  é igual a 1 (um) com probabilidade  $\beta$  e 0 (zero) com probabilidade  $1 - \beta$  independentemente de outras

variáveis  $r(\cdot)$ . Assim podemos definir as variáveis  $x(i, j, t)$  do seguinte modo indutivo:

**Base de indução:**  $x(i, j, 0) = 0$  para todo  $i, j$ .

**Passo de indução:**  $x(i, j, t) = \max(r(i, j, t), z(i, j, t))$ , onde a variável intermediária  $z(i, j, t)$  é a  $(i, j)$ -ésima componente do resultado da aplicação de  $D_{flat}$  a configuração no tempo  $t - 1$ , isto é

$$z(i, j, t) = \min(\max(x(i, j, t-1), x(i, j+1, t-1)), \max(x(i+1, j, t-1), x(i+1, j+1, t-1))).$$

Este pseudo-código expressa a mesma idéia:

- 1 para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  faça
- 2     $x(i, j, 0) \leftarrow 0$
- 3 para  $t = 1$  até  $\infty$
- 4    para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  faça
- 5         $x(i, j, t) \leftarrow (D_{flat} x(t-1))(i, j)$
- 6        se  $rnd < \beta$  então  $x(i, j, t) \leftarrow 1$

Aqui  $(D_{flat} x(t-1))(i, j)$  é a  $(i, j)$ -ésima componente do resultado da aplicação do  $D_{flat}$  para a configuração  $x(t-1)$ , cujas componentes são  $x(i, j, t-1)$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

Estimamos acima a probabilidade de existir uma partícula em  $(0, 0)$  no tempo  $T$ , isto é, a probabilidade do evento  $x(0, 0, T) = 1$ . Cobriremos este evento através de vários eventos e estimaremos a soma das suas probabilidades. Para cada um destes eventos corresponde um caminho especial. Se o  $k$ -ésimo e o  $(k+1)$ -ésimo vértices deste caminho são  $(i_k, j_k, t_k)$  e  $(i_{k+1}, j_{k+1}, t_{k+1})$ , então denotamos  $\Delta_k = (\Delta i_k, \Delta j_k, \Delta t_k)$ , onde

$$\Delta i_k = i_{k+1} - i_k, \quad \Delta j_k = j_{k+1} - j_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Se os valores de todas as variáveis são escolhidos em todos os pontos, dizemos que temos uma *realização*. Tome uma realização arbitrária

do nosso processo e construa o evento que contem esta realização . No mesmo tempo construa o caminho correspondente. Procedemos indutivamente, a cada passo construindo um evento e um caminho e provando a seguinte hipótese de indução sobre eles:

a) Este caminho vai de  $(0, 0, T)$  até  $(1, 0, T)$ .

b) Este caminho só têm passos dos três tipos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{abaixo, tendo } \Delta i = 0 \text{ e } \Delta t = -1. \\ \text{horizontal, tendo } \Delta i = 1 \text{ e } \Delta t = 0. \\ \text{para cima, tendo } \Delta i = -1 \text{ e } \Delta t = 1. \end{array} \right.$$

Em todos os três casos  $|\Delta j| \leq 1$ .

c) Se um passo horizontal começa em  $(i, j, t)$ , então  $x(i, j, t) = 1$ .

**Base de indução.** O evento é " $x(0, 0, T) = 1$ " e o caminho é  $(0, 0, T) \rightarrow (1, 0, T)$ . É evidente que todas as suposições são respeitadas.

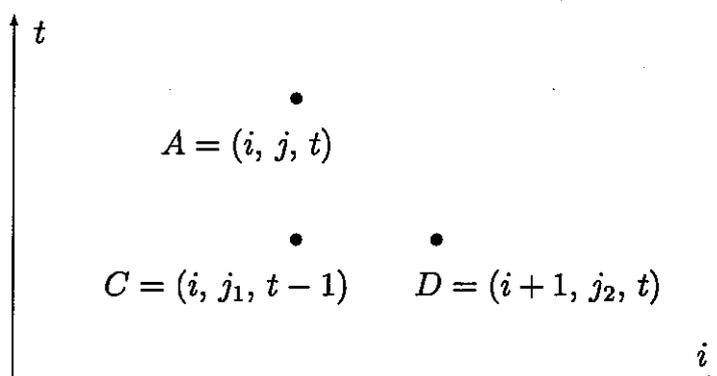
**Paramos quando:** nosso caminho tiver a seguinte propriedade:

d) Para cada vértice  $(i, j, t)$ , onde um passo horizontal começa,  $r(i, j, t) = 1$ .

**Passo de indução.** Suponha que existe um vértice  $A = (i, j, t)$ , onde um passo horizontal  $AB$  começou, e  $r(i, j, t) = 0$ . Por hipótese de indução,  $x(i, j, t) = 1$ . Pois a variável  $r$  neste ponto é zero, o valor de  $x$  neste momento é herdado do passo de tempo anterior. Observar as figuras 3.3 e 3.6 o ajudará a perceber que deve haver dois pontos  $C$  e  $D$  tais que

$$t(C) = t(D) = t(A) - 1, \quad i(C) = i(A), \quad i(D) = i(A) + 1,$$

$$j(C) - j(A) \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad j(D) - j(A) \in \{0, 1\}.$$



*Figura 3.6. Uma ilustração de um passo de indução. O eixo  $j$  não aparece, ele é perpendicular ao papel. Se  $x(i, j, t) = 1$ , mas  $r(i, j, t) = 0$ , este valor de  $x$  tem que ser "inerente" no passo de tempo prévio: aos pontos  $(i, j_1, t - 1)$  e  $(i + 1, j_2, t - 1)$ , onde  $x$  é igual a um,  $j_1$  e  $j_2$  ou é igual  $j$  ou  $j + 1$ .*

Então definimos outro vértice  $E$  pela regra: o vetor de  $D$  até  $E$  é igual ao vetor de  $A$  até  $B$ . Depois disso mudamos nosso caminho como segue: em vez de ir diretamente de  $A$  até  $B$ , seguimos de  $A$  até  $C$ , daí até  $D$ , até  $E$  e finalmente até  $B$ . Noutras palavras, nós inserimos os pontos  $C, D, E$  entre  $A$  e  $B$  na seqüência de vértices do nosso caminho. É fácil provar que o novo caminho também satisfaz as hipóteses de indução a), b), c). Este processo de indução não pode durar para sempre pois  $x(i, j, 0) \equiv 0$ .

Quando paramos, temos um caminho que satisfaz as exigências a), b), c) e d). Mas este caminho ainda pode não ser auto-evitando. Para obter um caminho auto-evitando com todas estas propriedades, eliminamos os laços semelhante ao que fizemos ao provar o lema 1.1. A saber, se o caminho que obtemos ainda não for auto-evitando, ele visita algum vértice duas vezes e dá uma volta entre estas visitas. Eliminamos esta volta (incluindo apenas uma das visitas) obtendo um caminho mais curto satisfazendo todas as propriedades a), b), c) e d). Assim procedemos até que um caminho auto-evitando com estas propriedades seja obtido.

Nosso evento é " $r(i, j, t) = 1$  para todos os vértices de nosso caminho com início num passo horizontal". Como o caminho é auto-evitando, a probabilidade do evento em questão é igual a  $\beta^k$ , onde  $k$  é o número de passos horizontais no caminho. Note que o número de passos **descendo** é igual ao número de passos **subindo** e igual a  $k-1$ . Assim o comprimento do caminho é  $3k-2$ . O número de caminhos possíveis com comprimento  $3k-2$  não excede  $C^{3k-3}$  onde  $C$  é o número de vetores distintos  $(\Delta i, \Delta j, \Delta t)$  permitido pela condição b). Assim a soma das probabilidades de todos os eventos não excede

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^{3k-3} \beta^k = \frac{\beta}{1 - C^3 \beta}.$$

Para  $\beta$  pequeno o bastante esta soma é menor que 1, donde a medida  $P^t \delta_0$  não tende para  $\delta_1$ . A proposição 3.3 está provada.

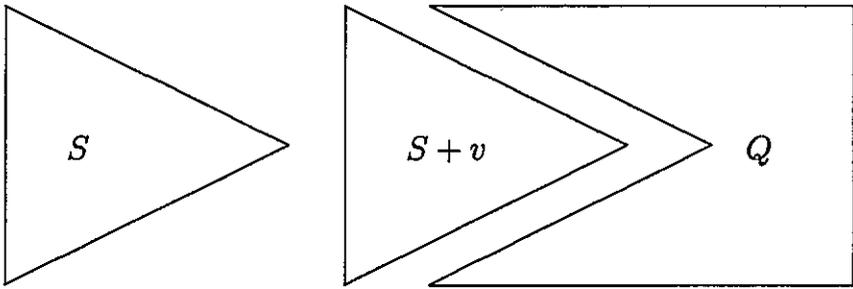
**Proposição 3.4.** Se  $\sigma_0$  não for vazio, então  $D$  não é um 0-eroder.

Provaremos isto para o caso quando  $\sigma_0$  contiver a origem. Neste caso apresentaremos uma configuração  $x$  que é um desvio finito de "todos zeros", tal que  $I_1(Dx) \supseteq I_1(x)$ . Após isto a monotonicidade implica que  $I_1(D^t x)$  é não-vazio para todo  $t$ . Qualquer conjunto  $S + v = \{i + v, i \in S\}$ , onde  $v$  é um vetor, é dito uma *translação* de  $S$ . Dizemos que um conjunto  $S$  é *obtusos* para outro conjunto  $Q$  se qualquer translação de  $S$  que intercepta  $\text{conv}(Q)$ , também intercepta  $Q$ . A figura 3.7 ilustra esta noção.

**Teorema 3.3. O teorema de Carathéodory para conjuntos bidimensionais.** Seja  $S$  um conjunto qualquer num plano. Então um ponto  $p$  pertence a  $\text{conv}(S)$  se e só se pertence a  $\text{conv}(\{p_1, p_2, p_3\})$ , onde  $p_1, p_2, p_3$  são alguns pontos em  $S$  (alguns podem coincidir). Noutras palavras,

$$\text{conv}(S) = \bigcup_{p_1, p_2, p_3 \in S} \text{conv}(\{p_1, p_2, p_3\}).$$

Deixamos sua prova para o leitor.



*Figura 3.7. O conjunto  $S$  não é obtuso para o conjunto  $Q$  porque sua translação  $S+v$  intercepta o envelope convexo de  $Q$  sem interceptar  $Q$ .*

**Lema 3.4.** Para qualquer conjunto  $S$  num plano, o conjunto  $-3 \operatorname{conv}(S)$  é obtuso para  $S$ .

Deixamos a prova para o leitor deste lema quando  $S$  consistir em um, dois ou três pontos. Assumindo que para estes casos nosso lema está provado, provemos para a forma geral. Considere qualquer translação  $S+v$  de  $S$ , que não intercepta  $-3 \operatorname{conv}(S)$  e prove que  $\operatorname{conv}(S)+v$  também não intercepta  $-3 \operatorname{conv}(S)$ . Considere um ponto  $p \in \operatorname{conv}(S)$ . Pelo teorema 3.3, existe  $p_1, p_2, p_3 \in S$  tal que  $p \in \operatorname{conv}(\{p_1, p_2, p_3\})$ . Por hipótese,  $S+v$  não intercepta  $-3 \operatorname{conv}(S)$ , daí  $p_1+v, p_2+v, p_3+v$  não pertence a  $-3 \operatorname{conv}(S)$ . Considerando que nosso lema já está provado para conjuntos com até três pontos, podemos concluir que  $\operatorname{conv}(\{p_1+v, p_2+v, p_3+v\})$  não intercepta  $-3 \operatorname{conv}(S)$ , assim  $p$  não pertence a  $-3 \operatorname{conv}(S)$ . *O lema 3.4 está provado.*

Agora note que quaisquer  $S_1, S_2, z \subseteq \mathbb{R}^2$ , se  $S_1$  é obtuso para  $z$  e  $S_2$  é não-vazio, então  $S_1 + S_2$  é obtuso para  $z$ , onde  $+$  indica soma vetorial:

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}.$$

O número de zero-conjuntos mínimos é finito pois todos eles são subconjuntos de  $V$ . Assim podemos denotá-los  $z_1, \dots, z_n$ .

