

# 22<sup>o</sup> COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

TÓPICOS DE EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

BRUNO C. AZEVEDO SCÁRDUA

IMPA 26 - 30 JULHO, 1999



BRUNO C. AZEVEDO SCÁRDUA (IMPA, RJ)

COPYRIGHT © by Bruno C. Azevedo Scárdua  
CAPA by Sara Müller

ISBN 85-244-8148-6



**Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

**Estrada Dona Castorina, 110 - Jardim Botânico**

**22460-320 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil**

## Prefácio

Muitas das maiores descobertas em Matemática estão diretamente ligadas às Equações Diferenciais Ordinárias. De um modo geral, a modelagem de fenômenos os mais diversos (estudos populacionais, problemas físicos, fenômenos químicos, biológicos e meteorológicos, etc) depende de forma direta de uma boa compreensão das propriedades locais, globais e assintóticas de uma classe de equações diferenciais, que dependerá do problema em questão. Por outro lado, também por razões históricas, este ramo da Matemática teve um notável desenvolvimento, sobretudo após Newton, Cauchy e Poincaré, entre outros. Mais recentemente, com o advento da teoria dos Sistemas Dinâmicos, e a utilização de técnicas de Topologia Diferencial, o tema ganhou novo impulso e na atualidade novas frentes de pesquisa começam a evoluir rapidamente como os Sistemas Dinâmicos Estocásticos, com a utilização de técnicas de Processos Estocásticos. Um bom conhecimento dos resultados clássicos da teoria das EDOs, assim como uma boa noção de suas aplicações mais frequentes são portanto imprescindíveis a alguém que se propõe a ter uma boa trajetória em Ciências Naturais Exatas, e mesmo algumas outras áreas da Ciência.

Existe uma vasta literatura em Matemática tratando das equações diferenciais ordinárias, com vários livros que apresentam a teoria de forma robusta e matematicamente elegante. Por outro lado, poder vislumbrar o alcance e poder de aplicação é sempre uma motivação adicional e fator de melhor de compreensão de qualquer nova teoria. Assim sendo, meu objetivo principal ao escrever este livro foi o de motivar os estudantes, não apenas de Matemática, para o estudo das equações diferenciais, partindo de exemplos e aplicações para chegar aos resultados clássicos centrais que normalmente são vistos em um curso canônico de EDO. Deste modo, teoremas como o Teorema de Existência e Unicidade das soluções (Teorema de Picard) e o Teorema Separação de Sturm têm sua motivação em situações geometricamente interessantes, no caso existência e espalhamento de geodésicas numa superfície no espaço euclidiano. Outros resultados, como os Teoremas de Liapounov versando sobre a estabilidade local de soluções próximo a um ponto singular, são motivados por problemas físicos quotidianos, como estabilidade de pêndulos, circuitos elétricos, reguladores mecânicos e outros sistemas físicos, e que muitas vezes não nos damos conta de que são exemplos bastante ilustrativos de aplicações das EDOs.

Este livro foi portanto escrito segundo minha visão particular do que é relevante e imprescindível num primeiro curso de equações diferenciais ordinárias, após aquele contido no programa dos cursos de Cálculo da graduação. Assim sendo, tentei ressaltar o caráter universal, assim como a dualidade “formalismo *versus* motivação e intuição físico-geométrica”, que devem compor um texto sobre o tema. Espero ter alcançado parcialmente o objetivo inicial e que o livro possa ser útil a estudantes de Matemática, Física, Economia, Ciências Exatas e de um modo geral todos que apreciam a Matemática em geral e que de alguma forma tenham o seu interesse voltado para este tema.

Gostaria de agradecer ao Professor Elon Lages Lima, meu mestre, pela idéia de escrever este texto, assim como pelo estímulo, por suas sugestões e muitos ensinamentos. Agradeço também ao Professor Manoel P. do Carmo que me ensinou a apreciar de forma especial a Matemática, sobretudo a Geometria. Finalmente agradeço ao IMPA/CNPq pelo suporte durante a elaboração deste texto<sup>1</sup>.

Rio de Janeiro, Maio de 1999.

Bruno C. Azevedo Scárdua

---

<sup>1</sup>N.B: A numeração é feita por capítulo e de forma independente para teoremas, proposições, lemas, afirmações, observações e exemplos. As figuras são numeradas independentemente do capítulo.

## ÍNDICE

|  |    |
|--|----|
| Prefácio . . . . .   | 1  |
| Capítulo I—Noções Fundamentais . . . . .                                 | 5  |
| 1. Primeiros Exemplos de EDOs na natureza . . . . .                      | 5  |
| 2. O conceito de EDO . . . . .   | 12 |
| 3. O Teorema de Picard . . . . .   | 14 |
| 4. O intervalo maximal . . . . .   | 16 |
| 5. Dependência das soluções com relação as condições iniciais . . . . .  | 18 |
| 6. Diferenciabilidade das soluções . . . . .                             | 22 |
| 7. Equações de ordem superior . . . . .                                  | 25 |
| 8. Exercícios do Capítulo I . . . . .                                    | 26 |
| Capítulo II—Campos de Vetores . . . . .                                  | 27 |
| 1. O Teorema do Fluxo Local . . . . .                                    | 27 |
| 2. O Teorema do fluxo tubular . . . . .                                  | 29 |
| 3. Conjuntos Limites . . . . .   | 35 |
| 4. O Teorema de Poincaré Bendixson . . . . .                             | 36 |
| 5. Campos gradientes . . . . .   | 41 |
| 6. Integrais Primeiras . . . . .   | 45 |
| 7. Exercícios do Capítulo II . . . . .                                   | 47 |
| Capítulo III—Equações Lineares . . . . .                                 | 49 |
| 1. Solução geral . . . . .   | 49 |
| 2. Equações lineares a coeficientes constantes . . . . .                 | 53 |
| 3. Sistemas bidimensionais . . . . .                                     | 54 |
| 4. Equações lineares de ordem superior . . . . .                         | 59 |
| 5. Sistemas lineares hiperbólicos . . . . .                              | 61 |
| 5. Classificação topológica dos sistemas lineares hiperbólicos . . . . . | 65 |
| 5. Exercícios do Capítulo III . . . . .                                  | 67 |
| Capítulo IV—Estabilidade de Equações Diferenciais . . . . .              | 68 |
| 1. Estabilidade de Liapounov . . . . .                                   | 68 |
| 2. Introdução à Teoria da Perturbação . . . . .                          | 74 |
| 3. Um pouco de estabilidade estrutural . . . . .                         | 77 |
| 4. Exercícios do Capítulo IV . . . . .                                   | 81 |
| Capítulo V—Aplicações à Geometria Diferencial . . . . .                  | 82 |
| 1. Superfícies Regulares . . . . .                                       | 82 |
| 2. A primeira forma fundamental . . . . .                                | 83 |
| 3. Superfícies em $\mathbb{R}^3$ , A Aplicação Normal de Gauss . . . . . | 84 |
| 4. Transporte paralelo . . . . .   | 85 |

|   |            |
|---|------------|
| 5. Fluxo geodésico e Aplicação exponencial . . . . .          | 89         |
| 6. Campos de Jacobi . . . . .                                 | 93         |
| 7. Teoria de Sturm . . . . .                                  | 100        |
| 8. O Teorema de Comparação de Rauch (em dimensão 2) . . . . . | 106        |
| 9. O Teorema de Hadamard . . . . .                            | 111        |
| 10. Exercícios do Capítulo V . . . . .                        | 113        |
| <b>Capítulo VI – Aplicações à Física . . . . .</b>            | <b>114</b> |
| 1. Circuitos Elétricos . . . . .                              | 114        |
| 2. As Leis de Kirchhoff . . . . .                             | 116        |
| 3. O circuito R-L . . . . .                                   | 117        |
| 4. O circuito R-L-C . . . . .                                 | 118        |
| 5. O regulador de Watt-Vichnégradski . . . . .                | 120        |
| <b>Bibliografia . . . . .</b>                                 | <b>124</b> |

## CAPÍTULO I - Noções fundamentais

### 1. Primeiros exemplos de EDOs na natureza

Começaremos este livro com alguns exemplos que ilustram como surgiram as EDOs no estudo dos fenômenos da natureza. Utilizaremos problemas de um certo ponto de vista simples, mas conceitualmente muito importantes para o desenvolvimento das Ciências Naturais ao longo da História. A escolha destes exemplos, devo confessar, foi um pouco influenciada pelo gosto pessoal deste autor.

**Exemplo 1** (*Crescimento populacional (1 espécie)*). Neste primeiro exemplo estamos interessados em determinar o tamanho de uma população em função do tempo, assumindo que sua taxa de crescimento (eventualmente negativa) é conhecida (por meio estatísticos, por exemplo). Problemas desta natureza modelam situações diversas como a evolução da população de bactérias numa cultura, ou de uma certa população humana sujeita a uma determinada epidemia. Aqui a hipótese mais frequente é a de que a taxa de variação da população (crescimento ou diminuição) em um certo tempo  $t \geq 0$ , é proporcional ao número total de indivíduos, ou seja, à população total neste mesmo instante  $t$ . Assim, se  $x(t)$  denota a população no instante  $t$ , temos que

$$\frac{dx}{dt}(t) = Kx(t)$$

onde  $K \in \mathbb{R}$  é a constante de proporcionalidade que se supõe conhecida.

Como se sabe do Cálculo, as soluções da equação diferencial acima são obtidas da seguinte forma:

$$\frac{dx}{x} = K dt \implies d \log x = d(Kt) \implies [\log x]_0^{t_1} = [Kt]_0^{t_1}$$

$$\implies \log x(t_1) = \log x(0) + Kt_1, \forall t_1 \geq 0$$

e logo as soluções são da forma

$$x(t_1) = x(0) \cdot e^{Kt_1}$$

onde  $x(0)$  representa a população inicial, ou seja, o número total de indivíduos no instante  $t = 0$ , em que iniciamos o processo de avaliação.

**Exemplo 2** (*O sistema predador-presa*).

Consideremos um eco-sistema simplificado consistindo de um predador (população  $y$ ) e sua presa (população  $x$ ). Assumiremos que a taxa de crescimento da população de predadores é função apenas do suprimento de alimentos (presas) per capita e que esta razão é constante, digamos  $C > 0$ . Evidentemente, devemos ter um valor mínimo  $C_0$  para

$C$  para que a população de predadores não decresça. Uma maneira simples de garantirmos isto é tomarmos a taxa de crescimento como uma função linear desta razão per capita da forma  $k(C - C_0)$ ,  $k > 0$ . Assim obtemos

$$\frac{dy}{dt} = k(C - C_0)y(t)$$

onde  $t \geq 0$  denota o tempo.

Em particular obtemos

$$y(t) = y(0) \cdot \exp[tk(C - C_0)]$$

Assim, o comportamento assintótico da população depende, como era de se esperar, do sinal da diferença  $C - C_0$ .

Vamos assumir que a taxa de presas abatidas é proporcional ao número de encontros entre predadores e presas, que tomaremos em nosso modelo proporcional ao produto  $xy$ . Deste modo o suprimento per capita de alimentos (por predador) no tempo  $t$  é proporcional a  $x(t)$  de modo que a equação  $y' = k(C - C_0)y$  pode ser re-escrita como

$$y' = (Ax - B)y; A > 0, B > 0$$

Examinemos agora a taxa de crescimento da população de presas. Em um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$  um certo número de presas são devoradas, sendo que este número é proporcional a  $\Delta t$  e pode ser escrito como  $\rho(x, y)\Delta t$ , onde  $\rho(x, y)$  é uma função a determinar. Analisando exemplos simples, onde a razão entre as duas populações não é muito grande, concluímos que é razoável tomarmos  $\rho(x, y) = \lambda xy$ ,  $\lambda > 0$ . Deste modo, obtemos a seguinte equação diferencial governando o crescimento da população de presas

$$x' = Cx - Dxy$$

e podemos escrever em forma de sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C - Dy)x \\ (Ax - B)y \end{pmatrix}$$



**Exemplo 3 (O pêndulo simples).** O *pêndulo simples* é um corpo ideal consistindo de uma massa pontual suspensa por um fio *ideal* (sem massa considerável, inextensível, com densidade de massa constante). A massa pontual é afastada de sua posição de equilíbrio (vertical) e largada, passando a movimentar-se sob a ação da gravidade, em um movimento oscilatório periódico. Vamos estudar este movimento, determinando seu *período* (tempo de cada oscilação), e sua equação em função do tempo.

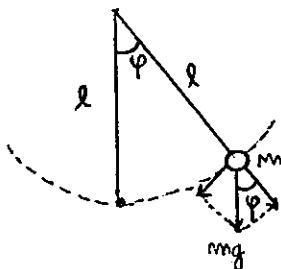


figura 1

Atuando sobre o objeto temos duas forças, a força gravitacional (que é vertical) dada por  $mg$  onde  $m$  = massa pontual, e  $g$  = aceleração da gravidade. A outra força atuando é a tensão da corda. Pelas leis de Newton, a componente da força gravitacional paralela à corda, somada à força de tensão, nos dá resultante nula. A oscilação provém apenas da componente da força gravitacional que é perpendicular à corda, tangente portanto ao movimento (em arco de círculo) efetuado pela extremidade pontual. Tal *força tangencial* é dada por  $mg \sin \varphi$  onde  $\varphi$  é o ângulo entre a corda e sua posição de equilíbrio original (eixo vertical). A segunda Lei de Newton nos dá então

$$mv = -mg \sin \varphi$$

onde  $mv$  é a quantidade de movimento do objeto. Mas, se a corda tem comprimento  $\ell$  podemos escrever

$$mv = m\ell \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

onde  $t$  é o tempo.

Obtemos então

$$\frac{d}{dt} \left( m\ell \frac{d\varphi}{dt} \right) = -mg \sin \varphi, \quad \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Agora procedemos a seguinte simplificação<sup>2</sup>, fisicamente razoável para oscilações de pequena amplitude,  $\sin \varphi \cong \varphi$ . Podemos então reescrever a equação do movimento como a *equação do pêndulo simples*

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0$$

<sup>2</sup>Algumas deste simplificações parecem "pouco naturais" também ao autor.

cuja solução geral conhecemos dos cursos de equações diferenciais ordinárias como sendo

$$\varphi(t) = a \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + b \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

sendo  $a, b \in \mathbb{R}$ . Supondo que o pêndulo partiu do repouso e ângulo inicial  $\varphi_0$  obtemos as seguintes condições iniciais

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = 0$$

e obtemos solução da forma

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

O período deste *movimento harmônico simples* é então

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

**Exemplo 4** (*Campos de força conservativos*).

Um campo de vetores  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamado um *campo de forças* quando em cada ponto  $p$  interpretamos o vetor  $F(p)$  como uma força agindo numa partícula situada no ponto  $p$ . O campo de forças é dito *conservativo* quando existe *função energia potencial*  $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(p) = -\text{grad} U(p)$$

(o sinal negativo é tomado por razões históricas). Evidentemente  $U$  é única salvo adição de constantes.

Consideremos agora uma partícula movendo-se graças à ação de um campo de forças  $F$  e denotemos por  $x(t)$  sua trajetória e  $m$  sua massa de repouso. O *vetor velocidade* da partícula é dada por  $\frac{dx}{dt}(t)$  no tempo  $t$ , sendo que seu comprimento é chamado a *velocidade* da partícula. O vetor velocidade  $x'(t)$  é tangente à trajetória no ponto em questão. Se o campo  $F$  é conservativo, digamos  $F = -\text{grad} U$ , então chamamos  $U$  de *energia potencial* e definimos a *energia cinética* como

$$K = \frac{1}{2} m |x'(t)|^2$$

A *energia total* (ou *energia*) é definida como a soma  $E = U + K$ .

**Princípio da conservação da energia.** *Seja  $x(t)$  a trajetória de uma partícula movendo-se graças à ação de um campo de forças conservativo  $F = -\text{grad} U$ . A energia total é constante.*

De fato, basta usar as regras de derivação de  $\langle x, x \rangle$  e a Regra da Cadeia para mostrar que  $\frac{dE}{dt} = 0, \forall t$  (exerc.1).

Em diversas situações físicas estamos interessados em estudar campos de vetores  $F$  que sejam paralelos ao vetor posição, ou seja, campos da forma  $F(p) = \lambda(p) \cdot p, \lambda(p) \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^3$ . Tais campos são chamados de *centrais*. Um exemplo de campo central é dado pelo campo gravitacional. Estudemos tais campos no caso em que são conservativos:

**Afirmção 1.** *Um campo de forças central  $F$  é conservativo se, e somente se, se escreve como  $F(x) = \lambda(|x|) \cdot x$ , ou equivalentemente,  $F(x) = -\text{grad} U(x)$  onde  $U(x) = f(|x|)$ .*

A prova deste fato deixamos como exercício para o leitor curioso (exerc.2). Apliquemos este fato ao estudo movimento dos planetas em nosso sistema solar, segundo I. Newton. Segundo a lei de atração gravitacional de Newton, dois corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  se atraem com forças de mesma intensidade e contrárias descritas como

$$F_{12} = -gm_1m_2 \frac{x}{|x|^3} = -F_{21}$$

onde  $g$  é uma constante universal,  $x$  é a posição do corpo de massa  $m_2$ ,  $m_1$  está na origem

e  $F_{12}$  é a força (atratora) em  $m_2$ .

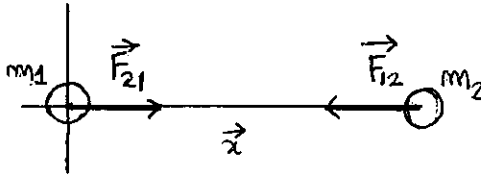


figura 2

Assumimos agora que os corpos se movem exclusivamente sob a ação destas forças, consideramos o corpo  $m_1$  como o Sol e o corpo  $m_2$  como um planeta de massa  $m$ . O campo de forças atuando sobre o planeta é então da forma

$$F = -C \frac{x}{|x|^3}, C > 0$$

de modo que pela observação anterior, este é um campo central conservativo. De fato, temos  $F = -\text{grad } U$  onde  $U = -\frac{1}{|x|}$ . O campo não está definido na origem. Calculemos a energia cinética desenvolvida pelo planeta  $m$ . Para isto podemos nos restringir à situação correspondente, mas no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  (pois o campo é central, sendo portanto tangente a este plano e logo uma partícula inicialmente posicionada no plano não escapará deste), e introduziremos coordenadas polares no plano:  $(r, \theta)$ . Lembramos que o *momento angular* da partícula (planeta  $m$ ) é definido como  $\Omega = mr^2\theta'$  (derivadas tomadas com relação ao tempo  $t$ ).

Tomando-se a notação clássica da Física, na qual os vetores  $i = i(t), j = j(t)$  são  $i(t)$  o unitário na direção de  $x(t)$  e  $j(t)$  o unitário ortogonal positivo de  $i(t)$ . Então podemos escrever  $x(t) = r(t)i(t)$  e  $\frac{di}{dt} = \theta'j, \frac{dj}{dt} = -\theta'i$ . Mas então

$$x' = r'i + r\theta'j$$

Derivando obtemos

$$x'' = [r'' - r(\theta')^2]i + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\theta')j$$

Como o campo de forças é central segue que a componente perpendicular a  $x$  é nula, ou seja

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0$$

e provamos o seguinte:

**Princípio da conservação do momento angular.** Dada partícula movendo-se graças à ação de um campo central, o momento angular se conserva:  $\frac{d\Omega}{dt} = 0$ .

Uma observação importante é a seguinte: Definamos  $S(t)$  = área determinada pelo pelos vetores posição  $x(t)$ ,  $x(t_0)$  e pelo arco de trajetória  $((x(t_0)x(t)))$  percorrido pelo móvel entre os instantes  $t_0$  e  $t$ . Então em coordenadas polares temos que

$$dS = \frac{1}{2}r^2d\theta$$

De modo que  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\theta'$  mede a taxa com a qual o vetor posição varre a área entre o móvel e o centro do movimento. Aplicando este raciocínio no caso do movimento de um planeta  $m$  em torno do Sol, como acima, a lei da conservação do momento angular pode ser enunciada como:

**Segunda Lei de Kepler.** *A linha traçada do Sol a qualquer planeta descreve áreas iguais em tempos iguais<sup>3</sup>.*

Prossigamos. Como vimos  $r^2\theta'$  é constante no caso do movimento de um planeta  $m$  no plano  $(r, \theta)$ . Agora, isto implica o sinal de  $\theta'$  é constante ao longo do movimento e logo podemos assumir  $\theta$  é função crescente do tempo  $t$ . Mas então podemos utilizar  $\theta$  como novo parâmetro e descrever  $r$  somente como função de  $\theta$  ao longo do movimento. Seja  $k = \frac{1}{r}$ , então  $k = k(\theta(t))$  e temos que  $-k = U =$  energia potencial do movimento (de fato,  $|x| = r$ ). A energia cinética é dada por  $K = \frac{1}{2}m|x'(t)|^2$ , de modo que como  $x'(t) = r'(t)i + r\theta'(t)j$ , obtemos

$$K = \frac{1}{2}m[r'(t) + (r\theta'(t))^2]$$

Também temos que

$$r'(t) = \left(\frac{1}{k(\theta(t))}\right)'(t) = -\frac{1}{k^2} \frac{dk}{d\theta} \theta'(t) = -\frac{\Omega}{m} \frac{dk}{d\theta}$$

onde aplicamos a Regra da Cadeia. Finalmente observamos que

$$r\theta'(t) = \frac{\Omega}{mr} = \frac{1}{m} \Omega k$$

Isto nos dá então

$$K = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{m} \left[ \left(\frac{dk}{d\theta}\right)^2 + k^2 \right]$$

Como a energia total é  $E = K + U$  temos que  $K = E + k$ . Usando as expressões acima obtidas chegamos à seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{dk}{d\theta}\right)^2 + k^2 = \frac{2m}{\Omega^2} (E + k)$$

Derivando com relação a  $\theta$  e usando a conservação da energia ( $\frac{dE}{d\theta} = 0$ ), obtemos finalmente

$$\frac{d^2k}{d\theta^2} + k = \frac{m}{\Omega^2}$$

onde lembramos que  $\frac{m}{\Omega^2}$  é uma constante.

Destas considerações podemos deduzir as outras leis de Kepler.

<sup>3</sup>As outras leis de Kepler são: (i) Primeira Lei: *Todos os planetas se movem em órbitas elípticas em torno do Sol, que é um dos focos.* (ii) Terceira Lei: *O quadrado do período de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da distância média do Sol ao planeta*

## 2. O conceito de EDO

Nesta seção veremos os primeiros resultados básicos da teoria das EDOs, começando pela formalização do conceito de EDO, seguida dos teoremas de existência e unicidade, e dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais. Começamos com algumas notações e definições que nos serão úteis.

Consideraremos o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  com coordenadas retangulares  $(t, x)$ , onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Consideraremos subconjuntos abertos  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que não necessariamente são da forma produto de abertos.

**Definição 1.** Dada função contínua  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um aberto, a equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por  $f$  é escrita como:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Uma *solução* de (1) é uma função diferenciável  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo, tal que:

$$(a) \quad \forall t \in J \text{ tem-se } (t, \varphi(t)) \in U$$

$$(b) \quad \frac{d\varphi}{dt}(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)), \forall t_0 \in J$$

onde  $\frac{d\varphi}{dt}(t_0)$  denotará a derivada lateral correspondente no caso em que  $t_0$  for um extremo de  $J$ .

Vejam alguns exemplos:

**Exemplo 5.** Seja  $X: U_o \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores contínuo no aberto  $U_o \subset \mathbb{R}^n$ . Pomos  $U = \mathbb{R} \times U_o \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e consideramos a EDO definida por  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x) = X(x)$ . Então (1) é re-escrita como  $\dot{x} = X(x)$ , que é a chamada *equação do fluxo definido por X*. Uma solução de (1) neste caso seria então uma curva diferenciável  $\gamma: J \rightarrow U_o$  tal que  $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ , o que chamamos de uma *trajetória de X*.

Mais adiante voltaremos a este exemplo.

**Exemplo 6.** Seja agora  $h: J_o \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua no intervalo aberto  $J_o \subset \mathbb{R}$ . Podemos considerar  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U = J_o \times \mathbb{R}$  definida por  $f(t, x) = h(t)$  e a EDO correspondente é então

$$\dot{x} = g(t)$$

Assim, uma solução é tão somente uma função diferenciável  $\varphi(t)$  tal que.

$$\varphi'(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t g(\lambda) d\lambda, \forall t_0 \in J, \forall t \in J$$

A possibilidade de se integrar  $g$  e o Teorema Fundamental do Cálculo nos dão, neste caso particular, a existência e unicidade de soluções que buscaremos em geral.

Antes mesmo de seguirmos com outros exemplos, introduzimos o chamado Problema de Cauchy.

**Definição 2.** Dada uma EDO (1)  $x' = f(t, x)$  e dado ponto  $(t_0, x_0) \in U$ , o *Problema de Cauchy* associado é escrito como:

$$(2) \quad x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

Uma *solução* de (2) é uma solução de (1), digamos,  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $t_0 \in J$  e  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Uma consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo é a seguinte:

**Proposição 1.** O Problema de Cauchy (2) é equivalente à equação integral

$$(3) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\lambda, x(\lambda)) d\lambda$$

Com esta terminologia chegamos ao seguinte resultado central:

**Teorema 1.** Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  função de classe  $C^1$  no aberto  $U$ . Então  $\forall (t_0, x_0) \in U$  o Problema de Cauchy (2) correspondente, possui uma solução  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida num intervalo aberto  $J \ni t_0$ . Além disso,  $\varphi$  é única no seguinte sentido: Seja  $\psi: J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  outra solução, então  $\varphi(t) = \psi(t), \forall t \in J \cap J_1$ .

Observe que a noção de unicidade de uma solução é algo relativo também à velocidade com que esta é percorrida e não apenas ao traço da curva imagem em  $\mathbb{R}^n$ . Deste modo, dificilmente uma reparametrização de uma solução seguirá sendo solução de uma mesma EDO.

Teorema 1 será consequência de resultados mais precisos como o Teorema de Picard, que estimam um tamanho mínimo para o intervalo de definição  $J$  em termos de um certo controle da função  $f$ . Isto é o que veremos a seguir.

### 3. O Teorema de Picard

Fixaremos a seguinte norma em  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ :  $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$ , onde  $|t|$  e  $|x|$  denotam as normas euclidianas em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$  respectivamente. As vantagens associadas a esta escolha específica logo ficarão claras.

**Definição 3.** Uma aplicação  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (não necessariamente contínua) é dita *lipschitziana com respeito à segunda variável* se  $\exists K > 0$  tal que  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in U$ .

A função é dita *localmente lipschitziana* com respeito à segunda variável, se todo ponto de  $U$  possui vizinhança restrita à qual  $f$  é lipschitziana com respeito à segunda variável.

Esta noção pode ser realizada com hipóteses de diferenciabilidade adequadas:

**Lema 1.** Toda função localmente lipschitziana é lipschitziana em partes compactas.

*Prova.* (exerc.3).

**Lema 2.** Toda função  $f: U \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de classe  $C^1$  com respeito à segunda variável é localmente lipschitziana com respeito a esta variável.

*Prova.* Basta usar a Desigualdade do Valor Médio, uma vez que a derivada, sendo contínua, é localmente limitada.  $\square$

Recordamos também que uma função  $F: X \rightarrow X$ , onde  $X$  é um espaço métrico, é uma *contração*, se existe constante  $0 \leq \lambda < 1$  tal que  $d(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in X$ , sendo que  $d$  denota a distância em  $X$ .

**Teorema do Ponto Fixo para Contrações [E15].** Seja  $X$  espaço métrico completo. Então toda contração  $F$  em  $X$  possui um único ponto fixo, isto é, existe um único ponto  $p \in X$  tal que  $F(p) = p$ . Além disso,  $p$  é atrator de  $F$ , isto é,  $\forall x \in X$  vale  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em particular o mesmo resultado vale se  $F$  possui algum iterado  $F^m: X \rightarrow X$ , que é uma contração.

Este teorema encontra-se demonstrado em livros de Espaços Métricos, por exemplo [E15]. Sugerimos ao leitor que tente provar diretamente, usando o fato de que a sequência  $F^n(x)$  é de Cauchy.

**Lema 3.** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo compacto e  $K \subset \mathbb{R}^n$  subconjunto compacto. O espaço  $X = C(I, K)$  das aplicações contínuas  $\varphi: I \rightarrow K$ , com a métrica do supremo  $d(\varphi, \psi) = \sup_{t \in I} |\varphi(t) - \psi(t)|$ , é completo.

Este resultado segue do fato conhecido que limite uniforme de aplicações contínuas é uma aplicação contínua (exerc.4).

Obtemos então o seguinte refinamento do Teorema 1:

Sejam  $I[t_o, a] = [t_o - a, t_o + a]$  onde  $a > 0$ , e  $B[x_o, b] = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_o| \leq b\}$  onde  $b > 0$ .

**Teorema 2 (Teorema de Picard).** Seja  $f: I[t_o, a] \times B[x_o, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínua, lipschitziana com respeito à segunda variável. Então existe uma única solução do Problema de Cauchy (1) correspondente a  $f$  e  $(t_o, x_o)$ , definida no intervalo  $I[t_o, \alpha]$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$  e  $M = \sup\{|f(t, x)|, (t, x) \in I[t_o, a] \times B[x_o, b]\}$ .



**Prova.** Pomos  $X = C(I[t_o; a], B[x_o, b])$  espaço métrico completo com a métrica do supremo. Definimos então aplicação  $F: X \rightarrow X$  da seguinte forma:

$$F(\varphi)(t) := x_o + \int_{t_o}^t f(\lambda, \varphi(\lambda))d\lambda, \forall t \in I(t_o, a)$$

**Afirmação 2.**  $F$  é bem definida e  $F^N$  é uma contração se  $N \in \mathbb{N}$  é suficientemente grande.

Observe que uma vez provada a afirmação acima o Teorema de Picard estará provado, pois uma solução para o Problema de Cauchy em questão é dada justamente por um ponto fixo de  $F$ . Vamos então à demonstração da afirmação acima: Primeiro notemos que  $\forall \varphi \in X$  temos que:

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_o| &= \left| \int_{t_o}^t f(\lambda, \varphi(\lambda))d\lambda \right| \leq \int_{t_o}^t |f(\lambda, \varphi(\lambda))|d\lambda \\ &\leq M \cdot |t - t_o| \leq b \end{aligned}$$

logo  $F(\varphi)(t) \in B[x_o, b], \forall t \in I[t_o, a]$  e assim  $F$  é bem definida. Agora, por indução prova-se que se  $K =$  constante de Lipschitz de  $f$ , então

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} |t - t_o|^n d(\varphi_1, \varphi_2), \forall t \in I(t_o, \alpha), \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X, \forall n \in \mathbb{N}$$

Com efeito, assumindo-se esta desigualdade para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned} &|F^{n+1}(\varphi_1)(t) - F^{n+1}(\varphi_2)(t)| = |F(F^n(\varphi_1)(t)) - F(F^n(\varphi_2)(t))| \\ &\leq \left| \int_{t_o}^t |f(\lambda, F^n(\varphi_1(\lambda))) - f(\lambda, F^n(\varphi_2(\lambda)))|d\lambda \right| \leq \left| \int_{t_o}^t |F^n(\varphi_1)(\lambda) - F^n(\varphi_2)(\lambda)|d\lambda \right| \\ &\leq K \int_{t_o}^t \frac{K^n}{n!} (t_o - \lambda)^n \cdot d(\varphi_1, \varphi_2)d\lambda \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} |t - t_o|^{n+1} d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

Assim,  $F: X \rightarrow X$  é tal que

$$d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

Como  $\frac{K^n \alpha^n}{n!} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos que a afirmação é verdadeira.  $\square$

**Prova do Teorema 1.** O Teorema 1 segue então do Teorema de Picard e dos lemas 1, 2 e 3 acima.  $\square$

Surgem agora algumas questões naturalmente motivadas pelas hipóteses do Teorema de Picard:

**Questão 1.** O que se pode dizer no caso em que  $f$  não é lipschitziana, mas apenas contínua?

**Questão 2.** O que ocorre se supomos  $f$  lipschitziana em todo o  $I[t_0; a] \times \mathbb{R}^n$  ?

Para o caso em que  $f$  não é lipschitziana temos o seguinte resultado:

**Teorema 3 (Teorema de Peano)** . Seja  $f: I[t_0, a] \times B[x_0, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , contínua e tal que  $\sup |f| \leq M < \infty$  em  $I[t_0, a] \times B[x_0, b]$ . Então para todo  $\epsilon > 0$  o problema de Cauchy correspondente possui (pelo menos uma) solução em  $I[t_0, \alpha_\epsilon]$  onde  $\alpha_\epsilon = \min\{a, b/(M + \epsilon)\}$ .

**Prova.** A idéia aqui é utilizar o fato de que limite uniforme de soluções é um bom candidato a solução. Mas, para podermos recair nas hipóteses do Teorema de Picard consideramos o seguinte corolário do Teorema de Aproximação de Weierstrass [E15]:

**Fato 1.** Existe seqüência de funções  $f_n: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cujas componentes são polinômios e tais que  $f_n|_{I[t_0, a] \times \overline{B}(x_0, b)}$  converge uniformemente para  $f$ .

Dado  $\epsilon > 0$  arbitrário temos que  $|f_n| \leq M + \epsilon$  em  $I[t_0, a] \times \overline{B}(x_0, b)$ ,  $\forall n$  suficientemente grande. Pelo Teorema de Picard existe uma única solução  $\varphi_n$  de  $x' = f_n(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , definida no intervalo  $I[t_0, \alpha_\epsilon]$  onde  $\alpha_\epsilon = \min\{a, \frac{b}{M + \epsilon}\}$ .

Agora,

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| = \left| \int_s^t f_n(\lambda, \varphi_n(\lambda)) d\lambda \right| \leq (M + \epsilon) \cdot |t - s|$$

de modo que  $\{\varphi_n\}$  é família equicontínua e também equilimitada. Segue então do Teorema de Arzelá [E15] que existe uma subsequência  $\varphi_{n_j}$  que converge uniformemente em  $I[t_0, \alpha_\epsilon]$ , para uma certa função  $\varphi_\epsilon$ . Agora, é fácil ver que  $\varphi_\epsilon$  é solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Por outro lado,  $\varphi_\epsilon$  é definida em  $I(t_0, \alpha_\epsilon)$  como queríamos.  $\square$

#### 4. O intervalo maximal

A unicidade das soluções bem como a existência local destas, dadas pelo Teorema de Picard, nos permitem (por continuação local) estender soluções locais até um intervalo maximal de tempo. Vejamos como formalizar estas idéias:

**Definição 4.** Dada uma EDO  $x' = f(t, x)$  uma solução  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita *maximal* se para toda solução  $\psi: J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $J_1 \supset J$  e  $\psi|_J = \varphi$ , tem-se  $J_1 = J$ . Neste caso,  $J$  é dito *intervalo maximal* de  $\varphi$ .

**Proposição 2.** Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e tal que  $\forall (t_0, x_0) \in U$  existe uma única solução do Problema de Cauchy  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , definida num intervalo  $I(t_0, x_0)$ . Então  $\forall (t_0, x_0) \in U$  existe uma única solução máxima  $\varphi(t, (t_0, x_0))$  do Problema de Cauchy acima indicado.

**Prova.** Vamos definir o intervalo maximal  $I_m(t_o, x_o)$  como a reunião  $\bigcup_{\varphi} I_{\varphi}(t_o, x_o)$ , onde  $\varphi$  percorre as soluções do Problema de Cauchy indicado. Podemos então  $\varphi(t, (t_o, x_o)) = \varphi(t)$  se  $t \in I_{\varphi}(t_o, x_o)$ . Pela unicidade  $\varphi(t, (t_o, x_o))$  é bem definida. Pela existência local,  $I_m(t_o, x_o)$  é conexo (ou seja, um intervalo).  $\square$

A principal propriedade geométrica de uma solução maximal é a seguinte:

**Proposição 3.** *Sejam  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  função contínua e  $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma solução maximal de  $x' = f(t, x)$ , onde  $J = (\omega_-, \omega_+) \subset \mathbb{R}$  é seu intervalo (maximal) de definição. Então, a aplicação*

$$\Phi: J \rightarrow U, t \mapsto (t, \varphi(t))$$

satisfaz à seguinte propriedade de divergência:  $\forall$  compacto  $K \subset U$  existe vizinhança  $W$  de  $\omega_-$  e  $\omega_+$ , tal que  $t \in W \implies \Phi(t) \notin K$ . Escrevemos esta condição como

$$\Phi(t) \rightarrow \partial U \text{ quando } t \rightarrow \omega_{\pm}$$

**Prova.** Seja  $K \subset U$  compacto e suponhamos por absurdo que existe seqüência  $t_n \in J$  com  $t_n \rightarrow \omega_+$ , tal que  $\varphi(t_n) \in K$ . Podemos então supor que  $\Phi(t_n)$  converge em  $K$ , digamos  $\Phi(t_n) \rightarrow (\omega_+, x_o) \in K$ . Aplicamos então o Teorema de Peano a

$$x' = f(t, x), (t_o, x_o) = (\omega_+, x_o) \in K \subset U$$

e obtemos vizinhança  $V = I[t_o, \alpha] \times B[x_o, b]$  na qual temos definida solução para o Problema de Cauchy indicado acima. Agora, se  $V_1 = I[t_o, \frac{1}{3}\alpha] \times B[x_o, b]$ , então  $\forall (t_1, x_1) \in V_1$  existe solução para o Problema de Cauchy correspondente a estes dados iniciais, definida (a solução) em  $I[t_1, \alpha_1]$  com  $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha$ : de fato, seja  $\alpha = \frac{b}{M}$  onde  $|f| < M$  em  $V$ ; aplicando-se o Teorema de Peano a  $(t_1, x_1) \in V_2 = I[t_1, \alpha_1] \times B[x_1, b_1]$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}\alpha M$ ,  $V_2 \subset V$ , encontramos uma solução do Problema de Cauchy  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_1) = x_1$ , que está definida  $\forall t \in I[t_1, \alpha_1]$ .

Agora, se tomamos  $t_1 = t_n$  com  $n$  suficientemente grande, então podemos assumir que  $\varphi(t_n) \in V_1$  e que se tem portanto  $\varphi$  prolongada até  $t_n + \alpha/2 > t_o = \omega_+$ , gerando uma contradição à maximalidade de  $\varphi$ .  $\square$

Como consequência da prova acima obtemos:

**Proposição 4.** *Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e limitada. Se  $\omega_+$  respectivamente  $\omega_-$  é finito, então existe  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \varphi(t)$  respectivamente  $\lim_{t \rightarrow \omega_-} \varphi(t)$ .*

**Prova.** Suponhamos que  $\omega_+ < +\infty$ . Então  $\forall s, t \in \mathbb{R}$  vale

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = \left| \int_s^t f(\lambda, \varphi(\lambda)) d\lambda \right| \leq M|t - s|$$

onde  $M \geq |f|$  em  $U$ . Assim, existe  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \varphi(t)$  pelo Critério de Cauchy para o limite em  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 5. Dependência das soluções com relação às condições iniciais

Nesta seção estabeleceremos que (quando a função  $f$  possui uma classe de diferenciabilidade adequada), as soluções do Problema de Cauchy associado a  $f$  e a um ponto inicial  $(t_o, x_o)$ , dependem diferenciavelmente das variáveis  $(t, t_o, x_o)$ .

**Teorema 4** (*Dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais*) Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  função contínua no aberto  $U$ . Suponhamos que  $\forall (t_o, x_o) \in U$ , o Problema de Cauchy correspondente tenha solução única  $\varphi = \varphi(t, (t_o, x_o))$ , definida num intervalo maximal denotado por  $(\omega_-, \omega_+)$ , onde  $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_o, x_o)$ . Então:

- (i) O conjunto  $D = \{(t, t_o, x_o); (t_o, x_o) \in U, t \in (\omega_-(t_o, x_o), \omega_+(t_o, x_o))\}$  é aberto em  $\mathbb{R} \times U$ .
- (ii)  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

Podemos enunciar este mesmo resultado para EDOs que dependem continuamente de parâmetros:

**Teorema 5** (*Dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais e parâmetros*) Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  função contínua no aberto  $U$ . Suponhamos que  $\forall (t_o, x_o, z) \in U$ , o Problema de Cauchy correspondente tenha solução única  $\varphi = \varphi(t, (t_o, x_o, z))$ , definida num intervalo maximal denotado por  $(\omega_-, \omega_+)$ , onde  $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_o, x_o, z)$ . Então:

- (i) O conjunto  $D = \{(t, t_o, x_o, z); (t_o, x_o, z) \in U, t \in (\omega_-(t_o, x_o, z), \omega_+(t_o, x_o, z))\}$  é aberto em  $\mathbb{R} \times U$ .
- (ii)  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

**Observação 1.** O Teorema 4 segue do Teorema 5.

Com efeito, dada EDO  $x' = f(t, x, z)$  com no Teorema 4, podemos introduzir uma nova variável  $y = (x, z)$  e nova função  $F(t, y) = (f(t, x, z), 0)$  de modo que o Problema de Cauchy a parâmetros (a)  $x' = f(t, x, z)$ ,  $x(t_o) = x_o$  é equivalente ao Problema de Cauchy (b)  $y' = F(t, y)$ ,  $y(t_o) = y_o$ , sem parâmetros, onde definimos  $y_o = (x_o, z_o)$ . De fato temos que as soluções de (b) são da forma  $\Phi(t, t_o, y_o) = (\varphi(t, t_o, x_o, z_o), z_o)$  (note que a segunda coordenada de  $F$  é nula). Assim sendo, as propriedades de continuidade para as soluções de (b) são herdadas das propriedades de continuidade para as soluções de (a).