Para todo zero-conjunto mínimo  $z_i$  tem um conjunto limitado  $S_i$  obtuso a ele, a saber  $S_i = -3 \text{ conv}(z_i)$ . Então a soma vetorial deles  $S_1 + \dots + S_n$  é limitada também e obtusa para todos os zero-conjuntos mínimos. Somando também uma bola grande o suficiente  $S_0$  obtemos

$$S = S_0 + S_1 + \dots + S_n.$$

$S_0$  assegura que a interseção de  $S$  com  $\mathbb{Z}^2$  é não-vazia. Provemos que a configuração  $x$ , definida por  $I_1(x) = S \cap \mathbb{Z}^2$ , não é erodada por  $D$ . Na realidade provaremos que  $I_1(Dx) \supseteq I_1(x)$ , isto é suficiente. Suponha o oposto: que existe um ponto  $v$  tal que  $x_v = 1$ , mas  $(Dx)_v = 0$ . Assim, deve existir um zero-conjunto mínimo  $z$  tal que  $x_{v+i} = 0$  para todo  $i \in z$ . Então  $z+v$  não intercepta  $S$ . Como  $S$  é obtuso para  $z$ , o envelope convexo de  $z+v$  também não intercepta  $S$ . Ora  $\sigma_0$  contém a origem, logo o envelope convexo de  $z$  também a contém, assim o envelope convexo de  $z+v$  contém  $v$ , daí  $v$  não pertence a  $S$ , o que contradiz nossa suposição que  $x_v = 1$ . *A proposição 3.4 está provada.*

**Proposição 3.5.** Se  $D$  não for um 0-eroder, então  $R^\beta D$  é ergódico para todo  $\beta$  positivo.

Para este propósito estimamos a probabilidade que a 0-ésima componente seja zero após  $t$  aplicações de  $R^\beta D$  para qualquer configuração inicial e provar que esta probabilidade tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $D$  não é um 0-eroder, existe um desvio finito  $x$  de "todos zeros", não erodado por  $D$ . Assim  $I_1(D^t x)$  é não vazio para todo natural  $t$  e podemos escolher um ponto  $p_t$  nela. Para todo  $u \in [1, t]$  consideramos o evento: "*No tempo  $u \in [1, t]$  o operador aleatório  $R^\beta$  transforma todos os componentes de  $I_1(x_1) - p_{t-u}$  em uns.*" (Aqui o sinal  $-$  significa subtração vetorial). Este evento é suficiente para 1 está no ponto 0 no tempo  $t$ . Apenas se nenhum destes eventos ocorrem, 0 pode estar ao ponto 0 no tempo  $t$ . Mas estes eventos são independentes um do outro (porque eles pertencem a tempos diferentes) e a probabilidade de cada um é  $\beta^n$  onde  $n$  é o número de elementos em  $I_1(x)$ . Então

a probabilidade de cada um destes eventos não acontecer é  $1 - \beta^n$ . Assim a probabilidade que nenhum deles ocorra é  $(1 - \beta^n)^t$ , que tende a zero quando  $t$  tende para  $\infty$ . Assim a probabilidade de ter zero na origem tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . O mesmo é verdade para qualquer ponto e isto é suficiente para zeros desaparecerem.

Agora lembre-se da promessa que fizemos no princípio deste capítulo: apresentar autômato celular não-degenerado e não-ergódico.

**Teorema 3.4.** Se  $D$  é o operador determinístico monotónico definido por (9) na página 35 e é um 0-eroder e um 1-eroder, então  $R_\alpha^\beta D$  tem pelo menos duas medidas invariantes distintas para  $\alpha$  e  $\beta$  pequenos o suficiente.

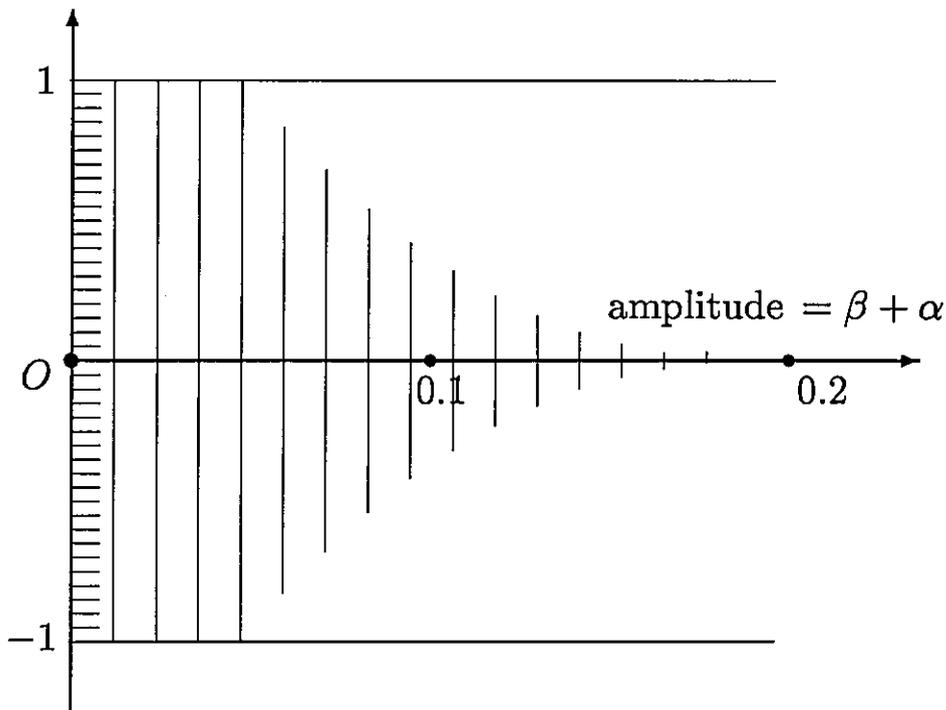
Provaremos este teorema no último capítulo. Citaremos aqui resultados modelados em computadores de um desses operadores sobre os quais este teorema fala,  $R_\alpha^\beta D_{NLC}$ . Foi inicialmente estudado por simulação de computador em [Pet+Pia+Vas] no caso simétrico  $\alpha = \beta \leq 1/2$  e foi observada a transição fásica:<sup>8</sup> quando  $\alpha = \beta$  está perto de  $1/2$ , o operador é ergódico, isto é, tende para o mesmo regime de toda condição inicial, mas para  $\alpha = \beta$  pequeno o operador é não-ergódico, i.e. “lembra” a condição inicial: se a simulação começar em “todos zeros”, zeros prevaleceram todo o tempo, se começar em “todos uns”, uns prevaleceram todo o tempo. Como este operador tem dois parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , em vez de um ponto crítico existe uma curva crítica que foi estudada experimentalmente em [Ben+Gri]. Vamos usar parâmetros

$$\text{amplitude} = \beta + \alpha, \quad \text{viés} = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}.$$

---

<sup>8</sup>Devido a monotonicidade, é suficiente considerar apenas duas condições iniciais “todos zeros” e “todos uns”, e devido a simetria é suficiente considerar apenas um deles.

$$\text{viés} = (\beta - \alpha)/(\beta + \alpha)$$



A figura 3.8 é uma representação esquemática das zonas de ergodicidade e não-ergodicidade para o operador  $R_{\alpha}^{\beta} D_{NLC}$  de acordo com simulação de computador [Ben+Gri]. A área vazia mostra onde foi observado ergodicidade na experiência. A área sombreada verticalmente mostra onde não-ergodicidade foi observada. A área sombreada horizontalmente mostra onde não-ergodicidade está provada. Ergodicidade está provada para uma região onde a amplitude é próxima do 1, além da borda direita desta figura.

A figura 3.8 representa regiões ergódicas e não-ergódicas como mostra a simulação de computador [Ben+Gri].

## Notas.

3.1. *Exercício.* Observe que  $\sigma_0$  pode não conter pontos inteiros e ainda ser não-vazio. Apresentamos um exemplo disto. Seja  $D : \Omega \rightarrow \Omega$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^U$ , onde  $U = \mathbb{Z}^2$ , e  $D$  é definido como segue:

$$(Dx)_{i,j} = \min(\max(x_{i,j}, x_{i+1,j+1}), \max(x_{i+1,j}, x_{i,j+1})). \quad (11)$$

- a) O que é  $\sigma_0$  neste caso?
- b) Denote  $x$  a configuração tal que

$$I_1(X) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

O que são os conjuntos  $I_1(D^t x)$  para  $t=1,2,3,\dots$ ?

3.2. *Problema resolvido.* Prove outra versão do teorema de Helly: Se existe uma família de conjuntos convexos limitados em  $\mathbb{R}^d$  tal que todo  $d+1$  deles tem um ponto comum, então todos os conjuntos na família têm um ponto comum. (A família não precisa ser finita.) Você pode encontrar uma prova de uma versão muito mais geral do teorema de Helly e muitos fatos relacionados em [Rockafellar].

3.3. *Exercício.* Prove que a seguinte afirmação é falsa: “Se existe uma família de conjuntos convexos em  $\mathbb{R}^d$  tal que cada  $d+1$  deles tem um ponto comum, então todos os conjuntos na família têm um ponto comum.”

3.4. Considere operadores monótonos determinísticos uniformes atuando em  $\Omega = \{0, 1, \dots, m\}^U$ , onde  $U = \mathbb{Z}^d$ . Como antes, dizemos que um operador é um 0-eroder se “eroda” todo desvio finito de “todos zeros”.

*Problema resolvido.* [Galperin] contém um critério de 0-eroders para conjuntos finitos arbitrários de estados, mas só para a dimensão  $d = 1$ .

*Problema não resolvido:* Obter um resultado semelhante para dimensão 2 e três estados para todo ponto.

3.5. *Problema resolvido.* Teorema 3.1 faz uma conexão entre eroders e existência de valores críticos. Esta conexão não é verdadeira para números maiores de estados dos componentes. Para isto é mostrado um contra-exemplo unidimensional, onde todo ponto tem três estados: 0, 1 e 2. Neste caso  $\Omega = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$  e o operador determinístico uniforme  $D$  é definido pela regra

$$\forall x \in \Omega, v \in \mathbb{Z} : (Dx)_v = f(x_{v-1}, x_v, x_{v+1}),$$

onde a função  $f(\cdot)$  está definida como segue:

$$f(x_{-1}, x_0, x_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{-1} = 1, x_0 = x_1 = 2, \\ 0 & \text{se } x_{-1} = x_0 = 1, x_1 = 0, \\ (x_{-1} + x_0 + x_1)/3 & \text{arredondado para o mais} \\ & \text{próximo número inteiro} \\ & \text{em todos os outros casos.} \end{cases}$$

a) Verifique que a função  $f(\cdot)$  é monótona.

b) Uma configuração  $x$  é denominada um desvio finito de “todos zeros” se o conjunto  $\{v \in \mathbb{Z} : x_v \neq 0\}$  é finito. Prove que  $D$  é um eroder, i.e. para qualquer desvio finito  $x$  de “todos zeros” existe  $t$  tal que  $D^t x = \text{“todo zeros”}$ .

c) Seja  $R^\beta$  operador aleatório que transforma qualquer componente no estado 2 com probabilidade  $\beta$  independentemente de outros. Prove que para qualquer  $\beta > 0$  o operador  $P = R^\beta D$  é ergódico pois  $P^t \mu$  sempre tende para “todos 2”.