Faremos uso do seguinte lema:

**Lema 4.** Considere  $f_n: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ , seqüência de funções contínuas no aberto  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$  com  $f_n \rightarrow f_o$  uniformemente em partes compactas de  $U$ . Dada seqüência  $(t_n, x_n) \in U$  com  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_o, x_o)$ , se o Problema de Cauchy  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_n) = x_n$  tem solução maximal única  $\varphi_n$  em  $J_n = (\omega_-(n), \omega_+(n))$ , então,  $\forall [a, b] \subset J_o = (\omega_o(0), \omega_o(0))$  existe  $n_o = n_o(a, b)$  tal que:

$$n > n_o \implies J_n \supset [a, b] \text{ e } \varphi_n|_{[a, b]} \rightarrow \varphi_o|_{[a, b]}$$

uniformemente.

A grosso modo, o lema diz que se temos  $f_n \rightarrow f_o$  uniformemente em partes compactas e as condições iniciais  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_o, x_o)$ , então as soluções maximais satisfazem  $\varphi_n \rightarrow \varphi_o$  em partes compactas.

**Prova do Lema 4.** Consideramos compactos  $K_1 \subset K_2 \subset U$  onde  $K_1 \subset \text{Int}(K_2)$  e  $\text{Int}(K_1) \supset \{(t, \varphi_0(t)), t \in [a, b]\}$ .

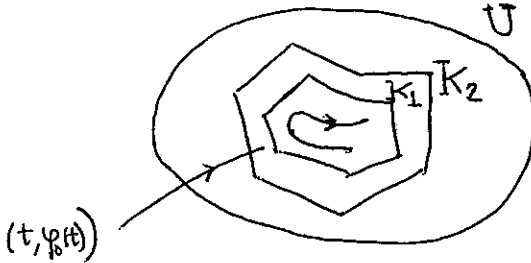


figura 3

Mas então, existem constantes  $M > 0$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$  tais que  $n > n_1 \implies |f_n| < M$  em  $K_2$ , pela convergência uniforme de  $f_n$  em partes compactas. Pelo Teorema de Peano existe então  $\alpha > 0$  tal que  $\forall (t^1, x^1) \in K_1$  o Problema de Cauchy  $x' = f_n(t, x)$ ,  $x(t^1) = x^1$ , ( $n > n_1$ ) possui uma única solução definida em  $|t - t^1| \leq \alpha$  com gráfico contido em  $K_2$ . Seja agora  $\epsilon = \frac{1}{3}\alpha$ . Então existe  $n_2 \geq n_1$  tal que  $n \geq n_2 \implies (t_n, x_n) \in K_1$  e  $|t_n - t_0| < \epsilon$ . Assim,  $n \geq n_2 \implies \varphi_n$  está definida em  $|t_n - t| \leq \alpha = 3\epsilon$  contém  $|t - t_0| \leq \epsilon$ .

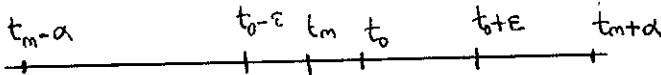


figura 4

Definimos então família de funções

$$\mathcal{F} = \{\varphi_n \mid |t - t_0| \leq \epsilon, n \geq n_2\}$$

Utilizaremos o seguinte

**Sublema 1.** Seja  $\{\psi_n\}$  sequência equicontínua, uniformemente limitada de funções  $\psi_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas,  $X =$  espaço métrico compacto. Então se toda subsequência uniformemente convergente da sequência  $\psi_n$  possui o mesmo limite  $\psi$ , a própria sequência  $\psi_n$  é uniformemente convergente para  $\psi$ .

**prova do Sublema 1.** (exerc.4).

A família  $\mathcal{F}$  acima definida satisfaz às hipóteses do Sublema 1:  $\mathcal{F}$  é equilimitada e equicontínua pois o gráfico de cada  $\varphi_n$  está contido em  $K_2$  onde vale  $|f_n| < M$  e logo

$$|\varphi'(t)| = |f_n(t, \varphi_n(t))| < M$$

Toda subsequência uniformemente convergente  $\varphi_{n_k}$ , converge para  $\varphi_o$ : de fato pela unicidade basta provar que  $\varphi = \lim \varphi_{n_k}$  é solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_o) = x_o$ . Isto segue de

$$\varphi_{n_k}(t) = x_{n_k} + \int_{t_{n_k}}^t f_{n_k}(\lambda, \varphi_{n_k}(\lambda)) d\lambda$$

e logo, fazendo-se  $n_k \rightarrow +\infty$  obtém-se

$$\varphi(t) = x_o + \int_{t_o}^t f_o(\lambda, \varphi(\lambda)) d\lambda$$

devido à convergência uniforme de  $\varphi_{n_k}$ .

Assim,  $\varphi \equiv \varphi_o$  em  $|t - t_o| \leq \epsilon$  e pelo Sublema 1  $\varphi_n \rightarrow \varphi_o$  uniformemente em  $|t - t_o| \leq \epsilon$ .  $\square$

**Prova do Teorema 5.** Consideramos equações da forma  $x' = f(t, x)$  com todas suas soluções únicas. Provemos que  $D$  é aberto. Tomando  $f_n = f$  no lema anterior obtemos que  $\forall (t_o, x_o) \in U$ , dados  $\epsilon > 0$  e  $[a, b] \subset I(t_o, x_o)$  existe vizinhança  $V_o = V_o(t_o, x_o)$ , tal que  $\forall (t', x') \in V_o$   $I(t', x') \supset [a, b]$  e  $|\varphi(t, (t', x')) - \varphi(t, (t_o, x_o))| < \epsilon/2$  se  $t \in [a, b]$ . Assim,  $D$  é aberto.

A continuidade de  $\varphi$  com relação a  $(t, (t_o, x_o))$  também segue deste mesmo argumento, de fato

$$|\varphi(s, (t', x')) - \varphi(t, (t_o, x_o))| \leq |\varphi(s, t', x') - \varphi(s, t_o, x_o)| + |\varphi(s, t_o, x_o) - \varphi(t, t_o, x_o)| < \epsilon$$

desde que  $s$  esteja próximo de  $t$  a fim de que tenhamos

$$|\varphi(s, (t_o, x_o)) - \varphi(t, (t_o, x_o))| < \epsilon/2$$

o que segue da continuidade de  $\varphi(t, (t_o, x_o))$  com respeito a  $t$ .  $\square$

Utilizando então o Teorema de Picard obtemos o seguinte corolário:

**Corolário 1.** Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e lipschitziana. Então  $D$  é aberto e  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

Podemos provar também que, sendo  $f$  lipschitziana, a solução  $\varphi$  também é lipschitziana na variável  $x_o$ . Para isto utilizaremos o célebre:

**Lema 5 (Lema de Gronwall).** Sejam  $u, v: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  contínuas tais que, para  $\alpha \geq 0$ , temos

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s) ds, \forall t \in [a, b]$$

Então  $u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}$ . Em particular,  $\alpha = 0 \implies u \equiv 0$ .

**Prova.** Suponhamos inicialmente que  $\alpha > 0$ . Definimos função auxiliar

$$\varphi(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s) ds$$

Vale que  $\varphi(a) = \alpha$  e  $\varphi(t) \geq \alpha > 0, \forall t$ . Derivando obtemos  $\varphi'(t) = u(t)v(t) \leq v(t)\varphi(t)$ . Assim,  $d \log \varphi(t) \leq v(t)$  e logo

$$\log \frac{\varphi(t)}{\varphi(a)} \leq \int_a^t v(s) ds$$

donde

$$u(t) \leq \varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}$$

Para o caso  $\alpha = 0$  utilizamos o caso anterior e fazemos  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

Finalizamos então esta parte com o resultado abaixo.

**Proposição 5.** *Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua, e lipschitziana com respeito à segunda variável, digamos  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$ . Então  $\forall t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$  temos*

$$|\varphi(t, (t_0, x_0)) - \varphi(t, (t_0, y_0))| \leq e^{K|t-t_0|} |x_0 - y_0|$$

**Prova.** Por simplicidade da notação pomos  $u_1(t) = \varphi(t, (t_0, x_0))$  e  $v_1(t) = \varphi(t, (t_0, y_0))$ .

Então  $u_1(t) - v_1(t) = (x_0 - y_0) + \int_{t_0}^t [f(s, u_1(s)) - f(s, v_1(s))] ds$  e logo

$$|u_1(t) - v_1(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t K|u(s) - v(s)| ds.$$

Se  $t \geq t_0$  pomos  $\alpha = |x_0 - y_0|$  e  $u(t) = |u_1(t) - v_1(t)|$ ,  $v(t) = K$  para aplicar a Desigualdade de Gronwall e obter a desigualdade anunciada. Se  $t \leq t_0$  consideramos sistema similar a este para aplicar a argumetação acima (exerc.5)  $\square$

## 6. Diferenciabilidade das soluções

Com relação à diferenciabilidade das soluções com respeito às condições iniciais, o resultado central é o seguinte:

**Teorema 6** (*Dependência diferenciável das soluções com relação às condições iniciais e parâmetros*). Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínua no aberto  $U$  e suponha que  $f$  é diferenciável com relação à variável  $x \in \mathbb{R}^n$ , sendo  $\frac{\partial f}{\partial x}$  contínua em  $U$ . Então, para cada  $z \in \mathbb{R}^l$  fixo, dado  $(t_0, x_0) \in U$  a solução do Problema de Cauchy correspondente  $x' = f(t, x, z)$ ,  $x(t_0) = x_0$  existe e é única, admitindo derivada parcial com relação à variável  $x_0$ . Além disso se definimos  $D = \{(t, t_0, x_0, z) \in \mathbb{R} \times U; t \in I(t_0, x_0, z)\}$  então  $D$  é aberto e em  $D$  vale a continuidade da função  $X(t) = D_{x_0} \varphi(t, t_0, x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ . Finalmente,  $X(t)$  é solução do Problema de Cauchy matricial linear

$$(4) \quad X' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, t_0, x_0)), X(t_0) = I_n$$

onde  $I_n$  é a matrix identidade  $n \times n$ .

Como no caso da dependência contínua podemos nos restringir ao caso sem parâmetros, ou seja, podemos nos restringir a mostrar o seguinte teorema:

**Teorema 7.** Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínua no aberto  $U$  e suponha que  $f$  é diferenciável com relação à variável  $x$  sendo  $\frac{\partial f}{\partial x}$  contínua em  $U$ . Então dado  $(t_0, x_0) \in U$  a solução do Problema de Cauchy correspondente existe e é única, admitindo derivada parcial com relação à variável  $x_0$ , no aberto  $D = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U; t \in I(t_0, x_0)\}$ . A função  $X(t) = D_{x_0} \varphi(t, t_0, x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$  é solução do Problema de Cauchy matricial linear

$$(5) \quad X' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, t_0, x_0)), X(t_0) = I_n$$

onde  $I_n$  é a matrix identidade  $n \times n$ .

A prova do teorema acima utiliza o seguinte

**Lema 6.** Dada  $f: (a, b) \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua,  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto, tal que existe e é contínua a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  em  $(a, b) \times K$ , então existe função  $F: (a, b) \times K \times K \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  contínua tal que:

$$(i) \quad F(t, x, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x), \forall (t, x) \in (a, b) \times K$$

$$(ii) \quad f(t, x_2) - f(t, x_1) = F(t, x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1).$$

**Prova do lema.** De modo natural somos levados a definir

$$F(t, x_1, x_2) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds$$



Como a derivada parcial de  $f$  com respeito a  $x$  existe e é contínua,  $F$  é bem definida e contínua, valendo também

$$F(t, x, x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) ds = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$$

Além disso,  $F(t, x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1) = \left[ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds \right] \cdot (x_2 - x_1) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) \cdot (x_2 - x_1) ds = \int_0^1 \frac{df}{ds}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds = f(t, sx_2 + (1-s)x_1) \Big|_{s=0}^{s=1} = f(t, x_2) - f(t, x_1)$ .  $\square$

**Prova do Teorema 7.** Consideramos  $(a, b) \in I(t_1, x_1)$  (subconjunto próprio) onde  $a > \omega_-(t_1, x_1)$  e  $b < \omega_+(t_1, x_1)$  em  $U$  tal que  $(t_o, x_o, \lambda) \in V \implies \varphi(t, t_o, x_o)$  está definida para todo  $t \in [a, b]$ .

Fixamos vetor canônico  $e_j \in \mathbb{R}^n$ . Para cada  $h \in \mathbb{R}$ ,  $|h| < \epsilon$  suficientemente pequeno, pomos  $y_h(t) := \varphi(t, t_o, x_o + h e_j)$ . Então pela dependência contínua com relação às condições iniciais, segue que  $y_h \rightarrow y_o$  uniformemente em  $[a, b]$ , quando  $h \rightarrow 0$ . Por outro lado, pelo lema anterior podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d(y_h - y_o)}{dt}(t) &= y'_h(t) - y'_o(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, t_o, x_o + h e_j) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, t_o, x_o) \\ f(t, \varphi(t, t_o, x_o + h e_j)) - f(t, \varphi(t, t_o, x_o)) &= f(t, y_h(t)) - f(t, y_o(t)) \\ &= F(t, y_o(t), y_h(t)) \cdot (y_h(t) - y_o(t)) \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{d}{dt}(y_h(t) - y_o(t)) = F(t, y_o(t), y_h(t)) \cdot (y_h(t) - y_o(t))$$

Pomos agora  $x_h(t) := \frac{1}{h}(y_h(t) - y_o(t))$ ,  $h \neq 0$  e estudamos a existência de  $\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)$ . Caso exista, este limite será igual a  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j^o}(t, t_o, y_o)$ . Agora,  $x_h$  (como vimos) é solução de uma EDO linear, a saber

$$(*) \quad x' = J(t, h)x, \quad x(t_o) = e_j$$

onde  $J(t, h) = F(t, y_o(t), y_h(t))$ . Mas  $J(t, h)$  é contínua e  $J(t, 0) = J(t) = F(t, y_o(t), y_o(t))$  o que pelo lema é igual a  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, t_o, x_o))$ . Portanto, como  $(*)$  tem soluções únicas segue que existe  $\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)$  e é igual a  $x_o(t) = x(t) =$  a solução de  $\{x' = J(t) \cdot x, x(t_o) = e_j\}$ . Resta então ver que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j^o}$  é contínua em  $D$ . Consideramos para isto a família de EDOs

$$(2*) \quad x' = J(t, t_o, x_o) \cdot x, \quad x(t_o) = e_j$$

como  $((t, t_o, x_o), x) \mapsto J(t, t_o, x_o) \cdot x$  é contínua em  $D \times \mathbb{R}^n$ , e como  $(2*)$  tem soluções únicas fixado  $(t_o, x_o)$ , segue que novamente  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j^o}$  é contínua em  $D$  e logo o teorema está demonstrado.  $\square$

Vejam alguns corolários deste resultado:

**Corolário 2.** *Seja  $f: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua no aberto  $U$ , continuamente diferenciável com respeito a  $\lambda \in \mathbb{R}^\ell$  e continuamente diferenciável com respeito a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Então a solução  $\varphi$  do Problema de Cauchy associado é diferenciável com relação a  $\lambda$  e vale que se  $j \in \{1, \dots, \ell\}$  então*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j} = D_\lambda \varphi \cdot e_j$$

é contínua em  $D$  e se

$$B(t) = D_\lambda f(t, \varphi(t, t_o, x_o, \lambda), \lambda), b(t) = B(t) \cdot e_j$$

então  $x(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j}(t, t_o, x_o, \lambda)$  é solução de

$$x' = J(t)x + b(t), b(t_o) = 0$$

**Prova.** Pomos  $F(t, (x, \lambda)) = (f(t, x, \lambda), 0)$  então  $\Phi = (\varphi, \lambda)$  é solução de

$$y' = F(t, y), y(t_o) = y_o$$

onde  $y = (t, x), y_o = (t_o, e_j)$ . Pelo Teorema 6 temos que existe e é contínua a derivada parcial  $D_\lambda \Phi$ , logo o mesmo vale para  $D_\lambda \varphi$ . Finalmente, resta usar que

$$D_\lambda \Phi \cdot e_j = (D_\lambda \varphi \cdot e_j, e_j)$$

satisfaz portanto à seguinte EDO

$$(x', y') = (J(t)x + B(t)y, 0), (x, y)(t_o) = (0, e_j).$$

□

**Corolário 3.** *Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua no aberto  $U$ . Suponha que  $f$  é diferenciável em relação às variáveis  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^\ell$  separadamente e que  $D_x f$  e  $D_\lambda f$  são contínuas em  $U$ . Então, fixados  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^r$  temos que o Problema de Cauchy*

$$x' = f(t, x, \lambda, \mu), x(t_o) = x_o$$

tem solução máxima única  $\varphi = \varphi(t, t_o, x_o, \lambda, \mu)$  diferenciável em relação a  $(t, x_o, \lambda)$ . As derivadas parciais  $D_t \varphi, D_{x_o} \varphi, D_\lambda \varphi, D_t D_{x_o} \varphi$  e  $D_t D_\lambda \varphi$  existem e são contínuas em  $D$ .

**Prova.** Fixado  $\mu$  existem por hipótese e pelo Teorema 6 as derivadas parciais  $D_{x_o} \varphi$  e  $D_\lambda \varphi$ . Além disso, estas satisfazem a EDOs lineares com coeficientes contínuos  $D_t [D_\lambda \varphi] = J(t, t_o, x_o, \lambda, \mu) \cdot [D_\lambda \varphi] + D_\lambda f(t, \varphi(t, t_o, x_o, \lambda, \mu), \lambda, \mu), D_t [D_{x_o} \varphi] = J(t, t_o, x_o, \lambda, \mu) \cdot [D_{x_o} \varphi]$ . Portanto,  $D_{x_o} \varphi$  e  $D_\lambda \varphi$  são contínuas, assim como  $D_t D_{x_o} \varphi$  e  $D_t D_\lambda \varphi$ . Finalmente,  $D_t \varphi = f(t, \varphi)$  é contínua. □

## 7. Equações de ordem superior

Consideramos agora equações diferenciais de ordem superior.

**Definição 5.** Uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  é uma equação da forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$$

onde  $f: U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua no aberto  $U$ , sendo que  $x^{(j)}$  denota a derivada de ordem  $j$  de  $x$  com relação à variável  $t$ .

De modo análogo ao que fizemos nas seções precedentes podemos definir *solução* de uma EDO de ordem  $n$  como uma função  $\varphi: J \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ , onde  $J$  é um intervalo,  $n$  vezes diferenciável e tal que  $\varphi^{(j)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ ,  $\forall t \in J$ . Dada EDO de ordem  $n$  como acima, podemos associar uma EDO de primeira ordem da seguinte forma. Definimos  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo  $F(t, x_1, \dots, x_n) := (x_2, \dots, x_n, f(t, x_1, \dots, x_n))$ . Seja  $x(t)$  solução da EDO de ordem  $n$ , então por da introdução das funções  $(x_1, \dots, x_n)(t)$  como

$$x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

temos que

$$x'_1 = x' = x_2, x'_2 = x_3, \dots, x'_{n-1} = x_n, \text{ e } x'_n = x^{(n)} = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

de modo que  $X(t) = (x_1, \dots, x_n)(t)$  é solução de  $X' = F(t, X)$ .

Podemos resumir a discussão acima como:

**Proposição 6.** Dada EDO de ordem  $n$

$$(*) x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$$

onde  $f: U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua no aberto  $U$ , temos que as soluções de  $(*)$  estão em correspondência natural com as soluções da EDO de primeira ordem

$$(*) X' = F(t, X)$$

onde  $F(t, x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(t, x_1, \dots, x_n))$ . Em particular podemos estender de forma natural para as EDOs de ordem  $n$  os teoremas de existência e unicidade e de dependência das soluções válidos para as EDOs de primeira ordem.

## Exercícios do Capítulo I

1. Complete a prova do Princípio da Conservação da energia (seção 1).
2. Prove a afirmação 1 a respeito de campos de força conservativos centrais.
3. Prove o Lema 1 e o Lema 3.
4. Prove o sub-lema 1.
5. Complete a demonstração da Desigualdade de Gronwall (Lema 5) e da Proposição 5.
6. Prove que o Teorema do Ponto Fixo de Contrações.
7. Uma equação diferencial  $x' = \frac{g(t,x)}{h(t,x)}$  é uma equação do tipo *diferencial total* se:  $g, h$  são funções reais contínuas no aberto  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $h$  não se anula em  $U$  e existe função diferenciável  $F$  em  $U$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x} = h$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = g$ . Estude as soluções da EDO dada em termos das curvas de nível da função  $F$ .
8. Uma EDO da forma  $x' = f(t)g(x)$  é dita uma *equação a variáveis separadas*. Suponhamos que  $f$  é contínua no intervalo  $I$  e que  $g$  é contínua no aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Obtenha solução explícita para a EDO acima com os dados iniciais  $x(t_0) = x_0$ .
9. Dadas  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, sendo  $f$  Lipschitziana prove que as soluções do sistema  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x)y \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  são únicas nos seus intervalos de definição. Estude o caso em que  $f$  não é Lipschitziana.
10. Estude as soluções da *equação homogênea*  $x' = h(\frac{x}{t})$  onde  $t \neq 0$  e  $h$  é contínua no intervalo  $(a, b)$  e que neste intervalo  $h(y) - y$  não se anula.  
*sugestão: considere a mudança de variáveis  $x = ty$ .*
11. Resolva e estude as soluções da equação  $x' = x^2 \cos t$ .
12. Mostre que as soluções da equação  $x' = x^{\frac{2}{3}}$  não são únicas. Compare com o Teorema de Picard.
13. Seja  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua, localmente Lipschitziana e globalmente limitada (digamos  $|f| \leq M$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ). Prove que as soluções de  $x' = f(x)$  estão definidas em toda a reta real e que se  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $\varphi(t, x) =$  solução de  $x' = f(x), x(0) = x$ ; então as aplicações  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definem homeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ . Prove que  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$  e conclua que  $t \mapsto \varphi_t$  define um homomorfismo do grupo aditivo da reta no grupo dos homeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ .
14. (*Equações diferenciais complexas*). Seja  $U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  aberto, onde  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  é o plano complexo com coordenadas  $x + iy$  e  $i^2 = -1$ . Prove que se  $f: U \rightarrow \mathbb{C}^n$  é função holomorfa ( $f$  é dita *holomorfa* se suas funções coordenadas são holomorfas), então o Problema de Cauchy holomorfo  $\frac{dx}{dz} = f(z, x), x(z_0) = x_0$  tem solução *holomorfa*  $\varphi(z, (z_0, x_0))$  única definida em um disco  $D(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq \epsilon\}$  para todo  $(z_0, x_0) \in U$ .

## Capítulo II - Campos de Vetores

### 1. O Teorema do Fluxo Local

Nesta seção estudaremos os fluxos associados a campos de vetores iniciando assim o estudo qualitativo das EDOs.

**Definição 1.** Um *campo de vetores* em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tal campo define uma EDO *autônoma*  $x' = X(x)$ . Como consequência do Teorema de Picard obtemos:

**Proposição 1.** *Seja  $X$  um campo de vetores contínuo e localmente lipschitziano no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $\forall x_0 \in U, t_0 \in \mathbb{R}$ , existem vizinhança aberta  $V(x_0)$  de  $x_0$  em  $U$  e intervalo aberto  $I(t_0, \epsilon)$ , tais que  $\forall x_1 \in V(x_0)$  o Problema de Cauchy  $x' = X(x), x(t_1) = x_0$ , possui solução única definida no intervalo  $I(t_0, \epsilon)$ .*

As hipóteses acima são verificadas por exemplo se  $X$  é de classe  $C^1$  em  $U$ .  
Vejam os a nomenclatura ligada ao presente contexto:

**Definição 2.** Seja  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores. Um ponto  $p \in U$  tal que  $X(p) = 0$  é dito um *ponto singular* ou *singularidade* de  $X$ . As soluções de  $x' = X(x)$  são chamadas *soluções, trajetórias* ou *curvas integrais* de  $X$ . Seja  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  solução maximal de  $x' = X(x)$ , então  $\gamma = \varphi(I) \subset U$  é chamada uma *órbita* de  $X$ . Uma órbita de  $X$  é dita *periódica* se  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t)$  é periódica. Veremos que tais órbitas são difeomorfas ao círculo unitário, e que as demais são difeomorfas à reta, ou a pontos singulares.

Uma equação diferencial da forma  $x' = f(x)$ , onde  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é (pelo menos) contínua e não depende da variável tempo  $t$ , é dita uma *equação diferencial autônoma*. Como estamos interessados num estudo qualitativo de tais EDOs, pensaremos em EDOs autônomas como em EDOs dadas por campos de vetores.

**Teorema 1 (Teorema do Fluxo Local).** *Seja  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores de classe  $C^k, k \geq 1$  no aberto  $U$ .*

(i)  $\forall x_0 \in U$  existe a solução maximal  $\varphi_{x_0}(t)$  de  $x' = X(x), x(0) = x_0$ , definida no intervalo maximal  $I_{x_0}$ .

(ii) (*Propriedade de fluxo*) Se  $y_0 = \varphi_{x_0}(t_0)$  com  $t_0 \in I_{x_0}$  então  $I_{y_0} = I_{x_0} - t = \{s - t, s \in I_{x_0}\}$  e também  $\varphi_{y_0}(s) = \varphi_{x_0}(t_0 + s), \forall s \in I_{y_0}$ .

(iii) O conjunto  $D = \{(t, x) \in U \times \mathbb{R}^n, t \in I_x\}$  é aberto.

(iv) A aplicação  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^k$ .

Além disso, temos a seguinte relação  $D_t D_x \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_x \varphi(t, x)$  em  $D$ .

**Prova.** Para obtermos o resultado acima para EDOs autônomas podemos utilizar os resultados análogos obtidos para EDOs  $x' = \tilde{f}(t, x), x(t_0) = x_0$  onde  $\tilde{f}: \tilde{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definindo apenas  $\tilde{U} = \mathbb{R} \times U$  e  $\tilde{f}(t, x) := X(x)$  em  $\tilde{U}$ . Basta então utilizar os teoremas de Picard, e dependência das soluções com respeito às condições iniciais e parâmetros do capítulo precedente. Para verificar a propriedade de fluxo (ii) acima basta usar a unicidade

das soluções e o fato de que (como a equação é autônoma) ambas as funções em questão são soluções de um mesmo problema de Cauchy.  $\square$

**Definição 3.** O *fluxo local* ou *grupo a um parâmetro* gerado por  $X$  é a aplicação  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . O campo  $X$  é dito *completo* se  $I_x = \mathbb{R}, \forall x \in U$ , ou seja, se  $D = \mathbb{R} \times U$ .

Como corolário da argumentação acima obtemos:

**Corolário 1.** Seja  $X$  campo de vetores de classe  $C^k, k \geq 1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sejam  $x \in U$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  o intervalo maximal da solução  $\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$  que satisfaz  $\varphi(0, x) = x$ . Então se  $\omega_+(x) < +\infty$  temos que  $\varphi_x(t) \rightarrow \partial U$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$ . Resultado análogo vale se  $\omega_-(x) > -\infty$ .

Este resultado também se deduz do resultado geral de divergência para as soluções de EDOs não necessariamente autônomas.

**Corolário 2.** Seja  $X$  campo de vetores de classe  $C^1$  e limitado (digamos  $|X(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ) em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $X$  é completo.

**Prova.** (exerc.1).

Denotemos por  $\text{Diff}^k(U)$  o grupo dos difeomorfismos de classe  $C^k$  do aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

**Proposição 2.** Seja  $X$  campo de vetores completo de classe  $C^k, k \geq 1$  em  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Então o fluxo de  $X, \varphi: \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ , satisfaz:

$$(i) \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_x(t)) = X(\varphi_x(t)), \varphi_x(0) = x$$

$$(ii) \varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$$

$$(iii) X(x) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \right|_{t=0}$$

(iv)  $\varphi_t: U \rightarrow U, \varphi_t(c) = \varphi(t, c)$  define difeomorfismo  $C^k$ . Além disso, a aplicação  $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^k(U), t \mapsto \varphi_t$  define um homeomorfismo de grupos.

**Proposição 3.** Seja  $X$  campo de classe  $C^k, k \geq 1$ . Dada solução máxima  $\varphi$  de  $X$ , definida em  $I$ , temos três alternativas:

(i)  $\varphi$  é constante e  $I = \mathbb{R}$ .

(ii)  $\varphi$  é injetiva.

(iii)  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica.

Em particular, se  $\gamma = \varphi(I)$  é a órbita correspondente, então temos as seguintes possibilidades para  $\gamma$ : (i)  $\gamma = \{p\}$ , (ii)  $\gamma$  é difeomorfa à reta, (iii)  $\gamma$  é difeomorfa ao círculo unitário.

Vejamos alguns lemas que precisaremos para demonstrar o resultado acima:

**Lema 1.** Seja  $G \subset (\mathbb{R}, +)$  subgrupo (aditivo) da reta. Então ou bem  $G$  é cíclico discreto ou bem  $G$  é denso.

Este lema é bem conhecido de Análise Real [El6] e sua prova consiste em observar que  $G$  é discreto se, e somente se, 0 não é ponto de acumulação de  $G$  o que por sua vez

equivale a dizer que se  $a = \inf G \cap \{x > 0\}$  então o resto de qualquer elemento de  $G$  na divisão arquimediana por  $a$  deve ser nulo, e logo  $G$  é cíclico gerado por  $a$ .

**Prova Proposição 4.** Tomamos o caso em que  $\varphi$  é não injetiva e não constante (em particular  $X$  não se anula em nenhum ponto da trajetória descrita por  $\varphi$ ). Então existem  $t_1 < t_2$  em  $I$  tais que  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ . Pelo que vimos no Teorema 1 (ii) isto nos diz que se  $\tau = t_2 - t_1 > 0$  então  $\varphi(\tau) = \varphi(0)$  e também que  $\varphi(\tau + t) = \varphi(t)$  para todo  $t \in I$  tal que  $t + \tau \in I$ . Mas isto implica que (pela maximalidade de  $I$ ) devemos ter  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica tendo  $\tau$  como um período. Tomemos  $\tau > 0$  como período minimal de  $\varphi$ . Neste caso temos que a órbita  $\gamma = \varphi(\mathbb{R})$  é portanto difeomorfa (via  $\varphi$ ) a  $\varphi([0, \tau])$ , ou seja, ao círculo unitário. Caso  $\varphi$  seja injetiva temos que  $\gamma$  é difeomorfa (ainda via  $\varphi$ ) ao intervalo aberto  $I$  e portanto à reta real  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Definição 4.** O retrato de fase do campo  $X$  é a representação de  $U$  como decomposto em órbitas de  $X$ , segundo a classificação acima. As órbitas sendo orientadas como o campo  $X$ .

## 2. O Teorema do Fluxo Tubular

O Teorema do Fluxo Tubular, objeto central desta seção, afirma, a grosso modo, que campos (fortemente diferenciáveis) de vetores podem ser retificados em um vizinhança de um ponto não singular. Assim, em particular, não há informação local relevante numa vizinhança de um ponto regular, pertinente a um dado campo de vetores. Vejamos inicialmente algumas definições importantes:

### 2.1 Conjugações

Uma conjugação entre dois sistemas dinâmicos é uma aplicação que preserva as propriedades dinâmicas dos mesmos. Vejamos o caso de campos de vetores.

**Definição 5.** Sejam  $X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $Y: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , campos de vetores com fluxos locais  $\varphi(t, x)$  e  $\psi(t, x)$  respectivamente. Uma bijeção (não necessariamente diferenciável)  $h: U \rightarrow V$  define uma *conjugação* entre  $X$  e  $Y$  quando se tem

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)), \forall (t, x)$$

A grosso modo,  $h$  é uma reparametrização do fluxo de  $X$  como o fluxo de  $Y$ .

Um primeiro exemplo desta situação é o seguinte:

**Exemplo 1.** Sejam  $X: \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores de classe  $C^1$  e  $h: U \rightarrow V$  difeomorfismo de classe  $C^1$ , com  $h(U) = V \subset \mathbb{R}^n$ . Pomos  $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $Y = h_* X$  ou seja,  $Y(q) = h'(p) \cdot X(p)$ , onde  $q = h(p)$ . Então  $Y$  é campo de vetores contínuo em  $V$ , que é conjugado via  $h$  a  $X$  (verifique!).

**Observação 1.** Dois campos de vetores  $X$  e  $Y$  de classe  $C^r, r \geq 0$ , serão ditos  $C^r$ -conjugados se  $\exists$  conjugação  $h$  entre  $X$  e  $Y$  com  $h \in C^r$ . Se  $r = 0$  dizemos que  $X$  e  $Y$  são *topologicamente conjugados*.

Surge então a seguinte questão:

**Questão 1.** Sejam  $X$  e  $Y$  campos de vetores  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e topologicamente conjugados. Sob quais condições  $X$  e  $Y$  são  $C^r$  conjugados?

Mais adiante discutiremos esta questão.

**Definição 6.** Sejam  $X_1, X_2$  dois campos de vetores  $C^k$  em  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  respectivamente. Dizemos que  $X_1$  é  $C^r$  equivalente a  $X_2$  se  $\exists$  difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $h: U_1 \rightarrow U_2$ , que leva órbitas de  $X_1$  em órbitas de  $X_2$ , preservando a orientação de cada uma delas. Assim, se  $\gamma_1(p)$  denota a órbita de  $X_1$ , orientada, pelo ponto  $p \in U_1$ , então  $h(\gamma_1(p)) = \gamma_2(h(p))$  que é a órbita de  $X_2$ , orientada, passando pelo ponto  $h(p)$ .

Evidentemente uma conjugação define uma equivalência entre campos de vetores. Uma pergunta natural é decidir quando dois campos equivalentes são de fato conjugados. A proposição abaixo dá condições restritivas neste sentido.

**Proposição 5.** Sejam  $X_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, 2$ , campos de vetores de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Um difeomorfismo  $h: U_1 \rightarrow U_2$  de classe  $C^1$  é uma conjugação entre estes campos se, e somente se,

$$\forall p \in U_1, Dh(p) \cdot X_1(p) = X_2(h(p))$$

**Prova.** (exerc.2).

**Definição 7.** Dados campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e ponto  $p \in U$ , uma *seção transversal (local)* a  $X$  em  $p$  (de classe  $C^k$ ), é uma aplicação diferenciável (de classe  $C^k$ )  $\sigma: V^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$ , que é um mergulho local (isto é, uma imersão e um homeomorfismo local sobre a imagem) com  $p \in \Sigma := \sigma(V)$ , onde  $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  é aberto conexo (em geral um disco aberto de dimensão  $n-1$  centrado na origem), tal que para todo ponto  $x \in V$  tem-se a seguinte decomposição em soma direta:

$$X(\sigma(x)) \oplus \sigma'(x) \cdot \mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}_{\sigma(x)}^n$$

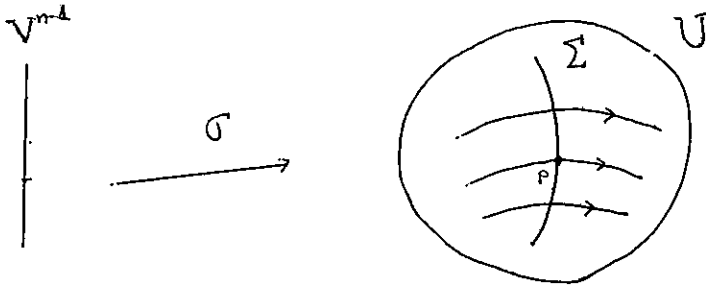


figura 5

Uma *seção transversal* define então um mergulho de  $V^{n-1}$  como subvariedade transversal á aplicação  $X$ .



O seguinte lema prova a existência de seções transversais em vizinhanças de pontos regulares de campos de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

**Lema 2.** *Sejam  $X:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $p \in U$  ponto regular de  $X$ ,  $X(p) \neq 0$ . Então existe seção transversal local de classe  $C^k$ ,  $\sigma: \mathbb{D}^{n-1} \rightarrow \Sigma \subset U$  a  $X$ , com  $\sigma(0) = p$ .*

**Prova.** Completamos o vetor  $X(p) \in \mathbb{R}_p^n$  a uma base  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$  de  $\mathbb{R}_p^n$ . Seja  $\sigma_0: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a aplicação definida por  $\sigma_0(t_1, \dots, t_{n-1}) = p + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \cdot v_j$ . Então  $\sigma_0(0) = 0$  e  $\sigma'_0(0) \cdot \mathbb{R}_0^{n-1} \oplus X(p) = \mathbb{R}_p^n$ . A aplicação  $\sigma$  é então obtida por restrição a partir de  $\sigma_0$ .  $\square$

Chegamos então ao resultado central desta seção:

**Teorema 2 (Teorema do Fluxo Tubular).** *Sejam  $X:U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $p \in U$  ponto regular de  $X$ . Dada seção transversal local  $\sigma:V \rightarrow \Sigma$  com  $0 \in V$ ,  $\sigma(0) = p$ , existem vizinhança  $U \supset W \ni p$  e difeomorfismo  $C^k$ ,  $h:W \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{D}^{n-1}(0, \delta)$ , onde  $\mathbb{D}^{n-1}(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  é o disco aberto centrado na origem e de raio  $\delta$ , tais que:*

(i)  $h(\Sigma \cap W) = \{0\} \times \mathbb{D}^{n-1}(0, \delta)$

(ii)  $h$  define conjugação  $C^k$  entre  $X|_W$  e o campo horizontal constante  $\frac{\partial}{\partial x_1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido pela primeira direção canônica em cada ponto.

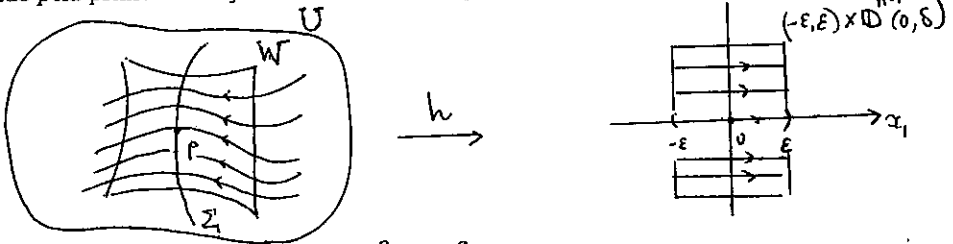


figura 6

**Prova.** Uma vez mais temos uma consequência do Teorema da Aplicação Inversa. Seja  $\varphi: D \rightarrow U$  o fluxo local diferenciável de  $X$  e definimos

$$H: \tilde{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times V, (t, \sigma(x)) \in D\} \rightarrow U, H(t, x) = \varphi(t, \sigma(x))$$

Então  $H$  é de classe  $C^k$  e satisfaz:

$$D_t H(0) = \frac{d}{dt} \varphi(t, \sigma(0)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi(t, p) \Big|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$$

Por outro lado,

$$D_{x_j} H(0) = \frac{\partial}{\partial x_j} H(0, x) \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(x) \Big|_{x=0} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}(0)$$

Deste modo como  $\sigma$  define seção transversal a  $X$  em  $p = H(0)$ , temos que  $DH(0)$  é um isomorfismo e pelo Teorema da Aplicação Inversa [El4] existe uma vizinhança  $(-\epsilon, \epsilon) \times B$

(onde  $B$  é uma bola aberta centrada na origem  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ) tal que  $H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$  sobre a imagem  $W = H((-\epsilon, \epsilon) \times B)$  que é um aberto contendo  $p = H(0)$ . Agora, note que por construção  $H$  leva linhas horizontais ( $x = cte$  no plano  $(t, x)$ ) em trajetórias de  $X$ . Isto já indica que  $H$  definirá a conjugação desejada. Com efeito, escrevemos  $h$  para a inversa de  $H|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B}$ , obtendo difeomorfismo de  $W$  sobre o aberto produto  $(-\epsilon, \epsilon) \times B$ . Então, como  $H(\{0\} \times B) = \Sigma \cap W$ , temos que  $h(\Sigma \cap W) = \{0\} \times B$ .

Finalmente,  $h$  conjugua  $X$  ao campo horizontal constante  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  pois  $Dh^{-1}(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} = DH(t, x) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_t H(t, x) = X(\varphi(t, \sigma(x))) = X(H(t, x)) = X(h^{-1}(t, x))$ .  $\square$

Veremos agora que o tempo em que uma trajetória próxima a uma certa seção transversal leva para chegar até esta, depende de forma diferenciável da posição de partida.

**Proposição 6.** Dados  $X$  campo de vetores  $C^k$  em  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $p \in \Sigma$  ponto em uma seção transversal a  $X$ , existem  $\epsilon > 0$  (dependendo de  $p$ ), vizinhança  $W(p) \ni p$  em  $\mathbb{R}^n$ , e função de classe  $C^k$ ,  $\tau: W(p) \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que:

(i)  $\tau(W(p) \cap \Sigma) = \{0\}$

(ii)  $\forall x \in W(p)$  a trajetória  $\varphi(t, x)$  está definida e injetiva em  $I(\tau(x), \epsilon)$ .

(iii)  $\varphi(\tau(x), x) \in \Sigma$  é o único ponto de encontro da trajetória por  $x$  com a seção  $\Sigma$ .