3.6. *Problema não resolvido.* Vamos considerar a versão do operador  $R_\alpha^\beta D_{NLC}$  num espaço finito, isto é faça  $U = \mathbb{Z}_m^2$ . Seja  $0 < \alpha, \beta < 1$ , tal que sua medida invariante é única. Para todo  $n \in [0, m^2]$  denote  $\mu(n)$  a probabilidade (de acordo com esta medida invariante) que existe  $n$  uns na configuração. Prove que para grandes valores de  $m$  a forma de distribuição de  $\mu(n)$  é qualitativamente diferente para valores diferentes de  $\alpha$  e  $\beta$ , isto é :

a) Se  $\alpha + \beta$  está perto de 1, a distribuição de  $\mu(n)$  é unimodal: é maior quando  $n$  está perto de  $s \cdot m^2$  onde  $s = \text{const}$ .

b) Se  $\alpha$  e  $\beta$  são pequenos, a distribuição de  $\mu(n)$  é bimodal: é maior quando  $n$  está perto de  $p \cdot m^2$  e  $(1 - q) \cdot m^2$  onde  $p$  e  $q$  são constantes tendem a zero quando  $\alpha$  e  $\beta$  tendem a zero.

O mesmo é provavelmente verdade para todo o operador monótono uniforme que for ao mesmo tempo 0-eroder e 1-eroder.

3.7. *Problema não resolvido.* Junto com o operador  $D_{NLC}$ , o artigo [Pet+Pia+Vas] escreve sobre outro operador  $R_\alpha^\beta D_{maioria}$ , atuando no mesmo espaço e definido por:

$$(D_{maioria} x)_{(i,j)} = maioria(x_{i,j}, x_{i+1,j}, x_{i,j+1}, x_{i-1,j}, x_{i,j-1}),$$

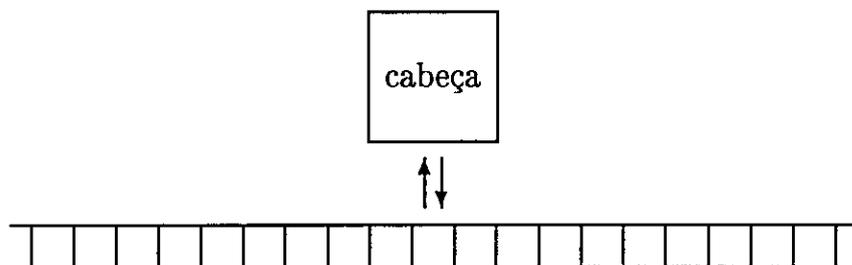
onde a função  $maioria(\cdot)$  de cinco argumentos é igual a 0 se a maioria de seus argumentos são iguais a 0 e igual a 1 se a maioria de seus argumentos for igual a 1. Como  $D_{maioria}$  não é nem 0-eroder nem 1-eroder, o teorema 3.4 não pode ser usado. Proposição 3.5 implica que este operador é ergódico se  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$  ou vice-versa. Porém, simulação de computador sugere que este operador seja não-ergódico para  $\alpha = \beta$  pequenos o suficiente. Também parece razoável que este operador seja não-ergódico sempre que  $\alpha \neq \beta$ . Ambas as afirmações não foram comprovadas.

#### 4. O problema de ergodicidade não tem solução

Ja temos vários resultados particulares sobre autômatos celulares, e é hora de perguntar, o que realmente queremos obter, em particular com o estudo de sua ergodicidade? Matemática é uma ciência abstrata e nós queremos provar teoremas gerais. No caso em estudo queremos critérios de ergodicidade em classes de autômatos celulares os mais gerais possíveis. Porém, sabemos que alguns problemas gerais em todas as áreas da Matemática não podem ser resolvidos no sentido algorítmico. É natural que ao lidarmos com autômatos celulares enfrentamos muito freqüentemente situações dessa natureza, isto ocorre porque nosso objetivo é muito geral.

Quando percebemos que um problema é *insolúvel*, significa que estamos trabalhando perto dos limites das possibilidades naturais. Isto nos motiva a tratar com mais respeito os resultados parciais já obtidos: talvez, eles estejam próximos de tudo o que pode ser feito.

Neste capítulo mostraremos que o problema de decidir, se um autômato celular é ergódico ou não, é algoritmicamente insolúvel para uma classe deles. Existem várias formalizações da noção de algoritmo, todas equivalentes. O algoritmo usado formalmente aqui será a máquina de Turing, porquê seu funcionamento é semelhante a autômatos celulares. Na realidade usaremos a seguinte classe de máquinas de Turing. Uma máquina de Turing consiste numa cabeça e uma fita. A fita é infinita em ambas as direções e consiste em celas enumeradas por números inteiros. Toda cela pode estar em vários estados. O conjunto de estados  $G$  é o mesmo para todas as celas. A cabeça também tem um conjunto finito  $H \cup \{parada\}$  de estados onde um estado, digamos a *parada*, joga um papel especial. Em cada unidade de tempo decorrido a cabeça observa uma cela da fita como mostra a figura 4.1.



*Figura 4.1. Máquina de Turing. A cada unidade de tempo decorrido a cabeça observa uma cela, troca informação com ela e então se muda para outra cela.*

Também escolhemos três funções:

$$\begin{aligned}
F_{\text{fita}} & : G \times H \rightarrow G, \\
F_{\text{cabeça}} & : G \times H \rightarrow H \cup \{\textit{parada}\}, \\
F_{\text{mudança}} & : G \times H \rightarrow \{\leftarrow, \rightarrow\}.
\end{aligned}$$

Quando a máquina começa, a fita está “vazia”, o que indica que todas as celas estão cheias com o símbolo vazio  $g_{\text{vazio}} \in G$ . A cabeça está celada no estado inicial  $h_{\text{init}} \in H$  e observa a 0-ésima cela da fita. A cada passo a cabeça escreve um símbolo novo na cela, que observe, de acordo com a função  $F_{\text{fita}}$ , vai para um estado novo de acordo com o função  $F_{\text{cabeça}}$ , e passa para a cela à esquerda ou à direita ao longo da fita de acordo com os valores  $\leftarrow, \rightarrow$  da função  $F_{\text{mudança}}$  respectivamente, onde os argumentos das três funções são o símbolo observado na cela da fita e o estado atual da cabeça.<sup>9</sup> A máquina pára quando alcança o estado *parada*. (Isso explica porquê não precisamos definir nossas funções quando a cabeça está parada). Sabemos que o problema de decidir, qual destas máquinas param, é algoritmicamente insolúvel, isto é não existe algoritmo capaz de prever para toda máquina de Turing quais delas param se começam com a fita vazia. Este famoso teorema é citado em muitos livros [Minsky, Wang]. Nós o usaremos para provar outro teorema sobre indecisão em autômato celular.

Definimos uma classe de autômatos celulares. Na maior parte da matemática um resultado teórico é tanto melhor quanto geral, i.e. quando a classe de objetos em estudo é maximal. Porém, quando provamos não ter solução algorítmica, a situação é exatamente oposta: o resultado é mais valioso para a menor classe de objetos para os quais conseguimos provar. Porisso, reduzimos nossa classe tanto quanto possível: o número arbitrário  $n$  de estados de cada componente é a única caratecrística infinita de nossas classes,

---

<sup>9</sup>Habitualmente, a máquina de Turing está definida tal que a cabeça pode ficar no mesmo lugar também, mas isto não é necessário.

todo o resto é reduzido: a dimensão é 1, a interação ocorre apenas entre os vizinhos mais próximos e todas as probabilidades de transição ou é 0 ou 1/2 ou 1.

Nosso espaço de configuração é  $\{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$ , onde  $n$  é um número natural. Um autômato celular é um operador que é uma superposição de dois operadores: primeiro determinístico  $D$ , e outro aleatório  $R$ . O operador determinístico é determinado por uma função  $f : \{1, \dots, n\}^3 \rightarrow \{1, \dots, n\}$  da seguinte maneira: transforma qualquer configuração  $x$  em  $Dx$ , onde

$$(Dx)_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

O operador aleatório  $R$  é muito simples: todos os componentes da configuração que não estão no estado  $n$ , transforma-se no estado 1 com probabilidade 1/2 independentemente do que ocorre com todos os outros. Um operador  $P$  é dito *ergódico* se a distribuição  $P^t \mu$  tende para mesma distribuição limite para todas as medidas iniciais  $\mu$ .

**Teorema 4.1.** Não existe nenhum algoritmo para decidir quais autômatos celulares descritos acima são ergódicos e quais não são [Kurdyumov].

Nossa prova consiste no seguinte: Para cada máquina de Turing da classe descrita acima construímos um autômato celular, que é ergódico se e só se a máquina de Turing pára se iniciou numa fita vazia. Isto é suficiente para provar o problema de decidir quais dos nossos autômatos celulares são ergódicos é insolúvel porquê se fosse solúvel, o problema de decidir quais máquinas de Turing páram também seria, mas isto é bem conhecido que é falso. Em mais detalhe: se o problema de ergodicidade fosse solúvel, então poderíamos tomar uma máquina de Turing, construir o autômato celular correspondente, aplicar o procedimento hipotético de decisão, decidir se ele é ergódico ou não e concluir se a máquina de Turing pára ou não.

Assim para toda máquina de Turing  $T$  construímos um opera-

dor  $P$  que é ergódico se e só se  $T$  pára. Na realidade,  $P$  imita o funcionamento de  $T$  do seguinte modo. Sob ação de  $P$ , todos os componentes com probabilidade  $1/2$  transformam-se nas cabeças de  $T$  em posição inicial. Cada cabeça marca seu território com parênteses e imita o funcionamento de  $T$  em seu território. Este funcionamento pode ser interrompido por outras cabeças, mas medidas de prevenção são tomadas para que as cabeças não se misturem: no momento em que uma cabeça só percebe algum sinal da presença de outra cabeça, comete um suicídio. Se  $M$  nunca pára, o processo permanece neste regime sempre. Se  $M$  pára, algumas componentes vão para um estado especial *final* e começa uma “epidemia” levando todos os seus vizinhos ao mesmo estado, de forma que o processo tende a  $\delta_{final}$ , medida concentrada na configuração “todos os componentes estão no estado *final*”. Na realidade, esta medida é invariante em todos os casos, mas o processo só tende para ela de todas as condições iniciais se  $M$  pára. Fixamos

$$S = S_{\text{esquerdo}} \times S_{\text{direito}} \times S_{\text{fita}} \times S_{\text{cabeça}},$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_{\text{esquerdo}} &= S_{\text{direito}} = \{0, 1\}, & S_{\text{fita}} &= G, \\
 S_{\text{cabeça}} &= H \cup \{0, \textit{parada}\}.
 \end{aligned}$$

Adequadamente, escrevemos um elemento genérico de  $S$  como

$$x = (\textit{esquerdo}(x), \textit{direito}(x), \textit{fita}(x), \textit{cabeça}(x)).$$

Dizemos que um estado  $x$ :

tem um parêntese esquerdo se  $\textit{esquerdo}(x) = 1$  e

tem um parêntese direito se  $\textit{direito}(x) = 1$ .

Chamamos  $x$  um *não-cabeça* se  $\textit{cabeça}(x) = 0$  e um *cabeça* caso contrário.

Dizemos que  $x$  é um *cabeça-parada* se  $\textit{cabeça}(x) = \textit{parada}$ .

O estado  $(0, 0, \textit{gvazio}, 0)$  é dito *vazio*,

o estado  $(1, 1, g_{vazio}, h_{init})$  é dito *recém nascido* e

o estado  $(0, 0, g_{vazio}, parada)$  é dito *final*.

Para abreviar, escreveremos  $F_*(x) = F_*(fita(x), cabeça(x))$ , onde  $*$  significa 'fita', 'cabeça' ou 'mudança'.

Dizemos que um cabeça  $x$  quer mover-se à esquerda ou à direita se  $F_{mudança}(x)$  é igual a  $\leftarrow$  ou  $\rightarrow$  respectivamente.

Precisamos de todos estes estados para realizar nosso processo de imitação do funcionamento da máquina de Turing  $M$ . O componente da fita imita o que é escrito na fita, o componente da cabeça imita o que está na cabeça ou sua ausência se é zero. Os parênteses à esquerda e à direita são necessários para excluir interferência das cabeças, como explicaremos a seguir.

Nosso operador  $P$  é a superposição  $P = RD$ , onde  $R$  torna qualquer estado com exceção do final no estado recém-nascido com uma probabilidade  $1/2$  independentemente. Nós chamamos este ato um *nascimento*. Resta definir o operador determinístico  $D$ , para definir a função  $f(\cdot)$  na fórmula (12). Sua definição consiste em várias regras onde  $x, y, z \in S$ .

**Regra 0.** Se  $x$  ou  $y$  ou  $z$  é uma cabeça-parada, então  $f(x, y, z) = final$ .

Na formulação das regras assegurar admitimos que nem  $x$  nem  $y$  nem  $z$  é cabeça-parada. Chamamos a tripla  $(x, y, z)$  *normal* se no máximo um de  $x, y, z$  é cabeça.

**Regra 1.** Sempre que a tripla  $(x, y, z)$  é não normal,  $f(x, y, z) = vazio$ .

Em todas as regras seguintes assumimos que a tripla  $(x, y, z)$  é normal.

**Regra 2.** Se todos os  $x, y, z$  são não-cabeças, então  $f(x, y, z) = y$ .

Todas as regras subseqüentes formam três grupos que dependem de qual dos três argumentos é uma cabeça: centro, denotado por  $y$ , ou seu vizinho esquerdo, denotado por  $x$ , ou seu vizinho direito, denotado por  $z$ . As regras-centrais:

**Regra central-1.** Se  $y$  é uma cabeça que quer mover-se para esquerda, então

$$f(x, y, z) = (0, \text{direito}(y), F_{\text{fita}}(y), 0).$$

**Regra central-2.** Se  $y$  é uma cabeça que quer mover-se para a direita, então

$$f(x, y, z) = (\text{esquerdo}(y), 0, F_{\text{fita}}(y), 0).$$

Como as regras esquerdas e direitas são simétricas, omitiremos a direita. As regras-esquerdas são:

**Regra esquerda-1.** Se  $x$  é uma cabeça que quer mover-se para a direita e tem um parêntese direito, então

$$f(x, y, z) = (0, 1, g_{\text{vazio}}, F_{\text{cabeça}}(x)).$$

**Regra esquerda-2.** Se  $x$  é uma cabeça que quer mover para a direita e não tem parêntese direito e  $y$  não tem parêntese esquerdo, então

$$f(x, y, z) = (0, \text{direito}(y), \text{fita}(y), F_{\text{cabeça}}(x)).$$

**Regra esquerda-3.** Se  $x$  é uma cabeça que quer mover-se para a direita e não tem parêntese direito, mas  $y$  tem um parêntese esquerdo, então  $f(x, y, z) = y$ .

**Regra esquerda-4.** Se  $x$  é uma cabeça que quer mover-se a esquerda, então  $f(x, y, z) = y$ .

As regras-direita são análogas às esquerda. apenas permutando direita com esquerda.

Nosso operador  $D$  está definido. Para forçar o operador  $R$  a satisfazer a condição prometida, é suficiente escolher  $n$  igual a cardinalidade de  $S$  e enumerar os estados de  $S$  de forma que o estado recém-nascido assuma o valor 1 e o estado final assumo o valor  $n$ .

**Lema 4.1.** Operador  $P = RD$  é ergódico se e só se a máquina de Turing  $M$  pára.

**Prova do lema 4.1.** Devido a *regra 0*, a medida  $\delta_{final}$  é invariante para  $P$ . Então  $P$  é ergódico se e só se nosso processo tende para  $\delta_{final}$  a partir de qualquer medida inicial. Vamos discutir nas duas direções.

*Direção 1:* Vamos supor que  $M$  pára depois de  $T$  passos e provar que nosso processo tende para  $\delta_{final}$  a partir de qualquer medida inicial. Considere uma região

$$[s_0 - T - 5, s_0 + T + 5] \subset \mathbb{Z},$$

onde  $s_0$  é qualquer número inteiro. Se nela existir uma cabeça-parada, ela se transforma em *final*, que se expande em ambas as direções devido a *regra 0*. Caso não exista nenhuma cabeça-parada na região considerada, então o evento a seguir tem probabilidade positiva: Primeiro, em algum momento  $t_0$  nascimentos ocorrem em todos os locais do espaço  $[s_0 - T - 5, s_0 + T + 5]$ . No próximo passo todos estes locais ficam vazios. A seguir um nascimento ocorre no local  $s_0$  e este é o único nascimento que ocorre no conjunto espaço-temporal dos pontos  $(s, t)$  para aqueles

$$\begin{cases} s_0 - T - 5 + (t - t_0) \leq s \leq s_0 + T + 5 - (t - t_0) \\ 0 < t - t_0 \leq T + 4. \end{cases}$$

Sob estas condições, estamos lidando com uma configuração espaço-temporal que imita o funcionamento de  $M$  por tempo longo o suficiente para  $M$  parar. No instante em que esta cabeça para, torna-se em *final* e este estado se expande em ambas as direções, como epidemia, devido a *regra 0*. Pois este evento tem probabilidade positiva, acontece quase certamente em algum lugar, logo nosso processo tende para  $\delta_{final}$ .

*A outra direção:* Vamos assumir que  $M$  nunca pára, i.e. continua funcionando sempre que começar com fita vazia. Tomando a medida inicial na configuração “todos os componentes estão no

estado vazio” e provar que as distribuições resultantes não podem conter uma cabeça-parada com probabilidade positiva e conseqüentemente não pode tender para  $\delta_{final}$ . Isto seria evidente se toda cabeça funcionasse só, nunca interagindo com outras cabeças.

Mostraremos que em nosso processo toda cabeça funciona como se estivesse só ou desaparece. Em nossa construção toda cabeça cria seu próprio “território” marcado por um parêntese esquerdo no extremo esquerdo e por um parêntese direito no extremo direito. Este território consiste de todos os locais que esta cabeça visitou.

Toda vez que uma cabeça quer mover-se além de seu território, leva o parêntese um passo adiante, possivelmente, invadindo o território de outra cabeça. Também, uma cabeça nova pode nascer dentro de território de outra cabeça. A pergunta crucial é o que acontece quando alguma cabeça volta a um lugar que era seu território, mas foi invadido por outra cabeça. Se nossa cabeça não nota que o local foi invadido e usa símbolo escrito lá por outra cabeça, pode eventualmente párar embora não parasse se estivesse funcionando só. Temos que evitar isto. Vamos examinar a situação mais detalhadamente.

Considerando que direita e esquerda são simétricas, é suficiente examinar, o que acontece se alguma cabeça quer mover-se a direita.

Se tiver um parêntese direito, significa que está expandindo seu território; isto ocorre devido a *regra esquerda-1* e fazendo isto apagará o símbolo anterior da fita e escreve o símbolo inicial como se estivesse só na fita.

Se não tem parêntese direito e seu vizinho direito não tem parêntese esquerdo significa que está movendo-se dentro de seu próprio território e vai para um lugar que nunca foi invadido e o símbolo no vizinho direito foi escrito por si só - veja *regra esquerda-2*.

Porém, se não tiver parêntese direito e seu vizinho direito tiver parêntese esquerdo, significa que outra cabeça visitou este local. Neste caso nossa cabeça comete um suicídio que é voltar a ser uma

não-cabeça. Isto ocorre por um lado devido a *regra central-2*, e nem tudo é mais o que era, mas, por outro lado, esta cabeça não entra na cela vizinha direita devido a *regra esquerda-3* e a cela, a qual pretendia invadir, permanece intacta.

Tudo isso garante que toda cabeça ou se move dentro de seu próprio território, nunca visitado por outras cabeças, e imita o funcionamento de uma máquina de Turing original com uma cabeça, ou desaparece. Então a probabilidade que uma cabeça-parada apareça é zero e o processo não tende para  $\delta_{final}$ . Assim o lema 4.1 está provado, e o teorema 4.1 segue imediatamente.

Falemos também sobre outra pergunta importante: o que significa saber ou poder calcular um número? Várias vezes ao longo deste curso mencionamos que um valor crítico é “desconhecido”. Mas o que significa conhecer um número? Conhecemos  $\sqrt{2}$  ou  $\pi$ ? É verdade que temos notações especiais para eles. Também podemos inventar notações especiais para todo valor crítico, cuja existência temos provado, mas isto não nos satisfaz. O que realmente necessitamos é aproximá-lo com algum grau de precisão. Dizemos que podemos *calcular* um número  $x$  se existe um algoritmo tal que para cada número racional  $y \neq x$ , identifica se  $y$  é menor ou maior que  $x$ . (Nós ignoramos limitações práticas e admitimos que temos tempo e memória ilimitados.) Neste sentido podemos calcular  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  e muitos outros números importantes. Será que podemos calcular, no sentido acima, os valores críticos que provamos a existência no decorrer deste curso? A resposta é desconhecida com exceção de alguns deles, que conhecemos o valor exato (por exemplo, o valor crítico de percolação de elos no papel quadriculado, que é igual a  $1/2$ ). Podemos calcular os parâmetros dessas medidas invariantes não-degeneradas, cuja existência já provamos? A resposta também é desconhecida com exceção de alguns casos que conhecemos os valores exatos.

## Notas.

4.1. *Exercício.* Vamos considerar a classe de operadores  $R_\alpha^\beta D$  com um espaço  $\Omega = \{0,1\}^U$ , onde  $U = \mathbb{Z}^d$  e  $D$  é qualquer operador definido pela fórmula (9) da página 35 com apenas uma restrição: o número de vizinhos  $n = 1$ . Apresente um algoritmo que decida para todos os operadores desta classe qual deles são ergódicos e quais não são.

4.2. *Exercício.* Considere a classe de operadores determinísticos monótonos  $D : \Omega \rightarrow \Omega$ , onde  $\Omega = \{0,1\}^U$ , onde  $U = \mathbb{Z}^d$ , é definido por (9). Apresente um algoritmo para decidir, quais destes operadores são ergódicos. (Podemos considerar cada operador determinístico como um operador aleatório, no qual podemos aplicar a noção de ergodicidade.)

4.3. *Exercício.* Prove que o problema de decidir, quais autômatos celulares têm apenas uma medida invariante, é algoritmicamente insolúvel. Esta afirmação é parecida com o teorema 4.1, mas não é idêntica, porque não sabemos se unicidade de medida invariante implica em ergodicidade. Para fazer isto, você precise teorema 5.3 no último capítulo.