(iv) A projeção  $P: W(p) \rightarrow \Sigma$ ,  $x \mapsto \varphi(\tau(x), x)$  é uma submersão  $C^k$ . Vale que  $DP(x) \cdot v = 0$  se e somente se  $v = \lambda X(x)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

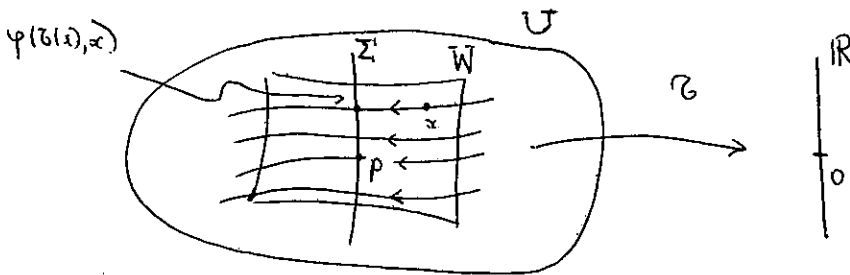


figura 7

**Prova.** (exerc.3).

Algumas consequências deste resultado estão ligadas ao comportamento das órbitas próximo a uma órbita periódica.

**Proposição 7.** Seja  $\gamma$  trajetória orientada (não-singular) de um campo de vetores de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$   $X$  em  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dados pontos  $p, q \in \gamma$  e seções transversais  $\Sigma_p$  e  $\Sigma_q$  com  $p \in \Sigma_p \cap \gamma$  e  $q \in \Sigma_q \cap \gamma$ ; existe aplicação de classe  $C^k$   $h_\gamma: V_p \subset \Sigma_p \rightarrow \Sigma_q$  tal que:

(i) Se  $x \in V_p$  então  $h_\gamma(x) \in \Sigma_q$  é o primeiro ponto de interseção da trajetória (orientada) de  $X$  passando por  $x$ , com a seção  $\Sigma_q$ .

(ii)  $h(p) = q$  e  $h$  é difeomorfismo  $C^k$  de  $V_p$  sobre sua imagem.

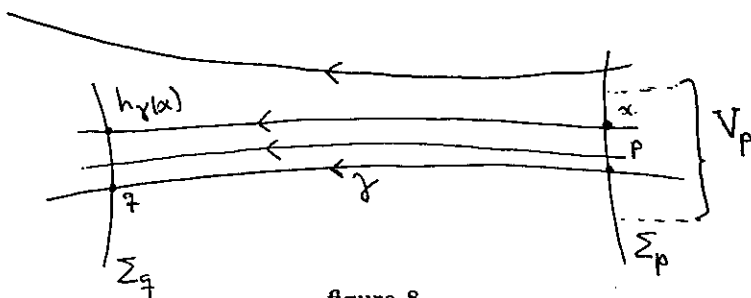


figura 8

Prova. (exerc.4).

Para o caso em  $\gamma$  é uma órbita periódica obtemos:

**Proposição 8** (Transformação de Poincaré). Seja  $X$  campo de classe  $C^k, k \geq 1$  em  $U \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ . dada trajetória compacta (regular)  $\gamma$  de  $X$ , ponto  $p \in \gamma$  e seção transversal  $\Sigma$  com  $\Sigma \cap \gamma = \{p\}$ , existe difeomorfismo  $\pi: V \subset \Sigma \rightarrow \pi(V) \subset \Sigma$ , onde  $V$  é vizinhança de  $p$ , tal que  $\forall x \in V, \pi(x)$  é o primeiro ponto de retorno da trajetória de  $X$  partindo de  $p$ , à seção transversal  $\Sigma$ . Em particular  $\pi(p) = p$ . Em particular existe vizinhança saturada  $W$  de  $\gamma$  na qual todas as órbitas são periódicas se, e somente se, podemos escolher  $V$  de modo que  $\pi$  seja a aplicação identidade em  $V$ .

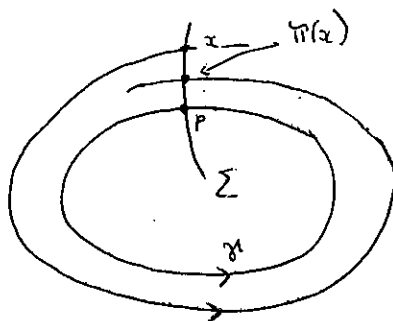


figura 9

Prova. (exerc.5)

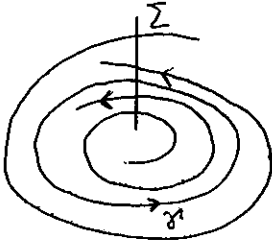
**Definição 8** (Ciclos Limites). Uma órbita periódica  $\gamma$  de um campo de vetores  $X$  é um ciclo limite se existe vizinhança  $W$  de  $\gamma$  tal que nesta vizinhança não há ponto pertencente a nenhuma outra órbita periódica.

**Proposição 9.** Seja  $\gamma$  ciclo limite do campo  $X$  de classe  $C^1$ . Se  $V$  é vizinhança suficientemente pequena de  $\gamma$  temos as seguintes três possibilidades :

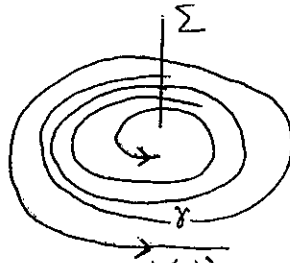
- (i)  $\gamma$  é estável:  $q \in V \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ .
- (ii)  $\gamma$  é instável:  $q \in V \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ .

(iii)  $\gamma$  é semi-estável:  $q \in V$ ,  $q$  exterior a  $\gamma \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ ;  $q \in V$ ,  $q$  interior a  $\gamma \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ ; ou vice-versa.

Prova. (exerc.6).

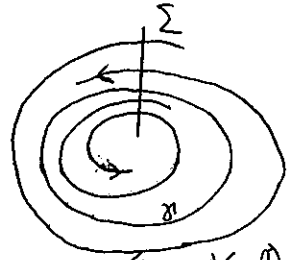


(estável)



(instável)

figura 10



(semi-estável)

### 3. Conjuntos limites

Sejam  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores  $C^k, k \geq 1$  e para cada  $p \in U$   $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$  a trajetória de  $X$  passando por  $p = \varphi_p(0)$ , definida no intervalo maximal  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Suponhamos que  $\omega_+(p) = +\infty$ . Neste caso definimos

$$\omega(p) = \{q \in U, \exists t_n \nearrow +\infty, \text{ com } \varphi(t_n) \rightarrow q\}$$

Se  $\omega_-(p) = -\infty$  definimos

$$\alpha(p) = \{q \in U, \exists t_n \searrow -\infty \text{ com } \varphi(t_n) \rightarrow q\}$$

Chamamos  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  conjunto  $\omega$ -limite e conjunto  $\alpha$ -limite de  $p$ , respectivamente.

#### Observação 2.

(i) Se  $p$  é ponto singular então  $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$ .

(ii) Se  $\gamma_p \ni p$  é órbita periódica então  $\alpha(p) = \omega(p) = \gamma_p$  (mais adiantes estudaremos a recíproca deste fato).

**Exemplo 2.** Seja  $X = (-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2))$ , então  $X$  tem o seguinte diagrama de fase. Em particular se  $C$  é o círculo unitário centrado na origem do plano, então:

$\alpha(p) = \{0\}, \emptyset, C$  caso  $p \in$  interior de  $C, p \in$  exterior de  $C, p \in C$  respectivamente.  
Por outro lado,  $\omega(p) = C, \forall p \neq 0$ .

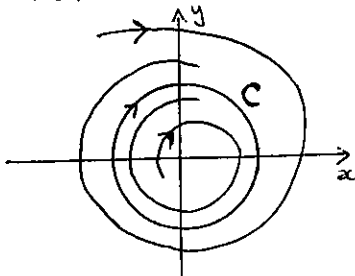


figura 11

**Lema 3.** Se  $p, q \in \gamma$  então  $\omega(p) = \omega(q)$  e  $\alpha(p) = \alpha(q)$ .

**Prova.** Seja  $\varphi(t)$  a solução de  $X$  que passa por  $p$  no tempo  $t = 0$ , e que suporemos definida para todo  $t \geq 0$ . Dado  $q \in \gamma(p)$  denotemos por  $\psi(t)$  a solução de  $X$  que passa por  $q$  em  $t = 0$ . Então  $q = \varphi(t_0)$  para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$  e pela propriedade de fluxo temos que  $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$  para todo  $t \geq 0$ . Em particular obtemos que  $\omega(p) = \omega(q)$  pois  $t_n \leftarrow +\infty$  se e somente se  $t_n + t_0 \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Podemos então formular a seguinte definição:

**Definição 9.** O conjunto  $\omega$ -limite da órbita  $\gamma$  é o conjunto  $\omega(\gamma) = \omega(p)$  onde  $p \in \gamma$  é qualquer. Análogamente define-se  $\alpha(\gamma)$ .

A estrutura dos conjuntos limites é dada basicamente pelo seguinte resultado:

**Proposição 10.** Sejam  $X:U \rightarrow \mathbb{R}^l$  campo  $C^k, k \geq 1, p \in U$  e  $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p), t \geq 0\}, \gamma_p^- = \{\varphi(t, p), t \leq 0\}$  as chamadas semi-órbitas positiva e negativa de  $X$  respectivamente. Se  $\gamma_p^+ \subset K$  para algum compacto  $K \subset U$  então:

- (i)  $\omega(p) \neq \emptyset$
- (ii)  $\omega(p)$  é compacto e invariante.
- (iii)  $\omega(p)$  é conexo.
- (iv)  $\omega(p)$  é saturado, ou seja,  $q \in \omega(p) \implies \gamma(q) \subset \omega(p)$ , onde  $\gamma(q)$  denota a trajetória de  $X$  que contém  $q$ .

Resultados análogos valem para  $\alpha(p)$ .

**Prova.** Podemos escolher  $p \in \gamma$  qualquer e estudar  $\omega(p) = \omega(\gamma)$ . Disparando uma seqüência  $t_n$  com  $t_n \rightarrow +\infty$  temos que  $\varphi(t_n) \in K, \forall n$  por hipótese, de modo que esta possui uma subseqüência convergente, digamos,  $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q \in K$ . Claramente  $q \in \omega(p)$  de modo que  $\gamma(p) \neq \emptyset$ .

Seja agora  $q_n \in \omega(p)$ . Então para cada  $n$  existe uma seqüência  $\{t_m^n\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m^n) = q_n$ . Um argumento canônico de seqüências nos dá então uma seqüência  $T_n \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(T_n) \rightarrow \lim q_n = q$  de modo que  $\omega(p)$  é fechado. Como  $\omega(p) \subset K$  que é compacto segue que  $\omega(p)$  é compacto.

A fim de ver que  $\omega(p)$  é conexo suponhamos por contradição que é possível escrever  $\omega(p) = A_1 \cup A_2$ , onde  $A_j$  é compacto não-vazio com  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Seja  $d = d(A_1, A_2)$  a distância entres estes dois compactos. Então dado  $q_1 \in A_1$  existe seqüência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(t_n) \rightarrow q_1$  e análogamente dado  $q_2 \in A_2$ , existe seqüência  $s_n \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(s_n) \rightarrow q_2$ . Como  $q_2 \notin A_1$  devemos ter para cada  $n$  um tempo  $T_n > t_n$  tal que  $d(\varphi(T_n), A_1) = \frac{d}{2}$  (de fato a trajetória deve sair de  $A_1$  em algum tempo maior do que  $t_n$  e logo pelo Teorema da Alfândega, a função distância  $t \mapsto d(\varphi(t), A_1)$  deve assumir o valor  $d/2$ ). Mas, passando a uma subseqüência convergente, isto nos dará uma seqüência  $T_{n_k} \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(T_{n_k}) \rightarrow q_3 \in K$  e  $d(q_3, A_1) = d/2$ . Mas então  $d(q_3, A_2) \geq d/2 > 0$  e logo  $q_3 \notin A_1 \cup A_2$ . Mas claramente  $q_3 \in \omega(p)$  gerando uma contradição.

O item (iv) é uma consequência direta da propriedade de fluxo  $\varphi_p(t + t_n) = \varphi_{\varphi_p(t)}(t_n)$  e o deixamos como exercício para o leitor (exerc. 7).  $\square$

#### 4. O Teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta parte do texto estabeleceremos a principal ferramenta no estudo qualitativo dos campos de vetores globais em dimensão dois: O Teorema de Poincaré-Bendixson, que versa sobre os conjuntos limites de órbitas de campos vetores, com a hipótese de que estas estejam contidas em compactos. Podemos assim obter informação geral relevante sobre

o comportamento assintótico das soluções de uma EDO autônoma, sem necessariamente conhecer suas expressões analíticas.

**Teorema 3 (Teorema de Poincaré-Bendixson).** Sejam  $X:U \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo de vetores  $C^k, k \geq 1$ , e  $p \in U$  e  $\gamma_p^+$  a semi-órbita positiva correspondente. Suponha que  $\gamma_p^+ \subset K$  para algum compacto  $K \subset U$ . Denote por  $\text{sing}(X)$  o conjunto dos pontos singulares de  $X$ . Então temos as seguintes possibilidades:

- (i)  $\omega(p)$  contém infinitas singularidades de  $X$ .
- (ii)  $\omega(p) \cap \text{sing}(X) = \emptyset \implies \omega(p)$  é órbita periódica de  $X$ .
- (iii)  $\omega(p) \not\subset \text{sing}(X)$  e possui apenas um número finito de singularidades de  $X \implies \omega(p)$  consiste de uma união de órbitas cada das quais tende a um dos pontos de  $\omega \cap \text{sing}(X)$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

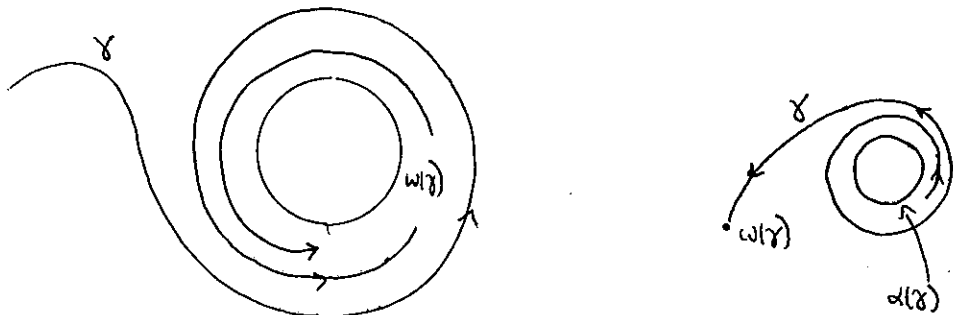


figura 12

Observamos que este resultado é válido somente em dimensão dois, e utiliza o chamado Teorema da Curva de Jordan que afirma que uma curva fechada simples (sem auto-interseção)  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  no plano, divide o plano em duas regiões tendo  $\gamma$  como bordo, uma região limitada (dita *interior* a  $\gamma$ ) e outra ilimitada (dita *exterior* a  $\gamma$ ). Este teorema se encontra na literatura corrente.

A demonstração que apresentaremos é a que se encontra na literatura corrente [So], [Hi-Sm], e está esquematizada em uma série de lemas de interesse próprio e que passamos a estabelecer.

No que se segue guardamos as hipóteses e notação do Teorema 3, ou seja, fixaremos a seguinte notação no que se segue:

$\varphi(t) = \varphi(t, p)$  é uma curva integral de  $X$  definida para todo  $t \geq 0$ , com  $\gamma(p)^+ \subset K$ , sendo  $K \subset U$  compacto (aqui  $\gamma(p)^+$  denota a *semi-órbita positiva* de  $p$ , ou seja, o conjunto  $\{\varphi(t), t \geq 0\}$ ). Também temos que,  $\Sigma$  é uma seção transversal a  $X$  (local) em  $p$ .

**Lema 4.** Sejam  $\Sigma$  seção transversal local a  $X$  em  $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$  onde  $\gamma$  é uma órbita de  $X$ ,  $\gamma = \{\varphi(t), t \in I\}$ . Então existe sequência  $t_n \nearrow +\infty$  com  $\varphi(t_n) \in \Sigma$  e  $\varphi(t_n) \rightarrow p$ .

**Prova.** Tomamos vizinhança  $V$  de  $p$  e aplicação  $\tau: V \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $\varphi(x, \tau(x)) \in \Sigma, \forall x \in V$ , como na Proposição 6. Escrevemos  $\gamma = \{\varphi(t), t \in I\}$  onde  $\varphi(t) = \varphi(t, q)$  e  $p \in \Sigma \cap \gamma$ . Agora, como  $p \in \omega(\gamma)$  temos que  $\exists s_n \nearrow +\infty$  tal que  $\varphi(s_n) \leftarrow p$ , de modo que se tem  $\varphi(s_n) \in V$  para todo  $n$  suficientemente grande. Pomos então  $t_n = s_n + \tau(t_n)$  para  $n$  grande o suficiente e obtemos  $\varphi(s_n) \in \Sigma$ . Finalmente, a continuidade de  $\tau$  (e o fato de  $\tau = 0$  sobre  $\Sigma$ ) nos garante que  $\lim \varphi(t_n) = \lim \varphi(s_n + \tau(t_n)) = \lim \varphi(s_n + \tau(s_n), q) = \lim \varphi(\tau(\varphi(s_n)), \varphi(s_n, q)) = \varphi(0, p) = p$ .  $\square$

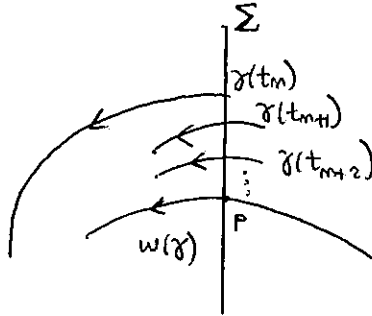


figura 13

**Lema 5.** Sejam  $\Sigma$  seção transversal local de  $X$  com  $\Sigma \subset U, p \in \Sigma \cap \gamma$  onde  $\gamma$  é órbita de  $X$ . Então  $\gamma_p^+$  intercepta  $\Sigma$  numa seqüência monótona (fixada uma orientação em  $\Sigma$ ).

**Prova.** Este lema é consequência do Teorema da Curva de Jordan. Definimos o conjunto  $A = \{t \geq 0, \varphi(t, p) \in \Sigma\}$ , então pelo Teorema do Fluxo Tubular  $A$  é discreto de modo que pode ser ordenado, digamos,  $A = \{0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ . Definimos então  $p_1 = p$  e, caso exista, pomos  $p_2 = \varphi(t_1, p)$ . De forma indutiva podemos definir  $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$  (caso exista). Agora, se  $p_1 = p_2$  então a órbita é periódica e temos  $p = p_n, \forall n$ . Seja então  $p_1 \neq p_2$ . Tomando-se uma orientação em  $\Sigma$  podemos escrever  $p_1 < p_2$ . Devemos então mostrar que, caso exista  $p_3$ , teremos  $p_2 < p_3$ . Consideremos para isto a curva de Jordan formada  $C$  pelo segmento  $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ , e pelo arco de órbita  $((p_1, p_2)) \subset \gamma$ . Então se denotamos por  $R_i$  a região interna a  $C$ , temos em particular o seguinte:

**Afirmção 1.**  $\gamma$  não sai de  $R_i$  para tempos  $t > t_1$ .

De fato, como  $((p_1, p_2))$  é um pedaço de órbita é claro que  $\gamma$  não intercepta este arco. Agora, como na seção transversal  $\Sigma$ , e em particular numa vizinhança do segmento  $\overline{p_1 p_2}$ , o fluxo aponta para dentro de  $R_i$ , temos que  $\gamma$  não intercepta este segmento. Deste modo,  $\gamma$  não escapará mais de  $R_i$ . De modo análogo prova-se que caso exista  $p_4$ , então necessariamente teremos  $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ , e assim sucessivamente.  $\square$



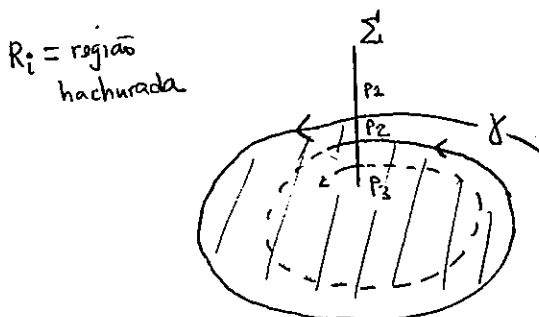


figura 14

**Lema 6.** Seja  $\Sigma$  seção transversal ao campo  $X$  e seja  $p \in U$ , então  $\Sigma$  intercepta  $\omega(p)$  em no máximo um ponto.

**Prova.** Com efeito, vimos que  $\gamma(p)^+$  intersecta  $\Sigma$  numa sequência monótona, o que implica que seu conjunto de pontos de acumulação em  $\Sigma$  contém no máximo um ponto.  $\square$

**Lema 7.** Sejam  $p \in U$  com  $\gamma_p^+ \subset K \subset U$  onde  $K$  é compacto e  $\gamma$  é órbita com  $\gamma \subset \omega(p)$ . Se  $\omega(\gamma)$  contém pontos regulares então  $\gamma$  é órbita periódica e  $\omega(p) = \gamma$ .

**Prova.** Dado ponto  $q \in \omega(\gamma)$  tomamos vizinhança  $V$  de  $q$  na qual o fluxo de  $X$  é tubular. Deste modo, podemos assumir que se  $\Sigma_q \subset V$  é uma seção transversal a  $X$  em  $q$  então pelo Lema 4 existe sequência  $t_n \nearrow +\infty$  com  $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$ . Agora, por hipótese temos que  $\gamma \subset \omega(p)$  de modo que  $\gamma(t_n) \in \omega(p)$  e logo pelo Lema 5 a sequência  $\gamma(t_n)$  é constante. Deste modo é claro que  $\gamma$  deve ser periódica. Resta então ver que  $\gamma = \omega(p)$ . Como vimos  $\omega(p)$  é conexo e contém o fechado não vazio  $\gamma$ . Basta então provar que  $\gamma$  é aberto em  $\omega(p)$ . Para isto tomamos  $r \in \gamma$  e consideramos vizinhança  $V_r$  de  $r$  na qual o fluxo de  $X$  é tubular e  $\Sigma_r \subset V_r$  seção transversal a  $X$  em  $r$ . É suficiente mostrar que, para  $V_r$  suficientemente pequena, temos

$$V_r \cap \gamma = V_r \cap \omega(p)$$

Agora, se por absurdo existe ponto  $s \in V_r \cap \omega(p) \setminus \gamma$  então usando o fato de que o fluxo em  $V_r$  é tubular, podemos obter  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t_0, s) \in \omega(p) \cap \Sigma_r$  e  $\varphi(t_0, s) \neq r$ , (lembre-se de que  $\omega(p)$  é invariante pelo fluxo de  $X$ ).

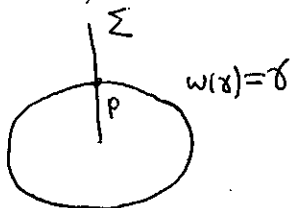


figura 15

Assim sendo, Mas então obtemos  $\#(\omega(p) \cap \Sigma_r) \geq 2$ , contradizendo o Lema 6. Deste modo terminamos a prova do Lema 7.  $\square$

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 3.

**Demonstração do Teorema 3.** Suponhamos que  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares. Dado  $q \in \omega(p)$  temos que a órbita  $\gamma(q)$  satisfaz  $\gamma(q) \subset \omega(p)$  e logo estando contida num compacto, temos que  $\omega(q) \neq \emptyset$  e contém somente pontos regulares. Do Lema 7 segue então que  $\omega(q)$  é uma órbita periódica.

Suponhamos agora que  $\omega(p)$  contém pontos regulares e singulares. Dada órbita  $\gamma$  contida em  $\omega(p)$  temos que ou bem  $\gamma$  é um ponto singular ou bem  $\gamma$  só contém pontos regulares. Como  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são conexos e  $\omega(\gamma) \subset \omega(p)$ ,  $\alpha(\gamma) \subset \alpha(p)$ , segue que no caso não-singular,  $\gamma$  é então uma órbita que tende a uma das singularidades em  $\omega(p)$  à medida que  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Finalmente suponhamos que  $\omega(p)$  não contém pontos regulares. Neste caso a conexidade de  $\omega(p)$  e o fato de que (por hipótese)  $X$  possui apenas um número finito de singularidades, nos garantem que  $\omega(p)$  é um ponto singular de  $X$ .  $\square$

Vejamos agora algumas aplicações do Teorema de Poincaré-Bendixson:

Dada uma curva simples  $\gamma$  no plano denotaremos por  $\text{Int}(\gamma)$  a região (aberta) interior a  $\gamma$ .

**Proposição 11.** *Seja  $\gamma$  órbita periódica de um campo de vetores  $X:U \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\text{Int}(\gamma) \subset U$ . Então  $\text{Int}(\gamma)$  contém alguma singularidade de  $X$ .*

**Prova.** Tomamos  $R$  como a região compacta cujo bordo é a curva  $\gamma$ . Suponhamos por absurdo que  $X$  não possui singularidades no interior de  $R$ . Seja então  $\mathcal{F}$  a família de órbitas fechadas de  $X$  contidas em  $R$  e considere a seguinte ordem parcial (invertida) em  $\mathcal{F}$ : dadas  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}$  pomos  $\gamma_2 \geq \gamma_1$  se  $R_1 \supset R_2$ , onde  $R_j$  denota a região compacta cujo bordo é  $\gamma_j$ .

**Afirmção 2.**  $(\mathcal{F}, \geq)$  é indutivo, ou seja, todo subconjunto totalmente ordenado de  $\mathcal{F}$  possui cota superior.

Com efeito, dado  $A \subset \mathcal{F}$  totalmente ordenado tomamos  $R(A) := \bigcap_{\gamma_a \in A} R_{\gamma_a}$  onde  $R_{\gamma_a}$  denota a região compacta limitada por  $\gamma_a \in A$ . Então como cada interseção finita de elementos da coleção  $\{R_{\gamma_a}, \gamma_a \in A\}$  é não-vazia e seus elementos são compactos de  $\mathbb{R}^2$ , segue que  $R(A) \neq \emptyset$ . Note que  $R(A)$  é um compacto invariante pelo fluxo de  $X$  de modo que dado ponto qualquer  $q \in R(A)$  o Teorema de Poincaré-Bendixson garante que  $\omega(q)$  é uma órbita periódica (aqui entra a hipótese de absurdo) digamos,  $\gamma_A \subset R(A)$ . Claramente  $\gamma_A$  é cota superior de  $A$ .

Assim, o Lema de Zorn nos garante a existência de um elemento maximal  $\gamma_{\mathcal{F}}$  na família  $\mathcal{F}$  (note que  $\mathcal{F}$  é não vazia pois contém a  $\gamma$ ). Em particular a região  $R_{\gamma_{\mathcal{F}}}$  limitada por  $\gamma_{\mathcal{F}}$  não contém nenhuma outra órbita compacta. Isto é uma contradição ao Teorema de Poincaré-Bendixson, pois sendo  $R_{\gamma_{\mathcal{F}}}$  invariante por  $X$ , dado qualquer ponto  $p$  interior a  $R_{\gamma_{\mathcal{F}}}$  temos que  $\omega(p)$  é uma órbita periódica.  $\square$

O resultado acima é também uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brower (exerc.8).

## 5. Campos Gradientes

Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável (de classe  $C^k, k \geq 1$ ) no aberto  $U$ . O gradiente de  $f$  é o campo de vetores  $\text{grad}(f): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido pela propriedade:  $\langle \text{grad}(f)(p), v \rangle = df(p) \cdot v, \forall v \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 10.** Um campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um *campo gradiente* se existe função diferenciável  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $X = \text{grad}(f)$  em  $U$ .

Os campos do tipo gradiente são importantes por possuírem muitas aplicações a diversos problemas importantes. No que se segue esboçaremos algumas destas. Começaremos com uma observação a respeito do comportamento dos conjuntos limites.

**Proposição 12.** *Seja  $X = \text{grad} f$  onde  $f$  é de classe  $C^2$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Então:*

- (i)  $f$  é monótona estritamente crescente ao longo das órbitas regulares de  $X$ .
- (ii)  $X$  não possui órbitas periódicas.
- (iii) Se  $X$  possui singularidades isoladas então dado  $p \in U$ , o conjunto limite  $\omega(p)$  é vazio ou se reduz a um ponto singular de  $X$ .

**Prova.**

(i) De fato, dada solução (regular)  $\varphi(t)$  de  $X = \text{grad} f$  definida em  $I$ , temos que  $\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \langle \text{grad} f(\varphi(t)), X(\varphi(t)) \rangle = |X(\varphi(t))|^2 > 0$ . Assim,  $f$  é estritamente crescente ao longo das órbitas regulares de  $X$ .

(ii) Com efeito, seja  $\varphi(t)$  solução periódica de  $X$ , digamos  $\varphi(0) = \varphi(t_1)$  com  $t_1 > 0$ . Por (i) acima temos que  $f(\varphi(t_1)) > f(\varphi(0))$ , absurdo.

(iii) Basta utilizar o Teorema de Poncaré-Bendixson, observando que as outras possibilidades são descartadas por (i) e (ii) acima.  $\square$

Seja agora  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Um ponto  $p \in U$  é um *ponto crítico* de  $f$  se  $df(p) = 0$ , ou seja,  $p$  é uma singularidade do campo gradiente  $\text{grad} f$ . Se  $f$  é duas vezes diferenciável dizemos que um ponto crítico  $p$  é *não degenerado* se a forma hessiana  $\text{Hess}(f)$  de  $f$  em  $p$  é não degenerada, ou seja, se a matrix  $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(p)$  onde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , é não-singular. Neste caso definimos o *índice* de  $f$  em  $p$  como o índice da forma hessiana, ou seja, a maior dimensão de subespaço vetorial  $V \subset \mathbb{R}_p^n$ , tal que  $\text{Hess}(f)|_V$  é negativa definida. Recordamos o célebre Lema de Morse:

**Lema 8 (Lema de Morse).** *Seja  $f$  de classe  $C^3$  em uma vizinhança  $U$  da origem  $0 \in \mathbb{R}^n$  e seja  $0$  ponto crítico não degenerado de  $f$ . Então existem coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$  em um aberto  $0 \in W \subset U$  tais que nestas coordenadas  $f$  se escreve em forma quadrática:*

$$f(y_1, \dots, y_n) = f(0) - (y_1)^2 - \dots - (y_r)^2 + (y_{r+1})^2 + \dots + (y_n)^2$$

onde  $r$  é índice de  $f$  em  $0$ . Em particular  $0$  é ponto crítico isolado de  $f$ .

**Prova.** Ver [Mi],[E14].

Dada variedade diferenciável  $M$  podemos estender as noções acima utilizando cartas locais. O fato de que as definições de ponto crítico, ponto crítico não degenerado e de índice de uma função em um ponto crítico não degenerado não dependem da carta local escolhida para  $M$ , é consequência da Regra da Cadeia e do fato de que as mudanças de coordenadas são difeomorfismos entre abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Assim enunciaremos o resultado abaixo já no ambiente mais geral de variedades diferenciáveis. Evidentemente, o leitor menos familiarizado com esta noção pode pensar em  $M$  como uma superfície regular ou mesmo um aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4 (Morse).** *Seja  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^\infty$  e sejam  $a < b$  tais que o conjunto  $[a \leq f \leq b] \subset M$  é compacto (e.g., se  $M$  é compacta) e não contém pontos críticos de  $f$ . Então as superfícies de nível  $[f = a]$  e  $[f = b]$  são difeomorfas, de fato  $[f \leq a]$  é um retrato de deformação de  $[f \leq b]$ . Em particular, ambas têm o mesmo tipo de homotopia.*

Recordamos a definição de retrato de deformação.

**Definição 11.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos com  $Y \subset X$  subespaço. Dizemos que  $Y$  é um retrato de deformação de  $X$  se existe homotopia contínua  $r_t: X \rightarrow X$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que  $r_1 = Id: X \rightarrow X$  (identidade) e  $r_0: X \rightarrow Y$  é uma retração (isto é,  $r_0|_Y = Id: Y \rightarrow Y$ , identidade de  $Y$ ).*

Neste caso temos uma equivalência homotópica  $X \equiv Y$  [El1] dada por  $r_0$  e pela inclusão  $Y \rightarrow X$ .

Observamos também o seguinte:

**Lema 9.** *Sejam  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $c \in f(M)$ . Então o conjunto  $[f = c] \setminus Cr(f)$  dos pontos  $p \in [f = c]$  que não estão no conjunto  $Cr(f)$  dos pontos críticos de  $f$ , é uma subvariedade  $C^k$  e  $(m - 1)$ -dimensional de  $M^m$ .*

**Prova.** Suporemos  $c = 0$  por simplicidade. Como  $f$  é de classe  $C^1$  temos que se  $p \in [f = 0] \setminus Cr(f)$  podemos escolher carta local  $x: U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ , de  $M$  válida em  $p \in U$ , com  $x(p) = 0$  tal que  $df(q) \neq 0, \forall q \in U$ , e  $\frac{\partial f}{\partial x_m}(q) \neq 0, \forall q \in U$ . Definimos então  $F: x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  pondo  $F(x_1(q), \dots, x_m(q)) = (x_1(q), \dots, x_m(q), f(q)), q \in U$ . Obtemos então  $F \in C^k$  que é um difeomorfismo local em  $x(U)$  e logo existe bola aberta  $B(0, \epsilon) \subset x(U)$  tal que restrita a esta bola  $F$  é um difeomorfismo  $C^k$ , com  $F(0) = 0$ . Pomos então  $\xi: x^{-1}(B(0, \epsilon)) \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  como  $\xi(q) := (F \circ x)(q)$  obtendo difeomorfismo  $C^k$  tal que  $x^{-1}(B(0, \epsilon) \times \{0\}) = ([f = 0] \setminus Cr(f) \cap x^{-1}(B(0, \epsilon)))$ , o que prova o afirmado.  $\square$

Como corolário obtemos:

**Corolário 3.** *Se  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k$  e  $c$  é valor regular não trivial de  $f$  então  $[f \leq c]$  é subvariedade com bordo, de classe  $C^k$ , e bordo  $[f = c]$ ,  $m - 1$ -dimensional.*

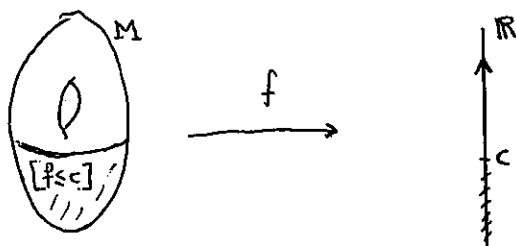


figura 16

**Prova do Teorema 4.** Inicialmente observamos que a idéia aqui consiste em “descer”  $[f \leq b]$  até  $[f \leq a]$  utilizando para isto o fluxo do campo  $-\text{grad } f$ , o que é possível pois (na ausência de singularidades)  $f$  é estritamente decrescente ao longo das órbitas orientadas de  $-\text{grad } f$ . Nos restam dois problemas a solucionar, o primeiro se refere ao fato que  $\text{grad } f$  pode não ser completo em  $M$ , o segundo refere-se à própria definição de  $\text{grad } f$  em uma variedade diferenciável qualquer.

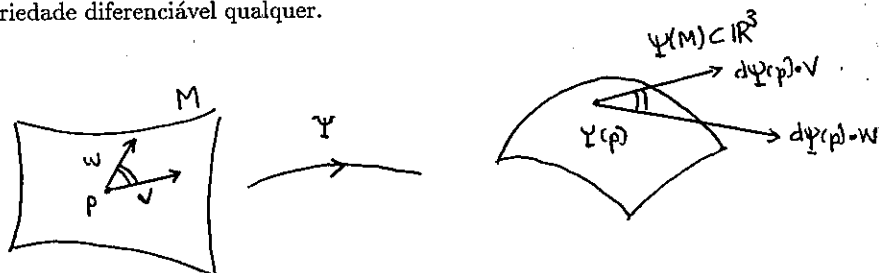


figura 17

Com relação a este segundo problema observamos que  $M$  pode ser munida de uma *métrica Riemanniana* ou seja, de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em cada espaço tangente  $T_p(M)$  e que varia diferenciavelmente com o ponto  $p$ , do seguinte modo: Se  $X$  e  $Y$  são campos de vetores de classe  $C^k$  em  $M$  então a função real  $\langle X, Y \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k$ . A existência de métricas riemannianas é um fato e pode ser obtida facilmente a partir da existência de partições da unidade [E14],[dC2],[E13]. Outra forma de definir uma tal métrica em  $M$  consiste em utilizar os Teoremas de Whitney [E13] para produzir uma imersão de classe  $C^k$  de  $M$  em  $\mathbb{R}^N$  para algum  $N \in \mathbb{N}$ , digamos  $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  e definir  $\langle v, w \rangle_p := \langle d\Psi(p) \cdot v, d\Psi(p) \cdot w \rangle$  para  $p \in M$  e  $v, w \in T_p(M)$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto escalar em  $\mathbb{R}^N$ , fazendo deste modo  $\Psi$  uma *imersão isométrica*. Uma vez munida  $M$  de uma métrica Riemanniana podemos definir o campo gradiente exigindo que  $\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df(p) \cdot v, \forall v \in T_p(M), \forall p \in M$ . Utilizando cartas locais vemos que  $\text{grad } f$  é localmente bem definido, único e de classe  $C^{k-1}$  (se  $f \in C^k$ ). Podemos então considerar o campo  $\text{grad } f$  ao longo de  $M$ . Resolvemos agora o primeiro problema tomando função de classe  $C^{k-1}, \rho : M \rightarrow [0, +\infty)$  tal que  $\rho = -\frac{1}{\|\text{grad } f\|^2}$  numa vizinhança  $U \supset V \supset f^{-1}[a, b]$  e tal que  $\rho = 0$  fora de  $U$ .

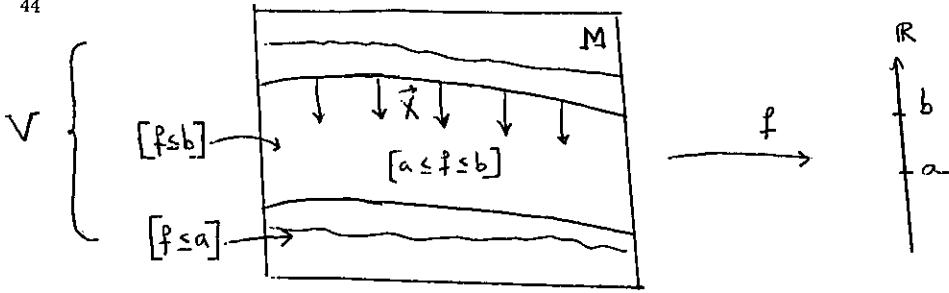


figura 18

Definimos então um novo campo de vetores  $X := \rho \cdot \text{grad } f$  obtendo campo  $C^{k-1}$  global em  $M$  tal que  $X = 0$  fora de  $U$ , e  $X = -\frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|^2}$  em  $V$ . Em particular por hipótese  $x$  tem suporte compacto em  $M$ , e logo  $X$  é completo (exerc. 19). Assim podemos considerar o grupo a 1-parâmetro gerado por  $X$ , digamos,  $\varphi_t: M \rightarrow M, t \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ .

Fixado  $q \in M$  se  $f(\varphi_{t_0}(q)) \in f^{-1}(a, b)$  então

$$\frac{d}{dt}[f(\varphi_t(q))]\Big|_{t=t_0} = \langle -\text{grad } f(\varphi_{t_0}(q)), \frac{\text{grad } f(\varphi_{t_0}(q))}{\|\text{grad } f(\varphi_{t_0}(q))\|^2} \rangle = -1$$

Assim a correspondência  $t \mapsto f(\varphi_t(q))$  é afim da forma  $f(\varphi_t(q)) = -t + cte$ , no intervalo compacto  $I_q := \{t, f(\varphi_t(q)) \in [a, b]\}$ . Em particular se prova:

Note agora que  $\varphi_{b-a}: M \rightarrow M$  aplica  $[f \leq b]$  difeomorficamente sobre  $[f \leq a]$ . Definimos finalmente a homotopia  $r_t: [f \leq b] \rightarrow [f \leq b]$  pondo  $r_t(q) = q$  se  $q \in [f \leq a]$  e  $r_t(q) = \varphi_{t-f(q)}(q)$ , se  $a \leq f(q) \leq b$ .

Então  $r_0 = Id$  e se vê facilmente que  $r_1$  é uma retração de  $[f \leq b]$  sobre  $[f \leq a]$ .  $\square$

Utilizando o Teorema de Morse acima e o Lema de Morse obtemos o seguinte resultado devido a Reeb:

**Teorema 5 (Reeb).** *Seja  $M^n$  variedade compacta de classe  $C^\infty$  que admite uma função  $C^\infty$  com apenas dois pontos críticos, então  $M$  é homeomorfa à esfera de mesma dimensão.*

**Prova.** Primeiro observamos que estes dois pontos críticos, digamos  $p, q \in M$ , necessariamente são de mínimo e máximo absoluto respectivamente. Podemos então supor que  $f$  tem índice 0 e  $n$  em  $p$  e  $q$  e que  $f(p) = 0$  e  $f(q) = 1$ , de modo que pelo Lema de Morse podemos escolher  $\epsilon > 0$  tal que as variedades com bordo  $f^{-1}[0, \epsilon]$  e  $f^{-1}[1 - \epsilon, 1]$  são homeomorfas a hemisférios  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{S}^n, x_n \geq 0\}$ , com bordo equador  $\mathbb{E}^{n-1} = \{x \in \mathbb{H}^n, x_n = 0\}$ . Deste modo, pelo teorema anterior podemos definir homeomorfismo entre  $M = f^{-1}[0, \epsilon] \cup f^{-1}(\epsilon, 1 - \epsilon) \cup f^{-1}[1 - \epsilon, 1]$  e duas cópias de  $\mathbb{H}^n$  coladas pelo bordo comum  $\mathbb{E}^{n-1}$ .  $\square$

**Definição 12. (Funções de Morse).** Uma função  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $M$  é um aberto de um espaço euclidiano, uma superfície regular  $M \subset \mathbb{R}^n$  (ou mais geralmente uma variedade diferenciável) é dita uma *função de Morse* se:

- (i)  $f$  é de classe  $C^2$ .  
 (ii)  $f$  possui somente pontos críticos não degenerados.

Alguns autores costumam adjuntar algumas condições adicionais como:

- (iii) Se  $x, y$  são pontos críticos de  $f$  então  $f(x) \neq f(y)$ .  
 (iv) Os pontos críticos de  $f$  não possuem ligação de sela.

A existência de funções de Morse (assim como sua abundância) é um poderoso instrumento de investigação das relações que existem entre as propriedades topológicas e as propriedades diferenciáveis de uma variedade diferenciável [Mi].

## 6. Integrais primeiras

Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no aberto  $U$  e considere a decomposição de  $U$  em *superfícies de nível* ( $f = c$ ) =  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  dada por  $f$ . Sabemos de acordo com o Teorema da Função Implícita que (no caso em  $f$  é de classe  $C^1$  ou equivalentemente, fortemente diferenciável em torno do ponto em questão) cada componente conexa (não-vazia) de um nível ( $f = c$ ) é uma superfície regular se não contém pontos críticos de  $f$  e que de fato, dado  $p \in (f = c)$  em uma tal componente, então o espaço tangente a esta superfície neste ponto é o complemento ortogonal da reta gerada pelo vetor gradiente  $\text{grad}(f)(p) \subset \mathbb{R}_p^n$ . Suponha que  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo de vetores de classe  $C^1$  tal que  $X$  é sempre ortogonal a  $\text{grad}(f)$ . Então dada solução  $\varphi: I \rightarrow U$  de  $X$ , temos que

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi(t))) = \langle \text{grad}(f)(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle \text{grad}(f)(\varphi(t)), X(\varphi(t)) \rangle = 0$$

de modo que  $f$  é constante ao longo das órbitas de  $X$ . Podemos portanto tentar concluir sobre o comportamento das órbitas de  $X$  a partir do conhecimento das propriedades gerais dos níveis de uma função diferenciável. Em dimensão dois por exemplo, concluímos que as componentes conexas dos níveis de  $f$  coincidem (a menos das singularidades) exatamente com as trajetórias do campo  $X$  e também  $X$  e  $\text{grad}(f)$  são ponto a ponto colineares.

**Definição 13.** Uma função (não necessariamente diferenciável)  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma *integral primeira* de um campo  $X$  de classe  $C^1$  em  $U$  se  $f$  é constante ao longo das órbitas de  $X$ . Evidentemente supomos  $f$  não constante.

**Exemplo 3.** Em dimensão par dada função  $H: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$  podemos tomar  $X = (\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n})$ , de modo que  $\text{grad}(H)$  e  $X$  são ortogonais com  $X$  de classe  $C^1$ . Neste caso estamos na situação em que  $H$  é uma integral primeira de  $X$ . Chamaremos  $X$  de *campo hamiltoniano* associado à função  $H$ .

O Teorema do Fluxo Tubular assegura que próximo a um ponto regular de um campo de vetores de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em um aberto de  $\mathbb{R}^n$  sempre existem  $(n - 1)$  integrais

primeiras de classe  $C^k$  que são funcionalmente independentes (seus gradientes são linearmente independentes em cada ponto). Por outro lado a proposição abaixo mostra que há restrições topológicas para a existência de uma integral primeira local em torno de um ponto singular.

**Proposição 13.** *Seja  $p$  singularidade isolada de um campo de vetores  $X$  de classe  $C^1$  em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Suponha que  $X$  admite uma integral primeira contínua numa vizinhança  $V \subset U$  de  $p$ . Então as órbitas de  $X$  em  $V$  são fechadas fora de  $p$ .*

**Prova.** (exerc.9).

Para o caso de campos de vetores analíticos complexos a condição da proposição é quase suficiente para caracterizar a existência de integral primeira analítica numa vizinhança da singularidade (Teorema de Mattei-Moussu [Ma-Mo]).

Os campos Hamiltonianos têm interesse especial em Física por suas muitas aplicações.



## Exercícios do Capítulo II

1. Prove o Corolário 2.
2. Prove a Proposição 5.
3. Prove a Proposição 6.
4. Prove a Proposição 7.
5. Prove a Proposição 8.
6. Prove a Proposição 9.
7. Prove (iv) da Proposição 10.
8. Use o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para dar outra prova da Proposição 11.
9. Prove a Proposição 13.
10. Seja  $X$  campo de vetores de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e tal que  $p \in \omega(p)$  para um certo ponto  $p$  regular ( $X(p) \neq 0$ ). Prove que  $\omega(p)$  é órbita periódica.
11. Sejam  $X$  campo de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\gamma$  órbita não singular e não periódica de  $X$  tal que  $\omega(\gamma) \cap \alpha(\gamma) \neq \emptyset$ . Prove que  $\omega(\gamma) \cap \alpha(\gamma)$  é uma singularidade de  $X$ .
12. Seja  $X$  campo de classe  $C^1$  e seja  $D$  disco aberto contido no domínio de  $X$ . Suponha que  $\div X \neq 0$  em  $D$  e prove que  $X$  não possui órbitas periódicas em  $D$ .
13. Prove que uma variedade diferenciável orientável de classe  $C^\infty$  e dimensão 1 é difeomorfa ao círculo unitário ou à reta real.
14. (*Fluxos lineares no Toro*) Consideramos o Toro de dimensão dois como a superfície dada pelo produto  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ , onde  $\mathbb{S}^1$  é o círculo unitário. Pomos coordenadas complexas em  $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ , digamos  $z = x_1 + ix_2, w = x_3 + ix_4$ , onde  $(x_1, \dots, x_4)$  são coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^4$ . Então  $T$  pode ser descrito como  $T = \{|z| = |w| = 1\}$ . Sejam agora  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então podemos considerar o campo de vetores linear  $X$  dado em  $\mathbb{C}^2$  por  $X(z, w) = (iaz, i\beta w)$ . Como  $\alpha, \beta$  são reais é fácil verificar que  $X$  induz campo de vetores em  $T$  (verifique que  $X$  é tangente ao toro ao longo deste).
  - (i) Determine o fluxo (real) de  $X$ .
  - (ii) Prove que se  $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$  então as órbitas de  $X$  coitidas em  $T$  são densas em  $T$ .
  - (iii) Prove que se  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$  então  $X$  tem apenas órbitas periódicas em  $T$ .
  - (iv) Conclua que o Teorema de Poincaré-Bendixson não se estende ao Toro. Explique porque.
14. Prove que o Teorema de Poincaré-Bendixson se estende à esfera  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1\}$ .
15. Sejam  $X, Y$  campos de classe  $C^1$  e com singularidades isoladas em  $\mathbb{S}^2$ . Defina campo de vetores  $Z$  em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  pondo  $Z(x, y) = (X(x), Y(y))$ . Estude as possibilidades para  $\omega(\gamma)$  onde  $\gamma$  é qualquer órbita de  $Z$ .

16. Seja  $X$  campo de vetores holomorfo definido em  $\mathbb{C}^2$ . Use o Princípio do Máximo para funções holomorfas a fim de mostrar que  $X$  não possui órbita limitada (por órbita de  $X$  entendemos órbita proveniente da EDO complexa  $\frac{dz}{dt} = X(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ).

17. Use o Teorema de Picard para mostrar que se  $X = p(x)\frac{d}{dx}$  é campo polinomial complexo em uma variável então  $X$  é completo se, e somente se,  $p(x)$  é linear.

18. Uma singularidade isolada de um campo de vetores  $X$  é dita um *centro* se é da forma  $d(x^2 + y^2) = 0$  e é dita uma *sela* se é da forma  $d(x^2 - y^2) = 0$ . Seja  $X$  campo de vetores de classe  $C^2$  em uma vizinhança  $U$  do disco unitário fechado  $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Suponhamos o seguinte:

- (i)  $X$  é transversal ao bordo de  $D$  e aponta para dentro.
- (ii) as singularidades de  $X$  em  $D$  são centros e selas.
- (iii) não há ligação entre duas selas em  $D$ .

Prove que existe uma órbita periódica  $\gamma \subset D$  cuja transformação de Poincaré correspondente  $\pi: (-\delta, \delta) \subset (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$  satisfaz  $\pi(x) = x, \forall x \leq 0$  e  $\pi(x) < x, \forall x > 0$ . Conclua em particular que  $X$  não pode ser analítico.

19. Prove que se  $X$  é um campo de vetores em uma superfície  $M$  tal que  $X$  se anula fora de um compacto  $K \subset M$ , então  $X$  é completo.

## Capítulo III- Equações Lineares

### 1. Solução geral

Estudaremos agora as equações diferenciais lineares, que são EDOs da forma

$$x' = A(t).x$$

onde  $A(t)$  é uma matrix contínua  $n \times n$  com entradas reais (ou complexas, como veremos em seqã parte). Mais geralmente consideraremos equações não homogêneas da forma

$$x' = A(t)x + b(t)$$

onde  $b(t)$  é uma função contínua com valores em  $\mathbb{R}^n$ . Se escrevemos  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$  e  $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$  então a equação  $x' = A(t).x + b(t)$  é equivalente ao sistema de equações:

$$x'_j(t) = a_{j1}(t)x_1 + \dots + a_{jn}(t)x_n + b_j(t) \quad , j = 1, \dots, n.$$

Vejamos agora algumas noções básicas a respeito das EDOs lineares. Em  $\mathbb{R}^n$  utilizaremos a norma do supremo  $\|x\| = \sup_{j=1, \dots, n} |x_j|$  onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $A: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas. Consideramos o sistema de equações lineares definido por estes dados

$$(*) \quad x' = A(t) \cdot x + b(t)$$

Então  $(*)$  pode ser pensado e tratado como uma EDO  $x' = f(t, x)$ , no sentido da seção I.2, bastando para isto que definamos  $f(t, x) = A(t) \cdot x + b(t)$  e (caso  $I$  seja aberto), o aberto  $U = I \times \mathbb{R}^n$ . Uma tal equação será dita *equação linear*. Se  $b \equiv 0$  diremos que a equação linear é *homogênea*. Se  $A(t) \equiv A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  e  $b(t) \equiv b \in \mathbb{R}^n$ , a equação é dita *linear a coeficientes constantes*.

O primeiro fato relevante que levantamos a respeito das EDOs lineares é o seguinte:

**Teorema 1.** *Sejam  $A, b: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n$  funções contínuas no intervalo  $I$ . Para cada condição inicial  $(t_o, x_o)$ , existe solução única  $\varphi(t, t_o, x_o)$  do problema de Cauchy correspondente  $x' = A(t) \cdot x + b(t)$ ,  $x(t_o) = x_o$ , definida em (todo o intervalo)  $I$ .*

**Prova.** Utilizaremos uma vez mais, como no Teorema de Picard, o método das aproximações sucessivas. Definimos seqüência de aplicações  $\varphi_j: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde:

$$\varphi_o(t) = x_o, \quad \varphi_{j+1}(t) = x_o + \int_{t_o}^t [A(s)\varphi_j(s) + b(s)] ds$$

**Afirmção 1.**  $\forall [a, b] \subset I \quad \varphi_j|_{[a,b]}$  converge uniformemente para uma solução de

$$(*) \quad x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_o) = x_o$$

**prova.** Pomos  $K := \sup_{s \in [a, b]} \|A(s)\|$  e  $M = \sup_{s \in [a, b]} |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)|$ . Então

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s)[\varphi_1(s) - \varphi_0(s)] ds \right| \leq K \cdot M |t - t_0|$$

Por sua vez vale

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| \leq \frac{K^2 M}{2} |t - t_0|^2$$

onde utilizamos a primeira desigualdade para obter a segunda. Por indução é então fácil provar que

$$|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| \leq \frac{K^j M}{j!} |t - t_0|^j$$

Assim sendo, temos que

$$\sup_{t \in [a, b]} |\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| \leq \frac{K^j M}{j!} (b - a)^j$$

e como a série  $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{K^j (b-a)^j M}{j!}$  é convergente (de fato, converge para  $M \cdot \exp((b-a)K)$ ), temos

que a série telescópica  $\sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_{j+1} - \varphi_j)$  converge uniformemente, digamos para,  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Obtemos então função bem definida e contínua  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Passando o limite nas equações integrais que definem  $\varphi_{j+1}$  obtemos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds$$

Assim  $\varphi$  é solução de (\*) definida em  $I$ . Para ver a unicidade da solução de (\*) basta observar que se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é solução do problema homogêneo associado, ou seja,  $f'(t) = A(t) \cdot f(t)$ ,  $f(t_0) = 0$ , então temos que  $f(t) = \int_{t_0}^t A(s) \cdot f(s) ds$ . Sejam  $[a, b] \subset I$  e  $C = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ . Então  $\forall t \in [a, b]$  temos que  $|f(t)| \leq K \cdot C \cdot |t - t_0|$ , de modo que um argumento similar ao utilizado acima nos dá,  $|f(t)| \leq \frac{K^j C |t - t_0|^j}{j!}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ . Deste modo, como  $\frac{K^j C |t - t_0|^j}{j!} \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ , temos que  $f(t) = 0$  em  $[a, b]$  e logo  $f = 0$  em  $I$ . Deste modo  $\varphi$  é única.  $\square$

A característica principal das EDOs lineares é a estrutura linear do espaço de soluções.

**Proposição 1.** *Seja  $A: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  matriz contínua no intervalo  $I$  e (\*.1) a equação linear homogênea definida por  $A$ :*

$$(*.1) \quad x' = A(t) \cdot x$$

Então:

- (i) O conjunto  $\mathcal{S}$  das soluções de  $(\star.1)$  é um espaço vetorial  $n$ -dimensional.  
 (ii) A aplicação  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}$  que associa a cada ponto  $x_o \in \mathbb{R}^n$  a solução  $\varphi(t, t_o, x_o)$  ( $t_o \in I$  fixado), é um isomorfismo linear.

**Prova.** Este resultado de fácil demonstração a partir do que já provamos acima é deixado como exercício para o leitor (exerc.1).

Como corolário obtemos o fluxo definido por uma EDO linear homogênea:

**Corolário 1.** Dada matrix contínua  $A$  no intervalo  $I$ , a aplicação  $\varphi_s^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_o \mapsto \varphi(t, s, x_o)$  onde  $s, t \in \mathbb{R}$ , é um isomorfismo que satisfaz:

- (i)  $\varphi_s^s = Id$   
 (ii)  $\varphi_s^t \circ \varphi_u^s = \varphi_u^t$   
 (iii)  $\varphi_s^t = [\varphi_t^s]^{-1}$ .

**Prova.** (exerc.2).

**Definição 1.** Seja  $A$  matrix contínua no intervalo  $I$ . Uma matrix  $\Phi: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  é uma *matrix fundamental* de  $(\star.1)$   $x' = A(t) \cdot x$  se suas colunas são uma base do espaço de soluções de  $(\star.1)$ .

O comportamento de tais matrizes é regido pela proposição abaixo:

**Proposição 2.**

- (i) Uma matrix  $\Phi: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  é uma *matrix fundamental* de  $(\star.1)$  se e somente se suas colunas são soluções de  $(\star.1)$  e existe algum  $t_o \in I$  tal que  $\Phi(t_o)$  é não singular.  
 (ii) Dados  $t_o \in I$  e matrix não singular  $M_o \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , existe uma única *matrix fundamental*  $\Phi$  para  $(\star.1)$ , tal que  $\Phi(t_o) = M_o$ .  
 (iii) Sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  soluções da equação matricial linear  $X' = A(t)X$ , sendo  $\Phi$  solução fundamental (de  $(\star.1)$ ). Então existe uma única matrix  $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot C, \forall t \in I$ .

(iv) (Solução Explícita da EDO linear) A solução  $\varphi(t, t_o, x_o)$  da EDO linear não homogênea a coeficientes contínuos

$$(\star) \quad x' = A(t)x + b(t)$$

é dada por

$$\varphi(t, t_o, x_o) = \Phi(t)[\Phi(t_o)^{-1}x_o + \int_{t_o}^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds]$$

onde  $\Phi(t)$  é *matrix fundamental* da EDO linear homogênea associada, a saber:  $(\star.1)$   $x' = A(t)x$ .

(v) Seja  $\Phi$  *matrix solução* da EDO linear não homogênea  $x' = A(t)x + b(t)$ , então vale a *Fórmula de Liouville*:

$$\det \Phi(t) = \det[\Phi(t_o)] \cdot e^{\int_{t_o}^t \text{traço}(A(s))ds}$$

**Prova.**

(i) De fato  $\Phi(t_0)$  é não singular então as colunas  $\phi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$  são soluções linearmente independentes em  $t = t_0$  e como combinação linear de soluções é ainda uma solução, segue que estas colunas são linearmente independentes para qualquer valor de  $t \in I$ .

(ii) Segue do Teorema 1 e da parte (i) acima.

(iii) Pomos  $f(t) = \Phi(t)^{-1}\Psi(t)$ ,  $t \in I$ . Então

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\Phi(t)^{-1})' \cdot \Psi(t) + \Phi(t)^{-1} \Psi'(t) = -\Phi^{-1}(t) \cdot \Phi'(t) \Phi^{-1}(t) \Psi(t) + \Phi^{-1}(t) \Psi'(t) \\ &= -\Phi^{-1}(t) A(t) \Phi(t) \Phi(t)^{-1} \Psi(t) + \Phi^{-1}(t) A(t) \Psi(t) = 0 \end{aligned}$$

Assim  $f(t) = C \forall t \in I$ .

(iv) Verificação direta! A prova acima é obtida pelo *Método da Variação de Parâmetros* no qual se procura solução da forma

$$\varphi(t) = \Phi(t) \cdot C(t)$$

para alguma  $C(t)$  a determinar. Mas então  $\varphi(t)$  é solução (da EDO não homogênea) se, e somente se,  $C'(t) = \Phi^{-1} \cdot b(t)$ . (deixamos os detalhes como exerc. para o leitor (exerc.3).

(v) A Fórmula de Liouville pode ser demonstrada como segue: Tomamos  $\varphi(t) = \det \Phi(t)$ .

**Afirmção 2.**  $\varphi'(t) = (\text{traço} A(t)) \cdot \varphi(t)$

**prova.** Escrevemos  $\Phi(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)]$  em colunas. Então como o determinante depende linearmente das colunas, temos que  $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \det[\phi_1(t), \dots, \phi_j'(t), \dots, \phi_n(t)] =$

$\sum_{j=1}^n [\phi_1(t), \dots, A(t)\phi_j(t), \dots, \phi_n(t)]$ . Se  $\Phi(t)$  não é matrix fundamental temos que  $\det \Phi(t) =$

$0$ ,  $\forall t \in I$  e a igualdade é trivialmente verificada. Suporemos então que  $\Phi$  é matriz fun-

damental. Podemos portanto escrever  $A(t) \cdot \phi_i(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}(t) \phi_j(t)$  e assim  $\text{traço} A(t) =$

$\sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t)$ . Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \det[\phi_1(t), \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t) \phi_j(t), \dots, \phi_n(t)] \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t) \cdot \det[\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)] = (\text{traço} A(t)) \cdot \varphi(t) \end{aligned}$$

□

## 2. Equações lineares a coeficientes constantes

Nesta seção estudaremos sistemas lineares da forma (1)  $x' = Ax$  onde  $A$  é uma matriz fixada. Para isto utilizaremos a noção de exponencial de uma matriz motivada pelo seguinte exemplo:

**Exemplo 1.** Dado o sistema linear homogêneo (1)  $x' = Ax$  suponhamos que  $A$  seja diagonalizável. Existe então matriz não-singular  $P$  tal que  $PAP^{-1}$  é uma matriz diagonal

$D$ , digamos  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}[\lambda_j]$ . Assim, podemos utilizar  $P$  para gerar

uma mudança linear de coordenadas em  $\mathbb{R}^n$  e reescrever (1) sob a forma equivalente  $x' = Dx$ , ou ainda sob a forma de  $n$  equações  $x'_j = \lambda_j x_j$ . Cada uma destas equações tem sabidamente solução da forma exponencial  $x_j(t) = x_j(0)e^{\lambda_j t}$ . Podemos então obter matriz fundamental para (1) tomando-se a matriz  $e^D := \text{diag}[e^{\lambda_j}]$ . Observamos agora que  $e^a = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} a^j$ , de modo que  $e^D = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} D^j$ . Este procedimento converge em geral, para uma solução da EDO linear, mesmo no caso em  $A$  não é diagonalizável. É o que passamos a ver.

**Lema 1.** Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  então a série  $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$  converge uniformemente em intervalos compactos da reta.

(ii) Se  $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , então  $\Phi(0) = I_n$ , e  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ . Em particular,  $\Phi(t)$  é matriz fundamental de  $x' = Ax$ .

(iii) Para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  tem-se  $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ . Em particular  $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  é um isomorfismo linear com inversa  $\Phi(-t)$ .

**Prova.** (exerc.4).

**Definição 2.** A matriz  $e^A := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$  é chamada a *exponencial* da matriz  $A$ .

**Lema 2.** Sejam  $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  com  $ST = TS$ . Então  $\exp(S+T) = \exp(S) \cdot \exp(T)$ .

**Prova.** (exerc.5) (sug.: usar o binômio de Newton).

Deste modo, podemos provar o seguinte:

**Lema 3.** Dada  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  temos que  $\varphi(t) = \exp(tA)$  é solução de  $x' = Ax$ .

**Prova.** De fato, temos que se  $h \neq 0$  então

$$\frac{1}{h} (\exp[(t+h)A] - \exp(tA)) = \exp(tA) \frac{\exp(hA) - I}{h} = \exp(tA) \cdot \frac{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h^j A^j}{j!} - I}{h}$$

$$= \exp(tA) \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h^{j-1} A^j}{j!} = \exp(tA) \cdot A \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h^j A^j}{(j+1)!} = \exp(tA) \cdot A \cdot \left( I + h \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h^j A^j}{(j+1)!} \right)$$

Pelo Teste da Comparação temos que a série  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h^j A^j}{(j+1)!}$  converge uniformemente em partes compactas de  $\mathbb{R}$ , de modo que  $\lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h^j A^j}{(j+1)!} \right) = 0$  e logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(t+h)A - \exp(tA)}{h} = \exp(tA) \cdot A$$

Finalmente, como  $A$  comuta com  $\exp(tA)$  (exerc.6) segue o desejado.  $\square$

**Proposição 3.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  matriz constante. Então a EDO linear a coeficientes constantes  $x' = Ax, x(t_0) = x_0$  tem como solução única*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \exp[(t - t_0)A] \cdot x_0, t \in \mathbb{R}$$

**Prova.** Basta usar o resultado anterior e unicidade das soluções provada no Teorema 1.  $\square$

### 3. Sistemas bidimensionais

No que se segue estudaremos os sistemas lineares bidimensionais  $x' = Ax$  a coeficientes constantes,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Geometricamente a EDO linear acima se associa ao sistema dinâmico definido pelo campo de vetores  $X(x, y) = A \cdot (x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  o conjunto de autovalores de  $A$ . Utilizaremos os seguintes resultado auxiliares:

**Lema 4.**

(i) *Sejam  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  e  $P \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$  (matriz não-singular). Se  $Q = PAP^{-1}$  então  $\exp(Q) = P \exp(A) P^{-1}$ .*

(ii) *Seja  $p(t) \in \mathbb{R}[t]$  polinômio,  $k > 0$  constante. Então  $\exp(-kt) \cdot p(t)$  é limitado para  $t \geq 0$ .*

Deixamos a prova para o leitor (exerc.7).

Estamos agora prontos para analisar o sistema linear bidimensional acima dado, de acordo com as seguintes possibilidades:

(a)  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais e distintos:

Neste primeiro caso temos valores próprios  $\{v_1, v_2\}$  correspondentes, tais que  $A \cdot v_j = \lambda_j \cdot v_j$ . Deste modo  $\varphi_j(t) = \exp(t\lambda_j) \cdot v_j$  satisfaz  $\varphi_j'(t) = \lambda_j \cdot \varphi_j(t)$  e logo

$$A \cdot \varphi_j(t) = \exp(t\lambda_j) \cdot A \cdot v_j = \lambda_j e^{t\lambda_j} v_j = \lambda_j \varphi_j(t) = \varphi_j'(t)$$



Portanto,  $[\varphi_1(t)\varphi_2(t)]$  é matrix fundamental de  $x' = Ax$ . Portanto, qualquer solução se escreve como

$$\varphi(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t)v_1 + \exp(\lambda_2 t)v_2$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Temos então os seguintes sub-casos:

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ :

$\forall$  trajetória  $\gamma(t)$  temos que  $\gamma(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow +\infty$  e  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  se  $t \rightarrow -\infty$ . Existem 4 semiretas atratoras que são tangentes a  $v_1, v_2$ . Como  $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$  temos que  $\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e logo se  $c_1 \neq 0$ , temos que o vetor tangente  $\gamma'(t)$  tende à reta  $v_1 \cdot \mathbb{R}$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Tal singularidade é chamada de *nó atrator*.

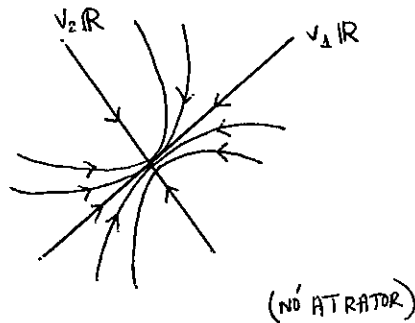


figura 19

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ :

Análogamente ao caso anterior temos um *nó instável* ou *fonte*.

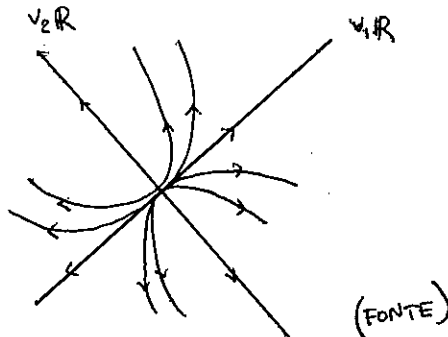


figura 20

Se  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$

Seja  $\gamma(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ , com  $c_1, c_2 \neq 0$ . Então  $\gamma(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Existem 2 retas repulsoras e 2 semiretas atratoras. Chamamos esta singularidade de *sela*.

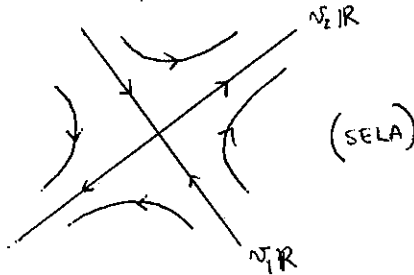


figura 21

(b) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são complexos conjugados (não reais).

Escrevemos  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$ . Lembrando que

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = e^\alpha \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & \text{sen } \beta \\ -\text{sen } \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

obtemos  $\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2(t) \varphi_2(t)$  como solução geral, onde  $\varphi_1(t) = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) \cdot v_1 - \text{sen}(\beta t) \cdot v_2]$  e  $\varphi_2(t) = e^{\alpha t} [\text{sen}(\beta t) \cdot v_1 + \cos(\beta t) \cdot v_2]$ .

Se  $\alpha = 0$ :

Neste caso  $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\pm i\beta\}$  e as soluções são elipses com eixos dados por  $v_1, v_2$ .

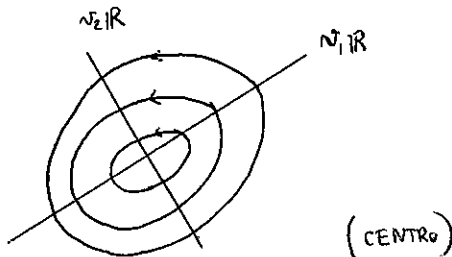


figura 22

Chamaremos esta singularidade de *centro real*.

Se  $\alpha < 0$ .

Podemos  $c_1 = \rho \cos w$  e  $c_2 = \rho \sin w$  onde  $\rho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Temos então que  $\varphi(t) = e^{\alpha t} \cdot \rho [(\cos w \cos(\beta t) + \sin w \sin(\beta t))v_1 + (\sin w \cos(\beta t) - \cos w \sin(\beta t))v_2] = e^{\alpha t} \rho [\cos(w - \beta t)v_1 + \sin(w - \beta t)v_2]$ . Deste modo,  $\alpha < 0 \implies$  as soluções se espiralam em torno da origem e  $\varphi(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Tal singularidade é chamada de *foco atrator*.

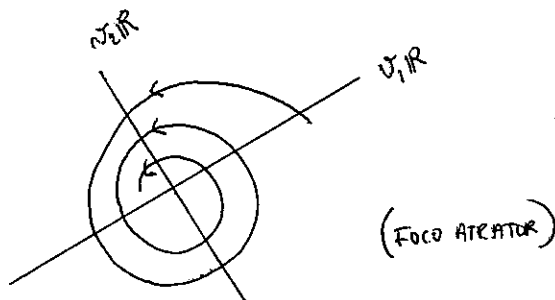


figura 23

$\alpha < 0$ .

Neste caso, temos um *foco instável* que pode ser tratado de forma análoga ao foco atrator.

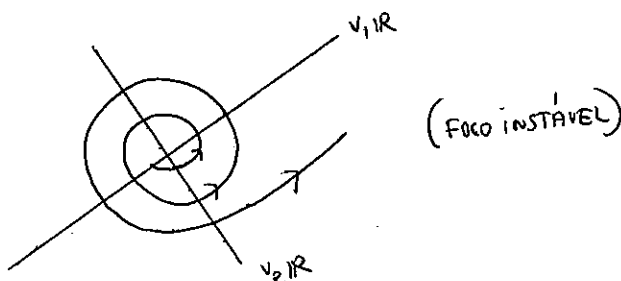


figura 24

(c)  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Se  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente independentes.

Nestes caso temos  $\varphi(t) = e^{\lambda_1 t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$  e as órbitas são semi-retas.

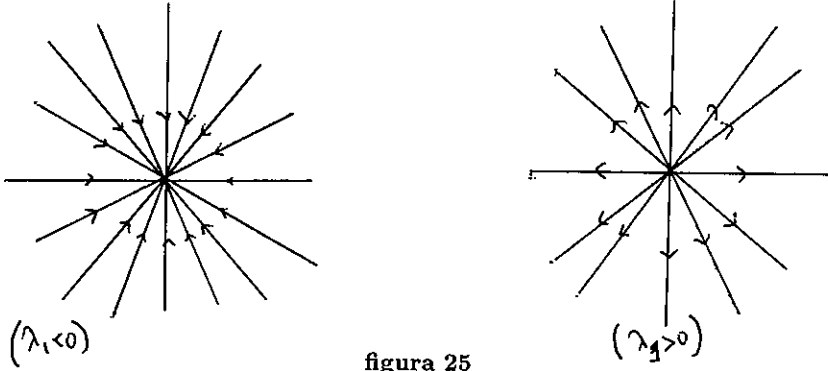


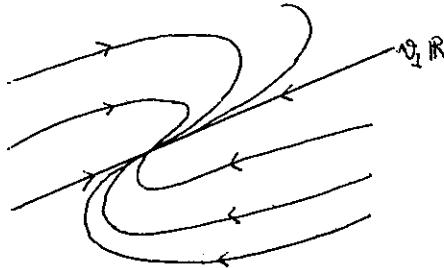
figura 25

Se  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente independentes

Neste caso temos que a dimensão do núcleo de  $A - \lambda_1 I$  é igual a 1 e tomamos  $u$  vetor não colinear a  $v_1$  para escrever o operador  $A$  na base  $\{v_1, u\}$ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

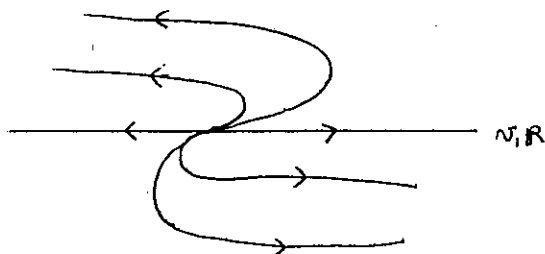
De fato,  $Av = \lambda_1 v$  e  $Au = \mu u + \alpha v_1$  para algum  $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0$  (pois  $u$  não é autovetor de  $A$ ). Logo devemos ter  $\lambda_1 = \mu$  (porque ?) e pondo  $w_1 = \alpha v_1, w_2 = u$  obtemos  $Aw_1 = \lambda_1 w_1, Aw_2 = \lambda_1 w_2 + w_1$  (compare com a forma canônica de Jordan real para  $A$ ). Assim,  $\varphi(t) = e^{\lambda_1 t}[c_1 + t c_2]w_1 + c_2 w_2$  é a solução passando por  $c_1 w_1 + c_2 w_2$  no tempo  $t = 0$ . Deste modo, se uma órbita  $\gamma(t)$  não é a semi-reta  $w_1 \mathbb{R} = v_1 \mathbb{R}$  (ou seja,  $c_2 \neq 0$ ) então  $\gamma'(t) \rightarrow v_1 \mathbb{R}$  quando  $t \rightarrow \infty$  pois  $\frac{c_2 e^{\lambda_1 t}}{(c_1 + t c_2) e^{\lambda_1 t}} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Temos assim os seguintes casos:  $\lambda_1 < 0$ :



(existem 2 semi-retas atratoras)

figura 26

$\lambda_1 > 0$ :



(existem 2 semi-retas repulsoras)

figura 27

#### 4. Equações lineares de ordem superior

Voltemos às EDOs de ordem superior que estudamos em I-7. Para o caso de EDOs lineares temos a seguinte definição:

**Definição 3.** Uma EDO linear de ordem  $n$  consiste de uma equação diferencial ordinária da forma

$$(*) \quad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x + b(t) = 0$$

onde  $a_j(t), b(t)$  são funções reais contínuas em um intervalo  $I$ .

Neste caso podemos como em I-7 proceder a reduzir (\*) a um sistema de  $n$  EDOs de primeira ordem que neste caso se escreve

$$(*) \quad x'_1 = x_2, \dots, x'_{n-1} = x_n, \quad x'_n = -[a_n(t)x_1 + \dots + a_1(t)x_n + b(t)]$$

Deste modo, vemos que o sistema (\*) também é linear. Assim concluímos para (\*) resultado análogo ao que obtivemos para sistemas lineares de primeira ordem. Em particular podemos introduzir o conceito de *solução geral* para tais EDOs:

**Definição 4.** Dada EDO linear de ordem  $n$

$$(*) \quad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x + b(t) = 0$$

definimos uma *solução geral* de (\*) como uma matriz fundamental do sistema linear associado à equação linear homogênea de ordem  $n$  correspondente

$$(*.h) \quad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$$

Assim, para achar a solução geral de uma EDO linear de ordem superior (\*) basta achar uma matriz fundamental  $\Phi$  do sistema linear de primeira ordem homogêneo associado à EDO linear homogênea correspondente de ordem superior. As soluções de (\*.h) são então da forma  $\varphi(t) = \Phi(t) \cdot C$  onde  $C \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, são da forma  $\varphi(t) = \Phi_1(t) \cdot c_1 + \dots + \Phi_n(t) \cdot c_n$ , com  $c_j \in \mathbb{R}^n$ .

Uma particularidade das EDOs lineares de ordem superior é então a seguinte:

**Proposição 4.** *Seja*

$$(*) \quad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x + b(t) = 0$$

*EDO linear de ordem  $n$  em  $I$ . Denotemos por*

$$(*.h) \quad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$$

*a chamada EDO homogênea associada. Suponha que conhecemos  $\varphi_o(t)$  uma solução particular de  $(*)$  e denote por  $\Phi(t)$  a solução geral de  $(*.h)$  dada pelo método das matrizes fundamentais. Então toda solução de  $(*)$  é da forma:*

$$\Phi(t).C + \varphi_o(t)$$

*onde  $C$  é uma constante em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova.** Com efeito, seja  $\varphi(t)$  solução de  $(*)$ . Como é fácil verificar,  $\varphi(t) - \varphi_o(t)$  é solução da EDO homogênea  $(*.h)$  e logo temos que  $\varphi(t) - \varphi_o(t) = \Phi(t).C$  para algum  $C \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

## 5. Sistemas lineares hiperbólicos

Neste parágrafo estudaremos o fenômeno da hiperbolicidade, começando pelas equações lineares.

**Definição 5.** Um operador linear  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dito *hiperbólico* se todos os valores próprios  $\lambda$  de  $A$  têm parte real não-nula. Uma EDO linear homogênea  $x' = Ax$ , é dita *hiperbólica* se  $A$  é hiperbólica. Dado um campo de vetores diferenciável  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma singularidade  $p \in U$  de  $X$  é dita *hiperbólica* se a parte linear  $DX(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  é hiperbólica.

**Observação 1.** Sejam  $P, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  com  $P$  não-singular, então  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores, de modo que a noção de hiperbolicidade independe do sistema linear de coordenadas tomado em  $\mathbb{R}^n$ .

Denotaremos por  $\mathcal{H}(n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  o subconjunto dos operadores hiperbólicos. Dado  $A \in \mathcal{H}(n)$  definimos o *subespaço estável* de  $x' = Ax$ , como o subespaço  $\mathbb{E}^s \subset \mathbb{R}^n$  gerado pelos autovetores associados a autovalores com parte real negativa. Alternativamente,  $\mathbb{E}^s$  é o subespaço maximal e invariante por  $A$ , tal que  $A|_{\mathbb{E}^s}$  define operador linear com todos autovalores com parte real negativa.

O *subespaço estável* de  $x' = Ax$  é o subespaço  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  gerado pelos autovetores associados a autovalores com parte real positiva, ou alternativamente, o subespaço maximal invariante restrito ao qual  $A$  define operador com autovalores com parte real positiva.

Sendo  $A \in \mathcal{H}(n)$  tem-se  $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$ .

**Definição 6.** O *índice de estabilidade* de um operador hiperbólico é a dimensão de seu subespaço estável. A dimensão do seu subespaço instável é o *índice de instabilidade*.

Veremos mais adiante que estes índices são invariantes por conjugação topológica e que de fato são os únicos invariantes para tais conjugações.

**Exemplo 2.** Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  com autovalores reais e distintos  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu$ . Sejam  $v, w \in \mathbb{R}^2$  autovetores associados a  $\lambda, \mu$  respectivamente. Então  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $h(x_1, x_2) = x_1 v + x_2 w$  define conjugação *linear* entre  $x' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} x$  e  $x' = Ax$ .

Aprofundemos o estudo das conjugações lineares entre sistemas lineares.

**Lema 5.** Sejam (1)  $x' = Ax$  e (2)  $x' = Bx$  sistemas lineares. Então (1) e (2) são *linearmente conjugados* se, e somente se,  $\exists$  matriz  $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $CA = BC$  (isto é,  $A$  e  $B$  são  $C$ -similiares). De fato qualquer conjugação linear entre (1) e (2) é da forma  $h(x) = Cx$  com  $C$  como acima.

O lema acima nos reduz portanto ao problema do estudo das classes de equivalência de matrizes similares. Isto é feito através da determinação das formas canônicas de Jordan.

**Teorema 2** (Forma Canônica de Jordan real). *Seja  $A$  matriz real  $n \times n$ . Existe então matriz não-singular  $C$   $n \times n$  (real) tal que  $J = C^{-1}C$  é da forma diagonal de blocos onde*

cada bloco é da forma

$$J(\lambda) = \lambda I_m + E_1^m (m \leq n), \quad E_1^m = \begin{pmatrix} 010\dots 0 \\ 001\dots 0 \\ \dots\dots\dots 1 \\ 000\dots 0 \end{pmatrix}$$

**Observação 2.** No caso  $n = 2$  tem-se

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda 0 \\ 0 \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 1 \\ 0 \lambda \end{pmatrix}$$

Uma última observação a respeito de conjugações  $C^1$  entre sistemas lineares é a seguinte:

**Proposição 5.** Os sistemas lineares (1)  $x' = Ax$  e (2)  $X' = Bx$  são  $C^1$ -conjugados se, e somente se,  $A$  e  $B$  são similares, se e somente se são linearmente conjugados.

**Prova.** Seja  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  conjugação  $C^1$  entre (1) e (2). Então  $h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ .

**1º caso:**  $h(0) = 0$ . Neste caso, derivando a relação acima com relação a  $t$  em  $t = 0$  obtemos:

$$Dh(x) \circ A \cdot x = Bh(x)$$

Assim, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  vale

$$Dh(\lambda x) \circ A \cdot (\lambda x) = Bh(\lambda x)$$

e logo

$$Dh(\lambda x) \circ A \cdot x = B \left( \frac{h(\lambda x)}{\lambda} \right)$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  obtemos então  $Dh(0) \circ A = B \circ Dh(0)$ , onde usamos o fato que  $Dh(x)$  é contínua em  $x$ .

**2º caso:** Caso geral. Neste caso  $h(0) = c \in \mathbb{R}^n$  e pomos  $H(x) = h(x) - c$ , obtendo conjugação  $C^1$  entre (1) e (2) tal que  $H(0) = 0$ .

A recíproca é imediata.  $\square$

Etudemos agora uma classe notável de sistemas lineares hiperbólicos.