4.4. *Exercício.* Prove que o problema de decidir, quais autômatos celulares, têm mais de duas medidas invariantes linearmente independente, é algoritmicamente insolúvel.

4.5. *Problema não resolvido (mesmo que o exercício 4.2, mas sem a suposição de monotonicidade).* Considere a classe de operadores determinísticos  $D : \Omega \rightarrow \Omega$ , onde  $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ , definido por (9). Existe um algoritmo para decidir quais deles são ergódicos?

4.6. *Exercício.* A afirmação a seguir contradiz o teorema 4.1: *Existe um algoritmo para decidir quais operadores da classe descrita neste capítulo são ergódicos e quais não são.* A seguir é apresentado como uma prova desta afirmação. Vamos denotar  $A$  o conjunto de operadores descrito acima. O conjunto  $A$  é contável porque podemos representá-lo como

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots,$$

onde  $A_n$  é o conjunto desses elementos de  $A$  para os quais o conjunto de estados de seus componentes é  $\{1, \dots, n\}$ . Todo operador que pertence a  $A_n$  é determinado pela função de transição  $f(v | x, y, z)$ , onde  $v, x, y, z \in \{1, \dots, n\}$ . Então todo  $A_n$  é finito, e assim  $A$  é contável. Representamos  $A = A_e \cup A_n$ , onde  $A_e$  é o conjunto dos operadores ergódicos e  $A_n$  é o conjunto dos operadores não-ergódicos. Ambos  $A_e$  e  $A_n$  são infinitos. (Prove.) Sabemos que todo subconjunto infinito de um conjunto contável também é contável. Então  $A_e$  e  $A_n$  são contáveis. Assim podemos enumerar  $A_e$  e  $A_n$  como segue:

$$A_e = \{E_1, E_2, E_3, \dots\} \quad \text{e} \quad A_n = \{N_1, N_2, N_3, \dots\}.$$

Após isso podemos enumerar todos os elementos de  $A$  como segue:

$$A = \{E_1, N_1, E_2, N_2, E_3, N_3, \dots\}.$$

E finalmente podemos formular um algoritmo para decidir se um elemento de  $A$  é ergódico ou não: se seu número nesta enumeração for ímpar, ele é ergódico, caso contrário é não-ergódico. *Podemos alegar que provamos o teorema 4.1 e sua negação. Isto é possível? Se não, o que está errado?*

4.7. *Problema resolvido.* O problema de decidir quais operadores são ergódicos também é insolúvel quando todo componente tiver apenas dois estados, mas o estado do  $i$ -ésimo componente depende dos estados dos componentes de índice  $[i - n, i + n]$  no momento prévio, onde  $n$  é um parametro natural [T-00].

4.8. *Problema resolvido.* Considere todos os autômatos celulares determinísticos uniformes em  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$  onde o estado do  $i$ -ésimo componente depende dos estados dos componentes de índice  $[i - n, i + n]$  no momento prévio. Decidir, quais deles são 0-eroders, é algoritmicamente insolúvel [Petri].

4.9. *Problema não resolvido.* Considere a classe de autômatos celulares  $R_\alpha^\beta D$ , onde  $D$  está definido por (9) na página 35 e  $\alpha$  e

$\beta$  são números racionais em  $[0, 1]$ . Existe um algoritmo de decisão de quais deles são ergódicos?

## 5. Uma definição geral para autômatos celulares

Os autômatos celulares até agora considerados são definidos para propósitos particulares. Vamos apresentar uma definição geral de autômatos celulares e provar algumas afirmações gerais sobre eles. Agora  $U$  é um conjunto arbitrário finito ou contável. Para todo  $i \in U$  existe um conjunto finito  $S_i$  de estados do ponto  $i$ .<sup>10</sup> A maioria dos exemplos considerados na literatura têm idênticos  $S_i$  para todo  $i$ , mas geralmente não precisamos supor isto. Como antes, o espaço de configuração  $\Omega$  é o produto de  $S_i$  sobre todos os  $i \in U$ . Cilindros finos são definidos do mesmo modo como antes (4), bem como  $\sigma$ -álgebra e o conjunto  $\mathcal{M}$  de medidas normalizadas. Como antes, convergência de medidas normalizadas quer dizer convergência em todos os cilindros finos.

Falaremos agora sobre operadores. Como antes, para todo  $i \in U$  existe um conjunto finito  $V(i) \subset U$  chamado *bairro*. Os elementos de  $V(i)$  são chamados os vizinhos de  $i$ . Para qualquer conjunto  $I \subset U$  denotamos seu bairro  $V(I) = \cup_{i \in I} V(i)$ . Denotaremos  $S_{V(i)} = \prod_{j \in V(i)} S_j$ . Autômatos celulares determinísticos são operadores  $D : \Omega \rightarrow \Omega$ , estão definidos pelas funções  $f_i : S_{V(i)} \rightarrow S_i$  como segue:

$$(Dx)_i = f_i(x_{V(i)}) \quad \text{para todo } i \in U.$$

Agora definimos um autômato celular aleatório  $P$ . Vamos chamar uma medida num espaço produto uma *medida produto* se todas as

<sup>10</sup>Para considerar modelos de crescimento como na nota 2.7 deveríamos admitir que  $S_i$  pode ser infinito, mas dessa forma algumas afirmações deste capítulo seriam falsas, assim é melhor considerá-los separadamente.

suas marginais são independentes um do outro. O modo como definimos nosso operador não é único, mas é bastante natural: para cada  $\delta$ -medida  $\delta(x)$  a medida  $P\delta(x)$  é uma medida produto. Chamaremos a distribuição da  $i$ -ésima componente de acordo com esta medida de *distribuição transitiva* denote isto por  $\theta_i(\cdot | x)$ . Na realidade, a  $i$ -ésima distribuição transitiva depende apenas das componentes de  $x$  no bairro de  $i$ , assim podemos escrever isto como  $\theta_i(\cdot | x_{V(i)})$ , onde  $x_{V(i)}$  é restrição de  $x$  para  $V(i)$ . Por  $\theta_i(y | x)$  denotamos o valor de  $\theta_i(\cdot | x)$  em  $y \in S_i$ , que é a probabilidade condicional que após a aplicação do operador  $P$  a  $i$ -ésima componente está no estado  $y$  se antes de sua aplicação o bairro de  $i$  estava no estado  $x_{V(i)}$ . Esta probabilidade é dita *probabilidade transitiva*. Assim definimos como  $P$  atua em todas as  $\delta$ -medidas.

Se  $U$  é finito, isto é suficiente pois  $\Omega$  também é finito e qualquer medida é uma combinação linear de  $\delta$ -medidas. Se  $U$  é infinito, medidas em  $\Omega$  geralmente não são combinações lineares finitas de  $\delta$ -medidas, mas tão logo que nos concentramos no valor  $P\mu$  num cilindro fino, restringimos  $\mu$  a  $V(I)$ , onde  $I$  é a base deste cilindro fino. Como  $I$  é finito,  $V(I)$  também é finito, e esta restrição é uma combinação linear de  $\delta$ -medidas em  $V(i)$ . Assim podemos escrever uma fórmula explícita para o valor de  $P\mu$  num cilindro fino qualquer:

$$(P\mu) (y_i = b_i, i \in I) = \sum_{a_j, j \in V(I)} \mu (x_i = a_i, i \in V(I)) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | a_{V(i)}) \quad (13)$$

para qualquer conjunto finito  $I \subset U$  e qualquer  $b_i, i \in I$ . Como antes, simplificamos nossa notação; por exemplo, a fórmula  $(P\mu)(y_i = b_i, i \in I)$  indica o valor da medida  $P\mu$  no conjunto

$$\{y \in \Omega : y_i = b_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Mostraremos que todos os tipos de operadores definidos até agora estão contidos nesta definição. Qualquer operador determinístico

pode ser considerado como um operador aleatório degenerado que transforma cada  $\delta$ -medida em  $\delta$ -medida. Suas probabilidades de transição são

$$\theta_i(y | x_{V(i)}) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = f_i(x_{V(i)}), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Cada operador de percolação  $P = R_\alpha D$  definido no capítulo 2 pode ser representado na forma (13) tomando  $V(i) = \{i+v_1, \dots, i+v_n\}$  e

$$\theta_i(1 | x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j = 0 \text{ para todo } j \in V(i), \\ 1 - \alpha & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um produto  $R_\alpha^\beta D$  é um operador do tipo acima com os mesmos bairros e probabilidades de transição

$$\theta_i(1 | x) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{se } f_i(x_{V(i)}) = 1, \\ \beta & \text{se } f_i(x_{V(i)}) = 0. \end{cases}$$

(Os valores  $\theta_i(0 | x)$  são iguais  $1 - \theta_i(1 | x)$ .) Dizemos que um operador aleatório é degenerado se pelo menos uma de suas probabilidades de transição for igual a zero e não-degenerado apenas se todas as suas probabilidades de transição são estritamente positivas. Por exemplo, todos os operadores de percolação e determinísticos são degenerados. Lemas 2.1 e 2.2 valem também na forma geral e podem ser provadas da mesma maneira.

**Teorema 5.1.** O conjunto  $\mathcal{M}$  de medidas normalizadas em  $\Omega$  é compacto, o que significa que em qualquer seqüência de elementos de  $\mathcal{M}$  é possível selecionar um subseqüência que converge para um elemento de  $\mathcal{M}$ .

**Prova do teorema 5.1.** Como o conjunto de cilindros finos é contável, podemos denotá-los por  $C_1, C_2, C_3, \dots$ . Agora tomemos uma seqüência arbitrária  $\mu_i \in \mathcal{M}$  e provemos que ela tem uma subseqüência convergente. Considere a seqüência de  $\mu_i(C_1)$ , i.e. valores de nossas medidas em  $C_1$ . Estes valores são números reais entre

zero e um, assim a seqüência deles tem uma subsequência convergente. Assim a seqüência  $\mu_i$  tem uma subsequência  $\mu_i^1$  de valores que converge em  $C_1$ . Defina  $\nu_1 = \mu_1^1$  e considere a seqüência de valores na

$$\mu_i^1(C_2), \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (14)$$

Novamente, esta seqüência tem um subsequência convergente, e assim a seqüência (14) tem um subsequência  $\mu_i^2$  de medidas cujo valores converge em  $C_1$  e  $C_2$ . Defina  $\nu_2 = \mu_1^2$  e considere valores das medidas

$$\mu_i^2(C_3), \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

Procedendo da mesma maneira, obtemos uma subsequência de valores que converge em  $C_3$  e assim por diante. Dessa forma podemos definir  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ , cujos valores convergem em todos os cilindros finos. Pelo lema 2.1 esta seqüência converge para uma medida normalizada. *Teorema 5.1 está provado.*

Chamamos uma medida  $\mu$  *invariante* para um operador  $P$  se  $P\mu = \mu$ . Se o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t \mu$  existe, então este limite é invariante para  $P$ . Então nossa tarefa de estudar ergodicidade em autômatos celulares está fortemente vinculada ao estudo das suas medidas invariantes.

**Teorema 5.2.** Qualquer operador  $P$  definido em (13) tem pelo menos uma medida invariante.

**Prova do teorema 5.2.** Ao aplicar nosso operador  $P$  iterativamente numa medida inicial arbitrária  $\mu$ , obtemos uma seqüência de medidas  $\mu, P\mu, P^2\mu, P^3\mu, \dots$ . Formemos outra seqüência de medidas  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ , onde

$$\psi_k = \frac{1}{k} (\mu + \dots + P^{k-1}\mu), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Do teorema 5.1 esta seqüência tem uma subsequência que converge para alguma medida  $\phi$ . Provaremos que  $\phi$  é invariante para  $P$ . Suponha que não seja, isto é existe um cilindro fino

$$C = \{y : y_i = a_i \text{ para todo } i \in I\}$$

onde  $I$  é um subconjunto finito de  $U$ , tal que  $\phi$  e  $P\phi$  têm valores diferentes em  $C$ :

$$\phi(C) \neq (P\phi)(C). \quad (16)$$

Denote  $H = |\phi(C) - (P\phi)(C)| > 0$  e denote também

$$C_a = \{x : x_i = a_i \ \forall i \in V(I)\}, \text{ para qualquer } a \in S_{V(I)}.$$

Pois  $I$  é finito,  $V(I)$  é finito também. Conseqüentemente  $S_{V(I)}$  também o é. Então podemos escrever a fórmula (13) como

$$(P\mu)(C) = \sum_a \mu(C_a) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | a).$$

Como a seqüência (15) tem um subseqüência que converge para  $\phi$ , podemos tomar  $k$  tão grande que

$$|\psi_k(C) - \phi(C)| < H/4$$

e

$$|\psi_k(C_a) - \phi(C_a)| < \frac{H}{4 \prod_{j \in V(I)} |S_j|} \quad (17)$$

para todo  $a \in S_{V(I)}$ , onde  $|S_j|$  é a cardinalidade de  $S_j$ . Também,

$$P\psi_k = \frac{1}{k} (P\mu + \dots + P^k \mu),$$

de onde

$$\psi_k(C) - (P\psi_k)(C) = \frac{\mu(C) - (P^k \mu)(C)}{k},$$

que não é em módulo maior que  $2/k$ . Isto é menor que  $H/4$  se escolhermos  $k > 8/H$ .

Também vamos provar que  $|(P\phi)(C) - (P\psi_k)(C)| < H/3$ :

$$|(P\phi)(C) - (P\psi_k)(C)| =$$

$$\left| \sum_{a_{V(I)}} \phi(x_I = a_I) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | a_{V(i)}) - \sum_{a_{V(I)}} \psi_i(x_I = a_I) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | a_{V(i)}) \right| = \left| \sum_{a_{V(I)}} (\phi - \psi_k)(x_I = a_I) \prod_{i \in I} \theta_i(b_i | a_{V(i)}) \right|. \quad (18)$$

Como todas as probabilidades de transição não excede 1,

$$\prod_{i \in I} \theta_i(b_i | a_{V(i)}) \leq 1.$$

Conseqüentemente de (17), (18) não excede  $H/4$ . Assim

$$|\phi(C) - (P\phi)(C)| \leq$$

$$|\phi(C) - \psi_k(C)| + |\psi_k(C) - (P\psi_k)(C)| + |P\psi_k(C) - (P\phi)(C)| \leq H/4 + H/4 + H/4 < H.$$

Esta contradição mostra que nossa suposição (16) é falsa. *O teorema 5.2 está provado.*

Na prática, freqüentemente precisamos de um teorema semelhante, porém mais geral. Esse teorema pode ser formulado como segue:

**Teorema 5.3.** Suponha que temos um subconjunto compacto convexo e não-vazio  $C$  de  $\mathcal{M}$  onde um autômato celular  $P$  atua. Suponha que exista  $\mu \in \mathcal{M}$  tal que  $P^t \mu$  pertence a  $C$  para todo  $t$ . Então  $P$  tem uma medida invariante que pertence a  $C$ .

Este teorema pode ser provado da mesma forma como foi o teorema 5.2 e nós deixamos sua prova para o leitor. Vamos usá-lo para dizer algo novo sobre operador de Stavskaya descrito no capítulo 2. Seja  $C$  o conjunto de medidas para o qual a densidade de zeros não excede  $1/3$ . Então, tomando a medida inicial concentrada em "todos uns" e  $\alpha$  tal que  $27\alpha/(1 - 27\alpha) < 1/3$  e aplicando o teorema 5.3, concluímos que este operador tem uma medida invariante em

$C$ . E continua verdadeiro se em vez de  $1/3$  tomarmos qualquer número positivo.

Nos capítulos anteriores deixamos muitos fatos importantes sem a devida prova. Para prová-los, noções de *monotonicidade* são muito úteis. Eles são discutidos, por exemplo, no capítulo 2 de [Discr], mas de uma maneira um pouco formal. Em essência, estas noções confirmam nossa intuição sobre ordem. Já falamos sobre operadores determinísticos monótonos e agora também falaremos sobre operadores monótonos aleatórios. Assuma que cada  $S_i$  é ordenado (mesmo que parcialmente). Por exemplo, se os elementos de  $S_i$  são números inteiros, eles podem ser ordenados como na reta. Usaremos os sinais  $\prec$  e  $\succ$  e as palavras *precede* e *sucede* ao referir-nos a esta ordem. Por exemplo, quando  $S_i \equiv \{0, 1\}$ , geralmente dizemos que  $0 \prec 1$  que significa que zero precede um ou (equivalentemente)  $1 \succ 0$  que significa que um sucede zero. Estas relações são generalizações das relações “menor que” e “maior que” nos números reais, mas neste caso pode haver elementos incomparáveis. Uma suposição importante é que para quaisquer  $a, b \in S_i$  tais que se  $a \prec b$  e  $b \prec a$ , então  $a = b$ . Vamos introduzir uma ordem parcial em  $\Omega$  dizendo que a configuração  $x$  precede a configuração  $y$  ou,  $y$  sucede  $x$  e escrevendo  $x \prec y$  ou  $y \succ x$  se  $x_i \leq y_i$  para todo  $i \in U$ . Dizemos que um operador determinístico  $D$  é monótono se  $x \prec y$  implicar  $Dx \prec Dy$ . Esta definição é consistente com o que dissemos antes. Dizemos que um conjunto mensurável  $S \subseteq \Omega$  é *superior* se

$$(x \in S, x \prec y) \implies y \in S.$$

Analogamente, um conjunto  $S \subseteq \Omega$  é *inferior* se

$$(y \in S, x \prec y) \implies x \in S.$$

É fácil verificar que o complementar de um conjunto superior é um conjunto inferior e vice-versa. Introduzimos uma ordem parcial em  $\mathcal{M}$  como: uma medida normalizada  $\mu$  precede  $\nu$  ou  $\nu$  sucede  $\mu$  se

$\mu(S) \leq \nu(S)$  para qualquer  $S$  superior (ou  $\mu(S) \geq \nu(S)$  para qualquer  $S$  inferior o que é equivalente). Dizemos que um operador  $P$  é monótono se  $\mu \prec \nu$  implicar  $P\mu \prec P\nu$ . Também dizemos que o operador  $P_1$  precede o operador  $P_2$  ou  $P_2$  sucede  $P_1$  e escrevemos  $P_1 \prec P_2$  ou  $P_2 \succ P_1$  se  $P_1\mu \prec P_2\mu$  para qualquer medida  $\mu$ . Observe que existem configurações incomparáveis, por exemplo  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ , até mesmo se todos os elementos de  $S_i$  for comparáveis. Semelhantemente existem medidas incomparáveis e operadores incomparáveis. Observe também que todas as nossas definições são consistentes: Considerando um operador determinístico como um operador aleatório degenerado, nossa definição de monotonicidade coincide.

**Lema 5.1.** Tomemos duas medidas produto  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ , onde  $\mu = \prod_i \mu_i$  e  $\nu = \prod_i \nu_i$ . Então  $\mu \prec \nu$  se e só se  $\mu_i \prec \nu_i$  para todo  $i$ .

**Prova** é fácil e a omitimos.

É claro que, superposição de operadores monótonos é monótono, assim para saber se uma superposição de dois operadores é monótona, é suficiente verificar monotonicidade de cada um deles separadamente. Como conferir monotonicidade de um operador?

**Proposição 5.1.** Um operador  $P$  definido por (13) na página 75 é monótono se e só se todas as distribuições de transição  $\theta_i(\cdot | x)$  são funções monótonas de  $x$ , isto é

$$(x \prec y) \implies \theta_i(\cdot | x) \prec \theta_i(\cdot | y). \quad (19)$$

Por exemplo, todos os operadores de percolação satisfazem esta condição e então são monótonos.

**Prova da proposição 5.1.** *Numa direção:* suponha que (19) seja falso, isto é que existe  $i$  e  $y \prec z$  tal que  $\theta_i(\cdot | y)$  não precede  $\theta_i(\cdot | z)$ . Então  $\delta(y) \prec \delta(z)$  serve como esse  $\mu \prec \nu$  para o qual  $P\mu$  não precede  $P\nu$  porquê ambos são medidas produto e o  $i$ -ésimo fator de  $P\mu$  não precede o  $i$ -ésimo fator de  $P\nu$ . Pelo lema 5.1 isto é suficiente. *Na direção oposta:* também segue do lema 5.1.

**Proposição 5.2.** Dados dois operadores  $P_1$  e  $P_2$  com os mesmos  $\Omega$  e  $\mu$  e distribuições de transição  $\theta_i^1(\cdot|x)$  e  $\theta_i^2(\cdot|x)$  respectivamente. Então  $P_1 \prec P_2$  se e só se

$$\theta_i^1(\cdot|x) \prec \theta_i^2(\cdot|x) \text{ para todo } i \in U \text{ e } x \in \Omega. \quad (20)$$

**Prova da proposição 5.2.**

*Numa direção:* Suponha que  $\theta_i^1(\cdot|y)$  não precede  $\theta_i^2(\cdot|y)$  para algum  $i \in U$  e algum  $y \in \Omega$  e prove que  $P_1$  não precede  $P_2$ , isto é, que existe uma medida  $\mu$  tal que  $P_1 \mu$  não precede  $P_2 \mu$ . Tome  $\mu = \delta(y)$ . Então ambos  $P_1 \mu$  e  $P_2 \mu$  são medidas produto e o  $i$ -ésimo fator viola a condição do lema 5.1, de onde  $P_1 \mu$  não precede  $P_2 \mu$ .

*Na outra direção:* Agora assuma (20) e prove que  $P_1 \mu \prec P_2 \mu$  para todo  $\mu$ . É suficiente provar para uma  $\delta$ -medida, o resultado segue do lema 5.1. *Assim a proposição 5.2 está provada.*

De agora em diante assumimos que todos os  $S_i$  são iguais a  $\{0, 1\}$  e aplicaremos a teoria de monotonicidade.

**Lema 5.2.** Faça  $S_i \equiv \{0, 1\}$ . Se  $P$  é monótono, então seqüências  $P^t \delta_0$  e  $P^t \delta_1$  convergem.

**Prova** É fácil provar por indução que

$$\delta_0 \prec P\delta_0 \prec P^2\delta_0 \prec P^3\delta_0 \prec P^4\delta_0 \dots$$

e

$$\delta_1 \succ P\delta_1 \succ P^2\delta_1 \succ P^3\delta_1 \succ P^4\delta_1 \dots$$

Em todos os casos a primeira desigualdade é evidente pois  $\delta_0 \prec \mu \prec \delta_1$  para qualquer medida  $\mu$  e todas as outras desigualdades seguem desta. Assim para qualquer conjunto superior ou inferior  $C$  as seqüências  $P^t \delta_0(C)$  e  $P^t \delta_1(C)$  são monótonas e então todos eles tem um limite. Agora tome um cilindro fino qualquer  $C$  e denote

$$\bar{C} = \{x \mid \exists y \in C : y \prec x\} \text{ e } \bar{C}' = \bar{C} \setminus C.$$

É fácil mostrar que  $\overline{C}$  e  $\overline{C'}$  são conjuntos superiores, assim os valores de  $P^t \delta_0$  e  $P^t \delta_1$  para estes conjuntos têm limites. Então seus valores para  $C$  também tem limite o que indica que estas medidas têm limite. *O lema 5.2 está provado.*

Um exemplo de aplicação do lema 5.2: a seqüência  $P^t \delta_1$  para o operador de Stavskaya  $P$  tem um limite; assim de (8)

$$(P^t \delta_1)(x_0 = 0) \leq \frac{27\alpha}{1 - 27\alpha} \text{ para todo } t,$$

a mesma desigualdade é verdade para a medida limite, onde para pequenos valores de  $\alpha$  o operador de Stavskaya apresenta pelo menos duas medidas invariantes distintas.