Um sistema linear  $x' = Ax$  diz-se *atrator* quando  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  tem-se  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0$ . Em geral, dado um campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um ponto singular  $p \in U$ ,  $X(p) = 0$ , dizemos que  $p$  é *singularidade atratora* de  $X$  quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = 0, \forall x \in V$ , para alguma vizinhança  $V$  de  $p$ . Em particular se  $x$  é suficientemente próximo de  $p$ , então  $\varphi(t, x)$  está definida para  $t \geq 0$ .

**Observação 3.** Seja  $x' = Ax$  sistema linear topologicamente conjugado a um sistema linear atrator, então o sistema em questão também é um atrator (verifique!).



A seguinte proposição caracteriza topologicamente os sistemas lineares atratores:

**Proposição 6.** *Seja  $x' = Ax$  sistema linear. São equivalentes:*

- (i)  $x' = Ax$  é um atrator.
- (ii)  $\forall \lambda$  autovalor de  $A$  vale  $\text{Re } \lambda < 0$ .
- (iii)  $\exists \mu > 0, K \geq 1$  tais que  $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$ .
- (iv)  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = -x$ .

**Prova.**

(i)  $\implies$  (ii): Seja  $\lambda$  autovalor de  $A$ . Suponha por absurdo que  $\text{Re } \lambda \geq 0$ .

1º caso:  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Neste caso seja  $v \in \mathbb{R}^n$  autovetor associado a  $\lambda$ . Então  $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$  é solução de  $x' = Ax$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t}|v|$  de modo que  $\varphi(t) \not\rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , contradição.

2º caso:  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Pomos  $\lambda = \alpha + i\beta$  então tomando-se  $w = u + iv \in \mathbb{C}^n$  autovetor complexo associado a  $\lambda$ , obtemos que  $\bar{w} = u - iv \in \mathbb{C}^n$ , é autovetor associado a  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Como a matriz  $A$  é real, temos que  $\psi(t) = e^{\lambda t}w$  e  $\bar{\psi}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{w}$  são soluções complexas conjugadas, de modo que  $\phi(t) = \frac{1}{2}[\psi(t) + \bar{\psi}(t)]$  é solução real. Fazendo os cálculos obtemos  $\phi(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v]$ . Vale  $|\phi(t)| = e^{\alpha t}|\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v|$  e logo (como  $\alpha \geq 0$ ) vale que  $\phi(t) \not\rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , contradição.

(ii)  $\implies$  (iii): A condição  $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$  para algum  $\mu > 0, K \geq 1$ , independe da norma  $||$  em  $\mathbb{R}^n$ . Também não depende da matriz  $A$  em uma mesma classe de similaridade. Podemos então supor que vale (ii) e que  $A$  está na forma canônica de Jordan complexa e que  $|x| = \sup |x_j|, j = 1, \dots, n$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Então  $A = \text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_r})$ , onde  $J_{\lambda_j} = \lambda_j I + E_1$ . Dado  $\mu$  com  $\mu < \text{Re } \lambda_j < 0, \forall j$  obtemos  $|e^{tA}x| = |(e^{tJ_{\lambda_1}}x_1, \dots, e^{tJ_{\lambda_r}}x_r)| \leq \sup_j |K_j|e^{-\mu t}|x_j| \leq Ke^{-\mu t}|x|$  onde  $K = \sup_j |K_j|$ , e logo (ii)  $\implies$  (iii).

(iii)  $\implies$  (iv). Definimos  $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como a forma quadrática

$$\Pi(x) = \int_0^{\infty} |e^{tA}x|^2 dt$$

**Afirmção 3.**  $\Pi$  é bem definida, positiva definida.

De fato, a afirmação segue da condição  $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|, K \geq 1, \mu > 0, \forall t \geq 0$ . Por outro lado, por uma mudança de variáveis  $t \mapsto t + t_0$  obtemos

$$\Pi(e^{t_0 A}x) = \int_{t_0}^{\infty} |e^{sA}x|^2 ds$$

Derivando obtemos então

$$\frac{d\Pi}{dt}(e^{tA}x) = \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} |e^{sA}x|^2 ds = -|e^{tA}x|^2$$

Como  $\Pi$  é positiva definida existem constantes  $\alpha, \beta > 0$  tais que  $(a) \alpha|x|^2 \leq \Pi(x) \leq \beta|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , Além disso, (b) dado  $x \neq 0$  a curva  $t \mapsto e^{tA}x$  intercepta cada superfície de nível  $\Pi = r$  onde  $r > 0$ , uma única vez (veja exerc.8).

Em particular podemos definir aplicação

$$\tau: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

pondo  $\tau(x) =$  único valor de  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\Pi(e^{\tau A}x) = 1$ .

**Afirmção 4.**  $\tau$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

De fato,  $\tau$  é definida pela equação implícita  $\Pi(e^{\tau(x)A}x) = 1$ . Por outro lado,  $\frac{\partial}{\partial t} \Pi(e^{tA}x) = -|e^{tA}x|^2 \neq 0$ , logo pelo Teorema da Aplicação Implícita vale que  $\tau \in C^\infty$ .

Podemos então definir a conjugação topológica  $h$  entre  $x' = Ax$  e  $x' = -x$  da seguinte forma:

$$h(0) := 0, h(x) := e^{\tau(x)} \cdot e^{\tau(x)A}x, x \neq 0$$

Então  $h|_{\mathbb{R}^n - 0}$  é difeomorfismo  $C^\infty$  sobre  $\mathbb{R}^n - 0$ .

**Afirmção 5.**  $h$  é contínua na origem.

**prova.** De fato,  $\|h(x)\|^2 = \|e^{\tau(x)} \cdot e^{\tau(x)A}x\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|\Pi(e^{\tau(x)} e^{\tau(x)A}x)\| = \frac{1}{\alpha} |e^{\tau(x)}|^2 \|\Pi(e^{\tau(x)A}x)\| = \frac{1}{\alpha} |e^{\tau(x)}|^2$ .

Por outro lado, de  $e^{-t/\alpha} \Pi(x) \leq \Pi(e^{tA}x) \leq e^{-t/\beta} \Pi(x)$  obtemos  $1 = \Pi(e^{\tau(x)A}x) \leq e^{-\tau(x)/\beta} \Pi(x)$  e logo  $e^{\tau(x)} \leq [\Pi(x)]^\beta$ . Portanto,  $\|h(x)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} [\Pi(x)]^{2\beta}$  e logo  $h(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$ . Como  $h|_{\mathbb{R}^n - 0}$  é difeomorfismo e  $h$  é contínua, segue que  $h^{-1}$  é contínua e logo  $h$  é homeomorfismo em  $\mathbb{R}^n$ . Finalmente, temos que

$$h(e^{tA}x) = h(e^{(t-\tau(x))A} e^{\tau(x)A}x) = e^{-t+\tau(x)} e^{\tau(x)A}x = e^{-t} \cdot h(x)$$

(note, para a segunda igualdade, que se  $y = e^{tA}x$  então  $\tau(y) = -(t - \tau(x))$ ).  $\square$

**Definição 7.** Um sistema linear  $x' = Ax$  é dito uma *fonte* se  $\forall x \neq 0$  temos  $|e^{tA}| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Como corolário do teorema anterior obtemos:

**Teorema 3.** Dado um sistema linear  $x' = Ax$  são equivalentes:

- (i)  $x' = Ax$  é uma fonte.
- (ii) Todos os autovalores  $\lambda$  de  $A$  satisfazem  $\text{Re} \lambda > 0$ .
- (iii)  $\exists \mu > 0, K \geq 1$  tais que

$$e^{tA}x \leq \frac{1}{K} e^{t\mu} |x|, \forall t \geq 0$$

- (iv)  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = +x$ .

Este teorema segue do anterior usando-se o seguinte:

**Lema 6.** O sistema  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = Bx$  se, e somente se,  $x' = (-A)x$  é topologicamente conjugado a  $x' = (-B)x$ .

**Prova.** (exerc.9).

## 6. Classificação Topológica dos Sistemas Hiperbólicos

Recordamos que, dado um sistema linear  $x' = Ax$ , podemos decompor  $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{E}^u \oplus \mathbb{E}^s$ , em subespaços instável e estável de  $A$ . O índice de estabilidade de  $A$  é por definição o número  $s(A)$  de autovalores (contados com multiplicidade) com parte real negativa.

O resultado mais importante a respeito da classificação topológica dos sistemas hiperbólicos é o seguinte:

**Teorema 4.** *Dois sistemas lineares hiperbólicos em  $\mathbb{R}^n$  são topologicamente conjugados se, e somente se, têm o mesmo índice de estabilidade.*

Começaremos com o seguinte resultado:

**Proposição 7.** *Seja  $x' = Ax$  um sistema linear hiperbólico com índice de estabilidade  $s(A) = \ell$ . Então:*

- (i)  $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$ , com  $\dim(\mathbb{E}^s) = \ell$ .
- (ii)  $\exists \mu > 0, K \geq 1$  tais que
  - (a)  $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|, \forall x \in \mathbb{E}^s, t \geq 0$ .
  - (b)  $|e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{-\mu t}|x|, \forall x \in \mathbb{E}^s, t \leq 0$ .
  - (c)  $|e^{tA}x| \leq Ke^{\mu t}|x|, \forall x \in \mathbb{E}^u, t \leq 0$ .
  - (b)  $|e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|, \forall x \in \mathbb{E}^u, t \geq 0$ .

**Prova.** A fim de provarmos esta proposição utilizaremos as seguintes observações:

**Observação 4.** Uma matriz hiperbólica  $A$  com índice de estabilidade  $\ell$  é linearmente conjugada a sistema da forma:

$$x'_1 = A_1x_1, x'_2 = A_2x_2$$

onde  $A_1$  é um atrator e  $A_2$  uma fonte.

**Prova.** Basta conjugar  $A$  à sua forma canônica de Jordan real e a seguinte afirmação.

**Afirmação 6.** Se  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma conjugação linear entre dois sistemas lineares  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$ , então  $h$  leva o subespaço estável de  $A$  no subespaço estável de  $B$  e  $h$  leva o subespaço instável de  $A$  em subespaço instável de  $B$ . Em particular  $A$  e  $B$  têm o mesmo índice de estabilidade.

**Prova.** Basta observar que matrizes similiares têm os mesmos autovalores.  $\square$

A proposição segue então dos teoremas anteriores para fontes e atratores.  $\square$

Chegamos finalmente à prova do resultado central desta seção (Teorema 4):

**Prova Teorema 4.** Sendo  $\ell = s(A)$  temos que  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a sistema da forma

$$x'_1 = A_1x_1, x_2 = A_2x_2$$

onde  $A_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\ell)$  é atrator e  $A_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-\ell})$  fonte. Agora, como já vimos, existem conjugações topológicas  $h_1: \mathbb{R}^\ell \leftarrow$  e  $h_2: \mathbb{R}^{n-\ell} \leftarrow$  onde  $h_1$  conjuga  $x'_1 = A_1x_1$  a  $x'_1 = -x_1$  e

$h_2$  conjuga  $x'_2 = A_2x_2$  a  $x'_2 = +x_2$ . Definimos agora  $h: \mathbb{R}^n \leftrightarrow$ , como  $h = (h_1, h_2)$ , onde  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ , onde  $x = (x_1, x_2)$ .

Isto prova que  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x'_1 = -x_1, x'_2 = +x_2$  em  $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ .

Portanto concluímos que se dois sistemas lineares têm o mesmo índice de estabilidade, então são topologicamente conjugados.

Reciprocamente, seja  $h: \mathbb{R}^n \leftrightarrow$  conjugação topológica entre  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$ . Vamos provar que  $s(A) = s(B)$ . Para ver isto, começamos observando que  $h(\mathbb{E}_A^s) = \mathbb{E}_B^s$ . Assim, como  $h$  é um homeomorfismo, segue que  $s(A) = s(B)$ , pelo Teorema da invariância da dimensão de Brouwer [Sp].  $\square$

## Exercícios do Capítulo III

1. Prove a Proposição 1.
2. Prove o Corolário 1.
3. Complete a prova da Proposição 2.
4. Prove o Lema 1.
5. Prove o Lema 2.
6. Prove que se  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  então  $A$  comuta com  $\exp(tA)$ . Prove também que se  $A$  e  $B$  comutam então  $\exp(tA)$  e  $\exp(sB)$  comutam.
7. Prove o Lema 4.
8. Complete a prova da Proposição 6.
9. Prove o Lema 6.
10. Prove que se  $A(t)$  é matrix contínua e anti-simétrica, então a matriz fundamental  $\Phi(t)$  de  $x' = A(t)x$  tal que  $\Phi(t_0) = Id$  para algum  $t_0 \in I$ , é ortogonal para todo  $t$ . Use isto para provar o:  
*Teorema Fundamental das Curvas Regulares. Dadas funções contínuas  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$  existe uma curva regular  $\alpha(s)$  em  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada pelo comprimento de arco, que tem  $k(s)$  como curvatura e  $\tau(s)$  como torsão. Tal curva é única a menos de movimento rígido em  $\mathbb{R}^3$ .*
11. Mostre que o conjunto  $\mathcal{H}(n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  das matrizes hiperbólicas é aberto e denso em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
12. Um sistema linear  $x' = Ax$  é dito *estruturalmente estável* se toda matriz suficientemente próxima de  $A$  define sistema linear topologicamente conjugado a  $x' = Ax$ . Mostre que os sistemas lineares estruturalmente estáveis são os hiperbólicos.
13. Complete o Exemplo 2.

## Capítulo IV - Estabilidade de equações diferenciais

### 1. Estabilidade de Liapounov

Neste capítulo trataremos da noção de estabilidade de uma EDO  $x' = f(t, x)$ . Nesta primeira parte estaremos preocupados com aspectos locais em uma vizinhança de um ponto singular isolado. Por estabilidade entenderemos portanto o seguinte:

**Definição 1** (*Estabilidade de Liapounov*). Seja (1)  $x' = f(t, x)$  EDO onde  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e  $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  é aberto. Uma solução  $\varphi(t)$  definida para  $t \geq 0$  diz-se *estável* (no sentido de Liapounov) se dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\psi(t)$  é solução de (1) então  $\psi(t)$  também está definida para todo  $t \geq 0$  e  $|\varphi(t) - \psi(t)| < \epsilon, \forall t \geq 0$ .

Se além disso existir  $\delta_1$  tal que  $\delta > |\psi(o) - \varphi(o)| \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$ , diremos que  $\varphi(t)$  é *assintoticamente estável*.

Seja agora  $f = X: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores contínuo e  $x_o$  singularidade isolada de  $X$ . Consideremos o sistema autonomo associado. Dizemos que  $x_o$  é *estável* (respectivamente *assintoticamente estável*) se a órbita constante  $\varphi(t) = x_o$  é estável (respectivamente assintoticamente estável). Em outras palavras, se dada vizinhança  $V \subset U$  de  $x_o$  existir vizinhança  $W$  de  $x_o$  tal que  $x \in W \implies [o, +\infty) \subset I_x$  e  $\varphi_x(t) \in V, \forall t \geq 0$ . (respectivamente, se além disso existir vizinhança  $W \supset W_1 \ni x_o$  tal que  $x \in W_1 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_x(t) = x_o$ ).

Vejamos alguns exemplos de estabilidade de Liapounov:

**Exemplo 1.** Dada equação linear a coeficientes constantes  $x' = Ax$  temos que a origem  $0 \in \mathbb{R}^n$  é uma singularidade estável se, e somente se, o sistema é um atrator.

Vejamos como se propaga esta caracterização para perturbações do sistema acima:

**Exemplo 2.** (*Sistemas quase-lineares*). Um sistema da forma  $x' = Ax + g(t, x)$  é dito *quase-linear*, onde  $g: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua,  $U$  é aberto e  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

**Fato.** A solução trivial para o sistema quase-linear acima é assintoticamente estável em  $\mathbb{R} \times B^n(0, R)$  desde que:

- (i)  $x' = Ax$  seja um atrator.
- (ii)  $g: \mathbb{R} \times B^n(0, R)$  seja contínua e tenhamos  $g(t, x) = o(|x|)$  uniformemente em  $t$ .
- (iii) O sistema tenha soluções únicas em todo ponto tomado em  $\mathbb{R} \times B^n(0, R)$ .

**prova.** Temos que  $|e^{At}| \leq K \cdot e^{-\mu t}, \forall t \geq 0$ , para algum  $K \geq 1$  e  $\mu > 0$ . Existe também constante positiva  $\rho > 0$  tal que  $|x| < \rho \implies |g(t, x)| \leq \frac{\mu}{4K} |x|, \forall t \in \mathbb{R}$ . Dado  $|x| < \delta := \frac{\rho}{K}$  seja  $\varphi(t)$  a solução em  $\mathbb{R} \times B^n(0, \rho)$  com  $\varphi(0) = x$  e intervalo maximal  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ . Temos que  $\varphi_x(t) = e^{At}x$  é solução da EDO linear subjacente  $x' = Ax, x(0) = 0$ ; logo  $\varphi(t) - \varphi_x(t)$  é solução do sistema quase-linear partindo da origem. Deste modo podemos escrever

$$\varphi(t) - \varphi_x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} g(s, \varphi(s)) ds$$

e logo

$$\varphi(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s))ds, \forall t \in (\omega_-(x), \omega_+(x))$$

Daí segue facilmente que

$$e^{\mu t}|\varphi(t)| \leq K|x| + \int_0^t K \cdot e^{\mu s}|g(s, \varphi(s))|ds$$

Agora,  $\varphi(t) \in \mathbb{R} \times B^n(0, \rho)$ ,  $\forall t \in \mathcal{I}_x$ , de modo que  $|g(s, \varphi(s))| \leq \frac{\mu}{2K}|\varphi(s)|$ ,  $\forall s \in \mathcal{I}_x$  e logo

$$e^{\mu t}|\varphi(t)| \leq K|x| + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{\mu s}|\varphi(s)|ds, \forall t \in [0, \omega_+(x))$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall obtemos agora

$$e^{\mu t}|\varphi(t)| \leq K|x|e^{t\mu/2}, \forall t \in [0, \omega_+(x))$$

Agora, isto já mostra que  $\omega_+(x) = +\infty$  ou seja  $\varphi(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ . Mas então, a partir de  $|\varphi(t)| < \rho e^{-\mu t}$ ,  $\forall t \geq 0$  (observe que  $K|x| < \rho$ ), concluímos.  $\square$

**Exemplo 3.** Seja  $x_o$  singularidade isolada do campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Se  $x_o$  é singularidade atratora de  $X$  (ou seja,  $DX(x_o)$  é uma matriz atratora) então  $x_o$  é assintoticamente estável.

Este resultado pode também ser obtido como consequência do Teorema de Hartman [So] que afirma neste caso que  $X$  é localmente conjugado (em torno da origem) ao campo linear constante  $DX(x_o)$ .

Este exemplo será provado mais adiante.

Para nós resultado principal a respeito de estabilidade será o seguinte:

**Definição 2.** Dado campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e função diferenciável  $L: V \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_o \in V$  singularidade (isolada) de  $X$  diremos que  $L$  é uma *função de Liapounov* de  $X$  em  $V$  se satisfaz:

- (i)  $L(x_o) = 0, L(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{x_o\}$
- (ii)  $X(L)(x) = dL(x) \cdot X(x) \leq 0, \forall x \in V \setminus \{x_o\}$ .

A função de Liapounov será dita *estrita* se

- (iii)  $X(L) < 0$  em  $V \setminus \{x_o\}$ .

**Teorema 1 (Teorema de Liapounov).** Seja  $x_o$  um ponto singular do campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Se  $X$  admite função de Liapounov (respectivamente função de Liapounov estrita) em torno de  $x_o$  então  $x_o$  é estável (respectivamente, assintoticamente estável).

**Prova.** Seja  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  função de Liapounov para  $X$  em torno de  $x_o$ . Dado  $\epsilon > 0$  tomamos  $\rho > 0$  tal que  $B = B^n(x_o, \rho) \subset U$  e denotemos por  $\partial B$  o seu bordo, que é compacto, de modo que  $L \geq m > 0$  em  $\partial B$ , para algum  $m > 0$ . Mas então a partir da continuidade de  $L$  e de  $L(x_o) = 0$  temos que existe  $\rho > \delta > 0$  com  $m > M := \sup V|_{\overline{B_1}}$ , onde  $B_1 = B(x_o, \delta)$ .

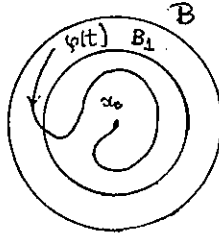


figura 28

Dado agora  $x \in B$  é fácil ver que  $\omega_+(x) = +\infty$ , pois caso contrário  $\varphi_x(t) \rightarrow \partial U$  quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$ , mas por outro lado  $t \mapsto L(\varphi_x(t))$  é decrescente de modo que  $|L(\varphi_x(t))| \leq |L(x)| \leq M < m$ . Pelo Teorema da Alfândega [El4] temos que  $\varphi_x(t) \in B, \forall t \in [0, \omega_+(x))$ , contradição.

Assim  $\varphi_x(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ . Além disso, a mesma prova acima mostra que  $\varphi_x(t) \in B, \forall t \geq 0$ . Como  $\rho > 0$  é arbitrário concluímos que  $x_o$  é estável. Suponhamos agora que  $L$  é estrita. Então mostraremos o seguinte:

**Afirmção 1.** Dada vizinhança  $U_1$  de  $x_o$  é possível obter  $\delta > 0$  e também  $\epsilon > 0$  tais que  $x \in B_2 = B(x_o, 2\epsilon) \Rightarrow \varphi_x(t)$  está definida e em  $U_1$  para todo  $t \geq 0$  e  $x \in B_1 = B(x_o, \delta) \Rightarrow \varphi_x(t) \in B(x_o, \epsilon)$ .

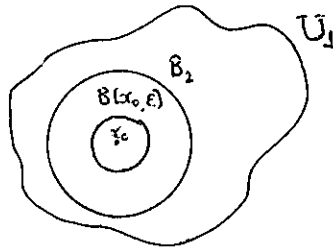


figura 29

**Prova.** Basta mostrar que se  $x \in B_1$  e  $t_n \nearrow +\infty$  é tal que  $\varphi_x(t_n)$  converge, digamos,  $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in \overline{B(x_o, \epsilon)}$  então  $y = x_o$ : Com efeito, uma vez mostrado isto tome  $x \in B_1$  arbitrário e suponha que  $\varphi_x(t) \not\rightarrow x_o$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , então (pela compacidade de  $\overline{B(x_o, \epsilon)}$ ) podemos tomar sequência  $t_n \nearrow +\infty$  com  $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in \overline{B(x_o, \epsilon)}, y \neq x_o$ , o que seria uma contradição.

Agora, se  $\varphi_x(t_n) \rightarrow y \in \overline{B(x_o, \epsilon)}$ , e  $y \neq x_o$ , com  $x \in B_1$ , então por continuidade vale  $L(\varphi_x(t_n)) \rightarrow L(y)$ . Como  $L$  é estritamente decrescente ao longo das órbitas de  $X$ , diferentes de  $x_o$ , obtemos  $L(\varphi_x(t)) > \lim_{n \rightarrow +\infty} L(\varphi_x(t_n)) = L(y), \forall t \geq 0$ . Agora,



considerando-se  $y \in B_2 = B(x_0, 2\epsilon)$ , obtemos que  $\varphi_y(t)$  está definida e em  $U_1$  para todo  $t \geq 0$ . Como  $L(\varphi_y(t))$  é decrescente para  $t \geq 0$  segue que  $L(\varphi_y(1)) < L(y)$ . Como o fluxo local  $\varphi$  é contínuo se  $z$  é suficientemente próximo de  $y$ , vale  $L(\varphi_x(1)) < L(y)$ . Finalmente,  $\varphi_x(t_n) \rightarrow y$  logo se  $n \gg 1$  vale  $L(\varphi_x(t_n)) < L(y)$ , contradição.  $\square$

Para sistema autônomos (campos de vetores) a estabilidade de Liapounov pode ser ligada à parte linear do sistema em questão:

**Proposição 1.** *Seja  $x' = X(x)$  sistema autônomo de classe  $C^1$  com singularidade isolada na origem. Seja  $A = DX(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .*

(i) *Se todo autovalor de  $A$  tem parte real negativa então 0 é assintoticamente estável.*

(ii) *Se  $A$  possui algum valor próprio  $\lambda$  de parte real positiva então 0 não é singularidade estável.*

**Exemplo 4.** Voltemos ao exemplo do pêndulo ideal que consiste de um corpo pontual de massa  $m$ , oscilando sustentado por um fio ideal de comprimento  $\ell$ . Se denotamos por  $\varphi$  o ângulo entre o fio e a direção de equilíbrio vertical obtemos a EDO de segunda ordem em I-1

$$\frac{d}{dt} \left( \ell \frac{d\varphi}{dt} \right) = -g \operatorname{sen} \varphi, \quad \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Reduzindo agora a EDO acima a um sistema de EDOs de primeira ordem obtemos

$$\varphi' = y, \quad y' = -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \varphi$$

Agora, se consideramos que o movimento do pêndulo é suavemente amortecido por uma força de fricção proporcional à velocidade do pêndulo então obtemos o sistema de primeira abaixo, onde  $k > 0$  denota a constante de proporcionalidade (com relação à massa  $m$ ) do pêndulo em questão:

$$(A) \quad \varphi' = y, \quad y' = -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \varphi - \frac{k}{m} y$$

O campo de vetores assim obtido tem singularidades dadas por  $(0, 0)$  e  $(n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . A origem é assintoticamente estável pois é um atrator (para a parte linear do campo). A fim de estudarmos qual a região de atração da origem (*bacia de atração*) utilizaremos o critério de Liapounov: a função energia total do sistema (veja I-1) é importante na descrição do movimento, sendo dada por  $E = m \frac{\ell}{g} \left( \frac{1}{2g} \ell y^2 + 1 - \cos \varphi \right)$ . Então  $E$  é uma função de Liapounov estrita do sistema (A) tal que  $E < 2m \frac{\ell}{g} \implies \varphi \neq \pm \pi$ . Deste modo  $c \in (0, 2m \frac{\ell}{g}) \implies \{(\varphi, y); E(\varphi, y) \leq c, |\varphi| < \pi\}$  é fechado e positivamente invariante de modo que pelo Teorema de Liapounov temos que a bacia de atração do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  contém pelo menos o conjunto

$$\{(\varphi, y); E(\varphi, y) \leq 2m \frac{\ell}{g}, |\varphi| < \pi\}$$

Na prova da Proposição 1 utilizaremos o seguinte resultado que terá outras utilidades mais adiante:

**Lema 7 .** Dada matriz  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  cujos autovalores têm parte real negativa existe forma quadrática positiva definida  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  tal que:

$$DQ(x) \cdot (A \cdot x) \leq -\alpha \cdot Q(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde  $\alpha > 0$  é uma certa constante. De fato,  $Q$  provém de uma matriz simétrica  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  como  $Q(x) = \langle T(x), x \rangle$  e podemos definir produto interno  $((, ))$  em  $\mathbb{R}^n$  pondo:

$$((u, v)) := \langle Tu, v \rangle, u, v \in \mathbb{R}^n$$

Em particular existe  $r > 0$  tal que

$$0 < \|x\| \leq r \implies ((Ax, x)) \leq \delta \|x\|^2$$

onde  $\| \cdot \|$  é a norma induzida por  $((, ))$ .

Prova. (exerc.1).

**Prova da Proposição 1.** Daremos uma prova utilizando o Teorema de Liapounov. Tomamos  $A = DX(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Tomamos  $L(x) = Q(x)$  onde  $Q$  é a forma quadrática dada pelo lema acima. Estudaremos então a derivada  $X(L) = dL(X)$ , a qual é uma perturbação de  $dL \circ A$ . Temos que  $X(x) = A \cdot x + R(x)$ , onde  $R(x) = (R_1(x), \dots, R_n(x))$ ,  $X = (f_1, \dots, f_n)$

$$R_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j \partial x_k}(\theta(x)) x_j x_k, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_i(x)}{|x|} = 0$$

$\theta(x)$  é uma função contínua.

Então temos que

$$\begin{aligned} X(L)(x) &= dL(x) \cdot (A \cdot x + R(x)) = A(L)(x) + dL(x) \cdot R(x) \\ &= A(L)(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j} \cdot R_j(x) \leq -\alpha L(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j}(x) \cdot R_j(x) \end{aligned}$$

Agora, existem constantes positivas  $k, K$  tais que

$$k|x|^2 \leq L(x) \leq K|x|^2$$

(exerc.1).

Em particular, dado  $\delta > 0$  temos que o conjunto  $L(x) \geq \delta$  é compacto. Tomemos  $\delta > 0$  pequeno de modo que  $L(x) \leq \delta \implies |x| \leq \epsilon$  onde  $\epsilon > 0$  é pequeno o suficiente. Como as funções  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\theta(x))$  são contínuas e logo limitadas no compacto  $L(x) \leq \delta$ , segue que  $|R_i| \leq c|x|^2 \leq \frac{c}{k}L(x), \forall x$  com  $L(x) \leq \delta$ , para alguma constante  $c > 0$ . Por outro lado, temos que

$$|x_j| \leq \sqrt{\frac{1}{k}L(x)}, \forall x$$

de modo que, como  $\frac{\partial L}{\partial x_j}(x)$  depende linearmente de  $x$  (pois  $L$  é forma quadrática), segue-se que

$$\left| \frac{\partial L}{\partial x_j}(x) \right| \leq C\sqrt{L(x)}, \forall x$$

para alguma constante  $C > 0$ . Deste modo existe constante positiva  $M$  tal que  $L(x) \leq \delta \implies \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} R_i(x) \leq M.L(x)^{\frac{3}{2}}$ . Tomando-se agora,  $\mu > 0$  tal que  $\mu \leq \delta, 2M\sqrt{\mu} \leq \alpha$  temos que

$$L(x) \leq \mu \implies X(L)(x) \leq -\frac{\alpha}{2}L(x)$$

Mas então  $L$  é função de Liapounov estrita de  $x' = X(x)$  na vizinhança  $L(x) \leq \mu$  que contém a pequena vizinhança  $|x| \leq \sqrt{\frac{\mu}{K}}$  da origem.  $\square$

Terminamos esta seção com o seguinte resultado:

**Definição 3.** Um polinômio complexo  $p(\lambda)$  é dito *estável* se todas suas raízes têm parte real negativa.

É fácil ver que um polinômio real mônico estável deve ter todos seus coeficientes positivos. Para polinômios de grau dois a estabilidade é equivalente à positividade dos coeficientes. Para grau superior as coisas se complicam consideravelmente:

**Proposição 2.** Um polinômio real de grau três  $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$  é estável se, e somente se, seus coeficientes são positivos e

$$a_1a_2 > a_3$$

Prova. [Pt]

## 2. Introdução à Teoria da Perturbação

Neste parágrafo iniciaremos o estudo da Teoria da Perturbação em Sistemas Dinâmicos. Abordaremos a persistência de singularidades e de órbitas periódicas para campos de vetores. Para isto é necessário introduzirmos uma topologia no espaço dos campos de vetores de classe  $C^r$  em um dado aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e denote por  $\mathcal{X}^r(U)$  o espaço vetorial dos campos de vetores de classe  $C^r$  em  $U$ . Se  $r \geq 1$  então  $\mathcal{X}^r(U)$  pode ser munido da seguinte norma  $C^1$ :

$$\|X\|_1 := \sup\{|X(p)|, |DX(p)|; p \in U\}$$

Em particular podemos ter  $\|X\|_1 = \infty$ . As vizinhanças em  $\mathcal{X}^1(U)$  são então conjuntos que contêm um aberto da forma  $\{Y \in \xi(U), \|Y - X\|_1 < \epsilon\}$ , para algum  $\epsilon > 0$ .

**Observação 1.**  $\mathcal{X}^1(U)$  munido de  $\|\cdot\|$  é um espaço vetorial normado, ou seja,  $\|\cdot\|$  é positiva definida, satisfaz  $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{X}^1(U)$  e vale a desigualdade triangular.

prova. (exerc.2).

**Definição 4.** Uma singularidade  $p$  de um campo de vetores diferenciável  $X$  é dita uma singularidade *simples* se  $DX(p)$  é invertível [Sp].

**Teorema 2.** *Sejam  $X \in \mathcal{X}^1(U)$  e  $p \in U$  uma singularidade simples de  $X$ . Então existem vizinhança  $p \in V \subset U$  e vizinhança  $X \in \eta \subset \xi(U)$  tais que qualquer  $Y \in \eta$  possui singularidade em  $V$ . Além disso, dado  $\epsilon > 0$  podemos tomar  $Y$  tal que  $\|Y - X\|_1 < \epsilon$ . Se  $p$  é singularidade hiperbólica de  $X$  então podemos tomar  $V, \eta$  suficientemente pequenas de modo que cada  $Y \in \eta$  possua uma única singularidade hiperbólica em  $V$  e de mesmo índice que  $p$  como singularidade de  $X$ .*

O Teorema acima é de fato um resultado sobre espaços de funções, mais precisamente sobre estabilidade de difeomorfismos em classe  $C^1$ . Apresentaremos portanto uma prova com este ponto de vista mais geral.

**Proposição 3.** *Sejam  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores  $C^1$ ,  $p \in U$  singularidade simples de  $X$ . Existem vizinhanças abertas  $\eta$  de  $X$  em  $\mathcal{X}^1(U)$  e  $V$  de  $p$  em  $U$ , de modo que se  $Y \in \eta$  então:*

- (i)  $Y|_V$  é injetiva
- (ii)  $X(p) \in Y(V)$ .

O Teorema 2 seguirá da Proposição 3 acima.

**Prova da Proposição 3.** Dividiremos a prova em passos fundamentais:

**Passo 1.** Sejam  $c > \|DX(p)^{-1}\| > 0$  e  $V \subset U$  vizinhança de  $p$  tais que  $\|DX(x)^{-1}\| < c$  e  $\|DX(x) - DX(y)\| < \frac{1}{c}, \forall x, y \in V$ . Então  $X|_V$  é injetiva.

**prova.** Sejam  $x \in V$  e  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ , então  $v = DX(x)^{-1}(DX(x) \cdot v)$  de modo que  $\|x\| \leq \|DX(x)^{-1}\| \cdot \|DX(x) \cdot v\|$  e logo  $\|DX(x) \cdot v\| > \frac{1}{c} \|v\|$ . Sejam  $x, y \in V$  onde  $y = x + v$ .

Podemos supor que  $V$  é uma bola convexa. Assim sendo,  $x + tv \in V, \forall t \in [0, 1]$ , de modo que está bem definida a aplicação  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t) = X(x + tv)$  que é de classe  $C^1$  e satisfaz  $f(0) = X(x), f(1) = X(y)$ . Pela Regra da Cadeia temos que  $f'(t) = DX(x + tv) \cdot v$  e assim pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que:  $X(y) - X(x) = \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 DX(x + tv) \cdot v dt = \int_0^1 DX(x) \cdot v dt + \int_0^1 [DX(x + tv) - DX(x)] \cdot v dt$ . Isto nos dá a seguinte estimativa

$$|X(x) - X(y)| \geq |DX(x) \cdot v| - \int_0^1 \|DX(x + tv) - DX(x)\| \cdot |v| dt$$

Das desigualdades anteriores obtemos então que  $|X(x) - X(y)| > \frac{1}{c}|v| - \frac{1}{c}|v|$  o que prova a injetividade de  $X$  em  $V$ .  $\square$

**Passo 2.** Tome  $B \subset U$  bola compacta de centro  $p$  e tome  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \frac{1}{2} \min\{|X(x)|, x \in \partial B\}$ . Então  $X(B) \supset B(0, \delta)$ .

**prova.** Fixemos  $u \in B(0, \delta)$ . Seja  $x_0 \in B$  ponto de mínimo da função  $\frac{1}{2}|X(x) - u|^2, x \in B$ . Observe que dado  $x \in \partial B$  temos que  $|X(x) - u| \geq |X(x) - X(p)| - |X(p) - u| = |X(x)| - |u| > 2\delta - \delta$ , assim  $|X(x) - u| > \delta > |X(x)|$  de modo que  $|X(x)|$  não é minimal se  $x \in \partial B$ . Deste modo  $x_0 \notin \partial B$ . Pela Regra da Cadeia temos que  $\frac{1}{2}|X(x) - u|^2$  é diferenciável com derivada em  $x_0$  dada por  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, w \mapsto \langle X(x_0) - u, DX(x_0) \cdot w \rangle$ . Como  $x_0$  é ponto crítico e ponto interior de  $B$ , devemos ter  $T = 0$ . Por outro lado, como  $DX(x_0)$  é invertível (pois  $X$  é de classe  $C^1$  e  $DX(p)$  é invertível) existe  $w \in \mathbb{R}^n$  tal que  $DX(x_0) \cdot w = -u$ . Assim,  $0 = T(w) = \langle -u, DX(x_0) \cdot w \rangle = |X(x_0) - u|^2$  e portanto  $X(x_0) = u$ .  $\square$

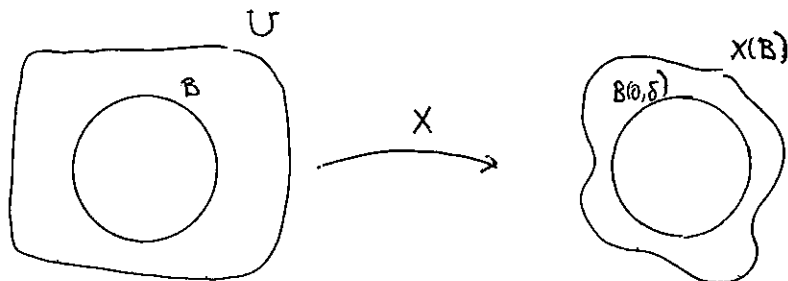


figura 30

**Passo final.** Existe  $c > 0$  tal que  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|T - DX(p)\| < c \implies T$  é invertível. Por outro lado, como  $x \mapsto DX(x)$  é contínua segue que existe vizinhança  $p \in V \subset U$  de modo que  $x \in V \implies \|DX(x) - DX(p)\| < \frac{1}{2}c$ , de modo que  $Y \in \mathcal{X}^1(U), \|DY(x) - DX(p)\| < \frac{1}{2}c, \forall x \in V \implies DY(x)$  é invertível. Seja então  $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$  a vizinhança assim definida de  $X$  em  $\mathcal{X}^1(U)$ . Tomemos  $b > \|DX(p)^{-1}\|$ . Como a operação  $GL(\mathbb{R}^n) \leftarrow, T \mapsto T^{-1}$  é

contínua, existem vizinhanças  $X \in \eta_1 \subset \mathcal{X}^1(U)$  e  $p \in V_1 \subset V$  tais que  $Y \in \eta_1$  e  $x \in V_1 \implies \|DY(x)^4\| > b$ . Podemos diminuir estas vizinhanças de modo a obter também

$$\|DY(x) - DY(y)\| < \frac{1}{b}, \forall x, y \in V_1, \forall Y \in \eta_1$$

Segundo o primeiro passo temos que  $Y \in \eta_1 \implies Y|_A$  é injetiva, para qualquer bola  $A \subset V_1$ . Fixemos uma tal bola  $\tilde{V}$  centrada em  $p$  e denotemos por  $B \subset \tilde{V}$  uma bola compacta centrada em  $p$  e tomemos  $\delta > 0$  como no segundo passo acima. Existe então vizinhança  $\tilde{\eta} \subset \eta_1 \subset \mathcal{X}^1(U)$  tal que  $Y \in \tilde{\eta} \implies \min\{|Y(x) - Y(p)|, x \in \partial B\} > 2\delta > 0$ . Segue que se  $|u - Y(p)| < \delta$  e  $Y \in \tilde{\eta}$  então  $u \in Y(B)$ . Isto prova a Proposição 3.  $\square$

A seguir discutimos a persistência de órbitas fechadas. Começamos com a seguinte definição.

**Definição 5.** Sejam  $X$  campo de vetores diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $\gamma \subset U$  órbita periódica de  $X$ . Denotemos por  $\varphi(t)$  uma trajetória de  $X$  com  $p = \varphi(0) \in \gamma$ . Então o período de  $\gamma$  é o período da função  $\varphi(t)$ . Denote agora por  $\pi: \Sigma_o \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré de  $\gamma$  na seção transversal local  $p \in \Sigma_o$ . Dizemos que  $p$  é ponto fixo *hiperbólico* de  $\pi$  se  $D\pi(p)$  não possui autovalor igual a 1 (tal fato independe da seção  $\Sigma_o$  tomada e do ponto  $p \in \gamma$  escolhido (verifique!)). Neste caso diremos que  $\gamma$  é órbita periódica *hiperbólica* de  $X$ .

**Teorema 3.** Sejam  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores  $C^1$ ,  $\gamma \subset U$  órbita periódica hiperbólica de  $X$  e  $V \subset U$  vizinhança de  $\gamma$ . Existe então vizinhança  $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$  de  $X$  tal que se  $Y \in \eta$  então  $Y$  possui uma órbita periódica hiperbólica  $\gamma_Y \subset V$ .