Agora concluímos a prova do teorema 2.1. Segue da proposição 5.2 que se temos dois operadores de percolação  $P_1$  e  $P_2$  com bairros  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente e  $V_1 \subset V_2$ , então  $P_1 \prec P_2$ . Isto implica o restante do teorema 2.1 imediatamente.

Provaremos agora o lema 2.4 e assim concluímos a prova do teorema 2.3. Assuma que nosso operador  $P = R_\alpha^\beta D$  é não-ergódico. Do teorema 5.2 sabemos que  $P$  tem uma medida invariante  $\mu$ . Suponha que existe  $\nu$  tal que  $P^t \nu$  não tende para  $\mu$ . Isto significa que existe um cilindro fino  $C$  tal que  $(P^t \nu)(C)$  não tende para  $\mu(C)$ . Isto significa que existe  $H > 0$  tal que para qualquer  $T$  existe  $t \geq T$  tal que

$$|(P^T \nu)(C) - \mu(C)| \geq H. \quad (21)$$

Denote por  $I$  o suporte de  $C$  e  $m$  o número de pontos em  $I$ . Agora escolha as condições iniciais das distribuições marginais de  $x$  e  $y$  de acordo com  $\mu$  e  $\nu$  respectivamente. Escolha  $T$  tão grande que  $p_t < H/m$  para todo  $t \geq T$ . Então para qualquer ponto  $(v, t)$ , onde  $t \geq T$ , a probabilidade que ele seja um ponto de diferença não excede  $p_t < H/m$  e então para quaisquer  $m$  pontos a probabilidade que pelo menos um deles seja um ponto de diferença é menor que  $H$ . Denote  $E_x(t)$  o evento "o processo  $x$

no tempo  $t$  está em  $C$ ” e  $E_y(t)$  o evento “o processo  $y$  no tempo  $t$  está em  $C$ ”. A diferença simétrica  $\Delta E$  desses dois eventos está contida no evento “pelo menos um dos pontos  $(v, t), v \in I$  é ponto de diferença”. Mas sabemos que a probabilidade deste evento é menor que  $H$ , assim a probabilidade de  $\Delta E$  também é menor que  $H$ , logo a diferença de probabilidades de  $E_x(t)$  e  $E_y(t)$  também é menor que  $H$ . Mas isto contradiz (21). Esta contradição prova que nossa suposição sobre não-ergodicidade de  $P$  é falsa. Daí o Lema 2.4 e teorema 2.3 estão provados.

Provaremos agora o teorema 3.4. Desde que  $R_\alpha^\beta \prec R^\beta$ ,

$$(R_\alpha^\beta D)^t \delta_0 \prec (R^\beta D)^t \delta_0$$

para todo  $t$ . Mas para  $\beta$  pequeno o bastante a densidade de uns em  $(R^\beta D)^t \delta_0$  não excede  $1/3$  para todo  $t$  desde que  $\beta$  seja pequeno o suficiente. Então a densidade de uns em  $(R_\alpha^\beta D)^t \delta_0$  também não excede  $1/3$  para todo  $t$ . Então do teorema 5.3 o operador  $R_\alpha^\beta D$  tem uma medida invariante  $\mu_0$ , donde a densidade de uns não excede  $1/3$ . Mas, como  $D$  também é um 1-eroder, podemos usar argumentos semelhantes para provar que  $R_\alpha^\beta D$  tem uma medida invariante  $\mu_1$ , daí a densidade de zeros não excede  $1/3$ . Então  $\mu_0 \neq \mu_1$ . O Teorema 3.4 está provado.

Assim apresentamos um autômato celular não-ergódico e não-degenerado em  $U = \mathbb{Z}^2$ . Construções e argumentos semelhantes podem ser apresentados para todo  $U = \mathbb{Z}^d, d > 1$ , isto é para todas as dimensões maiores que um. Existem autômatos celulares não-ergódicos e não-degenerados no espaço unidimensional?

Por muito tempo era comum na física estatística acreditar que transições físicas só podiam acontecer em sistemas com dimensões maiores que um. Por exemplo, §152 da monografia de Landau e Lifshitz [Lan+Lif] é chamado “A impossibilidade da existência de fases em sistemas unidimensionais” é um argumento de estilo físico é apresentado em defesa dessa impossibilidade. Outro exemplo: “Na dimensão um bosons não condensam, elétrons não

fazem supercondução, ferromagnetos não magnetizam, e líquidos não gelam” [Lie+Mat], pág. vi.<sup>11</sup> Porém, todas estas idéias foram formadas com modelos de equilíbrio que não tem parâmetro de tempo. Autômatos celulares, além de coordenadas espaciais, tem o parâmetro “tempo”. Este parâmetro deve ser contado como uma dimensão adicional? Os resultados modelados [Pet+Pia+Vas] não sugere isso. Depois a *conjectura de taxas positivas* foi proposta por vários autores baseados em várias considerações informais defendem que todo autômato celular aleatório e uniforme não-degenerado unidimensional é ergódico. (veja, por exemplo, Capítulo 4, seção 3 de [Liggett], ou pág. 115 de [Discr] ou [Gray]).

Porém, nada pode substituir uma prova rigorosa. Os sistemas que os matemáticos consideram, podem ser muito complicados e muito mais geral que esses que surgem em considerações físicas, e pode contradizer a intuição física. Agora a conjectura de taxas positivas é refutada: Gács propõe um sistema unidimensional uniforme não-ergódico e não-degenerado. Como a maioria dos exemplos apresentados neste curso, o sistema de Gács na verdade é um operador que atua em  $\Omega = S^{\mathbb{Z}}$ , que é uma composição de um operador determinístico e outro aleatório que transforma cada estado de cada componente em qualquer outro estado com uma probabilidade pequena independentemente. A principal propriedade do sistema é que erros não se acumulam, de forma que a densidade das componentes em estados errados é sempre pequena. O sistema é muito complicado e alguns defeitos foram achados em sua primeira versão, mas agora todos eles foram corrigidos e uma versão atualizada do sistema de Gács será publicada logo como [Gacs]. Ele usa mais de duzentas páginas para descrever e precisa, embora finito, de um número muito grande de elementos do conjunto  $S$  de estados de cada componente. Apesar de ser positiva, a probabilidade de erro é muito pequena. Ultimamente eu pedi para Gács estimar, pelo menos grosseiramente, os parâmetros de sua construção. Ele

---

<sup>11</sup>Nossa nota 1.4 também indica nesta direção.

não estava seguro, mas sugeriu  $2^{100}$  como uma estimativa grosseira do número de estados e um dividido pela raiz quadrada deste número como uma estimativa grosseira da probabilidade do erro. Embora o resultado de Gács seja teoricamente muito importante, estes números fazem uma aplicação prática muito improvável. Seria interessante descobrir, se um número grande de estados e uma probabilidade pequena de erro são realmente necessários. Bem como estudar várias construções unidimensionais simples com propriedades semelhantes a da transição fásica.

### Notas.

5.1. *Exercício.* Dado duas medidas  $\mu$  e  $\nu$  de um mesmo espaço, tal que  $\mu \prec \nu$  e  $\nu \prec \mu$ . O que você pode concluir sobre  $\mu$  e  $\nu$ ?

5.2. *Exercício.* Na prova do lema 5.1 e do teorema 5.1 usamos a condição que todo os  $S_i$  são finitos? O Lema 5.1 e o teorema 5.1 permanecem verdadeiros se algum  $S_i$  for infinito?

5.3. *Exercício.* Prove que o operador  $R_\alpha^\beta$  é monótono se e só se  $\alpha + \beta \leq 1$ .

5.4. *Exercício.* Vamos chamar um operador aleatório  $P$  anti-monótono se  $\mu \prec \nu \Rightarrow P\mu \succ P\nu$ .

a) Prove que  $R_\alpha^\beta$  é anti-monótono se e só se  $\alpha + \beta \geq 1$ .

b) Prove que a superposição de dois operadores anti-monótonos é monótono.

c) Um operador pode ser nem monótono nem anti-monótono?

d) Prove uma proposição análoga a 5.1: Um operador  $P$  definido por (13) na página 75 é anti-monótono se e só se

$$(x \prec y) \implies \theta_i(\cdot | x) \succ \theta_i(\cdot | y).$$

e) O que você pode dizer sobre um operador que é monótono e anti-monótono ao mesmo tempo?

5.5. *Exercício.* Prove que o operador  $R_\alpha^\beta D_{NLC}$  é ergódico sempre que  $2/3 < \alpha + \beta < 4/3$ .

5.6. *Exercício.* Por *acoplamento* de duas ou mais medidas entendemos uma medida num produto de seus espaços cujas marginais são estas medidas. Prove que para duas medidas  $\mu$  e  $\nu$  num mesmo espaço,  $\mu \prec \nu$  se e só se existe um acoplamento de  $\mu$  e  $\nu$  de tal forma que  $x \prec y$  q.c., onde  $x$  e  $y$  são as configurações nos primeiro e segundo espaços.

5.7. *Problema não resolvido.* Unicidade de uma medida invariante implica ergodicidade? Noutras palavras, existe autômato celular não-ergódico, com só uma medida invariante?

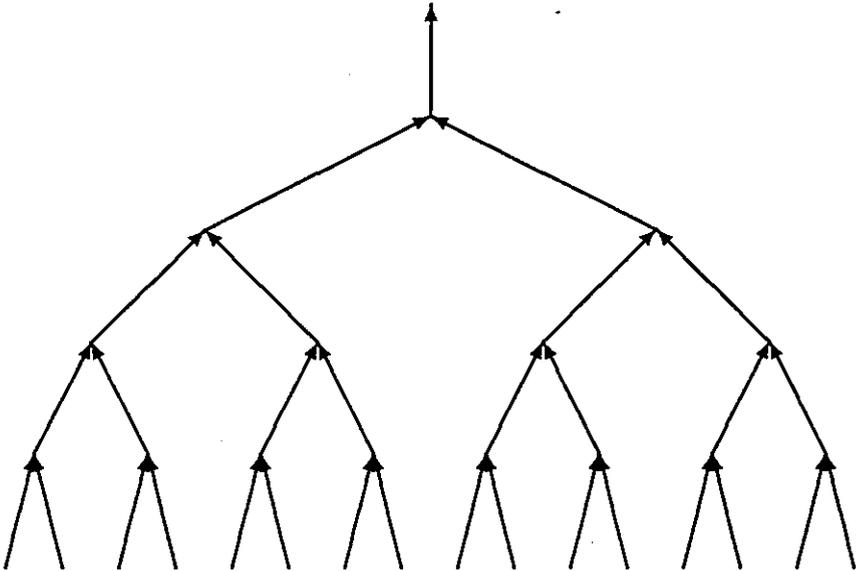
5.8. *Aproximação de meio-campo.* Considere um operador de Stavskaya no qual todos os pontos são aleatoriamente misturados depois de cada unidade de tempo. Neste caso um parâmetro  $x_t$ , a densidade de zeros, é suficiente para descrever o que acontece em cada passo. Este parâmetro é determinado, em cada momento, pelas condições:

$$x_0 = 0, \quad x_{t+1} = \alpha + (1 - \alpha) x_t^2. \quad (22)$$

Prove que o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t$  existe e estude seu comportamento de acordo com o parâmetro  $\alpha$ . Para que valores de  $\alpha$  este limite é igual a 1 e para quais valores de  $\alpha$  este limite é menor que 1? É claro que o comportamento de  $x_t$  é diferente do comportamento da densidade de zeros no tempo  $t$  no processo de Stavskaya. No entanto, suas qualidades são similares: em ambos os casos o valor crítico de  $\alpha$  existe. Na Física tais aproximações de processos complexos por simples repetições são chamadas "aproximações de meio-campo" porque elas podem ser interpretados como uma substituição de partículas e suas interações por algumas distribuições uniformes no meio-campo descritas por um só parâmetro - densidade. Também, a iteração (22) é exata para um operador análogo num grafo especial conhecido como grafo de Bethe mostrado na figura 5.1.