**Prova.** Primeiramente estabeleceremos a notação a ser utilizada. Seja  $\tau_o > 0$  o período de  $\gamma$  e suponhamos que  $0 \in \gamma$ . Denotemos por  $\tau: \Sigma_o \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação (dada pela Proposição 6 de II) de classe  $C^1$  tal que  $\tau(0) = \tau_o$  e  $\pi(z) = \varphi(\tau(z), z)$  onde  $\varphi$  é o fluxo local de  $X$  numa vizinhança de  $\gamma$ . Tomamos  $\Sigma$  relativamente compacta (de fecho compacto) em  $U$  de modo que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  com a propriedade de que  $Y \in \mathcal{X}^1(U)$ ,  $|Y(x) - X(x)| < \delta, \forall x \in \Sigma_o \implies \Sigma$  é também uma seção transversal local para  $Y$  em 0 e existe uma aplicação de classe  $C^1$   $\rho: \Sigma_o \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$|\rho(x) - \tau(x)| < \epsilon, \psi(\rho(x), x) \in \Sigma, \forall x \in \Sigma$$

(onde  $\psi$  denota o fluxo local de  $Y$  numa vizinhança de  $\gamma$ ), e

$$|\psi(\rho(x), x) - \pi(x)| < \epsilon, \forall x \in \Sigma_o$$

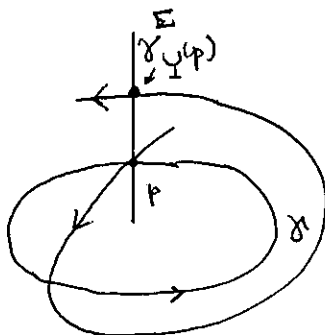


figura 31

Em particular, podemos definir uma espécie de aplicação de Poincaré para  $Y$  pondo  $\pi_Y: \Sigma_o \rightarrow \Sigma$ ,  $\pi_Y(x) = \psi(\rho(x), x)$ .

**Afirmção 2.** Dados  $a > 0$  e compacto  $K \subset U$ , para cada  $\epsilon_1 > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $\|X - Y\| < \delta_1 \implies \|D\varphi_t(x) - D\psi_t(x)\| < \epsilon_1, \forall t \in [-a, a], \forall x \in K$ .

Esta afirmação segue basicamente da dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais (exerc.3).

Juntando o que obtivemos acima concluímos que dado  $\epsilon_2 > 0$  qualquer, podemos obter  $\delta_2 > 0$  com a propriedade de que  $Y \in \mathcal{X}^1(U), \|Y - X\| < \delta \implies |\pi(x) - \pi_Y(x)| < \epsilon_2, |D\pi(x) - D\pi_Y(x)| < \epsilon_2, \forall x \in \Sigma_o$ . Procuramos por órbitas periódicas de  $Y$  buscando pontos fixos de  $\pi_Y$ , ou seja, zeros da aplicação  $F: \Sigma_o \rightarrow \mathbb{E}^{n-1}$ , onde  $\mathbb{E}^{n-1}$  é o hiperplano ( $\cong \mathbb{R}^{n-1}$ ) contendo  $\Sigma_o$ , que é dada por  $F(x) = \pi_Y(x) - x$ . Seja  $G: \Sigma_o \rightarrow \mathbb{E}$  a aplicação correspondente, associada a  $X$ , isto é  $G(x) = \pi(x) - x$ . Então  $G$  é de classe  $C^1$ ,  $G(0) = 0$  e  $DG(0) = D\pi(0) - Id$ , onde  $I: \mathbb{E} \leftarrow \mathbb{E}$  é a aplicação identidade. Como  $\gamma$  é hiperbólica, segue que  $DG(0)$  é invertível e logo podemos obter vizinhança  $G \in \mathcal{M} \subset \mathcal{X}^1(\Sigma_o)$  tal que  $H \in \mathcal{M} \implies H$  possui um único zero em  $\Sigma_o$  (ver Proposição 3). Deste modo, podemos também tomar  $\delta_2$  pequeno o suficiente de modo que  $Y \in \mathcal{X}^1(U), \|Y - X\| < \delta_2 \implies F \in \mathcal{M}$  e logo  $F$  possui um único zero em  $\Sigma_o$  e logo  $Y$  possui uma única órbita periódica  $\gamma_Y$  em uma vizinhança de  $\gamma$  que é obtida saturando-se  $\Sigma_o$  por  $Y$ . Podemos também tomar esta órbita contida em qualquer vizinhança  $V \subset U$  de  $\gamma$ . O resto da demonstração (a hiperbolicidade de  $\gamma_Y$ ) deixamos a cargo do leitor (exerc.3).  $\square$

### 3. Um pouco de estabilidade estrutural

A grosso modo os campos de vetores *estruturalmente estáveis* são aqueles que têm uma dinâmica sem propriedades singulares, que pudessem ser destruídas com pequenas perturbações do campo. Lembramos primeiramente o seguinte resultado profundo devido a Hartman:

**Teorema 4 (Teorema de Conjugação de Hartman).** Seja  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores de classe  $C^1$  e  $p \in U$  singularidade hiperbólica de  $X$ . Existem vizinhança  $W$  de  $p$  em  $U$  e homeomorfismo  $h: W \rightarrow B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$  que conjugua  $X|_W$  à restrição do campo linear  $DX(p)$  à bola  $B(0, \epsilon)$ .

Este teorema juntamente com o Teorema 4 de III nos permite deduzir que os campos de vetores que possuem dinâmica estruturalmente estável próximo a um ponto singular, são os que exibem singularidades hiperbólicas. Por outro lado, devido ao Teorema do Fluxo Tubular, a noção de estabilidade estrutural não é interessante em uma vizinhança de um ponto regular. Mas, vejamos uma definição formal de estabilidade estrutural. Como estamos interessados apenas no caso local, nos restringiremos a campos no disco, mais do que isto, campos de vetores que são transversais ao bordo do disco unitário fechado em dimensão  $n$ , que denotaremos por  $\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq 1\}$ . Como antes denotamos por  $\mathcal{X}^1(U)$  o espaço dos campos de vetores de classe  $C^1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , munido da topologia  $C^1$ .

Dado um campo de vetores  $X \in \mathcal{X}^1(U)$  onde  $U \supset \mathbf{D}^n$ , transversal ao bordo  $\partial\mathbf{D}^n$ , temos que, a menos de mudança de orientação, podemos supor que  $X$  aponta para dentro de  $\mathbf{D}^n$ .

Agora, se  $Y \in \mathcal{X}^1(U)$  é suficientemente próximo de  $X$  então claramente também  $Y$  aponta para dentro de  $\mathbf{D}^n$ .

**Definição 6.** Dizemos que  $X$  como acima é *estruturalmente estável* se existe vizinhança  $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$  de  $X$  tal que  $Y \in \eta \implies Y$  é topologicamente conjugado a  $X$  em  $\mathbf{D}^n$ , ou seja, os fluxos de  $X_t$  e  $Y_t$  de  $X$  e  $Y$  são conjugados por um homeomorfismo  $h: \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$  do disco:

$$h(X_t(x)) = Y_t(h(x)), \forall x \in \mathbf{D}^n$$

Evidentemente uma conjugação topológica preserva singularidades e órbitas periódicas. Em particular, de acordo com o que observamos acima, as singularidades de  $X$  em  $\mathbf{D}^n$  devem ser hiperbólicas. Por outro lado, o Teorema de Poincaré-Bendixson garante a existência de pelo menos uma singularidade de  $X$  em  $\mathbf{D}^n$  (exerc.4) Assim enunciamos o mais simples resultado a respeito da estabilidade estrutural destes campos como segue:

**Teorema 5.** Seja  $X: U \supset \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo de vetores de classe  $C^1$  apontando para dentro de  $\mathbf{D}^n$  e tal que a origem é a única singularidade de  $X$  em  $\mathbf{D}^n$ , sendo esta singularidade um atrator (poço). Suponha também que para todo  $x \in \mathbf{D}^n$  temos  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = 0$ . Então  $X$  é estruturalmente estável em  $\mathbf{D}^n$ .

A demonstração pode ser entendida do seguinte modo: dado  $Y \in \mathcal{X}^1(U)$  suficientemente próximo de  $X$ , temos que  $Y$  também aponta para dentro de  $\mathbf{D}^n$  e possui uma única singularidade (que é um poço) situada próximo à origem. Podemos então definir a conjugação partindo da identidade no bordo  $\partial\mathbf{D}^n$  e seguindo as trajetórias de  $X$  e  $Y$  simultaneamente, de modo a preservar o tempo ao longo destas curvas de fluxo. Veremos que de fato isto pode ser feito de forma a obtermos um homeomorfismo.

Utilizaremos uma noção útil também em outros problemas:

**Definição 7.** Seja  $p$  singularidade do campo de vetores  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A *bacia de atração* de  $p$  consiste do conjunto  $\Gamma_p$  dos pontos  $q \in U$  tais que  $X_t(q)$  está definido para todo  $t \geq 0$  e se tem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(q) = p$ .



**Observação 2.** Prova-se usando a dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais que, ou bem  $\Gamma_p = \{p\}$ , ou bem  $\Gamma_p \setminus \{p\}$  é aberto (exerc.5). Se  $p$  é um poço atrator então  $\Gamma_p$  contém uma vizinhança de  $p$ .

**Lema 8.** *Existem produto interno  $((,))$  em  $\mathbb{R}^n$ , vizinhança  $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$  de  $X$  e raio positivo  $r > 0$  tais que se  $Y \in \eta$  então  $Y$  possui uma única singularidade  $p(Y)$  em  $\mathbf{D}^n$ , que está localizada na bola  $\tilde{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, ((x, x)) \leq r^2\}$ , tal singularidade é um poço atrator,  $\tilde{B}(0, r)$  contém a bacia de atração de  $\Gamma_{p(Y)}$  e é positivamente invariante pelo fluxo de  $Y$ .*

**Prova.** Usando a caracterização dos atratores que demos em Proposição 6 de III obtemos a existência de um produto interno  $((,))$  em  $\mathbb{R}^n$  com a propriedade de que existem  $r > 0, \delta > 0$  tais que  $0 < ((x, x)) \leq r^2 \implies ((X(x), x)) < \delta((x, x))$ . Em particular  $\tilde{B}(0, r/2) \subset \Gamma_0$ , está na bacia de atração da origem e  $X(x)$  aponta para dentro ao longo do bordo  $\partial\tilde{B}(0, r/2)$ . Assim podemos obter vizinhança  $\eta_1 \subset \mathcal{X}^1(U)$  de  $X$  tal que  $Y \in \eta_1 \implies Y$  também aponta para dentro ao longo de  $\partial\tilde{B}(0, r/2)$ . Denotemos por  $\|\cdot\|$  a norma induzida por  $((,))$  em  $\mathbb{R}^n$ . Podemos obter  $\epsilon \in (0, r/2), \nu > 0$  tais que  $\|x\| < \epsilon \implies \tilde{B}(0, r/2) \subset \overline{B(x, \nu)} \subset \tilde{B}(0, r)$ . Finalmente notemos que dado  $Y \in \eta_1$  temos para  $x \in \tilde{B}(p(Y), \nu)$  vale

$$\begin{aligned} ((Y(x), x - p(Y))) &= ((X(x - p(Y)), x - p(Y))) + ((Y(x) - X(x - p(Y))), x - p(Y))) \\ &\leq \delta \|x - p(Y)\|^2 + ((Y(x) - X(x - p(Y))), x - p(Y)) \end{aligned}$$

Agora, como  $Y(x) - X(x - p(Y))$  se anula em  $x = p(Y)$  e a norma de sua derivada é majorada por

$$\|D(Y(x) - X(x - p(Y)))\| \leq \|DY(x) - DX(x)\| + \|DX(x) - DX(x - p(Y))\|$$

temos que (como  $\|X - Y\|_1 \rightarrow 0 \implies \|DX(x) - DY(x)\| \rightarrow 0, x - p(Y) \rightarrow 0$  e logo também  $\|DX(x) - DX(x - p(Y))\| \rightarrow 0$  uniformemente na bola  $\tilde{B}(0, r)$ ), se  $\|X - Y\|_1$  é pequena o suficiente então  $Y(x) - X(x - p(Y))$  vai ter constante de Lipschitz pequena o suficiente de modo a garantir que dado qualquer  $\delta_1 > \delta$  podemos obter

$$((Y(x), x - p(Y))) \leq \delta_1 \|x - p(Y)\|^2$$

Deste modo podemos (intersectando esta nova vizinhança com a vizinhança  $\eta_1$  anteriormente obtida) obter vizinhança  $X \in \eta \subset \mathcal{X}^1(U)$  tal que  $Y \in \eta \implies \Gamma_{p(Y)} \supset \tilde{B}(p(Y), \nu)$  e também  $Y$  aponta para dentro ao longo de  $\partial\tilde{B}(0, r/2)$ . Isto prova o lema.  $\square$

**Prova do Teorema 5.** Suporemos (apenas por simplicidade da notação) que o produto interno  $((,))$  do lema anterior coincide com o euclidiano. Primeiro observamos que as trajetórias orientadas de  $X$  não escapam de  $\mathbf{D}^n$  por causa da orientação de  $X$  ao longo do bordo compacto  $\partial\mathbf{D}^n$ . Deste modo  $\mathbf{D}^n$  é positivamente invariante e existem  $r > 0$  e vizinhança  $\eta \subset \mathcal{X}^1(U)$  como no lema anterior de modo que  $Y \in \eta \implies Y$  aponta para dentro ao longo de  $\partial\mathbf{D}^n$ . Assim  $\mathbf{D}^n$  é positivamente invariante também para  $Y \in \eta$ . Existe cobertura aberta finita  $U_j, j = 1, \dots, k$  de  $\partial\mathbf{D}^n$  tal que  $U_j \subset U, \exists t_j > 0$  com  $y \in$

$y \in U_j, t \geq t_j \implies |X_t(y)| < r$ . Seja então  $t_0 \geq t_j, \forall j = 1, \dots, k$ . Deste modo  $t \geq t_0 \implies X_t(\mathbb{D}^n - \text{Int } B(0, r)) \subset B(0, r)$ . Mas então a continuidade das soluções com respeito aos coeficientes da equação diferencial nos garante que se diminuirmos suficientemente a vizinhança  $\eta$  podemos supor que  $Y \in \eta \implies Y_t(\mathbb{D}^n - \text{Int } B(0, r)) \subset B(0, r), \forall t \geq t_0$ . Mas então  $x \in \mathbb{D}^n \implies Y_{t_0}(x) \in B(0, r) \implies Y_{t_0} \in \Gamma_{p(Y)}$  e logo

$$(*) \lim_{t \rightarrow +\infty} Y_t(x) = p(Y), \forall x \in \mathbb{D}^n$$

Além disso podemos concluir que  $y \in \mathbb{D}^n - \{p(Y)\} \implies y = Y_t(x)$  para algum  $t \geq 0$  e algum  $x \in \partial \mathbb{D}^n$ .

Assim as aplicações de fluxo  $\tilde{Y}: \tilde{X}[0, \infty) \times \partial \rightarrow \mathbb{D}^n$  definidas por  $\tilde{Y}(t, x) = Y_t(x)$  e  $\tilde{X}(t, x) = X_t(x)$  respectivamente, têm como imagem  $\mathbb{D}^n - \{p(Y)\}$  e  $\mathbb{D}^n - \{0\}$  respectivamente. Fixamos agora  $Y \in \eta$ . Definimos então (pensando na idéia original da prova) a aplicação

$$h: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n, h(x) = \tilde{Y} \circ (\tilde{X})^{-1}(x), x \neq 0, h(0) = p(Y)$$

Então  $h(X_t(x)) = Y_t(x), \forall x \in \partial \mathbb{D}^n, t \geq 0$ . Temos que  $h$  é sobrejetiva e sua continuidade fora da origem é garantida pela continuidade dos fluxos e de suas inversas. A continuidade de  $h$  na origem é garantida pela condição (\*) acima. Como podemos definir a inversa de  $h$  simplesmente permutando  $X$  e  $Y$  na construção acima, temos que  $h^{-1}$  é contínua e logo  $h$  é um homeomorfismo conjugando os fluxos de  $X$  e  $Y$ , como queríamos.  $\square$

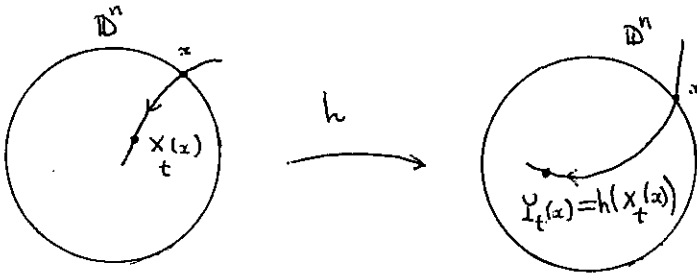


figura 32

A respeito da estabilidade estrutural não poderíamos deixar de citar o seguinte resultado clássico em dimensão 2 devido a M. Peixoto:

Seja  $\mathcal{X}_0^1(U)$  o subconjunto de  $\mathcal{X}^1(U)$  dos campos que apontam para dentro de  $\mathbb{D}^n$ .

**Teorema 6.** O conjunto  $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{X}_0^1(U), X \text{ é estruturalmente estável em } \mathbb{D}^2\}$  é aberto e denso em  $\mathcal{X}_0^1(U)$ . De fato, este conjunto é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- (i) as singularidades de  $X$  são hiperbólicas e não há ligações de selas.
- (ii) as órbitas fechadas são ou atratores periódicos ou repulsores periódicos.

## Exercícios do Capítulo IV

1. Prove o Lema 7 e complete a prova da Proposição 7.
2. Prove a observação 1.
3. Prove a Afirmação 2 e complete a prova do Teorema 3.
4. Seja  $X$  campo de vetores de classe  $C^1$  com singularidades isoladas definido numa vizinhança do disco compacto  $\overline{D^2} \subset \mathbb{R}^2$ . Suponha que  $X$  é transversal ao bordo  $\partial D$ . Prove que  $X$  possui alguma singularidade em  $D$ .
5. Prove a Observação 2.
6. Estude a prova do Teorema de Estabilidade Estrutural (Teorema 6) [Pe].

## Capítulo V - Aplicações à Geometria Diferencial

A Geometria Diferencial é uma das áreas da Matemática onde podemos encontrar algumas das mais belas e importantes aplicações da teoria das EDOs. Neste capítulo estudaremos algumas delas. Começamos necessariamente por estabelecer alguma notação e por recordar alguns fatos básicos.

### 1. Superfícies regulares

Recordamos que um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma *superfície regular de dimensão  $m$*  se para cada ponto  $p \in M$  existe uma aplicação  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  fortemente diferenciável (de classe  $C^1$ ) tal que:

- (i)  $\varphi$  é uma imersão, ou seja,  $D\varphi(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n_{\varphi(x)}$  é injetiva,  $\forall x \in U$ .
- (ii)  $U$  e  $W$  são abertos e  $\varphi: U \rightarrow V = W \cap M$  é um homeomorfismo.

Neste caso dizemos que  $\varphi: U \rightarrow V$  é uma *parametrização* ou *carta local* de  $M$  numa vizinhança de  $p$ , e vale o seguinte como consequência da forma local das imersões [E14].

**Proposição 4.** Dadas duas parametrizações  $\varphi: U \rightarrow V$  e  $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  de  $M$ , com  $\tilde{V} \cap V \neq \emptyset$ , temos que a mudança de coordenadas  $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \tilde{V} \cap V \rightarrow \varphi^{-1}(\tilde{V} \cap V)$ , é um difeomorfismo. Se  $\varphi$  e  $\tilde{\varphi}$  são de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  então esta mudança de coordenadas é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

Uma coleção de parametrizações é um *atlas* se suas imagens cobrem a superfície  $M$ . A superfície é dita de *classe  $C^k$*  se podemos tomar parametrizações de classe  $C^k$  de modo a obter um *atlas* para  $M$ .

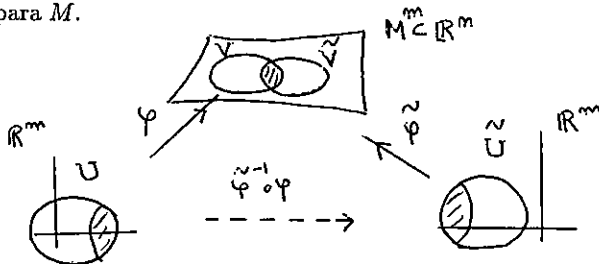


figura 33

Dado ponto  $p \in M$  tomamos carta local  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset M$  de  $M$  com  $p = \varphi(p_0)$ . o *espaço tangente* a  $M$  em  $p$  é por definição o subespaço vetorial afim  $T_p(M) \subset \mathbb{R}^n_p$  definido pela imagem  $D\varphi(p_0) \cdot (\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n_p$ . Pela proposição anterior esta definição não depende da carta tomada. Também podemos interpretar  $T_p(M)$  como segue.

**Proposição 1.** Seja  $C_p(M)$  o conjunto dos caminhos diferenciáveis  $\lambda: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\lambda(t) \in M, \forall t, \lambda(0) = p$ . Então  $T_p(M) = \{\lambda'(0), \lambda \in C_p(M)\}$ .

A prova deste fato é elementar e a deixamos para o leitor.

**Definição 1.** Sejam  $M \subset \mathbb{R}^r, N \subset \mathbb{R}^s$  superfícies regulares e seja  $f: M \rightarrow N$  aplicação contínua. Dado ponto  $p \in M$  uma *representação local* de  $f$  em torno de  $p$  é aplicação

$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U \rightarrow W$  onde,  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset M$  e  $\psi: W \rightarrow \psi(W) \subset N$  são parametrizações de  $M$  e  $N$  respectivamente, com  $p \in U, f(\varphi(U)) \subset \psi(W)$ . A aplicação  $f$  é dita *diferenciável* (resp. de classe  $C^k$ ) em  $p$  se podemos tomar  $\varphi$  e  $\psi$  de modo que a representação local correspondente para  $f$ , seja diferenciável (resp. de classe  $C^k$ ) em  $\varphi^{-1}(p)$ . Dizemos que  $f$  é *diferenciável* (resp. de classe  $C^k$ ) se é diferenciável (resp. de classe  $C^k$ ) em todo ponto  $p \in M$ .

**Proposição 2.** *Seja  $f: M \rightarrow N$  aplicação contínua. Então duas representações locais de  $f$  têm a mesma classe de diferenciabilidade.*

A proposição acima é uma consequência da Proposição 1 (ver exerc.1) e mostra que a noção de diferenciabilidade independe da representação local tomada.

## 2. A primeira forma fundamental

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  superfície regular de dimensão  $m$ . Por simplicidade suporemos  $M$  de classe  $C^\infty$ . Dado ponto  $p \in M$  a inclusão  $T_p(M) \subset \mathbb{R}^n_p$  induz de modo natural um produto interno  $\langle, \rangle_p$  em  $T_p(M)$ :

$$v, w \in T_p(M); \langle v, w \rangle_p := v \circ w$$

onde  $v \circ w$  denota o produto escalar euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ . Sejam  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{C}_p(M)$  caminhos diferenciáveis com  $\alpha'(0) = v, \beta'(0) = w$ . Dada parametrização local  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  de  $M$  com  $\varphi(p_0) = p$ , podemos definir caminhos  $\alpha$  e  $\beta$  em  $U$  por  $\tilde{\alpha}(t) = \varphi \circ \alpha(t), \tilde{\beta}(t) = \varphi \circ \beta(t)$  e podemos escrever  $\alpha(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t))$  e  $\beta(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))$  em coordenadas retangulares. Pela Regra da Cadeia temos que  $v = D\varphi(p_0) \cdot (a'_1(0), \dots, a'_m(0)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p_0) \cdot a'_j(0)$ .

Também vale  $w = D\varphi(p_0) \cdot (b'_1(0), \dots, b'_m(0)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p_0) \cdot b'_j(0)$ . Assim sendo,

$$\langle v, w \rangle_p = \sum_{i,j=1}^m a'_i(0) \cdot b'_j(0) g_{ij}(p)$$

onde  $g_{ij}(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p_0) \circ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p_0)$  são os chamados *coeficientes da primeira forma fundamental* de  $M$  nas coordenadas  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , dependendo apenas de  $\varphi$ . Outra observação é a de que as coordenadas de um vetor tangente  $v \in T_p(M)$  na base  $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p_0), j = 1, \dots, m\}$  e as coordenadas do vetor correspondente  $D\varphi(p_0)^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m_{p_0}$  nas coordenadas retangulares, coincidem.

Estudemos agora mais de perto o caso de codimensão 1. Por simplicidade consideraremos o caso de superfícies (bidimensionais) em  $\mathbb{R}^3$ .

### 3. Superfícies em $\mathbb{R}^3$ , Aplicação normal de Gauss

Dada superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  (de dimensão 2) temos que em cada ponto  $p$  o espaço tangente  $T_p(M)$  possui dois vetores unitários normais a ele. Uma maneira de se construir estes vetores de modo diferenciável é a seguinte: Dada parametrização local  $\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V = \varphi(U) \subset M$ , denotemos por  $(u, v)$  as coordenadas retangulares em  $\mathbb{R}^2$  e por  $\varphi_u, \varphi_v$  as respectivas derivadas parciais de  $\varphi$ . Então  $N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$  é um campo de vetores unitário e normal a  $M$  em cada ponto de  $V$ , ou seja: dado  $q \in V$  o vetor  $N(q)$  é unitário e normal ao espaço tangente  $T_q(M)$ . Obtemos então aplicação diferenciável  $N: V \rightarrow \mathbb{S}^2$ , onde  $\mathbb{S}^2$  é esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ .

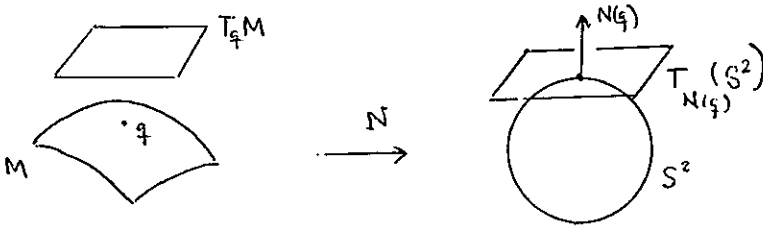


figura 34

Recordamos que uma superfície diferenciável é dita *orientável* se possui um atlas formado por parametrizações cujas mudanças de coordenadas correspondentes tenham determinante jacobiano positivo. Em codimensão 1 isto é equivalente ao seguinte fato:

**Proposição 3.** *Uma superfície regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existe um campo de vetores unitário normal  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ .*

No caso em que  $M$  é orientável podemos sempre então (por unicidade) escolher cartas locais  $\varphi$  tais  $N(u, v) = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$  se estenda a um campo normal unitário global em  $M$ . Chamaremos neste caso  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  de *aplicação normal de Gauss* associada a  $M$ . Agora, mesmo que  $M$  não seja orientável podemos definir localmente (e de fato em cada aberto orientável de  $M$ ) uma aplicação normal de Gauss local, como acima. Dado ponto  $p \in M$  e aplicação normal de Gauss local  $N: V \subset M \rightarrow \mathbb{S}^2$ , como  $T_p(M)$  e  $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$  são paralelos (pois ambos são normais a  $N(p)$ ) podemos indentificá-los e pensar em  $dN(p): T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ . Vejamos a principal propriedade desta diferencial:

**Proposição 4.** *A aplicação normal de Gauss local é auto-adjunta: dados  $p \in M$  e  $N: V \subset M \rightarrow \mathbb{S}^2$  aplicação normal de Gauss local, temos que*

$$\langle dN(p) \cdot v, w \rangle = \langle v, dN(p) \cdot w \rangle, \forall v, w \in T_p(M)$$

**Prova.** De fato, basta provar a relação linear acima na base  $\varphi_u(0), \varphi_v(0)$  de  $T_p(M)$ , dada por uma parametrização  $\varphi$  de  $M$  com  $\varphi(0) = p$ . Para isto basta utilizar que  $\langle$

$N(u, v), \varphi_u \rangle = 0 = \langle N(u, v), \varphi_v \rangle$  e derivar com relação a  $v$  e  $u$  utilizando que  $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$  que é o Teorema de Schwarz para funções duas vezes diferenciáveis [E14].  $\square$

Mas então,  $dN(p): T_p(M) \leftarrow$  é transformação linear simétrica e pode ser diagonalizada em direções ortonormais. De fato podemos definir o seguinte:

**Definição 2.** A segunda forma fundamental de  $M$  em  $p$  é a forma quadrática  $\Pi_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Pi_p(v) := - \langle dN(p) \circ v, v \rangle$ . Se tomamos  $e_1, e_2 \subset T_p(M)$  as direções unitárias de máximo e mínimo de  $\Pi_p$  então (podemos tomar)  $e_1, e_2$  ortonormais são chamadas de *direções principais* de  $M$  em  $p$ .

**Definição 3.** A *curvatura gaussiana* de  $M$  em  $p$  é dada por

$$K(p) = \det dN(p)$$

Se escrevemos  $dN(p) \cdot e_j = -k_j \cdot e_j$ ,  $j = 1, 2$ , então obtemos as *curvaturas principais*  $k_j$  de  $M$  em  $p$ . Note que  $k_1, k_2$  e a *curvatura média* de  $M$  em  $p$ ,  $H(p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  trocam de sinal com a mudança de escolha da aplicação normal de Gauss local, mas a curvatura gaussiana é (em dimensão par para  $M$ ) bem definida.

#### 4. Transporte paralelo

Dado  $V \subset M^2 \subset \mathbb{R}^3$  aberto numa superfície regular temos que um *campo de vetores* tangentes a  $M$  ao longo de  $V$  é uma aplicação  $X: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  que a cada ponto  $p \in V$  associa um vetor  $V(p) \in T_p(M)$ . Dizemos que  $X$  é *diferenciável* (resp. de classe  $C^k$ ) se para qualquer parametrização local  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset V$  de  $M$  temos que  $V(\varphi(u, v)) = a(u, v)\varphi_u(u, v) + b(u, v)\varphi_v$  onde  $a, b$  são funções diferenciáveis (resp. de classe  $C^k$ ) em  $U$ . Podemos também definir  $X$  como aplicação  $X: U \rightarrow TM$ , onde  $TM \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  é o *fibrado tangente* de  $M$  (exerc.2) e usar a estrutura de superfície de  $TM$  para introduzir a noção de diferenciabilidade para  $X$ . De forma análoga definimos campos de vetores diferenciáveis ao longo de curvas diferenciáveis  $\alpha: I \rightarrow M$ .

Estabeleceremos agora a noção de paralelismo para superfícies regulares  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definição 4.** Seja  $W(t)$  campo de vetores tangentes a  $M$  ao longo da curva diferenciável  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . A *derivada covariante* de  $W$  é o campo de vetores  $\frac{DW}{dt}(t)$  ao longo de  $\alpha$  obtido projetando-se ortogonalmente a derivada  $V'(t) = \frac{dV}{dt}(t)$  sobre  $M$ . Ou seja,

$$\frac{DW}{dt}(t_0) = V'(t_0) - \langle V'(t_0), N(\alpha(t_0)) \rangle N(\alpha(t_0))$$

onde  $N$  é qualquer escolha local de aplicação normal de Gauss em torno de  $\alpha(t_0)$ .

**Observação 1.** A escolha do vetor normal de Gauss não interfere na definição da derivada covariante.

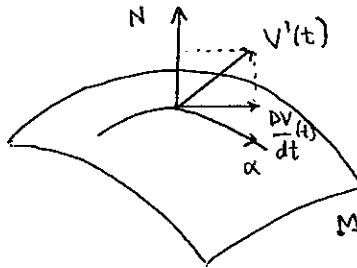


figura 35

Seja agora  $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo diferenciável de vetores tangentes a  $M$  ao longo do aberto  $U$ . Dados ponto  $p \in U$  e direção tangente  $v \in T_p(M)$  escolhamos curva  $\alpha \in C_p(M)$  com  $\alpha'(0) = v$  e definimos a *derivada covariante de  $X$  no ponto  $p$  na direção  $v$*  como o vetor tangente

$$\frac{DX}{\partial v}(p) = \frac{DW}{dt}(0)$$

onde  $W(t) = X(\alpha(t))$ .

**Proposição 5.** A derivada covariante  $\frac{DX}{\partial v}(p)$  não depende da curva  $\alpha$  com  $\alpha'(0) = v$ .

**Prova.** Tomamos carta local  $\varphi: U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset M$  com  $\varphi(0) = p$  e escrevemos  $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$  e  $X = a \cdot \varphi_u + b \cdot \varphi_v$ . Então  $W(t) = a(u(t), v(t)) \varphi_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) \varphi_v(u(t), v(t))$ . Pela Regra da Cadeia temos que

$$W'(t) = a(u(t), v(t))' \varphi_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t))' \varphi_v(u(t), v(t)) +$$

$$a(u(t), v(t)) \cdot (u'(t) \varphi_{uu}(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \varphi_{uv}(u(t), v(t))) +$$

$$b(u(t), v(t)) \cdot (u'(t) \varphi_{uv}(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \varphi_{vv}(u(t), v(t))).$$

Agora, como  $\langle \varphi_u, N \rangle = 0 = \langle \varphi_v, N \rangle$  temos que  $\langle \varphi_{uu}, N \rangle = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle \varphi_{vu}, N \rangle = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0$  de modo que por definição

$$\frac{DX}{\partial v}(p) = (da(0) \cdot v) \cdot \varphi_u(0) + (db(0) \cdot v) \cdot \varphi_v(0)$$

provando que  $\frac{DX}{\partial v}(p)$  não depende da escolha de  $\alpha$ .  $\square$

**Definição 5.** Um campo diferenciável de vetores tangentes a  $M$ , digamos  $W$ , ao longo de uma curva diferenciável  $\alpha$  em  $M$  é dito *paralelo* se sua derivada covariante  $\frac{DW}{dt}$  é identicamente nula.



Assim os campos paralelos em  $M$  são os campos constantes do ponto de vista da superfície  $M$ .

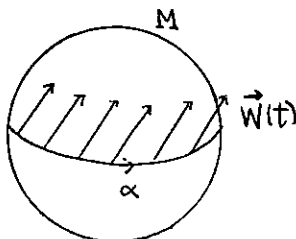


figura 36

**Proposição 6 (Existência e Unicidade do Transporte Paralelo).** Sejam  $\alpha: I \rightarrow M$  uma curva parametrizada com  $\alpha(t_0) = p, t_0 \in I$  e  $W_0 \in T_p(M)$ . Então existe um único campo de vetores  $W$  paralelo ao longo de  $\alpha$  com  $W(t_0) = W_0$ .

**Definição 6.** O campo  $W(t)$  acima é chamado o *transporte paralelo* de  $W_0$  ao longo de  $\alpha$ .

Com o intuito de dar uma prova elegante e mais afinada com o tema central deste texto (os estudo das EDOs) faremos um pouco de geometria diferencial intrínseca. Falaremos um pouco de conexões de Levi-Civita.

Seja  $M \subset \mathbb{R}^m$  uma superfície regular. Denotemos por  $\xi(M)$  o espaço dos campos de vetores tangentes de classe  $C^\infty$  em  $M$  e por  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  em  $M$ . Dados  $X, Y \in \xi(M)$  e  $p \in M$  definiremos um novo campo de vetores  $\nabla_Y X \in \xi(M)$  da seguinte forma: dada curva  $\alpha \in \mathcal{C}_p(M)$  com  $\alpha'(0) = Y(p)$  definimos  $\nabla_Y X(p) := \frac{DW}{dt}(0)$ , onde  $W(t) = X(\alpha(t))$ . Pelo que vimos acima, na Proposição 6,  $\nabla_Y X(p)$  é bem definido. Esta operação

$$\nabla: \xi(M) \times \xi(M) \rightarrow \xi(M), X, Y \mapsto \nabla_Y X$$

possui as seguintes propriedades.

**Proposição 7.** Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  superfície regular  $C^\infty$  de dimensão  $m = n - 1$  então

- (i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- (ii)  $\nabla_X(Y + fZ) = \nabla_X Y + f\nabla_X Z + X(f) \cdot Z$
- (iii)  $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$
- (iv)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  (propriedade de simetria da conexão)

$$\forall X, Y, Z \in \xi(M), f, g \in \mathcal{D}(M)$$

Além disso,  $\nabla$  é único com estas propriedades, chamado *conexão de Levi-Civita* em  $M$ .

**Prova.** Deixamos a prova como exercício para o leitor (exerc.3).

**Observação 2.** A Proposição 7 acima vale em geral para superfícies de qualquer codimensão e mais em geral para variedades riemannianas. Aqui, nos preocuparemos apenas com este caso de codimensão 1 onde  $\nabla$  tem uma visualização geométrica mais fácil.

**Prova da Proposição 7.** Basta provar o caso em que  $I$  é compacto e  $\alpha(I)$  está contido numa vizinhança coordenada  $\varphi(U_o) = U$  de uma carta de  $M$ . Tomemos então  $\alpha(t) = \varphi(x_1(t), x_2(t))$ , e escrevamos  $W_o = \sum_{j=1}^2 w_o^j X_j(0)$  onde  $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \varphi_*(e_j) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, 2$ . Escrevemos ainda  $W(t) = \sum_{j=1}^2 w^j X_j$  e também  $\frac{d\alpha}{dt} = \sum_j x'_j X_j$ , de modo que pelas propriedades do transporte paralelo temos que

$$\begin{aligned} \frac{DW}{dt} &= \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt} X_i} W = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} \sum_j w^j X_j = \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} w^j \nabla_{X_i} X_j + \sum_j \left( \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial w^j}{\partial x_i} \right) X_j \\ &= \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} w^j \nabla_{X_i} X_j + \sum_j \frac{dw^j}{dt} X_j \end{aligned}$$

Escrevemos agora,

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

obtendo

$$\frac{DW}{dt} = \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} w^j \left( \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right) + \sum_k \frac{dw^k}{dt} X_k$$

Deste modo, como os  $X_k$  são linearmente independentes temos que

$$\frac{DW}{dt} = 0, W(t_o) = W_o$$

é equivalente ao seguinte sistema de EDOs com condições iniciais (Problema de Cauchy)

$$(*) \quad \frac{dw^k}{dt} + \sum_{ij} w^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, w^k(t_o) = w_o^k, \forall k$$

Assim, a proposição a ser demonstrada é consequência do Teorema de Cauchy de existência e unicidade para as soluções de uma EDO com condições iniciais, em classe  $C^\infty$ .  $\square$

**Proposição 8.** Sejam  $\alpha: I \rightarrow M$  curva diferenciável e  $W(t), V(t)$  campos diferenciáveis de vetores ao longo de  $\alpha$ . Então

$$\frac{d}{dt} \langle W(t), V(t) \rangle = \left\langle \frac{DW}{dt}, V(t) \right\rangle + \left\langle W(t), \frac{DV(t)}{dt} \right\rangle$$

**Prova.** Basta usar que

$$\frac{d}{dt} \langle W(t), V(t) \rangle = \left\langle \frac{dW}{dt}, V(t) \right\rangle + \left\langle W(t), \frac{dV(t)}{dt} \right\rangle$$

juntamente com o fato de que  $W(t), V(t)$  são tangentes a  $M$  de modo que nos produtos internos acima só interessa a componente tangente a  $M$  da derivada.  $\square$

**Corolário 1.** *Sejam  $V, W$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\alpha$  em  $M$ . Então  $\langle W, V \rangle$  é constante. Em particular  $|W|$  é constante.*

O Corolário acima nos dá uma boa interpretação da noção de campo paralelo. De fato, um campo de vetores  $W$  é paralelo se, e somente se, para todo campo de vetores  $V$  ao longo de  $\alpha$  temos que

$$\frac{d}{dt} \langle W, V \rangle = \langle W, \frac{DV}{dt} \rangle$$

(veja exerc.4)

**Definição 7.** Uma curva diferenciável  $\gamma: I \rightarrow M$  é uma *geodésica* se o seu campo velocidade  $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}(t)$  é um campo de vetores paralelo ao longo de  $\gamma$ .

Assim, as geodésicas são aquelas curvas que têm aceleração nula com respeito à superfície ambiente.

Alguns exemplos de geodésicas são estudados nos exercícios.

**Observação 3.** Seja  $\gamma$  geodésica em  $M$ , então pelo que vimos acima  $|\gamma'|$  é constante, e sendo não nulo, podemos reparametrizar  $\gamma$  de modo a supor  $|\gamma'| = 1$  (exerc.6). Diremos então que  $\gamma$  está *normalizada*.

## 5. Fluxo Geodésico e Aplicação Exponencial

Sejam  $\gamma: I \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva regular (isto é,  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I$ ),  $t_0 \in I$  e  $\varphi: U_0 \rightarrow U \subset M$  carta local de  $M$  em  $p = \gamma(t_0) = \varphi(0)$ . Escrevemos  $\gamma(t) = \varphi(x(t), y(t))$  de modo que  $\gamma'(t) = x'(t)\varphi_x(x(t), y(t)) + y'(t)\varphi_y(x(t), y(t))$ . Deste modo,

$$(*) \quad \gamma'' = x''\varphi_x(t) + y''\varphi_y(t) + x'(\varphi_{xx}(t)x' + \varphi_{xy}(t)y') + y'(\varphi_{xy}(t)x' + \varphi_{yy}(t)y')$$

onde a simplificação na notação é a óbvia.

Os símbolos de Christoffel de  $M$  são dados por:

$$\varphi_{xx} = \Gamma_{11}^1\varphi_x + \Gamma_{11}^2\varphi_y + L_1N$$

$$\varphi_{xy} = \Gamma_{12}^1\varphi_x + \Gamma_{12}^2\varphi_y + L_2N$$

$$\varphi_{yy} = \Gamma_{22}^1\varphi_x + \Gamma_{22}^2\varphi_y + L_3N$$

e por  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ .

Podemos re-escrever então (\*) como:

$$(*.1) \quad x'' + \Gamma_{11}^1 \cdot (x')^2 + (**.1) \quad 2\Gamma_{12}^1 x' y' + \Gamma_{22}^1 (y')^2 = 0$$

$$(**.2) \quad y'' + \Gamma_{11}^2 \cdot (x')^2 + 2\Gamma_{12}^2 x' y' + \Gamma_{22}^2 (y')^2 = 0$$

**Definição 8.** As equações (\*\*) correspondem à *equação do fluxo geodésico* na carta  $\varphi: U_o \rightarrow U$ .

Utilizando então a carta  $\varphi: U_o \rightarrow U$  podemos reduzir as equações (\*\*) ao seguinte sistema de equações:

$$(G) \quad \frac{dx_j}{dt} = y_j, \quad \frac{dy_k}{dt} = - \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k y_i y_j$$

onde  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  são coordenadas usuais.