5.9. *Exercício.* Escreva uma aproximação de meio-campo para o operador  $R_\alpha^\beta D_{NLC}$  e estude para que valores dos parâmetros ela

é ergódico.



*Figura 5.1. Parte do grafo de Bethe onde a aproximação de meio-campo é exata porque qualquer medida-produto se transforma numa medida produto.*

### Principais conceitos e notações

$\mathbb{Z}^d$  - o espaço inteiro  $d$ -dimensional, um produto de  $d$  fatores iguais a  $\mathbb{Z}$ , onde  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{R}^d$  - o espaço real  $d$ -dimensional - um produto de  $d$  fatores iguais a  $\mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais.

*Caminho num grafo* - uma seqüência finita ou infinita “vértice-elo-vértice-elo...”, onde cada elo conecta os vértices entre os quais ele está localizado na seqüência.

*Caminho auto-evitando* - um caminho, onde todos os termos são diferentes.

*Contorno* - um caminho, no qual o primeiro e último vértices coincidem.

$U$  - um conjunto finito ou contável, discreto análogo ao espaço físico. Elementos de  $U$  são chamados pontos.

$S_i$  - o conjunto de estados da  $i$ -ésima componente, onde  $i \in U$ .

*Espaço de configuração* - espaço produto  $\Omega = \prod_{i \in U} S_i$ . Maior atenção é dada ao caso  $S_i \equiv \{0, 1\}$ , isto é  $\Omega = \{0, 1\}^U$ .

*Configuração* - um elemento do espaço de configuração. Cada configuração  $x$  tem componentes  $x_i$  para todos  $i \in U$ .

$I_a(x)$  - o conjunto de pontos  $i \in U$  onde  $x_i = a$ .

*Cilindro fino* - subconjunto de  $\Omega$  da forma

$$\{x \in \Omega : x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}\}.$$

*Suporte* deste cilindro fino é o conjunto  $\{i_1, \dots, i_n\}$ .

*Medida normalizada*  $\mu$  em  $\Omega$  é definida por seus valores em cilindros finos. A palavra "normalizada" quer dizer  $\mu(\Omega) = 1$  e na maioria dos casos está omitida.

$\mathcal{M}$  - conjunto de medidas normalizadas em  $\Omega$ .

$\delta$ -medida  $\delta(x)$  - medida concentrada numa configuração  $x$ . Medidas  $\delta_0$  e  $\delta_1$  são concentradas em "todos zeros" e "todos uns".

*Medida produto* - medida num espaço produto, no qual todas as marginais são independentes.

*Autômato celular* - o mesmo que *operador* linear  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , que transforma qualquer  $\delta$ -medida  $\delta(x)$  numa medida produto, do qual o  $i$ -ésimo fator depende de  $x_{V(i)}$ , onde  $V(i)$  é finito para todo  $i$  e  $x_{V(i)}$  é restrição de  $x$  para  $V(i)$ .

$P\mu$  - resultado da aplicação do operador  $P$  para a medida  $\mu$ .

*Distribuição transitiva*  $\theta_i(\cdot | x)$  - distribuição da  $i$ -ésima componente de acordo com a medida  $P\delta(x)$ .

*Probabilidade de transição*  $\theta_i(y | x)$  - probabilidade que a  $i$ -ésima componente  $y$  concorde com a medida  $P\delta(x)$ .

*Medida degenerada* - uma medida que é igual a zero pelo menos num cilindro fino.

*Autômato celular degenerado* - um autômato celular, onde pelo menos uma das probabilidades de transição seja igual a zero.

*Superposição*  $PQ$  de dois operadores  $P$  e  $Q$  - um operador cuja ação resulta primeiro da ação de  $Q$ , e depois da ação de  $P$ .

*Medida uniforme* - uma medida, que é invariante sobre todas as translações de espaço.

*Operador uniforme* - um operador que comuta com todas as translações de espaço.

*Medida invariante* - uma medida  $\mu \in \mathcal{M}$  é dita invariante para operador  $P$  se  $P\mu = \mu$ .

*Ergodicidade* - operador  $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é dito *ergódico* se o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t \mu$  existe e é o mesmo para tudo  $\mu \in \mathcal{M}$ .

*Monotonicidade* -

Um operador determinístico  $D$  é dito *monótono* se

$$x \prec y \implies Dx \prec Dy.$$

Um operador aleatório  $P$  é *monótono* se

$$\mu \prec \nu \implies P\mu \prec P\nu.$$

*Acoplamento de duas ou mais medidas* - uma medida num espaço produto cujas marginais são estas medidas.

*Acoplamento de dois ou mais processos* - um processo num espaço produto cujas marginais são estes processos.

*x-eroder* - um autômato celular determinístico  $D$ , para o qual a configuração  $x$  é invariante e para cada desvio finito  $y$  de  $x$  existe  $t$  tal que  $D^t y = x$ .

*0-eroder* -  $x$ -eroder para  $x =$  "todos zeros".

*1-eroder* -  $x$ -eroder para  $x =$  "todos uns".

*Translação*  $S+v$  de um conjunto  $S$  de um vetor  $v$  num espaço linear - o conjunto  $\{i+v \mid i \in S\}$ .

*Soma e diferença vetorial* de dois conjuntos num espaço linear:

$$S_1 \pm S_2 = \{i \pm j \mid i \in S_1, j \in S_2\}.$$

*Conjunto convexo* - um conjunto num espaço linear o qual com pontos  $a$ ,  $b$  contém também o segmento  $[a, b]$ .

*Envelope convexo* de um conjunto  $S$  num espaço linear - interseção de todos os conjuntos convexos que contêm  $S$ . É o conjunto convexo "minimal" que contém  $S$  no sentido que nenhum de seus subconjuntos próprios convexos contenha  $S$ .

*Máquina de Turing* - uma máquina abstrata proposta por Turing como uma formalização da noção de algoritmo.

## Referências

- [Ben+Gri] C. Bennett and G. Grinstein. Role of Irreversibility in Stabilizing Complex and Nonergodic Behavior in Locally Interacting Discrete Systems. *Phys. Rev. Letters*, v. 55 (1985), n. 7, pp. 657-660.
- [Ber+Sim] P. Berman and J. Simon. Investigations of Fault-Tolerant Networks of Computers *ACM Symp. on Theory of Computing*, 20 (1988), pp. 66-77.
- [Bra+Gra] M. Bramson and L. Gray. A useful renormalization argument. *Random Walks, Brownian Motion and Interacting Particle Systems: a Festschrift for F. Spitzer*. Ed. by R. Durrett and H. Kesten. Birkhäuser, Boston, MA, 1991, pp. 113-152.
- [Cell] A. Toom. Cellular Automata with Errors: Problems for Students of Probability. *Topics in Contemporary Probability and its Applications*. Ed. J. Laurie Snell. Series *Probability and Stochastics* ed. by Richard Durrett and Mark Pinsky. CRC Press, 1995, pp. 117-157.
- [Discr] Discrete local Markov systems. A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. *Stochastic Cellular Systems : ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications, Manchester University Press, 1990, pp. 1-182.

- [Fer+Gal] Pablo Ferrari e Antonio Galves. Acoplamento e processos estocásticos. IMPA, 1997.
- [Fontes] Luiz Renato Fontes. Notas em percolação. IMPA, 1996.
- [Gacs] P. Gács. Reliable cellular automata with self-organization. To appear in *Journal of Stat. Physics*, 2001.
- [Galperin] G. Galperin. Homogeneous local monotone operators with memory. Doklady of Soviet Acad. of Sciences, 228, 1976, pp. 277-280.
- [Gray] L. F. Gray. The Positive Rates Problem for Attractive Nearest Neighbor Spin Systems on  $Z$ . *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, V. 61, 1982, pp. 389-404.
- [Grimmett] Geoffrey Grimmett. Percolation. Springer, 1999.
- [Kesten] Harry Kesten. Percolation theory for mathematicians. Birkhäuser, 1982.
- [Kurdyumov] G. L. Kurdyumov. An algorithm-theoretic method in studying homogeneous random networks, In: R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, and A. L. Toom (editors). *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology*. Lecture Notes in Mathematics, 653, Springer, 1978, pp. 37-55.
- [Lan+Lif] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. Statistical Physics. (Vol. 5 of *Course of Theoretical Physics*.) 2-d Edition. Pergamon Press, 1969.
- [Leb+Mae+Spe] J. L. Lebowitz, C. Maes and E. R. Speer. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *Journal of Stat. Physics* 59, 1-2, 1990, 117-170.
- [Lie+Mat] Mathematical Physics in One Dimension. Exactly Soluble Models of Interacting Particles. A Collection of Reprints with Introductory Text by Elliott H. Lieb and Daniel C. Mattis. N.Y., Academic Press, 1966.

- [Liggett] Thomas M. Liggett. Interacting Particle Systems. N.Y., Springer-Verlag, 1985.
- [Minsky] Marvin L. Minsky. Computation: finite and infinite machines. Prentice-Hall, 1967.
- [Petri] N. Petri. The unsolvability of the problem of discerning of annulling iterative nets. *Studies in the theory of algorithms and mathematical logic*, Moscow, Nauka, 1979.
- [Pet+Pia+Vas] M. Petrovskaya, I. Piatetski-Shapiro, and N. Vasilyev. Modelling of voting with random errors. *Automatics and Telemechanics*, v.10, 1969, pp. 103-107.
- [Rockafellar] R. Tyrrell Rockafellar. Convex analysis. Princeton University Press, 1970.
- [Sta+Pia] O. Stavskaya and I. Piatetski-Shapiro. On homogeneous nets of spontaneously active elements. *Systems Theory Res.*, v. 20 (1971), pp. 75-88.
- [Tof+Mar] T. Toffoli and N. Margolus. Programmable matter, Concepts and realization. *Physica D*, 47, 1991, 263-272.
- [T-80] A. Toom. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. *Multicomponent Random Systems*, ed. by R. Dobrushin and Ya. Sinai. Advances in Probability and Related Topics, Dekker, v. 6, 1980, pp. 549-576.
- [T-94] A. Toom. On critical phenomena in interacting growth systems. Parts I, II. *Journal of Stat. Physics*, v. 74, n. 1/2, 1994, pp. 91-130.
- [T-00] A. Toom. Algorithmical unsolvability of the ergodicity problem for binary cellular automata. *Markov Processes and Related Fields*, v. 6, n. 4, 2000, pp. 569-577.
- [Wang] Hao Wang. Popular lectures on mathematical logic. Dover publications, Inc., New York, 1981.

Impresso na Gráfica do



pele Sistema Xerox / 5390