Agora, (G) é um sistema autônomo, ou seja, podemos pensar em (G) como um campo de vetores em um aberto de  $\mathbb{R}^4$ , obtendo então existência e unicidade de suas soluções a partir do resultado já conhecido para campos de vetores. Em particular temos o seguinte:

**Proposição 9.** Dados  $p \in M$  e  $v \in T_p(M)$  existem  $\epsilon > 0$  e geodésica  $\gamma_{p,v}: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\gamma_{p,v}(0) = p$  e  $\gamma'_{p,v}(0) = v$ . Além disso  $\gamma$  é única com esta propriedade.

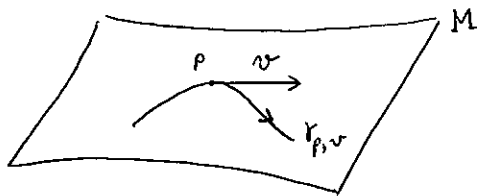


figura 37

De fato, podemos enunciar o seguinte resultado mais forte:

**Proposição 10.** Para cada  $p_o \in M$  e  $v_o \in T_{p_o}(M)$  existem vizinhança  $U$  de  $p_o$  em  $M$   $W$  de  $v_o$  em  $T_{p_o}(M)$ ,  $\delta > 0$  e aplicação diferenciável:

$$\varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow M \times \mathbb{R}^3$$

tal que se  $\pi: (p, v) \mapsto p$  é a projeção sobre  $M$  então  $\pi \circ \varphi: t \mapsto \pi \circ \varphi(t, p, v) = \gamma(t, p, v)$  é a única geodésica de  $M$  partindo de  $p$  com velocidade  $v$  em  $t = 0$ .

Para o leitor familiarizado com a noção de fibrado tangente podemos enunciar os resultados acima de forma mais conceitual como segue:

**Teorema 1.** (*Existência do Fluxo Geodésico*). Existe um único campo de vetores  $G$  no fibrado tangente  $TM \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  cujas trajetórias são da forma  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$  onde  $\gamma(t)$  é uma geodésica em  $M$ .

**Definição 9.** O campo  $G$  é o campo geodésico em  $TM$  e seu fluxo  $\varphi(t, p, v)$  é o fluxo geodésico em  $TM$ .

**Observação 4.** Temos a equação do fluxo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p, v)|_{t=0} = G(p, v), \forall (p, v) \in U \times V \subset TM$$

**Lema 1** (*Lema de Homogeneidade*). Se  $\gamma(t, p, v)$  é a geodésica de  $M$  partindo de  $p$  com velocidade  $v$  e definida para  $t \in (-\delta, \delta)$  então dado  $a > 0$  temos que

$$\gamma(t, p, av) = \gamma(at, p, v), \forall t \in (-\delta/a, \delta/a)$$

**Prova.** Pomos  $\alpha(t) = \gamma(at, p, v)$ ,  $t \in (-\delta/a, \delta/a)$ . Então  $\alpha$  é curva diferenciável em  $M$  partindo de  $p$  com velocidade  $a.v$ . Além disso,

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t_0) = a^2 \cdot \frac{D\gamma'}{dt}(at_0, p, v) = 0$$

de modo que  $\alpha$  é também uma geodésica. Por unicidade das geodésicas temos que  $\gamma(t, p, av) = \alpha(t)$ ,  $\forall t \in (-\delta/a, \delta/a)$ .  $\square$

Em particular podemos concluir:

**Corolário 2.** Dado  $p_0 \in M$  existem vizinhança  $p_0 \subset U \subset M$  e  $\delta > 0$  tais que  $\gamma(t, p, v)$  está definida para todo  $p \in U$ ,  $v \in T_p(M)$ ,  $|v| < \delta$  e  $t \in (-2, 2)$ . Em particular está bem definida a aplicação  $\exp: U \times B(0, \delta) \subset TM \rightarrow M$ ,  $\exp(p, v) = \gamma(1, p, v)$

**Definição 10.** Chamamos  $\exp$  de aplicação exponencial de  $M$  em  $U \times B(0, \delta)$ .

Também consideramos a aplicação

$$\exp_p: B(0, \delta) \subset T_p(M) \rightarrow M$$

definida por

$$\exp_p(v) = \exp(p, v) = \gamma(1, p, v)$$

Uma propriedade importante da aplicação exponencial é a seguinte:

**Proposição 11.** Dado  $p \in M$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p: B(0, \epsilon) \subset T_p(M) \rightarrow M$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  sobre a imagem, com  $d(\exp_p)(0) = Id: T_0(T_p(M)) \cong T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ .

**Prova.** Com efeito, dado  $v \in T_0(T_p(M)) \cong T_p(M)$  temos que  $d(\exp_p)(0) \cdot v = \frac{d}{dt}(\exp_p(tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, p, tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, p, v))|_{t=0} = v$ , onde a penúltima igualdade segue do lema de homogeneidade (Lema 1). Assim  $d(\exp_p)(0) = Id$  e o resultado segue do Teorema da Aplicação Inversa.  $\square$

**Observação 5.** As geodésicas são notoriamente conhecidas pela seguinte propriedade geométrica: *uma curva diferenciável  $\gamma$  de classe  $C^1$  por partes ligando dois pontos  $p$  e  $q$  de uma superfície regular é uma geodésica se, e somente se,  $\gamma$  minimiza localmente a distância entre dois de seus pontos. Em particular,  $\gamma$  será geodésica se minimizar a distância entre  $p$  e  $q$ .* Notamos que a distância entre dois pontos  $p$  e  $q$  de uma superfície regular é definida como o ínfimo dos valores  $\ell(\alpha)$ , onde  $\alpha$  percorre as curvas de classe  $C^1$  por partes

ligando  $p$  a  $q$ . Dada tal curva  $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ , definimos  $\ell(\alpha) = \int_0^1 |\alpha'(t)| dt$ . Este resultado caracterizando as geodésicas é consequência do *Lema de Gauss*, que a grosso modo diz que a aplicação exponencial leva pequenos segmentos radiais  $t.v$  no espaço tangente  $T_p(M)$ , em geodésicas ortogonais às imagens das pequenas esferas centradas na origem de  $T_p(M)$ .

Podemos interpretar também as geodésicas como aquelas curvas que são pontos críticos da energia, como veremos mais adiante.

## 6. Campos de Jacobi

Seja  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular (que por simplicidade suporemos de classe  $C^\infty$ ). Dado  $p \in M$  existe  $\delta > 0$  tal que a aplicação exponencial  $\exp_p$  está definida na bola  $B(0, \delta) \subset T_p(M)$ . Dizemos que  $M$  é *completa* se qualquer que seja  $p \in M$  podemos tomar  $\delta = +\infty$ , ou seja,  $M$  é completa se  $\forall p \in M$  temos definida a aplicação exponencial  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$  (isto ocorre por exemplo se  $M$  é compacta (exerc.13))<sup>4</sup>. Note que se  $M$  é completa então de acordo com o que vimos a aplicação exponencial nos dá uma aplicação diferenciável de  $T_p(M)$  em  $M$ , que é um difeomorfismo local em torno da origem  $0 \in T_p(M)$ . A pergunta é decidir por exemplo se  $\exp_p$  pode ser um difeomorfismo global. Este problema está relacionado com o Teorema de Hadamard que veremos mais adiante [dC1], e passa pelo estudo da *velocidade de afastamento* das geodésicas em  $M$ . Estaremos também interessados em obter informações a respeito do comportamento das geodésicas em torno de uma determinada geodésica. Temos então um problema variacional que passamos a descrever.

**Definição 11.** Seja  $c: [0, a] \rightarrow M$  curva diferenciável em  $M$ . Uma *variação* (suave) de  $c$  é uma aplicação  $f: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  tal que  $f(0, t) = c(t), \forall t \in [0, a]$ . A variação é dita *própria* se  $f(s, 0) = c(0)$  e  $f(s, 1) = c(1), \forall s$ .

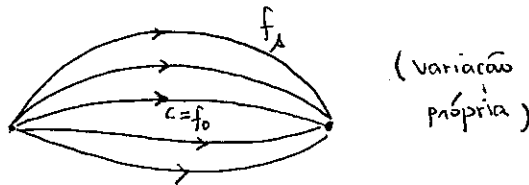


figura 38

A curva transversal à variação em  $t$  é  $f_t: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , dada por  $f_t(s) = f(s, t)$ .

O campo variacional é  $W(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ , campo de vetores ao longo de  $c$ .

**Proposição 12.** Dado campo diferenciável de vetores  $W(t)$  ao longo da curva diferenciável  $c$  em  $M$ , existe variação  $f$  de  $c$ , cujo campo variacional é  $W$ . Além disso, podemos assumir que  $f$  é própria quando  $W(0) = W(a) = 0$ .

**Prova.** Como  $c([0, a]) \subset M$  é compacto existe  $\delta > 0$  tal que  $\exp_{c(t)} v$  está definida se  $v \in T_{c(t)}(M), |v| < \delta, \forall t \in [0, a]$ .

Definimos então  $f(s, t) = \exp_{c(t)}(sW(t)), s \in (-\epsilon, \epsilon)$  onde por escolha temos que  $\epsilon \|W\|_\infty < \delta$ , sendo que  $\|W\|_\infty := \sup |W(t)|, t \in [0, a]$ .

Não é difícil verificar que  $f$  possui  $W$  como campo variacional e as outras propriedades desejadas.  $\square$

<sup>4</sup>Superfícies completas são caracterizadas pelo Teorema de Hopf-Rinow [dC2]

**Definição 12.** Dada curva diferenciável de classe  $C^1$  por partes  $c: [0, a] \rightarrow M$  definimos a *energia* de  $c$  como a integral

$$E(c) = \int_0^a |\gamma'(t)|^2 dt$$

Vale a seguinte caracterização variacional das geodésicas:

**Proposição 13.** Uma curva de classe  $C^1$  por partes  $c: [0, a] \rightarrow M$  é uma geodésica se, e somente se, para toda variação de classe  $C^1$  por partes  $c_s: [0, a] \rightarrow M$ ,  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  de  $c = c_0$ , temos que

$$\frac{d}{ds}(E(c_s))\Big|_{s=0} = 0$$

**Prova.** (exerc.7).

Podemos agora introduzir o objeto central de nosso estudo no presente parágrafo.

**Definição 13.** Seja  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  geodésica em  $M$ . Um campo de vetores  $J(t)$  ao longo de  $\gamma$  é dito um *campo de Jacobi* se é o campo variacional de alguma variação  $f$  de  $\gamma$ , onde as curvas da variação  $t \mapsto f(s, t)$  são todas geodésicas.

Um primeiro exemplo de campos de Jacobi é dado pelo próprio campo velocidade  $J(t) = \gamma'(t)$  da geodésica  $\gamma$ . De fato, podemos considerar a variação  $f(s, t) = \gamma(s+t)$  que é obviamente uma variação de  $\gamma$  por geodésicas. Mais adiante veremos mais exemplos, assim como um teorema de existência e unicidade para campos de Jacobi com valores iniciais fixados. Para isto passaremos a deduzir a chamada Equação de Jacobi, que caracteriza tais campos.

Utilizaremos os seguintes lemas importantes, que relacionam curvatura e não-simetria para a derivação covariante.

**Lema 2.** Sejam  $\varphi: U \rightarrow M$  parametrização em  $p$ ,  $K$  a curvatura Gaussiana de  $M$  e  $(u, v)$  as coordenadas em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Então

$$\frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} \varphi_u - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \varphi_u = K(\varphi_u \wedge \varphi_v) \wedge \varphi_u$$

**Prova.** Esta prova é um longo cálculo direto utilizando os símbolos de Christoffel e a omitiremos (ver [dC1]).

**Lema 3.** Sejam  $f: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  aplicação diferenciável e  $W(s, t)$  campo diferenciável de vetores ao longo de  $f$ , então:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} W - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} W = K(s, t) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \wedge \frac{\partial f}{\partial s} \right) \wedge W$$

Finalmente, utilizaremos também o seguinte



**Lema 4 (Lema de Simetria).** Seja  $f: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  aplicação diferenciável. Então

$$\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(s, t)$$

**Prova.** Daremos uma prova mais conceitual, válida para dimensão  $n$  em geral, e que não usa os símbolos de Christoffel, mas sim a simetria da conexão de Levi-Civita.

Dada carta local  $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $M$  com  $p \in U \cap f((-\epsilon, \epsilon) \times (0, a))$ , escrevemos  $\varphi \circ f(s, t) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) &= \frac{D}{\partial t} \left( \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \nabla_{\sum_j \left( \frac{\partial x^j}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Agora, como a conexão de Levi-Civita é simétrica temos que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}$  o que prova, por um cálculo análogo para  $\frac{D}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)$ , o resultado desejado.  $\square$

O resultado central desta primeira parte é o seguinte:

**Teorema 2.** Seja  $J(t)$  campo diferenciável de vetores ao longo da geodésica  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ . Se  $J$  é um campo de Jacobi então  $J$  satisfaz à Equação de Jacobi:

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{dt} J(t) + K(t)(\gamma'(t) \wedge J(t)) \wedge \gamma'(t) = 0$$

onde  $K(t)$  é a curvatura Gaussiana de  $M$  no ponto  $\gamma(t)$ .

Reciprocamente, suponha que  $J$  satisfaz à equação de Jacobi então  $J$  é um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ .

**Primeira parte da prova.** Provaremos por enquanto que se  $J$  é campo de Jacobi então deve satisfazer a equação de Jacobi. Para isto consideramos variação por geodésicas,  $f: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ , de  $\gamma$ , tendo  $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$  como campo variacional. Pelos Lemas 2 e 3 temos que

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + K(s, t) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \wedge \frac{\partial f}{\partial s} \right) \wedge \frac{\partial f}{\partial t}$$

Mas, como cada curva  $t \mapsto f(s, t)$  é geodésica, temos que

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

de modo que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + K(s, t) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \wedge \frac{\partial f}{\partial s} \right) \wedge \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Agora, pelo Lema de Simetria (Lema 4) temos que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}$$

de modo que para  $s = 0$  temos que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J(t) + K(0, t)(\gamma'(t) \wedge J(t)) \wedge \gamma'(t) = 0$$

□

Fixemos agora alguma notação que consideramos útil:

Dadas superfície  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ , geodésica  $\gamma(t)$  em  $M$ , e  $J(t)$  campo diferenciável de vetores ao longo de  $\gamma$ , denotaremos por  $R(\gamma', J)\gamma'$  o campo de vetores

$$R(\gamma', J)\gamma' = K(\gamma(t))(\gamma'(t) \wedge J(t)) \wedge \gamma'$$

A equação de Jacobi se reescreve então como:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

Esta notação é justificada pelo uso dos tensores e linguagem de conexões que se fazem em Geometria Riemanniana [dC2].

**Proposição 14.** (*Existência e Unicidade para Campos de Jacobi*). *Seja  $\gamma$  geodésica definida em  $M$  para  $t \in [0, a]$  e seja  $p = \gamma(0)$ . Dados vetores  $v \in T_p(M)$  e  $w \in T_v(T_p(M)) \cong T_p(M)$ , existe um único campo de Jacobi  $J(t)$  ao longo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = v$  e  $\frac{D}{dt} J(0) = w$ .*

**Prova.** Seja  $n$  a dimensão de  $M$ . Tomamos base ortonormal de  $T_p(M)$  digamos,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e consideremos  $\epsilon_j(t)$  o transporte paralelo de  $e_j$  ao longo de  $\gamma$ . Então para cada ponto  $\gamma(t)$  temos que  $\{\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_n(t)\}$  é uma base ortonormal de  $T_{\gamma(t)}(M)$  (exerc.8). Deste modo podemos escrever  $J(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)\epsilon_j(t)$ . Então como  $\epsilon_j(t)$  é paralelo temos que

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_{j=1}^n f_j''(t)\epsilon_j(t)$$

Escrevemos agora,

$$R(\gamma', J)\gamma' = R(\gamma', \sum_j f_j \epsilon_j)\gamma' = \sum_j f_j R(\gamma', \epsilon_j)\gamma'$$

Seja

$$\sum_i a_i^j(t)\epsilon_i(t) = R(\gamma', \epsilon_j)\gamma'$$

então

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma', J)\gamma' = \sum_j f_j''(t)\varepsilon_j(t) + \sum_i i, j a_j^i(t)f_j(t)\varepsilon_i(t)$$

A equação de Jacobi é então equivalente ao sistema de equações lineares de segunda ordem

$$f_i'' + \sum_{j=1}^n f_j a_j^i = 0, \quad (i = 1, \dots, n)$$

Logo com as condições iniciais  $J(0) = v$  e  $\frac{DJ}{dt}(0) = w$  temos existência e unicidade garantidas pelo Teorema de Picard.  $\square$

**Proposição 15.** *Dada geodésica  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  temos que:*

(i)  $\gamma'$  e  $t.\gamma'$  satisfazem à equação de Jacobi, ao longo de  $\gamma$ .

(ii) Sejam  $J_1, J_2$  campos satisfazendo a equação de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , então  $a_1 J_1 + a_2 J_2$  satisfaz à equação de Jacobi ao longo de  $\gamma \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

(iii) Sejam  $p = \gamma(0), v = \gamma'(0) \in T_p(M)$  e  $w \in T_v(T_p(M))$  digamos  $w = v'(0)$ , onde  $v(s)$  é curva em  $T_p(M)$  com  $v(0) = v$ . Então  $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$  define variação de  $\gamma$ , por geodésicas. Em particular o campo variacional correspondente é um campo de Jacobi se anulando para  $t = 0$ .

**Prova.** (i) e (ii) seguem de cálculos diretos. Vejamos agora a prova de (iii). Seja  $J(t) = \frac{\partial}{\partial s}(\exp_p(t.v(s)))|_{s=0}$ . Então pela Regra da Cadeia,

$$J(t) = (d \exp_p)_{tv(0)}(tv'(0)) = (d \exp_p)_{tv}(tw) = t(d \exp_p)_{tv}(w)$$

Portanto

$$J(0) = 0, \quad \frac{DJ}{dt}(0) = (d \exp_p)_0(w) = w$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{D}{\partial s} \left( \frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) - \frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) = -R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

Como  $t \mapsto f(s, t) = \exp_p(t.v(s))$  é geodésica, temos que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

e logo

$$\frac{D}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) + R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Deste modo, em  $t = 0$  obtemos

$$R(\gamma', J)\gamma' + \frac{D^2 J}{dt^2} = 0$$

encerrando a demonstração.  $\square$

O procedimento acima pode ser generalizado ao caso em o campo não se anula em  $t = 0$ :

**Proposição 16.** *Seja  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  geodésica em  $M$  e sejam dados  $v \in T_p(M)$  e  $w \in T_v(T_p(M)) \cong T_p(M)$ . Tomemos curva diferenciável  $c(s), |s| < \epsilon$  em  $M$  tal que  $c(0) = \gamma(0), c'(0) = v$  e campo de vetores  $W(s)$  ao longo de  $c$  com  $W(0) = \gamma'(0), \frac{DW}{ds}(0) = w$ . Então  $f(s, t) = \exp_{c(s)}(t.W(s))$  define variação de  $\gamma$ , por geodésicas, cujo campo variacional  $\tilde{J}$  satisfaz  $\tilde{J}(0) = v$  e  $\frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = w$ .*

**Prova.** (exerc.9) para o leitor.

Podemos finalmente completar a demonstração do Teorema 2.

**Fim da Prova do Teorema 2.** Seja  $J(t)$  campo diferenciável ao longo da geodésica  $\gamma$ , satisfazendo à equação de Jacobi. Sejam  $J(0) = v \in T_p(M)$  e  $w = \frac{DJ}{dt}(0) \in T_v(T_p(M))$ . Pela Proposição 16 existe campo de Jacobi  $\tilde{J}(t)$  ao longo de  $\gamma$  que satisfaz  $\tilde{J}(0) = 0$  e também  $\tilde{J}'(0) = w$ , sendo  $\tilde{J}$  da forma  $\tilde{J}(t) = \frac{\partial}{\partial s}(\exp_p(t.v(s)))|_{s=0}$ . Mas pela unicidade dos campos de Jacobi, fixadas as condições iniciais expressa na Proposição 16, temos que necessariamente  $J(t) = \tilde{J}(t), \forall t$  de modo que  $J$  é campo de Jacobi.  $\square$

**Observação 6.** Alguns autores definem campo de Jacobi como aquele que satisfaz à equação de Jacobi, se anulando necessariamente em  $t = 0$ . Isto, para efeito de estudo dos pontos conjugados e cut locus, não interfere nos resultados centrais.

**Observação 7.** O fato de  $\gamma'$  e  $t.\gamma'$  serem campos de Jacobi, tangentes a  $\gamma$ , com o primeiro nunca nulo e o segundo se anulando apenas na origem, juntamente com o fato de que os campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$  formam um espaço vetorial real, nos permitem reduzir o estudo dos campos de Jacobi àqueles que são ortogonais a  $\gamma$  na origem, e portanto ortogonais a  $\gamma$  ao longo de  $\gamma$ , como garante o seguinte resultado:

**Lema 5.** *Seja  $J(t)$  campo de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma(t), t \in I$  em  $M$ . Então  $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle$  é constante em  $I$ .*

**Prova.** Com efeito, temos que

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \frac{DJ}{dt}(t), \gamma'(t) \rangle + \langle J(t), \frac{D}{dt} \gamma'(t) \rangle = \langle \frac{DJ}{dt}(t), \gamma'(t) \rangle$$

Agora, pela equação de Jacobi temos que

$$\frac{DJ}{dt}(t) + K(t)(\gamma'(t) \wedge J(t)) \wedge \gamma'(t)$$

de modo que

$$\langle \frac{DJ}{dt}(t), \gamma'(t) \rangle = 0$$

e logo

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0$$

□

**Exemplo 1** (*Campos de Jacobi em superfícies de curvatura Gaussiana constante*).

Seja  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  superfície de curvatura Gaussiana constante, digamos  $K \equiv K_0$ , e seja  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  geodésica em  $M$ . Consideraremos apenas campos de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  que sejam normais a  $\gamma$  (ver Observação 7 acima).

Podemos supor também que  $\gamma$  está normalizada por comprimento de arco, ou seja, que  $|\gamma'| = 1$ . Dado tal campo  $J$  a equação de Jacobi então se escreve

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + K_0 J = 0$$

uma vez que  $\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle = K_0 |J \wedge \gamma'|^2 = K_0 |J|^2$  nos dá  $R(\gamma', J)\gamma' = K_0 J$

Seja agora,  $W(t)$  campo de vetores paralelo unitário ao longo de  $\gamma$ , ortogonal a  $\gamma$ . Vamos estudar as soluções  $J(t) = f(t)W(t)$ , da equação acima com  $J(0) = 0, J'(0) = W(0)$ . A equação de Jacobi então se escreve

$$f''(t)W(t) + K_0 f(t)W(t) = 0$$

ou seja,

$$f'' + K_0 f = 0, f(0) = 0, f'(0) = 1$$

cujas soluções são:

$f(t) = t$ , se  $K_0 = 0$ ,  $f(t) = \frac{\text{sen}(t\sqrt{K_0})}{\sqrt{K_0}}$ , se  $K_0 > 0$ , e  $f(t) = \frac{\text{sen}(t\sqrt{-K_0})}{\sqrt{-K_0}}$  se  $K_0 < 0$ . Isto nos dá a descrição do campo  $J$  de acordo com o sinal de  $K_0$ .

Por exemplo na esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  de curvatura constante  $K_0 = 1$  temos que as geodésicas são os círculos máximos partindo de um ponto. Os campos de Jacobi ortogonais a estes círculos e que se anulam na partida são descritos por equação

$$J(t) = \text{sen } t \cdot W(t)$$

onde  $W(t)$  é campo paralelo unitário e normal ao círculo em questão. Em particular, vemos que um tal campo de Jacobi só volta a se anular no ponto antípoda ao ponto de partida, ou seja, no pólo oposto ao ponto de partida. Isto nos dirá que dado um ponto  $p \in \mathbb{S}^2$ , o primeiro ponto conjugado a  $p$  é o seu antípoda.

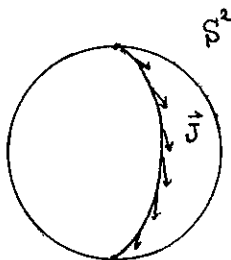


figura 39

## 7. Teoria de Sturm

Começamos este parágrafo com uma motivação.

### 7.1 Motivação: Campos de Jacobi e afastamento de geodésicas

Sejam  $\gamma(t), t \in [0, a]$  geodésica em  $M$  e  $J(t)$  campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ . Suponhamos que  $J(0) = 0$  de modo que  $J$  corresponde a uma variação  $f(s, t)$  de  $\gamma$  cujas curvas todas partem do mesmo ponto  $p = \gamma(0)$  e, a partir daí, vão se espalhando sobre  $M$ .

Então se tomamos curva diferenciável  $v(s), |s| < \epsilon$  com  $v(0) = \gamma, v'(0) = w$ , temos que  $J$  corresponde ao campo variacional da variação

$$f(s, t) = \exp_p(t.v(s))$$

Deste modo

$$J(t) = t.(d\exp_p)_{t\gamma}(w)$$

Vejam os comportamentos de  $J(t)$  ao longo de  $\gamma(t)$ . Notamos que  $J(1) = (d\exp_p)_v(w)$  de modo que  $\|J(1)\|$  mede, de uma certa forma, a taxa de espalhamento das geodésicas  $f_s(t)$  da variação  $f$ .

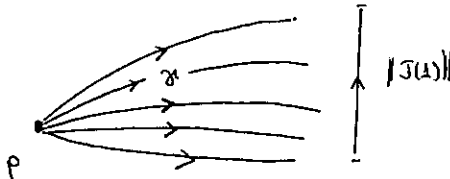


figura 40

É isto que passaremos a formalizar com a Teoria de Sturm.

## 7.2 Equações de Sturm-Liouville

Passamos agora a estudar equações diferenciais de segunda ordem, mais especificamente as equações chamadas *equações de Sturm-Liouville regulares*. Tais equações têm grande interesse em Física e Geometria, como veremos mais adiante.

**Definição 14.** Uma equação diferencial da forma

$$(p(x)y)' + (\lambda a(x) - b(x))y = 0, x \in [a, b]$$

é chamada de *equação de Sturm-Liouville regular*, se

$$\lambda \in \mathbb{R}, p(x) > 0, a(x) > 0$$

onde as funções  $a, b, p$  são contínuas.

**Exemplo 2 (O Problema da corda vibrante).**

Consideremos o problema de descrever o movimento dos pontos sobre uma corda ideal com extremidades fixas e que oscila (não como na brincadeira de “pular corda”, mas sim como no movimento de uma corda de violão) ao ser tensionada por uma força inicial vertical central. Este movimento foi provocado pela ação de um agente que puxou a corda transversalmente, na direção vertical. Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos extremos desta corda e consideremos a corda ideal e o movimento suave o suficiente de modo que uma boa aproximação seja que os pontos da corda se movimentem apenas no sentido vertical.

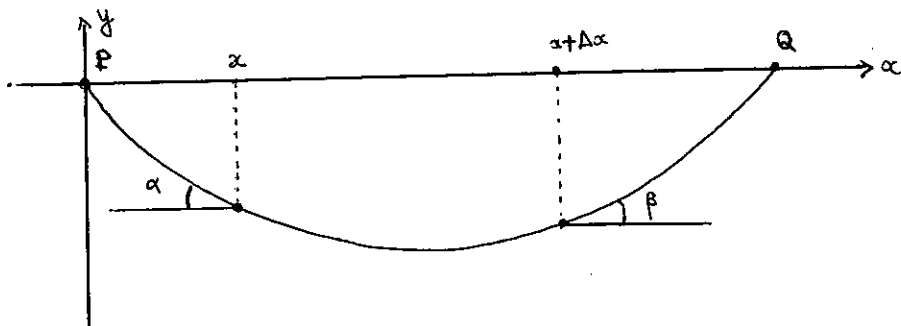


figura 41

Introduzimos coordenadas cartesianas de modo que  $P, Q$  estejam sobre o eixo  $O_x$  e que em algum momento a corda esteja contida no plano  $xy$ . Podemos também supor que  $P = 0$  e  $Q > P$ .

Denotando por  $t$  a variável tempo, podemos denotar por  $y(x, t)$  a posição de um ponto da corda de abscissa  $x$  no tempo  $t \geq 0$ .

Suporemos que a oscilação é devida unicamente à tensão  $T$  atuando na corda (que tem suas extremidades fixas). Suporemos  $T$  constante e agindo tangente à corda (ou seja, “para a frente”). Seja também  $F$  a força resultante agindo sobre um elemento de arco da corda  $\Delta x$ , correspondente ao arco de corda entre os pontos de abcissa  $x$  e  $x + \Delta x$ . A segunda lei de Newton nos dá então:

$$F = \mu(x)\Delta(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

onde  $\mu(x)$  é a densidade de massa da corda.

Como a força de tensão é tangente à corda podemos deduzir que

$$F = T \operatorname{sen} \alpha - T \operatorname{sen} \beta$$

onde os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos entre a tensão  $T$  e a horizontal nos pontos  $x$  e  $x + \Delta x$  respectivamente.

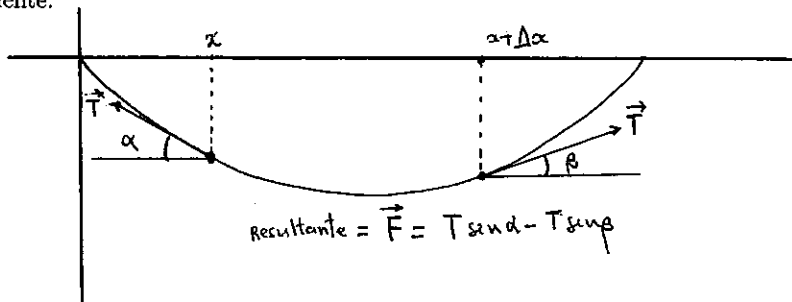


figura 42

Para pequenas oscilações efetuamos as aproximações usuais  $\operatorname{sen} \alpha \cong \tan \alpha = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_x$  e  $\operatorname{sen} \beta \cong \tan \beta = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x+\Delta x}$ . Assim, obtemos

$$F = T\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_x - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x+\Delta x}\right] = T\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Usando então a equação derivada da segunda Lei de Newton obtemos

$$\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

e passando ao limite obtemos a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu(x)}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Supondo que em  $t = 0$  a corda está parada com posição descrita por  $y(x, 0) = f(x)$ , com  $f \in C^k, k \geq 2$ , então obtemos os seguintes valores iniciais:



$$y(P, t) = y(Q, t) = 0, t \geq 0, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in [P, Q] \quad y(x, 0) = f(x), x \in [P, Q]$$

Uma maneira de se tentar resolver a equação da corda vibrante é por *variáveis separáveis*, que consiste em procurar por soluções da forma

$$y(x, t) = A(x)B(t)$$

Por substituição obtemos neste caso

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{1}{T} \frac{B''(t)}{B(t)}$$

e como as variáveis  $x$  e  $t$  são independentes, devemos ter

$$\lambda = \frac{1}{\mu(x)} \frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{1}{T} \frac{B''(t)}{B(t)}$$

para alguma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Daí obtemos as equações equivalentes

$$A''(x) - \lambda \mu(x)A(x) = 0, A(P) = A(Q) = 0$$

e

$$B''(t) - \lambda T B(t) = 0, B'(0) = 0$$

que são equações de Sturm-Liouville.

### 7.3 O Teorema de Separação de Sturm

Estudaremos o comportamento de duas soluções de uma mesma equação de segunda ordem particular, relacionada com a equação de Sturm-Liouville:

**Teorema 3** (Teorema de Separação de Sturm). *Sejam  $u(x), v(x)$  soluções linearmente independentes da equação de linear homogênea de segunda ordem*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

onde  $a, b$  são contínuas no intervalo  $I$ . Então os zeros de  $u$  e  $v$  são alternados em  $I$ .

**Prova.** Faremos uso da noção de *Wronskiano*: Seja  $W(x)$  o *wronskiano* de  $u$  e  $v$  definido como

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$$

Então como  $u$  e  $v$  são soluções linearmente independentes temos que  $W(x) \neq 0, \forall x \in I$  (verifique!), e logo possui sinal constante. Se  $x_1 < x_2$  são zeros consecutivos de  $v(x)$  então os sinais de  $v'(x_1)$  e  $v'(x_2)$  são distintos de modo que, como  $W(x_j) = u(x_j)v'(x_j)$ , os sinais

de  $u(x_1)$  e  $u(x_2)$  também são distintos. Deste modo  $u$  possui pelo menos um zero entre  $x_1$  e  $x_2$ . Como podemos permutar  $u$  e  $v$ , concluímos que de fato os zeros de  $u$  e  $v$  são alternados.  $\square$

**Exemplo 3.** Podemos usar o Teorema de Separação de Sturm para mostrar que duas funções quaisquer da forma  $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ , e  $c \operatorname{sen} x + d \cos x$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  com  $ad - bc \neq 0$ , possuem zeros alternados. (exerc.10) O mesmo vale para as funções trigonométricas hiperbólicas  $\operatorname{sen} hx$  e  $\cos hx$ .

#### 7.4 Os Teoremas de Comparação de Sturm

O Teorema de Comparação de Sturm, abaixo, permite comparar os valores de duas soluções de equações de Sturm-Liouville cujos coeficientes (das equações) se comparem de forma conveniente.

**Teorema 4.** (Teorema de Comparação de Sturm). *Sejam  $u, v$  soluções não triviais de*

$$(p(x)u')' + a(x)u = 0, \quad (p(x)v')' + b(x)v = 0, \quad x \in I$$

onde  $0 < p \in C^1$ ,  $a, b$  são contínuas e

$$b(x) \geq a(x), \quad \forall x \in I$$

Sejam  $x_1 < x_2$  zeros consecutivos de  $u$ . Então  $v$  possui pelo menos um zero em  $(x_1, x_2)$ , salvo se  $a(x) = b(x)$ ,  $v(x) = \lambda u(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in (x_1, x_2)$

**Prova.** Multiplicamos a primeira equação por  $v$  a segunda por  $u$  e subtraímos para obter

$$(*) \quad ((pu')v - (pv')u - (b-a)uv = 0$$

Integrando (\*) então obtemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} (b-a)uv dx = p(x_2)u'(x_2)v(x_2) - p(x_1)u'(x_1)v(x_1)$$

Portanto, se  $v$  não se anula em  $(x_1, x_2)$  podemos supor que  $u > 0, v > 0$  em  $(x_1, x_2)$  e como  $u'(x_2) < 0 < u'(x_1)$  temos então que

$$\int_{x_1}^{x_2} (b-a)uv dx \leq 0$$

e logo  $a(x) = b(x)$  em  $[x_1, x_2]$ . Logo, no intervalo  $[x_1, x_2]$  temos a mesma equação satisfeita por  $u$  e  $v$ , de modo que pelo Teorema de Separação de Sturm acima, devemos ter  $u$  e  $v$  linearmente dependentes no intervalo  $[x_1, x_2]$ .  $\square$

Uma outra versão muito útil deste resultado é a seguinte:

**Teorema 5** (Segundo Teorema de Comparação de Sturm). *Sejam  $u$  e  $v$  soluções de*

$$u''(x) + a(x)u(x) = 0, u(0) = 0,$$

$$v''(x) + b(x)v(x) = 0, v(0) = 0$$

*no intervalo  $[0, \ell]$ . Suponhamos que  $b(x) \geq a(x)$ ,  $\forall$  e que  $u'(0) = v'(0)$ . Se  $v(x) > 0$  em  $(0, \ell]$  então*

$$u(x) \geq v(x), \forall x \in [0, \ell]$$

*com igualdade para algum  $x_1 \in (0, \ell]$  se, e somente se,*

$$a(x) = b(x), \forall x \in [0, x_1]$$

**Prova.** Com efeito, procedendo como na demonstração do teorema anterior obtemos

$$0 = [vu' - uv']_0^x + \int_0^x (a(t) - b(t))uv dt$$

Desta equação e das condições iniciais concluímos que

$$\frac{u'}{u} \geq \frac{v'}{v}$$

ou seja

$$\log u(x) - \log u(x_1) \geq -\log v(x) - \log v(x_1), \forall x_1 \in [0, \ell]$$

e daí

$$\frac{u(x)}{v(x)} \geq \frac{u(x_1)}{v(x_1)}, \forall x_1 \in [0, \ell]$$

Passando ao limite e usando a Regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \left( \frac{u(x_1)}{v(x_1)} \right) = 1$$

e obtemos a desigualdade desejada. A última parte se obtém de forma análoga a partir da primeira desigualdade obtida.  $\square$

## 8 O Teorema de Comparação de Rauch (em dimensão 2)

Seja  $M$  uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . O que faremos pode ser feito em um contexto bem mais geral, o de variedades Riemannianas substituindo-se curvatura gaussiana por curvatura seccional. Mas isto escapa um pouco aos nossos objetivos.

Começamos com a observação de que dado um campo de Jacobi  $J$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$  em  $M$ , então próximos ao ponto de partida, temos que  $|J|$  é tanto maior quanto menor for a curvatura gaussiana de  $M$  ao longo de  $\gamma$ . Isto é consequência do seguinte lema:

**Lema 6.** *Seja  $J(t)$  campo de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$ , normalizada, com  $J(0) = 0, |J'(0)| = 1$  e  $\langle \frac{DJ}{dt}(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ . Então*

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6}K(p)t^3 + r_3(t)$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r_3(t)}{t^3} = 0$$

e  $K(p)$  é a curvatura gaussiana de  $M$  em  $p = \gamma(0)$ .

**Prova.** A prova consiste em calcular a expansão de Taylor de  $|J(t)|$  em  $t = 0$  em ordem 3. Primeiro observamos que podemos deduzir esta expansão a partir da expansão equivalente de  $|J(t)|^2$ . Além disso, como  $J(0) = 0$ , se denotamos por  $v = \gamma'(0)$  e  $w = \frac{DJ}{dt}(0) \in T_v(T_p(M))$ , então já sabemos que  $J$  é dado por

$$J(t) = (d \exp_p)_{tv}(tw)$$

Denotemos por  $J' = \frac{DJ}{dt}$ ,  $J'' = \frac{D^2J}{dt^2}$  e assim sucessivamente.

Então temos que  $|J|^2 = \langle J, J \rangle$  de modo que

$$\begin{aligned} \langle J, J \rangle(0) &= 0, \langle J, J' \rangle(0) = 2 \langle J, J' \rangle(0) = 0, \langle J, J'' \rangle(0) \\ &= 2[\langle J', J' \rangle + 2 \langle J'', J \rangle(0)] = 2 \end{aligned}$$

Agora, usando a equação de Jacobi temos que

$$J''(0) = 0$$

pois  $J(0) = 0$ . Deste modo, também temos

$$\langle J, J \rangle'''(0) = 0$$

Agora observamos o seguinte:

**Lema 7.** *Temos que*

$$\frac{DR(\gamma', J)\gamma'}{\gamma'}(0) = R(\gamma', J)\gamma'$$

**Prova.** Com efeito, seja dado campo paralelo de vetores tangente  $V \in T_p(M)$  ao longo de  $\gamma$ . Temos então que em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{R(\gamma', J)\gamma'}{dt}, V \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', \frac{DV}{dt} \rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} R(\gamma', J)\gamma', J \right\rangle + \langle R(\gamma', J)\gamma', J' \rangle = \langle R(\gamma', J)\gamma', V \rangle \end{aligned}$$

onde usamos a equação de Jacobi e o fato de que  $V$  é paralelo. Deste modo,

$$\frac{D}{dt} R(\gamma', J)\gamma'(0) = R(\gamma', J)\gamma'(0)$$

□

Usando o lema anterior concluímos que

$$J'''(0) = -8 \langle J', R(\gamma', J)\gamma' \rangle(0) = -K(p)$$

pois por hipótese  $J'(0)$  é unitário ortogonal a  $\gamma'(0)$ .

Assim sendo basta usar o teorema de Taylor para concluir. □

Seja agora  $\tilde{M}$  outra superfície em  $\mathbb{R}^3$  com uma geodésica  $\tilde{\gamma}: [0, \ell] \rightarrow \tilde{M}$  normalizada e um campo de Jacobi ao longo,  $\tilde{J}$  satisfazendo o seguinte:

$$\tilde{J}(0) = 0, |\tilde{J}'(0)| = 1, \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle = 0$$

Suponhamos também a condição de comparação

$$\tilde{K}(\tilde{p}) \geq K(p)$$

de comparação entre as curvaturas gaussianas, onde  $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(0)$ . Então pelo lema acima temos que

$$|\tilde{J}(t)| \leq |J(t)|, \forall t \in [0, \ell]$$

o Teorema de Comparação de Rauch, abaixo, diz “a grosso modo” que sob a condição adicional de que  $\tilde{K}(t) \geq K(t)$  a desigualdade se preserva ou seja,

$$|\tilde{J}(t)| \leq |J(t)|, \forall t \in [0, \ell]$$

**Teorema de Comparação de Rauch.** *Sejam  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  e  $\tilde{\gamma}: [0, a] \rightarrow \tilde{M}$  geodésicas normalizadas nas superfícies  $M, \tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$  e sejam  $J, \tilde{J}$  campos de Jacobi ao longo de  $\gamma, \tilde{\gamma}$  respectivamente. Suponhamos que*

$$J(0) = \tilde{J}(0) = 0, |J'(0)| = |\tilde{J}'(0)| < J'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle = 0$$

Suponha que:

(i)  $\tilde{J}(t) \neq 0, \forall t \in (0, a]$

(ii)  $\tilde{K}(\tilde{\gamma}(t)) \geq K(\gamma(t)), \forall t \in [0, a]$ .

Então  $|\tilde{J}| \leq |J|$  em  $[0, a]$ . Se existe  $t_o \in (0, a]$  tal que  $|J(t_o)| = |\tilde{J}(t_o)|$  então  $\tilde{K}(\tilde{\gamma}(t)) = K(\gamma(t)), \forall t \in [0, t_o]$ .

**Prova.** Neste caso bidimensional o Teorema de Rauch, que é de fato válido em um contexto bem mais geral [dC2], se reduz ao Segundo Teorema de Comparação de Sturm:

Seja  $W(t), \tilde{W}(t)$  campo de vetores paralelo ao longo de  $\gamma, \tilde{\gamma}$  unitário e ortogonal a  $\gamma, \tilde{\gamma}$ . Podemos escrever  $J(t) = u(t).W(t)$  e  $\tilde{J}(t) = v(t).\tilde{W}(t)$ , com  $u, v$  diferenciáveis em  $[0, a]$ . Como  $J(0) = 0, |J'(0)| = 1$  podemos escolher  $u$  de modo que  $u(0) = 0, u'(0) = 1$ . Análogamente podemos assumir que  $v(0) = 0, v'(0) = 1$ . Da equação de Jacobi para  $J, \tilde{J}$  obtemos

$$u''(t) + K(t)u(t) = 0, v''(t) + \tilde{K}(t)v(t) = 0$$

onde usamos que  $J, \tilde{J}$  é ortogonal a  $\gamma, \tilde{\gamma}$  respectivamente e  $K(t) = K(\gamma(t)) \tilde{K}(t) = \tilde{K}(\tilde{\gamma}(t))$ .

Mas então agora o Teorema de Rauch segue do Segundo Teorema de Comparação de Sturm.  $\square$

Vejam algumas consequências importantes do Teorema de Comparação de Rauch. Para isto introduziremos a noção de *ponto conjugado*:

**Definição 15.** Sejam  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica e  $t_o \in (0, a]$ . Dizemos que  $\gamma(t_o)$  é *ponto conjugado* a  $\gamma(0)$  se existe campo de Jacobi não identicamente nulo,  $J(t)$  ao longo de  $\gamma$  que se anula em  $t = 0$  e  $t = t_o$ . A *multiplicidade* de  $\gamma(t_o)$  como ponto conjugado é o número máximo de tais campos linearmente independentes.

Pelo que vimos a respeito dos campos de Jacobi podemos afirmar que  $\gamma(t_o)$  é conjugado a  $\gamma(0)$  se, e somente se, existe variação própria não-trivial do segmento de geodésica  $\gamma|_{[0, t_o]}$  por geodésicas.

**Exemplo 4.** Pelo que vimos a respeito dos campos de Jacobi em superfícies (de dimensão 2) de curvatura (Gaussiana) constante, na esfera os campos de vetores da forma  $J(t) = (\sin t)W(t)$ , onde  $W(t)$  é qualquer campo de vetores paralelo, unitário, ortogonal ao campo velocidade de uma geodésica (no caso, círculo máximo) em  $\mathbb{S}^2$ , são os campos de Jacobi. Podemos gerar tais campos  $W(t)$  por transporte paralelo de vetores unitários  $W_0 \in T_{\gamma(0)}(M)$ , com  $\langle W_0, \gamma'(0) \rangle = 0$ , de modo que concluímos que, como  $J(0) = J(\pi) = 0$ , ao longo de qualquer geodésica  $\gamma$  em  $\mathbb{S}^2$ , o ponto antípoda  $\gamma(\pi)$  é o único ponto conjugado de  $\gamma(0)$ .

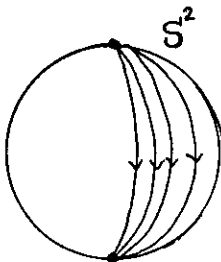


figura 43

**Corolário 3.** Seja  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  superfície regular cuja curvatura gaussiana  $K$  satisfaz

$$0 < r \leq K \leq R, \quad r, R \in \mathbb{R}$$

Seja  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$  geodésica normalizada. Então a distância  $d$  ao longo de  $\gamma$ , entre dois pontos conjugados consecutivos satisfaz

$$\frac{\pi}{\sqrt{R}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

**Prova.** Utilizaremos comparação com esferas. Seja primeiramente  $\tilde{M}$  a esfera de curvatura gaussiana  $\tilde{K} = R$ . Seja  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$  geodésica normalizada com  $J(0) = 0$  e  $J(t)$  campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = 0, \langle J(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ . Tome ponto  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e geodésica normalizada  $\tilde{\gamma}: [0, \ell] \rightarrow \tilde{M}$  partindo de  $\tilde{p}$ . Dado qualquer campo de Jacobi  $\tilde{J}$  ao longo de  $\tilde{\gamma}$  com  $\tilde{J}(0) = 0$  e  $\tilde{J}$  ortogonal a  $\tilde{\gamma}$ , temos o seguinte:

(i)  $J(t) \neq 0, \forall t \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{R}})$ , pois como vimos no Exemplo 4 acima,  $\tilde{M}$  não possui pontos conjugados distando menos do que metade de sua circunferência.

(ii) Por hipótese a curvatura gaussiana  $K$  de  $M$  satisfaz  $\tilde{K} \geq K$ .

Assim, pelo Teorema de Rauch, temos que  $|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)| > 0, \forall t \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{R}})$ .

Deste modo,  $d \geq \frac{\pi}{\sqrt{R}}$ .

Análogamente podemos obter a outra desigualdade para  $d$ .  $\square$

A noção de ponto conjugado é também importante por causa do seguinte fato:

**Proposição 17.** *Sejam  $\gamma: [0, a] \rightarrow M$  geodésica e  $p = \gamma(0), q = \gamma(t_1), t_1 \in (0, \ell]$ . Então  $q$  é ponto conjugado a  $p$  de multiplicidade  $k$  se, e somente se,  $v_1 = t_1 \cdot \gamma'(0)$  é ponto crítico de  $\exp_p$  de multiplicidade  $k$ .*

Lembramos que dada aplicação diferenciável  $f: M \rightarrow N$  entre duas superfícies, um ponto  $p \in M$  é *ponto crítico de  $f$ , de multiplicidade  $k$*  se:

- (i)  $df(p): T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  é não injetiva.
- (ii)  $\{v \in T_p(M), df(p) \cdot v = 0\}$  tem dimensão  $k$ .

**Prova.** Pelo que vimos dado campo de Jacobi  $J(t)$  ao longo de  $\gamma$ , com  $J(0) = 0$ , podemos escrever

$$J(t) = (d \exp_p)_{tv}(tw)$$

onde  $v = \gamma'(0), w = J'(0) \in T_v(T_p(M))$ . Mas então temos que  $J(t_1) = 0$  se, e somente se,  $(d \exp_p)_{t_1 v}(t_1 w) = 0$  (o que é equivalente a  $(d \exp_p)_{tv}(w) = 0$ ), e a multiplicidade de  $\gamma(t_1)$  como ponto conjugado a  $p$ , é igual à dimensão do espaço dos vetores  $w$  tais que  $(d \exp_p)_{t_1 v}(t_1 w) = 0$  (pois campos de vetores  $J(t)$  se anulando na origem, são linearmente independentes se, e somente se, os vetores  $J'(0)$  são linearmente independentes.  $\square$

**Corolário 4.** *Seja  $M$  superfície completa tal que para um certo  $p \in M$ ,  $p$  não possui pontos conjugados. Então a aplicação exponencial  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$  é um difeomorfismo local. Em particular toda  $M$  compacta e simplesmente conexa admite ponto conjugado a qualquer ponto  $p \in M$ .*

**Prova.** Com efeito, a observação de que  $\exp: T_p(M) \rightarrow M$  é um difeomorfismo local é apenas uma consequência direta da proposição acima. Agora, se  $M$  é compacta então  $\exp_p$  é de fato uma aplicação de recobrimento [E11] e sendo  $M$  simplesmente conexa,  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$  é um difeomorfismo global, o que é absurdo pois  $T_p(M)$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  e não pode ser compacto.  $\square$

Mais adiante veremos o Teorema de Hadamard, que permite concluir  $M \cong \mathbb{R}^2$  no caso em  $M$  é completa e de curvatura gaussiana negativa ( $K \leq 0$ ).



## 9. O Teorema de Hadamard

**Exemplo 5.** O parabolóide de revolução é difeomorfo ao plano  $\mathbb{R}^2$  via a aplicação exponencial. Este fato é válido para as superfícies completas com curvatura gaussiana  $\leq 0$ .

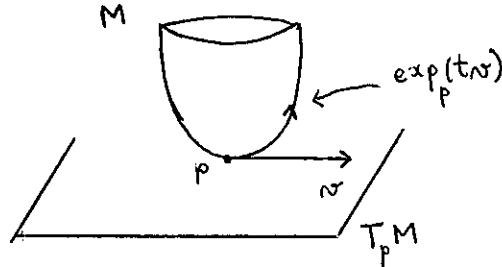


figura 44

**Teorema 6 (Teorema de Hadamard).** Seja  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  superfície regular completa com curvatura gaussiana não positiva  $K \leq 0$ . Então  $M$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ , de fato um tal difeomorfismo é dado pela aplicação exponencial.

**Prova.** Poderíamos utilizar o seguinte lema que versa sobre a relação que existe entre curvatura, espalhamento de geodésicas, campos de Jacobi e aplicação exponencial.

**Lema 8.** Seja  $M$  superfície completa com curvatura  $K \leq 0$  e seja  $p \in M$ . Então  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$  satisfaz

$$|d(\exp_p)_v(w)| \geq |w|, \forall v \in T_p(M), \forall w \in T_v(T_p(M))$$

Entretanto, por simplicidade adotaremos uma demonstração alternativa baseada em dois lemas:

**Lema 9.** Seja  $M$  superfície com  $K \leq 0$ , então  $M$  não possui pontos conjugados.

**Prova.** Basta observar que se  $J$  é campo de Jacobi ao longo de  $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$ , com  $J(0) = J(\ell) = 0$ , então pela equação de Jacobi e o fato de que  $K \leq 0$ , obtemos

$$\langle J', J \rangle' \geq 0$$

o que implica  $\langle J', J \rangle \equiv 0$ . Mas então  $\langle J, J \rangle' \equiv 0$  e logo como  $J(0) = 0$ , temos que  $J \equiv 0$ .  $\square$

**Lema 10.** Seja  $f: (\tilde{X}, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$  aplicação contínua e sobrejetiva entre espaços métricos, conexos, localmente conexos e localmente compactos, com  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  completo e tal que  $d(f(x), f(y))$ . Então  $f$  é uma aplicação de recobrimento.

**Prova.** Basta mostrar que  $f$  é homeomorfismo local que levanta caminhos [El1] o que deixaremos como exercício para o leitor (exerc.11).  $\square$

De modo análogo ao resultado acima mostra-se o seguinte:

**Lema 11.** *Seja  $f: M \rightarrow N$  aplicação de classe  $C^1$  entre superfícies de mesma dimensão, com  $M$  completa e a seguinte propriedade:*

$$|df(p) \cdot v| \geq |v|, \forall v \in T_p(M)$$

*Então  $f$  é uma aplicação de recobrimento. Em particular, se  $M$  é simplesmente conexa, temos que  $f$  é um difeomorfismo global.*

**Prova.** Uma vez mais prova-se que  $f$  é um difeomorfismo local, que possui a propriedade de levantar caminhos. A completude de  $M$  é usada para provar que dado caminho  $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ , o conjunto  $A = \{\tau \in (0, 1], \alpha$  possui levantamento em  $[0, \tau]\}$  é fechado, uma vez que  $f$  levanta seqüências de Cauchy  $\alpha(t_n)$  em seqüências de Cauchy.  $A$  é não vazio e aberto porque  $f$  é difeo local. A conexidade de  $[0, 1]$  nos dá então  $A = [0, 1]$ .  $\square$

**Prova do Teorema de Hadamard.** Como  $M$  é completa, podemos considerar a aplicação exponencial  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$ . Como por hipótese,  $M$  tem  $K \leq 0$ , segue que  $M$  não possui pontos conjugados e logo  $\exp_p$  é difeo local. Podemos então introduzir um produto interno  $g$  em cada espaço tangente  $T_w(T_p(M))$ , que varia diferenciavelmente com  $w \in T_p(M)$ , do seguinte modo:

$$g_w(u, v) := \langle (d\exp_p)_w(v), (d\exp_p)_w(u) \rangle_{\exp_p(w)}$$

Assim,  $g$  é uma métrica Riemanniana em  $T_p(M)$  e que (por construção) faz de  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$  uma isometria. Como  $M$  é completa  $\exp_p$  é também sobrejetiva [dC1],[dC2]. Além disso, como  $M$  é completa e  $\exp_p$  é uma isometria, segue que  $(T_p(M), g)$  é completo [dC2] e logo pelo Lema 11 segue que  $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$  é um difeomorfismo global.  $\square$

## Exercícios do Capítulo V

1. Prove a Proposição 2.
2. Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  superfície regular de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$  e dimensão  $m$ . Mostre que o fibrado tangente  $TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, p \in M, v \in T_p(M)\}$  possui estrutura natural de superfície regular de dimensão  $2m$  e classe  $C^{k-1}$ .
3. Prove a Proposição 7.
4. Prove se  $M \subset \mathbb{R}^3$  é superfície regular e  $\alpha$  é uma curva diferenciável em  $M$ , então um campo de vetores  $W$  tangente a  $M$  ao longo de  $\alpha$  é paralelo se, e somente se, para todo campo de vetores  $V$  ao longo de  $\alpha$  temos que

$$\frac{d}{dt} \langle W, V \rangle = \langle W, \frac{DV}{dt} \rangle$$

5. Em  $\mathbb{R}^n$  consideramos a métrica dada pelo produto interno escalar. Determine a derivada covariante em  $\mathbb{R}^n$ , os campos de vetores paralelos ao longo de uma curva diferenciável  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^n$  e as geodésicas. Prove finalmente que dado ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  a aplicação exponencial  $\exp_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $\exp_p(v) = p + v$ .
6. Prove a Observação 3.
7. Prove a Proposição 13.
8. Complete a prova da Proposição 14.
9. Prove a Proposição 16.
10. Faça os detalhes do Exemplo 3.
11. Prove o Lema 10.
12. Seja  $S$  a superfície gerada pela rotação em torno do eixo  $Oz$ , de uma curva plana  $C$  contida no plano  $yz$  em  $\mathbb{R}^3$ , que é o gráfico de uma função diferenciável  $g(z) > 0$ . Prove que  $S$  é uma superfície regular e encontre uma parametrização para  $S$ . Prove que os *meridianos* ou seja, as curvas obtidas intersectando-se  $S$  com planos contendo o eixo  $Oz$ , são geodésicas de  $S$ . Prove também que um *paralelo* isto é, uma curva obtida pela rotação de um ponto de  $C$ , é uma geodésica de  $S$  se e somente se corresponde a um ponto onde a tangente a  $C$  é vertical (paralela ao eixo  $Oz$ ).
13. Estenda os resultados do exercício anterior para o caso em que  $C$  está contida no semi-plano  $x = 0, z \geq 0$  e  $g(0) = 0$  e  $C$  tem tangente paralela a  $Oy$  na origem do plano  $yz$ . Estude as geodésicas do parabolóide de revolução.
14. Prove que se  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  é compacta então  $M$  é completa.

## Capítulo VI - Aplicações à Física

### 1. Circuitos Elétricos

A teoria das EDOs encontra aplicações diversas na eletrodinâmica, eletrônica e teoria de circuitos elétricos em geral. Vejamos alguns dos fundamentos desta teoria e suas aplicações.

Os elementos principais que consideraremos em um circuito elétricos são do tipo *passivo*, não abordaremos os semi-condutores (tais como diodos, transistores ou circuitos integrados) e tampouco válvulas (tripólos). Assim, consideraremos *resistores*, *indutores*, *capacitores* que são *dipólos*, isto é, aparelhos que possuem dois contatos (extremidades) elétricos que são montados ligados aos pólos de outras peças. Por um tal dipólo  $\langle a, b \rangle$  ligado a um circuito em funcionamento passa uma corrente elétrica, de modo que seu funcionamento é caracterizado por duas grandezas, em um determinado instante  $t$ : A *corrente elétrica*  $I_{ab}$  e a *queda de tensão*  $V_{ab}$ , que é a diferença de potencial  $V_a(t) - V_b(t)$ , entre os pólos do dipólo<sup>5</sup>.

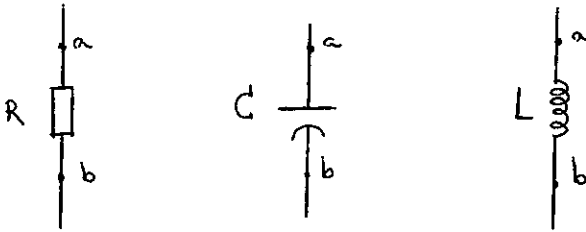


figura 45

Tendo em consideração a dependência destas grandezas com relação à ordem dos pólos, obtemos

$$I_{ab}(t) + I_{ba}(t) = 0, \quad U_{ab}(t) + U_{ba}(t) = 0$$

A dependência entre  $I_{ab}(t)$  e  $V_{ab}(t)$  é descrita em cada caso, por uma lei física que depende do tipo do considerado.

$$V_{ab}(t) = R_{ab} \cdot I_{ab}(t) \text{ Lei de Ohm para os resistores}$$

A constante  $R_{ab} = R_{ba}$  é a *resistência* do resistor em questão.

$$V_{ab}(t) = L_{ab} \frac{dI_{ab}}{dt}(t)$$

<sup>5</sup>Suporemos as peças ideais, de modo que não há perdas e quedas de tensão devidas à qualidade dos materiais. Na verdade, um dispositivo a base de silício (o semi-condutor mais usado atualmente), possui (apenas devido ao material) uma queda de tensão da ordem de 0,7 Volts. Os dispositivos a base de germânio possuem queda de tensão á base de 0,3 Volts, porém são mais lentos e atualmente não são mais usados na indústria.

é a chamada *Lei de Indutância* para dipolos do tipo indutor, sendo que a constante  $L_{ab} = L_{ba}$  é a chamada *indutância* do dipólo.

Para o caso do dipólo ser um capacitor temos a seguinte relação

$$I_{ab}(t) = C_{ab} \frac{dV_{ab}}{dt}(t)$$

onde a constante  $C_{ab} = C_{ba}$  é a *capacitância*.

Integrando esta última relação obtemos

$$V_{ab}(t) = V_{ab}(t_0) + \frac{1}{C_{ab}} \int_{t_0}^t I_{ab}(t) dt$$

ou ainda

$$Q_{ab}(t) = Q_{ab}(t_0) + \int_{t_0}^t I_{ab}(t) dt$$

onde  $Q_{ab}(t) := C_{ab} V_{ab}(t)$  é a *carga* do capacitor no instante  $t$ .

Podemos também ter *aindução mútua* entre dois dipolos indutores  $\langle a_1, b_1 \rangle$  e  $\langle a_2, b_2 \rangle$  de indutância  $L_{a_j, b_j}$  que denotaremos por  $L_j$ ,  $j = 1, 2$ .

A indução mútua é caracterizada pelo chamado *coeficiente de indução mútua* que denotaremos  $\ell = \ell_{a_1 b_1, a_2 b_2}$ . As leis que regem a corrente e a queda de tensão nos dipólos são então:

$$V_1(t) = L_1 \frac{dI_1}{dt}(t) + \ell \frac{dI_2}{dt}(t),$$

$$V_2(t) = L_2 \frac{dI_2}{dt}(t) + \ell \frac{dI_1}{dt}(t)$$

onde  $V_j = V_{a_j b_j}$ ,  $I_j = I_{a_j b_j}$ ,  $j = 1, 2$ .

Também observamos que o coeficiente de indução mútua satizatz

$$\ell_{a_1 b_1, a_2 b_2} = \ell_{a_2 b_2, a_1 b_1} = -\ell_{b_1 a_1, a_2 b_2}$$

Também se sabe que vale a seguinte desigualdade

$$\ell_{a_1 b_1, a_2 b_2}^2 \leq L_1 L_2$$

O último tipo de dipólo a considerarmos é a *fonte de tensão*, que é regido pela seguinte lei:

$$V_{ab}(t) = V(t)$$

onde  $V(t)$  é uma função dada do tempo, caracterizando a fonte. Também podemos pensar em fontes de corrente que são regidas por uma lei

$$I_{ab}(t) = I(t)$$

sendo  $I(t)$  uma função conhecida. Mais comumente consideraremos apenas fontes de tensão e corrente ideais, com capacidade de fornecer tensão e corrente constantes (*corrente contínua*), ou periódicas da forma  $r \cos(\omega t + \phi)$  (fontes de *corrente alternada*).

## 2. As Leis de Kirchhoff

**Definição 1.** Um *circuito elétrico* é um conjunto finito de elementos (que em geral suporemos dipólos como acima) cujos pólos são ligados aos *nós* do circuito de modo que em cada nó temos reunidos dois ou mais pólos de elementos do circuito.

**Primeira Lei de Kirchhoff.** A soma (algébrica) das correntes fluindo para qualquer nó fixado do circuito é zero.

Suponhamos agora o seguinte: Em cada nó  $a$  do circuito existe um potencia  $V_a(t)$  tal que se  $\langle a, b \rangle$  é um dipólo então a queda de tensão neste elemento é dada por  $V_{ab}(t) = V_a(t) - V_b(t)$ .

Chamaremos de uma *malha fechada* ou *laço fechado* no circuito a qualquer sequência finita de nós,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de modo que  $a_k = a_1$ .

**Segunda Lei de Kirchhoff.** A soma (algébrica) das quedas de tensão  $V_{a_j}(t)$  em uma malha fechada  $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = a_1$  é igual a zero.

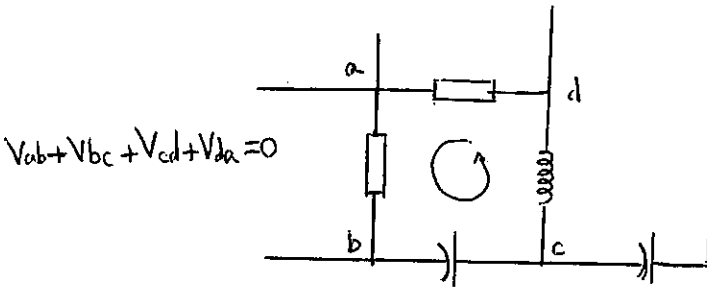


figura 46

### 3. circuito R-L

Consideremos o seguinte circuito consistindo de 3 nós e 3 dipolos  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle b, c \rangle$ ,  $\langle c, a \rangle$  onde  $\langle a, b \rangle$  é um resistor de resistência  $R$ ,  $\langle b, c \rangle$  é um indutor de indutância  $L$  e  $\langle c, a \rangle$  uma fonte de tensão constante  $V$ .

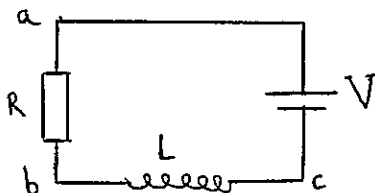


figura 47

Pela segunda lei de Kirchoff temos que  $V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0$  e logo pelo que vimos no início

$$L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) - V = 0$$

onde  $I(t)$  denota a corrente em qualquer nó (por exemplo no ponto  $a$ ) do circuito, com a devida orientação.

Se supomos que o circuito foi ligado em  $t = 0$  temos que  $I(0) = 0$  de modo que do Cálculo sabemos que as soluções são da forma:

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Em particular o circuito R-L alimentado com tensão contínua tende a se estabilizar comportando-se como se não fosse indutivo.

Substituímos agora a fonte de tensão por uma fonte de tensão alternada  $V(t) = V \sin \omega t$ . Neste caso obtemos a EDO

$$L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) = V \sin \omega t, I(0) = 0$$

cujas soluções são da forma

$$I(t) = \frac{VL\omega}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

Vemos então que neste caso não há estabilização do sistema como num circuito puramente resistivo.

#### 4. O circuito R-L-C

O *oscilador elétrico elementar* é formado por um circuito (também chamado de R-L-C) de 4 nós  $a, b, c, d$  e formado de 4 dipólos  $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle$  onde  $\langle a, b \rangle$  é um indutor de indutância  $L$ ,  $\langle b, c \rangle$  um resistor de resistência  $R$ ,  $\langle c, d \rangle$  um capacitor de capacitância  $C$  e  $\langle d, a \rangle$  uma fonte de tensão variável descrita por  $V_{da}(t) = V(t)$ .

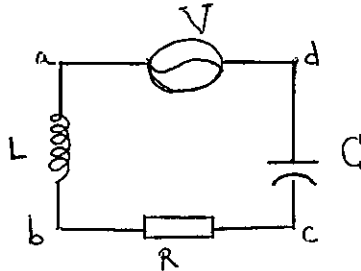


figura 48

Utilizaremos o *Método da decomposição em malhas independentes* que consiste no seguinte: arbitrar funções desconhecidas para descrever a corrente em cada dipólo e exprimir as tensões por meio das correntes, utilizando as leis que regem cada tipo de dipólo. É claro, devemos utilizar a primeira Lei de Kirchhoff a fim de exprimir todas as correntes em termos de um número minimal de correntes independentes. Tais correntes restantes são chamadas *correntes de malha*. Uma vez feito isto utilizamos a segunda Lei de Kirchhoff.

Seja  $Q(t)$  a carga do capacitor no instante  $t$ , então a corrente em qualquer nó pode ser descrita por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$$

A queda de tensão no capacitor é  $\frac{1}{C}Q$  de modo que utilizando a segunda Lei de Kirchhoff obtemos

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t)$$

Esta equação define então o acúmulo de carga no capacitor em função do tempo. Em particular, podemos determinar  $Q$  a partir do conhecimento de  $V(t)$  e dos valores iniciais de  $Q$  e  $I = Q'$ . Consideremos o caso em a fonte é de tensão alternada da forma  $V(t) = V \text{sen} \omega t$ , então obtemos a EDO

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V \text{sen} \omega t$$

Sabemos do Cálculo que dada solução geral  $Q_g$  da equação homogênea associada

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$



temos que a solução geral da equação não-homogênea é dada por

$$Q = Q_g + Q_p$$

onde  $Q_p$  é qualquer solução particular da equação não homogênea. Deste modo, procuramos por soluções particulares da forma

$$Q_p = \alpha \operatorname{sen} \omega t + \beta \cos \omega t$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então impondo que tenhamos uma solução obtemos

$$\alpha = -\frac{V[\omega L - \frac{1}{\omega C}]}{\omega\{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2\}}$$

e

$$\beta = -\frac{VR}{\omega\{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2\}}$$

Se definimos o *ângulo de fase*  $\Phi$  por

$$\operatorname{sen} \Phi = \frac{[\omega L - \frac{1}{\omega C}]}{\sqrt{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}}$$

e

$$\cos \Phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}}$$

Então podemos escrever a expressão clássica

$$Q_p = -\frac{V}{\omega\sqrt{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}} \cos(\omega t - \Phi)$$

Por sua vez, a solução geral da equação homogênea pode ser escrita em termos das raízes  $\lambda_1, \lambda_2$  da equação auxiliar

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

por meio de variação de parâmetros. Aqui o formato das raízes  $\lambda_j$  depende do sinal do discriminante

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$$

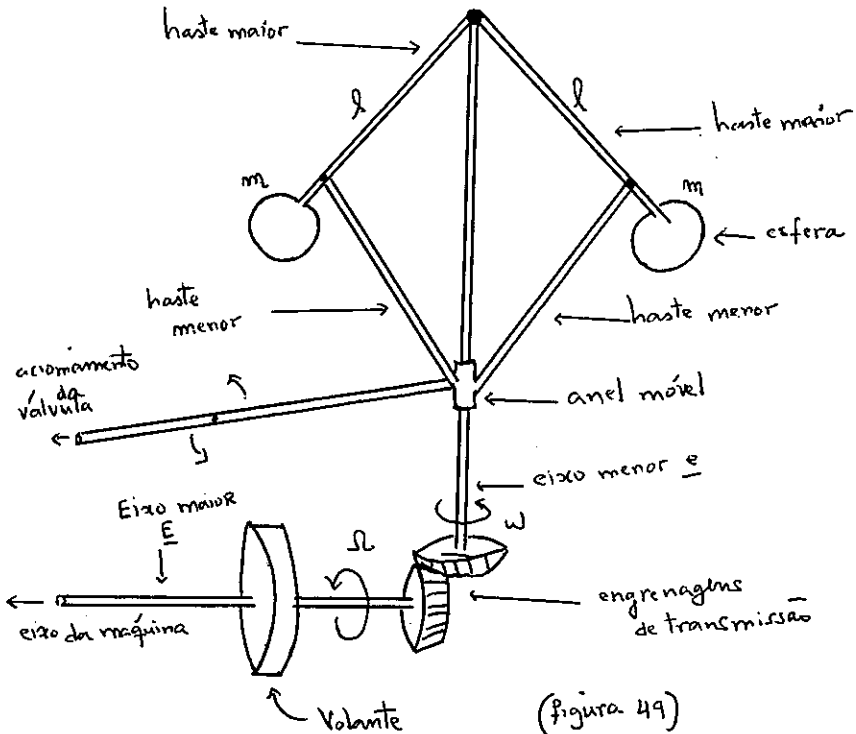
Derivando a expressão de  $Q_p$  obtemos  $I_p = \frac{E}{\sqrt{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \Phi)$  que é chamada a *corrente em regime permanente* do circuito R-L-C.

## 5. O regulador de Watt-Vichnégradski

O problema em questão consiste em regular automaticamente (a pressão nas caldeiras de) uma máquina a vapor. Deste modo, buscamos regular a abertura de uma válvula aliviadora de pressão de forma a obter o equilíbrio do conjunto máquina-regulador: a grosso modo não se deve permitir que a pressão suba a níveis perigosos e tampouco permitir que esta baixe demasiado.

Note que o problema é realmente intrigante pois a carga na máquina pode variar consideravelmente com o tempo: por exemplo, um trem que passa de uma trilha plana a uma subida acentuada e depois volta a descer.

Apresentamos o engenhoso regulador de Watt. Temos um eixo principal  $E$  ligado ao volante  $V$  do motor a vapor que se conecta por uma redução a um eixo menor  $e$  que gira tendo em sua extremidade superior duas hastes metálicas iguais com esferas iguais de contrapeso nas pontas. As hastes estão ligadas ao eixo  $e$  de forma que quando  $e$  gira, as hastes abrem seu ângulo  $\varphi$  com o eixo vertical  $e$ , dependendo da velocidade de rotação angular de  $e$ . As esferas possuem massa  $m$ . Às hastes conectamos ainda, em pontos a uma mesma distância da base móvel comum, duas outras hastes menores que também possuem ângulo central (com o eixo vertical  $e$ ) variável e que ao se abrirem (devido ao movimento circular de  $e$ ) fazem subir um pequeno anel ligado a uma alavanca que ao subir faz abrir a válvula aliviadora da caldeira a vapor.



Vejam a descrição matemática do movimento no regulador. Analisemos primeiramente as forças sobre as esferas. Suporemos que o comprimento das hastes maiores é 1 unidade. Chamaremos de  $\omega$  a velocidade angular do eixo  $e$ .

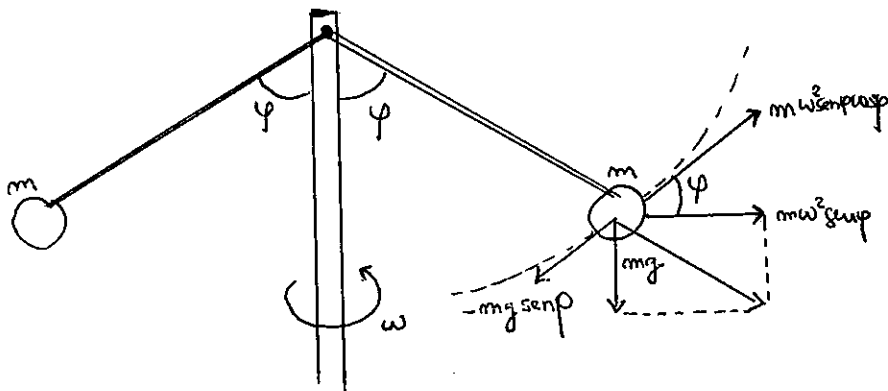


figura 50

Temos que a força centrífuga sobre as esferas é  $m\omega^2 \text{sen } \varphi$ , a força peso é  $mg$ . A soma das forças tangentes ao arco de círculo descrito pela massa  $m$  ao se abrir o ângulo central  $\varphi$  deve ser nula na situação de equilíbrio de modo que

$$(1) \quad m\omega^2 \text{sen } \varphi \cos \varphi - mg \text{sen } \varphi = 0$$

A equação acima (na qual o ângulo  $\varphi$  é pensado como função monótona crescente da velocidade angular  $\omega$  do eixo  $e$ ) determina o ângulo  $\varphi$ .

Para achar a equação diferencial que descreve  $\varphi$  fora da posição de equilíbrio faremos a suposição de que a força de abertura das hastes maiores é proporcional à velocidade de abertura  $\varphi'$  de modo que pela Segunda Lei de Newton obtemos a EDO

$$(2) \quad m\varphi'' = m\omega^2 \text{sen } \varphi \cos \varphi - mg \text{sen } \varphi - b\varphi'$$

onde  $b > 0$  é a constante de proporcionalidade.

Voltemos nossa atenção agora para a máquina a vapor. Denotemos por  $\Omega$  a velocidade angular do eixo principal que gira o volante  $V$ , por  $M = M(\alpha)$  o momento angular de força da máquina ( $\alpha$  = ângulo de abertura da válvula aliviadora), por  $N$  o momento angular de força atuando sobre o volante devido à carga e por  $I$  o momento de inércia do volante. Então temos que

$$(3) \quad I\Omega' = M - N$$

A uniformidade do movimento assegurada pelo (bom) funcionamento do regulador nos dá então razão constante de transmissão  $\frac{\omega}{\Omega} = C > 0$ .

Vejam os finalmente a válvula reguladora.

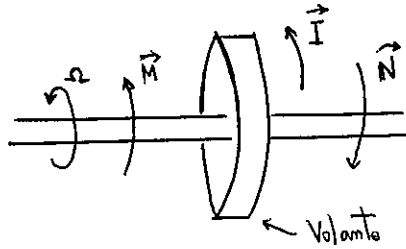


figura 51

Se denotamos por  $\varphi_m$  o valor médio do ângulo central  $\varphi$  perto do qual  $\varphi$  deve se manter, e por  $F_m$  a força correspondente a este valor médio, temos que

$$(4) \quad M = F_m + \mu(\cos \varphi - \cos \varphi_m)$$

onde  $\mu > 0$  é uma constante de proporcionalidade.

Assim, obtemos o seguinte sistema de EDOs que descreve o regulador acima:

$$m\varphi'' = mC^2\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\varphi'$$

$$I\Omega' = \mu \cos \varphi - F$$

onde  $F := N - F_m + \mu \cos \varphi_m$  depende da carga.

Podemos reduzir este sistema a um de primeira ordem:

$$(W - V) \varphi' = \psi, \quad \psi' = C^2\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m}\psi, \quad \Omega' = \frac{\mu}{I} \cos \varphi - \frac{F}{I}$$

Como em funcionamento normal  $\Omega$  é constante fixada a carga  $N$ , temos que  $\varphi$  é constante e logo buscamos solução do sistema W-V sujeita às seguintes condições iniciais

$$\varphi = \varphi_o, \quad \psi = 0, \quad \Omega = \Omega_o$$

Deste modo, o problema agora se resume a estudar a estabilidade da posição de equilíbrio abaixo descrita:

$$\psi_o = 0, \quad \cos \varphi_o = \frac{F}{\mu}, \quad C^2\Omega_o^2 = \frac{g}{\cos \varphi_o}$$

Utilizaremos a técnica de linearização descrita em IV-1. O sistema linear associado a (W-V) neste ponto singular é:

$$\varphi' = \psi$$

$$(W - V^*) \quad \psi' = C^2\Omega_o^2 \cos(2\varphi_o) \cdot \varphi' + C^2\Omega_o^2 \sin(2\varphi_o) \cdot \Omega' - g \cos(\varphi_o) \varphi' - \frac{b}{m} \psi',$$

$$\Omega' = -\frac{\mu}{I} \operatorname{sen}(\varphi_o) \cdot \varphi'$$

Como  $C^2\Omega_o^2 = \frac{g}{\cos \varphi_o}$ , obtemos para a segunda equação

$$\psi' = -\frac{g \operatorname{sen}^2(\varphi_o)}{\cos(\varphi_o)} \varphi' - \frac{b}{m} \psi' + \frac{2g \operatorname{sen}(\varphi_o)}{\Omega_o} \Omega'$$

O polinômio característico deste sistema linear é então

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{g \operatorname{sen}^2(\varphi_o)}{\cos \varphi_o} & -\frac{b}{m} - \lambda & \frac{2g \operatorname{sen}(\varphi_o)}{\Omega_o} \\ -\frac{\mu}{I} \operatorname{sen}(\varphi_o) & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Deste modo obtemos

$$p(\lambda) = -[\lambda^3 + \frac{b}{m} \lambda^2 + g \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi_o)}{\cos \varphi_o} \lambda + \frac{2\mu g \operatorname{sen}^2(\varphi_o)}{I \Omega_o}]$$

Como  $-p(\lambda)$  tem coeficientes positivos segue que o sistema tem autovalores com parte real negativa desde que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\frac{b}{m} \frac{g \operatorname{sen}^2(\varphi_o)}{\cos \varphi_o} > 2 \frac{\mu g}{I \Omega_o} \operatorname{sen}^2 \varphi_o$$

ou seja,

$$\frac{bI}{m} > \frac{2\mu}{\Omega_o} \cos \varphi_o = 2 \frac{F}{\Omega_o}$$

Esta condição é então *condição suficiente de Vichnégradski* para a estabilidade do sistema máquina-regulador.

A grandeza  $\frac{d\Omega_o}{dN}$  mede a taxa de variação de  $\Omega_o$  com relação á carga  $N$ . O valor absoluto  $\eta = \left| \frac{d\Omega_o}{dN} \right|$  é a chamada *não-uniformidade de marcha* da máquina a vapor em questão. Temos que  $F\Omega_o^2 = cte$  como consequência de

$$\psi_o = 0, \cos \varphi_o = \frac{F}{\mu}, C^2\Omega_o^2 = \frac{g}{\cos \varphi_o}$$

como já vimos. Deste modo, derivando obtemos

$$\frac{d\Omega_o}{dF} = -\frac{\Omega_o}{2F}$$

e portanto a não-uniformidade de marcha é dada por

$$\eta = \frac{\Omega_o}{2F}$$

A condição de estabilidade de Vichnégradski pode então ser reescrita como

$$\frac{bI}{m} \eta > 1$$

A partir destas observações podemos resumir as conclusões de Vichnégradski da seguinte forma:

*Afetam de forma desfavorável a estabilidade do sistema regulador-máquina: (i) o aumento da massa  $m$  das esferas; (ii) a diminuição do momento de inércia do volante  $I$ ; (iii) a diminuição da não-uniformidade de marcha; (iv) a diminuição do coeficiente  $b$  associado à válvula.*

## BIBLIOGRAFIA

- [dC1] Manfredo P. do Carmo: "Differential Geometry of Curves and Surfaces"; Prentice-Hall, N. Jersey, 1976,
- [dC2] Manfredo P. do Carmo: "Geometria Riemanniana"; Projeto Euclides, IMPA, 1979
- [E11] E.L. Lima: "Grupo Fundamental e espaços de recobrimento"; Projeto Euclides, 1993.
- [E12] E.L. Lima: "Variedades Diferenciáveis"; Monografias de Matemática # 15, IMPA, 1973.
- [E13] E.L. Lima: "Introdução à Topologia Diferencial"; Notas de Matemática nº23, IMPA 1961.
- [E14] E.L.Lima: "Curso de análise vol. 2"; Projeto Euclides (1981).
- [E15] E.L. Lima: "Espaços Métricos"; Projeto Euclides (1977).
- [E16] E.L.Lima: "Curso de análise vol. 1"; Projeto Euclides (1995).
- [Hi-Sm] Hirsh-Smale: "Differential Equations, dynamical systems and linear algebra"; Academic Press, 1974.
- [Ma-Mo] J.F. Mattei e R. Moussu: "Holonomie et intégrales premières"; Ann. Ec. Norm. Sup. 13 (1980), pg. 469-523.
- [Mi] J. Milnor: Morse Theory; "Annals of Mathematics Studies", Princeton University Press, 1963.
- [P-M] J. Palis e W. de Melo: "Introdução aos sistemas dinâmicos"; Projeto Euclides, IMPA, 1978.
- [Pe] M. Peixoto: "Teoria Geométrica das Equações Diferenciais"; Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, 1969.
- [Pt] L. Pontriaguine: "Équations Différentielles Ordinaires", Editions MIR, Moscow, 1969.
- [So] J. Sotomayor: "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias"; Projeto Euclides, Rio de Janeiro.
- [Sp] M. Spivak: "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry"; Vols. 1,2,3,4 second edition, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

Impresso na Gráfica do

impa



pele Sistema Xerox / 5390

